Elemi függvénytan

előadja:

Dr. Vályi Gyula

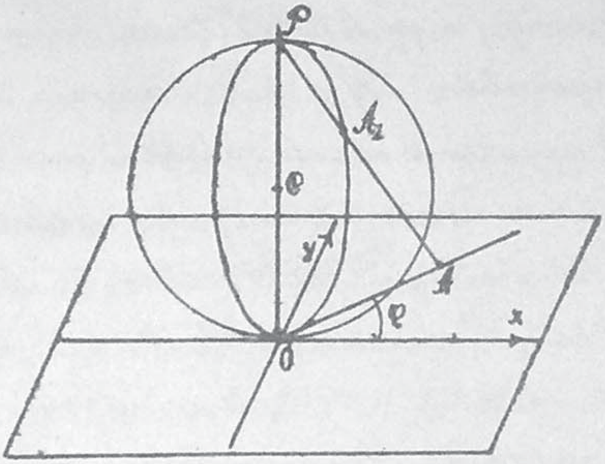
Kolozsvárt 1900.

Silay L. KÖNYOMDA KOLOZSVÁR KIRÁLY u. 22 sz.

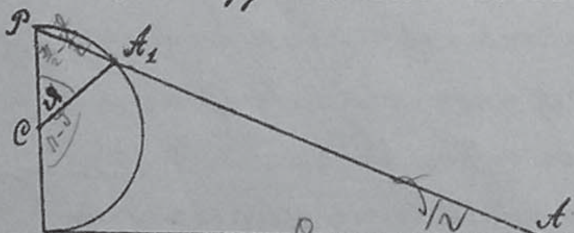
A számgömb

A következő tárgyalásokban a számfogalmat legáltalánosabb alakjában, tehát a complex számkörben fogjuk használni.

A számot rendesen a számsik pontjaival szokás ábrázolni, kölcsönösen egyértelmü vonatkozást létesitvén az összes complex számok és a számsik összes pontjai között. Van azonban még egy más ábrázolási módszer, melynél az összes complex számok egy gömbnek, az úgynevezett számgömbnek pontjaival vannak megfelelésbe hozva. Ez a módszer különösen függvénytani vizsgálatoknál czélszerü. Legyen σ a számsik, O a sikbeli coordinatarendszer kezdőpontja, Ox a reális tengely positiv, Oy a képzetes tengely positiv ága. Most vegyünk fel egy egységnyi átmérőjü gömböt, mely a σ számsikot O-ban érinti, még pedig azon az oldalon, melyről nézve a positiv reális tengely az óramutatóval ellenkező irány-



ban hozható 90° foknyi forgással a positiv képzetes tengelybe. Ez az úgynevezett számgömb, melynek az O-val átellenes pontja P a számgömb polusa, C a centruma. Legyen most az $a+bi=\varrho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ compl. számnak megfelelő pont a számsikon A, akkor a PA egyenes a gömböt egy A_1 pontban metszi; a számgömbnek ezen A_1 pontja ábrázolja, mint az A-nak megfelelő pont az $a+bi=\varrho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ compl. számot. Nyilvanvaló, hogy így a számgömb minden pontjához tartozik egy compl. szám és forditva minden compl. számhoz tartozik a számgömbnek egy, és csakis egy pontja. Az A_1 pontnak helyzetét a gömbön két szöggel határozzák meg. A POx-en átfektetett úgynevezett első meridián sik, és a PA_1A-n átfektetett úgynevezett második meridiánsik egy-egy főkörben metszik a számgömböt, és nyilvánvaló, hogy a két meridián sik hajlásszöge ~~nem~~ egyéb mint a $\varrho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ complex szám amplitudoja φ, s a PAO sik meghatározására elég, ha feltesszük, hogy $0\leq\varphi<2\pi$. Az A_1 meghatározására szolgáló második szög a $PCA_1=\vartheta$ szög, mely $0\leq\vartheta\leq\pi$ intervallumban változván, teljesen elégséges a a gömb valamennyi pontjainak meghatározására, a fennti intervallumban változó φ szöggel együtt. A gömbnek minden pontjához tartozik tehát egy φ és egy ϑ szög, s ezek tökéletesen meghatározzák az illető pontot a számgömbön. A φ szög viszonya a complex számhoz már ismeretes; a ϑ egyszerü összefüggésben van a ϱ-val. Ha ugyanis tekintetbe vesszük a második meridiansikot, a

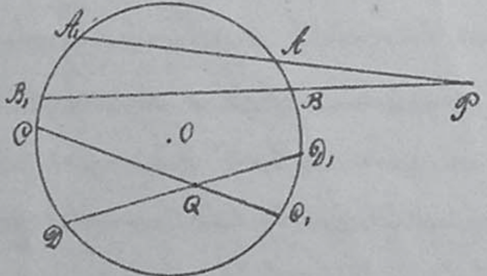


rajta fekvő PA_1O félkörrel és az A ponttal, látható, hogy $OA=\varrho$, $PCA_1\sphericalangle=\vartheta$, tehát $A_1CO\sphericalangle=\pi-\vartheta$, és az utóbbival ugyanazon az A_1O iven fekvő kerületi

szög $A_1PO\sphericalangle = \frac{\pi}{2} - \vartheta$ és így az APO derékszögű háromszögben $OAP = \frac{\vartheta}{2}$ lévén: $\operatorname{cotg}\frac{\vartheta}{2} = \frac{AO}{PO} = \frac{\varrho}{1} = \varrho$. Tehát a számgömbnek φ és ϑ szögekkel bíró pontjához tartozó compl. szám analytikai kifejezése: $\operatorname{cotg}\frac{\vartheta}{2}(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.
Ha a $\varrho = \operatorname{cotg}\frac{\vartheta}{2}$-ben $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, akkor $\varrho = 1$; tehát a $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ szöggel bíró pontok, melyek a számgb. aequatorán fekszenek, oly compl. számokat képviselnek, melyeknek absolut értéke 1. Ha $\vartheta > \frac{\pi}{2}$, akkor $\varrho < 1$, tehát az alsó félgömbön fekvő pontok absolut értéke kisebb mint 1; és ha $\vartheta < \frac{\pi}{2}$, $\varrho > 1$, vagyis a felső félgömbön fekvő pontok absolut értéke nagyobb mint 1. Ha $\vartheta = 0$, $\varrho = \infty$, s ha $\vartheta = \pi$, $\varrho = 0$. Tehát a ∞ absolut értékkel bíró számot ábrázolja a P polus, és ennek az ábrázolási módnak ép az az előnye, hogy a végtelen nagy complex számnak (melynek absolut értéke $\varrho = \infty$) van határozott pontja, míg a számsíkon való ábrázolásnál ez nem lehetséges. Ebből mindjárt következik eme ábrázolási módszernek egy másik nagy előnye: a limesek ugyanis a számgömbbel való ábrázolásnál kivétel nélkül egyforma képet nyernek.
Ha ugyanis $\lim a_n = A$ véges, akkor a számsorozatban bizonyos tagon túl bármely tagnak megfelelő pont a számsíkon A-ból, mint centrumból igen kis sugárral leírt körön belül fekszik; tehát véges limes esetén a számsorozat pontjai a síknak egy véges pontja körül összezsúfolódnak. Ellenben ha $\lim a_n = \infty$, az bármily nagy valós N megadása után tehető $|a_n| > N$, akkor a számsorozat tagjait ábrázoló pontok a számsíkban szétszóródnak, a legnagyobb körön is kivül esnek, bizonyos helytől kezdve. Nem így van ez a számgömbbel való ábrázolásnál. Mert ha $|\operatorname{cotg}\frac{\vartheta}{2}| < \varepsilon$, azaz $\lim \operatorname{cotg}\frac{\vartheta}{2} = 0$ akkor a számsorozat tagjai 0-ban, ha $\lim \operatorname{cotg}\frac{\vartheta}{2} = A$ véges, akkor a gömbfelület valamely más pontja, és végül ha $\lim \operatorname{cotg}\frac{\vartheta}{2} = \infty$,

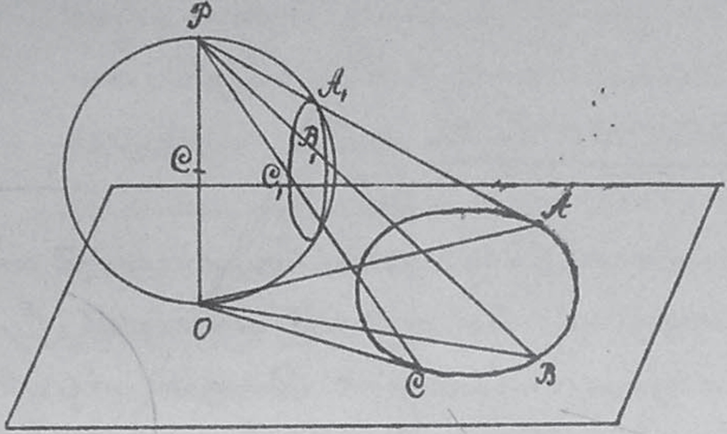
vagyis lim $\vartheta = 0$, akkor a számsorozat pontjai mind a P polus körül zsúfolodnak össze. Szóval ennél az ábrázolási módszernél a limest mindig egy határozott pont képviseli, mely körül a számsorozat tagjai összezsúfolodnak. Ezt az ábrázolási módszert, midőn a sik összes pontjait a gömb polusából a gömbfelületre projiciáljuk, stereo-grafikus projectionak nevezzük. Lássuk ennek néhány nevezetes tulajdonságát.

1. A sik egyeneseinek és köreinek a gömbön csak körök felelnek meg. Egyenesnél ez mindjárt belátható, mert az egyenesen és a P poluson át fektetett sik egy a P poluson átmenő körben metszi a gömböt. Hogy a köröknek is körök felelnek meg, annak igazolása végett hivatkozunk arra az ismeretes elemi geometriai tételre, mely szerint, ha egy P pontból a kör sikjában, a körhöz 2 szelőt húzunk, akkor a metszésből keletkezett távolságok között következő relatio áll fenn:



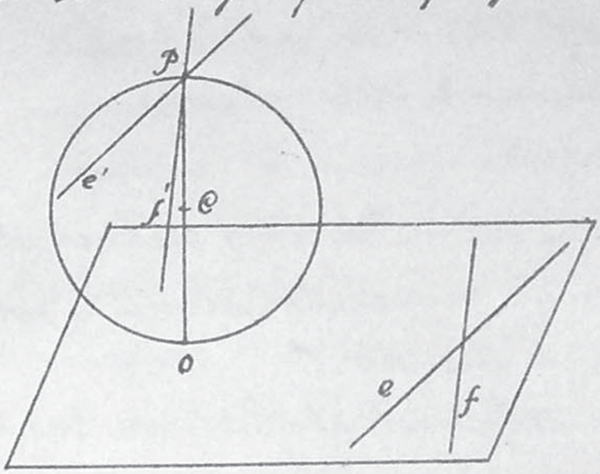
$$PA \cdot PA_1 = PB \cdot PB_1 = \text{a kör potentiája}$$

a P pontra vonatkozólag, állandó, és pedig positiv, ha P pont a körön kivül van, mivel akkor a két vector egyenlő irányú, és negativ, ha a P pont, (Q) a körön belül van, mivel akkor a két vector ellenkező irányú. Ugyanez a tétel áll a gömbre is, vagyis ha egy tetszésszerinti pontból két szelőt húzunk a gömbhöz, mindkét szelőnél a lemetszett hosszak szorzata ugyanaz, mert hisz a két szelő sikja egy körben metszi a gömböt, melyre áll a tétel. Ezt a szorzatot nevezzük a gömb potentiájának, mely a gömbfelületen fekvő pontra nézve nulla. De ezt a két tételt meg is lehet forditani: ha a sikban négy pontot úgy veszünk fel, hogy ezek a szorzatok egyenlők legyenek, akkor ezek egy körön, vagy a térben felvéve, egy gömbön fekszenek. Ezután könnyü kimutatni, hogy a számsík köreinek a gömbön körök felelnek meg. Legyenek ugyanis az ABC körön fekvő pontoknak megfelelő



pontok a gömbön A_1, B_1, C_1, akkor az AOP derékszögü háromszögben $OA_1 \perp AP$ lévén, lesz, $\overline{PO}^2 = PA.PA_1$, de $\overline{PO}^2 = 1$, tehát $PA.PA_1 = PB.PB_1 = PC.PC_1 = 1$ és így az A, B, C valamint a megfelelő A_1, B_1, C_1 pontok ugyanazon a gömbön fekszenek, melynek metszése a számgömbbel egy kör, ezen pedig rajta vannak az A_1, B_1, C_1 pontok és így a síkbeli kör többi pontjainak megfelelő pontok is, vagyis az A, B, C körnek a síkban megfelel a számgömbön az A_1, B_1, C_1 kör

2. A stereografikus projectio egy másik nevezetes tulajdonsága,



hogy a síkon és a gömbön a megfelelő idomok szögei egyenlők. Elég kimutatni, hogy két síkbeli egyenes e és f szöge megegyezik a megfelelő gömbkörök szögével. A két gömbkör szögét adja a P-polusban azokhoz húzott e' és f' érintők szöge. De $e \parallel e'$ és $f \parallel f'$, tehát a stereografikus projectioban a szögek megmaradnak.

Valahányszor két felület (itt a számsík és a számgömb) olyan vonatkozásba jő egymással, hogy a megfelelő idomok szögei egyenlők, azt mondjuk, hogy a két felület conformis. Ezzel a conformitással a későbbiekben többször fogunk találkozni.

A számcsoportok.

Valamely szám meg van határozva, ha ismerjük annak reális és képzetes részét, vagy absolut értékét és szögét. Gyakran a számoknak oly meghatározását adjuk bizonyos kijelentés által, mely meghatározás alá nemcsak egy, hanem több, esetleg végtelen sok szám tartozik. Az ilyen kijelentéssel meghatározott számok számcsoportot alkotnak, melyek a kijelentés természete szerint különfélék lehetnek. Lássunk néhány számcsoportot.

I. kijelentés: a dekadikus rendszer szerint k számjegygyel leírható számok. Ezek:

$$10^{k-1},\ 10^{k-1}+1,\ 10^{k-1}+2,\ \ldots\ldots\ 10^{k}-1.$$

II. " A positiv egész számok reciprokjai:

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \ldots\ldots\ \frac{1}{n}$$

III. " A positiv rationalis valódi törtek; ezeknek alakja $\frac{m}{n}$, a hol $m < n$ és mindkettő felveszi a positiv rationalis számok értékeit.

IV. " Azok a számok, melyeknek absolut értéke $|a| = 1$

V. " " " " " " " $|a| < 1$

VI. " " " " " " " $|a| > 1$

Ezek a példák mutatják a számcsoportok különféleségét és egyszersmind különbségét. Mert látjuk, hogy vannak véges számú tagból álló csoportok, mint I, és vannak végtelen sok tagból álló csoportok, mint II–VI. Utóbbiak ismét többfélék. Lehet, hogy a csoport egyes tagjait ábrázoló pontok discret pontok, azaz mindig tudunk bármely ábrázoló pont körül oly kört irni, melyen belül csak ez a pont van. Vegyük pl. a II. csoportot, s alkossuk meg az n és $(n+1)$-ik tagjának különbségét, vagyis azt a közt, mely ezen két tag között van: $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}$ s bármily kicsiny ez a különbség, mindig tudunk olyan kis ε mennyiséget adni, mely $\varepsilon<\frac{1}{n(n+1)}$, úgyhogy az ε-nal n-ből irt körön belül csak az n-nek megfelelő pont fekszik. A II csoport tagjait ábrázoló pontok, vagy röviden a II. csoport pontjai tehát discret pontok, a II. csoport discret számcsoportot alkot. A többi III–VI. csoportok mind zsúfoltak, vagyis bármily kis sugárral irva valamelyik pont körül egy kört, ezen belül mindig vannak még pontok, melyek még a csoporthoz tartoznak. De azért nem mindegyik ad geometriai folytonosságot, mint pl. a III. csoport, melynél a rationális számok között ott vannak még az irrationalis számpontok is. A többi már geometriai folytonosságot ad. A IV. csoport pontjai kört alkotnak egységnyi sugárral, az V.ik a körön belüli véges, a VI. ik a körön kivüli végtelen terület folytonossága.

Első feladatunk most, a számcsoportok közös tulajdonságait vizsgálni. Véges számú tagból álló csoportoknál egyszerű a feladat, mert a tagokat mind fel tudjuk sorolni és bizonyos elv szerint, pl. a realis számokat nagyság szerint, a complex számokat az absolut érték nagysága szerint táblázatba foglalni.

A végtelen sok számot tartalmazó számcsoportoknál csak valami közös definitiót adhatunk, mely a számcsoport bármely tagját meghatározza, de az összes számokat nem tudjuk felirni. A végtelen sok tagból álló számcsoportoknál két nevezetes tulajdonságot találunk. Igy a II. példát véve szemügyre, látható, hogy ha a 0 pontból bármily kis ε sugárral kört irunk, ezen belül a csoportnak még mindig végtelen sok tagja van; mert ha $n > \frac{1}{\varepsilon}$, tehát $\frac{1}{n} < \varepsilon$, akkor már az $\frac{1}{n}$-en tuli tagok mind a körön belül vannak. Az ilyen, 0-hoz hasonló pontot, melyből bármily kis sugárral kört irva, ezen belül még mindig végtelen sok tagja van a csoportnak, nevezzük *torlódási helynek*. Ki fogjuk mutatni, hogy *minden, végtelen sok tagból álló számcsoportnak van ilyen torlódási helye, legalább egy*. Kimutatjuk először reális, véges, de végtelen sok tagból álló számcsoportokra. Hogy a tagok véges értékűek, azt jelenti, hogy valamennyi bizonyos H és h véges egész számok közé esnek, úgyhogy h-nál valamennyien nagyobbak és H-nál kisebbek. Osszuk fel ezt a számközt egész számú közökre:

$$h,\ h+1,\ h+2,\ \ldots\ H-1,\ H$$

megállapodván abban, hogy ezen tagok mindegyike csak egy közhöz tartozzék, még pedig h az első, $h+1$ a második, stb. közhöz, $H-1$ az utolsó közhöz. A számközök száma $H-h$ véges. Ha tehát a $(k-1)$-ik számköz egy száma x, akkor

$$h+k \leqq x < h+k+1$$

Miután a számközök száma véges, feltevésünk szerint pedig az eredeti számköz végtelen sok számot tartalmaz, kell lennie ezen H-k számköz között legalább egy olyannak, (lehet több is), melyen belül végtelen sok szám van. Legyen ez pl. az a_0, a_0+1 számköz. Most ezt felosztjuk 10 részre,

$$a_0, \; a_0+\frac{1}{10}, \; a_0+\frac{2}{10}, \; \dots \; a_0+\frac{9}{10}, \; a_0+1.$$

Ezen számközök között is kell lennie legalább egynek, melyben a számcsoportnak végtelen sok tagja van, legyen ez $a_0+\frac{a_1}{10}, a_0+\frac{a_1+1}{10}$; ha rövidség kedvéért $a_0+\frac{a_1}{10}=\alpha_1$, akkor ez a köz $\alpha_1, \alpha_1+\frac{1}{10}$. Ezt ismét osszuk fel 10 részre

$$\alpha_1, \; \alpha_1+\frac{1}{10^2}, \; \alpha_1+\frac{2}{10^2}, \; \dots \; \alpha_1+\frac{9}{10^2}, \; \alpha_1+\frac{1}{10}$$

Itt is van egy $\alpha_2, \alpha_2+\frac{1}{10^2}$ köz, melyben végtelen sok szám foglaltatik, és így tovább, n-szer ismételve ezt az eljárást, végre egy olyan határozott $\alpha_n, \alpha_n+\frac{1}{10^n}$ számközhöz jutunk, melyen belül végtelen sok tagja van a számcsoportnak. Ezek a számközök a következők

$$\begin{array}{l} \alpha_1, \; \alpha_1+\frac{1}{10} \\ \alpha_2, \; \alpha_2+\frac{1}{10^2} \\ \dots\dots \\ \alpha_n, \; \alpha_n+\frac{1}{10^n} \\ \dots\dots\dots \end{array}$$

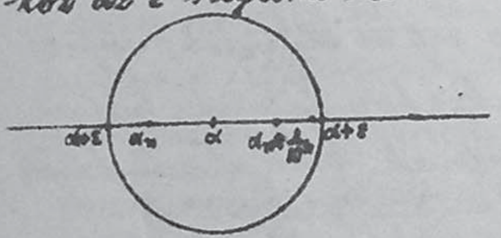
melyeknek kezdőszámjai, ha az eljárást végtelen folytatjuk, egy nem fogyó $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3 \leq \dots \leq \alpha_n \leq \dots$ számsorozat alkotnak, melynek tagjai mind kisebbek mint α_0+1. Ezen sorozatnak tehát van limese, s ki fogjuk mutatni, hogy ez a limes a számcsoport torlódási helye. Ezen számsorozat limese α akkor képez torlódási helyet, ha abból bármily kis szabott ε-nal kört írva; ezen belül még végtelen sok tagja van a számcsoportnak. Válasszuk n-et úgy, hogy $\frac{1}{10^n}<\varepsilon$ legyen, ekkor az n-edik, vagyis $a_n, a_n+\frac{1}{10^n}$ közt véve, ennek határai és α közös ilyen a nagysági viszony

$$a_n \leqq \alpha \leqq a_n+\frac{1}{10^n}$$

és miután még $\frac{1}{10^n}<\varepsilon$, következik, hogy

$$\alpha+\varepsilon > a_n+\frac{1}{10^n}$$

de $\alpha-\varepsilon < a_n$, mert hiszen a felvett köz nagysága $\frac{1}{10^n}$ és ha ennél nagyobb számot, t.i. ε-t vonunk le a benne fekvő α-ból, ez a különbség kisebb lesz, mint a_n. Tehát a felvett $a_n, a_n+\frac{1}{10^n}$ köz az ε sugaru körön belül van, a közön belül pedig végtelen sok tagja van a számcsoportnak, vagyis az α limes tényleg torlódási helye a számcsoportnak.



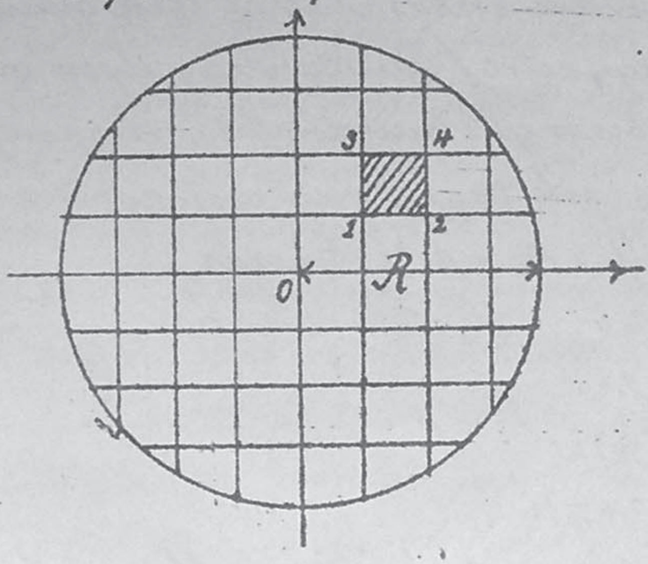
Most vegyük azt az esetet, midőn a számcsoporthoz végtelen sok reális, de nem mind véges szám tartozik. Ebben az esetben a torlódási hely meghatározására a következő közöket vesszük

$$\begin{array}{c} -1,\ +1 \\ -2,\ +2 \\ \cdots\cdots \\ -n,\ +n \\ \cdots\cdots \end{array}$$

s itt most két eset lehetséges. 1.) lehet olyan véges számközhöz jutni, melyen belül végtelen sok szám van; 2.) akármeddig nagyitjuk a közt, mindig csak véges számú tag lesz benne. Utóbbi esetben a számvonal végtelen távoli pontja a torlódási hely, mely a számgömbön való ábrázolásnál a polusba esik.

Tehát a végtelen sok reális tagból álló számcsoportoknak mindig van torlódási helyök. Pl. az $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \frac{1}{n}, \dots$ számcsoportnak torlódási helye 0, a mely tehát a csoporton kivül van. Vannak olyan számcsoportok, melyeknek végtelen sok a torlódási helyök, mint pl. a II-nak, mert itt minden positiv valódi rationális tört torlódási hely.

Most bizonyitsuk be a tételt arra az esetre, midőn a számcsoport complex számokból áll. Itt is két eset lehetséges.



1. a számok végesek, azaz létezik olyan R véges sugarú kör, melyen belül fekszenek a csoport összes tagjai, vagyis bármely a tagjának absolut értéke $|a| < R$. Ekkor is van legalább egy torlódási hely. Ha ugyanis a reális tengely $+1, 2, 3, \dots$ valamint a képzetes tengely $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ pontjain át az illető tengelyekre merőlegeseket huzunk, az R sugarú kör területe csupa egységnyi területü négyzetekre oszlik fel. Ezek mindegyikének azt a pontját tekintjük kiindulási pontnak, a melyekből kiinduló oldalai a positiv tengelyekkel egyirányban párhuzamosak. Mindegyik négyzethez tartozzanak a benne fekvő összes pontok, a kiindulási pont és az abból kiinduló két oldala. Ily módon a kör belsejének mindegyik pontja csak egy négyzethez van számitva. Ezen négyzetek száma a körön belül véges, mert hisz kisebb, mint $(2R)^2$

Miután feltettük, hogy a körön belül végtelen sok szám van, mindenesetre van legalább egy quadratum (esetleg több is), melyen belül a számcsoportnak végtelen sok tagja van. Legyen ezen quadratum kezdőpontja $a_0+b_0 i$, akkor miután az oldala 1, a második (2) pontja $(a_0+1)+b_0 i$

(3) " $a_0+(b_0+1)i$

(4) " $(a_0+1)+(b_0+1)i$

mely utóbbiak azonban már nem tartoznak a quadratumhoz. Bármely, a quadratumben fekvő két pont távola tehát kisebb mint $\sqrt{2}$. Most egy oldalnak 10 részre osztásával az egész quadratumot felosztjuk 100 kisebb negyzetre. Miután egy ilyen quadratum oldala $\frac{1}{10}$, azért azon bizonyos quadratum szögpontjai, melyben szükségképen végtelen sok tagja van a csoportnak, ha kezdőpontja $\left(a_0+\frac{a_1}{10}=\alpha_1\right)+\left(b_0+\frac{b_1}{10}=\beta_1\right)i$, azaz

$\alpha_1+\beta_1 i$

a (2) pont $\alpha_1+\frac{1}{10}+\beta_1 i$

a (3) " $\alpha_1+\left(\beta_1+\frac{1}{10}\right)i$

a (4) " $\alpha_1+\frac{1}{10}+\left(\beta_1+\frac{1}{10}\right)i$

Ebben a quadratumban már két pont távola kisebb mint $\frac{1}{10}\sqrt{2}$. A felosztást ebben a quadratumban ismételve, és így tovább, végre az n-edik felosztás után olyan igen kis quadratumhoz jutunk, melynek szögpontjai $\alpha_n+\beta_n i = \left(a_0+\frac{a_1}{10}+\dots+\frac{a_n}{10^n}\right)+\left(b_0+\frac{b_1}{10}+\dots+\frac{b_n}{10^n}\right)i$

$\left(\alpha_n+\frac{1}{10^n}\right)+\beta_n i$

$\alpha_n+\left(\beta_n+\frac{1}{10^n}\right)i$

$\left(\alpha_n+\frac{1}{10^n}\right)+\left(\beta_n+\frac{1}{10^n}\right)i$

és a melyben két pont távola kisebb, mint $\frac{1}{10^n}\sqrt{2}$, s a melyen belül a csoportnak végtelen sok tagja van. Ezt az eljárást végtelenbe folytatva, kapunk az α és β mennyiségek számára két monoton szabályos számsorozatot

$$\alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \alpha_3 \leqq \ldots \leqq \alpha_n \leqq \ldots \qquad \lim \alpha_n = \alpha$$

és
$$\beta_1 \leqq \beta_2 \leqq \beta_3 \leqq \ldots \leqq \beta_n \leqq \ldots \qquad \lim \beta_n = \beta$$

és most ki fogjuk mutatni, hogy $\alpha+\beta i$ a complex számcsoportnak torlódási helye. Hiszen az uj quadratum a régiben mindig bennfoglaltatik, s ha adva bizonyos ε, mindig úgy választhatjuk n-et, hogy $\varepsilon > \frac{1}{10^n}\sqrt{2}$ legyen, de akkor az n-edik quadratum, melyen belül végtelen sok tagja van a csoportnak, az $(\alpha+\beta i)$-ből ε sugárral irott körön belül van. Véges értékü tagok esetén tehát mindig van legalább egy torlódási helye a complex számcsoportnak.

2., Ha a tagok nem mind végesek, akkor a 0-ból egymásután 1, 2, 3 ... sugárral kört irva, ezek között vagy létezik olyan, melyen belül végtelen sok tagja van a csoportnak, s ekkor az előbbi esettel van dolgunk, vagy ilyen kört sohasem találunk, s akkor a számgömb polusa a torlódási ~~hely~~.

Kimutattuk tehát, hogy végtelen sok tagból álló számcsoportnak mindig van legalább egy torlódási helye.

A számcsoportoknak egy másik fontos tulajdonsága a következő vizsgálatnál adódik. Vegyünk először reális és véges számú ~~értékü~~ tagokból álló számcsoportot. Világos, hogy mindig létezik a csoportban vagy olyan szám, mely valamennyinél legnagyobb, ezt maximumnak nevezzük, és ~~vagy~~ olyan, mely valamennyinél kisebb, ezt minimumnak nevezzük. Maximum tehát a számcsoportnak az a számja, melynél nincs nagyobb, és minimum, melynél nincs kisebb a csoportban. Lássuk, mint van ez a végtelen sok tagból álló csoportoknál. Vegyük pl. az

$$1,\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{3},\ \ldots$$

csoportot; nyilvánvaló, hogy 1 ennek a csoportnak maximuma, de nincs minimuma, mert a legkisebb tagnál is kisebb található. Hanem fontos hely ik a 0, mely nem tartozik a csoporthoz, de mihelyt bármily kis ε-nal nagyobbitjuk, már kapunk a csoportban olyan számot, mely ennél kisebb. Az ilyen számot, a milyen a 0 ebben a példában; mely nem tartozik a számcsoporthoz, de bármily kis ε-nal nagyobbitva azt, már találunk a csoportban nálánál kisebbet, a számcsoport felső határának nevezzük; míg alsó határnak az olyan számot nevezzük, mely nem tartozik a csoporthoz, de bármily kevéssel kisebbitve azt, találunk a csoportban olyan számot, mely ennél nagyobb. És most ki fogjuk mutatni, hogy végtelen sok tagu számcsoportnak mindig van vagy maximuma, vagy felső határa, és van vagy minimuma vagy alsó határa. Tehát ha pl. nincs maximuma, mindenesetre van felső határa.

Mutassuk ki ezt először véges számokkal biró reális számcsoportra, melyben végtelen sok tag ~~van~~. Az ilyen csoport, a mint láttuk, mindig két véges egész szám közé szorítható, h és H közé. Ezt a számközt osszuk fel egységnyi közökre,

$$h,\ h+1,\ h+2,\ \ldots\ H-1,\ H.$$

Ezen egységnyi közökből vegyük azt a legelsőt, mely már tartalmazza a csoport tagjait, de a mely előtt a csoportnak nincs nek tagjai, legyen ez a köz $a_0,\ a_0+1$. Ezt osszuk fel 10 részre.

$$a_0,\ a_0+\frac{1}{10},\ a_0+\frac{2}{10},\ \dots\ a_0+\frac{9}{10},\ a_0+1.$$

Itt is legyen az első, mely már tartalmaz tagokat:

$$a_0+\frac{a_1}{10}=\alpha_1,\quad a_0+\frac{a_1+1}{10}=\alpha_1+\frac{1}{10}$$

vagy röviden $\quad \alpha_1,\ \alpha_1+\frac{1}{10}\quad$; ezt is 10 részre osztva, legyen a kérdéses köz $\quad \alpha_2,\ \alpha_2+\frac{1}{10^2}\quad$ és így tovább folytatva

$$\alpha_3,\ \alpha_3+\frac{1}{10^3}$$

$$\dots\dots$$

n-szer ismételve $\quad \alpha_n,\ \alpha_n+\frac{1}{10^n}\quad$ és így tovább a végtelenbe.

$$\dots\dots$$

Így az α-knak egy monoton növő sorozatát kapjuk, melynek van határozott véges limese

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \dots \qquad \lim \alpha_n=\alpha$$

és most ki fogjuk mutatni, hogy α mindenesetre vagy alsó határa, vagy minimuma a csoportnak, vagyis hogy α-t bármily kis ε-nal kisebbítve, $\alpha-\varepsilon$ már nem tartozik a csoporthoz, míg bármily kevéssel ~~kisebbítve~~ nagyobbítva $(\alpha+\varepsilon)$-nál már kisebb számok is vannak a csoportban. Ugyanis világos, hogy $\alpha_n \leqq \alpha \leqq \alpha_n+\frac{1}{10^n}$, mert egyfelől lehet, hogy α_n-nel megszűnik a sorozat, másfelől, hogy α_n után mind 9-esek következnek, melyeknek limese $\frac{1}{10^n}$, úgyhogy $\alpha=\alpha_n+\frac{1}{10^n}$ is lehet. Ha most n-et úgy választjuk, hogy $\varepsilon>\frac{1}{10^n}$, akkor $\alpha-\varepsilon<\alpha_n+\frac{1}{10^n}-\frac{1}{10^n}=\alpha_n$ azaz $\alpha-\varepsilon<\alpha_n$, bármilyen kis adott mennyiség legyen ε. Miután pedig feltevésünk szerint α_n-nél kisebb számok nem tartoznak a számcsoporthoz, $\alpha-\varepsilon$ sem tartozik oda. Másfelől $\alpha+\varepsilon>\alpha_n+\frac{1}{10^n}$, és miután feltevésünk szerint $(\alpha_n+\frac{1}{10^n})$-nél kisebb számok is vannak a számcsoportban, azért $(\alpha+\varepsilon)$-nál is kisebb számok vannak a csoportban. Ha már most α a csoporthoz tartozik, akkor minimum, ha nem, akkor α a csoportnak alsó határa, egyik szerepet tehát mindenesetre viseli.

Könnyen kimutatható az is, hogy létezik mindig maximum vagy pedig felső határ. Legyen pl. a sorozat, mely a számcsoportot képviseli, fogyó

$$\alpha_1 > \alpha_2 > \ldots > \alpha_n > \ldots$$

akkor a tagok jegyét ellenkezőre változtatva, növő sort kapunk

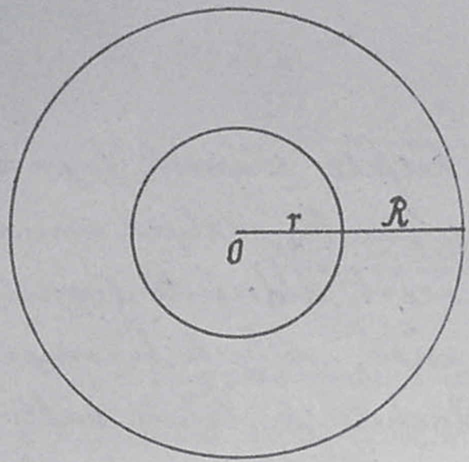
$$-\alpha_1 < -\alpha_2 < \ldots < \alpha_n < \ldots$$

melyről már kimutattuk, hogy van vagy minimuma vagy alsó határa. Legyen ez $-\alpha$, akkor nyilvánvaló, hogy α az eredi számsorozatnak maximuma illetőleg felső határa.

Tehát véges értékü, de végtelen sok tagból álló számcsoportnak mindig van vagy maximuma vagy felső határa és van vagy minimuma vagy alsó határa. Pl. a positiv valódi törtek számcsoportjának nincs se maximuma, se minimuma, hanem van alsó határa, ez 0, és van felső határa, ez 1.

Végtelen nagy értékü tagokat is tartalmazó csoportnál, ha van olyan tag, mely nagyobb mint egy tetszésszerint megadott positiv N mennyiség, akkor a csoport felső határa $+\infty$, (maximum nincs); és ha van olyan tagja a csoportnak, mely kisebb bármily megadott negativ $(-N)$ mennyiségnél, akkor a csoport alsó határa $-\infty$ (minimum nincsen). Igy pl. az összes egész számok oly csoportot alkotnak, melynek felső határa $+\infty$, alsó határa $-\infty$.

Complex számoknál, véve a tagok absolut értékét, realis számcsoporthoz jutunk, melyre érvényes az imént bebizonyitott tétel.



És átvive ezt a complex számcsoportra, mondhatjuk véges absolut értékü tagokból álló compl. számcsoporthoz mindig lehet irni 0 körül egy r sugaru és egy nagyobb R sugaru kört, melyek között fekszenek a csoport összes tagjai. Ha r az absolut értékek minimuma, akkor belső körön is vannak a csoport tagjait ábrázoló pontok; ha r alsó határ, akkor magán a körön nincsenek pontjai a számcsoportnak, de kivülről végtelenül megközelitik azt. Épen igy, ha R az absolut tagok maximuma, a külső körön is vannak a csoportnak pontjai, de azon kivül nincsenek, mig ha R felső határ, a pontok belülről végtelenül megközelitik a kört, de rajta nincsenek a csoportnak pontjai. Ha $r=0$, $R=\infty$, a pontok az egész számsikon szétszoródnak. Ha $r=R$, a csoport összes pontjai rajta vannak ezen az egy körön. Igy pl. a IV. csoport pontjai mind az egységsugaru körön fekszenek.

Megismertük tehát a számcsoportok két fontos tulajdonságát: a torlódási helyét és a határokat, melyekre a későbbiekben sokszor történik hivatkozás.

A függvény.

További vizsgálatainkban kétféle számok fognak előjönni, úgymint adott, határozott számok, melyek mindig ugyanazzal az egy értékkel birnak és ezért állandó (constans) számoknak neveztetnek, valamint olyanok, melyek bizonyos számcsoporton belül minden értéket felvehetnek, tehát változó értékkel birnak, azért ezeket változó (variabilis) számoknak nevezzük, és geometriailag a számcsoport területén mozgó ponttal ábrázoljuk. Az állandókat az ABC. kezdő a, b, c, d, ... a változókat végső: x, y, z, u, v, ... betüivel jelöljük. A változók lehetnek folytonosan avagy nem folytonosan változók, a szerint, a mint a mozgó pont azon értékei, melyeket felvehet mozgása közben, geometriai folytonosságot adnak, vagy nem. A változók azonkivül lehetnek egyenesen változók (a milyenek pl. a reális változók), és területen változók (complex változók). Mi többnyire folytonos változókkal fogunk dolgozni ((összes complex számok).

Az olyan kifejezést, melyben állandók és változók szerepelnek bizonyos müveleti operatiókkal egybekötve, függvénynek, az illető változók függvényének nevezzük. A változók száma szerint van 1, 2, 3, ... változós függvény. Egy változós függvényben a reális változót x, a complex változót $z = x + yi$ fogja jelölni. Magának a függvénynek a jele $f(x)$, $f(z)$.

Rationalis függvények

A rationális egész függvény.

A függvényeket azon operatiók szerint osztályozzuk, melyek által az állandók a változókkal össze vannak kötve.

Az oly függvényt, melyben az állandók a változókkal csupán az összeadás, kivonás, szorzás és osztás, - tehát a rationális-operatiókkal vannak egybe kötve, rationalis függvénynek nevezzük és pedig rationalis egész függvénynek, ha csak a három első, rationalis tört függvénynek, ha az osztás operatiója is szerepel.

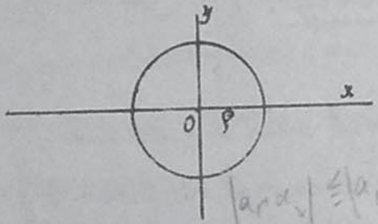
Foglalkozzunk először a rationalis egész függvényekkel, kutatva azoknak jellemző tulajdonságait.

Miután a rationalis függvény csupa egyértékü operatiókkal keletkezett, azért ha a z változónak határozott véges értéket adunk, a függvény is egyértékü és véges. A kijelölt operatiok elvégzése után minden rationalis egész függvény a következő normális alakra hozható

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n$$

a hol $a_0, a_1, \dots a_n$ constans mennyiségek. A változó legmagasabb hatványkitevőjét nevezzük a rationális egész függvény fokszámának. A felirt r. eg. függvény tehát n-edfokú, a mikor is $a_n \neq 0$.

Már emlitettük a rat. eg. függvény egyik fontos és jellemző tulajdonságát, t.i. hogy egyértékü és véges (a végesben). Most vizsgáljuk a függvényt egy 0 centrumu igen kis ρ sugaru körön belül, tehát csak olyan z értékek mellett, melyekre nézve $|z| < \rho < 1$, és hasonlitsuk össze a függvény értékét a terület bármely pontjá-



bármely pontjában, azzal, melyet a 0-ban vesz fel. Miután $f(0) = a_0$, lesz

$$f(z) - f(0) = a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n$$
$$= z(a_1 + a_2 z + \dots + a_n z^{n-1})$$

$|a_r \alpha_r| \leq |a_r| + |\alpha_r|$

tehát
$$|f(z) - f(0)| \leq |z| (|a_1| + |a_2||z| + \dots + |a_n||z|^{n-1})$$

A jobboldalt mindenesetre megnagyobbitjuk, ha mindegyik $|a|$ helyett azoknak A maximumát, $|z|$ helyett a nálánál nagyobb ρ-t irjuk be, és, miután $\rho < 1$, még az egész sort végtelenbe folytatjuk, tehát $|f(z) - f(0)| < A\rho(1 + \rho + \rho^2 + \dots \text{ ad infin.})$

és beirva a zárjelben levő geometriai sor értékét $\frac{1}{1-\rho}$-t

$$|f(z) - f(0)| < \frac{A\rho}{1-\rho}$$

ha most η egy tetszésszerint megadott kis positiv szám, ~~mindig~~ megválaszthatjuk a ρ sugarat úgy, hogy $\frac{A\rho}{1-\rho} = \eta$ legyen, t.i. $\rho = \frac{\eta}{A+\eta}$ teendő, de akkor ezen a ρ sugaru körön belül

$$|f(z) - f(0)| < \eta$$

vagy miután $|z| < \rho$, mondhatjuk, hogy bármilyen kis positiv mennyiség legyen η, $|f(z) - f(0)| < \eta$, mihelyt $|z| < \frac{\eta}{A+\eta}$ a hol A a rationális eg. függvény coefficiensei absolut értékeinek maximuma. A rationalis eg. függvény tehát olyan tulajdonságú,

$+A\rho = \eta - \eta\rho$
$\rho(A+\eta) = \eta$
$\rho = \frac{\eta}{A+\eta}$

hogy bármilyen kis positiv η mennyiség megadása után tudunk 0 körül olyan kis sugaru kört irni, melyben belül a rat. eg. függvény értéke bármely pontban absolut értékre nézve kevesebbet különbözik a függvény absolut értékétől 0-ban, mint a mekkora az a kis η mennyiség; vagy a mi ugyanazt mondja: a függvény értékváltozása 0 körül végtelen kicsiny, ha z értékváltozása végtelen kicsiny. Ha valamely függvény ezzel a tulajdonsággal bir, azt mondjuk, hogy a függvény az illető hely körül, melyet végtelen kicsinynyel megnövesztettünk, folytonos. Tehát a rat. eg. függvény a 0 körül folytonos. Daczára annak, hogy az $|f(z)-f(0)|$ különbség végtelen kicsiny a 0 közvetlen szomszédságában, mégse válik itt nullá, csak 0-ban. Hogy ezt beláthassuk, irjuk fel a függvényt annak tekintetbe vételével, hogy egyes coefficiensek nullak is lehetnek, a mint a függvényben végig haladunk. Tegyük fel, hogy a_k az első nulltól különböző coefficiens, akkor

$$f(z)-f(0)=z^k(a_k+a_{k+1}z+\dots+a_n z^{n-k})$$

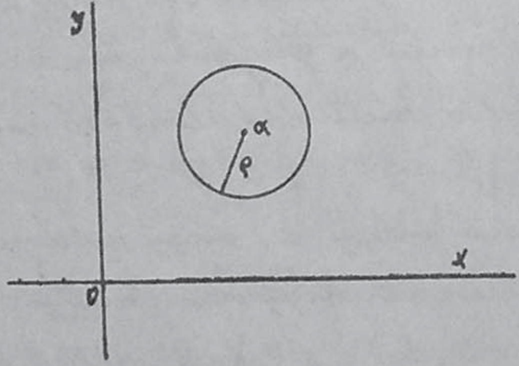
Ez a különbség csak akkor nulla, ha vagy z, vagy a zárjeles kifejezés nulla. A z-ről azonban feltesszük, hogy nem nulla; a zárjeles kifejezés meg csak akkor, azaz oly z értékek mellett nulla, ha a_k absolut értékre egyezik a z-vel szorzott tagok absolut értékével, de ellenkező jelü, ámde a fennt mondottak alapján

$$|a_{k+1}z+\dots+a_n z^{n-k}|<|a_k|\ , \text{ mihelyt } |z|<\frac{|a_k|}{A'+|a_k|}$$

ha tehát ezzel a $|z|$ sugárral (melynek kifejezésében A' az $|a_{k+1}|$ $|a_{k+2}|\dots|a_n|$ coefficiensek maximuma) 0-ból kört irunk, ezen belül a zárjeles kifejezés seholsem tünik el, csak a 0-ban, tehát $|f(z)-f(0)|$ seholsem tünik el, csak 0-ban. Ezzel ki van mutatva, hogy a rat. eg. függvény azt az értékét, melyet 0-ban felvett, ennek közvetlen szomszédságában nem ismétli (értvén közvetlen közelség alatt a 0-hoz végtelen közel eső pontok összességét. Ez a tulajdonsága a rat. eg. függvénynek szintén hozzátartozik a folytonosság definitiójához.

Kimutattuk tehát, hogy a rat. eg. függvény a 0 körül folytonos, a mi azt jelenti, hogy a z változót a 0-ból végtelen kevéssel kimozditván, a függvény értéke is csak végtelen keveset változik, és azt az értékét, melyet 0-ban felvett, ennek közvetlen szomszédságában nem ismétli.

Áttérünk most annak kimutatására, hogy a rat. eg. függvény a számsiknak minden más, végesben fekvő, pontja körül szintén folytonos. Legyen α a számsiknak egy tetszőleges pontja, és vizsgáljuk a függvényt egy α centrumu ρ sugaru körön belül, mely $\rho < 1$. Az α körüli pontok formulája $z = \alpha + h$, a hol $|h| = |z-\alpha| < \rho$. Tehát nem kell egyebbet tenni, mint a rat. eg. függvényben z helyébe $(\alpha+h)$-t tenni, h-t a $|h| < \rho$ intervallumban változónak tekinteni és a függvény értékét ezen h értékek mellett, összehasonlitani a függvény értékével α-ban.



Ha $f(z)$-ben z helyébe $(\alpha+h)$-t helyettesitünk, lesz

$$f(\alpha+h) = a_0 + a_1(\alpha+h) + a_2(\alpha+h)^2 + \cdots + a_n(\alpha+h)^n$$

ha most a fellépő binomokat kifejtjük, és a h ugyanazon hatványával szorzott tagokat egymás alá irjuk, lesz

Harkay

$$
\begin{aligned}
f(\alpha+h) = \; & a_0 + \\
& a_1\alpha + a_1 h + \\
& a_2\alpha^2 + 2a_2\alpha h + a_2 h^2 + \dots \\
& \dots\dots\dots\dots \\
& a_k\alpha^k + \tbinom{k}{1} a_k\alpha^{k-1}h + \tbinom{k}{2} a_k\alpha^{k-2}h^2 + \dots + a_k h^k + \\
& \dots\dots\dots\dots \\
& a_n\alpha^n + \tbinom{n}{1} a_n\alpha^{n-1}h + \tbinom{n}{2} a_n\alpha^{n-2}h^2 + \dots\dots + a_n h^n
\end{aligned}
$$

Az összeadásnál tekintetbe kell venni, hogy az első oszlop nem egyébb, mint $f(\alpha)$; ha az eredeti $f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$ függvényben a változó kitevőjét mindig az illető tag elé írjuk szorzónak, és abban a tagban a kitevőt egygyel kisebbítjük, a nyert

$$f'(z) = a_1 + 2a_2 z + \dots + n a_n z^{n-1}$$

függvényt az eredeti függvény deriváltjának nevezzük, a mely egygyel alacsonyabb foku mint $f(z)$. Látható, hogy ha a második oszlopban álló tagok összegéből h-t közös tényezőnek kivesszük, annak szorzoja nem egyébb mint $f'(\alpha)$. Ép igy a harmadik oszlopban $\frac{h^2}{2!}$-t közös tényezőnek kivéve, annak szorzója lesz $f''(\alpha)$ a hol $f''(z)$ az $f'(z)$ deriváltja, tehát $f(z)$ második deriváltja, stb az $(n+1)$-ik oszlopban a $\frac{h^n}{n!}$ közös tényező szorzója $f^{(n)}(\alpha)$, vagyis a függvény n-edik deriváltjának értéke $z=\alpha$ mellett. Ennélfogva

$$f(\alpha+h) = f(\alpha) + f'(\alpha)h + \frac{f''(\alpha)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}h^k + \dots + \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}h^n$$

Ezt a sort, mely előállítja az n-edfokú rationális egész függvény értékét $(\alpha+h)$-ban, ha ismerjük magának a függvénynek és összes n deriváltjának az értékét α-ban, nevezzük Taylor féle sornak. A Taylor féle sor segélyével könnyü lesz kimutatni, hogy a rationális eg. függvény a számsiknak bármely

α pontja körül folytonos. Mert az $f(\alpha+h)$ épen olyan n-edfokú rationalis eg. függvénye h-nak, mint az eredeti $f(z)$ a z-nek, tehát (1.) $|f(\alpha+h)-f(\alpha)|<\eta$ ha $|h|<\frac{\eta}{A_1+\eta}$

a hol A_1 a h^k hatványok coefficiensei közölt a maximum; és

(2.) $f(\alpha+h)-f(\alpha)\neq 0$, ha $|h|<\left|\frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}\right|\cdot\frac{1}{A_1+\left|\frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}\right|}$

ha t. i. $\frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}$ az első el nem tűnő deriválS. Hogy ezen derivaltak közölt tényleg van egy legelső nulltól külömböző, kitűnik onnan, hogy $a_n\neq 0$, tehát az n-edik derivált $f^{(n)}(\alpha)=n(n-1)\ldots 2.1.\,a_n=n!\,a_n$, ha tehát más nem, ez mindig nulltól különböző. Igy tehát a rationális függvény (1) és (2). értelmében a már definiált módon a számsik minden helye körül folytonos.

Van azonban a függvény folytonosságának még egy más definitiója is. Ha ugyanis valamely $f(z)$ függvényről ki akarjuk mutatni, hogy a számsik α pontja körül folytonos-e, veszünk egy szabályos számsorozatot, melynek limese α, tehát pl.

I. $z_1, z_2, z_3, \ldots\ldots z_n\ldots$ $\lim z_n=\alpha$

és ezen sorozat tagjaira nézve megalkotjuk a függvény értékeit

$$f(z_1), f(z_2), f(z_3), \ldots f(z_n), \ldots$$

ha ezen sorozat szabályos és n alkalmas megválasztásával $|f(z_n)-f(\alpha)|<\eta$ tehető, ~~vagyis ha ezen~~ utóbbi sorozat limese $f(\alpha)$, akkor nyilvánvalóan a függvény α körül folytonos. Könnyen belátható, hogy a rat. eg. függvény (1). és (2.) alapján teljesiti ezt a feltételt, mert hisz $|f(z_n)-f(\alpha)|<\eta$, mihelyt $|z_n-\alpha|<\frac{\eta}{A_1+\eta}$; már pedig ez a különbség tetszésszerint kicsinnyé tehető, mivel az I. sorozat szabályos.

Ha a Taylor féle sorban $z=(\alpha+h)$-ból visszahelyettesitjük h értékét $h=z-\alpha$, kapjuk, hogy

$$f(z)=f(\alpha)+f'(\alpha)(z-\alpha)+\frac{f''(\alpha)}{2!}(z-\alpha)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(z-\alpha)^n$$

Tehát a számsiknak α helye körül a rat. eg. függvény előállitható egy $(z-\alpha)$ hatványai szerint haladó sorral.

Vizsgáljuk most a rat. eg. függvényt a számsik végtelen távoli pontja körül, tehát ha $z=\infty$. E végett irjuk a függvényt forditott sorrendben $f(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_2z^2+a_1z+a_0$ z^n hatványt kivéve közös tényezőnek és $\frac{1}{z}=\zeta$ irva, majd áttérve az absolut értékre

$$|f(z)|=|z^n||a_n+a_{n-1}\zeta+\cdots+a_1\zeta^{n-1}+a_0\zeta^n|$$

Mivel növekedő z-vel a ζ fogy, nyilvánvaló, hogy

$$|a_{n-1}\zeta+\cdots+a_0\zeta^n|<\eta\,,\quad \text{ha } |\zeta|<\frac{\eta}{A_1+\eta}\,,\quad \text{vagyis ha } |z|>\frac{A_1+\eta}{\eta}$$

úgyhogy $\qquad |f(z)|>|z^n|(|a_n|-\eta)\quad$ ha $|z|>\frac{A_1+\eta}{\eta}$

a hol A_1 a a coefficiensek közöt a maximum absolut értéke.

Az utóbbi egyenlőtlenségből következik, hogy

$$\frac{|f(z)|}{z^n}>|a_n|-\eta\qquad \text{és mivel } \lim_{z=\infty}\eta=0,$$

következik, hogy $\qquad \lim\limits_{z=\infty}\frac{|f(z)|}{z^n}=|a_n|$

a mi azt mondja, hogy a végtelen távoli helyen $f(z)$ és z^n egyenlő rangú nagyok; vagyis ha z első rangu végtelen nagy, akkor $f(z)$ n-edrangú végtelen nagy. Tehát az n-edfoku rat. eg. függvény a végtelen távoli helyen n-edrangu végtelen nagy, vagy a mint mondani szoktuk, a rat. eg. függvénynek a végtelen távoli helyen n-edrendü polusa ~~van~~. Sőt kijelölhetjük azt a $|z|$ értékét, melyen túl a függvény absolut értéke állandóan nagyobb marad egy tetszésszerinti adott N-nél. Mert $|f(z)| > |z|^n(|a_n| - \eta)$ lévén, ha $|z|^n(|a_n| - \eta) \geqq N$ azaz $|z| \geqq \sqrt[n]{\dfrac{N}{|a_n| - \eta}}$ akkor $f(z) > N$. Ha tehát ezen utóbbi $|z|$-el 0-ból kört irunk, ezen kivül a függvény absolut értéke mindenütt nagyobb N-nél.

Vizsgáljuk most, milyen értékeket vehet fel a rationalis eg. függvény a végesben. Ki fogjuk mutatni, hogy mindig lehet 0 körül olyan véges sugaru kört irni, melyen kivül a függvény seholsem lehet nulla, tehát a melyen belül fekszenek a rat. eg. függvény összes nullapontjai. Ugyanis

$$f(z) = z^n(a_n + a_{n-1}\xi + a_{n-2}\xi^2 + \cdots + a_0\xi^n)$$

ha $z \neq 0$, a függvény csak úgy lehet nulla, ha a zárjeles kifejezés 0. De tudjuk, hogy mihelyt $|\xi| < \dfrac{|a_n|}{A_1 + |a_n|}$, vagyis mihelyt $|z| > \dfrac{A_1 + |a_n|}{|a_n|}$, a zárjeles kifejezés nem tünhetik el. Ha tehát ezzel a $|z|$ sugárral kört irunk 0-ból, ezen kivül a függvény seholsem tünhetik el, csak ezen belül, tehát a függvény összes nullapontjai végesben fekszenek.

Kérdés, most, vajjon van-e a rat. eg. függvénynek ilyen nullapontja, és mi következik abból, ha ilyen tényleg létezik. Vegyük az n-edfokú rat. eg. függvényt

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$$

és tegyük fel, hogy szigorúan bebizonyitottuk azt a tételt, mi szerint minden rat. eg. függvénynek van legalább egy nullapontja. Lássuk, mi következik ebből. Legyen α_1 az $f(z)$ nullapontja, akkor

$$0 = a_0 + a_1\alpha_1 + a_2\alpha_1^2 + \cdots + a_n\alpha_1^n$$

és a kettő különbségét alkotva

$$f(z) = a_1(z - \alpha_1) + a_2(z^2 - \alpha_1^2) + \cdots + a_n(z^n - \alpha_1^n)$$

$$= (z-\alpha_1)\left[a_1 + a_2(z+\alpha_1) + \cdots + a_n(z^{n-1} + z^{n-2}\alpha_1 + \cdots + \alpha_1^{n-1})\right]$$

mert ismeretes tétel, hogy $\dfrac{z^k - \alpha_1^k}{z-\alpha_1} = z^{k-1} + z^{k-2}\alpha_1 + \cdots + z\alpha_1^{k-2} + \alpha_1^{k-1}$.

És ha a $(z-\alpha_1)$-el szorzott $(n-1)$-edfoku rationális függvényt $f_1(z)$-vel jelöljük, kapjuk, hogy $f(z) = (z-\alpha_1) f_1(z)$, a hol $f_1(z)$-ben a változó legmagasabb hatványának z^{n-1}-nek ugyanaz az a_n a coefficiense, mint $f(z)$-ben a z^n-nek, ez azonnal kitünik, ha a [ ] zárjeles kifejezést z hatványai szerint rendezzük. Az utolsó egyenlet tehát azt mondja, hogyha α_1 az $f(z)$-nek nullapontja, akkor ez leválaszt a függvényből egy $(z-\alpha_1)$ primfactort, melynek szorzója egy z-ben már csak n-edfokú rat. eg. függvény s a melyben z legmagasabb hatványának coefficiense ugyanaz, mint $f(z)$-ben z legmagasabb hatványának coefficiense. Miután feltételünk szerint minden rat. függvénynek van legalább egy gyöke, szükségképen $f_1(z)$-nek is van biztosan egy gyöke, legyen ez α_2, akkor az előbbiek szerint

$$f_1(z) = (z-\alpha_2)\cdot f_2(z)$$

a hol $f_2(z)$ már csak $(n-2)$-edfokú. A feltétel szerint $f_2(z)$-nek szintén van egy gyöke α_3, úgyhogy

$$f_2(z) = (z-\alpha_3) f_3(z)$$

és így tovább folytatva a következtetést $(n-1)$-szer, kapjuk, hogy

$$f_{n-1}(z) = (z-\alpha_n) f_n(z)$$

a hol már $f_n(z)$ nulladfokú, azaz állandó, és mivel másfelől benne a legmagasabb hatvány coefficiense a_n, következik, hogy $f_n(z) = a_n$. Ha ezeket az értékeket most visszafelé behelyettesitjük, kapjuk, hogy

$$f(z) = a_n(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)(z-\alpha_3)\cdots(z-\alpha_n)$$

A feltételből tehát következik, hogy minden n-edfokú rationalis egy függvény előállitható mint n primfactor szorzata, vagy a mi ugyanazt mondja, minden ~~egész~~ rationális egész függvénynek épenséggel n gyöke van. Hogy több nullapontja nem lehet, mint n, kiolvasható a szorzatalakból. Ha ugyanis α_{n+1} egy az előbbi n nullaponttól különböző nullapontja volna a mi n-edfokú rat. eg. függvényünknek, akkor

$$0 = a_n(\alpha_{n+1} - \alpha_1)(\alpha_{n+1} - \alpha_2) \dots (\alpha_{n+1} - \alpha_n)$$

egyenlet csak úgy állhatna fenn, ha $a_n = 0$, a mi pedig a feltétellel ellenkezik. Ha tehát a függvény tényleg n-edfokú, akkor csakis n nullapontja lehet. Ebből következik nyomban egy másik tétel. Ha ugyanis adva van egy legfeljebb n-edfokú rat. eg. függvény, mely z-nek több mint n értéke mellett eltűnik, ez csak úgy lehetséges, hogy a függvény összes coefficiensei, tehát maga a függvény is identikusan, nulla. Mert, ha n nullapontja van a függvénynek, akkor

$$f(z) = a_n(z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \dots (z - \alpha_n)$$

ha most α_{n+1} egy az előbbiektől különböző nullapont, akkor a

$$0 = a_n(\alpha_{n+1} - \alpha_1)(\alpha_{n+1} - \alpha_2) \dots (\alpha_{n+1} - \alpha_n)$$

egyenlet csak úgy teljesülhet, ha $a_n = 0$. Ez által az n-edfokú egyenlet reducalódik egy $(n-1)$-edfokura, melynek a feltevés szerint több mint $(n-1)$ gyöke lévén, következik, hogy a_{n-1} ~~is~~ eltűnik, stb. eltűnik $a_{n-2}, \dots a_3, a_2, a_1, a_0$, vagyis eltűnnek a függvény összes coefficiensei, a függvény identikusan nulla. Ebből továbbá következik, hogy ha két ~~n~~-edfokú rat. eg. függvény

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n$$

$$g(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots + b_n z^n$$

több mint n z érték mellett egyenlő egymással, akkor ez csak úgy lehetséges, hogy a megfelelő coefficiensek egyenlők egymással. Mert a két függvény különbsége

$$\varphi(z) = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1) z + \dots + (a_n - b_n) z^n$$

ennek pedig a feltétel értelmében több mint n nullapontja van, de akkor $a_0 - b_0 = 0, \quad \dots \quad a_n - b_n = 0$

vagyis $a_0 = b_0, \quad \dots \quad a_n = b_n$

vagyis a két függvény identikus

Ezen tételeknek most megadjuk a biztos alapot azáltal hogy bebizonyitjuk, miszerint minden rat. eg. függvénynek van legalább egy gyöke. Az algebrának ezen alaptételét először Gauss bizonyitotta be 4 izben, majd Cauchy és Hamilton is bebizonyitotta. Mi itt Hamilton bizonyitását fogjuk követni.

Hamilton teljes inductiot használ és kimutatja először, hogy minden első és másodfoku függvénynek van nullapontja. Ugyanis $a_0 + a_1 z = 0$ egyenletből $z = -\frac{a_0}{a_1}$; tehát minden első fokú rat. eg. függvénynek van egy gyöke.

Az $a_0 + a_1 z + a_2 z^2 = a_0 + a_2\left(z + \frac{a_1}{2a_2}\right)^2 - \frac{a_1^2}{4a_2} = 0$ másodfokú egyenletből

$$\left(z + \frac{a_1}{2a_2}\right)^2 = \frac{a_1^2 - 4a_0 a_2}{4a_2^2} \qquad \text{tehát}$$

$$z = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}}{2a_2}$$

vagyis minden másodfokú rat. eg. függvénynek van – plané – két nullapontja, tehát legalább egy mindenesetre van.

És most áttérve a teljes inductiora, tegyük fel, hogy a tétel helyes egy (n-1)-ed foku függvényre s mutassuk ki, hogy ekkor érvényes egy n-edfokura is. Ha a teljes inductio sikerül, a tétel általános érvényessége be van bizonyitva, mert helyes egy 2-odfokúra, tehát egy 3, 4, ... n-edfokúra is.

Feltesszük tehát, hogy egy (n-1)-ed fokú függvénynek van legalább egy nullapontja, s most vegyünk egy n-edfoku függvényt

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$$

és mutassuk ki, hogy ennek az algebrai egyenletnek van legalább egy gyöke. Feltehetjük, hogy $a_0 \neq 0$, mert hisz ha $a_0 = 0$, akkor $z=0$ már egy gyöke az egyenletnek. A fenti követelést tehát igy is irhatjuk

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z = -a_0$$

Továbbá vegyük tekintetbe, hogy az alacsonyabb hatványok coefficiensei közül némelyek el is tünhetnek, és tegyük fel, hogy a_k az első nulltól különböző coefficiense, akkor a követelés

$$z^k(a_n z^{n-k} + a_{n-1} z^{n-k-1} + \dots + a_{k+1} z + a_k) = -a_0$$

A zárjeles kifejezés egy (n-k)-adfokú függvény s mivel k legalább 1, ezért feltevésünk szerint a zárjeles kifejezésnek van egy nullapontja, s az akkor primfactorokra bontható

$$a_n (z-\beta_1)^{k_1} (z-\beta_2)^{k_2} \dots (z-\beta_r)^{k_r}$$

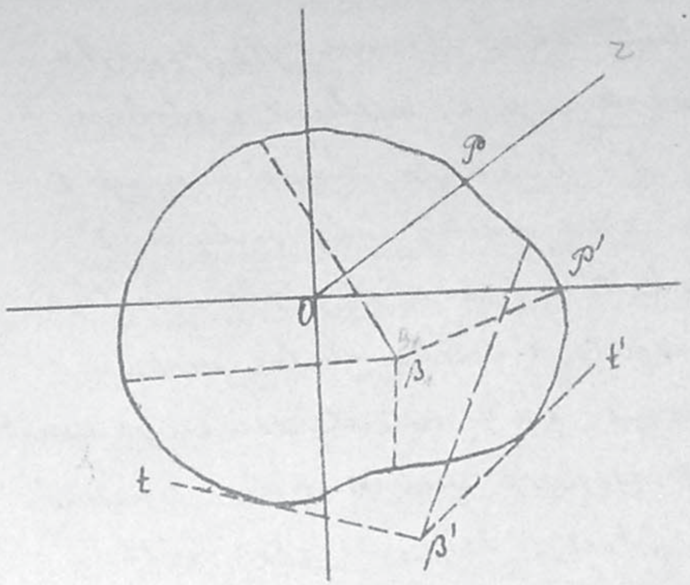
mert lehet, hogy némely β-k többszörös gyökei a zárjeles függvénynek, a mi akkor fog bekövetkezni, ha ugyanaz a primfactor többször fordul elő, ha tehát $\beta_1, \beta_2, \dots \beta_r$ ezen függvénynek $k_1, k_2, \dots k_r$-szeres gyöke, akkor a fenti egyenlet igy is irható

$$z^k \cdot a_n (z-\beta_1)^{k_1} \cdot (z-\beta_2)^{k_2} \dots (z-\beta_r)^{k_r} = -a_0$$

keresztül osztva az egyenletet a_0-al, és $\frac{a_n}{a_0} = A$ irva, jelöljük az egyenlet baloldalán igy fellépő függvényt $\varphi(z)$-vel, tehát

$$\varphi(z) = A z^{k}(z-\beta_1)^{k_1}(z-\beta_2)^{k_2}\cdots(z-\beta_r)^{k_r} = -1$$

Feladatunk tehát kimutatni, hogy létezik mindenesetre z-nek legalább egy értéke, mely mellett $\varphi(z) = -1$, azaz a mely mellett $|\varphi(z)| = 1$ és $\arg.\varphi(z) = \pi + 2k\pi$. Ugy járunk el, hogy először keressük ama z értékeket, melyek mellett az első feltétel teljesül, azután ezekből kikeressük azt, mely a másodikat is kielégiti. A számsiknak nullapontjából huzzunk egy tetszésszerinti Oz egyenest, s ezen változtassuk a z-t 0-tól ∞-ig. Ha $z=0$, akkor $\varphi(z)=0$, s ha z elég nagy, akkor $|\varphi(z)| > N$ tehető; s miután a rationális egész függvény folytonos, kell lennie 0 és ama z között egy olyan z pontnak, melyben $|\varphi(z)| = 1$. Legyen ez a pont az Oz egyenesen P. Ugyanez áll az O-ból kiinduló valamennyi egyenesre, mindegyiken van egy olyan P pont, melyben $|\varphi(z)| = 1$. Ezek a P pontok pedig a függvény folytonosságából kifolyólag folytonosan sorakoznak egymáshoz, és igy O-körül zárt görbét alkotnak. A mig z ezen a zárt görbén végighalad, $|\varphi(z)|$ állandóan 1.



És most ki kell mutatni, hogy ezen z értékek között van legalább 1, melyre nézve $\varphi(z)$ szöge $\pi + 2k\pi$, azaz aequivalens π-vel. E végett meg kell vizsgálni, hogy a $\varphi(z)$ szorzat szöge milyen határok között változik, ha z egyszer végig megy a görbén. Minthogy szorzat szöge annyi, mint a tényezők szögeinek összege, külön meg kell vizsgálni a tényezők szögváltozásait. Kiindulunk pl. a reális tengelyből, a görbe P' pontjából. A constans lévén, szöge α nem változik; z a P'-ben 0 szöggel bír, egyszeri körüljárás után növekedik 2π-vel, tehát z^k szöge növekedik $2k\pi$-vel. A többi factoroknál különbséget kell tennünk, mert a β-ák egyike sem fekhetik a görben, mivel ezek mellett $\varphi(z)=0$; ezek vagy a görbén belül, vagy azon kívül fekszenek. Legyen egy a görbén belül fekvő nullapont β_1; ~~ennek~~ ábrázoló pontja B_1, akkor a B_1P' vectort jellemzi $(z-\beta_1)$. Ennek szöge legyen α_1, akkor $(z-\beta_1)^{l_1}$ szöge $l_1 \cdot \alpha_1$ s ha z végig jár a görbén és pedig az óramutató járásával ellenkező értelemben, akkor α_1 szaporodik 2π-vel, tehát $l\alpha_1$ szaporodik $l \cdot 2\pi$-vel. Tegyük fel, hogy s ilyen a görbén belül fekvő β van: $\beta_1, \beta_2, .. \beta_s$

A második csoportba tartoznak azok a β-k, melyek a görbén kívül fekszenek. Legyen egy ilyen β'. Látható, hogy a míg z végighalad a görbén, $(z-\beta')$ szöge α' csak addig nő, míg a β' ábrázoló pontját, B'-et P-el összekötő egyenes a görbe érintőjévé válik, azontul ismét fogy és eredeti α' értékével tér vissza. Ennélfogva tehát $(z-\beta')^{l'}$ kezdő szöge $l'\alpha'$, visszatérési szöge szintén $l'\alpha'$. Ugyanez áll a második csoport valamennyi tényezőjére, mely csoportban vannak a β_{s+1}, β_{s+2}, ... β_r nullapontok. Ha tehát az egyes tényezők

	A,	z^k,	$(z-\beta_1)^{l_1}$,	...	$(z-\beta_s)^{l_s}$,	$(z-\beta_{s+1})^{l_{s+1}}$,	...	$(z-\beta_r)^{l_r}$
kezdő szögeik	α,	0,	$l_1\alpha_1$,	...	$l_s\alpha_s$,	$l_{s+1}\alpha_{s+1}$,	...	$l_r\alpha_r$

kor növekedéseik megfelelőleg

$$0,\ 2k\pi,\ \lambda_1 2\pi, \ldots \lambda_s 2\pi,\ 0, \ldots 0$$

s ha A a $\varphi(z)$ kezdő szöge, tehát $A = \alpha + \lambda_1\alpha_1 + \cdots + \lambda_s\alpha_s + \cdots + \lambda_r\alpha_r$ akkor egyszeri körüljárás után $\varphi(z)$ szöge

$$A + 2\pi(\kappa + \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots \lambda_s)$$

a hol a zárjelben csupa positiv egész számok vannak, mert hisz k és a λ kitevők legalább az 1 értéket felveszik. Mondhatjuk tehát, hogy miközben z a zárt görbe valamely pontjából kiindulva azon végig megy, $\varphi(z)$ szöge mindenesetre növekedik legalább 2π-vel. Ha most tekintetbe vesszük, hogy a míg z a zárt görbén végig halad, az alatt a megfelelő $\varphi(z)$ az egységsugaru körön legalább egyszer körülhalad, nyilvánvaló, hogy $\varphi(z)$ legalább egyszer át fog menni a reális tengely (-1) pontján. Tehát mindenesetre létezik leg-lább egy olyan z érték, mely mellett $\varphi(z) = -1$. De ugyanezen z érték mellett teljesülni fog az

$$a_n z^\kappa (z-\beta_1)^{\lambda_1} \cdots (z-\beta_r)^{\lambda_r} + a_0 = 0$$

vagyis az

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0 \qquad \text{egyenlet}$$

a mi azt mondja, hogy a baloldalán álló n-edfokú rat. egy. függvénynek van legalább egy nullapontja. Ebből, a mint láttuk, következik, hogy minden n-edfoku rat. egy. függvénynek pen n gyöke van, vagyis a függvény felbontható n lineáris factorra

$$f(z) = a_n(z-x_1)(z-x_2)\cdots(z-x_n)$$

Ez azonban csak egyik szélső eset, midőn a gyökök mind különbözők. Ha több gyök összeesik, akkor az illető primfactorok a szorzatalakban mint egy hatvány szerepelnek, és a kitevő mutatja, hogy hány gyök esik össze, vagyis hányszoros az illető gyök. Az általános eset tehát az, midőn az $f(z)$ függvénynek

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r$ gyökei

$k_1, k_2 \ldots k_r$-szeres gyökök, ekkor

$$f(z) = a_n (z-\alpha_1)^{k_1}(z-\alpha_2)^{k_2}\ldots(z-\alpha_r)^{k_r}$$

$k_1, k_2, \ldots k_r$ a gyökök sokszorossági számainak neveztetnek.

A másik szélső eset az, midőn a függvény összes nullapontjai összeesnek α-ban, tehát a függvénynek egy n-szeres gyöke van, ekkor

$$f(z) = a_n (z-\alpha)^n$$

Természetes, hogy az a tétel, miszerint minden n-edfoku rat. eg. függvénynek épen n gyöke van, úgy értendő, hogy a függvény minden k-szoros gyöke k egyszerü gyöknek számitandó.

Taylor sora azonnal mutatja, hogy mikor van a függvénynek többszörös nullapontja. Tegyük fel, hogy α a függvény egyik nullapontja, akkor e körül sorbabontva a függvényt Taylor tétele szerint $f(z) = f(\alpha) + f'(\alpha)(z-\alpha) + \ldots + \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(z-\alpha)^n$

Már most ha azt akarjuk, hogy α egyszerü nullapontja legyen $f(z)$-nek, azaz hogy $f(z)$ a $(z-\alpha)$ factorral osztható legyen, $f(\alpha)$-nak el kell tünnie; hogy $(z-\alpha)^2$-al legyen osztható $f(z)$, ahhoz szükséges, hogy $f'(\alpha)$ is eltünjék, stb., hogy α k-szoros gyöke legyen $f(z)$-nek, azaz hogy $f(z)$ a $(z-\alpha)^k$ factorral osztható legyen, ahhoz szükséges, hogy $f^{(k-1)}(\alpha)$ is eltünjék, de már $f^{(k)}(\alpha) \neq 0$ legyen. Tehát arra, hogy α az $f(z)$ függvénynek k-szoros nullapontja legyen, szükséges, hogy úgy a függvény maga, valamint a k-adikig vett összes deriváltjai $z=\alpha$ mellett eltünjenek, de már a k-adik derivált $z=\alpha$ mellett nulltól különböző legyen. És forditva, ha ez teljesül, akkor α a függvénynek k-szoros nullapontja.

Azt is könnyen eldönthetjük a Taylor féle sorral, hogy $f(z)$-nek k-szoros gyöke hányszoros gyöke az egyes deriváltaknak. Ugyanis

$$f'(z) = f'(\alpha) + f''(\alpha)(z-\alpha) + \frac{f'''(\alpha)}{3!}(z-\alpha)^2 + \dots \frac{f^{(n-1)}(\alpha)}{(n-1)!}(z-\alpha)^{n-1}$$

Ha most α az $f(z)$-nek csak kétszeres nullapontja, vagyis ha csak $f'(\alpha)=0$, akkor az utóbbi egyenlet értelmében α az $f'(z)$-nek egyszerü nullapontja. Épugy következik, hogy egész általánosan, ha α az $f(z)$-nek k-szoros nullapontja, akkor az első deriváltnak már csak $(k-1)$ szeres, a második deriváltnak csak $(k-2)$-szeres nullapontja, stb. a $(k-1)$-ik deriváltnak egyszerü nullapontja, de már a k-adik deriváltnak nem nullapontja.

Ebből a tételből következtetést vonhatunk, miképen viselkedik a függvény annak egy k-szoros nullapontja körül. Ha ugyanis α k-szoros nullapont, akkor a Taylor féle sorból a k első tag eltünvén,

$$f(z) = \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}(z-\alpha)^k + \frac{f^{(k+1)}(\alpha)}{(k+1)!}(z-\alpha)^{k+1} + \dots$$

tehát

$$\frac{f(z)}{(z-\alpha)^k} = \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!} + \frac{f^{(k+1)}(\alpha)}{(k+1)!}(z-\alpha) + \dots$$

és

$$\lim_{z=\alpha} \frac{f(z)}{(z-\alpha)^k} = \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}$$, a mi azt mondja, hogy

$$f(z) (=) (z-\alpha)^k$$

vagyis $f(z)$ egyenlő rangu kicsiny $(z-\alpha)^k$-val; ha $(z-\alpha)$ elsőrangu végtelen kicsiny, akkor $f(z)$ k-adrangu végtelen kicsiny, és igy kapjuk azt a tételt, hogy egy k-szoros nullapont körül a függvény k-adrangu végtelen kis mennyiség.

Kérdés: ha megadunk egy tetszésszerint határozott C számot, léteznek-e olyan x értékek, melyek mellett $f(z) = C$. Más alakban ez az egyenlet $f(z)-c=0$. Ennek pedig, mint n-edfokú rat. eg. függvényt tartalmazó egyenletnek épen n gyöke van, a miből következik, hogy $f(z)$ függvény n helyen veszi fel az adott c értéket. Tehát minden n-edfokú rat. eg. függvény egy tetszésszerint adott értéket a számsíknak n helyen vesz fel.

Tegyük fel, hogy a függvény coefficiensei reálisok, akkor

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n$$

z-nek reális értékei mellett reális lesz, z-nek complex értékei mellett complex. Ha pedig z helyébe először egy complex számot, azután ennek conjugáltját tesszük, akkor az $f(z)$ megfelelő értékei is conjugált complexek lesznek. Mert ha pl. az első z érték

$z_1 = x + yi = \varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ a második $z_2 = x - yi = \varrho(\cos\varphi - i\sin\varphi)$

akkor a k-adik tag a két esetben

$$a_k z_1^k = a_k \varrho^k \cos k\varphi + i a_k \varrho^k \sin k\varphi$$
$$a_k z_2^k = a_k \varrho^k \cos k\varphi - i \cdot a_k \varrho^k \sin k\varphi$$
$$(k = 1, 2, \dots n)$$

tehát a megfelelő tagok conjugáltak és így a függvényértékek maguk is conjugált complexek, azaz ha $z_1 = x+yi$ és $z_2 = x-yi$ akkor

$$f(z_1) = X + Yi$$

akkor

$$f(z_2) = X - Yi$$

Ebből következik, hogy, ha egy $f(z)$, reális coefficiensekkel biró rat. eg. függvénynek egy complex nullapontja van, akkor mindig van egy ennek conjugált complex nullapontja is. Mert ha $f(z_1) = X + Yi = 0$, ez csak úgy lehetséges, ha külön $X = 0$ és $Y = 0$, de akkor $f(z_2) = X - Yi$ is eltűnik azaz $f(z_2) = 0$, tehát z_2 is nullapontja a függvénynek. Ha az egyik nullapont $z_1 = \alpha + \beta i$, és $z_2 = \alpha - \beta i$, akkor a megfelelő pro-

factorok szorzata $\quad (z-\alpha-\beta i)(z-\alpha+\beta i)=(z-\alpha)^2+\beta^2$
tehát két conjugált complex nullapont primfüggvényeinek szorzata egy quadratikus reális függvény, és igy mondhatjuk, hogy minden reális coefficiensekkel biró, rat. eg. függvényt fel lehet bontani első és másodfoku factorokra.

A rationalis egész függvény meghatározása Lagrange formulája.

Egy n-edfoku rat. eg. függvényben $(n+1)$ constans szerepel: $a_0, a_1, \dots a_n$. Ez az $(n+1)$ coefficiens teljesen meghatarozza a függvényt. De más $(n+1)$ adat is szolgálhat a rat. eg. függvény meghatározására. Tegyük fel, hogy megadjuk azt az n helyet: $\beta_1, \beta_2, \dots \beta_n$, a hol egy megszerkesztendő n-edfokú rat. eg. függvény eltünik, és azt a β_{n+1} helyet, a hol a függvény értéke $u_{n+1} \neq 0$, akkor ezen adatokból a kérdéses függvény megszerkeszthető. Mert egyfelől

$$f(z)=a_n(z-\beta_1)(z-\beta_2)\dots\dots(z-\beta_n)$$

másfelől

$$u_{n+1}=a_n(\beta_{n+1}-\beta_1)(\beta_{n+1}-\beta_2)\dots\dots(\beta_{n+1}-\beta_n)$$

a melyből

$$a_n=\frac{u_{n+1}}{(\beta_{n+1}-\beta_1)\dots(\beta_{n+1}-\beta_n)}$$

és ezt betéve az első formulába

$$f(z)=u_{n+1}\frac{(z-\beta_1)\dots\dots(z-\beta_n)}{(\beta_{n+1}-\beta_1)\dots(\beta_{n+1}-\beta_n)} \qquad \text{I.}$$

ha ezt a kifejezést rendezzük, megkapjuk a kivánt n-edfokú rat. eg. függvényt, a mely a $\beta_1, \dots \beta_n$ helyeken eltünik, a β_{n+1} helyen pedig felveszi az u_{n+1} értéket.

Egy más meghatározási módja a rat. eg. függvénynek, Lagrangetól származik. E szerint megszerkeszthetjük az n-edfokú rat. eg. függvényt $f(z)$-t, ha megmondjuk, hogy

$f(z)$ értéke a $\beta_1, \beta_2, \dots \beta_n, \beta_{n+1}$ helyeken

$u_1, u_2; \dots u_n, u_{n+1}$

Ugyanis az előbbi formula szerint meghatározzuk az φ_1 n-edfokú rat. eg. függvényt, melynek értéke

	$\beta_1,$	$\beta_2,$	$\dots$	$\beta_n,$	β_{n+1}	helyen
	$u_1,$	$0,$	$\dots$	$0,$	0	; továbbá azt a
φ_2 " " " "	$0,$	$u_2,$	$\dots$	$0,$	0	; " " "
. . . . .	.	.	. . . .	.	.	azt a
φ_n " " " "	$0,$	$0,$	$\dots$	$u_n,$	0	, és végre " "
φ_{n+1} " " " "	$0,$	$0,$	$\dots$	$0,$	u_{n+1}	.

akkor a keresett függvény

$$f(z) = \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n + \varphi_{n+1} \qquad \text{II.}$$

mert ez az összeg egy n-edfokú rat. eg. függvény (lévén mindegyik tagja az), mely a $\beta_1, \beta_2, \dots \beta_{n+1}$ helyeken az előírt értékekkel bír, mivel mindannyiszor az illető β-val nem egyenlő indexű φ függvények az összegből eltünnek. Ilyen $f(z)$ függvény, mely a fenti előírt tulajdonságokkal bír, csak egy van. Mert tegyük fel, hogy volna még egy, az előbbitől különböző alaku $g(z)$ függvény, mely ugyanazokkal a tulajdonsagokkal bír, mint $f(z)$; kimutatjuk, hogy ez a két rat. eg. függvény identikus. Mert megalkotva a kettő különbségét, ez a $\chi(z) \equiv f(z) - g(z) = 0$, ha $z = \beta_1, \beta_2, \dots \beta_n, \beta_{n+1}$ vagyis ez a különbséges n-edfokú rat. eg. függvény $(n+1)$ helyen válik nullá, de akkor coefficiensei egy ismeretes tétel szerint nullák, vagyis ugyanezen tétel szerint a két $f(z)$ és $g(z)$ függvény identikus. Tehát csak egy ilyen $f(z)$ függvény létezik.

Az I. alatti formulát Lagrange féle formulának nevezzük. Ezt egyszerübb alakban is felirhatjuk. E végett lássuk előbb, miképen lehet a szorzatalakban adott $f(z)$ függvény első deriváltját a primfactorokkal kifejezni. Ha a Taylor féle sor~~ban~~ szerint z helyébe $(z+h)$-t irunk, akkor

$$f(z+h) = f(z) + \underline{f'(z)h} + \cdots + \frac{f^{(n)}(z)}{n!}h^n$$

tehát a h-val szorzott rész a függvény első deriváltja. Ennélfogva, ha a függvény szorzatalakjában

$$f(z) = a_n(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_n)$$

z helyébe $(z+h)$-t irunk és a szorzásokat elvégezzük, akkor a h-val szorzott tagok összege $f'(z)$. Miután az

$$f(z+h) = a_n(z-\alpha_1+h)(z-\alpha_2+h)\cdots(z-\alpha_n+h)$$

szorzatból csakis a h-val szorzott tagokra van szükségünk, ezeket nyerjük, ha vesszük az első factorból a h-t és ezt szorozzuk a többi factorok $(z-\alpha_k)$ alakú tagjaival $(k=2,3,\ldots n)$; ezt tesszük valamennyi factorból kiragadott h-ra nézve, akkor ezen szorzatok összege $f'(z)h$, tehát

$$\begin{aligned} f'(z) = {} & a_n(z-\alpha_2)(z-\alpha_3)\cdots\cdots(z-\alpha_n) + \\ & + a_n(z-\alpha_1)(z-\alpha_3)\cdots\cdots(z-\alpha_n) + \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots + \\ & + a_n(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots\cdots(z-\alpha_{n-1}) \end{aligned}$$

Ezen képlet szerint nyerjük a függvény első deriváltját, ha a függvény szorzatalakban van megadva. Ebből adódnak az első derivált értékei a függvény nullapontjaiban

$$\begin{aligned} f'(\alpha_1) &= a_n(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)\cdots\cdots(\alpha_1-\alpha_n) \\ f'(\alpha_2) &= a_n(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)\cdots\cdots(\alpha_2-\alpha_n) \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f'(\alpha_n) &= a_n(\alpha_n-\alpha_1)(\alpha_n-\alpha_2)\cdots\cdots(\alpha_n-\alpha_{n-1}) \end{aligned}$$

vagyis az első derivált értékét valamely nullapontban megkapjuk, ha ebből a nullapontból levonva rendre a többi nullapontokat, ezen különbségek szorzatát még az a_n constanssal szorozzuk.

Ezeket tudva most már egyszerűbb alakban is felírhatjuk a Lagrange féle formulát. Legyen ugyanis

$$g(z) = (z-\beta_1)(z-\beta_2)\cdots(z-\beta_n)(z-\beta_{n+1})$$

akkor

$$g'(\beta_1) = (\beta_1-\beta_2)(\beta_1-\beta_3)\cdots(\beta_1-\beta_n)(\beta_1-\beta_{n+1})$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$g'(\beta_{n+1}) = (\beta_{n+1}-\beta_1)(\beta_{n+1}-\beta_2)\cdots(\beta_{n+1}-\beta_n)$$

De láttuk, hogy a Lagrange féle formulában szereplő φ_1 az I formula szerint:

$$\varphi_1 = u_1 \frac{(z-\beta_2)(z-\beta_3)\cdots(z-\beta_{n+1})}{(\beta_1-\beta_2)(\beta_1-\beta_3)\cdots(\beta_1-\beta_{n+1})}$$ Lagrange f.

a felső nem egyébb, mint $\frac{g(z)}{z-\beta_1}$, az alsó $g'(\beta_1)$ és $u_1 = f(\beta_1)$, tehát

$$\varphi_1 = \frac{f(\beta_1)}{g'(\beta_1)} \cdot \frac{g(z)}{z-\beta_1}$$

analog uton adódik, hogy $\varphi_2 = \frac{f(\beta_2)}{g'(\beta_2)} \cdot \frac{g(z)}{z-\beta_2}$

stb.

ezeket a φ függvényeket összegezve, kapjuk a Lagrange féle formula következő egyszerü alakját

$$f(z) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{f(\beta_k)}{g'(\beta_k)} \cdot \frac{g(z)}{z-\beta_k}$$

Tört rationalis függvény.

Az olyan függvényt, melyben a változó az állandókkal a négy rationalis operatio: összeadás, kivonás, szorzás és osztás által van öszszekapcsolva, nevezzük tört rationalis függvénynek. Bármily complicált módon is legyenek az állandók a változóval összekapcsolva, ha elvégezzük a négy operatiot, mindig erre a normalis alakra hozhatjuk a tört rat. függvényt:

$$F(z) = \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots + b_m z^m}$$

Tehát a tört rationális függvény két eg. rat. függvény hányadosa, melynek felsője és alsója lehetnek egyenlő, vagy különböző fokúak. A normális alakban a felső n, az alsó m-edfokú és $n \gtreqless m$.

Miután a rationális operatiók egyértékűek, azért a tört rat. függvény is egyértékű. Tehát általánosan: a rationalis függvény egyértékű függvény. De a tört rat. függvény már nem mindig véges és határozott, mert lehet z-nek olyan értéke, mely mellett $F(z) = \frac{0}{0}$ határozatlan alakot ölt. Azonban ki fogjuk mutatni, hogy mindig lehet úgy átalakitani a tört rat. függvényt, hogy az seholsem vehessen fel határozatlan alakot. Ugyanis mit jelent az, hogy $F = \frac{0}{0}$? Azt, hogy van olyan z érték, pl. α, mely mellett $f(\alpha) = 0$ és $g(\alpha) = 0$, vagyis van a felső és alsó függvénynek egy közös gyöke. De tudjuk, hogy akkor mindkettő osztható a $(z-\alpha)$ primfactorral (vagy esetleg ennek egy magasabb hatványával). A tört rationális függvény tehát csak akkor válik határozatlanná, ha a felső és alsó függvénynek közös osztója van, mert ilyenkor mindig van közös gyöke is. Erre a közös osztóra nézve vezessünk le néhány szükséges tételt. Ha adva két rat. eg. függvény $f(z)$ és $\varphi(z)$, akkor $f(z)$ osztható lesz $\varphi(z)$-vel, ha létezik olyan $\psi(z)$ rat. eg. függvény, miszerint $f(z)=\varphi(z).\psi(z)$. Ez definiálja az oszthatóságot.

Ha két függvény $f(z)$ és $g(z)$ külön-külön osztható egy $\varphi(z)$ függvénnyel, akkor összegük és különbségük is osztható ezzel a $\varphi(z)$-vel. Mert ha

$$f(z)=\varphi(z)\cdot\psi(z)$$

$$g(z)=\varphi(z)\cdot\chi(z)$$

akkor

$$f(z)\pm g(z)=\varphi(z)\left[\psi(z)\pm\chi(z)\right]=\varphi(z).\tau(z)$$

a mi azt mondja, hogy az összeg és különbség is osztható $\varphi(z)$-vel.

Ha $f(z)$ osztható $\varphi(z)$-vel, de $g(z)$ nem, akkor összegük és különbségük sem osztható $\varphi(z)$-vel; mert ha

$$f(z)=\varphi(z)\cdot\psi(z)$$

és feltennök, hogy $f(z)\pm g(z)=\varphi(z).\tau(z)$, akkor ebből következnék, hogy

$g(z)=\varphi(z).\chi(z)$ azaz osztható volna $\varphi(z)$-vel, pedig feltettük, hogy nem osztható.

Azt a legmagasabb fokú eg. rat. függvényt, mely két adott eg. rat. függvényt oszt, nevezzük a két függvény legnagyobb közös osztójának. Ezek után könnyü lesz átalakitani a tört rat. függvényt úgy, hogy ne vehesse fel egy helyen sem a $\frac{0}{0}$ alakot. Ha ugyanis $f(z)$ és $g(z)$ ezen tört rat. függvény felsője illetőleg alsója, és ha a kettő legnagyobb közös osztója $\varphi(z)$, tehát

$$f(z)=\varphi(z).f_1(z)$$

$$g(z)=\varphi(z)\,g_1(z)$$

akkor $f_1(z)$ és $g_1(z)$-nek már nem lehet közös gyöke, mert volna, pl. α, akkor mindkét függvény még osztható volna $(z-\alpha)$-val, tehát volna $f(z)$ és $g(z)$-nek egy a $\varphi(z)$-nél magasabb fokú legnagyobb közös osztója, a mit pedig kizártunk, mert feltettük, hogy $\varphi(z)$ a legnagyobb közös osztó. Igy tehát osztva felsőt és alsót $\varphi(z)$-vel,

$$F(z)=\frac{f_1(z)}{g_1(z)}$$ már seholsem válik határozatlanná. A későbbiekben mindig feltesszük, hogy a tört rat. függvény ezen értelemben már át van alakitva. Ezen észrevételeket még kiegészitjük annak megmutatásával, mikép lehet két adott eg. rat. függvény legnagyobb közös osztóját felkeresni.[2] A két függvényt, $f(z)$ és $g(z)$-t, előbb rendezzük z fogyó hatványai szerint, azután a magasabb fokút osztjuk az alacsonyabb fokúval (ha fokszámaik egyenlők, akármelyikkel oszthatunk). Legyen pl. $f(z)$ fokszáma n, $g(z)$ fokszáma m, és $n \geq m$, akkor két eset lehetséges:

1.) Lehet, hogy $\frac{f(z)}{g(z)} = q(z)$, vagyis $f(z)$ a $g(z)$-vel osztható maradék nélkül, a $q(z)$ hányados tehát rat. eg. függvény. Ebben az esetben a két függvény legnagyobb közös osztója maga $g(z)$.

2.) Lehet, hogy $\frac{f(z)}{g(z)} = q(z)+\frac{r_1(z)}{g(z)}$ vagyis $f(z)$ nem osztható $g(z)$-vel maradék nélkül, de ekkor a maradék $r_1(z)$ már legfeljebb csak $(m-1)$ edfokú. A fenti egyenlőségből két fontos következtetést vonhatunk. mert átszorozva $g(z)$-vel, kapjuk, hogy

$$f(z)=g(z)\cdot q(z)+r_1(z) \qquad \mathrm{I.}$$

és ebből $$f(z)-g(z)\cdot q(z)=r_1(z) \qquad \mathrm{II.}$$

Az I egyenletből következik, hogy a $g(z)$ osztónak és az $r_1(z)$ maradéknak legnagyobb közös osztójával az $f(z)$ osztandó is osztható. És II. ből következik, hogy az osztandó és osztó legnagyobb közös osztójával a maradék is osztható. Ez mindjárt megmutatja az utat, melyen haladva a két függvény legnagyobb közös osztóját megtalálhatjuk. Mert I. értelmében, ha felkeressük az osztó és maradék legnagyobb közös osztóját, ez az $f(z)$ és $g(z)$-nek is legnagyobb közös osztója lesz, de ez a feladat már egyszerűbb, mert hisz $r_1(z)$ legfeljebb $(m-1)$-ed fokú. Tehát úgy haladunk tovább, hogy felkeressük $g(z)$ és $r_1(z)$ legnagyobb közös osztóját, mi végett előbbit utóbbival elosztjuk. Nem vesszük tekintetbe azt az eshetőséget, midőn az osztás maradéka nulla, ekkor ugyanis a legutolsó hányados a keresett legn. k. osztó. Tehát legyen I. analogiájára

$$g(z) = r_1(z)\,q_1(z) + r_2(z)$$

a hol $r_2(z)$ már legfeljebb $(m-2)$-edfokú. Most $r_1(z)$-t tekintjük osztandónak, $r_2(z)$-t osztónak, lesz $r_1(z) = r_2(z)\cdot q_2(z) + r_3(z)$ és így tovább folytatva, mindig a legutolsó osztót osztandónak, a maradékot osztónak tekintve, végre, miután a maradék foka mind lejebb száll, két eset következhetik be.

1.) Lehet, hogy a k-adik osztásnál nem lép fel maradék, azaz

$$r_{k-1}(z) = r_k(z)\cdot q_k(z)$$

ekkor a már mondottak alapján ezen utolsó osztó $r_k(z)$ az $f(z)$ és $g(z)$ legnagyobb közös osztója, mert hisz minden előtte való osztó és osztandónak legnagyobb közös osztója.

2.) Lehet, hogy a k-adik osztás maradéka egy nulltól különböző állandó, azaz

$$r_{k-1}(z) = r_k(z)\cdot q_k(z) + \mathrm{Const.}$$

ekkor nyilvánvaló, hogy $f(z)$ és $g(z)$-nek nincs közös osztója. Mert ha volna, akkor a II. tétel szerint lefelé következtetve, ez az utolsó osztónak $r_k(z)$-nek és a Const.nak is közös osztója volna, de ez absurdum. Ebben az esetben tehát $f(z)$ és $g(z)$-nek nem lévén közös gyöke, az $\frac{f(z)}{g(z)}$ tört rat. függvény seholsem válik határozatlanná.

Két rat. eg. függvény legnagyobb osztójának ezen felkeresési módja Euclidestől származik.

Ezek után térjünk át a tört rat. függvény tulajdonságainak vizsgálatára, természetesen feltéve, hogy a határozatlanság kiküszöbölése végett az esetleges átalakitást keresztül vittük.

Legyen a mi függvényünk

$$F(z)=\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n}{b_0+b_1z+b_2z^2+\cdots+b_mz^m}$$

Vizsgálva a függvény magaviseletét a számsik különböző helyein, három esetet kell megkülönböztetnünk: 1.) a hely, mely körül a függvényt vizsgáljuk sem a felsőnek, sem az alsónak nem nullapontja; 2.) a hely a felsőnek nullapontja, az alsónak nem; 3.) az illető hely az alsónak nullapontja, a felsőnek nem. Vegyük az eseteket rendre.

1.) Ki fogjuk mutatni, hogy olyan α pont körül, mely sem a felsőnek, sem az alsónak nem nullapontja, a tört rat. függvény folytonos. Ha ugyanis $z=\alpha+h$, a hol $|h|<\varrho$, mely ϱ felett később rendelkezünk, akkor $F(z)=\dfrac{f(\alpha+h)}{g(\alpha+h)}=\dfrac{f(\alpha)+f'(\alpha)h+\cdots+\frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}h^n}{g(\alpha)+g'(\alpha)h+\cdots+\frac{g^{(m)}(\alpha)}{m!}h^m}$

és $F(\alpha)=\dfrac{f(\alpha)}{g(\alpha)}$, tehát a kettő különbségét alkotva

$$F(\alpha+h)-F(\alpha)=\frac{g(\alpha)f(\alpha+h)-f(\alpha)g(\alpha+h)}{g(\alpha)\cdot g(\alpha+h)}$$

Miután a felsőben a h-val nem szorzott tagok összege $f(\alpha)g(\alpha)-f(\alpha)g(\alpha)=0$, marad ott h-nak eg. rationalis függvénye constans tag nélkül, mely legfeljebb m vagy n-edfokú, a szerint, hogy melyik nagyobb fokszám. Tehát $F(\alpha+h)-F(\alpha)=\dfrac{A_1h+A_2h^2+\cdots}{g(\alpha)\cdot g(\alpha+h)}=\dfrac{A_1h+A_2h^2+\cdots\cdots}{g(\alpha)\left[g(\alpha)+g'(\alpha)h+\cdots+\frac{f^{(m)}(\alpha)}{n!}h^n\right]}$

Feltevésünk értelmében $g(\alpha) \neq 0$, és így megadhatunk egy olyan véges ϱ_1 igen kis positiv mennyiséget, hogy mihelyt $|h| < \varrho_1$, már $g(\alpha+h) \neq 0$, és pedig az α centrumu ϱ_1 sugarú körön belül mindenütt. Ha most a $g(z)$ függvény minimalis értéke m, akkor ez nyilvánvalóan kisebb mint $g(\alpha)$ és $g(\alpha+h)$, vagy legalább is nem nagyobb, mert hisz a ϱ_1 sugaru körön belül mindkettő nulltól különböző. Ha tehát a nevezőben $g(\alpha)$ és $g(\alpha+h)$ helyett m-et irunk, a jobboldalt nagyobbitjuk, tehát ha $|h| < \varrho_1$, akkor

$$\mathcal{F}(\alpha+h) - \mathcal{F}(\alpha) < \frac{1}{m^2}(A_1 h + A_2 h^2 + \cdots\quad)$$

már most a jobboldalon csak egy egész rationális függvény áll, melynek absolut értéke tetszésszerint kicsinynyé tehető, ha benne a h-t eléggé megszoritjuk. (Pl. $|A_1 h + \cdots| < \eta$, ha $|h| < \frac{\eta}{A+\eta}$, a hol A az $A_1, A_2, \ldots$ coefficiensek maximuma). Ha tehát megadunk egy tetszőleges kis positiv η mennyiséget és megszoritjuk másodszor a $|h|$-t úgy, hogy $|h| < \frac{\eta m^2}{A+\eta m^2} = \varrho_2$, akkor

$$|\mathcal{F}(\alpha+h) - \mathcal{F}(\alpha)| < \eta$$

a mely egyenlőtlenség azt fejezi ki, hogy oly hely körül, mely sem a felsőnek sem az alsónak nem nullapontja, a tört rat. függvény folytonos. Igaz, hogy eme bizonyitásnál $|h|$ számára két felső határt szabtunk ki, ϱ_1 és ϱ_2, de ha mindkét esetben a kisebbiket veszszük, az egyenlőtlenség teljesülni fog. Itt is áll az, hogy a tört rat. függvény azt az értékét, melyet α-ban felvesz, annak közvetlen közelében nem ismétli. Hogy ezt beláthassuk, vegyük tekintetbe, hogy a felsőben levő A coefficiensek közül némelyek el is tünhetnek. Legyen A_k az első nulltól különböző coefficiens, akkor

$$\mathcal{F}(\alpha+h) - \mathcal{F}(\alpha) = h^k \frac{A_k + A_{k+1} h + \cdots\cdots}{g(\alpha)\, g(\alpha+h)}$$

s a mint láttuk, h-t mindig meglehet szoritani úgy, hogy $g(\alpha+h)$ a nulltól különböző legyen, de akkor h-nak minden ezen megszoritott intervallumon belül eső és o-tól különböző értékei mellett úgy h^k, mint a felsők nulltól különbözők, tehát $F(\alpha+h)-F(\alpha)\neq o$ vagyis a tétel helyes.

2.) A második eset az, midőn a felső $f(z)$ bizonyos α pontban eltünik az alsó nem. Általánosság kedvéért tegyük fel mindjárt, hogy α az $f(z)$ k-szoros nullapontja, akkor a mint tudjuk a k-dikig kizárolag minden derivált $z=\alpha$ mellett eltünik, úgy hogy

$$F(\alpha+h)=\frac{\frac{f^{k}(\alpha)}{k!}h^k+\frac{f^{k+1}(\alpha)}{(k+1)!}+\cdots}{g(\alpha)+g'(\alpha)h\cdots}=h^k\frac{\frac{f^{k}(\alpha)}{k!}+\frac{f^{k+1}(\alpha)}{(k+1)!}+\cdots}{g(\alpha)+g'(\alpha)h}$$

tehát $\lim\limits_{h=o}\frac{F(\alpha+h)}{h^k}=\frac{f^{k}(\alpha)}{k!\,g(\alpha)}$ s ha h elsőrangu végtelen kicsiny, akkor ez azt jelenti, hogy $F(\alpha+h)$, vagyis a függvény értéke ezen α pont körül k-ad rangu végtelen kicsiny, a mi, a mint láttuk, azt jelenti, hogy a tört rationalis függvénynek ama pontban (α), hol a felsőnek k-szoros o pontja van, szintén k-szoros nullapontja van.

3.) A harmadik eset az, midőn bizonyos β pontban az alsó $g(z)$ eltünik, míg a felső véges marad. Tegyük fel mindjárt, hogy β a $g(z)$-nek k-szoros nullapontja, akkor

$$F(\beta+h)=\frac{f(\beta+h)}{g(\beta+h)}=\frac{f(\beta)+f'(\beta)h+\cdots\cdots}{\frac{g^{k}(\beta)}{k!}h^k+\frac{g^{k+1}(\beta)}{(k+1)!}+\cdots}=\frac{1}{h^k}\cdot\frac{f(\beta)+f'(\beta)h+\cdots\cdots}{\frac{g^{k}(\beta)}{k!}+\frac{g^{k+1}(\beta)}{(k+1)!}+\cdots\cdots}$$

tehát $\lim\limits_{h=o}\frac{F(\beta+h)}{\frac{1}{h^k}}=\frac{f(\beta)\,k!}{g^{k}(\beta)}$ s mivel $\lim\limits_{h=o}\left(\frac{1}{h^k}\right)$

egy k-ad rangu végtelen nagy mennyiség, mondhatjuk, hogy a tört rat. függvény ezen β körül egy k-ad rangu végtelen nagy mennyiség, a miből következik, hogy a tört rat. függvény oly helyen, mely az alsónak k-szoros nullapontja k-szoros polussal bír.

Mondhatjuk tehát, hogy a számsík oly helye, mely a felsőnek k-szoros nullapontja, a függvénynek is k-szoros 0-pontja, az alsónak k-szoros nullapontja, a tört függvénynek k-szoros polusa.

Lássuk most mikép viselkedik a tört rat. függvény a végtelen távoli pontban? E végett írjuk $F(z)$ oly alakban, hogy a felsőt és alsót az alsó legmagasabb hatványának coefficiensével osztjuk, úgy hogy z^m coefficiense 1 legyen. Tehát

normál alak

$$F(z) = \frac{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots a_1 z + a_0}{z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots b_1 z + b_0}$$

és kivéve z^n és z^m-t $F(z) = \frac{z^n}{z^m} \cdot \frac{a_n + a_{n-1}\zeta + \dots + a_1 \zeta^{n-1} + a_0 \zeta^n}{1 + b_{m-1}\zeta + \dots + b_1 \zeta^{m-1} + b_0 \zeta^m}$, ha $\frac{1}{z} = \zeta$

ha most $z = \infty$, akkor $\zeta = 0$, s így a második tört limese $\frac{a_n}{1} = a_n$

látható tehát, hogy $\lim\limits_{z=\infty} F(z)$ csupán a $\frac{z^n}{z^m}$ hányadostól függ, s itt 3 esetet kell megkülönböztetni.

1. $n > m$, akkor $\frac{z^n}{z^m} = z^{n-m}$ s mivel $\lim\limits_{z=\infty} z^{n-m} = \infty$,

lesz $\lim\limits_{z=\infty} \frac{F(z)}{z^{n-m}} = \infty$, vagyis a végtelen távoli pont a tört rat. függvénynek $(n-m)$-szeres polusa.

2. $n = m$, akkor $\frac{z^n}{z^m} = 1$, tehát $\lim F(z) = a_n$, vagyis a tört rationalis függvénynek a végtelen távoli pontban véges értéke van.

3. $n < m$, akkor $\frac{z^n}{z^m} = \frac{1}{z^{m-n}}$ és $\lim\limits_{z=\infty} \frac{1}{z^{m-n}} = \lim\limits_{\zeta=0} \zeta^{m-n} = 0$ lévén

$\lim\limits_{z=\infty} \dfrac{F(z)}{\frac{1}{z^{m-n}}} = a_n$, tehát a tört rat. függvénynek a végtelen távoli pontban $(m-n)$ szeres nullapontja van.

Látjuk tehát, hogy a különbség a tört r. és az egész r. függv. közt az, hogy annak a végesben is vannak polusai.

Kérdés most, hogy egy adott C értéket hányszor vesz fel az $F(z)$ függvény. Ha $F(z) = \frac{f(z)}{g(z)} = C$, akkor $f(z) - g(z) \cdot C = 0$, ennek az egész rat. függvénynek pedig annyi nullapontja van, a mennyi a legmagasabb hatványának kitevője.

Így tehát egy adott C értéket annyiszor vehet fel egy tört rat.

függvény, a mennyi a benne szereplő legmagasabb kitevő.

Ugyanaz áll, ha $c = 0$ és ha $c = \infty$. Lássuk hány helyen veszi fel $F(z)$ a 0 és ∞ értéket. Itt 3 esetet kell megkülönböztetni, a szerint, a mint $n > m$, $n = m$ és $n < m$. A következő táblázat mutatja a helyek számát az egyes esetekben 0 és ∞-re.

		a $n>m$	b $n=m$	c $n<m$
1.	0	n	n	m
2.	∞	n	m	m

1.a.) ha $n > m$, végtelenben nem lehet 0 pont, mert ott $F(z) = \infty$ s csak $f(z) = 0$-nak $\underline{n}$ helye lehet $F(z)$-nek n nullapontja.

1.b.) ha $n = m$, ugyanazon okból végtelenben nem lehet 0 pt, ($F(z) = a_n$), tehát szintén $f(z) = 0$ n nullapontja lesz $F(z)$-nek nullapontja.

1.c.) ha $n < m$, akkor egyfelől $f(z) = 0$-nak n nullapontja felel meg, de megfelel $g(z) = 0$ $m-n$ nullapontja is, mert az előbb tárgyalt 3 eset szerint a végtelen távoli pont is $(m-n)$ szeres nullapont, ha $n < m$, tehát összesen $n + m - n = m$ nullapontja lesz akkor $F(z)$-nek.

2.a.) $F(z)$-nek értéke 2 esetben válhatik végtelenné, először $g(z) = 0$-nak m véges gyöke mellett, azután az 50. old. 1.) szerint $f(z)$-nek $(n-m)$ szeres polusában, azaz a végtelen $(n-m)$ helyén, tehát n helyen.

2,b.) ha $n = m$, $F(z)$ csakis $g(z) = 0$ m véges gyöke mellett lehet végtelen.

3,c.) ha $n < m$ szintén csak $g(z) = 0$ m véges pontjában.

Vizsgáljuk most a függvény természetét a polusok közelében felhasználva annak következő alakját

$$F(z) = \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots + b_n z^m}$$

Az $F(z)$ polusai a nevezőfüggvény nullapontjai, vagy ha $n > m$, akkor $z = \infty$ is az $F(z)$ polusai. Ezek körül kell tehát vizsgálni a függvényt. Vegyük először a véges polusokat. Általánosság kedvéért mindjárt felteszük, hogy a $g(z)$ nullapontjai többszörösek, legyenek tehát a nullapontok $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots\ldots \beta_r$ s a sokszorossági számok $k_1, k_2, k_3, \ldots\ldots k_r$, a hol $k_1+k_2+k_3+\cdots+k_r=m$ akkor nyilvánvaló, hogy $g(z)=(z-\beta_1)^{k_1}\cdot g_1(z)$, a mely $g_1(z)$ függvénynek a β_1 már nem 0 pontja. Minthogy k_1-szeres nullapont esetén

$$g(z)=\frac{g^{(k_1)}(\beta_1)}{k_1!}(z-\beta_1)^{k_1}+\frac{g^{(k_1+1)}(\beta_1)}{(k_1+1)!}(z-\beta_1)^{k_1+1}+\ldots\ldots+\frac{g^{(m)}(\beta_1)}{m!}(z-\beta_1)^{m},$$

ezt osztva $(z-\beta_1)^{k_1}$-el, lesz $g_1(z)=\dfrac{g^{(k)}(\beta_1)}{k_1!}+\dfrac{g^{(k_1+1)}(\beta_1)}{(k_1+1)!}(z-\beta_1)+\cdots+\dfrac{g^{(m)}(\beta_1)}{m!}(z-\beta_1)^{m-k_1}$

Ha most vizsgálni akarjuk a függvényt β_1 polus körül, akkor $z=\beta_1+h_1$ teendő s akkor

$$\mathfrak{F}(\beta_1+h_1)=\frac{f(\beta_1+h_1)}{h_1^{k_1}\cdot g_1(\beta_1+h_1)}$$

$$h_1^{k_1}\mathfrak{F}(\beta_1+h_1)=\frac{f(\beta_1)+f'(\beta_1)h_1+\frac{1}{2!}f''(\beta_1)h_1^2+\cdots\cdot}{g_1(\beta_1)+g_1'(\beta_1)h_1+\frac{1}{2!}g_1''(\beta_1)h_1^2+\cdots}$$

Minthogy a nevező a 0-tól különböző, mert hisz β_1 már nem nullapontja $g_1(z)$-nek, azért a tört által jelölt osztást elvégezhetjük, folytassuk ezt addig, míg h_1 legmagasabb hatványa $h_1^{k_1-1}$ lesz. A fellépő coefficienseket A jelölve, lesz

$$h_1^{k_1}\mathfrak{F}(\beta_1+h_1)=A_0'+A_1'h_1+A_2'h_1^2+\cdots\cdots+A'_{k_1-1}h_1^{k_1-1}+\frac{h_1^{k_1}f_1(h_1)}{g_1(\beta_1+h_1)}$$

tehát az osztásból előáll egy egész rat. függvény, meg egy tört rat. függvény, a hol $f_1(h_1)$ a h_1-nek egy bizonyos rat. függvénye s most osztva az egyenlet mindkét oldalát $h_1^{k_1}$-el s $h_1=z-\beta_1$ téve

$$\mathfrak{F}(z)=\underbrace{\frac{A_0'}{(z-\beta_1)^{k_1}}+\frac{A_1'}{(z-\beta_1)^{k_1-1}}+\cdots\cdots+\frac{A'_{k_1-1}}{z-\beta_1}}_{\psi_1(z)}+\frac{f_1(z-\beta_1)}{g_1(z)}$$

Ily alakra lehet reducálni a tört rat. függvényt; észrevehető hogy a jobboldali törtek az utolsó kivételével a β_1 polusban mind végtelenné válik, míg az utolsó véges marad, mert hisz $g_1(z)$-nek a β_1 nem nullapontja. A β_i helyen végtelenné váló törteket nevezzük a β_1 polushoz tartozó partialis törteknek s ezek összege legyen $\psi_1(z)$; akkor

$$F(z) - \psi_1(z) = \frac{f_1(z-\beta_1)}{g_1(z)} \qquad \mathrm{I.}$$

a mi azt mondja, hogy a β_i polusra nézve az $F(z) - \psi_1(z)$ különbség véges mennyiség (lehet 0 is) daczára annak, hogy ott a β_1 helyen mind $F(z)$ mind $\psi_1(z)$ végtelenné válik. Ezt az eljárást ismételhetjük a többi polusokra nézve is, s mindenkor egy alg. osztás által egy a fenntihez hasonló maradék tört rat. függvényhez és egy a fenntihez hasonló tulajdonságu partialis törtcsoporthoz jutunk. Jelöljük a β_2, β_3, ... β_r-hez tartozó part. törtek összegét megfelelöleg $\psi_2(z)$, $\psi_3(z)$, ... $\psi_r(z)$-vel. Hátra van még az $n \geq m$ esetén a függvény megvizsgálása a $z=\infty$ polus körül. E végett a függvényeme alakját használjuk

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0}{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_0}$$

s most már a kijelölt algebrai osztást addig végezzük, míg épen egy egy eg. rat. függvényt kapunk, tehát a míg

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \underbrace{A_0 z^{n-m} + A_1 z^{n-m-1} + \dots + A_{n-m}}_{\psi_0(z)} + \frac{f_0(z)}{g(z)}$$

a hol $f_0(z)$ már kisebb foku mint $g(z)$, s így látható, hogy $z=\infty$ mellett a $\psi_0(z)$-vel jelölt eg. rat. függvény végtelenné válik, míg az utolsó tört $z=\infty$ mellett eltünik, vagyis $F(z) - \psi_0(z) = 0$ (II.) ha $z=\infty$. S most már ki fogjuk mutatni, hogy

$$F(z) = \psi_0(z) + \psi_1(z) + \psi_2(z) + \dots + \psi_r(z)$$

E végett alkossuk meg ezt a különbséget

$$F(z) - \psi_0(z) - \psi_1(z) - \psi_2(z) - \dots - \psi_r(z).$$

s ennek a függvénytani jellegét vizsgáljuk. E vizsgálatnál 3 eset lehetséges. Lehet hogy ez a különbség egész vagy

tört. rat. függvény, vagy lehet, hogy constans.
tört. rat. függvény, vagy lehet, hogy véges polusai legyenek.
1.) Ha a függvény tört rat. kell, hogy véges polusai legyenek.

$\mathfrak{F}(z)$ polusai $\beta_1\ \beta_2 \ldots\ldots\ \beta_r$

$\psi_0(z)$-nek nincs véges polusa, csak $z=\infty$

$\psi_1(z)$ polusa β_1, $\psi_2(z)$-é $\beta_2 \ldots\ldots \psi_r(z)$ polusa β_r.

Igen de 53 I. szerint $\mathfrak{F}(z)-\psi_1(z)$ véges, azaz nincs véges polusa β_1-ben; úgy szintén nem polusa a β_1 a $\psi_0(z)$, $\psi_2(z) \ldots\ldots \psi_r(z)$-nek. Tehát β_1 nem lehet e különbség polusa. Ugyanez áll a $\beta_2\ \beta_3 \ldots \beta_r$ polusokra, egyik sem lehet a különbség függvénynek polusa. Tehát nem lévén véges polus, a függvény nem lehet tört rat. függvény.

2.) De egész rat. függvény sem lehet, mert ehez szükséges, hogy $z=\infty$ a függvény polusa legyen. Ámde II szerint $\mathfrak{F}(z)-\psi_0(z)$ nem válik végtelenné, hanem eltünik $z=\infty$ mellett, ugyanaz áll a $\psi_1(z)\ \psi_2(z) \ldots\ldots \psi_r(z)$ partialis törtekre, és így $z=\infty$ mellett nem lévén polus, a függvény egész rat. függv. sem lehet.

3.) Lehetne tehát a függvény constans. De mivel $z=\infty$ mellett az egész különbség null lesz, azért 0 ez a constans, vagyis a függvény értéke 0, ami azt jelenti, hogy

$$\mathfrak{F}(z)=\psi_0(z)+\psi_1(z)+\psi_2(z)+\ldots\ldots\psi_r(z)$$

a hol $\psi_0(z)$ egy eg. rat. függvény, a többi tagok pedig csupa partialis törteknek összegei. Ez az egyenlet tehát azt a tételt fejezi ki, hogy minden tört rat. függvény előállitható mint egy eg. rat. függvénynek a partialis törteknek összege. Iminthogy ezen ψ függvényeknek csak egy-egy polusuk van, mondhatjuk, hogy minden rat. tört függvényt elő lehet állitani mint egy polusu függvények összege. Az 52 old. utolsó előtti egyenletből látható mikép kell valamely β_r polushoz tartozó part. törtek számlálóit: $A_0^r, A_1^r, \ldots\ldots A_{\kappa_r-1}^r$ meghatározni. Megszorozzuk $\mathfrak{F}(z)$-t $(z-\beta_r)^{\kappa_r}$-el s ebben $z=\beta_r+h$ helyettesitünk, rendezzük számlálót is nevezőt k növő hatványai szerint, s azután végrehajtjuk az osztást, addig a míg k-nak kitevője egygyel kisebb mint a $3r$ polus sokszorossági száma, az így nyert hányadosban k hatványainak coefficiensei adják meg elelőleg a partialis törtek számlálóit.

A tört rationalis függvény sorbafejtése.

A partialis törtek segitségével most már a tört rationalis függvényt végtelen sorral állithatjuk elő, még pedig a binomialis tétel alapján, ha a kitevő negativ. A binomialis tétel alapján ugyanis

$$(I.)\qquad \frac{1}{(1-z)^{\kappa}} = (1-z)^{-\kappa} = 1 + \binom{-\kappa}{1}(-z) + \binom{-\kappa}{2}(-z)^2 + \dots + \binom{-\kappa}{n}(-z)^n + \dots$$

sez convergens, ha $|z| < 1$, divergens, ha $|z| \geqq 1$. Egy általános coefficiens

$$\binom{-\kappa}{n} = \frac{-\kappa\cdot(-\kappa-1)(-\kappa-2)\cdot\dots\cdot(-\kappa-n+1)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot\dots\cdot n}$$

$$= \frac{(-1)^n\cdot k(k+1)(k+2)\cdot\dots\cdot(k+n-1)}{n!} = (-1)^n\cdot\binom{\kappa+n-1}{n}$$

ily módon positiv felsőre átalakitva az összes coefficienseket, kapjuk, hogy

$$(1-z)^{-\kappa} = 1 + \binom{\kappa}{1}z + \binom{\kappa+1}{2}z^2 + \dots + \binom{\kappa+n-1}{n}z^n + \dots = S_\kappa(z)$$

A binomialis sor ezen alakja szolgáltatja a kiindulási pontot a tört rat. függvény sorbafejtésére, a mely igen sokféleképen történhetik. E végett először partialis törtekre bontjuk fel a függvényt. A partialis törtek általános alakja

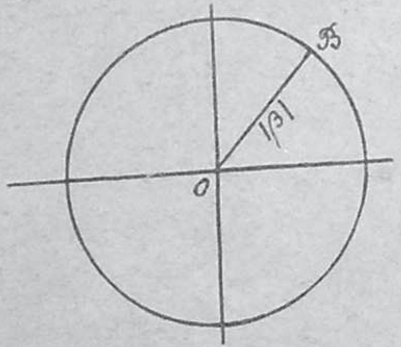
$$\frac{1}{(z-\beta)^{\kappa}}\cdot\text{const.},$$ tehát csak $\frac{1}{(z-\beta)^{\kappa}}$-t kell sorbafejteni

Lássuk tehát a különböző soralakokat.

1.) $(z-\beta)^{-\kappa} = \left[(-\beta)\left(1-\frac{z}{\beta}\right)\right]^{-\kappa}$ átalakitást használva, lesz

$$\frac{1}{(z-\beta)^{\kappa}} = \frac{1}{(-\beta)^{\kappa}}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{z}{\beta}\right)^{\kappa}} = \frac{1}{(-\beta)^{\kappa}}\,S_\kappa\left(\frac{z}{\beta}\right) \qquad (1.)$$

Ez az $S\left(\frac{z}{\beta}\right)$ sor pedig I. szerint convergens, ha $\left|\frac{z}{\beta}\right| < 1$ vagy is ha $|z| < |\beta|$, tehát convergens egy a β pont absolut értékével, $|\beta|$-val o-ból beirt körön belül. Ez a kör a convergentia tartomány.



2.) Más tulajdonságu sort kapunk, ha $(z-\beta)$-ból z-t vesszük ki factornak

$$(z-\beta) = z\left(1-\frac{\beta}{z}\right), \text{ tehát}$$

$$\frac{1}{(z-\beta)^k} = \frac{1}{z^k}\left(1-\frac{\beta}{z}\right)^{-k} = \frac{1}{z^k} S_k\left(\frac{\beta}{z}\right) \qquad (2)$$

ez a sor I szerint convergens, ha $\left|\frac{\beta}{z}\right| < 1$, tehát ha $|z| > |\beta|$ vagy is az $|\beta|$-vel o-ból irt körön kivül. Látjuk tehát, hogy a partialis törteknek különböző sorbabontásuk lehet, az egyik a körön belül, a másik azon kivül convergens. Az (1) sor halad z-nek positiv egész hatványai szerint, míg (2) halad $\frac{1}{z}$ pos. egész hatványai szerint. Az (1) és (2) egyenlőségek

$$\frac{1}{(z-\beta)^k} = \frac{1}{(-\beta)^k} S_k\left(\frac{z}{\beta}\right) \quad , \ |z| < |\beta|$$

$$\frac{1}{(z-\beta)^k} = \frac{1}{z^k} S_k\left(\frac{\beta}{z}\right) \quad , \ |z| > |\beta|$$

csak addig birnak értelemmel, míg a kikötött feltételek teljesülnek, tehát a míg értelme van egyik vagy másik oldalnak.

Más soralakot kapunk, ha $z-\beta = z-\alpha-(\beta-\alpha)$ identicus átalakitást használjuk, a hol α egy különben tetszés szerinti, de β-től különböző szám. S most a szerint, a mint $(z-\alpha)$-t vagy $-(\beta-\alpha)$ vesszük ki, lesz

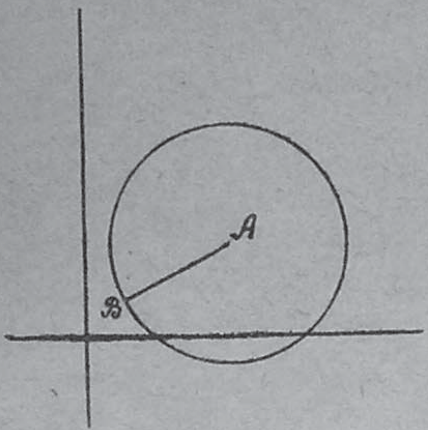
$$(1.) \quad (z-\beta) = (\alpha-\beta)\left(1-\frac{z-\alpha}{\beta-\alpha}\right)$$

$$(2.) \quad z-\beta = (z-\alpha)\left(1-\frac{\beta-\alpha}{z-\alpha}\right) \qquad \text{s ennek megfelelőleg}$$

$$\frac{1}{(z-\beta)^k} = \frac{1}{(\alpha-\beta)^k}\cdot\left(1-\frac{z-\alpha}{\beta-\alpha}\right)^{-k} = \frac{1}{(\alpha-\beta)^k} S_k\left(\frac{z-\alpha}{\beta-\alpha}\right) \qquad I.$$

$$\frac{1}{(z-\beta)^k} = \frac{1}{(z-\alpha)^k}\left(1-\frac{\beta-\alpha}{z-\alpha}\right)^{-k} = \frac{1}{(z-\alpha)^k} S_k\left(\frac{\beta-\alpha}{z-\alpha}\right) \qquad II.$$

Vizsgáljuk eme két sorbabontás tulajdonságait, convergentia feltételeit. Az I. sor halad $(z-\alpha)$ positiv egész hatványai szerint és convergens, ha $\left|\frac{z-\alpha}{\beta-\alpha}\right| < 1$ azaz $|z-\alpha| < |\beta-\alpha|$.



Ha az α-nak megfelelő pont A, a β nullapontnak megfelelő pont B, akkor az I sor convergens az A-ból AB sugárral írt körön belül.

A II sor halad $\frac{1}{z-\alpha}$ positiv, tehát $(z-\alpha)$ neg. egész hatványai szerint s miután szorzónak ott áll a sor előtt $\frac{1}{(z-\alpha)^{\kappa}}$, azért a sor legkisebb hatványa $\frac{1}{(z-\alpha)^{\kappa}}$. Ez a sor convergens, ha $\left|\frac{\beta-\alpha}{z-\alpha}\right| < 1$, vagyis ha $|z-\alpha| > |\beta-\alpha|$, tehát az A-ból AB sugárral írt kör peripheriáján kívül.

Látjuk tehát hogy ugyanazon partialis tört mily sokféleképp bontható sorba, a mennyiben α tetszőleges szám lehet. Az α-nak megfelelő A pontot nevezzük a sorbabontás centrumának, s ez lehet a számsíknak minden B-től különböző pontja. Ugyanilyen sorabakok léteznek a partiális törtek bármelyikére.

Ezek után most már könnyű lesz tört rat. függvény sorbabontása. Legyenek az $F(z)$ tört rat. függvény polusai

$\beta_1 \; \beta_2 \; \beta_3 \; \dots\dots \; \beta_r$ s a megfelelő sokszorosági számok $\kappa_1 \; \kappa_2 \; \kappa_3 \; \dots\dots \; \kappa_r$ s az egyes polusokhoz tartozó partiális törtek összege:

$\psi_1 \; \psi_2 \; \psi_3 \; \dots\dots \; \psi_r$, akkor, ha még tekintetbe vesszük, hogy $n \geqq m$ esetén még egy eg. rat. függvény $\psi_0(z)$ is felléphet, lesz

$$F(z) = \psi_0(z) + \psi_1(z) + \psi_2(z) + \dots\dots + \psi_r(z)$$

Már most pl. $\psi_1(z) = \frac{A_0'}{(z-\beta_1)^{\kappa_1}} + \frac{A_1'}{(z-\beta_1)^{\kappa_1-1}} + \dots\dots + \frac{A_{\kappa_1-1}'}{(z-\beta_1)}$

ezen partialis törteket egyenként sorbabonthatjuk $(z-\alpha)$ pos. vagy neg. egész hatványai szerint. Az első szerint

$$\frac{A_0'}{(z-\beta_1)^{\kappa_1}} = \frac{A_0'}{(\alpha-\beta_1)^{\kappa_1}} S_{\kappa_1}\left(\frac{z-\alpha}{\beta_1-\alpha}\right)$$

$$\frac{A_1'}{(z-\beta_1)^{\kappa_1-1}} = \frac{A_1'}{(\alpha-\beta_1)^{\kappa_1-1}} S_{\kappa_1-1}\left(\frac{z-\alpha}{\beta_1-\alpha}\right)$$

$$\frac{A_2'}{(z-\beta_1)^{\kappa_1-2}} = \frac{A_2'}{(\alpha-\beta_1)^{\kappa_1-2}} S_{\kappa_1-2}\left(\frac{z-\alpha}{\beta_1-\alpha}\right)$$

. . . .

. . . .

$$\frac{A_{\kappa_1-1}}{z-\beta_1} = \frac{A_{\kappa_1-1}}{\alpha-\beta_1} S_1\left(\frac{z-\alpha}{\beta_1-\alpha}\right)$$

Ha ezen sorokat összevonjuk, azaz összeadjuk, akkor egy $(z-\alpha)$ pos. egész hatványai szerint haladó sort kapunk, jelöljük ezt $P(z-\alpha)$ val, akkor tehát $\psi_1(z) = P_1(z-\alpha)$, mely convergens ha $|z-\alpha| < |\beta_1-\alpha|$.

Ha $(z-\alpha)$ negativ hatványai szerint (II) bontjuk sorba a $\psi_1(z)$ partialis törtjeit, akkor az előbbihez hasonló módon kapunk ezen sorok összeadásából egy $(z-\alpha)$ negativ egész hatványai szerint haladó sort, jelöljük ezt $N_1(z-\alpha)$-val, akkor másfelől $\psi_1(z) = N_1(z-\alpha)$, mely convergens $|z-\alpha| > |\beta_1-\alpha|$ mellett. Ugyanilyen módon állithatjuk elő egy ilyen $P(z-\alpha)$ vagy $N(z-\alpha)$ sorral a többi $\psi(z)$-ket is. $\psi_0(z)$ egész rationalis függvény lévén Taylor sora szerint sorba bontható

$$P_0(z-\alpha) = \psi_0(z) = \psi_0(\alpha) + \psi_0'(\alpha)(z-\alpha) + \cdots\cdots + \frac{\psi_0^{(n-m)}(\alpha)}{(n-m)!}(z-\alpha)^{n-m}$$

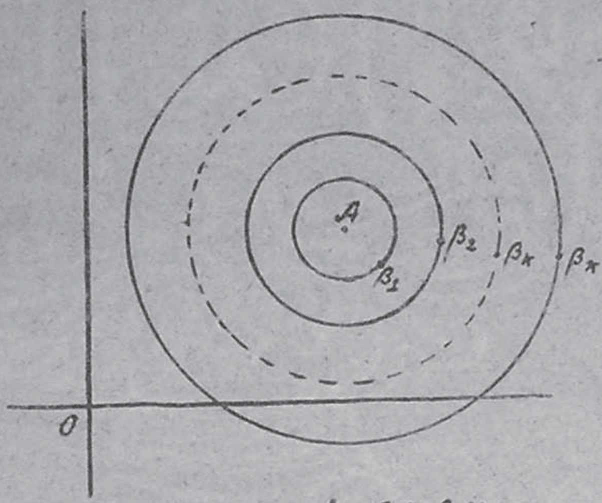
$(z-\alpha)$ pos. egész hatványai szerint. Ezen N vagy P sorokat összevonva kapjuk az $F(z)$ tört függvényt előállitva $(z-\alpha)$ hatványai szerint egy végtelen sorral.

Nyilvánvaló, hogy azt a sorbabontást kell venni, mely egyszerre alkalmazható mindegyik ψ-re.

Lássuk, ezen sorbabontás egységes geometriai ábrázolását. Legyen A a sorbabontás centruma s az A-tól való tavolságuk sorrendjében legyenek a polusok

$$\beta_1 \; \beta_2 \; \beta_3 \; \ldots\ldots\ldots\ldots \beta_r$$

Ezen távolságokkal A-körül irjunk concentricus köröket. Most már könnyü kimutatni, hogy lehet találni olyan sorbabontást, mely érvényes az első körön belül vagy r-edik körön kivül, söt olyant is lehet találni, mely egy bizonyos



körgyűrűn belül érvényes. Ugyanis két sorbabontási alakunk van: $\mathcal{P}(z-\alpha)$ és $\mathcal{N}(z-\alpha)$. Ha most az első kör peripheriáján belül érvényes sorbabontást akarunk, vesszük a $\mathcal{P}(z-\alpha)$ alakot

$$\mathcal{F}(z)=\psi_0(z)+\mathcal{P}_1(z-\alpha)+\cdots\cdots\mathcal{P}_r(z-\alpha)$$

mert valamennyi $\mathcal{P}$, tehát az $\mathcal{F}(z)$ nek közös convergentia területe a legkisebb kör.

Ha egy a legkülső körön kívül érvényes sorbabontást akarunk, vesszük az $\mathcal{N}(z-\alpha)$ alakot valamennyi partialis törtcsoportra

$$\mathcal{F}(z)=\psi_0(z)+\mathcal{N}_1(z-\alpha)+\cdots\cdots\cdots+\mathcal{N}_r(z-\alpha)$$

mert $\mathcal{N}_1(z-\alpha)$ érvényes ha $|z-\alpha|>|\beta_1-\alpha|$ .... és $\mathcal{N}_r(z-\alpha)$, ha $|z-\alpha|>|\beta_r-\alpha|$, tehát az r-dik körön kívül valamennyi érvényes.

Ha azt akarjuk, hogy a sorbabontás bizonyos körgyűrűben legyen érvényes, mindig találhatunk ilyen körgyűrűt, melyben nem fekszik polus, s ha most a gyűrűn belül fekvő polusok $\beta_1\ \beta_2\ \beta_3\ \cdots\cdots\beta_h$, azon kívül fekvők $\beta_{h+1}, \beta_{h+2}, \cdots\cdots\beta_r$, akkor amazokra az $\mathcal{N}(z-\alpha)$, ezekre a $\mathcal{P}(z-\alpha)$ alakot alkalmazva olyan

$$\mathcal{F}(z)=\mathcal{N}_1(z-\alpha)+\cdots\cdots+\mathcal{N}_h(z-\alpha)+\cdots\cdots+\mathcal{P}_r(z-\alpha)+\psi_0$$

sorbabontásunk van, mely halad $(z-\alpha)$ pos. és neg. hatványai szerint s érvényes a gyűrűben fekvő összes pontokra, ha ugyanis az összes $\mathcal{N}$-ket egy $(z-\alpha)$ neg. és az összes $\mathcal{P}$-ket egy $(z-\alpha)$ pos. hatványai szerint haladó sorrá vonjuk össze.

„Megjegyzendő különben, hogy két sorbabontást, mely a legbelső körön belül s a legkülsőn kívül érvényes, partialis törtek nélkül is eszközölhetünk. Az első esetben

$$\mathcal{F}(z)=\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{f(\alpha)+f'(\alpha)(z-\alpha)+\frac{f''(\alpha)}{2!}(z-\alpha)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(z-\alpha)^n}{g(\alpha)+g'(\alpha)(z-\alpha)+\frac{g''(\alpha)}{2!}(z-\alpha)^2+\cdots+\frac{g^{(m)}(\alpha)}{m!}(z-\alpha)^m}$$

s az osztást elvégezve, kapunk egy $(z-\alpha)$ pos. egész hatványai sze-rint haladó sort, mely érvényes a legkisebb körön belül. A második esetben

$$\mathcal{F}(z)=\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{\frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(z-\alpha)^{n}+\frac{f^{(n-1)}(\alpha)}{(n-1)!}(z-\alpha)^{n-1}+\cdots+f(\alpha)}{\frac{g^{(m)}(\alpha)}{m!}(z-\alpha)^{m}+\frac{g^{(m-1)}(\alpha)}{(m-1)!}(z-\alpha)^{m-1}+\cdots+g(\alpha)}$$

s az osztást elvégezve, ha $n \geqq m$, kapunk először egy egész ration. függvényt s ha a positiv hatványok elfogytak, egy $(z-\alpha)$ neg. hatványai szerint haladó végtelen sort, mely e szerint ér-vényes a legkülső körön kívül.

A Cauchy féle formula.

Vessük fel most azt a kérdést, melyet az egész rationa-lis függvényeknél Lagrange formulája $f(z)=\sum_{\kappa=1}^{n+1}\frac{f(\beta_\kappa)}{g'(\beta_\kappa)}\cdot\frac{g(z)}{z-\beta_\kappa}$ oldott volt meg, hogy t.i. hány ismeretes adat határozza meg a tört rat. függvényt s azután lássuk, miképp lehet az erre szüksé-ges adatokból a függvényt megszerkeszteni? Ez a vizsgálódás fog vezetni a Lagrange féle formula általánosítására, a Cauchy féle formulára. Egy oly tört rat. függvény, mel-nek számlálója n-ed, nevezője m-ed fokú, általános alakja ilyen

$$\mathcal{F}(z)=\frac{a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots\cdots+a_nz^n}{b_0+b_1z+b_2z^2+\cdots\cdots+z^m}$$

ebben tehát $n+m+1$ coefficiens van, s ha ezeket ismerjük a függvény határozott, meg tudjuk szerkeszteni. Már most lehet hogy nem a coefficienseket ismerjük, hanem más a-datokat $n+m+1$ számmal. Pl. szerkesszük meg az $\mathcal{F}(z)$ függvényt, ha adva az az $\underline{n}$ hely, melyen $\mathcal{F}(z)=0$ és további $m+1$ helyen adva függvény értéke, tehát ha

$$\begin{array}{llllllll} & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \;\cdots\cdots & \beta_n & \beta_{n+1}, & \beta_{n+2}, \;\cdots\cdots & \beta_{n+m}, \;\beta_{n+m+1} \\ \mathcal{F}(z)= & 0, & 0, & 0, \;\cdots\cdots & 0, & u_{n+1}, & u_{n+2} \;\cdots\cdots & u_{n+m}, \;u_{n+m+1} \end{array}$$

miután $\mathcal{F}(z)$ nullapontjai a számláló $f(z)$ nek nulla-

partjai, azért
$$F(z)=\frac{L(z)}{g(z)}=\frac{(z-\beta_1)(z-\beta_2)\cdot\ldots\cdot(z-\beta_n)}{g(z)}$$
tehát csak a $g(z)$-t kell a többi feltételeknek megfelelőleg meghatározni, az adatok értelmében
$$u_{n+1}=\frac{(\beta_{n+1}-\beta_1)(\beta_{n+1}-\beta_2)\cdot\ldots\cdot(\beta_{n+1}-\beta_n)}{g(\beta_{n+1})} \quad \text{a miből}$$
$$g(\beta_{n+1})=\frac{(\beta_{n+1}-\beta_1)(\beta_{n+1}-\beta_2)\cdot\ldots\cdot(\beta_{n+1}-\beta_n)}{u_{n+1}} \quad \text{hasonló módon}$$
$$g(\beta_{n+2})=\frac{(\beta_{n+2}-\beta_1)(\beta_{n+2}-\beta_2)\cdot\ldots\cdot(\beta_{n+2}-\beta_n)}{u_{n+2}}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$g(\beta_{n+m+1})=\frac{(\beta_{n+m+1}-\beta_1)(\beta_{n+m+1}-\beta_2)\cdot\ldots\cdot(\beta_{n+m+1}-\beta_n)}{u_{n+m+1}}$$
az adatokból tehát ismerjük a $g(z)$ értéket eggyel több helyen $(m+1)$, a hanyad fokú (m), ebből pedig már megtudjuk szerkeszteni a Lagrange féle formula alapján a $g(z)$ függvényt, ugyanis a szerint
$$g(z)=\left[\frac{(\beta_{n+1}-\beta_1)(\beta_{n+1}-\beta_2)\cdot\ldots\cdot(\beta_{n+1}-\beta_n)\cdot(z-\beta_{n+1})(z-\beta_{n+2})\cdot\ldots\cdot(z-\beta_{n+m+1})}{u_{n+1}\cdot(z-\beta_{n+1})\cdot(\beta_{n+1}-\beta_{n+2})\cdot\ldots\cdot(\beta_{n+1}-\beta_{n+m+1})}\right]$$
$$\frac{(\beta_{n+1}-\beta_1)(\beta_{n+1}-\beta_2)\cdot\ldots\cdot(\beta_{n+1}-\beta_n)}{u_{n+1}}\cdot\frac{(z-\beta_{n+2})(z-\beta_{n+3})\cdot\ldots\cdot(z-\beta_{n+m+1})}{(\beta_{n+1}-\beta_{n+2})(\beta_{n+1}-\beta_{n+3})\cdots(\beta_{n+1}-\beta_{n+m+1})}$$
$$+\frac{(\beta_{n+2}-\beta_1)(\beta_{n+2}-\beta_2)\cdots(\beta_{n+2}-\beta_n)}{u_{n+2}}\cdot\frac{(z-\beta_{n+1})(z-\beta_{n+3})\cdot\ldots\cdot(z-\beta_{n+m+1})}{(\beta_{n+2}-\beta_{n+1})(\beta_{n+2}-\beta_{n+3})\cdots(\beta_{n+2}-\beta_{n+m+1})}$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\frac{(\beta_{n+m+1}-\beta_1)\cdot\ldots\cdot(\beta_{n+m+1}-\beta_n)}{u_{n+m+1}}\cdot\frac{(z-\beta_{n+1})(z-\beta_{n+2})\cdot\ldots\cdot(z-\beta_{n+m})}{(\beta_{n+m+1}-\beta_{n+1})\cdot\ldots\cdot(\beta_{n+m+1}-\beta_{n+m})}$$
a [—]-ben fel van írva az első tag teljes alakja, de ez nem számítandó az összegben, utána áll az egyszerűsített alak, melynek mintájára van egyszerűsített alakban írva a többi tag is.

Látható tehát, hogy a $g(z)$ összeg mindegyik tagjának második felében nem fordul elő a számlálóban és nevezőben mint kivonandó az a β, melyre az illető tag vonatkozik (az elsőnél nem fordul elő β_{n+1}, a k-diknál β_{n+k}), ugy hogy a k-dik tag

$$\frac{(\beta_{n+k}-\beta_1)(\beta_{n+k}-\beta_2)\cdots\cdots(\beta_{n+k}-\beta_n)}{u_{n+k}}\cdot\frac{(z-\beta_{n+1})(z-\beta_{n+2})\cdots\cdots(z-\beta_{n+k-1})(z-\beta_{n+k+1})\cdots(z-\beta_{n+m+1})}{(\beta_{n+k}-\beta_{n+1})\cdots(\beta_{n+k}-\beta_{n+k-1})(\beta_{n+k}-\beta_{n+k+1})\cdots(\beta_{n+k}-\beta_{n+m+1})}$$

miután a második tört felsőjében és alsójában egyenlő számu, még pedig m tényező van, szabad ugy a felső mint az alsó minden egyes tényezőjét (-1)-el szorozni, s akkor az általános tag lesz

$$\frac{(\beta_{n+k}-\beta_1)(\beta_{n+k}-\beta_2)\cdots\cdots(\beta_{n+k}-\beta_n)}{u_{n+k}}\cdot\frac{(\beta_{n+1}-z)(\beta_{n+2}-z)\cdots(\beta_{n+k-1}-z)(\beta_{n+k+1}-z)\cdots(\beta_{n+m+1}-z)}{(\beta_{n+1}-\beta_{n+k})\cdots(\beta_{n+k-1}-\beta_{n+k})(\beta_{n+k+1}-\beta_{n+k})\cdots(\beta_{n+m+1}-\beta_{n+k})}$$

és igy
$$g(z)=\sum_{k=1}^{m+1}\frac{(\beta_{n+k}-\beta_1)\cdots\cdots(\beta_{n+k}-\beta_n)}{u_{n+k}}\cdot\frac{(\beta_{n+1}-z)\cdots\cdots(\beta_{n+k-1}-z)(\beta_{n+k+1}-z)\cdots(\beta_{n+m+1}-z)}{(\beta_{n+1}-\beta_{n+k})\cdots(\beta_{n+k-1}-\beta_{n+k})(\beta_{n+k+1}-\beta_{n+k})\cdots(\beta_{n+m+1}-\beta_{n+k})}$$

tehát
$$F(z)=\frac{(z-\beta_1)(z-\beta_2)(z-\beta_3)\cdots\cdots\cdots(z-\beta_n)}{\displaystyle\sum_{k=1}^{m+1}\frac{(\beta_{n+k}-\beta_1)(\beta_{n+k}-\beta_2)\cdots\cdots(\beta_{n+k}-\beta_n)}{u_{n+k}}\cdot\frac{(\beta_{n+1}-z)\cdots(\beta_{n+k-1}-z)(\beta_{n+k+1}-z)\cdots(\beta_{n+m+1}-z)}{(\beta_{n+1}-\beta_{n+k})\cdots(\beta_{n+k-1}-\beta_{n+k})(\beta_{n+k+1}-\beta_{n+k})\cdots(\beta_{n+m+1}-\beta_{n+k})}}$$

Hozzuk be most a rövidített jelölést: Jelentse

$$P(\beta_{n+1}\,\beta_{n+2}\cdots\beta_{n+m+1};\ \beta_1\,\beta_2\cdots\beta_n)$$

azt a szorzatot, melyet kapunk, hogyha a ; előtti minden β-ból levonjuk a ; utáni mindegyik β-t s a nyert különbségeket összeszorozzuk. Ha már most a fenti $F(z)$ felsőjét és alsóját egyfelől $u_{n+1}\cdot u_{n+2}\cdots u_{n+m+1}$ szorzattal szorozzuk, másfelől a

$$P(\beta_{n+1}\,\beta_{n+2}\cdots\beta_{n+m+1};\ \beta_1\,\beta_2\cdots\beta_n)$$

szorzattal osztjuk, akkor az $F(z)$ nevezőjének első részében a számláló kiesik a P azon tagjának szorzata ellenében, melyeket kapunk, ha β_{n+k}-ból levonjuk a ; utáni összes tagokat, tehát a számláló elhagyása után a P-ből ki kell hagyni a β_{n+k}-t, a nevező u_{n+k} szintén kiesik s akkor az $u_{n+1}\,u_{n+2}\cdots\cdots u_{n+m+1}$ szorzatból ki kell hagyni u_{n+k}-t. Az $F(z)$ nevezőjének második részében a nevezőt belevonhatjuk P-be olyformán, hogy P-ben ; utáni részhez hozzáírjuk az ; előtti részből hiányzó β_{n+k}-t. Lesz tehát az átalakítás feltüntetésével

$$\mathfrak{F}(z)=\frac{u_{n+1}\cdot u_{n+2}\cdots u_{n+k}\cdots u_{n+m+1}\cdot\dfrac{(z-\beta_1)(z-\beta_2)\cdots\cdots(z-\beta_n)}{\mathfrak{P}(\beta_{n+1}\cdot\beta_{n+2}\cdots\beta_{n+m+1};\,\beta_1\beta_2\cdots\beta_n}}{\sum\limits_{k=1}^{m+1}u_{n+1}u_{n+2}\cdots u_{n+k-1}u_{n+k+1}\cdots u_{n+m+1}\dfrac{(\beta_{n+k}-\beta_1)\cdots(\beta_{n+k}-\beta_n)\cdot(\beta_{n+1}-z)\cdots(\beta_{n+k-1}-z)(\beta_{n+k+1}-z)\cdots(\beta_{n+m+1}-z)}{\mathfrak{P}(\beta_{n+1}\cdot\beta_{n+k}\cdot\beta_{n+m+1};\beta_1\cdots\beta_n)(\beta_{n+1}-\beta_{n+k})\cdots(\beta_{n+m+1}-\beta_{n+k})}}$$

$$=\frac{u_{n+1}\cdot u_{n+2}\cdots u_{n+k}\cdots u_{n+m+1}\cdot\dfrac{(z-\beta_1)(z-\beta_2)(z-\beta_3)\cdots\cdots(z-\beta_n)}{\mathfrak{P}(\beta_{n+1}\cdot\beta_{n+2}\cdots(\beta_{n+m+1});\,\beta_1\,\beta_2\,\beta_3\cdots\beta_n}}{u_{n+1}\cdots u_{n+k-1}u_{n+k+1}\cdots u_{n+m+1}\dfrac{(\beta_{n+1}-z)\cdots(\beta_{n+k-1}-z)(\beta_{n+k+1}-z)\cdots(\beta_{n+m+1}-z)}{\mathfrak{P}(\beta_{n+1}\cdots\beta_{n+k-1}\beta_{n+k+1}\cdots\beta_{n+m+1};\,\beta_1\cdots\beta_n\,\beta_{n+k})}}\quad(\mathfrak{L})$$

tehát a keresett

$$(\mathrm{I.})\ \mathfrak{F}(z)=\frac{u_{n+1}\cdots u_{n+k}\cdots u_{n+m+1}\cdot\dfrac{(z-\beta_1)(z-\beta_2)\cdots\cdots(z-\beta_n)}{\mathfrak{P}(\beta_{n+1}\beta_{n+2}\cdots\beta_{n+m+1};\,\beta_1,\beta_2\cdots\beta_n)}}{\sum\limits_{k=1}^{m+1}u_{n+1}\cdots u_{n+k-1}\,u_{n+k+1}\cdots u_{n+m+1}\cdot\dfrac{(\beta_{n+1}-z)\cdots(\beta_{n+k-1}-z)(\beta_{n+k+1}-z)\cdots(\beta_{n+m+1}-z)}{\mathfrak{P}(\beta_{n+1}\cdots\beta_{n+k-1}\,\beta_{n+k+1}\cdots\beta_{n+m+1};\,\beta_1\cdots\beta_n\,\beta_{n+k}}}$$

Tehát a felsőben van az összes u-k szorzata szorozva egy törttel, melynek számlálójában a nullapontnak megfelelő β-k szerepelnek, alsójában a felső részében a számlálóban levő u-knak megfelelő β-k, második részében a nullapontnak megfelelő β-k szerepelnek; az $\mathfrak{F}(z)$ tört alsójában van az összes u-k szorzata, kihagyva a k-dikat (u_{n+k}) szorozva egy törttel, melynek felsőjében épen ezen u-knak megfelelő β-k szerepelnek (tehát β_{n+k} kimarad) a nevezőben pedig felső részében ugyanazok a β-k mint fenn, második részében a nullapontoknak megfelelő β-k megtoldva az első részből kimaradt β_{n+k}-val; ezen egész szorzatokat megalkotva az összes u-knak megfelelő β-kra, s ezeket összegezve, kapjuk $\mathfrak{F}(z)$ nevezőjét.

Ezen feladat megoldásával sikerülni fog mostan annak az általánosabb feladatnak a megoldása, hogy szerkesztessék meg az az $\mathfrak{F}(z)$ függvény, melynek felsője n-ed foku, alsója m-ed foku, s mely $n+m+1$ adott helyen előírott értékkel bír, tehát $\beta_1\ \beta_2 \cdots\cdots \beta_n\ \beta_{n+1} \cdots\cdots \beta_{n+m+1}$ helyeken

$$\mathfrak{F}(z)=u_1\ u_2\cdots\cdots u_n\ u_{n+1}\cdots\cdots u_{n+m+1}$$

Először kimutatjuk, hogy csak egy ilyen függvény létezik,

$\frac{f(z)}{g(z)}$ mert tegyük fel, hogy $\frac{f_1(z)}{g_1(z)}$ függvény ugyanazokkal a tulajdonságokkal bírnak, mint $\frac{f(z)}{g(z)}$, akkor minden egyes β-ra nézve a két függvény egyenlő volna, azaz minden egyes β-ra nézve, tehát $n+m+1$ helyen $\frac{f(z)}{g(z)} - \frac{f_1(z)}{g_1(z)} = 0$, vagyis $f(z)\cdot g_1(z) - f_1(z)\,g(z) = 0$ volna, de mivel ez az $f g_1 - f_1 g$ függvény legfeljebb $n+m$-ed fokú, s a feltétel szerint $n+m+1$ helyen 0 az értéke, azért egy ismeretes tétel értelmében $f g_1 = f_1 g$, vagyis

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f_1(z)}{g_1(z)},$$ tehát a két függvény identicus.

Most először meg fogjuk szerkeszteni a kívánt függvényt, azután ki fogjuk mutatni, hogy tényleg a kívánt tulajdonságokkal bír. A függvény szerkesztése a következő: Az adott $n+m+1$ β-ból ragadjunk ki n-et mindenféleképp, tehát $\binom{n+m+1}{n}$ féleképen s mindegyik csoportra nézve szerkesszük meg az I. nevezőjét, ezen nevezők összege fogja adni a keresett függvény nevezőjét. Az egész műveletet úgy fogjuk jelölni, hogy a legelső csoportokra, tehát a $\beta_1\,\beta_2 \ldots\ldots \beta_n$ és $\beta_1\,\beta_2 \ldots\ldots \beta_m$ csoportokra alkotjuk meg a felsőt, illetőleg alsót és mindkettő elé Σ jeleket helyezünk, jelezvén ez által, hogy a mit ezen csoportokkal tettünk, azt kell tenni az összes $\binom{n+m+1}{n}$ illetőleg $\binom{n+m+1}{m}$ csoportokra nézve. A keresett függvény tehát ilyen alakú

$$\mathfrak{F}(z) = \frac{\sum u_{n+1}\cdot u_{n+2}\cdots\cdots u_{n+m+1}\cdot\dfrac{(z-\beta_1)(z-\beta_2)\cdots\cdots(z-\beta_n)}{P(\beta_{n+1}\,\beta_{n+2}\cdots\beta_{n+m+1};\beta_1\cdots\beta_n)}}{\sum v_1\,v_2\cdots\cdots v_m\cdot\dfrac{(\beta_1-z)(\beta_2-z)\cdots\cdots(\beta_m-z)}{P(\beta_1\,\beta_2\cdots\beta_m;\beta_{m+1}\cdots\beta_{n+m+1})}} \qquad \text{II.}$$

Tehát a felső mindegyik tagját megkapjuk, ha a felvett csoport összes n β-ját levonva a z-ből ezeket összeszorozzuk s elosztjuk egy oly P-vel, melynek első részében szereplő β-k indexei különböznek a felvett csoportbeli β-k indexeitől, s ugyanily indexek szerepelnek a felsőben levő u-k mellett is; a P második részében szerepelnek a felvett csoportbeli β-k; a tört alsójában levő összes tagokat megkapjuk, ha a felvett csoport összes m β-jából levonva z-t, ezeket összeszorozzuk s elosztjuk oly P-vel, melynek első részében ugyanezek a β-k szerepelnek, s az alsóban levő u-k is ilyen indexűek, míg a ϑ második részében a többi β-k vannak. Ez az ugynevezett Cauchy-féle formula, a mely tehát $n+m+1$ helyen adott értékéből construálja a tört rat. függvényt.

Mutassuk ki most an, hogy ez az így szerkesztett függvény tényleg a kivánt tulajdonságokkal bír. Látható, hogy a felső n-ed, az alsó m-ed foku, mert amott n, itt m lineáris tényező szerepel mindegyik tagban. A felsőben levő tagok száma $T_1 = \binom{n+m+1}{n}$, az alsóban $T_2 = \binom{n+m+1}{n}$, tehát

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ levén}$$

$$T_1 = \frac{(n+m+1)!}{n!(m+1)!} \text{ és } T_2 = \frac{(n+m+1)!}{m!(n+1)!} \qquad \frac{T_1}{T_2} = \frac{m!(n+1)!}{n!(m+1)!} = \frac{n+1}{m+1}$$

tehát a szerint, a mint $n \gtreqless m$, lesz $T_1 \gtreqless T_2$.

Tehát a fokszámra vonatkozó feltétel ki van elégitve, s most mutassuk ki, hogy az adott helyeken a függvény tényleg az adott megfelelő értékeket veszi fel. Elég ha kimutatjuk, hogy egy helyen pl β_{n+m+1} helyen tényleg felveszi az u_{n+m+1} értéket, a többi analog megy. Ha $\underline{II}$ z helyébe β_{n+m+1}-et teszünk, akkor a felső és alsóban mind azok a tagok, melyekben z mellett nem szerepel a β_{n+m+1} tehát annyi, a hányféleképen a $\beta_1 \beta_2 \beta_3 \dots \beta_{n+m}$-ekből n β-t ki lehet venni, vagyis $\binom{n+m}{n}$. Ugyanazon okból marad az alsóban $\binom{n+m}{m}$ tag. De $\binom{n+m}{n} = \frac{(n+m)!}{n!\,m!} = \binom{n+m}{n}$ és így a helyettesités után a felsőben és alsóban egyenlő számu tag marad.

Most ki fogjuk mutatni, hogy mindegyik tag a felsőben (a helyettesités után) csak abban különbözik az alsó megfelelőjétől, hogy a felső tagok még u_{n+m+1}-et tartalmaznak a megfelelő alsó tagokon kivül, hogy tehát

$$F(\beta_{n+m+1}) = \frac{C_1 u_{n+m+1} + C_2 u_{n+m+1} + C_3 u_{n+m+1} + \dots}{C_1 + C_2 + C_3 + \dots}$$

Elég kimutatni ezt, a felső és alsó első tagjáról. Ha felsőben a

$\beta_1\beta_2 \cdots\cdots \beta_n$ csoport szerepel, ugyanakkor az alsóban (63.L.) szerint a $\beta_{n+1}\beta_{n+2}\cdots\cdots\beta_{n+m}$ csoport szerepel (mert β_{n+m+1} kimarad).
A felső egyik tagja tehát

$$u_{n+1}u_{n+2}\cdots\cdots u_{n+m}\cdot u_{n+m+1}\cdot\frac{(\beta_{n+m+1}-\beta_1)(\beta_{n+m+1}-\beta_2)\cdots(\beta_{n+m+1}-\beta_n)}{P(\beta_{n+1}\cdots\beta_{n+m+1};\beta_1\beta_2\cdots\beta_n)}$$

$$=\frac{u_{n+1}u_{n+2}\cdots\cdots u_{n+m}\cdot u_{n+m+1}}{P(\beta_{n+1}\cdots\cdots\beta_{n+m};\beta_1\beta_2\cdots\beta_n)} \qquad (1.)$$

az alsó megfelelő tagja $u_{n+1}u_{n+2}\cdots\cdots u_{n+m}\cdot\frac{(\beta_{n+1}-\beta_{n+m+1})\cdots\cdots(\beta_{n+m}-\beta_{n+m+1})}{P(\beta_{n+1}\cdots\beta_{n+m};\beta_1\cdots\beta_n\beta_{n+m+1})}$

$$=\frac{u_{n+1}u_{n+2}\cdots\cdots u_{n+m}}{P(\beta_{n+1}\cdots\beta_{n+m};\beta_1\cdots\beta_n)}=C_1 \qquad (2.)$$

látható tehát, hogy a felsőben álló (1.) = (2.)$\cdot u_{n+m+1}$. Ugyanezt a viszonyt lehet kimutatni a számláló bármelyik tagja s a nevező megfelelő tagja közt, vagyis ha a nevező tagjai

$C_1\ C_2\ C_3\cdots\cdots C_k\cdots,$ akkor a felső

megfelelő tagjai $C_1u_{n+m+1}, C_2u_{n+m+1}\cdots C_ku_{n+m+1}\cdots\cdots$

sígy tényleg

$$F(\beta_{n+m+1})=\frac{u_{n+m+1}(C_1+C_2+\cdots)}{C_1+C_2+\cdots}=u_{n+m+1}$$

ugyanígy $F(\beta_{n+1})=u_{n+1}$ stb. tehát a Cauchy féle formulával szerkesztett függvény tényleg a kivánt tulajdonságokkal bír.

A β-k megadásánál vigyázni kell, hogy egyenlők ne legyenek, mert $n+m+1$ különböző helyen kell megadni a függvény értékét s miután a tört rat. függvény ugyanazt az értéket vagy n vagy m helyen veszi fel, nem szabad $n+1$ illetőleg $m+1$ helyen ugyanazt az u-t adni.

Pl. ha $n=m=1$, akkor 3 helyen kell megadni a függvény értéket

$$\begin{matrix}\beta_1 & \beta_2 & \beta_3\\ u_1 & u_2 & u_3\end{matrix}$$

s akkor Cauchy formulája szerint

$$F(z)=\frac{u_2u_3\frac{z-\beta_1}{P(\beta_2\beta_3;\beta_1)}+u_3u_1\cdot\frac{z-\beta_2}{P(\beta_3\beta_1;\beta_2)}+u_1u_2\frac{z-\beta_3}{P(\beta_1\beta_2;\beta_3)}}{u_1\frac{\beta_1-z}{P(\beta_1;\beta_2\beta_3)}+u_2\cdot\frac{\beta_2-z}{P(\beta_2;\beta_1\beta_3)}+u_3\cdot\frac{\beta_3-z}{P(\beta_3;\beta_1\beta_2)}}$$

ha $z = \beta_1$, akkor a felsőben és alsóban kiesik az első tag, s lesz a felső

$$\frac{u_3 u_1}{\beta_3-\beta_2} + \frac{u_1 u_2}{\beta_2-\beta_3} = \frac{u_1(u_3-u_2)}{\beta_3-\beta_2}$$

az alsó:

$$\frac{u_2}{\beta_2-\beta_3} + \frac{u_3}{\beta_3-\beta_2} = \frac{u_3-u_2}{\beta_3-\beta_2}$$

és így

$$\mathcal{F}(\beta_1) = \frac{\dfrac{u_1(u_3-u_2)}{\beta_3-\beta_2}}{\dfrac{u_3-u_2}{\beta_3-\beta_2}} = u_1$$

és így $\mathcal{F}(\beta_2) = u_2$; $\mathcal{F}(\beta_3) = u_3$

Linearis transformatiók.

Láttuk, hogy ha a

$$Z = \mathcal{F}(z)$$

akár egész, akár törtrationalis függvény, az mindig egyérté-
kü, azaz a változó z minden értékéhez csak egy meghatáro-
zott Z érték tartozik, de ha már Z-t fogjuk fel mint függet-
len változót, vagyis a Z egy adott értékéhez annyi z érték tar-
tozik, a hányadfoku az illető rationális függvény. A

$$z = \mathcal{G}(Z)$$

függvényt, mely abban különbözik az eredetitől, hogy a vál-
tozók szerepet cseréltek, nevezzük az eredeti függvény invers
függvényének. Tehát az invers függvény mindig többértékü,
míg az eredeti függvény csak egyértékü. Egyetlen egy ratio-
nális függvény van, melynek invers függvénye is egyérté-
kü, ez az első foku egész és tört rationalis függvény, nevezik
linearis függvényeknek is.

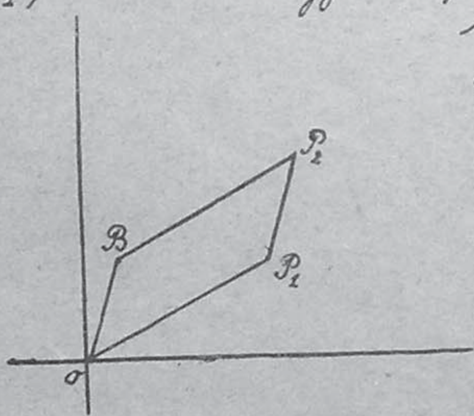
Az egész linearis függvény általános alakja

$$Z = az + b$$

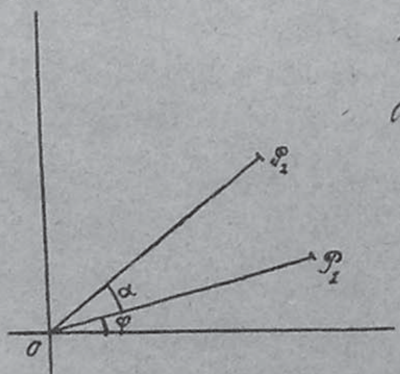
Hogy ennek a transformatiónak analytikai jelentőségét ki-
mutathassuk, egyszerübb eseteket vesszünk fel s ezekből rak-
juk össze az általánost. Ilyen egyszerü lin. transformatio
három van:

I. $Z = z + b$, minden z-hez tartozik egy Z
" Z- " " " z.

A geometriai interpretatioban megkülönböztetjük a z és Z számsikot, amannak pontjai ábrázolják a z értékeket, ennek pontjai a megfelelő Z értékeket. Egyszerűség kedvéért ezt a két sikot egymásra fektetjük, megtartván azonban a z és Z sik elnevezést, vagyis a z és Z pontokat ábrázoló közös sikot kettős siknak tekintjük. Ha most a z-nek megfelelő pont P_1, a b-nek megfelelő pont B, akkor az I lin. transformatio-ban kijelölt operatiót elvégezve, vagy az OP_1 és OB vectorokat összeadva, a Z ábrázoló pontja P_2 lesz, az OP_1 vector tehát önmagával párhuzamosan el lett tolva OB irányban. Mondhatjuk tehát, hogy az I alatti lin transformatio folytán a z számsik összes pontjait ábrázoló vectorok önmagukkal párhuzamosan eltolatnak; ez a transformatió tehát párhuzamoseltolásban áll.



II. $Z = cz$, a hol $c = (\cos\alpha + i\sin\alpha)$ tehát $|c| = 1$ vagyis $Z = (\cos\alpha + i\sin\alpha)z$. Ha a z ábrázoló pontja P_1, szöge φ, akkor a fenti c complex számmal való szorzás folytán a z szöge növekedik α-val absolut értéke változatlan marad s a nyert P_2 pont ábrázolja ezen z megfelelő Z-t; ugyanez áll valamennyi z-re. A II transformatio folytán tehát az egész z számsik O körül α szöggel kiforgattatik, ez a kiforgatott sik lesz a Z sik. A II transformatio tehát O pont körüli pontforgatásban áll.



III. $Z = \rho \cdot z$, a hol ρ positiv realis szám, melynek szöge 0. Az ezzel való szorzás tehát nem változtatja a z szögét, csak radius vectorát nagyobbítja vagy kisebbíti a ρ-nak az 1-hez való viszonya szerint, s az így nyert P_2 pont lesz a Z sik megfelelő pontja vagyis a transformált z. Ugyanez történik a z számsík összes pontjaival. A III. transformatio tehát nyujtásban áll.

Nyilvánvaló továbbá, hogy az I és II szerint transformált idomok egybevágók az eredetiekkel, míg a III szerint transformált idomok hasonlók az eredeti z számsíkbeliekhez.

A II és III transformátiokból van összetéve ez az általánosabb transformátió, midőn

$$Z = az, \text{ a hol } a = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha) \qquad (4)$$

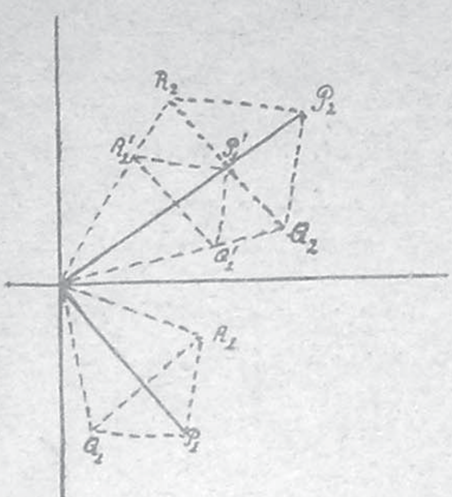
tehát $Z = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)z$

ennél a transformátiónál a z számsíkról a Z számsíkra való átmenet indirect történik két lépésben; először alkalmazzuk a

(1.) $Z_1 = (\cos\alpha + i\sin\alpha)z$ azután a

(2.) $Z = \rho Z_1$ transformatiót, mert az így

nyert $Z = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)z = az$ vagyis más szóval először kiforgatjuk z-t o körül α szög alatt (1), azután az így kiforgatott P_1'-et megnyujtjuk ρ-nak az 1-hez való aránya szerint s az így nyert P_2 lesz a Z számsík megfelelő pontja. Látható hogy ezen általánosabb transformátio szerint nyert Z számsíkbeli idomok hasonlók a megfelelő z számsíkbeli idomokhoz, mert hiszen pl.



$P_1 Q_1 R_1 \Delta \cong P_1' Q_1' R_1'$ és ez utóbbi $P_1' Q_1' R_1' \Delta \sim P_2 Q_2 R_2 \Delta$, tehát $P_1 Q_1 R_1 \sim P_2 Q_2 R_2$

Ezen utóbbi transformátiónál a forgatást és nyujtást sorrendre nézve fel lehet cserélni, tehát alkalmazzuk először a

$Z_2 = \rho \cdot z$ azután a

$$Z = (\cos\alpha + i\sin\alpha)Z_2$$ elemi transformá-
tiót, mert akkor $Z = (\cos\alpha + i\sin\alpha)\rho z = az$

Ezek után áttérhetünk az általános lineáris egész rationális transformatióra, $Z = az + b$, ez az általános transformatió mindig összetehető a fenti 3 elemi transformatióból, tehát parallel eltolás-, forgatás- és egyirányú nyujtásból. Először alkalmazzuk a (4.) alatti általánosabb transformatiót, mely forgatásból és nyujtásból van összetéve, azután a párhuzamos eltolást, ha tehát

$$\underline{Z = az + b}$$ akkor először a

$$Z_1 = az$$ azután a

$$\underline{Z = Z_1 + b}$$ transformatiót alkalmazva, lesz

$$Z = az + b.$$

De már ezen általános egész rat. transformationál a constansok változása nélkül nem lehet felcserélni az átalakitás sorrendjét, azaz ha pl. először akarjuk alkalmazni a párhuzamos eltolást, azután a forgatást és nyujtást, először át kell alakitani, a constansokat, közös tényezőnek kivévén a-t, tehát ha

$$Z = a\left(z + \frac{b}{a}\right)$$

akkor lehet először a $Z_2 = z + \frac{b}{a}$ parallel eltolást, azután a $Z = aZ_2$ forgatást és nyujtást alkalmazni.

Lehet azonban ezt az általános transformatiót másképp is végezni; vessük fel ugyanis azt a kérdést, hogy van-e a z számsíknak olyan pontja, mely a transformatio után helyén marad, vagyis van-e oly pont a z-számsíkban, mely a Z számsík megfelelő pontjával összeesik. Hogy ezt a c-t megkaphassuk, nem kell egyebet tenni, mint

$Z = az + b$ -ben Z és z helyébe c-t tenni, akkor

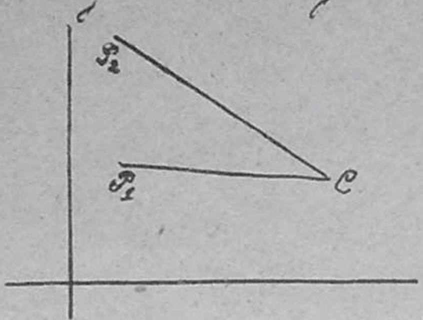
$$c = ac + b$$

$$c = \frac{b}{1-a}$$ ez az a z szám, melynek meg-

felelő pontja a transformatió daczára is helyén marad, mert tényleg

$$a\underbrace{\frac{b}{1-a}}_{z}+b=\underbrace{\frac{b}{1-a}}_{Z}$$

természetesen feltéve, hogy $a \neq 1$. Ezzel a c-vel most már könnyebben végezhetjük az általános transformátiót,



ugyanis

$$\begin{aligned} Z &= az+b \\ c &= ac+b \\ \hline Z-c &= a(z-c) \end{aligned}$$

ha tehát z ábrázoló pontja P_1 c-é C akkor $z-c$ jelenti azt a vectort, melynek kezdőpontja C, végpontja P_1, s a nyert formula azt mondja, hogy ha a $(z-c)$ vectort megszorozzuk a-val, vagyis C-körül kiforgatjuk és nyujtjuk, kapjuk a $Z-c$ vectort, melynek végpontja a keresett P_2 pont. Ezen transformationál tehát nem alkalmaztunk parallel eltolást, mert nem o, hanem a helyén maradó C körül forgattuk a z-t. Hogyha $a=1$, akkor

$$c=\frac{b}{1-a}=\infty,$$

tehát a végtelen távoli pont körül kell forgatni, vagyis parallel eltolni, a mint az különben abból is látható, hogy ebben az esetben

$$Z=z+b,$$

ez pedig parallel eltolás.

Térjünk most át a linearis tört transformatióra.

A linearis tört transformatio általános alakja

$$Z=\frac{az+b}{cz+d},$$

a hol $c \neq o$ kell legyen, vagyis végrehajtva az osztást

$$Z=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c(cz+d)}$$

Tehát hogy Z a z-től függjön, kell hogy $bc-ad \neq o$ legyen. Ennek negativját $(ad-bc)$-t a lin. tört transformatio determinansának nevezzük; tehát a lin. tört transformatio determinansa o-tól különböző kell legyen. Ennek inversfüggvénye

$$z = \frac{dZ - b}{-cZ + a}$$

az inverz függvényt tehát megkapjuk, ha a-t a d-vel felcseréljük, b és c jelét ellenkezőre változtatjuk, és z-t felcseréljük Z-vel, tehát az inverz függvénynek is ugyanaz a determinánsa.

Hogy az általános tört transformatiót végrehajthassuk megkell ismerkednünk a legelemibb tört transformatióval, ez a következő

$$\underline{IV}. \qquad Z = \frac{1}{z}$$

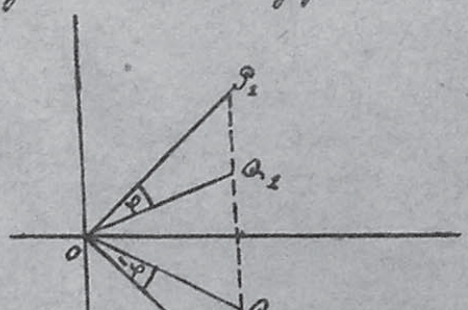
ez a negyedik elemi lineáris transformatió s bármilyen lineáris rat. transformatio ebből a 4 elemi transformatióból rakható össze. Lássuk ennek geometriai tulajdonságait. A vizsgálatra czélszerü polárcoordinátákat használni. Legyen $z = (r, \varphi)$, $Z = (R, \Phi)$, a hol $R = \frac{1}{r}$ és $\Phi = -\varphi$ mert hiszen $Z = \frac{1}{z}$. S most két lépésben fogjuk végezni ezt az elemi transformatiót, először

$$Z_1 = (R, \Phi_1) \quad \text{a hol } R = \frac{1}{r} \text{ és } \Phi_1 = \varphi$$

azután

$$Z = (R, \Phi) \quad \text{a hol} \quad \Phi = -\Phi_1 = -\varphi$$

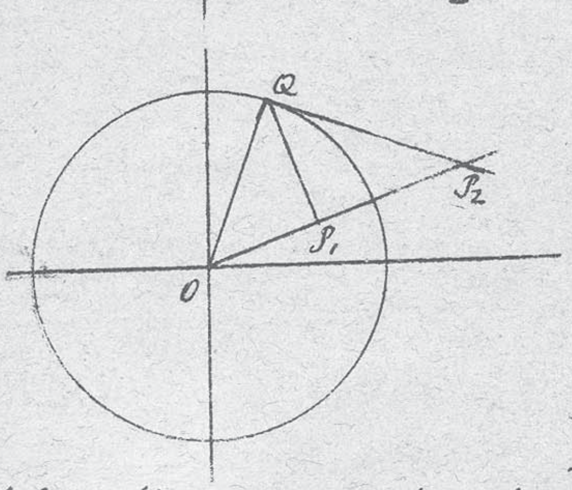
Tehát az első lépésnél csak a radius vector változik, átmegy a reciprocba, azért ezt az első lépést reciproc radius vectorokkal való transformatiónak nevezzük; a második lépésnél csak a szög változik, átmegy a negativba, vagyis az első lépéssel nyert minden pont átmegy a tükörképébe, azért a második lépést tükrözésnek is nevezzük. A tükrözéssel nyert idomok egybevágók az eredetiekkel, de a szögek ellenkezett irányuak mint pl. a $\angle P_1 O Q_1$ és $\angle Q_2 O P_2$



<u>Fontos a reciprok rad. vectorokkal való transformálás.</u> Ez úgy történik, hogy O-ból irunk egy egység sugaru kört; a P_1 pont

Hörkay

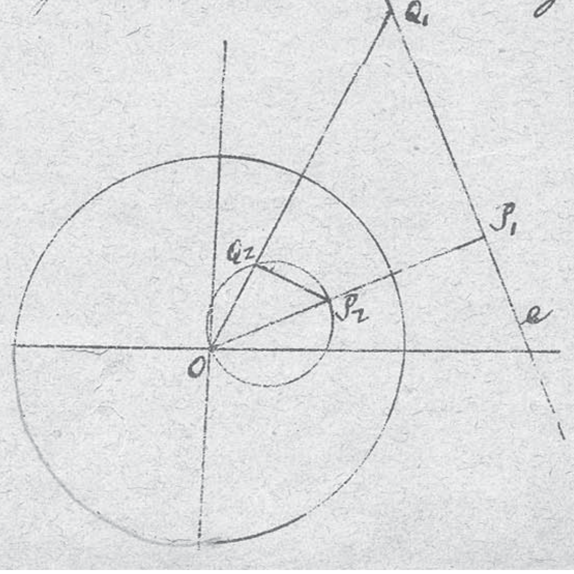
vagyu körön kivül vagy belül van. Legyen P_1 a körön belül, akkor P_1-ben az OP_1-re normálist emelve, ennek a körrel való metszéspontjában Q-ban a körhöz érintőt huzunk, a mely OP_1-egyenest a keresett P_2 pontban metszi; s P_2 tényleg reciproja lesz az OP_1-nek, mert az OQP_2 Δ-ben egy ismeretes geometriai tétel – lévén $OQ = 1$



$$\overline{OQ}^2 = OP_1 \cdot OP_2 = 1 \text{ tehát}$$
$$OP_2 = \frac{1}{rP_1}, \text{ vagyis}$$
$$R = \frac{1}{r}$$

Ha P_1 pont a körön kivül van, az eljárás fordított, azaz először huzunk P_1-ből a körhöz érintőt, az érintési Q pontból OP_1-re normálist bocsátunk, mely OP_1-et a keresett P_2 pontban metszi (az ábrában P_1 felcserélendő a második esetben P_2-vel.) Ezen P_1 és P_2 pontokról azt mondjuk, hogy egymásnak inverz pontjai, tehát P_1 a P_2 inverz pontja és fordítva. Ez tehát akkor van, midőn a pontokhoz tartozó számok absolut értékei egymásnak reciprokjai (szögeik ugyanazok s így egy az O-ból kiinduló egyenesen fekszenek.)

Lássuk ezen reciprok radius vectorokkal való transformálásnak néhány tulajdonságát, így különösen, mi a síkbeli egyenesnek és körnek inverse? Ki fogjuk mutatni, hogy ezen transformatio folytán a z számsík egyenesei és körei a Z számsík köreibe mennek át.



Vegyük fel az egyenest s erre bocsássunk O-ból merőlegest; P_1 talppont inverz pontja legyen P_2; az egyenes egymás, Q pontját O-val összekötö OQ egyenesre bocsássunk merőlegest. Könnyű lesz kimutatni hogy ennek talppontja R_2 a Q_1 inverse, ugyanis $OQ_2P_2\triangle \sim OP_1Q_1\triangle$

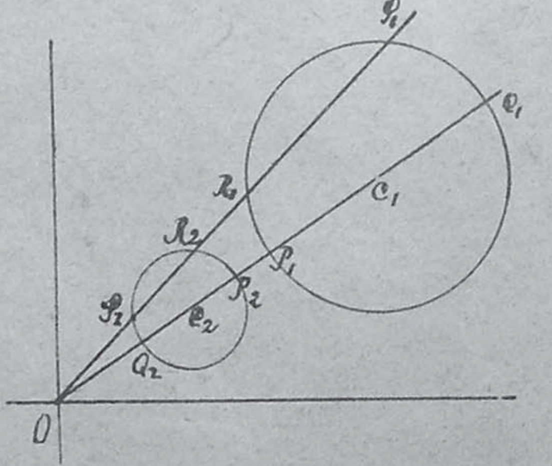
tehát $OQ_1 : OP_2 = OP_1 : OQ_2$

de mivel P_1 inverse P_2-nek, azért $OP_2 \cdot OP_1 = 1$, tehát

$$OQ_1 \cdot OQ_2 = 1$$

$$OQ_2 = \frac{1}{OQ_1}$$

s mivel Q_2-nél derékszög van, azért Q_2, a Q_1 inverse az OP_2 átmérőjű körön fekszik. Ez a kör átmegy az O ponton, mert ha Q_1 az egyenesen ∞-be távozik, Q_2 az O-ba jön s mialatt Q_1 visszatér, Q_2 az egész kört bejárja. Mondhatjuk tehát, hogy egyenes inverse egy az O ponton átmenő kör.



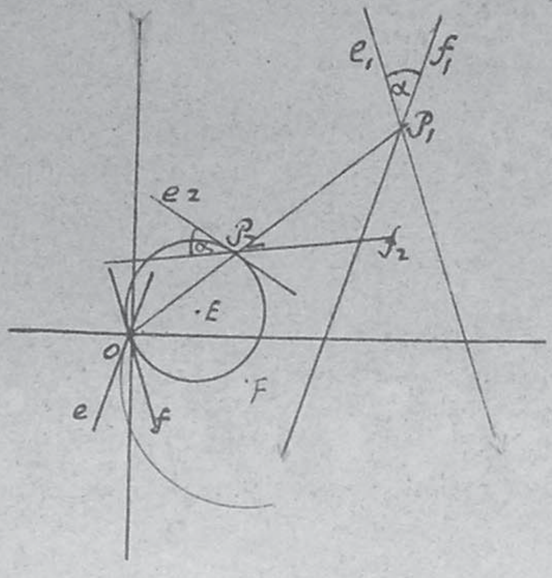
Hasonlókép kilehet mutatni, hogy körnek inverse kör. Kössük össze a kör C_1 centrumát O-val, OC_1 a kört P_1 és Q_1-ben metszi hasonlókép húzzunk O-ból egy más szelőt, mely a kört R_1 illetőleg S_1-ben metszi. Legyen most $OP_1 = p_1$, $OQ_1 = q_1$

$OR_1 = r_1$, $OS_1 = s_1$

akkor $p_1 q_1 = r_1 s_1 = C$ a kör potentiája, s ha P_1 inverse P_2, $OP_2 = p_2$, akkor $q_1 = \frac{C}{p_2} = C p_2$, ebből $p_2 = \frac{1}{C} q_1$ | $q_2 = \frac{1}{C} p_1$

ép így $r_2 = \frac{1}{C} s_1$ | $s_2 = \frac{1}{C} r_1$

vagyis a felvett kör bármelyik pontjának invers pontját megkapjuk, ha ezen pontot az O-val összekötö egyenesnek a körrel való metszéspontjához tartozó r. vectort megszorozzuk a kör potentiájának reciprokjával, tehát egy állandóval; az így nyert r. vector végpontja a keresett inverspont. Miután e szerint a kör összes pontjainak radius vectorai ugyanazon arány szerint változnak, a keletkező idom hasonló lesz az eredetihez, tehát kör. S ezzel ki van mutatva, hogy kör inverse szintén kör, mely azonban nem megy át a 0 ponton. Ezen reciprok radius vectorokkal való transformálásnak egy másik fontos tulajdonsága, hogy szögek egyenlő nagyságu le ellenkező irányu szögekbe mennek át. Vegyük



fel ugyanis az egymást metsző e_1 és f_1 egyeneseket, melyeknek szöge $\widehat{e_1 f_1}$; e_1-nek megfelel az E centrumu kör; f_1-nek az F centrumu kör, a P_1 szögpontnak a két kör P_2 metszőpontja. A két körnek hajlásszöge a P_2-ben huzott érintők $\widehat{e_2 f_2}$ szöge. Az 0 pontban huzott érintők $e \parallel e_1$ és $f \parallel f_1$ s mivel $\angle e f = \angle e_2 f_2$, azért $\angle e_1 f_1 = \angle e_2 f_2$ másfelől, ha pl. a balról jobbra haladó forgási irányt $(e_1 f_1)$ állapitjuk meg, látható, hogy $\angle e_2 f_2$ forgás iránya ellenkező. Mondhatjuk tehát, hogy szögeknek egyenlő nagyságu, de ellentett irányu szögek felelnek meg.

Ezek a reciprok vectorokkal való transformatio főbb tulajdonságai.

A tükrözéstől és a reciprok radius vectortól való transformatióból tehető össze az emlitett $z = \frac{1}{z}$ elemi tört transformatio. Mivel az invers átalakitásnál a szögek negatívok leszuek, ezek pedig tükrözéssel ismét ellenkezőre változnak, azért ezen elemi transformatio folytán a szögek nagysága és iránya nem változik, csak a radius vector megy át a reciprokba.

A tárgyalt 4 elemi rationális transformatióból most már könnyen tehető össze az általános linearis tört transformatio. Ha ugyanis

$$Z=\frac{az+b}{cz+d}=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c(cz+d)}$$

akkor a következő 5 lépéssel jutunk czélhoz.

1.) $Z_1 = cz$	forgatás és nyujtás
2.) $Z_2 = Z_1+d$	parallel eltolás reci-
3.) $Z_3 = \frac{1}{Z_2}$	prok radius vector
4.) $Z_4 = \frac{bc-ad}{c} Z_3$	transformátio és tükrö-
svégre 5.) $Z = Z_4+\frac{a}{c}$	zés forgatás és nyujtás parallel eltolás.

mert $Z=Z_4+\frac{a}{c}=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c}Z_3=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c}\cdot\frac{1}{Z_2}=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c(cz+d)}$

A linearis tört transformatio hasonlit a conformis átalakitáshoz. Láttuk, hogy két sik conformis, ha az egyik sik egyenesei- és köreinek a másikban körök felelnek meg s a megfelelő szögek egyenlők. Itt is a megfelelő idomok legkisebb részecskéikben hasonlók egymáshoz. Ez a conformitás illetőleg folytonosság a hasonlóságban a z és Z számsik egy bizonyos pontja körül megszünik, ugyanis ha a

$$Z=\frac{az+b}{cz+d}\quad \text{lineáris függvényben}$$

$$z=-\frac{d}{c}\text{, akkor } Z=\infty$$

$$\text{és ha a } z=\frac{dZ-b}{-cZ+a}\quad\text{invers függvényben}$$

$$Z=\frac{a}{c}\text{ akkor } z=\infty$$

tehát a kis z számsiknak $-\frac{d}{c}$, a Z számsiknak $\frac{a}{c}$ pontjában megszünik a függvény folytonossága, tehát a conformitás is.

Egyszerü és kettös arányszám.

A $Z=az+b$ egész rationális transformatióban két állandó szerepel és igy két adat az egész rationális transformatiót teljesen meghatározza, úgy hogy, ha ismeretes, hogy a

z_1-nek megfelel Z_1
z_2-nek " Z_2, akkor ezzel teljesen meg van határozva a z_3-hoz tartozó Z_3
Ugyanis a Lagrange féle formula szerint

$$Z = Z_1 \frac{z - z_2}{z_1 - z_2} + Z_2 \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$ és z szerint rendezve

$$Z = \frac{Z_1 - Z_2}{z_1 - z_2} z + \frac{z_1 Z_2 - z_2 Z_1}{z_1 - z_2}$$

s így minden tetszés szerint behelyettesített z értékhez meg van határozva a megfelelő Z érték.

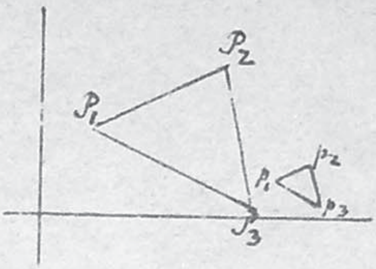
Lássuk, ha ismeretes, hogy egy egész rat. transformatio folytán a $z_1\ z_2\ z_3$ átmegy a $Z_1\ Z_2\ Z_3$-ba milyen összefüggés van ezen 6 érték között?

$$\left.\begin{aligned} Z_1 &= a z_1 + b \\ Z_2 &= a z_2 + b \\ Z_3 &= a z_3 + b \end{aligned}\right\}$$ ezekből
$$Z_3 - Z_1 = a(z_3 - z_1)$$
$$Z_2 - Z_3 = a(z_2 - z_3)$$ osztva

$$\frac{Z_3 - Z_1}{Z_2 - Z_3} = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_3}$$

Ez a relatio független az a és b állandóktól, s így bármely lin. eg. transformatiónal változatlan marad. Ezt a kifejezést nevezzük z_3 egyszerű arányszámának z_1 és z_2-re vonatkozólag. Ez az egyenlőség kifejezi ezen két complex arányszám egyenlőségét; ha két complex szám egyenlő, absolut értékeik egyenlők, szögeik aequivalensek, tehát

$$\frac{|Z_3 - Z_1|}{|Z_2 - Z_3|} = \frac{|z_3 - z_1|}{|z_2 - z_3|}$$ s ha a



megfelelő pontok $P_1\ P_2\ P_3$, ez egyenlőség azt mondja, hogy

$$\frac{P_1 P_3}{P_2 P_3} = \frac{p_1 p_3}{p_2 p_3}$$

tehát az oldalak arányosak, a szögek egyenlők, s így a két há-

$$\left.\begin{aligned} Z_1 &= \frac{az_1+b}{cz_1+d} \\ Z_2 &= \frac{az_2+b}{cz_2+d} \\ Z_3 &= \frac{az_3+b}{cz_3+d} \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} Z_3 - Z_1 &= \frac{az_3+b}{cz_3+d} - \frac{az_1+b}{cz_1+d} = \frac{(ad-bc)(z_3-z_1)}{(cz_1+d)(cz_3+d)} \\ Z_2 - Z_3 &= \frac{az_2+b}{cz_2+d} - \frac{az_3+b}{cz_3+d} = \frac{(ad-bc)(z_2-z_3)}{(cz_2+d)(cz_3+d)} \end{aligned}$$

osztva

$$\frac{Z_3-Z_1}{Z_2-Z_3} = \frac{z_3-z_1}{z_2-z_3} \cdot \frac{cz_2+d}{cz_1+d}$$

hasonló módon

$$\frac{Z_4-Z_1}{Z_2-Z_4} = \frac{cz_2+d}{cz_1+d} \cdot \frac{z_4-z_1}{z_2-z_4}$$

$$\frac{Z_3-Z_1}{Z_2-Z_3} : \frac{Z_4-Z_1}{Z_2-Z_4} = \frac{z_3-z_1}{z_2-z_3} : \frac{z_4-z_1}{z_2-z_4} = (Z_1 Z_2 Z_3 Z_4)$$

ez a keresett relatió 4-4 megfelelő pont között, mely tehát nem függ a constansoktól és így semminemű linearis transformátiónál nem változik. Ezt a relátiót nevezzük az adott 4 complex szám kettős arányszámának s jelöljük $(Z_1 Z_2 Z_3 Z_4) = (z_1 z_2 z_3 z_4)$ s ha ismerjük a kettős arányszám értékét valamint a $z_1 z_2 z_3$-nak megfelelő $Z_1 Z_2 Z_3$-t, akkor a kettős arányszám egyenletéből meghatározhatjuk a z_4-nek megfelelő Z_4-t. Kérdés mikor reális és mikor complex 4 complex szám kettős viszonya? A mint könnyű kimutatni, 4 complex szám kettős viszonya akkor reális, ha a 4 szám megfelelő pontjai egy körön feküsznek. Tegyük fel ugyanis, hogy a 4 $Z_1 Z_2 Z_3 Z_4$ pont egy körön fekszik. Ennek megfelelő 4 $z_1 z_2 z_3 z_4$ pontja akkor egy egyenesen fekszik, de akkor ezeknek $(z_1 z_2 z_3 z_4) = t$ kettős viszonya reális s mivel

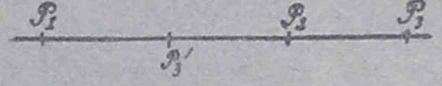
$(Z_1 Z_2 Z_3 Z_4) = (z_1 z_2 z_3 z_4) = t$, azért a körön fekvő 4 complex szám kettős arányszáma reális; ha a négy complex szám nem fekszik egy körön (sem egyenesen) akkor t sem reális, hanem complex.

Lássunk ez utóbbi transformátióra egy példát: Keressük azt a linearis tört transformatiót, melynél a

a	-1	0	$+1$	-nek a z számsíkban meg-
felel	-1	$-i$	$+1$	a Z számsíkban.

romszög hasonló.

Lássuk mikor complex és mikor reális az egyszerü arányszám? Akkor, ha a szöge 0 vagy π, s miután ezen arányszámnak mint hányadosnak szöge annyi mint a számláló és nevező vector szögeinek különbsége s ez 0 vagy π kell legyen; azért mondhatjuk, hogy 3 pont egyszerü arányszáma reális, ha az a három pont egy egyenesen fekszik. A P_3 pont fekhetik a P_1 és P_2 egy oldalán, s akkor a $\frac{P_1 P_3}{P_2 P_3}$ arányszám positiv, s fekhetik P_1 és P_2 között



(P_3') s akkor az arányszám negativ. Minden más esetben 3 pt egyszerü arányszáma complex.

Legyen a reális egész arányszám

$$\frac{Z_3 - Z_1}{Z_2 - Z_3} = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_3} = t$$

akkor ebből

$$Z_3 = \frac{Z_1 + Z_2 t}{1 + t}$$

ha tehát ismerjük az egy egyenesen fekvő $z_1\, z_2\, z_3$ pontokat s egyszerüek reális arányszámát t-t, továbbá a z_1 és z_2-nek megfelelő Z_1 és Z_2 pontokat, akkor ezen egyenlet szolgáltatja a z_3-nak megfelelő Z_3 pontot.

Lássuk a hasonló kérdést a tört rat. transformationál. Miután $c \neq 0$, felsőt és alsót mindig el lehet osztani c-vel, úgyhogy ily alakra hozható

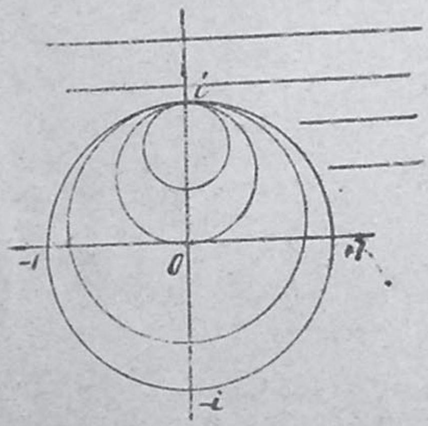
$$Z = \frac{az + b}{z + c}$$

és így csak 3 constans lévén, a tört rat. transformatio 3 adattal teljesen meg van határozva, így pl. ha megadjuk hogy

$$\begin{matrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 \end{matrix}$$

-nak megfelel, akkor egy tetszésszerinti z_4 hez egy határozott Z_4 fog tartozni.

Lássuk ezen 4-4 mennyiség között a kapcsolatot:



a -1, 0, +1 pontok a reális tengelyen fekszenek; a -1, -i, +1 pontok az egységsugarú 0 centrumú körön. Tehát ha z a reális tengelyen -1-től 0-on át +1-be megy, Z az egységsugarú körön -i-től i-n át +1-be jut. Számítsuk ki tehát ezt a transformátiót

$$Z = \frac{az+b}{cz+d}$$

Ha $Z=-1$ és $z=-1$, akkor $-1 = \frac{-a+b}{-c+d}$, $\quad -a+b = c-d \quad (1.)$

" $Z=-i$ és $z=0$ " $\quad -i = \frac{b}{d}$; $\quad b = -id \quad (2.)$

" $Z=+1$ és $z=+1$, " $\quad 1 = \frac{a+b}{c+d}$, $\quad a+b = c+d \quad (3.)$

$$2b = 2c\,,\ b=c \quad (1.)+(3.)$$

$$2a = 2d\,,\ a=d \quad (3)-(1)$$

és $b=-id$, ha $b=1$, akkor $1=-id$

$d = -\frac{1}{i} = i$ és így $a=d=i$, $b=c=1$

tehát a keresett transformatió

$$Z = \frac{iz+1}{z+i}$$

ha $z=\infty$, $Z=i$, s ha $Z=\infty$, $z=-i$, tehát ha z a $-\infty$-ből 0-n át $+\infty$-be távozik, Z az egységsugarú körön $-i$-től -1-en át $(+i)$-be s innen $(+1)$-en át $-i$-be távozik. Kérdés, hogy a z számsíknak a reális tengely fölött levő része a Z számsík melyik részével van megfelelésben. Ha z számsíkon a reálistengelylyel parallel egyeneseket húzunk, ezek mind az i ponton átmenő s az egységsugarú kört belülről érintő körökbe mennek át, tehát mondhatjuk, hogy a z számsík felső részének megfelel az egységsugarú kör belseje.

Hatványsorok.

Az irrationális számokat az analízisben végtelen sorokkal definiáltuk. Ugyanezt tehetjük a rationális függvényekkel vagyis megengedjük, hogy valamely rat. függvény végtelen sok tagból álljon. Vegyük először azt az esetet, midőn a rationalis egész operatiókat végtelen sokszor alkalmazzuk a változók és állandók között. Így jutunk a következő végtelen sorhoz.

$$\mathcal{P}(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots\cdots + a_n z^n + \cdots$$

az ilyen sort, a melynél a változó folyton növekedő hatványon szerepel, hatványsornak nevezzük. Az ilyen sor lehet rationalis értékü is. Természetesen csak azokkal a hatványsorokkal foglalkozhatunk, melyek convergensek, vagyis ha vannak z nek olyan értékei, melyek mellett a sor véges értékü. Egy egyszerü kriterium ennek eldöntésére a következő: ha létezik oly r érték, mely mellett a hatványsor tagjai végesek, akkor ezen r-nél kisebb $|z|$ értékek mellett a hatványsor feltétlenül convergens. Tehát felteszük, hogy

$|a_n| r^n < M$ és $|z| < r$ a hatványsor feltétlenül convergens, ha $|a_0| + |a_1||z| + |a_2||z^2| + \cdots\cdots + |a_n||z|^n + \cdots$ convergens, minthogy $|a_n| r^n < M$, azért $|a_n| < \frac{M}{r^n}$ ha tehát az utóbbi sorban mindenütt ezen egyenlőtlenség szerint helyettesítjük a constansokat, akkor nagyobbítunk, úgy hogy

$$|a_0| + |a_1||z| + \cdots\cdots + |a_n||z|^n + \cdots < M\left(1 + \frac{|z|}{r} + \left(\frac{|z|}{r}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{|z|}{r}\right)^n + \cdots\right.$$

a zárjelben levő geometriai sor pedig convergens, ha $|z| < r$, ugyanakkor convergens tehát az absolut értékek sora is, úgy hogy a hatványsor $|z| < r$ mellett feltétlenül convergens. Az ilyen hatványsoroknak 3 typusa van, melyeket 3 példán fogunk megismerni

$$(1.) \qquad 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots\cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots\cdots$$

Kimutatjuk, hogy ez a hatványsor a számsík minden véges helyén feltétlenül convergens, még pedig azért, mert akármilyen nagy r számot tudunk kijelölni, melynél a sor tagjai végesek, melynél kisebb $|z|$ értékek mellett teh.

a hatványsor feltétlenül convergens. Mert legyen $|z| = N$ bármilyen nagy szám, mindig találhatunk oly helyet a sorban, melyen túl a tagok már nem fogynak. Ha ugyanis ez a hely $n > N$, akkor az n-ediken túli tagok

$$\frac{N^n}{n!} + \frac{N^n}{n!}\cdot\frac{N}{n+1} + \frac{N^n}{n!}\cdot\frac{N^2}{(n+1)(n+2)} + \cdots\cdots$$

ezek között pedig legnagyobb az első, mert az azután következők egy 1-nél kisebb számban különböznek tőle s minthogy az első tag N bármely nagy véges értéke mellett véges, azért a mi kriteriumunk értelmében ez az utóbbi sor minden $|z| < N$ vagyis bármily nagy z mellett feltétlenül convergens és minthogy az n-dik előtti tagok összege véges mondhatjuk hogy az (1.) hatványsor az egész számsikon feltétlenül convergens. Az ilyen hatványsorokat korlátlanul convergens hatványsoroknak nevezzük.

$$(2.) \qquad z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \cdots\cdots\cdots + \frac{z^n}{n} + \cdots\cdots$$

Ha $z = 1$, a sor minden tagja véges és így ez a hatványsor feltétlenül convergens, ha $|z| < 1$. De már $z = 1$ mellett divergens mint harmonicus sor. Ez a hatványsor tehát feltétlenül convergens az egységsugarú kör kerületén belül. Az ilyen sorokat korlátlan convergens hatványsoroknak nevezzük.

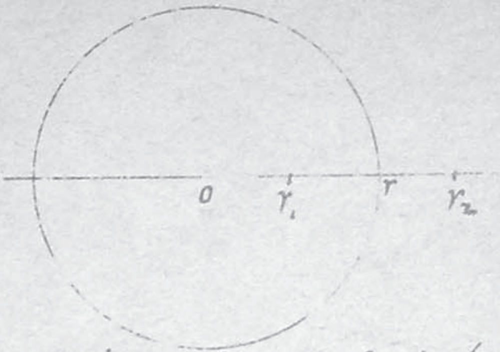
$$(3.) \qquad 1 + z + 2.z^2 + 3!\,z^3 + \cdots\cdots\cdots + n!\,z^n + \cdots$$

Ki fogjuk mutatni, hogy nem létezik olyan 0-tól különböző érték, mely mellett a sor tagjai mind végesek lennének. Mert legyen ε bármilyen kis szabott szám, ha $\frac{1}{n} < \varepsilon$, vagyis $n\varepsilon > 1$, akkor az n-dik tagon túl következő tagok egy minden határon túl növekedő számsorozatot alkotnak. Ugyanis az (n)-dik tag: $(n-1)!\,\varepsilon^{n-1} = \alpha$, az $(n+1)$dik $\alpha \cdot n\varepsilon$, azután $\alpha(n+1)(n)\varepsilon^2$ stb. vagyis ha $n\varepsilon = \varrho > 1$ akkor az n-diken túli tagok megfelelőleg mind nagyobbak mint az $\qquad \alpha\varrho^2,\ \alpha\varrho^3,\ \alpha\varrho^4, \cdots\cdots$

minden határon túl növekedő sorozat tagjai, tehát nem végesek, és így nem létezik olyan 0-tól különböző z érték, mely mellett ez a sor véges volna. Ha $z=0$, $P(z)=1$. Tehát a hatványsor csak a 0 helyen convergens. Az ilyen sorokat kizárjuk a használatból.

Látjuk tehát, hogy a hatványsornak 3 typusa lehet. A korlátlanul convergens hatványsor hasonlít az egész rationalis függvényhez, mert mint ez, a számsík összes helyein végesértékű; azért a korlátlanul convergens hatványsorok által definiált függvényt transcendens egész függvénynek nevezzük, egésznek azért, mert mindenütt véges, és transcendensnek, mert foka minden határon túl nő. A második typust alkotják a korlátoltan convergens hatványsorok, a melyek csak bizonyos körön belül convergensek, és a harmadikat azok, melyek csak a számsík 0 helyén convergensek.

Most ki fogjuk mutatni, hogy ha a hatványsor korlátoltan convergens, a convergentia tartomány mindig egy kör területe, melynek centruma 0. Ha ugyanis



z helyébe véges r értékeket teszünk, lesznek ezen r-ek között olyanok, melyek mellett a sor tagjai vég nélkül nőnek. Ily módon a pos. számokat 2 csoportra oszthatjuk; az első csoport tagjai mellett a hatványsor tagjai végesek, a második csoport tagjai mellett a hatványsor tagjai minden határon túl nőnek. Ha r_1 az első csoportba tartozik, akkor a hatványsor mindazon z-ek mellett, melyek $|z| < r_1$ convergens s ha r_2 a második csoportba tartozik, akkor a hatványsor mindazon z-k mellett, melyek $|z| > r_2$ divergens.

Az első csoportnak szükségképen lesz vagy maximuma, vagy felső határa, legyen ez r. Ha r maximum, akkor maga r mellett is, még végesek a hatványsor tagjai, ha r felső határ, r-et bármily kevéssel kisebbítve már olyan számot kapunk, mely mellett a sor tagjai végesek; tehát mindkét esetben a sor convergens, ha $|z| < r$, s pedig feltétlenül divergens, ha $|z| > r$. Tehát a sor feltétlenül convergens az r sugarú kör kerületén belül.

Lássuk most a hatványsornak egy nevezetes tulajdonságát. Tegyük fel, hogy a hatványsor magán a convergentia kör kerületén is feltétlenül convergens, ha tehát

$$|z| \leqq r$$

mellett a sor feltétlenül convergens, akkor convergens lesz az a sor

$$|P(r)| = |a_0| + |a_1|\,r + |a_2|\,r^2 + \ldots\ldots + |a_n|\,r^n + \ldots$$

és így a mint azt az analizisből tudjuk felbontható egy véges S_n és egy végtelen R_n részre, mely utóbbi $|R_n| < \varepsilon$ tehető. Már most ki fogjuk mutatni, hogy ha $|z| \leqq r$, a $P(z)$ is felbontható egy véges $P_n(z)$ és egy végtelen $R_n(z)$ részre, mely $|R_n(z)| < \varepsilon$, vagyis

$$|P(z) - P_n(z)| < \varepsilon \quad \text{tehető}$$

Ugyanis

$$P(z) - P_n(z) = a_{n+1} z^{n+1} + a_{n+2} z^{n+2} + \ldots\ldots$$

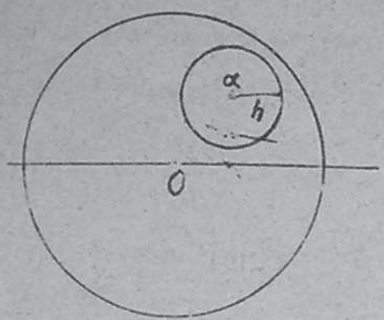
$$|P(z) - P_n(z)| \leqq |a_{n+1}|\,|z|^{n+1} + |a_{n+2}|\,|z|^{n+2} + \ldots\ldots$$

s ha $z = r$,

$$\leqq R_n < \varepsilon$$

tehát $|P(z) - P_n(z)| < \varepsilon$, a hol ε tetszésszerinti kis mennyiség, s az egyenlőtlenség a konvergentia kör kerületén belül mindig fennáll. A hatványsornak ezt a tulajdonságát, mely szerint mindig ki tudunk jelölni olyan területet, melyen belül a sor tagjainak summázásában ugyanazt a pontosságot tudjuk elérni, nevezzük egyenletes convergentiának. A hatványsor tehát a convergentia területen belül először feltétlenül, másodszor egyenletesen convergens.

A hatványsor ezen tulajdonságát felhasználhatjuk annak kimutatására, hogy a hatványsorral definiált függvény a convergentia területen belül mindenütt folytonos. Legyen egy ilyen hely a körön belül α, s az α körüli pontok formulája $z = \alpha + h$, a hol egyenlőre $|h| < \rho$ és $\alpha + h$ is a körön belül van.



Ki kell mutatni, hogy

$$|P(\alpha+h) - P(\alpha)| < \varepsilon$$

Miután a hatványsor a körön belül feltétlenül convergens, az előbbi tétel alapján felbonthatjuk azt két részre

$$P(z) = P_n(z) + R_n(z)$$

úgy, hogy $|R_n(z)| < \frac{\varepsilon}{3}$ mindazon z-kre nézve, mely a körön belül fekszenek, tehát $R_n(\alpha+h) < \frac{\varepsilon}{3}$

és $R_n(\alpha) < \frac{\varepsilon}{3}$

és most

$$P(\alpha+h) - P(\alpha) = P_n(\alpha+h) - P_n(\alpha) + R_n(\alpha+h) - R_n(\alpha)$$

$$|P(\alpha+h) - P(\alpha)| < |P_n(\alpha+h) - P_n(\alpha)| + \frac{2\varepsilon}{3}$$

de mivel $P_n(z)$ rationális egész függvény, azért folytonos a számsík barmely helyén tehát az α körön belül is és így

$$|P_n(\alpha+h) - P_n(\alpha)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{tehető},$$

úgy hogy

$$|P(\alpha+h) - P(\alpha)| < \varepsilon$$

Igaz ugyan hogy $P_n(z)$-nél a h-t külön kellett megszorítani, de ha a két megszorítás közül a kisebbik ρ-t vesszük, akkor a $P(z)$ az α körön belül folytonos lesz, s akkor ez utóbbi egyenlőtlenség azt mondja, hogy a hatványsorral definiált függvény a convergentia területén belül folytonos. —

Most vizsgáljuk a $P(z)$ függvényt a 0 hely körül. Itt is áll az a tétel, mint az egész rat. függvénynél, hogy a 0 pont körül lehet egy bizonyos sugárral kört írni, melyen belül a $P(z)$ függvény azon értékét, melyet a 0 pontban felvett, nem ismétli. Ha $z = 0$, $P(0) = a_0$ s ha tekintettel vagyunk arra, hogy a $P(z)$-ben a z coefficiensei közül némelyek 0-k is lehetnek, akkor

$$P(z) = a_0 + z^\kappa(a_\kappa + a_{\kappa+1}z + \cdots\cdots)$$

tehát

$$P(z) - P(0) = z^\kappa(a_\kappa + \underline{a_{\kappa+1}z + \cdots\cdots})$$

s most kimutatjuk, hogy ez a differentia nem lehet 0, ha $z \neq 0$; $z^k \neq 0$, a zárjelben álló kifejezés egy hatványsor, a melynél z-t mindig meghatározhatjuk úgy, hogy az aláhuzott rész kisebb legyen, mint $|a_k|$, mert hiszen felbonthatjuk egy egész rat. függvényre és egy $R_n(z) < \frac{a_k}{2}$-re, s ha most z-t annyira megszorítjuk, hogy az egész rat. függvény $< \frac{a_k}{2}$, akkor az aláhuzott rész kisebb mint a_k. –

Ebből a tételből mindjárt egy fontos következtetést vonhatunk: Ha egy hatványsornak az a tulajdonsága, hogy egy 0 limessel biró

$$\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4 \ldots\ldots \alpha_n \ldots \qquad \lim \alpha_n = 0$$

sorozat tagjai mellett, tehát egy a 0 pont körül írt kis körön belül értéke 0, ez csak úgy lehetséges, hogy az a coefficiensek mind 0-k. Mert tegyük fel az ellenkezőt, hogy volna egy olyan legelső $a_k \neq 0$, akkor

$$P(z) = z^k(a_k + \underline{a_{k+1} z + \ldots\ldots}) \quad \text{volna, de}$$

akkor mindig lehetne oly 0-tól különböző z-t meghatározni, mely mellett az aláhuzott rész kisebb volna, mint a_k, de akkor $P(z) \neq 0$ volna, pedig feltettük, hogy 0, s így $P(z)$ csak úgy lehet 0, ha a coefficiensei is mind 0-k.

Ebből következik egy másik tétel. Ha

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$$

$$Q(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots$$

két hatványsor, melyek ugyanazon, 0 limessel biró, α sorozat tagjai mellett egyenlő értékűek, akkor ez a két hatványsor egymással identicusan egyenlő, mert

$$0 = P(z) - Q(z) = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1) z + (a_2 - b_2) z^2 + \ldots$$

a mi csak úgy lehetséges a fennti tétel értelmében, hogy

$$a_0 = b_0,\ a_1 = b_1,\ \ldots\ldots\ a_n = b_n \ldots\ldots$$

tehát a két hatványsor identicus. Éppen ez a különbség a hatványsor és az egész rat. függvény között, hogy a míg emennél két függvény identitására elég volt, ha azok n+1 helyen egyértéküek voltak, addig két hatványsor csak akkor lehet identicus, ha azok végtelen sok helyen egyenlőértéküek.

Ezzel egyszersmind be van bizonyitva az is, hogy ugyanazt az egyértékü függvényt két különböző módon nem lehet sorba bontani.

Más hatványsoralakok.

Van a hatványsoroknak néhány alakja, melyeknek tulajdonságai az érvényességére való transformatiók útján könnyen kiolvashatók. Így ha

(1.) $a_0 + a_1(z-\alpha) + a_2(z-\alpha)^2 + \dots\dots$

ha $z-\alpha = Z$, akkor kapjuk az

(1*) $a_0 + a_1 Z + a_2 Z^2 + \dots\dots$ sort, melynek convergentiájára 3 eset lehetséges. Ha korlátlanul, tehát Z minden értéke mellett convergens, akkor, lévén $z = Z+\alpha$, az (1) sor is korlátlanul convergens. Ha (1*) convergens $|Z| < r$ mellett, akkor (1.) convergens $|z-\alpha| < r$ mellett, vagyis az α pontból r sugárral írt körön belül. Ezt nevezik α centrumu sorbabontásnak. S ha (1*) csak $Z=0$ mellett convergens, akkor (1) csak $z=\alpha$ mellett convergens. Tehát a $(z-\alpha)$ positiv egész hatványai szerint haladó sor vagy az egész számsikon, vagy az α centrumu körön belül convergens.

Egy másik alakja a hatványsornak, mely $\frac{1}{z}$ positiv egész hatványai szerint halad

(2.) $a_0 + a_1\frac{1}{z} + a_2\left(\frac{1}{z}\right)^2 + \dots\dots$

ha $Z = \frac{1}{z}$, akkor kapjuk az

(2*) $a_0 + a_1 Z + a_2 Z^2 + \dots\dots$ sort.

Ha (2*) korlátlanul convergens, minden véges Z mellett, akkor z is véges és (2) korlátlanul convergens. Ha $Z=\infty$, $z=0$ s e mellett (2) már nem convergens. Ha $Z=0$, $z=\infty$, a sor e...

gens, mert értéke a_0. Ha pedig (2^x) korlátoltan convergens $|\frac{1}{z}| < r$ mellett, tehát $|z| < r$ mellett, akkor (2) convergens $|\frac{1}{z}| < r$ mellett, tehát körön kivül. S végre ha $|z| > \frac{1}{r}$, vagyis egy 0 centrumu körön kivül. S végre ha $z = 0$ mellett lesz a (2^x) convergens, akkor (2) $z = \infty$ mellett convergens, értéke a_0.

Tehát az $\frac{1}{z}$ positiv egész hatványai szerint haladó sor convergens vagy az egész számsikon kivéve a 0 helyet; vagy egy 0 centrumu kör kerületén kivül az egész számsikon, tehát korlátoltan convergens.

Egy általánosabb soralak az, mely halad z-nek positiv és negativ egész hatványai szerint:

$$(3) \qquad a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots\dots$$
$$+ a_{-1} z^{-1} + a_{-2} z^{-2} + \dots\dots$$

Ha ez a sor convergens, akkor feltétlenül convergens, még pedig az első rész egy R sugaru körön belül, a második rész pedig, mely halad $\frac{1}{z}$ positiv egész hatványai szerint, egy r sugaru körön kivül. Hogy tehát a két rész egyszerre, vagyis az egész hatványsor convergens legyen, kell hogy $r < R$ legyen s akkor a korlátoltan convergens (3.) sor convergentia tartománya ezen két kör által alkotott körgyürü. E mellett lehetséges, hogy $R = \infty$, $r = 0$, s akkor a (3) sor convergens az egész számsikon.

Térjünk most vissza a hatványsor legegyszerübb alakjára

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots\dots$$

Tegyünk z helyébe oly $(z+h)$ számot, mely még belül van a convergentia területén s melynek szöge megegyezik z szögével, akkor $|z+h| = |z| + |h|$ minthogy $(z+h)$ belül van a convergentia területen, azért $(z+h)$ mellett is feltétlenül convergens a sor, tehát a

$$|a_0| + |a_1|(|z|+|h|) + |a_2|(|z|+|h|)^2 + \dots\dots$$

sor convergens. De akkor convergens az a sor is, melyet kapunk, ha ebből a sorból tetszésszerinti tagokat kiragadunk. Vegyük ki pl. azokat a tagokat, melyek h első hatványával vinnák szorozva, akkor a következő sort kapjuk:

$$|a_1| + 2|a_2||z| + 3|a_3||z|^2 + \dots\dots\dots + n|a_n||z|^{n-1} + \dots$$

mely convergens, és így a

$$P'(z) = a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \dots\dots\dots + n a_n z^{n-1} + \dots$$

sor feltétlenül convergens. Ez pedig nem egyébb mint az eredeti $P(z)$ sor deriváltja $P'(z)$. Tehát ha egy hatványsor bizonyos körön belül convergens, akkor ennek tagonkinti deriválásából származó sor is convergens ezen a körön belül. Hogy a körön kivül nem lehet convergens, könnyen kimutatható. Legyen ugyanis z egy pont a $P'(z)$ convergentia területén, akkor erről kimutatható, hogy belül van a $P(z)$ convergentia területén is tehát hogy amaz ezen belül van illetőleg a két terület összeesik. Ha ugyanis ezen z mellett convergens $P'(z)$, akkor e mellett convergens az a sor is, melyet kapunk ha $P'(z)$-t z-vel szorozzuk, tehát az

$$|a_1||z| + 2|a_2||z|^2 + \dots\dots\dots + n|a_n||z|^n + \dots \quad \text{sor, s ez}$$

annál inkább convergens, ha az 1, 2, ... n ... szorzókat elhagyjuk s eléje a véges értékű a_0-t írjuk, de akkor az eredeti $P(z)$ sort kapjuk, a mely tehát szintén convergens ezen z mellett. Ezzel pedig ki van mutatva, hogy a hatványsor deriváltjának convergentia területe ugyanaz mint az eredeti soré. S miután az első deriváltat mint eredeti függvényt tekinthetjük, erre ujból érvényes a tétel, úgy hogy általánosan kimondható, miszerint a hatványsor összes deriváltjai ugyanott convergensek, a hol maga a hatványsor.

Ha a $P(z) = |a_0| + |a_1||z| + \dots\dots\dots + |a_n||z|^n + \dots\dots$ sor convergens bizonyos körön belül, akkor ugyanitt convergens sort kapunk, ha ezt a sort először $|z|$-el azután bizonyos törtszámokkal szorozzuk, vagyis convergens lesz a sor is:

$$a_0|z| + \frac{|a_1||z|^2}{2} + \dots\dots\dots + \frac{|a_n||z|^{n+1}}{n+1} + \dots\dots$$

de akkor ezen a körön belül feltétlenül convergens a követkerő sor

$$a_0 z + a_1 \frac{z^2}{2} + \cdots\cdots + a_n \frac{z^{n+1}}{n+1} + \cdots$$

Ennek a sornak 1 deriváltja az eredeti sor. Azt az operatiót, melylyel ezt a sort az eredetiből nyertük, nevezzük integrálásnak. Tehát a hatványsorból integrálással nyert sor ugyanott convergens, hol az eredeti, de tovább nem; mert ha az integrált sornak convergentia tartománya nagyobb volna, mint az eredetié, akkor az eredeti sornak, mint ezen sor deriváltjának ugyanaz a convergentiá köre volna, ez tehát ellenmondás.

Általánosan mondhatjuk tehát, hogy a hatványsorból deriválással és integrálással nyert sorok ugyanott convergensek, a hol az eredeti és pedig egyenletesen és feltétlenül convergensek.

De már a határvonalon magán különböző természetűek lehetnek ezek a sorok, a mint azt a következő példa mutatja. Az

$$1 + z + z^2 + \cdots z^n + \cdots$$

sor convergens, ha $|z| < 1$, divergens, ha $|z| \geqq 1$. Az integrált sor

$$z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \cdots + \frac{z^{n+1}}{n+1} + \cdots$$

a mint az a Weierstrass féle convergentia kriteriumokból ismeretes, szintén feltétlenül convergens az egységsugaru körön belül, de a kerület $+1$ pontjában divergens, míg a kerület többi pontjaiban feltételesen convergens.

A kétszeri integrálással származott sor:

$$\frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{z^{n+2}}{(n+1)(n+2)} + \cdots$$

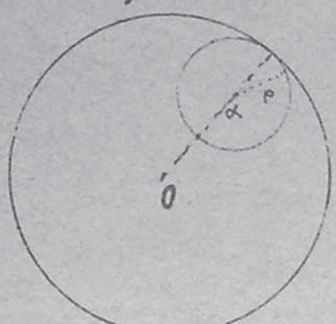
ez a körön belül és magán az egész kerületen feltétlenül convergens, de már azontúl szintén divergens.

Taylor tétele a hatványsorokra.

$$(\text{I.}) \qquad P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots$$

Az előbbiek alapján könnyü lesz kimutatni a hatványsor viselkedését a convergentia terület bármely pontja körül.

Legyen α egy pont az r sugaru c. területen belül, s az α körüli pontok formulája $z=\alpha+h$ a hol $|h|<\rho$, ρ alatt értvén az α pont távolságát a convergentia kör kerületétől.



Szóval vizsgáljuk a hatványsorral definiált függvényt egy oly α centrumu körön belül, mely a convergentia kört belülről érinti.

$$(1.)\quad P(\alpha+h) = a_0 + a_1(\alpha+h) + \dots + a_n(\alpha+h)^n \dots$$

Ha ezen h-k közül épen azt veszszük, mely az α sugár irányában fekszik, akkor erre nézve $|\alpha+h| = |\alpha|+|h|$ s ezt helyettesítve:

$$|a_0| + |a_1|(|\alpha|+|h|) + |a_2|(|\alpha|+|h|)^2 + \dots |a_n|(|\alpha|+|h|)^n \dots$$

egy convergens sor, ugyhogy az (1) sor nemcsak ezen speciális h mellett, hanem minden más irányu h mellett annál inkább feltétlenül convergens, és igy az (1) hatványsor a tagok bármilyen sorrendje szerint feltétlenül convergens, rendezzük tehát a sort ugy, hogy először a h-tól mentes

$$a_0 + a_1\alpha + \dots + a_n\alpha^n + \dots \quad (1.)$$

azután a h első hatványával

$$(a_1 + 2a_2\alpha + 3a_3\alpha^2 + \dots + n a_n \alpha^{n-1} + \dots)\, h \quad (2.)$$

azután a h második hatványával

$$\left(a_2 + \frac{3\cdot 2}{2} a_3\alpha + \dots + \frac{n(n-1)}{2} a_n \alpha^{n-2} \dots\right) h^2 \quad (3.)$$

stb. szorzott tagokat irjuk. De (1.) nem egyébb, mint $P(\alpha)$, (2) nem egyébb mint $P'(\alpha)$, (3) annyi mint $\frac{P''(\alpha)}{2}$ stb., ugyhogy

$$P(\alpha+h) = P(\alpha) + P'(\alpha)\, h + P''(\alpha)\frac{h^2}{2} + \dots$$

Ez a Taylor féle sor, mely tehát a hatványsorokra is érvényes.

Ha $z=\alpha+h$-ból $h=(z-\alpha)$-t helyettesitünk, kapjuk az eredeti I sort más alakban:

$$(\text{II.})\quad P(z) = P(\alpha) + P'(\alpha)(z-\alpha) + \frac{P''(\alpha)(z-\alpha)^2}{2!} + \dots + \frac{P^{n}(\alpha)(z-\alpha)^n}{n!} + \dots$$

Az eredeti sor convergens volt, ha $|z|<r$, ez pedig feltétle-
nül convergens, ha $|z-\alpha|<\varrho$, de a míg amott a convergen-
tia kör centruma a 0 pont, addig itt a centrum α. Ha, a-
mint már láttuk, a z pos. egész hatványai szerint hala-
dó sor transcendens egész függvényt értelmez, akkor ez is
olyant értelmez; ha pedig az eredeti sor korlátoltan con-
vergens, tehát a 0 centrumu, r sugaru körön belül, ak-
kor ez is korlátoltan convergens, még pedig az α sugaru kö-
rön belül; tehát a centrumok különbözők levén a két kör
nem eshetik össze, de azért ez az utobbi convergentia terü-
let benn van az eredetiben, söt megeshetik, hogy azon
túl is terjed, a mint az a következő példából látható:
Vegyük ezt a sort:

$$\text{I.} \qquad 1+z+z^2+\cdots\cdots+z^n+\cdots\cdots$$

mely convergens, ha $|z|<1$, tehát a 0 centrumu, egységsu-
garu körön belül. Ha most $z=\alpha+h$ s rendezzük a sort h
hatványai szerint, azután $h=z-\alpha$ helyettesítünk, akkor
ilyen sort kapunk

$$(1) \qquad A_0+A_1(z-\alpha)+A_2(z-\alpha)^2+\cdots\cdots$$

mely convergens az eredeti körön belül, s most kimutatjuk
hogy convergentia köre a körön kívül is terjed. Tudjuk u-
gyanis, hogy ennek a sornak az értéke $\frac{1}{1-z}$, azaz

$$\text{I.} \quad \frac{1}{1-z}=1+z+z^2+\cdots\cdots$$

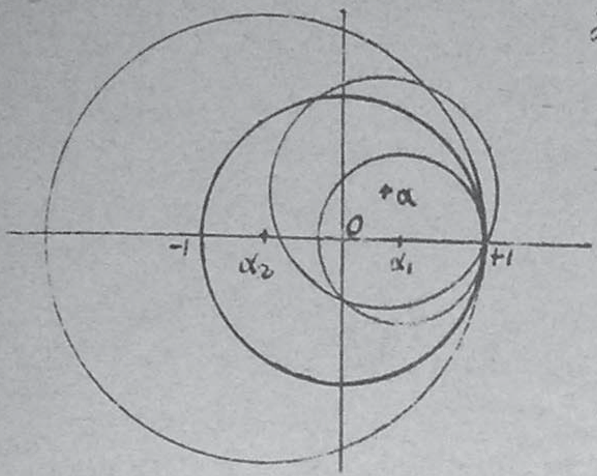
ezt pedig tudjuk α körül sorbabontani, ha ugyanis
$1-z=1-\alpha-(z-\alpha)$, akkor

$$\frac{1}{1-z}=\frac{1}{1-\alpha-(z-\alpha)}=\frac{1}{1-\alpha}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-\alpha}{1-\alpha}} \quad \text{ez pedig}$$

$$(2.) \qquad =\frac{1}{1-\alpha}\left(1+\frac{z-\alpha}{1-\alpha}+\frac{(z-\alpha)^2}{(1-\alpha)^2}+\cdots\cdots\right)$$

ez is, mint (1) convergens legalább a régi területen belül,
mert $(z-\alpha)$ hatványai szerint halad; de tudjuk, hogy ha
valamely sort (itt I) kétféleképp tudunk bizonyos hely kö-
rül sorbabontani (t.i. (1) és (2) szerint) akkor ez a két sor

teljesen identicus; a (2)-ről azonban tudjuk, hogy feltétlenül convergens, ha $\left|\frac{z-\alpha}{1-\alpha}\right| < 1$, vagyis ha $|z-\alpha| < |1-\alpha|$, tehát (1) is ugyanott convergens, azaz egy α centrumú, +1-en átmenő körön belül. Már pedig ez a kör csak akkor van belül a régin, ha centruma, α, a positiv reális tengelyen fekszik, a minden más helyzeténél, tehát ha α complex, vagy negativ, a sor convergentia területe túlterjed a régi körön, sőt az utolsó esetben magát a régi kört is magában foglalja.



Az olyan sort, melyet kapunk, ha az eredetiben $z = \alpha + h$ helyettesitünk, azután ezt rendezzük h hatványai szerint, s végre $h = z - \alpha$ helyettesitünk: nevezzük az eredeti sor leszármazottjának. Tehát a

$$\text{I.} \qquad \mathfrak{P}(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots\dots\dots\dots$$

leszármazottja

$$\text{II.} \qquad \mathfrak{P}(z) = \mathfrak{P}(\alpha) + \mathfrak{P}'(\alpha) + \frac{\mathfrak{P}''(\alpha)}{2!}(z-\alpha)^2 + \dots\dots\dots$$

hogy kitüntessük, hogy az utóbbinak convergentia területe nem ugyanaz, mint az eredetié, mert a z centrum: a leszármazott sort így jelöljük Weierstrass szerint: $\mathfrak{P}(z/\alpha)$

Ha vesszük az I derivált[j]át s ennek leszármazottját, akkor ez

$$\mathfrak{P}'(z/\alpha) = \mathfrak{P}'(\alpha) + \mathfrak{P}''(\alpha)(z-\alpha) + \frac{\mathfrak{P}'''(\alpha)}{2!}(z-\alpha)^2 + \dots\dots$$

ugyanehez az eredményhez jutunk, ha vesszük az I sor leszármazottjának, II-nek deriváltját. Itt is áll, hogy

$$\mathfrak{P}'(z) \text{ nem ugyanaz, mint } \mathfrak{P}'(z/\alpha)$$

Tehát a $\mathfrak{P}(z)$ függvény leszármazottjából deriválás utján kapjuk a $\mathfrak{P}(z)$ deriváltjának leszármazottját.

Cauchy tétele a függvény maximumáról.

A 88. old. 3 alatt láttuk, hogy a positiv és negativ hatványek szerint haladó sor convergentia területe - egy körgyűrű. Vegyünk most már ezen a gyűrű - területen egy 0 centrumu ϱ sugarú kört. Egy nevezetes összefüggést fogunk kimutatni e kör kerü-zeten legnagyobb érték között, melyet a függvény e kör kerü-letén felvesz, és a függvény coefficiensei között.

Először véges számú tagokból álló sorral definiált függ-vényre mutatunk ki egy egyszerü tételt, mely szerint, ha a végestagú függvény

$$\varphi(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots\cdots + a_n z^n$$
$$+ a_{-1} z^{-1} + a_{-2} z^{-2} + \cdots\cdots + a_{-m} z^{-m}$$

és M az a maximális érték, melyet $\varphi(z)$ a ϱ sugarú körön felvesz, akkor $\qquad |M| \geqq |a_0|$

Vegyünk minél több helyet a ϱ sugarú körön s ezekben vegyük a függvény értékét, ezen helyeket úgy formulázzuk, hogy veszünk egy complex ε számot, melynek $|\varepsilon| = 1$, akkor a

$$\varrho\varepsilon\ ,\ \varrho\varepsilon^2, \varrho\varepsilon^3, \varrho\varepsilon^4 \cdots\cdots \varrho\varepsilon^k$$

olyan pontok, melyek mind a ϱ sugarú körön feküsznek s most ezeket z helyébe téve alkossuk meg a

$$\varphi(\varrho) = a_0 + a_1\varrho + a_2\varrho^2 + \cdots\cdots + a_n\varrho^n + a_{-1}\varrho^{-1} + a_{-2}\varrho^{-2} + \cdots + a_{-m}\varrho^{-m}$$
$$\varphi(\varrho\varepsilon) = a_0 + a_1\varrho\varepsilon + a_2\varrho^2\varepsilon^2 + \cdots\cdots + a_n\varrho^n\varepsilon^n + a_{-1}\varrho^{-1}\varepsilon^{-1} + a_{-2}\varrho^{-2}\varepsilon^{-2} + \cdots + a_{-m}\varrho^{-m}\varepsilon^{-m}$$
$$\varphi(\varrho\varepsilon^2) = a_0 + a_1\varrho\varepsilon^2 + a_2\varrho^2\varepsilon^4 + \cdots\cdots + a_n\varrho^n\varepsilon^{2n} + a_{-1}\varrho^{-1}\varepsilon^{-2} + a_{-2}\varrho^{-2}\varepsilon^{-4} + \cdots + a_{-m}\varrho^{-m}\varepsilon^{-2m}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\varphi(\varrho\varepsilon^k) = a_0 + a_1\varrho\varepsilon^k + a_2\varrho^2\varepsilon^{2k} + \cdots\cdots + a_n\varrho^n\varepsilon^{kn} + a_{-1}\varrho^{-1}\varepsilon^{-k} + a_{-2}\varrho^{-2}\varepsilon^{-2k} \cdots + a_{-m}\varrho^{-m}\varepsilon^{-km}$$

Most adjuk össze ezeket; hallgatagúl feltesszük, hogy ε sem első, sem második ..... sem n, sem m-edik egységgyök, azaz hogy $\varepsilon, \varepsilon^2 \ldots \varepsilon^n \ldots \varepsilon^m \neq 1$ ezt pedig azért tesszük fel, mert pl. az utolsó rovatban álló ε-kat összegezve

$$1 + \varepsilon^n + \varepsilon^{2n} + \cdots\cdots + \varepsilon^{nk} = \frac{\varepsilon^{n(k+1)} - 1}{\varepsilon^n - 1}$$

hogy a nevező el ne tünjék, $\varepsilon^n \neq 1$ kell legyen. S most összegezve

$$\varphi(\varrho) + \varphi(\varepsilon\varrho) + \cdots\cdots + \varphi(\varrho\varepsilon^k) = (k+1)a_0 + a_1\varrho\frac{\varepsilon^{k+1} - 1}{\varepsilon - 1} + \frac{\varepsilon^{2(k+1)} - 1}{\varepsilon^2 - 1} a_2\varrho^2 + \cdots + \frac{\varepsilon^{(k+1)n} - 1}{\varepsilon^n - 1} a_n\varrho^n$$
$$+ \frac{\varepsilon^{-(k+1)} - 1}{\varepsilon^{-1} - 1} a_{-1}\varrho^{-1} + \frac{\varepsilon^{-2(k+1)} - 1}{\varepsilon^{-2} - 1} a_{-2}\varrho^{-2} + \cdots + \frac{\varepsilon^{-(k+1)m} - 1}{\varepsilon^{-m} - 1} a_{-m}\varrho^{-m}$$

ha az első t tagon túli tagok összegét S_κ-val jelöljük, s $(\kappa+1)$-el osztva lesz
$$\frac{\varphi(\varrho)+\varphi(\varrho\varepsilon)+\cdots\cdots+\varphi(\varrho\varepsilon^\kappa)}{\kappa+1}=\alpha_0+\frac{1}{\kappa+1}S_\kappa$$
miután $|\varepsilon|=1$, azért ε bármily nagy hatványa véges és különbözik 1-től, úgy hogy S_κ κ-nak bármily nagy értéke mellett véges marad, és most az absolut értékre térve át:
$$\frac{|\varphi(\varrho)|+|\varphi(\varrho\varepsilon)|+\cdots\cdots+|\varphi(\varrho\varepsilon^\kappa)|}{\kappa+1}\geqq|\alpha_0|-\frac{1}{\kappa+1}|S_\kappa| \qquad I.$$

S most szükségünk van egy melléktételre. Ha egy egyenlőtlenségben két helyen egy-egy állandó szerepel s egy helyen oly változó, mely minden határon alul kisebbedik, akkor szabad ezt a tagot elhanyagolni, tehát ha a és b const. és η a változó és ha az $\quad a\geqq b-\eta \quad$ egyenlőtlenség minden η érték mellett érvényes, akkor írhatjuk, hogy $a\geqq b$. Ugyanis, ha η negativ annak elhagyásával a potiori fennáll az egyenlőtlenség; tehát csak arra az esetre kell kimutatni a tétel helyességét, ha $\eta>0$. Tegyük fel, hogy η elhagyásával $a<b$ volna, ki fogjuk mutatni, hogy ez ellenmondásra vezet, mert ha $a<b$, akkor $b-a>0$ s akkor $(b-a)$ és 0 között még végtelen sok positiv szám létezik, tegyük fel, hogy η egy ilyen szám (mert hiszen η lehet bármilyen kicsiny), akkor $\quad b-a>\eta>0 \quad$ azaz
$$b-a-\eta>0$$
tehát $\quad b-\eta>a \quad$ már pedig feltevésünk szerint $\quad b-\eta\leqq a \quad$ bármilyen kis η mellett és így a $b>a$ feltétel tényleg ellenmondáshoz vezet, úgyhogy $\quad a\geqq b \quad$ akár pos., akár neg. kis η elhagyása után. –

Ezzel az esettel van dolgunk az I alatti egyenlőtlenségnél is, mert miután κ végnélkül nőhet – mert hiszen végtelen sok olyan ε szám van, melynek $|\varepsilon|=1$ és a mely sem nem n-dik sem nem m-dik egységgyök – $\frac{1}{\kappa+1}$ vég nélkül fogy.

míg a többi véges és ha mostan minden ϱ helyébe annak maximális értékét írom, lesz I-ből

$$\frac{(k+1)M}{k+1} \geqq |a_0| - \frac{1}{k+1}|S_k|$$

vagyis $M \geqq |a_0| - \frac{1}{k+1}|S_k|$ és a fennti tétel értelmében

$$M \geqq |a_0| \qquad (1.)$$

Ezzel be van bizonyítva, hogy a maximalis érték, melyet a $\varphi(z)$ függvény a ϱ sugarú kör kerületén felvehet, nem lehet kisebb mint a szabad tag absolut értéke.

De a hasonló tételt kimutathatjuk a $\varphi(z)$ függvény többi coefficienseire is. Ha ugyanis a

$$\varphi(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots\dots + a_n z^n$$
$$+ a_{-1} z^{-1} + a_{-2} z^{-2} + \dots\dots + a_{-m} z^{-m}$$

mindkét oldalát megszorozzuk z^{-h}-val, akkor

$$\varphi(z)\cdot z^{-h} = a_0 z^{-h} + a_1 z^{-h+1} + \dots\dots + a_{h-1} z^{-1} + a_h + a_{h+1} z + \dots$$
$$+ a_{-1} z^{-(h+1)} + \dots\dots + \dots\dots$$

függvényt kapjuk, mely hasonló az előbbihez, s melynek szabad tagja a_h. Erre tehát ugyanaz a tétel érvényes; a $\varphi(z)$ maximuma M, z^{-h} maximuma a ϱ sugarú körön ϱ^{-h}, tehát

$$M \cdot \varrho^{-h} \geqq |a_h|$$
$$M \geqq |a_h| \varrho^{h} \qquad (2.)$$

ha pedig mindkét oldalt megszorozzuk z^h-val, akkor

$$\varphi(z) z^h = a_0 z^h + a_1 z^{h+1} + \dots\dots$$
$$+ a_{-1} z^{h-1} + \dots\dots + a_{-h} + a_{-h-1} z^{-1} + \dots\dots$$

ahol a_{-h} a szabad tag, tehát

$$M \cdot \varrho^{h} \geqq |a_{-h}|$$
$$M \geqq |a_{-h}| \varrho^{-h} \qquad (3.)$$

Ha tehát megtartjuk a (2) egyenlőtlenséget azon feltevéssel, hogy $h \gtreqless 0$ lehet, akkor a

$$M \geqq |a_h| \varrho^{h} \qquad h \gtreqless 0$$

képlet magában foglalja mindhárom esetet, tehát azt az általános tételt, hogy ha a $\varphi(z)$ függvény coefficienseit rendre

Harkay

megszorozzuk 1 ill. ϱ^1, ill. ϱ^2, ... ϱ^h ......

vagy 1 " ϱ^{-1} " ϱ^{-2}, ... ϱ^{-h} .... számokkal,

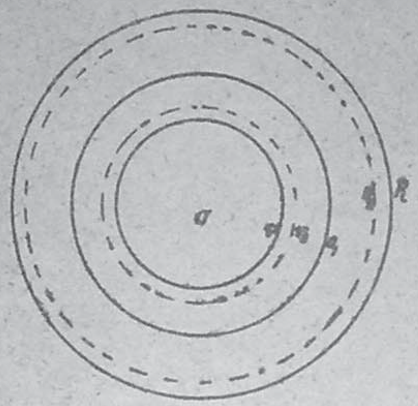
akkor ezen a_0 " $a_1\varrho$ " $a_2\varrho^2$ .... $a_h\varrho^h$ ....

vagy a_0 " $a_{-1}\varrho^{-1}$ " $a_{-2}\varrho^{-2}$ .... $a_{-h}\varrho^{-h}$ .....

szorzatok absolut értékre mérve nem lehetnek nagyobbak mint a $\varphi(z)$ függvény maximális értéke a ϱ sugarú kör kerületén.

Ennek a tételnek a kiterjesztése a végtelen sok tagu függvényekre, tehát a hatványsorokra fogja adni a Cauchy féle tételt. Vegyük ugyanis a következő ~~vegyes~~ kitevőjü hatványsort:

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots\dots$$
$$+ a_{-1} z^{-1} + a_{-2} z^{-2} + \dots\dots$$



Láttuk hogy ezen hatványsor convergentia területe egy körgyürü, melynek belső köre a neg. kitevőjü sor convergentia területének alsó határa külső köre a positiv kitevőjü sor convergentia területének felső határa r. illetőleg R sugarakkal. Már most a 84 oldal szerint tudjuk, hogy a positiv kitevőjü sor egyenletesen convergens, azaz a R sugarú körön belül lehet olykört (R_1) meghatározni, melyen belül vagy magán a körön is oly pontosságot tudunk elérni a függvény n tagjainak summázásaban, hogy a többiek elhagyásával elkövetett hiba kisebb mint pl. $\frac{\varepsilon}{2}$, a hol ε tetszés szerint kicsiny. Ugyanez áll a neg. kitevőjü sorra, itt is találhatunk a r sugarú körön kivül egy hasonló tulajdonságu r_1 kört, melyen kivül tetszésszerinti pontossággal summázhatjuk az első m tagot, úgy hogy az elkövetett hiba kisebb mint $\frac{\varepsilon}{2}$. Hatéhát veszszünk olyan ϱ sugarú kört, mely az r_1 R_1 körgyürün belül fekszik, ennek kerületén mindkét sor egyenletesen convergens lesz. Legyen most a $P(z)$ sor ezen említett pontossággal két részre osztva, s jelöljük az n első positiv és m első neg. kitevőjü tag summárása után fennmaradó maradéktagok összegét $R(z)$-vel, akkor

$$\underbrace{P(z)-R(z)}_{Q(z)} = a_0 + a_1 z + \dots\dots\dots + a_n z^n + a_{-1} z^{-1} + \dots\dots\dots + a_{-m} z^{-m}$$

akkor a jobboldalon álló véges tagú függvényre már érvényes a fennti tétel a ρ sugarú kör pontjaira nézve; $P(z)$ maximális értéke a ρ sugarú körön legyen M és miután a megszorítás folytán $|R(z)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, azért a baloldali függvény maximuma $M+\varepsilon$ és $M-\varepsilon$ közt fekszik, úgyhogy ha $0 < \vartheta < 1$, akkor

$$M + \vartheta\varepsilon \geqq |a_0|$$

és miután ε nagysága a mi hatalmunkban áll, vehetjük azt végtelen kicsinynek, s akkor $M \geqq |a_0|$.

Ha a hatványsort egy véges mennyiséggel szorozzuk, az convergens marad, szorozzuk tehát z^{-h}, akkor

$$P(z) z^{-h} = a_h + a_{h+1} z + \dots\dots\dots + a_{h-1} z^{-1} + \dots\dots\dots$$

s erre alkalmazva az előbbi tételt

$M\rho^{-h} \geqq |a_h|$ s így kapjuk azt az általános tételt

hogy $M \geqq |a_h| \rho^h$ a hol $h \gtreqless 0$

Ez a Cauchy féle tétel, a hatványsor maximális értéke a ρ sugarú körön s a coefficiensek közti összefüggésről.

Megjegyzendő különben, hogy Cauchy ezt a tételt integrális calculussal vezette le; ezen egyszerű bizonyítási mód Weierstrasstól ered. Ez a tétel érvényes akkor is, ha a hatványsor csupa positiv vagy csupa negativ hatványok szerint halad.

A convergentia eldöntésére vonatkozó tétel és Cauchy tétele a maximumról, képezik ezen elmélet alaptételeit.

Lássuk most, minő fontos következtetéseket lehet vonni a Cauchy féle tételből?

1.) Egy egyértékü függvényt nem lehet két különböző alakra hozni z positiv és negativ hatványai szerint olyformán, hogy ezen két sor ugyanazon ϱ sugarú körön convergens és annak minden egyes pontjában egyenlő értékű legyen. Mert tegyük fel, hogy az egyik sor

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots\dots$$
$$+ a_{-1} z^{-1} + a_{-2} z^{-2} + \dots\dots \quad \text{conv. ha } |z| = \varrho$$

a másik $$Q(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots\dots$$
$$+ b_{-1} z^{-1} + b_{-2} z^{-2} + \dots\dots \quad \text{conv. ha } |z| = \varrho$$

és hogy a ϱ sugarú kör minden egyes pontjában a két függvény egyenlő, akkor ezen pontokra nézve

$$P(z) - Q(z) = 0$$ és így a maximális érték a körön $$M = 0$$ és mivel ezen $P(z) - Q(z)$ függvényre érvényes Cauchy tétele,

$$0 \geqq |a_n - b_n| \varrho^n$$

de minthogy a jobb oldalon csupa absolut érték áll, azért az egyenlőtlenségi jel elesik, s mivel $\varrho \neq 0$, azért a jobboldal csak úgy lehet 0, ha $a_n = b_n$, $n = 0, 1, 2, 3 \dots$ tehát a két függvény megfelelő coefficiensei egyenlők, a két függvény identicus.

2.) Legyen adva egy olyan hatványsor, mely transcendens egész függvényt értelmez

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots\dots$$

Akkor ez a hatványsor z bármily nagy értéke mellett convergens és így Cauchy tétele érvényes bármilyen nagy z illetőleg ϱ sugarú körön,

$$M \geqq |a_k| \varrho^k$$

lehet, hogy némely coefficiensek 0-k; tegyük fel, hogy $a_k \neq 0$, akkor ezen egyenlőtlenségből látható, hogy a transcendens függvény maximuma minden határon túl nőhet, ha a ϱ sugár, melynek körén a maximum vétetik, elég nagy.

Itt ismét egy lényeges különbség látható az egész rat. függvény és az egész transcendens függvény között, mi ki tudtuk mutatni, hogy ha adva [illegible] mindig [illegible] kört, melyen túl állandóan (tehát minden z érték mellett,) nagyobb a függvényértéke mint N; itt csak azt tudjuk kimutatni, hogy mindig írhatunk oly nagy ρ sugárral kört, melyen a függvény maximuma nagyobb mint N, de azért lehet a körön olyan hely, melyben a függvényértéke esetleg kisebb mint N.

Néhány tétel a leszármaztatott hatványsorokról.

Azt az eljárást, midőn a

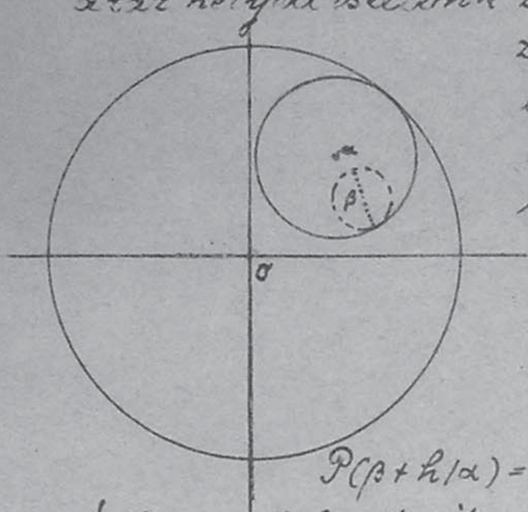
$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots\dots$$

hatványsorban $z = \alpha + h$ helyettesítve, azt h hatványai szerint rendezzük, s azután ismét $h = (z-\alpha)$-t helyettesítünk, nevezzük leszármaztatásnak; és a

$$P(z/\alpha) = P(\alpha) + P'(\alpha)(z-\alpha) + \frac{P''(\alpha)}{2!}(z-\alpha)^2 + \dots\dots$$

sort az eredeti leszármazottjának neveztük. Láttuk, hogy a kettő convergentia területe nem ugyanaz, amannak 0, ennek a α centruma, és ρ sugara az α-nak az eredeti convergentia körtől való távolsága, habár megeshetik, hogy a leszármazott sor convergens területe túlterjed a régi körön. De a két terület közös pontjaiban a két sor értéke ugyanaz. Láttuk továbbá, hogy épp úgy lehet átmenni a $P(z)$ deriváltjáról $P'(z)$-ről annak leszármazottjára $P'(z/\alpha)$-ra, melynek convergentia területe ugyanaz mint $P(z/\alpha)$ és pedig azért mert ugyanazt az eredményt kapjuk, $P(z)$ leszármazottját $P(z/\alpha)$-t deriváljuk $P'(z/\alpha)$ a derivált és eredetije pedig mindig ugyanazzal a convergentia területtel bír.

Ismételjük most már a leszármaztatás operatióját a $P(z)$ első leszármazottján $P(z/\alpha)$-n. Vegyük tehát $P(z/\alpha)$-t eredeti sornak, melynek convergentia területe legalább az α centrumú, ρ sugarú kör és ezen belül vegyünk fel egy β pontot s e körül bontsuk sorba a $P(z/\alpha)$-t, azzal helyettesítünk $z=\beta+h$, tehát



$z-\alpha=\beta-\alpha+h$

épen mert β az ς sugarú körön belül van, a sor ezen belül feltétlenül convergens, szabad tehát h hatványai szerint rendezni, és így

$$\mathfrak{P}(\beta+h|\alpha)=\mathfrak{P}(\alpha)+\mathfrak{P}'(\alpha)(\beta-\alpha+h)+\frac{\mathfrak{P}''(\alpha)}{2!}(\beta-\alpha+h)^2+\cdots$$

s rendezve h hatványai szerint, a h-tól mentes tagok adják $\mathfrak{P}(\beta|\alpha)$ stb.

$$\mathfrak{P}(\beta+h|\alpha)=\mathfrak{P}(\beta|\alpha)+\mathfrak{P}'(\beta|\alpha)h+\frac{\mathfrak{P}''(\beta|\alpha)}{2!}h^2+\cdots\cdots$$

és $h=z-\beta$ helyettesítve, kapjuk, hogy

$$\mathfrak{P}(z|\alpha\beta)=\mathfrak{P}(\beta|\alpha)+\mathfrak{P}'(\beta|\alpha)(z-\beta)+\frac{\mathfrak{P}''(\beta|\alpha)}{2!}(z-\beta)^2+\cdots\cdots$$

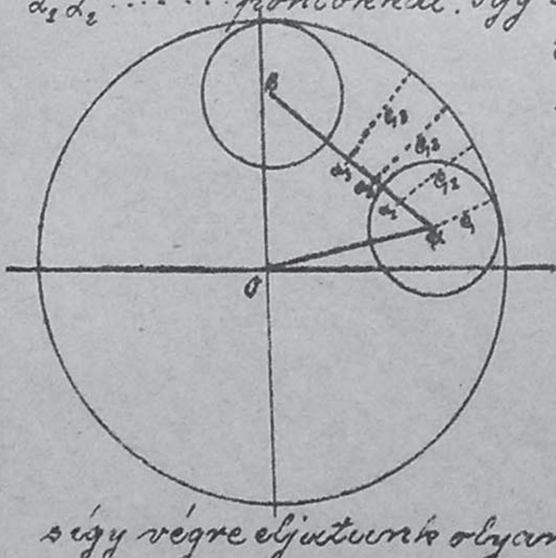
tulajdonképen az jönne ki, hogy ez a sor egyenlő $\mathfrak{P}(z|\alpha)$-val, de mivel ez a sor egy oly területen belül biztosan convergens, melynek centruma β és sugara a β távolsága az ς sugarú kör kerületétől, azért ez nem bír ugyanazzal a convergentia területtel, mint $\mathfrak{P}(z|\alpha)$ ezért jelöljük ezt a sort $\mathfrak{P}(z|\alpha\beta)$-val, a mi azt jelenti, hogy $\mathfrak{P}(z)$-ről átmentünk egy α centrumú sorra, s erről, ezen belül fekvő β centrumú sorra. De mivel β belül van az r sugarú körön, szabad z-ről direct átmenni β-ra s akkor kapjuk a következő sorbabontást,

$$\mathfrak{P}(z|\beta)=\mathfrak{P}(\beta)+\mathfrak{P}'(\beta)(z-\beta)+\frac{\mathfrak{P}''(\beta)}{2!}(z-\beta)^2+\cdots\cdots$$

a mely convergens egy β centrumú területen, mely az r sugarú kört belülről érinti és így magában foglalja $\mathfrak{P}(z|\alpha\beta)$ convergentia területét; de tudjuk hogy az α körön belül $\mathfrak{P}(z)=\mathfrak{P}(z|\alpha)$, s mivel β az α körön belül van, $\mathfrak{P}(\beta)=\mathfrak{P}(\beta|\alpha)$ épígy $\mathfrak{P}'(\beta)=\mathfrak{P}'(\beta|\alpha)$, tehát a két sor tagról tagra ugyanaz, mert mind kettő halad $(z-\beta)$ hatványai szerint és így a megfelelő coefficiensek egyenlők, úgyhogy mindkettő a β centrumú körön belül, melynek sugara β távolsága az eredeti kör kerületétől, feltétlenül convergens. Kaptuk tehát azt a tételt, hogy akár követve akár közvetlenül származtatunk az eredetiből új sort, a kettő mindig azonos.

A leszármaztatás operátiójával íly módon végtelen sok hatványsort kapunk, mindegyik külön centrumu terület-tel, de ki fogjuk mutatni, hogy ezek között nincsen különb-ség, mind egyenlő jellegűek, azaz bármelyiket téve elsőhely-re, ebből valamennyit leszármaztathatjuk, így magát az eredeti sort is.

Vegyük tehát a $P(z)$ hatványsort, mely convergens az r sugaru, 0 centrumu körön belül, terjünk át az ismeretes mó-don a $P(z/\alpha)$ és $P(z/\beta)$ leszármaztatott sorokra. Ki fogjuk mu-tatni, hogy többszörösen közbeiktatott leszármaztatással a $P(z/\alpha)$-ból levezethetjük a $P(z/\beta)$-t vagy $P(z)$-t. Összekötve α-t β-val, erre rakjunk föl α-tól kezdve β felé egy ϱ-nál kisebb ϱ_1 távolt $\alpha_1 \alpha_2 \cdots\cdots$ pontokkal. Így választva az osztáspontokat, az α_1 biz-



tosan belül van az α convergentia te-rületén és így α-ról átterhetünk α_1-re s lesz $P(z/\alpha\alpha_1) = P(z/\alpha_1)$

Az α_1 centrumu, ϱ_1 sugaru körön be-lül fekszik α_2, s így átterhetünk α_2 cen-trumra s lesz

$$P(z/\alpha\alpha_1\alpha_2) = P(z/\alpha_2)$$

erről hasonló okból α_3-ra

$$P(z/\alpha\alpha_1\alpha_2\alpha_3) = P(z/\alpha_3)$$

s így végre eljutunk olyan α_n osztási ponthoz, illetőleg sorbabon-táshoz, melyen belül fekszik β, s akkor α_n-ről átterve a β-ra lesz,

$$P(z/\alpha\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\ldots\alpha_n\beta) = P(z/\beta)$$

vagy ha α-t a 0-val kötöttük össze, hasonló osztási pontokkal, lesz

$$P(z/\alpha\gamma_1\gamma_2\ldots\ldots\gamma_n 0) = P(z)$$

Tehát egyik sorbabontás a másikba átvezethető leszármazta-tással.

Vessünk fel most egy más kérdést. Láttuk hogy ilyen leszármaztatott sor végtelen sok van, mivel α-t bárhol felvehetjük a convergentia területén belül. Azt is láttuk, hogy a geometriai sor leszármazottjának convergentia területe túllép a régi convergentia kör határán, úgy hogy itt a függvényt oly helyeken is tudtuk értelmezni, (a függvény továbbfolytatása) a hol az eredeti sorbabontással nem tudtuk. A kérdés most az, vajjon lehetséges-e, hogy a $\mathfrak{P}(z)$ összes leszármazottjainak convergentia területe, túllépjen az eredeti körön? Hogy ezt a kérdést eldönthessük, szükségünk van előbb egy más tételre. Miután ugyanis α felvehet bárminő értéket az r sugarú körön belül, fogjuk fel α-t mint változót ebben az intervallumban, akkor a minden szabott értékéhez tartozik egy convergentia sugár, azaz minden egyes α helyen a leszármaztatott sor convergentia területének sugara, más és más lesz. Így a sugaraknak egész csoportját kapjuk, mely csoportnak egyfelől van maximuma vagy felső határa, másfelől minimuma vagy alsó határa. És most tétel gyanánt ki fogjuk mutatni, hogy ez az alsó határ 0. Tegyük fel az ellenkezőt, hogy t.i. egy 0-tól különböző ϱ ezen sugarak-nak alsó határa, ki fogjuk mutatni, hogy az ellentmondásra vezet, mely szerint az eredeti sor convergentia területének sugara nagyobb volna mint r.

Ha ugyanis ϱ az alsó határ, akkor bármilyen α centrumu sorbabontás egy ϱ sugarú körön belül biztosan convergens és így tetszésszerinti α centrum körül sorbabontva

$\mathfrak{P}(z) \div t$ $\qquad z = \alpha + h\,, \ |h| < \varrho$

$$\mathfrak{P}(z|\alpha) = \mathfrak{P}(\alpha) + \mathfrak{P}'(\alpha)\,h + \cdots\cdots + \frac{\mathfrak{P}^{n}(\alpha)}{n!}\,h^{n} + \cdots\cdots$$

ez a sor convergens feltételünk szerint a ϱ sugarú körön belül; vegyük most $\varrho_1 < \varrho$, akkor a $\mathfrak{P}(z)$ függvény maximuma a ϱ_1 sugarú kör peripheriáján Cauchy tétele szerint:

$$M \geqq \left|\frac{\mathfrak{P}^{r}(\alpha)}{r!}\right| \varrho_1^{r} \qquad\qquad h = \varrho_1$$

$$M \varrho_1^{-r} \geqq \left|\frac{\mathfrak{P}^{r}(\alpha)}{r!}\right|$$

a hol α alatt oly változó számot értünk, mely $|\alpha| < r$, és ezen összes a centrumu ϱ_1 sugarú körökön fellépő függvény maximumoknak a maximuma M. És most fejtsük ki $\frac{\mathfrak{P}^r(\alpha)}{r!}$ ez a $\mathfrak{P}(z)$-nek r-edik deriváltja $z=\alpha$ mellett

$$\mathfrak{P}^r(z) = r!a_r + (r+1)r\ldots 2a_{r+1}z + (r+2)(r+1)\ldots 3a_{r+2}z^2 + \cdots + (r+\kappa)(r+\kappa-1)\cdots(\kappa+1)a_{r+\kappa}z^\kappa + \ldots$$

osztva $r!$-al $\frac{\mathfrak{P}^r(z)}{r!} = a_r + \binom{r+1}{r}a_{r+1}z + \binom{r+2}{r}a_{r+2}z^2 + \cdots + \binom{r+\kappa}{r}a_{r+\kappa}z^\kappa + \ldots\ldots$

és $\frac{\mathfrak{P}^r(\alpha)}{r!} = a_r + \binom{r+1}{r}a_{r+1}\alpha + \binom{r+2}{r}a_{r+2}\alpha^2 + \cdots + \binom{r+\kappa}{r}a_{r+\kappa}\alpha^\kappa + \ldots\ldots$

legyen most már $|\alpha| = r_1 < r$, akkor ez utóbbi függvénynek az r_1 sugarú körön vett maximális értékére szintén áll a Cauchy féle tétel, mely szerint most

$$M\varrho_1^{-r} \geqq \binom{r+\kappa}{r}|a_{r+\kappa}|r_1^\kappa$$

ez az egyenlőtlenség pedig áll r és κ bármely nagy értékei mellett. Ha tehát $(r+\kappa)$-t fixirozozzuk oly módon, hogy $r+\kappa=n$ legyen s ennek megfelelőleg r és κ-t változtatjuk, kapjuk a következő egyenlőtlenségeket:

ha $r=0$, $k=n$	$M\varrho_1^{-0} = M \geqq \binom{n}{0}\lvert a_n\rvert r_1^n$	ϱ_2^0
" $r=1$, $k=n-1$	$M\varrho_1^{-1} \geqq \binom{n}{1}\lvert a_n\rvert r_1^{n-1}$	ϱ_2^1
" $r=2$, $k=n-2$	$M\varrho_1^{-2} \geqq \binom{n}{2}\lvert a_n\rvert r_1^{n-2}$	ϱ_2^2
....	....	.
ha $r=n$, $\kappa=0$	$M\varrho_1^{-n} \geqq \binom{n}{n}\lvert a_n\rvert$	ϱ_2^n

vegyük most $\varrho_2 < \varrho_1$ és ϱ_2 megfelelő hatványaival szorozzuk meg a fenti egyenlőtlenségeket, s azokat adjuk össze, akkor

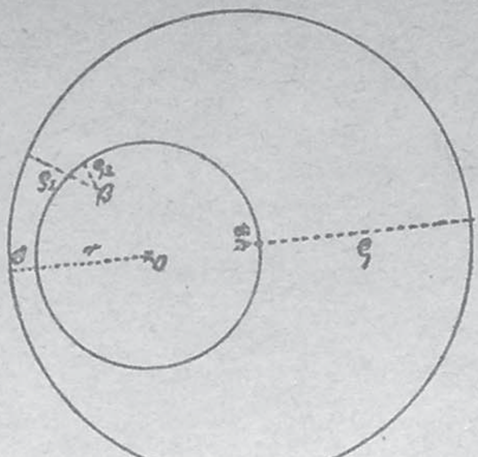
$$M\left(1 + \frac{\varrho_2}{\varrho_1} + \frac{\varrho_2^2}{\varrho_1^2} + \cdots + \frac{\varrho_2^n}{\varrho_1^n}\right) \geqq |a_n|(r_1+\varrho_2)^n$$

a baloldali zárjeles kifejezés egy geom. haladvány, melyet vég nélkül folytatva

$$\frac{M}{1-\frac{\varrho_2}{\varrho_1}} > |a_n|(r_1+\varrho_2)^n$$

a jobboldali kifejezés nem egyéb, mint a $\mathfrak{P}(z)$ hatványsor $(n+1)$ edik tagja, a_nz^n, ha abba $z = r_1+\varrho_2$ helyettesítünk s miután a baloldal egy állandó kifejezés, ez az egyenlőtlenség azt mondja, hogy a $\mathfrak{P}(z) = a_0 + a_1z + \ldots\ldots a_nz^n + \ldots$ hatványsor bármely tagja véges marad, ha abban $|z| = r_1+\varrho_2$ helyettesítünk, ez pedig azt mondja, hogy a $\mathfrak{P}(z)$ eredeti hatványsor feltétlenül convergens egy 0 centrumu $(r_1+\varrho_2)$ sugaru körön belül; de mivel $r_1 < r$ és $\varrho_2 < \varrho_1 < \varrho$, azért $|z| < r+\varrho$, és így a $\mathfrak{P}(z)$ hatványsor convergens volna egy $(r+\varrho)$ sugarú körön belül, de ez ellenmondás mert a $\mathfrak{P}(z)$ convergentia körének sugara csak r. Ezzel tehát ki van mutatva az a tétel, hogy a $\mathfrak{P}(z)$-ből leszármaztatott sorok convergentia sugarainak alsó határa nem lehet o-tól különböző, tehát o.

Ezen tétel segitségével, könnyü lesz most többek közt kimutatni azt a tételt hogy a leszármaztatott sor convergentia területe sohasem foglalhatja magába az eredeti sor convergentia körét, hanem vagy metszi azt, vagy érinti.



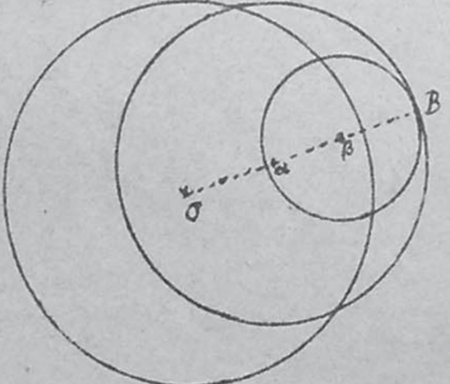
Tegyük fel, hogy $\mathfrak{P}(z)$ convergentia körének sugara r, $\mathfrak{P}(z)$-ből származtassuk le $\mathfrak{P}(z|\alpha)$-t, s tegyük fel, hogy ennek α centrumu ϱ sugaru convergentia köre egészen magában foglalja a régit. Kimutatjuk, hogy ez az előbbi tétel helytelen voltát vonná maga után. Ha ugyanis a régi convergentia körön belül felveszünk egy β-t, akkor

$$\mathfrak{P}(z|\alpha\beta) = \mathfrak{P}(z|\beta)$$

a $\mathfrak{P}(z|\beta)$ biztosan convergens a ϱ_2 sugarú körön belül, $\mathfrak{P}(z|\alpha\beta)$ pedig a ϱ_2 sugaru körön belül, s mivel a kettő identicus, azért $\mathfrak{P}(z|\beta)$ vagyis a $\mathfrak{P}(z)$ összes többi leszármazottjai convergentia köreinek sugara nagyobb volna a két kör legkisebb távolságánál, σ-nál a mely pedig feltételünk szerint nem o, vagy más szavakkal a $\mathfrak{P}(z)$ összes leszármazottjai convergentia sugarainak alsó határa $\sigma \neq 0$ volna, ez pedig ellenkezik az előbb bebizonyitott tétellel. Kivülről már érintkezhetik a két kör, mert akkor legalább egy σ sugaru kör van, azután metszheti vagy belülről érintheti. Ezen tétel alapján, mindjárt meg is mondhatjuk, hogy milyen határok között változhatnak a leszármaztatott sorok convergentia sugara. Ha ugyanis a sorbabontási centrum α, a sugár r_α, ekkor a legszélső esetben midőn kívül érintkeznek a körök $r_\alpha = r+|\alpha|$, minden közbeeső esetben kisebb. A legelső eset, a midőn a két kör belülről érintkezik, ekkor $r_\alpha = r-|\alpha|$, minden más esetben ennél nagyobb.

tehát
$$r+|\alpha| \geq r_\alpha \geq r-|\alpha|$$

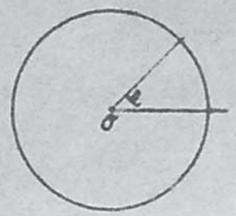
Ezzel a tétellel ki van mutatva az is, hogy ha az eredeti hatványsor convergentia tartománya véges, az összes leszármaztottaké is véges.



Szintén a fennti tételnek következménye, hogy ha valamely α centrumú sorbabontás conv. területe túllép a régi körön, akkor az α-t a 0-val összekötő sugaron fekvő minden α-nál nagyobb β centrumú sorbabontás területe is túllép a régi körön. Mert $P(z|\beta) = P(z|\alpha\beta)$ s miután a $P(z|\alpha\beta)$ conv. oly körön belül, melynek centruma β s sugara β-nak azon körtől való távolsága βB, azért $P(z|\beta)$ is túllép a régi körön. De ez nem áll minden radiusra, mert nem minden radiuson vannak ilyen α körök, mert hisz ezen sugarak alsó határa 0. Tehát kell léteznie legalább egy radiusnak, melyen a sorbabontás convergentia területei nem lépnek túl a régi körön. Ha ennek a radiusnak a körrel való átdöfés pontja P, akkor ez a pont egyik convergentia területbe sem hozható, mert ezen P pont körüli sorbabontásnak sugara 0 s így ezen a helyen nem is adhatunk értelmet a függvénynek. Az ilyen pontjait a periphériának, melyben a függvényt nem értelmezhetjük, azaz a melyben a hatványsor divergens, nevezzük singularis pontnak. Tehát minden hatványsor convergentia körének a peripheriáján van legalább egy singularis pont, de lehet több is sőt vannak oly hatványsorok, melyeknél az egész kör peripheria csupa singularis pontokból áll. Lássunk egy-egy példát erre a két szélső esetre:

(1) a geometria sor $1+z+z^2+\dots\dots+z^n+\dots = \frac{1}{1-z}$
ha $|z|<1$. Ezt bármely centrum körül, mely $|\alpha|<1$, sorba tudjuk bontani. De ha $\alpha=1$, a függvény végtelenné válik, elveszti értelmét és így a geometriai sornak az egységsugarú kör $+1$ pontjában singularis pontja van.

(2.) $$P(z) = z^1+z^{1\cdot 2}+z^{1\cdot 2\cdot 3}+\dots\dots+z^{n!}+\dots\dots = \sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}$$
Ez a sor conv., ha $|z|<1$, mert $z=1$ mellett a sor összes tagjai végesek, de divergens $|z|\geq 1$ mellett. S most bebizonyítjuk, hogy az egységsugarú körön csupa singularis pontjai vannak ezen sornak. Ugyanis járjuk be az 0-ból kiinduló radius vectorral az egész kör területét, s legyen a változó φ szög formulája $\varphi = \frac{2p\pi}{q}$ ahol p és q egész rat. számok. Az ilyen szöggel bíró complex z-kifejezése



$$z=\varrho\left(\cos\frac{2p\pi}{q}+i\sin\frac{2p\pi}{q}\right)$$
$$z^q=\varrho^q(\cos 2p\pi+i\sin 2p\pi)=\varrho^q$$
és $$z^{ql}=\varrho^{ql}$$
tehát z azon hatványai, melyeknek kitevője q-val osztható, positív egész számok s így a (2) sorban a q-dik hatványon túli tagok mind pos. egész számok, s ennek alapján a sort két részre oszthatjuk
$$P(z)=\sum_{n=1}^{q-1} z^{n!}+\varrho^{q!}+\varrho^{(q+1)!}+\dots\dots$$

De összeg absolut értéke nagyobb vagy egyenlő a két tag absolut értékének különbségével.
$$|P(z)|\geq \varrho^{q!}+\varrho^{(q+1)!}+\dots\dots-\left|\sum_{n=1}^{q-1} z^{n!}\right|$$
Ha a kivonandóban az abs. értékek összegét veszem, az egész kifejezés megkisebbedik; miután pedig $\varrho<1$, vesszük, az egész összeg kisebb mint $(q-1)$, mert

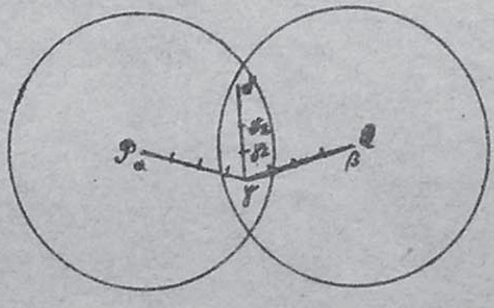
$\sum_{n=1}^{q-1} z^{n!} = z^{1} + z^{1\cdot 2} + \dots + z^{(q-1)!} < z + z + \dots + z = (q-1)z$ mert hiszen $|z| < 1$ és most $(q-1)|z| < q-1$, ha ugyanis $|z|$ helyébe a nálánál nagyobb 1-et tesszük. Igy tehát

$$\left|\sum_{n=1}^{q-1} z^{n!}\right| < q-1 \quad \text{és}$$

$$|P(z)| > \varrho^{q!} + \varrho^{(q+1)!} + \dots + \dots - (q-1)$$

Ha most a kiválasztott radiuson a peripheriához közeledünk végnélkül, a $P(z)$ végtelenbe nő s így az a pont, a hol a radius a kört metszi, singuláris pont lesz. De ez ismétlődik minden radiusra, melynek szöge $\frac{2\pi p}{q}$, ilyen pedig végtelen sok van, betöltik metszéspontjaikkal az egész kört s így az egész kör csupa singuláris pontokból áll.

Még egy nevezetes tételt mutassunk ki a leszármaztatott hatványsorokra. Vegyünk egy $P(z|\alpha)$ hatványsort α centrummal és egy $Q(z|\beta)$ hatványsort β centrummal; amaz halad $(z-\alpha)$ ez $(z-\beta)$ hatványai szerint. S most tegyük fel, hogy a két hatványsor convergentia területének van közös része, s hogy ezen közös terület egy bizonyos γ pontjában s annak közvetlen közelében a P és Q függvény egyenlő értékű; ki fogjuk mutatni, hogy akkor a két függvény a közös terület minden pontjában egyenlő értékű és az egyik függvény a másikból leszármaztatható, egyik a másiknak folytatása.



Ugyanis úgy az α mint a β körön belül lévén, mindkettő a γ körül sorbabontható és akkor

$$P(z|\alpha) = P(z|\alpha\gamma)$$
$$Q(z|\beta) = Q(z|\beta\gamma)$$

még pedig a γ körül írható bármilyen kis körön belül, mivel pedig ezen kis körön belül $P(z|\alpha) = Q(z|\beta)$ azért ugyanitt

$$P(z|\alpha\gamma) = Q(z|\beta\gamma)$$

Tehát e két $(z-\gamma)$ hatványai szerint haladó sor azonos, vagyis coefficienseik egyenlők. Vegyük fel most a közös területen a tetszés szerinti δ pontot, s legyen γ-nak az α és β körök peripheriájától való legkisebb távolsága r és $r_1 < r$, s mérjük rá a $\gamma\delta$ egyenesre γ-tól kezdve az r_1-et. Ha már most az ismeretes módon átmegyünk egyik osztási ponttól a másikig, akkor $P(z/\alpha\gamma)$-ból átmenve $P(z/\alpha\gamma\gamma_1)$-re, lesz $P(z/\alpha\gamma\gamma_1) = P(z/\alpha\gamma_1)$. $Q(z/\beta\gamma)$-ból átmenve $Q(z/\beta\gamma\gamma_1)$-re, lesz $Q(z/\beta\gamma\gamma_1) = Q(z/\beta\gamma_1)$ és mivel $P(z/\alpha\gamma) = Q(z/\beta\gamma)$

azért $$P(z/\alpha\gamma_1) = Q(z/\beta\gamma_1)$$

hasonlóakból $$P(z/\alpha\gamma_2) = Q(z/\beta\gamma_2)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$P(z/\alpha\delta) = Q(z/\beta\delta)$$

tehát a két függvény értéke a δ helyen is egyezik, s mivel δ tetszés szerinti, a két függvény a közös terület minden pontjában egyenlő értékü, de akkor egy ismeretes tétel szerint, közvetitő lépésekkel átmehetünk egyik függvényből a másikba. Tehát a két sor ugyanazon függvényhez tartozik, csak hogy más-más körön belül adja a függvény értékét.

Láttuk az eddigiekben, hogy valamely hatványsornak végtelen sok leszármaztatott sora van, s ezek mind egyenlő jellegüek, egyik a másikból leszármaztatható s visszavezethető az eredetire. A hatványsoroknak ily összefüggő rendszerét Weierstrass szerint analytikai függvénynek nevezzük. Az analytikai függvény tehát egy hatványsor s ennek leszármazottjai által van definiálva. Miután az analytikai függvény egyetlen egy hatványsorral meg van adva, azért az analitykai függvényt monogénnek nevezzük, mert ebből az egyből az összeseket levezethetjük. Mindama helyeket, melyeken az analyt. függvény nincsen definiálva, singularis helyeknek nevezzük, azokat pedig, a hol a függvény értelmezve van, közönséges vagy reguláris helyeknek nevezzük.

A leszármaztatás módszere most módot nyújt a hatványsorokkal definiált függvények osztályozására. Ha ugyanis $P(z)$-t α körül sorba bontjuk, s ebből a $P(z/\alpha)$-ból kiindul-a, követítő leszármaztatásokkal ismét visszatérünk $P(z|\alpha)$-hoz illetőleg α-hoz, akkor 2 eset lehetséges:

1., Lehet, hogy a függvény ugyanazzal az értékkel tér vissza α-hoz melylyel abból kiindult, ilyenkor azt mondjuk, hogy a függvény egyértékü.

2., Lehet, hogy a függvény nem ugyanazzal az értékkel tér vissza α-hoz, melylyel abból kiindult, hanem különböző utakon végezve a leszármaztatásokat, mindig különböző értékkel tér vissza α-hoz; ilyenkor azt mondjuk, hogy a hatványsorral definiált függvény többértékü, s pedig n értékü, ha n különböző értékkel tér vissza.

Vegyük pl. a következő függvényt: $\sqrt[n]{z}$

Ki fogjuk mutatni, hogy ez analytikai függvény n értékü és monogén.

Mindenekelőtt látható, hogy o ennek a függvénynek singuláris pontja, mert tegyük fel, hogy reguláris pont, akkor e körül sorba lehetne önteni, s volna e sor $a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots\dots$ de másfelől tudjuk, hogy a sor értéke o-ban $\sqrt{0}=0$, ez pedig csak úgy lehet, ha $a_0 = 0$, s akkor a sor ilyen volna

$$\sqrt[n]{z} = a_1 z + a_2 z^2 + \dots\dots$$

$$z = (a_1 z + a_2 z^2 + \dots\dots)^n$$

de a jobboldali kifejezésnek legalacsonyabb hatványa z^n, tehát a jobboldalon z^1 hatványnak coefficiense o, s mivel ez az egyenlet csak úgy állhat, ha a megfelelő coefficiensek egyenlők, következnék, hogy $1 = 0$ volna, a mi lehetetlen, tehát o csak singuláris pont lehet erre a függvényre nézve.

És most mutassuk ki először, hogy $\sqrt[n]{z}$ analitikus függvény. Az analit. függvény minden reguláris hely körül sorbafontható; ez tényleg lehetséges, mert ha $\alpha \neq 0$, és

$$z = \alpha + h = \alpha\left(1 + \frac{h}{\alpha}\right)$$

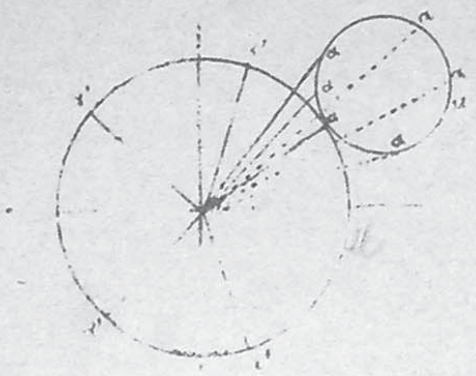
akkor $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\alpha}\left(1+\frac{h}{\alpha}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\alpha}\left(1 + \binom{\frac{1}{n}}{1}\frac{h}{\alpha} + \binom{\frac{1}{n}}{2}\frac{h^2}{\alpha^2} + \dots\dots\right)$

s $h = z-\alpha$ helyettesítve $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\alpha}\left(1 + \binom{\frac{1}{n}}{1}\frac{(z-\alpha)}{\alpha} + \binom{\frac{1}{n}}{2}\frac{(z-\alpha)^2}{\alpha^2} + \dots\dots\right) \quad (1)$

s ez a sorbafontás convergens, ha $\left|\frac{z-\alpha}{\alpha}\right| < 1$ azaz ha $|z-\alpha| < \alpha$, vagyis konvergens egy a centrumból írt körön belül, melykör átmegy a 0 ponton.

Most mutassuk ki, hogy ez a függvény n értékű, ez nyilvánvaló, mert hisz az (1) sorbabontásban tényezőként szerepel $\sqrt[n]{\alpha} = (\sqrt[n]{\varrho}, \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n})$, ha ugyanis $\alpha = (\varrho, \varphi)$ ahol φ az α-hoz tartozó legkisebb pozitív-szög. Ez a gyök pedig tudjuk, hogy n értékű, s ezen n értéket megkapjuk, ha rendre $k = 0, 1, 2 \dots (n-1)$-et helyettesítünk, és így az (1) sorbabontás alapján is n különböző értéke lesz $\sqrt[n]{z}$-nek s ezek a $P(z/\alpha)$; ...... $P_{n-1}(z/\alpha)$ sorok által vannak definiálva, melyeket egyenként az (1) sorbabontásból nyerünk, ha abban $\sqrt[n]{\alpha}$-nak n értékét egymás után behelyettesítjük. Tehát a függvény tényleg n értékű.

S végre mutassuk ki, hogy ez a függvény monogén, azaz hogy a sorbabontások közül bármelyiket előre téve, ebből a többit levezethetjük. Látható, hogy az (1) sor zárjeles része, bizonyos szabott α mellett egyértékű, s csak az $\sqrt[n]{\alpha}$ szorzó n értéke változtatja a függvény értékét. S mivel a függvény α-a körül folytonos, ezért ha bizonyos szabott α-hoz megállapított $\sqrt[n]{\alpha}$ értéktől folytonos úton megyek át egy e körül fekvő z-hez, a függvény megfelelő értékeis a folytonosság szerint fognak sorakozni. Induljunk ki abból az értékből, midőn $k=0$, azaz $(\sqrt[n]{\varrho}, \frac{\varphi}{n})$-ből, ez legyen tehát az illető szabott α-hoz megállapított függvényérték. S most 2 eset lehetséges:



1.) ha α-ból kiindulva oly úton térünk vissza, mely nem zárja körül a 0-t, akkor a szöge eleinte nő, azután ismét fogy s régi értékével tér vissza, úgy hogy ekkor a függvény értéke is ugyanaz marad.

2.) Ha a leírt út 0-t körülzárja, akkor az α szöge ez út menetén folyton növekedik s mint $\varphi + 2\pi$ tér vissza, s akkor a megfelelő függvényérték már $(\sqrt[n]{\varrho}, \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n})(1 + \binom{1/n}{1}\frac{(z-\alpha)}{\alpha} + \dots) = P_1(z/\alpha)$

úgy hogy ha ezen az úton czélszerüen választjuk a körvetitő lépéseket, a $\mathfrak{P}_0(z/\alpha)$-ból eljuthatunk egyszeri körülmenéssel $\mathfrak{P}_1(z/\alpha)$-ba, még pedig poz irányban haladva. Ha kétszer járunk körül ily körvetitő lépésekkel, akkor a szög már 4π-vel megnövekedve tér vissza, s így kétszeri körülmenéssel eljutunk $\mathfrak{P}_2(z/\alpha)$-hoz stb $(n-1)$ szeri körülmenéssel $\mathfrak{P}_{n-1}(z/\alpha)$-hoz s ha n-szer járunk körül ismét $\mathfrak{P}_0(z/\alpha)$-hoz jutunk. Ugyanez történik, ha negativ irányban járunk körül. Miután $V_0 = 0$, azért a singuláris pontban a függvény egyértékü, minden más helyen, tehát a 0 közvetlen közelében is n értékü a függvény, és így ha oly utontérünk vissza α-hoz, mely 0-on átmegy, 0-ban a függvény egyszere egyértékü lesz, s annak közvetlen szomszédságában egyszerre átcsap folytonosság nélkül bármily értékre, azért a 0 pontot itt elágazási helynek is nevezzük.

Az eddig bebizonyitott értékeket ki fogjuk terjeszteni a neg. hatványai szerint haladó hatványsorokra is. Előbb azonban oly sorokról kell néhány tételt levezetnünk, melyeknek tagjai külön-külön hatványsorok. Legyen egy ilyen hatványsor

$$\mathfrak{P}_1(z) + \mathfrak{P}_2(z) + \cdots\cdots + \mathfrak{P}_n(z) + \cdots\cdots \qquad \text{I.}$$

a hol tehát az egyes $\mathfrak{P}$-k külön hatványsorok

$$\mathfrak{P}_1(z) = a_0^{(1)} + a_1^{(1)} z + \cdots\cdots + a_n^{(1)} z^n + \cdots\cdots$$

$$\mathfrak{P}_2(z) = a_0^{(2)} + a_1^{(2)} z + \cdots\cdots + a_n^{(2)} z^n + \cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Erről a hatványsorról feltesszük, hogy egyenletesen conv. és egyes tagjai külön külön bizonyos 0 centrumu területen belül convergensek, s hogy a g sugaru kör a közös convergentia terület, azaz ha ezen belül fekvő bármely értéket helyettesitünk a tagokba, azok végesek maradnak. Feltesszük továbbá, hogy ezek a tagsorok mind egyenletesen convergensek, azaz bármily kis η megszabása után, mindig tudunk annyi véges számú tagot summázni, hogy az elkövetett hiba kisebb legyen mint η. Ilyen feltételek mellett ki fogjuk mutatni, a következő tételt:

1.) Ha a tagsorok megfelelő coefficienseit summázzuk, convergens sorokat kapunk, azaz, az

$$a_0^{(1)}+a_0^{(2)}+a_0^{(3)}+\cdots\cdots = A_0$$
$$a_1^{(1)}+a_1^{(2)}+a_1^{(3)}+\cdots\cdots = A_1$$
$$a_2^{(1)}+a_2^{(2)}+a_2^{(3)}+\cdots\cdots = A_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_n^{(1)}+a_n^{(2)}+a_n^{(3)}+\cdots\cdots = A_n$$

sorok mind convergensek, tehát egy véges $A_0, A_1 \ldots A_n \ldots$ számmal helyettesithetők.

2.) Ha ezen A számokkal hatványsort alkotunk, akkor ez a

$$P(z) = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \cdots\cdots + A_n z^n + \cdots\cdots$$

hatványsor is convergens a ς sugarú körön belül, s annak minden pontjában egyenlő értékü az eredeti $\underline{I}$ hatványsorral;

és ezzel ki lesz mutatva, hogy szabad - ilyen feltételek mellett - az adott $\underline{I}$ sor tagjait tetszés szerinti sorrendben summázni tehát egy hatványsorrá összevonni.

Ezen tétel bebizonyitásánál a Cauchy féle tételre fogunk hivatkozni. Ha az eredeti sort egyszerüen

$$P_1 + P_2 + P_3 + \cdots\cdots P_n + \cdots\cdots$$

alakban irjuk, akkor az egyenletes convergentia feltételéből következik, hogy

$$|P_{n+1} + P_{n+2} + \cdots\cdots P_{n+k}| < \varepsilon \quad \text{tehető} \quad (k = 0, 1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

Miután a $|\cdots|$ jel között véges számú conv. sorok állanak, egy ismeretes analytikai tétel alapján szabad ezeket úgy summázni, hogy a megfelelő tagokat summázzuk; legyen tehát

$$a_0^{(n+1)} + a_0^{(n+2)} + \cdots\cdots + a_0^{(n+k)} = r_{0nk}$$
$$a_1^{(n+1)} + a_1^{(n+2)} + \cdots\cdots + a_1^{(n+k)} = r_{1nk}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

r_{0nk} nem egyéb, mint A_0-ból az n-diken túli k tag összege, hasonlóképen értelmezendő r_{1nk}, r_{2nk} stb. Már most a fennti egyenlőtlenség azt mondja, hogy $|r_{0nk} + r_{1nk} z + r_{2nk} z^2 + \cdots\cdots + r_{\nu nk} z^\nu + \ldots| < \varepsilon$ $(\underline{II})$

vegyünk most már egy ϱ_1 sugarú kört, mely $\varrho_1 < \varrho$, akkor ezen a periphériáján is áll az egyenletes convergentia, de akkor a II függvény maximuma is

$$|M| < \varepsilon$$

s mivel Cauchy tétele szerint

$$|r_{\nu n k}| \varrho_1^{\nu} < M < \varepsilon \quad \text{lesz}$$

$$|r_{\nu n k}| < \varepsilon \varrho_1^{-\nu}$$

de mivel ϱ_1 véges, azért az $\varepsilon \varrho_1^{-\nu}$ szorzat bármily kicsinynyé tehető s mivel általánosan $r_{\nu n k}$ az A_ν sor n-ediken túli k tagjának összege, azért ez az utolsó egyenlőtlenség azt mondja, hogy az A-k mind convergensek, s ezzel a tétel első része be van bizonyítva.

Ha most a coefficiensekből alkotott convergens sorok értékét rendre $A_0, A_1 \dots\dots A_n \dots$ el jelöljük és megalkotjuk a

III. $$\mathfrak{P}(z) = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \dots\dots\dots$$

hatványsort, akkor a ϱ sugarú körön belül ez is convergens lesz és mindenütt egyenlőértékű a régivel. Ezt a tételt úgy fogjuk kimutatni, hogy megalkotjuk a III és I sor első n tagjának összegéből az S_n illetőleg Σ_n-ből az $S_n - \Sigma_n$ különbséget, s kimutatjuk hogy ennek limese $\lim\limits_{n} (S_n - \Sigma_n) = 0$, a mivel ki lesz mutatva, hogy a két sor egyenlő.

Itt két egyenlőtlenségre van szükségünk. Osszuk fel az A sorokat két egyenlő részre; az első n tag összegét jelöljük s-el, a maradék részt r-el tehát

$$A_0 = s_{0n} + r_{0n}$$
$$A_1 = s_{1n} + r_{1n}$$
$$\dots\dots\dots$$
$$A_\nu = s_{\nu n} + r_{\nu n}$$

Már most az egyik már ismeretes egyenlőtlenség azt mondja, hogy $|r_{\nu n k}| < \varepsilon \varrho_1^{-\nu}$, $(k = 0, 1, 2, 3 \dots)$ tehát bármily nagy k-ra s így az egész maradékra, úgyhogy azt is írhatjuk

$$|r_{\nu n}| < \varepsilon \cdot \varrho_1^{-\nu} \qquad (1)$$

A második egyenlőtlenséget hasonlóképp nyerjük; ugyanis

$$\Sigma_n = P_1 + P_2 + \cdots + P_n$$

s így szabad ezen véges számu convergens sorokat úgy összegezni, hogy a megfelelő tagokat summázzuk, de akkor

$$\Sigma_n = s_{0n} + s_{1n}z + s_{2n}z^2 + \cdots\cdots$$

de a Σ_n feltételünk szerint véges értékü s egyenletesen convergens, s így a ϱ_1 sugaru körön is az; ha tehát ezen való maximális értékét M-el jelöljük, akkor Cauchy tétele szerint

$$|s_{rn}|\varrho_1^r \leq M$$

$$|s_{rn}| \leq M\varrho_1^{-r} \qquad \text{hol } r = 0, 1, 2, 3 \cdots \qquad (2)$$

Ezen két egyenlőtlenség segélyével most könnyü lesz kimutatni, hogy $\lim\limits_n (S_n - \Sigma_n) = 0$

Ugyanis

$$\begin{aligned} S_n - \Sigma_n = {} & A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \cdots\cdots + A_n z^n \\ & - s_{0n} - s_{1n}z - s_{2n}z^2 - \cdots\cdots - s_{nn}z^n - s_{n+1,n}z^{n+1} - \cdots \\ \hline S_n - \Sigma_n = {} & r_{0n} + r_{1n}z + r_{2n}z^2 + \cdots\cdots + r_{nn}z^n - s_{n+1,n}z^{n+1} - \cdots \end{aligned}$$

ki kell mutatni, hogy a jobboldali kifejezés bármily kicsinnyé tehető. Ha most áttérünk az absolut értékre, s az r és s-ek helyébe az (1) (2) egyenlőtlenségek alapján helyettesitünk, akkor

$$|S_n - \Sigma_n| < \varepsilon\left(1 + \frac{|z|}{\varrho_1} + \frac{|z|^2}{\varrho_1^2} + \cdots\right) - M\left(\frac{|z|^{n+1}}{\varrho_1^{n+1}} + \frac{|z|^{n+2}}{\varrho_1^{n+2}} + \cdots\right)$$

ha ugyanis az első sort végnélkül folytatjuk; a geometriai sorokat összevonva

$$|S_n - \Sigma_n| < \frac{\varepsilon}{1 - \frac{|z|}{\varrho_1}} + \frac{\frac{M|z|^{n+1}}{\varrho_1^{n+1}}}{1 - \frac{|z|}{\varrho_1}}$$

ha most $|z| < \varrho_1$ akkor az első tört nevezője állandó, úgyszintén a második-é is, s ha egyfelől ε-t elég kicsinynek másfelől n-et elég nagynak vesszük, nyilvánvaló hogy bármily kis η megadása után

$$|S_n - \Sigma_n| < \eta \quad \text{tehető}$$

de akkor

$$\lim (S_n - \Sigma_n) = 0$$

tehát

$$\lim S_n = \lim \Sigma_n$$

$P(z)$ = az eredeti sor még pedig a ϱ sugaru körön belül.

Ez a tétel Weierstrasstól ered s röviden így hangzik: Ha végtelen sok hatványsor egyenletesen convergens sort alkot, akkor ezt a sort összevonhatjuk egyetlenegy convergens hatvány=

sorrá olyformán, hogy az egyes hatványsorokból z ugyanazon hatványainak coefficienseit egy taggá vonjuk össze, az így nyert sor is ugyanott convergens, a hol a régi és értéke is ugyanaz.

Ezen tétel segítségével most már könnyü lesz mindazon tételeket, melyeket a positiv kitevőjü hatványai szerint haladó hatványsorokra kimutattunk, kiterjeszteni a neg. hatványai szerint haladó sorokra.

Láttuk hogy analit. függvény minden függvény mely bírónyos helyek körül sorbabontható; láttuk azt is, hogy az analit. függvény monogén s vannak singularis pontjai, melyek körül a függvény nem bontható sorba, és regularis helyei, melyek körül sorbabontható.

A 0-t regularis helynek nevezzük valamely függvényre nézve, ha $(z-0)=z$ pos. hatványai szerint az a függvény sorbabontható, ha tehát létezik a függvény

$$P(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\dots\dots \qquad (I)$$

alaku sorbabontása.

Az α-t reguláris helynek nevezzük valamely függvényre nézve, ha létezik ezen függvénynek $(z-\alpha)$ pos. egész hatványai szerint haladó sorbabontása.

$$P(z/\alpha)=P(\alpha)+P'(\alpha)(z-\alpha)+\frac{P''(\alpha)}{2!}(z-\alpha)+\dots\dots\dots \qquad (II.)$$

A ∞ helyét a számsíknak (ill. polusát a számgömbnek) regularis helynek nevezzük valamely függvényre nézve, ha létezik ennek z neg. egész kitevőjü hatványai szerint haladó sorbabontása $P(z/\infty)=a_0+a_1\frac{1}{z}+a_2\frac{1}{z^2}+\dots\dots\dots \qquad (III.)$

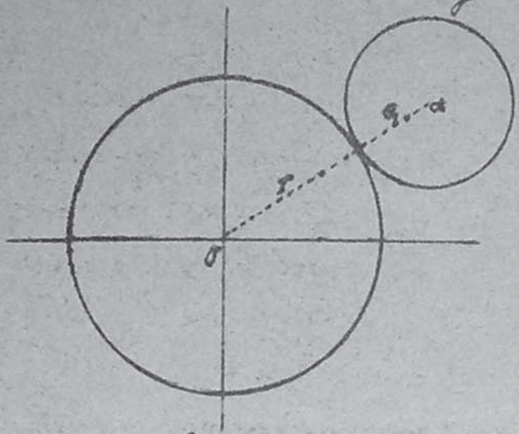
A függvények ezen három sorbabontási alakját, tehát a 0, a számsík, s a számsík ∞ távoli pontja körül nevezzük a függvény elemeinek.

Most ki fogjuk mutatni, hogy a végtelen távoli helyen definiált függvénynek, tehát a III függvényelemnek szintén megvan ez a tulajdonsága, hogy belőle bármely más pont körül sort lehet származtatni.

Legyen tehát adva a

$$P(z/\infty) = a_0 + a_1\frac{1}{z} + a_2\frac{1}{z^2} + \cdots\cdots$$

Ez a hatványsor a mint tudjuk egyenletesen convergens egy 0 centrumu, r sugaru körön kivül az egész számsikon, ha r=0, akkor a convergentia terülot az egész számsik, kivéve a 0



pontot, mert ebben a $P(z/\infty)$ nincsen értelmezve. Már most próbáljuk ezt a függvényt sorbabantani egy a körül mely kivül van az r sugaru körön, tehát feltesszük, hogy $z = \alpha + h$ és $|h| < \varrho$ a hol ϱ az α-nak minimális távolsága a r sugaru körtől, mert ezen a ϱ sugaru körön belül $P(z/\infty)$ biztosan convergens. S most $P(\alpha+h/\infty) = a_0 + a_1\frac{1}{\alpha+h} + a_2\frac{1}{(\alpha+h)^2} + \cdots\cdots + a_n\frac{1}{(\alpha+h)^n} + \cdots$ de itt most már egy végtelen sok hatványsorból álló egyenletesen convergens sorunk van, mert hisz az $\frac{1}{\alpha+h}$, $\frac{1}{(\alpha+h)^2}$, $\cdots$ stb. függvényeket [az (I. 42) szerint] sorbafejtjük ezen képlet szerint:

$$(1-z)^{-\kappa} = 1 + \binom{\kappa}{1}z + \binom{\kappa+1}{2}z^2 + \cdots\cdots + \binom{\kappa+n-1}{n}z^n + \cdots\cdots$$

s ez convergens, ha $|z| < 1$ s ha most $z = \alpha + h = \alpha(1+\frac{h}{\alpha})$ akkor ezen értéket helyettesitve egy sort kapunk, mely convergens, ha $|\frac{h}{\alpha}| < 1$, azaz $|h| < \alpha$ mely tehát convergens egy α centrumu s 0-n átmenő körön belül, úgyhogy a következő sorok az α centrumu, ϱ sugaru körön belül biztosan convergensek:

$$\begin{array}{l|l}
a_1 & \frac{1}{\alpha+h} = \frac{1}{\alpha}\left(1+\frac{h}{\alpha}\right)^{-1} = \frac{1}{\alpha} - \binom{1}{1}\frac{h}{\alpha^2} + \binom{2}{2}\frac{h^2}{\alpha^3} - \cdots\cdots + (-1)^n\binom{n}{n}\frac{h^n}{\alpha^{n+1}} + \cdots \\
a_2 & \frac{1}{(\alpha+h)^2} = \frac{1}{\alpha^2}\left(1+\frac{h}{\alpha}\right)^{-2} = \frac{1}{\alpha^2} - \binom{2}{1}\frac{h}{\alpha^3} + \binom{3}{2}\frac{h^2}{\alpha^4} - \cdots\cdots + (-1)^n\binom{n+1}{n}\frac{h^n}{\alpha^{n+2}} + \cdots \\
a_3 & \frac{1}{(\alpha+h)^3} = \frac{1}{\alpha^3}\left(1+\frac{h}{\alpha}\right)^{-3} = \frac{1}{\alpha^3} - \binom{3}{1}\frac{h}{\alpha^4} + \binom{4}{2}\frac{h^2}{\alpha^5} - \cdots\cdots + (-1)^n\binom{n+2}{n}\frac{h^n}{\alpha^{n+3}} + \cdots \\
\cdot\cdot & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}$$

Ha már most ezen sorokat megfelelőleg megszorozzuk $a_1, a_2 \ldots\ldots$ coefficiensekkel s ezeket összeadjuk a Weierstrass tétele szerint, akkor a szabad tagok összege, hozzávéve még a_0-t nem egyéb mint $P(\alpha/\infty)$. Ha az eredeti $P(z/\infty) = a_0 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \cdots\cdots$ sort deriváljuk, kapjuk a $P'(z/\infty) = -\frac{a_1}{z^2} - \frac{2a_2}{z^3} - \frac{3a_3}{z^4} - \cdots\cdots$ sort s ez ugyanott convergens, a hol $P(z/\infty)$; látható most, hogy a h első hatványával szorzott tagok összege, nem egyéb, mint $\mathfrak{P}'(\alpha|\infty)$; h^2-al szorzott tagok összege $\frac{\mathfrak{P}''(\alpha|\infty)}{2!}$ stb., s így kapjuk hogy

$$\mathfrak{P}(\alpha+h|\infty) = \mathfrak{P}(\alpha|\infty) + \mathfrak{P}'(\alpha|\infty)h + \frac{\mathfrak{P}''(\alpha|\infty)}{2!}h^2 + \cdots\cdots$$

vagy $h = z-\alpha$ helyettesítve

$$\mathfrak{P}(z|\infty\alpha) = \mathfrak{P}(\alpha|\infty) + \mathfrak{P}'(\alpha|\infty)(z-\alpha) + \frac{\mathfrak{P}''(\alpha|\infty)}{2!}(z-\alpha)^2 + \cdots\cdots$$

s ez a sor biztosan convergens az α centrumú, ϱ sugarú körön belül, s ezen a területen egyértékű az eredeti sorral. Látható tehát, hogy a ∞ távoli hely körüli sorbabontás ugyanazzal a tulajdonsággal bír, mint a többi függvényelem, azaz sorbabontható bármely pont körül a convergentia területén. Ezért jogosult ez az eljárás, hogy a végtelen távoli hely körüli sorbabontást a függvényelemek közé számítsuk.

Különben könnyű kimutatni itt is, hogy a függvény és összes deriváltjainak convergentia területe ugyanaz, fedik egymást. Mert legyen a függvény

$$\mathfrak{P}(z) = a_0 + a_1\frac{1}{z} + a_2\frac{1}{z^2} + \cdots\cdots$$

$$\mathfrak{P}'(z) = -a_1\frac{1}{z^2} - a_2\frac{2}{z^3} - \cdots\cdots$$

tegyük fel hogy $\mathfrak{P}'(z)$ bizonyos a $\mathfrak{P}'(z)$ convergentia területén belül fekvő z mellett convergens, kimutatjuk, hogy e mellett $\mathfrak{P}(z)$ is convergens. Mert ha $\mathfrak{P}'(z)$ convergens, akkor $|a_1|\frac{1}{|z|^2} + 2|a_2|\frac{1}{|z|^3} + \cdots\cdots + n|a_n|\frac{1}{|z|^{n+1}} + \cdots$ is convergens, s ez marad, ha a numerikus tényezőket elhagyjuk, z-vel szorzunk, s a_0-t hozzáadunk, de akkor az eredeti $\mathfrak{P}(z)$-t kapjuk. Tehát a két terület ugyanaz.

reguláris

Így tehát a számsík egész kiterjedésére definiáltuk a közönséges helyeket. Azon helyek összességét, melyeken a függvény sorbabontása lehetséges, nevezzük a függvényértelmezési tartományának.

Már most a singuláris helyeket meg fogjuk különböztetni egymástól. Legyen ugyanis $f(z)$ egy függvény, mely bizonyos convergentia területtel bír s β az $f(z)$ singuláris pontja; ha már most létezik $(z-\beta)$nak olyan positiv egész hatványa, $(z-\beta)^\kappa$, melylyel $f(z)$-t szorozva, ezen $(z-\beta)^\kappa f(z)$ függvénynek a β nem singuláris helye azaz közönséges helye, akkor azt mondjuk, hogy β az $f(z)$-nek nem lényegesen singuláris pontja. Ha tehát β az $f(z)$-nek nem lény. sing. pontja akkor létezik a következő sorbabontás:

I. $(z-\beta)^{\kappa} f(z) = a_0 + a_1(z-\beta) + a_2(z-\beta)^2 + \dots\dots\dots$ .tehát

II. $f(z) = \underbrace{\frac{a_0}{(z-\beta)^{\kappa}} + \frac{a_1}{(z-\beta)^{\kappa-1}} + \dots + \frac{a_{\kappa-1}}{(z-\beta)}}_{\psi(z)} + a_{\kappa} + a_{\kappa+1}(z-\beta) + a_{\kappa+2}(z-\beta)^2 + \dots$

× vagyis nem lény. sing. hely körül a függvény egy oly végtelen hatványsorral állitható elő, melynek első véges részét az ezen helyhez tartozó partialis törtek alkotják, második része egy $(z-\beta)$ positiv eg. kitevőjü hatványai szerint haladó sor, melyre nézve tehát β közönséges hely; a partialis törtek a β helyen végtelenné válnak, tehát β ezekre nézve polus és igy β az $f(z)$-nek is polusa. A polaritást úgy szüntethetjük meg, hogy megszorozzuk $f(z)$-t $(z-\beta)^{\kappa}$-al, mert erre nézve β közönséges hely, vagy pedig levonjuk $f(z)$-ből a part. törteket, s akkor $f(z)-\psi(z)$-re nézve β közönséges hely. Azt a legkisebb k számot, mely mellett $(z-\beta)^{\kappa} f(z)$ függvény a β körül már rendes viselkedésü, nevezzük az $f(z)$ függvény sokszorossági számának. Ilyenkor II-ben $a_0 \neq 0$, mert ha $a_0 = 0$, akkor mindkét oldal osztható volna $(z-\beta)$-val s akkor $(\kappa-1)$ volna a legkisebb sokszorossági szám. Látható, hogy $f(z)$ ily κ-szoros polus körül κ-ad rangú végtelen nagy mennyiség, mert

$$\lim_{z=\beta} \frac{f(z)}{\frac{1}{(z-\beta)^{\kappa}}} = a_0$$

Azt is kimutatjuk, hogy ily polusok körül a függvénynek csak közönséges helyei vannak, azaz, hogy ezen polusok izolált, discrét pontok, ugyanis II-ben az a_{κ} után következő hatványsor convergens egy β centrum, ϱ sugaru körön belül, s ha most ezen belül egy $\beta \neq \alpha$ pontot veszünk, akkor e körül úgy a part. törtek $\psi(z)$, mint ezen hatványsor is sorbabonthatók – mert hisz a part. törtek csak a β centrum körül nem bonthatok sorba – tehát a ϱ sugarú kör belsejének minden pontja az $f(z)$-re nézve közönséges, és így a polusok izolaltak, a mennyiben minden polus közönséges helyekkel van körülvéve. Látjuk tehát, hogy a függvénynek a végesben fekvő nem lény. sing. pontjai egyszersmind annak polusai.

Ugyanaz áll a végtelenben fekvő polusokra nézve, mert tudjuk, hogy a mi értelme van $(z-\beta)$-nak a végesben, olyan értelme van $\frac{1}{z}$-nek a végtelen távoli helyen. A végtelen távoli helyet

a függvényre nézve nem lényegesen singuláris helynek nevezzük.
Ha létezik $\frac{1}{z}$-nek oly pos. egész kitevőjü hatványa, melylyel $f(z)$-t szorozva a ∞ távoli hely már közönséges hely, azaz a melyre nézve $\frac{1}{z^\kappa}\cdot f(z)$-re nézve már létezik az $\frac{1}{z}$ pos. egész hatványai szerint haladó sorbabontás

$$\frac{1}{z^\kappa} f(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots\dots\dots$$

s akkor

$$f(z) = a_0 z^\kappa + a_1 z^{\kappa-1} + \dots\dots + a_{\kappa-1} z + a_\kappa + \frac{a_{\kappa+1}}{z} + \frac{a_{\kappa+2}}{z^2} + \dots\dots\dots$$

Ha tehát végtelen a függvénynek nem lény. sing. pontja, akkor a függvény előállítható az utóbbi egyenlet szerint egy eg. rat. függvényből s egy a ∞ helyen rendes viselkedésü hatványsorból, azaz a melyre nézve a ∞ távoli hely közönséges hely. Az első részt alkotó eg. rat. függvény a végtelen távoli helyen végtelenné válik, s mivel

$$\lim_{z=\infty} \frac{f(z)}{z^\kappa} = a_0$$

mondhatjuk, hogy ha a végtelen távoli hely a függvénynek nem lényegesen singularis pontja, akkor ez a hely a függvénynek κ-szoros polusa, a mely körül a függvény κ-adrangu végtelen nagy mennyiség. Ez a polusis izolált, mert az $f(z)$ második részét alkotó hatványsor convergens egy 0 centrumu, ϱ sugaru körön kivül, s ha ezen kivül akárhol felveszek egy α pontot, e körül $f(z)$ mindkét része sorbabontható. A polaritást itt is úgy szüntetjük meg, hogy az $f(z)$ függvényt elosztjuk z^κ-al, vagy pedig az eg. rat. részt levonjuk $f(z)$-ből.

Ha pedig β olyan hely, melyre nézve nem létezik oly $(z-\beta)^\kappa$ hatvány, melylyel $f(z)$-t szorozva, a szorzatra nézve β közönséges hely volna, akkor azt mondjuk, hogy β az $f(z)$ függvénynek lényegesen singularis helye, ép úgy a végtelen távoli hely lény. sing. hely, ha nem létezik $\frac{1}{z}$-nek egy hatványa sem, melylyel $f(z)$-t szorozva, erre nézve a végtelenségi hely közönséges hely volna.

Tehát 3 féle singularis helyet ismertünk meg: 1.) nem lényegesen singularis hely vagy is polus; 2.) elágazási hely, melyben a többértékü függvény kevesebb értéket nyer, s 3.) lényegesen sing. hely.

Igy pl. minden transcendens egész függvénynek a végtelen távoli helyen lényegesen singularis helye van. Legyen pl. ily függvény

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots\dots\dots$$

a melyről tehát feltesszük, hogy az egész számsíkon convergens. Akkor

$$\frac{1}{z^\kappa}\cdot f(z) = \underbrace{\frac{a_0}{z^\kappa} + \frac{a_1}{z^{\kappa-1}} + \cdots\cdots}_{} + \underbrace{a_\kappa + a_{\kappa+1} z + a_{\kappa+2} z^2 + \cdots\cdots}_{}$$

s bármily nagy is legyen κ, a függvény második része mindig egy z pos. egész hatványai szerint haladó hatványsor lesz, melyre nézve pedig $z=\infty$ polus, tehát a transcendens eg. függvénynek a ∞ távoli helyen lényegesen singuláris helye van.

Mihelyt valamely függvénynek végtelen sok polusa van, a függvénynek mindig van lényegesen singuláris helye. Mert tudjuk, hogy e végtelen sok polusból álló számcsoportnak van legalább egy torlódási helye, legyen ez P, akkor P-ből bármily kis sugárral kört írva, ezen belül még mindig végtelen sok polus van s így P maga nem lehet sem közönséges hely sem polus, mert a polusok discrét pontok, a közönséges hely körül pedig a függvény sorbabontható, de ez itt nem lehet, hanem lényegesen singularis hely.

Most ki fogjuk mutatni, hogy valahányszor egy analytikai függvénynek nincsen lényegesen singularis helye, ez csak rat. függvény lehet. Mert tegyük fel először, hogy a végesben vannak polusai; ezek nem lehetnek végtelen nagy számmal, mert különben ezeknek torlódási helye az előbbiek alapján lény. sing. hely volna, ez pedig ellenkezik feltételünkkel. Tehát feltesszük, hogy az $f(z)$ függvénynek a végesben véges számú pólusai vannak:

$$\beta_1 \,,\; \beta_2 \,,\; \beta_3 \;\cdots\cdots\cdots\; \beta_r$$

sokszor. számok $\kappa_1 \quad \kappa_2 \quad \kappa_3 \cdots\cdots\cdots \kappa_r$

s most tudjuk, hogy a következő szorzatra nézve ezen β-k már nem polusok:

$$f(z)(z-\beta_1)^{\kappa_1}(z-\beta_2)^{\kappa_2}(z-\beta_3)^{\kappa_3}\cdots\cdots(z-\beta_r)^{\kappa_r}$$

Ha pedig a végtelen távoli hely e függvény polusa, akkor így írható

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots\cdots + a_n z^n$$

de ez a sor nem lehet végtelen sor, mert különben erre nézve a ∞ távoli pont lény. sing. hely volna, s így e sor az $a_n z^n$ taggal végződik, úgy hogy

$$f(z) = \frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n}{(z-\beta_1)^{\kappa_1}(z-\beta_2)^{\kappa_2}\cdots(z-\beta_r)^{\kappa_r}}$$

egy rat. függvény. Tehát a tétel helyes. De fordítva is áll, hogy a rat. függvénynek nincsenek lény. sing. helyei, csak polusai lehetnek.

Ha egy analytikai függvénynek sem a végesben, sem a végtelenben sing. helye nincsen, akkor ez csak constans lehet. Mert legyen egy ilyen függvény: $F(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots\cdots$

először is ez a függvény nem lehet végtelen sor, mert akkor erre nézve a ∞ távoli hely lény. singuláris volna; tehát csak véges, de z-től sem függhet, mert akkor ∞ erre nézve polus volna, s így $F(z)$ szükségképpen const.

Most az analitikai függvényeket különböző operatióknak vetjük alá s kimutatjuk, hogy ily módon ismét analit. függvényekhez jutunk.

<u>Összeadás.</u> Legyen két analit. függvény $f(z)$ és $g(z)$ s legyen ezeknek egy közös értelmezési tartománya. Kimutatjuk, hogy ezen belül van $f(z)+g(z)$-nek is az értelmezési tartománya. Mert egy ezen belül fekvő

α körül $$f(z) = f(\alpha) + f'(\alpha)(z-\alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(z-\alpha)^2 + \cdots\cdots$$

hasonlóképen $$g(z) = g(\alpha) + g'(\alpha)(z-\alpha) + \frac{g''(\alpha)}{2!}(z-\alpha)^2 + \cdots\cdots$$

s akkor $$f(z)+g(z) = f(\alpha)+g(\alpha) + (f'(\alpha)+g'(\alpha))(z-\alpha) + \left(\frac{f''(\alpha)}{2!} + \frac{g''(\alpha)}{2!}\right)(z-\alpha)^2 + \cdots$$

tehát $(g(z)+f(z))$ szintén sorbabontható α körül, s így ez is analyt. függvény, melynek értelmezési tartománya a közös értelmezési tartomány.

Miután az analit. függvény sorbabontásában a $(z-\alpha)$-val szorzott tag a függvény első derivaltja, azért

$$(f(z)+g(z))' = f'(z) + g'(z)$$

Tehát összeg derivaltja, annyi mint a derivaltak összege.

<u>Szorzás.</u> Legyen adva két analyt. függvény $f(z)$ és $g(z)$. Mindegyiknek van convergentia területe, s feltesszük, hogy ezeknek van közös részük, ha α ezen a közös területen van, akkor

$$f(z) = f(\alpha) + f'(\alpha)(z-\alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(z-\alpha)^2 + \cdots\cdots$$

$$g(z) = g(\alpha) + g'(\alpha)(z-\alpha) + \frac{g''(\alpha)}{2!}(z-\alpha)^2 + \cdots\cdots$$

Miután a közös területen e két sor feltétlenül convergens, szabad őket az ismeretes módon összeszorozni, s akkor

$$f(z)\,g(z) = f(\alpha)\,g(\alpha) + (f'(\alpha)\,g(\alpha) + f(\alpha)\,g'(\alpha))(z-\alpha) + \cdots\cdots$$

tehát e két függvény szorzata is sorbabontható $(z-\alpha)$ pos. eg. kitevőjü hatványai szerint, tehát analyt. függvény. Miután $(z-\alpha)$ coefficiense a függvény derivaltja az α helyen, azért ha z-t a szorzatsor convergentia területére szorítjuk, akkor ezen a területen a szorzat deriváltja

$$(f(z)\cdot g(z))' = f'(z)\,g(z) + f(z)\,g'(z)$$

a mi több tényező esetén is érvényes, úgy hogy általánosan

$$(f_1(z)f_2(z)\cdots f_n(z))' = f_1'(z)f_2(z)\cdots f_n(z) + f_1(z)f_2'(z)\cdots f_n(z) + \cdots + f_1(z)\cdots f_n'(z)$$

s a szorzatfüggvénnyel osztva:

$$\frac{(f_1(z)f_2(z)\cdots f_n(z))'}{f_1(z)f_2(z)\cdots f_n(z)} = \frac{f_1'(z)}{f_1(z)} + \frac{f_2'(z)}{f_2(z)} + \cdots + \frac{f_n'(z)}{f_n(z)}$$

Egy formula, melyre később hivatkozás fog történni.

Most ki fogjuk mutatni, hogy minden analyticus függvény reciproka is analytikus függvény; s pedig 3 helyen fogjuk vizsgálni a függvényt: 1.) oly helyen, mely az $f(z)$-re közönséges hely és nem 0 pont; 2.) oly helyen, mely az $f(z)$-re nézve közönséges hely és 0 pont; s 3.) mely az $f(z)$-re nézve polus.

1.) Legyen tehát α az $f(z)$-re nézve közönséges hely és nem 0 pont, akkor e körül

$$f(z) = f(\alpha) + \underbrace{f'(\alpha)(z-\alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(z-\alpha)^2 + \cdots\cdots} \qquad I.$$

s mivel $f(\alpha) \neq 0$ $\quad f(z) = f(\alpha) + \varphi(z)$;

miután $\varphi(z)$ oly függvény, mely α körül sorbabontható s $z=\alpha$ mellett 0, azért α körül folytonos és így mindig tehető $|z-\alpha|<\varrho$ úgy, hogy $|\varphi(z)|$ kisebb legyen bármily kis számnál. Legyen ϱ olyan, hogy $|z-\alpha|<\varrho$ mellett $|\varphi(z)|<f(\alpha)$, akkor ezzel könnyü lesz kimutatni, hogy $\frac{1}{f(z)}$ is analyt. függvény, mert

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{f(\alpha)+\varphi(z)} = \frac{1}{f(\alpha)}\cdot\frac{1}{1+\frac{\varphi(z)}{f(\alpha)}} = \frac{1}{f(\alpha)}\left(1+\frac{\varphi(z)}{f(\alpha)}\right)^{-1}$$ s mivel

$\left|\frac{\varphi(z)}{f(\alpha)}\right|<1$, azért a bin. tétel alapján ez $= \frac{1}{f(\alpha)}\left[1-\frac{\varphi(z)}{f(\alpha)}+\frac{\varphi(z)^2}{f(\alpha)^2}-\cdots\cdots\right]$

ez a sor egyenletesen convergens, s ha most $\varphi(z)$ értékét I-ből helyettesítjük, akkor szabad az így keletkezett végtelen sok sorból álló hatványsort eggyé összevonni, úgy hogy folytatólag

$$= \frac{1}{f(\alpha)}\left[1-\frac{f'(\alpha)(z-\alpha)+\frac{f''(\alpha)}{2!}(z-\alpha)^2+\cdots}{f(\alpha)}+\frac{(f'(\alpha)(z-\alpha)+\cdots)^2}{f(\alpha)^2}+\cdots\cdots\right]$$

s ezt rendezve $(z-\alpha)$ hatványai szerint s $\frac{1}{f(\alpha)}$-val beszorozva:

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{f(\alpha)} - \frac{f'(\alpha)}{f(\alpha)^2}(z-\alpha) + \cdots\cdots$$

tehát az ily α helyek körül $\frac{1}{f(z)}$ is sorbabontható, tehát analyticus függvény. Ebből az egyenletből látható az is, hogy

$$\left(\frac{1}{f(z)}\right)' = -\frac{f'(z)}{f(z)^2}$$

ez a függvény reciprokjának deriváltja oly helyen, mely a függvénynek, tehát a reciproknak is közönséges helye s nem 0 pontja.

2.) Legyen α az $f(z)$ függvénynek 0 pontja s pedig általánosság kedvéért κ-szoros 0 pont, kimutatjuk, hogy ez az α $\frac{1}{f(z)}$-re nézve κ-szoros polus. Mert $f(z) = \frac{f^{\kappa}(\alpha)}{\kappa!}(z-\alpha)^{\kappa} + \cdots\cdots$

és $\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{\frac{f^{\kappa}(\alpha)}{\kappa!}(z-\alpha)^{\kappa} + \cdots}$ s szorozva $(z-\alpha)^{\kappa}$-val

$$(z-\alpha)^{\kappa}\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{\frac{f^{\kappa}(\alpha)}{\kappa!} + \underbrace{\frac{f^{\kappa+1}(\alpha)}{\kappa+1}(z-\alpha) + \cdots\cdots}_{\varphi(z)}}$$

s ezt a jobboldali kifejezést ép úgy mint az imént $(z-\alpha)$ pz. e. hatványai szerint sorba lehet bontani, mert $\varphi(z)$ az α helyen 0, tehát

$$(z-\alpha)^{\kappa}\frac{1}{f(z)} = \mathfrak{P}(z/\alpha)$$

s így ez az α az $\frac{1}{f(z)}$-re nézve κ-szoros polus. Miután pedig $f(z)$ és $\frac{1}{f(z)}$ között a reciprocitás kölcsönös, azért megfordítva is az $f(z)$ polusa az $\frac{1}{f(z)}$-nek nullapontja s a sokszorossági szám ugyanaz marad. Mert különben is, ha β az $f(z)$-nek κ-szoros polusa, ez azt jelenti, hogy

$$(z-\beta)^{\kappa}f(z) = a_0 + a_1(z-\beta) + \cdots\cdots$$

és így $\frac{1}{(z-\beta)^{\kappa}f(z)} = \frac{1}{a_0 + \varphi(z)}$, a mely $\varphi(z)$ tehát β körül sorba-bontható, és így $(z-\beta)^{\kappa}$-val keresztül szorozva

$$\frac{1}{f(z)} = (z-\beta)^{\kappa}\cdot\mathfrak{P}(z/\beta)$$

a mi azt jelenti, hogy β az $\frac{1}{f(z)}$-nek κ-szoros nullapontpontja.

Ezekből következik, hogy ha $f(z)$-re nézve valamelyik pont lényegesen singuláris hely, akkor ez annak reciprokjára nézve is lény. sing. hely, mivel sem polus sem közönséges hely nem lehet. Az elágazási helyek is ugyanazok, mert ha ezen a helyen $f(z)$ értékei között egyenlők is vannak, a reciprokok között is egyenlők vannak.

Ugyanezek a tételek állanak a végtelen távoli helyre, azaz ha a végtelen távoli hely $f(z)$-re nézve közönséges hely és nem 0 pont, akkor ugyanez az $\frac{1}{f(z)}$-re is, vagyis ha

$$f(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots\cdots$$

akkor $$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{a_0 + \varphi(z)} = \mathfrak{P}(z/\infty)$$

mert $\varphi(z)$ halad $\frac{1}{z}$ pos. eg. kitevőjü hatványai szerint s 0, ha $z=\infty$.

<u>Osztás.</u> Ezek alapján könnyü kimutatni, hogy két anal. függvény

hányadosa is analyt. függvény, mert

$\frac{f(z)}{g(z)} = f(z) \cdot \frac{1}{g(z)}$ ezek szorzata pedig anal. függvény.

A derivált $\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)' = f'(z) \cdot \frac{1}{g(z)} - f(z)\frac{g'(z)}{g(z)^2} = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g(z)^2}$

Lássunk most más kapcsolatot két anal. függvény között. Vegyük a következő két anal. függvényt: $f(z)$ és $\mathcal{F}(z)$ s alkossuk meg a következő függvényt: Legyen $Z = f(z)$ tehát

$$\mathcal{F}(Z) = \mathcal{F}(f(z))$$

f tehát a z-nek függvénye, $\mathcal{F}$ az $f(z)$-nek függvénye. Ezt nevezzük összetett összetett függvény-nek. Erről kimutatjuk, hogy szintén anal. függvény, ha α az $f(z)$-re nézve közönséges hely és $f(\alpha) = A$ az $\mathcal{F}(Z)$-re nézve közönséges hely.

Mert ekkor $\qquad f(z) = f(\alpha) + f'(\alpha)(z-\alpha) + \cdots\cdots$

s ha most $f(\alpha) = A$ és $Z = f(z)$, akkor $Z = A + \psi(z)$ a mely $\psi(z)$ α körül végtelen kicsiny. Ha most feltesszük, hogy A az $\mathcal{F}(z)$-re nézve közönséges hely, hogy tehát anal. függvény, akkor

$$\mathcal{F}(Z) = \mathcal{F}(A) + \mathcal{F}'(A)(Z-A) + \cdots\cdots$$

a mely convergens, ha $|Z-A| < \varrho$ s ha most $Z-A = \psi(z)$ miután $\psi(z)$ α körül végtelen kicsiny, megszoríthatjuk z-t úgy, hogy $|\psi(z)| < \varrho$ legyen s akkor

$$\mathcal{F}(f(z)) = \mathcal{F}(A) + \mathcal{F}'(A)\psi(z) + \frac{\mathcal{F}''(\alpha)}{2!}\psi(z)^2 + \cdots\cdots$$

ez a sor ezen a területen belül egyenletesen convergens, mert egy bizonyos mennyiség hatványai szerint halad, s most ψ-ért betéve a végtelen hatványsort, végtelen sok hatványsorból álló sort kapunk:

$$\mathcal{F}(f(z)) = \mathcal{F}(f(\alpha)) + \mathcal{F}'(f(\alpha))(f'(\alpha)(z-\alpha) + \cdots\cdots) + \mathcal{F}''(f(\alpha))(f'(\alpha)(z-\alpha) + \cdots)^2 + \cdots$$

ezt rendezve $z-\alpha$ hatványai szerint

$$\mathcal{F}(f(z)) = \mathcal{F}(f(\alpha)) + \mathcal{F}'(f(\alpha))(f'(\alpha)(z-\alpha) + \cdots\cdots$$

Tehát az összetett függvény is sorbabontható $(z-\alpha)$ hatványai szerint, s így anal. függvény. E képletből az összetett függvény deriváltja is azonnal kiadódik

$$\mathcal{F}(f(z))' = \mathcal{F}'(f(z))f'(z)$$

Tehát mindama z helyek, melyek a belső függvényre közönséges helyek s melyek mellett a belső függvény a külsőre nézve közönséges hely, azok az összetett függvényre nézve is közönséges helyek. Singularis helyek azon helyek körül lesznek, melyek az $f(z)$-re nézve singularis helyek, azután melyekhez olyan értékei tartoznak $f(z)$-nek, melyek az $\mathcal{F}(z)$-nek singularis helyei.

Exponentiális függvény.

Alkalmazzuk most már az eddig tanultakat néhány egyszerűbb függvényre.

Láttuk, hogy a hatványozásnak volt egyedül ez a tuladonsága, hogy

$$f(\alpha)\cdot f(\beta) = f(\alpha+\beta) \quad \text{és}$$
$$f(\alpha) = [f(1)]^{\alpha}$$

s ez áll α-nak minden reális értéke mellett. Kérdés mostan, létezik-e olyan anal. függvény, melynek ez a tulajdonsága, vagyis a mely következő egyenlőségnek tesz eleget:
$$f(z_1)\cdot f(z_2) = f(z_1+z_2)$$
$$\text{és} \quad f(z) = [f(1)]^{z}$$

Ha sikerül kimutatni, hogy ily anal. függvény tényleg létezik, akkor ennek értelme leend z minden értéke mellett, a mi által a hatványozás értelmezve lesz complex kitevő esetén is. Ezt az analytikai függvényt exponentiális függvénynek fogjuk nevezni, a mennyiben itt a változó z a kitevőben szerepel. Ezen függvény felkeresésénél alapul fogjuk használni azt az egyenletet, hogy $f(z_1)\cdot f(z_2) = f(z_1+z_2)$ mert hiszen ezt a tulajdonságot követeljük meg az exponentiális függvénytől.

Előbb azonban lássuk ennek az exponentiális függvénynek néhány jellemző tulajdonságát.

I. Az exponentiális függvénynek nincsen 0 helye, mert ha volna olyan z érték, mely mellett $f(z_1)=0$, akkor
$$f(z_1)\cdot f(z_2) = f(z_1+z_2) = f(Z) = 0$$
volna, azaz az exponentiális függvény mindenütt 0 volna, de akkor ez nem is lenne függvény.

II. Az exponentiális függvénynek nincsen polusa a végesben. Mert ha $f(z_1)=\infty$, akkor $f(z_1+z_2)=f(Z)=\infty$ volna, a mi azt mondja, hogy akkor az egész számsík csupa polusokból állana, de akkor ez nem is volna függvény.

III Az exponentiális függvény értéke a 0 helyen: 1, mert ha $z_1=0$
$$f(0)\cdot f(z_2) = f(0+z_2) = f(z_2)$$

$$f(0) = \frac{f(z_1)}{f(z_1)} = 1$$

IV. Ha van az exp. függvénynek valahol közönséges helye, akkor a 0 is ilyen lesz.

Mert tegyük fel, hogy α közönséges hely, akkor

$$f(z) = A_0 + A_1(z-\alpha) + A_2(z-\alpha)^2 + \cdots\cdots$$

a melysor convergens, ha $|z-\alpha| < \varrho$ s $z-\alpha = z_1$ téve, ha $|z_1| < \varrho$, vagyis az

$$f(\alpha + z_1) = A_0 + A_1 z_1 + A_2 z_1^2 + \cdots\cdots$$ sor convergens, ha $|z_1| < \varrho$, ha most $f(-\alpha)$-val keresztül szorzunk, s az uj coefficienseket a-val jelöljük,

$$f(-\alpha)\cdot f(\alpha+z) = f(z_1) = a_0 + a_1 z_1 + a_2 z_1^2 + \cdots\cdots$$ a mi azt mondja, hogy mihelyt létezik az exp. függvénynek egy hely körüli sorbabontása, ebből mindig le vezethetünk egy 0 körüli sorbabontást, tehát a 0 tényleg közönséges hely s mivel $z_1 = 0$ mellett $f(0) = 1$, azért $a_0 = 1$. Lássuk most a többi coefficienseket. Tehát

$$f(z) = 1 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots\cdots$$

ez convergens, ha $|z| < \varrho$. Hogy már most erre a sorra az $f(z_1)\cdot f(z_2) = f(z_1+z_2)$ egyenletet alkalmazhassuk így kell megszorítani a z_1 és z_2-t, hogy $|z_1+z_2| < \varrho$ legyen. Ezt elérjük, ha $|z_1| < \frac{\varrho}{2}$ és $|z_2| < \frac{\varrho}{2}$, mert akkor $|z_1+z_2| < \varrho$ és most

$$f(z_1) = 1 + a_1 z_1 + a_2 z_1^2 + \cdots\cdots + a_n z_1^n + \cdots\cdots$$

$$f(z_2) = 1 + a_1 z_2 + a_2 z_2^2 + \cdots\cdots + a_n z_2^n + \cdots$$

$$f(z_1+z_2) = 1 + a_1(z_1+z_2) + a_2(z_1+z_2)^2 + \cdots + a_n(z_1+z_2)^n + \cdots\cdots \qquad \text{I.}$$

Miután $f(z_1)$ és $f(z_2)$ is feltétlenül convergens, szabad a kettőt tetszésszerinti sorrendben összeszorozni s miután a szorzatsor abs. értékre nézve convergens, tehát a szorzatsor is feltétlenül convergens s így szabad azt tetszésszerinti sorrendben írni, tehát általánosan

$$f(z_1)\cdot f(z_2) = \sum a_h a_k z_1^h z_2^k, \text{ hol } h = 0\cdots\infty,\ k = 0\cdots\infty \qquad \text{II}$$

$$= 1 + a_1(z_1+z_2) + (a_2 z_1^2 + \cdots a_1^2 z_1 z_2 + a_2 z_2^2) + \cdots + (a_n z_1^n + a_{n-1} a_1 z_1^{n-1} z_2 + \cdots + a_1 a_{n-1} z_1 z_2^{n-1} + a_n z_2^n) + \cdots$$

Már most feltettük, hogy (I) és (II) egyenlő oly z-k mellett, melyek abs. értékre nézve kisebbek $\frac{\varrho}{2}$-nél. Már most $|z_1+z_2| < \varrho$ s épígy $|z_1|+|z_2| < \varrho$ s így az I sorban elvégezve a hatványozást, ezen sor az abs. értékek mellett is convergens, tehát feltétlenül convergens, s így szabad tetszésszerinti sorrendben írni az I sort. Ha már most z_2-t egy pillanatra állandónak tekintjük és I és II-öt z_1 hatványai szerint rendezzük, akkor

I.) $$B_0 + B_1 z_2 + B_2 z_2^2 + \dots\dots$$

II.) $$C_0 + C_1 z_2 + C_2 z_2^2 + \dots\dots$$

sez a két kifejezés egyenlő, tehát $B_0 = C_0$, $B_1 = C_1$, $B_2 = C_2$, ...
igen de B és C is oly függvények, melyek z_1 minden értéke mellett egyen-
lök, s így az, hogy I és II egyenlő z_1 és z_2 minden értéke mellett, azt ki-
vánja, hogy a $z_1^h \cdot z_2^k$ coefficiense I és II-ben is ugyanaz legyen. Ez tehát
végtelen sok követelést foglal magában. Ezek a követelések az α-k meg-
határozására vezetnek. De ezen követelések egy részével is meg lehet ha-
tározni az α-kat, s kimutatjuk, hogy ezek az így meghatározott α-k
kielégítik a többi követeléseket is.

Kiindulunk pl. abból a követelésből, hogy $z_1^{n-1} z_2$ coefficiense mind-
két sorban ugyanaz kell legyen. A II sorban $z_1^{n-1} z_2$ coefficiense $a_{n-1} a_1$.
Az I sorban az $a_n (z_1 + z_2)^n$ tagban fordul elő $z_1^{n-1} z_2$ s pedig a második
tag, tehát a megfelelő coefficiens I-ben $n \cdot a_n$, s a követelés hogy

$$a_{n-1} a_1 = n a_n$$

még pedig n minden értéke mellett, illetőleg, ha $n = 2, 3 \dots$ ezen e-
gyetlen követelésből tehát következik, hogy

$$a_1 a_2 = 2 a_2 \qquad \text{ebből} \qquad a_2 = \frac{a_1^2}{2}$$

$$a_2 a_1 = 3 a_3 \qquad \text{"} \qquad a_3 = \frac{a_1 a_2}{3} = \frac{a_1^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$a_3 a_1 = 4 a_4 \qquad \text{"} \qquad a_4 = \frac{a_1 a_3}{4} = \frac{a_1^4}{4!}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$a_{n-1} a_1 = n a_n \qquad \text{"} \qquad a_n = \frac{a_1^n}{n!} \qquad (1)$$

vagyis meghatározhattuk az összes coefficiensek értékét. S most ki kell
mutatni, hogy ezek a coefficiensek tényleg kielégítik a többi követe-
léseket is. Kimutatjuk, hogy ezen (1) általános képlet alapján megha-
tározva mind két sorban ugyanazon $z_1^h \cdot z_2^k$ tag coefficiensét, ez a két
coefficiens tényleg egyenlő h és k bárminő pos. eg. értéke mellett. II-ben
ezen $z_1^h z_2^k$ coefficiense

$$a_h a_k = \frac{a_1^h}{h!} \cdot \frac{a_1^k}{k!} = \frac{a_1^{h+k}}{h!\,k!}$$

Miután $z_1^h \cdot z_2^k$-nak dimensiója $(h+k)$, azért ezen tag az I $a_{h+k}(z_1+z_2)^{h+k}$
hatványainak tagja, vagyis az I-ben a $z_1^h \cdot z_2^k$ coefficiense $a_{h+k}\binom{h+k}{k}$, de
$a_{h+k} = \frac{a_1^{h+k}}{(h+k)!}$ és $\binom{h+k}{k} = \frac{(h+k)!}{h!\,k!}$, tehát $a_{h+k}\binom{h+k}{k} = \frac{a_1^{h+k}}{h!\,k!}$, tehát ugyan-

az mint a II sorban. És így az (1) képlet tényleg a mi exponentiális függvényünknek coefficienseit adja, úgy hogy az exponentiális függvény a következő sorral van értelmezve

$$f(z)=1+a_1z+\frac{a_1^2z^2}{2!}+\cdots+\frac{a_1^nz^n}{n!}+\cdots$$

Erről a sorról most már ki fogjuk mutatni, hogy az egész számsíkon convergens, tehát úgy hogy az általa értelmezett függvény transcendens eg. függvény. Mert adjunk z-nek bármily nagy véges értéket, akkor ezen z mellett

$$N > |a_1z| \geq N_1$$

ha most az (N)-ik tagot vesszük, ez $\frac{a_1^{N-1}z^{N-1}}{(N-1)!}$ az (N+1)-ik tag $\frac{a_1^{N-1}z^{N-1}}{(N-1)!}\cdot\frac{|a_1z|}{N}$ tehát már kisebb mint az N-ik, mert $\left|\frac{a_1z}{N}\right|<1$, s az ezutáni tagok mind kisebbek, tehát z bármily nagy véges értéke mellett a sor tagjai végesek maradnak s így a sor az egész számsíkon convergens. Miután reális z esetén $f(z)=f(1)^z$ ezen függvénynél is áll, hogy $f(z_1)\cdot f(z_2)=f(z_1+z_2)$ azért általánosan bármily complex z érték mellett $f(z)=[f(1)]^z$.

Ezen exponentiális függvény azaz hatvány alapszámát megkapjuk, ha $z=1$, ekkor az alapszám

$$a=1+a_1+\frac{a_1^2}{2!}+\frac{a_1^3}{3!}+\cdots\cdots \qquad (1)$$

tehát az alapszámnak végtelen sok értéke lehet. Ha $a_1=1$, kapjuk ezt az ismeretes sort $e=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2!}+\cdots\frac{1}{n!}+\cdots$

ez a legegyszerűbb eset, azért nevezzük rendesen ezen e alapszámmal bíró függvényt exponentiális függvénynek, miután

$$f(z)=[f(1)]^z$$

azért

$$e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots \qquad (2.)$$

összehasonlítva (2)-t (1)-el, látható, hogy $a=e^{a_1}$ és

$$e^{a_1z}=a^z=1+a_1z+\frac{a_1^2z^2}{2!}+\cdots+\frac{a_1^nz^n}{n!}+\cdots$$

vagy $a^z=e^{a_1z}$, tehát $(e^{a_1})^z=e^{a_1z}$

Ezen exponentiális függvény alaptulajdonsága tehát

$$e^{z_1}\cdot e^{z_2}=e^{z_1+z_2}$$

Miután anal. függvény, illetőleg transcendens függvény, bármely hely körül sorba bontható. Bontsuk sorba pl. α körül

$$z=\alpha+h$$

$$e^{\alpha+h}=e^{\alpha}e^{h}=e^{\alpha}\left(1+h+\frac{h^2}{2!}+\frac{h^3}{3!}+\cdots\right)$$ s $h=z-\alpha$ téve

$$e^z = e^\alpha\left(1 + (z-\alpha) + \frac{(z-\alpha)^2}{2!} + \frac{(z-\alpha)^3}{3!} + \cdots\right)$$

Ebből adódik azonnal e^z deriváltja, a mely nem egyéb, mint $(z-\alpha)$ coef-ficiense e^α. Ha tehát α bejárja az egész számsikot $(e^z)' = e^z$.
Ez a derivált s az a tulajdonság, hogy $f(0) = 1$, annyira jellemzik az ex-ponentiális függvényt, hogy már e kettő alapján lehetne a függvényt sor-babontani.

Vizsgáljuk már most, mikép változik a függvény értéke z-vel. Ha $z = x + yi$ $\quad e^z = e^{x+yi} = e^x \cdot e^{yi}$

Tehát nem szükséges a függvényt complex kitevő mellett vizsgál-ni, hanem csak tisztán reális exponens mellett

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots\cdots$$

ha tehát x pos. és reális, a függvény is pos. és reális s x-el együtt minden határon túl nő, még pedig mivel

$$\frac{e^x}{x^n} = \frac{1}{x^n} + \frac{1}{x^{n-1}} + \frac{1}{2!\,x^{n-2}} + \cdots\cdots + \frac{1}{n!} + \frac{x}{(n+1)!} + \cdots \quad \text{s így}$$

$$\lim \frac{e^x}{x^n} = \infty \quad \text{azaz } e^x (>) x^n$$

Miután továbbá $e^{-x} \cdot e^x = e^0 = 1$, azért ha x reális neg., akkor $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ és így ha e exponense a neg. számok során át nő a végtelenbe, a függvény értéke minden határon alul fogy. Tehát $\lim\limits_{x=+\infty} e^x = \infty$ és $\lim\limits_{x=-\infty} e^x = 0$

A végtelen távoli hely tehát lényegesen singuláris hely az exponen-tiális függvényre nézve. S látható, hogy a függvény reális kitevő ese-tén csak pos. értékeket vesz en fel, mert ha

$$\begin{array}{cccc} x = & -\infty & 0 & +\infty \\ e^x = & 0 & 1 & +\infty \end{array}$$

s pedig minden értéket csak egyszer, mert folyton nő.

Vizsgáljuk már most a függvényt, ha az exponenst tiszta kép-zetes szám $z = yi$, a sorbabontás szerint.

$$e^{yi} = 1 + yi + \frac{(yi)^2}{2!} + \frac{(yi)^3}{3!} + \cdots\cdots + \frac{(yi)^n}{n!} + \cdots\cdots$$

s mivel $i^{4k} = 1$, $i^{4k+1} = i$, $i^{4k+2} = -1$, $i^{4k+3} = -i$, azért $C(y)$-al jelölve a re-ális tagok összegét, $S(y)$-al az i-al szorzott tagok összegét, akkor

$$C(y) = 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \cdots\cdots + (-1)^k \frac{y^{2k}}{(2k)!} + \cdots\cdots$$

$$S(y) = y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \cdots + (-1)^k \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!} + \cdots\cdots$$

úgy hogy $C(y)$ mint az $S(y)$ függvény eg. transcendens függvényeaz y-nak. Vizsgáljuk most ezeknek tulajdonságait.

Ha C-ban y helyébe (-y)-t teszünk: $C(y) = C(-y)$ I.

az ilyen függvényt, melynek értéke nem változik, ha a független változó előjele ellenkezőre változtatik, nevezzük páros függvénynek.

Ha S-ben y helyébe (-y)-t irunk: $S(-y) = -S(y)$

Tehát az S függvény páratlan függvény.

Lássuk a deriváltakat:

$$\left.\begin{aligned} C'(y) &= -y + \frac{y^3}{3!} - \frac{y^5}{5!} + \dots\dots = -S(y), \text{ tehát } & C'(y) &= -S(y) \\ S'(y) &= 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} + \dots\dots = C(y) \quad \text{tehát } & S'(y) &= C(y) \end{aligned}\right\} \text{II.}$$

Ezen C és S függvények értelmezéséből következik, hogy

$$e^{yi} = C(y) + i\cdot S(y) \qquad \text{és I alapján}$$

$$e^{-yi} = C(y) - i\cdot S(y) \qquad \text{összeszorozva}$$

$$1 = C^2(y) + S^2(y)$$

III.

Tehát a C és S függvény olyan, hogy négyzeteik összege 1, ennélfogva y bármily értéke mellett a két függvény abs. értékre nézve kisebb mint 1. Ha az egyik 0, a másik ± 1 s akkor az illetőnek maximális, illetőleg minimális értéke. Tehát az S és C függvények értéke +1 és -1 között váltakozik; még pedig reális y mellett.

Most vizsgáljuk e függvényeket kisebb pos. y értékek mellett. Ki fogjuk mutatni, hogy S a 0 és 2 között pos., míg C a 0 és 1 között pos., de 2-ben neg. Ha ugyanis a következő csoportositással írjuk a tagokat:

$$S(y) = y\left(1 - \frac{y^2}{2\cdot 3}\right) + \frac{y^5}{5!}\left(1 - \frac{y^2}{6\cdot 7}\right) + \frac{y^9}{9!}\left(1 - \frac{y^2}{10\cdot 11}\right) + \dots\dots$$

látható, hogy amíg y a 0-tól 2-ig nő, S állandóan pos. marad, mert a zárjeles kifejezések pos. maradnak.

Tehát $\quad S(y) > 0 \quad$ ha $0 < y \leqq 2$

Epígy ha C-t módositott alakban írjuk,

$$C(y) = 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!}\left(1 - \frac{y^2}{5\cdot 6}\right) + \dots\dots$$

látható, hogy ha y 0-tól 1-ig nő, a C(y) állandóan pos. marad. S ha másképp alakitjuk a csoportokat

$$C(y) = 1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{2\cdot 3\cdot 4} - \frac{y^6}{6!}\left(1 - \frac{y^2}{7\cdot 8}\right) - \frac{y^{10}}{10!}\left(1 - \frac{y^2}{11\cdot 12}\right) - \dots\dots$$

azonnal kitűnik, hogy y=2 mellett $C(y) < 0$, mert

$$C(2) = 1 - 2 + \frac{2}{3} - \dots \qquad \text{csupa negativ tagok.}$$

Tehát $C(y)>0$, ha $0<y\leqq 1$ és $C(y)<0$, ha $y=2$, a míg tehát y az 1-től 2-ig nő, $C(y)$ okvetlenül felveszi valahol a 0 értéket még pedig csak egyszer. Ezt következőleg lehet kimutatni egy segédtétel alapján, mely szerint, ha egy reális $f(x)$ függvény deriváltja bizonyos α helyen pos. $f'(\alpha)>0$, a függvény ezen a helyen növőben van, míg ha a derivált $f'(\alpha)<0$, a függvény ezen a helyen fogyóban van. Ugyanis mit teszen az, hogy a függvény növőben v. fogyóban van? Hogyha α-t megnagyobbítom egy igen kis pos. h mennyiséggel $f(\alpha+h)-f(\alpha)>0$, ill. $f(\alpha+h)-f(\alpha)<0$, de

$$f(\alpha+h)=f(\alpha)+\frac{f'(\alpha)}{1!}h+\frac{f''(\alpha)}{2!}h^2+\ldots\ldots$$

tehát

$$f(\alpha+h)-f(\alpha)=h\left[f'(\alpha)+\underline{\frac{f''(\alpha)}{2!}h+\ldots\ldots}\right]$$

már most ha h elég kicsiny, az aláhúzott rész kisebbé tehető mint $f'(\alpha)$ s akkor pos. h mellett az egész külsőség $f'(\alpha)$ előjelét veszi fel, vagyis tényleg

$$f(\alpha+h)-f(\alpha)>0 \quad \text{ha } f'(\alpha)>0$$

$$f(\alpha+h)-f(\alpha)<0 \quad \text{ha } f'(\alpha)<0$$

természetesen, ha $f'(\alpha)\neq 0$. Tehát a függvény nő, ha $f'(\alpha)>0$ és fogy, ha $f'(\alpha)<0$. Miután már most a $C(y)$ deriváltja $-S(y)$ és $S(y)$ az 1 és 2 között állandóan pos., azért $C'(y)$ az 1 és 2 között állandóan neg. és így $C(y)$ ezen intervallumban állandóan fogy, s miután az 1-ben még pos., a 2-ben már neg. azért mindenesetre létezik 1 és 2 között oly érték, melyben $C(y)=0$, s pedig csak egy. Jelöljük ezt az értéket $\frac{\pi}{2}$-vel, akkor $C(\frac{\pi}{2})=0$, a hol $1<\frac{\pi}{2}<2$. Ha III-ban $y=\frac{\pi}{2}$ teszünk, marad $S(\frac{\pi}{2})=\pm 1$, de miután $1<\frac{\pi}{2}<2$, s ezen intervallumban $S(y)>0$, azért $S(\frac{\pi}{2})=+1$.

Ezek alapján most már könnyen alkothatunk magunknak fogalmat a C és S függvények viselkedéséről, ha y tetszés szerint változik. Az exponentialis függvény és ezen C és S függvény között a következő relációt kaptuk volt

$$e^{yi}=C(y)+iS(y) \qquad (1)$$

s ha $y=\frac{\pi}{2}$

$$\underline{e^{\frac{\pi}{2}i}=i} \qquad (2.)$$

ha ezt előbb 2, majd 3 és 4-ik hatványra emeljük, kapjuk hogy

$$e^{\pi i}=-1 \qquad (3.)$$

tehát csak tiszta képzetes exponens mellett az exp. függvény negatív

$$e^{\frac{3\pi}{2}i}=-i \qquad (4.)$$

$$e^{2\pi i}=+1 \qquad 5.$$

s így mondhatjuk, hogy πi páratlan számú többszörösei mellett az exp.

függvény értéke -1, páros számú többszörösei mellett $+1$.

Ezen egyenletek segélyével néhány fontos tulajdonságot vezethetünk le a C és S számára (1) × (2) kapjuk

$$e^{(y+\frac{p}{2})i} = -S(y)+C(y)i = C(y+\tfrac{p}{2})+S(y+\tfrac{p}{2})i$$

és így

$$C(y+\tfrac{p}{2}) = -S(y)$$
$$S(y+\tfrac{p}{2}) = C(y) \qquad \text{IV.}$$

Tehát elég ismerni az S és C értékét 0-tól $\frac{p}{2}$-ig.

(1) × (3) $$e^{(y+p)i} = -C(y) - S(y)i$$

de ez másfelől $$= C(y+p)+S(y+p)i$$

tehát

$$C(y+p) = -C(y)$$
$$S(y+p) = -S(y) \qquad \text{V}$$

és (1) × (5) $$e^{(y+2p)i} = C(y)+S(y)i$$
$$= C(y+2p)+S(y+2p)i$$

tehát

$$C(y+2p) = C(y)$$
$$S(y+2p) = S(y) \qquad \text{VI.}$$

Ez utóbbi egyenletek azt mondják, hogy a C és S függvény értéke nem változik, ha y növekedik $2p$-vel. Az ilyen függvényeket periodicus függvényeknek nevezzük, itt $2p$, vagy $\frac{p}{2}$ nek 4-szerese, a periodus.

Miután $$e^{2pi} = +1, \text{ azért}$$
$$e^{z+2pi} = e^z$$

vagyis az exp. függvény is periodicus, de a periodusa tisztán képzetes, t.i. $2pi$. Ha $y = y_1$, azután $y = y_2$, akkor

$$e^{y_1 i} = C(y_1)+S(y_1)i$$
$$e^{y_2 i} = C(y_2)+S(y_2)i$$
$$e^{(y_1+y_2)i} = C(y_1)C(y_2)-S(y_1)S(y_2)+[S(y_1)C(y_2)+C(y_1)S(y_2)]i$$

s ez másfelől $$= C(y_1+y_2)+S(y_1+y_2)i$$

tehát

$$C(y_1+y_2) = C(y_1)C(y_2)-S(y_1)S(y_2) \qquad (1.)$$
$$S(y_1+y_2) = S(y_1)C(y_2)+C(y_1)S(y_2) \qquad (2.) \quad \text{VII.}$$

s ha $y_1 = y_2 = y$,

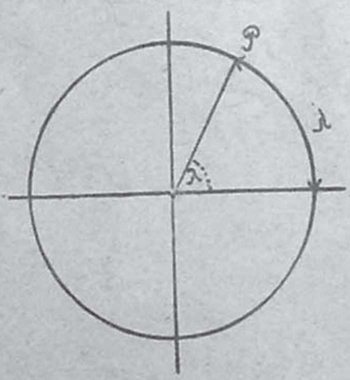
$$S(2y) = 2S(y)C(y) \qquad (3.)$$
$$C(2y) = C(y)^2 - S(y)^2$$

s azonkívül

$$1 = C(y)^2+S(y)^2$$
$$2C(y)^2 = 1+C(2y) \qquad (1)$$
$$2S(y)^2 = 1-C(2y) \qquad (2) \quad \text{VIII.}$$

Látjuk tehát, hogy a C és S függvények ép olyan tulajdonságokkal bírnak mint a cosinus illetőleg sinus, s most ki fogjuk mutatni, hogy a $C(y)$ tényleg $\cos y$, s a $S(y)$ tényleg nem egyéb mint $\sin y$, úgyhogy az exponentiális és trigonometricus függvények a legszorosabb kapcsolatban vannak egymással. Ezt Euler mutatta ki.

Ugyanis vegyük y-nak reális értékét, s pedig $y=1$



$e^i = C(1) + S(1)i$ s mivel $C(1) > 0$ és $S(1) > 0$ továbbá

$1 = C(1)^2 + S(1)^2$ azért e^i egy oly complex szám, mely az egysugarú körön fekszik és pedig az első quadránsban; szöge legyen λ, akkor másfelől a derékszögű és polárcoordináta rendszer összefüggése alapján tudjuk, hogy

$$C(1) = \cos\lambda$$
$$S(1) = \sin\lambda$$

s ha a VIII-ben $y_1 = y_2 = 1$, akkor $C(2) = C(1)^2 - S(1)^2 = \cos^2\lambda - \sin^2\lambda = \cos 2\lambda$

$$S(2) = 2S(1)C(1) = 2\sin\lambda\cos\lambda = \sin 2\lambda$$

" " " $y_1 = y_2 = 2$ " $C(4) = C(2)^2 - S(2)^2 = \cos^2 2\lambda - \sin^2 2\lambda = \cos 4\lambda$

$$S(4) = 2S(2)C(2) = 2\sin 2\lambda\cos 2\lambda = \sin 4\lambda$$

. . . .

s egész általánosan $C(2^n) = \cos(2^n\lambda)$

$S(2^n) = \sin(2^n\lambda)$ s miután minden positiv eg. szám előállítható a 2-es számrendszerben, azaz mint 2 hatványainak összege azért hivatkozva az összeadási tételre általánosan minden positiv egész m számra nézve $C(m) = \cos m\lambda$

$$S(m) = \sin m\lambda$$

Ugyanezt lehet kimutatni, ha a független változó véges tört szám. Mert VIII-ból

$$C(y) = \sqrt{\frac{1 + C(2y)}{2}}$$
$$S(y) = \sqrt{\frac{1 - C(2y)}{2}}$$

s ha most $y = \frac{1}{2}$, akkor $C(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\frac{1 + C(1)}{2}} = \sqrt{\frac{1+\cos\lambda}{2}} = \cos\frac{\lambda}{2}$

$$S(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\frac{1 - C(1)}{2}} = \sqrt{\frac{1-\cos\lambda}{2}} = \sin\frac{\lambda}{2}$$

Hasonlóképpen $C(\tfrac{1}{4}) = \cos\frac{\lambda}{4}$

$$S(\tfrac{1}{4}) = \sin\frac{\lambda}{4}$$

általánosan $$\mathcal{C}\left(\frac{1}{2^n}\right) = \cos\frac{\lambda}{2^n}$$
$$\mathcal{S}\left(\frac{1}{2^n}\right) = \sin\frac{\lambda}{2^n}$$
s miután minden tört számra nézve, mely $\frac{1}{2}$ hatványainak véges összegeként előállítható, alkalmazhatjuk az összeadási tételt, általánosan mondhatjuk, hogy minden véges y számra nézve, mely előállítható mint egy pos. egész szám és $\frac{1}{2}$ hatványainak véges összege:
$$\left.\begin{aligned} \mathcal{C}(y) &= \cos\lambda y \\ \mathcal{S}(y) &= \sin\lambda y \end{aligned}\right\}((1))$$

S most mutassuk ki, hogy ez áll bármilyen pos. rationalis vagy irrationális számra. Egész általánosan minden positiv szám előállítható mint egy pos. egész szám és egy véges vagy végtelen tört a kettes számrendszerben, tehát:
$$y = y_0 + \frac{\varepsilon_1}{2} + \frac{\varepsilon_2}{2^2} + \cdots\cdots + \frac{\varepsilon_n}{2^n} + \cdots\cdots$$
s ha $y_1 = y_0 + \frac{\varepsilon_1}{2}$; $\quad y_2 = y_0 + \frac{\varepsilon_1}{2} + \frac{\varepsilon_2}{2^2}, \ \cdots\cdots \quad y_n = y_0 + \frac{\varepsilon_1}{2} + \cdots + \frac{\varepsilon_n}{2^n}$;
akkor ezen y-ok egy szabályos számsorozatot alkotnak, azaz
$$y_1 \ y_2 \ y_3 \cdots\cdots\cdots y_n \cdots\cdots \quad \lim y_n = y$$
De a $\mathcal{C}(y)$ függvény mint transcendens egész függvény folytonos és így a folytonosság definitioja szerint ezen szabályos sorozat egyes tagjaira alkalmazva a $\mathcal{C}$ függvényt a nyert $\mathcal{C}(y_1)$ $\mathcal{C}(y_2)$ $\cdots\cdots\cdots$ $\mathcal{C}(y_n)\cdots$ sorozat szabályos, és így $$\lim \mathcal{C}(y_n) = \mathcal{C}(y)$$
igen de ezen utóbbi sorozat tagjaira nézve érvényes az ((1)) képlet azaz
$$\mathcal{C}(y_n) = \cos(\lambda y_n)$$
s pedig a sorozat minden tagjára, tehát a határra nézve is, és mivel a cosinus folytonos függvény $\lim(\cos\lambda y_n) = \cos\lambda y$, azért a határban is
$$\mathcal{C}(y) = \cos\lambda y$$
és így
$$\mathcal{S}(y) = \sin\lambda y$$
a hol most y bármilyen positiv rat. vagy irrat. szám. És így negativ y mellett; miután $\mathcal{C}(-y) = \mathcal{C}(y) = \cos y\lambda = \cos(-y\lambda)$ tehát
$$\mathcal{C}(-y) = \cos(-y\lambda)$$
$$\mathcal{S}(-y) = -\mathcal{S}(y) = -\sin y\lambda = \sin(-y\lambda)$$
$$\mathcal{S}(-y) = \sin(-y\lambda)$$
És most ki fogjuk mutatni, hogy ez a $\lambda = 1$. Ismeretes, hogy
$$\lim_{\alpha=0}\frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1$$

$\mathcal{S}h\alpha\lambda = \lambda y$, ahol y a 0-hoz közeledik, akkor

$$\lim_{y=0} \frac{\sin \lambda y}{\lambda y} = 1$$ vagyis λ állandó lévén

$$\lim_{y=0} \frac{\sin \lambda y}{y} = \lambda$$

de másfelől $$\frac{\sin \lambda y}{y} = \frac{S(y)}{y}$$, azért

$$\lim_{y=0} \frac{S(y)}{y} = \lambda \qquad (1$$

igen de $$\frac{S(y)}{y} = 1 - \frac{y^2}{3!} + \frac{y^4}{5!} - \dots\dots\dots$$

és így másfelől $$\lim_{y=0} \frac{S(y)}{y} = 1 \qquad (2.$$

tehát 1 és 2 alapján $\lambda = 1$

Ezzel pedig ki van mutatva, hogy a független változó bármilyen értéke mellett

$$C(y) = \cos(y)$$
$$S(y) = \sin(y)$$

A következőkben tehát C és S helyett cosinust és sinust írunk. A fenntiekből kapjuk egyszersmind e két függvény sorbabontását reális értékek mellett:

$$\cos y = 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \dots\dots$$
$$\sin y = y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \dots\dots$$

Másfelől kapjuk, hogy $$\left.\begin{aligned} e^{yi} &= \cos y + i \sin y \\ e^{-yi} &= \cos y - i \sin y \end{aligned}\right\} \mathrm{I}.$$

$$e^{yi} + e^{-yi} = 2\cos y$$
$$e^{yi} - e^{-yi} = 2\sin y \cdot i$$
$$\cos y = \frac{e^{yi} + e^{-yi}}{2}$$
$$\sin y = \frac{e^{yi} - e^{-yi}}{2i}$$

Most határozzuk meg $\frac{p}{2}$ értékét. Ez oly érték mely mellett $C = 0$, tehát

$$C\left(\frac{p}{2}\right) = 0 = \cos\frac{\pi}{2}, \quad \text{tehát}$$
$$\frac{p}{2} = \frac{\pi}{2} \quad , \quad p = \pi$$

és így $$e^{z + 2\pi i} = e^z$$

vagyis az exponentiális függvény periodusa $2\pi i$.

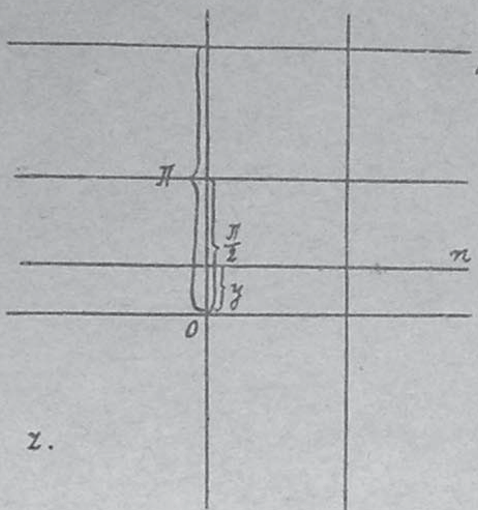
Vizsgáljuk már most az exp. függvény értékváltozásait a complex $z = x + yi$ kitevő értékváltozásai mellett

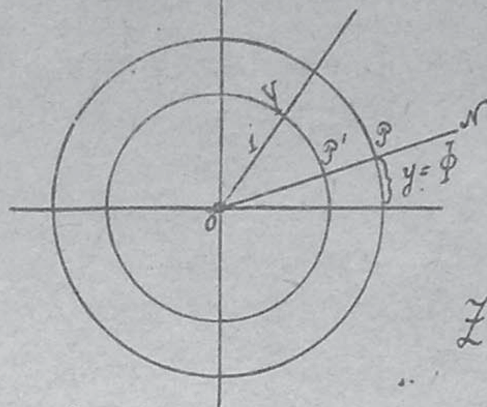
$$e^z = e^x e^{yi} = e^x(\cos y + i \sin y) = Z$$

tehát $$|e^z| = e^x = |Z|$$
$$\angle e^z = y = \angle Z$$

Hogy megvizsgálhassuk Z értékváltozásait z változásával, felveszünk két számsíkot ugyanazon hosszegységgel. Az egyikben fogjuk ábrázolni z-t derékszögű coordinátákkal, tehát $z = x + yi$ a másikban Z-t polárcoordinatákkal $Z = (R, \Phi)$ az összefüggés a kettő között

$$|Z| = R = e^x$$
$$\angle Z = \Phi = y$$

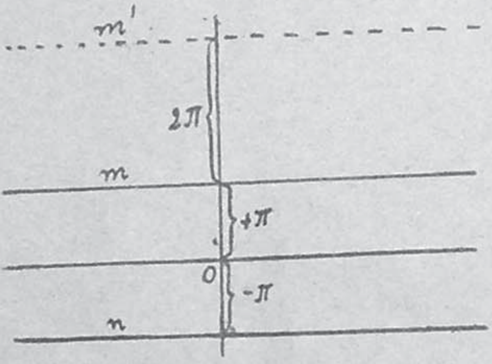




Ha y állandó és x a reális tengelylyel párhuzamos n egyenesen változik, akkor a Z számsík $\Phi = y$ állandó, csak $R = e^x$ változik az ON egyenesen s pedig a míg x változik $-\infty$-től 0-nát $+\infty$-ig, addig R változik 0-tól $+\infty$-ig. A midőn $x = 0$, $e^0 = R = 1$, tehát $x = 0$-nak megfelel az egységsugaru körön egy pont megfelelő y szög alatt P'. Ha y változik, akkor minden y-hoz tartozik egy 0-ból kiinduló szára Z számsíkban. Igy pl. az $y = 0$ azaz realis tengelynek megfelel a $\Phi = 0$ tehát pos. reális tengelya Z számsíkban; ha $y = \frac{\pi}{2}$, e^x a pos. tiszta képzetes; ha $y = \pi$, e^x a negativ reális és ha $y = -\frac{\pi}{2}$, e^x a negativ tiszta képzetes tengelyen változik x-el együtt.

Ha x-et vesszük állandónak, azaz az y-al parallel egyeneseken változtatjuk y-t, akkor ezen párhuzamos egyeneseknek mind körök felelnek meg ~~meg~~ a Z számsíkban; ugyanis egy határozott ily párhuzamos mellett e^x állandó, azaz R állandó, csak $y = \Phi$ szög változik s így ha y változik 0-tól 2π-ig, addig Z az $e^x = R$ sugaru körön egyszer végig megy pos. irányban, ha y is pos., s negativ irányban, ha y is 0-tól -2π-ig változik. Ha $x = 0$; $R = 1$ tehát az y tengelynek megfelel a jelzett értelemben az egységsugaru kör, a melyet Z k-szor fut be, addig a míg y 0-tól $2k\pi$-ig változik.

Vegyünk most a reális tengelytől $+\pi$ és $-\pi$ távolságban egy azzal párhuzamos m illetőleg n egyenest. Az ezek által bezárt végtelen hosszu terület sávhoz számitsuk hozzá az m-et, de n-et nem.



Ki fogjuk mutatni, hogy a míg z ezen sávon belül változik, addig Z az egész számsíkot bejárja. Ha ugyanis z a reális tengelyen változik $-\infty$-től 0-n át $+\infty$-ig, akkor Z megfelelőleg változik a reális tengelyen 0-tól $+\infty$-ig. Ha most a reális z tengelyt eltoljuk folytonosan önmagával párhuzamosan m-be, tehát $+\pi$-re, akkor ezen párhuzamosaknak megfelelnek a Z számsík felső részében levő, 0-ból kiinduló egyenesek; mert hisz a míg a reális tengely m-be jött, azalatt a Z számsikban a reális tengely pos. ága megfordult π alatt pos. irányban. Tehát a sáv felső felének megfelelnek a Z számsík felső felének összes pontjai. Ha a z reális tengelyt lefelé n-be toljuk, tehát $(-\pi)$-re, akkor a Z pos. reális tengely negatív irányban fordul ki π szög alatt s így a sáv alsó felének megfelelnek a Z számsik alsó felében levő összes pontok. Tehát a z számsík mn sávának, melynek dimensiója 2π, megfelelnek a Z számsík összes pontjai és pedig úgy, hogy ezen sáv minden egyes pontjához csak egy pont tartozik a Z számsikban, és a Z számsík minden egyes pontjához csak egy pont tartozik, a z számsík ezen sávában. De ha az mn sávot felfelé eltoljuk 2π-vel, azaz az mn sáv minden pontjának ordinatáját megnöveljük 2π-vel míg x állandó marad, tehát egy y-al parallel egyenes mentén, akkor a mint az az előző geometriai interpretatióból látható a megfelelő Z értékek ugyanazok lesznek, mert hisz R ugyanaz, s a szög megnövekedett 2π-vel, tehát ugyanaz, vagyis az $m\,m'$ sávhoz ugyanazon Z értékek tartoznak mint az $n\,m$ sávhoz. Ezt pedig végtelenszer lehet ismételni le és felfelé, úgy hogy a z számsík feloszlik csupa periodicus sávokra vagyis czikkekre 2π dimensióban, melyek azáltal vannak jellemezve, hogy a Z egy értékéhez minden periodusban tartozik egy érték, vagyis végtelen sok érték; az n m periodust nevezzük főperiodusczikknek. Ha tehát felvesszünk a Z számsikban egy Z értéket, melynek abs. értéke $R = e^x$, szöge $\Phi = y$, akkor ehez a z számsikban tartoznak azok az értékek, melyeknek abscissája $x = \log R$ ordinatája pedig $y + 2k\pi$, hol k felvehet minden értéket $-\infty$ és $+\infty$ közt, vagyis a $Z = (R, \Phi)$-nek megfelel $x + (y + 2k\pi)i = \log R + (y + 2k\pi)i$

Az exponentiális függvény invers függési viszonyát nevezik logarithmusnak és pedig természetes logarithmusnak; ha tehát $e^z = Z$.

$$z = \log Z = \log R + (\Phi + 2k\pi)i$$

vagyis

$$\log Z = \log R(\cos\Phi + i\sin\Phi) = \log R + (\Phi + 2k\pi)i$$

Tehát egy complex szám log. annyi mint az abs. érték logarithmusa hozzáadva a $2k\pi$-vel megnövesztett szög ~~és~~ nek i szorzata és pedig úgy véve Φ-t, hogy $-\pi < \Phi \leqq \pi$ s ezt nevezzük a szög főértékének és ennek megfelelőleg az összes logarithmusok főértékének nevezzük azt, melyben a szög főértéke szerepel, ezt $\mathfrak{L}Z$-vel jelölve, lesz

$$\mathfrak{L} Z = \log R + \Phi i$$

és $\log Z = \mathfrak{L} Z + 2k\pi i$ hol $k = -\infty \cdots\cdots 0 \cdots\cdots +\infty$.

A logarithmus főtulajdonsága: Ha Z_1 és Z_2 2 complex szám, akkor

$$e^{\log Z_1} = Z_1$$
$$e^{\log Z_2} = Z_2$$
$$e^{\log Z_1 + \log Z_2} = Z_1 Z_2$$

tehát $\log Z_1 Z_2 = \log Z_1 + \log Z_2$

s ez az egyenlet azt jelenti, hogy ha $\log Z_1$ és $\log Z_2$ végtelen sok értékeiből egyet-egyet kivesszünk s ezeket összeadjuk ez az összeg előfordul a $\log Z_1 Z_2$ végtelen sok értékei között.

A logarithmusnak mint invers függvénynek a tárgyalását az invers függvények tárgyalására hagyjuk s áttérünk most a trigonometricus függvényekre.

Trigonometricus függvények.

Ezentúl tanulmányozni fogjuk a cosinus és sinust az egész számsikon, tehát bármily complex értékek mellett. A definitiót adja a következő két sor:

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^8}{8!} + \dots \qquad (1.$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots \qquad (2.$$

s ez az exponentialis függvénnyel való összefüggését adja a következő két egyenlet:

$$\cos z = \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2} \qquad (a.)$$

$$\sin z = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i} \qquad (b.)$$

Főtulajdonságai itt is érvényesek, mint a reális számkörben. Ugyanis (1.)+(2.)i

$$\cos z + i \sin z = 1 + iz - \frac{z^2}{2!} - i\frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} - \dots$$

$$= 1 + iz + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \frac{(iz)^4}{4!} + \dots = e^{zi}$$

tehát

$$e^{zi} = \cos z + i \sin z \qquad (3.$$

s miután (1) páros (2.) páratlan függvény

$$\left.\begin{array}{l} \cos(-z) = \cos z \\ \sin(-z) = -\sin z \end{array}\right\} \qquad (I)$$

(3)-ba (-z) téve

$$e^{-zi} = \cos z - i \sin z \qquad (4.)$$

(3)·(4)

$$1 = \cos^2 z + \sin^2 z \qquad (II.)$$

Továbbá

$$e^{z_1 i} = \cos z_1 + i \sin z_1$$

$$e^{z_2 i} = \cos z_2 + i \sin z_2$$

$$e^{(z_1+z_2)i} = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2 + i(\sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2) \qquad (5.)$$

$$e^{-(z_1+z_2)i} = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2 - i(\sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2) \qquad (6.)$$

de mivel másfelől

$$e^{(z_1+z_2)i} = \cos(z_1+z_2) + i \sin(z_1+z_2)$$

$$e^{-(z_1+z_2)i} = \cos(z_1+z_2) - i \sin(z_1+z_2)$$

(5) és (6) összeadva és 2-vel osztva, majd kivonva és 2i-vel osztva, kapjuk

$$\left.\begin{array}{l} \cos(z_1+z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2 \\ \sin(z_1+z_2) = \sin z_1 \cos z_2 - \cos z_1 \sin z_2 \end{array}\right\} \qquad III.$$

Ezen I, II és III egyenletek alapján azután az összes trigonometriai formulák érvényesek maradnak complex változó esetén is.

Kérdés, hol vannak a sinus és cosinus 0 helyei complex változó esetén. Erre felel az (a) és (b) egyenlet, mert

$$\cos z = 0 \quad \text{ha} \quad e^{zi} + e^{-zi} = 0 \qquad \text{azaz ha}$$

$$e^{zi} = -e^{-zi}$$

keresztül osztva e^{zi}-el

$$e^{2zi} = -1 \qquad \text{már pedig}$$

$$e^{2zi} = -1 \qquad \text{ha}$$

$$2zi = (2k+1)\pi i$$

$$\text{azaz} \quad \underline{z = (2k+1)\frac{\pi}{2}} \qquad k = -\infty \cdots 0 \cdots +\infty$$

$$\sin z = 0 \text{, ha } e^{zi} - e^{-zi} = 0$$

$$e^{zi} = e^{-zi}$$

$$e^{2zi} = 1 \qquad \text{s ez teljesül, ha}$$

$$2zi = 2k\pi i$$

$$\text{azaz } z = k\pi$$

Tehát a sin. és cos. 0 helyei a complex számkörben is ugyanazok, mint a reális számkörben.

Kérdés, hányszor veszi fel a sinus ugyanazt az értéket éshol? Adva tehát $\sin z_1$, keressük azt a z értéket, mely mellett $\sin z = \sin z_1$ azaz $\sin z - \sin z_1 = 0$ s ez szorzatalakban írva $2\sin\frac{z-z_1}{2}\cos\frac{z+z_1}{2} = 0$ s ez teljesül, ha

$$1.) \quad \sin\frac{z-z_1}{2} = 0, \quad \text{vagyis} \quad \frac{z-z_1}{2} = k\pi$$

$$z = z_1 + 2k\pi \qquad (1.)$$

$$2.) \quad \cos\frac{z+z_1}{2} = 0 \qquad \text{"} \qquad \frac{z+z_1}{2} = (2k+1)\frac{\pi}{2}$$

$$\text{azaz ha} \qquad z = -z_1 + (2k+1)\pi \qquad (2.)$$

Tehát a z-knek 2 végtelen sorozata van, melyekben a sinus ugyanazon értéket veszi fel. E kettőt összefoglalhatjuk a következő kifejezésben

$$z = (-1)^h z_1 + h\pi \qquad ((1))$$

mert ha h páros, kapjuk (1)-et, ha páratlan kapjuk (2)-t.

Épígy meghatározhatjuk mindazon helyeket, ahol a cosinus bizonyos adott értékkel bír. $\quad \cos z = \cos z_1$

$$\cos z - \cos z_1 = 0$$

$$2\sin\frac{z-z_1}{2}\sin\frac{z+z_1}{2} = 0 \qquad \text{s ez teljesül, ha}$$

$$1.) \quad \frac{z-z_1}{2} = k\pi, \text{ azaz} \qquad z = z_1 + 2k\pi$$

$$2.) \quad \frac{z+z_1}{2} = k\pi, \quad \text{"} \qquad z = -z_1 + 2k\pi$$

$$\text{tehát általánosan} \qquad z = \pm z_1 + 2k\pi \qquad ((2))$$

helyeken ugyanazt az értéket veszi fel a cosinus, mint z_1-ben.

Ha pl. (2)-ben $k=0$, kapjuk hogy $\quad \sin z_1 = \sin(\pi - z_1)$.

Tehát a számsíkon végtelen sok hely van, melyekben a sinus és cosinus ugyanazzal az értékkel bír, mint egy adott helyen; de ezen helyek két-két végtelen sorozatát alkotják a számoknak.

Probáljuk most már ezen függvényeknél is z számsíkból oly területetet kihasitani, melyen belül a cosinus illetőleg sinus minden értéke előjön.

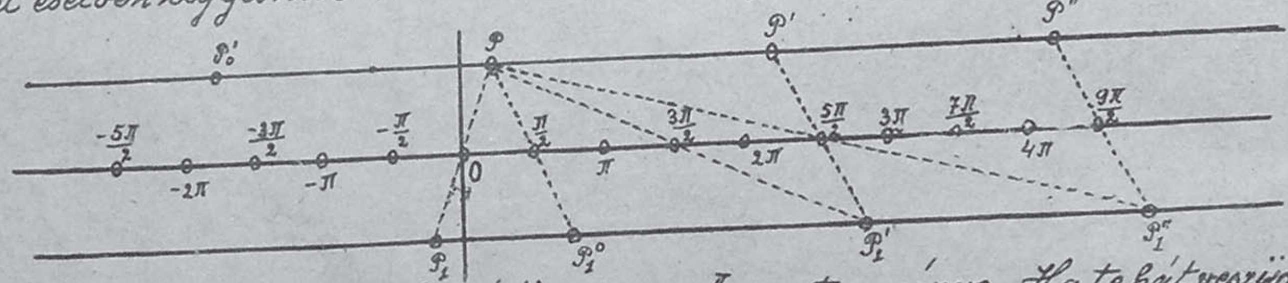
Vegyük pl. a sinust. Láttuk hogy azok a helyek, a hol a sinus ugyanazt az értéket veszi fel, mint z_1-ben, a következő két sorozattal vannak adva, illetőleg csoporttal definiálva

$$z_1 + 2k\pi \qquad (1.)$$

$$\text{és} \quad -z_1 + (2k+1)\pi = z' \qquad (2.)$$

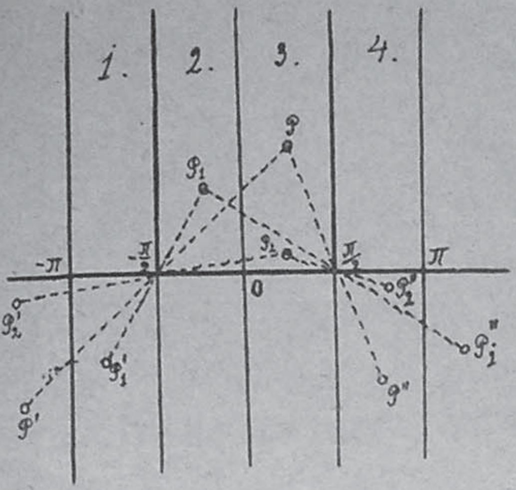
s ez utóbbi egyenletből $\frac{z'+z_1}{2} = (2k+1)\frac{\pi}{2}$

vagyis oly két hely számtani középarányosa, hol a sinus ugyanaz a két csoportban, annyi mint $\frac{\pi}{2}$ páratlan számu többszöröse, mindkét esetben ugyanazt a k-t véve, ez pedig geometriailag azt jelenti,



hogy z_1 és z' symetricus fekvésü a $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ pontra nézve. Ha tehát veszünk egy z_1-nek megfelelő P pontot, akkor a $(-z_1)$-nek megfelelő P_1 ponthoz symetricusan fekszik 0-ra nézve (mert ha $z_1 = a+bi$, $-z_1 = -a-bi$) és most az (1) csoportnak megfelelő értékek a P-n átmenő x-el párhuzamos egyenesen, fekszenek a P-től $2\pi, 4\pi \dots 2k\pi$ távolban jobbra és balra, míg a (2) csoportnak megfelelő értékek a P_1-en átmenő s x-el párhuzamos egyenesen fekszenek P_1-től $\pi, 3\pi, \dots (2k+1)\pi$ távolban jobbra és balra, tehát úgy, hogy P és P_1^0, P és P_1', P és P_1'' ..... összeköttetésének felezőpontjában megfelelőleg van $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$ .... $\frac{5\pi}{2}$ ..... vagy más szóval P és P_1^0 symetricusan fekszik $\frac{\pi}{2}$-re nézve, P és P_1' $\frac{3\pi}{2}$-re nézve stb. ep így negativ irányban. Ugyanez áll, ha P helyett $P'P''\dots$ áll. Vagyis ha az első csoport bármelyik értékének symetricusát veszük $\frac{\pi}{2}$ páratlan szám többszörösére nézve, kapjuk a (2) csoport egy értékét, tehát egy olyan helyet, melyen a sinus ugyanazon értékkel bír.

Már most könnyü lesz a számsíkból oly sávot kihasitani, melyen a sinus minden értékét csak egyszer veszi fel. Miután a sinus periodusa 2π, azért ezen sáv szélessége 2π kell legyen. Ha tehát



$(-\pi)$-ben és π-ben az y tengelylyel párhuzamosokat húzunk, akkor a sinus azon értékeket, melyeket ezen sávban felvesz, minden más, 2π szélességű sávban csak ismétli. Elegendő tehát a sinust ebben a sávban vizsgálni. A sáv $(-\pi)$-n átmenő oldalát nem számítjuk a sávhoz, hanem az előzőhez. Már most tudjuk, hogy e sáv minden pontjához tartozik egy $\frac{\pi}{2}$ vagy $-\frac{\pi}{2}$-hez symetricusan fekvő pont pl P-hez P' és P'', ezek egyike, itt P'' mindig a sávon belül fekszik, ilyen P_1-hez P_1'; P_2-hez P_2'' a hol a sinus ugyanoly értékű. Tehát a sávon belül mindig két pontban veszi fel a sinus ugyanazt az értéket, kivételt képez a $\frac{\pi}{2}$ és $-\frac{\pi}{2}$ pont, mert ezek párjukkal összeesnek s itt a sinus értéke $+1$ illetőleg -1, tehát ez az a két kivételes érték, melyekhez csak egy pont tartozik a sávon belül; $\frac{\pi}{2}$ illetőleg $-\frac{\pi}{2}$, minden más értékhez 2 pont tartozik a sávon belül s ezen pontpárok egyik pontja mindig a $\frac{\pi}{2}$ és $-\frac{\pi}{2}$ pontokon átmenő párhuzamosak által alkotott sávban fekszik. Ha tehát oly sávot akarunk, melyen belül minden értéket a sinus csak egy pontban veszen fel, egyszerűen a $+\frac{\pi}{2}$ és $-\frac{\pi}{2}$ ponton át y-al párhuzamost húzunk. Ezen a sávon belül minden érték csak egyszer fordul elő. S ha csupán az absolut érték változásait akarjuk vizsgálni, elegendő ezen sávnak a positiv képzetes tengelylyel párhuzamos részében vizsgálni a függvényt, mert az alsó részben a megfelelő negativ értékek fordulnak elő. Ezt a sávot így lehet jellemezni, ha $z = x + yi$, akkor vagy $\frac{\pi}{2} > x > -\frac{\pi}{2}$, és y lehet tetszésszerinti, vagy $x = \pm\frac{\pi}{2}$ és $y \geqq 0$.

Ezen területre nyert eredményeket át lehet vinni a cosinusra, mert

$$\sin z' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - z'\right) = \cos z$$

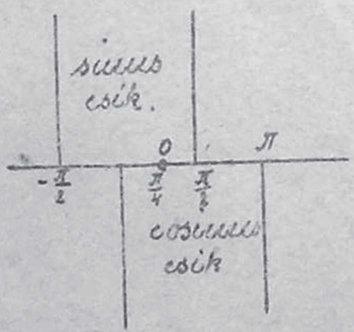
vagy ha $z = \frac{\pi}{2} - z'$ akkor

$$\cos z = \sin z'$$

de akkor

$$\frac{z + z'}{2} = \frac{\pi}{4}$$

tehát a melyhely a $\frac{\pi}{4}$-re nézve symetricusan fekszik a z'-hez, ott a cosinus ugyanoly értékü mint a sinus z'-ben vagyis mindazok a helyek, a hol a cosinus ugyanoly értékü mint a sinus a maga csíkjában, ezen csík összes pontjaihoz $\frac{\pi}{4}$-re nézve symetricusan fekszenek, tehát azt a csíkot, melyben a cosinus minden értékét csak egyszer veszi fel, megkapjuk, ha sinus csíkot $\frac{\pi}{4}$ körül π szög alatt megfordítjuk. Így egy oly csíkhoz jutunk, mely egyfelől a reális tengelynek $0-\pi$ része, másfelől ezen 0 és π-ben a tengelyre emelt merőlegesek alsó fele által van határolva, ez a cosinus csík, melyet



így lehet jellemezni, ha $z=x+yi$ vagy $0<x<\pi$ és y tetszésszerinti, vagy $x = \genfrac{}{}{0pt}{}{0}{\pi}$ és $y \leqq 0$.

Elég megvizsgálni a sinus csíkban a sinus értékváltozásait, mert ugyanúgy változtatja értékét a cosinus a cosinus csíkban.

Tudjuk, hogy a sin. és cos. összeadási tétele érvényes a complex számkörben is, tehát ha

$z=x+yi$, úgy $\sin(x+yi) = \sin x \cos(yi) + \cos x \sin(yi)$

$$\cos(x+yi) = \cos x \cos(yi) - \sin x \sin(yi)$$

Ebből látható, hogy elég vizsgálni a sinust és cosinust, reális és tiszta képzetes értékek mellett. Reális értékek mellett már ismerjük a trigonometriából, mint trigonometriai sinust és cosinust, tehát csak tiszta képzetes értékek mellett kell vizsgálni.

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots\cdots \qquad (1)$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots\cdots \qquad (2)$$

s most adjunk z-nek tiszta képzetes értéket, $z = yi$, akkor (1) páros lévén

$$\cos(yi) = 1 + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} + \frac{y^6}{6!} + \cdots\cdots$$

tehát a cosinusnak az a tulajdonsága, hogy tiszta képzetes változó mellett értéke reális és positiv és y növésével minden határon túl nő, tehát egészen más tulajdonsága, mint a trigonometriai cosinus, azért ezt cosinus hyperbolicusnak nevezzük s jelöljük $\mathrm{Ch}\,y$, azaz cosinus hyperbolicus y.

Miután (2) páratlan, i minden tagban előfordul s így

Harkay.

$$\sin(yi) = i\left(y + \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} + \frac{y^7}{7!} + \cdots\right)$$

tehát a sinus tiszta képzetes változó mellett szintén tiszta képzetes értékkel bír és minden határon túl nő. Ez a zárjeles függvény az úgynevezett sinus hyperbolicus y (Shy), úgyhogy

$$\cos(yi) = \mathrm{Ch}\,y$$

$$\sin(yi) = i\,\mathrm{Sh}\,y$$

Nyertük tehát a két hyperbolicus függvényt:

$$\mathrm{Ch}\,y = 1 + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} + \frac{y^6}{6!} + \cdots\cdots$$

$$\mathrm{Sh}\,y = y + \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} + \frac{y^7}{7!} + \cdots\cdots$$

Lássuk ezeknek néhány tulajdonságát. A Chy páros, a Shy páratlan függvény, azaz

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{Ch}(-y) &= \mathrm{Ch}\,y\\ \mathrm{Sh}(-y) &= -\mathrm{Sh}\,y\end{aligned}\right\}\ \mathrm{I}$$

amaz nő 1-től $+\infty$-ig, ez pedig 0-tól ∞-ig. Továbbá látható, hogy

$$\mathrm{Ch}\,y + \mathrm{Sh}\,y = e^y \qquad (1)$$

$$\mathrm{Ch}\,y - \mathrm{Sh}\,y = e^{-y} \qquad (2.)$$

$$\mathrm{Ch}\,y = \frac{e^y + e^{-y}}{2}$$

$$\mathrm{Sh}\,y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

(1) × (2)-ből $\qquad \mathrm{Ch}^2 y - \mathrm{Sh}^2 y = 1 \qquad$ II

amiből látható, hogy a Chy értéke mindig nagyobb mint a Shy, mert $\mathrm{Ch}^2 y = \mathrm{Sh}^2 y + 1$. A többi tulajdonság mind a trigonometriai formulákból adódnak, ha a változó yi. Pl.

$$\cos(y_1 i + y_2 i) = \cos(y_1 i)\cos(y_2 i) - \sin(y_1 i)\sin(y_2 i)$$

vagyis $\qquad \mathrm{Ch}(y_1 + y_2) = \mathrm{Ch}\,y_1 \cdot \mathrm{Ch}\,y_2 + \mathrm{Sh}\,y_1 \cdot \mathrm{Sh}\,y_2 \qquad$ III.

épígy $\qquad \sin(y_1 i + y_2 i) = \sin(y_1 i)\cos(y_2 i) + \cos(y_1 i)\sin(y_2 i)$

azaz $\qquad \mathrm{Sh}(y_1 + y_2) = \mathrm{Sh}\,y_1 \cdot \mathrm{Ch}\,y_2 + \mathrm{Ch}\,y_1 \cdot \mathrm{Sh}\,y_2 \qquad$ IV

ha $y_1 = y_2$ $\qquad \mathrm{Ch}(2y) = \mathrm{Ch}^2 y + \mathrm{Sh}^2 y$

$\mathrm{Sh}(2y) = 2\,\mathrm{Sh}\,y \cdot \mathrm{Ch}\,y \qquad$ s ezt combinálva II-vel

$\mathrm{Ch}(2y) + 1 = 2\,\mathrm{Ch}^2 y \qquad$ V.

$\mathrm{Ch}(2y) - 1 = 2\,\mathrm{Sh}^2 y$

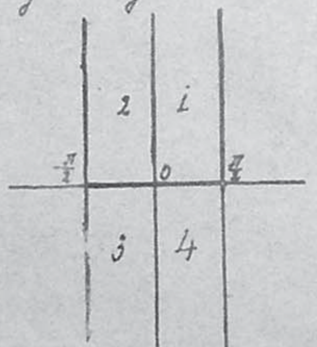
Ezek után most már képet nyerhetünk, milyen értéket vesz fel a sinus és cosinus és hogy változnak a független változóval? Legyen tehát $\sin z = Z$. A z és Z ábrázolására két számsíkot veszünk fel, melyeknek megfelelő pontjai azok lesznek, melyek a fennti egyenletnek eleget tesznek. Ha $z=x+yi$

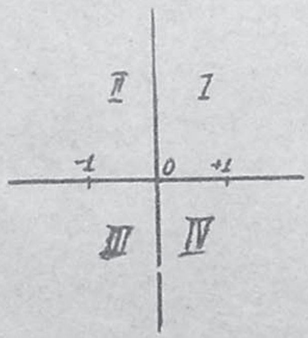
$$\sin z = \sin(x+yi) = \sin x \cos yi + \cos x \sin yi = \sin x\, Chy + i \cos x\, Shy = Z = X + Yi$$

tehát a z és Z között az összefüggés a következő:

$$X = \sin x\, Chy \qquad (1)$$
$$Y = \cos x\, Shy$$

ennek alapján pedig könnyü lesz a z számsík pontjaihoz a Z számsík megfelelő pontjait felkeresni. Ki fogjuk mutatni, hogy a míg z bejárja az egész végtelen számsikot, addig Z bejárja az egész számsikot.



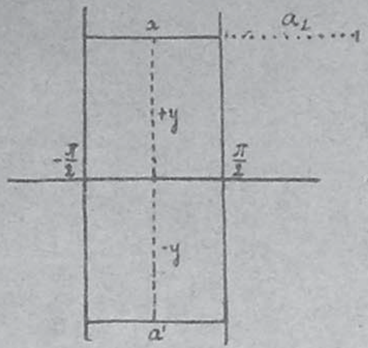


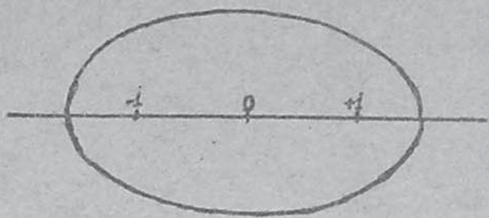
Azt a trigonometriából tudjuk, hogy míg z változik $-\frac{\pi}{2}$ és $+\frac{\pi}{2}$ közt, addig Z változik -1-től +1-ig. Kérdés, milyen z-k mellett lesz még Z reális? Nyilvánvaló akkor, ha $Y=0$, s ez (1) szerint 0, ha $Shy=0$ azaz $y=0$, tehát a reális tengelyen, a mint ezt az imént láttuk; de akkor is, ha $\cos x = 0$, vagyis ha $x=\pm\frac{\pi}{2}$ és pedig Z positiv reális, ha $x=\frac{\pi}{2}$, $y=0\dots\infty$, negativ reális, ha $x=-\frac{\pi}{2}$, $y=0\dots\infty$. Vagyis ha z bejárja a $\frac{\pi}{2}$ és $-\frac{\pi}{2}$ pontokban emelt merőlegeseket - kezdve a reális tengelytől - akkor Z megfelelőleg bejárja a positiv reális tengelyt kezdve +1-től illetőleg a neg. reális tengelyt kezdve -1-től. Vagyis a míg a z bejárja a sinus csík egész határvonalát, addig Z bejárja az egész reális tengelyt $-\infty$-től 0-on át $+\infty$-ig. Ha $x=0$, $y=-\infty\dots+\infty$, akkor $X=0$, míg Y szintén $-\infty$ és $+\infty$ között változik, vagyis a z számsík tiszta képzetes tengelye. S most nyilvánvaló, hogy ha $0<x<\frac{\pi}{2}$ és $y\geqq 0$, akkor $X>0$ és $Y>0$ ha $-\frac{\pi}{2}<x<0$, $y\geqq 0$, akkor $X<0$, $Y>0$, azaz a sinus csík 1 részének megfelel a Z számsík I quadránsa, a 2 résznek a II quadráns, épígy 3-nak III és 4-nek IV. Azaz a míg z a sinus csíkot bejárja, addig Z bejárja az egész számsikot. Így változik Z a z-vel.

Lássuk most, a sinus csíkban a reális tengelylyel parallel egyenesnek mi felel meg a Z számsíkban. Tehát y állandó, x változik $-\frac{\pi}{2}$ és $\frac{\pi}{2}$ között. Eliminálva (1)-ből x-et olymódon, hogy mindkét egyenlet oldalait négyzetre emeljük és azt Ch^2y-el, ezt Sh^2y-el osztva és összeadva, kapjuk a következő egyenletet

$$\frac{X^2}{Ch^2y}+\frac{Y^2}{Sh^2y}=1$$

Ez pedig nem egyéb mint egy ellipsis egyenlete, s így ha z állandó



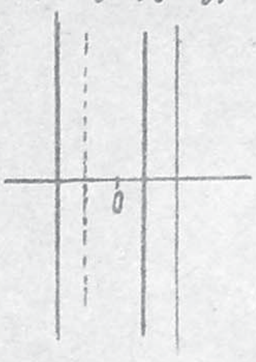


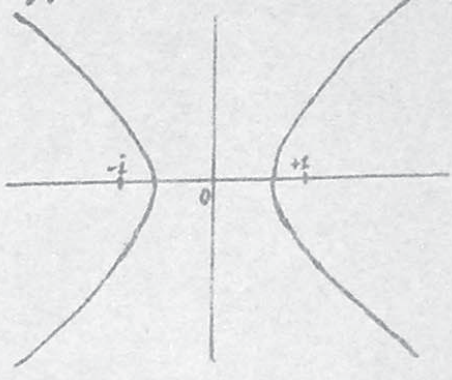
+y és -y mellett bejárja a sinus csíkban az x tengelylyel párhuzamos egyenest, Z megfelelő értékei egy ellipsisen helyezkednek el; ennek focus pontjait is azonnal kiszámithatjuk, mert az $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ellipsisnek focusa $\sqrt{a^2-b^2}$; tehát ezen ellipsis focusai $\sqrt{Ch^2y-Sh^2y}=\pm 1$ pontok. Ezen ellipsis alsó részét nemcsak a -y alatt párhuzamosan változó z-k adják, hanem az a'-hez $\frac{\pi}{2}$-re vagy $-\frac{\pi}{2}$-re nézve symetricusan fekvő a_1 vonaldarabon változó z-k is. Tehát mondhatjuk, hogy a tengelylyel párhuzamos egyeneseknek a z számsikban +1 és -1 focusokkal biró ellipsisek felelnek meg a Z számsikban.

Lássuk, mi felel meg az y tengelylyel párhuzamos egyeneseknek a Z számsikban. Itt tehát x állandó y változik $-\infty$-től $+\infty$-ig. (1)-ből eliminálva y-t úgyhogy mindkét egyenletet négyzetre emeljük, s elosztva annak oldalait $\sin^2x$-el, ezért $\cos^2x$-el s a kettőt összeadjuk, kapjuk a következő egyenletet:

$$\frac{X^2}{\sin^2x}-\frac{Y^2}{\cos^2x}=1$$

ez pedig egy hyperbola egyenlete, és pedig ha z egy a $0-\frac{\pi}{2}$ közt átmenő egyenesen változik





kapjuk a hyperbolának az I és IV quadránsokban fekvő ágát, ha pedig a z egy -x alatt, tehát 0-ra nézve egy az előbbihez symetricus egyenesen fáltözik, akkor kapjuk a hyperbola másik ágát a II és III quadransokban. Mivel az $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ hyperbolának focusait a $\sqrt{a^2+x^2}$ kifejezés adja, azért a hyperbola focusai itt is $\sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x} = \pm 1$. Mondhatjuk tehát, hogy a realis tengelyre merőleges és 0-hoz symetricusan fekvő egyeneseknek a számsíkban megfelel egy $+1$ és -1 focusokkal bíró hyperbola a Z számsíkban.

Most még ki fogjuk mutatni, hogy az (1) relatiókkal összekapcsolt két számsík egymásnak conformis leábrázolása, vagyis hogy a z számsík legkisebb részeiben is hasonló a Z számsíkhoz.

Egész általánosan ki fogjuk mutatni, hogy valahányszor felveszünk egy analytikai függvényt, s a független változót egyik, a függvényt magát egy másik számsíkon ábrázoljuk, akkor ezt a két síkot oly vonatkozásba hoztuk, hogy a két sík conformis leábrázolást nyer.

Legyen $f(z) = Z$ egy tetszőleges analyt. függvény s vegyük fel a z és Z számsíkot. Kimutatjuk, hogy mindama helyek, a hol $f(z)$-nek közönséges helye van, és az első derivált különbözik 0-tól, olyanok, melyekhez Z megfelelő helyei conformisak. Legyen tehát α helyen

$$\left.\begin{array}{r} f(\alpha) = A \\ \text{és} \quad f'(\alpha) \neq 0 \end{array}\right\} (1)$$

kimutatjuk, hogy α és A környékei egymásnak conformis leábrázolásai. Mivel α az $f(z)$-re nézve közönséges hely, azért

$$f(z) = f(\alpha) + f'(\alpha)(z-\alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(z-\alpha)^2 + \cdots\cdots$$

vagyis (1) alapján $Z - A = f'(\alpha)(z-\alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(z-\alpha)^2 + \cdots\cdots$

ha most egy más z_1 értéket veszünk az előbbi sorbabontás conv. körén belül, akkor erre nézve $Z_1 - A = f'(\alpha)(z_1-\alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(z_1-\alpha)^2 + \cdots\cdots$

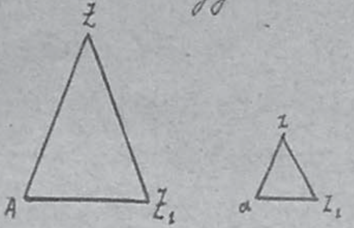
és így
$$\frac{Z-A}{Z_1-A} = \frac{z-\alpha}{z_1-\alpha} \cdot \frac{f'(\alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(z-\alpha) + \cdots\cdots\cdots}{f'(\alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(z_1-\alpha) + \cdots\cdots}$$

Ha most áttérünk α-hoz végtelen közel fekvő z értékekre, akkor a megfelelő Z is végtelen közel fog feküdni A-hoz, azaz $z-\alpha$ és $Z-A$ egyszerre lesz végtelen kicsinynyé úgyszintén $z_1-\alpha$ és Z_1-A is, s ugyanakkor a jobb oldali második tört limese $\frac{f'(\alpha)}{f'(\alpha)} = 1$, úgy hogy

$$\lim \frac{Z-A}{Z_1-A} = \lim \frac{z-\alpha}{z_1-\alpha}$$

a mi azt mondja, hogy ezen végtelen kis mennyiségek viszonyai egyenlők, azaz
$$\left|\frac{Z-A}{Z_1-A}\right| = \left|\frac{z-\alpha}{z_1-\alpha}\right| \quad \text{és} \quad \angle\frac{Z-A}{Z_1-A} \equiv \angle\frac{z-\alpha}{z_1-\alpha}$$

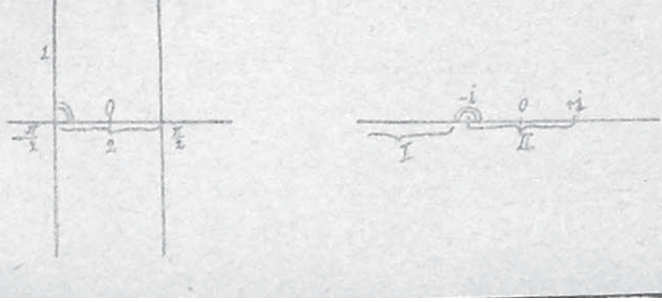
tehát a z és Z számsík megfelelő vectorai arányosak és szögeik aequivalensek, vagyis a megfelelő idomok legkisebb részecskéikben hasonlók, tehat a két számsík ezen α illetőleg A hely körül egymásnak conformis leábrázolása.



Hogy az (1) alatti feltétel tényleg szükséges a conformitáshoz, könnyen kimutatható. Mert ha $f'(\alpha)=0$ és az első el nem tünő derivált a k-dik, akkor
$$Z-A=\frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}(z-\alpha)^k+\frac{f^{(k+1)}(\alpha)}{(k+1)!}(z-\alpha)^{k+1}+\ldots\ldots$$
$$Z_1-A=\frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}(z_1-\alpha)^k+\frac{f^{(k+1)}(\alpha)}{(k+1)!}(z-\alpha)^{k+1}+\ldots\ldots$$
tehát $\lim\frac{Z-A}{Z_1-A}=\lim\frac{(z-\alpha)^k}{(z_1-\alpha)^k}=\lim\left(\frac{z-\alpha}{z_1-\alpha}\right)^k$

a miből látható, hogy a megfelelő vectorok szögei nem egyenlők, mert ha $\frac{z-\alpha}{z_1-\alpha}$ szöge φ, akkor $\frac{Z-A}{Z_1-A}$ szöge annyi mint $\left(\frac{z-\alpha}{z_1-\alpha}\right)^k$ szöge vagyis annyi mint $k\cdot\varphi$, tehát a megfelelő idomok nem hasonlók, s így az ilyen α e A körül a két sík nem is nyer conformis leábrázolást. Tehát minden analyt. függvénynél a z és Z ábrázoló síkja egymásnak conformis leábrázolása mindazon helyek körül, a hol az első derivált különbözik a 0-tól, de nem conformis azon helyeknél, a hol az első derivált eltünik.

Mindezeket igazolva találjuk a sinusnál, mely szintén analyticai függvény, ha
$$f(z)=\sin z$$
$$f'(z)=\cos z$$
s látható, hogy ez a derivált csak a $\pm\frac{\pi}{2}$ helyeken tünik el, $\cos(\pm\frac{\pi}{2})=0$, s így a z számsík $+\frac{\pi}{2}$ és $-\frac{\pi}{2}$, valamint a Z számsík $\sin\frac{\pi}{2}=+1$ és $\sin(-\frac{\pi}{2})=-1$ helyeinél megszünik a conformitás. Miután $\sin z$ második deriváltja $-\sin z$ a $\pm\frac{\pi}{2}$ helyeken nem tünik el, tehát itt $k=2$, azért itt ezen kivételes pontok körüli vectorok szögeinek a Z számsíkban kétszer akkora szögek fe-



leltuk meg. Igy pl. 1 és 2. vectorok szöge $\frac{\pi}{2}$ és a megfelelő vectorok szöge(I II) = π. Tehát az általános tétel teljesen igazolva van a sinusnál.

Miután $\sin z' = \cos z = Z$, ha $\frac{z'+z}{2} = \frac{\pi}{4}$, azért megkapjuk a z helyen a Z értékét, ha áttérünk a z' helyre s itt vesszük a sinus értékét, a mint azt már láttuk.

Mily értéket nyer a függvény, ha z a sinuscsík hosszán a végtelenbe megy? Látni fogjuk, hogy a függvény minden határon túl nőni fog. Mert ha $\sin z = Z$

$$X = \sin x \; Chy$$
$$Y = \cos x \; Shy$$

s ha most x-nek bizonyos állandó értéket adunk, míg y nő a $-\infty$-től $+\infty$-ig akkor Chy és Shy is minden határon felül nő, tehát maga Z is minden határon túl nő, azaz $\lim \sin(x+yi) = \infty$, ha $\lim y = \infty$ s pedig akár positiv akár negativ számok során át megy y a végtelenbe.

Tangens és cotangens.

Mint a trigonometriában, úgy itt is a complex számkörben fogjuk értelmezni a tangens és cotangens függvényt és pedig

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$$
$$\cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$$

Ezen definitióból kiolvashatók e két függvény tulajdonságai. A tangens két transcendens függvény hányadosa, 0 pontjai tehát a sinus 0 pontjai polusai a cosinus 0 pontjai, vagyis

$$tg z = 0, \text{ ha } z = k\pi, \text{ s ekkor } \cot z = \infty$$
$$tg z = \infty, \text{ ha } z = (2k+1)\frac{\pi}{2}, \text{ " } \cot z = 0$$

Azonkívül mindkét függvény periodusos, de periodusuk π, mert

$$tg(z+\pi) = \frac{\sin(z+\pi)}{\cos(z+\pi)} = \frac{-\sin z}{-\cos z} = tg z.$$

tehát a tg. periodusa π, s így elég vizsgálni oly csíkon belül, melynek szélessége π, melynek határvonalai a $+\frac{\pi}{2}$ és $-\frac{\pi}{2}$-ben az x tengelyre emelt merőlegesek, melyek egyikét itt is kizárjuk a területből. Lássuk, mily értéket vesz fel a tangens, ha z a képzetes tengelyen $+\infty$ vagy $-\infty$-be távozik? Ennek megvizsgálására azt az összefüggést használjuk fel, mely a sinus, cosinus és az exponentiális függvény között fennáll.

Legyen ugyanis $z = x + yi$

akkor
$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{1}{i}\,\frac{e^{zi} - e^{-zi}}{e^{zi} + e^{-zi}}$$ s felsőt, alsót e^{zi}-vel szorozva
$$= \frac{1}{i}\,\frac{e^{2zi} - 1}{e^{2zi} + 1} = \frac{1}{i}\,\frac{e^{-2y+2xi} - 1}{e^{-2y+2xi} + 1},$$
s miután az exponentiális függvény abs. értéke csak a reális értéktől, tehát itt $2y$-tól függ, azért, mivel $x = 0$, $\lim\limits_{y=+\infty} \operatorname{tg} z = \frac{1}{i} \cdot \frac{-1}{1} = -\frac{1}{i} = i$ és
$$\lim_{y=-\infty} \operatorname{tg} z = \frac{1}{i} = -i$$
mert
$$\frac{1}{i} \cdot \frac{e^{-2y+2xi} - 1}{e^{-2y+2xi} + 1} = \frac{1}{i}\,\frac{1 - \frac{1}{e^{-2y+2xi}}}{1 + \frac{1}{e^{-2y+2xi}}}$$ és ennek limese

$y = -\infty$ mellett $\frac{1}{i}$, tehát $\lim \operatorname{tg}(x+yi) = i$, ha $\lim y = +\infty$

$\lim \operatorname{tg}(x+yi) = -i$, ha $\lim y = -\infty$ a cotangensnél fordítva áll: $\lim \operatorname{cotg}(x+yi) = -i$, ha $\lim y = +\infty$

$\lim \operatorname{cotg}(x+yi) = i$, ha $\lim y = -\infty$

K.

Logarithmus.

Láttuk, hogy az $e^z = Z$ exponentiális függvény invers függvénye $z = \log Z$, a melynek tehát az a tulajdonsága, hogy $e^{\log Z} = Z$.

Láttuk továbbá, a logarithmusnak azt a fő jellemző tulajdonságát, hogy $\log Z_1 + \log Z_2 = \log Z_1 Z_2$. Ezt a functionális egyenletet fogjuk felhasználni arra, hogy egy olyan analyt. függvényt keressünk, mely az exponentiális függvénynek invers függvénye, a mely tehát eleget tesz ezen functionális egyenletnek:
$$F(z_1) + F(z_2) = F(z_1 z_2) \qquad \text{I.}$$
Azonnal látható, hogy a 0 pont erre a függvényre nézve singuláris pont, azaz nem bontható e körül sorba, mert ha 0 közönséges hely volna, I alapján $F(0) + F(z_2) = F(0)$ azaz $F(z_2) = 0$ volna, ez pedig nem volna z-nek függvénye. Tehát fel kell tennünk, hogy a számsík 0 pontja singuláris hely, mely körül a függvény nem bontható sorba. Ezért tehát z positív egész hatványai szerint haladó sorbabontás nem létezik, hanem más sorbabontási centrumot kell választani. Ilyen centrum gyanánt vesszük $(+1)$-et, ez közönséges hely

mert ha $z_1 = 1$ $\qquad F(1) + F(z_2) = F(z_2)$ tehát $F(1) = 0$, azaz a függ vény értéke a +1 pontban 0.

Ha most $z=1+h$ és rendezzük a sort h positiv egész hatványai szerint,
ily sort kapunk: $$\mathcal{F}(1+h) = a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + \dots\dots + a_n h^n + \dots \quad (1)$$
ez az analyt. függvény ismeretes lesz, ha ismerjük a coefficienseket, azt tudjuk, hogy $a_0=0$, mert ha $z=1$, azaz $h=0$, $\mathcal{F}(1)=a_0=0$. Ez a sor convergens az egységsugaru +1 centrumu körön belül, mert különben benne volna a convergentia területen a 0 singularis pont. Tehát a sor convergens, ha $|h|<\varrho$, a hol $\varrho \leqq +1$.

Ezen függvénynek eleget kell tenni, ha az I functionalis egyenletnek.

Ha
$$z_1 = 1 + h_1$$
$$z_2 = 1 + \frac{h_2}{1+h_1}$$
akkor
$$z_1 z_2 = 1 + h_1 + h_2$$
tehát
$$\mathcal{F}(1+h_1) + \mathcal{F}\left(1+\frac{h_2}{1+h_1}\right) = \mathcal{F}(1+h_1+h_2) \qquad (2)$$
az (1) sornak tehát olyannak kell lenni, hogy, ha $h=h_1$, majd $h=\frac{h_2}{1+h_1}$ helyettesitünk, a két sor összege egyenlő legyen azzal, melyet nyerünk, ha $h=h_1+h_2$. Hogy a (2) három függvényre az (1) sorbabontást alkalmazhassuk, h_1 és h_2-öt úgy kell megszoritani, hogy $|h_1+h_2|<\varrho$ legyen, ezt elérjük, ha $|h_1|<\frac{\varrho}{2}$ és $|h_2|<\frac{\varrho}{2}$, mert akkor a (2) alatti függvény elsejét (1) szerint sorbabonthatjuk, mivel $|h_1|<\frac{\varrho}{2}$, úgyszintén a (2) harmadik alatti függvényt, mert $|h_1+h_2|<\frac{\varrho}{2}$, de a (2) alatti második függvényt is, mert ha $|h_2|<\frac{\varrho}{2}$, akkor $|1+h_1|>1-\frac{\varrho}{2}$, s mivel $\varrho\leqq 1$, azért $\frac{\varrho}{2}\leqq\frac{1}{2}$, úgyhogy $1-\frac{\varrho}{2}\geqq 1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, tehát $|1+h_1|>\frac{1}{2}$
$$\frac{1}{1+h_1}<2$$
s mivel még $|h_2|<\frac{\varrho}{2}$, tehát $\left|\frac{h_2}{1+h_1}\right|<\varrho$

Ilyen h_1 és h_2 mellett a (2) alatti mindhárom függvényt sorbabonthatjuk. Lesz tehát a baloldal
$$(3.)\quad \mathcal{F}(1+h_1)+\mathcal{F}\left(1+\frac{h_2}{1+h_1}\right) = a_1h_1 + a_2h_1^2 + \dots + a_n h_1^n + \dots + a_1 h_2(1+h_1)^{-1} + \dots + a_n h_2^n (1+h_1)^{-n} + \dots$$
és a jobboldal $$\mathcal{F}(1+h_1+h_2) = a_1(h_1+h_2) + a_2(h_1+h_2)^2 + \dots + a_n(h_1+h_2)^n + \dots \quad (4)$$
s ez a két sorbabontás ugyanazt a függvényt értelmezi, ha $|h_1|$ és $|h_2|<\frac{\varrho}{2}$, de akkor megfelelő coefficienseik egyenlők kell legyenek. A (3) sor negkitevőjü hatványait a binomiális tétel szerint sorbabonthatjuk, s ezek feltétlenül convergensek lesznek; tehát

$$(1+h_1)^{-\kappa} = 1 - \binom{\kappa}{1} h_1 + \binom{\kappa+1}{2} h_1^2 + \cdots + (-1)^n \binom{\kappa+n-1}{n} h_1^n + \cdots \qquad (4)$$

A functionális egyenlet már mostan számtalan sok egyenlet teljesülését követeli (a megfelelő tagok coefficienseinek egyenlőségét) De mi csak eggyel fogjuk meghatározni az (1) sor coefficienseit, s ki fogjuk mutatni, hogy az így meghatározott coefficiensek eleget tesznek a többi egyenleteknek is. Vegyük pl. a $h_1^{n-1} h_2$ tagot. Ennek dimensiója n. A (3) sorban az a tag, melyben ez a kifejezés előfordul, a második sor első tagja:

$$a_1 h_2 (1+h_1)^{-1} = a_1 h_2 (1 - h_1 + h_1^2 + \cdots + (-1)^{n-1} h_1^{n-1} + \cdots)$$

s ezen kifejezés coefficiense ebben a tagban $(-1)^{n-1} a_1$. A (4) sorban a $h_1^{n-1} h_2$ kifejezés az n-edik tagban fordul elő:

$$a_n (h_1 + h_2)^n = a_n (h_1^n + n h_1^{n-1} h_2 + \cdots)$$

s ezen kifejezés coefficiense ebben a tagban $n \cdot a_n$. A functionalis egyenlet alapján ez a két coefficiens egyenlő, azaz $n a_n = (-1)^{n-1} a_1$ ebből

$$a_n = \frac{(-1)^{n-1} a_1}{n}$$

ez a képlet adja az (1) sor összes coefficienseit kifejezve az első coefficienssel, a_1-el. Ki kell mutatni, hogy az ezen képlettel meghatározott coefficiensek eleget tesznek a többi egyenleteknek is. Tehát ki kell mutatni, hogy a $h_1^p h_2^q$ coefficiense mindkét sorban ugyanaz. A (3)-ban ez a kifejezés előfordul a következő tagban:

$$a_q h_2^q (1+h_1)^{-q} = a_q h_2^q \left(1 - \binom{q}{1} h_1 + \binom{q+1}{2} h_1^2 + \cdots + (-1)^p \binom{p+q-1}{p} h_1^p + \cdots\right)$$

tehát a coefficiens $a_q (-1)^p \binom{p+q-1}{p}$ s a formula szerint betéve a_q értékét

$$= (-1)^{p+q-1} \frac{a_1}{q} \binom{p+q-1}{p} = (-1)^{p+q-1} \frac{a_1}{q} \cdot \frac{(p+q-1)(p+q-2)\cdots q}{1 \cdots p}$$

$$= (-1)^{p+q-1} \frac{a_1}{p} \binom{p+q-1}{p-1}$$

tehát az első (3) sorban a coefficiens $(-1)^{p+q-1} \frac{a_1}{p} \binom{p+q-1}{p-1}$

A (4) sorban a $h_1^p h_2^q$ kifejezés előfordul a következő tagban:

$$a_{p+q} (h_1 + h_2)^{p+q} = a_{p+q} \left(h_1^{p+q} + \cdots + \binom{p+q}{q} h_1^p \cdot h_2^q + \cdots\right)$$

tehát a coefficiens $a_{p+q} \binom{p+q}{q} = a_{p+q} \binom{p+q}{p}$, mert hisz $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ s betéve a_{p+q} értékét $= (-1)^{p+q-1} \frac{a_1}{p+q} \cdot \frac{(p+q)\cdots(q+1)}{1 \cdots p} = (-1)^{p+q-1} \frac{a_1}{p} \binom{p+q-1}{p-1}$

tehát a coefficiens itt is $(-1)^{p+q-1} \frac{a_1}{p} \binom{p+q-1}{p-1}$ és így a formula helyes.

Ennek alapján a keresett függvény

$$(5.) \qquad \mathcal{F}(1+h) = a_1 \left(h_1 - \frac{h_1^2}{2} + \frac{h_1^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1} \frac{h_1^n}{n} + \cdots\right)$$

s ez a sor convergens, ha $|h| < 1$, mert $|h| = 1$ mellett a [illegible] sek. De mindegyik tag mellett ott szerepel tényezőgyanánt a_1, a mely lehet tetszésszerinti. Ugy kell tehát meghatározni a_1-et, hogy a természetes logarithmust kapjuk. A természetes logarithmus definitiója

$$e^{\log(1+h)} = 1+h$$

ha tehát az exponentialis függvény sorjában $z=\log(1+h)$, akkor

$$e^{\log(1+h)} = 1+\log(1+h)+\frac{[\log(1+h)]^2}{2!}+\cdots\cdots = 1+h$$

ha ezen sor mindegyik tagját (5.) szerint sorbabontjuk, s az így nyert sorokat h hatványai szerint rendezzük, akkor, lévén az egész sor annyi mint $1+h$, a megfelelő tagok coefficiensei egyenlők és így $a_1=1$

tehát $$\log(1+h) = h-\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{3}-\frac{h^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{h^n}{n}+\cdots\cdots$$ s ez a sor convergens, ha $|h|<1$.

De könnyü megkapni a sorbabontást a számsíknak bármely helye körül, kivéve a 0-t. Bontsuk sorba pl. α körül

$$Z = \alpha+h = \alpha\left(1+\frac{h}{\alpha}\right)$$ akkor

$$\log Z = \log\alpha+\log\left(1+\frac{h}{\alpha}\right) = \log\alpha+\frac{h}{\alpha}-\frac{h^2}{2\alpha^2}+\frac{h^3}{3\alpha^3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{h^n}{n\alpha^n}+\cdots$$

s ez convergens, ha $\left|\frac{h}{\alpha}\right|<1$, azaz $|h|<|\alpha|$, tehát egy α centrumu körön belül, mely átmegy a 0 ponton. S ha most $h=z-\alpha$, akkor

$$\log Z = \log\alpha+\frac{Z-\alpha}{\alpha}-\frac{(Z-\alpha)^2}{2\alpha^2}+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\frac{(Z-\alpha)^n}{n\alpha^n}+\cdots\cdots$$

ez a logarithmus sorbabontása, a mely érvényes a számsíknak bármely helye körül s miután minden $\log\alpha$-nak végtelen sok értéke van, azért $\log Z$ is végtelen sok értékü.

Ez utóbbi sorbabontásból kiolvasható egyszersmind a logarithmus derivaltja $$(\log Z)' = \frac{1}{Z}.$$ tehát a log. derivaltja rationális függvény. Ha sikerül a log. derivaltját kimutatni függetlenül annak sorbabontásától, akkor ezzel a tulajdonságával szintén megkaphatjuk a log. sorbabontását. A derivaltat egyszerüen meg lehet kapni az invers függvény derivalási szabálya szerint. Ha ugyanis $f(z)=Z$ és ennek invers függvénye $z=F(Z)$, akkor $f(F(Z))=Z$, ha tehát f a direct, F az invers operatio, akkor ezek egymásután alkalmazva megsemmisitik egymást. Ez az utóbbi függvény összetett függvény s ennek derivaltja

$$z' = \left[f(F(Z))\right]' = f'(F(Z))\cdot F'(Z) = 1$$

tehát $\quad \mathfrak{F}'(Z) = \frac{1}{f'(\mathfrak{F}(Z))}$

Tehát az invers függvény deriváltja annyi mint az eredeti függvény deriváltjának reciprokja, betéve a független változó helyébe az invers függvényt. A mi esetünkben az eredeti függvény

$$f(z) = e^z = Z$$

s az invers $\quad \mathfrak{F}(Z) = \log Z$ és így $\mathfrak{F}'(Z) = (\log Z)' = \frac{1}{e^{\log Z}} = \frac{1}{Z}$

Tehát direct nyertük a log. deriváltját. S miután a $\log Z$ nem egyeb mint deriváltjának $\frac{1}{Z}$-nek integrálja, egyszerüen ez utóbbit kell sorbabontani s az így nyert sort integrálni. Ha tehát $Z = 1+h$

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{1+h} = 1 - h + h^2 - h^3 + \dots\dots$$ sort integrálva

$$\log(1+h) = C + h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} - \dots\dots$$ de miután $h=0$ n.

mellett $\log 1 = 0$, azért $C = 0$, azaz a const. 0, s így ugyanazt a sort nyertük, mint előbb.

A logarithmus sorbabontása segélyével kiszámithatjuk bármely számnak logarithmusát. E végett alakitsuk át az eredeti sort; ez volt

$$\log(1+h) = h - \frac{h^2}{2} + \dots\dots + (-1)^{n-1}\frac{h^n}{n} + \dots\dots$$

s ez convergens, ha $|h| < 1$. Mi itt a reális számkörre fogunk szoritkozni. Ha $h = -h$, $\quad \log(1-h) = -h - \frac{h^2}{2} - \dots\dots - \frac{h^n}{n} - \dots\dots$ s e kettő különbsége $\quad \log\frac{(1+h)}{(1-h)} = 2\left(h + \frac{h^3}{3} + \frac{h^5}{5} + \dots\dots\right) = \varphi(h)$

ez a soralak már practicus számitásra alkalmas. Mivel szorzat logarithmusa annyi mint a tényezők logarithmusainak összege, elegendő az összes primszámoknak logarithmusát meghatározni. Ha

$$h = \frac{1}{3}, \quad \frac{1+h}{1-h} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}} = 2, \text{ és így } \log 2 = \varphi\left(\tfrac{1}{3}\right)$$

$$h = \frac{1}{2}, \quad \frac{1+h}{1-h} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = 3 \quad \text{ és így } \log 3 = \varphi\left(\tfrac{1}{2}\right)$$

de ez a két sorbabontás nem eléggé gyorsan convergál, azért más sort kapunk, ha $\quad h = \frac{1}{5}, \quad \frac{1+h}{1-h} = \frac{3}{2}$ és $\log\frac{3}{2} = \log 3 - \log 2 = \varphi\left(\frac{1}{5}\right)$ és ha

$$h = \frac{1}{7}, \quad \frac{1+h}{1-h} = \frac{8}{6} = \frac{2^2}{3}, \quad \log\frac{2^2}{3} = 2\log 2 - \log 3 = \varphi\left(\tfrac{1}{7}\right)$$

s a kettőt összeadva, kapjuk $\quad \log 2 = \varphi\left(\frac{1}{5}\right) + \varphi\left(\frac{1}{7}\right)$

a felsőt 2-vel szorozva és összeadva $\quad \log 3 = 2\varphi\left(\frac{1}{5}\right) + \varphi\left(\frac{1}{7}\right)$

ezek már jobban convergáló sorok. A következő primszámok 5 és 7. ezek számára igen jól convergáló sorokat kapunk, ha $h = \frac{1}{19}$, $\frac{1+h}{1-h} = \frac{20}{18} = \frac{10}{9} = \frac{2\cdot 5}{3^2}$ ekkor ugyanis $\log 2 + \log 5 - 2\log 3 = \varphi\left(\frac{1}{19}\right)$, tehát ismerve $\log 2$ és $\log 3$

$$\underline{\log 5 = \varphi\left(\tfrac{1}{19}\right) + 2\log 3 - \log 2}$$

és ha $h = \frac{1}{99}$, $\frac{1+h}{1-h} = \frac{100}{98} = \frac{50}{49} = \frac{25^2}{7^2}$, akkor $\log 2 + 2\log 5 - 2\log 7 = \varphi\left(\frac{1}{99}\right)$ tehát

$$\underline{\log 7 = \tfrac{1}{2}\left[\log 2 + 2\log 5 - \varphi\left(\tfrac{1}{99}\right)\right]}$$

ezeket ismerve felállíthatjuk az általános formulát a többi primszámok logarithmusainak kiszámítására. Ha $h = \frac{1}{2n-1}$, akkor $\frac{1+h}{1-h} = \frac{2n}{2n-2} = \frac{n}{n-1}$ és

$$\log n - \log(n-1) = \varphi\left(\tfrac{1}{2n-1}\right)$$

már most ezen képlet alapján a primszámok logarithmusait fokonként számitjuk ki, azaz ha n az illető primszám, akkor feltételezzük, hogy már ismeretes az előző primszámoknak, tehát az $(n-1)$ összetett számnak is a logarithmusa. Így pl. ismerve már 2, 3, 5 és 7 logarithmusát, ha $n = 11$, akkor

$$\log 11 - \log 10 = \varphi\left(\tfrac{1}{21}\right), \text{ azaz}$$

$$\log 11 = \varphi\left(\tfrac{1}{21}\right) + \log 10 = \varphi\left(\tfrac{1}{21}\right) + \log 2 + \log 5.$$

s ez így megy tovább. Az így nyert log. mind természetes logarithmusok. De könnyü ezekből megkapni a megfelelő 10 alapú vagyis közönséges logarithmusokat a kettő közötti összefüggés alapján. Ugyanis

$$e^{\log 10} = 10$$

$$e^{\log 10 \cdot \log_{10} a} = 10^{\log_{10} a} = a, \quad \text{tehát}$$

$$\log a = \log 10 \cdot \log_{10} a \quad \text{és így}$$

$$\log_{10} a = \frac{1}{\log 10} \cdot \log a$$

a hol $\frac{1}{\log 10}$ a közönséges log. rendszer modulusa, s ez ismeretes, mert kiszámitottuk $\log 10 = \log 2 + \log 5$.

Bármely számnak közönséges logarithmusát tehát megkapjuk, ha természetes logarithmusát megszorozzuk a közönséges log. rendszer modulusával $(0{\cdot}4342945\ldots)$

<u>Ezek a logarithmusra vonatkozó legfontosabb formulák.</u>

Most térjünk át arra az érdekes kapcsolatra, mely a log. és a harmonicus sor közt fenáll. E végett alkossuk meg a következő sort:

$$(1 - \log 2) + \left(\tfrac{1}{2} - \log\tfrac{3}{2}\right) + \left(\tfrac{1}{3} - \log\tfrac{4}{3}\right) + \cdots + \left(\tfrac{1}{n} - \log\tfrac{n+1}{n}\right) + \cdots \qquad (I)$$

erről a sorról ki fogjuk mutatni, hogy convergens és tagjai mind positivek. Vegyük ugyanis az általános tagban szereplő

$$\log\frac{n+1}{n} = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{n^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{n^3} - \cdots$$

tehát az általános tag $\quad \frac{1}{n} - \log\frac{n+1}{n} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{n^3} + \cdots$

ez egy convergens sor, melynek tagjai fogynak, tehát értéke positiv, vagyis az I sor általános tagja, tehát minden tagja positiv. Most 'i kell mutatni, hogy I convergens. Tudjuk, ha 2 sor általános tagjai egyenlőranguak, akkor a két sor egyszerre convergens. Hasonlítsuk össze az I sor általános tagját t. i. (1)-et a következő sor általános tagjával:

(2) $$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots\cdots$$ a mely sorról tudjuk, hogy convergens. Tehát

$$\frac{\frac{1}{n}-\log\frac{n+1}{n}}{\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3n}+\cdots\cdots$$

ez a sor convergens és értéke fekszik $\frac{1}{2}$ és $\frac{1}{2}-\frac{1}{3n}$ közt, ha n-nek legkisebb értékét vesszük $n=1$, akkor kapjuk a legszélső határokat $\frac{1}{2}$ és $\frac{1}{6}$, tehát ezen hányados lim. fekszik $\frac{1}{2}$, és $\frac{1}{6}$ között, úgyhogy az I és (2) sor általános tagjai egyenlőrangú kicsinyek, és mivel a (2) sor convergens, azért egy is convergens. Tehát I convergens és tagjai positivek. A sornak tehát van határozott értéke, legyen ez C. Tudjuk, hogy a sor értéke annyi mint az n első tag összegének limese. Meg kell tehát alkotni az I sor első n tagjának összegét

$$\left.\begin{array}{l} 1-\log 2 \\ \frac{1}{2}-\log\frac{3}{2} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \frac{1}{n-1}-\log\frac{n}{n-1} \end{array}\right\}\ \text{összeadva}.$$
$$\overline{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n-1}-\log n}$$

mert $\log 2+\cdots+\log\frac{n}{n-1}=\log 2\,\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdots\cdots\frac{n}{n-1}=\log n$ s ezen $n-1$ első tag összegének limese $\lim\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\log n\right)=C$ ha ehhez adjuk még $\lim\frac{1}{n}=0$, akkor $\lim\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right)=C$ ez az egyenlet világot vet a harmonicus sorra, eddig tudtuk, hogy divergens most látjuk, hogy értéke és $\log n$ különbsége mindjobban közeledik egy constanshoz, C-hez, melyet Euler féle constansnak nevezünk, s mely nem egyéb, mint I sor értéke.

Egy másik összefüggést kapunk azon tétel alapján, hogy a convergens sorban mindig lehet olyan helyet kijelölni, melytől kezdve akárhány tag összege kisebb, mint egy tetszés szerinti kis ε. Ha pl az I sorban az n-dik tagtól summázunk,

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{n}-\log\frac{n+1}{n}\\ \frac{1}{n+1}-\log\frac{n+2}{n+1}\\ \cdots\cdots\\ \frac{1}{n+m}-\log\frac{n+m+1}{n+m}\end{array}\right\}$$

ez az összeg pos. s ha n elég nagy és m tetszésszerinti, akkor kisebb mint ε, azaz $0 < \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots\cdots + \frac{1}{n+m} - \log\frac{n+m+1}{n} < \varepsilon$

Most tegyük fel, hogy az alsókban az összes, k számjegygyel leirható számok állanak, tehát $n = 10^{k-1}$ és $n+m = 10^{k}-1$, akkor ezen törtek összegét szokás szerint C_k-val jelölve, lesz

$$C_k - \log\frac{10^k}{10^{k-1}} = C_k - \log 10$$ és

$$0 < C_k - \log 10 < \varepsilon$$

tehát $$\lim_k C_k = \log 10$$

ha tehát a harmonicus sorban összefoglaljuk azon tagokat, melyek nevezőik <u>k</u> számjegyük, akkor ezen összegnek limese k-ra nézve, $\log 10$.

Ez az összefügges a logarithmus nat. és a harmonicus sor között.

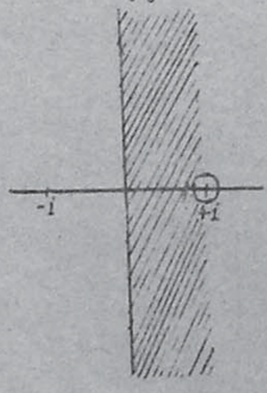
Még egy sorbabontási alak létezik a log. számára, mely azt igen nagy területen állitja elő, de csak theoreticus értéke van. Láttuk ugyanis, hogy

$$\log\frac{1+h}{1-h} = 2\left(h + \frac{h^3}{3} + \frac{h^5}{5} + \cdots\cdots\right)$$

s ez convergens, ha $|h| < 1$. Ha most $\frac{1+h}{1-h} = Z$, akkor ebből $h = \frac{Z-1}{Z+1}$, tehát a

$$\log Z = 2\left(\frac{Z-1}{Z+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{Z-1}{Z+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{Z-1}{Z+1}\right) + \cdots\cdots\right)$$

sor előállitja a függvényt oly területen, melyre nézve $|h| = \left|\frac{Z-1}{Z+1}\right| < 1$ azaz $|Z-1| < |Z+1|$, tehát oly pontokra nézve, melyeknek távolsága a (-1)-től nagyobb mint a $(+1)$-től, tehát a képzetes tengely jobboldalán



fekvő félsikon. De practicus haszna nincs ezen sorbabontásnak, mert csak akkor convergál erősen ha Z igen keveset különbözik 1-től, tehát csak az 1 pont körül használható.

Mutassuk ki mostan, hogy a <u>logarithmus többértéküssége daczára is monogén függvény</u>.

Ugyanis ha $$e^z = Z$$ $$z = \log Z$$

ha most z és Z-t külön sikban ábrázoljuk akkor, ha $z = x + yi$ és

$$Z = R(\cos\Phi + i\sin\Phi), \text{ lesz}$$

$$e^{x+yi} = e^{x}(\cos y + i\sin y) = R(\cos\Phi + i\sin\Phi)$$

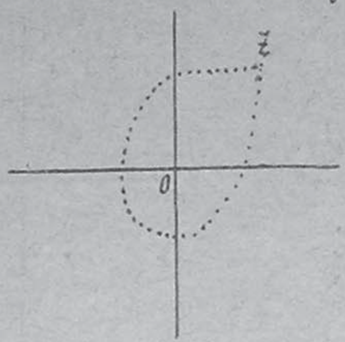
tehát $e^{x} = R$ $\qquad y = \Phi + 2k\pi$

és ebből $\qquad x = \log R$

$$y = \Phi + 2k\pi$$

vagyis $\qquad \log Z = \log R + (\Phi + 2k\pi)i \qquad$ I.

ha $-\pi < \Phi \leq \pi$ a logarithmus főszöge, akkor $\mathrm{Log}\, Z = \log R + \Phi i$ a log. főértéke. Ha most Z-t változtatjuk és z megfelelő értékeit a folytonosság szerint sorakoztatjuk egymáshoz, akkor alkalmas úton víve a Z-t, a z felveszen minden értéket. Ha ugyanis Z egyszer körülmegy 0 körül, akkor a megfelelő $\mathrm{Log}\, Z$ már nem eredeti értékével, hanem $2\pi i$-vel növekedve tér vissza, azaz $(\mathrm{Log}\, R + \Phi i)$-ből lett $\mathrm{Log}\, R + (\Phi + 2\pi)i$, s ha k-szor járja körül Z a 0-t, akkor a log. megnövekedik $2k\pi i$-vel, azaz $\mathrm{Log}\, R + (\Phi + 2k\pi)i$ a miből látható, hogy ha Z mindig csak a 0 körüli utat teszi meg, $\log z$ a körben minden értéket felveszen, tehát a logarithmus monogén függvény.



A log. néhány fontosabb esete I szerint

$$\log 1 = 2k\pi i$$

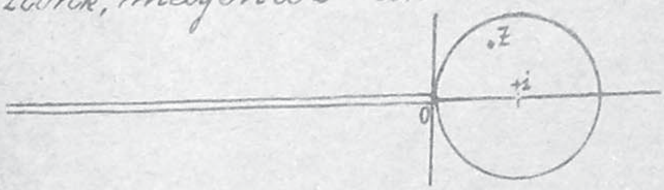
$$\log(-1) = (\pi + 2k\pi)i = (2k+1)\pi i$$

$$\log i = \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)i$$

$$\log(-i) = \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)i$$

A logarithmusnak két singuláris helye van, 0 és ∞, mert $\log 0 = -\infty + yi$ és $\log\infty = \infty + yi$, a hol y határozatlan, minden más hely közönséges hely, mely körül a log. sorbabontható.

Ha a Z változását úgy korlátozzuk, hogy a 0 pontból kiindulva a neg. reális tengely mentében a végtelenbe egy metszést alkalmazunk, melyen a Z-nek nem szabad átlépni, és megállapodunk abban, hogy ezen metszés felső határvonalába a Z még bemehet, de az alsóba nem, akkor látható, hogy



ha Z a $(+1)$-ből, hol $\operatorname{Log} Z=0$, kiindul, a felső mezőn a szög csak $(+\pi)$ ig nö-
vekedig, esetleg $+\pi$ is felvehető, míg az alsó mezőn a szög csak $(-\pi)$ ig nö-
het, és így ezen változások közben a $\log Z$ csak a főértéket veheti fel, azaz
ha Z-ből kiindul s bármily úton bejárja a metszett síkot, ugyanazzal
a szöggel tér vissza, s mivel ez a szög $+\pi$ és $-\pi$ között fekszik, csak egy
értéket, t.i. a főértéket veszi fel $\log Z$. Megjegyzendő, hogy azok a sor-
babontások, melyeket a log. számára felállítottunk, mind a log. fő-
értéket szolgáltatják. Így

$$(1) \qquad h-\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{3}-\frac{h^4}{4}+\cdots\cdots = \operatorname{Log}(1+h)$$

mert ha $h=0$, akkor a sor értéke 0, azaz $\operatorname{Log}(1)=0$, mert ha ez a sor
nem a főértéket adná, akkor $\log(1)=2k\pi i$ volna. Erről különben úgy
is meggyőződhetünk, hogy tesszük $1+h=Z$, azaz $h=Z-1$, miután
a fenti sorbabontás csak $|h|<1$ mellett convergens, tehát ha $|Z-1|<1$
azaz egy $(+1)$ centrumú, 0-n átmenő körön belül, nyilvánvaló, hogy
ezen belül Z-nek a szöge, bármily úton, nem fog növekedni. Ugyan-
ez áll a következő sorra is:

$$(2). \qquad -h-\frac{h^2}{2}-\frac{h^3}{3}-\frac{h^4}{4}-\cdots\cdots = \operatorname{Log}(1-h)$$

ez is a főértéket adja, melynek szöge $+\pi$ és $-\pi$ között fekszik, de akkor
a kettő különbsége

$$\operatorname{Log}\left(\frac{1+h}{1-h}\right)=2\left(h+\frac{h^3}{3}+\frac{h^5}{5}+\cdots\right)$$

szintén a főértéket adja. –

A sinus és cosinus invers függvénye. Arcussinus.

A trigonometriában a $\quad \sin z = Z \quad$ invers függvényét
így jelöltük $\quad z = \arc\sin Z \quad$ és itt ezen in-
vers függvény alatt a Z sinushoz tartozó ívet ~~is~~ értettük; ezt az el-
nevezést megtartjuk a complex számkörben is és így egész általáno-
san a $\sin z = Z$ invers függvénye $z = \arc\sin Z$.

Ezen függvénynek a trigonometriában csak akkor van értelme,
ha Z $+1$ és -1 között fekszik, vagyis ha $|Z| \leq 1$, különben csak analyti-
cai jelentőségű.

Ezen függvénytanulmányozását most megkönnyíti az, hogy össze lehet tenni egy logarithmusból és alg. függvényből, melyeknek tulajdonságait már ismerjük. Tudjuk ugyanis, hogy

$$\sin z = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i} = Z \qquad \text{ebből}$$

$$e^{zi} - e^{-zi} = 2iZ \qquad \text{és szorozva } e^{zi}\text{-vel}$$

$$e^{2zi} - 2iZe^{zi} - 1 = 0 \qquad \text{és megfejtve ezt a négyzetes}$$

egyenletet
$$e^{zi} = iZ + \sqrt{1-Z^2}$$

$$zi = \log(iZ + \sqrt{1-Z^2})$$

tehát
$$z = \frac{1}{i}\log(\sqrt{1-Z^2} + iZ) = \text{arc}\sin Z$$

vagyis
$$\text{arc}\sin Z = \frac{1}{i}\log(\sqrt{1-Z^2} + iZ)$$

Előállítottuk tehát arc sin-t mint összetett függvényt, a külső függvény logarithmus, a belső alg. függvény, mert gyökvonás is fordul elő benne. Ezen előállításból most ki lehet olvasni az arcus sin. tulajdonságait.

Mindenekelőtt lássuk hol vannak ezen függvénynek singularitásai. Az összetett függvény singularitásai a belső és külső függvény singularitásai. A belső alg. függvény sing. a végtelen távoli hely, mely egyszersmind a külső logarithmusra is sing. hely; a belső függvényben levő négyzetgyökre nézve (9) szerint sing. az a hely, a hol $1-Z^2=0$, azaz $Z=\pm 1$. A külső log.-ra lehetne sing. hely 0, de kimutatjuk, hogy ez nem következhetik be egy Z-re sem; mert ha

$$\sqrt{1-Z^2} + Zi = 0 \qquad \text{volna, akkor}$$

$$1 - Z^2 = -Z^2 \qquad \text{volna, a mi absurdum.}$$

Tehát az arcus sinus sing. helyei végtelen, $+1$ és -1. Minden más hely közönséges, mely körül a függvény sorbabontható. Az I előállításból látható, hogy egy szabott Z-hez az arcus sinus végtelen sok értékkel bír, azaz végtelen sok értékü függvény és pedig azért, mert a log., melylyel elő van állítva, végtelen sok értékü. Másfelől az is látható, hogy ezen végtelen sok érték két csoportot alkot, mert a log. alatti négyzetgyök kétértékü $+\sqrt{1-Z^2}$ és $-\sqrt{1-Z^2}$. Ha tehát az egyik négyzetgyököt veszszük kapjuk az arc sin értékek egyik ágát, a másik gyökhez a másik ágát.

Ha az egyik csoportbeli értékek egyike arc sin Z akkor ebből a első csoport valamennyi értékét megkapjuk, ha állandóan a positiv négyzetgyököt véve, vesszük az ehez tartozó log. összes értékeit. Az első csoportbeli értékek tehát

$$\operatorname{arc\,sin}_1 z + \frac{1}{i}\, 2k\pi i \quad \text{vagyis}$$

$$\operatorname{arc\,sin}_1 z + 2k\pi \qquad (1)$$

A két csoporthoz tartozó értékek viszonyából levezethetjük a második csoport értékeit is. Ugyanis

$$\operatorname{arc\,sin}_1 z = \frac{1}{i}\log\left(\sqrt{1-z^2} + iz\right)$$

$$\operatorname{arc\,sin}_2 z = \frac{1}{i}\log\left(-\sqrt{1-z^2} + iz\right)$$

összeadva, és a jobboldalon a szorzat log. véve

$$\operatorname{arc\,sin}_1 z + \operatorname{arc\,sin}_2 z = \frac{1}{i}\log(-1) = \frac{1}{i}(2k+1)\pi i = (2k+1)\pi$$

ebből $\operatorname{arc\,sin}_2 z = -\operatorname{arc\,sin}_1 z + (2k+1)\pi \qquad (2)$

Tehát az első csoport összes értékeit (1) szerint megkapjuk, ha egyik értékéhez $2k\pi$-t hozzáadunk és ha (2) szerint ezen első csoportbeli érték negativjához hozzáadjuk a π páratlan számu többszöröseit, kapjuk a második csoport összes értékeit. Ez teljesen megegyezik azzal az eredménynyel, melyet a sinus egyenlőértékü helyeire nézve kaptunk. Látjuk tehát, hogy itt is elég ismerni a függvény egyetlenegy értékét és igy czélszerü, mint a logarithmusnál megállapitani itt is a függvény főértékét. Főértéknek egyszerüen azt fogjuk nevezni, mely a belső függvényben a négyzetgyök és a külső függvényben a log. főértékéből adódik. A négyzetgyökre nézve megállapodunk abban, hogy

$$\sqrt{1-z^2} = a + bi$$

$$= -a - bi$$

két érték közül az a főérték, melynek reális része positiv, vagy ha ez 0, - melynek képzetes része positiv. Ha tehát $\sqrt{1-z^2} > 0$, akkor

$$\operatorname{Arc\,sin} z = \frac{1}{i}\operatorname{Log}\left(\sqrt{1-z^2} + iz\right)$$

lesz az arc sin. főértéke. Lássuk mi az arc sin. főértéke a $+1$ és -1 sing. helyeken? Ha

$z = +1$ $\qquad \operatorname{Arc\,sin}(1) = \frac{1}{i}\operatorname{Log}(i) = \frac{1}{i}\,\frac{\pi}{2}\,i = \frac{\pi}{2}$

s ha $z = -1$ $\qquad \operatorname{Arc\,sin}(-1) = \frac{1}{i}\operatorname{Log}(-i) = \frac{1}{i}\left(-\frac{\pi}{2}\right) i = -\frac{\pi}{2}$

minden más esetben a négyzetgyök nem 0. Már most a Log. után álló két mennyiség közötti viszonyból könnyü lesz megállapitani az Arc sin. értékváltozásait. Ha ugyanis

$$\sqrt{1-z^2} = a_1 + b_1 i \qquad \text{I.}$$

$$iZ = a_2 + b_2 i \qquad \text{II.}$$

négyzetre emelve $\quad 1 - Z^2 = a_1^2 - b_1^2 + 2a_1 b_1 i$

$$-Z^2 = a_2^2 - b_2^2 + 2a_2 b_2 i \qquad \text{kivonva az alsót}$$

$$1 = a_1^2 - a_2^2 + b_2^2 - b_1^2 + 2(a_1 b_1 - a_2 b_2) i$$

de akkor $\quad a_1^2 - a_2^2 + b_2^2 - b_1^2 = 1 \qquad (1)$

$$a_1 b_1 - a_2 b_2 = 0, \quad \text{vagyis}$$

$$a_1 b_1 = a_2 b_2$$

$$a_1^2 b_1^2 = a_2^2 b_2^2 \qquad (2)$$

és ezek alapján most ki fogjuk mutatni, hogy I reális része a_1 mindig nagyobb, mint II. reális része a_2. Egyszerüen kimutatjuk, hogy $a_1^2 > a_2^2$. Mert tegyük fel, hogy lehetne $\quad a_1^2 \leqq a_2^2$

akkor $\quad a_1^2 - a_2^2 \leqq 0$

de akkor (1) szerint volna $\quad b_2^2 - b_1^2 > 0$

azaz $\quad b_1^2 < b_2^2$

tehát $\quad a_1^2 b_1^2 < a_2^2 b_2^2,$

pedig (2) szerint $\quad a_1^2 b_1^2 = a_2^2 b_2^2$

Tehát ki van mutatva, hogy $\sqrt{1-Z^2}$ reális része nagyobb mint iZ reális része, és miután Arcsin.-ban a $\sqrt{1-Z^2}$ reális része positiv, azért a Log. mögötti összeg reális része mindig positiv; tehát Arc sin Z-ben a Log. megett egy az I vagy IV quadransban fekvő complex szám áll, melynek szöge tehát $\quad -\frac{\pi}{2} < \varphi \leqq \frac{\pi}{2}$

Miután a Log.nál a szög főértékét kell venni, mely $-\pi < \Phi < \pi$ azért ez a φ szög megfelel a Log. követelményeinek. E szerint, ha

$$\operatorname{Log}(\sqrt{1-Z^2} + iZ) = c + di, \quad \text{akkor } -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ és mi-}$$

vel $\quad \operatorname{Arc\,sin} Z = \frac{1}{i}(c+di) = -i\cdot(c+di) = d + ci \qquad$ azaz

$\operatorname{Arc\,sin} Z = d + ci$, a hol $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ azért mondhatjuk hogy az arcus sinus főértékének reális része $+\frac{\pi}{2}$ és $-\frac{\pi}{2}$ közt fekszik.

Ez is megfelel a sinusnál nyert azon eredménynek, hogy a $+\frac{\pi}{2}$ és $(-\frac{\pi}{2})$-ben emelt merőlegesek által határolt sávon belül a sinus felveszi az összes értékeket.

Most ki fogjuk mutatni, hogy két arcsin összegét mindig elő lehet állítani mint egy arc.sinust. Ha ugyanis

$$\operatorname{arc\,sin} z_1 = \frac{1}{i}\log\left(\sqrt{1-z_1^2} + z_1 i\right)$$
$$\operatorname{arc\,sin} z_2 = \frac{1}{i}\log\left(\sqrt{1-z_2^2} + z_2 i\right)$$
$$(1)\qquad \operatorname{arc\,sin} z_1 + \operatorname{arc\,sin} z_2 = \frac{1}{i}\log\Big[\underbrace{\sqrt{1-z_1^2}\sqrt{1-z_2^2} - z_1 z_2}_{z'} + \underbrace{\left(z_1\sqrt{1-z_2^2} + z_2\sqrt{1-z_1^2}\right) i}_{z}\Big]$$

Ki fogjuk mutatni, hogy $z'^2 + z^2 = 1$, ugyanis

$$z^2 = z_1^2(1-z_2^2) + z_2^2(1-z_1^2) + 2 z_1 z_2 \sqrt{1-z_1^2}\sqrt{1-z_2^2}$$
$$z'^2 = (1-z_1^2)(1-z_2^2) + z_1^2 z_2^2 - 2 z_1 z_2 \sqrt{1-z_1^2}\sqrt{1-z_2^2}$$

beszorozva és összeadva lesz $z^2 + z'^2 = 1$

tehát $z' = \sqrt{1-z^2}$ és így (1) következőleg is írható

$$= \frac{1}{i}\log\left(\sqrt{1-z^2} + z i\right) = \operatorname{arc\,sin} z,$$ a hol tehát

$$z = z_1\sqrt{1-z_2^2} + z_2\sqrt{1-z_1^2}\,.$$ úgyhogy

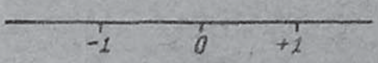
$$\operatorname{arc\,sin} z_1 + \operatorname{arc\,sin} z_2 = \operatorname{arc\,sin}\left(z_1\sqrt{1-z_2^2} + z_2\sqrt{1-z_1^2}\right)$$

Ez az arcus sinus összeadási tétele, s ez az egyenlet azt jelenti, hogy ha arc sin z_1 és arc sin z_2 végtelen sok értékei közül egyet-egyet kiválasztunk akkor ezeknek összege előfordul a harmadik arc. sin végtelen sok értékei között is.

Ha $z_1 = z_2 = z$ akkor $2 \operatorname{arc\,sin} z = \operatorname{arc\,sin}\left(2z\sqrt{1-z^2}\right)$

Különben mindezek a formulák a trigonometriai formulákból is levezethetők.

Lássuk már most az arcsin sorbabontását. A három sing. hely, ∞, $+1$ és -1 kivételével minden más hely körül sorbabontható a függvény. Miután az arc sinusnak csak oly z sinusértékek mellett van trigonometriai jelentése, melyek $|z| \leqq 1$, azért csakis ilyenkor fogjuk a sorbabontást keresni. Centrumul választjuk a 0 pontot. Miután valamely hely körüli sorbabontás mindig a legközelebbi singuláris helyig bír érvénnyel, azért ezen 0 centrumú



sorbabontás területe az egységsugarú kör lesz. Legcélszerűbb lesz a főértéket sorbabontani. Ezt úgy is tehetnők, hogy $\operatorname{arc\,sin} z = \frac{1}{i}\log\left(\sqrt{1-z^2} + i z\right)$ lévén egyszerűen sorbabontjuk a logarithmust. De sokkal egyszerűbb és alkalmasabb módszer, ha először meghatározzuk az arc sin deriváltját, ezt sorbabontjuk és a nyert sort integráljuk. Az invers függvény deriváltja

$$F'(z) = \frac{1}{f'(F(z))}$$

A mi esetünkben $f(z) = \sin z = Z$
$\mathfrak{F}(Z) = \operatorname{arc\,sin} Z$ és mivel $(\sin z)' = \cos z$, továbbá
$\cos z = \sqrt{1-\sin^2 z} = \sqrt{1-Z^2}$ azért lesz
$(\operatorname{arc\,sin} Z)' = \frac{1}{\cos z} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 z}} = \frac{1}{\sqrt{1-Z^2}}$ s ha $\sqrt{1-Z^2}$ reális

részét positivnak veszem, akkor $(\operatorname{Arc\,sin} Z)' = \frac{1}{\sqrt{1-Z^2}}$
Ezt pedig a binomialis tétel szerint sorba tudjuk bontani

$$\frac{1}{\sqrt{1-Z^2}} = (1-Z^2)^{-\frac{1}{2}}$$

s ez ép a főértéket fogja adni, mert ha $Z=0$, kapunk $+1$-et, ennek realis része pedig positiv. Tehát a binomiális tétel szerint

$$(1-Z^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \binom{-\frac{1}{2}}{1}(-Z^2) + \binom{-\frac{1}{2}}{2}(-Z^2)^2 + \dots + \binom{-\frac{1}{2}}{n}(-Z^2)^n + \dots$$

Számitsuk ki ennek általános tagját:

$$\binom{-\frac{1}{2}}{n} = \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)\dots(-\frac{1}{2}-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\dots\dots n}$$

$$= (-1)^n \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\dots\dots\dots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\dots\dots\dots 2n}$$

Ezt az általános tagot szorozni kell még $(-Z^2)^n = (-1)^n Z^{2n}$-el, miáltal a $(-1)^n$ szorzó kiesik, ugyhogy most

$$(\operatorname{Arc\,sin} Z)' = 1 + \frac{1}{2}Z^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}Z^4 + \dots\dots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\dots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\dots 2n}Z^{2n} + \dots$$

s ez a sor convergens, ha $|Z| < 1$. Ezt a sort kell most integrálni. A fellépő constans $C=0$ lesz, mert hiszen ez nem egyéb, mint a függvény értéke $Z=0$-ban, már pedig $\operatorname{Arc\,sin} 0 = \frac{1}{i}\operatorname{Log}(1) = 0$ és igy

$$\operatorname{Arc\,sin} Z = Z + \frac{1}{2}\cdot\frac{Z^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{Z^5}{5} + \dots\dots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\dots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\dots 2n}\cdot\frac{Z^{2n+1}}{2n+1} + \dots$$

Ez a sor adja tehát a trigonometriai sinusnak megfelelő ívet. Ezen sor segélyével lehet a Ludolf féle szám részére egy, habár nem a legjobban convergáló sort kapni. Ugyanis tudjuk, hogy $30° = \frac{\pi}{6}$, $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ s $\frac{\pi}{6}$ egyszersmind az a legkisebb ív, melynek sinusa $\frac{1}{2}$, tehát

$$\operatorname{Arc\,sin}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$$

és igy

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{3\cdot 2^3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5\cdot 2^5} + \dots\dots + \frac{1\cdot 3\dots(n-1)}{2\cdot 4\dots 2n}\cdot\frac{1}{(2n+1)2^{2n+1}} + \dots$$

De sokkal jobban convergáló sort fogunk kapni az arc tg segélyével.

Árcuscosinus.

Az arc.cosinus tárgyalása épen úgy megy, mint az arcus sinusé.

$$\cos z = Z$$
$$z = \operatorname{arc}\cos Z$$

Ezt is a cosinusnak az exponentiális függvénnyel való összefüggése alapján előállitjuk oly alakban, melyből annak tulajdonságait kiolvashatjuk, mert ebből az összefüggésből

$$e^{zi} + e^{-zi} = 2Z$$
$$e^{2zi} - 2Ze^{zi} + 1 = 0 \qquad \text{s a négyzetes egyenletet meg-}$$
fejtve
$$e^{zi} = Z + \sqrt{Z^2 - 1}$$

de miután a trigonometriai cosinus $|Z| \leq 1$. azért ez négyzetgyök ebben az esetben képzetessé válik, azért ezt átalakitjuk

$$Z^2 - 1 = -(1 - Z^2)$$
$$\sqrt{Z^2 - 1} = \sqrt{1 - Z^2} \cdot i$$

úgyhogy
$$e^{zi} = Z + \sqrt{1 - Z^2}\, i$$
tehát
$$zi = \log(Z + \sqrt{1 - Z^2} \cdot i)$$
$$\operatorname{arc}\cos Z = \frac{1}{i} \log(Z + \sqrt{1 - Z^2}\, i)$$

Tehát az arc cos is összetehető egy alg. és egy log. függvényből. Ebből az előállitásból látható, hogy az arc cos sing. helyei szintén ∞, $+1$ és -1, mint az arcsinusnál.

Látható továbbá az is, hogy az arc cos is végtelen sok értékü függvény s ezen értékek szintén 2 csoportot alkotnak. Hogy ezt az értéktartományt jobban áttekinthessük, czélszerü lesz levezetni azt az egyszerü vonatkozást, mely az arc.cos. és arcsin. közt fennáll.

$$\operatorname{arc}\cos Z = \frac{1}{i} \log(Z + \sqrt{1 - Z^2} \cdot i)$$
$$\operatorname{arc}\sin Z = \frac{1}{i} \log(\sqrt{1 - Z^2} + Zi)$$

mindkét esetben $\sqrt{1 - Z^2}$ ugyanazon értékét véve s akkor

$$\operatorname{arc}\cos Z + \operatorname{arc}\sin Z = \frac{1}{i} \log(i) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

De a $2k\pi$-t átvihetjük a baloldalra, hol az valamelyik arcusba beleolvad, úgyhogy $\operatorname{arc}\cos Z + \operatorname{arc}\sin Z = \frac{\pi}{2}$, ebből a relátióból, ha Arc sin Z vesszük $\operatorname{Arc}\cos Z = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arc}\sin Z$ (1)

Mit fejez ki ez az egyenlet? Ha $\text{Arc sin } Z = a+bi$, akkor amint tudjuk $-\frac{\pi}{2} < a < \frac{\pi}{2}$ és ha most $\text{Arc cos } Z = c+di$, akkor az egyenlet szerint

$$c+di = \frac{\pi}{2} - (a+bi) \quad \text{azaz } c = \frac{\pi}{2} - a$$

s ha vesszük a-nak szélső értékeit, akkor $0 < c < \pi$.

Tehát az arccos főértékének reális része 0 és π között fekszik. A további tárgyalás ép úgy megy, mint az arcsinusnál. A sorbabontását (L) szerint megkapjuk, ha az Arc sin Z sorában minden tagot ellenkezőre változtatva, azt $\frac{\pi}{2}$-hez hozzáadjuk.

Arcustangens.

Az arcus tg. függvény módot fog nyujtani a Ludolfi szám igen jól convergáló sorral való előállítására. Ha

$$tg\, z = Z$$

akkor

$$z = \text{arc}\, tg\, Z$$

Ezt a függvényt szintén a logarithmusra vihetjük vissza. Ugyanis

$$tg\, z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{2}{2i} \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{e^{zi} + e^{-zi}} = \frac{1}{i} \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{e^{zi} + e^{-zi}} = Z$$

tehát

$$\frac{e^{zi} - e^{-zi}}{e^{zi} + e^{-zi}} = iZ$$

felsőt és alsót szorozva e^{zi}-vel

$$\frac{e^{2zi} - 1}{e^{2zi} + 1} = iZ$$

s ezen elsőfoku egyenletből

$$e^{2zi} = \frac{1 + Zi}{1 - Zi}$$

tehát

$$\text{arc}\, tg\, Z = \frac{1}{2i} \log \frac{1 + Zi}{1 - Zi}$$

Ebből az előállításból kiolvashatók az arc tg Z sing. helyei, ezek a log. megetti függvény o ill. polus helyei tehát a felső és alsó 0 helyei.

$$1 + Zi = 0 \,, \quad \text{ha} \quad Z = -\frac{1}{i} = i$$

$$1 - Zi = 0 \,, \quad \text{ha} \quad Z = \frac{1}{i} = -i$$

Tehát az arc tg sing. helyei i és $-i$, más singuláris hely nincsen. A ∞ itt közönséges hely, mert ott az arc tg véges értékü. Ugyanis

$$\lim_{Z} \frac{1 + Zi}{1 - Zi} = \lim_{Z} \frac{\frac{1}{Z} + i}{\frac{1}{Z} - i} = -1$$

és így

$$\lim_{Z=\infty} \text{arctg}\, Z = \frac{1}{2i} \log(-1) = (2K+1)\frac{\pi}{2}$$

Tehát a végtelen távoli helyen az arctg véges értékü. Az arctg is végtelen sok értékü, s ezen értékek csak egy csoportot alkotnak. A főértéket kapjuk, ha a log. főértékét veszzük, tehát

$$\operatorname{Arctg} z = \frac{1}{2i} \operatorname{Log} \frac{1+zi}{1-zi}$$

Ha $\operatorname{Log}\frac{1+zi}{1-zi} = a+bi$, akkor tudjuk, hogy $-\pi < b < \pi$ s mivel

$$\operatorname{Arctg} = \frac{a}{2i} + \frac{bi}{2i} = \frac{b}{2} - \frac{ai}{2} = c+di$$

mondhatjuk, hogy az arctg főértékének reális része fekszik $\frac{\pi}{2}$ és $-\frac{\pi}{2}$ között, azaz $-\frac{\pi}{2} < c < \frac{\pi}{2}$, mert hiszen $c = \frac{b}{2}$. S miután a log. összes értékeit megkapjuk $2k\pi i$ hozzáadásával, ha ezt $2i$-vel osztjuk, kapjuk hogy

$$\underline{\operatorname{arctg} z = \operatorname{Arctg} z + k\pi}$$

Ha $z = -z_1$

$$\operatorname{arctg}(-z) = \frac{1}{2i}\log\frac{1-zi}{1+zi}$$ s mivel továbbá

$$\underline{\operatorname{arctg}(z) = \frac{1}{2i}\log\frac{1+zi}{1-zi}},$$ lesz

$$\operatorname{arctg}(-z) + \operatorname{arctg}(z) = \frac{1}{2i}\log(1) = k\pi$$ tehát

$$\operatorname{arctg}(-z) = -\operatorname{arctg}(z) + k\pi.$$ de mivel $k\pi$ periodus,

ezt el is hagyhatjuk, s így kapjuk, hogy

$$\operatorname{arctg}(-z) = -\operatorname{arctg}(z)$$

a mi azt jelenti, hogy $\operatorname{arctg}(-z)$ értékei között előjön $-\operatorname{arctg}(z)$ is; tehát az arctg páratlan függvény. Itt is kimutathatjuk, hogy két arctgnst össze lehet vonni eggyé. Ugyanis

$$\operatorname{arctg} z_1 + \operatorname{arctg} z_2 = \frac{1}{2i}\left(\log\frac{1+z_1 i}{1-z_1 i} + \log\frac{1+z_2 i}{1-z_2 i}\right) =$$

$$= \frac{1}{2i}\log\frac{1-z_1 z_2 + (z_1+z_2)i}{1-z_1 z_2 - (z_1+z_2)i}$$

$$= \frac{1}{2i}\log\frac{1+\frac{z_1+z_2}{1-z_1 z_2}\cdot i}{1-\frac{z_1+z_2}{1-z_1 z_2}\cdot i}$$

s ha az i-vel szorzott részt z-vel jelöljük, akkor ez nem egyébb mint arctg$z$ ugyhogy

$$\underline{\operatorname{arctg} z_1 + \operatorname{arctg} z_2 = \operatorname{arctg}\frac{z_1+z_2}{1-z_1 z_2}} \qquad (1)$$

adja két arctg összegezési formuláját. Ha $z_1 = z_2 = z$ akkor

$$\underline{2\operatorname{arctg} z = \operatorname{arctg}\frac{2z}{1-z^2}} \qquad (2)$$

és ha az eredetiben $z_2 = -z_2$, akkor lévén $\operatorname{arctg}(-z_2) = -\operatorname{arctg}(z_2)$, kapjuk hogy

$$\underline{\operatorname{arctg} z_1 - \operatorname{arctg} z_2 = \operatorname{arctg}\frac{z_1-z_2}{1+z_1 z_2}} \qquad (3).$$

Ezek az arctgre vonatkozó legfontosabb formulák.

Lássuk most a sorbabontását. Sing. pont csak a $+i$ és $-i$, legcélszerűbb lesz 0 körül sorbabontani, a mely esetben a convergentia kör sugara 1, mert

Harkay István Harkay

a sing. helyig terjed. Láttuk, hogy

$$\mathrm{Log}\frac{1+h}{1-h} = 2\left(h+\frac{h^3}{3}+\frac{h^5}{5}+\frac{h^7}{7}+\cdots\cdots\right)$$

s ha most $h = Zi$. $\mathrm{Log}\frac{1+Zi}{1-Zi} = 2i\left(Z-\frac{Z^3}{3}+\frac{Z^5}{5}-\frac{Z^7}{7}+\cdots\right)$ és osztva $2i$-vel, kapjuk

$$\mathrm{Arctg}\,Z = Z-\frac{Z^3}{3}+\frac{Z^5}{5}-\frac{Z^7}{7}+\cdots\cdots,$$

s ez a sor convergens, ha $|Z|<1$, sőt akkor is convergens, ha $Z=1$, de akkor csak feltételesen, mert $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\cdots$ csak feltételesen convergens. Ez a sor adja tehát $\mathrm{Arctg}(1)$-t. De

$$\mathrm{Arctg}(1) = \frac{1}{2i}\mathrm{Log}\frac{1+i}{1-i} \quad \text{s mivel } \frac{1+i}{1-i} = \frac{1+2i-1}{2} = i, \text{ azért}$$

$$\mathrm{Arctg}(1) = \frac{1}{2i}\mathrm{Log}(i) = \frac{\pi}{4},$$ kapjuk $\frac{\pi}{4}$ számára a következő sort, mely Leibnitztől származik

$$\frac{\pi}{4} = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\cdots\cdots \qquad \mathrm{I}$$

melynek azonban semmi practicus haszna nincsen, mert, miután ilyen soroknál a hiba mértéke az eggyel kisebb tag, ha 3 tizedesnyi pontosságot akarunk, tehát $\frac{1}{1000}$-ig, 500 tagot kell summázni. De vannak az arctg. számára sokkal jobban convergáló sorok. Hogy ezekhez jussunk előbb még egy tételt lássunk. Deriváljuk az Arctg-t

$$(\mathrm{Arctg}\,Z)' = 1-Z^2+Z^4-Z^6+\cdots\cdots\cdots = \frac{1}{1+Z^2}$$

ez a derivált Z reális értékei mellett állandóan positiv, a mi a mint tudjuk, azt jelenti, hogy a függvény értéke Z-vel együtt nő; s mivel

$Z=0$ mellett $\mathrm{Arctg}\,0=0$

$Z=1$ " $\mathrm{Arctg}(1)=\frac{\pi}{4}$

látható, hogy ha Z a 0-tól 1-ig nő, a függvény 0-tól $\frac{\pi}{4}$-ig nő. Tehát 0 és 1 között fekvő értékekre nézve $\mathrm{Arctg}\,Z < \frac{\pi}{4}$. Ha most Z_1 és Z_2 két pos. valódi tört s ezekhez a függvény főértékét veszem, mindegyik kisebb lesz mint $\frac{\pi}{4}$, tehát összegük kisebb mint $\frac{\pi}{2}$, vagyis más szóval, ha az (1) alatti összegformulában ezt a két Z értéket helyettesítjük, az összeg is főértéket ad.

S ha most Z_1 és Z_2-t úgy választjuk, hogy

(1) $\frac{Z_1+Z_2}{1-Z_1Z_2} = 1$ legyen, akkor $\mathrm{Arctg}\,Z_1 + \mathrm{Arctg}\,Z_2 = \mathrm{Arctg}(1) = \frac{\pi}{4}$ lesz

de (1)-ből $Z_2 = \frac{1-Z_1}{1+Z_1}$ s így Z_1-nek tetszésszerinti törtértéket adva, ezzel Z_2 is meg lesz határozva 1.)nek megfelelően. Vegyük pl $Z_1=\frac{1}{2}$, akkor $Z_2=\frac{1}{3}$ s így $\mathrm{Arctg}(\frac{1}{2}) + \mathrm{Arctg}(\frac{1}{3}) = \frac{\pi}{4}$, úgy hogy

II. $\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3\cdot 2^3} + \frac{1}{5\cdot 2^5} + \cdots\cdots + \frac{1}{3} - \frac{1}{3\cdot 3^3} + \frac{1}{5\cdot 3^5} - \frac{1}{7\cdot 3^7} + \cdots\cdots$

De még jobban convergáló sort kapunk, ha kiindulunk $Arctg(\frac{1}{5})$-ből

$$Arctg\left(\tfrac{1}{5}\right) < \frac{\pi}{4}$$

és így

$$2\,Arctg\left(\tfrac{1}{5}\right) < \frac{\pi}{2}$$

tehát főérték, s ha alkalmazzuk a (2) alatti formulát, akkor

$$2\,Arctg\left(\tfrac{1}{5}\right) = Arctg\,\frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{25}} = Arctg\left(\frac{10}{24}\right) = Arctg\left(\frac{5}{12}\right)$$

azaz

$$2\,Arctg\left(\tfrac{1}{5}\right) = Arctg\left(\tfrac{5}{12}\right)$$

erre még egyszer alkalmazzuk (2)-öt

$$4\,Arctg\left(\tfrac{1}{5}\right) = 2\,Arctg\left(\tfrac{5}{12}\right) = Arctg\,\frac{\frac{10}{12}}{1-\frac{25}{144}} = Arctg\,\frac{120}{119}$$

azaz

$$4\,Arctg\left(\tfrac{1}{5}\right) = Arctg\,\frac{120}{119} > \frac{\pi}{4}$$

tehát már túl van $\frac{\pi}{4}$-n, ki is számíthatjuk, hogy mennyivel, ugyanis (3) szerint

$$Arctg\,\frac{120}{119} - Arctg\,1 = Arctg\,\frac{\frac{120}{119}-1}{1+\frac{120}{119}} = Arctg\,\frac{1}{239}$$

s mivel $Arctg\,1 = \frac{\pi}{4}$, lesz ebből az egyenletből

$$\frac{\pi}{4} = 4\,Arctg\left(\tfrac{1}{5}\right) - Arctg\left(\tfrac{1}{239}\right)$$

$$\pi = 16\,Arctg\left(\tfrac{1}{5}\right) - 4\,Arctg\left(\tfrac{1}{239}\right)$$

ezt sorbabontva

$$\pi = 16\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3\cdot 5^3} + \frac{1}{5\cdot 5^5} - \frac{1}{7\cdot 5^7} + \cdots\right) - 4\left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3\cdot 239^3} + \cdots\right)$$

Ez a π-nek egy igen jó convergáló előállítása. Lássuk, hány tagot kell summázni mindegyik zárjelből, hogy a hiba kisebb legyen, mint $\frac{1}{10^6}$. Az elsőből elég 4-et, a másodikból 1-et summázni, tehát összesen 5 tagot, mert ezek váltakozó előjelű és fogyó sorok lévén, a hiba mértékének vehető a következő tag. Az első zárjelben az 5-dik tag

$$\frac{16}{9\cdot 5^9} = \frac{16\cdot 2^9}{9\cdot 10^9} = \frac{8\cdot 2^{10}}{9\cdot 10^9} = \underbrace{\frac{8}{9}(1024)}_{<1000}\cdot\frac{1}{10^9} < \frac{10^3}{10^9} = \frac{1}{10^6}$$

5-dik tag már kisebb mint $\frac{1}{10^6}$. A második zárjelből elegendő egy tag, mert már $\frac{4}{3\cdot 239^3} < \frac{4}{3\cdot 200^3} = \frac{4}{3\cdot 8\cdot 10^6} = \frac{1}{6\cdot 10^6}$, tehát a második tag már kisebb mint $\frac{1}{10^6}$.

$$\pi = 3{\cdot}14159265358979323846264338327\cdots\cdots$$

Arcuscotangens.

Ez a függvény a tangenssel való kapcsolata folytán igen egyszerűen tárgyalható. Ha

$$cotg\,z = Z$$

$$z = arc\,cotg\,Z$$

Az exponentialis függvénnyel való összefüggés alapján

$$\frac{e^{zi}+e^{-zi}}{e^{zi}-e^{-zi}} = \frac{Z}{i}$$

$$\frac{e^{2zi}+1}{e^{2zi}-1} = \frac{Z}{i} \quad \text{ebből}$$

$$e^{2zi} = \frac{Z+i}{Z-i}$$

$$2zi = \log\frac{Z+i}{Z-i}$$

$$z = \operatorname{arccotg} Z = \frac{1}{2i}\log\frac{Z+i}{Z-i}$$ és a log. mögött felsőt és alsót

osztva Z-vel
$$= \frac{1}{2i}\log\frac{1+\frac{1}{Z}i}{1-\frac{1}{Z}i} = \operatorname{arctg}\frac{1}{Z}$$

tehát
$$\operatorname{arc\,cotg} Z = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{Z}\right)$$

ép így
$$\operatorname{Arc\,cotg} Z = \operatorname{Arctg}\left(\frac{1}{Z}\right)$$

Ezen összefüggés alapján a két függvény egyszerre tárgyalható.

Ezzel befejeztük a trigonometricus és cyclometricus függvények tárgyalását.

Transcendens egész függvények szorzatalakban való előállítása.

Láttuk, hogy minden egész rationális függvényt szorzatalakra lehet hozni, a mennyiben minden α nullapont egy $(z-\alpha)$ lin. tényezőt választ le a függvényből, ugyhogy az n-ed fokú eg. rat. függvény előállítható, mint n linearis tényező szorzata:

$$f(z) = a_n(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots\cdots(z-\alpha_n)$$

Kérdés mostan, érvényben marad-e ez a tétel a transcendens egész függvényeknél, a melyeknél foka tehát minden határon túl nő! Itt két nehézséggel állunk szemben. Az első az, hogy nem minden trans. eg. függvénynek van 0 pontja. Így pl. az exponentialis függvénynek e^z a végesben nincsen 0 pontja, csak a ∞ távoli hely 0 pont, a mennyiben $\lim\limits_{z=-\infty} e^z = 0$ és így nem is lehet ezt a függvényt primfactorokra bontani. Ugyanez áll az ily alakú függvényre is, $e^{f(z)}$, a hol $f(z)$ vagy rat. vagy trans. egész függvény; ennek sincs a végesben 0 pontja, csak ott, a hol $f(z) = -\infty$, a mi véges értékű z mellett nem következik be. Ha az $e^{f(z)}$ transcendens egész függvény, mert hiszen,

$$e^{f(z)} = 1 + f(z) + \frac{f(z)^2}{2!} + \frac{f(z)^3}{3!} + \cdots\cdots$$

trans. eg. függvény lévén, egyenletesen convergens és tagjai is egyenletesen

egész hatványai
convergens függvények s így szabad azt egyetlen egy, z pos. egész számszerint haladó hatványsorrá összevonni, a mely convergens az egész sikon és így transc. egész függvényt értelmez. Ezzel megis kaptuk az összes transc. egész függvényeket, melyeknek nincsen végesben 0 pontjuk. Mert tegyük fel, hogy $F(z)$ egy ily transc. egész függvény, melynek a végesben nincsen nullapontja s vegyük a $f(z) = \log F(z)$ függvényt; ez könnyen belátható, transc. vagy rat. egész függvény, mert végesben nincsen sing. pontja, mivel véges z értékek mellett sem $F(z)=0$, sem $F(z)=\infty$ nem lehet és így

$$f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots\cdots$$

ha ez véges, akkor $f(z)$ rat. egész függvény, melynek a végesben nincsen 0 pontja, ily alakra hozható $e^{f(z)}$, a hol $f(z)$ transc. vagy rat. egész függvény.

A másik nehézség az, hogy vannak oly függvények, melyeknek végtelen sok 0 pontjuk. Ugyan itt áll az is, a mi a rat. egész függvénynél, hogy minden 0 pont egy-egy primtényezőt választ le; ha pl. $f(z)$ egy transc. egész függvény

azaz $\qquad f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+a_3z^3+\cdots\cdots\cdots a_nz^n+\cdots\cdots$

és α, ennek 0 pontja, akkor

$$0=a_0+a_1\alpha_1+a_2\alpha_1^2+\cdots\cdots+a_n\alpha_1^n+\cdots\cdots$$

tehát
$$f(z)=a_1(z-\alpha_1)+a_2(z^2-\alpha_1^2)+\cdots\cdots+a_n(z^n-\alpha_1^n)+\cdots\cdots$$
$$=(z-a_1)\left[a_1+a_2(z+\alpha_1)+\cdots\cdots+a_n(z^{n-1}+z^{n-2}\alpha_1+\cdots\cdots+\alpha_1^{n-1})+\cdots\right]$$

ha a zárjeles sort, mely szintén transc. egész függvény, $f_1(z)$-vel jelöljük, akkor

$$f(z)=(z-\alpha_1)f_1(z)$$

ha most $f_1(z)$-nek is van 0 pontja α_2, akkor ez is leválaszt $f(z)$-ből egy $(z-\alpha_2)$ tényezőt, úgyhogy $f(z)=(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)f_2(z)$ stb.

ha $f(z)$-nek csak véges számú 0 pontja van, akkor

$$f(z)=(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)(z-\alpha_3)\cdots\cdots(z-\alpha_k)f_k(z)$$

a hol $f_k(z)$-nek, ezen transc. egész függvénynek már nincsen véges 0 pontja, és így $\qquad f_k(z) = e^{g(z)}$ írható, úgyhogy véges 0 pontok esetén a transc. egész függvény ily alakra hozható:

$$f(z)=(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots\cdots(z-\alpha_k)\cdot e^{g(z)}$$

De vannak analyt. függvények, melyeknek végtelen sok 0 pontjuk van, s ezeket már nem lehet ilyen primfactorokra szétbontani. Így pl. a sinus függvény 0 pontjai a következő sorozattal vannak megadva

$$0 \quad \pm\pi \quad \pm 2\pi \quad \pm 3\pi \quad \cdots\cdots \quad \pm n\pi \quad \cdots\cdots$$

ezek mind egyszerü o pontok, mert a $\sin' z = \cos z$-nek ezek már nem o pontjai. Már most alkossuk meg az egyes o pontokhoz tartozó primfactorokat. Itt nem a $(z-\alpha)$ alakot fogjuk használni, hanem a $z-\alpha = -\alpha\left(1-\frac{z}{\alpha}\right)$ alakot s ebből $\left(1-\frac{z}{\alpha}\right)$-t fogjuk primfactornak tekinteni, tehát olyan alakban mint az a végtelen szorzatoknál használatos. S most alkossuk meg a sinus o pontjaihoz tartozó primfactorokat:

$$0 \quad \pi \quad 2\pi \quad \cdots\cdots \quad n\pi \quad \cdots\cdots \text{-hez tartozik a}$$

$$z \quad 1-\frac{z}{\pi} \quad 1-\frac{z}{2\pi} \quad \cdots\cdots \quad 1-\frac{z}{n\pi} \quad \cdots$$

$$0 \quad -\pi \quad -2\pi \quad \cdots\cdots \quad -n\pi \quad \cdots \text{-hez tartozik a}$$

$$z \quad 1+\frac{z}{\pi} \quad 1+\frac{z}{2\pi} \quad \cdots\cdots \quad 1+\frac{z}{n\pi} \quad \cdots \text{ primfactor.}$$

Ezek a primfactorok egy végtelen szorzatot alkotnak, a mely csak akkor lesz feltétlen convergens, ha az additiv tagok abs. értékeiből alkotott sor convergens ez azonban itt nem teljesül, mert $2\left(\left|\frac{z}{\pi}\right| + \left|\frac{z}{2\pi}\right| + \cdots + \left|\frac{z}{n\pi}\right| + \cdots\right)$ abs. tagok sora divergens, mert hiszen $= 2\frac{|z|}{\pi}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\right)$ és így a sinus végtelen sok o pontjaihoz tartozó primfactorok nem adnak convergens szorzatot és ezért nem is szabad a sinus-t ily primfactorokra felbontani. Ezen a nehézségen azzal segítünk, hogy behozzuk az úgy nevezett primfüggvényeket. Primfüggvény alatt értünk egy oly transc. egész függvényt, melynek vagy egyáltalában nincsen, vagy csak egyetlen egy nullapontja van. Ha nincsen a pr. függvénynek o pontja, alakja: $e^{f(z)}$, ha o a nullapontja, alakja: $z \cdot e^{f(z)}$, s végre ha α a nullapont, akkor alakja $\left(1-\frac{z}{\alpha}\right)e^{f(z)}$ ez a legáltalánosabb alak, mely csak egy helyen válik o-á ki $z=\alpha$ mellett. Behozva így a primfüggvény fogalmát, kimondhatjuk a Weierstrass féle tételt, mely szerint minden transcendens egész függvény elő lehet állítani mint primfüggvények szorzatát. E tétel tárgyalása fogja képezni feladatunkat.

Véges számú o pont esetén már láttuk a tétel helyességét, amennyiben a függvényt előállítottuk mint véges számú primtényezőnek és egy o ponttal nem bíró primfüggvénynek $e^{f(z)}$ szorzatát. Tehát csak arra az esetre kell kimutatni a tételt, ha végtelen sok o pont van. A primfüggvénynek általános alakja $\left(1-\frac{z}{\alpha}\right)e^{f(z)}$ nem egészen határozott függvény, mert $f(z)$ lehet még rat. vagy transc. egész függvény, s éppen ennek helyes

megválasztásától függ a prímfüggvényekből alkotott végtelen szorzat
convergentiája. Célszerű lesz tehát az $f(z)$ függvény specializálásával
a prímfüggvényeknek egy sorozatát összeállítani, melyből minden eset-
ben a szorzat convergentiájához szükséges alakot fogjuk kiválasztani.
Először a $+1$ ponthoz tartozó prímfüggvényeket vegyük, a melyek tehát a
$+1$-ben eltűnnek. A legegyszerűbb ily prímfüggvény

0.) $1-z$, kevésbbé egyszerű s rövidített jelölést használva

1.) $(1-z)e^{z} = E_1(z)$

2.) $(1-z)e^{z+\frac{z^2}{2}} = E_2(z)$

3.) $(1-z)e^{z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}} = E_3(z)$

. . . .

k.) $(1-z)e^{z+\frac{z^2}{2}+\dots\frac{z^k}{k}} = E_k(z)$

De adhatunk ezen prímfüggvényeknek más alakot is. Ugyanis tudjuk, hogy

$$\log(1-z) = -z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - \dots = -\sum_1^{\infty}\frac{1}{\nu}z^{\nu}$$

és így $1-z = e^{\log(1-z)} = e^{-\sum_1^{\infty}\frac{1}{\nu}z^{\nu}}$

De e két oldal különböző, a mennyiben $1-z$ az egész számsíkon bír értelem-
mel, míg a jobboldali kitevő csak akkor convergens, ha $|z|<1$, s így a jobboldal
is csak $|z|<1$ mellett bír értelemmel. Ha most a prímfüggvényekbe bevezetjük
$(1-z)$-nek ezen alakját, lesz

$$E_0(z) = 1-z = e^{-\sum_1^{\infty}\frac{z^{\nu}}{\nu}}$$

$$E_1(z) = (1-z)e^{z} = e^{-\sum_2^{\infty}\frac{z^{\nu}}{\nu}}$$

$$E_2(z) = (1-z)e^{z+\frac{z^2}{2}} = e^{-\sum_3^{\infty}\frac{z^{\nu}}{\nu}}$$

. . . .

$$E_k(z) = (1-z)e^{z+\frac{z^2}{2}+\dots+\frac{z^k}{k}} = e^{-\sum_{k+1}^{\infty}\frac{z^{\nu}}{\nu}}$$

Tehát minden $(+1)$-hez tartozó prímfüggvényt két alakra hozhatunk, az egyik
convergens az egész számsíkon, a másik csak $|z|<1$ mellett. Ezekből könnyen
levezethetjük az α nullaponthoz tartozó prímfactorokat, ha egyszerűen
z helyébe $\frac{z}{\alpha}$-t helyettesítünk, úgyhogy

$$E_0\left(\frac{z}{\alpha}\right) = 1-\frac{z}{\alpha} = e^{-\sum_1^{\infty}\frac{1}{\nu}\left(\frac{z}{\alpha}\right)^{\nu}}$$

$$E_1\left(\frac{z}{\alpha}\right) = \left(1-\frac{z}{\alpha}\right)e^{\frac{z}{\alpha}} = e^{-\sum_2^{\infty}\frac{1}{\nu}\left(\frac{z}{\alpha}\right)^{\nu}}$$

$$E_2\left(\frac{z}{\alpha}\right) = \left(1-\frac{z}{\alpha}\right)e^{\frac{z}{\alpha}+\frac{z^2}{2\alpha^2}} = e^{-\sum_3^{\infty}\frac{1}{\nu}\left(\frac{z}{\alpha}\right)^{\nu}}$$

. . . .

$$E_k\left(\frac{z}{\alpha}\right) = \left(1-\frac{z}{\alpha}\right)e^{\sum_1^{k}\frac{1}{\nu}\left(\frac{z}{\alpha}\right)^{\nu}} = e^{-\sum_{k+1}^{\infty}\frac{1}{\nu}\left(\frac{z}{\alpha}\right)^{\nu}}$$

Tehát az α nullaponthoz tartozó prímfüggvényeknek is két alakjuk van, az
első az egész számsíkon, a másik csak $|z|<|\alpha|$, azaz az α sugarú körön belül

convergens. Ezekből a primfüggvényekből fogunk az alak helyes megválasztásával conv. végtelen szorzatot alkotni. Mindenekelőtt látható, hogy ha egy transc. egész függvénynek végtelen sok 0 pontja van, ezek körül végtelen sok végtelen messze kell legyen, mert ha végesben volna végtelen sok, ezeknek torlodási helye singularis helye volna a függvényre nézve. Mert hisz ha $f(z)$-nek végtelen sok 0 pontja van, akkor $\frac{1}{f(z)}$-nek végtelen sok polusa van a végesben, melyeknek torlodási helye lényegesen sing. hely $\frac{1}{f(z)}$-re, tehát $f(z)$-re is, már pedig $f(z)$-nek, mint transc. egész függvénynek nincsen végesben lény. sing. helye és így a végtelen sok 0 pont szükségképpen a végtelenbe húzódik, vagyis ha a 0 pontokat nagyság szerint rendezzük sorozatba, akkor $\alpha_1\, \alpha_2 \dots \alpha_n \dots \lim \alpha_n = \infty$
Ha valamely 0 pont többszörös ezt annyiszor vesszük a sorozatba, ahányszoros 0 pont. A 0 nullapontot nem vesszük a sorozatba, mert ha 0 k-szoros nullapont, egyszerűen z^k-t írunk a szorzat elé, tehát feltesszük, hogy az α-k mind különbözőek 0-tól. És most ki fogjuk mutatni a következő tételt, mely alapját képezi a már említett Weierstrass féle tételnek, ha tetszésszerint megadunk végtelen sok számot, melyeknek torlodási helye a végtelenben van,

azaz $\qquad \alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3 \dots\dots \alpha_n \dots \lim \alpha_n = \infty \qquad$ akkor mindig meg tudjuk szerkeszteni a primfüggvények helyes megválasztásával azt a transc. egész függvényt, melynek épp ezek a 0 pontjai. E végett a primfüggvények sorából minden α-hoz választunk egy-egy primfüggvényt, tehát az

$\alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3 \dots\dots \alpha_n \dots$ nullaponthoz a

$\lambda_1\, \lambda_2\, \lambda_3 \dots\dots \lambda_n \dots$ edik primfüggvényt, akkor

ezek egy $\quad E_{\lambda_1}\left(\frac{z}{\alpha_1}\right) \cdot E_{\lambda_2}\left(\frac{z}{\alpha_2}\right) \dots\dots E_{\lambda_n}\left(\frac{z}{\alpha_n}\right) \dots \quad$ végtelen szorzatot alkotnak s ha sikerül kimutatni, hogy a λ helyes megválasztása mellett ez a szorzat feltétlenül és szorosabb értelemben véve convergens, akkor ez lesz a keresett függvény.

Lássuk tehát mikor lesz ez a szorzat szoros értelemben és feltétlenül convergens? Válasszunk egy tetszésszerinti N pos. számot, s vizsgáljuk mikor lesz a mi végtelen szorzatunk $|z| < N$ értékek mellett convergens. Mivel $\lim \alpha_n = \infty$, csak véges α lesz kisebb mint N, a többi mind nagyobb, tegyük fel, hogy még $\alpha_n < N$, de már $\alpha_{n+1} > N$, akkor ennek megfelelőleg a végtelen szorzatot is két részre fogjuk osztani

$$\prod_{\kappa=1}^{n} E_{\lambda_\kappa}\left(\frac{z}{\alpha_\kappa}\right) \cdot \prod_{\kappa=n+1}^{\infty} E_{\lambda_\kappa}\left(\frac{z}{\alpha_\kappa}\right)$$

az első szorzat véges és így csak a második szorzat convergentiáját kell meg-

vizsgálnunk, tehát a $\prod_{\kappa=n+1}^{\infty} E_{\lambda_\kappa}\left(\frac{z}{\alpha_\kappa}\right)$ szorzat convergentiáját oly z-k,
melyek $|z|<N$. Miután ezen szorzatban az α-k mind $>N$, azért $|\frac{z}{\alpha}|<1$, tehát
szabad a szorzatban szereplő primfüggvényekre a második alakot használ-
ni, úgyhogy

$$\prod_{\kappa=n+1}^{\infty} E_{\lambda_\kappa}\left(\frac{z}{\alpha_\kappa}\right) = \prod_{\kappa=n+1}^{\infty} e^{-\sum_{\nu=\lambda_\kappa+1}^{\infty}\frac{1}{\nu}\left(\frac{z}{\alpha_\kappa}\right)^\nu}$$

ezen szorzat minden egyes tagja exponentialis függvény s az exponensek össze-
gezésével ezt egy exp. függvénnyé vonhatjuk össze tehát

$$= e^{-\sum_{\kappa=n+1}^{\infty}\sum_{\nu=\lambda_\kappa+1}^{\infty}\frac{1}{\nu}\left(\frac{z}{\alpha_\kappa}\right)^\nu}$$

a mennyiben a szorzatra vonatkozó indexet a második összegezési jel alá írjuk.
A mi feladatunk tehát arra reducálódott, kimutatni, hogy mindig lehet
a λ-kat úgy választani, hogy az exponensben álló kettős összeg feltétlenül con-
vergens legyen, mert hisz akkor a végtelen szorzat is feltétlenül convergens lesz.
A ΣΣ feltétlenül convergens lesz, ha tagok abs. értékeinek sora convergens; de

$$\sum_{\kappa=n+1}^{\infty}\sum_{\nu=\lambda_{\kappa+1}}^{\infty}\frac{1}{\nu}\left|\frac{z}{\alpha_\kappa}\right|^\nu < \sum_{\kappa=n+1}^{\infty}\sum_{\nu=\lambda_{\kappa+1}}^{\infty}\left|\frac{z}{\alpha_\kappa}\right|^\nu$$

a belső Σ-ban κ állandó, csak ν változik $\lambda_{\kappa+1}$-től ∞-ig, explicite

$$\sum_{\nu=\lambda_{\kappa+1}}^{\infty}\left|\frac{z}{\alpha_\kappa}\right|^\nu = \left|\frac{z}{\alpha_\kappa}\right|^{\lambda_{\kappa+1}} + \left|\frac{z}{\alpha_\kappa}\right|^{\lambda_{\kappa+2}} + \left|\frac{z}{\alpha_\kappa}\right|^{\lambda_{\kappa+3}} + \dots = \left|\frac{z}{\alpha_\kappa}\right|^{\lambda_{\kappa+1}}\left(1+\left|\frac{z}{\alpha_\kappa}\right|+\left|\frac{z}{\alpha_\kappa}\right|^2+\dots\right)$$ s mivel $\left|\frac{z}{\alpha_\kappa}\right|<1$

$$= \frac{\left|\frac{z}{\alpha_\kappa}\right|^{\lambda_{\kappa+1}}}{1-\left|\frac{z}{\alpha_\kappa}\right|}$$ és így $$\sum_{\kappa=n+1}^{\infty}\sum_{\nu=\lambda_{\kappa+1}}^{\infty}\frac{1}{\nu}\left|\frac{z}{\alpha_\kappa}\right|^\nu < \sum_{\kappa=n+1}^{\infty}\frac{\left|\frac{z}{\alpha_\kappa}\right|^{\lambda_{\kappa+1}}}{1-\left|\frac{z}{\alpha_\kappa}\right|}$$

ezen utóbbi sor általános tagja következő sor általános tagjával egyenlőrangú
$\sum_{\kappa=n+1}^{\infty}\left|\frac{z}{\alpha_\kappa}\right|^{\lambda_{\kappa+1}}$, mert hisz ezen hányadosuk limese $\lim \frac{1}{1-\left|\frac{z}{\alpha_\kappa}\right|}=1$. Ha tehát a λ-kat
úgy választjuk – ezt pedig lehet – hogy $\sum_{\kappa=n+1}^{\infty}\left|\frac{z}{\alpha_\kappa}\right|^{\lambda_{\kappa+1}}$ sor convergens legyen, akkor a
vele egyenlő rangú sor is convergens, és így maga a végtelen szorzat is feltétle-
nül convergens lesz. Ezen utolsó sor convergentia criteriuma tehát megegye-
zik a végtelen szorzat convergentia criteriumaival a λ-t illetőleg. Ezt pl. min-
dig elérjük, ha mindegyik λ-t kisebbnek veszszük mint az indexe, azaz $\lambda_\kappa<\kappa$
pl: $\lambda_\kappa=\kappa-1$, mert akkor $\lambda_{\kappa+1}=\kappa$ és akkor $\sum_{\kappa=n+1}^{\infty}\left|\frac{z}{\alpha_\kappa}\right|^\kappa < \sum_{\kappa=n+1}^{\infty}\left|\frac{z}{\alpha_{n+1}}\right|^\kappa$, mert nagyobbítunk,
ha mindegyik α helyébe a legkisebbet t. i. α_{n+1}-et teszszük. De $\left|\frac{z}{\alpha_{n+1}}\right|<1$, úgyhogy
az utóbbi geometriai sor convergens, tehát a nálánál kisebb sor is, és így ma-
ga a végtelen szorzat is. Így választva tehát a λ-kat, a függvényekből alkotott
végtelen szorzat feltétlenül és szorosabb értelemben convergens lesz.

Gyakori eset az, hogy a nullpontok reciprokjaihoz lehet találni oly
s pos. exponenst, hogy $\sum_{\kappa=n+1}^{\infty}\left|\frac{z}{\alpha_\kappa}\right|^s$ convergens legyen. Ilyenkor minden λ-t
kisebbnek kell választani mint s-et pl. $\lambda=s-1$, mert akkor

$\sum\limits_{\kappa=n+1}^{\infty}\left|\frac{z}{\alpha_\kappa}\right|^{\lambda_\kappa+1} = |z|^s\sum\limits_{\kappa=n+1}^{\infty}\left|\frac{1}{\alpha_\kappa}\right|^s$ convergens lesz, tehát a végtelen szorzat is.
Igy pl. a sinus függvény 0 pontjai $\pm\pi \;\pm 2\pi \;\pm 3\pi \;\dots\; \pm n\pi \;\dots$ s a reciproko-kok általános tagjának abs. értéke $\frac{1}{n\pi}$ s mivel $s=2$ mellett $\frac{1}{\pi}\sum\left(\frac{1}{n}\right)^2$ convergens, azért $\lambda = s-1 = 1$ mellett vagyis mindegyik prímfüggvényre az első alakot használva, a sinust végtelen szorzat alakjában állíthatjuk elő. Tehát kimutattuk, hogy λ czélszerű megválasztásával mindig el tudjuk érni, hogy a prímfüggvényekből alkotott végtelen szorzat feltétlenül convergens legyen. Ez most be kell bizonyitani, hogy ez a szorzat a kivánt tulajdonságokkal bir. Először is nyilvánvaló, hogy a $\mathcal{E}_{\lambda_1}\left(\frac{z}{\alpha_1}\right)\cdot\mathcal{E}_{\lambda_2}\left(\frac{z}{\alpha_2}\right)\dots\mathcal{E}_{\lambda_n}\left(\frac{z}{\alpha_n}\right)\cdot e^{-\sum\limits_{\kappa=n+1}^{\infty}\sum\limits_{\nu=\lambda_\kappa+1}^{\infty}\frac{1}{\nu}\left(\frac{z}{\alpha_\kappa}\right)^\nu}$ végtelen szorzat az egész számsikon convergens, mert hiszen convergens, ha $|z|<N$, hol N tetszésszerinti nagy szám. Továbbá analyt. függvény, mert hisz minden factor analyt. függvény; az utolsóban az exponens maga is hatványsor lévén, azt össze lehet vonni egy hatványsorrá, és így az egészet egy z pos. egész hatványai szerint haladó sorrá lehet összevonni, a mely $z\neq\alpha_\kappa$ értékek mellett nem tűnik el sohasem, ha pedig z rendre $z=\alpha_1\,\alpha_2\,\dots\,\alpha_n\,\dots$; akkor az illető factorok is rendre eltűnnek, velök az egész függvény is így ezek az α-k mind 0 pontjai lesznek a végtelen szorzattal értelmezett függvénynek. Azonkivül ha valamelyik α κ-szoros 0 pont, akkor az illető prímfüggvény κ-szor jelenik meg a szorzatban és irhatunk helyébe $\left(1-\frac{z}{\alpha}\right)^{\kappa}\cdots$.

Ez Weierstrassnak főtétele. Ennek segélyével most már könnyű lesz kimutatni azt a tételt, hogy minden transc. egész függvényt elő lehet állitani mint prímfüggvények szorzatát, ha ennek a függvénynek végtelen sok nullapontja van, a melyeknek limese $\lim \alpha_n=\infty$, mert hiszen transc. eg. függvény. Legyen tehát $F(z)$ a szerkesztendő transc. egész függvény, s most az ismert módon alkossuk meg azt a végtelen szorzatot $G(z)$, melynek 0 pontjai ugyanazok, mint az $F(z)$-éi, melyek adva vannak, akkor megalkotva az $\frac{F(z)}{G(z)}$ hányadost, vizsgáljuk ennek tulajdonságait. Mind a felső, mind az alsó transc. egész függvény, tehát a végesben nincs sing. helyük, de a hányadosnak sincsen, mert $G(z)$ függvény 0 pontjai csak látszólagos singularitások, mert hiszen, ha α egyik és pedig κ-szoros nullapont ez az $F(z)$-nek is κ-szoros nullapontja lévén $\frac{F(z)}{G(z)}=\frac{A_\kappa(z-\alpha)^\kappa+A_{\kappa+1}(z-\alpha)^{\kappa+1}+\dots}{B_\kappa(z-\alpha)^\kappa+B_{\kappa+1}(z-\alpha)^{\kappa+1}+\dots}$

és osztva felsőt alsót $(z-\alpha)^{\kappa}$-val $= \dfrac{A_\kappa + A_{\kappa+1}(z-\alpha)+ \cdots\cdots}{B_\kappa + \underbrace{B_{\kappa+1}(z-\alpha)+\cdots\cdots}_{\varphi(z)}}$

$$=\left[A_\kappa + A_{\kappa+1}(z-\alpha)+\cdots\right]\left[B_\kappa+\varphi(z)\right]^{-1} = \mathfrak{P}(z|\alpha)$$

Tehát az $\frac{F(z)}{G(z)}$ függvény sorbabontható ezen α körül, mely $G(z)$-nek 0 pontja; ugyanez áll $G(z)$ valamennyi nullapontjaira, úgyhogy ez a függvény az egész számsíkon csupa közönséges helyekkel bír, mivel nincsenek 0 pontjai, ily alakra hozható $\frac{F}{G} = e^{f(z)}$, úgyhogy $F(z) = G(z)\cdot e^{f(z)}$

Tehát az $F(z)$ ismeretes nullapontjaiból még csak a $G(z)$ végtelen szorzatot tudjuk megalkotni, de ott szerepel a teljes előállításban az $e^{f(z)}$ ismeretlen függvényis, mint határozatlan factor, s ép ennek meghatározása okoz nehézséget.

Még egy tételt mutassunk ki, melyszerint ha egy egyértékű analyt. függvényről tudjuk, hogy csakis a végtelen távoli helyen van lény. singularis helye, akkor ezt mindig elő tudjuk állítani mint két transc. egész függvény hányadosát. Mert legyen $F(z)$ ez az egyértékű analyt. függvény, melynek végtelen lény. sing. helye. Mivel végesben csak polusai vannak, s pedig véges számmal $\beta_1\ \beta_2\ \beta_3\ \beta_4 \cdots\cdots \beta_\kappa$ sokszorossági szám $r_1\ r_2\ r_3\ r_4 \cdots\cdots r_\kappa$ akkor megszüntetve a polaritást

$$F(z)\cdot\underbrace{(z-\beta_1)^{r_1}\cdot(z-\beta_2)^{r_2}\cdots\cdots(z-\beta_\kappa)^{r_\kappa}}_{f(z)} = G(z)$$

már transc. egész függvény, mert végesben nincs singularitása, és így

$$F(z) = \frac{G(z)}{f(z)}$$

két transc. egész függvény hányadosa, melyek alsója rat. egész függvény. Ha a polusok száma végtelen, akkor $\beta_1\ \beta_2\ \beta_3 \cdots\cdots \beta_n \cdots$ $\lim \beta_n = \infty$ ép ezért lehet oly transc. egész függvényt, $G(z)$ szerkeszteni, melynek ezek a polusok 0 helyei, és akkor $F(z)\cdot G(z)$ szorzatnak már sehol sem lesz polusa. Mert tegyük fel, hogy valamelyik β κ-szoros 0 pontja $G(z)$-nek, akkor

$$G(z) = (z-\beta_1)^{\kappa}\cdot G_1(z)$$

a hol $G_1(z)$ transc. egész függvény, melynek β_1 már nem 0 pontja, és így

$$F\cdot G = F\cdot(z-\beta_1)^{\kappa}\cdot G_1 = \mathfrak{P}(z|\beta)$$

azaz β_1 erre a szorzatra nézve már közönséges hely és így a körül sorbabontható. Ugyanez ismétlődik a többi polusokkal. Úgyhogy ha

$$F(z)\cdot G(z) = F_1(z) \quad , \quad F(z) = \frac{F_1(z)}{G(z)}$$

azaz $F(z)$ előállitható mint két transc. egész függvény hányadosa. Ha visszatekintünk, erre vonatkozólag három tételt nyertünk:

1.) Ha egy egyértékü anal. függvénynek sehol sing helye nincsen, akkor constans.
2.) Ha egy egyértékü anal. függvénynek lény. sing. helye nincsen, akkor rat. függvény.
3.) Ha egy egyértékü anal. függvénynek a végtelen távoli helyen lény. sing hely van, akkor az a.) transcendens egész függvény, ha nincsen polusa.
b.) két transc., esetleg egy transc. és rat. egész függvény hányadosa, ha vannak polusai.

Ezen utóbbi függvények olyanoknak tekinthetők, melyek legközelebb állanak a rat. függvényekhez. Ezeket transc. egész függvényeknek nevezzük, ha nincs polusuk, és transc. tört függvényeknek, ha van polusuk. Ilyen transc. tört függvények pl. a trigonometriai tangens és cotangens, mindkettő két transc. egész függvénynek hányadosa t.i. $tg z = \frac{\sin z}{\cos z}$ és $\cot g z = \frac{\cos z}{\sin z}$, továbbá $\sec z = \frac{1}{\cos z}$ $\operatorname{cosec} z = \frac{1}{\sin z}$.

A trigonometriai függvények szorzatalakban való előállitása.

Most alkalmazzuk a Weierstrass féle tételt a trigonometriai függvények szorzatalakban való előállitására. Vegyük először a sin függvényt. És pedig következő alakjában $\sin \pi z$

Miután a sinus 0 helyei $n\pi$, azért ennek 0 pontjai $0 \quad \pm 1 \quad \pm 2 \quad \cdots \quad \pm n \cdots$ Ezek a mint már láttuk, mind egyszerü 0 pontok és miután a reciprocok összegét véve $\sum \frac{1}{n^2}$ convergens, azért a mint azt fennebb láttuk $\lambda = 1$ veendő, vagyis mindegyik 0 pontra az első pfüggvényt használhatjuk, mely szerint $\mathfrak{E}_1\left(\frac{z}{a}\right) = \left(1 - \frac{z}{a}\right)e^{\frac{z}{a}}$ s igy tekintetbe véve, hogy a 0 nullponthoz tartozó pfüggvény z, kapjuk $\sin \pi z$ számára a következő végtelen szorzatot:

$$\sin \pi z = e^{f(z)} \cdot z \cdot \prod_{n=-\infty}^{+\infty}{}' \left[\left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}}\right]$$

a $'$ jellel mutatva, hogy n értékei közül a 0 mellőzendő; erről a Π-ről tudjuk hogy feltétlenül convergens, és igy még csak $f(z)$ meghatározása van hátra. E végett vegyük az egyenlet mindkét oldalának logarithmusát

$$\log \sin \pi z = f(z) + \log z + \sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}' \left(\log(n-z) - \log n + \frac{z}{n}\right)$$

mert $1-\frac{z}{n}=\frac{n-z}{n}$, s ezt most mint összetett függvényt deriválva

$$\frac{1}{\sin\pi z}\pi\cdot\cos\pi z=\pi\,\mathrm{cotg}\,\pi z=f'(z)+\frac{1}{z}+\sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}'\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right)\qquad \text{I.}$$

s mégegy-szer deriválva

$$\frac{\pi^2}{\sin^2\pi z}=-f''(z)+\frac{1}{z^2}+\sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}'\frac{1}{(z-n)^2}\qquad \text{II.}$$

amennyiben az egyenlet mindkét oldalát megszorozzuk (-1)-el és miután $\frac{1}{z^2}$ épp az $n=0$ mellett Σ-ből hiányzó tagot pótolja, azért ezt bevéve lesz

$$\frac{\pi^2}{\sin^2\pi z}=-f''(z)+\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(z-n)^2}$$

tehát

$$f''(z)=\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(z-n)^2}-\frac{\pi^2}{\sin^2\pi z}\qquad (1)$$

ezen egyenlet segélyével ki fogjuk mutatni, hogy $f''(z)$ és ennek folytán maga $f(z)$ is constans. $f(z)$-ről annyit tudunk, hogy rationalis vagy transc. egész függvény, azaz

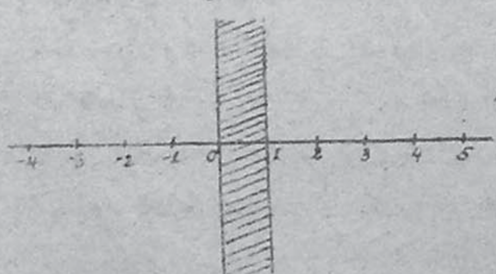
$$f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots\cdots$$

és

$$f''(z)=2a_2+2\cdot3\cdot a_3z+\cdots\cdots$$

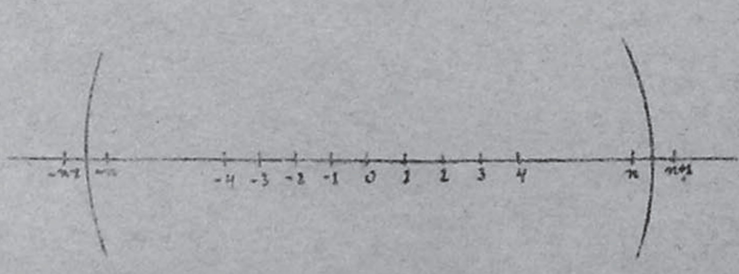
És most vizsgáljuk meg az (1)-ben levő két függvényt $\frac{\pi^2}{\sin^2\pi z}$ és $\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(z-n)^2}$-t. A $\frac{\pi^2}{\sin^2\pi z}$ értéke végtelen nagy, ha a nevező 0 és így ennek a függvénynek végtelen sok polusa van $0,\ \pm1\ \pm2,\ \dots\dots\ \pm n\dots\dots$ vagyis az összes egész számok. Másfelől kimutatható, hogy ennek a függvénynek a periodusa 1; ugyanis $\sin(\pi z+\pi)=-\sin\pi z=\sin\pi(z+1)$

és $\sin^2\pi(z+1)=\sin^2\pi z$

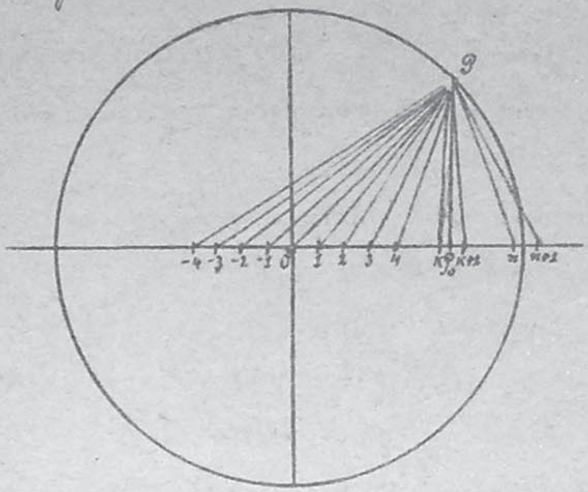


Tehát elég vizsgálni a függvényt a 0 és 1-ben emelt merőlegesek által alkotott csíkban. A Σ-ra nézve tudjuk, hogy convergens, mert a tagok abs. értékét véve $\sum\left|\frac{1}{z-n}\right|^2 (=)\ \sum\frac{1}{n^2}$ mivel hányadosuk limese 1, kizárva z egész számú értékeit, mert ezek mellett is végtelenné válik; tehát ennek is az összes egész számok polusait képezik.

Már most ha vegyünk egy igen nagysugarú kört, melynek sugara minden határon túl nő és a kör maga mindig két polus azaz két egész szám között menjen át. Ezen a végtelen nagysugarú körön vizsgálva a két függvényt ki fogjuk mutatni, hogy értékük állandóan véges marad, a miből következik, hogy különbségük, azaz $f''(z)$ is állandóan véges marad, tehát nem lehet sem rat. sem transc. egész függvény, mert



kiszenezeknél mindig tudunk írni oly nagy sugarú kört, melyen a függvény értéke nagyobb, mint bármily nagy adott mennyiség, így tehát $f''(z)$ csak const. lehet. Tehát ezt mutassuk ki. A $\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z}$ periodicus függvény lévén, az $n \ldots n+1$ között elterülő csíkban lévő köríven egyszerűen így vizsgáljuk a függvényt, hogy eltoljuk ezt a csíkot az ívvel a $0 \sim 1$ csíkba. De a sinusról tudjuk, hogy értéke a végtelenbe nő, ha z egyik főcsík mentén ∞-be nő és így $\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z}$ minden határon alúl fogy, azaz meg tudunk adni egy oly M számot, melyen állandóan alúl marad a függvény értéke, vagyis állandóan véges marad. Ugyanezt fogjuk kimutatni a $\sum_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{1}{z-n}\right|^2 = \psi(z)$ függvényről. Tehát változtassuk z-t ezen a nagy sugarú körön, legyen P ez a változó pont. Akkor $|z-n|$ jelenti a P pont távolát az összes egész számoktól. Ha most P helyett annak P_0 projectióját a reális tengelyen vesszük, akkor ezzel a távolságokat mind kisebbítettük, tehát $\psi(z)$-t nagyobbítottuk. Ez a P_0 vagy két egész szám közé, vagy egy egész számra esik. Az első esetben annál inkább nagyobbítunk, ha κ és $\kappa+1$ kivételével, melyek közé P_0 esik,



vesszük P_0 távolát a $\kappa+2$ utáni illetőleg κ előtti összes egész számoktól. Igen de P_0 távola $\kappa+2$-től nagyobb mint 1, és $P_0 \sim \kappa+3 > 2$, $P_0 \sim \kappa+4 > 3 \ldots$ és így ezen távolok helyett $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots n \ldots$ véve kisebbítjük a nevezőt, tehát nagyobbítjuk a $\psi(z)$ függvényt. Ugyanez áll P_0-nak a κ előtti számoktól vett távolaira ezek helyett is $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n \ldots$ véve nagyobbítjuk $\psi(z)$-t és miután a P_0-nak a κ és $\kappa+1$ pontok valamelyikétől vett távolsága $\leq \frac{1}{2}$, azért $\frac{1}{2}$ véve, ennek négyzete $\frac{1}{4}$ reciprokja 4 és kétszerese 8, mert κ és $(\kappa+1)$-től vett távolságot kisebbítettük, és így

$$|\psi(z)| < 2 \sum_1 \frac{1}{n^2} + 8$$

de $\sum_1 \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots < 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots = 2$, tehát $\sum < 4 + 8 = 12$

Tehát mind két függvény véges marad és így ezek különbsége $f''(z)$ nem lehet sem rat. sem transc. egész függvény, hanem const, azaz hiányzik belőle $a_3 a_4 \cdots$ s így marad $f''(z) = 2a_2$. így hogy

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} = -2a_2 + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-n)^2}$$

És most kimutatjuk, hogy $a_2 = 0$. E végett változtassuk z-t mindkét függvényben a tiszta képzetes tengelyen a végtelenbe, akkor $\lim \sin^2 \pi z = \infty$ és így $\lim \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} = 0$. Ugyanezt tegyük Σ-ban, $z = ki$, $z - n = ki - n$, $|z-n| = \sqrt{k^2+n^2}$

és így
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-n)^2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^2+k^2}$$
s ha az $n=0$-nak megfelelő $\frac{1}{k^2}$ a Σ elé visszük és a $+n$ és $-n$-hez tartozó egyenlő kifejezéseket összevonjuk, lesz
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^2+k^2} = \frac{1}{k^2} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+k^2}$$
és a Σ-t két részre osztva
$$= \frac{1}{k^2} + 2\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{k^2+n^2} + 2\sum_{k+1}^{\infty} \frac{1}{k^2+n^2}$$
és ha az első Σ-ban kihagyjuk n^2-t, akkor $\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{k^2+n^2} < \frac{1}{k^2} \cdot k = \frac{1}{k}$ és
$$\sum_{k+1}^{\infty} \frac{1}{k^2+n^2} < \sum_{k+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \dots = \frac{1}{k}$$
és így írhatjuk, hogy
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^2+k^2} < \frac{1}{k^2} + \frac{2}{k} + \frac{2}{k} = \frac{1}{k^2} + \frac{4}{k}$$
és mivel $\lim_{k=\infty} \left(\frac{1}{k^2} + \frac{4}{k}\right) = 0$,
$$\lim_{k=\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{n^2+k^2} = 0,$$
a miből (1) szerint következik, hogy $f''(z) = 0$, azaz $a_2 = 0$, és így $f(z)$ legfeljebb lineáris lehet,
$$f(z) = a_0 + a_1 z$$
$$f'(z) = a_1$$

és most kimutatjuk, hogy $a_1 = 0$. Ugyanis I Σ-ban a $+n$ és $-n$-hez tartozó tagokat páronként összevonva
$$\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{z+n} - \frac{1}{n} = \frac{2z}{z^2-n^2}$$
és így
$$\pi \operatorname{cotg} \pi z = a_1 + \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2-n^2}$$
és z helyébe $-z$ téve
$$-\pi \operatorname{cotg} \pi z = a_1 - \frac{1}{z} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2-n^2}$$
és összeadva következik, hogy
$$0 = 2a_1$$
azaz $a_1 = 0$

Tehát az $f(z)$ függvény constans, $f(z) = a_0 = C$ és ezt kell most meghatározni, azon tétel alapján, hogy $\lim_{\alpha=0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$. Mivel ugyanis $\sin \pi z = C \cdot z \cdot \prod_{-\infty}^{+\infty}{}' \left(1-\frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}}$ osztva πz-vel lesz $\frac{\sin \pi z}{\pi z} = \frac{C}{\pi} \cdot \prod_{-\infty}^{+\infty}{}' \left(1-\frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}}$ és mivel $z=0$ mellett a baloldal 1, azért a jobboldalból maradó $\frac{C}{\pi} = 1$, azaz $C = \pi$. Úgyhogy a $\sin \pi z$ számára a következő végtelen szorzatot kapjuk

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n=-\infty}^{+\infty}{}' \left(1-\frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}}, \qquad \text{I.}$$

a mely teljesen meg van határozva és feltétlenül convergens. Legczélszerűbb ezért a tagokat $+n$ és $-n$ hez tartozóan párosával összevonni
$$\left(1-\frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}} \cdot \left(1+\frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}} = 1 - \frac{z^2}{n^2}$$
és így kapjuk ezt az egyszerűbb képletet
$$\sin \pi z = \pi \cdot z \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \qquad \text{II.}$$

Ennek egy speczialis esetéből, midőn h. i. $z=\frac{1}{2}$, kapjuk Wallis képletét a π számára, ekkor ugyanis $\sin\frac{\pi}{2}=1$, tehát $1=\frac{\pi}{2}\prod_{1}^{\infty}\left(1-\frac{1^2}{4n^2}\right)$ és mivel

$1-\frac{1}{4n^2}=\frac{4n^2-1}{4n^2}=\frac{(2n+1)(2n-1)}{2n\cdot 2n}$ lesz – $\quad 1=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}\cdot\frac{3\cdot 5}{4\cdot 4}\cdot\frac{5\cdot 7}{6\cdot 6}\cdots\cdots$

tehát $\quad \frac{\pi}{2}=\frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{6\cdot 6}{5\cdot 7}\cdots\cdots$

Ez a Wallis képlete, mely Leibnitzéval legelőször találtatott π számára. –

A $\sin\pi z$ előállitásából több képletet nyerünk, melyekre a következőkben szükségünk lesz. Ugyanis osztva πz-vel és a log. véve

$$\log\frac{\sin\pi z}{\pi z}=\sum_{n=1}^{\infty}\log\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)$$

de $\log\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)=-\frac{z^2}{n^2}-\frac{1}{2}\frac{z^4}{n^4}-\frac{1}{3}\frac{z^6}{n^6}-\cdots\cdots$ és igy

$$\log\frac{\sin\pi z}{\pi z}=-z^2\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-\frac{z^4}{2}\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^4}-\cdots\cdots-\frac{z^{2k}}{k}\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}}-\cdots\cdots$$

Ugyanezt a $\log\frac{\sin\pi z}{\pi z}$-t más alakban is kaphatjuk s pedig a sinus sorából

$$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\cdots\cdots$$

s most $z=z\pi$ téve és πz-vel osztva

$$\frac{\sin\pi z}{\pi z}=1-\frac{\pi^2 z^2}{3!}+\frac{\pi^4 z^4}{5!}-\cdots\cdots=1-\varphi(z)$$

és a log. véve $\log\frac{\sin\pi z}{\pi z}=\log(1-\varphi(z))=-\varphi(z)-\frac{\varphi(z)^2}{2}-\frac{\varphi(z)^3}{3}+\cdots\cdots$

mindkét előállitás a log. főértékét adja, mert $z=0$ mellett eltünik. Miután a két kifejezés identicus, kell hogy mindkettőben z ugyanazon hatványainak coefficiense egyenlők legyenek. A $\varphi(z)$ tulajdonképpen páros függvénye a πz-nek, s ennek páros kitevőjü hatványai mellett a 2-ik előállitásban csupa rationális törtek szerepelnek, mint $\frac{1}{3!}$, $\frac{1}{5!}$ stb. és ezeknek hatványai, s igy kapjuk, hogy az előállitásban szereplő $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\cdots$ csak ezen rat. törtekben különböznek a $\pi^2, \pi^4\cdots$ -től. Ennek alapján meg lehet határozni ezen Σ-k értékeit. Igy pl. z^2 coefficiense az elsőben $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$; z^2 a másodikban csak $\varphi(z)$-ben fordul elő, a többi tagok mind magasabb hatványokat tartalmaznak, és mivel z^2 coefficiense $\varphi(z)$-ben $\frac{\pi^2}{3!}$, kapjuk, hogy

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

Ezen itt előforduló rationális törtek vezetnek az ugynevezett Bernoulli féle számokhoz.

Más képletekhez jutunk, ha az előző I alaknak log. veszük és derivalunk. Ekkor ugyanis $\log\sin\pi z=\log\pi+\log z+\sum_{-\infty}^{+\infty}\left[\log(n-z)-\log n+\frac{z}{n}\right]$ és deriv.

$$\pi\cot g\,\pi z=\frac{1}{z}+\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right) \qquad (1.)$$

$$=\frac{1}{z}+\sum_{1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2}$$

Ez nem egyéb mint a cotg. függvény partiális törtekre való bontása, a mennyi-ben $z=0,1,2,\dots$ mellett ezek a törtek végtelenné válnak. Még egyszer deriválva (1)-et

$$\frac{\pi^2}{\sin^2\pi z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2}$$

hiányjel nélkül. Itt minden pólus kétszeres, mert a második hatványon fordul elő.

Még egy végtelen szorzatot kapunk, ha $\sin \pi z$-ben $z-\alpha$ teszünk, ekkor ugyanis

$$\sin \pi(z-\alpha) = \pi(z-\alpha) \prod_{-\infty}^{+\infty}{}' \left(1-\frac{z-\alpha}{n}\right) e^{\frac{z-\alpha}{n}}$$

és $z=0$ téve

$$\sin(-\pi\alpha) = -\pi\alpha \cdot \prod_{-\infty}^{+\infty}{}' \left(1+\frac{\alpha}{n}\right) e^{-\frac{\alpha}{n}}$$

s ha most feltesszük, hogy α nem egész szám, akkor $\sin(-\pi\alpha) \neq 0$ és így oszthatjuk a felsőt az alsóval, s pedig tetszésszerinti módon, mert mindkettő feltétlenül convergens. Hatehát mindkettőt keresztül szorozzuk (-1)el, lesz

$$\frac{\sin \pi(\alpha - z)}{\sin \pi\alpha} = \left(1-\frac{z}{\alpha}\right) \prod_{-\infty}^{+\infty}{}' \frac{n+\alpha-z}{n+\alpha}\, e^{\frac{z}{n}}$$

$$= \left(1-\frac{z}{\alpha}\right) \prod_{-\infty}^{+\infty}{}' \left(1-\frac{z}{n+\alpha}\right) e^{\frac{z}{n}} \qquad (1)$$

Ezt a képletet is módosítjuk, arra törekszünk, hogy e exponense az a tag legyen, mely (1)-ből le van vonva t.i. $\frac{z}{n+\alpha}$. Ezt elérjük, ha felhasználjuk azt az összeget, mely $\pi \operatorname{cotg} \pi z$-t adja s ebben $z=-\alpha$-t teszünk és (-1)-el keresztül szorzunk, akkor

$$\pi \operatorname{cotg} \pi\alpha = \frac{1}{\alpha} + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}' \left(\frac{1}{\alpha+n} - \frac{1}{n}\right)$$

szorozva z-vel

$$\pi z \operatorname{cotg} \pi\alpha = \frac{z}{\alpha} + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}' \left(\frac{z}{\alpha+n} - \frac{z}{n}\right)$$

és most e-t felemelve az egyenlet (2) kétoldalára

$$e^{\pi z \operatorname{cotg} \pi\alpha} \cdot \frac{\sin \pi(\alpha - z)}{\sin \pi\alpha} = \left(1-\frac{z}{\alpha}\right) e^{\frac{z}{\alpha}} \prod_{-\infty}^{+\infty}{}' \left(1-\frac{z}{\alpha+n}\right) e^{\frac{z}{\alpha+n}}$$

s miután $n=0$ mellett a külső tagot kapjuk, ezt bevive lesz

$$e^{\pi z \operatorname{cotg} \pi\alpha} \cdot \frac{\sin \pi(\alpha - z)}{\sin \pi\alpha} = \prod_{-\infty}^{+\infty} \left(1-\frac{z}{\alpha+n}\right) e^{\frac{z}{\alpha+n}}$$

ez a kívánt előállítás.

Ez utóbbi formulából nyerjük a

Cosinus előállítását végtelen szorzattal.

Ha ugyanis $\alpha = \frac{1}{2}$, az egész kifejezés erre reducálódik:

$$\cos \pi z = \prod_{-\infty}^{+\infty} \left(1-\frac{2z}{2n+1}\right) e^{\frac{2z}{2n+1}} \qquad \text{I.}$$

mely egyenlet előállítja a $\cos \pi z$-t 0 pontjainak felhasználásával, ezek pedig $\pm\frac{1}{2}$ $\pm\frac{3}{2}$ $\pm\frac{5}{2}$ ....

Miután $n=0$ ugyanazt a tényezőt adja, mint $n=-1$

$n=1$ " " " " " $n=-2$

....

$n=n$ " " " " " $n=-n-1$

ezeket párosával összehasonlítjuk; ugyanis n-hez tartozik

$$\left(1-\frac{2z}{2n+1}\right) e^{\frac{2z}{2n+1}}$$

és $(-n-1)$-hez tartozik

$$\left(1+\frac{2z}{2n+1}\right)e^{-\frac{2z}{2n+1}} \quad \text{a kettő szorzata} \quad 1-\frac{4z^2}{(2n+1)^2}$$

Ugyhogy $$\cos\pi z = \prod_0^{\infty}\left(1-\frac{4z^2}{(2n+1)^2}\right) = (1-4z^2)\left(1-\frac{4z^2}{9}\right)\left(1-\frac{4z^2}{25}\right)\ldots\ldots$$

Ezen utolsó előállitásban azonban nem prímfüggvények szerepelnek, mert itt két-két nullapont van egybe vonva. A log. deriválásával ebből l. i. I-ből is ujabb formulát nyerünk, l. i. $-\pi\,\mathrm{tg}\,\pi z = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}'\left(\frac{2}{2z-(2n+1)}+\frac{2}{2n+1}\right)$ még egyszer deriválva $\frac{\pi^2}{\cos^2\pi z} = -\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{4}{[(2z-(2n+1)]^2}$ vagy az előbbi formulában a $+n$ és $-n$ hez tartozó tagokat összevonva

$$-\pi\,\mathrm{tg}\,\pi z = \sum_0^{\infty}\frac{4z}{4z^2-(2n+1)^2}$$

Különben más uton is meg kaphatjuk a $\cos\pi z$ előállitását. Ha ugyanis

$$\sin\pi z = \pi z\prod_{-\infty}^{+\infty}{}'\left(1-\frac{z}{n}\right)e^{\frac{z}{n}} \qquad z=2z \text{ tesszük}$$

$$\sin 2\pi z = 2\pi z\prod_{-\infty}^{+\infty}{}'\left(1-\frac{2z}{n}\right)e^{\frac{2z}{n}}$$

Ezt a szorzatot osszuk két részre. Az egyiket alkossák a páros a másikat a páratlan számokhoz tartozó tényezők, sterméezetes, hogy az $n=2k$-hoz tartozó szorzatban $-\infty \sim +\infty$ veendő a k, kivéve 0 és az $n=2k+1$-hez tartozó szorzatban a k, 0-t is, ugyhogy

$$\sin 2\pi z = \underbrace{2\pi z\prod_{k=-\infty}^{\infty}{}'\left(1-\frac{z}{k}\right)e^{\frac{z}{k}}}_{\sin\pi z}\cdot\prod_{k=-\infty}^{\infty}\left(1-\frac{2z}{2k+1}\right)e^{\frac{2z}{2k+1}}$$

De az első rész nem egyéb, mint $\sin\pi z$, azaz

$$\sin 2\pi z = 2\sin\pi z\prod_{-\infty}^{+\infty}\left(1-\frac{2z}{2n+1}\right)e^{\frac{2z}{2n+1}} \qquad \text{és mivel}$$

$$\sin 2\pi z = 2\sin\pi z\cdot\cos\pi z,$$

kapjuk a $\cos\pi z$ ismeretes előállitását

$$\cos\pi z = \prod_{-\infty}^{+\infty}\left(1-\frac{2z}{2n+1}\right)e^{\frac{2z}{2n+1}}$$

A transcendens tört függvények partialis törtekre való felbontása.

A rationális egész függvényeket fel tudtuk bontani prímfaktorokra, a transcendens egész függvenyeket prímfüggvényekre, tehát mindkét esetben olyan szorzókra, melyeknek csak egy nullapontjuk van. Lássuk most van e hasonló analogia a transc. tört függvényeknél, azaz fel tudjuk e bontani ezeket is, mint a rat. tört függvényeket partialis törtekre? Látni fogjuk, hogy ez lehetséges, a part. törtalakjának némi modositásával. Az erre vonatkozó Mittag-Leffler svéd mathematicustól, Weierstrass tanitványától származik. –

Transc. tört függvénynek neveztünk olyan egyértékű analytikai függvényt, $F(z)$, melynek a végtelenben lény. sing. helye van, a végesben csak polusok vannak és pedig véges vagy végtelen nagy számmal. Vegyük először azt az esetet midőn $F(z)$-nek véges számú polusai vannak

$$\beta_1\ \beta_2\ \beta_3\ \dots\ \beta_h$$

sokszorossági számok

$$\kappa_1\ \kappa_2\ \kappa_3\ \dots\ \kappa_h$$

akkor ismeretes, hogy $F(z)(z-\beta_1)^{\kappa_1}$ a β_1 helyen már nem bír polussal, tehát a körül sorbabontható

$$F(z)(z-\beta_1)^{\kappa_1} = A_0 + A_1(z-\beta_1) + \dots + A_{\kappa-1}(z-\beta_1)^{\kappa-1} + A_\kappa (z-\beta_1)^{\kappa} + \dots$$

tehát

$$F(z) = \underbrace{\frac{A_0}{(z-\beta_1)^{\kappa_1}} + \frac{A_1}{(z-\beta_1)^{\kappa_1-1}} + \dots + \frac{A_{\kappa-1}}{z-\beta_1}}_{\psi_1(z)} + \underbrace{A_\kappa + A_{\kappa+1}(z-\beta_1) + \dots}_{\mathfrak{P}(z/\beta_1)}$$

Tehát $F(z) - \psi_1(z) = \mathfrak{P}(z/\beta_1)$

különbségnek már nem polusa. Ez áll minden polusra, mindegyikhez tartozó partiális törtek összegét levonva $F(z)$-ből, a különbségre nézve az illető polus már közönséges hely. Legyenek tehát a $\beta_1\ \beta_2 \dots \beta_h$ polushoz tartozó partiális törtösszegek $\psi_1\ \psi_2 \dots \psi_h$ akkor nyilvánvaló, hogy

$$F(z) - \psi_1(z) - \psi_2(z) - \dots - \psi_h(z) = G(z)$$

különbségnek már nincsenek végesben polusai; mert $F(z)-\psi_1(z)$-nek β_1 nem polusa, ugyszintén $\psi_2 \dots \psi_h$ sem; $F(z)-\psi_2(z)$-nek β_2 nem polusa ugyszintén $\psi_1\ \psi_3 \dots \psi_h$-nak sem stb. tehát egy β sem polus, csak a végtelen távoli hely lény. sing. hely, a miből következik, hogy $G(z)$ transc. egész függvény és így

$$F(z) = G(z) + \psi_1(z) + \psi_2(z) + \dots + \psi_h(z)$$

Tehát véges számú polusok esetén a transc. tört függvény előállítható mint az egyes polusokhoz tartozó partiális törteknek és egy, még határozatlan, transc. egész függvénynek összege. Ez Mittag-Leffler tétele véges polusok esetén.

Most tegyük fel, hogy $F(z)$-nek végtelen sok polusa van. Itt már hasonló nehézség mutatkozik, mint a transc. egész függvénynél, a mennyiben a partiális törtek végtelen összege nem fog convergens sort alkotni. Erre egy egyszerű példát szolgáltat a cotg. függvény, lévén $\operatorname{cotg} z = \frac{\cos z}{\sin z}$, ezen transc. tört függvénynek polusai a sinus 0 pontjai, tehát $k\pi$, $(k = 0, 1 \dots \infty \dots -\infty)$.

Lássuk mi a $k\pi$-hez tartozó partiális tört (csak egy van, mert $k\pi$ egyszerű polus.)

E végett $z = k\pi + h$

$$\operatorname{cotg}(k\pi+h) = \frac{\cos(k\pi+h)}{\sin(k\pi+h)} = \frac{(-1)^k \cos h}{(-1)^k \sin h} = \frac{\cos h}{\sin h} = \frac{1 - \frac{h^2}{2!} + \frac{h^4}{4!} - \dots}{h - \frac{h^3}{3!} + \frac{h^5}{5!} - \dots}$$

tehát $$h\cdot\operatorname{cotg}(\kappa\pi+h)=\frac{1-\frac{h^2}{2!}+\frac{h^4}{4!}-\cdots\cdots}{1-\frac{h^2}{3!}+\frac{h^4}{5!}}$$

és mivel a nevező h bármily értékei mellett $\neq 0$, végrehajthatjuk az osztást

$$=1+A_1h+A_2h^2+\cdots\cdots$$

és így $$\operatorname{cotg}(\kappa\pi+h)=\frac{1}{h}+A_1+A_2h^2+\cdots\cdots$$

tehát a $\kappa\pi$-hez tartozó partiális tört $\frac{1}{h}=\frac{1}{z-\kappa\pi}$ és most $\sum_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{z-\kappa\pi}\right|(=)\sum_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{\kappa\pi}\right|$ lévén, ez utóbbi divergens, tehát a partiális törtek összege divergens sort alkot. Ezért módosítjuk a partiális törtek alakját és bebizonyítjuk a következő tételt, mely Mittag-Lefflertől származik. Ha veszünk tetszésszerinti végtelen sok számot, melyek abs. érték nagysága szerint rendezve végtelen limesszel bíró számsorozatot alkotnak $\beta_1\ \beta_2\ \beta_3\ \beta_4\ \cdots\cdots\beta_n\cdots\cdots \lim\beta_n=\infty$ és minden egyes polushoz tetszésszerinti számcoefficiensekkel partiális tört összegeket alkotunk, tehát pl $\psi_1(z)=\frac{A_0'}{(z-\beta_1)^{\kappa_1}}+\frac{A_1'}{(z-\beta_1)^{\kappa_1-1}}+\cdots\cdots+\frac{A_{\kappa-1}'}{z-\beta_1}$ s megfelelőleg $\psi_1\ \psi_2\ \psi_3\ \cdots\cdots\psi_n\cdots\cdots$ akkor mindig tudunk szerkeszteni oly transc. tört függvényt, melynek épen ezek a polusai, és ezek a partiális törtjei: E végett módosítsuk a part. tört összeg alakját. Legyen általánosan $$\psi=\frac{A_0}{(z-\beta)^{\kappa}}+\frac{A_1}{(z-\beta)^{\kappa-1}}+\cdots\cdots\cdots+\frac{A_{\kappa-1}}{(z-\beta)}$$

ezeket a törteket közös alsóra hozva, kapunk egy tört függvényt, melynek felsője egy $(\kappa-1)$-ed fokú rat. egész függvény $\varphi(z)$ alsója $(z-\beta)^{\kappa}$, tehát $$\psi=\frac{\varphi(z)}{(z-\beta)^{\kappa}}$$

Ez lesz a partiális törtek módosított alakja. Ezt a tört függvényt minden hely körül sorba tudjuk bontani, kivéve a β helyet; tehát bontsuk sorba pl. 0 körül: $$\psi(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots\cdots+a_nz^n+\cdots\cdots$$

ez a sor convergens egy 0 centrumú, β-n átmenő körön belül, melynek sugara tehát $\varrho=\beta$, tehát convergens, ha $|z|<\varrho$ és pedig itt egyenletesen convergens, azaz bármily kis ε megadása után fel tudjuk bontani e sort két részre, egy véges és egy végtelen részre, mely utóbbi abs. értékre nézve kisebb mint ε; pl vegyünk egy 0 centrumú, $\frac{\varrho}{2}$ sugarú kört és bontsuk fel $\psi(z)$-t egy véges, tehát egész rat. $\chi(z)$ és egy végtelen $R(z)$ részre $$\psi(z)=\chi(z)+R(z)$$

a mely $|R(z)|<\varepsilon$, ha tehát $|z|<\frac{\varrho}{2}$; akkor $\psi(z)-\chi(z)=R(z)$

És most következőleg jutunk a keresett függvényhez. Vesszük következő convergens sort $$\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\cdots\cdots+\varepsilon_n+\cdots\cdots$$

és mindegyik $\quad \beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3 \ldots\ldots\ldots \beta_n \ldots$ polushoz tartozó

$\quad \psi_1 \quad \psi_2 \quad \psi_3 \ldots\ldots\ldots \psi_n \ldots$ partialis törtösszeget

o körül sorba bontva, osszuk a sort két részre, úgyhogy

$|R_1(z)| < \varepsilon_1 \quad , \quad |R_2(z)| < \varepsilon_2 \quad , \ldots\ldots |R_n(z)| < \varepsilon_n \ldots$ legyen;

ezen két részre való osztásnál fellépő $\chi_1(z), \chi_2(z), \ldots \chi_n(z) \ldots$

rat. egész függvényeket levonva a partialis törtekből legyen

$$\psi_1 - \chi_1 = \omega_1 \quad , \quad \psi_2 - \chi_2 = \omega_2 \quad \ldots\ldots \quad \psi_n - \chi_n = \omega_n$$

a mely ω-k tulajdonképpen ugyanazok, mint az R-k; akkor bebizonyítjuk, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n = \omega_1 + \omega_2 + \ldots\ldots + \omega_n + \ldots$ feltétlenül convergens sort alkot minden helyen, mely nem polus. E végett legyen $|z| = N$ és az összes polusokat osszuk két részre, véges számú polus: pl. az n első polus kisebb mint $2N$, a többi nagyobb, mint $2N$, s most az ω sort is osszuk fel két részre $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \omega_k = \sum_{k=1}^{n} \omega_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} \omega_k \quad$ és most ki fogjuk mutatni, hogy $\sum_{n+1}^{\infty} \omega_k$ convergens, mert hiszen $\sum_1^n \omega_k$ véges. Ez pedig könnyen kimutatható, mert hisz $k = n+1, n+2, \ldots$ mellett

$$\varrho = |\beta_k| > 2N$$

tehát
$$\frac{\varrho}{2} = \left|\frac{\beta_k}{2}\right| > N$$

és miután minden oly $|z|$ értékek mellett, melyek $|z| < \frac{\varrho}{2}$, az I egyenlőtlenségek állanak, azért, lévén $|z| = N < \frac{\varrho}{2}$

$$\sum_{n+1}^{\infty} |\omega_k| < \sum_{n+1}^{\infty} \varepsilon_k \quad ,$$ a mely utóbbi sor pedig convergens, tehát az ω_k sora is convergens és pedig feltétlenül és egyenletesen convergens. Most könnyű kimutatni, hogy $\sum_1^{\infty} \omega_k$ analytikai függvény, melynek ezen β-k a polusai és ezen ψ-k a partialis törtjei; mert hiszen $\sum_1^{\infty} \omega_k$ egyenletesen convergens, tehát minden egyes tagját sorbabontva oly hely körül, mely nem polus szabad ezen sorokat összevonni, tehát ez a függvény analyt. függvény. A mi a polusokat illeti, ha vesszük pl. β_1-et és ω_1-t az összegből elkülönítjük, akkor

$$\sum_1^{\infty} \omega_k = \omega_1 + \sum_2^{\infty} \omega_k$$

e második részre nézve β_1 nem polus, tehát e körül sorbabontható, és miután $\omega_1 = \psi_1 - \chi_1$ a mely χ mint rat. egész függvény a β_1 körül szintén sorbabontható, azért ezen ~~két~~ sorbabontást összevonva és $P(z|\beta_1)$-el jelölve, lesz.

$$\sum_1^{\infty} |\omega_k| = \psi_1 + P(z|\beta_1)$$ a mi nem

jelent egyebet, mint azt, hogy β_1 a Σ-ra nézve polus, mert $z=\beta_1$ mellett $\psi_1=\infty$ és hogy ez a ψ_1 a β_1-hez tartozó partialis törtösszeg ezen Σ-ra nézve. Ugyanez áll valamennyi β-ra és ezzel a tétel ki van mutatva.

Ennek alapján most már könnyü kimutatni azt a tételt, hogy minden transc. tört függvényt elő lehet állitani, mint partialis törteknek és egy transc. egész függvénynek összegét. Ha ugyanis

$$\beta_1 \; \beta_2 \; \beta_3 \; \dots \; \beta_n \; \dots \qquad \lim \beta_n = \infty$$

az $F(z)$ polusai, és minden polushoz veszünk egy partialis tört összeget tetsésszerinti számcoefficiensekkel $\psi_1 \; \psi_2 \; \psi_3 \dots \psi_n \dots$
és megszerkesztjük az előbbiek alapján azt a transc. tört függvényt, $G(z)$-t, melynek ezek a polusai és partialis törtjei, akkor az

$$F(z) - G(z) = H(z)$$

különbség-függvény már transc. egész függvény, mert ennek a végesben már nincsen polusa, mivel pl. β_1 körül $F(z) = \psi_1 + P_1(z/\beta_1)$, $G(z) = \psi_1 + P_2(z/\beta_1)$ tehát $\qquad H(z) = \psi_1 + P_1(z/\beta_1) - (\psi_1 + P_2(z/\beta_1)) = P(z/\beta_1)$.
tehát β_1 körül $H(z)$ sorbabontható, éppen úgy $\beta_2 \dots \beta_n \dots$ körül és így

$$F(z) = G(z) + H(z)$$

vagyis az $F(z)$ transc tört függvény elő van állitva mint egy transc egész függvénynek és partialis törteknek ($G(z)$) összege. Ha 0 is polus, akkor ennek partialis törtjeit $\frac{A_k}{z^k}$ nem módositjuk.

Periodusos függvények.

Jakobi szerint eme tárgyalásoknál a független változót u-val fogjuk jelölni. A period. függvény definitiója a következő. Valamely analytikai függvény periodusos, és a periodusa p, ha

$$f(u+p) = f(u)$$

és pedig u minden értékénél. Ezen periodusos függvényekre a következő tételek állanak: Ha egy függvénynek p és q külön periodusa, akkor $p+q$ is periodus, mert ha $\qquad f(u+p) = f(u)$
$$f(u+q) = f(u)$$
u minden értéke mellett, akkor $u = u+p$ téve

$$f(u+p+q) = f(u+p) = f(u)$$

A periodus ellentettje is periodus, mert ha

$$f(u+p) = f(u)$$

$$f(u) = f(u-p)$$

és $u = u - p$

A két tételből következik az az általános tétel, hogy ha p periodus, akkor ennek úgy pos. mint neg. egész számu sokszorosai $\pm 2p \pm 3p \cdots \pm \kappa p \cdots$ is periodusok. Ha $\kappa = 0$, kapjuk 0, de ez nem igazi periodus. A κp, $(\kappa = 0, 1, 2 \cdots)$ vel adott periodusokat a <u>p-ből levezetett periodusoknak</u> nevezzük. Ha p és q is periodus, akkor az előbbiek szerint $mp + nq$ is periodus, a hol $\begin{smallmatrix} m \\ n \end{smallmatrix} = -\infty \cdots +\infty$. Ezen periodusokat p és q-ből levezetett periodusoknak nevezzük. És általánosan, ha $p_1, p_2, p_3, \cdots p_\kappa \cdots$ periodusok, akkor

$$n_1 p_1 + n_2 p_2 + n_3 p_3 + \cdots n_\kappa p_\kappa \qquad n_\kappa = -\infty \cdots +\infty$$

a $p_1 \cdots p_\kappa$-ből levezetett periodusok.

Ha az összes periodusok formulája κp, akkor p-t egyszerű, vagy primperiodusnak nevezzük, s a függvényt magát <u>egyszerűen periodusos függvénynek</u>. Ha az összes periodusok p és q-ből vannak levezetve, akkor a függvény <u>kétszeresen periodusos</u> s p és q az alap- vagy primperiodusok. A függvény <u>κ-szorosan periodusos</u>, ha összes periodusai $p_1\, p_2 \cdots p_\kappa$ primperiodusokból vannak levezetve, de a mint mindjárt látni fogjuk a függvények legfeljebb kétszeresen periodusos függvények. Ugyanis vessük fel azt a kérdést, hogy meddig mehet valamely függvény periodusosságának a száma? E végett előbb néhány segédtételt kell levezetnünk. Az első igy szól: Ha adva valamely $f(u)$ függvény, mindig meg lehet adni egy pos. számot, melynél a függvény abs. értékű periodusai valamennyien nagyobbak, vagyis más szóval a <u>függvény periodusai nem lehetnek végtelen kicsinyek</u>. Legyen ugyanis α a függvényre nézve közönséges hely, akkor $u = \alpha + h$ téve

$$f(\alpha+h) = f(\alpha) + f'(\alpha)\, h + \frac{f''(\alpha)}{2!}\, h^2 + \cdots$$

s ha a κ-dik az első el nem tűnő differentialquotiens

$$f(\alpha+h) - f(\alpha) = h^\kappa \left(\frac{f^\kappa(\alpha)}{\kappa!} + \varphi(h) \right)$$

a hol $\varphi(h) = \frac{f^{\kappa+1}(\alpha)}{(\kappa+1)!}\, h + \cdots$, és ez a sor convergens levén, és $h = 0$ mellett 0, mindig megadhatjuk azt a ϱ számot, úgy hogy $|h| < \varrho$ mellett

$$|\varphi(h)| < \left|\frac{f^\kappa(\alpha)}{\kappa!}\right|$$

Legyen,

akkor ilyen h-k mellett $f(\alpha+h)-f(\alpha)\neq 0$ ha már most an a ς sugarú körön belül periodusos volna, pl. p, akkor arra nézve

$$f(\alpha+p)=f(\alpha) \quad \text{volna, azaz}$$
$$f(\alpha+p)-f(\alpha)=0$$

már pedig a ς sugarú kör belsejére nézve ez a különbség nem lehet 0, és így következik, hogy ezen a körön belül nincs is a függvénynek periodusa, ha nem valamennyien azon kívül feksznek, és így valamennyien nagyobbak, mint ς. És ha p és q is periodus, $p-q$ is periodus lévén, minthogy mindegyik periodus nagyobb mint ς azért $|p-q|>\varsigma$ azaz bármely két periodusnak egymástól való távolsága nagyobb, mint ez a ς, a miből következik, hogy a periodusok discret pontok a számsíkon, és így véges területen belül csak véges számmal lehetnek.

Legyen most p_1 az $f(x)$ függvénynek egy periodusa, ábrázoló pontja P_1 és húzzuk meg az OP_1 egyenest. Nincsen kizárva, hogy ezen az egyenesen p_1-nél kisebb periodus is fekszik; legyen a legkisebb p ábrázoló pontja P, mely tehát 0-hoz legközelebb fekszik, akkor ki fogjuk mutatni, hogy ez a p primperiodusa annak végtelen sok np periodusnak, melyek ezen az egyenesen feksznek, azaz, hogy az ezen egyenesen fekvő periodusok mind p-nek egész számú többszörösei. Tehát feltesszük, hogy p a legkisebb, akkor egy tetszés szerinti más periodust véve ezen az egyenesen, p_1

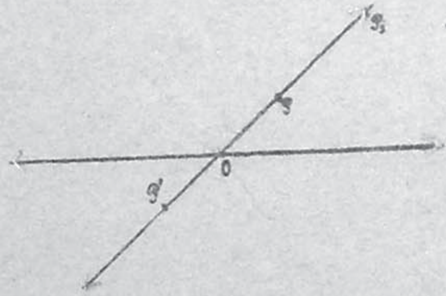
$$\frac{p_1}{p}=n+r$$

azaz e két complex szám hányadosa reális lesz, mivel szögük tehát iránytényezőjük ugyanaz és ez a reális szám két véges határ közé szorítható n és $n+1$ közé, tehát ha r egy 1-nél kisebb positiv tört szám, a hányados $n+r$ lesz; de ki fogjuk mutatni, hogy ez az r szükségképpen 0, mert

$$p_1=np+rp$$

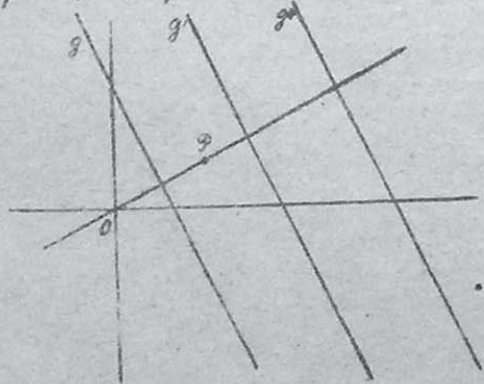
~~tehát~~ $$p_1-np=rp$$

és mivel p_1 és np is periodus, azért $p_1-np=rp$ is periodus volna, azaz volna az egyenesen p-nél kisebb periodus is, a mi ellenkezik feltételünkkel, és így $\frac{p_1}{p}=n$ azaz $p_1=np$ Tehát valamennyi periodus a legkisebbnek egész számú többszöröse. Az egyenesnek befelé való megnyujtásán is végtelen sok periodus van és ezeknek legkisebbike, azaz 0-hoz legközelebbi $(-p)$, mert ha volna egyennél közelebb fekvő, ennek ellentettje periodus volna, de ez nem lehetséges.



Ha már most több periodus ezen az (np)-n kívül nincsen, akkor a függvény egyszeresen periodusos, a melynek periodusai tehát mind egy egyenesen fekszenek, és a primperiodus p

Lássuk az ilyen egyszeresen periód. függvény tulajdonságait. Legyen ez $f(u)$, primperiodusa p, ábrázoló pontja P. Azután vegyünk egy tetszésszerinti



g egyenest, és ezt toljuk el önmagával párhuzamosan p-vel g'-be, akkor ezen gg' csíkon belül minden függvényérték előfordul, mert hiszen ha az egész számsíkot ily p dimensiójú csíkokra osztjuk, ennek pontjai mind csak p-ben különböznek egymástól, vagy ennek egész számú többszöröseiben; a csíkok egyik oldalát természetesen mindig a következő vagy előző csíkhoz számítjuk. A csíkok iránya tetszőleges, azaz g tetszőleges, de nem szabad párhuzamosnak lennie OP-vel. Ilyen egyszeresen periodusos függvények az exponentiális és trigonometriai függvények. A legegyszerűbb függvény, melynek periodusa p, a következő: $e^{\frac{2\pi i}{p}\cdot u}$.

mert $\quad e^{\frac{2\pi i}{p}(u+p)} = e^{\frac{2\pi i}{p}u + 2\pi i} = e^{\frac{2\pi i}{p}\cdot u}$

s most ki fogjuk mutatni, hogy az összes p periodusos függvények egyszerű vonatkozásba hozhatók ezzel a függvénnyel. Legyen ugyanis

$$e^{\frac{2\pi i}{p}\cdot u} = z$$

akkor $\quad \log z = \frac{2\pi i}{p}\cdot u. \quad$ ebből $u = \frac{p}{2\pi i}\cdot \log z$

Ha most $f(u)$ egy tetszésszerinti u változós egyértékű p periodusos függvény,

akkor $\quad f(u) = f\left(\frac{p}{2\pi i}\log z\right)$

a z változó bevezetése által az f függvény látszólag végtelen sok értékűvé lett, de ez csak látszólagos, mert ha $\log z = \operatorname{Log} z + 2k\pi i$

akkor $\quad f\left(\frac{p}{2\pi i}\log z\right) = f\left\{\frac{p}{2\pi i}(\operatorname{Log} z + 2k\pi i)\right\} = f\left(\frac{p}{2\pi i}\operatorname{Log} z + kp\right)$

és kp periodus lévén $\quad = f\left(\frac{p}{2\pi i}\operatorname{Log} z\right) = F(z)$

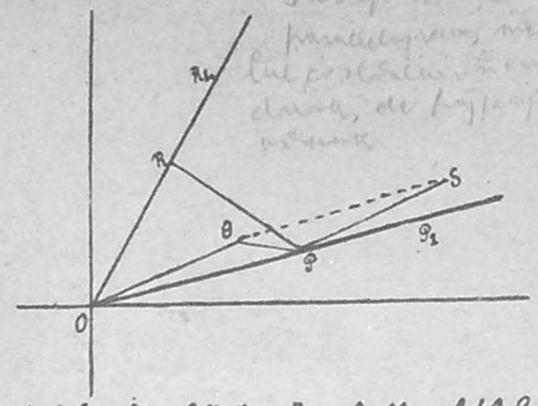
Harkay

Harkay

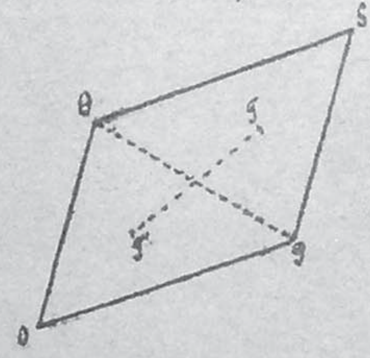
tehát a z változós függvény is egyértékü és így
$$f(u) = F(z) \qquad \text{és visszahozva } z \text{ értékét}$$
$$f(u) = F(e^{\frac{2\pi i}{p} \cdot u})$$
Tehát minden egyértékü p periodusos függvényt össze lehet tenni egy egyértékü F és a legegyszerübb p periodusos függvényből. Ha $F(z)$ rat. függvény, akkor $f(u)$ minden adott értéket annyiszor veszen fel minden csíkban, a hányat a rat. $F(z)$ függvény felveszen. Pl. $\sin u$ periodusa 2π, tehát itt $p = 2\pi$ és $e^{\frac{2\pi i}{p}u} = e^{ui} = z$, de $\sin u = \frac{e^{ui} - e^{-ui}}{2i} = \frac{z - \frac{1}{z}}{2i} = \frac{z^2-1}{2iz}$, tehát $\sin u$ a z-nek másodfokú rat. függvénye, s így a főperiodus és minden többi csíkban minden értéket 2-szer veszen fel.

$\operatorname{tg} u$ periodusa π, tehát $e^{\frac{2\pi i}{p}u} = e^{2ui}$, úgyhogy
$$\operatorname{tg} u = \frac{1}{i}\,\frac{e^{ui} - e^{-ui}}{e^{ui} + e^{-ui}} = \frac{1}{i}\,\frac{e^{2ui} - 1}{e^{2ui} + 1} = \frac{1}{i}\,\frac{z-1}{z+1}$$
vagyis $\operatorname{tg} u$ a z-nek elsőfokú függvénye és így minden értéket csak egyszer veszen fel minden periodusban.

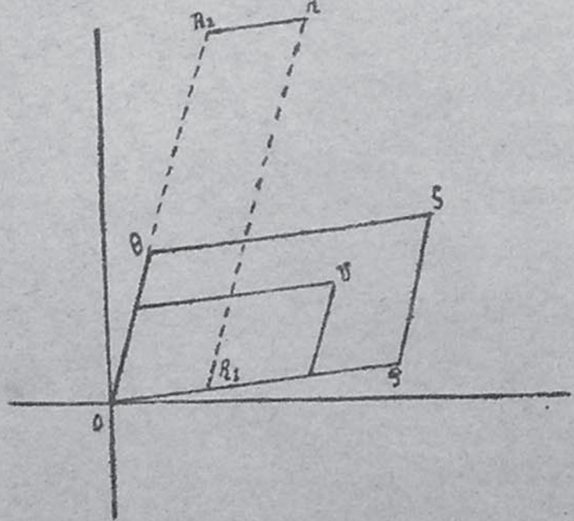
Lássuk most, mi történik, ha a függvénynek periodusai nem vezethetők le mind egy alapperiodusból. Tegyük fel, hogy p_1 a függvénynek egy periodusa és keressük fel az OP_1-n azt a periodust, P mely legközelebb fekszik O-hoz. Azután legyen R_1 egy másik periodus, az előbbitől különböző szöggel és OR_1-n szintén vegyük fel az O-hoz legközelebb eső $R(r)$ periodust. Akkor az OPR Δ belül esetleg lehetnek még periodusok, de csakis az előbbiektől különböző szög alatt O-ból kiinduló egyeneseken. Vegyük ezek közül azt, mely legközelebb esik OP-egyeneshez, azaz a P szögétől legkevesebbet különböző szöggel bíró egyenest és ezen keressük ki az O-hoz legközelebb eső periodust, ez legyen Q. Így OPQ-ban oly háromszöget nyertünk, melyen belül és az oldalain nincsenek periodusok, csak a szögpontok ilyenek, és pedig p és q. Miután p és q periodus, keressük fel ennek S pontját, kimutatjuk, hogy az $OPQS$ parallelogrammán belül nincs a függvénynek periodusa, sem az oldalain, csak a csúcsokban. Az OPQ Δ-ből kimu-



tattuk, ki kell mutatni a PQS△ ről. Tegyük fel hogy itt volna egy T periodus akkor ez szükségképpen maga után vonna egy periodust az első △-ben T'; mert hiszen ha $p+q$ és t periodus, akkor $p+q-t=t'$ is periodus, de akkor $\frac{p+q}{2}=\frac{t+t'}{2}$ volna, azaz TT' felezőpontja összeesnék PQ felezőpontjával, tehát T' benne feküdnék OPQ △-ben, de ez ellenmondás és így PQS-ben nem lehet periodus, tehát OPQS-ben sem. Tehát kimutattuk oly parallelogramma létezését, melyen belül és oldalain nincsenek periodusok,



de szögpontjai periodusok. És most kimutatjuk, hogy a többi periodus mind levezethető, P és Q-ból, a mivel ki lesz mutatva, hogy a függvények legfeljebb kétszeresen periodusosak lehetnek. E végett tegyük fel, hogy megkaptuk a fenti OPQS □-et és hogy az $f(u)$ függvény egy tetszésszerinti periodusa $r=R$. Kimutatjuk, hogy $r=mp+nq$.



E végett húzunk R-nát OP és OQ-val parallelekat és legyen OQ és RR_2 metszése $R_2\,(r_2)$ OP és RR_1 metszése $R_1\,(r_1)$, akkor $r=r_1+r_2$ és most

$$\frac{r_1}{p}=n_1+\varrho_1$$
$$\frac{r_2}{p}=n_2+\varrho_2$$

mert egyenlő iránytényezővel birnak. ϱ_1 és ϱ_2 is $\lessgtr {}^1_0$ lehet és így

$r_1=n_1p+\varrho_1p$, $r_2=n_2q+\varrho_2q$, tehát

$r=r_1+r_2=n_1p+n_2q+\varrho_1p+\varrho_2q$.

$r-n_1p-n_2q=\varrho_1p+\varrho_2q=v$ is periodus de r, n_1p és n_2q periodus és így volna, de ez az OPQS□ belül feküdnék, a mi lehetetlen, tehát szükségképpen $\varrho_1=\varrho_2=0$, és így $r=n_1p+n_2q$ vagyis ha $n_1=m$ és $n_2=n$

$$r=mp+nq$$

Tehát a függvények periodusosságának sokszorossági száma legfeljebb kettő p és q primitiv periodus pár. Erre a prim. periodus párra kell egy megállapodást tennünk. E két alapperiodus körül először tekintjük azt.

melyből a másikba menve a vector forgási szöge pos. tompa vagy hegyes szög, mert akkor a két periodus hányadosát képezve

$$\frac{q}{p} = \varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

φ vagyis a két per. szögeinek különbsége pos. hegyes vagy tompa lévén $\varrho\sin\varphi > 0$ lesz, azaz a hányados képzetes része pos. Ha esetleg $\frac{p}{q}$ képzetes része neg. lenne, akkor q helyett $(-q)$ veszünk, mert hiszen

$$n_1 p + n_2 q = n_1 p - n_2(-q)$$

azaz $-q$ is alap periodus. És akkor azután $\frac{p}{-q}$ képzetes része pozitiv lesz.

A midőn kimutattuk, hogy a függvény legfeljebb kétszeresen periodusos lehet, p és q tulajdonképen két tetszés szerinti primitiv periodus pár volt, a miből látható, hogy ép így kiindulhattunk volna egy másik p-ből és az ehez legközelebb fekvő q-ból, vagyis más szóval, a kétszeresen periodusos függvénynek végtelen sok primitiv periodus párja van, a melyből a többi összes periodus levezethető. Lássuk mi az összefüggés ez primitiv periodus párok között? Legyen p és q a kiindulásul szolgáló prim. periodus pár és $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tetszőleges pos. vagy neg. egész számok, akkor

$$\alpha p + \beta q = p_1 \qquad (1)$$

$$\gamma p + \delta q = q_1 \qquad (2)$$

szintén periodusok lesznek épen az előbb bebizonyított tétel alapján. Vizsgáljuk most, hogy minő feltételeknek kell eleget tenniök az $\alpha\ \beta\ \gamma$ és δ egész számoknak, hogy a velök nyert p_1 és q_1 szintén prim. periodus párt alkossanak, azaz, hogy belőlük viszont p és q valamint bármely más periodus nyerhető legyen. Mindenekelőtt látható, hogy szükséges feltétel ehez, hogy $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ legyen. Mert hiszen, ha $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$ lenne, akkor eliminálva (1) és (2)-ből q-t

$$(\alpha\delta - \beta\gamma)p = p_1\delta - q_1\beta = 0$$ volna, azaz $\frac{q_1}{p_1} = \frac{\delta}{\beta}$ reális lenne, q_1 és p_1 egy egyenesen feküdnék, tehát nem lehetne primitiv periodus pár. Tehát szükséges feltétel, hogy $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ legyen és akkor (1) és (2)-ből

$$(\alpha\delta - \beta\gamma)p = p_1\delta - q_1\beta \qquad 1.)$$

$$-(\alpha\delta - \beta\gamma)q = p_1\gamma - q_1\alpha \qquad 2.)$$

tehát

$$p = \frac{\delta}{\alpha\delta - \beta\gamma}p_1 - \frac{\beta}{\alpha\delta - \beta\gamma}q_1$$

$$q = \frac{-\gamma}{\alpha\delta - \beta\gamma}p_1 + \frac{\alpha}{\alpha\delta - \beta\gamma}q_1$$

ha most $\frac{\delta}{\alpha\delta - \beta\gamma} = \alpha_1$, $\frac{-\beta}{\alpha\delta - \beta\gamma} = \beta_1$ $\frac{-\gamma}{\alpha\delta - \beta\gamma} = \gamma_1$, $\frac{\alpha}{\alpha\delta - \beta\gamma} = \delta_1$

és azt akarjuk, hogy p_1 és q_1 is primitiv periodus pár legyen, akkor p és q levezethető kell legyen, mint egész számú többszöröse p_1 és q_1-nek, tehát ahhoz, hogy p_1 és q_1 primitiv periodus pár legyen, szükséges, hogy $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1$ és δ_1 egész számok legyenek, tehát $\alpha_1\delta_1-\beta_1\gamma_1$ is; de $\alpha_1\delta_1-\beta_1\gamma_1=\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{(\alpha\delta-\beta\gamma)^2}=\frac{1}{(\alpha\delta-\beta\gamma)}$ és ez utóbbi egész szám, ha $\alpha\delta-\beta\gamma=\pm 1$, ha ez a feltétel teljesül, akkor p_1 és q_1 is prim. periodus lesz, mert akkor

$$\begin{aligned} p_1\delta-q_1\beta &= \pm p \quad \Big|\cdot n_1 \\ p_1\gamma-q_1\alpha &= \mp q \quad \Big|\cdot -n_2 \end{aligned}$$

de $\alpha\beta\gamma\delta$ egész számok és így p és q levezethető p_1 és q_1-ből. Sőt az összes n_1p+n_2q periodusok is levezethetők, mert ez utóbbi két egyenletből

$$\pm(n_1p+n_2q)=(n_1\delta-n_2\gamma)p_1+(n_2\alpha-n_1\beta)q_1$$

ami azt mondja, hogy az összes periodusok p_1 és q_1-ből levezethetők. Tehát p_1 és q_1 prim. periodus, ha $\alpha\delta-\beta\gamma=\pm 1$. De a prim. periodus párra azt a kikötést is tettük volt, hogy $\frac{q}{p}$ képzetes része pos. legyen. Kérdés, mikor teljesül ez p_1 és q_1-nél?

$$\frac{q_1}{p_1}=\frac{\gamma p+\delta q}{\alpha p+\beta\gamma}=\frac{\delta}{\beta}+\frac{(\beta\gamma-\alpha\delta)p}{\beta(\alpha p+\beta q)}=\frac{\delta}{\beta}+\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\beta\alpha+\beta^2\frac{q}{p}}$$

ha $\beta\neq 0$

Már most feltételünk szerint $\frac{q}{p}$ képzetes része pos., β^2-el való szorzás és $\beta\alpha$ hozzáadása által a képzetes rész nem változik előjelben; és mivel $\frac{1}{a+bi}=\frac{a-bi}{a^2+b^2}$ azaz a complex szám reciprokjának képzetes része ellenkező jelű, azért tehát $\frac{1}{\beta\alpha+\beta^2\frac{q}{p}}$ képzetes része neg. Ha már most $\alpha\delta-\beta\gamma=+1$, akkor $\frac{q_1}{p_1}$ képzetes része pos. és ha $\alpha\delta-\beta\gamma=-1$, akkor $\frac{q_1}{p_1}$ képzetes része neg.

Ha tehát $\alpha\delta-\beta\gamma=+1$ vétetik, akkor p_1 és q_1 primitiv periodus pár lesz, mely a kivánt tulajdonsággal bír. De ez akkor is áll, ha $\beta=0$, mert akkor, ha $\alpha\delta=\pm 1$, $\alpha=\pm\frac{1}{\delta}$, lesz

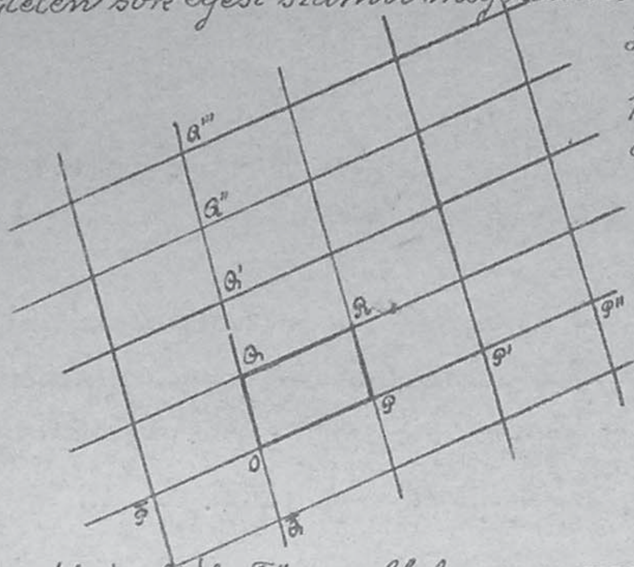
$$\frac{q_1}{p_1}=\frac{\gamma p+\delta q}{\alpha p}=\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{\delta}{\alpha}\cdot\frac{q}{p}=\frac{\gamma}{\alpha}\pm\frac{\delta^2 q}{p}$$

mert hiszen $\alpha\delta-\beta\gamma=\alpha\delta=\pm 1$ és mivel $\frac{q}{p}$ képzetes része positiv $\frac{\gamma}{\alpha}\pm\delta^2\frac{q}{p}$ képzetes része is positiv, ha $\alpha\delta=+1$ és negativ, ha $\alpha\delta=-1$ vagyis itt is p_1 és q_1 primitiv periodus pár lesz, ha $\alpha\delta-\beta\gamma=+1$.

Ha tehát egy kétszeresen periodusos függvénynek egy primitiv periodus párját ismerjük, ebből végtelen sok primitiv periodus párt vezethetünk le következőleg:

$$\begin{aligned} \alpha p+\beta q &= p_1 \\ \gamma p+\delta q &= q_1 \end{aligned}$$

egyenletek adják eme végtelen sok prim. periodus párt, ha α, β, γ és δ olyan egész számok, melyekre nézve $\alpha\delta-\beta\gamma=1$, ennek pedig végtelen sok megoldása van. Mert ha tekintetbe vesszük, hogy $\alpha\,\beta\,\gamma$ és δ relatíve prímszámok kell hogy legyenek, ha megadunk két relatíve prímszámot α és β, a hátralevő δ és γ számára egy két ismeretlenü egyenletünk van, a melynek végtelen sok egész számu megoldása van.



Lássuk most, ha p és q egy primitív periodus párt alkotnak, miképp lehet az ebből származtatott összes

$$n_1 p + n_2 q$$

periodusokat ábrázolni? Egyszerüen az $n_1 p$ periodusokat ábrázoló $QQ'Q''$.. pontokon át OP-vel párhuzamosokat húzva, az így nyert parallelogrammák csúcspontjai mind és pedig az összes $n_1 p + n_2 q$ periodusokat ábrázolják. Főparallelogrammának nevezzük az $OPQR$ parallelogrammát. Minden parallelogrammához hozzászámítjuk azt a csúcsát, melyből kiinduló két oldal egyirányban parallel OP, ill OQ-val továbbá ezt a két oldalt. Miután a kétszeresen periodusos függvénynek az a tulajdonsága, hogy $f(u+n_1p+n_2q)=f(u)$ látható, hogy elegendő, ha u bejárja a főparallelogrammát, mert az ebben felvett értékeket a többi parallelogrammában csak ismétli. Ha valamely parallelogrammának egy bizonyos pontjához meg akarjuk határozni a főparallelogrammában azt a pontot, melyben ugyanazt az értéket veszi fel, egyszerüen eltoljuk a kérdéses parallelogrammát önmagával parallel, a míg kiindulási csucsa összeesik O-val. Ily módon a két pont fedésbe jön. Mindazokat a helyeket, a hol a függvény ugyanazokat az értékeket veszi fel, congruens helyeknek nevezzük; ha ily két hely u és v, akkor ennek jele $u\equiv v$ és természetes, hogy $u-v=n_1p+n_2q$. Tehát elég ha a főparallelogrammában tanulmányozzuk a kétszeresen periodus függvényeket.

Miután a félperiodus is szerepel, jelöljük ezt ω illetőleg ω'-vel úgyhogy a primitiv periodus pár $2\omega, 2\omega'$ és $\frac{\omega'}{\omega}$ képzetes része positiv.

Már most mutassuk ki, hogy tényleg léteznek oly kétszeresen periodusos függvények, és pedig oly egyértékü, kétszeresen periodusos függvényeket fogunk keresni, melyek végesben ép úgy viselkednek, mint a rat. függvények, tehát egy és ugyanazt az értéket a periodusparallelogrammának csak véges számú helyén veszik fel. A legegyszerübb függvény fajok között fogunk keresni ily függvényt. Rationális függvény nem lehet, mert ez minden értéket az egész számsikon csak véges számú helyen veszen fel, a kp. (kétszeresen periodusos.) függvény pedig végtelenszer, mert ismétli minden pp. (parallelogramma)-ban. Tehát az egyértékü transc. függvények között kell keresni, vagyis a transc. egész és transc. tört függvények között. Könnyen belátható, hogy transc. egész függvény nem lehet kp., mert tegyük fel, hogy $F(u)$ ily kp függvény volna, mely az egész számsikon convergens $F(u) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots\ldots$

Ez a függvény tehát a főpp-ban mindenütt véges értékü, és így meg lehet adni azt a M véges mennyiséget, melyen alúl marad a függvény értéke az egész főppban, tehát az egész számsikon; igen de mivel $F(u)$ másfelől transc. egész függvény, bármily M megadása után, tudunk oly nagy kört írni, melyen a függvény maximuma nagyobb mint ez a M. Látható tehát, hogy ez a két követelés kizárja egymást és így transc. egész függvények közt nincsen kp. De ebből másfelől az is világos, hogy szükségképen kell legyenek a kp függvénynek a főppban 0 pontjai és polusai. Mert a transc. egész függvényeken kívül minden függvénynek vannak végesben polusai. a kp. függvények pedig ide tartoznak. De ha $F(u)$ kp, akkor $\frac{1}{F(u)}$ is az, tehát utóbbinak is vannak polusai, a végesben és ezek nem egyebek, mint $F(u)$ nullapontjai. Tehát egy kp. $F(u)$ függvénynek szükségképen vannak polusai és nullapontjai a főppban. A kp. függvényt tehát a tört transc. függvények között kell keresni, mert ennek vannak polusai és nullapontjai és pedig egy főpp-ban csak véges számmal, mert különben torlodási helyük lény. singularis hely, volna, pedig a transc. tört függvénynek végesben nincs lény. singularis helye. Az eddigiek alapján könnyű is lesz megállapitani a kp. függvény alakját. Először szerkesztünk oly transc.

egész függvényt, melynek 0 az értéke az összes periodus pontokban, mely utóbbiak véges területen csak véges számmal vannak. Legyen ez a függvény $\sigma(u)$, melynek tehát 0 pontjai $2\nu\omega + 2\nu'\omega'$. Legyenek most a keresett transc. tört függvénynek nullapontjai a főpp-ban

$$\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3 \dots\dots \alpha_h$$

polusai $\quad \beta_1\ \beta_2\ \beta_3 \dots\dots \beta_k$

akkor az a transc. tört függvény, mely az α helyeken és a velök congruens helyeken 0 értékü, a β helyeken és a velök congruens helyeken polusokkal bír, a következő

$$\frac{\sigma(u-\alpha_1)\,\sigma(u-\alpha_2)\,\sigma(u-\alpha_3)\dots\dots\sigma(u-\alpha_h)}{\sigma(u-\beta_1)\,\sigma(u-\beta_2)\,\sigma(u-\beta_3)\dots\dots\sigma(u-\beta_k)}$$

Mert pl. a felső eltünik, ha $u-\alpha_1 = 2\nu\omega + 2\nu'\omega'$, tehát ha $u = \alpha_1 + 2\nu\omega + 2\nu'\omega'$ vagyis α_1-ben és a vele congruens helyeken, ugyszintén a többi α-ra nézve. Az alsó eltünik, azaz a függvény végtelenné válik ha pl. $u-\beta_1 = 2\nu\omega + 2\nu'\omega'$, vagyis ha $u = \beta_1 + 2\nu\omega + 2\nu'\omega'$; tehát β_1-ben és a vele congruens helyeken ugyszintén a többi β polusa nézve. Ez a függvény tehát a kivánt tulajdonsággal bír. Most az összes transc. tört függvények, melyeknek ugyanezek a tulajdonságaik, ettől csak egy transc. egész szorzóban különböznek és igy ebben az alakban

$$e^{f(u)}\cdot\frac{\sigma(u-\alpha_1)\,\sigma(u-\alpha_2)\dots\dots\sigma(u-\alpha_h)}{\sigma(u-\beta_1)\,\sigma(u-\beta_2)\dots\dots\sigma(u-\beta_k)}$$

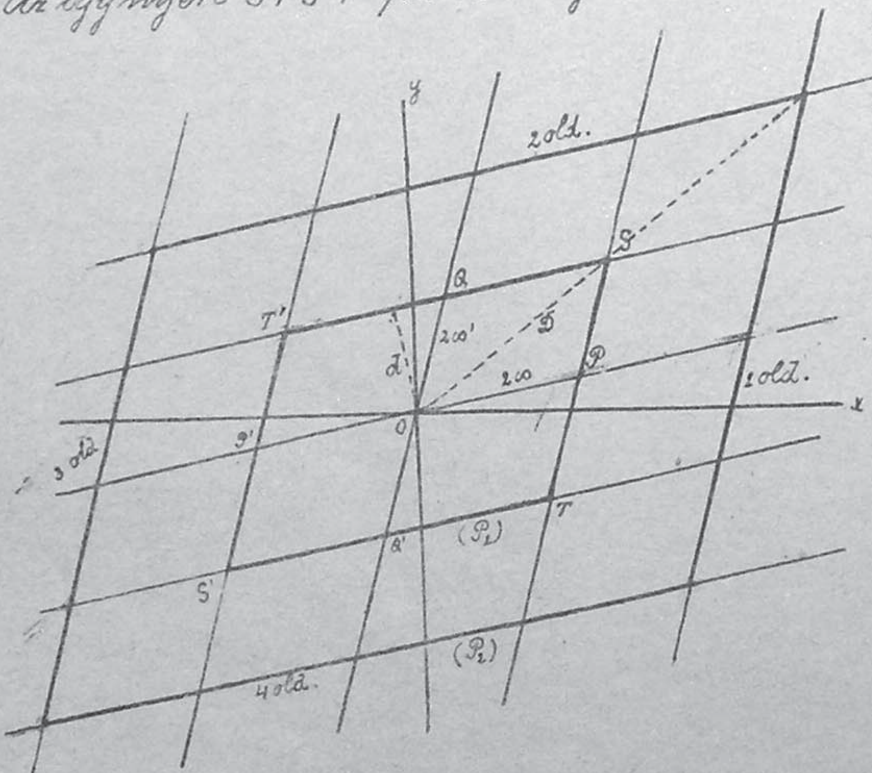
bennfoglaltatnak az összes kp. függvények, melyeknek ezek a 0 pontjai és polusai.

Tehát első feladatunk megszerkeszteni ezt a σ függvényt, azután megvizsgálni ennek tulajdonságait, hogy változik, ha u periodussal növekedik, azután ezt az általános alakot kell megvizsgálni, hogy mikor felel meg a kp. függvény tulajdonságainak.

A Weierstrass féle σ függvény.

Szerkeszteni kell oly transc. egész függvényt, melynek egy keresendő kp. függvény periodus pontjaiban $2\nu\omega + 2\nu'\omega'$ nulla értékü, tehát végtelen sok 0 ponttal bír. A függvényt szorzat alakban fogjuk előállitani. Hogy a primfüggvény alakját megválaszthassuk, keresnünk kell azt a pos. egész p-

exponenst, melyre nézve a nullapontok reciprokjai conv. végtelen sort alkotnak. E végett csoportosítsuk a nullapontokat következőleg: A 2ω, -2ω és $2\omega'$ $-2\omega'$ pontokon át a főpp oldalaival parallelekat huzunk. Az ígynyert $STS'T'$ parallelogramma kerületén fekszenek az első csoporthoz tartozó periodus-pontok: $P, S, Q, T' P' S' Q' T$. Azután $2.2\omega - 2.2\omega$, $2.2\omega'$ és $-2.2\omega'$ pontokon át fektetjük a második parallelogrammát (P_2) melynek kerületén fekvő periodus pontok alkotják a második csoportot; azután 3.2ω stb... pontokon át a harmadik parallelogrammát. Az n-dik parallelogramma oldalai átmennek



a $2n\omega, -2n\omega$; $2n\omega', -2n\omega'$ periodus pontokon, s az ezeken fekvő periodus-pontok alkotják az n-dik csoportot. Lássuk mennyi az egyes csoportokban levő periodusok száma? Vegyük az n-dik csoportot. Az első oldalon fekvő pontokat kapjuk, ha $2\nu\omega + 2\nu'\omega'$-ben $\nu = n$ és $\nu' = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \pm n$; az első oldalon tehát $2n+1$ pont fekszik; a második oldalon $\nu' = n$, $\nu = 0, \pm 1 \dots \pm n$ tehát mindegyik oldalon $2n+1$, az egész parallelogrammán tehát $4(2n+1) = 8n+4$ periodus pont van. De a 4 szögpontot mindig kétszer vettük, ugyhogy, az n dik csoportban épen $8n$ periodus van. Lássuk az egyes periodusok nagyságát. Ha 0-ból az első parallelogramma oldalára egy d normálist bocsátunk és $OS = D$, akkor látható, hogy első csoport periodusaira áll a következő nagysági viszony: p_1 jelenti a periodust $d \leqq |p_1| \leqq D$ az egyenlőség legfeljebb 4 pontban állhat s pedig akkor, ha az egyik prim. periodus derék szöget alkot a másikkal. A második csoport periodusaira nézve

$$2d \leqq |p_2| \leqq 2D$$

....

s az n-dikre nézve $\quad nd \leqq |p_n| \leqq nD$

és $\quad n^s D^s \geqq |p_n| \leqq n^s d^s$

tehát $\quad \frac{1}{n^s D^s} \leqq \frac{1}{|p_n|^s} \leqq \frac{1}{n^s d^s} \qquad (1)$

a hol s positiv egész szám. Már azt egész n-edik csoport tagjaira nézve a fennebbi határok ugyanazok mindegyiknél a periodusok száma $8n$ és így az n-dik csoport tagjai reciprokjainak s-dik hatványait összegezve áll, hogy

$$\frac{8n}{n^s D^s} < \sum \frac{1}{|p_n|^s} < \frac{8n}{n^s d^s}$$

$$\frac{8}{n^{s-1} D^s} < \sum \frac{1}{|p_n|^s} < \frac{8}{d^s n^{s-1}}$$

Ez az egyenlőség áll minden periodusra, ha tehát ezeket n-re nézve summázzuk

$$\frac{8}{D^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{s-1}} < \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{p_n}\right|^s < \frac{8}{d^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{s-1}}$$

de az első-harmadik summa convergens, ha $s=3$, t. i. $\sum \frac{1}{n^2}$ és ugyanekkor convergens a közepén álló periodusok sora is ugyhogy $s=3$ veendő, tehát a második fajta primfüggvény $\quad E_2\left(\frac{u}{a}\right) = \left(1-\frac{u}{a}\right) e^{\frac{u}{a}+\frac{1}{2}\left(\frac{u}{a}\right)^2} \quad$ a hol a helyébe teendők az összes nullpontok: $2\nu\omega + 2\nu'\omega'$, kivévén azt $=0$, azaz $\nu'=\nu=0$; az ennek megfelelő u szorzót a függvény elé írjuk. Tehát

$$\sigma(u) = u \prod_{\nu,\nu'=-\infty}^{+\infty}{}' \left(1-\frac{u}{2\nu\omega+2\nu'\omega'}\right) e^{\frac{u}{2\nu\omega+2\nu'\omega'}+\frac{1}{2}\left(\frac{u}{2\nu\omega+2\nu'\omega'}\right)^2}$$

erről a végtelen szorzatról tudjuk, hogy feltétlenül és szorosabb értelemben convergens.

Már most vizsgáljuk meg ennek a $\sigma(u)$ függvénynek a tulajdonságait. E végett a kétszeresen végtelen szorzatot átalakítjuk egyszeresen végtelen szorzattá következőleg: mivel a végtelen szorzat feltétlenül convergens, szabad a szorzást tetszés szerinti sorrendben végezni. Szorozzunk tehát először

$$\nu'=0\,,\ \nu=-\infty \cdots\cdots +\infty$$

azután $\quad \nu'=1\,,\ \nu=-\infty \cdots\cdots +\infty$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots \text{stb.}$$

Jelöljük az első szorzatot P_0-val, akkor

$$P_0 = u \prod_{\nu=-\infty}^{+\infty}{}' \left(1-\frac{u}{2\nu\omega}\right) e^{\frac{u}{2\nu\omega}+\frac{1}{2}\left(\frac{u}{2\nu\omega}\right)^2}$$

ezt fel fogjuk bontani két, külön-külön feltétlenül conv. végtelen szorzatra, a mennyiben P_0 így is írható

$$P_0 = u \prod_{\nu=-\infty}^{+\infty}{}' \left(1-\frac{u}{2\nu\omega}\right) e^{\frac{u}{2\nu\omega}} \cdot \prod_{\nu=-\infty}^{+\infty}{}' e^{\frac{1}{2}\left(\frac{u}{2\nu\omega}\right)^2}$$

Határozzuk meg egyenként ezeknek értékét. Ha a sinus szorzatalakjában

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{r=-\infty}^{+\infty}{}' \left(1-\frac{z}{r}\right) e^{\frac{z}{r}}$$

$z = \frac{u}{2\omega}$, akkor

$$\sin \frac{u\pi}{2\omega} = \pi \frac{u}{2\omega} \prod_{r=-\infty}^{+\infty}{}' \left(1-\frac{u}{2r\omega}\right) e^{\frac{u}{2r\omega}}$$

tehát az első végtelen szorzat $\frac{2\omega}{\pi}\sin\frac{\pi u}{2\omega}$. A második végtelen szorzat így is írható

$$\prod_{r=-\infty}^{+\infty}{}' e^{\frac{1}{2}\left(\frac{u}{2r\omega}\right)^2} = e^{\sum_{-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{2}\frac{u^2}{4r^2\omega^2}} = e^{\frac{u^2}{8\omega^2}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{r^2}}$$

De láttuk, hogy $\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r^2} = \frac{\pi^2}{6}$, itt az exponensben ennek 2-szerese $\frac{\pi^2}{3}$ áll, tehát a második szorzat $e^{\frac{\pi^2 u^2}{24\omega^2}}$, úgyhogy $\mathcal{P}_0 = \frac{2\omega}{\pi} e^{\frac{\pi^2u^2}{24\omega^2}} \sin\frac{\pi u}{2\omega}$. $\mathcal{P}_1$-et nyerjük ha $r'=1$, $r=-\infty \dots\dots +\infty$ stb. Általánosan $\mathcal{P}_{r'}$-et nyerjük, ha r' egy fix szám és $r=-\infty \dots\dots +\infty$

$$\mathcal{P}_{r'} = \prod_{r=-\infty}^{+\infty}\left(1-\frac{\frac{u}{2\omega}}{r+r'\frac{\omega'}{\omega}}\right) e^{\frac{\frac{u}{2\omega}}{r+r'\frac{\omega'}{\omega}}+\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{u}{2\omega}}{r+r'\frac{\omega'}{\omega}}\right)^2}$$

ha t.i. $1-\frac{u}{2r\omega+2r'\omega'}$-ben felsőt és alsót 2ω-val osztjuk.

Ez a végtelen szorzat is felbontható két külön-külön convergens végtelen szorzatra

$$\mathcal{P}_{r'} = \prod_{r=-\infty}^{+\infty}\left(1-\frac{\frac{u}{2\omega}}{r+r'\frac{\omega'}{\omega}}\right) e^{\frac{\frac{u}{2\omega}}{r+r'\frac{\omega'}{\omega}}} \prod_{r=-\infty}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{u}{2\omega}}{r+r'\frac{\omega'}{\omega}}\right)^2}.$$

Határozzuk meg ezen két végtelen szorzat értékét. Láttuk, hogy

$$e^{\pi z \cot g \pi\alpha}\,\frac{\sin\pi(\alpha-z)}{\sin\pi\alpha} = \prod_{r=-\infty}^{+\infty}\left(1-\frac{z}{r+\alpha}\right)e^{\frac{z}{r+\alpha}}$$

ha ebben $z=\frac{u}{2\omega}$, $\alpha = r'\frac{\omega'}{\omega}$, kapjuk az első végtelen szorzat számára

$$\prod_{r=-\infty}^{+\infty}\left(1-\frac{\frac{u}{2\omega}}{r+r'\frac{\omega'}{\omega}}\right)e^{\frac{\frac{u}{2\omega}}{r+r'\frac{\omega'}{\omega}}} = e^{\frac{\pi u}{2\omega}\cot g\frac{\pi r'\omega'}{\omega}} \cdot \frac{\sin\pi\left(\frac{r'\omega'}{\omega}-\frac{u}{2\omega}\right)}{\sin\frac{\pi r'\omega'}{\omega}}$$

ez a formula csak akkor érvényes, ha $\alpha \neq 0$, ami ebben az esetben teljesül.

A második végtelen szorzat számára is van egy formulánk, melyet a sinus log. differentiálquotiensénél nyertünk

$$\frac{\pi^2}{\sin^2\pi z} = \sum_{r=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(z-r)^2}$$

z helyébe -z téve

$$\frac{\pi^2}{\sin^2\pi z} = \sum_{r=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(z+r)^2} \qquad (2.)$$

ha most a második végtelen szorzatot még más alakban írjuk

$$\prod_{r=-\infty}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{u}{2\omega}}{r+r'\frac{\omega'}{\omega}}\right)^2} = e^{\sum_{r=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{u}{2\omega}}{r+r'\frac{\omega'}{\omega}}\right)}$$

könnyen belátható, hogy ha (2)-ben $z=\frac{r'\omega'}{\omega}$ és $\frac{1}{2}\left(\frac{u}{2\omega}\right)^2$-el keresztül szorzunk, akkor

$$e^{\sum_{r=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{u}{2\omega}}{r+r'\frac{\omega'}{\omega}}\right)^2} = e^{\frac{u^2}{8\omega^2}\cdot\frac{\pi^2}{\sin^2\frac{\pi r'\omega'}{\omega}}}$$

tehát

$$\mathcal{P}_{r'} = e^{\frac{u^2}{8\omega^2}\cdot\frac{\pi^2}{\sin^2\frac{\pi r'\omega'}{\omega}}}\cdot\frac{\sin\pi\left(\frac{r'\omega'}{\omega}-\frac{u}{2\omega}\right)}{\sin\frac{\pi r'\omega'}{\omega}}\cdot e^{\frac{\pi u}{2\omega}\cot g\frac{\pi r'\omega'}{\omega}}$$

Ha most $\nu' = -\infty \ldots\ldots +\infty$, kivéve 0, akkor a kétszeresen végtelen szorzat egyszeresen végtelen szorzatalakban így írható fel

$$\sigma(u) = P_0 \cdot \prod_{\nu'=-\infty}^{+\infty}{}' P_{\nu'}$$

s ha a $P_{\nu'}$-re vonatkozó productumot felbontjuk kettőre, akkor

$$\sigma(u) = \frac{2u}{\pi} e^{\frac{\pi^2 u^2}{24\omega^2}} \cdot \sin\frac{\pi u}{2\omega} \prod_{\nu'=-\infty}^{+\infty}{}' e^{\frac{u^2}{8\omega^2}\frac{\pi^2}{\sin^2\frac{\pi\nu'\omega'}{\omega}}} \prod_{\nu'=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{\sin\pi\left(\frac{\nu'\omega'}{\omega}-\frac{u}{2\omega}\right)}{\sin\frac{\pi\nu'\omega'}{\omega}} e^{\frac{\pi u}{2\omega}\operatorname{cotg}\frac{\pi\nu'\omega'}{\omega}}$$

ezt szabad tenni, mert az egész szorzat valamint az első is feltétlenül convergens tehát a leválasztott második az. S ha az első szorzatot felvisszük az exponensbe összegnek s az első exponentiális factort ezzel összevonjuk,

akkor

$$\sigma(u) = \frac{2u}{\pi} e^{\frac{\pi^2 u^2}{24\omega^2} + \frac{\pi^2 u^2}{8\omega^2}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{\sin^2\frac{\pi\nu'\omega'}{\omega}}} \cdot \sin\frac{\pi u}{2\omega} \cdot \prod_{\nu'=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{\sin\pi\left(\frac{\nu'\omega'}{\omega}-\frac{u}{2\omega}\right)}{\sin\frac{\pi\nu'\omega'}{\omega}} e^{\frac{\pi u}{2\omega}\operatorname{cotg}\frac{\pi\nu'\omega'}{\omega}}$$

Vezessük be most a következő rövidített jelölést, legyen

$$\eta = \frac{\pi^2}{12\omega} + \frac{\pi^2}{4\omega} \sum_{\nu'=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{\sin^2\frac{\pi\nu'\omega'}{\omega}}$$

tehát η csak a periódus függvénye; ha ezt keresztül szorozzuk $\frac{u^2}{2\omega}$-val, kapjuk az első exponenst, úgyhogy

$$\sigma(u) = \frac{2u}{\pi} e^{\frac{\eta}{2\omega}u^2} \cdot \sin\frac{\pi u}{2\omega} \prod_{\nu'=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{\sin\pi\left(\frac{\nu'\omega'}{\omega}-\frac{u}{2\omega}\right)}{\sin\frac{\pi\nu'\omega'}{\omega}} \cdot e^{\frac{\pi u}{2\omega}\operatorname{cotg}\frac{\pi\nu'\omega'}{\omega}}$$

Még ki kell mutatni, hogy η convergens sor. Tudjuk, hogy $\sin_{y=\infty}(x+yi) = \infty$ tehát ν'-el $\sin^2\frac{\pi\nu'\omega'}{\omega}$ is minden határon túl nő, mert $\frac{\omega'}{\omega}$ complex; és pedig mivel $\sin\alpha = \frac{e^{\alpha i} - e^{-\alpha i}}{2i}$ a sinus úgy megy a végtelenbe, mint az exponentiális függvény tehát magasabb rangú végtelen nagy, mint a hatvány-mennyiség α, akkor bizonyos ν'-től kezdve

$$|\sin\nu'\alpha| > |\nu'\alpha|$$

$$|\sin^2\nu'\alpha| > |\nu'^2\alpha^2|$$

tehát

$$\frac{1}{|\sin^2\nu'\alpha|} < \frac{1}{|\nu'^2\alpha^2|}$$

és

$$\sum \frac{1}{|\sin^2\nu'\alpha|} < \sum \frac{1}{|\nu'^2\alpha|} = \frac{1}{\alpha^2}\sum\frac{1}{\nu'^2}$$

ez utóbbi pedig convergens, tehát η is convergens, a hol $\alpha = \frac{\pi\omega'}{\omega}$. A $\sigma(u)$ legutóbbi előállításában a $\prod$-ban a (ν') és $(-\nu')$-re vonatkozó faktorokat egygyé vonhatjuk össze. Ez a két faktor

$$\frac{\sin\pi\left(\frac{\nu'\omega'}{\omega}-\frac{u}{2\omega}\right)}{\sin\frac{\pi\nu'\omega'}{\omega}} e^{\frac{\pi u}{2\omega}\operatorname{cotg}\frac{\pi\nu'\omega'}{\omega}} \quad \text{és} \quad \frac{\sin\pi\left(\frac{-\nu'\omega'}{\omega}-\frac{u}{2\omega}\right)}{\sin\left(\frac{-\pi\nu'\omega'}{\omega}\right)} e^{\frac{\pi u}{2\omega}\operatorname{cotg}\frac{-\pi\nu'\omega'}{\omega}}$$

ezeknek szorzatában az exponentiális faktor kiesik, úgyhogy

$$\sigma(u) = \frac{2\omega}{\pi} e^{\frac{\eta}{2\omega}u^2} \sin\frac{\pi u}{2\omega} \prod_{\nu'=1}^{+\infty} \frac{\sin\pi\left(\frac{\nu'\omega'}{\omega}-\frac{u}{2\omega}\right)\sin\pi\left(\frac{\nu'\omega'}{\omega}+\frac{u}{2\omega}\right)}{\sin^2\frac{\pi\nu'\omega'}{\omega}}$$

De a Π megett ily alaku kifejezés áll

$$\frac{\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta)}{\sin^2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha\cos^2\beta-\cos^2\alpha\sin^2\beta}{\sin^2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha(1-\sin^2\beta)-(1-\sin^2\alpha)\sin^2\beta}{\sin^2\alpha}$$

$$=1-\sin^2\beta-(1-\sin^2\alpha)\frac{\sin^2\beta}{\sin^2\alpha}=1-\sin^2\beta-\frac{\sin^2\beta}{\sin^2\alpha}+\sin^2\beta=1-\frac{\sin^2\beta}{\sin^2\alpha}$$

azaz $\frac{\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta)}{\sin^2\alpha}=1-\frac{\sin^2\beta}{\sin^2\alpha}$ ha tehát $\alpha'=\frac{\pi\nu'\omega'}{\omega}$ és $\beta=\frac{\pi u}{2\omega}$, akkor a $\sigma(u)$ így is irható

$$\sigma(u)=\frac{2u}{\pi}e^{\frac{\eta}{2\omega}u^2}\sin\frac{\pi u}{2\omega}\prod_{\nu'=1}^{\infty}\left(1-\frac{\sin^2\frac{\pi u}{2\omega}}{\sin^2\frac{\pi\nu'\omega'}{\omega}}\right)$$

és erről a Π-ról tudjuk, hogy feltétlenül convergens, mert (η-nál) az imént mutattuk ki, hogy az additiv tagok sora

$$\sum\frac{\sin^2\frac{\pi u}{2\omega}}{\sin^2\frac{\pi\nu'\omega'}{\omega}}=\sin^2\frac{\pi u}{2\omega}\sum\frac{1}{\sin^2\frac{\pi\nu'\omega'}{\omega}}$$

feltétlenül convergens. Ebből az előállitásból kiolvashatók a σ függvény tulajdonságai. Igy a σ függvény páratlan jellegü, mert ha u helyébe $(-u)$ teszünk, az exponens és a productum nem változik, mert mind-kettőben négyzetek szerepelnek, de a $\sin\frac{\pi u}{2\omega}$ jegyet változtat; tehát $\sigma(-u)=-\sigma(u)$ és így a σ sorában csak páratlan kitevőjü hatványok szerepelnek.

Ha u helyébe $(u+2\omega)$ teszünk

$$\sin\frac{\pi(u+2\omega)}{2\omega}=\sin\left(\frac{\pi u}{2\omega}+\pi\right)=-\sin\frac{\pi u}{2\omega}$$

és

$$\sin^2\frac{\pi(u+2\omega)}{2\omega}=\sin^2\frac{\pi u}{2\omega}$$

tehát a Π productum nem változik; $\sin\frac{\pi u}{2\omega}$ jegyet változtat; s a mi az exponentiális faktort illeti, ez következőleg alakul;

$$\frac{\eta}{2\omega}(u+2\omega)^2=\frac{\eta}{2\omega}(u^2+4u\omega+4\omega^2)=\frac{\eta}{2\omega}u^2+2\eta(u+\omega)$$

tehát $\qquad e^{\frac{\eta}{2\omega}(u+2\omega)^2}=e^{\frac{\eta}{2\omega}u^2}\cdot e^{2\eta(u+\omega)}$

ugyhogy $\qquad \sigma(u+2\omega)=-e^{2\eta(u+\omega)}\cdot\sigma(u) \qquad$ II.

Ha u helyébe $u+2\omega'$ teszünk, a változást ki olvashatnók a σ függvény egy más alakjából, a hol ω helyet ω' és ω' helyett ω szerepel, mert hisz eredeti alakjában a σ függvény ω és ω'-ben teljesen symmetricus (202 oldalon 2ω helyett $2\omega'$-el is oszthatunk volna) s ha ugyanazokat az átalakitásokat végezzük mint ugyanott, felcserélve ν és ν' szerepét, akkor σ-nak oly előállitásához jutunk, a hol ω és ω' szerepet cserél, η helyébe lép η'; mely

$$\eta'=\frac{\pi^2}{12\omega'}+\frac{\pi^2}{4\omega'}\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sin^2\frac{\pi\nu\omega}{\omega'}}$$

Tehát $$\sigma(u) = \frac{2\omega'}{\pi}\, e^{\frac{\eta'}{2\omega'}u^2} \cdot \sin\frac{\pi u}{2\omega'} \prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\sin^2\frac{\pi u}{2\omega'}}{\sin^2\frac{\nu\pi\omega}{\omega'}}\right)$$

És ebből az előállításból adódik, hogy

$$\sigma(u+2\omega') = -e^{2\eta'(u+\omega')}\cdot\sigma(u) \qquad \underline{III}.$$

Ha most $\underline{II}$ szerint deriváljuk u szerint

$$\sigma'(u+2\omega) = -e^{2\eta(u+\omega)}\cdot 2\eta\cdot\sigma(u) - e^{2\eta(u+\omega)}\cdot\sigma'(u)$$

és így $\sigma(u+2\omega)$ log. differentiálquotiense,

$$\frac{\sigma'(u+2\omega)}{\sigma(u+2\omega)} = 2\eta + \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)} \qquad (3.)$$

Mivel $\sigma(u)$ páratlan, azért $\sigma'(u)$ páros jellegű, és így ha $u=-\omega$ teszünk

$$\frac{\sigma'(\omega)}{\sigma(\omega)} = 2\eta + \left[\frac{\sigma'(-\omega)}{\sigma(-\omega)}\right] = 2\eta - \frac{\sigma'(\omega)}{\sigma(\omega)}$$

a miből következik, hogy $\eta = \frac{\sigma'(\omega)}{\sigma(\omega)}$ $\underline{III}$ log. diff. quotienséből adódik

$$\eta' = \frac{\sigma'(\omega')}{\sigma(\omega')}$$

A $\frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}$ transc. tört függvényt jelöljük $\zeta(u)$-val

$$\frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)} = \zeta(u) \qquad (4)$$

ez tehát páratlan jellegű. Ezen $\zeta(u)$ alaptulajdonságai könnyen adódnak a definitiójából; (3) szerint

$$\zeta(u+2\omega) = 2\eta + \zeta(u) \qquad (1.)$$

$$\zeta(u+2\omega') = 2\eta' + \zeta(u) \qquad (2.)$$

s ezeket deriválva

$$\zeta'(u+2\omega) = \zeta'(u) \qquad d(1)$$

$$\zeta'(u+2\omega') = \zeta'(u) \qquad d(2)$$

vagyis $\zeta(u)$ kétszeresen periodicus függvény, s ezzel egyszersmind ki van mutatva, hogy tényleg léteznek ily kp. függvények. Ezt a $\zeta'(u)$ függvényt következőleg jelöljük

$$-\zeta'(u) = \wp(u) \qquad (5.)$$

Ezen ζ és $\wp$ függvények számára keressünk analytikai kifejezést. Erre felhasználjuk a σ kétszeresen végtelen szorzatalakját. Ennek log. differentiál quotiense adja ζ-t s ennek deriváltja $\wp$-t. Tehát ha röviden

$2\nu\omega + 2\nu'\omega' = 2\omega$

$$\sigma(u) = u \prod{}'\left(1-\frac{u}{2\omega}\right) e^{\frac{u}{2\omega}+\frac{1}{2}\left(\frac{u}{2\omega}\right)^2}$$

és

$$\log\sigma(u) = \log u + \sum{}'\left(\log(2\omega-u) - \log 2\omega + \frac{u}{2\omega} + \frac{1}{2}\left(\frac{u}{2\omega}\right)^2\right)$$

és

$$\frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)} = \zeta(u) = \frac{1}{u} + \sum{}'\left(\frac{1}{u-2\omega} + \frac{1}{2\omega} + \frac{u}{4\omega^2}\right)$$

a summában minden periodust téve, kivéve nullát. És most

$$-\zeta'(u) = \wp(u) = \frac{1}{u^2} + \sum{}'\left(\frac{1}{(u-2\omega)^2} - \frac{1}{4\omega^2}\right)$$

Ez a keresett két analytikai előállítás $\zeta(u)$ illetőleg $\wp(u)$ számára. $\wp(u)$

tehát elő van állítva partiális törtekkel. (4) és (5)-ből következik, hogy ζ és p-nek ott polusai vannak, a hol σ-nak nullapontjai és pedig p-nek 2-szeres polusai és fordítva p-nek ott vannak nullapontjai, a hol σ-nak polusai.

Miután σ páratlan, σ' páros, azért
$$\frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)} = \zeta(u)$$
páratlan jellegű tehát $\zeta(-u) = -\zeta(u)$ és ennek deriváltja $p(u)$ páros jellegű, azaz $p(-u) = p(u)$

Keressünk most egyébb kapcsolatokat. Ha III-ban u helyébe $u+2\omega$ teszünk, s az így nyert formulába II beteszszük

$$(6.)\qquad \sigma(u+2\omega+2\omega') = -e^{2\eta'(u+2\omega+\omega')}\cdot\sigma(u+2\omega) = -e^{2\eta'(u+2\omega+\omega')+2\eta(u+\omega)}\cdot\sigma(u)$$

és II-ben u helyébe $u+2\omega'$ téve, majd $\sigma(u+2\omega')$ értéket III ból behelyettesítve, kapjuk
$$\sigma(u+2\omega+2\omega') = -e^{2\eta(u+2\omega'+\omega)}\sigma(u+2\omega') = -e^{2\eta(u+2\omega'+\omega)+2\eta'(u+\omega')}\cdot\sigma(u) \quad (7)$$

tehát kell, hogy (6) és (7) hányadosa 1 legyen, azaz
$$e^{\underline{2\eta' u}+4\eta'\omega+\underline{2\eta'\omega'}+\underline{2\eta u}+\underline{2\eta\omega}-\underline{2\eta u}-4\eta\omega'-\underline{2\eta\omega}-\underline{2\eta' u}-\underline{2\eta'\omega'}} = 1$$

de az aláhuzott részek összege 0, és így
$$e^{4\eta'\omega-4\eta\omega'} = e^{4(\eta'\omega-\eta\omega')} = 1$$
a mi csak akkor következik be, ha
$$4(\eta\omega'-\eta'\omega) = 2k\pi i$$
azaz
$$\eta\omega'-\eta'\omega = k\frac{\pi}{2}i$$

Ezt a k értéket kell most meghatározni. E végett kiindulunk a σ függvény egyszeresen végtelen szorzatalakjából
$$\sigma(u) = \frac{2\omega}{\pi}e^{\frac{\eta}{2\omega}u^2}\sin\frac{\pi u}{2\omega}\prod_{\nu'=1}^{\infty}\frac{\sin\pi\left(\frac{\nu'\omega'}{\omega}+\frac{u}{2\omega}\right)\sin\left(\frac{\nu'\omega'}{\omega}-\frac{u}{2\omega}\right)}{\sin^2\frac{\pi\nu'\omega'}{\omega}}$$
melynek log. diff. quotiense
$$\frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)} = \frac{\eta}{\omega}u+\frac{\pi}{2\omega}\operatorname{cotg}\frac{\pi u}{2\omega}+\frac{\pi}{2\omega}\sum_{\nu'=1}^{\infty}\left(\operatorname{cotg}\pi\left(\frac{\nu'\omega'}{\omega}+\frac{u}{2\omega}\right)-\operatorname{cotg}\pi\left(\frac{\nu'\omega'}{\omega}-\frac{u}{2\omega}\right)\right)$$

ha ebben $u=\omega'$ teszünk, kapjuk $\frac{\sigma'(\omega')}{\sigma(\omega')} = \eta'$
$$\eta' = \frac{\eta}{\omega}\cdot\omega'+\frac{\pi}{2\omega}\operatorname{cotg}\frac{\pi\omega'}{2\omega}+\frac{\pi}{2\omega}\sum_{\nu'=1}^{\infty}\left(\operatorname{cotg}\frac{\pi\omega'}{2\omega}(2\nu'+1)-\operatorname{cotg}\frac{\pi\omega'}{2\omega}(2\nu'-1)\right)$$
és ω-val keresztül szorozva, a jobboldal első tagját átvive és $\frac{\pi\omega'}{2\omega} = \alpha$ téve
$$\eta'\omega-\eta\omega' = \frac{\pi}{2}(\operatorname{cotg}\alpha+(\operatorname{cotg}3\alpha-\operatorname{cotg}\alpha)+(\operatorname{cotg}5\alpha-\operatorname{cotg}3\alpha)+\dots+\operatorname{cotg}(2\nu'+1)\alpha-\operatorname{cotg}(2\nu'-1)\alpha+\dots$$
Ezen végtelen sor értéke annyi mint első ν' tagjából alkotott összeg limese; de az első, első 2, 3, ... ν' tagok összege rendre $\operatorname{cotg}\alpha$; $\operatorname{cotg}3\alpha$ ... $\operatorname{cotg}(2\nu'+1)\alpha$ vagyis az első ν' tag összege $\operatorname{cotg}(2\nu'+1)\alpha$. És miután α képzetes része positiv azért $\nu'=\infty$ mellett a cotg. megetti argumentum képzetes része mint positiv mennyiség megy a végtelenbe és mivel $\lim\limits_{y=\infty}\operatorname{cotg}(x+yi) = -i$, azért
$$\lim_{\nu'}\operatorname{cotg}(2\nu'+1)\alpha = -i,\quad \text{úgyhogy}\quad \eta'\omega-\eta\omega' = -\frac{\pi}{2}i$$

azaz $\eta\omega' - \eta'\omega = \frac{\pi}{2} i$ (8.)

tehát $\kappa = +i$

A kétszeresen periodusos függvények létezésének kimutatása és ezen függvények felkeresése.

Keressük fel ezt a kp. transc. tört függvényt $F(u)$, melynek a főparallelogrammán belül fekvő pontjai $\alpha_1 \; \alpha_2 \; \alpha_3 \; \dots \; \alpha_k \dots$

polusai $\beta_1 \; \beta_2 \; \beta_3 \; \dots \; \beta_k \dots$

Láttuk, hogy az ezen, és az ezzel congruens 0 pontokkal és polusokkal biró, transc. tört függvények mind bennefoglaltatnak ebben az alakban

$$F(u) = e^{f(u)} \frac{\sigma(u-\alpha_1)\sigma(u-\alpha_2) \dots \sigma(u-\alpha_k)}{\sigma(u-\beta_1)\sigma(u-\beta_2) \dots \sigma(u-\beta_k)}$$

a hol $f(u)$ vagy rat. vagy transc. egész függvény, vagy constans. Ezt az $f(u)$ függvényt kell most meghatározni úgy, hogy a $F(u)$ függvény kp. legyen, azaz, hogy $\frac{F(u+2\omega)}{F(u)} = 1$ és $\frac{F(u+2\omega')}{F(u)} = 1$ legyen.

Ha a fennti $F(u)$ függvény rövidség kedvéért

$$F(u) = e^{f(u)} \prod \frac{\sigma(u-\alpha)}{\sigma(u-\beta)}$$

a hol α felveszi egymásután az összes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots \alpha_k$
és β az összes $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots \beta_k$ értékeket, akkor

$$F(u+2\omega) = e^{f(u+2\omega)} \prod \frac{\sigma(u-\alpha+2\omega)}{\sigma(u-\beta+2\omega)}$$

tehát
$$\frac{F(u+2\omega)}{F(u)} = e^{f(u+2\omega)-f(u)} \prod \frac{\sigma(u-\alpha+2\omega)}{\sigma(u-\alpha)} : \prod \frac{\sigma(u-\beta+2\omega)}{\sigma(u-\beta)}$$

és ha $\frac{\sigma(u+2\omega)}{\sigma(u)} = -e^{2\eta(u+\omega)}$ szerint $\frac{\sigma(u-\alpha+2\omega)}{\sigma(u-\alpha)} = -e^{2\eta(u+\omega-\alpha)} = -e^{2\eta(u+\omega)-2\eta\alpha}$

akkor
$$\frac{F(u+2\omega)}{F(u)} = e^{f(u+2\omega)-f(u)} (-1)^{\kappa} e^{2\eta\kappa(u+\omega)-2\eta\Sigma\alpha} : (-1)^{h} e^{2h\eta(u+\omega)-2\eta\Sigma\beta}$$

és ez egyenlő kell legyen 1-gyel.

Miután $(-1) = e^{\pi i}$, $(-1)^{\kappa} = e^{\kappa\pi i}$, $(-1)^{h} = e^{h\pi i}$, ezeket bevezetve és osztást végrehajtva, a követelés így is irható:

$$\frac{F(u+2\omega)}{F(u)} = e^{f(u+2\omega)-f(u)+\kappa\pi i+2\kappa\eta(u+\omega)-2\eta\Sigma\alpha-h\pi i-2h\eta(u+\omega)+2\eta\Sigma\beta} = 1$$

és ez teljesül, ha az exponens $2\pi i$ egész számu többszöröse, pl $(-\mu')$-szerese, tehát ha

$$f(u+2\omega)-f(u)+(\kappa-h)\pi i+2(\kappa-h)\eta(u+\omega)-2\eta(\Sigma\alpha-\Sigma\beta) = -2\mu'\pi i.$$

Ugyanehez a feltételhez jutunk a $2\omega'$ periodusra vonatkozólag, csakhogy itt η helyébe megfelelőleg η' lép, tehát másodszor kell, hogy

$$f(u+2\omega')-f(u)-(\varkappa-h)\pi i+2(\varkappa-h)\eta'(u+\omega')-2\eta'(\sum\alpha-\sum\beta)=2\mu\pi i$$

legyen. Kérdés, mikor teljesül ez a két egyenlet egyszerre, és mi következik ezen két egyenlet teljesüléséből? Ha mindkét egyenletet kétszer deriváljuk kapjuk

$$f''(u+2\omega)-f''(u)=0$$
$$f''(u+2\omega')-f''(u)=0$$

tehát $f''(u)$ kp. függvény és így $f''(u)$ sem rat. sem transc. egészfüggvény nem lehet, hanem csak constans, úgyhogy $f(u)$ legfeljebb quadraticus

$$f(u)=a_0+a_1u+a_2u^2$$

Most számítsuk ki a (9) és (10)-ben szereplő $f(u+2\omega)-f(u)$ illetőleg $f(u+2\omega')-f(u)$.

$$f(u+2\omega)=a_0+a_1(u+2\omega)+a_2(u+2\omega)^2$$

tehát

$$f(u+2\omega)-f(u)=2a_1\omega+4a_2\omega(u+\omega)$$
$$f(u+2\omega')-f(u)=2a_1\omega'+4a_2\omega'(u+\omega')$$

úgyhogy a (9) és (10) feltételek így is írhatók

$$2a_1\omega+4a_2\omega(u+\omega)+(\varkappa-h)\pi i+2(\varkappa-h)\eta(u+\omega)-2\eta(\sum\alpha-\sum\beta)=-2\mu'\pi i$$
$$2a_1\omega'+4a_2\omega'(u+\omega')+(\varkappa-h)\pi i+2(\varkappa-h)\eta'(u+\omega')-2\eta'(\sum\alpha-\sum\beta)=2\mu\pi i$$

s miután a jobboldalon u nem szerepel, a baloldalon is u szorzója 0 kell legyen, így kapjuk, hogy

$$4a_2\omega+2(\varkappa-h)\eta=0 \qquad (1)$$
$$4a_2\omega'+2(\varkappa-h)\eta'=0 \qquad (2.)$$

és miután

$$\eta'\omega-\eta\omega'=-\frac{\pi}{2}i$$

ha (1) szorozzuk ω', (2.) ω-val, s előbbit utóbbiból kivonjuk kapjuk, hogy

$$(\varkappa-h)\pi i=0 \qquad \text{azaz } \varkappa=h \qquad \underline{\text{IV}}.$$

és (1) szorozva η'-el, (2) η-val és összeadva $2a_2\pi i=0$ azaz $a_2=0$.

Vagyis $\underline{\text{IV}}$ szerint a főppban annyi nullpont kell legyen, mint polus és $a_2=0$ kell legyen vagyis $f(u)$ csak elsőfokú rat. függvény, s így (9) és (10) következőleg alakul át

$$2a_1\omega-2\eta(\sum\alpha-\sum\beta)=-2\mu'\pi i \qquad (3.)$$
$$2a_1\omega'-2\eta'(\sum\alpha-\sum\beta)=2\mu\pi i \qquad (4.)$$

és (3) szorozva $(-\omega')$-el, (4) ω-val és összeadva, kapjuk, hogy

$$(\sum\alpha-\sum\beta)\pi i=(2\mu\omega+2\mu'\omega')\pi i$$

azaz

$$\sum\alpha-\sum\beta=2\mu\omega+2\mu'\omega' \qquad \underline{\text{V}}$$

Tehát a főparallelogrammában levő o pontok összegének és polusok összegének különbsége periodus kell legyen:

(3) szorozva $(-\eta')$-el (4) η-val és összeadva

$$a_1 \pi i = \pi i (2\mu\eta + 2\mu'\eta')$$

tehát

$$a_1 = 2\mu\eta + 2\mu'\eta' \qquad \underline{VI}.$$

Ha tehát teljesül az $\underline{V}$ és $\underline{VI}$ feltétel, akkor $e^{a_0} = C$ írva,

$$\mathcal{F}(u) = C \cdot e^{(2\mu\eta + 2\mu'\eta')u} \cdot \frac{\sigma(u-\alpha_1)\,\sigma(u-\alpha_2)\cdots\sigma(u-\alpha_k)}{\sigma(u-\beta_1)\,\sigma(u-\beta_2)\cdots\sigma(u-\beta_k)}$$

A kétszeresen periodusos függvényeket elipticus függvényeknek is nevezik. Az ellipt. függvényeknek tehát egy jyzban egyenlő számú nullapontjai és polusai vannak; a nullapontok öszege congruens a polusok összegé=vel; az ellipt. függvény teljesen meg van határozva, ha ismerjük egy primitiv periodus párját $2\omega, 2\omega'$, a nullapontokat és polusokat, és a függvény értékét egy helyen, a hol nem 0 vagy ∞, utóbbit azért, hogy meghatározhassuk a constanst. De nem szükséges a nullapontokat és polusokat a főparallélo=grammán belül venni, mert vehetünk ezek helyett congruens értékeket is sőt ezáltal egyszerűbb alakra is hozhatjuk az ellipt. függvényeket. Mivel ugyanis

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_k - \beta_1 - \beta_2 - \beta_3 - \cdots - \beta_k - 2\mu\omega - 2\mu'\omega' = 0$$

ha $\alpha_1 - 2\mu\omega - 2\mu'\omega' = \alpha_1'$ és α_1 helyett bevezetjük α_1', a mely vele congruens, akkor

$$\alpha_1' + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k - \beta_1 - \beta_2 - \cdots - \beta_k = 0$$

vagyis

$$\Sigma\alpha = \Sigma\beta, \qquad \text{nemcsak congruens}, \quad (11)$$

és így $\underline{V}$ szerint $2\mu\eta + 2\mu'\eta' = 0$ levén, az ellipt. függvény erre az alakra reducálódik

$$\mathcal{F}(u) = e \cdot \frac{\prod \sigma(u-\alpha)}{\prod \sigma(u-\beta)} \qquad \underline{VII}^{x}$$

A nullapontok czélszerű megválasztásával tehát mindig erre az alakra hozhatjuk az ellipt. függvényeket. Ezentúl tehát feltesszük, hogy (11) bekövetkezik: Ha $\mathcal{F}(u)$ ellipt. függvény és C egy tetszésszerinti constans, akkor világos, hogy $\mathcal{F}(u) - C$ is ellipt. függvény, melynek ugyanannyi polusa és nullapontja van, mint $\mathcal{F}(u)$-nak és pedig polusai ugyanazok

$$\beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3 \quad \cdots \quad \beta_k$$

míg nullapontjai $\quad \gamma_1 \quad \gamma_2 \quad \gamma_3 \quad \cdots \quad \gamma_k$

ezen k γ érték mellett teljesül az $\mathcal{F}(u) - C$ egyenlet. Vagyis minden ellipt.

függvény minden adott értéket annyiszor veszen fel, a hány nullapontja van egy ppban, és

$$\Sigma\alpha \equiv \Sigma\beta \equiv \Sigma\gamma$$

Az ellipt. függvény tehát úgy viselkedik a ppban, mint a rat. egész függvény az egész számsíkon. Az ellipt. függvényt annyiad fokúnak nevezzük, a hány nullapontja van egy ppban vagyis a hányszor egy adott értéket a ppban felveszen.

Oly ellipt. függvény, melynek fokszáma 1, vagyis a melynek egy ppban egy α nullapontja és egy β polusa volna nincsen, mert $\underline{V}$ szerint $\alpha \equiv \beta$ vagyis az α nullponttal congruens β helyen a függvényérték nem volna 0, a mint kellene, hanem végtelen nagy. Tehát a legkisebb fokszám 2, mert hisz végtelen sok olyan szám létezik, melyekre nézve $\alpha_1 + \alpha_2 = \beta_1 + \beta_2$ s a másodfokú ellipt. függvény általános alakja

$$\mathcal{F}(u) = C \cdot \frac{\sigma(u-\alpha_1)\sigma(u-\alpha_2)}{\sigma(u-\beta_1)\sigma(u-\beta_2)}$$

és ez a legegyszerübb ellipt függvény. Ilyen a Weierstrass által bevezetett és fennt ismertetett $\wp(u)$ függvény, ez másodfokú ellipt. függvény, mert tudjuk, hogy ott válik végtelenné, a hol $\sigma(u)=0$, ez pedig egy ppban két helyen következik be. Láttuk, hogy

$$\sigma(u) = u \prod\left(1 - \frac{u}{2w}\right) e^{\frac{u}{2w} + \frac{1}{2}\left(\frac{u}{2w}\right)^2}$$

Ebből látható, hogy $\lim\limits_{\varkappa=0} \frac{\sigma(u)}{u} = 1$ vagyis, hogy a páratlan σ függvény sorában nincsen szabad tag és u coefficiense 1, azaz

$$\sigma(u) = u + A_3 u^3 + A_5 u^5 + \cdots\cdots \qquad (12)$$

Láttuk továbbá, hogy $\quad \zeta(u) = \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)} = \frac{1}{u} + \sum{}'\left(\frac{1}{u-2w} + \frac{1}{2w} + \frac{u}{(2w)^2}\right)$

Ebből az alakból adódik $\zeta(u)$ sora 0 körül. Ugyanis

$$\frac{1}{u-2w} = -\frac{1}{2w}\left(1 - \frac{u}{2w}\right)^{-1} = -\frac{1}{2w} - \frac{u}{(2w)^2} - \frac{u^2}{(2w)^3} - \cdots\cdots - \frac{u^n}{(2w)^{n+1}} - \cdots$$

és ebből $\quad \frac{1}{u-2w} + \frac{1}{2w} + \frac{u}{(2w)^2} = -\frac{u^2}{(2w)^3} - \frac{u^3}{(2w)^4} - \cdots\cdots$

s ez convergens a 0 centrumu, $2w$ sugarú körön belül. Ez a sor képezi általános tagját a fennti Σ-nak s erre nézve summázni kell $\nu', \nu = -\infty \ldots : +\infty$. Látható, hogy e zonkörben az u páros kitevőjü hatványait tartalmazó tagok párosával kiesnek, mivel ezeknél a nevezőben álló $2w$ páratlan kitevőjü hatványon szerepel. Így tehát, $\zeta(u)$ egy végtelen sok hatványsorból álló sor lesz, melyben csak u páratlan hatványai szerepelnek; ezt össze lehet vonni egyetlen egy u páratlan hatványai szerint haladó sorrá, mert a megfelelő coefficiensek sora

$$\sum{}' \frac{1}{(2w)^{2\varkappa}} = s_{2\varkappa} \qquad (\varkappa = 1, 2, 3 \cdots\cdots)$$

amint láttuk convergens és így

$$\zeta(u) = \frac{1}{u} - s_4 u^3 - s_6 u^5 - s_8 u^7 - s_{10} u^9 - \dots - s_{2n+2} u^{2n+1} - \dots \quad (13)$$

És végre $\quad p(u) = \frac{1}{u^2} + \sum{}' \left(\frac{1}{(u-2\omega)^2} - \frac{1}{(2\omega)^2} \right)$

ami nem egyéb, mint $-\zeta'(u)$ tehát sora adódik $\zeta(u)$ tagonkénti deriválásából

$$p(u) = \frac{1}{u^2} + 3 s_4 u^2 + 5 s_6 u^4 + 7 s_8 u^6 + \dots + (2n+1) s_{2n+2} u^{2n} \dots (14)$$

halad u páros kitevőjü hatványai szerint, mert hisz páros függvény. Alkossuk meg $p(u)$ deriváltját $p'(u)$-t. Megjegyzendő, hogy a periodicus függvény deriváltja is periodicus függvény, mert ha

$f(u+2\omega) = f(u)$ akkor mindkét oldalt deriválva

$f'(u+2\omega) = f'(u)$ tehát a derivált is periód. függvény.

És most $\quad p'(u) = -\frac{2}{u^3} - \sum{}' \frac{1}{(u-2\omega)^3}$ s a külső tagot beírva

$$p'(u) = -2 \sum \frac{1}{(u-2\omega)^3}$$

és a sora $\quad p'(u) = -\frac{2}{u^3} + 2\cdot 3 s_4 u + 4\cdot 5 s_6 u^3 + \dots \quad (15.)$

(14.)-ből látható, hogy $p(u)$-nak 0-ban kétszeres polusa van, (15)-ből, hogy $p'(u)$-nak 0-ban 3szoros polusa van; tehát annak polusai 0, 0, ennek 0, 0, 0, vagyis $p(u)$ másodfoku, $p'(u)$ harmadfoku ell. függvény.

Láttuk, hogy a másodfoku ell. függvény normális alakja

$$F(u) = C \frac{\sigma(u-\alpha_1)\sigma(u-\alpha_2)}{\sigma(u-\beta_1)\sigma(u-\beta_2)}$$

továbbá, hogy a $p(u)-p(v)$ függvény szintén másodfoku ellipt. függvény, (ha v egy állandó, tehát $p(v)$ is) és ennek polusai ugyanazok, mint $p(u)$ polusai vagyis 0, 0, nullapontjai, a mint látható v és $-v$, úgyhogy a normális alak szerint

$$p(u) - p(v) = C \frac{\sigma(u-v)\sigma(u+v)}{\sigma^2(u)} \quad (1)$$

Most kell meghatarozni a multiplicatio constanst. Tudjuk, hogy $[u^2 p(u)]_{u=0} = 1$ tehát szorozzuk meg a fennti egyenlet oldalait u^2-el, kapjuk

$$u^2 p(u) - u^2 p(v) = C u^2 \frac{\sigma(u-v)\sigma(u+v)}{(u + A_3 u^3 + A_5 u^5 + \dots)^2} = C u^2 \frac{\sigma(u-v)\sigma(u+v)}{u^2 (1 + A_3 u^2) + \dots)^2}$$

$$= C \frac{\sigma(u-v)\sigma(u+v)}{(1 + A_3 u^2 + \dots)^2}$$

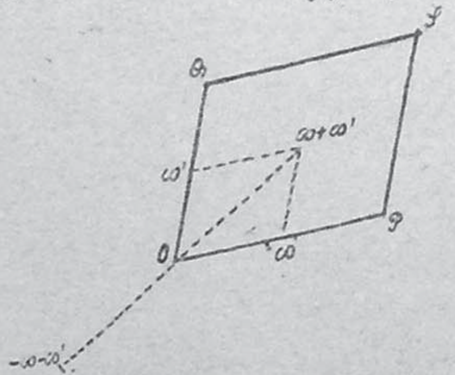
és ha $u=0$, $\quad 1 = C \frac{-\sigma^2(v)}{1}$, tehát $C = -\frac{1}{\sigma^2(v)}$ s ezt betéve (1)be s a $-$jelt $\sigma(u-v)$-be téve, kapjuk

$$p(u) - p(v) = \frac{\sigma(v+u)\sigma(v-u)}{\sigma^2(u)\,\sigma^2(v)} \qquad \underline{\underline{VIII}}$$

Kifejeztük tehát a $p(u)-p(v)$ függvényt tisztán σ függvényekkel. Próbáljuk ugyanígy kifejezni $p'(u)$-t is. E végett meg kell állapitani a nullapontokat és polusokat. $p'(u)$ harmadfokú, tehát polusai 0, 0, 0. Mivel továbbá $p'(u+2\omega) = p'(u)$

$u=-\omega$ téve $\qquad \wp'(\omega) = \wp'(-\omega) = -\wp'(\omega)$

tehát $2\wp'(\omega)=0$ azaz $\wp'(\omega)=0$ épúgy $\wp'(\omega')=0$ tehát két nullpontot ismerünk: ω és ω'. Legyen a harmadik ω_3, akkor (11) szerint $\omega_3+\omega+\omega'=0$ tehát $\omega_3=-\omega-\omega'$ tehát a három nullpont: ω,ω' és $-\omega-\omega'$. Miután a harmadikkal congruens hely $-\omega-\omega'+2\omega+2\omega'=\omega+\omega'$, azért $\omega+\omega'$ is vehető harmadik nullpont gyanánt, de mi itt először $-\omega-\omega'$ veszszük, úgyhogy



$$\wp'(u) = C\,\frac{\sigma(u-\omega)\,\sigma(u-\omega')\,\sigma(u+\omega+\omega')}{\sigma^3(u)}$$

Ezt a constanst kell még meghatározni (15) szerint $\left[u^3\wp'(u)\right]_{u=0} = -2$

tehát $u^3\wp'(u) = C\,u^3\,\dfrac{\sigma(u-\omega)\sigma(u-\omega')\sigma(u+\omega+\omega')}{u^3(1+A_3u^2+\dots)^3} = C\,\dfrac{\sigma(u-\omega)\sigma(u-\omega')\sigma(u+\omega+\omega')}{(1+A_3u^2+\dots)^3}$

úgyhogy $-2 = C\,\dfrac{\sigma(\omega)\sigma(\omega')\sigma(\omega+\omega')}{1}$ tehát $C = -\dfrac{2}{\sigma(\omega)\,\sigma(\omega')\,\sigma(\omega+\omega')}$

és $\qquad \wp'(u) = -2\,\dfrac{\sigma(u-\omega)\,\sigma(u-\omega')\,\sigma(u+\omega+\omega')}{\sigma(u)\,\sigma(\omega')\,\sigma(\omega+\omega')} \qquad \overline{IX}.$

De ugyanazt a periodicus függvényt végtelen sok alakban írhatjuk fel, ha a nullpontok helyett azok componenseit veszszük. Így ha $\omega,\omega',-\omega-\omega'$ helyett megfelelőleg congruens $-\omega,-\omega',\omega+\omega'$ nullapontokat veszszük és ugyanazokat a 0,0,0 polusokat, akkor $\quad \wp'(u) = -2\,\dfrac{\sigma(u+\omega)\sigma(u+\omega')\sigma(u+\omega+\omega')}{\sigma^3(u)\sigma(u)\cdot\sigma(\omega')\,\sigma(\omega+\omega')} \qquad \overline{X}.$

mert tényleg, ha szorozunk $\sigma^3(u)$-val és $u=0$ teszünk, kapunk (-2)-t. ($\overline{X}$) és ($\overline{IX}$) összeszorozva és a faktorokat csoportosítva,

$\overline{XI}.$
$$\wp'^2(u) = 4\,\frac{\sigma(\omega+u)\,\sigma(\omega-u)}{\sigma^2(u)\cdot\sigma^2(\omega)}\cdot\frac{\sigma(\omega+\omega'+u)\,\sigma(\omega+\omega'-u)}{\sigma^2(u)\,\sigma^2(u+\omega')}\cdot\frac{\sigma(\omega'+u)\,\sigma(\omega'-u)}{\sigma^2(u)\,\sigma^2(\omega')}$$

Ha ezt az eredményt összehasonlítjuk a VIII alatti $(\wp(u)-\wp(v))$-vel látható, hogy könnyen nyerhető ez utóbbiból, ha abban először $v=\omega$, azután $v=\omega+\omega'$ és $v=\omega'$ s a nyert három kifejezést összeszorozzuk, úgyhogy

$$\wp'^2(u) = 4\left(\wp(u)-\wp(\omega)\right)\left(\wp(u)-\wp(\omega+\omega')\right)\left(\wp(u)-\wp(\omega')\right)$$

Legyen már most $\wp(\omega)=e_1$; $\wp(\omega+\omega')=e_2$, $\wp(\omega')=e_3$

akkor
$$\wp'^2(u) = 4\left(\wp(u)-e_1\right)\left(\wp(u)-e_2\right)\left(\wp(u)-e_3\right)$$
$$= 4\wp^3(u)-4(e_1+e_2+e_3)\wp^2(u)+4(e_1e_2+e_1e_3+e_2e_3)\wp(u)+4e_1e_2e_3$$

vagyis $\qquad \wp'^2(u) = 4\wp^3(u)-g_1\wp^2(u)-g_2\wp(u)-g_3 \qquad \overline{XII}.$

ha ugyanis g_1, g_2, g_3 a fennti constansokat jelentik. Ez pedig azt mondja, hogy $\wp(u)$

függvény deriváltjának a négyzete magának a függvénynek harmad-fokú egész rat. függvénye. Ebből az alakból magyarázhatjuk egyszersmind az ellipt. függvény elnevezést. A kp. függvények ugyanis onnan kapták nevüket, mert inversök az ellipsis ívhosszát adó integrállal van adva. Legyen ugyanis $\wp(u) = U$, $\wp'(u) = \frac{dU}{du}$, akkor XII szerint

$$\left(\frac{dU}{du}\right)^2 = 4U^3 - g_1 U^2 - g_2 U - g_3 \quad \text{és} \quad \frac{dU}{du} = \sqrt{4U^3 - g_1 U^2 - g_2 U - g_3}$$

tehát

$$du = \frac{dU}{\sqrt{4U^3 - g_1 U^2 - g_2 U - g_3}}, \quad u = \int \frac{dU}{\sqrt{4U^3 - g_1 U^2 - g_2 U - g_3}}$$

ez pedig az ellipsis ívhosszát adó integrál. Ennek inverse U neveztetik elliptikus függvénynek. A fennti integrál függvénnyel különösen Euler, Lagrange és Legendre foglalkoztak; ezen függvény inversével, az ellipticus függvénnyel Jacobi és Abel foglalkoztak. A Weierstrass módszerével, melyet mi követtünk az ellipt. függvény felkeresésében, először Liouville kereste az ellipt. függvényeket.

Visszatérve a XII alatti előállításra, a hol

$$g_1 = 4(e_1 + e_2 + e_3), \quad g_2 = -4(e_1 e_2 + e_1 e_3 + e_2 e_3), \quad g_3 = -4 e_1 e_2 e_3$$

ki fogjuk mutatni, hogy $g_1 = 4(e_1 + e_2 + e_3) = 0$. Láttuk ugyanis, hogy

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + 3 s_4 u^2 + 5 s_6 u^4 + \cdots$$

$$\wp'(u) = -\frac{2}{u^3} + 2 \cdot 3 s_4 u + 4 \cdot 5 s_6 u^3 + \cdots$$

tehát (α) $\wp'^2(u) = \frac{4}{u^6} - \frac{24 s_4}{u^2} - 80 s_6 + \cdots$ u pos. eg. kitevőjű hatványai szerint

$\wp'^2(u)$-nak egy másik alakja adódik XII-ből, e végett számítsuk ki:

$4\wp^3(u) = \frac{4}{u^6} + \frac{36 s_4}{u^2} + 60 s_6 + \cdots$ u pos. egész kitev. hatv. szerint követk.

$g_1 \wp^2(u) = \frac{g_1}{u^4} + 6 g_1 s_4 + \cdots$ u pos. eg. kitev. hatv. szerint követk.

Ha ezen értékeket XII-be helyettesítjük és az így $\wp'^2(u)$ számára nyert alakot összehasonlítjuk az (α) alattival, látni, hogy (α)-ban nem fordul elő u^{-4}, tehát ennek coefficiense 0 kell legyen, azaz $g_1 = 0$, úgyhogy $\wp'^2(u) = 4\wp^3(u) - g_2 \wp(u) - g_3$ XIII.

Most kimutatjuk azt a tételt, hogy minden ellipt. függvényt elő lehet állítani mint $\wp(u)$ és $\wp'(u)$ rat. függvényét. A tételt először arra az esetre bebizonyítjuk, ha az $F(u)$ függvény páros, $F(-u) = F(u)$. Ebben az esetben minden x nullapont ellentettje $-x$ is nullpont, úgyszintén a polusoknál, tehát a nullpontok

$$\alpha_1, -\alpha_1; \ \alpha_2, -\alpha_2; \ \cdots\cdots \ \alpha_r, -\alpha_r;$$

$$\beta_1, -\beta_1; \ \beta_2, -\beta_2; \ \cdots\cdots \ \beta_r, -\beta_r;$$

tehát összesen 2 r nullapont és polus van és $\Sum\alpha = \Sum\beta$. Ebben az esetben tehát

$$F(u) = C\frac{\sigma(u-\alpha_1)\sigma(u-\alpha_1)\dots\sigma(u-\alpha_r)\sigma(u+\alpha_r)}{\sigma(u-\beta_1)\sigma(u-\beta_1)\dots\sigma(u-\beta_r)\sigma(u+\beta_r)} = C\frac{\sigma(\alpha_1-u)\sigma(\alpha_1-u)\dots\sigma(\alpha_r+u)\sigma(\alpha_r-u)}{\sigma(\beta_1+u)\sigma(\beta_1-u)\dots\sigma(\beta_r+u)\sigma(\beta_r-u)}$$

Ha most felsőt, alsót először $\sigma^{2r}u$-val osztjuk, és azután felsőt szorozzuk és osztjuk $\sigma^2\alpha_1\dots\sigma^2\alpha_r$, alsót szorozzuk osztjuk $\sigma^2\beta_1\dots\sigma^2\beta_r$, akkor

$$F(u) = \underbrace{C\frac{\sigma^2\alpha_1\sigma^2\alpha_2\dots\sigma^2\alpha_r}{\sigma^2\beta_1\sigma^2\beta_2\dots\sigma^2\beta_r}}_{C'}\cdot\frac{\frac{\sigma(\alpha_1+u)\sigma(\alpha_1-u)}{\sigma^2u\,\sigma^2\alpha_1}\dots\frac{\sigma(\alpha_r+u)\sigma(\alpha_r-u)}{\sigma^2u\,\sigma^2\alpha_r}}{\frac{\sigma(\beta_1+u)\sigma(\beta_1-u)}{\sigma^2u\cdot\sigma^2\beta_1}\dots\frac{\sigma(\beta_r+u)\sigma(\beta_r-u)}{\sigma^2u\,\sigma^2\beta_r}}$$

De láttuk, hogy $\wp(u)-\wp(v) = \frac{\sigma(v+u)\sigma(v-u)}{\sigma^2u\,\sigma^2v}$ ha tehát $v=\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_r$, majd $v=\beta_1\dots\beta_r$ akkor

$$F(u) = C'\frac{(\wp(u)-\wp(\alpha_1))(\wp(u)-\wp(\alpha_2))\dots(\wp(u)-\wp(\alpha_r))}{(\wp(u)-\wp(\beta_1))(\wp(u)-\wp(\beta_2))\dots(\wp(u)-\wp(\beta_r))}$$

tehát

$$F(u) = R(\wp(u)) \qquad \underline{XIV}.$$

vagyis páros $F(u)$ függvény előállítható mint $\wp(u)$ rat. függvénye. Itt ugyan hallgatagúl feltettük, hogy egy nullpont sem esik össze a számsík 0 pontjával, de ki fogjuk mutatni, hogy a tétel ebben az esetben is érvényes marad. Ha ugyanis $F(u)$ páros függvény, sora $F(u) = A_0 + A_2u^2 + A_4u^4 + \dots$ és ha $u=0$ nullapont, $A_0 = 0$, de akkor számítva azt az esetet is, midőn még több coefficiens is eltűnik; u-nak mindig páros kitevőjü hatványa vehető ki közös tényezőnek, úgy hogy a páros $F(u)$ függvénynek a 0 pont mindig páros rendszámu nullapontja [ugyanaz áll, ha 0 a polusok között fordul elő] Ha tehát a 0 is előfordul a nullapontok között, akkor ezeknek sorozata

$$0, 0, 0, \dots 0\ \alpha_{k+1}, -\alpha_{k+1}, \dots \alpha_r, -\alpha_r$$

$$\beta_1 -\beta_1, \beta_2, -\beta_2 \dots \beta_r, -\beta_r$$

és így

$$F(u) = C\frac{\sigma^{2k}u\cdot\sigma(\alpha_{k+1}+u)\sigma(\alpha_{k+1}-u)\dots\sigma(\alpha_r+u)\sigma(\alpha_r-u)}{\sigma(\beta_1+u)\sigma(\beta_1-u)\dots\sigma(\beta_r+u)\sigma(\beta_r-u)}$$

és ugyanazt az átalakítást végezve

$$= C\frac{\sigma^2\alpha_{k+1}\dots\sigma^2\alpha_r}{\sigma^2\beta_1\dots\sigma^2\beta_r}\cdot\frac{\frac{\sigma(\alpha_{k+1}+u)\sigma(\alpha_{k+1}-u)}{\sigma^2u\,\sigma^2\alpha_{k+1}}\dots\frac{\sigma(\alpha_r+u)\sigma(\alpha_r-u)}{\sigma^2u\,\sigma^2\alpha_r}}{\frac{\sigma(\beta_1+u)\sigma(\beta_1-u)}{\sigma^2u\,\sigma^2\beta_1}\dots\frac{\sigma(\beta_r+u)\sigma(\beta_r-u)}{\sigma^2u\,\sigma^2\beta_r}}$$

tehát

$$F(u) = C'\frac{[\wp(u)-\wp(\alpha_{k+1})]\dots[\wp(u)-\wp(\alpha_r)]}{[\wp u-\wp\beta_1)(\wp u-\wp\beta_2)\dots(\wp u-\wp\beta_r)} = R(\wp(u))$$

Tehát minden páros jellegü ellipt. függvény kifejezhető $\wp(u)$ rat. függvényeként.
Ha $\underline{F(u)\text{ páratlan függvény}}$, $F(-u) = -F(u)$, akkor $\wp'(u)$ páratlan levén $\frac{F(u)}{\wp'(u)}$ páros lesz tehát az előbbi tétel értelmében

$$\frac{F(u)}{\wp'(u)} = R(\wp(u)) \text{ azaz } F(u) = R(\wp(u))\cdot\wp'(u) \qquad \underline{XV}.$$

Tehát a páratlan ellipt. függvény előállítható mint $\wp(u)$ rat. függvényének és $\wp'(u)$-nak szorzata.

Ha $F(u)$ nem páratlan, sem páros, akkor mindig előállítható, mint egy páros és páratlan függvény összege, mert

$$F(u) = \frac{F(u)+F(-u)}{2} + \frac{F(u)-F(-u)}{2}$$

az első páros, a második páratlan függvény és így az előbbi két tétel értelmében

$$F(u) = R_1(\wp(u)) + R_2(\wp(u)).\wp'(u) \qquad \underline{XVI}.$$

És egész általánosan kimutathatjuk, hogy $\wp(u)$ és $\wp'(u)$ bármely rat. függvénye ezen utóbbi alakban előállítható mint $\wp(u)$ rat. függvénye. E végett előbb ki fogjuk mutatni épen a $\underline{XIII}$ tétel segélyével, hogy $\wp'(u)$ hatványait és $\wp(u)$ deriváltjait $\wp(u)$ egész rat. függvénye gyanánt lehet kifejezni. És pedig

1.) $\wp'(u)$ páros kitevőjű hatványait tisztán $\wp(u)$ egész rat. függvénye gyanánt és $\wp'(u)$ páratlan kitevőjű hatványait $\wp(u)$ egész rat. függvényének és $\wp'(u)$-nak szorzatával. Mert hisz $\underline{XIII}$ szerint

$$\wp'^2(u) = 4\wp^3(u) - g_2\wp(u) - g_3$$

a $\wp(u)$ egész rat. függvénye, tehát

$$\wp'^{2k}(u) = [4\wp^3(u) - g_2\wp(u) - g_3]^{2k} = R(\wp(u))$$

szintén egész rat. függvénye $\wp(u)$-nak és $\wp'^{2k+1}(u) = R(\wp(u))\,\wp'(u)$

2.) $\wp(u)$ páros deriváltjait mint $\wp(u)$ egész rat. függvényét és $\wp(u)$ páratlan deriváltjait mint $\wp(u)$ rat. függvényének és $\wp'(u)$-nak szorzatát. Ugyanis $\wp'^2(u)$ deriváltja

$$2\wp'(u)\cdot\wp''(u) = 12\wp^2(u)\,\wp'(u) - g_2\wp'(u)$$

és osztva $2\wp'(u)$-val

$$\wp''(u) = 6\wp^2(u) - \frac{g_2}{2} = R_2(\wp(u))$$

ebből

$$\wp'''(u) = 12\wp(u)\cdot\wp'(u) = R_3(\wp(u))\,\wp'(u)$$

$$\wp^{(IV)}(u) = 12\wp'^2(u) + 12\wp(u)\wp''(u) = 12\left[4\wp^3(u) - g_2\wp(u) - g_3 + 6\wp^3 - \frac{g_2}{2}\wp(u)\right]$$

azaz

$$\wp^{(IV)}(u) = R_4(\wp(u)) \quad \text{stb.}$$

s most teljes inductióval bizonyítjuk, hogy a tétel általánosan is érvényes. Tegyük fel, hogy érvényes $2k$-ig és $(2k+1)$-ig, azaz $\wp^{(2k)}(u) = R_{2k}(\wp(u))$ és

$\wp^{(2k+1)}(u) = R'_{2k}(\wp(u))\cdot\wp'(u)$ az utóbbi egyenletet deriválva:

$$\wp^{(2k+2)}(u) = R''_{2k}(\wp(u))\,\wp'^2(u) + R'_{2k}(\wp(u))\,\wp''(u)$$

de $\wp'^2(u)$ és $\wp''(u)$ kifejezhető mint $\wp(u)$ egész rat. függvénye, tehát

$$\wp^{(2k+2)}(u) = R_{2k+2}(\wp(u))$$

és ennek deriválásából

$$\wp^{(2k+3)}(u) = R'_{2k+2}(\wp(u))\,\wp'(u) = R_{2k+3}(\wp(u))\,\wp'(u)$$

Ezen tételek segélyével most már könnyű lesz kimutatni, hogy $\wp(u)$ és $\wp'(u)$ bármily rat. függvénye a $\overline{XVI}$ alatti alakra hozható. Mertlegyen

$$F(p(u), p'(u)) = \frac{R_0 + R_1 p'(u) + R_2 p'^2(u) + \cdots}{S_0 + S_1 p'(u) + S_2 p'^2(u) + \cdots}$$

A hol $R_0, R_1, \ldots$ és $S_0, S_1, \ldots$ még rat. függvényei $p(u)$-nak, tehát az egész rat. függvénye $p(u)$ és $p'(u)$-nak. Ha a felsőben $p'(u)$ páros kitevőjü hatványait kifejezem a fenntiek szerint $p(u)$ rat. egész függvénye gyanánt és páros kitevőjü hatványait egy rat. egész függvénynek és $p'(u)$-nak szorzatával, akkor a felső a rat. részek összevonása után ily alakra hozható $R_1(pu) + R_2(pu)\,p'(u)$. Ugyanígy hozható az alsó ily alakra $S_1(p(u)) + S_2(p(u))\,p'(u)$ úgyhogy

$$F(p(u), p'(u)) = \frac{R_1(p(u)) + R_2(p(u))\,p'(u)}{S_1(p(u)) + S_2(p(u))\,p'(u)}$$

felsőt és alsót $S_1(p(u)) - S_2(p(u))\,p'(u)$-val szorozva

$$F(p(u), p'(u)) = \frac{[R_1(p(u)) + R_2(p(u))\,p'(u)][S_1(p(u)) - S_2(p(u))]}{S_1^2(p(u)) - S_2^2(p(u))\,p'^2(u)}$$

Ha fennt elvégezzük a szorzást kapunk egy tisztán egész rat. részt $R_1(p(u))$ és egy $p'(u)$-val szorzott részt $R_2(p(u))\,p'(u)$; az egész alsó tisztán egész rat. függvénye $p(u)$-nak, $Q(p(u))$ és így könnyen belátható, hogy az osztás tagonkénti végrehajtásával a függvény következő alakra hozható, mely egyezik $\overline{XVI}$-val.

$$F(p(u), p'(u)) = R_1(p(u)) + R_2(p(u))\,p'(u).$$

A $p(u)$ függvénynek is van összeadási tétele, a mennyiben $p(u+v)$ kifejezhető $p(u)$, $p(v)$ $p'(u)$ és $p'(v)$-vel rationalisan. Ugyanis láttuk, hogy $\frac{\sigma(v+u)\sigma(v-u)}{\sigma^2 u\, \sigma^2 v} = p(u) - p(v)$. Ha u változóra v állandóra megalkotjuk ennek log. differential quotiensét.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\sigma'(v+u)}{\sigma(v+u)} - \frac{\sigma'(v-u)}{\sigma(v-u)} - \frac{2\sigma' u}{\sigma u} &= \frac{p'u}{pu - pv} \\ \frac{\sigma'(v+u)}{\sigma(v+u)} + \frac{\sigma'(v-u)}{\sigma(v-u)} - \frac{2\sigma' v}{\sigma v} &= \frac{p'v}{pu - pv} \end{aligned}\right\}$$

v változóra, u állandóra ezeket összeadva és tekintetbe véve, hogy

$\frac{\sigma'(v+u)}{\sigma'(v-u)} = \zeta(u+v)$, lesz $\quad 2\zeta(v+u) - 2\zeta(u) - 2\zeta(v) = \dfrac{p'u - p'v}{pu - pv}$

tehát

$$\zeta(u+v) = \zeta(u) + \zeta(v) + \frac{1}{2}\,\frac{p'u - p'v}{pu - pv}$$

Ezt deriváljuk először u, azután v szerint, lévén $\zeta'(u+v) = -p(u+v)$

$$p(u+v) = p(u) - \frac{1}{2}\,\frac{p''(u)}{p(u) - p(v)} + \frac{1}{2}\,\frac{p'(u)(p'(u) - p'(v))}{(p(u) - p(v))^2}$$

$$p(u+v) = p(v) + \frac{1}{2}\,\frac{p''(v)}{p(u) - p(v)} - \frac{1}{2}\,\frac{p'(v)(p'(u) - p'(v))}{(p(u) - p(v))^2}$$

összeadva $2\wp(u+v) = \wp u + \wp v - \frac{1}{2}\frac{\wp''u - \wp''(v)}{\wp u - \wp v} + \frac{1}{2}\left(\frac{\wp'(u) - \wp'(v)}{\wp(u) - \wp(v)}\right)^2$ (16)

De $\wp''(u)$ és $\wp''(v)$ kifejezhető $\wp(u)$ illetőleg $\wp(v)$-vel $\wp'^2 u = 4\wp^3 u - g_2 \wp u - g_3$

derriválva $2\wp'(u)\wp''(u) = 12\wp^2(u) - g_2\wp'(u)$ és ebből $\wp''(u) = 6\wp^2(u) - \frac{1}{2}g_2$

hasonlóképp $\wp''(v) = 6\wp^2(v) - \frac{1}{2}g_2$

különbségük $\wp''(u) - \wp''(v) = 6(\wp^2(u) - \wp^2(v)) = 6(\wp(u) + \wp(v))(\wp(u) - \wp(v))$

tehát $\frac{\wp''(u) - \wp''(v)}{\wp(u) - \wp(v)} = 6(\wp(u) + \wp(v))$ és ezt betéve (16)-ba

$2\wp(u+v) = -2\wp(u) - 2\wp(v) + \frac{1}{2}\left(\frac{\wp'(u) - \wp'(v)}{\wp(u) - \wp(v)}\right)^2$ és 2-vel osztva kapjuk a $\wp(u)$ függvény összeadási tételét $\wp(u+v) + \wp(u) + \wp(v) = \frac{1}{4}\left(\frac{\wp'(u) - \wp'(v)}{\wp(u) - \wp(v)}\right)^2$ XVII.

Eddig az ellipt. függvényeknek kétféle alakját ismertük, 6 függvényt és a $\wp(u)$, $\wp'(u)$ függvénnyel előállított alakját (VII^x, XIV, XV, XVI.)

Most az ellipt. függvényeknek egy harmadik alakjával fogunk megismerkedni, mely analog a rat. tört függvényeknek partiális törtekre való felbontásával. Ez az előállítás azon a tételen alapszik, hogy congruens helyek (pl polusok) körüli sorbabontásnál a megfelelő coefficiensek egyenlők. Ha pl $F(u)$ ellipt. függvényt sorbabontjuk α körül, $u = \alpha + h$, $h = u - \alpha$,

$$F(\alpha+h) = A_0 + A_1 h + A_2 h^2 + \dots\dots$$

és az $(\alpha + 2\omega)$ congruens hely körül $F(\alpha+h+2\omega) = B_0 + B_1 h + B_2 h^2 + \dots$ de mivel $F(\alpha+h+2\omega) = F(\alpha+h)$, szükségképen $A_0 = B_0$, $A_1 = B_1 \dots$ Ha b κ-szoros polus

$$F(b+h) = \frac{A_\kappa}{h^\kappa} + \frac{A_{\kappa-1}}{h^{\kappa-1}} + \dots + \frac{A_1}{h} + P(h)$$

$$F(b+h+2\omega) = \frac{B_\kappa}{h^\kappa} + \frac{B_{\kappa-1}}{h^{\kappa-1}} + \dots + \frac{B_1}{h} + P(h)$$

itt is szükségképen $A_\kappa = B_\kappa$, $A_{\kappa-1} = B_{\kappa-1} \dots$, tehát congruens polusok körüli sorbabontásoknál a megfelelő partiális törtek coefficiensei egyenlők. Ezen tétel alapján fogjuk felbontani az ellipt. függvényeket partiális törtekre. A főpp-ban levő polusokat úgy soroljuk fel, hogy mindegyiket csak egyszer soroljuk fel a sokszorossági szám hozzátételével.

$$\begin{array}{cccc} \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_r \\ \kappa_1 & \kappa_2 & \dots & \kappa_r \end{array}$$

úgyhogy az ellipt. függvény fokszáma $\kappa_1 + \kappa_2 + \dots \kappa_r$. Tudjuk, hogy minden polushoz tartoznak partiális törtek, legyenek ezek $\psi_1(u)$ $\psi_2(u) \dots \psi_r(u)$

Ezeknek általános alakja $\frac{A_1}{u-\beta} + \frac{A_2}{(u-\beta)^2} + \dots\dots + \frac{A_\kappa}{(u-\beta)^\kappa}$

Már most szerkesztünk oly transc. tört függvényt, melynek ugyanezeken a helyeken és a congruens helyeken (ugyanazokkal a coefficiensekkel) polusai vannak képezekkel a partiálistörtekkel. Ehhez eljutunk a ζ függvény segélyével. Ismeretes hogy $\zeta(u) = \frac{1}{u} + \sum\left(\frac{1}{u-2\omega} + \frac{1}{2\omega} + \frac{u}{4\omega^2}\right)$

Ennek 0-ban és az összes periodusokban egyszerű polusai vannak. 0 körül a függvény így jellemezhető

$$\zeta(u) = \frac{1}{u} + \mathfrak{P}(u)$$

ezt deriválva

$$\zeta'(u) = -\frac{1}{u^2} + \mathfrak{P}'(u)$$

$$\zeta''(u) = \frac{2}{u^3} + \mathfrak{P}''(u)$$

és általánosan

$$\zeta^{(k)}(u) = (-1)^k \frac{k!}{u^{k+1}} + \mathfrak{P}^{(k)}(u)$$

és a β polus körül

$$\zeta(u-\beta) = \frac{1}{u-\beta} + \mathfrak{P}(u|\beta) \qquad A_1$$

$$\zeta'(u-\beta) = -\frac{1}{(u-\beta)^2} + \mathfrak{P}'(u|\beta) \qquad -A_2$$

általánosan

$$\zeta^{(k-1)}(u-\beta) = (-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{(u-\beta)^k} + \mathfrak{P}^{(k-1)}(u|\beta) \qquad (-1)^{k-1}\frac{A_k}{(k-1)!}$$

tehát $\zeta(u-\beta)$-nak β-ban elsőrendű, $\zeta'(u-\beta)$-nak kétszeres, ... $\zeta^{(k-1)}(u-\beta)$-nak k-szoros polusa van. Ha most a partialis törtek coefficienseivel a kijelölt modon szorozunk, akkor látható, hogy $A_1\zeta(u-\beta) - A_2\zeta'(u-\beta) + \dots + (-1)^{k-1}\frac{A_k}{(k-1)!}\zeta^{(k-1)}(u-\beta) = \Psi(u)$ függvénynek a β helyen és a vele congruens helyeken polusai vannak ugyanazokkal a partiálistörtekkel, mint $F(u)$-nak t.i. (1) partialistörtekkel. Ezt a $\Psi(u)$ függvényt megalkotjuk minden β polusra, legyenek ezek megfelelőleg $\Psi_1(u)\ \Psi_2(u)\ \Psi_3(u) \dots \Psi_r(u)$ akkor világos, hogy ha ezeket $F(u)$-ból levonjuk, ezen különbségnek már nincsen polusa; legyen ez a különbség függvény $\Phi(u)$ akkor ez vagy rat. vagy transc. egész függvény vagy constans. Ugy hogy

$$F(u) = \Phi(u) + \Psi_1(u) + \Psi_2(u) + \dots + \Psi_r(u)$$

$\Psi(u)$-ban, a mint az (2)-ből látható, $\zeta(u)$ kivételével minden tag kp, $\zeta(u)$-ra pedig áll:

$$\zeta(u+2\omega) = \zeta(u) + 2\eta$$

$$\zeta(u+2\omega') = \zeta(u) + 2\eta'$$

de már $\quad F'(u) = \Phi'(u) + \Psi_1'(u) + \Psi_2'(u) + \dots + \Psi_r'(u)$

deriváltban minden tag $\Phi'(u)$ kivételével kp, úgyhogy megalkotva

$$F'(u+2\omega) = \Phi'(u+2\omega) + \Psi_1'(u+2\omega) + \dots + \Psi_r'(u+2\omega)$$

és $F(u)$ különbségét $\quad 0 = \Phi'(u+2\omega) - \Phi'(u)$ azaz $\Phi'(u+2\omega) = \Phi'(u)$ és így $\Phi'(u+2\omega') = \Phi'(u)$, tehát $\Phi'(u)$ kp, s mivel ezerint nem lehet sem rat. sem transc. egész függvény, azért constans, úgyhogy $\Phi(u)$ legfeljebb lineáris $\Phi(u) = a_0 + \dots$

és így $\quad F(u) = a_0 + a_1 u + \Psi_1(u) + \dots + \Psi_r(u)$, de kitűnik, hogy $a_1 = 0$, mert

$$F(u+2\omega) = a_0 + a_1(u+2\omega) + \Psi_1(u+2\omega) + \dots + \Psi_r(u+2\omega)$$

és e kettő kü-[illegible] $\quad 0 = 2a_1\omega + [\Psi_1(u+2\omega) - \Psi_1(u)] + \dots + [\Psi_r(u+2\omega) - \Psi_r(u)] \qquad (3.)$

De $\Psi_1(u) = A_1\zeta(u-\beta) - A_2\zeta'(u-\beta) - \dots$ ahol csak $\zeta(u-\beta)$ nem kpr.

$\Psi_1(u+2\omega) = A_1\zeta(u-\beta+2\omega) - A_2\zeta'(u-\beta+2\omega) - \dots$ s a kettő különbsége

$\Psi_1(u+2\omega)-\Psi_1(u) = 2A_1\eta$ és ezt a különbséget alkotva valamennyi Ψ-nél és (3)-ba

betéve $0 = 2a_1\omega + 2\eta\sum_{(\kappa)} A_1^{(\kappa)} \quad \Big| \cdot\omega'$

hasonlóképp $0 = 2a_1\omega' + 2\eta'\sum'_{(\kappa)} A_1^{(\kappa)} \quad \Big| \cdot\omega$ szorozva és kivonva

$0 = 2(\eta\omega' - \eta'\omega)\sum A_1^{(\kappa)}$ de $\eta\omega'-\eta'\omega \neq 0$ úgyhogy szükségképen

XVIII $\sum_{(\kappa)} A_1^{(\kappa)} = 0$ tehát $a_1 = 0$

És így $F(u) = a_0 + \Psi_1(u) + \Psi_2(u) + \dots + \Psi_r(u)$ XIX

Ez az ellipt. függvényeknek új analytikai előállítása a ζ függvény segélyével mint egy polusos függvények és egy bizonyos constans összege. Mellékeredmény gyanánt kaptuk a XVIII alatt azt a tételt, hogy az egy ppban fekvő polusokhoz tartozó partiális törtösszegekből a (-1)-ik hatványcoefficienseinek összege 0.

Így tehát 3 módon állítottuk elő az ellipt. függvényeket: 1.) σ függvénnyel 2.) p(u) és deriváltjával, 3.) ζ függvénnyel. Az utóbbi előállítás különösen akkor használatos, midőn ellipt. függvényeket integrálni kell, mert ilyenkor tagonként integrálunk, s az előforduló $\zeta, \zeta', \zeta'', \dots$ függvények integráljai $\log\sigma$. ζ. ζ'. .... mert hisz $\zeta = d\log\sigma$

Az eddigiekben megismertük az ellipt. függvények három nevezetesebb tulajdonságát: 1.) egy ppban a polusok száma egyenlő a nullpontok számával 2.) a polusok összege congruens a nullpontok összegével és 3. $\sum A_1 = 0$.

Áttérünk most a σ függvény részletesebb tárgyalására, s ez lesz különösen

A σ függvény soralakja.

Hogy a σ függvényt végtelen sorral állíthassuk elő, előbb néhány a σ függvénnyel analog függvényt kell bevezetni, melyek körülbelül olyan viszonyban vannak egynéhány tulajdonságaikban a σ függvényhez, mint a cosinus a sinushoz. Ilyen függvény 3 van. Ezeknek felkeresésére kiindulunk a következő ismeretes relatióból:

$$\sigma(u+2\omega) = -e^{2\eta(u+\omega)}\sigma(u)$$

Tegyünk u helyébe $u-\omega$: $\sigma(u+\omega) = -e^{2\eta u}\sigma(u-\omega) = e^{2\eta u}\sigma(\omega-u)$ és

szorozva $e^{-\eta u}$-val: $e^{-\eta u}\sigma(u+\omega) = e^{\eta u}\sigma(\omega-u)$

tehát a baloldali függvény páros, mert értéke nem változik, ha u helyébe $-u$

tesszünk. Ezt most ezenfelül úgy módosítjuk, hogy mint a cosinusnál $u=0$ melletti értéke 1 legyen. E végett osztjuk $\sigma\omega$-val

$$\frac{e^{-\eta u}\sigma(u+\omega)}{\sigma\omega} = \frac{e^{\eta u}\sigma(\omega-u)}{\sigma\omega}$$

mára mint látható ezzel a tulajdonsággal bír; ezen két oldallal értelmezett függvényt $\sigma_1(u)$-val jelöljük, tehát az egyik függvény

$$\sigma_1(u) = e^{-\eta u}\frac{\sigma(\omega+u)}{\sigma\omega}$$

Ennek tulajdonságai
$$\left.\begin{aligned}\sigma_1(-u) &= \sigma_1(u)\\ \sigma_1(0) &= 1\end{aligned}\right\}(1)$$

Előállításából látható, hogy $\sigma_1(u)$ is transc. egész függvény. A második ilyneműü függvényhez eljutunk ugyanilymódon az ismeretes relációból

$$\sigma(u+2\omega') = e^{-2\eta'(u+\omega')}\cdot\sigma(u)$$

ha abban u helyébe $u-\omega'$-t teszünk, majd $\sigma\omega'$-vel osztunk, ez lesz $\sigma_3(u)$, tehát

$$\sigma_3(u) = e^{-\eta' u}\,\frac{\sigma(\omega'+u)}{\sigma\omega'}$$

ez is az (1) alatti tulajdonságokkal bír. Az $\omega+\omega'$ félperiodus bevezetésével ugyanily függvényhez jutunk. Ugyanis $\sigma(u+2\omega')$-ben u helyébe $u+2\omega$ téve

$$\sigma(u+2\omega+2\omega') = -e^{2\eta'(u+2\omega+\omega')}\cdot\sigma(u+2\omega) = e^{-2\eta'(u+2\omega+\omega')+2\eta(u+\omega)}\cdot\sigma(u)$$

de az exponens összevont alakban $2(\eta+\eta')(u+\omega+\omega')-2\eta\omega'+2\eta'\omega$, melyből a többi kivonandó $-2(\eta\omega'-\eta'\omega)=-\pi i$ és $e^{-\pi i}=-1$ úgy hogy $\sigma(u+2\omega+2\omega')=-e^{2(\eta+\eta')(u+\omega+\omega')}\cdot\sigma(u)$

Ebben most u helyébe $u-\omega-\omega'$-t írva és $\sigma(u+\omega+\omega')=-e^{2(\eta+\eta')u}\cdot\sigma(u-\omega-\omega')$ egyenletet $e^{-(\eta+\eta')u}$-val keresztül szorozva $e^{-(\eta+\eta')u}\sigma(u+\omega+\omega')=e^{(\eta+\eta')u}\cdot\sigma(\omega-\omega'-u)$ ezt osztva $\sigma(\omega+\omega')$-vel, kapjuk az analog 3-dik függvényt

$$\sigma_2(u) = \frac{e^{-(\eta+\eta')u}\sigma(\omega+\omega'+u)}{\sigma(\omega+\omega')}$$

mely a σ_1 és σ_3-al közösen bírja az (1) alatti tulajdonságokat hasonlóan a cosinushoz, míg σ hasonlít a sinushoz, amennyiben $\left[\frac{\sigma(u)}{u}\right]_{u=0}=1$. Mindegyik ott tűnik el, a hol a bennök szereplő σ függvény, tehát $\sigma_1(u)$ nullapontjai ω és $\omega+2\nu\omega+2\nu'\omega'$; $\sigma_2(u)$ nullapontjai $\omega+\omega'$ és $\omega+\omega'+2\nu\omega+2\nu'\omega'$ és $\sigma_3(u)$ nullapontjai $\omega'+2\nu\omega+2\nu'\omega'$. Ezen $\sigma_1\ \sigma_2\ \sigma_3$ függvények segélyével fogjuk σ-t végtelen sorral előállítani. Láttuk, hogy

$$\sigma(u) = \frac{2\omega}{\pi}\, e^{\frac{\eta}{2\omega}u^2}\cdot\sin\frac{\pi u}{2\omega}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\pi\left(\frac{n\omega'}{\omega}+\frac{u}{2\omega}\right)\sin\pi\left(\frac{n\omega'}{\omega}-\frac{u}{2\omega}\right)}{\sin^2\frac{\pi n\omega'}{\omega}}$$

Már most vezessük be a következő jelöléseket $e^{\frac{\pi u}{2\omega}i}=z$ és $e^{\frac{\pi\omega'}{\omega}i}=q$.
Mivel $\frac{\omega'}{\omega}$ képzetes része positiv, tehát $\frac{\pi\omega'}{\omega}$-é is, azért $\frac{\pi\omega'}{\omega}i$ reális része negativ, azaz ha $\frac{\pi\omega'}{\omega}i=x+yi$, $x<0$ és így $|q|=e^x<1$, mert x neg. Tehát $|q|<1$. Már most

$\sin\frac{\pi u}{2\omega}=\frac{e^{\frac{\pi u}{2\omega}i}-e^{-\frac{\pi u}{2\omega}i}}{2i}=\frac{z-z^{-1}}{2i}$ és $\sin\pi\left(\frac{n\omega'}{\omega}+\frac{u}{2\omega}\right)=\frac{e^{\frac{\pi n\omega'}{\omega}i}e^{\frac{\pi u}{2\omega}i}-e^{-\frac{\pi n\omega'}{\omega}i}\cdot e^{-\frac{\pi u}{2\omega}i}}{2i}=\frac{q^n z-q^{-n}z^{-1}}{2i}$

és a második sinus $\sin\pi\left(\frac{n\omega'}{\omega}-\frac{u}{2\omega}\right)=\frac{q^n z^{-1}-q^{-n}z}{2i}$ és végre $\sin\pi\frac{n\omega'}{\omega}=\frac{e^{\frac{\pi n\omega'}{\omega}i}-e^{-\frac{\pi n\omega'}{\omega}i}}{2i}=$

$=\frac{q^n-q^{-n}}{2i}$, ugyhogy $\sigma(u)$-ban a Π megetti kifejezés következő alakú

$$\frac{i}{2i}\frac{(q^n z-q^{-n}z^{-1})(q^n z^{-1}-q^{-n}z)}{(q^n-q^{-n})^2}$$ felsőt és alsót $q^n\cdot q^n$-el szorozva

$$=\frac{1}{2i}\frac{(\overbrace{q^{2n}z-z^{-1}}^{z})(\overbrace{q^{2n}z^{-1}-z}^{z^{-1}})}{(q^{2n}-1)^2}$$ és $1=z\cdot z^{-1}$-el szorozva

$$=\frac{1}{2}\frac{(q^{2n}z^2-1)(q^{2n}z^{-2}-1)}{(q^{2n}-1)^2}=\frac{(1-q^{2n}z^2)(1-q^{2n}z^{-2})}{(1-q^{2n})^2}$$

És így $\sigma(u)$ végtelen szorzatalakja következő

$$\sigma(u)=\frac{2\omega}{\pi}e^{\frac{\eta}{2\omega}u^2}\cdot\frac{z-z^{-1}}{2i}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1-q^{2n}z^2)(1-q^{2n}z^{-2})}{(1-q^{2n})^2}\qquad(2)$$

És a Π megetti 3 zárjeles végtelen szorzatról tudjuk, hogy külön-külön feltétlenül convergensek, mert az additiv tagokra nézve $|q|<1$. Most z és q bevezetésével σ_1, σ_2 és σ_3-at végtelen szorzattal fogjuk előállitani. E végett először a nevezőikben szereplő $\sigma\omega$, $\sigma\omega'$ és $\sigma(\omega+\omega')$ constansokat kell meghatározni. Az első végett (2)-ben $u=\omega$ teszünk; lássuk hogy alakulnak át az egyes faktorok ha $z=e^{\frac{\pi u}{2\omega}i}$-ben $u=\omega$, $e^{\frac{\pi\omega}{2\omega}i}=e^{\frac{\pi}{2}i}=i$, tehát z helyébe kell irni i-t, $z^2=-1$, $z^{-2}=-1$ ugyhogy $\frac{z-z^{-1}}{2i}$ helyébe lép $\frac{i+i}{2i}=1$, tehát

$$\sigma\omega=\frac{2\omega^2}{\pi}e^{\frac{\eta\omega}{2}}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1+q^{2n})^2}{(1-q^{2n})^2}\qquad(3)$$

amely véges értékü és nem 0. $\sigma\omega'$ végett (2)-ben $u=\omega'$ téve, z helyébe lép $e^{\frac{\pi\omega'}{2\omega}i}$ s ez nem egyéb, mint $q^{\frac{1}{2}}$, melynek azt az értékét kell venni, mely kijön, ha az exp. függvény sorában $z=\frac{\pi\omega'}{2\omega}i$. Továbbá z^2 helyébe jő q, z^{-2} helyébe q^{-1}, ugyhogy (2)-ben a Π: $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1-q^{2n+1})(1-q^{2n-1})}{(1-q^{2n})^2}$

A felső első faktora $(1-q^3)(1-q^5)\ldots$, a második $(1-q)(1-q^3)\ldots$ tehát az elsőben $(1-q)$ faktor nincs meg, de ezt behozhatjuk a Π előtti faktorból, t.i.

$\frac{z-z^{-1}}{2i}=\frac{q^{\frac{1}{2}}-q^{-\frac{1}{2}}}{2i}=\frac{-q^{-\frac{1}{2}}(1-q)}{2i}$, ez a zárjeles faktor pótolja az előbb hiányt

ugyhogy a Π előtt marad $\frac{-q^{-\frac{1}{2}}}{2i}=\frac{iq^{-\frac{1}{2}}}{2}$ és így

$$\sigma\omega'=\frac{2\omega}{\pi}e^{\frac{\eta\omega'^2}{2\omega}}\cdot\frac{iq^{-\frac{1}{2}}}{2}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1-q^{2n-1})^2}{(1-q^{2n})^2}\qquad(4)$$

S végre $\sigma(\omega+\omega')$ kiszámitása végett (2)-ben $u=\omega+\omega'$ téve, z helyébe lép $e^{\frac{\pi(\omega+\omega')i}{\omega}}=iq^{\frac{1}{2}}$

z^2 h. $-q$, z^{-2} h. $-\frac{1}{q}=-q^{-1}$, tehát Π: $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1+q^{2n+1})(1+q^{2n-1})}{(1-q^{2n})^2}$ s itt is hiányzik az első faktorból az $(1-q)$, de ez adódik $\frac{z-z^{-1}}{2i}$ -ből, ennek helyére lép ugyan-is $\frac{iq^{\frac{1}{2}}+iq^{-\frac{1}{2}}}{2i} = \frac{q^{-\frac{1}{2}}}{2}(1+q)$ úgyhogy

$$\sigma(\omega+\omega') = \frac{2\omega}{\pi} e^{\frac{\eta(\omega+\omega')^2}{2\omega}} \frac{q^{-\frac{1}{2}}}{2} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1+q^{2n-1})^2}{(1-q^{2n})^2} \qquad (5)$$

Ezek segélyével már most alkossuk meg a $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, -at z és q bevezetésével. $\sigma_1(u) = e^{-\eta u}\frac{\sigma(\omega+u)}{\sigma\omega}$ tehát még csak $e^{-\eta u}\sigma(\omega+u)$ határozandó meg. (2)-ben u helyébe $u+\omega$ írva, z helyébe lép $e^{\frac{\pi(u+\omega)}{2\omega}i} = zi$, tehát z^2 helyett $(-z^2)$ és $\frac{z-z^{-1}}{2i}$ helyébe $\frac{iz+iz^{-1}}{2i} = \frac{z+z^{-1}}{2}$. A mi az exp. faktort illeti, ez $e^{\frac{\eta}{2\omega}(u+\omega)^2} = e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}} e^{\eta u} \cdot e^{\frac{\eta\omega}{2}}$ s ezt szorozni kell $e^{-\eta u}$-val, miáltal $e^{\eta u}$ elesik, úgyhogy

$$e^{-\eta u}\sigma(\omega+u) = \frac{2\omega}{\pi} e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}} \frac{z+z^{-1}}{2} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1+q^{2n}z^2)(1+q^{2n}z^{-2})}{(1-q^{2n})^2}$$

és ezt osztva $\sigma(\omega)$-val (3) kapjuk

$$\sigma_1(u) = e^{\frac{\eta}{2\omega}u^2} \frac{z+z^{-1}}{2} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1+q^{2n}z^2)(1+q^{2n}z^{-2})}{(1+q^{2n})^2} \qquad (6)$$

ez helyes annyiban is, mert ha $u=0$, $\sigma_1(0)=1$. Most jön $\sigma_3(u) = e^{-\eta' u}\frac{\sigma(\omega'+u)}{\sigma\omega'}$ tehát csak $e^{-\eta' u}\sigma(\omega'+u)$ számítandó ki. (2)ben u helyébe $u+\omega'$ téve, z helyébe lép $e^{\frac{\pi(u+\omega')}{2\omega}i} = zq^{\frac{1}{2}}$, z^2 helyébe z^2q úgyhogy a $\prod$:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1-q^{2n+1}z^2)(1-q^{2n-1}z^{-2})}{(1-q^{2n})^2}$$

az első faktorból hiányzó $(1-q)z^2$ tagot pótolja a $\prod$ előtti $\frac{z-z^{-1}}{2i}$, ennek helyére lép $\frac{zq^{\frac{1}{2}}-z^{-1}q^{-\frac{1}{2}}}{2i} = \frac{-z^{-1}q^{-\frac{1}{2}}}{2i}(1-qz^2) = \frac{iz^{-1}q^{-\frac{1}{2}}}{2}(1-qz^2)$ ez utóbbi faktort bevive, lesz az exp. faktortól eltekintve

$$\frac{iq^{-\frac{1}{2}}z^{-1}}{2} \prod \frac{(1-q^{2n-1}z^2)(1-q^{2n-1}z^{-2})}{(1-q^{2n})^2}$$

és még $e^{-\eta' u}\sigma(\omega'+u)$-ből az exponens $\frac{\eta}{2\omega}u^2 + \left(\frac{\eta\omega'}{\omega} - \eta'\right)u + \frac{\eta\omega'^2}{2\omega} = \frac{\eta}{2\omega}u^2 + \frac{\eta\omega'-\eta'\omega}{\omega}u + \frac{\eta\omega'^2}{2\omega}$, de $\frac{\eta\omega'-\omega\eta'}{\omega} = \frac{\pi}{2\omega}i$ és így az exp. faktor $e^{\frac{\eta}{2\omega}u^2} e^{\frac{\pi i}{2\omega}u} e^{\frac{\eta\omega'^2}{2\omega}} = e^{\frac{\eta}{2\omega}u^2} \cdot z \cdot e^{\frac{\eta\omega'^2}{2\omega}}$ ez a z pedig a $\prod$ előtti z^{-1}-el 1-et ad, ha tehát az így nyert $e^{-\eta' u}\sigma(\omega'+u)$-t osztjuk $\sigma\omega'$-el, kapjuk

$$\sigma_3 u = e^{\frac{\eta}{2\omega}u^2} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1-q^{2n-1}z^2)(1-q^{2n-1}z^{-2})}{(1-q^{2n-1})} \qquad (7)$$

Következik végre $\sigma_2 u = e^{-(\eta+\eta')u} \cdot \frac{\sigma(u+\omega+\omega')}{\sigma(\omega+\omega')}$. E végett (2.)-ben u helyébe $u+\omega+\omega'$ téve, z helyébe lép $e^{\frac{\pi i}{2\omega}(u+\omega+\omega')} = z \cdot i \cdot q^{\frac{1}{2}}$, z^2 helyébe jő $-z^2q$, z^{-2} helyébe $-z^{-2} \cdot q^{-1}$, úgyhogy a $\prod$:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1+q^{2n+1}z^2)(1+q^{2n-1}z^{-2})}{(1-q^{2n})^2}$$

az első faktorból hiányzó $1-qz^2$ adódik $\frac{z-z^{-1}}{2i}$ -ből, mert ennek helyére lép $\frac{z \cdot i \cdot q^{\frac{1}{2}} + z^{-1} \cdot i \cdot q^{-\frac{1}{2}}}{2i} = z^{-1}q^{-\frac{1}{2}}\frac{1+qz^2}{2}$, mely utóbbi beviendő $\prod$-be, úgyhogy exp. faktor nélkül kapjuk

$$\frac{z^{-1}q^{-\frac{1}{2}}}{2} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1+q^{2n-1}z^2)(1+q^{2n-1}z^{-2})}{(1-q^{2n})^2}$$

Most jön még $e^{-(\eta+\eta')u} \cdot \sigma(u+\omega+\omega')$ exp. faktorának exponense: $\frac{\eta}{2\omega}(u+\omega+\omega')^2 - (\eta+\eta')u$ $= \frac{\eta}{2\omega}u^2 + \frac{\eta u(\omega+\omega')}{\omega} + \frac{\eta}{2\omega}(\omega+\omega')^2 - (\eta+\eta')u = \frac{\eta}{2\omega}u^2 + u\left(-\eta-\eta'+\frac{\eta(\omega+\omega')}{\omega}\right) + \frac{\eta}{2\omega}(\omega+\omega')^2$

$\frac{\eta}{2\omega}u^2 + u\frac{\pi i}{2\omega} + \frac{\eta}{2\omega}(\omega+\omega')^2$ a mennyiben $\frac{\eta\omega'-\eta'\omega}{\omega} = \frac{\pi}{2\omega}i$, tehát az exp. faktor $e^{\frac{\eta}{2\omega}u^2} z \cdot e^{\frac{\eta}{2\omega}(\omega+\omega')^2}$, a mennyiben $e^{\frac{u\pi}{2\omega}i} = z$ ez a z kiejti z^{-1}-et, úgyhogy $\sigma(\omega+\omega')$-vel való osztásból adódik

$$\sigma_2(u) = e^{\frac{\eta}{2\omega}u^2} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1+q^{2n-1}z^2)(1+q^{2n-1}z^{-2})}{(1+q^{2n-1})^2} \qquad (8.)$$

A (2), (6), (7), és (8) végtelen szorzatok nevezőiben álló constans értékű végtelen szorzatok számára a következő rövidített jelöléseket hozzuk be:

a σ-ban szereplő $\qquad q_0 = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})$

a σ_1-ben " $\qquad q_1 = \prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n})$

a σ_2-ben " $\qquad q_2 = \prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n-1})$

a σ_3-ban " $\qquad q_3 = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-1})$

mindegyik feltétlenül és szorosabb értelemben convergens. Eme négy végtelen szorzat között következő egyszerű összefüggés áll fenn: az elsőben $1-q^{2n} = (1-q^n)(1+q^n)$ levén $\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n}) = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)$. Az elsőben le kell vonni 1-ből q összes egész kitevőjű hatványait 1-től ∞-ig; ezek közül a páros kitevőjű hatványokra vonatkozó különbségek szorzata adja q_0-at, a páratlan kitevőjű hatványokra vonatkozó különbségek szorzata adja q_3-at; tehát az első szorzat $\prod(1-q^n) = q_0 q_3$, hasonló okból $\prod(1+q^n) = q_1 q_2$, tehát $q_0 = q_0 q_1 q_2 q_3$, és ebből $q_1 q_2 q_3 = 1$, ez az említett relatió. Már most ezen szorzatok jeleinek bevezetésével a mi 4 függvényünk következő alakot ölt:

$$\sigma(u) = \frac{2\omega}{\pi} e^{\frac{\eta}{2\omega}u^2} \cdot \frac{1}{q_0^2} \frac{z-z^{-1}}{2i} \prod(1-q^{2n}z^2)(1-q^{2n}z^{-2})$$

$$\sigma_1(u) = e^{\frac{\eta}{2\omega}u^2} \frac{1}{q_1^2} \frac{z+z^{-1}}{2} \prod(1+q^{2n}z^2)(1+q^{2n}z^{-2})$$

$$\sigma_2(u) = e^{\frac{\eta}{2\omega}u^2} \frac{1}{q_2^2} \prod(1+q^{2n-1}z^2)(1+q^{2n-1}z^{-2})$$

$$\sigma_3(u) = e^{\frac{\eta}{2\omega}u^2} \frac{1}{q_3^2} \prod(1-q^{2n-1}z^2)(1-q^{2n-1}z^{-2})$$

Ez a 4 σ függvény egyszeresen végtelen szorzatalakja. Ezek helyett most végtelen sorokat kell bevezetni. Elég ha ezt megtesszük a σ_2 függvénnyel, mert erről könnyen át lehet menni a többire. A σ_2-ben szereplő szorzat

$$\Phi(z) = \prod(1+q^{2n-1}z^2)(1+q^{2n-1}z^{-2}) \qquad (9)$$

Erről pl. σ_3-ra úgy megyünk át, hogy z^2 helyébe $(-z^2)$-et írunk. Ez a szorzat, $|q|<1$ levén, z minden 0-tól különböző értéke mellett feltétlenül convergens. A szorzat értéke annyi mint az n első faktor szorzatának limese. Könnyen belátható, hogy ha a szorzást végrehajtjuk, fellépnek mint összeadandók z-nek összes pos. és neg. páros kitevőjű hatványai bizonyos constans okkal szorozva

rozva, úgyhogy a 2ν kitevőnek megfelelő coefficienst A_ν-vel jelölve $\Phi(z)$ a következő sor alakban is írható : $\Phi(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_\nu z^{2\nu}$

Ezen A coefficiensek meghatározására kell most egy formulát keresnünk. Ez könnyen adódik a $\Phi(z)$ két functionális tulajdonságából, melyek kiolvashatók $\Phi(z)$ szorzatalakjából.

1) $\Phi(z)$ értéke nem változik, ha z helyébe $\frac{1}{z}$-t írunk, mert hiszen ezzel csak a szorzás sorrendje változik meg, a $\Phi(z)$ pedig feltétlenül convergens. Tehát $\Phi(\frac{1}{z}) = \Phi(z)$

2.) Ha $\Phi(z)$-t részletesebben kiírjuk:

$$\Phi(z) = (1+qz^2)(1+q^3z^2)(1+q^5z^2)\ldots\ldots$$
$$\cdot(1+qz^{-2})(1+q^3z^{-2})(1+q^5z^{-2})\ldots\ldots$$
$$\Phi(qz) = (1+q^3z^2)(1+q^5z^2)(1+q^7z^2)\ldots\ldots$$
$$\cdot(1+q^{-1}z^{-2})(1+qz^{-2})(1+q^3z^{-2})\ldots\ldots$$

és ha ezen utolsó sor első tagja helyett írunk $1+q^{-1}z^{-2} = q^{-1}z^{-2}(1+qz^2)$ és ez utóbbi zárójeles faktort az első sor első tagjának írjuk, látható, hogy $\Phi(qz) = q^{-1}z^{-2}\Phi(z)$ tehát $\Phi(z) = qz^2\Phi(qz)$, ez a második functionális tulajdonság.

Már most az első tulajdonság alapján $\Phi(\frac{1}{z}) = \Phi(z)$, tehát

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} A_\nu z^{2\nu} = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_{-\nu} z^{-2\nu}$$ vagyis $A_\nu = A_{-\nu}$, tehát elég a pos. ν-khez tartozó A-kat meghatározni. A második tulajdonság alapján az összes A-kat A_0-val tudjuk kifejezni. Ugyanis

$$\Phi(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_\nu z^{2\nu} \qquad (1.)$$
$$\Phi(qz) = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_\nu q^{2\nu} z^{2\nu}$$ és a második tulajdonság alapján
$$\Phi(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_\nu q^{2\nu+1} z^{2(\nu+1)} \qquad (2.)$$

(1) és (2)-ben z ugyanazon hatványának coefficiensei egyenlők. Vegyük a 2ν-dik hatványt. Ennek coefficiense az (1)-ben A_ν, (2)-ben a coefficienst kapjuk, ha ν helyébe $(\nu-1)$ teszünk, mert akkor adódik $z^{2\nu}$, és ennek coefficiense $A_{\nu-1}q^{2\nu-1}$ tehát $A_\nu = A_{\nu-1}q^{2\nu-1}$ ez a recurrens formula köti össze az A-kat e szerint tehát

$$A_1 = A_0 q$$
$$A_2 = A_1 q^3$$
$$A_3 = A_2 q^5$$
$$\ldots\ldots$$
$$A_\nu = A_{\nu-1} q^{2\nu-1}$$

összeszorozva $A_\nu = A_0 q^{\nu^2}$ és így $A_{-\nu} = A_0 q^{\nu^2}$

tehát csak A_0 marad határozatlan, amennyiben A_ν értékét betéve

$$\Phi(z) = A_0 \sum_{r=-\infty}^{+\infty} q^{r^2} z^{2r} \qquad (3.)$$

csak azt kell még kimutatni, hogy ez a sor feltétlenül convergens. A sort így is írhatjuk $\Phi(z) = A_0(1+\sum_{1}^{\infty} q^{r^2}z^{2r} + \sum_{1}^{\infty} q^{r^2}z^{-2r})$. Kimutatjuk, hogy ez a két Σ külön külön feltétlenül convergens, és pedig a Cauchy féle conv. kritérium segélyével, megalkotva az $(n+1)$ és n-dik tag hányadosának limesét.

$\lim_n \left|\frac{q^{(n+1)^2} z^{2(n+1)}}{q^{n^2} z^{2n}}\right| = \lim_n |q^{2n+1} z^2| = 0 < 1$, épp így $\lim_n \left|\frac{q^{(n+1)^2} z^{-2(n+1)}}{q^{n^2} z^{-2n}}\right| = \lim_n |q^{2n+1} z^{-2}| = 0 < 1$

mindkettő azért, mert $|q| < 1$. Tehát $\Phi(z)$ sora feltétlenül convergens. Most még A_0-t kell meghatározni. E végett csak az n első faktor szorzatát vesszük

$$\Phi_n(z) = \underbrace{(1+qz^2)(1+q^3z^2)\cdot\ldots\cdot(1+q^{2n-1}z^2)}_{1.}\cdot\underbrace{(1+qz^{-2})(1+q^3z^{-2})\ldots(1+q^{2n-1}z^{-2})}_{2.} \qquad (10.)$$

Ha ezt a szorzást végrehajtjuk, kapjuk $\Phi_n(z)$-t egy véges sorral, mely a mint látható csak z páros hatványait tartalmazza; a legnagyobb hatvány z^{2n} adódik, ha az 1.) tényezősor második tagjait szorozzuk a 2-ik tényezősor első tagjaival, s a legkisebb hatvány z^{-2n} adódik, ha 1.) első tagjait szorozzuk 2.) második tagjaival; ha tehát ezen véges sorban fellépő coefficienseket a-kkal jelöljük, akkor $\Phi_n(z)$ így írható $\Phi_n(z) = \sum_{r=-n}^{+n} a_r z^{2r}$. Ezen a-k meghatározására $\Phi_n(z)$ két functionális tulajdonságából indulunk ki:

1.) $\Phi_n(z)$ nem változtatja értékét, ha z helyébe $\frac{1}{z}$-t írunk. Ez kitűnik (10)-ből.

2.) Ha $\Phi_n(z)$-ben z helyébe zq-t írunk.

$$\Phi_n(qz) = (1+q^3z^2)(1+q^5z^2)\cdot\ldots\cdot(1+q^{2n+1}z^2)$$
$$\cdot(1+q^{-1}z^{-2})(1+qz^{-2})\cdot\ldots\cdot(1+q^{2n-3}z^{-2})$$

Ha $(1+q^{-1}z^{-2})$ helyébe a vele egyenlő $q^{-1}z^{-2}(1+qz^2)$ írjuk, látható, hogy

$$\Phi_n(zq) = \Phi_n(z)\, q^{-1}z^{-2}\cdot\frac{1+q^{2n+1}z^2}{1+q^{2n-1}z^{-2}}$$

és ebből $\quad qz^2(1+q^{2n-1}z^{-2})\,\Phi_n(qz) = \Phi_n(z)(1+q^{2n+1}z^2) = (qz^2+q^{2n})\,\Phi_n(zq)$

hat. i. a baloldalon qz^2-el beszorzunk ez a második functionális tulajdonság.

Ugyanezt az egyenletet írjuk most $\Phi_n(z)$ összegalakjával

$$(qz^2+q^{2n})\sum_{r=-n}^{+n} a_r q^{2r} z^{2r} = (1+q^{2n-1}z^2)\sum_{r=-n}^{+n} a_r z^{2r} \qquad \text{vagyis}$$

$$\sum_{r=-n}^{+n}(a_r q^{2r+1} z^{2r+2} + a_r q^{2(n+r)} z^{2r}) = \sum_{r=-n}^{+n}(a_r z^{2r} + a_r q^{2n-1}\cdot z^{2r+2})$$

Ebben a két sorban z megfelelő hatványának coefficiensei egyenlők kell legyenek. Vegyük z^{2r} coefficienseit. Ezek a baloldalon $a_{r-1}q^{2r-1} + a_r q^{2(n+r)}$ a jobboldalon $a_r + a_{r-1}q^{2n-1}$, ebből kapjuk $a_{r-1}q^{2r-1} + a_r q^{2(n+r)} = a_r + a_{r-1}q^{2n-1}$. Ez a kettő egyenlő, $a_{r-1}q^{2r-1} + a_r q^{2(n+r)} = a_r + a_{r-1}q^{2n-1}$, mely szerint $a_{r-1}(q^{2r-1} - q^{2n-1}) = a_r(1-q^{2(n+r)})$

az a-k számára a recurrens formulát,

$$a_{r-1}\, q^{2r-1}(1-q^{2(n-r+1)}) = a_r(1-q^{2(n+r)})$$

vagyis
$$a_r = a_{r-1}\, q^{2r-1}\frac{1-q^{2(n-r+1)}}{1-q^{2(n+r)}}$$

és ebből
$$a_1 = a_0\, q\,\frac{1-q^{2n}}{1-q^{2(n+1)}}$$

tehát
$$a_2 = a_1 q^3 \frac{1-q^{2(n-1)}}{1-q^{2(n+2)}}$$

$$a_3 = a_2 q^5 \frac{1-q^{2(n-2)}}{1-q^{2(n+3)}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_r = a_{r-1}\, q^{2r-1}\frac{1-q^{2(n-r+1)}}{1-q^{2(n+r)}}$$

összeszorozva
$$a_r = a_0\, q^{r^2}\frac{(1-q^{2n})(1-q^{2(n-1)})\cdots(1-q^{2(n-r+1)})}{(1-q^{2(n+1)})(1-q^{2(n+2)})\cdots(1-q^{2(n+r)})}$$

Tehát épenmint $\Phi(z)$ összegben csak A_0 ismeretlen, úgy a $\Phi_n(z)$ véges összegben csak a_0 ismeretlen. Ezt kell meghatározni s miután $\Phi(z) = \lim\limits_n \Phi_n(z)$ azért $A_0 = \lim\limits_n a_0$. Tehát határozzuk meg a_0-t. Midőn (10)-t meghatároztuk, z^{2n} legmagasabb hatványcoefficiense $q^{1+3+5+\cdots 2n-1} = q^{n^2}$, tehát $a_n = q^{n^2}$ és az utóbbi formula szerint

$$a_n = a_0\, q^{n^2}\frac{(1-q^{2n})(1-q^{2(n-1)})\cdots\cdots(1-q^2)}{(1-q^{2(n+1)})(1-q^{2(n+2)})\cdots(1-q^{4n})}$$

amiből következik, hogy $a_0 \dfrac{(1-q^{2n})\cdots\cdots(1-q^2)}{(1-q^{2(n+1)})\cdots(1-q^{4n})} = 1$

azaz
$$a_0 = \frac{(1-q^{2(n+1)})(1-q^{2(n+2)})\cdots(1-q^{4n})}{(1-q^2)(1-q^4)\cdots\cdots(1-q^{2n})}$$

Mármost ennek limesét kell venni, $n=\infty$ mellett. A nevezőben álló véges szorzat ezáltal átmegy az $(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\cdots = q_0$ végtelen szorzatba, vagyis ha az alsó véges szorzat P_n, $\lim\limits_n P_n = q_0$. A felsőben áll P_n folytatása az $(n+1)$-ik tagtól a $2n$-ig és most n-et végtelen nagynak kell venni, vagy más szóval a q_0 végtelen szorzatból igen messze fekvő helytől kezdve kell szorozni bizonyos számú faktort, de tudjuk a feltétlenül conv. végtelen szorzatok elméletéből, hogy bizonyos helytől kezdve akárhány tag szorzatának R_n-nek limese $\lim\limits_n R_n = 1$. Ha tehát $a_0 = \frac{R_n}{P_n}$ akkor $A_0 = \lim\limits_n a_0 = \frac{\lim R_n}{\lim P_n} = \frac{1}{q_0}$, tehát $A_0 = \frac{1}{q_0}$

Ez a bizonyitás ugyan nem egészen szigorú, mert a $\Phi_n(z)$ limes átmenetében nem csak n, hanem a faktorok száma is végtelenbe nő. A szigorú bizonyitás olyan formán menne, mint $\lim\limits_n (1+\frac{1}{n})^n = e$ kimutatásánál. Ha most A_0 ezen értékét 3.)-ba betesszük és $q_0 = \prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})$-el átszorzunk, akkor

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+q^{2n-1}z^2)(1+q^{2n-1}z^{-2}) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} q^{r^2} z^{2r} \qquad \text{I.}\,6_1.$$

Ez a jobboldali sor adja a q_0-val szorzott σ_2 productumot. Most az érték módosításával ebből le fogjuk vezetni a többi σ függvényekben szereplő productumok soralakját. Tegyünk z helyébe $z\cdot i$, akkor adódik

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1-q^{2n-1}z^{2})(1-q^{2n-1}z^{-2}) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}(-1)^{\nu} q^{\nu^2} z^{2\nu} \qquad II\,\sigma_3.$$

Tehát ez a jobboldali sor nem egyéb, mint σ_3-ban előforduló productum szorozva q_0-val. Tegyünk z helyébe $q^{\frac{1}{2}}z$, tehát $z^2\, h.\, z^2 q$, $z^{2\nu}\, h.\, z^{2\nu}q^{\nu}$, akkor I-ből adódik

$$(1+z^{-2})\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+q^{2n}z^{2})(1+q^{2n-2}z^{-2}) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} q^{\nu^2+\nu} z^{2\nu}$$

vagyis a jobboldali exponens teljes négyzetté való kiegészítése végett $q^{\frac{1}{4}}$-el, majd még z-vel keresztül szorozva, kapjuk

$$q^{\frac{1}{4}}(z+z^{-1})\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+q^{2n}z^{2})(1+q^{2n}z^{-2}) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} q^{\left(\frac{2\nu+1}{2}\right)^2} z^{2\nu+1} \qquad III\,\sigma_1$$

és ez nem egyéb, mint a σ_1-ben szereplő, constansokkal ment Π-nak q_0-val való szorzata soralakban. Végre a σ-ban szereplő végtelen szorzatot soralakban megkapjuk, ha $III\,\sigma_1$-ben z helyébe iz írunk; lesz $i^{2\nu+1} = i^{2\nu}\cdot i = (-1)^{\nu} i$; $iz - iz^{-1} = i(z-z^{-1})$, tehát mindkét oldalon előjön i, ez tehát elesik, majd még keresztül osztunk i-vel és kapjuk

$$q^{\frac{1}{4}}\frac{z-z^{-1}}{i}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1-q^{2n}z^{2})(1-q^{2n}z^{-2}) = \frac{1}{i}\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}(-1)^{\nu} q^{\left(\frac{2\nu+1}{2}\right)^2}\cdot z^{2\nu+1} \qquad IV.$$

Eme 4 összeg segélyével bevezetjük a Jacobi féle ϑ függvényeket. Láttuk, hogy $z = e^{\frac{\pi u}{2\omega} i}$, tegyünk $\frac{u}{2\omega} = v$, majd $q = e^{\frac{\pi\omega'}{\omega} i}$-ban $\frac{\omega'}{\omega} = \tau$, akkor $z = e^{v\pi i}$ és $q = e^{\pi\tau i}$. Eme új v változó és τ érték bevezetésével jutunk az előbbi 4 formulából a Jacobi féle ϑ függvényekhez. Először I-ben összevonva két tagot ν és $(-\nu)$-hez tartozólag $q^{\nu^2}(z^{2\nu}+z^{-2\nu}) = q^{\nu^2}(e^{2\nu\pi v i}+e^{-2\nu\pi v i}) = 2q^{\nu^2}\cos(2\nu\pi v)$ s most a sor tagjait kapjuk, ha $\nu = 1, 2, \cdots$ tehát

$$\sum_{I} = 1 + 2q\cos 2\pi v + 2q^4\cos 4\pi v + \cdots + 2q^{\nu^2}\cos 2\nu\pi v + \cdots = \vartheta_3 v$$

A $\sum_{II}$-ben csupán az előjelek fognak váltakozni, tehát

$$\sum_{II} = 1 - 2q\cos 2\pi v + 2q^4\cos 4\pi v - \cdots + (-1)^{\nu}2q^{\nu^2}\cos 2\nu\pi v + \cdots = \vartheta_4 v.$$

$\sum_{III}$-ban oly két tagot vonunk egybe, a hol q exponense ugyanaz, tehát ha $\nu = 0, \nu = 1, \ldots \nu = \nu$ és $\nu = -1, \nu = -2, \ldots \nu = -\nu-1$, tehát az általános két tag összevonása $q^{\left(\frac{2\nu+1}{2}\right)^2}(z^{2\nu+1}+z^{-2\nu-1}) = q^{\left(\frac{2\nu+1}{2}\right)^2}(e^{(2\nu+1)\pi v i}+e^{-(2\nu+1)\pi v i})$ tehát

$$\sum_{III} = 2\left(q^{\frac{1}{4}}\cos\pi v + q^{\frac{9}{4}}\cos 3\pi v + \cdots + q^{\left(\frac{2\nu+1}{2}\right)^2}\cos(2\nu+1)\pi v + \cdots\right) = \vartheta_2 v$$

És végre $\sum_{IV}$-ben is z helyébe v-t vezetve be, sinusok lépnek fel, s ha itt is ugyanazokat az összevonásokat eszközöljük, mint előbb, kapjuk:

$$\Sigma_{IV} = 2\left(q^{\frac{1}{4}}\sin\pi v - q^{\frac{9}{4}}\sin 3\pi v + \dots + (-1)^{\nu} q^{\left(\frac{2\nu+1}{2}\right)^2}\sin(2\nu+1)\pi v + \dots\right) = \vartheta_1 v$$

Ezek az úgy nevezett ϑ függvények, melyeket Jacobi már a σ függvények előtt vezetett be az analízisbe; mi itt utóbbiakkal jutottunk a ϑ függvényekhez. A ϑ és σ függvények közt egyszerű összefüggés van; látni fogjuk, hogy az egyes ϑ függvények eggyel alacsonyabb indexű σ függvényekkel vannak összefüggésben, tehát σ a ϑ_1-el .... σ_3 a ϑ_4-el. Ha ugyanis szemügyre veszszük a 4 σ függvény alakját és összevetjük a ϑ függvényeket értelmező sorokkal aequivalens végtelen szorzatokkal, látjuk, hogy

$$\sigma u = \frac{2\omega}{\pi q_0^2} e^{\frac{\eta}{2\omega}u^2}\frac{z-z^{-1}}{2i}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n}z^2)(1-q^{2n}z^{-2}) = \frac{\omega}{\pi q^{\frac{1}{4}} q_0} e^{\frac{\eta}{2\omega}u^2}\vartheta_1\left(\frac{u}{2\omega}\right), \text{ mert } v = \frac{u}{2\omega}$$

$$\sigma_1 u = \frac{1}{q_1^2} e^{\frac{\eta}{2\omega}u^2}\frac{z-z^{-1}}{2}\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n}z^2)(1+q^{2n}z^{-2}) = \frac{1}{2q^{\frac{1}{4}}q_0 q_1^2} e^{\frac{\eta}{2\omega}u^2}\vartheta_2\left(\frac{u}{2\omega}\right)$$

$$\sigma_2 u = \frac{1}{q_2^2} e^{\frac{\eta}{2\omega}u^2}\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n-1}z^2)(1+q^{2n-1}z^{-2}) = \frac{1}{q_0 q_2^2} e^{\frac{\eta}{2\omega}u^2}\vartheta_3\left(\frac{u}{2\omega}\right)$$

$$\sigma_3 u = \frac{1}{q_3^2} e^{\frac{\eta}{2\omega}u^2}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-1}z^2)(1-q^{2n-1}z^{-2}) = \frac{1}{q_0 q_3^2} e^{\frac{\eta}{2\omega}u^2}\vartheta_4\left(\frac{u}{2\omega}\right)$$

És miután a ϑ függvényeket mind végtelen sorral állítottuk elő, azért egy állandó értékű faktortól eltekintve a σ függvényeket is előállítottuk végtelen sorral, tehát magát $\sigma(u)$-t is, a mit célul kitűztük volt. Ebből az összefüggésből kiolvashatjuk a ϑ függvények nullapontjait is, mert ezek ott tűnnek el, a hol a megfelelő σ függvények. $\sigma(u)=0$, ha $u=2\nu\omega+2\nu'\omega'$; $\sigma_1(u)=0$, ha $u=\omega+2\nu\omega+2\nu'\omega'$; $\sigma_2(u)=0$, ha $u=\omega+\omega'+2\nu\omega'+2\nu'\omega'$; $\sigma_3(u)=0$, ha $u=\omega'+2\nu\omega+2\nu'\omega'$! Ha tehát $v=\frac{u}{2\omega}$-ban ezen u nullaértékeket betesszük, kapjuk, hogy:

$\vartheta_1 v=0$, ha $v=\nu+\nu'\frac{\omega'}{\omega}=\nu+\nu'\tau$, $\vartheta_2 v=0$, ha $v=\frac{1}{2}+\nu+\nu'\tau$, $\vartheta_3 v=0$, ha $v=\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}+\nu+\nu'\tau$. és $\vartheta_4 v=0$, ha $v=\frac{\tau}{2}+\nu+\nu'\tau$. Ezek a ϑ függvények nullpontjai. Már most állítsuk elő a ϑ függvényeket végtelen szorzattal. Egyszerűen a ϑ függvényeket értelmező sorokkal egyenlő értékű végtelen szorzatokba bevezetjük z helyébe v-t. A ϑ_1-nél szerepelt $\frac{z-z^{-1}}{2}\prod(1-q^{2n})(1-q^{2n}z^2)(1-q^{2n}z^{-2})$ ez utóbbi két faktort összevonva $1-q^{2n}(z^2+z^{-2})+q^{4n}$ és $z^2+z^{-2}=2\cos 2\pi v$ írva, továbbá $\frac{z-z^{-1}}{i}=\frac{e^{\pi vi}-e^{-\pi vi}}{i}=2\sin\pi v$, kapjuk

$$\vartheta_1 v = 2q^{\frac{1}{4}}\sin\pi v\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1-2q^{2n}\cos 2\pi v+q^{4n})$$

épen úgy

$$\vartheta_2 v = 2q^{\frac{1}{4}}\cos\pi v\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+2q^{2n}\cos 2\pi v+q^{4n})$$

$$\vartheta_3 v = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+2q^{2n-1}\cos 2\pi v + q^{4n-2})$$

$$\vartheta_4 v = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1-2q^{2n-1}\cos 2\pi v + q^{4n-2})$$

Tehát előállitottuk a ϑ függvényeket végtelen szorzattal és végtelen sorral. A σ függvénynél tehát u a változó, a ϑ függvényeknél v, a mily szerepe van ott 2ω és $2\omega'$-nek, olyan szerepe van itt 1 és τ-nak. Kérdés, hogyan változik a ϑ függvények értéke, ha v növekedik 1 és τ-val. Láttuk, hogy

$$\vartheta_1 v = 2q^{\frac{1}{4}}\sin\pi v - 2q^{\frac{9}{4}}\sin 3\pi v + \dots + (-1)^{\nu}2q^{\left(\frac{2\nu+1}{2}\right)^2}\sin(2\nu+1)\pi v + \dots$$

$$\vartheta_2 v = 2q^{\frac{1}{4}}\cos\pi v + 2q^{\frac{9}{4}}\cos 3\pi v + \dots + q^{\left(\frac{2\nu+1}{2}\right)^2}\cos(2\nu+1)\pi v + \dots$$

$$\vartheta_3 v = 1 + 2q\cos 2\pi v + 2q^4\cos 4\pi v + \dots + 2q^{\nu^2}\cos 2\nu\pi v + \dots$$

$$\vartheta_4 v = 1 - 2q\cos 2\pi v + 2q^4\cos 4\pi v + \dots + (-1)^{\nu}2q^{\nu^2}\cos 2\nu\pi v + \dots$$

Ha most v-t növeljük 1-el, akkor ϑ_1 és ϑ_2-ben a sinus illetőleg cosinus megett πv páratlan számu többszörösei $(2\nu+1)\pi v$ állván, ezek így módosulnak: $(2\nu+1)\pi(v+1) = (2\nu+1)\pi v + (2\nu+1)\pi$, tehát az argumentum növekedik π páratlan számu többszörösével, sin és cos. jegyet változtat, úgyhogy ezáltal ϑ_1 és ϑ_2 jegyet változtat. A ϑ_3 és ϑ_4-ben cos. megett álló $2\nu\pi v$-ből lesz $2\nu\pi(v+1) = 2\nu\pi v + 2\nu\pi$ tehát az argumentum növekedik π páros számu többszörösével, a cosinus, úgy maga ϑ_3 és ϑ_4 megtartja értékét. Tehát

$$\vartheta_1(v+1) = -\vartheta_1 v$$

$$\vartheta_2(v+1) = -\vartheta_2 v$$

$$\vartheta_3(v+1) = \vartheta_3 v$$

$$\vartheta_4(v+1) = \vartheta_4 v$$

Amiből egyszersmind látható, hogy ϑ_1 és ϑ_2 periodusa 2. ϑ_3 és ϑ_4 periodusa 1.
Lássuk miképp változnak az értékek, ha v τ-val növekedik; e végett a ϑ függvényeknek Σ alakját vesszük. Láttuk, hogy $\vartheta_3 v = \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{\nu^2} z^{2\nu}$, és q-t τ-val, z-t v-vel kifejezve: $\vartheta_3 v = \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{\nu^2\pi\tau i + 2\nu\pi v i}$, ha most v helyébe $v+\tau$ irunk, $\vartheta_3(v+\tau) = \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{\nu^2\pi\tau i + 2\nu\pi v i + 2\nu\pi\tau i}$, ha most az exponens első két tagjának összevonása végett az egyenlet két oldalát $e^{\pi\tau i + 2\pi v i}$-vel szorozzuk,

$$e^{\pi\tau i + 2\pi v i}\vartheta_3(v+\tau) = \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{(\nu+1)^2\pi\tau i + 2(\nu+1)\pi v i}$$

de ez a summa nem más, mint a régi ϑ_3, csakhogy itt más sorrendben summázunk, a mi könnyen belátható, ha itt $\nu = 1, 2, 3 \dots$ teszünk, ugyanazokat a tagokat kapjuk; de $\vartheta_3 v$ feltétlenül convergens. Igy tehát $\vartheta_3(v+\tau) = e^{-\pi i(2v+\tau)}\vartheta_3 v$.

Tehát az argumentumnak τ-val való növelése folytán a függvény csak egy exp. faktorral szorzódik. Most $\vartheta_4(v)=\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^{\nu}e^{\nu^2\pi\tau i+2\nu\pi v i}$ s ha v helyébe $(v+\tau)$ teszünk és keresztül szorzunk $-e^{\pi\tau i+2\pi v i}$-vel

$$-e^{\pi\tau i+2\pi v i}\vartheta_4(v+\tau)=\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^{\nu+1}e^{(\nu+1)^2\pi\tau i+2(\nu+1)v\pi i}=\vartheta_4(v),$$

mint az előbb, tehát $\vartheta_4(v+\tau)=-e^{-\pi i(2v+\tau)}\vartheta_4 v$; $\vartheta_2(v)=\sum q^{(\nu+\frac{1}{2})^2}z^{2(\nu+\frac{1}{2})}$ s ugyanazon eljárással adódik, hogy $\vartheta_2(v+\tau)=e^{-\pi i(2v+\tau)}\cdot\vartheta_2 v$ és szorozva (-1)-el $\vartheta_1(v+\tau)=-e^{\pi i(2v+\tau)}\vartheta_1(v.)$ Összeállítva tehát

$$\left.\begin{aligned}
\vartheta_1(v+\tau)&=-e^{-\pi i(2v+\tau)}\vartheta_1 v\\
\vartheta_2(v+\tau)&=e^{-\pi i(2v+\tau)}\vartheta_2 v\\
\vartheta_3(v+\tau)&=e^{-\pi i(2v+\tau)}\vartheta_3 v\\
\vartheta_4(v+\tau)&=-e^{-\pi i(2v+\tau)}\vartheta_4 v.
\end{aligned}\right\}$$

Mindegyiknél ugyanaz az exp. faktor lép fel, úgyhogy két ily ϑ függvény hányadosa már nem változtatja értékét, ha v τ-val növekedik; tehát két ϑ függvény hányadosa periodicus függvény. Jacobi a következőket használja.

1.)
$$\frac{\vartheta_1(v+1)}{\vartheta_4(v+1)}=-\frac{\vartheta_1 v}{\vartheta_4 v}\quad \text{ennek periodusa } 2$$
$$\frac{\vartheta_1(v+1)}{\vartheta_4(v+1)}=\frac{\vartheta_1 v}{\vartheta_4 v}\quad \text{" \quad " \quad } \tau$$

tehát a $\frac{\vartheta_1 v}{\vartheta_4 v}$ periodusa 2 és τ, és mivel τ képzetes, azaz 2 és τ két önálló periodus, azért $\frac{\vartheta_1 v}{\vartheta_4 v}$ függvény kétszeresen periodusos függvény.

2.)
$$\frac{\vartheta_2(v+1)}{\vartheta_4(v+1)}=-\frac{\vartheta_2 v}{\vartheta_4 v}\quad \text{, tehát 2 periodus}$$
$$\frac{\vartheta_2(v+1)}{\vartheta_4(v+1)}=-\frac{\vartheta_2 v}{\vartheta_4 v}\quad \text{tehát } 2\tau \text{ periodus}$$

a hányados két önálló periodusa tehát 2 és 2τ, de ezek nem primitiv periodusok, hanem $1+\tau$, mert $\frac{\vartheta_2(v+1+\tau)}{\vartheta_4(v+1+\tau)}=\frac{\vartheta_2(v)}{\vartheta_4(v)}$, tehát $\frac{\vartheta_2 v}{\vartheta_4 v}$ függvény kétszeresen periodusos, primitiv perioduspárja 2, $1+\tau$

3.)
$$\frac{\vartheta_3(v+1)}{\vartheta_4(v+1)}=\frac{\vartheta_3 v}{\vartheta_4 v}\quad \text{tehát periodusa } 1$$
$$\frac{\vartheta_3(v+1)}{\vartheta_4(v+1}=-\frac{\vartheta_3 v}{\vartheta_4 v}\quad \text{" \quad " \quad } 2\tau$$

ez a $\frac{\vartheta_3 v}{\vartheta_4 v}$ függvény tehát szintén kétszeresen periodusos.

Ily módon három kétszeresen periodusos függvényhez jutottunk, mind különböző prim. periodusokkal. Jacobi ezeket következőleg nevezte el:

az elsőt némi modositással sinus amplitudo
a másodikat cosinus amplitudo
a harmadikat differente amplitudo vagy Δ amplitudo.

Tárgymutató.