Algebrai analysis.

UNIVERSITATEA DIN CLUJ
SEMINARUL
DE
MATEMATICI
Nr. 30

Előadja:

Dr Vályi Gyula
ny. r. tanár.

Inv. 1020.

MATHEMAT. SEMINARIUM
KOLOZSVÁR.

Kolozsvár, 1905.

V-22-3

MATEMATIKAI
KOLOZSVÁR
EGYETEM
INTÉZET

Bevezetés.

Analysis alatt a számok tudományát értjük. Az alkalmazott analysisban a szám eredeti legegyszerűbb jelentéséből indulunk ki s így jutunk el a történelmi kifejlődés menetén a különböző algebrai műveletekhez.

A szám a tőben lévő" tárgyakat vagy az időben végbe menő eseményeket számlálja meg. A szám tehát a számlálás eredménye s mint ilyen, függetlenül a számlálás módjától, a sokasághoz tartozik, de attól absztrahálni is lehet. Az így elvont (abstract) számokkal foglalkozik az analysis. A számokkal különböző" műveleteket végezünk. Két számot egymással megfelelésbe úgy hozunk, hogy a többé az egyikből veszünk egy egységet s aztán a másikból; úgy folytatva a számlálást, három eset lehetséges: 1.) egyszere fogynak el a két szám egységei, akkor a két szám egyenlő" ($a = b$); 2.) az első szám egységei előbb fogynak el, mint a másodiké, akkor az első szám kisebb, a másodiknál ($a < b$); 3.) a második egységei fogynak előbb el, akkor ($b < a$)

A számokat tehát más szempontból összehasonlítás alapján két csoportba oszthatjuk: vannak egyenlő" és nem egyenlő" számok. Az egyenlőség és egyenlőtlenség.

Egyenlőségi törvények: I. ha $a = b$ akkor $b = a$, mert a szám független a számlálás sorrendjétől. II. ha $a = b$, $b = c$ akkor $a = c$, azaz ha két szám egy harmadikkal egyenlő", akkor a két szám egymás közt is e-

gyenlő". Ez bizonyos, mert a egységei b egységeivel egy
szere fogynak el, továbbá b egységei c egységeivel is
egyszerre fogynak el, tehát a és c egységei is egyszerre
fogynak el, ami pedig a és c egyenlőségét definiálja.
Az egyenlőtlenség törvényei: I. ha a > b akkor
b < a, mert ha a egységei később fogynak el, akkor
világos, hogy b-éi előbb. II. ha a > b és b > c akkor
a > c ami szintén az összehasonlításból következik. Ez
a törvény azt fejezi ki, hogy az egyenlőtlenség na-
gyobb oldala egy még nagyobbal, kisebb oldala a
még kisebbel kicserélhető".

Ezen alaptörvényeket azért fontosak, mert a későb-
biekben nagy fog töltömni minden díjfizetés, hogy azeu
alaptörvényeket érvényben maradjanak. Most pedig át-
térünk a számokkal való műveletre.

Összeadás.

Két sokaság egyesítését összeadásnak nevezzük. Az
egyesítés eredménye az összeg. Tudjuk, hogy a szám
a számlálás sorrendjétől független. A szám ezen de-
finitiójából következnek az összeadás alaptörvényei.
Ezek: I. $a + b = b + a$, az összeadandók sorrendjét sza-
bad felcserélni. Ezt a törvényt úgy is szokták mon-
dani, hogy az összeadás commutativ művelet.
II. három szám esetén $a + b + c = a + (b + c)$, vagyis az ös-
szeadandókból szabad csoportokat alkotni. Ez az ösz-
szeadás associativ tulajdonsága. Tehát az összea-
dás két összeadandó esetére commutativ háromra
(~~distributiv~~) associativ.

Rebizonyítjuk, hogy ezen két törvény tetszőleges
összeadandó esetén is érvényes.

Három tagra is commutativ az összeadás, mert

a II. axiótörvény szerint $a+b+c = a+(b+c)$ az I. törvény szerint $a+b+c = (b+c)+a$ tehát $a+b+c = b+c+a$
Hasonlóképpen $a+b+c = b+c+a = c+a+b$ Az itt előforduló sorrend váltakozását ciklikusnak mondjuk: az első helyre a második, második helyre a harmadik stb. utolsó helyre az első elem kerül.

A két distributivitás alkalmazásával három elemre nézve minden sorrendhez eljuthatunk, vagyis ha két elemre az összeadás commutativ, asszociativ, akkor logice következik, hogy háromra is commutativ.

Most általánosan az u. n. teljes inductióval bebizonyítjuk, hogy ha az összeadás n és $n+1$ elemre commutativ, akkor $n+2$ elemre is commutativ.

Induction alatt a természettudományokban azt a bizonyítást értik, melynél egyes tapasztalatokból általános következtetést vonunk. Ez a bizonyítás a mathematikában teljesen szigorú, míg a természettudományokban nem mindig.

Tehát tegyük fel, hogy az összeadandó elemek $a_1, a_2, a_3 \ldots\ldots a_n, a_{n+1}, a_{n+2}$. Bebizonyítjuk, hogy ha a commutativság áll n és $n+1$ elemre nézve, akkor áll $n+2$ elemre is. A bizonyítás során két esetet különböztetünk meg. 1.) Két összehasonlítandó sorrendnél az utolsó tag egyező, akkor az $n+2$ elem összege ily alakú $S_1 + a_k$ és $S_2 + a_k$ Az S_1 és S_2 az $n+1$ elemből állítható 2 sorrend összegét jelenti, de S_1 és S_2 - ben csak $n+1$ elem kerül összeadásra, $n+1$ elemre pedig áll a commutativság, tehát $S_1 = S_2$ amiből

$$S_1 + a_k = S_2 + a_k$$ is teljesül.

2.) Ha a két esetben az utolsó tag nem n, az pl. az egyikben a_n, a másikban a_k, akkor is áll az $n+2$ elemre a commutativság. Mert az utolsó tagot ki-

vére a többi $n+1$ tagban előjön a_k ill. a_h elem s minthogy itt már csak $n+1$ elem van a commutativ törvény értelmében az $n+1$ elem sorrendjét úgy változtathatjuk, hogy a_k ill. a_h az utolsó helyre kerüljön; ekkor a két sorrend ily alakú

$$S_1 + a_k + a_h \qquad \text{és} \qquad S_2 + a_h + a_k$$

minthogy azonban most már $S_1 = S_2$ és $a_k + a_h = a_h + a_k$ azért $S_1 + a_k + a_h = S_2 + a_h + a_k$ ami bizonyítandó volt.

Épen így alkalmazhatjuk a teljes inductiót az associativ tulajdonság általánosításánál. Az elemek: $a_1, a_2, a_3 \ldots a_k, a_{k+1}$ Legyen $k-1$ tag összege S akkor $S + a_k + a_{k+1} = S + (a_k + a_{k+1})$ mert három elemnél áll, az associativ tulajdonság, de $S + (a_k + a_{k+1}) + a_{k+2} = S + (a_k + a_{k+1} + a_{k+2})$. Amiből látható, hogy annyi tagot lehet csoportonként előre összeadni, amennyit akarunk. — Tehát az összeadásnál felállító összes tulajdonságok adják a két alaptörvény formális következményei. Ezek az alaptörvények voltak: I.) $a + b = b + a$; II.) $a + b + c = a + (b + c)$

Nagysági viszonyok: 1.) az összeg nagyobb, mint akármelyik összeadandó $(a + b > a)$; 2.) ha $a > b$ akkor $a + c > b + c$ E két tétel a két-két szám összehasonlításával bizonyítható. 3.) Ha $a + b = c + d$ és ha $a > c$ akkor $b < d$. Ezen tételt indirect módon bizonyítjuk. Két szám negyedik vagy egyenlő egynagyával, vagy az első számnál, ill. a másodikat szám nagyobb. Ha bebizonyítjuk, hogy itt b nem egyenlő, sem nagyobb nem lehet d-nél, akkor b szükségképen kisebb d-nél. Ez a bizonyítás az u. n. indirect bizonyítási mód. Ha jelenleg $a > c$ és $b \geq d$ akkor $a + b > c + d$, de ez a feltevésnek ellenkezik, mely szerint $a + b = c + d$, tehát szükséges, hogy $b < d$ legyen.

Kivonás.

A kivonás az összeadás megfordított művelete. Itt azon feladattal állunk szemben, hogy ha ismerjük az összeget (a) és az egyik összegezendőt (6), akkor keressük azt a számot, melyet az összegezendőhöz adva az összeget kapjuk. Ezt így definiált számot (a–6) különbségnek nevezzük. Az különbség létezésére szükséges, hogy a > 6 legyen. Ez különbség definitiójából tehát eg.: $6+(a-6)=a$. Ezen definitióból és az összeadás két alaptörvényéből vezethetők le a kivonásra vonatkozó öss:es törvények. I. $a-6+c=a+c-6$, mert az összeadás törvényei szerint

$$a-6+c+6=a-6+6+c=a+c$$

De az egyenlőség első és utolsó tagja szerint a–6+c az a számnak, melyhez 6 adva a+c–t kapjuk. Az így definiált számnak pedig a különbség; vagyis a–6+c az a+c–nek és 6–nek különbsége: $a-6+c=a+c-6$.

II. $a-6-c=a-(6+c)$ mert az összeadás törvényei alapján $a-6-c+c=a-6$ és $a-6-c+c+6=a$. Ezen utolsó egyenlet szerint pedig a–6–c az a–nak és c+6–nek a különbsége, tehát $a-6-c=a-(6+c)$. Ezt a tételt szavakban így fejezzük ki: egy számból összeget úgy vonunk le, hogy az összeg minden egyes tagját a számból levonjuk. – Hasonló okoskodással nyerjük, hogy

III. $a-(6-c)=a-6+c$. Tehát II. és III törvények szerint a kivonásnál a levonandó jelét mindig ellenkezőre kell változtatni.

Tagyosági viszonyok: 1.) a különbség mindig kisebb a levonandó első tagjánál ($a-6<a$), 2.) ha $a>6$, akkor $a-c>6-c$, mert $(a-c)+c=a$ és $(6-c)+c=6$; minthogy e két egyenlőtlenség $a>6$ és $c=c$ azért az első

szeadási tételéből következik, hogy $(a-c)>(b-c)$. 3.) ha $b>c$ akkor $(a-b)$ kisebb mint $(a-c)$ mert

$$(a-b)+b=a \text{ és } (a-c)+c=a$$

tehát $(a-b)+b=(a-c)+c$ és ha itt $b>c$ akkor szintén az összeadási tételek egyike szerint szükséges, hogy $(a-b)<(a-c)$ legyen.

A (kétes) 2.) -ből következik, hogy a kisebbítendő növelésével a különbség nő; 3.-ból pedig következik, hogy a levonandó növelésével a különbség fogy.

Szorzás.

A szorzás az összeadásnak speciális esete, t. i. az összeadandók egyenlők. A művelети elem itt a szorzandó, melyet összeadandóul kell venni és a szorzó, mely mutatja, hogy a szorzandót hányszor kell összeadandóul venni. A szorzandót és szorzót együtt tényezőnek (factornak) mondjuk. A definíció szerint tehát $a \times b = a.b = a+a+a+\ldots\ldots+a$ (b-szer)

Minthogy tulajdonképen a szorzásnál is összeadással van dolgunk, azért a két alaptörvény: a commutativ és associativ tulajdonság itt is meg van.

I. $ab=ba$, mert vehetünk minden a-ból egy egységet b egyenlő b-vel; de ilyen b annyi féle, ahány egység van a-ban, vagyis b egyenlő a, de ez az állítás így fejezhető ki: b a-szor vett összeadandónak egyenlő ba. Tehát a szorzás commutativ, azaz a szorzást felcserélni. I. meg van az associativ tulajdonság is: $(ab).c=a.(bc)$, mert hajtsuk végre a baloldal feltételét: $a+a+a+\ldots\ldots+a$ (b-szer), most ilyen sort állítsunk c-t

$$a+a+a+\ldots\ldots+a \quad (b\text{-szer})$$
$$a+a+a+\ldots\ldots+a \quad (b\text{-szer})$$

$$a+a+a+\ldots\ldots\ldots+a \quad b\text{ szer}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a+a+a+\ldots\ldots\ldots\ldots+a \quad b\text{ szer}$$

Látjuk, hogy itt a megvan b-szer, tehát (ab)-szorosa c-vel egyenlő a. $(b.c)$. E két alaptörvényt több elemre ep úgy kiterjeszthetjük, mint az összeadásnál. III. itt egy új alaptörvénnyel is találkozunk, ez a disztributiv tulajdonság. (Az asszociativ, kommutativ és disztributiv elnevezések Hamiltontól származnak). A disztributiv tulajdonság szerint $(a+b).c = ac+bc$ mert $(a+b).c = (a+b)+(a+b)+\ldots\ldots c\text{-szer} =$
$= a+a+a+\ldots\ldots+a + b+b+b+\ldots\ldots+b = ac+bc.$
$\quad c\text{-szer} \qquad\qquad c\text{-szer}$

Ám tulajdonképen azt mondja, hogy összeget úgy szorzunk, hogy az összegtagokat külön-külön megszorozzuk. Ennek megfordítottja a közös factor kiemelése.

A disztributiv tulajdonság áll több tagra is. Így $(a+b).(c+d) = a(c+d)+b.(c+d) = ac+ad+bc+bd$; vagy $(a+b+c).d = ad+bd+cd$. Szólnunk kell még a kivonás szorzásáról is. Minthogy $(a-b+b).c = ac$ a III. törvény szerint $(a-b).c+bc = ac$, de akkor a kivonás definitiója szerint $(a-b).c = ac-bc$.

A megfelelő tételek értelmében
$$\left.\begin{aligned}(a-b)(c-d) &= a(c-d)-b(c-d)\\ &= ac-ad-(bc-bd)\\ &= ac-ad+bd-bc\\ &= ac+bd-ad-bc\end{aligned}\right.$$

Ezek után a szorzásra vonatkozó általános szabályt így fejezhetjük ki: a szorzásnál minden tagot minden tagjával kell szorozni, mely tagonként összeszorzásnál a szorzat pozitiv előjelű, ha az összeszorzandó tényezők egynemű előjelűek voltak és negativ előjelű, ha az összeszorzandó tényezők különböző előjelűek voltak.

A szorzás alaptörvényei voltak:
I. $ab = ba$; II. $abc = a(bc)$; III. $(a+b)c = ac+bc$.

Osztás.

Az osztás a szorzásnak fordított művelete. Adva van két tag szorzata és az egyik tag (tényező) s keressük a másikat, mely ebben az esetben hányadosnak neveztetik. Két mennyiség hányadosa tehát az a szám, mely az osztóval szorozva az osztandót adja pl. a és b hányadosa $\frac{a}{b}$ és a hányados definitiója szerint $\frac{a}{b} . b = a$. – Az hányados ezen definitiójából és a szorzás alaptörvényeiből lehetnek az osztás alaptörvényeit. Így $\frac{a}{b} . c = ?$ Átváltoztatás végett szorozzuk b-vel, $\frac{a}{b} . cb$ de a szorzás commutativ b és c helyre felcserélhetők: $\frac{a}{b} . bc$ de $\frac{a}{b} . b = a$, s így $\frac{a}{b} . bc = ac$. De az a szám, mely b-vel szorozva ac-t adja nem lehet más, mint ac-nek és b-nek a hányadosa, tehát I. $\frac{a}{b} c = \frac{ac}{b}$. Az értelmi definitió a többi alaptörvény levezetésénél is így módon történik, azért ennek mellőzésével lássuk ezek a formáit.

II. $\frac{a}{b} . \frac{c}{d} = ?$ III $\frac{a}{b} : c = ?$ IV. $a : \frac{b}{c} = ?$ V. $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = ?$

$\frac{a}{b} . b . \frac{c}{d} . d = ac$ $(\frac{a}{b} : c) . b = a : c$ $(a : \frac{b}{c}) . \frac{b}{c} = a$ $(\frac{a}{b} : \frac{c}{d}) . \frac{c}{d} = \frac{a}{b}$

$\frac{a}{b} . \frac{c}{d} . bd = ac$ $(\frac{a}{b} : c) bc = a$ $(a : \frac{b}{c}) . \frac{b}{c} . c = ac$ $(\frac{a}{b} : \frac{c}{d}) . \frac{c}{d} . d = \frac{ad}{b}$

$\frac{a}{b} . \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ $\frac{a}{b} : c = \frac{a}{bc}$ $(a : \frac{b}{c}) . b = ac$ de: $\frac{c}{d} . d = c$

$a : \frac{b}{c} = \frac{ac}{b}$ $(\frac{a}{b} : \frac{c}{d}) . c = \frac{ad}{b}$

$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$

Ezen alaptörvényekből kiolvasható, hogy hányadost egész számmal, hányadost hányadossal szorozni; majd hányadost egésszel, egészet hányadossal osztani illetőleg hányadost hányadossal osztani és hányadost egésszel, egészet hányadossal szorozni.

Nagyság: 1.) ha $b > 1$ akkor $\frac{a}{b} < a$;
2.) ha $a > b$ akkor $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$; ami azt mondja, hogy
egyenlőtlenségjet az egyenlőtlenség megváltoztatása
nélkül osztani; 3.) ha $b > c$, akkor $\frac{a}{b} < \frac{a}{c}$
mert $\frac{a}{b} b = a$ és $\frac{a}{c} c = a$.
tehát $\frac{a}{b} b - \frac{a}{c} c$ ha pedig $b > c$ akkor egyik szorzási
tétel értelmében $\frac{a}{b} < \frac{a}{c}$!

A 2.) és 3.) tételből kiolvasható, hogy a hányados az osztandó növekedésével, az osztó növekedésével, mindig fogy.

Hatványozás.

Amint a szorzás az összeadásnak, épen úgy a hatványozás a szorzásnak speciális esete; t.i. itt a szorzók egymásával egyenlők: $a.a.a.\ldots\ldots = a^n$ (szavakban: a az n-edik hatványon) a^n kifejezést hatványmennyiségnek, a-t hatványalapnak, n-et pedig kitevőnek (exponens) nevezzük. Könnyű belátni, hogy itt a két műveleti elem nem kommutatív tulajdonságú, vagyis a^n nem egyenlő $(\neq)$ n^a. Ek alaptörvényeit itt is a definitióból mind lehaphatók:

I. $a^n a^m = a.a\ldots\ldots a \quad a.a\ldots\ldots a = a^{m+n}$ (n szor, m szor)

II. $a^m b^m = a.a\ldots\ldots a.\ b.b\ldots\ldots b$ (m tényező) minthogy a szorzás asszociatív: $ab.ab.ab\ldots\ldots ab = (ab)^m$

III. $(a^m)^n = a^m.a^m.a^m\ldots a^m$ (n tényező) az I alapján $a^{m+m+\ldots m_n} = a^{m.n}$

IV. $\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^{(m-n)+n}}{a^n} = \frac{a^{m-n}.a^n}{a^n} = a^{m-n}$

Nagysági viszonyok: 1.) ha $a > b$ $a^m > b^m$; 2.) ha $m > n$ akkor $a^m > a^n$ Mindenik esetben 1-nél nagyobb számról van szó. Ezekből következik, hogy az alapszám, vagy a kitevő növekedésével az alapszám hatványa is nő. És most ki fogjuk mutatni, hogy bármilyen kicsivel legyen is nagyobb

az alapegyen 1-nél, a határérték-tétel helyes megválasztásával a határértékképzésnek tetszőleges magas fokú problémáját egyszerű algebrai formát: $a+b$. Emeljük fel a második hatványra, vagyis szorozzuk meg önmagával. A szorzási szabályt ismételt alkalmazásával

$(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+2ab+b^2$ adódik

$(a+b)^2>a^2+2ab$ ismeretében

$(a+b)^3>(a^2+2ab)(a+b)$

$(a+b)^4>(a^3+2a^2b+a^2b+2ab^2$

annál inkább áll, hogy $(a+b)^3>(a^3+3a^2b$

tehát feltehetjük, hogy: $(a+b)^n>a^n+na^{n-1}b$

Most teljes indukciót alkalmazva, bizonyítsuk be, hogy ha az utóbbi kifejezés igaz n-re, igaz $n+1$-re is:

$(a+b)^{n+1}>(a^n+na^{n-1}b).(a+b)$ a szorzás szabályai szerint

$(a+b)^{n+1}>a^{n+1}+na^n.b+a^nb+nba^{n-1}b$

$(a+b)^{n+1}>a^{n+1}+(n+1)a^nb$. De ez a.a. mintha az általános formában n helyett $n+1$-et tennénk.

Most legyen $a=1$, $b=h$, akkor: $(1+h)^n>1+nh$; h-t feltételünk (elhagyjuk) még inkább áll az egyenlőtlenség 1-et elhagyjuk, (ez: $(1+h)^n>n$, tehát is) adva van egy nagy szám N, akkor $(1+h)^n>N$ ami bizonyítandó volt.

Null. (0).–

A null szintén számbeli eredménye, de abban az esetben, ha egy egység sem található valahol, valamiből, amikor tehát ezt a kérdésre: hány? így felelünk: egy sem (0)

A nullnak a számok köré való bevezetése a történeti kifejlődés menetén a tört számnál jóval történt. A zérusról ez a [illegible]

szám é közé; legelőször, mint számot, az összeadások használták! A nullra vonatkozó törvények:

I. $a+0=a$ és $a-0=a$, mert a-hoz semmit adva, vagy abból semmit elvonva az eredmény ismét a.

II. $a-a=0$ ami az I törvényből és a különbség definíciójából következik.

III. A szorzás definíciója szerint $0a=a0=0$

IV. $\frac{0}{a}=0$ V. $\frac{a}{0}$ határozatlan alak, mert minden szám olyan, hogy nullal szorozva nullát ad.

VI. A nullával való osztást mindig ki kell zárni, mert az osztáskor vagy határozatlanságot, vagy abszurdumot kapunk. Így $\frac{a}{0}$ nem elégíthető ki, mert nincs oly szám, mely 0-al szorozva a-t adna.

VII. $0^a=0$ (a hatvány def.-ja szerint)

VIII. Minthogy $a^m a^n = a^{m+n}$ egyenlőség helyes akkor is, ha $m=0$, azaz

$$a^0 a^n = a^n$$

tehát $a^0=1$ vagyis minden szám nulladik hatványa egyenlő az egységgel.

Számrendszer.

Hogy valamely sokaság egységeit megszámláljuk, bizonyos sorozaton kell végig menni, ezt a darabszámot, melynek minden kapja karakterét valamely kisebb sokasághoz: természetes számsorral nevezzük s így lesz: 0, 1, 2..... stb. Minthogy valamely sokaságnak is végtelen sok egység lehet, azért ezek sorozatszámjegy nem szükséges végtelen sok, hanem a tízes másodpercei számsorból kiválasztunk annyit, amennyit akarunk, – legtervesebb három: 0, 1, 2, – 3 ezek segítségével

bármely nagy számot be lehet írni számrendszerben.
Ezt kiszámított tagok közül a legnagyobb nevezetük
a számrendszer alapjának. Helyiértékrendszer alatt
pedig olyat, mely elv szerint - pl. itt az alapszám sze-
rint - írt, vagy leírható számok összességét értjük.
Legelőször is az indulásnak választott módot tábá-
ri ily formán a számok leírására. - Hogy a szám-
rendszer alapjául minden, az egységnél nagyobb
szám szolgálhat, vagyis, hogy minden ily egy-
ségnél nagyobb alapú számrendszerben minden
számot be fogunk írni, ezt a következőkben köny-
nyen belátjuk.

Legyen az összehasonlítandó szám N a szám-
rendszer alapja $\underline{a}$ melyre nézve föltétel, hogy
$\underline{a} > 1$. Ha az N számot az $\underline{a}$ alapú számrend-
szer számjegyeivel akarjuk írni, a következő-
ron járunk el: N számot először összehasonlítjuk
az a-nál kisebb számokkal, melyekre jegyünk van.
$0, 1, 2, 3 \ldots\ldots a-2, a-1$, a sorozatos végig haladá-
va. Ezt ez két lehetséges: 1, N szám egyenlő e sorozat
valamely tagjával pl $\underline{a-n}$ számmal, akkor $N = a-n$
s így az összehasonlítás be van fejezve. 2, ha $N > a$
akkor N számot $\underline{a}$ hatványaival hasonlítjuk ösz-
sze $a^0, a^1, a^2, a^3 \ldots\ldots$ Ha N ezek közül valamelyik-
kel pl a^z-val egyenlő, akkor elértük célunkat $N = a^z$,
ha nem egyenlő, akkor akkorához z ért hatvá-
nya közé esett s így $a^z < N < a^{z+1}$. Most a^z-t meg
nagyobbítjuk az által, hogy megszorozzuk 1, 2, 3 $\ldots (a-1)$
számokkal, miáltal az

$$a^z,\ 2a^z,\ 3a^z \ldots\ldots (a-1)\,a^z$$

sorozatot nyerjük s ezzel hasonlítjuk össze N-et. Ha
N ezek egyikével egyenlő, akkor az összehasonlítás ke
van véjezve $N = 6\,a^z$, de ha a sorozat [illegible]

"f'im köpé esik, aitor

$N = b_\alpha a^\alpha + N_1$ hol $N_1 < a^\alpha$

N_1-ét ezután az egyegyes $a^{\alpha-1}$-egyi hasonlítsuk, az előbbeni módon össze, ezáltal, hogy végig-járunk a

$0\,a^{\alpha-1}, 1a^{\alpha-1}, 2a^{\alpha-1} \ldots\ldots (a-1)\,a^{\alpha-1}$

sorozaton; ebbor általában nyerjük, hogy

$N_1 = b_{\alpha-1}\, a^{\alpha-1} + N_2$ hol $N_2 < a^{\alpha-1}$

N_2-őt ezután a

$0\,a^{\alpha-2}, 1a^{\alpha-2}, 2a^{\alpha-2} \ldots\ldots (a-1)\,a^{\alpha-2}$

sorozaton járatjuk végig, miáltal adódik, hogy

$N_{\alpha-1} = b_1 a^1 + N_\alpha$ hol $N_\alpha < a$

és $N_\alpha = b_0 a^0$.

Ezen értékekből N összevarva, lesz:

$N = b_\alpha a^\alpha + b_{\alpha-1} a^{\alpha-1} + b_{\alpha-2} a^{\alpha-2} \ldots\ldots + b_2 a^2 + b_1 a + b_0 a^0$

mely összeget az a alapszámú rendszerben a rendszer jegyeivel symbolikusan így írunk be:

$N = b_\alpha\, b_{\alpha-1}\, b_{\alpha-2} \ldots\ldots b_2\, b_1\, b_0$

Meg jegyzendő azonban, hogy ezen b számjegyek mindég kisebbek a-nál. Az így felírt számjegyek minden irének más-más helyiértéket tulajdonítunk, melynek értékét az alapszámnak azon hatványa határozza meg, mely az összeg alakban az illető számjegy mellett áll; $b_{\alpha-2}$ helyiértékét $a^{\alpha-2}$ hatvány határozza meg.

Lássunk egy példát pl. a 2-es alapú számrendszerben. Legyen az ezen rendszerben kiírandó számok a közönségesen használt tizes számrendszer szerint 10.000-ig kiírva. Az adott számnak a 2-es alapú számrendszerre való hozatala a köv. képen történik. Előljük 2-nek hatványait egészen addig, míg azok a 10.000-et eléri!

$2^0 = 1$, $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$, $2^5 = 32$.

$2^6 = 64$, $2^7 = 128$, $2^8 = 256$, $2^9 = 472$, $2^{10} = 944$,
$2^{11} = 1888$, $2^{12} = 3776$, $2^{13} = 7552$ $2^{14} = 15104$
Most 10.000-t ezen sorozattal összehasonlítjuk összes 2 hatvány közé sorolítjuk.

$$2^{14} > 10.000 > 2^{13}$$

Ezután megnézzük, hogy 2^{13} bővítővel hányszor foglalható a 10.000-ben

$10.000 : 7552 = 1$
7552
$\overline{2448}$

Tehát $10.000 = 1 . 2^{13} + N_1$ hol $N_1 = 2448$.
Most N_1-et 2^{12} sokszorosával hasonlítjuk össze.

$2448 : 3776 = 0$
$\overline{2448}$

Tehát $N_1 = 0 . 2^{12} + N_2$; $N_2 = 2448$.
Tovább folytatva az eljárást:

$2448 : 1888 = 1$
1888
$\overline{560}$

Tehát $N_2 = 1 . 2^{11} + N_3$; $N_3 = 560$

$560 : 944 = 0$
$\overline{560}$

$N_3 = 0 . 2^{10} + N_4$; $4_4 = 560$

$560 : 472 = 1$
472
$\overline{88}$

$N_4 = 1 . 2^9 + N_5$; $N_5 = 88$

$88 : 256 = 0$
$\overline{88}$

$N_5 = 0 . 2^8 + N_6$; $N_6 = 88$

$88 : 128 = 0$

$N_6 = 0 . 2^7 + N_7$; $N_7 = 88$

$88 : 64 = 1$
64
$\overline{24}$

$N_7 = 1 . 2^6 + N_8$; $N_8 = 24$

$24 : 32 = 0$
$\overline{24}$

$N_8 = 0 . 2^5 + N_9$; $N_9 = 24$

24 : 16 = 1 $\quad N_9 = 1.2^4 + N_{10}$; $N_{10} = 8$

16 / 8

8 : 8 = 1 $\quad N_{10} = 1.2^3 + N_{11}$; $N_{11} = 0$

$N_{11} = 0.2^2 + N_{12}$; $N_{12} = 0$

$N_{12} = 0.2^1 + N_{13}$; $N_{13} = 0$

$N_{13} = 0.2^0 + 0$

Tehát 10.000 a 2-es számrendszerben kiírva egyenlő: $1.2^{13} + 0.2^{12} + 1.2^{11} + 0.2^{10} + 1.2^9 + 0.2^8 + 0.2^7 + 1.2^6 + 0.2^5 + 1.2^4 + 1.2^3 + 0.2^2 + 0.2^1 + 0.2^0$ vagy szimbolikusan

10 + 10 + 100 + 101 + 000

A hatványozás fordított műveletei.

Miként az összeadásnál és szorzásnál beszéltünk fordított műveletről, úgy a hatványozásnál is szóltunk erről. A hatványozás definíciója szerint $a^n = b$, minthogy a hatványozásnál a két műveleti elem a és n nem kommutatív tulajdonságú, azért a hatványozásnak két fordított művelete van. 1.) Ha ismeretes n és b, keresendő a, akkor a gyökvonás műveletét nyerjük. 2.) Ha ismeretes a és b, akkor pedig a logaritmust nyerjük.

A gyökkivonás definíciója tehát így: keresendő az a szám, mely adott hatványra emelve, adott hatvány mennyiséget szolgáltat. A gyökkivonás jele $\sqrt[n]{b}$ - a (szavakban: n-edik gyökét vonva b-től annyi, mint a) A gyökkivonás definíciója tehát: $(\sqrt[n]{b})^n = b$. Eddigi számkörünkben ez a művelet csak igen ritkán végezhető. Nézzük, hogy mi a feltéte-

b annak, hogy egy számból n-edik gyököt lehessen vonni! Tegyük fel, hogy a gyökkel alatti (b) szám prímtényezőkre bontva, a következő képen állítható elő:

$$b = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \ldots\ldots p_k^{\alpha_k}$$

A gyökvonás után $\sqrt[n]{b} = a$ természetesen más prímtényezőket ezekein kívül nem tartalmazhat, csak a b prímtényezőinek hatványai változhatnak, tehát a így alakú:

$$a = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} p_3^{\beta_3} \ldots\ldots p_k^{\beta_k}$$

Emeljük ezt az n-ik hatványra, akkor

$$a^n = p_1^{\beta_1 n} p_2^{\beta_2 n} p_3^{\beta_3 n} \ldots\ldots p_k^{\beta_k n}$$

De $a^n = b$, tehát kell, hogy álljon a köv. egyenlőség.

$$p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \ldots\ldots p_k^{\alpha_k} = p_1^{\beta_1 n} p_2^{\beta_2 n} p_3^{\beta_3 n} \ldots p_k^{\beta_k n}$$

Ez azonban csak úgy lehetséges, ha

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= n\beta_1 \\ \alpha_2 &= n\beta_2 \\ \alpha_3 &= n\beta_3 \\ &\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_k &= n\beta_k \end{aligned}\right\}$$

egyenletek egyszerre teljesülnek. Látjuk tehát, hogy akkor, hogy egy számból az eddigi számtestben mozgó, gyököt vonhassunk, az egyenletek egész sorozatának kell teljesedésbe menniök.

A logaritmus definíciója a következő: Keresünk kell azon számot (n) melyre, mint kitevőre egy adott szám (a) emelve egy másik adott számot (b) kapunk. Ez felemelendő számot a logaritmus alapszámának nevezzük. Ha a hatvány mennyiség $a^x = b$, akkor a log. feladata $\log_a b = n$. A log. definíciója tehát: $a^{\log_a b} = b$

Könnyű belátni, hogy a logaritmus feladata is csak bizonyos megszorításokkal végezhető el számkörünkben. A feladat megoldása azonban csak akkor lehetséges, ha b előjele a-nak hatványai között, tehát ha a az L^o $a^1, a^2 \ldots a^x \ldots a^n$

sorozat egyik tagja, mert akkor $\log_a b = a$ pl.
Látható, hogy eddigi feladatainkat számrészünk-
ben csak megszorításokkal voltak végezhetők. Így
a kivonás, osztás, gyökvonás a log. számítás.
Hogy ezeket feladatokat minden esetben elvé-
gezhessük, eddigi számfogalmunkat ki fogjuk
bővíteni és pedig első sorban a tört számo fogalmával.

Tört számok.

Az osztásnál eddig csak úgy tudtunk eredményt
elérni, ha az osztandó az osztó egész számú többe-
rese volt. Hogy az osztást mindenkor elvégezhes-
sük, bevezetjük a törtegységeket. Ilyen törteg.y-
ség $\frac{1}{n}$, melynek definitiója az, hogy a tört alsó-
val szorozva, eredményül az egységet adja:
$\frac{1}{n} n = 1$. A tört alsóját a tört nevezőjének, fel-
sőjét a tört számlálójának is szokás mondani.

A tört egységekkel kibővített számfogalom a
mennyiség. A mennyiség oly sokaságot alkot,
amelynek tagjai részei, amelyek többszörösei egy-
mást s az egészet pótolni képesek. Ez a megható-
rozás nem áll minden sokaságra, mert vannak oly
sokaságok is, amelyek csak egészekből állanak.

A tört egységekre nézve kibizonyítandó tételek:

1.) $\frac{1}{m\,n}\, m = \frac{1}{n}$, mert a szorzási tételek szerint

$\frac{1}{m\,n} + \frac{1}{m\,n} + \ldots\ldots + \frac{1}{m\,n}$ $_{m\text{-szer}}$ $= \frac{1}{m\,n}\, m$

A tört egység definitiója szerint pedig $\frac{1}{m\,n}$ oly
szám, mely $m\,n$-el szorozva az egységet adja;
tehát az egyenlőtet helyesnek föltéve:

$\frac{1}{m\,n} + \frac{1}{m\,n} + \ldots\ldots + \frac{1}{m\,n}$ m-szer $= \frac{1}{n}$

$\frac{1}{m\,n} + \frac{1}{m\,n} + \ldots\ldots + \frac{1}{m\,n}$ m-szer $= \frac{1}{n}$

.....

$$\frac{1}{m}\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\frac{1}{n} + \ldots\ldots + \frac{1}{m}\frac{1}{n} \quad \begin{matrix} m \text{ szer} \\ \vdots \\ n \text{ szer} \end{matrix} = \frac{1}{n}$$

oszloponként összeadva a baloldal:

$$\frac{1}{m}\frac{1}{n}n + \frac{1}{m}\frac{1}{n}n + \ldots\ldots + \frac{1}{m}\frac{1}{n}\underset{m \text{ szer}}{n} = \frac{1}{m}\frac{1}{n}\, n\, m = 1,$$

de ha a jobboldalt is összeszorjuk, akkor az eredmény itt is $\frac{1}{n}n = 1$ tehát a feltétel helyes volt:

$$\frac{1}{m}\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\frac{1}{n} + \ldots\ldots \underset{m \text{ szer}}{\frac{1}{m}\frac{1}{n}} = \frac{1}{m}\frac{1}{n}\, m = \frac{1}{n}$$

ami bizonyítandó volt.

2.) $\frac{1}{n} \cdot m = \frac{m}{n}$, vagyis tört egységet egész számmal úgy szorzunk, hogy az egész számot a számlálóba, a tört egység nevezőjét a nevezőbe írjuk. Bizonyításaink osztás def.-ja szerint $\frac{m}{n}$ az a szám, mely n-el szorozva m-et ad, ámde ilyen számra az $\frac{1}{n} \cdot m$ is, mert

$$\frac{1}{n}m = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots\ldots \underset{m \text{ szer}}{\frac{1}{n}}$$

$$\frac{1}{n}m = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots\ldots \underset{m \text{ szer}}{\frac{1}{n}}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{n}m = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots\ldots \begin{matrix} \frac{1}{n} \quad m \text{ szer} \\ \vdots \\ n \text{ szer} \end{matrix}$$

oszloponként összeadva:

$$\left(\frac{1}{n} \cdot m\right)n = 1 + 1 + 1 + \ldots\ldots + \underset{m \text{ szer}}{1} = m$$

Az 1.) tétel szerint $\frac{1}{n} \cdot m = \frac{1}{n}$ vagy másként a 2.) tételt alkalmazva

$$\frac{m}{m.n} = \frac{1}{n}$$

ami azt mondja ki, hogyha a tört egység számlálóját és nevezőjét egyaz azon számmal szorozzuk, a tört egység értéke nem változik. Ezen tétel

segítségével könnyű lesz a törtek között összehasonlítást végezni.

Összehasonlítani csak ugyanazon törtegységeket lehet. Az előbbi tétel alapján azonban különböző törtegységeket egyenlő törtegységekre hozhatunk, ha mind a számlálót mind a nevezőt alkalmas számmal szorozzuk. Így $\frac{1}{m}$ és $\frac{1}{n}$ közös törtegységre hozva $\frac{n}{m.n}$ ill. $\frac{m}{m.n}$.

Közös alsóval bíró törtek összehasonlítása egészen úgy megy, mint az egész számoké. I. ha $m > n$ akkor $\frac{m}{mn} > \frac{n}{mn}$, tehát $\frac{1}{n} > \frac{1}{m}$ II. ha $p > q$ akkor $\frac{p}{n} > \frac{q}{n}$. III. ha $m > n$, akkor $\frac{m}{n} > 1$, mert $\frac{m}{n} > \frac{n}{n}$ a I tétel szerint, de $\frac{n}{n} = 1$ tehát tömyleg $\frac{m}{n} > 1$. Oly törtet, melynél a számláló nagyobb, mint a nevező áltörtnek nevezzük, az olyat pedig melynél a nevező nagyobb a számlálónál valódi törtnek mondjuk.

Törtekkel való műveletek.

Összeadni csak u.azon törtegységhez tartozó törteket lehet. Különböző nevezőjű törteket tehát közös nevezőre kell először hozni. Az összeadás def.-ja egyébként a törteknél is ugyanaz, mint az egész számoknál. A közös alakú törteket úgy adjuk össze, mint az egész számokat, pl:

$$\frac{p}{q} + \frac{m}{n} = \frac{pn}{qn} + \frac{qm}{qn} = \frac{pn+qm}{qn}$$

A kivonást is úgy végezzük, mint az egész számoknál. A különbség def.-ja is változatlan.

A szorzásnál a régi def.-t fönntartani nem lehet, mert pl. $\frac{1}{m} \cdot \frac{1}{n}$ -nél nem tudjuk, hogy mit kell az alatt értenünk, hogy $\frac{1}{m}$-et $\frac{1}{n}$ -ed részét kell összeadandónak venni. A törteknél a szorzást az

egész számok szorzási tételeinek fenntartásával végezzük a egész tételek segélyével is definiálni. A szorzási tételt itt is fenntartva, áll tehát a szorzás distributio tulajdonsága is. Egész tulajdonság fölhasználásával fogjuk most $\frac{1}{m} \cdot \frac{1}{n}$ értékét felszámítani. A tört def.-ja szerint

$$\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \ldots\ldots + \frac{1}{m}\right)_{m\text{ szer}} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots\ldots + \frac{1}{n}\right)_{n\text{ szer}} = 1 \cdot 1 = 1$$

A distributio tulajdonság szerint azonban a bal oldali szorzást tagonként is végezhetjük s ilyenkor is a. a. predmenyt kell nyernünk. Könnyű belátni, hogy ily szorzással $\frac{1}{m} \cdot \frac{1}{n}$-et $m\,n$ ször kapjuk, tehát

$$\frac{1}{m} \cdot \frac{1}{n}\, m\, n = 1$$

De az a szám, mely $m\,n$-nel szorozva az egységet adja: $\frac{1}{m\,n}$ tehát azonban, hogy

$$\frac{1}{m} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{m \cdot n} \quad \text{legyen.}$$

Két tört egységet tehát úgy szorzunk egymással, hogy a nevezőket összeszorozzuk. A osztás-nál fellépő törtszorzás def.-ja is marad a régi. Az osztásnál érvényes a tétel, mely szerint:

$$A : \frac{m}{n} = A \cdot \frac{n}{m}$$

mert mindkét oldal $\frac{m}{n}$-nel szorozva egyaránt az A-t adja.

$\frac{m}{n}$-et $\frac{n}{m}$ szám reciprokának mondjuk. Egy szám a reciprokja közt az a viszony áll fönn, hogy ha az egyik nagyobb egynél, a másik akkorával kisebb s fordítva.

Az osztásnál felmerülő nagyszámú viszonyok a törtnél is változatlanok.

A hatványozás definitiója is marad, tehát

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \ldots\ldots n\text{-szer} = \frac{a^n}{b^n}$$

Vagyis törtet úgy emelünk hatványra, hogy mind

a számlálót, mind a nevezőt a kijelölt hatvány-ra emeljük.

A nagyságiviszonyokra vonatkozólag megjegyzendő, hogy ha $a > b$, akkor $\frac{a^n}{b^n} > \frac{a}{b}$, és ha $a < b$, akkor $\frac{a^n}{b^n} < \frac{a}{b}$.

Valamint az egész számokkal való műveleteknél kimutattuk, hogy ha egy szám a 10-nél, hatványozás által bármily nagy számon felülmúltatik, úgy most annak megfordításával kimutatjuk, hogy 1-nél kisebb szám hatványozásával bármely kis számon alul opálhatunk, mert ha $b > 1$ akkor $b^n > N$ s így $\frac{1}{b} < 1$ és $\frac{1}{b^n} < \frac{1}{N}$, mert kimutattuk, hogy a hatvány nagyobbodásával a tört kisebbedik; ha tehát N minden határon túl nagy szám, akkor $\frac{1}{N}$ minden határon túl kicsiny szám.

A törtek bevezetésével már nemcsak a számok sorozata végtelen, hanem még két-két egész szám között is végtelen sok szám van. Ezt be fogjuk bizonyítani. Előbb azonban megjegyezzük, hogy a következőkben egy a vagy b szám egy határ alatt, nem csak egész számokat, hanem törteket is értheténk.

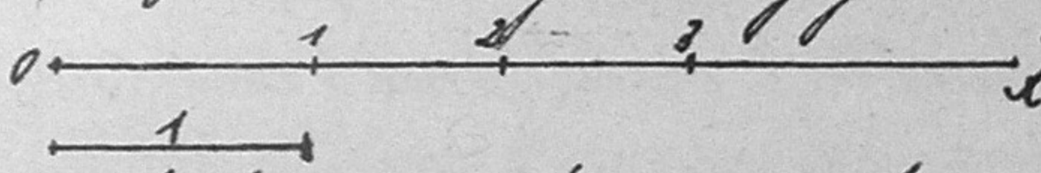
Legyen tehát két egymásra következő szám a és $a + \alpha$, még pedig $a > b$; a két szám közt még végtelen sok törtszám van, mert ha a

$$b + (a - b)c$$

kifejezésben c szám 0-tól 1-ig az összes valódi tört értékeket felveszi, akkor a kifejezés b és a között minden értéket végig jár. Minde végtelen sok valódi tört van, ezért azért a kifejezés is végtelen sok értéket vehet fel a és b között.

A számok ábrázolása.

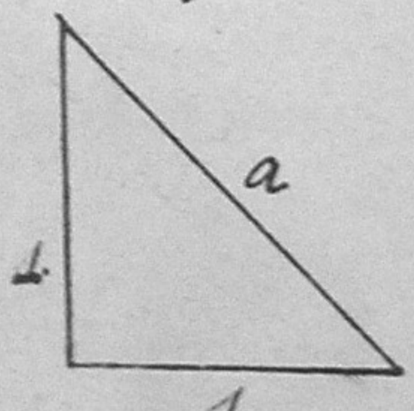
Hogy a számok összeségéről áttekintésünkre képet nyerhessünk, a számokat geometriailag fogjuk ábrázolni. E végből egy ox egyenesre, a <u>számtomalra</u>



0-tól jobb felé fölvaljuk a választott egységet, s az így nyert pontok összesége az egész számok sorozatát fogja képviselni.

Így minden egész szám megkapja a számvonalon a maga pontját illetőleg 0-tól számított vonaldarabját. A történet megfelelő pont kifejlésénél így járunk el.: Ha az ill. tört $\frac{m}{n}$ akkor a vonalegységet fölosztjuk n egyenlő részre, ebből m részt veszünk, s ezt mérjük föl 0-tól a számvonalra.

Ily módon tehát elértük azt, hogy az eddig ismert számjainkat nagyság szerint rendezték, m. által pólik könnyen áttekinthető képet nyertünk. Könnyű azonban belátni, hogy a számvonal nem minden pontja bír eddigi számkörünkben megfelelő számmal. Ha is: vegyünk föl oly derékszögű háromszöget, melynek befogói egységnyi hosszúságúak, akkor az átfogó négyzete $a^2 = 1+1 = 2$



Annak oly számot melynek négyzete 2, eddigi számkörünkben még nem ismerünk, ellenben az a hosszúság létezik. Itt tehát oly esettel állunk szemben, hogy a számvonal a hosszához nem tudunk megfelelő számot hozzárendelni. Végtelen sok ily szám van, (melynek még értelmet adni nem tudunk), mert a sokszorosai is részei mind ilyen számot határoznak meg.

Hogy ezen kiánynon segítsünk, ki fogjuk bővíteni eddigi számfogalmunkat a végtelen sorokkal definiált számok fogalmával.

Végtelen sorok.

Az analízisben gyakran beszélünk sorról és sorozatról. A kettő közötti különbség a következő: vannak a számoknak olyan sokaságai mondjuk, melynek tagjai egymással műveleti jellel (összeadás) vannak egymáshoz kapcsolva; a sorozatnál a tagok minden egymás közé műveleti jelet összeolvasunk.

A végtelen sor általános jelölése:

$$a_0 + a_1 + a_2 \ldots \text{in. inf.}$$

hol a_0 a kezdő tag a_1 az első tag stb.

Az ilyen végtelen sor ismeretére tudnunk kell, hogy milyen alakú az általános a_n tag.

Ha egy ilyen végtelen sorból véges számú tagot kiragadunk, akkor az így kiragadott tagok összegét a sor részének nevezzük.

A végtelen sorok természetére nézve két esetet különböztetünk meg, e szerint a végtelen sorokat két csoportra osztjuk.

1.) Ha meg lehet határozni egy olyan N számot, melynél a sor bármelyik része kisebb, vagyis a sorból akkora számú tag összegére, az összeg alatt marad a meghatározott N számon, akkor azt mondjuk, hogy a sor convergens.

2.) Ha ily N számot nem tudunk meghatározni, vagy is, ha a sor bármily nagy számon felülemelkedik, akkor a sor divergens.

Mi a vizsgálódásainkból a divergens sorokat kizárjuk, tehát csak convergens sorokkal foglalkozunk.

A S

összege a $(\cos\alpha + \sin\alpha)$ összeg négyzetét, harmadik hatványát adja, az egymásutánra következő tagokat váltakozó előjellel véve. Általában

$$(\cos\alpha + \sin\alpha)^n = \cos^n\alpha + \binom{n}{1}\cos^{n-1}\alpha\sin\alpha + \binom{n}{2}\cos^{n-2}\alpha\sin^2\alpha + \ldots\ldots + \binom{n}{n-2}\cos^2\alpha\sin^{n-2}\alpha + \binom{n}{n-1}\cos\alpha\sin^{n-1}\alpha + \sin^n\alpha$$

azért az általános formula $\cos n\alpha$ és $\sin n\alpha$ ra lesz:

$$\cos n\alpha = \cos^n\alpha - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\alpha\sin^2\alpha + \binom{n}{4}\cos^{n-4}\alpha\sin^4\alpha - \ldots$$
$$\ldots (-1)^k\binom{n}{2k}\cos^{n-2k}\alpha\sin^{2k}\alpha \ldots\ldots$$
$$\sin n\alpha = \binom{n}{1}\cos^{n-1}\alpha\sin\alpha - \binom{n}{3}\cos^{n-3}\alpha\sin^3\alpha + \binom{n}{5}\cos^{n-5}\alpha\sin^5\alpha -$$
$$\ldots (-1)^k\binom{n}{2k+1}\cos^{n-(2k+1)}\alpha\sin^{2k+1}\alpha \ldots\ldots$$

Ez a formula, mint láttuk áll $n = 2, 3, 4$, esetére; most teljes indukcióval bebizonyítjuk, hogy ha áll n-re, akkor áll $n+1$-re, tehát 5, 6, stb-re nézve is. Nyilvánvaló:

$$\cos(n+1)\alpha = \cos(n\alpha+\alpha) = \cos n\alpha\cos\alpha - \sin n\alpha\sin\alpha$$

Ab $\cos n\alpha$-t $\cos\alpha$-val s $\sin n\alpha$-t $\sin\alpha$-val szorozva és a kettőt egymásból levonva lesz:

$$\cos(n+1)\alpha = \cos^{n+1}\alpha - \binom{n}{2}\cos^{n-1}\alpha\sin^2\alpha + \binom{n}{4}\cos^{n-3}\alpha\sin^4\alpha \ldots$$
$$\ldots (-1)^k\binom{n}{2k}\cos^{n-2k+1}\alpha\sin^{2k}\alpha +$$
$$- \binom{n}{1}\cos^{n-1}\alpha\sin^2\alpha + \binom{n}{3}\cos^{n-3}\alpha\sin^4\alpha \ldots$$
$$\ldots (-1)^k\binom{n}{2k-1}\cos^{n-2k+1}\alpha\sin^{2k}\alpha +$$

Ismeretes $\binom{n}{2k+1} + \binom{n}{2k} = \binom{n+1}{2k+1}$ stb s így

$$\cos(n+1)\alpha = \cos^{n+1}\alpha - \binom{n+1}{2}\cos^{n-1}\alpha\sin^2\alpha + \binom{n+1}{4}\cos^{n-3}\alpha\sin^4\alpha + \ldots$$
$$\ldots (-1)^k\binom{n+1}{2k}\cos^{n-2k+1}\alpha\sin^{2k}\alpha \ldots$$

Hasonlóképpen áll $\sin$-ra is:

$$\sin(n+1)\alpha = \sin(n\alpha+\alpha) = \sin n\alpha\cos\alpha + \cos n\alpha\sin\alpha$$

Itt is $\sin n\alpha$-t szorozzuk meg $\cos\alpha$-val, $\cos n\alpha$-t $\sin\alpha$-val s a kettőt összeadjuk:

$$\sin(n+1)\alpha = \binom{n}{1}\cos^n\alpha\sin\alpha - \binom{n}{3}\cos^{n-2}\alpha\sin^3\alpha + \ldots\ldots$$
$$\ldots (-1)^k\binom{n}{2k+1}\cos^{n-2k}\alpha\sin^{2k+1}\alpha +$$
$$+ \cos^n\alpha\sin\alpha - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\alpha\sin^3\alpha + \ldots\ldots$$
$$(-1)^k\binom{n}{2k}\cos^{n-2k}\alpha\sin^{2k+1}\alpha \ldots\ldots$$

ke egyenszárú háromszögek megoldása a magasság vonal meghúzásával derékszögű háromszög megoldására van visszavezetve, azért azt itt mellőzzük.

Általános háromszög megoldása.

Az általános háromszögek meghatározására 3 alkotórész szükséges, melyek közül egynek oldalnak kell lennie, minthogy a háromszög közt az $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ relatio áll fenn, tehát két szöggel a harmadik is meg van határozva. A tárgyalásunk folyamára a 2dik esetet vesszük figyelembe:

1.) Legyen ismeretes a 3 oldal a, b, c, akkor a cos tételből $\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

Hogy ez a tört megoldást szolgáltasson szükséges, hogy valódi tört legyen. Általában egy $\frac{F}{A}$ tört akkor valódi tört, ha $A+F>0$, $A-F>0$ Tehát itt is egyrészről $2ab+a^2+b^2-c^2$ kell, hogy 0-nál nagyobb legyen, vagyis $(a+b)^2-c^2>0$, a baloldalt szorzatalakban írva $(a+b+c)(a+b-c)>0$ kell legyen, amit azt mondja, hogy $(a+b)>c$ (α.)

Másrészről $2ab-a^2-b^2+c^2>0$ kell legyen, vagyis

$$c^2-(a-b)^2>0\,;\quad (c+a-b)(c+b-a)>0$$ tehát kell, hogy $c+a>b$ és $c+b>a$ legyen. De ez a föltétel az (α) föltétellel együtt azon ismert tételt mondja ki, hogy a háromszögnél két oldal összege nagyobb, mint a harmadik oldal, tehát, ha a 3 oldalt ezen tételnek megfelelően adjuk meg, akkor a fent jelzett törtszám tényleg valódi tört lesz. Így tehát a cos. tétel segítségével jegyzőnk nézve is megkapjuk az összes szögeket, de az egyenlet a logarithmus számításra nem alkalmas, azért ezt még át kell alakítani: Ismeretes, hogy:

$$1+\cos\gamma = 2\cos^2\frac{\gamma}{2} = 1+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\,;\qquad 1-\cos\gamma = 2\sin^2\frac{\gamma}{2} = 1-\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

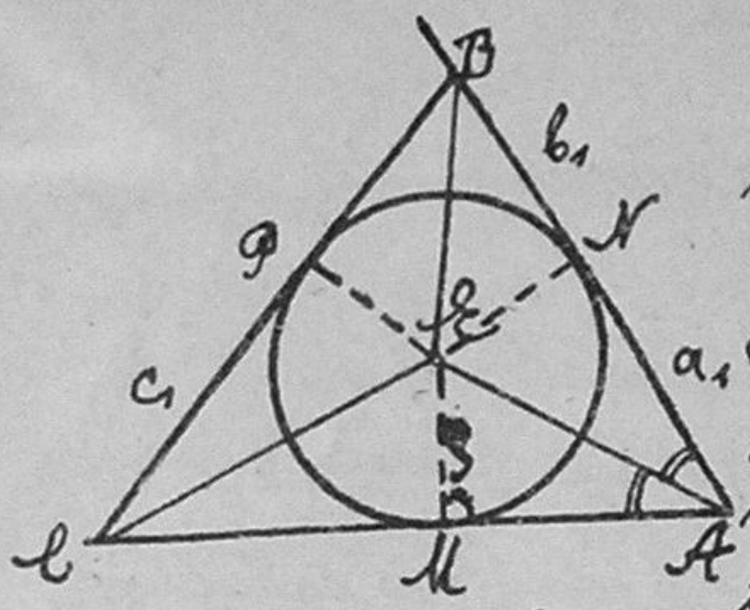
vagyis: $2\cos^2\frac{\gamma}{2} = \frac{(a+b)^2-c^2}{2ab}$; $2\sin^2\frac{\gamma}{2} = \frac{c^2-(a-b)^2}{2ab}$ tovább fejtve:

$2\cos^2\frac{\gamma}{2} = \frac{(a+b+c)(a+b-c)}{2ab}$ és $2\sin^2\frac{\gamma}{2} = \frac{(c+a-b)(c-a+b)}{2ab}$

Ha $a+b+c=2s$ jelöljük, akkor $(a+b-c)=2(s-c)$; $(a-b+c)=2(s-b)$ és $(-a+b+c)=2(s-a)$ Tehát

$$\cos\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}} \quad\text{és}\quad \sin\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$$

Ez az alak most már alkalmazható log.-ra, de hogy kevesebb számolással mind a három szöget megkaphassuk, vegyük a sin és cos hányadosát: $\frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}} = \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$; hasonlóképen nyerjük, hogy:



egyenlő" távolsága van, tehát a háromszögbe írható "érintő" kör középpontját adja. Hogy a háromszög harmadik szögfelezője is ezen az E ponton megy keresztül azt az E M A és E N A háromszögek congruenciájából bizonyíthatjuk. Ugyanis E M A $\triangle \cong$ E N A $\triangle$ tehát a kétszer vizsgált szögek egyenlők, vagyis A E szögfelező. Számításunk is az így meghatározott, a háromszöget belülről érintő körsugarát. (ϱ) a-ac érintési pontoknak a csúcs pontoktól való távolát.

Minthogy a háromszög területe így valható össze:

$\triangle$ = A B E + B C E + C E A és A B E = $\frac{c\varrho}{2}$, B C E = $\frac{a\varrho}{2}$, C E A = $\frac{b\varrho}{2}$

ezért $\triangle = \varrho \frac{a+b+c}{2} = \varrho s$ miből $\varrho = \frac{\triangle}{s}$ adja a beírható kör sugarát. Az érintési pontoknak a csúcsoktól való távolát jelöljük a következő" betűkkel P B = B N = b_1, A N = A M = a_1, C P = C M = c_1

Akkor evidenter

$$\left.\begin{aligned} b_1 + c_1 &= a \\ c_1 + a_1 &= b \\ a_1 + b_1 &= c \end{aligned}\right\}$$

A három egyenlet összeadva: $2(a_1+b_1+c_1) = a+b+c$ vagyis $a_1+b_1+c_1 = s$. Combinálva ezen egyenletet az előbbi hárommal, sorban nyerjük, hogy

$a_1 = s-a$, $b_1 = s-b$ és $c_1 = s-c$

Egy háromszög külső szögeiket is megfelezhetjük a szögfelezők, amelyeket külső szögfelezőknek hívunk. A külső" szögfelező a három szög u. azon csúcsában húzott belső szögfelezővel derék szöget alkot. A háromszög két-két szomszédos csúcsából húzott külső szögfelezők Euklides V. postulátuma értelmében, meghosszabbítva onetsik egymást. És a postulátum így szól: „Ha két egyenest onetsző egyenes u. azon az oldalán két derékszögnél kisebb belső" szögeket alkot, a két egyenes határtalanul meghosszabbítva, azon az oldalon találkozik, melyen a szöget két derékszögnél kisebbek."

Itt a nevezett két szög összege:

$\varepsilon + \eta = \frac{\gamma}{2} - \frac{\beta}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2} = \pi - \frac{\beta+\gamma}{2}$.

csoportok minden $\frac{9}{10}$-ed fölül emelkedik. Ha elegendő számú ilyen csoportot összeadunk, elérhetjük, hogy ezek összege egy tetszőleges nagy számon felül emelkedik, ami épp mondja ki, hogy a sor tényleg divergens. Erre nézve a csoportok számát elég $\frac{10 N}{9}$-re venni, hol N a kívánt nagy szám, mert ekkor az összes csoportok összege nagyobb $\frac{10 N}{9} \cdot \frac{9}{10} = N$-nél, vagyis a sor divergens.

Convergens sorokról.

Két convergens sort. egyenlőnek mondunk, hacsak egyik sor minden tagja, tagja a másik sornak és fordítva a második sor minden tagja, tagja az elsőnek is. Ezen definitióból az is következik, hogy két convergens sor akkor nem egyenlő egymással, ha az egyiknek van oly tagja, mely a másik sornak nem tagja.

Eddigi definitióink szerint egy a szám tagja alatt a számot értettük, mely kisebb a-nál, de most is épen így definiáltuk egy végtelen sor tagját, s azonképpen tehát a végtelen sorokat a tört számokkal is összehasonlíthatjuk.

A most fölvett definitiónk az egyenlőségre vonatkozólag szintén födi a régi egyenlőségi definitiónkat. Mert ha két szám (a és b) a mostani def. szerint egyenlő", akkor egyenlő" a régi szerint is. Tegyük fel ugyanis az ellenkezőjét, vagyis a régi def. szerint legyen a ≠ b. De akkor van oly szám, mely a-nak tagja és b-nek nem, ekkor pedig már az új def. szerint sem egyenlő" a két szám. Az a ≠ b feltevés tehát ellenkezik az új definitióval is. Példa gyanánt tárgyaljunk néhány ismertebb convergens sort

1.) $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{n(n-1)n} + \ldots\ldots$

Kimutatjuk, hogy ez a sor véges s az értéke 1. A sor akkor véges, ha minden részlete egy véges számon alul marad. Vagadjunk ki a sorból tetszés szerinti tagot s vegyük ehhez az összes előtte levő tagokat, kimutatjuk, hogy az így vett tagok összege is kisebb 1-nél. S végül az egyes tagokat más alakban írjuk; tekintsük azután nyilvánvaló, hogy $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$; e szerint a sor egyes tagjai:

$$\frac{1}{1.2} = 1 - \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2.3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3.4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

. . . . . .

. . . . . .

$$\frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Ezek összege:

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

ami nyilván mutatja, hogy az n tag összege 1-en felül soha sem emelkedhetik, tehát a sor véges.

Most még kimutatjuk, hogy a sor értéke éppen egyenlő 1-el. Azt már kimutattuk, hogy a sor minden részlete, részlete az 1-nél is, most még fordítva ki kell mutatnunk, hogy 1-nél is minden részlete, részlete a sornak. Ezzel aztán az egyenlőség be lesz bizonyítva. – Az egynél kisebb számok 1–ε alakúak; kimutatjuk, hogy a sor részletei közt mindég tudunk annál nagyobbat találni, amiből világos, hogy 1-nél minden részlete, része a sornak is.

Vegyük $\frac{1}{\varepsilon} < n+1$ akkor

$$\varepsilon > \frac{1}{n+1}, \text{ vagy } 1 - \frac{1}{\varepsilon} < 1 - \frac{1}{n+1}$$

de amint látjuk $1 - \frac{1}{n+1} = S_n$, s így $S_n > 1 - \varepsilon$.

É szerint tehát n alkalmas megválasztásával elérhetjük, hogy 1-nek minden pésze kisebb legyen a sor bizonyos részeinél. Ezzel állításunkat bebizonyítottuk.

2.) Tegyük a következő sort

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots\ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots\ldots$$

Bebizonyítjuk, hogy ez a sor is véges és értéke egynek. Általánosan $\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^n}$ tehát a sor n első tagja

$$\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{2^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2}$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^n}$$

Ezek összege

$$s_n = 1 - \frac{1}{2^n}$$

Tehát a sor 1-en felül nem emelkedhetik, tehát véges. Egyúttal azt is látjuk, hogy a sor minden része, része az egységnek is. Ha ugyanis n-et úgy választjuk meg, hogy $\frac{1}{\varepsilon} < 2^n$ azaz $\varepsilon > \frac{1}{2^n}$ s így $1-\varepsilon < 1 - \frac{1}{2^n}$ tehát $s_n > 1-\varepsilon$, akkor, mint látjuk, az egység bármely részével, a sorban fellő számú tagot összeadva, fölül tudunk emelkedni, annyival bebizonyítottuk, hogy az egység minden része, része a sornak is, vagyis a sor értéke az egység.

3.) Vizsgáljuk most a közönséges geometriai haladványt:

$$1 + a + a^2 + a^3 + \ldots\ldots + a^n + \ldots\ldots$$

Ez a sor is convergens, ha $a < 1$ és divergens, ha $a \geq 1$. A sor vizsgálata előtt azonban nézzük meg, hogy ha egy $\pm$ számot az egységnél kisebb számmal osz-

rapunk, amilyen eredményt kapunk.

$$a(1-k) = k - ak,$$

tehát az a számnál kisebb számot.
Ha $a < 1$ akkor is $a(1-k) < a$ tehát
a, a is kisebb a-nál. Vagyis
$a^2 < a$, $a^3 < a^2$, $a^4 < a^3$ .....
Most fizikailag, hogy az egységnél kisebb számok hatványszámai kisebb számokhoz juthatunk, mint egy tetszőleges kicsiny száma. Legyen ez a száma ε tehát $a < 1$ akkor $\frac{1}{a} > 1$, ekkor azonban megtudjuk az n exponenst úgy határozni, hogy

$\frac{1}{a^n} > N$ ha! N egy tetszőlegesen nagy szám, a reciprokra téve

$a^n < \frac{1}{N}$; és ha $N < \frac{1}{\varepsilon}$, úgy $\varepsilon < \frac{1}{N}$ akkor $a^n < \varepsilon$, ahol ε egy tetszőleges kicsiny szám. E tételünk bebizonyítják, hogy az $a, a^2, a^3, a^4, \ldots\ldots$ sorozat tagjai minden számnál kisebb fognak, ha

$$a < 1.$$

Ezt tudom bebizonyítják, hogy a S_n sor véges és értéke $\frac{1}{1-a}$ valódi tört. Vagyjuk fel a sorból az n edik tagot, melynek összege az arithmetikából ismeretes: $1 + a + a^2 + \ldots\ldots + a^n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} = \frac{1}{1-a} - \frac{a^{n+1}}{1-a}$
amiből világosan látjuk, hogy a sorból bármennyi tag summáját az összeg $\frac{1}{1-a}$ valódi tört értéke alatt marad, tehát a sor convergens és minden része, része $\frac{1}{1-a}$ - nak is. Ki kell még mutatnunk, hogy $\frac{1}{1-a}$ - nak is minden része, része a sornak is. $\frac{1}{1-a}$ része így képzelhető ki $\frac{1}{1-a} - \varepsilon$.
Kimutatjuk, hogyha ε bármily kicsiny is, a sor-

több hellő" számú tag összegével $\frac{1}{1-a}$ –ε –ow jobb tudunk emelkedni. Ha ε kicsiny szám, akkor ε (1-a) is az, de az előzőekből tudjuk, hogyha a<1 akkor mindég lehet egy olyan n számot kapni, melyre nézve $\varepsilon(1-a) > a^{n+1}$ Osztva ezen egyenlőtlenséget (1-a)-val, lesz: $\varepsilon > \frac{a^{n+1}}{1-a}$ mindkét oldal $\frac{1}{1-a}$-ából levonva: $\frac{1}{1-a} - \varepsilon < \frac{1}{1-a} - \frac{a^{n+1}}{1-a} = s_n$

Tehát $s_n > \frac{1}{1-a} - \varepsilon$ Amivel beláttuk, hogy $\frac{1}{1-a}$-nál nincs is nagyobb a sornak és egyúttal hogy a sor értéke $\frac{1}{1-a}$.

Convergens sorok tulajdonságai.

Legyen egy S sor convergens:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots + a_n + \ldots\ldots$$

összehasonlítva ezt a sort a 0, 1, 2, ... számsorozattal lesz e sorozatban olyan szám, melyen felül az S sor nem tud felemelkedni. Legyen ez az első szám k. Akkor S sor két részre bontható: egy véges S' részre, amely k-1-ig felülemelkedik + egy végtelen R részre. $S = S' + R$ R részről az a tulajdonsága, hogy akárhány tagja összegén felül nem emelkedhetik, mert S a k-ig k-1-nél. Az így előállított R maradék tagot hasonlítsuk most össze a $0, \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \ldots\ldots \frac{9}{10}$ számsorozattal s szorítsuk R értékét ezen sorozat két tagja közé. Legyen a sorozatban az R által el nem érhető első tag $\frac{k_1}{10}$, akkor ismét két részre bontjuk R-et is: egy véges számú tagból álló részre R' és egy végtelen sok tagból álló részre R_1, melynek a tulajdonsága, hogy akárhány tagja összegén az $\frac{1}{10}$-et el nem éri. R_1-et ismét a

$0, \frac{1}{10^2}, \frac{2}{10^2} \ldots\ldots \frac{9}{10^2}$ sorozat két tagja közé sorolt.
jaik $\frac{k_2-1}{10^2} < R_1 < \frac{k_2}{10^2}$ miatt R_1 is két részre bontha-
tó: $R_1 = R'' + R_2$. Így folytatva s az eljárást k-szor
ismételve, az R_k sort tagjait, melynek az a tulaj-
donsága, hogy $\frac{1}{10^k}$-nál alul marad.

Ha az így nyert eredményeket egy sorba egyesítjük, akkor az S sor két részből fog állani: egy végtelen tagokból álló részből s az R_k részből, melyben valahány tagot summázva, az összeg mindig $\frac{1}{10^k}$-nál alul marad, de $\frac{1}{10^k}$ a k alkalmas megválasztásával kisebbé tehető, mint egy tetszőleges kicsiny szám, tehát az S sor második része is kisebbé lesz, mint egy tetszőleges kicsiny szám. Az ilyen tulajdonságú sort épen ezen tulajdonságainál fogva nevezték convergensnek. Ti. is, minél több tagot summázunk ki sorból, annál inkább megközelítjük a sor tényleges értékét: az összeg annál inkább convergál a sor értéke felé.

Legyen egy convergens sor $a_1 + a_2 + \ldots\ldots = S$; nagyobbítsuk meg a sort a_0 hozzáadása által, akkor kimutatjuk, hogy $a_0 + S > S$

Ragadtfloda a sorok egyenlőségének és egyenlőtlenségének definitiójából, kimutatjuk, hogy $a_0 + S$ minden része, része S-nek is, de fordítva nem; ezzel aztán be lesz bizonyítva, hogy $a_0 + S > S$.

Legyen $\varepsilon < a_0$ s összed S sort két részre: $\sigma + R$, de itt R-et oly nagyra vesszük meg, hogy $R < \varepsilon$ legyen, akkor $a_0 + \sigma$ természetesen része lesz $a_0 + S$-nek, de már S-nek nem, mert $S = \sigma + R$ és $R < \varepsilon < a_0$ s így R-ben nem fordulnak annyi tagot összegyed, hogy az összeg elérje a_0-t. Ezzel a tétel be van igazolva. A divergens sorokról épt a tételt nem fogjuk bizonyítani, mert a divergens sor még-

telen lesz egy véges számmal hozzáadásával is végtelen marad.

Van eset, hogy a convergens sornak nem tudjuk az értékét meghatározni, elegendő megelégszünk azzal is, hogy kimutatjuk, hogy a sor véges, vagyis convergens.

Ily esettel állunk szemben az ism. sornál is:

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots\ldots + \frac{1}{n(n-1)\ldots 3.2.1} + \ldots\ldots$$

Ez a sor is véges, ennek bebizonyítására tetszőleges számú tagot is adunk össze, az összeg 3-nál kisebb marad. E mellett kimutatásánál úgy járunk el, hogy az egyes tagokat megnagyobbítjuk az által, hogy a nevező-ben minden 2-nél nagyobb szám helyett is 2-t írunk s az így megnagyobbított sorról kimutatjuk, hogy összege 3-nál felül nem emelkedhetik. Ha az egyes tagokat megnagyobbítjuk, akkor

$$e < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots\ldots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} + \ldots\ldots$$

Ámde az előzőekben kimutattuk, hogy

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots\ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots\ldots = 1$$

Ennélfogva tehát a sor

$$e < 1 + 1 + 1 = 3$$

Az ezen sorral definiált számot e-vel jelölik s a természetes logarithmusi rendszer alapszámának nevezik.

Az oly számot, mely véges értékű (convergens) végtelen sorral van definiálva irracionális számnak nevezik.

A végtelen sorok összeadása.

Két convergens sor összege alatt oly sort értünk, melyben mindkét sor minden tagja benne foglaltatik.

at convergens végtelen sorokra nézve is áll a commutativitás és associativitás. Tegyük fel, hogy a sor

$$t = a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_{\alpha_1} + a_{\alpha_1+1} + \ldots\ldots a_{\alpha_2} + a_{\alpha_2+1} + \ldots\ldots$$

akkor a sor véges részekre osztva:

$$t_1 = a_1 + a_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{\alpha_1}$$

$$t_2 = a_{\alpha_1+1} + a_{\alpha_2+2} + \ldots + a_{\alpha_2}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ekkor összege

$$t_1 + t_2 + t_3 + \ldots\ldots\ldots = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots\ldots = t$$

ami világosan mutatja, hogy a végtelen sorok is asszociatív tulajdonsággal bírnak, minthogy bármily csoportban az eredmény nagyság. De t_n csoportok által alkotott számok pedig, minthogy azok csak számok a commutativitás áll. Vegyük ezen egyenletből a végtelen sorok commutativ tulajdonságát is figyelembe: A rationális számok összeadásánál felhívjuk nagyobbi figyelmet is érdemel néhány pontra; 1, az összeg nagyobb, mint akár melyik összeadandó, $t > B$? t, mert az egyesített $A+B$ sorból mindég tudunk annyi tagot összegezni, hogy ezt az összeget az egyik t összeadandóból származó tag összege elérni nem tudja.

Vegyünk tehát egy tetszés B_1 tagot B-ből s A-t összegét pl. t úgy hogy $t = t_1 + t_2$ úgy hogy $t_2 < B_1$ legyen akkor az $A+B$-ből kiragadott véges számú tagok összege $t_1 + B_1$. Ezt az összeget A tagjainak summájával sohasem tudjuk elérni, mert $t = t_1 + t_2$ és $t_2 < B_1$ tehát

$$t_1 + B_1 > t_1 + t_2 = t$$

, amivel a tétel be van igazolva. 2.) Hasonlóképpen kimutatható, hogy két

$A > B$ és $C > D$, akkor $A + C > B + D$

A sor fogalmát most még jobban jellemzik azáltal, hogy olyan sorokat vizsgálunk be, melyeknek tagjai is jövedelmező számok, vagyis véges sorok. Egy ilyen sor.

$$A_0 + A_1 + A_2 + \ldots\ldots\ldots$$

hol $A_0 = a_{00} + a_{01} + a_{02} + a_{03} + \ldots\ldots + a_{0n} + \ldots\ldots$

$A_1 = a_{10} + a_{11} + a_{12} + a_{13} + \ldots\ldots + a_{1n} + \ldots\ldots$

$A_2 = a_{20} + a_{21} + a_{22} + a_{23} + \ldots\ldots + a_{2n} + \ldots\ldots$

$A_3 = a_{30} + a_{31} + a_{32} + a_{33} + \ldots\ldots + a_{3n} + \ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$A_n = a_{n0} + a_{n1} + a_{n2} + a_{n3} + \ldots\ldots a_{nn} + \ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Ilyen végtelen sorokat csak akkor van értelmük, ha convergensek. A sor összeadásával az összeadandókat úgy kell rendeznünk, hogy az összeghez, mely szintén végtelen sor, legyen egy véges számú tagból és egy végtelenből álló részt. E végből az összegezésnél úgy járunk el, hogy az egyedülinek tagjait csoportonként adjuk össze. E szerint az összeg „első" tagja a_{00} lesz, „első" tagja, $a_{01} + a_{10}$ második tagja $a_{02} + a_{11} + a_{20}$ és így tovább. Az egész összeg tehát lesz:

$$a_{00} + (a_{01} + a_{10}) + (a_{02} + a_{11} + a_{20}) + (a_{03} + a_{12} + a_{21} + a_{30}) + \ldots\ldots$$
$$+ (a_{0n} + a_{1\,n-1} + a_{2\,n-2} + \ldots\ldots + a_{n-1\,1} + a_{n0}) + \ldots\ldots$$

Ennek eredmény azt mutatja, hogy az irracionális számokból álló végtelen sorok nem vezetnek új fogalmakhoz.

Végtelen sorok kivonása.

A különbség definíciója itt is ugyanaz, mint a

racionális számokról volt. A kivonás itt is csak akkor "végrehajtható", ha a kivonandó "kisebb", mint a kisebbítendő. Legyen az első ez

$$A = a_0 + a_1 + a_2 \ldots\ldots\ldots + a_m + \ldots\ldots$$
$$B = b_0 + b_1 + b_2 \ldots\ldots\ldots + b_n + \ldots\ldots$$

Kimondjuk, hogy ha $A > B$, akkor a különbségük is pozitív, vagyis van olyan szám, amely B-hez adva A-t adja összegül. A kivonást így végrehajtjuk: az A azt a pozitív számot keressük a

$$B,\ B+1,\ B+2,\ B+3 \ldots\ldots\ldots$$

sorozattal. Ilyen pozitív szám lehetséges 1) ha összes A a sorozat valamely tagjánál pl $A = B + k$, akkor a keresett különbség k. 2) ha nem pedig összes A a sorozat egy tagjával sem, akkor mindenesetre két tag közé esik pl.

$$B + b_0 < A < B + b_0 + 1$$

Ezután A-t összehasonlítjuk a köv sorozattal

$$B + b_0,\ B + b_0 + \tfrac{1}{10},\ B + b_0 + \tfrac{2}{10}, \ldots\ldots B + b_0 + \tfrac{9}{10} + 1,\ B + b_0 + 1$$

Ekkor is pozitív lehetséges 1) A összes valamely tagjával pl. $A = B + b_0 + \frac{k}{10}$, akkor a keresett különbség $b_0 + \frac{k}{10}$. 2) ha A a sorozat egyik tagjával sem pedig összes, akkor elvetve a sorozat két tagja közé esik, pl.

$$B + b_0 + \tfrac{b_1}{10} < A < B + b_0 + \frac{(b_1+1)}{10}$$

vagy $B + b_0 + \frac{b_1}{10} = B_1$ jelölve

$$B_1 < A < B_1 + \tfrac{1}{10}$$

Ezután A-t összehasonlítjuk a

$$B_1,\ B_1 + \tfrac{1}{10^2},\ B_1 + \tfrac{2}{10^2} \ldots\ldots B_1 + \tfrac{9}{10^2},\ B_1 + \tfrac{1}{10}$$

sorozattal, hol is ismét két eset lehetséges, az 1) esetben a keresett különbséget megtaláltuk, a 2) esetben A-t két tag közé szorítjuk. Így folytatva az eljárást a műveletet vagy befejezzük, akkor a különbség véges szám, vagy pedig végtelenül folytatódik, mely esetben egy végtelen tizedes törtet kapunk.

eredményeit, amelyről bebizonyítjuk, hogy éppen ez a keresett különbség. Legyen ez az eredmény

$$C = C_0 + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \frac{c_3}{10^3} + \ldots\ldots + \frac{c_n}{10^n} + \ldots\ldots$$

C sorban az n-edik tagon túli tagok összege mindenesetre kisebb, mint $\frac{1}{10^n}$, mert a legnagyobb számból C esetében is

$$\frac{9}{10^{n+1}} + \frac{9}{10^{n+2}} + \frac{9}{10^{n+3}} + \ldots\ldots = \frac{9}{10^{n+1}}\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \ldots \frac{1}{10^{n+1}}\right)$$

$$< \frac{9}{10^{n+1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{9}{10^{n+1}} \cdot \frac{10}{9} = \frac{1}{10^n}$$

tehát a C sor convergens.

Most bebizonyítjuk, hogy $A = B + C$, miáltal be lesz bizonyítva, hogy C tényleg A-nak és B-nek különbsége.

A felírt egyenlőtlenségi sorozat n-edik tagja így szól:

$$B + C_n < A < B + C_{n+1}$$

hol $C_n = C_0 + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \ldots\ldots \frac{c_n}{10^n}$

Ezen egyenlőtlenségből már következik, hogy $B + C$ minden része, része A-nak is, mivel $B + C_n < A$. Ki kell tehát még mutatnunk, hogy az $A = B + C$ egyenlőséget bebizonyítaná, hogy A-nak is minden része, része $B + C$-nek is. Erre nézve vegyük fel A-ból egy A_1 véges tagból álló részt, $A = A_1 + A_2$, úgy, hogy $A_2 > \varepsilon$ legyen. Hasonlóképpen B-t is ezt részre: $B = B_1 + B_2$ úgy, hogy $B_2 < \frac{\varepsilon}{2}$ legyen. Most válasszuk meg az n-et oly módon, hogy $\frac{1}{10^n} < \frac{\varepsilon}{2}$ legyen; ekkor kimutatjuk, hogy $B_1 + C_n$ egyenlő, vagy kisebb A_1-nél nem lehet, tehát, hogy $B_1 + C_n > A_1$, ami azt mondja

Ez, hogy A minden része, része $B+C$-nek is. Ugyanis

$B_2 < \frac{\varepsilon}{2}$
$\frac{1}{10^n} < \frac{\varepsilon}{2}$
} e két egyenlőtlenség összeadva

$B_2 + \frac{1}{10^n} < \varepsilon$ és $\varepsilon < A_2$ tehát
$B_2 + \frac{1}{10^n} < A_2$ feltéve, hogy

$\underline{B_1 + C_n \leqq A_1}$ összeadás által nyerjük, hogy
$B + C_n + \frac{1}{10^n} < A$ holott ez a feltevésünk szerint ellentmondás, mert feltettük, hogy
$B + C_n < A < B + C_n + \frac{1}{10^n}$, tehát azonosságképen
$B_1 + C_n > A$,

Ezzel a különbség létezése minden esetre be van bizonyítva. „Megjegyzendő", hogy ha két sor összege, akkor azok különbsége is az.

A végtelen sorok szorzása.

A végtelen sorok szorzását úgy definiáljuk, hogy a racionális számok szorzásánál föllépő tételek érvényben legyenek. Így a B szorzat alatt azt a végtelen sort értjük, melyet úgy kapunk, hogy A sor minden tagját B sor minden tagjával összeszorozzuk és a szorzatokat összegezzük.

Ha a két sor

$$A = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots$$
$$B = b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + \ldots\ldots$$

akkor a szorzásnál a „következő" tagokat nyerjük:

$$a_0 b_0 + a_0 b_1 + a_0 b_2 + \ldots\ldots + a_0 b_n + \ldots\ldots$$
$$a_1 b_0 + a_1 b_1 + a_1 b_2 + \ldots\ldots + a_1 b_n + \ldots\ldots$$
$$a_2 b_0 + a_2 b_1 + a_2 b_2 + \ldots\ldots + a_2 b_n + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_n b_0 + a_n b_1 + a_n b_2 + \ldots + a_n b_n + \ldots$$

Ezek összegét célszerűség szempontjából mindég úgy csoportosítjuk, hogy a fellépő indexek összege minden egyes csoportra nézve állandó legyen. Így a kezdő tag indexeinek összege 0, az első tagé 1, a második tag indexeinek összege 2 és így tovább b. Tehát

$$A.B = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) + \ldots + (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0) + \ldots$$

Ha $a_0 b_0 = c_0$, $a_0 b_1 + a_1 b_0 = c_1$ stb jelölést használjuk, akkor

$$A B = c_0 + c_1 + c_2 + \ldots + c_n + \ldots$$

Bebizonyítjuk, hogy a szorzás által kelet kapott új sor is convergens, ha az eredetiek azok voltak. Jelöljük röviden $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $B = \sum_{m=0}^{\infty} b_m$ és $A.B = \sum_{n,m=0}^{\infty} a_n b_m$

Ha most az A sorból kivagyunk n tagot, a B sorból m tagot, akkor

$$\left.\begin{aligned} a_1 + a_2 + \ldots + a_n &< A \\ \text{és } b_1 + b_2 + \ldots + b_m &< B \end{aligned}\right\} \text{ miert a két sor convergens.}$$

Itt azonban racionális számokkal lévén dolgunk, tehát egyúttal áll, hogy $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$. $(b_1 + b_2 + \ldots b_n) < A B$

ami a szorzat sor convergentiáját mondja ki. Hogy a véges sorok szorzásánál fennálló az associatio, comm. és distributio tulajdonság is, annak bizonyítása úgy történik, hogy a sorokat a rationális alakban írjuk s ezekre alkalmazzuk a tételeket.

Mintfogy $A B = \sum a_n b_m$ de $\sum a_n b_m$ már racionális számokból van összerakva s így

$$\sum a_m b_m = \sum b_m a_m = B\mathfrak{A} \quad \text{azaz}$$
$$\mathfrak{A}B = B\mathfrak{A}$$

Hasonlóképpen van három sor szorzására is

$$\mathfrak{A}.B\mathfrak{C} = \sum a_m b_m \sum c_p = \sum a_m b_m c_p,$$

az asszociatív tulajdonság szerint az utóbbi egyenlő

$$\sum a_m \sum b_m c_p = \mathfrak{A}(B\mathfrak{C})$$

tehát $\mathfrak{A}.B\mathfrak{C} = \mathfrak{A}(B\mathfrak{C})$

vagyis a sorokra az asszociatív tulajdonság is érvényes.
Az $\mathfrak{A}B$. A disztributív tulajdonság is érvényes.
Ha $\mathfrak{A} = \sum a_m$, $B = \sum b_m$ akkor

$$\mathfrak{A}+B = \sum (a_m + b_m)$$ a így

$$(\mathfrak{A}+B)\mathfrak{C} = \sum (a_m + b_m) \sum c_p = \sum (a_m + b_m) c_p$$

de az utolsó egyenlőségi tag más rationális operatív törvény.

$$\sum (a_m + b_m) c_p = \sum a_m c_p + \sum b_m c_p = \mathfrak{A}\mathfrak{C} + B\mathfrak{C}$$

tehát $(\mathfrak{A}+B)\mathfrak{C} = \mathfrak{A}\mathfrak{C} + B\mathfrak{C}$

A hagyjuk rizsonyok semmi változást sem szenvednek. Itt is

$(\mathfrak{A}+B)\mathfrak{C} > \mathfrak{A}\mathfrak{C}$ ha itt $\mathfrak{A} = 1$

akkor $(1+B)\mathfrak{C} > \mathfrak{C}$

A szorzás speciális esete itt is a **hatványozás**.
A hatványozást a szorzás alapján végezzük. A
Példaképen határozzuk meg $\underline{e}$-nek második hat-
ványát: $e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots\ldots$

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots\ldots$$

A szorzási szabály szerint az egyenlő sorrendű-ek
szegű tagokat összevonjuk, tehát

$$e^2 = e.e = 1 + \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1}\right) + \left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2}\right) + \left(\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3}\right) + \ldots\ldots$$

a fellépő csoportok összegezve:

$$e^2 = 1 + \frac{2}{1} + \frac{4}{1.2} + \frac{8}{1.2.3} + \frac{16}{1.2.3.4} + \ldots\ldots\ldots$$

Reciprok értékek.

Valamely szám reciprok értéke alatt azt a számot értjük, melyel az első szám megszorozva, az egységet adja eredményül.

Ha A convergens végtelen sort jelent és $A < 1$, akkor egy sorból, alkotott végtelen sor $D_1\ 1 + A + A^2 + A^3 + \ldots\ldots$ szintén convergens. U. is megtudunk egy oly a számot határozni, melyre nézve $A < a < 1$ s így

$A^2 < a^2$, $A^3 < a^3$, $\ldots\ldots$ tehát az

$1 + a + a^2 + a^3 + \ldots\ldots$ nyilvánvalóan véges és convergens ($a < 1$) sorból mindég tudunk annyi tagot kiragadni, hogy ezek összege a D_1 sorból kiragadott tagok összegét föülmúlja, amiből világos, hogy a D_1 sor is convergens, mert összege egy convergens sor összegén alul marad.- Most kimutatjuk, hogy a D_1 convergens sor reciprokja $1-A$ és fordítva. Szorozzuk ti. is össze a D_1 sort $1-A$-val, akkor eredményül 1-et kapunk, tehát a tételt beigazoltuk.

$(1-A)(1+A+A^2+A^3+\ldots\ldots) = 1-A+A(1-A)+A^2(1-A)+A^3(1-A)+$
$+\ldots\ldots = 1-A^n$, de $A < 1$, tehát $A^n < \varepsilon$ lehet vagyis
$(1-A)(1+A+A^2+A^3+\ldots) = 1$, vagy $1+A+A^2+A^3+\ldots = \frac{1}{1-A}$

Most ki fogjuk mutatni, hogy minden convergens sornak van reciprokja.-

1.) Ha $A < 1$. Határozzuk meg B számot úgy, hogy $A+B=1$ legyen s állapodjunk meg a köv convergens sort

$1 + B + B^2 + B^3 + \ldots\ldots = \frac{1}{1-B}$ De $1-B=A$, tehát a baloldali sor, amely tényleg létezik is, A-nak reciprokja.

2.) Ha azon szám, melynek reciprokját keressük: $C > 1$, de azért convergens sorral van definiálva, akkor is létezik egy számnak reciprokja. Legyen $C < N$. Határozzuk meg akkor D-t úgy, hogy $C+D=N$ legyen vagyis $C = N-D = N(1-\frac{D}{N})$
Ezen kifejezésben $\frac{D}{N} < 1$, tehát a köv. sor convergens:

$$1 + \frac{D}{N} + \frac{D^2}{N^2} + \frac{D^3}{N^3} + \ldots\ldots = \frac{1}{1-\frac{D}{N}}$$

Szorozzuk össze

egy azt $\frac{1}{r}$-nél: $\frac{1}{r}+\frac{2}{r^2}+\frac{2^2}{r^3}+\frac{2^3}{r^4}+\ldots = \frac{1}{1-\frac{2}{r}}\cdot\frac{1}{r}=\frac{1}{r-2}$
ami nem más, mint 6-nál nagyobb, miáltal $A^{(6)}=6$
t tagjaival határértékével most állításunk az egyértelmű választás
tására, amely most más tulajdonságokkal szerepelni valókat
U.is. $\frac{r}{2}$ hányados alatt az r számnál és 2-vel egyre nagyobbat
mak szorzatát értjük: $\frac{r}{2}=r.\frac{r}{2}$. Mindezek mutatása után
mak reciprokját meg tudjuk határozni és így szorzását is el tudjuk
végezni, ezért az alapítást is alkalmazhatóvá tehetjük.

— . —

A következőben a jelöléseinket általánosítjuk, annyiban
hogy azontúl az irracionális számokat is két pozitív hányad ja-
lóni. Ezt tehetjük, mivelhogy minden valós az összes racionális
számokra nézve is határon számolási szabályok állnak, mi-
lyet a racionális számokról szóló tanulmányban voltak.

Mielőtt a gyökvonásra áttérnénk, előbb egy példára hivat-
kozunk, hogy vannak oly végtelen sorokkal definiált számok,
melyek nem végesértékűek, tehát a nagy sikere nem nagy egész szám,
sem nem tört szám. Ismeretes, hogy

$$e = 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\ldots+\frac{1}{1.2\ldots n}+\ldots$$

Ez a sor közvetlenül látható, hogy nem egész szám, most hivat-
kozunk, hogy tört számra sem lehet, tehát szükségképpen irracio-
nális szám. Mert tegyük föl, hogy tört számra volna, tehát
$\frac{m}{n}$ alakú; ez a feltétel, mint mindjárt kitűnik, ellentmon-
dáshoz vezet. Szorozzuk m.is a sor keresztül 1.2.3...n-nel,
akkor az $\frac{m}{n}$ alakú tört lesz

(A) $m.1.2.3\ldots.(n-1)=\left(1.2\ldots.n+2.3..n+3.4\ldots n+\ldots+n(n+1)\right)+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}+\ldots$

Vigyük át a baloldalra a zárójelben szereplő egész számot, akkor
a jobboldalon egy egész szám fog szerepelni, amely egyenlő

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}+\ldots$$ kifejezésével.

De ez a kifejezés nyilvánvalóan kisebb, mint

$$\frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\frac{1}{(n+2)^3}+\ldots\right)=\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{n+2}}=\frac{1}{n+1}\cdot\frac{n+2}{n+1}=\frac{n+2}{n(n+2)+1}$$

Innen $\frac{n+2}{n(n+2)+1}<1$, mert a nevező nagyobb, mint a szám-

lálós tehát $\frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{n+2}+\left(\frac{1}{n+2}\right)^2+\ldots\ldots\right)<1$ de annál inkább kisebb tehát a $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}+\ldots$ sorénál, mint a (k) egyenlet jobb oldala kisebb-néb, vagyis valódi tört miáltal nyerjük, hogy egy egésznél nagyobb egyenlő egy valódi törttel. Ez az abszurditás pedig csak akkor szűnik meg, ha elfogadjuk, hogy e nem tört, hanem irracionális szám.

Gyökvonás.

Mindenekelőtt kimutatjuk, hogy ha $a>b$, akkor $(a+b)^n$-nek mindég van felső határa, melyen felül a hatványozás folytán nem emelhetni nem tudunk. Ismeretes, hogy $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, ha b^2 helyett a nagyobb ab-t írjuk, akkor

$$(a+b)^2<a^2+3ab$$

Átszorozva ezzel egyenlőtlenség $(a+b)$-vel:

$$(a+b)^3<a^3+3a^2b+a^2b+3ab^2$$

$$(a+b)^3<a^3+4a^2b+3ab^2$$

b^2 helyett ismét a nagyobb ab-t írva

$$(a+b)^3<a^3+7a^2b$$

A nyert tételt a két esetben így általánosíthatjuk

$$(a+b)^n<a^n+(2^n-1)a^{n-1}b$$

Ez a tétel helyes $n=2, 3$ esetére, most teljes inductióval kimutatjuk, hogy ha helyes n-re, akkor helyes marad $n+1$-re is, tehát 4, 5, stb-re is.

$$(a+b)^{n+1}<\left(a^n+(2^n-7)a^{n-1}b\right)(a+b)$$

$$(a+b)^{n+1}<a^{n+1}+(2^n-1)a^nb+a^nb+(2^n-1)a^{n-1}b^2$$

b^2 helyett itt is ab-t írva:

$$(a+b)^{n+1}<a^{n+1}+(2^n+2^n-1)a^nb$$

$$(a+b)^{n+1}<a^{n+1}+(2^{n+1}-1)a^nb$$

Ez pedig az előbbihez hasonló alakú, csak n helyett szerepel mindenhol $n+1$, tehát a tétel helyes $n+1$ esetére is, vagyis általános érvényű.

A rationális számok hatványozásánál bebizonyítottnak vesszük a tételt is, mely szerint

$$(a+b)^{\frac{m}{n}}>a^{\frac{m}{n}}+\frac{m}{n}a^{\frac{m}{n}-1}b$$

, amely tétel az imént be-

bizonyítottal együtt irracionális számokra nézve is áll. E szerint két szám összegének hatványát két határ közé tudjuk szorítani:

$$a^n + (2^n - 1)a^{n-1}b > (a+b)^n > a^n + n a^{n-1} b$$

Ezen segédtétel alkalmazásával most már kimutatjuk, hogy $\sqrt[n]{a} = b$ megoldás mindég létezik, bármily szám legyen is a gyökös jel alatt szereplő a szám. A gyökvonás definícióját már ismerjük: $\sqrt[n]{a}$ oly szám, mely n-dik hatványra emelve a-t adja. Hogy az így definiált $\sqrt[n]{a} = b$ számot megkaphassuk az $a > 1$ esetben hasonlítjuk össze a-t a következő, mindon határon felül növekedő számsorozattal: $0, 1^n, 2^n, 3^n, 4^n, \ldots$

Ezen sorozat valamelyik tagjával vagy összessik az a szám, vagy kettő közé esik; ha összesik, akkor $\sqrt[n]{a}$-t megtaláltuk; azonban ezt az esetőséget eljárásunkban egyszersmindenkorra zárjuk ki, megjegyezvén, hogy bár valamikor a összessik valamelyikkel, akkor $\sqrt[n]{a}$ véges lesz. Ha tehát a szám a sorozat két tagja közé esik, akkor $\beta_0^n < a < (\beta_0 + 1)^n$ Hasonlítsuk tovább össze a-t a

$\beta_0^n, (\beta_0 + \frac{1}{10})^n, (\beta_0 + \frac{2}{10})^n, \ldots\ldots (\beta_0 + \frac{9}{10})^n$ sorozattal, akkor ismét lesz két tag, melyre nézve $(\beta_0 + \frac{\beta_1}{10})^n < a < (\beta_0 + \frac{\beta_1 + 1}{10})^n$

Rövidség kedvéért jelöljük, $\beta_0 + \frac{\beta_1}{10} = b_1$ - gyel és hasonlítsuk most össze a-t a

$b_1^n, (b_1 + \frac{1}{10^2})^n, (b_1 + \frac{2}{10^2})^n, \ldots\ldots (b_1 + \frac{1}{10})^n$ sorozattal akkor is. ismét lesz két tag, melyre nézve $(b_1 + \frac{\beta_2}{10^2})^n < a < (b_1 + \frac{\beta_2 + 1}{10^2})^n$

Így folytatva az eljárást, ha az eljárás folyamán egy taggal sem egyenlő, akkor az egyenlőtlenségi sorozat általános tagja lesz:

$(b_{k-1} + \frac{\beta_k}{10^k})^n < a < (b_{k-1} + \frac{\beta_{k+1}}{10^k})^n$ vagy b_{k-1} értéke betéve:

$(\beta_0 + \frac{\beta_1}{10} + \frac{\beta_2}{10^2} + \ldots + \frac{\beta_k}{10^k})^n < a < (\beta_0 + \frac{\beta_1}{10} + \frac{\beta_2}{10^2} + \ldots + \frac{\beta_{k+1}}{10^k})^n$

Most azt állítjuk, hogy a keresett $\sqrt[n]{a} = b$ szám a következő végtelen sorral egyenlő:

$$b = \beta_0 + \frac{\beta_1}{10} + \frac{\beta_2}{10^2} + \frac{\beta_3}{10^3} + \ldots\ldots$$

A bizonyítás folyamán kimutatjuk, hogy b^n mindon részre, része a-nak is és fordítva a-nak minden része, része b^n-nek is, amivel aztán ki lesz mutatva az előbbi egyenlet helyessége is.

Az egyenlőtlenségi sorozat általános tagja szerint

$$b_k^n < a < \left(b_n + \frac{1}{10^k}\right)^n$$

Ezen egyenlőtlenség ~~ét~~ ét első tagja pedig éppen azt mondja ki, hogy b^n-nek minden része, része a-nak is, mert $b = b_k + R_k$

A bizonyítás második felét a köv. képpen végezzük. Megvizsgáljuk $a - b_k^n$ különbséget. Ez

$$a - b_k^n < \left(b_k + \frac{1}{10^k}\right)^n - b_k^n \qquad (L)$$

(a fenti egyenlőtlenség ét utolsó tagja szerint) De láttuk, hogy általában $(a+b)^n < a^n + (2^n - 1)\, a^{n-1} \cdot b$ ha $a > b$. Ezt alkalmazva $\left(b_k + \frac{1}{10^k}\right)^n < b_k^n + (2^n - 1)\, b_k^{n-1} \frac{1}{10^k}$. Betéve ezt (L) egyenlőtlenségébe:

$$a - b_k^n < (2^n - 1)\, b^{n-1} \frac{1}{10^k}$$

Ha a jobb oldalon b_k helyett a k nagyobb $B_0 + 1$-et írjuk, akkor

$$a - b_k^n < (2^n - 1)\, \frac{(B_0+1)^{n-1}}{10^k}$$

most ha itt k-t úgy határozzuk meg, hogy $10^k > \frac{(2^n-1)(B_0+1)^{n-1}}{\varepsilon}$ akkor $a - b_k^n < \varepsilon$, vagyis $b_k^n > a - \varepsilon$, ami azt mondja ki, hogy akkor a minden része is része b_k^n-nek. Ezzel tehát az $\sqrt[n]{a} = b$ gyök létezése be van igazolva, mert $b^n = a$ helyességét bebizonyítottuk. De az egyszersmint a bizonyítása annak, hogy minden 1-nél nagyobb számnak van gyöke. Ha pedig $b < 1$, akkor $\frac{1}{b} > 1$, tehát $\sqrt[n]{\frac{1}{b}} = s$ létezik, miből $s^n = \frac{1}{b}$ s $b = \frac{1}{s^n}$ s mindhogy minden számnak van reciprokja azért $\frac{1}{b}$ és $\frac{1}{s}$ is létezik, és így $\sqrt[n]{b} = \frac{1}{s}$ is létezik, tehát 1-nél kisebb számnak is van gyöke.

A gyökvonás mennyiségével kapcsolatos nagysági viszonyokra nézve megjegyezzük:

1.) Ha $a > b$ akkor $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$, mert tegyük föl az ellenkezőjét, tehát, hogy $\sqrt[n]{a} \leqq \sqrt[n]{b}$ s emeljük mindkét oldalt az n-dik hatványra, akkor lenne, hogy $a \leqq b$; ez azonban az föltevéssel ellenkezik.

2.) Egységnél nagyobb szám gyöke 1-nél nagyobb; az egységnél kisebb számé 1-nél kisebb; az egység gyöke 1.

3.) Legyen $a > 1$ és $m > n$

akkor $\sqrt[m]{a} < \sqrt[n]{a}$ jelöljük ezt $\alpha < \beta$-val. Bizonyítását indirekte végezzük: tegyük föl, hogy $\alpha \geqq \beta$ s emeljük mindkét oldalt a n-dik hatványra $\alpha^n \geqq \beta^n$; de $\beta^n = a$ tehát

$\alpha^n \geqq a$ szorozzuk a baloldalt α^{m-n} hatványnyal, mindhogy

$a>1$ akkor $\alpha^m > a$, de $\alpha^m = a$, tehát $a > a$ abszurditást kapnánk. Ez az abszurditás csak akkor szűnik meg, ha a tételt helyesnek fogadjuk el.

4.) Ha $a<1$ és $m>n$ akkor $\sqrt[m]{a} > \sqrt[n]{a}$ Ez a tétel az előbbiből következik. Ui. is $\frac{1}{a} > 1$, tehát

$$\sqrt[m]{\frac{1}{a}} < \sqrt[n]{\frac{1}{a}} \quad \text{vagy} \quad \frac{1}{\sqrt[m]{a}} < \frac{1}{\sqrt[n]{a}},$$

a reciprok értékre térve $\sqrt[m]{a} > \sqrt[n]{a}$. Amint látjuk tehát a gyökkitevő nagyobbításával, ha a gyökvonandó mennyiség nagyobb 1-nél, a gyök fogy, ha pedig a gyökvonandó kisebb egynél, a kitevő növelésével a gyök is nő.

Tegyük fel most, hogy $a>1$ és vegyük föl a köv számsorozatot:

$$a, \sqrt{a}, \sqrt[3]{a}, \sqrt[4]{a}, \ldots\ldots \sqrt[n]{a}$$

Kimutatjuk, hogy ez egy fogyó sorozat mind jobban és jobban közeledik az egységhez. Tegyük az általános tagot, mely ily alakú:

$\sqrt[n]{a} = 1 + \frac{h}{n}$ amiből $a = (1+h)^n > 1 + n\,h$ ebből $h < \frac{a-1}{n}$

Ha itt n nagy szám, akkor h abármily kis számnál kisebbé tehető, tehát $\sqrt[n]{a} - 1 < \frac{a-1}{n}$ Ha $\frac{a-1}{n} < \varepsilon$ vagyis $n > \frac{a-1}{\varepsilon}$ akkor $\sqrt[n]{a} - 1 < \varepsilon$ s így $\sqrt[n]{a}$ igen közel jut az egységhez.

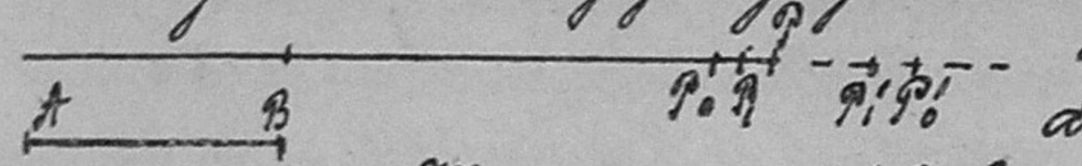
Ha $b<1$, akkor kimutatjuk, hogy a $b, \sqrt{b}, \sqrt[3]{b}, \sqrt[4]{b}, \ldots\ldots \sqrt[n]{b}, \ldots\ldots$ növekedő sorozat, mind jobban és jobban megközelíti az egységet, de azt el nem éri. Ha ui. is $b<1$, akkor $\frac{1}{b} > 1$, tehát $\sqrt[n]{\frac{1}{b}} - 1 < \frac{a-1}{n}$ vagy $\frac{1}{\sqrt[n]{b}} - 1 < \frac{1-b}{n\,b}$ baloldalaink közös nevezőre hozva $\frac{1-\sqrt[n]{b}}{\sqrt[n]{b}} < \frac{1-b}{n\,b}$ s baloldalát még jobban megnövelve kapjuk: $1 - \sqrt[n]{b} < \frac{1-b}{n\,b}$

Ha most ε-t úgy választjuk meg, hogy $\frac{1-b}{n\,b} < \varepsilon$ vagyis $n > \frac{1-b}{b\,\varepsilon}$ legyen, akkor $1 - \sqrt[n]{b} < \varepsilon$, tehát $\sqrt[n]{b}$ igen közel van az egységhez, de annál még valamivel kisebb.

Vonaldarab mérése.

A számfogalommal és irracionális számokkal való kibővítése után most arra kívánunk rámutatni, hogy a vonaldarabokat meg tudjuk mérni. Ha a megmérendő vonaldarab AB az egység e, a mérési eljárás az, hogy AB-t mérjük e-vel,

a hányszor lehet. Így nyerjük a P_0 pontot, ameddig a mérés



egész számszor a_0 fölment és a P_0' pontot, mely más P pontban túl esik. Tegyük most $\overline{AB}$ hosszú tízedét s P_0-tól mérjük föl P_0P-re, ha ez fölmegy a_1-szer, ismét két pontot kapunk P_1 és P_1'. az első P-t nem éri el, a második túlhaladja. Folytatva az eljárást 3 pontsorozatot kapunk.

$P_0, P_1, P_2, \ldots\ldots$
és $P_0', P_1', P_2' \ldots\ldots$ } az első sor elülről a második hátulról közelíti P-hez.

Most azt állítjuk, hogy az így megmért $\overline{OP}$ vonaldarab mérőszáma az $\overline{OP} = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \ldots\ldots$ végtelen tizedestört lesz. U. is P_k és P_k' közötti távolság $\frac{1}{10^k}$-nál kisebb, $\frac{1}{10^k}$ gyorsabban kisebbíthető, mint bármely fixen vett szám. Tehát ha a P_k pont mérőszáma t_k s P_k'-é t_k', akkor $t_k < \overline{OP} < t_k'$

de $t_k + R_k = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_k}{10^k} + \ldots\ldots$ s így látjuk, hogy a mérőszám minden pénze, része a hossznak is. Másrészről, ha a P pont közelében egy K pontot választunk, akkor még mindig megtudjuk k-t úgy határozni, hogy a mérőszám O K-nál nagyobb hosszat mérjen, ami azt mutatja, hogy a hossz minden része, része a mérőszámnak is. Ezzel bebizonyítottuk, hogy minden hosszat meg lehet mérni.

Negatív számok.

A kivonásnál számkörünkben még egy hiányosságát érezhetjük. U. is nem ismertünk olyan számot, mely (a-b)-hez adva a-t adná, ha a < b volt. Az így támasztott hiányon a negatív számok bevezetésével fogunk segíteni.

A negatív szám definíciója: a negatív szám olyan szám, mely egy számhoz adva nullát ad eredményül: $0 - b = -b$ Az így nyert -b számot b szám ellentettjének mondjuk. Ilyen ellentétes mennyiségek: vagyon, teher; ellentétes irány, negatív és pozitív számok stb. Ezen kibővített számkörben az egyenlőség definíciója egy kissé módosul, t.i. most már a nagyság mellett az irányra is tekintettel kell lennünk, mert két mennyiség most

már csak akkor egyenlő, ha a számértékük s jegyük is egyenlők. Itt meg kell jegyeznünk, hogy egy szám számértéke alatt az előjeltől eltekintve értjük a szám értékét. E szerint -b és b számértéke u.az : b; -b számértékét |-b|-vel is szokás jelölni.

Műveletek negatív számokkal.

Összeadás: $-a-b=-(a+b)$; ez oly szám, ami(a+b) hozzáadva 0-t ad.

Kivonás: A különbség def-ja nem változik. (a-b) kivonás elvégzésénél három esetet kell megkülönböztetnünk.

I. Ha $a>b$, akkor $(a-b)+b=a$ a különbség definíciója szerint és $(a-b)+b-b=(a-b)$ Tehát a-nak és -b-nek összege u.az, mint a-nak és b-nek különbsége. Épen ezért az összeadás és kivonásnál külön műveleti jegyet nem kell megkülönböztetnünk.

II. Ha $a-b$, akkor $a-b=0$

III. Ha $a<b$, akkor $b=a+(b-a)$ tehát $a-a-(b-a)=-(b-a)$

Ebből a három esetből kiolvasható, hogy az összeadásnál (mert most már a kivonás is összeadásnak tekinthető) az összeg mindég a nagyobb összeadandónak a jelét tartja meg.

$a-(-b)=a+b$ mert $a-(-b)+(-b)=a$ vagy $a-(-b)-b=a$, a különbség def. szerint ebből $a-(-b)=a+b$

Több tagra kiterjesztve: $a-(b-c)=a+c-b$ vagyis a kivonandó jelét ellenkezőre kell változtatni s így hozzáadni a kisebbítendőhöz.

A neg. számok bevezetésével a kivonás mindég commutativ, míg az eddigi számkörben nem mindég volt az, mert pl.:

$5-(6-3)=2$-t nem lehetett $(5-6)+3$ alakban írni.

A szorzást a neg. számoknál nem lehet a definitio alapján átvinni, hanem fönntartjuk azon számolási szabályokat, melyeket a pozitiv számoknál alkalmaztunk. Így a disztributiv törvényt tekintetbe véve $(a-a)b=ab+(-a)b=0$, miből a különbség definíciója szerint $(-a)b=-ab$. Továbbá: $(a-a)(-b)=0$, a disztributiv törvény alkalmazásával: $-ab+(-a)(-b)=0$ Ismét a különbség definíciója szerint $(-a)(-b)=ab$. Ezekből következik, hogy ellenkező jelű tényezők szorzata neg., egyező" jelűeké pozitiv.

A hányados definíciója ugyanaz, mint a pozitív számoknál volt. Tehát $\frac{a}{b} \cdot b = a$. Ebből látható, hogy ha a és b $\neq 0$, akkor $\frac{a}{b}$ is pozitív; ha a negatív és b pozitív, akkor $\frac{a}{b}$ negatív; ha a pozitív b negatív, akkor is $\frac{a}{b}$ negatív végül, ha a és b is negatív, akkor $\frac{a}{b}$ pozitív kell legyen.

A hatványozás fogalma is marad a régi.

$(-a)^n = -a, -a, -a, \ldots\ldots -a$ n-ször

Ebből azt látjuk, hogy

$(-a)^n = \begin{cases} a^n \text{ ha } n \text{ páros szám} \\ -a^n \text{ ha } n \text{ páratlan szám} \end{cases}$

E két esetet együtt így írhatjuk $(-a)^n = (-1)^n a^n$ mivel $(-1)^n$ az n kitevőben előjelet határoz meg.

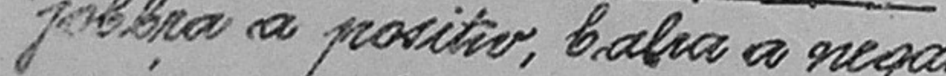
A gyökvonásnál több esetet kell megkülönböztetnünk.

1.) $\sqrt[2n]{a}$ értéke ha a pozitív, lényegében $\sqrt[2n]{a} = b$ de a keresendő értékek -b is megfelel, mert $(-b)(-b)(-b)\ldots\ldots(-b) = b.b.\ldots.b = a$ tehát pozitív számból páros gyököt vonva $\left(\text{2n-ed}\right)$ a megoldást kapunk.

2.) $\sqrt[2n]{-a}$ -ra nincs megoldást a mostani számkörben nem tudunk adni, mert nincs olyan számunk, mely páros kitevőre emelve negatív számot adna. Tehát számfogalmunkat majd ismét ki kell bővítenünk. 3.) $\sqrt[2n+1]{a}$ -nak is van egy megoldása. 4.) $\sqrt[2n+1]{-a}$ -nak szintén van megoldása a negatív számok közül, és a megoldás $\sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a}$, mert

$(-a)(-a)\ldots\ldots(-a) = -(a.a\ldots\ldots a)$

A negatív számok $\left(\text{2n+1-ed}\right)$ rendű kibővített $\left(\text{2n+1-ed}\right)$ számkörben a nagyobb vagy kisebb fogalmát a számok geometriai ábrázolásával adhatjuk. Ti. is vegyük föl most 0-tól két irányba végtelen



hosszúnak a számegyenest 0-tól jobbra a pozitív, balra a negatív értékeket várjuk föl. Így minden szám megkapja a maga hosszát s minden pont a számegyenesen egy határtartozó számot.

Az így értelmezett számok közül az a nagyobb a számok közül melyet a számegyenesen balról jobbra haladva később találunk. Így $-5 < 3$, $-5 < -3$, $-1 \leq 0 < 1$ stb. Ha az előjeltől eltekintünk, akkor a számnak az ún. számértékét (abszolút értékét) vesz-

figyelembe. Egy szám szám értékét úgy jelöljük, hogy a számot két párhuzamos | | vonás közé tesszük.

A számértékre nézve megjegyezzük:
$|-5|>3$, $|-5|>|-3|$ $|-1|>0<1$ stb. Továbbá: $|a+b|\leqq|a|+|b|$ Az egyenlőség akkor áll, ha a és b egyező jelű a < jel pedig, ha a és b különböző előjelű. Szavakban: összeg abszolut értéke egyenlő, vagy kisebb, mint az összegezendők abszolut értéke.- Több tagra kiterjesztve: $|a+b+c|\leqq|a+b|+|c|\leqq|a|+|b|+|c|$; általában $\left|\sum_k a_k\right|\leqq\sum_k|a_k|$
$|a-b|\leqq|a|+|-b|\leqq|a|+|b|$; egyenlőség áll fönn, ha a és b ellentétes előjelű, < jel, ha a és b egyező előjelű.

$|ab|=|a||b|$ és $|abc|=|a||b||c|$ továbbá

$\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$ és $|a^m|=|a|^m$; mely utóbbi tételek éppen a szorzás, osztás és hatványozás definitióiból folynak.

A továbbiakban még jobban általánosított jelölést használunk, amennyiben most mint egy algebrai jel, pl. a előtt pozitiv és negativ számot is értünk, mert mint látni fogjuk az összes megismert operatiok negativ számokra is érvényben maradnak. Ezen általános jelölésnél és $a>b$ analytikailag azt jelenti, hogy $a-b>0$, most ha a algebrailag nagyobb mint b, akkor a-ból a kisebb számot levonva pozitiv eddigiként kell kapnunk. Ezt tekintetbe véve a nagyság i összemyet az általános esetben ilyenek:

Ha $a>b$ vagyis $a-b>0$ } a kettő összeadva
és $b>c$, $b-c>0$ }

akkor $a>c$ mert $a-c>0$. Ha $a>b$, vagyis $a-b>0$ és ha c pozitiv szám, akkor $ac>bc$ mert $ac-bc>0$.

Ha c negativ szám, akkor ez a tétel nem áll; tehát egyenlőtlenséget pozitiv számmal az egyenlőtlenségi jegy megfordítása nélkül szabad átszorozni.

A hatványozás fogalmának kibővítése.

A hatványozás fogalmát a következőkben kibővítjük a pozitiv, negativ egész és tört kitevőjü hatványokra is. Ennek során tartva a már megismert számolási szabályokat: $a^m.a^n=a^{m+n}$, ha itt n helyett -m-et helyettesítünk be, akkor $a^m.a^{-m}=a^{m-m}=a^0=1$ tehát $a^m.a^{-m}=1$.

,osetva mindkét oldalt a^m-mel lesz: $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$. Ismét egy tétel azt mondja ki, hogy a negatív kitevőjű hatvány egyenlő a pozitív kitevőjű hatvány reciprokával.- Tudjuk, hogy áll a tétel, mely szerint

$$a^{m_1} a^{m_2} a^{m_3} \ldots\ldots a^{m_n} = a^{m_1+m_2+m_3+\ldots+m_n}$$

Ha mindkét oldalon az összes exponensek helyett $\frac{1}{n}$-et írunk, akkor

$$a^{\frac{1}{n}} a^{\frac{1}{n}} a^{\frac{1}{n}} \ldots\ldots a^{\frac{1}{n}}_{n \text{ szer}} = a^{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots\frac{1}{n}}_{n \text{ szer}} = a$$

de az oly szám mely n-szer vett tényezőül a-t adja az $\sqrt[n]{a}$, tehát $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$. Tehát a-nak n-dik tört egységű hatványa egyenlő a-nak n-dik gyökével.

Minthogy hasonlóképpen azért $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

$$a^{\frac{m}{n}} a^{\frac{m}{n}} \ldots\ldots a^{\frac{m}{n}}_{n \text{ szer}} = a^m$$

Minthogy $a^{\frac{m}{n}} a^{-\frac{m}{n}} = a^0 = 1$, azért $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$ a tört exponensű hatványoknál azonban ki kell egyelőre kötnünk, hogy alapszámnak csak pozitív számokat vesszünk tekintetbe, mert lehet olyan esetet is a negatív alapú tört hatványoknál, hogy a hatványt, ill. gyökvonást még nem tudjuk értelmezni.

Hogy a hatvány fogalmát irracionális exponensekre is kiterjeszthessük, arra nézve ismerjük a limesz fogalmát.

A limesz fogalmáról.

UNIVERSITATEA DIN CLUJ
SEMINARUL
DE
MATEMATICI

Láttuk már, hogy az $a, \sqrt{a}, \sqrt[3]{a} \ldots\ldots \sqrt[n]{a} \ldots\ldots$ sorozat tetszőlegesen az egységhez közeledik. Ilyen és hasonló esetben azt mondjuk, hogy az illető sorozat egy limesz (határérték) felé tart. Tehát hogy az $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots a_n, \ldots$ sorozatnak A a limesze, ez azt jelenti, hogy mi- nél hátrább megyünk a sorozatban, A-t annál inkább megközelítjük, vagy más szóval, megadhatunk a sorozatban oly tagot, melyen túl bármely tagnak és a limesznek különbsége abszolut értékre nézve kisebb, mint bármely megadható kis mennyiség: $|A - a_{n+k}| < \varepsilon$, hol ε a megadható kis mennyiség. Az a sorozatnak limeszét így jelöljük: $\lim a_n = A$. A limesz létezésénél két eset lehetséges, 1.) $A > a_{n+k}$, akkor a $||$ jel elhagyható: $A - a_{n+k} < \varepsilon$ vagyis $A - \varepsilon < a_{n+k}$ 2.) $A < a_{n+k}$ akkor $a_{n+k} - A < \varepsilon$ vagyis $A + \varepsilon < a_{n+k}$ A két esetet egybe foglalva mondhatjuk, hogy a limesz létezése esetén a sorozatnak egy bizonyos tagjától

és t összes tagjai az $t-\varepsilon$ és $t+\varepsilon$ intervallumban esnek. Ha a $\lim a_n(t)$ nem t, akkor a számsorozat minden tagja egy bizonyos tagjától kezdve pozitív, mert $t-\varepsilon$ és $t+\varepsilon$ is pozitív, a negyedik tagok pedig ezen intervallumban esnek. Ha t negatív, akkor a sorozat tagjai egy bizonyos tagon túl mind negatívok. Végül ha $t=0$ akkor bizonyos tagon túl különben pozitív és negatív tagok is a sorozatban. Ha a számsorozatunk az a tulajdonsága, hogy az tagjainak számértékük a végtelenig növekszik, $|a_{n+k}|>\gamma$, akkor az illető számsorozatnak végtelen limesze van: $\lim a_n=\infty$ ha $\gamma=\infty$, minden a tagok, minek pozitív, vagy minek negatív számnagyságra nézve a végtelenbe, lehet a limesz $+\infty$ vagy $-\infty$

A limesszel vonatkozó tételek.

Legyen adva két limesszel bíró számsorozat

$a_1, a_2, a_3 \ldots a_n \ldots$ $\lim a_n = A$ és

$b_1, b_2, b_3 \ldots b_n \ldots$ $\lim b_n = B$

Tegyük a két sorozat tagjainak összegéből megalkotott sorozatot:

$(a_1+b_1),(a_2+b_2),(a_3+b_3),\ldots(a_n+b_n),\ldots$ Kimondjuk hogy ez a sorozatnak is van limesze s ez az A és B számok összege.

Ez is, ha egy általunk megadott n-től, hogy

$|A-a_{n+k}|<\frac{\varepsilon}{2}$ és $|B-b_{n+k}|<\frac{\varepsilon}{2}$ legyen, akkor ezek összege:

$|A-a_{n+k}+B-b_{n+k}|=|A+B-(a_{n+k}+b_{n+k})|<\varepsilon$ vagyis

$\lim(a_n+b_n)=A+B=\lim a_n+\lim b_n$ Ennek a limesz egyenlőségnek összegezendők limeszével. A különbségre nézve hasonlólépésben áll.

$(a_1-b_1),(a_2-b_2),(a_3-b_3),\ldots(a_n-b_n)$ sorozat $\lim=A-B$ mert

$|A-a_{n+k}-(B-b_{n+k})|\leq|A-a_{n+k}|+|B-b_{n+k}|<\varepsilon$, ha az n-et egy határszámnak veszi, mint az előbb. Tehát

$\lim(a_n-b_n)=A-B=\lim a_n-\lim b_n$

Különbség limesze egyenlő a kivonandó és kivonandó limeszének különbségével. - Tételünkhöz adok, hogy valahányszor egy számsorozatnak van limesze, mindig vannak tagjai olyan előre adott számot szabmi, amelyen felül a sorozat tagjai nem emelkedhetnek, kimondjuk, hogy két sorozat szorzatának limesze egyenlő a tényezők limeszeinek szorzatával. Tegyük, hogy

$a_1 b_1, a_2 b_2, a_3 b_3 \ldots a_n b_n$ szorzat limesze AB.

$|t(B-b_{n+k})+b_{n+k}(t-a_{n+k})| \leq |t|\,|B-b_{n+k}|+|b_{n+k}|\,|t-a_{n+k}|$

Tegyük fel most egyelőre, hogy $t \neq 0$, akkor meg lehet n-et úgy határozni, hogy $|B-b_{n+k}| < \frac{\varepsilon}{2|t|}$. Legyen továbbá (a sorozat definíciója szerint), melyre fölül a ξ sorozat tagjai nem emelkedhetnek, n-et most megtudjuk úgy választani, hogy $|t-a_{n+k}| < \frac{\varepsilon}{2\beta}$ legyen. Ekkor azonban az előbbi egyenlőtlenség bal oldala $|tB-a_{n+k}b_{n+k}| < |t|\frac{\varepsilon}{2|t|} + |b_{n+k}|\frac{\varepsilon}{2\beta}$ vagyis $|tB-a_{n+k}b_{n+k}| < \varepsilon$ tehát $\lim(a_n b_n) = t.B = \lim a_n \cdot \lim b_n$

A tétel akkor is helyes, ha $t=0$, mert ekkor a sorozat minden tagja a 0, jobb ε-ot.

Most a határpadosra nézve bebizonyítjuk, hogy ha egy számsorozatnak van limese, akkor az reciprok sorozatnak is van s ezen limesre az eredeti sorozat limeszének reciprokja. Vagyis, ha az a sorozat limese: $\lim a_n = A \neq 0$ akkor az $\frac{1}{a}$ sorozat limese: $\lim \frac{1}{a_n} = \frac{1}{A}$.

$$\left|\frac{1}{A}-\frac{1}{a_{n+k}}\right| = \left|\frac{a_{n+k}-A}{A\,a_{n+k}}\right| = \frac{|A-a_{n+k}|}{|A|\,|a_{n+k}|}$$

Ha az n-dik tagon túli tagok $A-\varepsilon$ és $A+\varepsilon$ határai közül a nagyobbat α-val jelöljük, továbbá tekintetbe vesszük, hogy $|A-a_{n+k}| < \eta$ és η-t lehet úgy meghatározni, hogy $\eta < |A|\alpha$ legyen, akkor $\frac{|A-a_{n+k}|}{|A|\,|a_{n+k}|} < \varepsilon$ vagyis $\left|\frac{1}{A}-\frac{1}{a_{n+k}}\right| < \varepsilon$ tehát $\lim \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\lim a_n} = \frac{1}{A}$

Ha $A=0$, akkor a reciprok sorozat limesze végtelen nagy, mert hogy $\lim a_n = 0$ az azt mondja, hogy $|0-a_{n+k}| < \varepsilon$ vagyis $a_{n+k} < \varepsilon$, de ekkor $\left|\frac{1}{a_{n+k}}\right| > \frac{1}{\varepsilon}\cdot\varepsilon$ tudniillik bármely nagy számnál nagyobb $\frac{1}{\varepsilon}$ tudniillik, tehát $\left|\frac{1}{a_{n+k}}\right| > N$, ami éppen a végtelen nagy értékű sorozat ismertető jele. – A tétel fordítva is áll, ha $\lim a_n = \infty$, akkor $\lim \frac{1}{a_n} = 0$ mert ha $|a_{n+k}| > N$, akkor $\left|\frac{1}{a_{n+k}}\right| < \frac{1}{N} < \varepsilon$

A reciprok sorozatra kimondott tételek szerint tehát, ha a sorozatok

$a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots a_n \ldots\ldots$ $\lim a_n = A$

$b_1, b_2, b_3 \ldots\ldots b_n, \ldots\ldots$ $\lim b_n = B$

akkor a sorozatok hányadosainak tételéből

$\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \ldots\ldots \frac{a_n}{b_n} \ldots$ sorozatra $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}$ amely egyenlet szerint tehát: hányados limesze egyenlő a limeszek hányadosával.

Limesszel bíró sorozat tulajdonságai.

Tudjuk, hogy ha egy sor limesszel bír, akkor $|A-a_{n+k}| < \varepsilon$ bármely

Lejson $|t-a_{m+k}|<\varepsilon$. Ha a két egyenlőtlenséget egymásból levonjuk, nyerjük, hogy

$|t-a_{m+k}-(t-a_{m+k})| \leq |a_{m+k}-t|+|t-a_{m+k}|<2\varepsilon$ vagyis

$|a_{m+k}-a_{m+k}|<\varepsilon'$ .... $(\overline{\alpha})$

Ha egy sorozatnak limesze van, akkor tehát a sorozat n-dik tagjának és k-adik tag különbségének abszolut értéke nálnál kisebb, mint egy megadható kisérő számnál, amennyiszer k. Ezen kritérium szerint magukból a sorozat tagjaiból megítélhetjük, hogy van-e egy sorozatnak limesze, vagy sincs, a limesz ismerete tehát szükségtelen a limesz létezésének eldöntéséhez.

Az olyan sorozatot, melyenek az előbb említett $(\overline{\alpha})$ feltétel teljesül, szabályos sorozatnak mondunk.

Most megfordítva bebizonyítjuk, hogy ha a sorozat szabályos, akkor annak limesze van.

A szabályos sorozat is három féle lehet: 1.) lehet, hogy eby bizonyos tagon túl a sorozat összes tagjai pozitívok; ezek a pozitív jellegű sorok. 2.) lehet, hogy egy bizonyos tagon túl minden tag negatív; az ilyen sorozat negatív jellegű. 3.) ha egy bizonyos tagon túl vegyesen pozitív és negatív tagok is fordulhatnak elő, akkor a sorozat határozatlan jellegű.

Hogy a szabályos sorozatnak mind a három esetben van limesze, azt egyenlőre tudatjuk fel: Tegyük először a harmadik esetet: mikor a sorozat határozatlan jellegű. Ekkor a ellentétes tag különbsége $|a_{m+k}-a_{m+k}|<\varepsilon$, de az α jel közé két egyenlő jelű szám összege sohasem nagyobb, mint annak számnak kétszerese ε-nál, ha $a_{m+k}<\varepsilon$ és $-a_{m+k}=|a_{m+k}|<\varepsilon$. Tehát a határozatlan jellegű sorozatnál az n-dik tagon túl minden tag értéke kisebb, mint egy megadható kis számnégyszög, vagyis a sorozatnak van limesze és ez egyenlő nullal.

Ilyen és ehhez hasonló jellegű összegekre is kiterjeszthető, egy segédtételből következik le, mely szerint: ha egy szabályos számsorozat minden tagjához egy azonos számot hozzáadjuk, vagy minden tagból ugyanazon számot kivonjuk, az ugyet új sorozat szintén szabályos lesz.

Ha a szabályos sorozat $a_1\ a_2\ a_3 \ldots\ldots a_m \ldots$ s az új sorozat $a_1 \pm a,\ a_2 \pm a,\ a_3 \pm a, \ldots\ldots a_m \pm a$, akkor is $|a_{m+k} \pm a-(a_m \pm a)|<\varepsilon$

mert es nem más, minthogy $|a_{n+k} - a_{n+h}| < \varepsilon$.

Ha a határozott jellegű szabályos sorozatnál most megtudnók adni egy oly t számot, melyet a sorozat tagjaiból kedvenc sorozat határozatlanná válik, akkor magát az t számot a kere-sett limesz, mert a határozatlan jellegű sorozat tagja $|a_{n+k} - t| < \varepsilon$ vagy $|t - a_{n+k}| < \varepsilon$ ami éppen azt mondja ki, hogy a sorozat limesze t.

Ha ily t számot nem tudunk találni, akkor a pozitiv jellegű szabályos sorozat limeszének létezését a kér. képen mutatjuk ki. Az eredeti $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots a_n \ldots$ sorozatból az által, hogy rend-re az t-et $2, 3, 4 \ldots\ldots$ egész számokat levonjuk új sorozatokat al-kotunk. Jelöljük az így nyert sorozatok általános tagjait:

$a_n ; a_n - 1 ; a_n - 2 ; a_n - 3 ; a_n - 4 ; \ldots\ldots a_n - (k+1) ; a_n - k ; \ldots$

A legelső ilyen sorozat minden esetre pozitiv jellegű, de lesz olyan sorozat a sor közt, mely már negativ jellegű, legyen az első negativ jellegű sorozat $a_n - (k+1)$ Ha közte van határozatlan jellegű sorozat pl $a_n - k$, akkor a limeszt megtaláltuk lesz $a_n - k$. Ezt az esetet a továbbiakban már előre látjuk ki. Tehát nincs határozatlan jellegű sorozat, hanem legyen az $a_n - \alpha_0$ még pozt. jellegű, de $a_n - (\alpha_0 + 1)$ sorozat már negat. jellegű, akkor $\alpha_0 + 1 > a_{n+k} > \alpha_0$ Az a_{n+k} sorozatok tetsz. sorozatának végét vegyük most föl az

$a_n - \alpha_0 ; a_n - \left(\alpha_0 + \frac{1}{10}\right) ; a_n - \left(\alpha_0 + \frac{2}{10}\right) ; \ldots a_n - (\alpha_0 + 1)$ sorozat sorozatot, akkor is ha két szomszédos sorozatnál egyazon változik a jel-leg, akkor a két sorozat közötti más sorozatnál van a limes, tehát

$$\alpha_0 + \frac{\alpha_1 + 1}{10} > a_{n+k} > \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10}$$

Így folytatva az eljárást a már ismert úton eljutunk végre, hogy

$\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \ldots + \frac{\alpha_n}{10^n} + \ldots = \underline{t}$ végtelen sor a keresett limesz. Bebi-zonyos, hogy: $\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \ldots\ldots + \frac{\alpha_r + 1}{10^r} > t$, de ekkor

$a_{n+k} + \frac{1}{10^r} > \underline{t}$ amiből $|t - a_{n+k}| < \frac{1}{10^r}$, amivel a limesz létezése be van igazolva, minthogy r-et meg lehet úgy határozni, hogy $\frac{1}{10^r} < \varepsilon$ legyen, tehát hogy $|t - a_{n+k}| < \varepsilon$ legyen.

A pozitiv jellegű szabályos sorozatnak tehát van limesze, de a negativ jellegű sorozatnak is van, mert a pozitiv jellegű szabályos

sorozatból egyszerűen a jel megváltoztatásával átmehetünk a negatív jellegű sorozatokra is, mert annak most belátjuk az igaz, hogy minden negatív sorozat is szabályos. Ti. is, ha a negatív sorozat két tagja $-a_{n+k}$ és $-a_{n+k}$ akkor is

$|-a_{n+k} - (-a_{n+k})| = |a_{n+k} - a_{n+k}| < \varepsilon$ ezzel a szabályos sorozatokra a lineáris letétet belátottuk.

A lineáris alkalmazása.

A lineáris segítségével az irracionális számokat is definiálhatjuk. Legyen egy irracionális szám $t = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \ldots + \frac{a_n}{10^n} \ldots$

Felírjuk most:

$$\left.\begin{aligned} t_0 &= a_0 \\ t_1 &= a_0 + \frac{a_1}{10} \\ t_2 &= a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ t_n &= a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_n}{10^n} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\}$$

vegyük ekkor az $t_0, t_1, t_2, t_3 \ldots t_n \ldots$ sorozatot, ha ennek a sorozatnak van lineáre, akkor ezt nevezzük a t irracionális szám értékének.

Az elemi geometriában úgy mérjük hogy határoztuk meg a π értékét is. $\pi = 3{,}14159\ldots$

Az irracionális számokat lineáre segítségével először Cantor definiálta, míg Weierstrass a végtelen sorokkal határozta meg.

Monoton sorok: Az olyan sorozatot, melynek tagjai állandóan nőnek, vagy legalább nem fogynak és az olyan sorozatot, melynek tagjai állandóan fogynak, vagy legalább is nem növek monoton (egyhangú) sorozatnak nevezzük. Monoton egy sorozat tehát, ha $a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq \ldots \leqq a_n \leqq \ldots$ vagy $a_1 \geqq a_2 \geqq a_3 \geqq \ldots \geqq a_n \geqq \ldots$ Az előbbit növőnek, az utóbbit fogyó számsorozatnak mondjuk. Ha a sorozat tagjainak növése, vagy fogyása minden határon felül, ill. alul történik, akkor a sorozat limese $+\infty$ illetőleg $-\infty$. Ha a növés ill. fogyás nem minden határon felül ill. alul történik, akkor kimondjuk, hogy a monoton sor szabályos, tehát limesszel bír.

Általában a növő sorozat tagjai egy megadható a mennyiségen alul, tegyük fel előbb, hogy a sorozat nem szabályos, tehát nem tudjuk az a számot úgy megválasztani, hogy az a diff

megcsökkenő két tag különbsége kisebb legyen a megadható ε-nál, akkor tehát $a_{n+k} - a_{n+h} > \varepsilon$, de a következő tagok közt még számtalan oly 2-2 tagot lehet találni, melyek különbsége nagyobb, ε-nál. Mivel pedig sorozat növekedő, azaz $a_{n+h_1} - a_{n+k} \geq 0$, mert a_{n+h_1} a sorban az a_{n+k} tag után áll. Tehát

$$\left.\begin{array}{l} a_{n+k} - a_{n+i} > \varepsilon \\ a_{n+h_1} - a_{n+k} \geq 0 \\ a_{n+k_1} - a_{n+h_1} > \varepsilon \\ a_{n+h_2} - a_{n+k_1} \geq 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \underline{a_{n+k_r} - a_{n+h_r} > \varepsilon} \end{array}\right\}$$

Összeadva ezen egyenlőtlenségeket, nyerjük, hogy $a_{n+k_r} - a_{n+k} > (r+1)\varepsilon$

Innen ekkor

$a_{n+k_r} > a_{n+k} + (r-1)\varepsilon$ és itt r-et úgy lehet megválasztani, hogy $a_{n+k} + (r+1)\varepsilon > \alpha$ s így $a_{n+k_r} > \alpha$ vagyis van a sorozatnak oly tagja, mely α-nál fölül emelkedik, ez azonban föltevésünkkel ellentétben. El kell tehát fogadnunk, hogy a növő monoton sorozat bár tagjai egy megadható α számon alul maradnak, mindég szabályos, tehát limesszel bír. A fogyó monoton sorokról a jegyzet ellentétre változtatva növő sorozatra nyert tételünk, melyek az imentiek szerint van limesze. A fogyó sorozat limesze pedig épen limesz ellentettje lesz.

Algebrai operatiók végzése a limesz segítségével.

Legyen egy $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\ldots \alpha_n \ldots\ldots$ sorozat limesze $\lim \alpha_n = \alpha$. Tegyük föl, hogy a sorozat minden tagjára nézve el tudjuk végezni az f kiszámos f operatiót. Végezzük tehát el, s vegyük az így adódó $f(\alpha_1)\ f(\alpha_2), \ldots\ldots f(\alpha_n) \ldots$ sorozatot; ha ezen utóbbi sorozatnak limesze van, akkor ezt a limeszt $f(\alpha)$-nak nevezzük: $f(\alpha) = \lim f(\alpha_n)$

Lássunk erre példát: Legyen az $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ sorozat limesze $\lim a_n = 0$ Kérdés, hogy mivel egyenlő $\frac{1}{0}$?

$\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \ldots\ldots \frac{1}{\alpha_n} \ldots$ sorozat limesze $\lim \frac{1}{a_n} = \infty$ tehát $\frac{1}{0} = \infty$.

Egy másik példát fog nyujtani nézve a hatvány fogalmának újabb kibővítése az irrationalis exponensek esetére is.

Ha α irrationalis szám, és ha $\lim a_n = \alpha$, akkor a^α hatvány alatt $\lim a^{a_n}$-et értjük. A következőkben tehát ki fogjuk mutatni, hogy ha az $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\ldots \alpha_n \ldots$ sorozat limesze $\lim \alpha_n = \alpha$

akkor az $a^{\alpha_1}, a^{\alpha_2} \ldots a^{\alpha_n} \ldots$ sorozatnak is van limesze, melyet a^{α}-nak fogunk nevezni.

Ennek szimultatása előtt először bizonyítsuk az előbbi megjegyzést határértékra nézve néhány megengedő viszonyt.

Ha $a > 1$ akkor $a^n > 1$ $(n > 0)$ és így $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} > 1$;
$a^{-r} = \frac{1}{a^r} < 1$ és $a^{r+k} = a^r a^k > a^r$. Ha $0 < a < 1$, akkor $a^n < 1$
és így $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} < 1$; $a^{-r} = \frac{1}{a^r} > 1$ és $a^{r+k} < a^r$

Ezekre hivatkozva be fogjuk mutatni, hogy az irracionalis exponensü hatvány létezik I $a > 1$ szimultatjuk, hogy az $a^{\alpha_1}, a^{\alpha_2}, a^{\alpha_3} \ldots a^{\alpha_n} \ldots$ számsorozat szabályos, tehát van limesze, melyet a^{α}-nak nevezünk el.

Minthogy az α_n számsorozat limeszel bir, azért $\alpha_{n+k} - \alpha_{n+k} < \eta$ hol η tetszésszerinti kicsi szám. Hasonlitsuk össze η-t az $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \ldots$ sorozattal; η kicsinysége a sorozat hét tagja közé fog esnünk:
$\frac{1}{k} \geq \eta > \frac{1}{k+1}$ Jelöljük azon számot, melyen felül az α_n sor tagjai nem emelkedhetnek a^1-ig. Ezt tekintetbe véve, a kör. kifejezés:
$a^{\alpha_{n+k}} (a^{\alpha_{n+k} - \alpha_{n+k}} - 1) < a^{\alpha_1} (a^{\frac{1}{k}} - 1)$ de $a^{\frac{1}{k}} = \sqrt[k]{a}$ és ismert
tudjuk $\sqrt[k]{a} - 1 < \frac{a-1}{k}$, vagyis
$a^{\alpha_{n+k}} (a^{\alpha_{n+k} - \alpha_{n+k}} - 1) < \frac{a^{\alpha_1}(a-1)}{k}$ Ha az η-t úgy
választjuk meg, hogy a k elegendő nagy legyen, akkor elérhetjük,
hogy $\frac{a^{\alpha_1}(a+1)}{k} < \varepsilon$ legyen s így

$$a^{\alpha_{n+k}} (a^{\alpha_{n+k} - \alpha_{n+k}} - 1) = |a^{\alpha_{n+k}} - a^{\alpha_{n+k}}| < \varepsilon$$

ami azt mondja ki, hogy az a^{α_n} számsorozat szabályos, vagyis a sorozatnak limesze van, melyet a^{α}-nak nevezünk el. Az utolsó egyenletnél az abszolut értékre azért volt szükségünk, mert a tárgyalt nagyságú viszonyok szerint $a > 1$ így $a^{\alpha_{n+k}} > a^{\alpha_{n+k}}$ ha $\alpha_{n+k} > \alpha_{n+k}$

Ha $a < 1$, akkor a reajuokra téve $\frac{1}{a} > 1$ s így $\lim a^{\alpha_n} = a^{\alpha}$.
De $\lim \frac{1}{a^{\alpha_n}} = \frac{1}{\lim a^{\alpha_n}}$ tehát $\lim a^{\alpha_n} = a^{\alpha}$
Ebben az esetben is a^{α_n} sorozatnak létezik a limesze s ez a^{α}.

Kimutatjuk még, hogy a hatványozási szabályok ezen általános hatványmennyiségekre vezetve is helyesek maradnak.

1. tör. 3. bizonyitásban az képezi a fordulópontot, hogy $\alpha_n \beta_n$ racionálisokkal az ismert módon végezhetjük a hatványozás műveletét s csak mintán ezt elvégeztük, térünk a változó mennyiség limeszére.

I. $a^\alpha = \lim a^{\alpha_n}$

$\alpha^\beta = \lim \alpha^{\beta_n}$ ~~$\lim \alpha^{\beta_n}$~~

$a^\alpha \alpha^\beta = \lim a^{\alpha_n} \lim a^{\beta_n}$

$= \lim (a^{\alpha_n} a^{\beta_n})$

$= \lim (a^{\alpha_n + \beta_n})$

$= a^{\alpha+\beta}$

II. $a^\alpha = \lim a^{\alpha_n}$

$b^\alpha = \lim b^{\alpha_n}$

$a^\alpha \cdot b^\alpha = \lim a^{\alpha_n} b^{\alpha_n}$

$= \lim (ab)^{\alpha_n}$

$= (ab)^\alpha$

III. $(a^\alpha)^\beta = \lim (\lim a^{\alpha_n})^{\beta_n}$

$= \lim (\lim a^{\alpha_n \beta_n})$

$= \lim a^{\alpha_n \beta}$

$= a^{\alpha\beta}$

Logarithmus.

A hatványozásnak egyik ellentett műveletét a gyökvonást már láttuk, most a másik ellentett művelettel, a logarithmussal fogunk foglalkozni.

$a^\alpha = b$ ebből adva van a b és keresendő a jelö $\log_a b = \alpha$, logarithmus a alapon $b = \alpha$. Tehát az exponenst az alapszámhoz való viszonyában log-nak nevezzük. Valamely mennyiség log-a tehát az a szám, melyre az alapszámot kell emelni, hogy az illető mennyiséget kapjuk.

Itt a log. keresése nem célunk, ezzel a függvénytanban lesz dolgunk, itt csak a log törvényeit fogjuk megismerni. Először mindenekelőtt, hogy egy tetszőleges alapra egy tetszőleges mennyiségnek van-e log-a.

I. Legyen az alapszám a s/ tegyük fel, hogy $a > 1$ s vegyük a kör. esetét vizsgálat alá!

t., $b > 1$, minthogy létezik logarithmus. Vegyük ui. is a hatványait: $a^0, a^1, a^2 \ldots a^n \ldots$ b vagy egyenlő valamelyikkel, vagy kettő közé esik: $a^{\alpha_0} < b < a^{\alpha_0+1}$ az intervallumot 10 részre osztva az összehasonlítást folytatva: $a^{\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10}} < b < a^{\alpha_0 + \frac{\alpha_1+1}{10}}$

Most ismét b-t az $a^{\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{1}{10^2}}$, $a^{\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10} \frac{2}{10^2}}$ $\ldots a^{\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2}}$ $\ldots a^{\alpha_0 + \frac{\alpha_1+1}{10}}$ sorozattal hasonlítjuk össze. Ha b egy taggal sem egyenlő, akkor

$a^{\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2}} < b < a^{\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2+1}{10^2}}$

Ha az eljárás nem ér véget, akkor $\alpha = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \ldots + \frac{\alpha_n}{10^n} + \ldots$ végtelen sort kapjuk, melyről bebizonyítjuk, hogy ez a keresett logarithmus, vagyis, hogy az így definiált α-ra nézve: $a^\alpha = b$. Jelöljük

$\alpha_0 = \alpha_0'$, $\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10} = \alpha_1'$, $\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} = \alpha_2' \ldots$ s végyük az $\alpha_0', \alpha_1', \alpha_2', \alpha_3' \ldots \alpha_n' \ldots$ sorozatot, melynek limesze: $\lim \alpha_n' = \alpha$

Ekkor $a^\alpha = \lim a^{\alpha_n}$ Ki kell tehát mutatnunk, hogy $\lim a^{\alpha_n} = b$ vagyis, hogy $|b - a^{\alpha_n}| < \varepsilon$.

Az előbbi eljárás folytatásán az n-ik összehasonlítás után nyer-

pár, hogy: $a^{\alpha_n} < b < a^{\alpha_n + \frac{1}{10^n}}$ miből $b - a^{\alpha_n} < a^{\alpha_n}(a^{\frac{1}{10^n}} - 1)$ de $a^{\frac{1}{10^n}} = \sqrt[10^n]{a}$ és $\sqrt[10^n]{a} - 1 < \frac{a-1}{10^n}$ továbbá ha $\alpha_0 + 1 > \alpha_n$ behelyettesítést eszközölünk, akkor $b - a^{\alpha_n} < a^{\alpha_0+1}\frac{a-1}{10^n}$. Ha itt n-et úgy választjuk meg, hogy $a^{\alpha_0+1}\frac{a-1}{\varepsilon} < 10^n$ akkor $b - a^{\alpha_n} < \varepsilon$, ami azt mondja, hogy $\lim a^{\alpha_n} = b$. Tehát kimutattuk, hogy minden 1-nél nagyobb számnak van log-a: $\log_a b = \alpha$.

2.) $b = 1$, akkor $\log_a b = 0$, mert $a^0 = 1$, mivel minden mennyiség 0-ik hatványa 1.

3.) Ha $0 < b < 1$. Ebben az esetben $\frac{1}{b} > 1$, s ennek, mint láttuk a dolgon van log-a legyen ez α, akkor $a^\alpha = \frac{1}{b}$; $b = \frac{1}{a^\alpha} = a^{-\alpha}$ tehát $\log_a b = -\alpha$. Tehát 1-nél kisebb számnak log-a negatív.

4.) $b < 0$ nem lehet log-a, mert pozitív mennyiségnek negatív hatványa nincs, így nincsen oly mennyiség, hogy erre az „α"-t felemelve b-t kapjuk.

I. $a = 1$ nem lehet, mert 1-nek minden hatványa 1.

II. Ha $a < 1$ van log. az I. alatt látott 1, 2, 3, esetében, mert $\frac{1}{a} > 1$ és ha adva van b, van oly α, hogy $\left(\frac{1}{a}\right)^\alpha = b = \frac{1}{a^\alpha} = a^{-\alpha}$, $\log_a b = -\alpha$ amiből következik, hogy ha a log. bázisa < 1, akkor 1-nél nagyobb szám log-a negatív és 1-nél kisebb számé pozitív.

III. $a = 0$ ismét nem lehet.

A log. keresés egyes tövényei:

I. $a^{\log_a b} = b$

$a^{\log_a c} = c$

$a^{\log_a b + \log_a c} = bc$

miből $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$;

II. $a^{\log_a b} = b$

$a^{\log_a c} = c$

$a^{\log_a b - \log_a c} = \frac{b}{c}$

$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$;

III. $(a^{\log_a b})^\beta = b^\beta = a^{\beta \log_a b}$

$\log_a(b^\beta) = \beta \log_a b$

IV. $\sqrt[\beta]{a^{\log_a b}} = \sqrt[\beta]{b} = a^{\frac{\log_a b}{\beta}}$;

$\log_a \sqrt[\beta]{b} = \frac{\log_a b}{\beta}$.

Amint ezekből látható, a log az operációkat egyszerűsíti, mert szorzást összeadássá stb. változtatja.—

Úgy úgyan, hogy a log alapszáma tetszésszerinti lehet, de elég nekünk egy kiszemelt alapszámra ismernünk az összes természetes számok log-ait, már ennek segélyével kiszámíthatjuk bármely természetes számét, bármely alapszámra.

Legyen ismeretes b-nek „a" alapon vett log-a: $\log_a b$ s keressük „a"-nak $c > 0$ alapon vett log-át, azaz: $\log_c b$-t

$c^{\log_c b} = b$ ámde: $c = a^{\log_a c}$ így $a^{\log_a c \log_c b} = b = a^{\log_a b}$ $\log_c \log_c b = \log_a b$; $\log_c b = \frac{\log_a b}{\log_a c} = \log_a b . M$; $M = \frac{1}{\log_a c}$; M-et a c szorzószer „a" alapra vonatkozó modulusának nevezzük. Tehát, ha egy új szor-

szerben alapjuk számítási mely mennyiség log-ái; vesszük a régi rendszerbeli log-t és ezt szorozzuk az új rendszer modulusával.

A log. nagysági viszonyait a hatványozás törvényeinek ismeretével nagyon könnyen eldönthetjük. Legyen u.is $b>c$ és $a>1$, akkor $\log_a b > \log_a c$ mert $b=a^{\log_a b}$, $c=a^{\log_a c}$ így $a^{\log_a b} > a^{\log_a c}$, ha pedig $a<1$, akkor $\log_a b < \log_a c$, ami közvetlenül azon összefüggésből, melyet egész szám és tört számú hatványoznál találtat.

Bár minden pozitív számot választhatunk a log alapjául, mégis legegyszerűbb a 10-et választani, mert ekkor a hatvány, ill. a log egész részét egyszerre megmondhatjuk. Mert ha „b" k számjeggyel leírható szám $10^{k-1} \leqq b < 10^k$, vegyük mindkét oldal log-át: $k-1 \leqq \log_{10} b < k$, tehát a log egész része $k-1$ lehet, ha az a szám, melynek log-át keressük k számjeggyel írható le. Ha pedig $b<1$ és a tizedes pont után még $k-1$ nulla van, s csak aztán, vagyis a k-dik tagtól következik más számjegy:

$$\frac{1}{10^k} \leqq b < \frac{1}{10^{k-1}} \qquad 10^k\text{-val átszorozva}: \quad 1 \leqq b \cdot 10^k < 10$$

mindkét oldal log-át véve $0 \leqq \log_{10} b + k < 1$ tehát $\log_{10} b < 1-k$, hogy egyenlőség jöjjön létre, a jobb oldalt kisebbíteni kell, ez pedig csak úgy lehet, ha a pozitív mennyiségnek 1-nél kisebb értéket adunk. pl. $\beta<1$ lesz $\log_{10} b = \beta - k$; ahol k-t szintén nem kell keresni, mert előre megállapíthatjuk. Így tizedes törtnek log-a egy törtszám levonva belőle a tizedes pont után álló első 0-tól különböző számnak a rendszáma pl. $\log .0{,}0065 = \beta - 4$.

Végyük $\log \sqrt{bc} = \frac{1}{2}(\log b + \log c)$ tehát mértani közepes számnak log-ja számainak közepes számmal egyenlő. Ezt log keresésére használhatjuk fel. Keressük k számjeggyel leírható b-nek a log-át.

$10^{k-1} \leqq b < 10^k$ tehát $k-1 \leqq \log b < k$ szűkebb körre szorítás végett vesszük a két szélső határ mértani közepszámnegyedét s ez $\geqq b$ s a szerint vagy a nagyobb vagy a kisebb oldalra jövünk. (Ha egyenlőség jelt mellőzzük, akkor tovább számolni nem kell.)

$$10^{k-\frac{1}{2}} \geqq b < \sqrt{10^{2k-1}} \;;\; k-1 < \log b < \frac{2k-1}{2}$$

$$10^{k-1} < b < \sqrt{10^{k-1}\sqrt{10^{2k-1}}} \;;\; k-1 < \log b < \frac{4k-3}{4}$$

$$10^{k-1} < b < \sqrt{10^{k-1}\sqrt{10^{k-1}\sqrt{10^{2k-1}}}} \;;\; k-1 < \log b < \frac{8k-7}{8} \text{ stb.}$$

Így log b-t tetszésszerinti pontossággal számíthatjuk ki. Ezenkívül log.

keresésre egyszerűbb formulát nyerünk majd a függvénytanban.
Thy Páradsvágos után számították Brigg és Vlacq mathematikusok
a 10es alapú rendszerben a számok log-át.

Limes alkalmazása végtelen sorokra.

A lim. fogalmának segítségével eldönthetjük a végtelen sorok convergentiáját vagy divergentiáját is. Legyen egy végtelen sor (+ vagy − tagokból álló) $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots a_n + \ldots$ Jelöljük

$a_0 = s_0$
$a_0 + a_1 = s_1$
$a_0 + a_1 + a_2 = s_2$
$\ldots\ldots\ldots\ldots$
$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots a_n = s_n$
$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Thy jelöléssel nyertük az $s_0, s_1, s_2, \ldots s_n$ sorozatot.
Ha ezen sorozatnak van limesze, (lim $s_n = s$)
akkor azt mondjuk, hogy a sor convergens és értéke egyenlő a sorozat limeszével.
Ha az s_n sorozatnak nincs limesze, akkor az a_n sor divergens.

A convergentia és divergentia ezen új kritériuma nem ellenkezik a régivel, mert ha az s_n sorozatnak van limesze, és minden tagja positiv, vagy minden tagja negativ, akkor a sorozat monoton, tehát végképen a sorozat bármely tagja, pl. $|s_{n+k}|$ alatta marad egy kiszámítható N számnak, de

$|s_{n+k}| = |a_0 + a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_{n+k}|$ Ha $|s_{n+k}|$ egy N számnak, akkor világos, hogy az a_n sor convergens. Lássunk ezen esetben egy példát. Az $1 + a + a^2 + \ldots + a^n + a \ldots\ldots$ végtelen geometriai sor összege, mint tudjuk $\frac{1}{1-a}$ volt. Jelen esetben

$s_n = 1 + a + a^2 + \ldots\ldots + a^n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$. Az újabb definitiónk szerint $\lim s_n = s$ lesz a geometriai sor összege. $\lim \frac{1-a^{n+1}}{1-a} = \frac{\lim 1-a^{n+1}}{\lim 1-a} = \frac{1-\lim a^{n+1}}{1-a}$,
Ha $a < 1$, akkor $\lim a^{n+1} = 0$, tehát $\lim \frac{1-a^{n+1}}{1-a} = \frac{1}{1-a}$, mely eredmény tehát egyezik a régi összeggel. Ha $a = 1$, akkor a sor $+1+1+1+1+\ldots+1+\ldots$ divergens, minthogy az s_n sorozat: 1, 2, 3, ... nem bír limesszel.
Ha $a = -1$, akkor a sor $1-1+1-1+\ldots$ szintén divergens, mert a sorozat $1, 0, 1, 0, \ldots\ldots$ is nem bír limesszel. Ha végre $a > 1$, akkor is divergens a sor.

Kimondjuk, hogyha az s_n sorozat limeszének létezésére szükséges $|s_{n+k} - s_{n+k}| < \varepsilon$ feltétel teljesül, akkor az a_n sor convergens.

Ugyanis $|s_{n+k} - s_{n+h}| = |a_{n+h+1} + a_{n+h+2} + \ldots + a_{n+k}| < \varepsilon$ s bár a feltétel ígyen elegendő az a_n sor convergentiájára nézve. Itt az a_n sor convergentiájára úgyan szükséges feltétel, hogy $|a_{n+h+1}| < \varepsilon$ legyen, de ez még nem elégséges, mert a harmonikus sornál is $\lim \frac{1}{n} = 0$ de azért, mint tudjuk is sor mégsem convergens.

Ha ennek sorban a tagok abszolut értékben nézve fogyók, a tagok limese 0 és a tagok váltózók, akkor ezen sor convergens. Legyen ez a sor $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots\ldots (-1)^n a_n \ldots\ldots$ $\lim a_n = 0$ és $a_0 > a_1 > a_2 > a_3 > \ldots\ldots > a_n$. Azt kell megvizsgálnunk, hogy teljesül-e itt is ez $|s_{n+k} - s_{n+h}| < \varepsilon$ s szükséges és elégséges feltétel. Ha teljesül, akkor a sor nyilvánvalóan convergens. Jelen esetben $|s_{n+k} - s_{n+h}| = |(a_{n+h+1} - a_{n+h+2}) + (a_{n+h+3} - a_{n+h+4}) + (a \ldots\ldots|$ Minthogy a sorozat fogyó, azért itt minden zárójeles kifejezés positiv, tehát ezen abszolut jel (||) el is hagyható. Ekkor $|s_{n+k} - s_{n+h}| = (a_{n+h+1} - a_{n+h+2}) + (a_{n+h+3} - a_{n+h+4}) + \ldots\ldots$ De ez az összeg minden esetre positiv. Másként csoportosítva a tagokat $|s_{n+k} - s_{n+h}| = a_{n+h+1} - (a_{n+h+2} - a_{n+h+3}) - (a_{n+h+4} - a_{n+h+5}) - \ldots\ldots$ Itt is minden zárójelben positiv számu van, melyek összegét le kell vonnunk a_{n+h+1}-ből, de az eredmény az előbbi csoportosítás szerint positiv kell legyen, tehát a_{n+h+1} pedig egyenlő nullal, ennélfogva világos, hogy $|s_{n+k} - s_{n+h}| < \varepsilon$, tehát a sor tényleg convergens. Pl.: $|-\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \ldots\ldots$ sornál a tagok fogyók, váltózó előjelüek, és $\lim \frac{1}{n} = 0$, tehát a sor convergens.

Végtelen sorok associativ és commutativ tulajdonsága.

Legyen egy convergens végtelen sor: $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots + a_n + \ldots\ldots$ Jelöljük a szokásos módon $a_0 = s_0$; $a_0 + a_1 = s_1$ stb. és alakítsuk a tagjait ujabban az $A_0 + A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$ sort. Kimutatjuk, hogy ez a sor is convergens és összege egyenlő az eredeti sor összegével: ezzel aztán azt mutatjuk ki, hogy a végtelen convergens sorokra nézve az asso-

$$\left.\begin{aligned} a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_{n_0} &= A_0 \\ a_{n_0+1} + a_{n_0+2} + \ldots\ldots + a_{n_1} &= A_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{n_{n-1}+1} + a_{n_{n-1}+2} + \ldots\ldots + a_{n_n} &= A_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \end{aligned}\right\}$$

csatív tulajdonság fönnáll. Jelöljük

$t_0 = s_{m_0} = \sigma_0$
$t_0 + t_1 = s_{m_1} = \sigma_1$
.....

} Minthogy az eredeti sor convergens, azért $\lim s_m = s$, vagyis $|s - s_{m+k}| < \varepsilon$ Ha most a

$\sigma_0, \sigma_1, \ldots \sigma_k \ldots$ sorozatban r-t úgy választjuk meg, hogy $m_r > n$ legyen, azért abban $|s - \sigma_{m+k}| < \varepsilon$, amiből azt mondja ki, hogy a σ sorozatnak is ugyan limesze, s ez éppen az s_n sorozat limesze: s. Innen áll az következik, hogy t_n az általános convergens és értéke egyenlő az a_n sor értékével, vagyis az asszociatív tulajdonsága végtelen sorokra is áll. Így módosul az általa sorokban gyakorlatunk; pl az $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \ldots$ sorban $2-3$ tagot összevonva az $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \ldots$ convergens sort kapjuk, melynek értéke az előbbi sor értékével egyenlő.

Hogy az végtelen sorokra a kommutatív tulajdonsága is meg van, azt a következőkép ellenőrizhetjük egyenlőtlenségi mutatók által.

I. Tegyük föl, hogy az $a_0, a_1, \ldots a_n \ldots$ sorozat pozitív és növő. Legyen $\lim s_n = s$. Tavozzuk most innen az a-k sorozatát a sorban tetszésszerint, s az így nyert sort jelöljük $b_0 + b_1 + b_2 + \ldots + b_m + \ldots$ Kimutatjuk, hogy ez is az is convergens és értéke egyenlő az a-k sorának értékével. Ha az is $b_0 = \sigma_0$; $b_0 + b_1 = \sigma_1$; stb. jelöljük, akkor a $\sigma_0\ \sigma_1\ \sigma_2 \ldots$ sorozatban, melyből σ_m-et úgy választjuk, hogy σ_m-ben az a-k minden a_m-ig bezárólag legyen. Ekkor tehát $\sigma_m = s_m + \eta'$; ahol η' abszolút értékben kisebb ε-nál, mert az a_n sorából az n-dik tagon túliakat szerepeltetvén η'-ben σ szerint $|s - \sigma_m| \leqq |s - s_m| + |\eta'|$ de $|s - s_m| < \varepsilon$ mert az s sorozat maga limesze volta és $|\eta'| < \varepsilon$ tehát $|s - \sigma_m| < 2\varepsilon$, amiből azt mondja ki, hogy σ_m sorozat limesze szintén s, vagyis a sorrend felforgatásával az a-k sora értékét nem változtatta.

II. Ha a végtelen sorban pozitív és negatív tagok is fordulnak elő, de ezek közül csak egynek fölös tagok végtelen számmal, akkor kiválasztjuk az összes fölös tagokat. Legyenek pl. az $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ sor pozitív fölös tagok $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ a negatív fölös tagok pedig $b_0 + b_1 + b_2 + \ldots + b_m + \ldots$ Minthogy az eredeti sor convergens volt, következtetem innen $\lim a_n = 0$ és $\lim b_n = 0$. Most még a sorok fölöslegtagjait mutatom meg.

1.) Legyen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$ és $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = B$, vagyis a külön választott sorok bizonyosan egyenként véges értékkel (a sorok konvergensek). Ha bármiként is keverjük a sorok tagjait, az összeg $A-B$ lesz. Jelöljük w_n is a keverd sort $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots u_n \ldots$ sorral, az a-k sorából a megfelelő tagok összegeinek sorozatát $s_0, s_1, \ldots s_n$ -nel a b-k sorából pedig a tagok összegét $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2 \ldots \sigma_n \ldots$ -nel, akkor n-et mindig meg lehet úgy választani, hogy $s_n = A - \eta$ legyen és a b-k sorában $\sigma_n = B + \eta'$ legyen, ahol η és η' kisebbek egy megadható ε_1-nél. Ha az összekevert sorban az egyes tagok összegeinek sorozatát $S_1, S_2 \ldots S_n \ldots$ -nel jelöljük, akkor ezen sorozatban el tudunk jutni oly S_r tagig, melyben minden a és minden b az n-dik tagig benne van, de η'' nem lehet nagyobb η-nál és η''' pedig η'-nél, továbbá $s_n = A - \eta$, $\sigma_n = B + \eta'$ tehát

$$S_r = A - B + \eta_1 - \eta_2 \qquad \eta_1 < \eta \quad \eta_2 < \eta' \text{ és } \eta_1 - \eta_2 < \varepsilon$$

$|S_n - (A-B)| < \varepsilon$ vagyis $\underline{\lim S_n = A - B}$

2.) Ha $\sum a_n = \infty$, $\sum b_n = B$ és a keverd sor $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$ akkor $S_r = s_n + b - B'$ hol $B' < B$ de $s_n > N + B$ lehet tehát $S_r > N$ ahol N tetszőleges nagy szám: vagyis a két sor keverésével a keverd sor divergens lesz.

3.) Ha $\sum a_n = A$, $\sum b_n = \infty$, akkor ejnor úgy, mint az előbb a keverd sor divergens: $\lim S_r = \infty$, mert ha a b sorból elég sok tagot összeadunk, bármely nagy számon felül emelkedhetünk még akkor is, ha az állandó A-t hozzávesszük.

4.) Ha $\sum a_n = \infty$, $\sum b_n = \infty$, akkor mindig lehet a tagokat úgy sorolni, hogy az összeg egy előírt, pl. c-nál legyen, n_1 számúnál összegezzük a $\pm$ sorozatban a b-k sorából annyit, hogy c-n ejnor felülemelkedjünk, pl. $a_1 + a_2 + \ldots + a_{n_1} > c$, aztán a b-k sorából annyit, hogy ezek összege c-n alul szálljon. Ekkor lesz

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n_1} > c - b_1 - b_2 - b_3 - \ldots - b_{n_2} < c$$

ezt az eljárást folytatva a végtelenségig

$$a_{n_1+1} + a_{n_1+2} + \ldots + a_{n_3} > c - b_{n_2+1} - b_{n_2+2} - \ldots - b_{n_4} < c$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Jelöljük $a_1 = s_1$, $a_1 + a_2 = s_2$, $\ldots$; $a_1 + a_2 + \ldots + a_{n_1} = s_{n_1}$ stb. akkor

$$s_1 < s_2 < s_3 < \ldots < s_{n_1} < c + a_{n_1}$$

Továbbá

$$s_{n_1} > s_{n_1+1} > s_{n_1+2} > \ldots > s_{n_1+n_2} > c - b_{n_2}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Minthogy azonban $\lim a_n = 0$ és $\lim b_n = 0$, azért ezt a sorozatot folytatva eljutunk oly s_n-hez, amelynél $s_n < C + a_n$ és $s_n > C - b_m$, vagyis s_n tag értéke éjjel $C-\varepsilon$ és $C+\varepsilon$ közé kerül, de ez azt mondja, hogy a határértéke az előre megadott C

Az ilyfajtá sorról ezt a tulajdonságot Dirichlet vette először észre, de a tételt, mely szerint a két sor tagjait úgy lehet keverni, hogy a keverő sor értéke egy előre megadható szám, ily élesen először Riemann mondta ki:

Ha vmely sornál a sor értéke a tagok sorrendjétől függetlenül, akkor a sort feltételenül convergensnek mondjuk. Ellenkező esetben a sor feltételesen convergens.

Az utóbbi fajtájú sorok keverésénél divergens sort is kaphatunk. Vegyünk annyi a-t, hogy ezek összege w_1 legyen, aztán annyi b-t, hogy az összeg $\frac{w_1}{2}$ legyen. Ezután ismét annyi a-t, hogy az összeg w_2 legyen stb. Így, ha az a-k hozzáadásával az összegek $w_1, w_2 \ldots\ldots w_n \ldots$ sorozatot fújja be, akkor a b-k hozzáadásával meg az $\frac{w_1}{2}, \frac{w_2}{2}, \frac{w_3}{2} \ldots\ldots \frac{w_n}{2} \ldots\ldots$ sorozatot. Minthogy az w sor limesze végtelen lehet, azért elég messze menve a sorban, az összeg bármely nagy számon túlülemelkedhetik, tehát a sor divergens lesz.

Lehet a kevert sor olyan is, hogy összege minden két határ közt ingadozik, ezért a feltételesen convergens sorok tagjainak sorrendjét felcserélni nem szabad.

A feltétlen és feltételes convergentiának a biztos kritériumait a következőkben foglalhatjuk össze:

1.) Egy sor feltétlenül convergens, ha úgy a +, mint a - tagok sora külön-külön convergens.

2.) Feltételesen convergens a sor, ha + és - tagok sora külön-külön divergens.

A sor mélyenszéjének felismerése könnyebb a köv. alapon: Ha a sor tagjainak abszolút értékéből alkotott sort vesszük

$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \ldots\ldots + |u_n| + \ldots\ldots$ s ez a sor convergens, akkor ebben a tagok sorrendjét szabad változtatni, tehát az eredeti sor $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots + u_n + \ldots$ feltétlenül convergens. - Ha pedig az

abszolut értékéből alkotott sor divergens, akkor az eredeti sor (ha convergens volt) csak feltételesen convergens.

A tárgyalt esetekre vegyünk néhány példát. Legyen két divergens sor tagjai: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \frac{1}{n} \dots$ $\lim \frac{1}{n} = 0$ és $-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3} \dots - \frac{1}{n} \dots$

A fenti sor legyen $1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \dots - \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \dots -$

A tagok összeadásával nyert sorozat:

$1, 0, \frac{1}{2}, 0 \frac{1}{3}, 0 \dots \frac{1}{n}, 0$ de $\lim \frac{1}{n} = 0$ A fenti sor tehát convergens és értéke 0. Ez a példa megfelel a 4.) esetnek.

Ha a két sort úgy szorozzuk, hogy minden két + s egy- tagot veszünk, akkor az $1 + \frac{1}{3} - 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{n} + \dots$ sor is convergens, de az értéke más, mint az előbbi soré, mert 3-3 tagot summázva az $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \dots + \frac{1}{2n(2n-1)} + \dots$ sort kapjuk, melyről már tudjuk, hogy convergens.

Algebrai operatiok feltételesen conv. sorokkal.

Legyen adva két legalább is feltételesen convergens sor:

$a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = A$ és $b_0 + b_1 + b_2 + \dots b_n + \dots = B$.

A megfelelő tagok összegéből nyert 2 sorozat legyen

$s_0, s_1, s_2, \dots s_n \dots$ és $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \dots \sigma_n \dots$

Kimutatjuk, hogy a két sor összege convergens, s az összeg $A + B$

Az összegését a köv. képen végezzük:

$a_0 + a_1 + \dots + a_{n_0} + b_0 + b_1 + \dots + b_{n_0} + a_{n_0+1} + \dots + a_{n_1} + b_{n_1+1} + \dots b_{n_2} + \dots$

Ha a summázást addig folytatjuk, míg az a-kból a_n-ig a b-kből b_n-ig minden tag előjön az összegben, akkor az új sor egyes összege $S_k = A + \eta_1 + B + \eta_2$ ahol $|\eta_1| < \frac{\varepsilon}{2}$ és $|\eta_2| < \frac{\varepsilon}{2}$ Ekkor tehát $|S_k - (A+B)| \leqq |\eta_1| + |\eta_2| < \varepsilon$ vagyis a nyert sor limese $\lim S_k = A + B$. Tehát két legalább is feltételesen convergens sor összegezését tetszés szerint lehet végezni, legegyszerűbben azonban, ha az egy indexű tagokat vesszük össze egy taggá. Tehát: $A + B = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) + \dots + (a_n + b_n) + \dots$

A kivonás az összeadás alapján történik. t. i. a kivonandó jelét ellenkezőre változtatjuk, miáltal a sor értéke ellentettjébe megy át, s ezután a két sort összegezzük. A B sor a -1-gyel való szorzás

utáni is megmarad a convergens sornak, ha előbb convergens volt.

Ha két convergens sor közül legalább az egyik feltétlenül convergens, akkor a két sor összeszorzását az ismert módon végezhetjük:

$$A.B = C = c_0 + c_1 + c_2 + \ldots + c_n + \ldots$$

hol

$$c_0 = a_0 b_0,\quad c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0,\ \ldots$$
$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_{n-1} + a_n b_0$$

Ez a tétel az u. n. Cauchy-Mertens féle tétel. Cauchy e szorzási tételt csak feltétlen convergens sorokra mondta ki, míg Mertens arra az esetre is, ha csak az egyik sor feltétlenül conv.

A tétel bizonyítása a köv.: Kimutatjuk, hogy $|A_n B_n - C_n| < \varepsilon$ vagyis $\lim (A_n B_n - C_n) = 0$ akkor $\lim A_n B_n = \lim C_n$, de $\lim A_n B_n = A.B$ és $\lim C_n = C$ tehát $A B = C$ lesz.

De $|A_n B_n - C_n| < \varepsilon$ kimutatása köv. képen történik:

$$A_n B_n = a_0 b_0 + a_0 b_1 + a_0 b_2 + \ldots + a_0 b_n$$
$$+ a_1 b_0 + a_1 b_1 + a_1 b_2 + \ldots + a_1 b_n$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ a_{n-1} b_0 + a_{n-1} b_1 + a_{n-1} b_2 + \ldots + a_{n-1} b_n$$
$$+ a_n b_0 + a_n b_1 + a_n b_2 + \ldots + a_n b_n$$

A megh. állítás bal oldala oszlop tagok összege C_n-et adja, tehát az állítás jobboldala oszlop tagok összege $A_n B_n - C_n$. Erről kell kimutatnunk, hogy bármely kis ε-nál kisebbé tehető. Ezen tagok összevonva:

$$A_n B_n - C_n = a_1 b_n + a_2 (b_{n-1} + b_n) + a_3 (b_{n-2} + b_{n-1} + b_n) + \ldots + a_k (b_{n-k+1} + b_{n-k+2} + \ldots + b_n) +$$
$$+ a_{n-k} (b_{n-k} + b_{n-k+1} + \ldots + b_n) + \ldots + a_{n-1} (b_2 + b_3 + \ldots + b_n) + a_n (b_1 + b_2 + \ldots + b_n)$$

Tegyük föl, hogy a fel sor közül az A sor a feltétlenül convergens, akkor, mint tudjuk $|a_0| + |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots$ sor is conv.

Ab solut értékre térve:

$$|A_n B_n - C_n| \leqq |a_1||b_n| + |a_2||b_{n-1} + b_n| + |a_3||b_{n-2} + b_{n-1} + b_n| + \ldots + |a_k||b_{n-k+1} + \ldots + b_n|$$
$$+ |a_{n-k}||b_{n-k} + b_{n-k+1} + b_n| + \ldots + |a_n||b_1 + b_2 + \ldots + b_n|$$

Csupán a jobb oldalt az $|a_{n-k}|$-gyel szorzott tagnál két részre, felbontjuk az első részt S_1, a másodikat S_2-vel: $|A_n B_n - C_n| \leqq S_1 + S_2$

S_2-ben a b-k összege véges, mert conv. sorból vannak kiragadva. (b sor feltételesen conv.) Legyen ezen összegek közül a legnagyobb β, akkor

$S_2 < \beta (|a_{k+1}| + |a_{k+2}| + \ldots + |a_n|)$ de az $\ddot{a}$-t sora feltét-
lenül konv., tehát az abszolut értékek sora is konv., ennélfogva meg-
lehet a k számot úgy határozni, hogy az itt szereplő összeg egy η_2
kis számnál alul maradjon $S_2 < \beta \eta_2$. - Ha pedig az S_1 részösszeg n-et
úgy választjuk meg, hogy a b-t összege egy adott kis számnál η_1-nél
alul maradjon, (ezt ez lehet tenni, mert a b-t sora feltételesen konv.),
akkor $S_1 < \eta_1 (|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|)$
és pozitiv kifejezés véges, tehát van oly α szám, melyen felül
az összeg nem emelkedhetik, vagyis $S_1 < \alpha \eta_1$. Ha most
$\eta_1 < \frac{\varepsilon}{2\alpha}$ és $\eta_2 < \frac{\varepsilon}{2\beta}$ akkor sejtjük hogy
$S_1 + S_2 < \varepsilon$, de $|t_n B_n - b_n| \leqq S_1 + S_2 < \varepsilon$ igy a tételt bebizonyítottuk.

Abel tétele.

Abel szerint: "Ha ket feltételesen konv. sor összeszorzásánál
konv. sort kapunk, akkor ezen sor éppen a ket feltételesen konv. sor
szorzatával egyenlő."

A tétel kimondása előtt néhány segédtételt vegyünk be, melyek
szintén Abeltől eredtek.

I. Segédtétel: Ha $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n \ldots$ egy + tagokból álló sorozat és
$b_1, b_2, b_3 \ldots b_n \ldots$ + vagy - tagokból álló sorozat, akkor az

$$\frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} = k$$

vagyis a legkisebb b-nél nagyobb, s a legnagyobb b-nél kisebb.

Bizonyítás: Az előbbi egyenlet így is írható:

$$a_1 (b_1 - k) + a_2 (b_2 - k) + \ldots + a_n (b_n - k) = 0$$

így lehet 0-al egyenlő, ha vegyesen + és - tagok is fordulnak elő,
de az a-t mind pozitivok, tehát kell, hogy a $b_r - k$ különbségek b-
gyenek hol pozitivok, hol negativok. De szerint k-nál nagyobb b-t
és kisebb b-ket is előfordulnak a b-t sorában, ami éppen azt mondja
ki, hogy k a b-kre nézve középszám.

II. Segédtétel: Ha az a-t sora + és jegyű, míg a b-t sora +, vagy - tagokból
álló s $b_1 = s_1$; $b_1 + b_2 = s_2$; $b_1 + b_2 + b_3 = s_3$ stb. jelölve, akkor

$$S = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n = a_1 s_1 + a_2 (s_2 - s_1) + \ldots + a_n (s_n - s_{n-1}) + \ldots$$

A sorozást végrehajtva és az s-ek szerint rendezve

$$S = s_1(a_1 - a_2) + s_2(a_2 - a_3) + \ldots\ldots + s_{n-1}(a_{n-1} - a_n) + s_n a_n + \ldots\ldots$$

Alkalmazva az I. segédtételt s az s-ek közepszámait σ-val jelölve

$S_1 = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots\ldots + a_n b_n + \ldots = \sigma a_1$ adja a II segédtételt.

Legyen most a $b_0 + b_1 + b_2 + \ldots\ldots b_n + \ldots$ sor conv. tehát

$|b_{n+1} + b_{n+2} + \ldots\ldots + b_{n+k}| < \varepsilon_1$ s legyen az $a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots a_n \ldots$ sorozat

+ tagokból álló fogyó számsorozat, akkor az $a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n + \ldots$ sok is conv. U. is az n-dik tagon túli tagok összege a I. segédtétel szerint

$a_{n+1} b_{n+1} + a_{n+2} b_{n+2} + \ldots\ldots + a_{n+k} b_{n+k} = \sigma a_{n+1}$ hol σ a

$(b_{n+1}), (b_{n+1} + b_{n+2}), (b_{n+1} + b_{n+2} + b_{n+3}), \ldots\ldots$ számok közepszáma. Minthogy azonban a b-k sora conv., azért ezen számok mindenike alul marad egy megadható kis ε-on, tehát

$|a_{n+1} b_{n+1} + a_{n+2} b_{n+2} + \ldots\ldots + a_{n+k} b_{n+k}| \leq a_{n+1} |\sigma| < a_{n+1} \varepsilon_1$

Itt az a_{n+1} szám véges, tehát az $|a_{n+1} b_{n+1} + a_{n+2} b_{n+2} + \ldots + a_{n+k} b_{n+k}| < \varepsilon$ lehet, vagyis a szorzat sor tényleg conv. Ezzerint tehát, ha conv. sor tagjait egy másik conv. sor tagjaival szorozzuk össze, akkor az így nyert sor is conv.

Legyen most az $\underline{b}$ sora kívánatt feltételeknek megfelelő sor $t^0, t^1, t^2, t^3 \ldots t^n \ldots$ hol $0 < t < 1$, akkor az előbbiek szerint $b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \ldots\ldots + b_n t^n + \ldots$ sor is conv. még pedig, amint most kimutatjuk, feltétlenül conv., mert az abszolút értékéből alkotott sor $|b_0| + |b_1| t + |b_2| t^2 + \ldots + |b_n| t^n + \ldots$ is conv. U. is, mivel a b-k sora conv., találunk oly β számot, melyen felül a b-k nem emelkednek, tegyük ezt a b-k helyébe, akkor

$$|b_0| + |b_1| t^1 + |b_2| t^2 + \ldots + |b_n| t^n \ldots < \beta (1 + t + t^2 + t^3 + \ldots).$$

A zárójeles rész pedig geometriai sor, így a bal oldal $< \frac{\beta}{1-t}$, ami csakugyan azt mondja, hogy kérdéses sorunk feltétlenül conv. Ezen sorozat még egy nevezetes tulajdonsága az, hogy ha a b-k sorában a n-dik tagon túli tagok összege $< \varepsilon$, akkor ebben a sorban is az n dik tagon túli tagok összege szintén $< \varepsilon$. A I. segédtétel szerint ugyanis

$$b_{n+1} t^{n+1} + b_{n+2} t^{n+2} + \ldots\ldots + b_{n+k} t^{n+k} = t^{n+1} \sigma$$

de a b-k sora conv., tehát $\sigma < \varepsilon$ és $t < 1$ tehát $t^{n+1} \varepsilon < \varepsilon$. Így tényleg

$$b_{n+1} t^{n+1} + b_{n+2} t^{n+2} + \ldots\ldots + b_{n+k} t^{n+k} < \varepsilon$$

II. Segédtétel: Ha $b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \ldots + b_n t^n + \ldots = f(t)$ feltétlenül conv. sorban t-nek adjunk egymásután 1-hez közelgő értéket, vagyis t helyett

tegyük rendre a kör. sorozatot: $t_1, t_2, t_3, \ldots\ldots t_n, \ldots\ldots$ $\lim t_n = 1$
Bebizonyítjuk, hogy az így megalkotott sor a $b_0 + b_1 + b_2 + \ldots\ldots + b_n + \ldots = B$
sorhoz közeledik, noha ez a sor csak feltételesen conv., míg $f(z)$ feltétlenül
conv. Erre nézve bebizonyítjuk, hogy $\lim f(z_n) = B$ vagyis
$|f(z) - B| < \varepsilon$ ha $|1 - z| < \eta$. Kapunk minden ε pozitív számhoz két részre
$B = B_n + R_n$ és $f(z) = f_n(z) - g_n(z)$ úgy, hogy $|R_n| < \frac{\varepsilon}{3}$ és $|g_n(z)| < \frac{\varepsilon}{3}$
legyen. Ekkor $B - f(z) = B_n + R_n - f_n(z) - g_n(z)$. Abszolút értékre térve
$|B - f(z)| \leq |B_n - f_n(z)| + |R_n| + |g_n(z)|$ vagy $|B - f(z)| < |B_n - f_n(z)| + \frac{2\varepsilon}{3}$
De $B_n - f_n(z) = b_1(1-z) + b_2(1-z^2) + \ldots + b_n(1-z^n)$
minthogy általában $1 - z^k = (1-z)(1 + z + z^2 + \ldots + z^{n-1})$ azért
$B_n - f_n(z) = (1-z)[b_1 + b_2(1+z) + \ldots + b_n(1 + z + z^2 + \ldots + z^{n-1})]$
a [ ] zárójeles kifejezés véges, tehát egy megadható M számon felül
nem emelkedik s így $|B_n - f_n(z)| < M(1-z)$ Ha z elég közel van az
egységhez, vagyis $1 - z < \frac{\varepsilon}{3M}$ vagy $z > 1 - \frac{\varepsilon}{3M}$ akkor $|B_n - f_n(z)| < \frac{\varepsilon}{3}$
s így $|B - f(z)| < \varepsilon$ vagyis $\lim f(z_n) = B$
Ezek után bebizonyítjuk Ábel tételét: legyen két feltételesen conv. sor

$$\left.\begin{aligned} A &= a_0 + a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n + \ldots \\ B &= b_0 + b_1 + b_2 + \ldots\ldots + b_n + \ldots \end{aligned}\right\}$$ szorozzuk e kettőt ömre az ismert módon:

$a_0 b_0 = c_0$, $a_0 b_1 + a_1 b_0 = c_1$, $a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 = c_2$, $\ldots\ldots a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots\ldots$
$\ldots a_{n-1} b_1 + a_n b_0 = c_n$ jelölésnél $C = c_0 + c_1 + c_2 + \ldots\ldots + c_n + \ldots$ sort kapjuk,
amely sorról, feltéve, hogy conv., bebizonyítjuk, hogy értéke $C = AB$.
Alkossuk meg a kör. sorokat:

$$A(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots\ldots + a_n z^n + \ldots$$
$$B(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + \ldots\ldots + b_n z^n + \ldots$$
$$C(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \ldots\ldots + c_n z^n + \ldots$$

A II. segédtétel szerint: $\lim A(z) = A$, $\lim B(z) = B$ és $\lim C(z) = C$
tehát $\lim (A(z) \cdot B(z) - C(z)) = AB - C$ Az $A(z)$ és $B(z)$ sor a I. az se-
gédtétel szerint feltétlenül conv., tehát a Cauchy-Mertens féle té-
tel szerint szabad őket összeszorozni s szorzatul éppen a $C(z)$-t kapjuk,
úgy, hogy $A(z)\, B(z) = C(z)$ vagy $A(z) \cdot B(z) - C(z) = 0$
Ez az egyenlet azonban áll a limeszekre is, tehát $\lim (A(z) \cdot B(z) - C(z)) = 0$
Ez azonban, mint látjuk, a III. S. tétel szerint $AB - C$-vel volt egyenlő úgy,
hogy $AB - C = 0$, vagyis $AB = C$, ami bizonyítandó volt.

Megjegyzendő, hogy az Abel tétele csak arra az esetre szól, ha az alaptételt b
bir azon. Nem alkalmazhatjuk ezt a tételt pl. a tör. 2 sornál:

$$A = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots - (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} \ldots$$

$$B = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$$ Mindkét sor feltételesen conv.

Alakítsuk a B sort, arról kimutatjuk, hogy ez divergens. Ez általánosítása a C
sornak u. is: $|C_n| = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{n-2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}$ vagy

$$|C_n| = \frac{1}{\sqrt{1 \cdot n}} + \frac{1}{\sqrt{2(n-1)}} + \frac{1}{\sqrt{3(n-2)}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{k(n-k+1)}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n \cdot 1}}$$

Általában két szám számtani közepe mindég nagyobb, m. azon két szám mértani közepénél, mert

$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$ vagy $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + ab$, így

$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 > ab$ vagy $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$ Ennek alapján

$$|C_n| > \frac{1}{\frac{n+1}{2}} + \frac{1}{\frac{n+1}{2}} + \ldots + \frac{1}{\frac{n+1}{2}} = \frac{2n}{n+1} = \frac{n+n}{n+1} > 1 \text{ vagyis}$$

a C sor általános tagjának limesze nem zéró, tehát a C sor nem lehet conv.

Convergentia kritériumok.

Különösen a + tagú sorokkal fogunk bővebben foglalkozni s ennek-
lesse a sorokra az eddigi convergentia kritériumok a praxisban nehezen
alkalmazhatók, azért az alábbiakban új convergentia kritériumokat
fogunk felállítani.

Legyen az $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ sorozatnál az n-dik tagon túli bár-
mely 2 tag hányadosa kisebb, mint ϱ, hol $\varrho < 1$, akkor a sorozatnak kivé-
tel nélkül limesze, amely egyenlő nullal. M. is, ha $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \varrho < 1$, akkor:

$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \varrho$

$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} < \varrho$

$\ldots\ldots\ldots$

$\frac{a_{n+k}}{a_{n+k-1}} < \varrho$

sporoppur épen tagokat összeszorzunk, akkor $\frac{a_{n+k}}{a_n} < \varrho^k$ vagyis
$a_{n+k} < a_n \varrho^k$. De $\varrho < 1$ vagyis ϱ^k a nulla felé közeledik
a_n pedig véges szám, tehát $a_{n+k} < \varepsilon$ vagyis $\lim a_{n+k} = 0$
ami a sor convergentiájának egy, más ismert kritériuma.

Bebizonyítjuk, hogy ha $\sum_0^\infty a_n$ sor conv. akkor is, ha az előbbi feltétel nem a k-ad tag hányadosára, hanem a sorozat
hányadosa limeszére nézve áll, ha tehát $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, akkor is a sorozat
conv. Legyen m. is $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$, ekkor ae esetben, mint tudjuk
lehető, hogy $l - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < l + \varepsilon$, de ha $l < 1$, akkor ε megvá-

lehet úgy, hogy $\lambda + \varepsilon < 1$ legyen s így $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$. Ez pedig maga az e. 66 tárgyalt eset, mikor is a sorozat limesze nulla.

Legyen a sorozatnál $\frac{a_{n+1}}{a_n} > \varrho > 1$, akkor a sorozat lim-e ∞, mert

$\frac{a_{n+1}}{a_n} > \varrho$
$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} > \varrho$
.....
$\frac{a_{n+k}}{a_{n+k-1}} > \varrho$

Ezeket összeszorozva, nyerjük, hogy $\frac{a_{n+k}}{a_n} > \varrho^k$ vagy $a_{n+k} > \varrho^k a_n$
Itt $\lim \varrho^k = \infty$ és a_n véges mennyiség, tehát,
$\lim a_{n+k} = \infty$; ami bizonyítandó volt.
Ha pedig $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda > 1$, akkor mindég megtudom az hányadost úgy választani, hogy $\lambda - \varepsilon > 1$ legyen úgy $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, miáltal ez az eset szintén az előbbi esetbe van visz-
szavezetve.

Összefoglalva: Egy sorozat conv. és értéke 0, ha $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \varrho < 1$ vagy $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, a sorozat divergens, ha $\frac{a_{n+1}}{a_n} > \varrho > 1$ vagy $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$.

Ezen tétel alkalmazása: Vizsgáljuk, hogy milyen természetű az $\frac{a^n}{n^k}$ általános tagú sorozat, ha $a > 1$. Állítsuk az $n+1$ és n-dik tag hányadosát:

$$\frac{a^{n+1}}{(n+1)^k} : \frac{a^n}{n^k} = \frac{a}{(1+\frac{1}{n})^k}$$

Itt látjuk, hogy ha n végtelenül növekedik, akkor a tört alsó az egy felé tart (mert $\lim \frac{1}{n} = 0$), így a hányados értéke a. Minthogy pedig $a > 1$, azért a sorozat limesze végtelen; vagyis a sorozat divergens. $\lim_n \frac{a^n}{n^k} = \infty$. Ezen utolsó egyenlet szerint az Exponentiális mennyiség (a^n) sokkal jobban növő, mint a hatványmennyiség (n^k)

I. Hasonló tételeket vezetünk le a pozitiv tagú sorokra is. Legyen a sor $a_0 + a_1 + a_2 \ldots + a_n$. Tegyük föl, hogy $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \varrho < 1$, akkor a sor conv. U.is itt $a_{n+k} < a_n \varrho^k$ tehát
$a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+k} + \ldots < a_n (1 + \varrho + \varrho^2 + \ldots + \varrho^k + \ldots) < \frac{a_n}{1-\varrho}$
$\frac{a_n}{1-\varrho}$ pedig véges, így az n-dik tagon túl darabonként tag összege alatta marad egy megadható számnak, vagyis a sor conv. Hasonlóképen conv. a sor, ha $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda < 1$. Ha pedig $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, akkor a sor divergens, mert ekkor $a_{n+1} > a_n$, $a_{n+2} > a_{n+1}$, $a_{n+3} > a_{n+2}$ ..... stb. Hasonlóképen div. a sor, ha $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$. Ezen I. esetben a sor convergentiáját annáltal döntöttük el, hogy a sort egy geometriai sorral hasonlítottuk össze. Keresni fogunk más kritériumokat is, más sorokkal való összehasonlítás által; előbb azonban kitérést teszünk számsorozatok összehasonlítására.

Legyen két számsorozatunk: $a_0, a_1; a_2, a_3, \ldots a_n \ldots \lim a_n = \infty$
$b_0, b_1; b_2, b_3, \ldots b_n, \ldots \lim b_n = \infty$
Vegyük a két sorozat általános tagjainak hányadosát $\frac{a_n}{b_n}$.

1.) Ha ez a hányados két 0-tól különböző véges szám közé kerül $h < \frac{a_n}{b_n} < H$, akkor azt mondjuk, hogy a két számsorozat **egyenlőrangú**. Jele $(=)$; $a_n (=) b_n$. Általánosítása egyenlőrangú a két számsorozat, ha $0 < \lim \frac{a_n}{b_n} < \infty$

2.) Ha $\lim \frac{a_n}{b_n} = \infty$, akkor azt mondjuk, hogy az a_n sorozat b_n sorozatnál **nagyobbrangú**. Jelölése $a_n (>) b_n$

Ezen rangfokozatokra nézve állnak a köv. tételek:

α.) Ha $a_n (=) b_n$, akkor $b_n (=) a_n$, mert ha $h < \frac{a_n}{b_n} < H$, akkor $\frac{1}{h} > \frac{b_n}{a_n} > \frac{1}{H}$, de $\frac{1}{h}$ és $\frac{1}{H}$ szintén véges és 0-tól különböző számok, ami azt mondja ki, hogy $b_n (=) a_n$

β.) Ha $a_n (=) c_n$ vagyis $h < \frac{a_n}{c_n} < H$
és $b_n (=) c_n$ vagyis $h' < \frac{c_n}{b_n} < H'$
akkor $a_n (=) b_n$, mert $hh' < \frac{a_n}{b_n} < HH'$ Szóval: ha 2 sorozat egy harmadikkal egyenlő rangú, akkor a 2 sorozat egymásnak is egyenlő rangú.

γ.) Ha $a_n (>) b_n$ és $b_n (>) c_n$ akkor $a_n (>) c_n$, mert ekkor
$\lim \frac{a_n}{b_n} = \infty$ és $\lim \frac{b_n}{c_n} = \infty$, a kettő szorzata pedig $\lim \frac{a_n}{c_n} = \infty$

δ.) Ha $a_n (?) b_n$ akkor $b_n (<) a_n$ mert ha $\lim \frac{a_n}{b_n} = \infty$, akkor $\lim \frac{b_n}{a_n} = 0$

ε.) Ha $a_n (=) b_n$ vagyis $h < \frac{a_n}{b_n} < H$
és $c_n (=) d_n$ $h' < \frac{c_n}{d_n} < H'$ akkor
$a_n c_n (=) b_n d_n$, mert $hh' < \frac{a_n c_n}{b_n d_n} < HH'$ Szóval: egyenlőrangú számsorozatai szintén egyenlőrangúak.

ζ.) Ha $a_n (=) b_n$ akkor $a_n^\alpha (=) b_n^\alpha$ mert akkor $h^\alpha < \frac{a_n^\alpha}{b_n^\alpha} < H^\alpha$ és itt h^α és H^α végesek, ha h, H végesek voltak. — Szavalkban: egyenlőrangúak a. azon hatványai is egyenlőrangúak.

η.) Ha $a_n (=) b_n$ akkor $\log a_n (=) \log b_n$ mert ha $h < \frac{a_n}{b_n} < H$ vagyis $\frac{a_n}{b_n} = \lambda_n$ véges mennyiség, akkor $a_n = \lambda_n b_n$. Logarithmusokra térve
$\log a_n = \log \lambda_n + \log b_n$, tehát $\log b_n$-nel
$\frac{\log a_n}{\log b_n} = \frac{\log \lambda_n}{\log b_n} + 1$, ámde $\lim_n \frac{\log \lambda_n}{\log b_n} = 0$, mert $\lim_n \frac{a_n}{b_n} = \lim \lambda_n = 1$.
s így $\lim \frac{\log a_n}{\log b_n} = 1 \neq 0$, ami épen azt mondja, hogy $\log a_n (=) \log b_n$
Szavalkban: Ha két számsorozat egyenlőrangú s a tagjaik log-át vesszük, akkor az így nyert sorok is egyenlőrangúak lesznek.

Állapítsuk most meg különféle sorfajaink közt a sorok rangosztályai szempontjából bizonyos sorrendet.

Tegyük az egész számsorozatot: $1, 2, 3, \ldots n, \ldots$ Ennek hatványsorait:

$1^2, 2^2, 3^2, \ldots n^2, \ldots$; $1^3, 2^3, 3^3, \ldots n^3 \ldots$ stb.

Mivelhogy $\lim \frac{n^2}{n} = \infty$ azért az n^2 sorozat magasabb rangú, mint az $1, 2, 3 \ldots n, \ldots$ sorozat, még pedig azt mondjuk, hogy ehhez képest az $1^2, 2^2 \ldots n^2 \ldots$ sorozat másodrangú.

$\lim \frac{n^2}{n} = \infty$, tehát n^2 sorozat magasabb rangú, mint az n sorozat; még pedig k-ad rangú.

Hasonlítsuk össze az egész számok sorozatából a $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots \sqrt{n} \ldots$ sorozatot, mivelhogy $\lim \frac{n}{\sqrt{n}} = \lim \sqrt{n} = \infty$, azért az egész számok sorozata ezen sorozathoz magasabbrangú. A $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \ldots \sqrt{n} \ldots$ sorozatot $\frac{1}{2}$-ed rangúnak mondjuk.

Már bebizonyítottuk, hogy ha $a > 1$, akkor $\lim_n \frac{a^n}{n^k} = \infty$ tehát az a^n sorozat magasabb rangú az n^k sorozatnál.

Ha az n oly $w_1, w_2, w_3 \ldots \ldots w_n \ldots$ sorozatot fut be, melynek lim.-e $\lim w_n = \infty$, akkor is $a^{w_n} (>) w_n^k$, mert ha $\lim w_n = \infty$, akkor mindig van egy oly N igen nagy számú, hogy $N \leqq w_n < N+1$

$$\text{Ez szerint} \quad \frac{a^{w_n}}{w_n^k} > \frac{a^N}{(N+1)^k} = \frac{a^N}{N^k} \frac{N^k}{(N+1)^k}$$

Itt $\left(\frac{N}{N+1}\right)^k$ az egységhez közeledik $\lim \frac{a^N}{N^k}$ pedig végtelen nagy, tehát tehát $\lim \frac{a^{w_n}}{w_n^k} = \infty$, vagyis $a^{w_n} (>) w_n^k$

Vegyük most $w_n = h \cdot \log_a n$. Ezt tehetjük, mert itt is $\lim h \cdot \log_a n = \infty$. Ekkor $a^{w_n} = a^{h \log_a n} = n^h$ és $w_n^k = (h \cdot \log_a n)^k$ Az alakítandó hányados: $\frac{1}{h^k} \frac{n^h}{(\log_a n)^k}$; ennek limese

$$\lim_n \frac{1}{h^k} \frac{n^h}{(\log_a n)^k} = \frac{1}{h^k} \lim_n \frac{n^h}{(\log_a n)^k} = \infty, \text{ tehát } n^h (>) (\log_a n)^k$$

E szerint az alapszámú hatványmennyisége magasabb rangú, mint a logarithmusainak akár hányadik hatványa.

Összefoglalva: a most megvizsgált sorozatok közt a sorozatok rangjára való tekintettel, a következő sorrendet állapíthatjuk meg:

$$\log n \,(<) \ldots \sqrt[3]{n} \,(<) \sqrt{n} \,(<) n \,(<) n^2 \ldots (<) n^k \,(<) a^n.$$

Lássuk most a 0-ra végtelenül fogyó számsorozatoknál. Legyen $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \varepsilon_3 \ldots \varepsilon_n \ldots$ sorozat limese $\lim \varepsilon_n = 0$ s az $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots \eta_n \ldots$ sorozat $\lim \eta_n = 0$

Hasonlítsuk a két sorozatot össze:

1.) Ha az $\frac{\varepsilon_n}{\eta_n}$ hányados két 0-tól különböző véges szám között van

$h < \frac{\varepsilon_n}{\eta_n} < H$, vagy ha $0 < \lim \frac{\varepsilon_n}{\eta_n} < \infty$, akkor azt mondjuk, hogy a két számsorozat egyenlő rangú végtelen kicsiny: $\varepsilon_n (=) \eta_n$. Hasonlóképpen, mint a végtelen nagyoknál:

2.) Ha $\lim \frac{\varepsilon_n}{\eta_n} = 0$ akkor $\varepsilon_n (>) \eta_n$ és

3.) ha $\lim \frac{\varepsilon_n}{\eta_n} = \infty$ akkor $\varepsilon_n (<) \eta_n$. – Bebizonyítjuk, hogy az egyenlő rangú nagyok reciprokjai egyenlő rangú kicsinyek. U.is. ha

$\lim_{n} a_n = \infty$, $\lim b_n = \infty$ és $h < \frac{a_n}{b_n} < H$, akkor

$\lim \frac{1}{a_n} = 0$, $\lim \frac{1}{b_n} = 0$ és $\frac{1}{H} > \frac{b_n}{a_n} > \frac{1}{h}$

De ez pedig épen az egyenlőrangú végtelen kicsiny definitioja szerint azt mondja ki, hogy $\frac{1}{b_n} (=) \frac{1}{a_n}$. Tud. $\lim a_n = \infty$ $\lim b_n = \infty$ és $a_n (>) b_n$ vagyis $\lim \frac{a_n}{b_n} = \infty$, akkor $\lim \frac{1}{a_n} = 0$, $\lim b_n = 0$ és $\frac{1}{a_n} (>) \frac{1}{b_n}$ (végtelen kicsiny) mert $\frac{1}{a_n} : \frac{1}{b_n} = \frac{b_n}{a_n}$ és $\lim \frac{b_n}{a_n} = 0$

Épen szerint a végtelen kicsinyek rangjára áll az alábbi rangsorozat fordítottja $\frac{1}{\log n} (<) \dots (<) \frac{1}{\sqrt{n}} (<) \frac{1}{n} (<) \frac{1}{n^2} (<) \dots (<) \frac{1}{n^k} (<) \frac{1}{a^n}$

A rang azonban itt minidég végtelen kicsinyre értendő".

Egyenlő rangú sorok. Most bebizonyítjuk, hogy ha két sor egyenlő rangú kicsiny, akkor egyenlő természetű is azaz, vagy mind a két sor összes, vagy mind a két sor divergens.

Legyen a két sor $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \lim a_n = 0$

és $b_0 + b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots \lim b_n = 0$

A két sor feltételünk szerint egyenlő-rangú kicsiny, tehát $h < \frac{a_n}{b_n} < H$ és tegyük fel, hogy $\sum b_n$ sor összes, bebizonyítjuk, hogy akkor $\sum a_n$ sor is összes, tud. is:

$a_n < H b_n$
$a_{n+1} < H b_{n+1}$
.....
$\underline{\qquad}$

ezek összege $\sum a_n < H . \sum b_n$. De $H . \sum b_n$ véges és így $\sum a_n$ sor tényleg összes. Ha $\sum b_n$ divergens, akkor

$a_n > h b_n$
$a_{n+1} > h b_{n+1}$
.....
$\underline{\qquad}$

ezek összege $\sum a_n > h . \sum b_n$. De $h . \sum b_n$ nagyobb, mint egy megadható nagy szám, tehát $\sum a_n$ sor is div.

Ezen tétel alapján a convergentia megvizsgálásánál minden sort vele egyenlő rangú sorral helyettesíthetjük.

Különböző rangú sorok. Ha a két sor nem egyenlőrangú kicsiny, pl. a_n magasabb rangú végtelen kicsiny, mint b_n, vagyis

$\lim \frac{a_n}{b_n} = 0$ és a b-k sora conv. bebizonyítjuk, hogy akkor a magasabb rangú $\sum a_n$ sor is conv. H. is ha a_n magasabb rangú végtelen kicsiny, mint b_n, akkor $\frac{a_n}{b_n} < \varepsilon$ vagy

$$\left.\begin{array}{l} a_n < \varepsilon b_n \\ a_{n+1} < \varepsilon b_{n+1} \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{array}\right\}$$

összegezve: $\sum a_n < \varepsilon \sum b_n$ de $\sum b_n$ véges, mivel a b-k sora conv. e szerint $\sum a_n < \varepsilon$, vagyis az a-k sora szintén convergens.

Ha $\lim \frac{a_n}{b_n} = \infty$, vagyis b_n magasabb rangú kicsiny, mint a_n és ha a $\sum b_n$ sor divergens, akkor bebizonyítjuk, hogy a $\sum a_n$ sor is divergens. Vagyis akkor $\frac{a_n}{b_n} > N$ vagyis

$$\left.\begin{array}{l} a_n > N b_n \\ a_{n+1} > N b_{n+1} \\ \dots\dots\dots\dots \end{array}\right\}$$

ezek összegezve:

$$\sum a_n > N \sum b_n$$

ami éppen azt mondja, hogy $\sum a_n$ sor divergens.

Összefoglalva: Ha $\sum b_n$ sor conv., akkor convergensek a vele egyenlő, vagy nálánál magasabb rangú sorok is.

Ha pedig $\sum b_n$ divergens, akkor a vele egyenlő, vagy nálánál alacsonyabb rangú sorok is divergensek.

Convergentia kritériumok. (folytatás). Az I. esetben a sor convergentiáját akkép döntöttük el, hogy az illető sort összehasonlítottuk a geometriai sorral. A most megismert tételek módot nyújtanak arra, hogy convergentia kritériumokat állítsunk fel más sorokkal való összehasonlítás által.

II. Egy ily sor lesz a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ sor.

Kimutatjuk, hogy ez a sor, bár alacsonyabb rangú a $\sum a^n$ sornál (l. a rangsorozatot 46 old.) mégis conv., ha $\alpha > 1$ és divergens, ha $\alpha \leqq 1$.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} \frac{1}{4^\alpha} + \dots\dots$ Csoportosítsuk most oly módon a tagokat, melyekben a nevező 1, 2, 3, stb számjeggyel leírható számra áll, hogy

$10^{k-1} \leqq n < 10^k$ osztva n 10^k-val: $\frac{1}{10^k} \leqq \frac{n}{10^k} < 1$

de ez azt mondja ki, hogy $n (=) 10^k$. De ekkor 7. tétel szerint

$n^\alpha (=) (10^k)^\alpha$ és $\frac{1}{n^\alpha} (=) \frac{1}{(10^k)^\alpha}$

Áttérünk tehát $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ sorról azon vele egyenlő rangú sorra, hol a k-dik csoportban mind $\frac{1}{(10^k)^\alpha}$ tagok szerepelnek. Ilyen tag a k-dik

csoportban minta számozás $9 \cdot 10^{k-1}$ van, tehát az új sornak k-dik tagja
$b_k' = \frac{1}{(10^k)^\alpha} \cdot 9 \cdot 10^{k-1} = \frac{9}{10} \cdot \left(\frac{1}{10^\alpha - 1}\right)^k$ a módosított sor tehát:

$$\frac{9}{10} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10^\alpha - 1}\right)^k (=) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

Ez a módosított sor pedig egy geometriai sor, mely konvergens, ha $\alpha > 1$ és divergens ha $\alpha \leqq 1$. Ugyanúgy áll az egyenlőtlenségű $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ sorra is, amivel a tételt bebizonyítottuk.

Alkalmazás: Ezen új konvergens sorral való összehasonlítás révén döntsük el az $\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \ldots\ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} + \ldots$ sor természetét.

A $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ sorok közül vegyük $\alpha = 3$-nak megfelelő konv. sorral hasonlítva össze az előbbi sort. A kérdéses sor általános tagjának hányadosa:

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} : \frac{1}{n^3} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})}$$ Ennek limesze: $\lim \frac{1}{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})} = 1$,

tehát a kérdéses sor egyenlőtlenségű, és így egyenlő természetű is, vagyis a $\sum \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ sor szintén konvergens.

Általában, ha $\alpha > 1$ és a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ sort összehasonlítjuk az $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots + a_n + \ldots$ sorral és azt találjuk, hogy $\frac{a_n}{\frac{1}{n^\alpha}} = n^\alpha \cdot a_n$ hányados limesze véges, vagy 0: $0 \leqq \lim (n^\alpha a_n) < \infty$ akkor a $\sum a_n$ sor is konv.

Ha pedig $\alpha = 1$, akkor $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ is divergens és így ha azt találjuk, hogy $\frac{a_n}{\frac{1}{n}} = n a_n$ hányados limesze véges vagy végtelen.
$0 < \lim (n a_n) \leqq \infty$, akkor a $\sum a_n$ sor is divergens.

III. Most a $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ sornál még alacsonyabb $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^\alpha}$ sorokat fogjuk vizsgálni s kimutatjuk, hogy ha $\alpha > 1$, akkor ez a sor is konv., míg $\alpha \leqq 1$-nél divergens.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^\alpha} = \frac{1}{2(\log 2)^\alpha} + \frac{1}{3(\log 3)^\alpha} + \ldots\ldots$$

Alakítsuk megint az egyenlőtlenségből álló tagok csoportját és térjünk át új sorra. Minthogy
$10^{k-1} \leqq n < 10^k$, ezek logarithmusát véve
$k - 1 \leqq \log n < k$, osztva k-val $1 - \frac{1}{k} \leqq \frac{\log n}{k} < 1$
De szomszédos relatio szerint $\log n (=) k$

Egyik tétel szerint ekkor (?) $\left.\begin{array}{l} (\log n)^{\alpha} \; (=) \; k^{\alpha} \\ n \quad (=) \; 10^{k} \end{array}\right\}$ a kettő összefüggésben a reciprokra térve:

$$\frac{1}{n(\log n)^{\alpha}} \; (=) \; \frac{1}{10^{k} k^{\alpha}}$$

A régi sor k-dik csoportjában $9 \cdot 10^{k-1}$ tag van, ha minden tagot a vele egyenlő nagyságú $\frac{1}{10^{k} k^{\alpha}}$ taggal helyettesítjük, akkor az új sor k-dik tagja $b_k' = 9 \cdot 10^{k-1} \frac{1}{10^{k} k^{\alpha}} = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{k^{\alpha}}$ az új sor tehát

$\frac{9}{10} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$ Erről a sorról azonban tudjuk, hogy ha $\alpha > 1$, akkor conv., és ha $\alpha \leq 1$ akkor divergens.

Mivel pedig eredeti sor tagjai (=) a $\sum \frac{1}{n(\log n)^{\alpha}}$ sor tagjaival s így a két sor egyenlő természetű, azért tényleg a $\sum \frac{1}{n(\log n)^{\alpha}}$ sor is conv. ha $\alpha > 1$, és div., ha $\alpha \leq 1$.

Ábel sor-skálája. A most tárgyalt sornál még általánosabb fajait vizsgáljuk: Jelöljük $\log(\log n) = \log^2 n$, $\log(\log^2 n) = \log^3 n$ stb. Állítsuk föl a köv. úgynevezett Ábel féle logarithmusi sor skálát:

$$S_0 = \sum \frac{1}{n^{\alpha}}$$

$$S_1 = \sum \frac{1}{n(\log n)^{\alpha}}$$

$$S_2 = \sum \frac{1}{n \log n (\log^2 n)^{\alpha}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$S_\lambda = \sum \frac{1}{n \log n \log^2 n \cdots (\log^\lambda n)^{\alpha}}$$

Az egyes soroknál a summációt csak azon n-ekre szabad kiterjeszteni, melyeknél $\log n$ a $\log_1, \log^2, \log^3 \ldots \log^\lambda$ ja pozitív, azért ezen számot add. Így a 10-es alapú log-nál $\log 10 = 1$ és $\log^2 10 = 0$, tehát pl S_2 sor summázását $n = 10$-nél nem szabad kezdeni.

Legyen a log alapszáma $a > 1$ s vegyük a köv. értéksorozatot:

a, $a^a = a_1$, $a^{a_1} = a_2$, $a^{a_2} = a_3$, $a^{a_3} = a_4$, ... Ezen sorozatnál az a alapon vett log sorozat:

	a	a_1	a_2	a_3	a_4 .....
$\log$:	1	a	a_1	a_2	a_3 .....
$\log^2$:	0	1	a	a_1	a_2 .....
$\log^3$:	—	0	1	a	a_1 .....
$\log^4$:	—	—	0	1	a .....
.....					

Látjuk tehát, hogy a >1 alapszámú logarithmusnál ha az Abel féle sor összárat pl. a 4 sorát vesszük (S_4), akkor a summázást $n=a_3$-nál szabad csak kezdenünk, mert akkor azután a „nevező" minden tényezője 0-tól különböző lesz. Így a sorösszeg k-dik tagja ez lesz:

$$S_1 = \sum_{n=a_{k-1}}^{\infty} \frac{1}{n.\log n.\log^2 n \ldots\ldots (\log^{k} n)^{\alpha}}$$

Tanulmányozzuk most, hogy ez a sor mikor convergens? A sor tagjait először egyenlő rangú tagokkal fogjuk helyettesíteni. Tudjuk, hogy ha az n szám k számjeggyel írható le, akkor

$n\,(=)\ 10^k$ és

$\log\ n\,(=)\ k$ továbbá áll még, hogy:

$\log^2\ n\,(=)\ \log k$

$\log^3\ n\,(=)\ \log^2 k$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$(\log^{k} n)^{\alpha}\,(=)\,(\log^{k-1} k)^{\alpha}$

} Szorozzuk egyen tagokat össze, akkor kapjuk, hogy:

$$n \log n \log^2 n \log^3 n \ldots\ldots (\log^2 n)^{\alpha}\,(=)\ 10^k.\ k.\log k.\log^2 k \ldots\ldots (\log^{k-1} k)^{\alpha}$$

Reciprokait véve:

$$\frac{1}{n \log n \log^2 n \log^3 n \ldots (\log^{k} n)^{\alpha}}\,(=)\ \frac{1}{10^k.\ k.\log k.\log^2 k \ldots (\log^{k-1} k)^{\alpha}}$$

csoportosítsuk most azokat a tagokat, ahol n k számjeggyel írható le. Ilyen tag $q.10^{k-1}$ számú van. Mindegyiket helyettesítjük a vele egyenlő rangú $\frac{1}{10^k.\ k.\log k.\log^2 k \ldots (\log^{k-1} k)^{\alpha}}$ taggal, akkor a nyert új sor k-dik tagja lesz

$$\frac{q.10^{k-1}}{10^k.\ k.\log k.\log^2 k \ldots (\log^{k-1} k)^{\alpha}} = \frac{q}{10}\cdot\frac{1}{k.\log k \ldots (\log^{k-1} k)^{\alpha}}$$

az új sor tehát: $\frac{q}{10}\sum_{k}\frac{1}{k.\log k \ldots (\log^{k-1} k)^{\alpha}}$

Ez azonban az Abel féle sorösszeg $k-1$-dik tagja. Erre tehát ismét alkalmazható az előbbi eljárás s így az Abel-féle sorösszeg $k-2$-dik tagját fogjuk kapni, vagyis az Abel féle sorösszeg tagjai egymással mind egyenlő rangúak $S_0\,(=)\,S_1\,(=)\,S_2\,(=)\,S_3 \ldots\ldots (=)\,S_k$ E szerint S_1 sor is akkor conv. amikor S_k tehát ha $\alpha > 1$; míg ha $\alpha \leqq 1$ akkor az Abel féle sorösszeg valamennyi tagja divergens.

Kulcia sorokról.

A convergentia vizsgálatából kiinyilvánossá tevő olyan határsor, mely a conv. és div. sorokat egymástól elválasztana, t.i.: akkor minden a határsorral egyenlő rangú sorból kiindúlva a határsor természetével bírnának, a nálánál magasabb rangúak pedig convergensek, s a nálánál alacsonyabb rangúak divergensek volnának. Olivier francia mathematikus ápr hitte, hogy ez a határsor a $\sum \frac{1}{n}$ harmonikus sor. Tehát Olivier szerint ha $\lim \frac{a_n}{\frac{1}{n}} = 0$, vagyis ha a_n magasabb rangú végtelen kicsiny, mint $\frac{1}{n}$ akkor a $\sum a_n$ sor abszolút convergens! Pedig ez nem mindég igaz! Vegyük pl. az $\frac{1}{n \log n}$ általános tagjával bíró sort melyről már tudjuk, hogy divergens. Ít is $\lim \frac{1}{n \log n} : \frac{1}{n} = \lim \frac{1}{\log n} = 0$ s az mégsem conv.

Ebből kitűnik a Következés szükségessége mutatta, hogy a divergens sorozat ilyen sor nem létezhetik.

Vegyük föl pl. hogy van ily határsor s ez $h_1 + h_2 + h_3 + \ldots + h_n + \ldots \sum h_n$ divergens. Most ebből a sorból készítünk egy ennél magasabb rangú sort s abból is kimutatjuk, hogy még mindég divergens. Ezzel aztán a kitűzött létezése a divergens sorokra nézve kétségtelenül tarthatók.

Jelöljük: $h_1 = H_1$; $h_1 + h_2 = H_2$, $h_1 + h_2 + h_3 = H_3$ ..... mi világos, való, hogy az így megszerkesztett $H_1\ H_2\ H_3 \ldots\ldots H_n \ldots$ sorozat is divergens. $\lim H_n = \infty$ Térjünk most át a

$$\frac{h_2}{H_1} + \frac{h_2}{H_2} + \frac{h_3}{H_3} + \ldots\ldots + \frac{h_n}{H_n} + \ldots\ldots$$ sorra. Ez a sor az előbbinél magasabb rangú, mert $\frac{\frac{h_n}{H_n}}{h_n} = \frac{1}{H_n}$ és $\lim \frac{1}{H_n} = 0$

s emellett daczára mégis divergál. Ugyanis

$$\frac{h_{n+1}}{H_{n+1}} + \frac{h_{n+2}}{H_{n+2}} + \ldots + \frac{h_{n+k}}{H_{n+k}} > \frac{h_{n+1} + h_{n+2} + \ldots\ldots h_{n+k}}{H_{n+k}}$$

De a tört számlálója $H_{n+k} - H_n$ vagyis

$$\frac{h_{n+1}}{H_{n+1}} + \frac{h_{n+2}}{H_{n+2}} + \ldots\ldots + \frac{h_{n+k}}{H_{n+k}} > 1 - \frac{H_n}{H_{n+k}}$$

A k számot még megválaszthatjuk úgy, hogy $H_{n+k} > 2 H_n$ legyen, mikor is $\frac{H_n}{H_{n+k}} < \frac{1}{2}$ s így az új sor n-dik tagjának kiegészítő maradék része nagyobb $\frac{1}{2}$-nél, ami nyilvánvalóvá teszi a sor divergentiáját mondja ki.

Hogy a comm. csoportnál említett kritérium, azt Du Bois Reymond említett matthematikus említette fel. Szerinte tegyük fel, hogy $h_1 + h_2 + h_3 + \dots + h_n + \dots$ ($\sum h_n$ conv.) csupa olyan az illető halmazon. Felbontjuk ennek:

$$\begin{aligned} h_1 + h_2 + h_3 + \dots + h_n + \dots &= H_1 \\ h_2 + h_3 + \dots + h_n + \dots &= H_2 \\ h_3 + \dots + h_n + \dots &= H_3 \\ \dots\dots\dots\

1.) $f(\alpha_1) f(\alpha_2) f(\alpha_3) \dots f(\alpha_n) = f(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\dots+\alpha_n)$ ha most $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\dots=\alpha_n=1$ akkor $f(1)\cdot f(1)\cdot f(1)\dots f(1)_{n\text{-szer}} = f(n)$ vagyis

2.) $f(n) = [f(1)]^n$ Ez a tulajdonság pedig csak a hatványozásnál van meg.

Tegyünk az $f(\alpha)\cdot f(\beta) = f(\alpha+\beta)$ egyenletbe $\alpha = 0$ akkor $f(0)\cdot f(\beta) = f(\beta)$ vagyis

3. $f(0) = 1 = [f(1)]^0$ Ez a tulajdonság is csak a hatványozásnál van meg.

Ha $\alpha = +u$, $\beta = -u$, akkor $f(\alpha) f(\beta) = f(\alpha+\beta)$ szerint:

$f(u) f(-u) = f(0) = 1$ vagy $f(-n) = \frac{1}{f(n)}$ és

$f(u) = [f(1)]^u$ s így

4.) $f(-u) = [f(1)]^{-u}$

Ha a művelet elem tört, akkor is állanak ezek a tételek. Ugyanis

$f(\frac{m}{n})\ f(\frac{m}{n}) \dots f(\frac{m}{n})_{n\text{-szer}} = f(\frac{m}{n}+\frac{m}{n}+\dots+\frac{m}{n})_{n\text{-szer}} = f(m)$ és

$f(m) = f(1)^m$ tehát $[f(\frac{m}{n})]^n = [f(1)]^m$ vagy mindkét oldalból

n-dik gyököt vonva:

5.) $$f(\frac{m}{n}) = \sqrt[n]{f(1)^m}$$

Tegyünk az alapegyenletbe $f(\alpha) f(\beta) = f(\alpha+\beta)$ α helyett $\frac{m}{n}$-et β helyett $-\frac{m}{n}$-et, akkor $f(\frac{m}{n}) f(-\frac{m}{n}) = f(0) = 1$ de az 5.) szerint

$f(\frac{m}{n}) = [f(1)]^{\frac{m}{n}}$ s így $f(-\frac{m}{n}) = \frac{1}{[f(1)]^{\frac{m}{n}}}$ vagy

6.) $$f(-\frac{m}{n}) = [f(1)]^{-\frac{m}{n}}$$

Egész általánosan bebizonyított tehát, hogy ha az f operatióra nézve áll, hogy $f(\alpha)\cdot f(\beta) = f(\alpha+\beta)$ akkor minden rationális r-re nézve áll, hogy $f(r) = [f(1)]^r$

Most kimutatjuk, hogy ugyanez irrationális számokra is áll.

Legyen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots \alpha_n \dots$ sorozatnál $\lim \alpha_n = x$ sorozatot. Ha ennek a sorozatnak a képe $f(\alpha)$, akkor $f(\alpha) = \lim f(\alpha_n) = \lim [f(1)]^{\alpha_n} = [f(1)]^{\lim \alpha_n}$ de $\lim \alpha_n = \alpha$ tehát egész általánosan

$$f(\alpha) = [f(1)]^\alpha$$

Térjünk most át az $(1+x)$ binom n-dik hatványának meghatározására.

Először positiv x-re és positiv egész n-re esetére. A definitio szerint

$$(1+x)^n = (1+x)(1+x)(1+x)\dots(1+x)_{n\text{-szer}}$$

Egyszerűbb lépésen alapuló matematikai indukcióval, ha először a jobboldalon található összefüggést n-edik esetből az (n+1)-edik esetre bizonyítjuk. A szorzási azonosságból például

$$(1+x_1)(1+x_2) = 1+x_1+x_2+x_1x_2$$

$$(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3) = 1+x_1+x_2+x_3+x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3+x_1x_2x_3$$

Ezen összefüggésekből világosan látható, hogy bizonyos szorzatok azért szerepelnek, mert az előző tényezőkből hiányoznak, hogy egy újabb tényezővel is.

Egyszerűség kedvéért jelöljük

$$x_1+x_2+\dots+x_n = f_1^{(n)}, \qquad x_1x_2+x_2x_3+\dots+x_{n-1}x_n = f_2^{(n)}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$x_1x_2x_3\dots x_n = f_n^{(n)}$$

Ekkor az előbbi szabály szerint n tényező összeszorzása után az alábbi összefüggést kapjuk:

$$(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)\dots(1+x_n) = 1+f_1^{(n)}+f_2^{(n)}+\dots+f_n^{(n)}$$

Most áttérünk (n+1) tényező összeszorzására

$$(1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_n)(1+x_{n+1}) = 1+f_1^{(n)}+f_2^{(n)}+\dots+f_k^{(n)}+\dots+f_n^{(n)}$$
$$+x_{n+1}+f_1^{(n)}x_{n+1}+\dots+f_{k-1}^{(n)}x_{n+1}+\dots+f_{n-1}^{(n)}x_{n+1}+f_n^{(n)}x_{n+1}$$

Minthogy általánosan: $f_{k-1}^{(n)}x_{n+1}+f_k^{(n)} = f_k^{(n+1)}$ azért

$$(1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_n)(1+x_{n+1}) = 1+f_1^{(n+1)}+f_2^{(n+1)}+\dots+f_k^{(n+1)}+\dots+f_n^{(n+1)}+f_{n+1}^{(n+1)}$$

tehát az előbbi szorzási szabály általánosan érvényes.

Ha most $x_1=x_2=x_3=\dots=x_n=x$ akkor

$$(1+x)^n = 1+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\dots+\binom{n}{k}x^k+\dots+\binom{n}{n}x^n$$

ha az illető együtthatókat, melyeket binomiális együtthatóknak nevezünk $\binom{n}{1}\binom{n}{2},\dots\binom{n}{k}\dots\binom{n}{n}$ – mel jelölhetjük.

Vegyük fel most, hogy $\binom{n}{0}=1$ és $0!=1$ akkor a binomiálist tételt rövidebben így írhatjuk: $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$

A binomiális együtthatók tulajdonságai.

Vizsgáljuk mindenekelőtt, hogy mi a jelentése az $\binom{n}{k}$ binomiális együtthatónak. Minthogy $f_k^{(n)}$ az n elemből alkotható összes k-ad rendű kombinációk összegét jelentette, azért $\binom{n}{k}$ ezen kombinációk számát fogja jelenteni. Ugyanis, ha az elemek mind egyenlők, akkor x^k szorzódik a kombinációk számával, amit ezen

$\binom{n}{k}$-val jelöltünk.

Ha alakítjuk az összes $\binom{n}{k-1}$ számú $(k-1)$-ed rendű combinatiokat s mindegy az utolsónak $n-k+1$ számú elemből minden csoportjához hozzáírunk egy elemet, akkor $\binom{n}{k-1}(n-k+1)$ számú k-ad rendű combinatiot kapunk. Azonban ezek közt minden csoport k-szor fordul elő úgy hogy I. $\binom{n}{k} = \binom{n}{k-1}\frac{n-k+1}{k}$

Ezen formula szerint ha $k=1$, akkor $\binom{n}{1} = n$, ha $k=2$, akkor $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{1.2}$; $\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$ általánosan tehát

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-k+1)}{1.2.3.\ldots\ldots k.}$$

Az oly szorzatot, amelynél 1-től egy bizonyos számig az összes egész számok tényezőként fordulnak elő faktoriásnak nevezzük.

Jele: $!$ $\quad 1.2.3.\ldots\ldots k = k!$

Ha $\binom{n}{k}$ jobb oldalának számlálóját és nevezőjét $(n-k)(n-k-1)\ldots 2.1$ tényezőkkel szorozzuk, akkor

II. $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$ Ennek alapján ha k helyett $(n-k)$-t teszünk, akkor

III. $\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{k}$

Indjuk hogy $\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1} = \binom{n}{k-1}\left(\frac{n-k+1}{k}+1\right) =$

$= \binom{n}{k-1}\frac{n+1}{k} = \frac{(n+1)(n)(n+1)(n-2)\cdots\cdots(n-k+2)}{1.2.\ldots\ldots(k-1)k} = \binom{n+1}{k}$ vagyis

IV. $\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$

Ezen tétel alapján az összes binomiális coefficiensekről a Pascal féle háromszög segélyével egyszerre áttekinthető képet alkothatunk magunknak. A Pascal féle háromszög a következő:

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & & & & & & \binom{0}{0} \\
1 & 1 & & & & & \binom{1}{0}\ \binom{1}{1} \\
1 & 2 & 1 & & & & \binom{2}{0}\ \binom{2}{1}\ \binom{2}{2} \\
1 & 3 & 3 & 1 & & & \binom{3}{0}\ \binom{3}{1}\ \binom{3}{2}\ \binom{3}{3} \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \binom{4}{0}\ \binom{4}{1}\ \binom{4}{2}\ \binom{4}{3}\ \binom{4}{4}
\end{array}$$

Legyen az $(1+x)^n = \binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\ldots\ldots+\binom{n}{n}x^n$ egyenlet-ben $x=1$ akkor

V. $2^n = \binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots\ldots+\binom{n}{n}$

Ha pedig $x=-1$, akkor a minden második tag negatív előjelű, tehát:

$$0=\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+\ldots\ldots\ldots(-1)^n\binom{n}{n}\quad\ldots\ldots(c)$$

Adjuk ezt össze az I. egyenlettel, lesz:

$$2^n=2\left[\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\ldots\ldots\right]\quad\text{vagy}$$

V. $\quad 2^{n-1}=\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\ldots\ldots$

Tonjuk le ebből a (c). egyenletet, akkor $2^{n-1}=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\ldots\ldots$

A binomiális tétel általánosítása.

A következőkben előszőr a binomiális coefficienseket, aztán a binomiális tételt is tetszőleges n-re ezután általánosítjuk. Tanulmányozzuk mint egész n-re azután, ezután mindig az $\binom{n}{k}$ coefficienseket.

$$\binom{\alpha}{k}=\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots\ldots(\alpha-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}\;;\quad\text{itt is}\quad\binom{\alpha}{0}=1.$$

Ennek megy az n egész számra ezután a binomiális coefficiensek sorozata véges volt, mert $\binom{n}{n}=1$ és $\binom{n}{n+1}=\binom{n}{n+2}=\ldots\ldots=0$, addig most, ha a nem pozitív egész számra, akkor a coefficiensek sorozata végtelen, mert $\binom{\alpha}{k}$ ha k akármilyen nagy pozitív is mindig α akarom lehet, mivel az $(\alpha-k+1)$ negatív vagy törtre esetén 0 sohasem lehet.

Állítsuk most meg a bin. sort:

$$\binom{\alpha}{0}+\binom{\alpha}{1}x+\binom{\alpha}{2}x^2+\ldots\ldots+\binom{\alpha}{n}x^n+\ldots\ldots\text{in infinitum}.$$

Bizonyítjuk, hogy ez a sor feltétlenül konv., és értéke: $(1+x)^\alpha$ ha $|x|<1$.

Alkotjuk végtelen sorba $1+\left|\binom{\alpha}{1}x\right|+\left|\binom{\alpha}{2}x^2\right|+\ldots\ldots+\left|\binom{\alpha}{n}x^n\right|+\ldots\ldots$

és n és $n+1$-dik tag hányadosa: $\left|\frac{\binom{\alpha}{n+1}x^{n+1}}{\binom{\alpha}{n}x^n}\right|$ Jelen esetben is $\binom{\alpha}{k}=\binom{\alpha}{k-1}\frac{\alpha-k+1}{k}$ tehát

$$\frac{\binom{\alpha}{n+1}}{\binom{\alpha}{n}}=\frac{\binom{\alpha}{n}\frac{\alpha-n}{n+1}}{\binom{\alpha}{n}}=\frac{\alpha-n}{n+1}=\frac{\frac{\alpha}{n}-1}{1+\frac{1}{n}}$$ A hányados limesze

$$\text{mivel}\quad\lim_{n=\infty}\frac{1}{n}=0\quad\text{és}\quad\lim_{n=\infty}\frac{\alpha}{n}=0,\quad\text{azért}\quad\lim\left|\frac{\frac{\alpha}{n}-1}{1+\frac{1}{n}}x\right|=|-x|=|x|$$

Ha tehát $|x|<1$ akkor a sor tényleg feltétlenül konvergens.

Felbontjuk ideiglenesen a sor értékét $f(\alpha)$-val

$$\binom{\alpha}{0}+\binom{\alpha}{1}x+\binom{\alpha}{2}x^2+\ldots\ldots+\binom{\alpha}{n}x^n+\ldots\ldots=f(\alpha)$$

Ha $\alpha=1$, akkor $\binom{\alpha}{2}=\binom{\alpha}{3}=\ldots\ldots=\binom{\alpha}{n}=0$ vagy $f(1)=1+x$. Ha bebizonyítjuk bizonyítani, hogy ezen $f(\alpha)$-ra nézve is áll, hogy az $f(\alpha)f(\beta)=f(\alpha+\beta)$ összefüggés érvényben van, akkor az ismert tétel szerint $f(\alpha)=f(1)^\alpha$ itt tehát $f(\alpha)=(1+x)^\alpha$, amivel be lesz bizonyítva hogy az $f(\alpha)$ sor értéke tényleg: $(1+x)^\alpha$.

Tegyük tehát az $f(\beta)$ sort: $f(\beta)=\binom{\beta}{0}+\binom{\beta}{1}x+\binom{\beta}{2}x^2+\ldots+\binom{\beta}{n}x^n+\ldots$ in infinitum.
úgy az $f(\alpha)$, mint az $f(\beta)$ sor felülről conv., tehát a Cauchy-Mertens féle tétel szerint összeszorozva szorzatul $f(\alpha)\cdot f(\beta)$-t kapjuk.

$$f(\alpha)f(\beta)=\binom{\alpha}{0}\binom{\beta}{0}+\left(\binom{\alpha}{0}\binom{\beta}{1}+\binom{\alpha}{1}\binom{\beta}{0}\right)x+\left(\binom{\alpha}{0}\binom{\beta}{2}+\binom{\alpha}{1}\binom{\beta}{1}+\binom{\alpha}{2}\binom{\beta}{0}\right)x^2+\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots+\left(\binom{\alpha}{0}\binom{\beta}{n}+\binom{\alpha}{1}\binom{\beta}{n-1}+\ldots\ldots+\binom{\alpha}{n}\binom{\beta}{0}\right)x^n+\ldots\ldots$$

Az $f(\alpha+\beta)$ pedig egyenlő a kör. kifejtésével:

$$f(\alpha+\beta)=\binom{\alpha+\beta}{0}+\binom{\alpha+\beta}{1}x+\binom{\alpha+\beta}{2}x^2+\ldots+\binom{\alpha+\beta}{n}x^n+\ldots$$

Most kimutatjuk, hogy $f(\alpha)f(\beta)$ és $f(\alpha+\beta)$-ban az x-ek coefficiensei egymást-tagra egyenlők.

$\binom{\alpha}{0}\binom{\beta}{0}=1\cdot 1=1$ de másfelől $\binom{\alpha+\beta}{0}=1$ tehát $\binom{\alpha}{0}\binom{\beta}{0}=\binom{\alpha+\beta}{0}$

$\binom{\alpha}{0}\binom{\beta}{1}+\binom{\alpha}{1}\binom{\beta}{0}=1\cdot\beta+\alpha\cdot 1$

de másfelől $\binom{\alpha+\beta}{1}=\alpha+\beta$

$$\binom{\alpha}{0}\binom{\beta}{2}+\binom{\alpha}{1}\binom{\beta}{1}+\binom{\alpha}{2}\binom{\beta}{0}=\frac{\beta(\beta-1)}{1\cdot 2}+\alpha\beta+\frac{\alpha(\alpha-1)}{1\cdot 2}=\frac{\beta(\beta-1)+2\alpha\beta+\alpha(\alpha-1)}{1\cdot 2}$$
$$=\frac{\beta(\alpha+\beta-1)+\alpha(\alpha+\beta-1)}{1\cdot 2}=\frac{(\alpha+\beta)\cdot(\alpha+\beta-1)}{1\cdot 2}=\binom{\alpha+\beta}{2}$$

Tehát a három első coefficiensről más kimutatnunk, hogy megegyeznek.
Most teljes inductióval bizonyítunk.

Tegyük föl, hogy a coefficienseik egymást $n=1,2,3,$ esetére kimutatjuk, hogy ekkor egyenlők $n+1=4,5,\ldots$ esetére is. Föltesszük, hogy igaz az egyenlet, mely szerint: $\binom{\alpha+\beta}{n}=\binom{\alpha}{0}\binom{\beta}{n}+\binom{\alpha}{1}\binom{\beta}{n-1}+\ldots+\binom{\alpha}{k}\binom{\beta}{n-k}+\ldots+\binom{\alpha}{n}\binom{\beta}{0}$

Vagy röviden $\binom{\alpha+\beta}{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}\binom{\beta}{n-k}$

Ismeretes, hogy $\binom{\alpha+\beta}{n+1}=\binom{\alpha+\beta}{n}\frac{\alpha+\beta-n}{n+1}$ azaz

$$\binom{\alpha+\beta}{n+1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}\binom{\beta}{n-k}\frac{\alpha+\beta-n}{n+1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}\binom{\beta}{n-k}\frac{\alpha-k+\beta-(n-k)}{n+1}$$

de $\binom{\alpha}{k}\frac{\alpha-k}{k+1}=\binom{\alpha}{k+1}$ és $\binom{\beta}{n-k}\frac{\beta-(n-k)}{n-k+1}=\binom{\beta}{n-k+1}$ tehát

$$\binom{\alpha+\beta}{n+1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k+1}\binom{\beta}{k}\frac{k+1}{n+1}+\sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}\binom{\beta}{n-k+1}\frac{n-k+1}{n+1}$$

Mindkét summa kifejtve:

$$\binom{\alpha+\beta}{n+1}=\binom{\alpha}{1}\binom{\beta}{0}\frac{1}{n+1}+\binom{\alpha}{2}\binom{\beta}{1}\frac{2}{n+1}+\binom{\alpha}{3}\binom{\beta}{2}\frac{3}{n+1}+\ldots+\left(\binom{\alpha}{n}\binom{\beta}{n-1}\frac{n}{n+1}+\binom{\alpha}{n+1}\binom{\beta}{n}\right)$$
$$+\binom{\alpha}{0}\binom{\beta}{n+1}+\binom{\alpha}{1}\binom{\beta}{n}\frac{n}{n+1}+\binom{\alpha}{2}\binom{\beta}{n-1}\frac{n-1}{n+1}+\ldots\ldots+\binom{\alpha}{n}\binom{\beta}{1}\frac{1}{n+1}$$

Az egyenlőség alatt levő tagokat összeadva nyerjük, hogy (tekintetbe véve, hogy $\binom{\beta}{k}=\binom{\beta}{n-k}$)

$$\binom{\alpha+\beta}{n+1}=\binom{\alpha}{0}\binom{\beta}{n+1}+\binom{\alpha}{1}\binom{\beta}{n}+\binom{\alpha}{2}\binom{\beta}{n-1}+\ldots\ldots+\binom{\alpha}{n}\binom{\beta}{1}+\binom{\alpha}{n+1}\binom{\beta}{0}$$

A coefficienseket kivéve tehát a megegyezés általában megvan s így tényleg $f(\alpha)f(\beta)=f(\alpha+\beta)$ is érvényben van; tehát valóban ha $|x|<1$

$$(1+x)^\alpha=\binom{\alpha}{0}+\binom{\alpha}{1}x+\binom{\alpha}{2}x^2+\ldots\ldots+\binom{\alpha}{n}x^n+\ldots\ldots$$

Ez a bizonyítási mód Eulertől ered

A binomiális tétel akkor is áll, ha α egy egész szám mivoltát, tehát a binomiális tételt gyökvonási előjelekre lehet alkalmazni.

Legyen a gyökkitevő mennyiség $a < 1$, akkor $1 - a = h$ hol $h < 1$ e szerint $\sqrt[n]{a} = (1-h)^{\frac{1}{n}}$ ezt pedig a binomiális tétellel kifejthetjük. Ha $a > 1$ és a-nak az n-edik gyöktőkét akarjuk keresni, akkor a^n összehasonlítjuk az $1, b^n, 2^n \ldots\ldots$ sorozattal. Mindkét esetre általánosan szólva a a sorozat két tagja közé fog esni, pl.

$$(b-1)^n < a < b^n$$

felírjuk most $b^n - a = h$ vagyis $a = b^n - h = b^n\left(1 - \frac{h}{b^n}\right)$; itt $h < b^n$ így $\frac{h}{b^n}$ valódi tört, így $\sqrt[n]{a} = b \cdot \left(1 - \frac{h}{b^n}\right)^{\frac{1}{n}}$ kifejtésében az $\left(\frac{h}{b^n}\right)^{\frac{1}{n}}$ tényező a binomiális tétel segítségével egyszerűen kiszámítható, tehát $\sqrt[n]{a}$ is meghatározható.

Ha $\alpha = \frac{1}{n}$ akkor a binomiális együttható

$$\binom{\frac{1}{n}}{k} = \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)\left(\frac{1}{n}-2\right)\ldots\ldots\left(\frac{1}{n}-k+1\right)}{1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ldots\ k}$$

$$= (-1)^{k-1}\frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)\ldots\ldots\ldots(k-1)(n-1)}{k!\ n^k}$$

E szerint $\alpha = \frac{1}{n}$ esetében a binom hatványainak előjelei váltakoznak.

$$(1+x)^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{n}x - \frac{n-1}{2!\,n^2}x^2 + \frac{(n-1)(2n-1)}{3!\,n^3}x^3 - \frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)}{4!\,n^4}x^4 + \ldots\ldots$$

A binomiális tétel alkalmazása a limesz kiszámításának bemutatásával.

A binomiális tétel szerint

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \ldots\ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^k} + \ldots\ldots$$

$$= 1 + 1 + \frac{1-\frac{1}{n}}{2!} + \ldots\ldots \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}{k} + \ldots + \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)}{n!} + \ldots$$

Kimutatjuk, hogy ez a sor pozitív, vagy negatív egész n esetén az irracionális e-vel, a természetes log. rendszer alapszámával egyenlő.

Nagyobbítsuk meg $k!$-t a sor tagjait azáltal, hogy a számlálóból a levonandó törtet elhagyjuk.

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < n + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots\ldots + \frac{1}{k!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots\ldots = e$$

tehát $\left(1+\frac{1}{k}\right)^n < e$

Most kisebbítsük meg a sor tagjait és magát a sort is.

$$(1+\tfrac{1}{n})^n > 1+1+\frac{1-\frac{1}{n}}{2!}+\frac{(1-\frac{2}{n}}{3!}+\ldots+\frac{(1-\frac{k-1}{n})}{k!}+\frac{(1-\frac{k}{n})}{(k+1)!}$$

Mint hogy azonban egész általánosan áll a tétel, mely szerint $(1-h)^k > 1-kh$ (bizonyítása az $(1+h)^k > 1+kh$ bizonyításával teljesen equivalens), azért

$$(1+\tfrac{1}{n})^n > 1+1+\frac{1-\frac{1}{n}}{2!}+\frac{1-\frac{2}{n}}{3!}+\ldots+\frac{1-\frac{(k-1)}{n}}{k!}+\frac{1-\frac{k}{n}}{(k+1)!} = 1+1+\tfrac{1}{2!}+\tfrac{1}{3!}+\ldots\ldots+$$
$$+\tfrac{1}{k!}+\tfrac{1}{(k+1)!}-\tfrac{1}{n}\left(\tfrac{1}{2!}+\tfrac{2}{3!}+\ldots\ldots+\tfrac{(k-1)}{k!}+\tfrac{k}{(k+1)!}\right)$$

A zárójeles kifejezésben minden tag valódi tört, ezek helyett mindenhol 1-et írva, az egyenlőtlenség még inkább áll:

$$(1+\tfrac{1}{n})^n > 1+1+\tfrac{1}{2!}+\tfrac{1}{3!}+\ldots\ldots+\tfrac{1}{k!}+\tfrac{1}{(k+1)!}-\tfrac{k}{n}$$

De az n szám felett még rendelkezünk. Válasszuk meg úgy, hogy $\frac{1}{(k+1)!} > \frac{k}{n}$ vagyis hogy $n > k(k+1)!$ legyen, ekkor $\frac{1}{(k+1)!}-\frac{k}{n}$ a két utolsó tag $\frac{1}{(k+1)!}-\frac{k}{n}$ pozitív lesz, tehát elhagyva az egyenlőtlenség még nagyobb lesz

$$(1+\tfrac{1}{n})^n > 1+1+\tfrac{1}{2!}+\tfrac{1}{3!}+\ldots\ldots+\tfrac{1}{k!}$$

A jobb oldal az e-nek k első tagja, ha k-t elég nagynak választjuk meg, akkor elérhetjük, hogy a jobb oldal csak igen keveset különbözjék az e értékétől: $(1+\frac{1}{n})^n > e-\varepsilon$ vagyis az $(1+\frac{1}{n})^n$ e és $e-\varepsilon$ közé kerül, ami azt mondja ki, hogy $e-(1+\frac{1}{n})^n < \varepsilon$ illetőleg

$\underline{\lim (1+\frac{1}{n})^n = e}$ ami bizonyítandó volt.

Mint hogy általánosan $(1-h)^k > 1-kh$, azért $(1-\frac{1}{n^2})^n > 1-\frac{n}{n^2}$ vagyis helyes a köv. egyenlőtlenség:

$1 > (1-\frac{1}{n^2})^n > 1-\frac{1}{n}$ azonban $\lim \frac{1}{n} = 0$ vagyis $\lim (1-\frac{1}{n^2})^n = 1$.

$(1-\frac{1}{n^2})^n = (1-\frac{1}{n})^n (1+\frac{1}{n})^n$ limeselve tényre

$\lim (1-\frac{1}{n^2})^n = \lim (1-\frac{1}{n})^n \lim (1+\frac{1}{n})^n$

de $\lim (1-\frac{1}{n^2})^n = 1$ és $\lim (1+\frac{1}{n})^n = e$ tehát

$\lim (1-\frac{1}{n})^n = \frac{1}{e}$ Reciprokra, tényre $\underline{\lim (1-\frac{1}{n})^{-n} = e}$

Ezzel tehát pozitív vagy negatív egész n-ekre nézve egyformán áll a tétel, hogy $\lim (1+\frac{1}{n})^n = e$.

Képzetes számok.

Az a körülmény, hogy negatív mennyiségből nem tudtunk páros gyököt vonni, tette szükségessé a képzetes (imaginarius) meny-

mennyiségek bevezetését.

A képzetes mennyiségekkel éppen úgy, mint a valós mennyiségekkel, egyenlőségeket származtathatunk. A képzetes egység az a mennyiség, melynek négyzete -1-et ad eredményül $i^2=-1$. Eszerint bi képzetes mennyiség alatt azt a számot értjük, $\sqrt{-b^2}$-ből úgy adódó összegarra, mint b a valós egységből. Ha így bi alakú számot tisztán képzetesnek nevezünk, akkor ha a tiszta képzetes számhoz valós számot járul, akkor a komplex számokat nyerjük. Ilyen komplex szám: $a+bi$

A komplex számok a legáltalánosabb számok, ha u. is $a+bi$ komplex számnál $b=0$, akkor valós számot, míg ha $a=0$, akkor tiszta képzetes számot kapunk.

Az egyenlőség definíciója a komplex számkörben módosul, amennyiben két komplex számot egyenlőnek mondunk, ha a valós és a képzetes részek külön-külön egyenlők. Tehát $a+bi=c+di$ ha $a=c$ és $b=d$

Itt is áll a törvény, hogyha két mennyiség egy harmadikkal egyenlő, akkor a két mennyiség külön-külön is egyenlő.

Áll továbbá a tétel, hogyha $a+bi=c+di$ akkor $c+di=a+bi$.

Megjegyezzük, hogy a komplex számkörben a kisebb, vagy nagyobb értelemben nem használjuk.

Operációk komplex számkörben.

Az összeadást úgy végezzük, hogy külön a reális és külön a képzetes részeket adjuk össze:

$$a+bi+c+di=(a+c)+(b+d)i$$

Az összeadás kommutatív és asszociatív törvényes itt is érvényben van marad.

A különbség definíciója marad a régi. Ennek alapján a kivonást elvégezhetjük. Ha u. is: $a+bi-(c+di)=x+yi$ jelöljük, akkor a különbség definíciója szerint

$$a+bi=x+yi+c+di, \text{ miből } a=x+c$$

és $b=y+d$ vagyis $x=a-c$, $y=b-d$, tehát

$$a+bi-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$$

A kivonást tehát úgy végezzük, hogy külön a reális, külön a

képzetes részeket egymásból kivonjuk.

A szorzást úgy definiáljuk, hogy a szorzás három alaptörvénye itt is érvényben maradjon:

$1 \cdot i = i \cdot 1 = i \quad , \quad bi = b \times i$; a definíció szerint $i\,i = i^2 = -1$

Ezeket tekintetbe véve a szorzás disztributív tulajdonságát fönntartva: $(a+bi)(c+di) = (ac-bd)+(ad+bc)i$

Nézzük meg, hogy itt mikor 0 a szorzat? Nyilvánvalóan akkor, ha a szorzat mindkét része külön-külön 0. Vagyis, ha

$$ac - bd = 0 \quad \text{és} \quad ad + bc = 0$$

Emeljük e két egyenletet négyzetre és adjuk össze, akkor nyerjük:

$$a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2 = (a^2+b^2)(c^2+d^2) = 0$$

Ez azonban csak akkor lehet 0, ha a tényezők egyike 0: $a^2+b^2=0$, (ha $a=0$ és $b=0$. Vagyis eredményül nyerjük, hogy a szorzat lex tényezők szorzata is csak akkor lehet nulla, ha a tényezők valamelyike 0.

Az osztást a hányados definíciójára támaszkodva végezzük. Jelöljük $\frac{a+bi}{c+di}$ hányados értékét $x+yi$-vel, akkor a hányadosnak definíciója szerint:

$$a+bi = (x+yi)(c+di)$$

De akkor a szorzás szabálya szerint

$$a = cx - dy \quad \text{és} \quad b = dx + cy$$

Ha az első egyenletet c-vel, a másodikat d-vel, majd az elsőt -d-vel, a másodikat pedig c-vel szorozzuk, s a két egyenletet összeadjuk, nyerjük, hogy

$$(c^2+d^2)x = ac+bd \quad \text{és} \quad (c^2+d^2)y = -ad+bc$$

Ha az osztó $c+d$; nem egyenlő nullával, akkor c^2+d^2 sem egyenlő nullával; így szabad vele osztani s akkor

$$x = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} \quad \text{és} \quad y = \frac{-ad+bc}{c^2+d^2}$$

vagyis

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{-ad+bc}{c^2+d^2}\,i$$

Legyen itt $a=1$ és $b=0$, akkor $\frac{1}{c+di} = \frac{c}{c^2+d^2} - \frac{d}{c^2+d^2}i$, ami azt mutatja, hogy complex szám reciprokja szintén complex szám lesz szám.

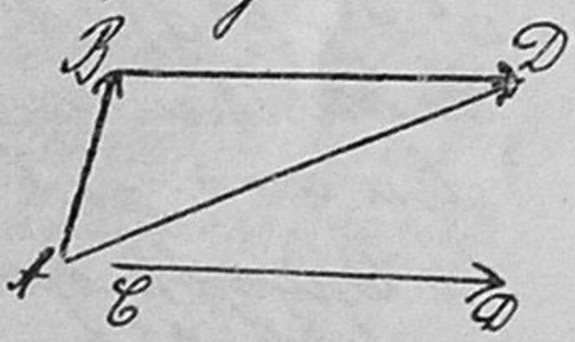
A complex számok ábrázolása.

A complex számokat vektorokkal ábrázoljuk. Vektornak nevezünk egy meghatározott nagyságú és irányú vonalat.

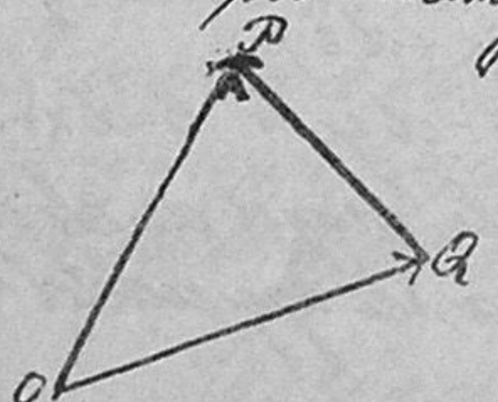
Mi csak egy síkbeli „sebes" vektorokkal foglalkozunk.

Két vektort egyenlőnek mondunk, ha egyenlő nagyságúak és egyirányúak. Ebből következik, hogy párhuzamos eltolással a vektor nem változik s így az sík minden vektora közös kezdőpontba hozható. Ha egy pontok által, mint kezdőpontból húzott vektorok végpontjai olyan sokaságot alkotnak, mint a síkbeli összes pontok, és ezenkívül a sík minden pontjához tartozik egy vektor-forditva, minden vektorhoz egy síkbeli pont.

Vektorok összeadása. Két vektor összegét kapjuk, ha az egyik vektor kezdőpontját párhuzamos eltolással a másikának végpontjába hozzuk, s a szabad kezdőpontot (A) összekötjük a hozzáadd végpontjával (D') Így $AB + CD = AD'$



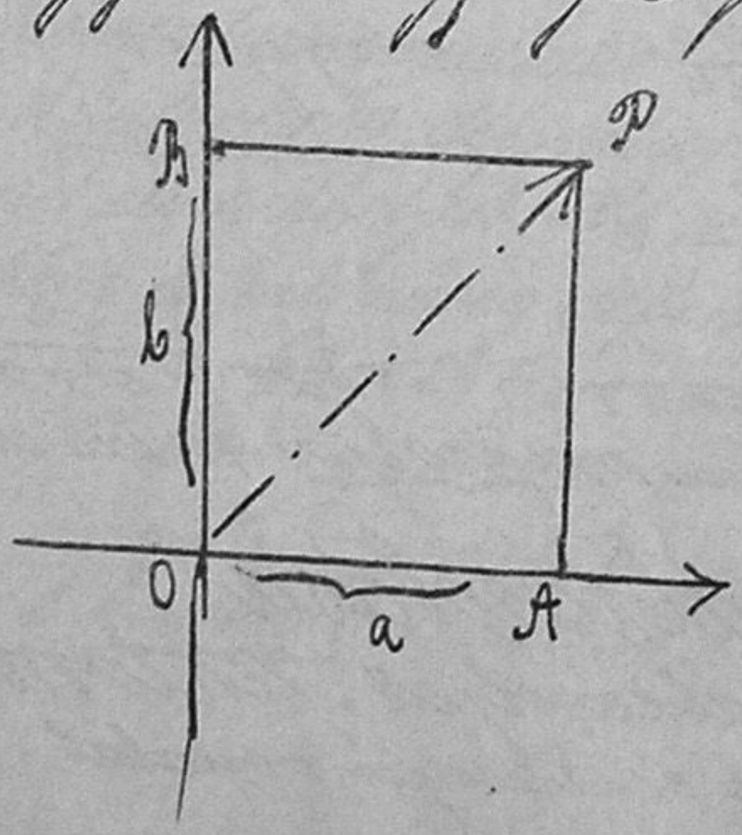
Vektorok kivonása. Ha két vektort közös kezdőpontba hozzuk, s a kivonandó végpontjából a kisebbítendő végpontjába vektort húzunk, akkor a különbségi vektort nyerjük.



Így $OP - OQ = QP$.

A komplex számokkal való dbrázolása a kör. képen történik

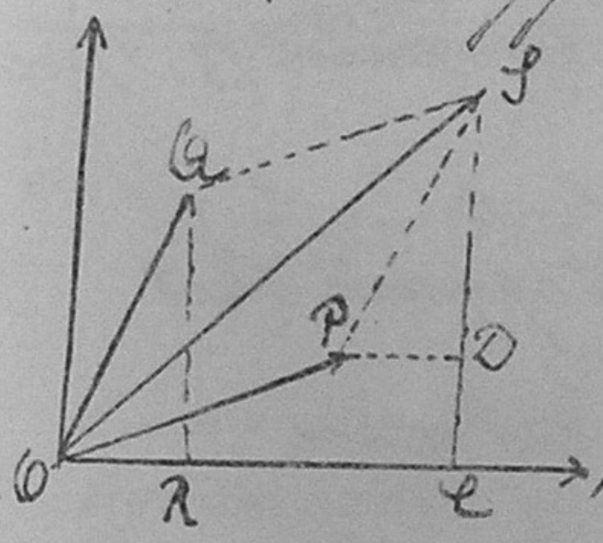
Két egymásra merőleges végtelen hosszú egyenes (koordináta tengelyek) metszőpontjából az egyik egyenesre a complex szám valós részét a másikra a képzetes részét rakjuk fel a megállapított hosszegységgel. az így nyert pontokban merőlegeseket állítunk a tengelyekre szepen merőlegesek metszőpontjával összekötjük a tengelyek metszőpontját (origó) és így nyert vektor illetőleg az nyert metszéspont képviseli a síkban az illető complex számot. Így $a+bi$ complex szám megfelelő pontja P lesz.



Ilyen ábrázolással minden complex számhoz egy vektor s fordítva minden-

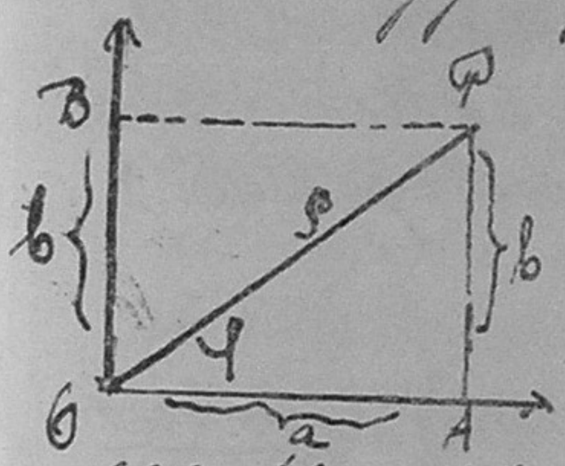
den vectorhoz egy complex szám tartozik.

A complex számok összeadását teljesen fedi a vectorok összeadása. Ha negyzet



$a+bi$ complex számnak megfelel OB és $c+di$ complex számnak megfelel az OA vector, akkor a két vector összege az előbbiek szerint OP. A két complex szám összege pedig $(a+c)+(b+d)i$, de ezen összeg complex számnak éppen az OP vector felel meg, mert $OAB\triangle \cong PPD\triangle$ s így $OE = a+c$ és $EP = b+d$.

Egy vectort a síkban jellemezhetünk a vector hosszával (a vector abszolut értéke vagy modulusa) és a tengellyel képezett irányszögével, mely pozitiv, vagy negativ, azaszerint, amint az óramutató irányával ellentétes, vagy megegyező irányu.



A vector abszolut értékét ρ-val, irányszögét φ-vel szokás jelölni. Egy negyszögben vectorhoz végtelen sok irányszög tartozik, melyek egymástól 2π egész számu szöggyobnyi szögben különböznek. Ellenben $a = \rho\cos\varphi$ és $b = \rho\sin\varphi$, azért a complex szám uj alakja az u.n. polar-coordinatás alakja: $a+bi = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

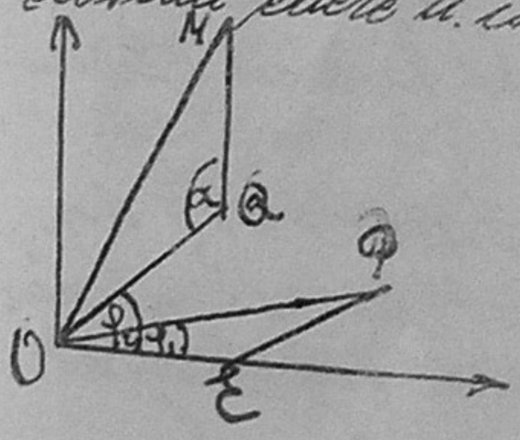
Ezen uj alakot főlhasználva a complex számok szorzását, osztását és hatványozását egyszerübben végezhetjük el.

Egy $(a+bi)(c+di) = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot\rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$

$= \rho_1\rho_2[\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)$

$= \rho_1\rho_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]$

Ezek alapján a szorzat vector helyét is főlépeshetjük: a szorzat vector abszolut értéke u. is $\rho_1\rho_2$ az irányszöge pedig $\varphi_1+\varphi_2$



Vegyük fel a hosszegyenget OE hosszban s a $\varphi_1+\varphi_2$ szögnél húzzuk meg az EM irányt, azután a hagyobb szögü vector végpontjából (Q) rakjuk föl az E-nél levő a szöget. A nyert $QAM\triangle \sim OEP\triangle$ tehát $QM : QA = OP : OE$

vagy $OM: \varrho_2 = \varrho_1 \cdot 1$ miből $OM = \varrho_1 \varrho_2$. M nyilván M vég-
tehát tényleg $\varrho_1 \varrho_2$ nagyságú és $\varphi_1 + \varphi_2$ irányú.

Jelöljük röviden a $\varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ complex számot (ϱ, φ)-vel, akkor a szorzás szabálya szerint:

$$(\varrho_1, \varphi_1)(\varrho_2, \varphi_2) \cdots (\varrho_n, \varphi_n) = (\varrho_1 \varrho_2 \cdots \varrho_n, \varphi_1 + \varphi_2 \cdots + \varphi_n)$$

A hatványozásnál minden tényező egymásával egyenlő, tehát

$$(\varrho, \varphi)^n = (\varrho^n, n\varphi)$$

Az osztásnál jelöljük a hányadost (ϱ, φ)-vel akkor

$$\frac{(\varrho_1, \varphi_1)}{(\varrho_2, \varphi_2)} = (\varrho, \varphi)$$ A hányados definíciója szerint azonban

$$(\varrho, \varphi)(\varrho_2, \varphi_2) = (\varrho_1, \varphi_1)$$ vagy $(\varrho\varrho_2, \varphi + \varphi_2) = (\varrho_1, \varphi_1)$

tehát $\varrho\varrho_2 = \varrho_1$ és $\varphi + \varphi_2 = \varphi_1$ miből $\varrho = \frac{\varrho_1}{\varrho_2}$ és $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$

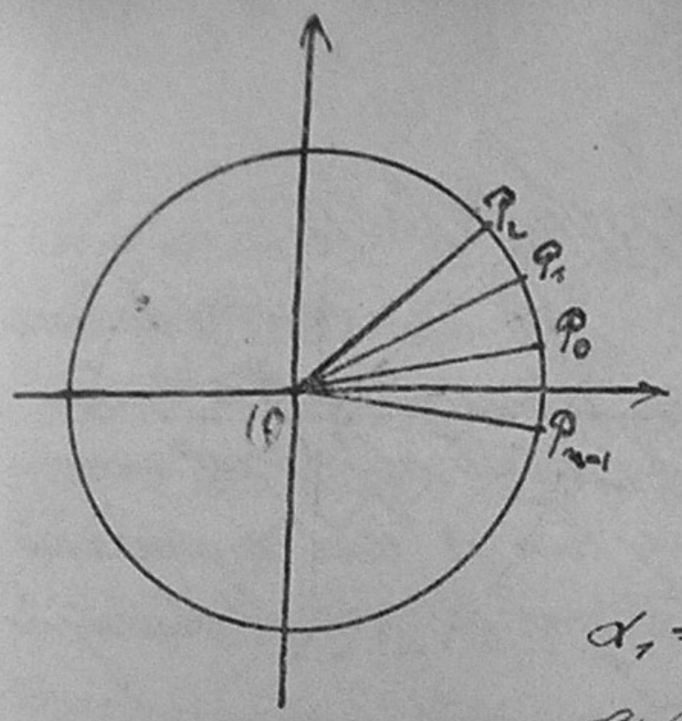
Az osztásnál tehát a hányados olyan vektor lesz, melynek abszolút értéke az osztandó és osztó abszolút értékének hányadosa, az irányszöge pedig a két vektor irányszögének különbségével egyenlő:

$$\frac{(\varrho_1, \varphi_1)}{(\varrho_2, \varphi_2)} = \left(\frac{\varrho_1}{\varrho_2}, \varphi_1 - \varphi_2\right)$$

Most kimutatjuk, hogy a complex számok bevezetésével a gyökvonás minden esetben elvégezhető". A gyökvonás definíciója majd, akkor $(r, \alpha)^n = (\varrho, \varphi)$ vagy $r^n = \varrho$, $n\alpha = \varphi + 2k\pi$, tehát $r = \sqrt[n]{\varrho}$ hol ϱ pozitív, tehát tudunk belőle gyököt vonni. $\alpha = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}$. Eszerint $\sqrt[n]{(\varrho, \varphi)} = \left(\sqrt[n]{\varrho}, \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)$

Látjuk tehát, hogy a gyökvonást minden esetben el tudjuk végezni; a kérdés most csak az, hogy ha egy számból n-dik gyököt vonunk, akkor általában hány megoldást kapunk? Könnyen látjuk, hogy éppen n számot

Pl. már tudjuk, hogy egy megoldásból abszolút értéke $r = \sqrt[n]{\varrho}$ lesz. Húzzunk tehát r sugárral a kezdőpont körül kört, akkor nyilvánvaló, hogy az összes megoldásoknak megfelelő vektorok végpontjai ezen körön lesznek.



A vectorok irányszögei $\alpha = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}$ vegyük $k=0$, akkor az első megoldásnál $\alpha_0 = \frac{\varphi}{n}$. Jelöljük a $(\sqrt[n]{r}; \alpha_0)$ vektor végpontját P_0-lal.

A többi megoldást kapjuk, ha $k = 1.2 \ldots (n-1)$. Ekkor

$$\alpha_1 = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}; \quad \alpha_2 = \frac{\varphi}{n} + \frac{4\pi}{n}, \ldots \alpha_{n-1} = \frac{\varphi}{n} + \frac{2(n-1)\pi}{n}$$

a megfelelő pontok $P_1\ P_2 \ldots P_{n-1}$.

Ha $\alpha = \frac{\varphi}{n} + \frac{2n\pi}{n}$, akkor ismét a P_0 pontot kapjuk, míg az eddigi megoldások egymástól mind különböző, tehát $\sqrt[n]{(r;\varphi)}$ különböző számú megoldást ad. Kivételes az az eset is, mikor $(r;\varphi) = 0$, mert 0-nak abszolútértéke megint 0.

Jelölések általánosítása. Minthogy a műveleti alaptörvények a komplex számkörben csakúgy érvényben vannak, mint az eddigi reális (valós) számkörben, ezért jelöléseinket általánosítva a továbbiakban a szám alatt komplex számot is értünk. A szám abszolút értékét két vonás közt jelöljük: $|a|$. Ha $a = a_1 + b_1 i$, akkor ennek abszolút értéke $|a| = r = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$

Az abszolút értékekkel nézve a komplex számkörben is érvényesek a következő tételek:

$$|a+b| \leqq |a| + |b| \quad \text{és} \quad |a-b| \leqq |a| + |b|$$

Szavakban: komplex számok összegének abszolút értéke egyenlő, vagy kisebb, mint az összeadandók abszolút értékeinek összege.

Két komplex szám különbségének abszolút értéke egyenlő, vagy kisebb, mint a kisebbítendő és kivonandó abszolút értékének összege.

Ez a két tétel a vektorok összeadásából és kivonásából magától adódik. A háromszög tulajdonságánál fogva is, hogy az összeg vektor (abszolút értéke) mindég kisebb, mint a másik két vektor összege és a különbség vektor is egyenlő, vagy kisebb, mint a kisebbítendő és kivonandó vektor összege.

Hasonlóképpen áll a szorzásra is; hogy $|a.b| = |a||b|$ (ennek a szorzás definíciója alapján) és az osztásra (igazolás a definíció szerint) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$. A hatványozásnál pedig $|a^n| = |a|^n$

A limesz fogalma complex számkörben.

Legyen a complex számokban $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n \ldots$ valamely sorozat limesze A vagyis $|A - a_{n+k}| < \varepsilon$. Ez geometriailag azt jelenti, hogy a számsorozat ábrázoló pontjai egy bizonyos n-től kezdve fekszenek az A szám körüli ábrázoló pontjához, hogy ha A-nál egy negyedik kört húzunk, akkor az n-edik tagon túli összes tagok ábrázoló pontjai ebben a körben a körbeli síkjának belsejében vannak. Legyen

$$a_0 = \alpha_0 + \beta_0 i, \quad a_1 = \alpha_1 + \beta_1 i, \quad a_2 = \alpha_2 + \beta_2 i, \ldots a_n = \alpha_n + \beta_n i \text{ és}$$

$$A = A + Bi$$

akkor a limesz általában definíciója szerint A akkor lesz a complex számsorozatnak limesze, ha $|A+Bi - (\alpha_{n+k} + \beta_{n+k} i)| < \varepsilon$ vagy is

$$|A - \alpha_{n+k} + (B - \beta_{n+k}) i| < \varepsilon$$

Innen egy complex szám abszolut értéke így fejezhető ki:

$$|A - \alpha_{n+k} + (B - \beta_{n+k}) i| = \sqrt{(A - \alpha_{n+k})^2 + (B - \beta_{n+k})^2}$$

a jobboldal pedig $< \varepsilon$ ha külön

$$|A - \alpha_{n+k}| < \varepsilon' \text{ és } |B - \beta_{n+k}| < \varepsilon'$$

vagyis ha $\lim \alpha_n = A$ és $\lim \beta_n = B$

Ezek szerint kimondhatjuk, hogy egy complex sorozatnak akkor van limesze, ha külön a tagok valós és külön a képzetes részeinek van limesze. A limesz reális része pedig egyenlő a tagok reális részeinek, képzetes része pedig egyenlő a tagok képzetes részeinek limeszével.

Bebizonyítjuk, hogy a tétel megfordítva is áll, azaz ha $\lim \alpha_n = A$ és $\lim \beta_n = B$ akkor $\lim (\alpha_n + \beta_n i) = A + Bi$

A feltételek szerint n. is

$$|A - \alpha_{n+k}| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ és } |B - \beta_{n+k}| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Ezt figyelembevéve, tényleg nyerjük, hogy

$$|A + Bi - (\alpha_{n+k} + \beta_{n+k}) i| \leqq |A - \alpha_{n+k}| + |(B - \beta_{n+k}) i|$$

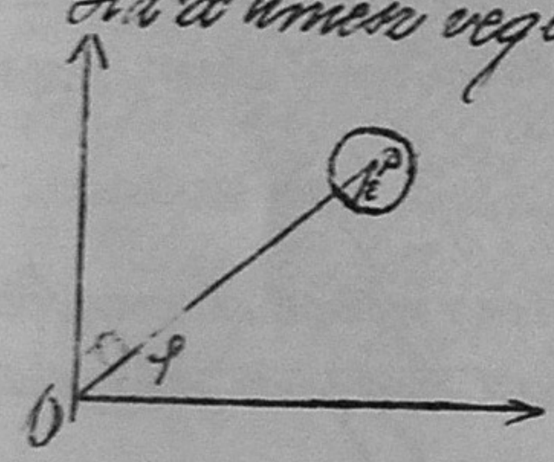
$$= |A - \alpha_{n+k}| + |B - \beta_{n+k}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

vagyis $\lim (\alpha_n + \beta_n i) = A + Bi$

A complex számsorozatban is egy sorozatnak akkor véges határértéke a limesz,

ha a tagok az n-dik tagon túl egy megadott N számon felül emelkednek, tehát ha $|a_{n+k}| > N$. Geometriailag ez azt jelenti, hogy a megadott N-nél minta sugárral az O kezdőpont körül kört húzunk, akkor az n-dik tagon túli összes tagok ábrázoló pontjai ezen körön kívül fekszenek.

Mivel hogy $|a_n| = \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2}$ azért végtelen lineáris esetén nem tudjuk megmondani, hogy vajjon a complex számok valós vagy képzetes része, avagy mind a kettő" a végtelenbe nő-e a végtelenbe.



Ha a lineáris vége, s annak ábrázoló pontja P akkor mint tudjuk az n-dik tagon túli összes tagok ábrázoló pontjai a P körül E sugárral húzott körön belül vannak, amiből következik, hogy ilyenkor az n-dikon túli tagoknak úgy a valósi mint a képzetes része igen kicsinyt különbözik egymástól.

De ilyenkor a megfelelő irányszögek is nagyon keveset különböznek egymástól s a lineáris irányszögétől, tehát az irányszögeknek is van lineárisuk.

Ha a lineáris 0, akkor szükségképpen úgy a valósi, mint a képzetes részek lineárisa is nulla.

Végtelen, vagy null lineáris esetén a szögekre nézve lineárist megállapítani nem lehet.

Végtelen sorok a complex számkörben.

Legyen egy végtelen sor $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots a_n + \ldots$ a hozzá tartozó adott pedig $s_1, s_2 \ldots\ldots s_n \ldots\ldots$

Mondjuk, hogy a sor akkor conv., ha a sorozatnak véges lineáris van, és akkor div., ha a sorozatnak nincs lineáris, vagy a lineáris végtelen.

U. az a convergentia kritériumot tartjuk fönn a complex számkörben is. Ha tehát a sor tagjai: $a_1 = \alpha_1 + \beta_1 i$

$a_2 = \alpha_2 + \beta_2 i$

$\ldots\ldots\ldots$

sorozatnak van lineáris: $\lim s_n = s = A + Bi$, akkor a sor conv. és a sorhoz tartozó összeg s.

Most azonban $s_n = a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n + (\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n) i$

ennek pedig akkor van lineáris amint tudjuk, ha külön a valósi

és külön a képzetes részekből is vane konvergens.
Ha tehát $\sum \alpha_n = A$ és $\sum \beta_n = B$ vane külön-külön is convergens. Emlitjük, hogy ha a két sor feltételtől conv. akkor az eredeti sor is feltétlenül conv. A két sor akkor feltétlenül conv., ha az abszolut értékek sora $\sum |\alpha_n|$ és $\sum |\beta_n|$ conv.
De $\varrho_n = \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2} \leq |\alpha_n| + |\beta_n|$ tehát $\sum \varrho_n \leq \sum |\alpha_n| + \sum |\beta_n|$
Vagyis, ha $\sum |\alpha_n|$ és $\sum |\beta_n|$ sor conv., akkor egyuttal az eredeti sor abszolut értékeinek a sora $\sum \varrho_n$ is convergens.
Fordítva is áll: azaz, ha a sor abszolut értékeinek sora conv., akkor külön a reális s külön a képzetes részek sora is feltétlenül conv., mert:

$$\varrho_n \geq |\alpha_n| \text{ miből } \sum \varrho_n \geq \sum |\alpha_n|$$
$$\text{és } \varrho_n \geq |\beta_n| \text{ miből } \sum \varrho_n \geq \sum |\beta_n|.$$

Tehát hogy ez a sor feltétlenül conv. legyen azaz mérve a complex számkörben is a szükséges és elégséges feltétel az, hogy az abszolut értékek sora convergens legyen.

Általánositsuk most a geometriai sort a complex számok körében.
Legyen az $1 + a + a^2 + \ldots + a^n + \ldots$ geometriai sorunk $a = \varrho(\cos\varphi + i \sin\varphi)$
tehát $a^n = \varrho^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$ az abszolut értékek sora
$1 + \varrho + \varrho^2 + \varrho^3 + \ldots + \varrho^n + \ldots$ Ez a reális számkörben geometriai sor, tehát conv., ha $\varrho < 1$ és divergens ha $\varrho \geq 1$
De ha az abszolut értékek sora convergens, akkor az eredeti sor feltétlenül conv., ha pedig az abs. értékek sora divergens, akkor az eredeti sor vagy sehol sem div., vagy csak feltételesen conv.
Tehát a geometriai sor a complex számkörben feltétlenül conv., ha $\varrho < 1$; feltételesen conv., vagy divergens, ha $\varrho \geq 1$.
Ha $\varrho = 1$ akkor bizonyan mondhatjuk, hogy a geometriai sor divergens, mert ekkor az általános tag limese (a convergentia szükséges feltétele) nem lehet zéró. Ugyis ekkor $a^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi$ ep pedig sohasem lehet zéró.

Végtelen szorzatok.

Ha végtelen sok számot a szorzás jelével kapcsolunk össze, akkor végtelen szorzatot kapunk: $a_1 . a_2 . a_3 \ldots \ldots a_n \ldots \ldots$

A végtelen sorozatot kapcsolatba hozzuk a köv. végtelen sorozattal:

$P_1, P_2, P_3, \ldots\ldots P_n, \ldots\ldots$ hol

$P_1 = a_1,\ P_2 = a_1 . a_2,\ P_3 = a_1 . a_2 . a_3, \ldots\ldots P_n = a_1 . a_2 . a_3 \ldots a_n$

Ha ezen P sorozatnak limese van, akkor azt mondjuk, hogy a sorozat conv. és értéke $\lim P_n = P$. Ha a sorozatnak nincs limese, akkor a sorozat divergens; ezt az esetet vizsgálódásainkból kizárjuk.

Ha a végtelen sorozat factorai közt 0 is van, akkor természetesen a sorozat értéke szintén nulla. Ily esetekkel sem fogunk foglalkozni.

Lehet azonban, hogy a factorok közt nem fordul elő 0 és mégis a sorozat értéke nulla. Ilyen esetben azt mondjuk, hogy a sorozat **tágabb értelemben vett convergens**. Lássunk a végtelen sorozatokra példát.

I. Például szolgáljon:

$$\frac{1.3}{2.2} \cdot \frac{2.4}{3.3} \cdot \frac{3.5}{4.4} \ldots\ldots \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+1)} \ldots\ldots$$ végtelen sorozat, hol

$$P_n = \frac{n! \ \frac{(n+2)!}{2}}{(n+1)!\,(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{n+2}{2} = \frac{1}{2} \ \frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}}$$

$\lim P_n = \frac{1}{2}$ mert $\lim \frac{2}{n} = 0$, $\lim \frac{1}{n} = 0$

Ennek a végtelen sorozatnak tehát véges és nullától különböző ($\frac{1}{2}$) értéke van, mert $\lim P_n = \frac{1}{2}$.

II. Példa: $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} \ldots\ldots \frac{n}{n+1} \ldots\ldots$

végtelen sorozatnál $P_n = \frac{1}{n+1}$ s $\lim \frac{1}{n+1} = 0$ tehát itt a sorozat értéke nulla, vagyis a végtelen sorozat csak tágabb értelemben véve convergens.

Ha egy sorozatnak nullától különböző véges értéke van, akkor a végtelen sorozatot **szorosabb értelemben véve** mondjuk conv.-nek.

A szorosabb értelemben vett convergens sor reciprokja és sorozat szintén szorosabb értelemben véve conv., mert ha $\lim P_n = P$ véges és nullától különböző, akkor $\lim \frac{1}{P_n} = \frac{1}{P}$ is véges és nullától különböző. Ellenben a tágabb értelemben vett conv. sorozat reciprokja divergens, mert ha $\lim P_n = 0$ akkor $\lim \frac{1}{P_n} = \infty$

Convergentia feltételek a szorosabb értelemben vett conv. sorozatoknál.

Legyen az $a_1 . a_1 \ldots\ldots a_n$.. végtelen sorozat szorosabb

értelemben véve conv., mert $P_1, P_2 \ldots P_n$ sorozat limesze $\lim P_n = P$ tetszés 0-tól különböző véges szám. De ha az a sorozat limeszpel bir akkor szabályszerűen $|P_{n+k} - P_{n+k}| < \varepsilon$ ha $n > n'$ jól választottuk meg. Legyen a P sorozatnál $k > k_1$ akkor

$|P_{n+k} - P_{n+k_1}| = |P_{n+k_1}(a_{n+k_1} a_{n+k_2} \ldots a_{n+k} - 1)| < \varepsilon$

vagy $|P_{n+k_1}| \cdot |a_{n+k_1} a_{n+k_2} \ldots a_{n+k} - 1| < \varepsilon$

P_{n+k_1} nem lehet 0 sem ∞, ezért meg tudjuk mondani azt a m-et, hogy $|P_{n+k_1}| > m$, ha ezzel átosztunk: $|a_{n+k_1} a_{n+k_2} \ldots a_{n+k} - 1| < \frac{\varepsilon}{m} = \eta$ tetszés, de megadható kis számnál kisebb. Ha tehát $|a_{n+k_1} \cdot a_{n+k_2} \ldots a_{n+k} - 1| < \eta$ egyenlőtlenség bármely k-ra fennáll, (mely k-ra nézve, hogy a végtelen sorozatnak első hányadik tagjait vesszük össze, az egyáltalán nem lényeges, az csak annyiban befolyásolja, hogy a P sorozat határértékét milyen pontossággal meghatározhatjuk. Ha az egyenlőtlenség fennáll a most említett értelemben vett convergentia szükséges és elégséges feltétele. — Egy másik szükséges, de nem elégséges feltétel a végtelen sorozatok szóban forgó convergentiájára, ha épen egyenlőtlenségnél $k = k_{n+1}$; ekkor ugyanis

$|a_{n+k_{n+1}} - 1| < \eta$ vagyis $\lim a_n = 1$ azaz a végtelen sorozatok szóban forgó értelemben vett convergentiájához szükséges feltétel, hogy a tagtorok egy elég kisérő tagon túl az egység felé közelegjenek, mint limeszhez. Ezen ok miatt jó lesz a szóban forgó értelemben vett convergens sorozat tényezőit összeg, vagy különbség alakban írni:

$a_n = 1 \pm b_n$ Hol $\lim b_n = 1$

A sorozat tagjainak ily módon való átalakítással a végtelen sorozatok vizsgálatát vissza fogjuk vezetni végtelen sorok vizsgálatára.

A végtelen sorozat épen így alakban:

$(1+p_1)(1+p_2)(1+p_3) \ldots (1+p_n) \ldots \quad p_n < 1$

vagy $(1-q_1)(1-q_2)(1-q_3) \ldots (1-q_n) \ldots \quad q_n < 1$

aszerint, amint a factorok nagyobbak, vagy kisebbek 1-nél. Mindkét sorozatnál, ha azt akarjuk, hogy szóban forgó értelemben vett convergentia legyen, akkor a szükséges feltétel, hogy $\lim p_n = 0$ és $\lim q_n = 0$ legyen.

Végtelen sorozatok

$(1+p_1) = P_1$ $\qquad$ $(1-q_1) = Q_1$

$(1+p_1)(1+p_2) = P_2$ $\qquad$ $(1-q_1)(1-q_2) = Q_2$

. . . . . .

$(1+p_1)(1+p_2)\ldots(1+p_n) = P_k$; $\qquad$ $(1-q_1)(1-q_2)\ldots(1-q_n) = Q_n$

ítélhetünk (megalkotott növő, illetőleg fogyó sorozatot:

$P_1 < P_2 < P_3 < \ldots\ldots < P_k < \ldots\ldots$; $\qquad Q_1 > Q_2 > Q_3 \ldots\ldots > Q_n \ldots$

Ha ennek a 2 sorozatnak 0-tól különböző véges limesze van, akkor a fölvett végtelen sorozatok sorosabb értelemben vett véges limeszben convergensek. Ezen sorozatoknak pedig nullától különböző véges limeszük akkor van, ha ki tudunk mutatni a P-k, illetőleg a Q-k-hoz nézve egy felső és egy alsó határt, melyen alkalmasint nagyon sokszorozva is össze, illetőleg alul sem emelkedhetik. Az alsó határ-ra nézve: Ismeretes, hogy $(1+p_1)(1+p_2) = 1+p_1+p_2+p_1p_2$ miből $(1+p_1)(1+p_2) > 1+p_1+p_2$. Három tényezőt összeszorozva:

$(1+p_1)(1+p_2)(1+p_3) > 1+p_1+p_2+p_3+p_3(p_1+p_2)$

(miből az utolsó positiv tagot elhagyva:

$(1+p_1)(1+p_2)(1+p_3) > 1+p_1+p_2+p_3$

Kimutatható, hogy ez a törvényszerűség áll $n = 2, 3$ tényezőre, teljes inductióval kimutatható, hogy ekkor áll $n = 4, 5$ stb tényezőre is. Ha az összeszorzott tényezőket röviden $\Pi(1+p)$-vel (productum) s a p-k összegét a szokásos $\Sigma . p$ -vel jelöljük, akkor tehát általánosan áll, hogy

$$\Pi(1+p) > 1 + \Sigma . p .$$

Ez képezi az első végtelen sorozatnál az alsó határt.

Hasonlóképpen nyerünk egy alsó határt a $\Pi(1-q)$ sorozatra is. Ugyanis $(1-q_1)(1-q_2) = 1-q_1-q_2+q_1q_2$

miből $(1-q_1)(1-q_2) > 1-q_1-q_2$

. . . . . .

$$\Pi(1-q) > 1 - \Sigma . q$$

Állapítsuk meg most a felső határokat. Írjuk fel a kör. identitásokat:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{1+p_1} &= 1 - \frac{p_1}{1+p_1} \\ \frac{1}{1+p_2} &= 1 - \frac{p_2}{1+p_2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \end{aligned}\right\}$$

és szorozzuk ezeket össze. A baloldalon $\frac{1}{\Pi(1+p)}$ fog szerepelni, míg a jobb oldalon

az egynél kisebb számok kerülnek összeszorzására, az előbbi tétel szerint tehát: $\frac{1}{\Pi(1+p)} > 1 - \sum \frac{p}{1+p}$

Mindhogy $\sum \frac{p}{1-p} < 1$, azért a reciprokokból

$$\Pi(1+p) < \frac{1}{1 - \sum \frac{p}{1+p}}$$

Hasonlóképen identicus, hogy $\frac{1}{1-q_1} = 1 + \frac{q_1}{1-q_1}$, $\frac{1}{1-q_2} = 1 + \frac{q_2}{1-q_2}$ ..... } Ha ezeket összeszorozzuk a baloldalon $\frac{1}{\Pi(1-q)}$ – t kapjuk, a jobb oldalon pedig az egynél nagyobb factorok kerülnek összeszorzására, melyekről áll, hogy:

$$\frac{1}{\Pi(1-q)} > 1 + \sum \frac{q}{1-q}$$ reciprokra téve

$$\Pi(1-q) < \frac{1}{1 + \sum \frac{q}{1-q}}$$ Ezzel annyit a két productumot két határ közé tudtuk szorítani:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{1 - \sum \frac{p}{1+p}} &> \Pi(1+p) > 1 + \sum p \\ \text{és } \frac{1}{1 + \sum \frac{q}{1+q}} &> \Pi(1-q) > 1 - \sum q \end{aligned}\right\} \quad (A.)$$

Ezen egyenlőtlenségek mutatják, hogy egyik sorozatnak a tagjai sem növekednek a végtelenbe, vagy közelednek a végtelenbe, mert $\lim P_n = \Pi(1+p_n)$ és $\lim Q_n = \Pi(1-q_n)$ értékek mindég végesek maradnak, ha $\sum p$ és $\sum q$ szók voltak.

A következőkben az (A.) egyenlőtlenségek felhasználásával fogjuk a végtelen szorzat convergentiáját a $\sum p_n$ és $\sum q_n$ sorok természetéből eldönteni:

I. eset. Legyen $\sum p_n$ convergens, kimutatjuk, hogy akkor $\Pi(1+p)$ is conv. U. is, ha $\sum p_n$ conv., akkor $\sum \frac{p_n}{1+p_n}$ is conv, mert a két sor egyenlő rangú tagokból áll és így egyenlő természetű is. Csupán kell a conv. sort két részre, úgy hogy a második sor értéke kisebb legyen egynél. Az $\Pi(1+p)$ szorzatot szintén oszszuk két részre, még pedig úgy, hogy a szorzat véges részében u azon tagok szerepeljenek, melyek $\sum p_n$ véges részében szerepelnek. Az (A.) egyenlőtlenségek első sora szerint a

Tegyük föl, hogy a tagok az n-dik tagon túl egyenlő jelűek, adjas két tag hányadosa pozitiv és úgy közeledik az 1-hez, mint $\frac{1}{n^\alpha}$-hez, hogy attól oly törtben különbözik, melynek számlálója n-től függő változó véges szám, nevezője pedig n^α. Így

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \frac{\vartheta_n}{n^\alpha} \quad \text{hol } \vartheta_n \text{ véges és } \alpha > 1$$

Kérdés, hogy egyen feltételek mellett milyen természetű a sorozat. Az előbb follírt egyenlet áll, minden n-diren túli szomszédos két tagra, tehát:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \frac{\vartheta_n}{n^\alpha}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} &= 1 + \frac{\vartheta_{n+1}}{(n+1)^\alpha} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{u_{n+k+1}}{u_{n+k}} &= 1 + \frac{\vartheta_{n+k}}{(n+k)^\alpha} \end{aligned}\right\}$$ Ha ezeket összeszorozzuk, nyerjük:

$$\frac{u_{n+k+1}}{u_n} = \left(1 + \frac{\vartheta_n}{n^\alpha}\right)\left(1 + \frac{\vartheta_{n+1}}{(n+1)^\alpha}\right) \cdots\cdots \left(1 + \frac{\vartheta_{n+k}}{(n+k)^\alpha}\right)$$

vagy $$u_{n+k+1} = u_n \left(1 + \frac{\vartheta_n}{n^\alpha}\right)\left(1 + \frac{\vartheta_{n+1}}{(n+1)^\alpha}\right) \cdots\cdots \left(1 + \frac{\vartheta_{n+k}}{(n+k)^\alpha}\right).$$

Ha most k-t a végtelenbe növeljük, akkor egy végtelen szorzatot kapunk, melynek értéke adjá meg $\lim_{k=\infty} u_{n+k+1}$ értékét, vagyis a sorozat tagjainak limeszét. A végtelen szorzat értéke pedig az additiv tagok sorától függ. Ez pedig mindjárt az abszolut értékekre térve:

$$\left|\frac{\vartheta_n}{n^\alpha}\right| + \left|\frac{\vartheta_{n+1}}{(n+1)^\alpha}\right| + \cdots\cdots + \left|\frac{\vartheta_{n+k}}{(n+k)^\alpha}\right| < M\left(\frac{1}{n^\alpha} + \frac{1}{(n+1)^\alpha} + \cdots + \frac{1}{(n+k)^\alpha}\right)$$

mert feltevésünk szerint ϑ_n véges marad s így van olyan M, mely minden ϑ-nál nagyobb.

Ha most a másik feltevésünk: $\alpha > 1$ is áll, akkor mint tudjuk a jobboldali sor convergens, de akkor a végtelen sorozat additiv tagjaiból alkotott sor feltétlenül, s így a végtelen szorzat feltétlenül és sorozatbeli elemben vége convergens. De ekkor a $u_1, u_2, \ldots u_n \ldots$ sorozatunknak is véges és nullától kü-

második részére áll, hogy $\Pi(1+p) < \frac{1}{1-\sum \frac{p}{1+p}}$

tehát a végtelen szorzat egy megadható számnál alul marad vagyis convergeál.

II. eset. Legyen $\sum p_n$ divergens, ekkor $\Pi(1+p_n)$ is div, mert

$$\Pi(1+p) > 1 - \sum p$$ és $\sum p$ divergens,

tehát $\Pi(1+p)$ bármely nagy számnál nagyobb (abszolut értékben)

III. eset. Ha $\sum q_n$ conv., akkor $\Pi(1-q)$ is conv.

Összuk m. is a sort és megfelelően a szorzatot megint két részre, akkor a másodikrészre áll, hogy $\Pi(1-q) > 1 - \sum q$

de $\sum q$ kisebb mint egy; tehát $\Pi(1-q)$ nem lehet egyenlő nullal és m. csak az (A.) egyenlőtlenségekből következik, hogy egy megadható számnál felül sem emelkedhetik, tehát ekkor $\Pi(1-q)$ szorzat abszolut értelemben véve conv.

IV. eset. Ha $\sum q_n$ divergens, akkor a $\Pi(1-q)$ tágabb értelemben véve conv., mert $\sum \frac{q_n}{1-q_n}$ divergens és így

$$\Pi(1-q) < \frac{1}{1-\sum \frac{q}{1-q}}$$ – nál a jobboldal limesze 0,

tehát $\Pi(1-q)$ limesze is nulla.

Ezek a tételek megfordítva is állanak. Azaz, ha a $\Pi(1+p)$ vagy $\Pi(1-q)$ szorzatok szorzatabb értelemben véve convergensek, akkor $\sum p_n$ vagy $\sum q_n$ is convergensek.

Ezt a tényt felhasználhatjuk végtelen sorokra végtelen szorzatokkal való megvizsgálásaira.

A harmonikus sornak megfelelő szorzat

$$(1+1)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{n}\right)\ldots = 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \ldots \frac{n+1}{n} \ldots$$

Könnyű belátni, hogy ennek a szorzatnak a limesze végtelen, tehát bar $1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$ harmonikus sor is divergens.

Reális számokból álló végtelen sorozatok.

Kérdés, hogy a végtelen szorzatoknak meg van e a commutativ tulajdonsága, és mily esetekben?

Itt egynél nagyobb és kisebb factorok most a szorzatban egy

azaz végtelen sorimban faradhatlanul stb. folytatjuk az összeadást $(1+p_n)$-ig stb. szorzást $(1-q_n)$-ig stb. akkor. Tegyük fel, hogy az eredeti sorozat konvergens, szükséges, hogy $\lim p_n = 0$, $\lim q_n = 0$ legyen. Most 4 eset lehetséges.

I. Σp_n konvergens és Σq_n is conv., akkor, mint tudjuk még a $\Pi(1+p) = P$, úgy a $\Pi(1-q) = Q$ is sorozatok értelmében véges konvergensek.

Most tekintsük, hogy ebben az esetben a tetszés szerint kevert tényezőkből keletkező új szorzat szintén sorozatok értelmében véve conv., és értéke $P.Q$!

Ily esetben az eredeti sorozatról azt mondjuk, hogy feltétlenül konvergens, még ha a tényezők keverésével a szorzat értéke változik, akkor a végtelen szorzat azok feltétlenül konvergens.

Legyen a kevert szorzat $(1+u_1)(1+u_2)(1+u_3)\ldots\ldots$

Mivelhogy $\Pi(1+p_n) = P$ véges mennyiség, azért meg lehet az n indexet úgy választani, hogy az első n tényező szorzata

$P_n = P - \eta_n$ legyen, akkor $\eta_n < \varepsilon$ és ε egy tetszésszerinti kis számnak megadott szám. Hasonlóképpen $\Pi(1-q) = Q$ szintén véges értékű, tehát itt is jól választott m-mel elérhetjük, hogy $Q_m = Q + \eta_m$ hol $\eta_m < \varepsilon$.

Már most a kevert szorzatnál lehet a tényezőket oly módon venni, hogy a szorzatban P_n-ből minden p és Q_m-ből minden q előjöjjön. Ekkor a véges számú tagokból álló kevert szorzat értéke:

$$U_n = (P-\eta')(Q-\eta'') = PQ - \eta' Q + \eta''(P-\eta')$$

vagy $|U_n - PQ| \leq \eta' |Q| + \eta'' |P-\eta'|$

Mivel P és Q végesek, tehát az η' és η'' mennyiségeknek elég kicsinyre való megválasztásával el lehet érni, hogy a jobboldal egy megadott számnál kisebb legyen, vagyis, hogy $\lim U_n = PQ$ legyen.

II. Legyen Σp_n divergens és Σq_n convergens, akkor, mint tudjuk kiderül, a kevert végtelen szorzat mindig divergens.

II. is, ha Σp_n divergens, akkor, mint tudjuk $\Pi(1+p) = \infty$ és mivel Σq_n convergens, azért $\Pi(1-q) = Q$ véges. Innen előbb a $\Pi(1+p)$ szorzatból tudunk annyi tényezőt összeszorozni, hogy

a szorzat $P_n > \frac{K}{Q}$ legyen. Ha már most a convergens $\Pi(1-q)$ szorzatból az összes faktorokat szorozzuk is össze, méglabor is a levert szorzat értéke $U_n > K$, hol K egy előre megadott tetszés szerinti nagy szám, vagyis ebben az esetben a levert szorzat tényleg divergens.

II. Legyen Σp_n convergens és Σs_n divergens, ekkor a levert szorzat tágabb értelemben vett conv., vagyis az értéke zéró.

Ismeretes, hogy ebben az esetben $\Pi(1+p) = P$ és $\Pi(1-p) = 0$, vagyis $\Pi(1+p)$ szorosabb értelemben véve, míg $\Pi(1-q)$ csak tágabb értelemben vett convergens.

Természetesen ekkor el lehet érni a levert szorzatnál a második szorzat elég nagyszámú tagjainak összeszorzásával, hogy $a_n < \frac{\varepsilon}{P}$ legyen és ekkor akárhány tagot is szorzunk össze a $\Pi(1+p)$ szorzatból a levert szorzat értéke $|U_n| < \varepsilon$ vagyis $\lim U_n = 0$.

Ami bizonyítandó volt.

IV. Legyen Σp_n és Σq_n is divergens. Kimutatjuk, hogy ebben az esetben a levert szorzat értéke mindég tetszőleges, vagyis a levert szorzat feltételesen convergens.

Ha ugyanis akarjuk, hogy a levert szorzat az előírt A értéke legyen, akkor így járunk el: az $(1+p)$ alakú tényezőkből veszünk annyit, hogy a szorzat A-n éppen felülemelkedjék, aztán az $(1-q)$ alakú tényezőkből annyit, hogy a szorzat A-n éppen alul maradjon, ismét az $(1+p)$-kből annyit, hogy a szorzat értéke A-n felülemelkedjék, aztán megint az $(1-q)$-kból annyit, hogy a szorzat A-n alul maradjon, és így tovább. Ez eljárás folytatásában tényezőkhöz jutunk, hogy a szorzat értéke A-ε és A+ε közé kerül, mert $\lim p_n = 0$, és $\lim q_n = 0$. Tehát a szorzat értéke tényleg az előírt A.

Előfordulhat azt is, hogy a szorzat értéke végtelen legyen, ha u. is az $(1+p)$ alakú szorzókat alkalmazva a szorzat értéke az $w_1 + w_2 + \ldots\ldots w_n$ értéssorozatot futja be, míg az $(1-q)$ faktorokkal a szorzat értéke $\frac{w_1}{2}, \frac{w_2}{2}, \ldots\ldots \frac{w_n}{2}$ értéssorozatot járja végig és $\lim w_n = \infty$, akkor a szorzat értéke is végtelen lesz.

Lehet a levert szorzat tágabb értelemben convergens is. Ha t.i. az $(1+p)$ fele szorzók alkalmazásával az $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots\ldots \varepsilon_n$ az $(1-q)$

alkalmazásaiból pedig a $\varepsilon_1, \varepsilon_1^2, \varepsilon_2, \varepsilon_2^2 \ldots \varepsilon_n^2 \ldots$ számok
feltéve és $\lim \varepsilon_n = 0$. Így aztán a kapott állítás a mondott
összefoglalva, mondhatjuk tehát, hogy egy végtelen sorozat akkor
akkor feltétlenül konv. ha $\Sigma |a_n|$ és $\Sigma |b_n|$ konvergensek, vagy a kapott
ve a két feltétel: az $(1+u_1)(1+u_2)\ldots(1+u_n)\ldots$ végtelen
sorozat akkor feltétlenül konv., ha $\Sigma |u_n|$ konvergens. A feltételes kon-
vergentiára tehát itt is az a kritérium, hogy az kiindulási végtelen
sor konv. legyen.

Végtelen sorozatok complex számkörében.

Legyen egy végtelen sorozatnál $u_1 = a_1 + b_1 i$

$u_2 = a_2 + b_2 i$

$\ldots\ldots\ldots\ldots$

$u_n = a_n + b_n i$

$\ldots\ldots\ldots\ldots$

$(1+u_n) = 1 + a_n + b_n i$ tehát ha $(1+u_n) = \varrho_n (\cos\varphi_n + i \sin\varphi_n)$ akkor

$\varrho_n = \sqrt{(1+a_n)^2 + b_n^2}$ és $\sin\varphi = \frac{b_n}{\varrho_n}$

A ϱ_n-et más alakban is kifejezhetjük, ha először két határ közé szorítjuk.

$$\left.\begin{array}{l} \varrho_n \geqq 1 + a_n \\ \varrho_n \leqq |1+a_n| + |b_n| \end{array}\right\}$$

e két relációt egyesíthetjük egy egyenletben:

$\varrho_n = 1 + a_n + \lambda b_n$ hol λ egy pozitiv valódi tört. Mint-
hogy $\lim a_n = 0$ és $\lim b_n = 0$, azért $\lim \varrho_n = 1$ és így a complex
számkörben is a végtelen sorozat általános tagjának limesze
$\lim (1+u_n) = 1$, ami geometriailag azt mondja, hogy ha egy
kör körül ε sugarú kört húzunk, akkor a jól választott n-től kezdve
után az összes vectorok egy kör körön belül lesznek
a végtelen sorozatok természetére nézve itt is fölmerül az a kér-
dés, hogy mikor lesz a sorozat feltétlenül és sorosabb értelemben konv.
Minthogy $(1+u_1) = \varrho_1 (\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1)$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$(1+u_n) = \varrho_n (\cos\varphi_n + i \sin\varphi_n)$

azért n factor összeszorzásával nyerjük, hogy

$P_n = (1+u_1)(1+u_2)\ldots(1+u_n) = \varrho_1 \varrho_2 \ldots \varrho_n [\cos(\varphi_1+\varphi_2\ldots\varphi_n) i$
$\sin(\varphi_1+\varphi_2+\ldots\varphi_n)]$

A szorzat feltétlenül és szorosabb értelemben véve convergens, ha $\lim P_n = P$ egy nullától különböző véges érték és $\sum |u_n|$ convergens. Ez pedig akkor áll be, ha Πs_n és $\sum_1 f_n$ külön-külön feltétlenül convergenser és Πs_n még szorosabb értelemben is conv.

$\sum_1 f_n$ akkor feltétlenül convergens, ha $\sum_1 |f_n|$ convergens. De $\sum_1 |f_n|$-nel egyenrangú sor a $\sum_1 |\sin f_n|$ sor is, mert mint ismeretes $\left|\frac{\sin f_n}{f_n}\right| = 1$. Továbbá $\sin f_n = \frac{b_n}{s_n}$ és így $\sum_1 |\sin f_n| = \sum_1 \left|\frac{b_n}{s_n}\right|$ ez a sor meg $\sum_1 |b_n|$ sorral egyenrangú, mert annak határa $\lim s_n = 1$. Ezerint $\sum_1 f_n$ akkor feltétlenül convergens, ha $\sum_1 |b_n|$ convergens. Másrészről $\Pi s_n = \Pi (1 + a_n + \lambda_n b_n)$

Tehát Πs_n akkor feltétlenül és szorosabb értelemben véve convergens, ha $\sum_1 a_n + \lambda_n b_n$ vagyis külön $\sum_1 a_n$ és $\sum_1 b_n$ feltétlenül convergens. Ezek pedig akkor lesznek feltétlenül convergensek, ha $\sum_1 |a_n|$ és $\sum_1 |b_n|$ convergensek.

Arra nézve tehát, hogy a complex számkörben egy végtelen szorzat feltétlenül és szorosabb értelemben convergens legyen, a szükséges és elégséges föltétel az, hogy $\sum_1 |a_n|$ és $\sum_1 |b_n|$ convergens legyen, vagyis, hogy $\sum_1 (a_n + b_n i) = \sum_1 u_n$ feltétlenül convergens legyen. A föltétel tehát u. az a complex számkörben, mint a reálisban.

Végtelen szorzatok alkalmazása.

Az eddigiekben ki tudjuk azonban mutatni, hogy ha egy szorzatban: $a_1, a_2, \ldots\ldots a_n, \ldots$ $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, akkor

$\lim a_n = 0$, vagy ha $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$, akkor $\lim a_n = \infty$, de semmi bizonyosat nem mondhatunk azon esetben, ha $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$. A végtelen szorzatok segítségével épp az esetet fogjuk most megvizsgálni.

1. Legyen egy sorozatunk: $u_1, u_2, u_3 \ldots\ldots u_n$, melynek tagjai tetszés szerint lehetnek reálisak, vagy képzetesek.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \frac{\beta_n}{n^\alpha} \quad \text{és} \quad \alpha > 0 \text{ esetén} \quad \lim \beta_n = \beta$$

$$\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} = 1 + \frac{\beta_{n+1}}{(n+1)^\alpha}$$

$$\frac{u_{n+3}}{u_{n+2}} = 1 + \frac{\beta_{n+2}}{(n+2)^\alpha}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{u_{n+k}}{u_{n+k-1}} = 1 + \frac{\beta_{n+k-1}}{(n+k-1)^\alpha}$$

$$\frac{u_{n+k}}{u_n} = \left(1 + \frac{\beta_n}{n^\alpha}\right)\left(1 + \frac{\beta_{n+1}}{(n+1)^\alpha}\right) \cdots \left(1 + \frac{\beta_{n+k-1}}{(n+k-1)^\alpha}\right)$$

vagy

$$u_{n+k+1} = u_n \left(1 + \frac{\beta_n}{n^\alpha}\right)\left(1 + \frac{\beta_{n+1}}{(n+1)^\alpha}\right) \cdots \left(1 + \frac{\beta_{n+k}}{(n+k)^\alpha}\right).$$

Ha most $k-t$ a végtelenbe növeljük, akkor egy végtelen szorzatot kapunk; midőn ennek értéke akkor mondjuk, hogy u_n az illető végtelen sorozat értékét szorzás alakjában kifejezi. A végtelen sorozat értéke pedig az additiv alakban vett értékek összege. Az utóbbi összefüggésből következtethetünk az illető végtelen sorozat értékére:

$$\left|\frac{\beta_n}{n^\alpha}\right| + \left|\frac{\beta_{n+1}}{(n+1)^\alpha}\right| + \cdots\cdots + \left|\frac{\beta_{n+k}}{(n+k)^\alpha}\right| < M\left(\frac{1}{n^\alpha} + \frac{1}{(n+1)^\alpha} + \cdots + \frac{1}{(n+k)^\alpha}\right)$$

mert feltevésünk szerint β_n véges számnál sohasem nagyobb, minden β-nál nagyobb.

Ha most feltevésünk szerint $\alpha > 1$, azaz akkor mindig találunk a jobboldali sor számnál, de akkor a végtelen sorozat számai tagjaiból alkotott abs. értékeinél, sohasem nagyobb végtelen sorozat értékeinél és sportosabb értelemben véve konvergens. De akkor a számai $u_1, u_2, \ldots\ldots u_n \ldots$ sorozatunknak is végső és meghatározott

különböző limesse van. Tehát kimondhatjuk: Oly sorozatnak, melynek k-ad tag hányadosa 1-től oly törtben különbözik, melynek számlálója n-től függő véges szám, nevezője pedig n^α, hol $\alpha > 1$, véges és nullától különböző limesze van.

Jelöljük a sorozat limeszét $\lim u_n = u$ és vizsgáljuk, hogy ezen limeszhez való közeledési mirészben történik?

Általános érvényű annak a sorozatnak, hogy

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \frac{\vartheta_n}{n^\alpha} \qquad \text{miből}$$

$$\left.\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \vartheta_n u_n \frac{1}{n^\alpha} \\ u_{n+2} - u_{n+1} &= \vartheta_{n+1} u_{n+1} \frac{1}{(n+1)^\alpha} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ u_{n+k+1} - u_{n+k} &= \vartheta_{n+k} u_{n+k} \frac{1}{(n+k)^\alpha} \end{aligned}\right\} \text{Ezen egyenletet összegezve a jobb oldalon egy}$$

$(u_n \vartheta_n, u_{n+1} \vartheta_{n+1}, \dots\dots u_{n+k} \vartheta_{n+k})$ sorozat van tagonként szorozva egy + tagokból álló $\left(\frac{1}{n^\alpha} + \dots \frac{1}{(n+k)^\alpha}\right)$ sorozat tagjaival és összeadva. A közepszámot, mely complex számokra is áll, alkalmazva nyerjük, hogy

$$u_{n+k+1} - u_n = K\left(\frac{1}{n^\alpha} + \frac{1}{(n+1)^\alpha} + \dots\dots + \frac{1}{(n+k)^\alpha}\right)$$

Hogy a közepszámra vonatkozó tétel (l. Abel tételének I. segédtétele) a complex számokra is áll, azt mellőzésem itt bizonyítjuk: Megfelelő a, b és c sorozatnál áll a közép tétel, mely szerint

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = k(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$$

és

$$a_1 c_1 + a_2 c_2 + \dots + a_n c_n = k'(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$$

Az utóbbi egyenletet i-vel szorozva s a két egyenletet összeadva nyerjük, hogy

$$a_1(b_1 + c_1 i) + a_2(b_2 + c_2 i) + \dots + a_n(b_n + c_n i) = (k + k'i)(a_1 + a_2 + a_n)$$

amivel a tétel bebizonyítását nyert.

A közepszám alkalmazása által nyert egyenletben K véges és a zárójeles kifejezés is véges. Minthogy $\lim_{k=\infty} u_{n+k+1} = u$ azért $u - u_n = K\left(\frac{1}{n^\alpha} + \frac{1}{(n+1)^\alpha} + \dots\dots + \frac{1}{(n+k)^\alpha} + \dots - \text{ad.inf.}\right)$

A zárójeles kifejezés:

$$\frac{1}{n^\alpha} + \frac{1}{(n+1)^\alpha} + \frac{1}{(n+2)^\alpha} + \dots\dots < \frac{1}{n^{\alpha-\varepsilon}}\left(\frac{1}{n^\varepsilon} + \frac{1}{(n+1)^\varepsilon} + \frac{1}{(n+2)^\varepsilon} + \dots\right)$$

de $\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots\cdots > \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots\cdots$

és $\frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots\cdots = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \cdots = \frac{1}{n}$

Másrészt

$\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots < \frac{1}{(n-1)n} + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \cdots = \frac{1}{n-1}$

Tehát $\frac{1}{n-1} > \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots\cdots > \frac{1}{n}$

A bal oldali összegsorozat tehát vagy sorozatok, hogy $\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots\cdots = L$ $\frac{1}{n}$ hol $1 < L < 2$ de az összeg tényleg

van. - Ez pontosabb tehát

$u_n - u_{n+1} = \mu$ K L $\frac{1}{n^{\alpha+1}}$ hol $\mu \to K \cdot L = L_n$ végül

pontosabban - bizonyos μ, K és L végesek. Tehát $u - u_n = L_n \frac{1}{n^{\alpha-1}}$,

ami azt mondja, hogy sorozatunk n-edik tagja egy olyan törtben különbözik a sorozat határértékétől, melynek számlálója

ja véges, nevezője pedig n-nek $\alpha - 1$-edik hatványa. Tehát a

sorozatunk n-edik tagja annál közelebb van a határértékhez, minél

jobb a tört, vagyis minél nagyobb a. — Tehát ha egy

sorozatnak vége és annak közelítő törtjeinek van, akkor ál-

talában tagok határozzák $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \frac{\alpha}{n^\alpha}$, abban a sor-

ban tagjai annál gyorsabban sorozatának a határértékhez,

minél nagyobb a.

II. Ha oly sorozatunk van, melyben az általános tagok hányadosa + től oly törtben különbözik, melynek számlálója

ja constans, nevezője pedig az általános tag indexe, akkor

a sorozat limesze vagy 0, vagy ∞, azaz vagy, aminek a sorozat

$L < 0$ vagy $L > 0$.

Ugyanis, ha

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \frac{L}{n}$ (hol L állandó véges szám)

és $\left.\begin{aligned} \frac{v_{n+2}}{v_{n+1}} &= 1+\frac{l}{n+1} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{v_{n+k+1}}{v_{n+k}} &= 1+\frac{l}{n+k} \end{aligned}\right\}$ ezen egyenleteket összeszorozzuk:

$$v_{n+k+1} = v_n \left(1+\frac{l}{n}\right)\left(1+\frac{l}{n+1}\right)\cdots\left(1+\frac{l}{n+k}\right)$$

Ha k-t minden határon felül növeljük, akkor a bal oldal limesze v, a jobb oldalon pedig egy végtelen szorzatot kapunk, melynek természete a

$$l\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots\right)$$ sor természetétől függ. (a harmonikus sor, tehát divergens, azért a végtelen szorzat minden esetben divergens, tehát $\lim v_n = 0$, ha pedig $l>0$, akkor a szorzat sohse $v_1, \ldots v_n$ sorozat és divergens, vagyis $\lim v_n = \infty$.

III. Legyen $w_1, w_2 \ldots\ldots w_n \ldots$ sorozat olyan, hogy $\frac{w_{n+1}}{w_n} = 1+\frac{\mu i}{n}$ ha ε hányados abszolut értékére tételünk, mint hogy $\rho = \sqrt{a^2+b^2}$ azért $\left|\frac{w_{n+1}}{w_n}\right| = \sqrt{1+\frac{\mu^2}{n^2}} = \left(1+\frac{\mu^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ Itt minden elérhető, hogy $n>\mu$ legyen, amikor a binomiális tételt alkalmazva:

$$\left(1+\frac{\mu^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} = 1+\frac{1}{2}\frac{\mu^2}{n^2}+\cdots\cdots = 1+\frac{1}{\mu^2}\left(\frac{1}{2}\mu^2+\binom{\frac{1}{2}}{2}\frac{\mu^4}{n^2}+\ldots\right)$$

Amide a zárójeles kifejezés konvergens sor, mert μ constans és nem végtelen nagy; a nevező exponense pedig nagyobb 1-nél. Azért $\left|\frac{w_{n+1}}{w_n}\right| = 1+\frac{\vartheta_n}{n^2}$, hol ϑ_n véges, de n-nel változó mennyiség, s így a sorozat tagjainak limesze véges és nullától különböző mennyiség; $\lim |w_n| \neq 0$ és véges.

Kimutatjuk most, hogy bárha a sorozat abszolut értékeinek van is limesze, az $w_1, w_2 \ldots\ldots w_n \ldots$ sorozatnak még sincs.

Felöljük az abszolut értékek sorának limeszét l-lel:

$$\lim |w_n| = \lim \sqrt{a_n^2+b_n^2} = l$$

hol l minden esetre positiv szám. — Adjunk w_n-nek complex értéket, akkor pl:

$$w_n = a_n + b_n i$$
$$w_{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1} i$$
. . . . . .

A sorozat két egymásután következő tagjának osztása a bevezetés után

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = 1 + \frac{\mu_n}{n} i \quad \text{vagyis} \quad w_{n+1} - w_n = w_n \frac{\mu_n}{n} i$$

Ha az összes eltérések határértéke, a sorozat végtelen sorjának határértéke, akkor $a_{n+1} - a_n = b_n \frac{\mu_n}{n}$ és $b_{n+1} - b_n = a_n \frac{\mu_n}{n}$
Hasonlóképpen $a_{n+2} - a_{n+1} = b_{n+1} \frac{\mu_{n+1}}{n+1}$, $b_{n+2} - b_{n+1} = a_{n+1} \frac{\mu_{n+1}}{n+1}$

. . . . . .

. . . . . .

$$a_{n+k} - a_{n+k-1} = -b_{n+k-1} \frac{\mu_{n+k-1}}{n+k-1} \quad \text{és} \quad b_{n+k} - b_{n+k-1} = a_{n+k-1} \frac{\mu_{n+k-1}}{n+k-1}$$

. . . . . .

Ha a sorozat vagy eleve is az, vagy minden végtelen sok tagjától kezdve pozitív, másképpen fogalmazva $\mu_n > 0$, vagy minden n nagyobb a küszöbindexnél, akkor a b-k sorozata szintén határozatlan jellegű, azaz b_n végtelen sok tagja pozitív és végtelen sok negatív tagot tartalmaz.

Legyenek a_n és az n-edik tagon túl az összes a-k határozatlan jellegűek, vagyis közöttük végtelen sok pozitív és végtelen sok negatív tag fordul elő az a-k sorozatában, akkor $a_{n+1} - b_n = -b_n \frac{\mu_n}{n}$ bal oldala egyre előjelet vesz, amíg a jobb oldal bal az előjel nagyobb számú, kisebb, mint egy meghatározott pozitív kisebb, mint egy meghatározott kisebb, mint egy meghatározott kisebb, mint egy meghatározott

a divergens harmonikus sor, tehát ha ezzel összetesszük a baloldalon s így a jobboldalon is végtelen kicsiny számot kapunk, azaz $\lim K(b) = 0$, de ekkor $\lim b_n = 0$. – Hasonlóképpen, ha a $b_{n+1} - b_n = a_n \frac{\mu}{n}$ alakú különbségeket összegezzük, akkor

$$b_{n+k+1} - b_n = \mu K(a)\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots\ldots + \frac{1}{n+k} + \ldots\ldots\right)$$

Amiből megint az olvasható ki, hogy

$$\lim K(a) = 0 \text{ vagyis } \lim a_n = 0$$

Tehát vagy az a-k, vagy a b-k sora convergál a 0 felé. Mint hogy azonban $\lim |w_n| = l$, azért ha az a-k vannak közel a 0-hoz, akkor a b-k végtelenjében az l közelében vannak és megfordítva, ha $\lim b_n = 0$, akkor $\lim a_n = l$.

Bebizonyítottuk tehát minden esetre, hogy ha egy sorozatnál $\frac{w_{n+1}}{w_n} = 1 + \frac{\mu i}{n}$ törvényszerűség áll fönn, akkor az abszolut értéke sorozatának 0-tól különböző véges limese van, de magának a sorozatnak nincsen limese.

V. Ha most egy olyan $t_1, t_2, t_3 \ldots\ldots t_n$ sorozatunk van, melynél $\frac{t_{n+1}}{t_n} = 1 + \frac{\lambda + \mu i}{n} + \frac{\vartheta_n}{n^\alpha}$ hol $\begin{cases} \lambda, \mu \text{ constans} \\ \vartheta_n \text{ véges} \\ \alpha > 1 \end{cases}$

akkor ennek a sorozatnak a viselkedését a köv. képen döntjük el. Vesszünk egy v és egy w sorozatot, melyeknél

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = 1 + \frac{\lambda}{n} \text{ és } \frac{w_{n+1}}{w_n} = 1 + \frac{\mu i}{n}$$

és most nézzük össze a $\frac{t_n}{v_n w_n}$ sorozatot, a viszonyaiknak a természetét. Itt

$$\frac{t_{n+1}}{v_{n+1} w_{n+1}} : \frac{t_n}{v_n w_n} = \frac{t_{n+1}}{t_n}\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)^{-1}\left(\frac{w_{n+1}}{w_n}\right)^{-1} =$$

$$= \left(1 + \frac{\lambda + \mu i}{n} + \frac{\vartheta_n}{n^\alpha}\right)\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-1}\left(1 + \frac{\mu i}{n}\right)^{-1}$$

De $\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-1} = 1 - \frac{\lambda}{n} - \frac{\lambda^2}{n^2} - \frac{\lambda^3}{n^3} - \ldots\ldots = 1 - \frac{\lambda}{n} + \frac{\eta_n}{n^2}$

hol η_n egy változó véges mennyiség. Továbbá:

$\left(1 + \frac{\mu i}{n}\right)^{-1} = 1 + \frac{\mu i}{n} + \frac{(\mu i)^2}{n^2} + \ldots\ldots = 1 + \frac{\mu i}{n} + \frac{\zeta_n}{n^2}$ tehát

$$\frac{t_{n+1}}{v_{n+1}w_{n+1}} : \frac{t_n}{v_n w_n} = \left(1 + \frac{\lambda+\mu i}{n} + \frac{v_n}{n^2}\right)\left(1 + \frac{\lambda}{n} + \frac{\eta_n}{n^2}\right)\left(1 + \frac{\mu i}{n} + \frac{\zeta_n}{n^2}\right)$$

$$= 1 + \left(\frac{\lambda+\mu i}{n} - \frac{\lambda}{n} - \frac{\mu i}{n}\right) + \frac{w_n}{n^2}$$

$$= 1 + \frac{w_n}{n^2}$$ hol w_n az $\frac{1}{n}$ növekedő hatványai szerinti véges sor.

Az összeadott $\frac{t_n}{v_n w_n} = tb_n$ sorozatról tehát a következőket mondhatjuk: $\frac{tb_{n+1}}{tb_n} = 1 + \frac{w_n}{n^2}$. De $t_n = u_n v_n w_n$, tehát az eredeti t_n sorozatnak akkor van 0-tól különböző végés limesze, ha $u_n v_n w_n$ szorzatnak egyenként végesek. Amint az előbbiekből is ismeretes, az u_n és w_n sorozat tagjai végesek, a döntő szerep tehát a v_n sorozatnak jut. Ennek pedig tudjuk, hogy a limesze végtelen, ha $\lambda > 0$, tehát:

1.) ha $\lambda > 0$, akkor $\lim t_n = \infty$

2.) ha $\lambda < 0$, akkor $\lim t_n = 0$, mert akkor $\lim v_n = 0$

3.) ha $\lambda = 0$, de $\mu \neq 0$, akkor v_n sorozat végés és állandó limesszel bír, így végtelen vagy nulla limeszről beszélni nem lehet.

A következő esetben azonban u_n és w_n sorozatok a döntők. Ezekben, amint látjuk a w_n sorozat ingadozó, tehát a t_n sorozat is ingadozó lesz.

4.) ha $\lambda = 0$ és $\mu = 0$, akkor mind a három sorozat végés és így $\lim t_n$ is végés és nullától különböző lesz.

Jegyezzük meg még egyszer, hogy ezek a tételek csak akkor állanak, ha $d \geq 2$

A most tárgyalt konvergentia kritériumok mind Weierstrass-tól valók. Ezek segítségével mindig el tudjuk dönteni, hogy egy olyan sorozatnak, melynél két tag hányadosa t-hez, mint limesz-hez közelednek, van-e limesze.

Ezen kritériumok alkalmazásánál vegyük először példa gyanánt a binomiális együtthatókat, megengedve, hogy a exponens tetszőleges számot is felvehessen, vizsgáljuk meg, hogy különböző esetekben a együtthatónak sorozata miképpen viselkedik.

Tegyük az n és $n+1$ dik tag hányadosát.

$$\frac{t_n}{t_{n-1}} = \frac{(-1)^n \binom{\alpha}{n}}{(-1)^{n-1}\binom{\alpha}{n-1}} = -\frac{\alpha-n+1}{n} = \frac{n-\alpha-1}{n} = 1 + \frac{-\alpha-1}{n}$$

Legyen $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 i$, akkor $\frac{t_n}{t_{n-1}} = 1 + \frac{-\alpha_1 - 1 - \alpha_2 i}{n}$

Most tehát $\vartheta_n = 0$ $\lambda = -\alpha_1 - 1$, $\mu = -\alpha_2$

A Weierstrass féle kritériumok szerint, tehát

I. Ha $\lambda = -\alpha_1 - 1 > 0$ vagyis ha $\alpha_1 < -1$, akkor a binomiális coefficiensek limesze $\lim t_n = \infty$

II. Ha $\lambda = -\alpha_1 - 1 < 0$ vagyis, ha $\alpha_1 > -1$, akkor a limesz zéró $\lim t_n = 0$

III. Ha $\lambda = 0$ vagyis, ha $\alpha_1 = -1$ és $\mu \neq 0$ tehát $\alpha_2 \neq 0$, akkor minusenlimesz

IV. Ha $\lambda = 0$ vagyis $\alpha_1 = -1$ és $\mu = 0$, vagyis $\alpha_2 = 0$, akkor $\frac{t_n}{t_{n-1}} = 1$, tehát $t_n = t_{n+1}$, vagyis a coefficiensek sorozata mind egyenlő tagokból áll. Mindhogy azonban az első tag mindég $= 1$, azért az összes tagok is mind egyenlők 1-gyel.

Érdekes lesz még megemlíteni, hogy a gyökvonást definiáló $(1+x)^{\frac{1}{n}}$ binomiális sornál hogyan viselkedik a coefficiensek sorozata. Mindhogy itt $\alpha = \frac{1}{n}$ tehát ha $n = a+bi$, akkor $\alpha_1 = \frac{a}{a^2+b^2} > -1$, azért az előbb tárgyalt esetek közül a II. esettel van dolgunk és így mondhatjuk, hogy a gyökvonásnál a coefficiensek vég helyből fognak.

A convergentia kritériumok alkalmazása végtelen sorokra.

Az eddigiekben az olyan sorokról, melyeknél két szomszédos tag hányadosának limesze $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ még semmit sem tudtunk mondani. (Lásd 73. oldalon) Vizsgáljuk most ilyen sorokra nézve kritériumokat.

Legyen a $t_0 + t_1 + t_2 + \ldots\ldots + t_n + \ldots\ldots$ sornál két szomszédos tag hányadosa a köv. alakú:

$$\frac{t_{n+1}}{t_n} = 1 + \frac{\lambda + \mu i}{n} + \frac{\vartheta_n}{n^\alpha} \quad \text{hol} \quad \begin{cases} \lambda \text{ és } \mu \text{ constans} \\ \vartheta_n \text{ véges, változó} \\ \alpha \geq 2 \end{cases}$$

A sor convergentiájának első szükséges feltételéből
azt találjuk, hogy $\lim t_n = 0$ kell legyen, de azt onnan közvetlenül az
előbbiekből (l. fix. oldalon) látjuk, hogy ez csak akkor lehetséges, ha
$\lambda < 0$. Éppen ezért csak ezen esettel foglalkozunk és kimutatjuk, hogy
ilyen $\lambda < 0$ mellett a sor feltételeinek eleget tesz. Tegyük fel tehát a
$|t_0| + |t_1| + \ldots + |t_n| + \ldots$ sor convergentiáját. Tudjuk, hogy t_n
abszolút értéke három ismert sor tag szorzatából: $t_n = u_n v_n w_n$,
tehát $|t_n| = |u_n| |v_n| |w_n|$ vagyis $\frac{|t_n|}{|v_n|} = |u_n| |w_n|$

Ha itt $|u_n|$ és $|w_n|$ limesze 0 is, az $\frac{|t_n|}{|v_n|}$ hányadosnak mégis 0-tól
különböző véges limesze van, tehát $|t_n|$ (=) $|v_n|$ és így a $|t_n|$ sor
vizsgálatából el lehetnek a $|v_n|$ sor vizsgálatára.

Hogy $\lim \frac{|t_n|}{|v_n|} > 0$, azt belátjuk, ha a $\frac{|t_{n+1}|}{|v_{n+1}|} : \frac{|t_n|}{|v_n|}$
hányados $1 + \frac{w_n}{n^2}$ jelét megalkotjuk és az előbbi kritériumokat alkalmazzuk. —

Vizsgáljuk most tehát a $|t|$-k sora helyett a $|v|$-k sorát. Ennek első sorai $\frac{v_{n+1}}{v_n} = 1 + \frac{\lambda}{n}$. Ha itt n-el nagy számokat veszünk, hogy $\lambda < n$ legyen, akkor $1 + \frac{\lambda}{n}$ minden esetre pozitív szám
marad, v_{n+1} és v_n egyező jelű, vagyis bizonyos tagon túl minden tag például pozitív. Előbb pedig azt körülírjuk, hogy az abszolút értékek sora: $|v_1| + |v_2| + \ldots + |v_n| + \ldots$ épp olyan természetű, mint az eredeti sor. Tehát vizsgálhatjuk az eredeti sort, melynél $\frac{v_{n+1}}{v_n} = 1 + \frac{\lambda}{n}$ vagyis ha $v_{n+1} - n v_n = \lambda v_n$. Írjuk annak előbbi
alakját v_n-el eltolva hasonlóképpen

$$\left.\begin{aligned}
n\,v_{n+1} - (n-1)\,v_n &= (\lambda+1)\,v_n \\
(n+1)\,v_{n+2} - n\,v_{n+1} &= (\lambda+1)\,v_{n+1} \\
(n+2)\,v_{n+3} - (n+1)\,v_{n+2} &= (\lambda+1)\,v_{n+2} \\
\cdots\cdots\cdots

Tehát a „v" sor n-dik tagjáro tül „k tag összege, mint oálló-
só mennyiségtől csak az (n+k) . v_{n+k-1} -től függ, így csak ezt
a szorzatot kell vizsgálnunk. Innde

$$\frac{n\,v_{n+1}}{(n-1)\,v_n} = \frac{v_{n+1}}{v_n}\,\frac{1}{1-\frac{1}{n}} = \frac{v_{n+1}}{v_n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-1} =$$

$$= \left(1+\frac{\lambda}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}+\frac{\vartheta_n}{n^2}\right) = 1+\frac{\lambda+1}{n}+\frac{\gamma_n}{n^2}$$

Ily alakú hányadosról azonban a Weierstrass féle convergen-
tia kritériumokból már tudjuk, hogy ha $\lambda+1<0$ vagyis $\lambda<-1$,
akkor a limesz: $\lim n\,v_{n+1}=0$

Ha pedig $\lambda+1>0$ vagyis $\lambda>-1$, akkor $\lim_{n\to\infty} v_{n+1}=\infty$
Tehát az első esetben ($\lambda<-1$) a „v" sorban az n-dik tagon túli
arábbany tag összege kisebbé tehető egy megadható mennyisé-
nél, amiből következik, hogy a „v" sor és így az eredeti
$t_1+t_2+\ldots+t_n+\ldots$ sor is feltétlenül convergens.

A második esetben pedig ($\lambda>-1$) a „v" sor és így a „t" sor
is divergens lesz.
Ha pedig $\lambda+1=0$, vagyis $\lambda=-1$, akkor $\lambda+1$-gyel nem egy-
szad osztani tehát ebben az esetben a „t" sor tulajdonságát más
úton kell eldönteniünk. Ekkor $\frac{v_{n+1}}{v_n}=1-\frac{1}{n}$ Tehát

Hasonlóképpen

$$\left.\begin{aligned}
\frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{n-1}{n}\\
\frac{v_{n+2}}{v_{n+1}} &= \frac{n}{n+1}\\
&\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\\
\frac{v_{n+k+1}}{v_{n+k}} &= \frac{n+k-1}{n+k}
\end{aligned}\right\}$$

Ha ezeket összeszoroz-
zuk, nyerjük,
hogy:

$$\frac{v_{n+k+1}}{v_n}=\frac{n-1}{n+k} \quad \text{miből} \quad v_{n+k+1}=v_n(n-1)\,\frac{1}{n+k}$$

Ha most $k=0.1.2.\ldots k$ vesszük és összegezzünk:

$$v_{n+1}+v_{n+2}+\ldots+v_{n+k+1}=v_n(n-1)\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+k}\right)$$

A jobb oldalon a harmonikus sor egy része szerepel, tehát

a v-k sora és igy a t-k sora is divergens.

Nézzük meg még azt, hogy ha $\sigma + \lambda \geq -1$, ebben az esetben lehet-e a sor legalább feltételesen convergens? Tegyünk segitségül egy $r_1 + r_2 + \ldots + r_n + \ldots$ sort, melynek $\frac{r_{n+1}}{r_n} = 1 + \frac{\lambda + \mu i}{n} + \ldots$

Mindenek előtt kimutatjuk, hogy a „t" sor nagyonmellett convergens mikor ez a sor, vagyis $t_n (=) r_n$.

Ugyanis

$$\frac{t_{n+1}}{r_{n+1}} : \frac{t_n}{r_n} = \frac{t_{n+1}}{t_n}\left(\frac{r_{n+1}}{r_n}\right)^{-1} = \left(1 + \frac{\lambda+\mu i}{n} + \frac{\vartheta_n}{n^2}\right)\left(1 - \frac{\lambda+\mu i}{n} + \frac{\eta_n}{n^2}\right) = 1 + \frac{\gamma_n}{n^2}$$

Ilyen esetben pedig már tudjuk, hogy $\frac{t_n}{r_n} = u_n$ sorozatnak mellőle különbözőpő limesze van (l. 108 és 109 oldalon) tehát tényleg $t_n (=) r_n$. Azt is tudjuk, hogy ha ez a limesz $= u$, akkor $u - u_n = \frac{\lambda_n}{n}$ (l. 110 old.) (vagyis $t_n = r_n\left(u - \frac{\lambda_n}{n}\right)$ Ha pedig az összes „t" tel summázunk:

$$\sum t_n = u \sum r_n - \sum \frac{\lambda_n r_n}{n}$$

Most bebizonyitjuk, hogy a $\sum \frac{\lambda_n r_n}{n}$ sor minden feltétlenül convergens, tehát $\sum t_n$ természete tényleg csak az $\sum r_n$ természetétől függ.

A $\sum \frac{\lambda_n r_n}{n}$ sorban λ_n minden véges, tehát csak a $\sum \frac{r_n}{n}$ sorról kell vizsgálnunk. Ennél pedig

$$\frac{r_{n+1}}{n+1} : \frac{r_n}{n} = \frac{r_{n+1}}{r_n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} = \left(1 + \frac{\lambda+\mu i}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{w_n}{n^2}\right) = 1 + \frac{\lambda-1+\mu i}{n} + \frac{\lambda_n}{n^2}$$

s minthogy most $\lambda < 0$, azért $(\lambda - 1) < -1$. De az ily sorról éppen az előbb mutattuk ki, hogy feltétlenül convergens és igy $\sum \frac{\lambda_n r_n}{n}$-nek is minden határozott értéke van.

A $\sum t_n$ sor convergentiája tehát már csak a $\sum r_n$ sortól van függővé téve. Ennél a sornál:

$$\left.\begin{aligned} n\,r_{n+1} - (n-1)\,r_n &= (\lambda + 1 + \mu i)\,r_n \\ (n+1)\,r_{n+2} - n\,r_{n+1} &= (\lambda + 1 + \mu i)\,r_{n+1} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (n+k)\,r_{n+k+1} - (n+k-1)\,r_{n+k} &= (\lambda + 1 + \mu i)\,r_{n+k} \end{aligned}\right\}$$ Ezeket összegezve:

$$(n+k)\,r_{n+k+1} - (n-1)\,r_n = (\lambda + 1 + \mu i)(r_n + r_{n+1} + \ldots + r_{n+k})$$

Minthogy $\lambda + 1 + \mu i \neq 0$ szabad vele osztani, igy

$$\frac{(n+k)\,r_{n+k+1} - (n-1)\,r_n}{\lambda + 1 + \mu i} = r_n + r_{n+1} + \dots + r_{n+k}$$

Hogy az „r" sor convergens legyen, arra nézve szükséges, hogy $|r_n + r_{n+1} + \dots + r_{n+k}| < \varepsilon$ legyen. Ez pedig akkor állna be, ha a bal oldal is tetszőleges kis mennyiség lenne. Az előzőből azonban tudjuk, hogy $\lim_{n} r_n = 0$ csak akkor lehet, ha a nevezőben $\lambda < -1$ (Lásd a 117. oldalon.) Föltételünk szerint azonban $0 > \lambda \geqq 1$ és igy sem az „r" sor, sem pedig a „t"-k sora a $-1 \leqq \lambda < 0$ intervallumban conv. nem lehet.

Összefoglalva: Ha egy $t_1 + t_2 + \dots + t_n + \dots$ sorról

$$\frac{t_{n+1}}{t_n} = 1 + \frac{\lambda + \mu i}{n} + \frac{v_n}{n^\alpha}$$, akkor

I. föltétlenül convergens a sor, ha $\lambda < -1$

II. divergens a sor, ha $\lambda \geqq -1$

A következőkben az eddig megismert kritériumokat fogjuk példáira alkalmazni:

1. példa: Vegyük a $t_0 + t_1 x + t_2 x^2 + \dots + t_n x^n + \dots$ sort, „hol

$$\frac{t_{n+1}}{t_n} = 1 + \frac{\lambda + \mu i}{n} + \frac{v_n}{n^\alpha} \quad \begin{cases} v_n \text{ véges változó} \\ \alpha \geqq 2 \end{cases}$$

Milyen lesz ez a sor feltétlenül convergens?

$\left| \frac{t_{n+1} x^{n+1}}{t_n x^n} \right| = \left| \frac{t_{n+1}}{t_n} \right| \cdot |x|$ Minthogy itt $\lim \left| \frac{t_{n+1}}{t_n} \right|$ mindig véges, azért a hányados természete csak $|x|$ tevékenységétől függ. Azt pedig már a régi kritériumainkból tudjuk, hogy ha $|x| > 0$, akkor a sor divergens, ha pedig $|x| < 0$, akkor a sor feltétlenül convergens.

Ha pedig $|x| = 1$, akkor az előbb vizsgált $|t_1| + |t_2| + \dots + |t_n|$ sort kapjuk, Erről pedig tudjuk, hogy akkor convergens, ha $\lambda \leqq -1$.

Milyen lesz a sor a $-1 \leqq \lambda < 0$ és $|x| = 1$, de $x \neq 1$ helyeken? Megint a „t" sor helyett az „r"-ek sorát vizsgáljuk; kimutatjuk, hogy ez

$r_0 + r_1 x + r_2 x^2 + \dots + r_n x^n + \dots$ sor, hol

$\frac{r_{n+1}}{r_n} = 1 + \frac{\lambda + \mu i}{n}$ úgyanúgy viselkedik, mint a

„$t_n x^n$" sor. – Tudjuk u. is, hogy $t_n = r_n u_n = r_n \left(u - \frac{\lambda_n}{n}\right)$ és így

$$\sum t_n x^n = \sum r_n u_n x^n = u \sum r_n x^n - \sum \frac{\lambda_n}{n} r_n x^n$$

Itt az utolsó sor mint ismeretes, mindég feltétlenül conv., tehát ténylég a $\sum t_n x^n$ sor convergentiája csak a $\sum r_n x^n$ sor tenhérfetétől függ. Ez a sor pedig a megadott feltételek mellett feltételesen convergens és így a $\sum t_n x^n$ sor is az. (Ugyanis, ha

$$f(x) = r_0 + r_1 x + \dots + r_n x^n + \dots$$

$$x f(x) = r_0 x + \dots + r_{n-1} x^n + \dots$$

$$(1-x) f(x) = r_0 + (r_1 - r_0) x + \dots + (r_n - r_{n-1}) x^n + \dots$$

} e sorból levonva:

Itt előre föltettük, hogy az $\sum r_n x^n$ sor convergens. Ebben azonban az $(1-x) f(x)$ sor is convergens, még pedig feltétlenül, amint a sorban lev. szomszédos tag hányadosa:

$$\frac{r_{n+2} - r_{n+1}}{r_{n+1} - r_n} = \frac{r_{n+1}}{r_n} \cdot \frac{\frac{r_{n+2}}{r_{n+1}} - 1}{\frac{r_{n+1}}{r_n} - 1} = \left(1 + \frac{\lambda + \mu i}{n}\right) \frac{\frac{\lambda + \mu i}{n+1}}{\frac{\lambda + \mu i}{n}}$$

$$= \left(1 + \frac{\lambda + \mu i}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} = \left(1 + \frac{\lambda + \mu i}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{\vartheta_n}{n^2}\right) = 1 + \frac{\lambda - 1 + \mu i}{n} + \frac{\gamma_n}{n^2}$$

A convergentia kritériumából azonban tudjuk, hogy mivel itt $\lambda - 1 < -1$, azért ez a sor feltétlenül convergens; $(1-x) f_x$ conv. Ha $x \neq 1$, akkor $f(x)$ is feltétlenül convergens és így az eredeti $\sum t_n x^n$ sor is legalább is abs. feltételesen convergens.

Ha azonban még $x = +1$, akkor már a sor divergens. Tehát

I. Feltétlenül convergens a sor
   1.) ha $|x| < 1$; 2.) ha $|x| = 1$ és $\lambda < -1$

II. Feltételesen convergens a sor
   ha $0 \geq \lambda \geq -1$ és $|x| = 1$, de $x \neq 1$

III. Minden más esetben a sor divergens.

I. példa. Vizsgáljuk most a log. sorbafejtésénél előjövő hör. sort: $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots$

Ennek a sornak 2 szomszédos tag coefficiensének hányadosa:

$$\frac{1}{n} : \frac{1}{n+1} = \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$$

Az előbbi jelekkel tehát $\lambda = -1$, $\vartheta_n = 0$ $\mu = 0$. Ennélfogva

I. Feltétlenül convergens a sor, ha $|x| < 1$

II. Feltételesen convergens a sor, ha $|x| = 1$ de $x \neq 1$

III. Divergens a sor, minden más esetben.

Geometriailag: ha az origó körül az egységnyi sugárral kört húzunk, akkor ezen körön belül és a kör peripheriáján a $+1$ pontot kivéve a sor convergens, a körön kívül és $+1$ pontban pedig divergens.

Az előbbi példáknál a geometriai értelmezés ugyanez volt.

II. példa. Vizsgáljuk a binomiális sort, megengedve, hogy α és x is complexek is lehetnek.

$$(1-x)^\alpha = \binom{\alpha}{0} - \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 \ldots\ldots (-1)^n \binom{\alpha}{n} x^n + \ldots$$

Itt az n és $n-1$ - dik coefficiens hányadosa:

$$\frac{(-1)^n \binom{\alpha}{n}}{(-1)^{n-1}\binom{\alpha}{n-1}} = -\frac{\alpha - n + 1}{n} = 1 + \frac{-\alpha - 1}{n}$$

Itt tehát $\lambda = -\alpha - 1$, $\mu = 0$ $\vartheta_n = 0$

(Azon esetet, midőn α véges, mellőzzük) Szintén az I. példa alapján

I. Feltétlenül convergens a sor

1., ha $|x| < 1$; 2., ha $-\alpha - 1 < -1$ vagyis $\alpha > 0$ és $|x| = 1$

II. Feltételesen convergens a sor

ha $0 > -\alpha - 1 \geq -1$ vagyis ha $0 > \alpha > -1$ és $|x| = 1$ de $x \neq 1$.

III. Divergens a sor minden más esetben.

Geometriailag: az egységsugarú körön belül és ha $\alpha > 0$, akkor a kör peripheriáján is a sor feltétlenül convergens.

A peripheriáin a $0 > \alpha > -1$ értékek mellett feltételesen conv., kivéve $x+1$ pontot. Itt és a körön kívül a sor divergens.

IV. Példa. Gauss hypergeometrikus sora:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha.\beta}{1.\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2\,\gamma(\gamma+1)}x^2 + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{1.2.3\ldots n\,\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)\ldots(\gamma+n-1)}x^n + \ldots$$

Itt két szomszédos tag együtthatóinak hányadosa

$$\frac{t_{n+1}}{t_n} = \frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(1+n)(\gamma+n)} = \frac{n^2+(\alpha+\beta)n+\alpha\beta}{n^2+(\gamma+1)n+\gamma}$$

$$= \frac{1+\frac{\alpha+\beta}{n}+\frac{\alpha\beta}{n^2}}{1+\frac{\gamma+1}{n}+\frac{\gamma}{n^2}} = \left(1+\frac{\alpha+\beta}{n}+\frac{\alpha+\beta}{n^2}\right)\left(1+\frac{\gamma+1}{n}+\frac{\gamma}{n^2}\right)^{-1}$$

$$= \left(1+\frac{\alpha+\beta}{n}+\frac{\alpha\beta}{n^2}\right)\left(1-\frac{\gamma+1}{n}+\frac{\vartheta_n}{n^2}\right)$$

$$= \left(1+\frac{\alpha+\beta-\gamma-1}{n}+\frac{\eta_n}{n^2}\right)$$

Tehát $\lambda = \alpha+\beta-\gamma-1$, $\mu = 0$ és $\vartheta_n = \eta_n$. Szintén az I. Példa alapján.

I. Feltétlenül convergens a sor:

1., ha $|x|<1$; 2., ha $\lambda < -1$ (vagyis ha $\alpha+\beta<\gamma$)

II. Feltételesen convergens a sor:

ha $0>\lambda \geqq -1$ (vagyis ha $\gamma+1 > \alpha+\beta \geqq \gamma$) és $|x|=1$ de $x \neq 1$

III. Divergens a sor minden más esetben

Geometriailag: Feltétlenül convergens a sor az egységkörön belül és a peripheriáin, ha $\alpha+\beta<\gamma$. Feltételesen conv. a peripheriáin a $+1$ pontot kivéve mindenhol, ha $\gamma+1>\alpha+\beta\geqq\gamma$; és divergens minden más helyen.

A sorokról szóló elmélet alapjait Cauchy és Abel vetették meg. Igaz ugyan, hogy a sorokkal már Euler is igen sokat foglalkozott, de a sorok convergentiájával nem törődött.

A sorok szigorú vizsgálata tehát Cauchy és Abeltől kezdődik. Behatóbban foglalkozott még később a sorokkal Gauss és Weierstrass.

Értelemzavaró tollhibák.

4	oldal,	alulról	4.	sorban	„distributiv"	helyett „associativ"
16	"	felülről	1.	"	„$2^8 = 236$"	" „$3^8 = 356$" "
32	"	"	23.	"	$a_0 + S$	S "
32	"	"	24	"	S	$a_0 + S$ "
42	"	alulról	5	"	„jobboldalon"	" „baloldalon" "
62	"		1.	"	sorozat	sor "
71	"	"	7	"	$\lim(A(t) - C(t))$	" $\lim(A(t)B(t) - C(t))$ "
72	"	"	3 és 5	"	sor	" sorozat "
76	"	felülről	11	"	$\lim b_n = 0$	" $\lim \frac{1}{b_n} = 0$ "
77	"	"	5	"	$\sum a_n < \sum b_n$	" $\sum a_n < \varepsilon \sum b_n$ "
85	"	"	18	"	$\binom{n}{k}\binom{n}{k-1}$	" $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$ "

Tartalom jegyzék.

Bevezetés ---------- 3
Összeadás ---------- 4
Kivonás ---------- 7
Szorzás ---------- 8
Osztás ---------- 10
Hatványozás ---------- 11
Null (0) ---------- 12
Számrendszer ---------- 13
A hatványozás fordított műveletei ---------- 17
Tört számok ---------- 19
A számok ábrázolása ---------- 24
Végtelen sorok ---------- 25
Convergens sorokról ---------- 27
A végtelen sorok összeadása ---------- 33
" " kivonása ---------- 35
" " szorzása ---------- 38
"Reciprok értéke ---------- 41

Egyértelműség ... 43
Negatív számok ... 47
A limesz fogalma ... 51.
A limesz alkalmazása ... 56
Logaritmus ... 59.
A limesz alkalmazása végtelen sorokra ... 62
Végtelen sorok asszociatív és kommutatív tulajdonsága 63.
Algebrai operációk felületlenül konv. sorokkal ... 67
Abel tétele ... 69.
Konvergencia kritériumok ... 72
Hatás sorokról ... 81.
Binomiális sor ... 82
A binomiális koefficiensek tulajdonságai ... 84.
A binomiális tétel általánosítása ... 86.
Képzetes számok ... 89.
Operációk komplex számkörben ... 90.
A komplex számok ábrázolása ... 91.
A limesz fogalma komplex számkörben ... 96
Végtelen sorok a komplex számkörben ... 97
Végtelen szorzatok ... 98
Reális számokból álló végtelen szorzatok ... 103
Végtelen szorzatok komplex számkörben ... 106
Végtelen szorzatok alkalmazása ... 107
A konvergencia kritériumok alkalmazása végtelen sorokra 115.