Görbe vonalak és felületek elmélete.–

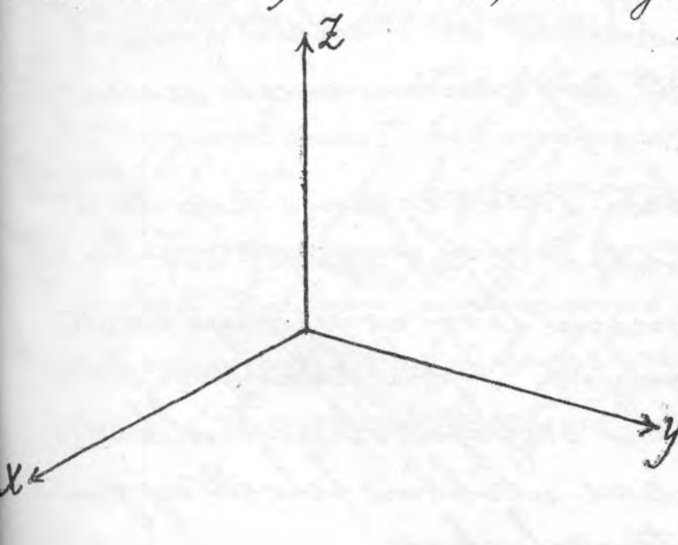
Dr. Schlesinger Lajos e. ny. r. tanár előadása után.–

Kolozsvárt. 1907–8. I. félév.

Kiadja: a „Tanárjelöltek segélyegylete.”

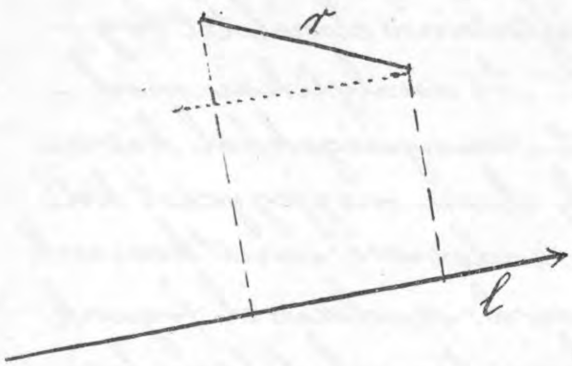
Bevezetés.-

A következőkben a geometriai képződményeknek: nevezetesen a görbéknek és a felületeknek általános elméletét fogjuk tárgyalni analytikai módszerrel.- Az analytikai módszer abban áll, hogy a térbeli pontokat mennyiségekkel képviseljük, ezért mindenek előtt egy pár oly elemi megjegyzést kell előre bocsátnunk, a melyek a coord.-rendszerre vonatkoznak.
Mindig közönséges Descartes féle coord.-rendszerrel fogunk dolgozni.- Három egymásra merőleges tengelyt (egy három lábast) veszünk, a melynek a helyzete mindig olyan legyen a térben, mint a hogyan a következő schéma tünteti fel.



Tehát az x, y, z tengelyek olyan helyzetben legyenek egymáshoz, hogy, ha az x tengelyt az óramutató járásával ellenkező irányban elforditjuk 90°-al (a z tengely körül, az y tengelyt kapjuk s ha ezt forditjuk el 90°-al (az x tengely körül) akkor a z tengelyt. Hogy, ha ebben a coord.-rendszerben x, y, z-vel jelöljük egy pontnak a coord.-áit, akkor ez az értékhármas egyértékűleg határozza meg a pontot; a vonatkozás a számok és pontok között kölcsönösen egyértékű: minden értékhármasnak megfelel egy pont és minden pontnak egy értékhármas.

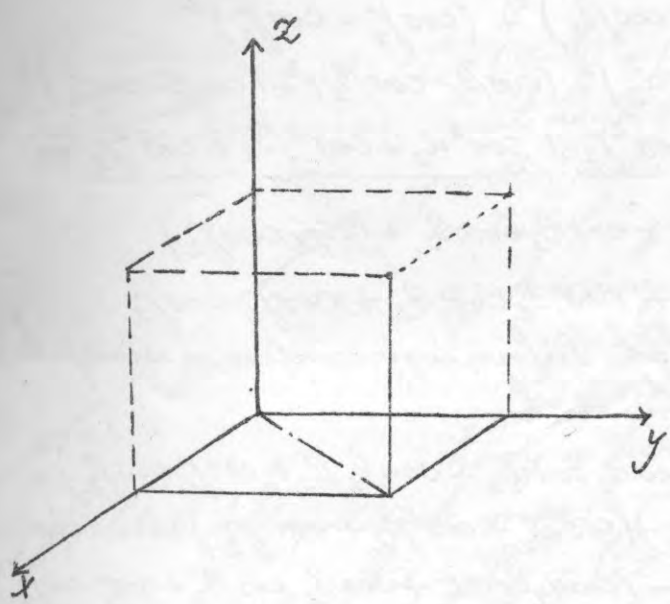
Képzeljünk a térben egy r hosszat, projiciáljuk ezt a hosszat egy l egyenesre; ez olyanképen történik, hogy a kérdéses távolság két végén merőleges síkokat bocsátunk az egyenesre s annak e két sík közé eső része adja az r hossz derékszögű projectióját. A projectió hossza lesz: $r.\cos(r,l)$, vagyis az eredeti hossz, szorozva az r és l által képzett szög cosinusával.



Hasonlóképen nyerjük egy hossznak a projectióját valamely síkra: a projectió hossza az eredeti hossz és a sík, meg ezen hossz által képzett szög cosinusának szorzatával egyenlő.-

Ha van egy egyenesünk a térben s ezen egyenes koordinátarendszerünk tengelyeivel rendre α, β, γ szöget zár be, akkor $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ ezen egyenesen lévő egységnyi hossznak a projectiói a három tengelyre. Igen könnyen beláthatjuk ezt, ha a coord.-rendszer origójából a kérdéses egyenessel párhuzamost húzunk, s az utóbbin felvett egységnyi hosszat projiciáljuk a tengelyekre.-

Szerkesszük meg most az ezen projectiókkal meghatározott parallelepipedont (l. 5 old.) Az (x, y) síkban lévő parallelogramma átlója: $\sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\beta}$ s igy a parallele-



pipedon átlója:

$$\sqrt{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma}$$

Ámde a mi esetünkben az átló: 1, s így:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma = 1$$

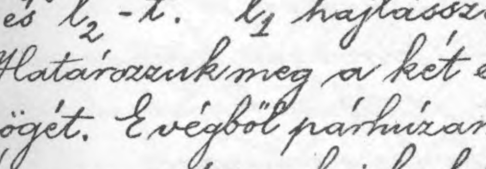
Egy sík iránya normálisának irányával van megszabva s így a sík iránycosinusai is teljesítik ezt a relátiót. –

Ha van két pontunk: (x_1, y_1, z_1) és (x_2, y_2, z_2), akkor: x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1 nem egyebek, mint a két pont által határolt egyenesnek a projectiói a három coord.-tengelyre s így a két pontnak egymástól való távolsága:

$$r=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

Vegyünk most két egyenest: l_1 és l_2-t. l_1 hajlásszöge $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, l_2-é: $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ legyen.

Határozzuk meg a két egyenesnek egymáshoz való hajlásszögét. E végből párhuzamos eltolással hozzuk metszésbe a két egyenest s rakjuk fel mindkettőre az egységnyi hosszt, ha most megszerkesztjük a háromszöget: φ lesz abban a keresett szög. Carnót tétele szerint:



$$d^2 = 1+1-2\cos\varphi$$

d-t még másképen is kifejezhetjük:

$$d^2 = (\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)^2 + (\cos\beta_1 - \cos\beta_2)^2 + (\cos\gamma_1 - \cos\gamma_2)^2$$

tehát: $$2 - 2\cos\varphi = (\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)^2 + (\cos\beta_1 - \cos\beta_2)^2 + (\cos\gamma_1 - \cos\gamma_2)^2$$

$$= \underbrace{\cos^2\alpha_1 + \cos^2\beta_1 + \cos^2\gamma_1}_{1} + \underbrace{\cos^2\alpha_2 + \cos^2\beta_2 + \cos^2\gamma_2}_{1} -$$

$$-2(\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2)$$

$$\cos\varphi = \cos\alpha_1\cdot\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cdot\cos\gamma_2$$

Ez a képlet igen gyakran fog előfordúlni, úgy szintén a $\sin\varphi$ képleteis, melyet a következőképen nyerünk:

$$\sin^2\varphi = 1 - \cos^2\varphi = 1 - (\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\beta_2 + \cos\gamma_1\cdot\cos\gamma_2)^2 =$$

$$= (\cos^2\alpha_1 + \cos^2\beta_1 + \cos^2\gamma_1)(\cos^2\alpha_2 + \cos^2\beta_2 + \cos^2\gamma_2) -$$

$$-(\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cdot\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cdot\cos\gamma_2)^2$$

Ennek a kifejezésnek más alakot adhatunk a következő identitás alapján:

$$(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2) - (a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2)^2 = (a_1b_2 - a_2b_1)^2 +$$

$$+ (b_1c_2 - c_1b_2)^2 + (c_1a_2 - a_1c_2)^2$$

Ezt az identitást felhasználva, nyerjük, hogy:

$$\sin\varphi = \sqrt{(\cos\alpha_1\cos\beta_2 - \cos\beta_1\cos\alpha_2)^2 + (\cos\beta_1\cos\gamma_2 - \cos\gamma_1\cos\beta_2)^2 + (\cos\gamma_1\cdot\cos\alpha_2 - \dots)^2}$$

Tehát a sinusnak az előjele nincs meghatározva, a mi abból következik, hogy a két egyenes hajlás szöge semegész határozott.—

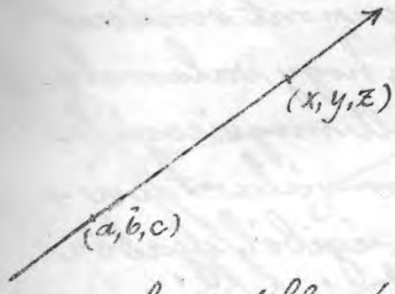
Az egyenes vonalat rendesen ebben az alakban fogjuk előállítani: legyenek a, b, c az egyenes valamely fix pontjának a koordinatái, akkor az egyenes bármely pontjának a koord.-ái ezek:

$$x = a + t\cos\alpha$$
$$y = b + t\cos\beta$$
$$z = c + t\cos\gamma$$

ahol α, β, γ az egyenes hajlásszögeit jelentik. A t egy változó parameter, melynek geometriai jelentését is tüstént láthatjuk: ugyanis:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=t^2$$

s igy a t nem más, mint az (x y z) koord: ás pontnak az a, b, c ponttól való távolsága. Természetesen ezt a távolságot előjellel kell ellátnunk: egyik irányban positivnak, a másikban negativnak számitjuk.-



Egy síkot az által határozunk meg, hogy a három coord. között egy lineáris egyenletet állapitunk meg:

$$Ax+By+Cz+D=0$$

Ha ezen síkra, valamely pontjában merőlegest emelünk: ennek iránycosinusai így vannak adva:

$$\cos\alpha=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}};\quad \cos\beta=\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}};\quad \cos\gamma=\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Itt a négyzetgyök előjele meghatározatlan, a mennyiben a normálisnak is két iránya van. Ezek tehát a kérdéses sík és a három koord.-sík által képzett szögek iránycosinusai.

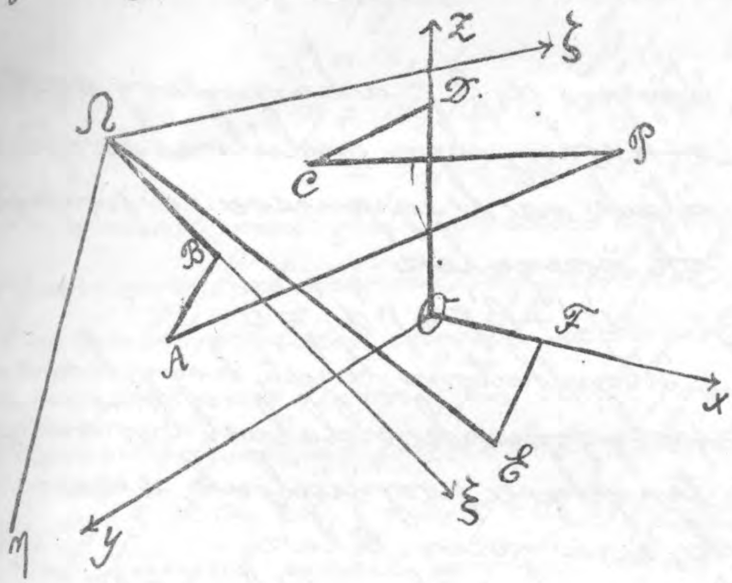
Most még fel kell említenünk azt a módszert, a melynek segitségével egyik coord.-rendszertől átmehetünk a másikhoz. Hogy ez az átmenet igen fontos, arról a következő okoskodás győzhet meg. Hogyha bizonyos pontok rendszerével van dolgunk, tehát egy geometriai képződménynyel, akkor mi ezen pontokat koord.-ákkal képviseljük és ezen koord.-ákkal számolunk. Hogyha már most ezen pontok között oly vonatkozásunk van, a mely geometriai jellegű, akkor ezen vonatkozásnak függetlennek kell lennie a koord.-rendszer választásától, más szóval, ha a pontrendszer koordinátái között olyan vonatkozást kapunk, a mely ugyanaz bármely coord.-rendszerben, akkor az a vonatkozás geometriai lesz, ellenben egy olyan vonatkozás, a mely csak speciális koord.-rendszerben áll elő, nem mondható a pont rendszer tulajdonságának.- Hogy tehát eldönthessük, hogy valamely vonatkozás geometriai-e vagy nem, azt kell megvizsgálnunk, hogy független-e a coord.-rendszer választásától, ezt azonban csak úgy tehetjük, ha a régiből ujabba megyünk át s megnézzük, hogy ez a vonatkozás invariáns-e? Tehát a koord.-transformatió rendkivül fontos.-

Coordináta transformátió.-

Képzeljük, hogy volna két coord.-rendszerünk. Az egyik coord.-rendszer tengelyei x, y, z és origója O legyen; a másik rendszer tengelyei ξ, η, ζ, és origója Ω. Nevezzük az egyiket latin, a másikat görög rendszernek. Nyilvánvaló, hogy a görög rendszernek a helyzetét a latin rendszerben ismerjük, hogy, ha ismerjük a latin rendszerben az Ω koord.-áit, legyenek ezek a, b, c s ha továbbá ismerjük a görög rendszer iránycosinusait a latin rendszerhez képest, pl. a ξ tengely iránycosinusai legyenek $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, a hol:

$$\alpha_1 = \cos(\xi, x), \quad \alpha_2 = \cos(\xi, y), \quad \alpha_3 = \cos(\xi, z)$$

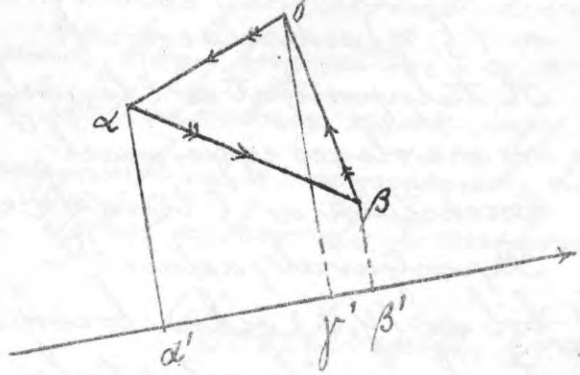
hasonlóképp legyen az η tengely három iránycosinusa: $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ s a ζ-é: $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. Összesen tehát 12 mennyiségünk van, a melyekkel a görög coord.-rendszer helyzete meg van határozva. Ámde ez a 12 mennyiség nem mind független egymástól, mert, ha pl. megadjuk a ξ, η tengelyeket, a ζ már nem lehet tetszőleges. Hogy ezen függési viszonyokat megismerjük a következő ábrát veszük tekintetbe.-



Veszünk egy P pontot: ebből merőlegest húzunk a (ξ, η) síkra ennek A talppontját a ξ tengelyre merőleges egyenessel összekötjük a ξ tengely B pontjával; aztán P-ből az (y, z) síkra bocsátunk merőlegest s talppontját C-t összekötjük merőleges egyenes által a z tengelylyel (D); végül az Ω pontból az $(x\,y)$ síkra emelünk merőlegest s talppontját (E) az x tengelylyel kötjük össze, reá merőleges egyenessel (F).- Ez által kapunk egy térbeli sokszöget, a melyet a következő irányban képzeljünk befutva: $O\,F\,E\,\Omega\,B\,A\,P\,C\,D\,O$.- Ennek a zárt sokszögnek oldalait mindjárt ki is tudjuk fejezni, t.i.:

$$\overline{OF} = a; \quad FE = b; \quad E\Omega = c$$
$$\Omega B = \xi; \quad BA = \eta; \quad AP = \zeta$$
$$PC = x; \quad CD = y; \quad DO = z$$

Képzeljük most ezen zárt polygont egymásután projiciálva a 6 coord.-tengelyre. Erre nézve áll, hogy, ha van egy tetszőleges zárt polygonunk a térben s azt egy egyenesre projiciáljuk, akkor, ha az egyes oldalak projektióit olyan értelemben vesszük, hogy a polygont bizonyos i-rányban befutjuk s így képezzük a projectiók összegét, ez az összeg mindig nulla lesz.- Elég lesz ezt a tételt egy háromszög esetében kimutatni, mivel, minden polygon háromszögekre bontható.-



Legyen α, β, γ a háromszög s ezt a $\longrightarrow$ irányában indulva, projiciáljuk az l egyenesre: a projectiók összege lesz:

$$\alpha'\beta' + \beta'\gamma' + \gamma'\alpha' = 0$$

Mondhatom tehát, hogy, ha a m polygonunk oldalait bármely tengelyre projiciáljuk, s ezen projectiók összegét alkotjuk, ezen összeg 0 lesz.-

Projiciáljuk tehát a polygonunkat, kiindulva $O\,F$ irányban, az x tengelyre:

$$a + \xi\alpha_1 + \eta\alpha_2 + \zeta\alpha_3 - x = 0$$

hasonlóképen az y tengelyre:

$$b + \xi\beta_1 + \eta\beta_2 + \zeta\beta_3 - y = 0$$

és a z tengelyre:

$$c + \xi\gamma_1 + \eta\gamma_2 + \zeta\gamma_3 - z = 0$$

Most projiciáljuk a polygont a görög tengelyekre; először a ξ tengelyre:

$$\xi + \alpha_1(a-x) + \beta_1(b-y) + \gamma_1(c-z) = 0$$

az η tengelyre: $\quad \eta + \alpha_2(a-x) + \beta_2(b-y) + \gamma_2(c-z) = 0$

a ζ tengelyre: $\quad \zeta + \alpha_3(a-x) + \beta_3(b-y) + \gamma_3(c-z) = 0$

Ezekből a relatiókból most már közvetlenül kifejezhetjük a régi coord.-ákat az újakkal, t.i.:

$$\left.\begin{aligned} x-a &= \alpha_1\xi+\alpha_2\eta+\alpha_3\zeta \\ y-b &= \beta_1\xi+\beta_2\eta+\beta_3\zeta \\ z-c &= \gamma_1\xi+\gamma_2\eta+\gamma_3\zeta \end{aligned}\right\} (1.)$$

Az új coord.-ák kifejezve a régiekkel, ezek lesznek:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \alpha_1(x-a)+\beta_1(y-b)+\gamma_1(z-c) \\ \eta &= \alpha_2(x-a)+\beta_2(y-b)+\gamma_2(z-c) \\ \zeta &= \alpha_3(x-a)+\beta_3(y-b)+\gamma_3(z-c) \end{aligned}\right\} (2.)$$

Van most már két lineáris egyenletrendszerünk, a melyekben ugyanazon hat mennyiség szerepel: szükséges tehát, hogy e két egyenletrendszer közül az egyik a másiknak megoldása legyen, más szóval, ha az (1.) rendszerből a (2) rendszerbe helyettesítjük az értékeket, identitást kell kapnunk:-

$$\xi = \alpha_1(\alpha_1\xi+\alpha_2\eta+\alpha_3\zeta)+\beta_1(\beta_1\xi+\beta_2\eta+\beta_3\zeta)+\gamma_1(\gamma_1\xi+\gamma_2\eta+\gamma_3\zeta)$$

Ebből kapjuk ezeket a relatiókat:

$$(3.)\left\{\begin{aligned} &\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2=1 \\ &\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2=0 \\ &\alpha_3\alpha_1+\beta_3\beta_1+\gamma_3\gamma_1=0 \\ &\alpha_2\alpha_3+\beta_2\beta_3+\gamma_2\gamma_3=0 \\ &\alpha_2^2+\beta_2^2+\gamma_2^2=1 \\ &\alpha_3^2+\beta_3^2+\gamma_3^2=1 \end{aligned}\right.$$

Az η és ζ számára adódó identitásból: kapjuk.—

Ha a (2.) rendszerbeli értékeket az (1.)-be helyettesítjük:

$$\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2=1;\ \beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2=1,\ \gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2=1 \quad \text{és:}$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3 &= 0 \\ \beta_1\gamma_1+\beta_2\gamma_2+\beta_3\gamma_3 &= 0 \\ \gamma_1\alpha_1+\gamma_2\alpha_2+\gamma_3\alpha_3 &= 0 \end{aligned}\right\} (4.)$$

relatiókat kapjuk.-

Vegyük most az utolsó rendszerből a 4-ik és hatodik egyenleteket:

$$\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3=0$$
$$\gamma_1\alpha_1+\gamma_2\alpha_2+\gamma_3\alpha_3=0$$

Ez két homogén lineáris egyenlet az $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ részére s a lineáris egyenletek alapján ezek viszonyára kapjuk, hogy:

$$\alpha_1:\alpha_2:\alpha_3=(\beta_2\gamma_3-\gamma_2\beta_3):(\beta_3\gamma_1-\gamma_3\beta_1):(\beta_1\gamma_2-\gamma_1\beta_2)$$

vagy:

$$\alpha_1=\lambda(\beta_2\gamma_3-\gamma_2\beta_3)$$
$$\alpha_2=\lambda(\beta_3\gamma_1-\gamma_3\beta_1)$$
$$\alpha_3=\lambda(\beta_1\gamma_2-\gamma_1\beta_2)$$

Vegyük most egyszerűen az (1.) vagy (2.) rendszer determinánsát s képzeljük az első oszlop szerint rendezve:

$$\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1\\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2\\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3\end{vmatrix}=\frac{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2}{\lambda}=\frac{1}{\lambda}$$

Így tehát a λ nem egyéb, mint ezen determináns reciprokja. Hogy a determináns értékét meghatározzuk, képzeljük az $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ fennebb talált értékeit bele helyettesítve az $\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2=1$ egyenletbe:

$$\lambda^2\left((\beta_2\gamma_3-\gamma_2\beta_3)^2+(\beta_3\gamma_1-\gamma_3\beta_1)^2+(\beta_1\gamma_2-\gamma_1\beta_2)^2\right)=1$$

Ámde a $(\cdots)$ értéke egy előbb már alkalmazott identitás szerint:

$$(\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2)(\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2)-(\beta_1\gamma_1+\beta_2\gamma_2+\beta_3\gamma_3)^2=1$$

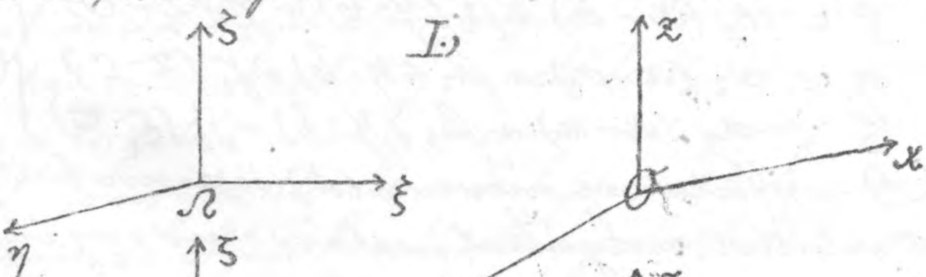
s így:

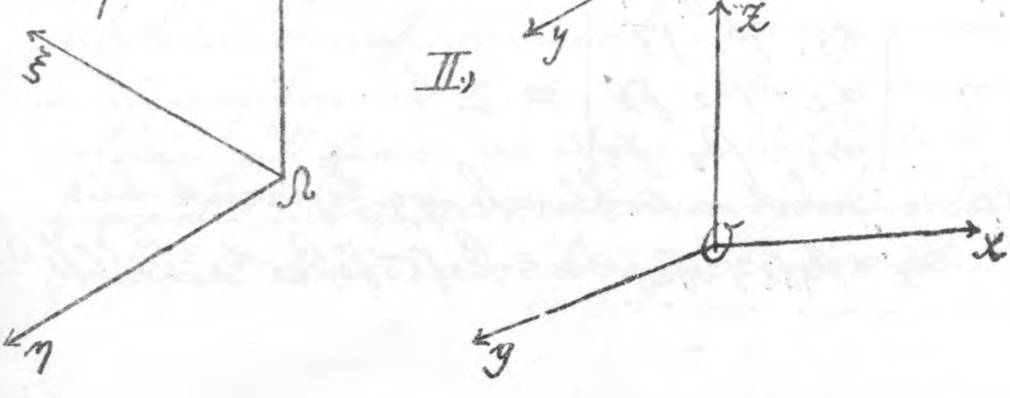
$$\lambda^2=1;\quad \lambda=\pm 1$$

$$\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1\\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2\\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3\end{vmatrix}=\pm 1$$

Ez a 13-ik relátió a görög rendszer tengelyeinek iránycosinusai között. Már most arra nézve, hogy $\lambda=\pm 1$ közül melyik használandó, a további vizsgálat ad felvilágosítást. Mind a kettő fordulhat elő; ez a λ a két coord.-

rendszer egymáshoz való helyzetétől függ.. Képzeljük a görög rendszert változó rendszernek, akkor az $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots$ stb. is változnak. Az:
$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$
determinánś ezeknek a cosinusoknak folytonos függvénye, ha tehát a cosinusok változnak, akkor ez a folytonos függvény csak folytonosan változhatik, nem követhet el sohasem ugrást, vagy nem lehet a görög rendszer egy bizonyos helyzetében: $+1$ s egy másik helyzetében, a mely az előbbiből folytonos változtatás által keletkezett: -1; más szóval, ha egy folytonos függvény egyszer állandó értéket vesz fel, más állandót nem vehet fel. Tehát a coord.-rendszer egy speciális helyzetében meghatározzuk az: $\frac{1}{\varepsilon} = \left| \ldots \right|$ értéket s akkor ennek a determinánsnak mindig ugyanaz az értéke.- Lehet a két coordináta rendszer olyan helyzetben, hogy a görög coord.-rendszer folytonos változtatással a latin coord.-rendszerbe helyezhető, mint pl. az I. ábránál. Ámde lehetséges egy olyan helyzet is (II. ábra.), hogy a görög rendszer semmiképen sem hozható oly helyzetbe, hogy a latinnal coincidáljon, mert az





egyik rendszer úgy szólván a másiknak tükörképe. - Az I esetben nyilvánvalóan: $\alpha_1 = 1$, $\beta_2 = 1$, $\gamma_3 = 1$, a többi mind 0, s így ebben az esetben a determináns: +1. A II. esetben: $\alpha_1 = -1$; $\beta_2 = 1$; $\gamma_3 = 1$; a többi megint 0 s így a determináns értéke: -1. -

Ha tehát a két coord.-rendszer homolog helyzetű, vagyis coïncidentiába hozható egymással, a determináns értéke: +1, ha pedig heterolog, vagy symmetrikus helyzetű, akkor a determináns: -1.

A coordináta transformatiót két simultán egyenlet-rendszer állítja elő. Az egyik egyenletrendszer szolgáltatja a régi coord.-ákat, mint az új coord.-ák függvényeit:

$$\left.\begin{aligned} x-a &= \alpha_1\xi + \alpha_2\eta + \alpha_3\zeta \\ y-b &= \beta_1\xi + \beta_2\eta + \beta_3\zeta \\ z-c &= \gamma_1\xi + \gamma_2\eta + \gamma_3\zeta \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

A másik egyenletrendszer előállítja az új coord.-ákat, mint a régi coord.-ák függvényeit:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \alpha_1(x-a) + \beta_1(y-b) + \gamma_1(z-c) \\ \eta &= \alpha_2(x-a) + \beta_2(y-b) + \gamma_2(z-c) \\ \zeta &= \alpha_3(x-a) + \beta_3(y-b) + \gamma_3(z-c) \end{aligned}\right\} (2.)$$

Az itt szereplő 9 coefficiensre nézve a (3.) összesen hat, a (4.) összesen hat relatiót szolgáltat; aztán van egy ilyen relatiónk:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \pm 1$$

Az egyes coefficienseket a többivel így fejezzük ki:

$$\alpha_1 = \beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2;\ \alpha_2 = \beta_3\gamma_1 - \gamma_3\beta_1;\ \alpha_3 = \beta_1\gamma_2 - \gamma_1\beta_2$$

. . . .

. . . .

Ezek összesen megint 9 relátiót szolgáltatnak. Van tehát nekünk összesen: $6+6+1+9=22$ relátiónk 9 mennyiség között, amelyek természetesen nem mind függetlenek egymástól.-

Az (1.) és (2.) összefüggési képletekben a ξ, η, ζ mennyiségek szerepelnek egyfelől (a görög rendszerre nézve); $x-a$, $y-b$, $z-c$ mennyiség másfelől (a latin rendszerre nézve). Ez onnan van, hogy a görög rendszer Ω origójának a koord.-ait a latin rendszerre nézve gondoltuk ismereteseknek. Ezt még úgy is lehet fogalmazni: koord.-transformatiónk két lépésben történik; először az x, y, z átmegy $x-a$, $y-b$, $z-c$-be; ennek geometriailag az az értelme, hogy az origót áthelyezem Ω-ba. Ez egy úgy nevezett parallel transformatió. Ezen transformatió után alkalmazzuk azt a transformatiót, mely $x-a$, $y-b$, $z-c$-t átviszi ξ, η, ζ-ba; ez a második transformatió abban áll, hogy két, ugyanazon origóval bíró rendszert egymásba transformálunk, vagy mert homolog tranformatióval van dolgunk: a második rendszert az első körül elforgatjuk. Minden coord.-transformatió két részre bontható; parallel eltolás és forgatás. A lényeges a forgatás, a mely szerint az egyik rendszer, a másikkal homogén lineáris kifejezésekkel van adva. Általánosan az ilyen lineáris kifejezésekkel való helyettesítést substitutió-nak nevezzük.- Ez egy speciális substitutió, a mennyiben az $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots$ stb. 9 mennyiség között 22 relátió áll fenn: az ilyen substitutiót általában orthogonális substitutiónak mondjuk, mert egy derékszög rendszert ismét derékszögűbe visz át.-

Ezekre nézve van egy egyszerű invariáns jellegű kifejezés; ha t. i. veszek egy P pontot s annak a távolságát veszem a közös origótól (: a parallel eltolás után a latin és görög rendszer közös origót nyer :), akkor a latin rendszerre:

$$r^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$$

a görög rendszerre:

$$r^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$$

tehát:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$$

ez a quadratikus kifejezés, vagy szokásos nevén quadratikus forma, az orthogonális transformatióval maga magába megy át. Minden invariáns kifejezés geometriai jelentéssel bír s tényleg a mi invariáns kifejezésünk is. Fordítva már most ki lehet mutatni, hogy minden lineáris substitutio, a mely ezt a quadratikus kifejezést maga-magába viszi át: orthogonális is. Ez a kifejezés tehát a forgatásra nézve invariáns, de nyilvánvalóan az eltolásra nézve nem invariáns. Tetszőleges koord.-transformatióra is lehet felállítni egy invariáns kifejezést, ha differentiálokhoz fordulunk. Vegyük ugyanis ezt a kifejezést:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Az x, y, z - t bizonyos mennyiségek függvényeinek gondolva, ezen függvényeknek alkossuk meg totál differentiáljait s ezekből az említett kifejezést képezzük.

Ha most én pl. az (1.) egyenleteket differentiálom, akkor:

$$\begin{aligned} dx &= \alpha_1 d\xi + \alpha_2 d\eta + \alpha_3 d\zeta \\ dy &= \beta_1 d\xi + \beta_2 d\eta + \beta_3 d\zeta \\ dz &= \gamma_1 d\xi + \gamma_2 d\eta + \gamma_3 d\zeta \end{aligned}$$

A dx, dy, dz, és $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ között oly egyenletek állnak fenn, mint forgatásnál. Azonban tudjuk, hogy a forgatásra nézve a quadratikus forma invariáns, s így mondhatom, hogy:

$$dx^2+dy^2+dz^2 = d\xi^2+d\eta^2+d\zeta^2$$

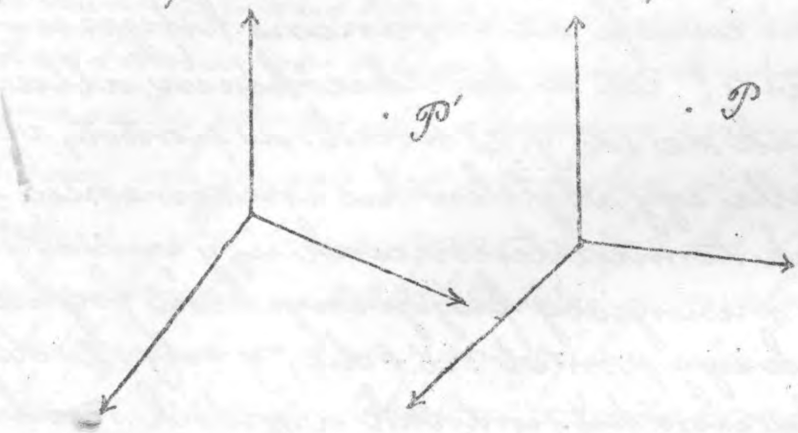
s ezzel egy minden koord.-transformátióra nézve invariáns kifejezést kaptunk. Ezt differentiál invariánsnak is nevezik, (mert nem algebrai kifejezés). – Az a kérdés már most, hogy mi ennek az invariáns kifejezésnek geometriai jelentése? Ezt a következőképen állapíthatjuk meg: vegyük az (x, y, z) koord.-ás pontot, vegyünk az (x, y, z) mellé egy végtelen kis incrementumot dx, dy, dz (ennek természetesen csak úgy van értelme, ha x, y, z bizonyos mennyiség függvényeként fogható fel.), akkor kapunk egy pontot: $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$

$$(x,y,z) \longrightarrow \begin{pmatrix} x+dx \\ y+dy \\ z+dz \end{pmatrix}$$

ha ezen két pontnak a másik rendszerben ξ, η, ζ illetve $\xi+d\xi$, $\eta+d\eta$, $\zeta+d\zeta$ a coord.-ái, akkor a diff. invariáns nem egyéb, mint ezen két végtelen szomszédos pont távolságának négyzete. A $(dx^2+dy^2+dz^2)^{1/2}$ tehát két végtelen szomszédos pont távolsága, vagy u. n. vonalelem. A síkban a vonalelem kifejezése: $(dx^2+dy^2)^{\frac{1}{2}}$.–

A koord.-transformátiót még egy más geometriai értelmezéssel is el lehet látni, a mely bizonyos szempontból igen fontos!

Fennebb úgy indultunk ki, hogy van nekünk egy P pontunk a térben s ennek a pontnak a coord.-áit mind a két koord.-rendszerben meghatároztuk. – Képzeljük, hogy a P pont koord.-ái: x, y, z, a latin rendszerben; legyen egy másik P pont, melynek a coord.-ái ugyancsak a latin rendszerben ξ, η, ζ. Most kérdem, hogy milyen vonatkozás lesz a P és P' között? Most két pont coord.-it veszük ugyanazon rendszerben. Egy nyilván látszik, hogy t. i. a P' épen olyan helyzetben van a görög rendszerhez képest, mint a P a latin rendszerhez. Ez azt jelenti, hogy, ha a P pontot fix összeköttetésben képzelem a latin rendszerrel,



és a latin rendszert átviszem a görög rendszerbe, akkor a P pont a P' helyzetébe jut. A vonatkozás tehát olyan, hogy, ha én az egész teret, mint egy merev testet képzelem s ezt a merev testet más helyzetbe viszem át, akkor a merev test minden P pontja átmegy egy bizonyos P' pontba és a mi koord.-transformatiónk szolgáltatja azt a vonatkozást, a mely ebből az áthelyeződésből ered, vagyis szolgáltatja azon pontoknak a coord.-áit, a melyekbe a tér pontjai átmennek, feltéve, hogy ismerjük a coord.-tengelyeknek az új helyzetét. Ezek által az adatok által az eltolás minősége meg van határozva, és e koord.-transformatio szolgáltatja a pont régi és új helyzetének egymás közti vonatkozását.—

A koord.-transformatiót tehát kétféle módon lehet interpretálni: vagy úgy, hogy egy rögzített térben egy és ugyanazon pont coord.-áit adja két különbö ző rendszerben, vagy egy mozogható térben a képleteket úgy interpretálom, ~~mint~~ mint eltolást. (merev testnek képzelve a tért, minden ábra maga magába megy át, minden távolság conserválódik, csak a helyzete lesz más). -

Ha geometriai képződményről szólunk, akkor azon olyan felfogást értünk, hogy ezen geometriai képződménynek - úgy szólván csak a belső tulajdonságait vizsgáljuk, egészen eltekintve attól, hogy milyen helyzetben van. A test, mint geometriai képződmény nincs befolyásolva azáltal, hogy a testet kimozgatom a helyzetéből. Ebből is látható, hogy a geometriai tulajdonságok invariánsok az orthogonális transformatióra nézve. Tehát a koordinata transformatió invariánsai épen ezen geometriai tulajdonságok lesznek. -

A görbékről és felületekről. -

Az általános megjegyzéseknek előrebocsátása után áttérhetünk a geometriai képződményeknek részletesb vizsgálatához. Mivel a térben maradunk, nyilván két különböző jellegű képződménnyel fogunk foglalkozni; t. i. a tér három dimensiós, a mennyiben minden pont meghatározására 3 valós mennyiség szükséges; (a sík két dimensiós, az egyenes egy dimensiós) a térben vizsgálhatók e szerint egy és két dimensiós képződményeket. -

Az egy dimensiós képződményeket úgy kapjuk, ha a térnek olyan pont sokaságát vizsgáljuk, a mely az egyenes pontsokaságával hasonlítható össze, a mely tehát, mint egy független változó függvénye állítható elő:

$$x = \varphi(t)$$
$$y = \psi(t)$$
$$z = \chi(t)$$

(A síkban csak egy dimensiós képződmények lehetnek, a melyeket akkor kapunk, ha az x, y-t, mint egy változó paraméter függvényeit tekintjük.) Az ilyen képződményeket görbék-nek nevezzük. A legegyszerűbb görbe az egyenes.-

Két dimensiós képződményeket akkor kapunk, ha olyan képződményeket veszünk tekintetbe, a melyek pontjainak sokasága a sík pontjainak sokaságával hasonlítható össze, vagyis, a melyeknek pontjai így állíthatók elő:

$$x = \varphi(u, v); \quad y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v)$$

Az ilyen képződményeket felületek-nek nevezzük.- Másféle képződmények a térben nincsenek.-

Mi tehát görbék és felületek elméletével akarunk foglalkozni.- Paradigmaképen szolgálhat az egyenes, a melyet már elő is állítottunk:

$$x = a + t.\cos\alpha, \text{ stb.}$$

Két dimensiós képződményekre nézve, szolgáljon például a sík, a melyet ebben az alakban állítottunk elő:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Ez az előállítás csak látszólag különbözik az általánostól s tulajdonképen azzal teljesen összeesik.-

Ha ugyanis igazi síkkal van dolgunk, akkor A, B, C közül valamelyik okvetlenül különbözik 0-tól; tegyük fel, hogy $A \neq 0$, akkor:

$$x = -\frac{By + Cz + D}{A} = \varphi(y, z)$$

$$y = y$$

$$z = z$$

Az x elő van állítva, mint 2 parameter függvénye!

A görbékről.

Vegyük mindenek előtt a görbéket. Egy változó parameter három függvényével van dolgunk:

$$x = \varphi(t)\,; \quad y = \psi(t)\,; \quad z = \chi(t)$$

A görbék legáltalánosabb fogalmazásában ezekről a függvényekről semmit sem kell feltételeznünk. Ámde ilyen általános fogalmazásban ezen képződményeknek nem is lesznek valami lényeges tulajdonságaik.– Ha azt akarjuk, hogy ezen képződményeknek egy bizonyos pontjuk környezetében valóságos tulajdonságaik legyenek, bizonyos kirovásokat kell tennünk a definiáló függvényekre.–

Mindenek előtt feltételezzük, hogy ezen függvények a változó parameternek egy bizonyos $t_0 \rightarrow t_1$ intervallumában egyértékü, véges és folytonos függvényeiként vannak értelmezve, vagyis, ha a t a jelzett intervallumot befutja, ezen függvények olyan értékeket vesznek fel, a melyek végesek, folytonosak s t minden értékéhez egy értéküleg vannak meghatározva.–

Ha t a $t_0 - t_1$ intervallumot befutja, akkor egy bizonyos pontsokaságot fogunk kapni, a mely egy bizonyos görbének egyrészét fogja alkotni.- De még ezek a feltevések nem elégségesek. Mert, ha csak azt tételezzük fel ezen függvényekről, hogy folytonosak, akkor még ívhosszról sem lehet szó. Az ív hossz, a vonalelem integrálja. A vonalelem:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

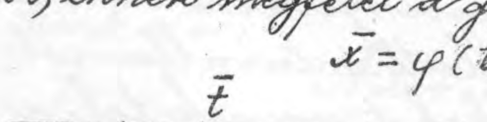
Ha t függvényre veszszük az s-et

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

s így ezen vonalelem existenciájához szükséges, hogy x, y, z, mint „t" függvényei differentiálhatók legyenek egy bizonyos pont környezetében. Ámde még azt is fogjuk látni, hogy az egyszeri deriválás sem elégséges ahhoz, hogy a görbének bizonyos tulajdonságait egy pont végtelen szomszédságában kitüntethessük, hanem legalább a kétszeri deriválhatóság lehetőségét s a második deriváltaknak folytonosságát kell feltételeznünk. Most tehát egyszersmindenkorra fel fogjuk tételezni, hogy a φ, ψ, χ függvények egy bizonyos $t_0 - t_1$ intervallumon belül egyértékűek, végesek, kétszer deriválhatók, és a második deriváltjaik folytonosak legyenek.-

Veszünk a $t_0 - t_1$ intervallumon belül egy bizonyos $\bar{t}$ pontot, ennek megfelel a görbe $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ pontja:

$$\bar{x} = \varphi(\bar{t});\quad \bar{y} = \psi(\bar{t}),\quad \bar{z} = \chi(\bar{t})$$

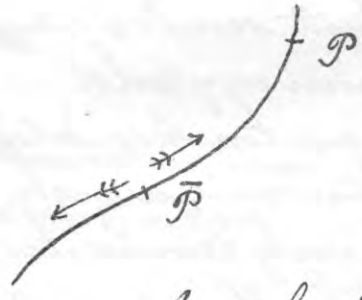


Integráljunk most a $\bar{t}$-tól t-ig és pedig a $\frac{ds}{dt}$-t:

$$\int_{\bar{t}}^{t} \frac{ds}{dt}\, dt =$$

$$= \int_{\bar{t}}^{t} \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \chi'(t)^2}\, dt = s(t)$$

Ez a felső határnak egy jól meghatározott függvénye lesz: s így $s(t)$ olyan függvény, a mely a görbe minden pontjában existál. Ezt a függvényt nevezni fogjuk a görbe: ívhosszá-nak. Állapodjunk meg most az ívhossz mérésében: az ívhossz az $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \equiv \bar{P}$ ponttól számítandó. A rajz a t-t növőnek tünteti fel; akár nő azonban a t, akár fogy, bizonyos, hogy a t-nek megfelelő P a $\bar{P}$-tól távozni fog. Már most az $s(t)$-t positivnak akkor



számítjuk, ha az integrál positiv, és negativnak, ha az integral negativ. Az $s(t)$ tehát egy egészen precise meghatározott függvény, a melynek existentiáját a feltételeink teljesen biztosítják. –

Az infinitesimális viszonyok vizsgálatában hasonlóképen járunk el, mint a síkban az érintő értelmezésekor. Kérdés, hogy az érintőnek a térben mi felel meg? A következőképen okoskodhatunk: a síkban a pontnak dualistikusan megfelel az egyenes; a térben a sík felel meg; minden pontot, mint 3 sík metszését fogjuk fel. Tehát a térben az érintő helyébe lép egy bizonyos sík, és miként az érintő, mint két végtelenül szomszédos pont összekötő egyenese van meghatározva, úgy a térben keresni fogunk egy olyan síkot, a mely 3 végtelenül szomszédos ponton megy keresztül. Az így nyert síkot: simuló sík-nak nevezzük. –

Mindenek előtt felállítjuk a simúló sik egyenletét, a mely egyszersmind a simúló sik existentia feltételeit is szolgáltatja. Határozzuk előbb oly sik egyenletét, a mely adott: (x, y, z), (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) pontokon megy keresztül. Ha a sik futó coord.-áit: ξ, η, ζ-val jelöljük, akkor a keresett egyenlet ez:

$$\begin{vmatrix} \xi - x & x_1 - x & x_2 - x \\ \eta - y & y_1 - y & y_2 - y \\ \zeta - z & z_1 - z & z_2 - z \end{vmatrix} = 0$$

Ez az egyenlet tényleg sikot ábrázol, mert a változó: ξ, η, ζ-ban lineáris; keresztül megy az (x, y, z), (x_1, y_1, z_1) (x_2, y_2, z_2) pontokon, mert, ha ξ, η, ζ helyett rendre: (x, y, z) $(x_1\, y_1\, z_1)$; (x_2, y_2, z_2) teszünk, a determinansi egyenlet azonosan null lesz. Most mar az (x, y, z) ponton keresztül menő sikok közül azt akarjuk meghatározni, a mely ennek két végtelen szomszédos pontján (: mely természetesen szintén a görbe pontja) megy keresztül. Ha x_1, y_1, z_1 valamely más t_1-hez tartozó értékhármas, akkor ezt Taylor tétele szerint elő lehet állitani:

$$x_1 = x + \frac{dx}{dt}(t_1 - t) + \frac{d^2x}{dt^2}\frac{(t_1-t)^2}{2!} + R_{11}(t_1-t)^3$$
$$y_1 = \cdots\cdots\cdots + R_{12}(t_1-t)^3$$
$$z_1 = \cdots\cdots\cdots + R_{13}(t_1-t)^3$$

Legyen a görbe másik pontja: x_2, y_2, z_2, akkor erre is ily előállitás fog existálni:

$$x_2 = x + \frac{dx}{dt}(t_2 - t) + \frac{d^2x}{dt^2}\frac{(t_2-t)^2}{2!} + R_{21}(t_2-t)^3$$
$$y_2 = \cdots\cdots\cdots + R_{22}(t_2-t)^3$$
$$z_2 = \cdots\cdots\cdots + R_{23}(t_2-t)^3$$

Legyen rövidség kedvéért $t_1 - t = \varepsilon_1$, $t_2 - t = \varepsilon_2$. végtelen szomszédos pontokat kapunk, ha ε_1 és ε_2 végtelen kicsinyek. Lesz a sík egyenlete:

$$\frac{}{\varepsilon_1\varepsilon_2}\begin{vmatrix} \xi - x & \frac{dx}{dt}\cancel{\varepsilon_1} + \frac{d^2x}{dt^2}\frac{\varepsilon_1^{\cancel{2}}}{2!} + R_{11}\varepsilon_1^{\cancel{3}\,2} & \frac{dx}{dt}\cancel{\varepsilon_2} + \frac{d^2x}{dt^2}\frac{\varepsilon_2^{\cancel{2}}}{2!} + R_{21}\varepsilon_2^{2\cancel{3}} \\ \eta - y & \cdots & \cdots \\ \zeta - z & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = 0$$

Vonjuk ki most a második oszlopot a harmadikból:

$$\begin{vmatrix} \xi - x & \frac{dx}{dt} + \frac{d^2x}{dt^2}\varepsilon_1 + R_{11}\varepsilon_1^2 & \frac{d^2x}{dt^2}\left(\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2!}\right) + R_{21}\varepsilon_2^2 - R_{11}\varepsilon_1^2 \\ \eta - y & \cdots & \cdots \\ \zeta - z & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = 0$$

Húzzuk ki most a harmadik oszlop elemeiből az: $\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2!}$ factort, akkor ilyen tagokat kapunk:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\,\frac{R_{21}\varepsilon_2^2 - R_{11}\varepsilon_1^2}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}$$

Térjünk át most a limeshez úgy, hogy az ε_1 és ε_2-t a 0-ba küldjük. Azt fogjuk látni, hogy a limes független a sorrendtől. A limes vizsgálatnál csak a harmadik oszlopbeli törtekre kell tekintettel lenni; először az ε_2-t küldjük a 0-ba, aztán az ε_1-et, akkor az ε_1-el lehet osztani s kapjuk:

$$\lim_{\varepsilon_2 = 0,\,\varepsilon_1} \frac{R_{21}\frac{\varepsilon_2^2}{\varepsilon_1} - R_{11}\varepsilon_1}{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - 1} = \varepsilon_1 . R_{11} \quad \text{s így:}$$

$$\lim_{\varepsilon_1 = 0,\,\varepsilon_2 = 0} . \frac{R_{21}\varepsilon_2^2 - R_{11}\varepsilon_1^2}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} = \lim_{\varepsilon_1 = 0} . R_{11}\varepsilon_1 = 0$$

Egészen hasonló lenne az eredmény, ha előbb az ε_1-el, s aztán az ε_2-el mennénk a 0-ba.

Tehát azon siknak, a mely a görbe 3, végtelenül szomszédos pontján megy keresztül: ez az egyenlete:

$$\begin{vmatrix} \xi - x & \frac{dx}{dt} & \frac{d^2x}{dt^2} \\ \eta - y & \frac{dy}{dt} & \frac{d^2y}{dt^2} \\ \zeta - z & \frac{dz}{dt} & \frac{d^2z}{dt^2} \end{vmatrix} = 0$$

Ez a simuló sik egyenlete. – Ez mutatja, hogy simuló sik csak abban az esetben van a görbe illető pontjához, ha a második deriváltak léteznek. –

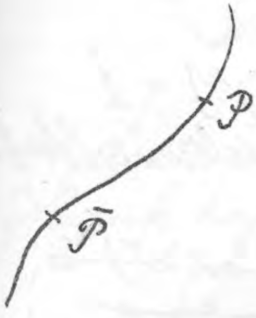
Most keressük fel a simuló sik hajlásszögeit a 3 coord.-sikhoz, vagy a mi ugyanaz: a simuló sik normálisának hajlásszögeit a három coord.-tengelyhez. – Mielőtt ezt tennénk, célszerű lesz a t parametert a simuló sik egyenletéből lehetőleg kiküszöbölni. Ez a t ugyanis nem bír geometriai jelentéssel, a mennyiben teljesen tetszésszerinti új parametert lehet a helyébe bevezetni. Közelfekvő itt a következő gondolat: az $s(t)$ adja a t-nek egy bizonyos függvényét, a melynek már ugyanis van geometriai jelentése; vezessük tehát be ezen „s”-t parameternek. Ez geometriailag azt jelenti, hogy keressük azt a pontot, a mely a P-től „s” távolságban van. Ha ezt az átalakitást tesszük:

$$x = f(s); \quad y = g(s); \quad z = h(s)$$

úgy, hogy most egy tetszésszerinti görbét úgy állitottunk elő, mint előbb az egyenest. Az egyenesnek u. i. vettük egy tetszésszerinti pontját, ezt rögzitettük s már

23

most az egyenes bármely pontját megtaláltuk, ha ezen rögzített ponttól való távolságát meghatároztuk. A tetszésszerinti görbénél most teljesen ugyanazok a viszonyok vannak: a tetszésszerinti görbén van egy $\bar{P}$ pontunk s már most bármelyik P pontját megkapjuk, ha a $\bar{P}$-tól való távolságát megadjuk.-



Az „s"-nek, mint úgyszólva természetes parameternek a bevezetése igen nagy előnyökkel jár.- Ha vesszük az x, y, z „s" szerinti deriváltjait (a következőkben mindig (') -el jelöljük):

$$\frac{dx}{ds}=x'; \quad \frac{dy}{ds}=y'; \quad \frac{dz}{ds}=z'$$

emeljük ezeket négyzetre s adjuk össze:

$$x'^2+y'^2+z'^2=\left(\frac{d\varphi}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}\right)^2+\left(\frac{d\psi}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}\right)^2+\left(\frac{d\chi}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}\right)^2=$$

$$=(\varphi'^2+\psi'^2+\chi'^2)\frac{dt}{ds}=\frac{\varphi'^2+\psi'^2+\chi'^2}{\varphi'^2+\psi'^2+\chi'^2}=1$$

$$x'^2+y'^2+z'^2=1$$

Az x', y', z' egy oly relátiónak tesznek eleget, a mely arra enged következtetni, hogy ezen mennyiségeket, mint egy egyenes iránycosinusait fogjuk fel.- Ebből a relatióból most már a második deriváltakra következik:

$$x'x''+y'y''+z'z''=0$$

Vezessük be most az „s"-t, mint parametert a simúló sík egyenletébe:

$$\begin{vmatrix} \xi-x & x' & x'' \\ \eta-y & y' & y'' \\ \zeta-z & z' & z'' \end{vmatrix}=0$$

Keressük fel most ennek a hajlásszögeit. – Egy:

$$\mathcal{A}\xi + \mathcal{B}\eta + \mathcal{C}\zeta + \mathcal{D} = 0.$$

sík hajlásszögeinek a cosinusai rendre arányosak: $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$-vel. Tehát, ha a simuló sík iránycosinusait λ, μ, ν-vel jelöljük, akkor:

$$\lambda = \rho(y'z''-z'y'')$$
$$\mu = \rho(z'x''-x'z'')$$
$$\nu = \rho(x'y''-y'x'')$$
$$\lambda^2+\mu^2+\nu^2 = \rho^2[(y'z''-z'y'')^2+(z'x''-x'z'')^2+(x'y''-y'x'')^2] = 1$$

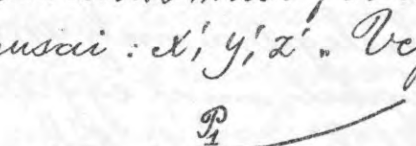
Ámde a [zárjel] tartalma egy előbb már ismételten alkalmazott identitás szerint:

$$\underbrace{(x'^2+y'^2+z'^2)}_{1}\underbrace{(x''^2+y''^2+z''^2)}_{1}-\underbrace{(x'x''+y'y''+z'z'')^2}_{0}=$$

Tehát: $$\rho^2 = \frac{1}{x''^2+y''^2+z''^2}$$ s így:

$$\lambda = \frac{y'z''-z'y''}{\sqrt{x''^2+y''^2+z''^2}}\ ;\ \mu = \frac{z'x''-x'z''}{\sqrt{x''^2+y''^2+z''^2}}\ ;\ \nu = \frac{x'y''-y'x''}{\sqrt{x''^2+y''^2+z''^2}}$$

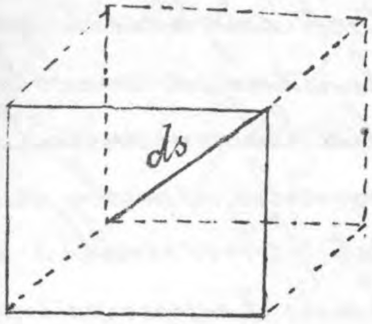
Keressük most fel azt az egyenest, a melynek iránycosinusai: x', y', z'. Vegyünk a mi görbénket; menjünk a



P pontból egy végtelenül szomszédos P_1-hez, a melynek a P-től való távolsága a vonalelem: ds

Ez a vonalelem rajta fekszik azon az egyenesen, a mely ezt a két végtelenül szomszédos pontot egymással összekapcsolja. Keressük fel most ennek a ds-nek a vetületét a három coord.-tengelyen:

$$dx = ds.\cos(s,x)$$
$$dy = ds.\cos(s,y)$$

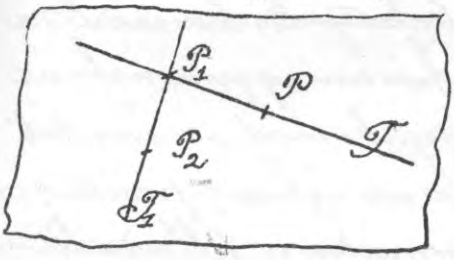


$dz = ds.\cos(s,z)$

Ebből pedig azonnal kapjuk az: x', y', z' jelentését: e szerint az x', y', z' az (x, y, z) ponthoz tartozó érintő iránycosinusai. – Az érintő egyenlete tehát:

$$\xi = x + x't$$
$$\eta = y + y't$$
$$\zeta = z + z't$$

Nyilvánvalóan az érintő benn fekszik a simúló síkban. Nézzük, hogy milyen helyzetet foglal el abban; képzeljünk



a P pontban a simúló síkra merőlegest: ez a merőleges a 3 tengelyhez ugyanolyan szög alatt hajlik, mint a simúló sík a 3 coord.-síkhoz: iránycosinusai tehát: λ, μ, ν.

A simúló síkban benn fekszik a P_1 is, mely rajta van az érintőn; de azonkívül a P_2 is s így P_1 és P_2 összekötő egyenese is, vagyis a végtelenül szomszédos érintő. Úgy is értelmezhetjük tehát a simúló síkot, hogy az két végtelenül szomszédos érintőn megy keresztül. A normális merőleges az első T, de merőleges a T_1 érintőre is (természetesen a T_1-et általában nem metszi). Tehát a simúló sík normálisa két végtelenül szomszédos érintőre merőleges, miért is a kérdéses ponthoz tartozó binormális-nak nevezzük; iránycosinusai: λ, μ, ν. Még egy harmadik egyenest fogunk bevezetni. Vegyük ismét a P pontot s benne a hozzátartozó érintőre emeljünk merőleges síkot. –

Ebben a síkban egy a P ponthoz tartozó sugársort gondoljunk: ennek a sugársornak minden tagja merőleges az érintőre, tehát minden tag normális. Ezen normálisok közül kiváló szerepet viszen az a normális, a mely a simuló síkban fekszik. Ezt a normálist főnormális-nak fogjuk nevezni. Van tehát a P pontban 3 egyenesünk: az érintő, a binormális és a főnormális. A főnormális merőleges az érintőre, de merőleges a binormálisra is; tehát ez a három egyenes egy derékszögű háromlábast ad.- Az érintő iránycosinusai: x', y', z', a binormálisé: λ, μ, ν; a főnormális iránycosinusait jelöljük: l, m, n-el. Ezeket ugyan még nem ismerjük, de tüstént felírhatjuk, ha ezzel a megállapodással élünk: Egyelőre ezen három egyenesnek az általános iránya van meghatározva; vegyük most az érintőt abban az irányban positivnak, a melyben az ívhossz positiv, vagyis a merre az ívhosszak nőnek. A binormálisra állapodjunk meg, hogy annak positiv iránya úgy feküdjék az érintőéhez képest, mint coord.-rendszerünk Y tengelyének positiv iránya az X tengely positiv irányához és végül a főnormális positiv iránya az érintő és binormálistól alkotott síkhoz olyan legyen, mint a positiv Z tengelyé az (x, y) síkhoz.-

Tehát a térbeli görbe minden pontjához rendelünk egy háromlábast, a melynek egyik tengelye az érintő, a második a főnormális s a harmadik a binormális. Oly képen szabjuk meg az irányukat, hogy az így keletkező új coordinata az eredetiből homolog transformatióval legyen származtatható.- Legyenek az érintő iránycosinusai: α, β, γ, a főnormálisé: l, m, n és a binormálisé: λ, μ, ν. Ezen 9 iránycosinus közt 22 relátió áll fenn, a melyek segítségével λ, μ, ν és α, β, γ már ismeretes kifejezései által az l, m, n iránycosinusokat is megtudjuk határozni. T.i.:

$$l = \mu\gamma - \nu\beta$$
$$m = \nu\alpha - \lambda\gamma$$
$$n = \lambda\beta - \mu\alpha$$

Az érintő iránycosinusait a coord.-áknak „s” szerint képzett első deriváltjai szolgáltatják:

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= x' \\ \beta &= y' \\ \gamma &= z' \end{aligned}\right\} (I.)$$

A binormális iránycosinusai:

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= r.(y'z'' - z'y'') \\ \mu &= r(z'x'' - x'z'') \\ \nu &= r(x'y'' - y'x'') \end{aligned}\right\} (III.)$$

Tehát:

$$l = r\left[z'(z'x'' - x'z'') - y'(x'y'' - y'x'')\right] = r\left[(z'^2 + y'^2 + x'^2)x'' - x'x'x'' - z'x'z'' - x'y'y''\right] =$$

$$= r\left[x'' - x'(x'x'' + z'z'' + y'y'')\right] = r.x'' \quad \text{hasonlóképen:}$$

$$m = \qquad\qquad = r.y''$$

$$n = \qquad\qquad = r.z''$$

adják a főnormális iránycosinusait.—

A mi főczélunk most abban fog állani, hogy ezekből az iránycosinusokból geometriai jelentéssel bíró kifejezéseket vezessünk le, vagyis olyan kifejezéseket, a melyek a koord. transformátióra nézve invariánsok. E célból mindenekelőtt az iránycosinusoknak az ívhossz szerint vett diff. hányadosait alkotjuk meg. Tehát:

$$\alpha' = x''$$
$$\beta' = y''$$
$$\gamma' = z''$$

De a (II.) alatti egyenletek szerint ezt így írhatjuk:

$$\left.\begin{aligned} \alpha' &= \frac{l}{r} \\ \beta' &= \frac{m}{r} \\ \gamma' &= \frac{n}{r} \end{aligned}\right\} (\mathrm{IV.})$$

Ez adja az első kapcsolatot az érintő iránycosinusainak a derivált jai s a főnormális iránycosinusai között. Mivel az érintő merőleges a binormálisra, áll ez a relatió a (4.) értelmében:

$$\alpha\lambda + \beta.\mu + \gamma.\nu = 0 \text{ és}$$
$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$$

differentiáljuk most az első egyenletet:

$$\alpha\lambda' + \beta\mu' + \gamma\nu' = -(\lambda\alpha' + \mu\beta' + \nu\gamma') = -\left(\lambda\frac{l}{r} + \mu\frac{m}{r} + \nu\frac{n}{r}\right) = 0$$

A második egyenletet differentiálva, ezt az egyenletet adja: λ', μ', ν' számára:

$$\lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu.\nu' = 0$$

a melyek szerint:

$$\lambda' : \mu' : \nu' = \mu\gamma - \nu\beta : \nu\alpha - \lambda\gamma : \lambda\beta - \mu\alpha$$
$$= l : m : n$$

vagyis:

$$\left.\begin{aligned} \lambda' &= \frac{l}{\varrho} \\ \mu' &= \frac{m}{\varrho} \\ \nu' &= \frac{n}{\varrho} \end{aligned}\right\} (\mathrm{V.})$$

a hol $\frac{1}{\varrho}$ egy arányossági factor. Most vegyük ezeket az egyenleteket:

$$l = \mu\gamma - \nu\beta \qquad \text{stb. és differentiáljuk:}$$

$$l' = \mu'\gamma + \mu\gamma' - \nu'\beta - \nu\beta' =$$
$$= \frac{m}{\rho}\gamma + \mu\frac{n}{r} - \frac{\nu}{\rho}\beta - \nu\frac{m}{r}$$
$$= \frac{1}{\rho}\underbrace{(m\gamma - \nu\beta)}_{-\lambda} + \frac{1}{r}\underbrace{(\mu n - \nu m)}_{-\alpha}$$

$$\left.\begin{aligned} l' &= -\frac{\alpha}{r} - \frac{\lambda}{\rho} \\ m' &= -\frac{\beta}{r} - \frac{\mu}{\rho} \\ n' &= -\frac{\gamma}{r} - \frac{\nu}{\rho} \end{aligned}\right\} (\underline{VI}.)$$

A $\underline{IV}.$, $\underline{V}.$, $\underline{VI}$ alatti relatiók kifejezik az iránycosinusok derriváltjait, magukkal az iránycosinusokkal.-

Hogy most a „ρ"-t meghatározhassunk, járjunk el következőképen: Vegyük a $\underline{III}.$, első egyenletét és differentiáljuk „s" szerint:

$$\lambda' = r'(y'z'' - z'y'') + r(y'z''' - z'y''')$$

Ezen számításnál a függvények háromszori derriválhatóságának a lehetőségét is feltételezzük;

$$\begin{aligned} \lambda' &= r'\frac{\lambda}{r} + r(y'z''' - z'y''') = \frac{l}{\rho} & \Big|\ \cdot l \\ \mu' &= r'\frac{\mu}{r} + r(z'x''' - x'z''') = \frac{m}{\rho} & \Big|\ \cdot m \\ \nu' &= r'\frac{\nu}{r} + r(x'y''' - y'x''') = \frac{n}{\rho} & \Big|\ \cdot n \end{aligned}$$

Szorozzuk meg ezen egyenleteket rendre: l, m, n-el és összegezzük:

$$\frac{1}{\rho} = r\left\{l(y'z''' - z'y''') + m(z'x''' - x'z''') + n(x'y''' - y'x''')\right\}$$

Ha most l, m, n helyett a $\underline{II}.$, szolgáltatta értékeiket behelyettesítjük, kapjuk, hogy:

$$\frac{1}{\rho} = r^2\left\{x''(y'z''' - z'y''') + \cdot + \cdot\right\}$$

vagy:

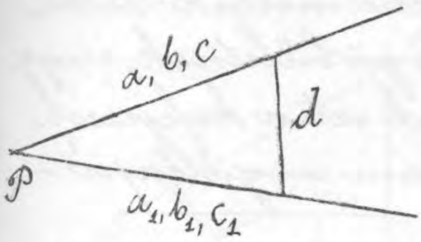
$$\frac{1}{\varrho} = r^2 \begin{vmatrix} x'' & x' & x''' \\ y'' & y' & y''' \\ z'' & z' & z''' \end{vmatrix} = -r^2 \begin{vmatrix} x' & x'' & x''' \\ y' & y'' & y''' \\ z' & z'' & z''' \end{vmatrix}$$

Ebből láthatjuk, hogy ϱ előjele teljesen meg van határozva, míg az r előjelét csak konventió szerint határoztuk meg. Mondhatjuk ilyen módon, hogy ezek a képletek határozott relátiót állapitanak meg a három irány cosinusai és azok deriváltjai között. Ezeket a képleteket Fresnet-Serret féle képleteknek nevezzük. Legelőször: Fresnet állította össze az 1847-ben Toulouseban megjelent dissertátiojában; tőle függetlenül eljutott ezekhez Serret is; az ő értekezése: 1851-ben jelent meg a Liouville Journal XII kötetében. Ezek a Fresnet-Serret féle képletek képezik a térbeli görbék elméletének a fundamentumát. Idáig az r és ϱ tisztán analytikailag vannak értelmezve, most kifogjuk mutatni, hogy az r-nek és ϱ-nak geometriai jelentése is van. Vegyük a IV., V., VI., alatti egyenleteket, emeljük négyzetre és adjuk össze:

$$\left.\begin{aligned} \alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2 &= \frac{1}{r^2} \\ \lambda'^2+\mu'^2+\nu'^2 &= \frac{1}{\varrho^2} \\ l'^2+m'^2+n'^2 &= \frac{1}{r^2}+\frac{1}{\varrho^2} \end{aligned}\right\} \quad (\underline{VII.})$$

Hogy ezekből a kifejezésekből az r és ϱ mennyiségeknek kiolvashassunk egy geometriai interpretátióját, gondoljuk meg a következőt: képzeljünk 2 egyenest egy a, b, c és egy a_1, b_1, c_1

iránycosinusait, a melyek egy bizonyos P pontban metszik egymást. Rakjunk fel mindkettőre a P ponttól számítva az egységnyi hosszuságot, akkor a két végpont egymástól való



távolsága:

$$d = \left[(a_1-a)^2+(b_1-b)^2+(c_1-c)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

Legyen most ez a két egyenes két végtelen szomszédos érintője a mi görbénknek; az iránycosinusok lesznek: α, β, γ illetve: $\alpha+d\alpha, \beta+d\beta, \gamma+d\gamma$. Ha most a két érintőre felrakjuk az egységnyi hosszuságot s a végpontokat összekapcsoló távolságot τ-val jelöljük, úgy:

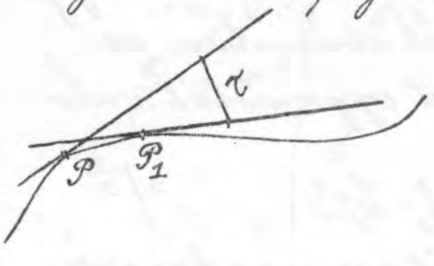
$$\tau^2 = d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2$$

Ámde most már ebben a háromszögben a két szomszédos érintő által bezárt szög ívmértékben számítva csak másodrendű kicsinyekben különbözik a hozzátartozó húrtól (τ). Mondhatom tehát, hogy a τ^2-ra nyert kifejezés előállitja a két szomszédos érintő által bezárt szög négyzetét. Osszuk el most τ^2-ot az ívelem négyzetével, akkor:

$$\left(\frac{\tau}{ds}\right)^2 = \left(\frac{d\alpha}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma}{ds}\right)^2 = \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = \frac{1}{r^2}$$

Flexió, torsio.—

Az „r" geometriai jelentését így fogalmazhatjuk meg: Legyen P és P' a görbének két végtelenül szomszédos pontja; huzzuk meg ezekhez a pontokhoz az érintőket s az ezek által bezárt szöget osszuk el az ívelemmel: ez a hányados adja az „r" reciprokját eltekintve az előjeltől. Ez a geometriai fogalom síkbeli görbe esetében megfelel a görbületnek, mert ott a görbületet, mint



a contingentia szögnek és az ívelemnek a hányadosát értelmeztük. Térbeli görbék esetében is görbületnek, vagy flexio-nak nevezzük ezt a kifejezést. Előjelül azt veszszük, a melyet az „r" számára megállapítottunk.

Ha most veszünk két végtelenül szomszédos pontot a görbén s ezekhez megszerkesztjük a binormálisokat; legyenek az egyik iránycosinusai λ, μ, ν; a másiké: $\lambda+d\lambda$, $\mu+d\mu$, $\nu+d\nu$, akkor σ-val jelölve a két szomszédos binormálistól, vagy a mi ugyanaz, a két végtelenül szomszédos simuló sík által bezárt szöget (ív mértékben), lesz:

$$\sigma^2 = d\lambda^2 + d\mu^2 + d\nu^2$$

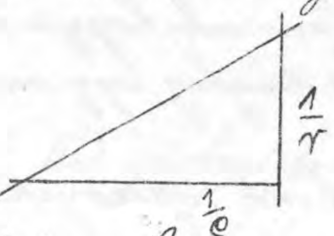
ha ezt az ívelem négyzetével elosztjuk, lesz:

$$\left(\frac{\sigma}{ds}\right)^2 = \left(\frac{d\lambda}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\mu}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\nu}{ds}\right)^2 = \lambda'^2 + \mu'^2 + \nu'^2 = \frac{1}{\varrho^2}$$

$$\frac{1}{\varrho} = \pm\frac{\sigma}{ds}$$

Tehát az $\frac{1}{\varrho}$ nem egyébb, mint két végtelenül szomszédos simuló sík által bezárt szögnek és az ívhossznak a hányadosa. Ez tehát egy olyan mennyiség, a mely a sík görbéknél nem fordúl elő, mert ezeknél a simuló sík minden pontban összeesik a görbe síkjával, ott tehát $\sigma = 0$ és így $\frac{1}{\varrho}$ is 0 minden pontban. „$\frac{1}{\varrho}$"-t második görbületnek vagy torsio-nak nevezzük.

A főnormálisok számára is hasonló geometriai jelentést állapithatunk meg. T.i. két végtelenül szomszédos fő-normális által bezárt szögnek és az ívelemnek a hányadosa, mint azon derékszögű háromszögnek az átfogója tekinthető, a melynek befogói a torzió és a flexió.



Ennek a mennyiségnek külön nevet nem adunk.–

Hogy ezek a mennyiségek geometriai jelentéssel bírnak, azt számítással is lehet igazolni, a mennyiben ki lehet mutatni, hogy ezek a kifejezések a koordináta eltolásra (transformátio) nézve invariánsok.–

Felvethetjük most a következő általános kérdést. Alkossuk meg a coord.-ákból, azoknak első, második stb.... k-dik deriváltjaiból az F kifejezést:

$$F(x, y, z; x', y', z'; \ldots x^{(k)}, y^{(k)}, z^{(k)})$$

Kérdezzük most, hogy milyen alakú F kifejezéseknek van geometriai jelentésük, vagyis milyen kikötések mellett lesz egy ilyen kifejezés a koord.-eltolásra nézve invariáns. A felelet erre a kérdésre az, hogy azon kifejezések bírnak geometriai jelentéssel, a melyek $\frac{1}{r}$ és $\frac{1}{\varrho}$-nak a függvényei. A bizonyítás megtalálható a Bianchi: differential geometriájában. Az eredmény annyiban érdekes, mert azt mutatja, hogy úgyszólván csak ez a két geometriai jelentéssel bíró kifejezés van, minden másé-zeknek függvényeiként állítható elő.

Ezen eredmény szerint valószínűnek látszik, hogy, ha van nekünk két térbeli görbénk, a melyekre nézve az $\frac{1}{r}$

és $\frac{1}{\varrho}$, mint az ívhossznak (s) a függvényei ugyanazok, akkor ez a két görbe egymásból eltolás révén származik, t.i. mert minden az eltolásra nézve invariáns mennyiség csak az $\frac{1}{r}$ és $\frac{1}{\varrho}$-től függ s így ezen két mennyiség összhangzata nemcsak szükséges, de elégséges feltétele is annak, hogy a két görbe eltolásból származzék egymásból. Ez tényleg így van. Ezt most befogjuk bizonyítani.-

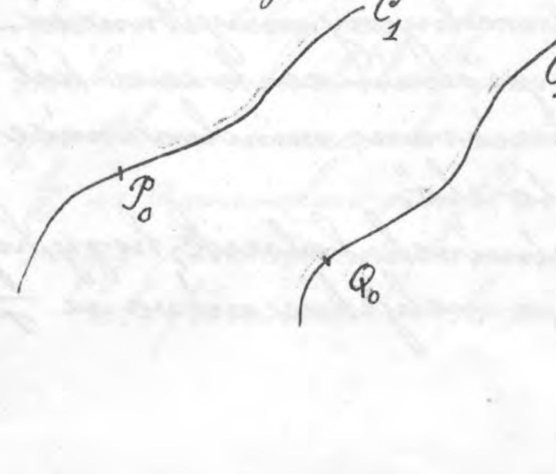
Arról van szó, hogy, ha van két görbénk: az egyikre $\frac{1}{r}$ és $\frac{1}{\varrho}$ bizonyos függvényei a görbe ívhosszának:

$$\frac{1}{r} = f(s); \qquad \frac{1}{\varrho} = g(s)$$

ha a másik görbére nézve is ugyanezen függvényei az $\frac{1}{r}$ és $\frac{1}{\varrho}$ a másik görbe ívhosszának, akkor ez a két görbe geometriai tulajdonságaira nézve identikus s egymásból eltolás révén keletkeznek. Képzeljük ezt a két görbét előállítva:

$$x = \varphi(s) \quad ; \quad x' = \varphi_1(s)$$
$$y = \psi(s) \quad ; \quad y' = \psi_1(s)$$
$$z = \chi(s) \quad ; \quad z' = \chi_1(s)$$

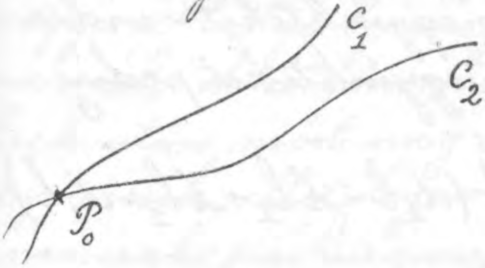
Ha az „s"-et ismerem, akkor az $x, y, z; x', y', z'$ mennyiségek, mint ezen „s"-nek a függvényei meg vannak határozva. Most azokra a pontokra nézve kell megállapodnunk, a melyekből az „s"-et számítjuk.- Legyen ez a pont a C_1 görbén P_0 s a C_2 görbén Q_0.- Mivel az $\frac{1}{r}$ és $\frac{1}{\varrho}$ mennyiségek invariánsok, tehát az eltolásnál nem változnak, állíthatom, hogy, ha a C_2-t parallel eltolásnak vetem alá



még pedig úgy, hogy Q_0 pontja a C_1 P_0 pontjával összeessék, akkor ezzel az általánosságot semmivel sem szorítjuk meg. Feltételezhetjük tehát, hogy $s=0$ mellett:

$$\varphi(0) = \varphi_1(0)$$
$$\psi(0) = \psi_1(0)$$
$$\chi(0) = \chi_1(0)$$

A két görbe tehát most metszi egymást a P_0 pontban. –



Mind a két görbéhez tartozik ebben a pontban egy háromlábas (érintő, binormális, és főnormális), a melyek homolog transformatióval származtathatók egymásból, mert a coordinata rendszerünkre nézve homolognak határoztuk meg külön-külön mind a kettőt. Most képzeljünk egy oly forgatást, hogy annak révén a két háromlábas coincidáljon. Ezzel természetesen a geometriai jelleget nem változtatjuk meg. Mondhatjuk tehát általánosan, hogy $s=0$ mellett:

$$\alpha, \beta, \gamma$$
$$\lambda, \mu, \nu$$
$$l, m, n$$

mennyiségek a két görbére nézve ugyanazok. Most azt akarjuk kimutatni, hogy, ha a két görbét ebbe a helyzetbe hozzuk s kihasználjuk azt a körülményt, hogy a két görbére nézve $\frac{1}{r}$ és $\frac{1}{\rho}$ ugyanaz, akkor a két görbe egyáltalában identikus, vagyis nemcsak a P_0 pontban, hanem valamennyi s-ben x, y, z, és x', y', z' összeesnek. –

Ennek a kimutatására felhasználjuk a Frenet-Serret képleteket. Ezek szerint, ha az egyik görbéhez tartozó mennyiségeket index nélkül, a másikhoz tartozókat (1) indexxel jelöljük, akkor lesz:

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{l}{r}\ ;\quad \frac{d\lambda}{ds} = \frac{l}{\varrho}\ ;\quad \frac{dl}{ds} = -\frac{\alpha}{r} - \frac{\lambda}{\varrho}$$

$$\frac{d\alpha_1}{ds} = \frac{l_1}{r}\ ;\quad \frac{d\lambda_1}{ds} = \frac{l_1}{\varrho}\ ;\quad \frac{dl}{ds} = -\frac{\alpha_1}{r} - \frac{\lambda_1}{\varrho}$$

Szorozzuk meg most az első sorban álló egyenleteket rendre α_1, λ_1, l_1-el; a második sorban álló egyenleteket pedig: α, λ, l-el s adjuk össze: akkor lesz:

$$\frac{1}{r}(l\alpha_1 - \alpha l_1 + \alpha l_1 - \alpha_1 l) + \frac{1}{\varrho}(\lambda_1 l - \lambda l_1 + \lambda l_1 - \lambda_1 l)$$

$$= \frac{d}{ds}(\alpha.\alpha_1 + l.l_1 + \lambda.\lambda_1) = 0$$

Ez azt mondja, hogy a zárjelben lévő kifejezés állandó:

$$\alpha\alpha_1 + ll_1 + \lambda\lambda_1 = \text{const.}$$

- - - - - - - -

. . . .

hasonló kifejezések adódnak a β, μ és m; γ, ν és n mennyiségekre is.-

Hogy ezen constánsok értéket meghatározhassuk, egy speciális s" mellett megvizsgálnunk és a milyen értéket ott veszneк fel, az fog tartozni minden olyan pontpár megfelelő" kifejezéseihez, a mely pontpárokat t. i. a két görbének ugyanazon „s" hez tartozó pontjai képeznek. A: $\alpha\alpha_1 + ll_1 + \lambda\lambda_1$ stb. kifejezések két-két irány hajlásszögének a kosinusát állitják elő. Mi a két görbét úgy rendeztük be, hogy „$s = 0$ mellett $\alpha = \alpha_1$, $l = l_1$, $\lambda = \lambda_1$ stb. legyen s igy $s=0$ bán az emlitett irányok hajlásszögének kosinusa:

$$\alpha^2 + l^2 + \lambda^2 = 1$$

Ámde ez minden pontra megadja a konstáns értékét s ebből következik, hogy minden pontban:

$$\alpha = \alpha_1 \; ; \quad l = l_1 \quad ; \; \lambda = \lambda_1$$
$$\beta = \beta_1 ; \quad m = m_1 ; \; \mu = \mu_1$$
$$\gamma = \gamma_1 ; \quad n = n_1 ; \; \nu = \nu_1$$

vagyis a két görbe megfelelő pontjaihoz tartozó érintők, binormálisok és főnormálisok egymással párhuzamosak. Ezek után most még csak azt kell kimutatni, hogy ezek az egyenesek, illetőleg az ezek által alkotott háromlábasak nemcsak párhuzamosak, hanem össze is esnek egymással, azaz a két görbe megfelelő pontjai összeesnek.-

Tudjuk, hogy:

$$\alpha = \frac{d\varphi}{ds} \; ; \quad \alpha_1 = \frac{d\varphi_1}{ds}$$
$$\beta = \frac{d\psi}{ds} \; ; \quad \beta_1 = \frac{d\psi_1}{ds}$$
$$\gamma = \frac{d\chi}{ds} \; ; \quad \gamma_1 = \frac{d\chi_1}{ds}$$

Tehát a fentiek szerint:

$$\frac{d}{ds}(\varphi - \varphi_1) = 0 \quad ; \quad \varphi - \varphi_1 = \text{const.}$$
$$\frac{d}{ds}(\psi - \psi_1) = 0 \quad ; \quad \psi - \psi_1 = \text{const.}$$
$$\frac{d}{ds}(\chi - \chi_1) = 0 \quad ; \quad \chi - \chi_1 = \text{const.}$$

Tehát a $\varphi - \varphi_1, \psi - \psi_1, \chi - \chi_1$ különbségek függetlenek az „s"-től és így, ha értéküket egy speciális „s"-nél megha tározzuk, minden s'' mellett ugyanazon értéket veszik fel. Vegyük $s=0$ mellett. Ámde $s=0$ mellett a két görbe közös ponttal bír s igy az itt felírt különbségek $s=0$ mellett zérók, de mert függetlenek az s''-től, egyáltalában zérók leoznek. Ezzel a bizonyitás el van végezve.—

Ha tehát van két görbénk C_1 és C_2, a melyek avval a tulajdonsággal bírnak, hogy flexiójuk és torziójuk, mint a megfelelő ívhosszak függvényei, ugyanazok, akkor ezt a két görbét teljes coincidentiába hozhatjuk, azaz a két görbe identikus, mert csak helyzetük más, de geometriai jellegük azonos.—

A mint látjuk a flexió és torzió egyenlete teljesen jellemzi a görbét, mint geometriai képződményt. Ha ismerem azt a két egyenletet egy görbére nézve, akkor az, mint geometriai képződmény teljesen meg van határozva, csak a helye ismeretlen: de, ha a görbének egy pontját és érintőjének irányát rögzitjük, akkor a helye is meglesz határozva.— Épen ezért az:

$$\frac{1}{r_1} = f(s)$$

$$\frac{1}{\rho} = g(s)$$

egyenleteket a görbe természetes vagy intrinsecus egyenletének nevezzük.—

Ennél az egész vizsgálatnál a görbe meghatározása lényegesen függ a (VII.) 3 egyenletétől. Megjegyzendő, hogy ezek az egyenletek egy igen nevezetes tulajdonsággal bírnak, a mennyiben ebből a 3 egyenletből le lehet vezetni a görbe coordinatái számára egy differentiális egyenletet, a mely ilyen alakú:

$$\frac{du}{dx} = a + bu + cu^2$$

Az ilyen differentiál egyenletet Riccati féle differentiál egyenletnek szokás nevezni (a jobboldalán u-nak egy rationális egész, másodfokú függvénye van).- Ezt historiailag megemlitjük, de a bebizonyitásra nem terünk ki.-

Ezzel elhagyjuk a görbék elméletét s áttérünk a két dimensios képződményeknek a felületeknek vizsgálatához.-

A felületekről.-

A két dimensiós képződményt, a felületet úgy állitjuk elő, hogy a koordinatáit, mint két parameter függvényét tekintjük:

$$x = \varphi(p, q)$$
$$y = \psi(p, q)$$
$$z = \chi(p, q)$$

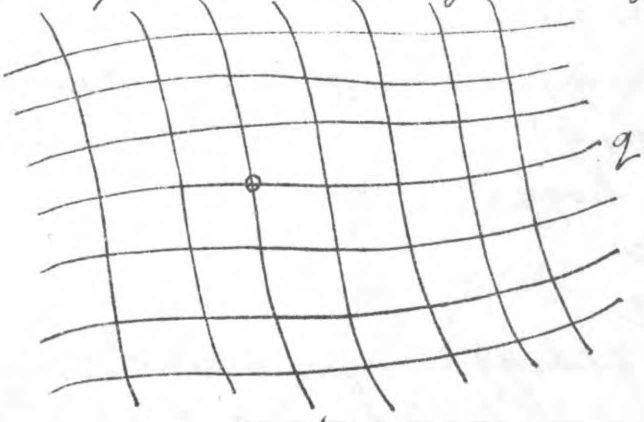
Különös például szolgáljon, hogy:

$$x = p$$
$$y = q$$
$$z = \chi(x, y)$$

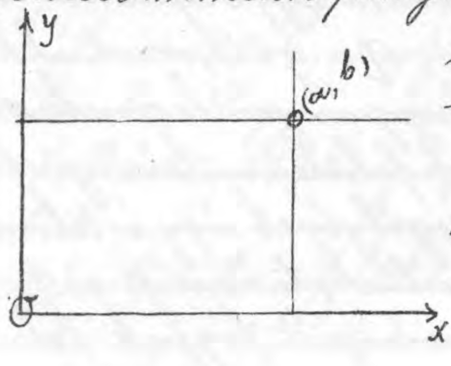
s igy a felületet úgy is elő lehet állitani, hogy az x és y-t tekintjük változó parametereknek s a "z"-t, mint az x és y függvényét állitjuk elő. Kérdés, hogy ezek a p és q mennyiségek mint jelentenek a felületen? Ha ebben a három függvényben, a melyek két független változónak a függvényei, a p-t rögzitjük: $p = p_0$, akkor:

$$x = \varphi(p_0, q)\,;\; y = \psi(p_0, q)\,;\; z = \chi(p_0, q)$$

az x, y, z most egy változó parameter függvényeiként vannak előállítva s igy egy görbét repraesentálnak, a mely természetesen egész terjedelmében rajta fekszik a felületen. Ha most a p_0-nak egy másik rögzített értéket adunk, megint kapunk egy bizonyos görbét. Szóval a p_0 o indexét mellőzhetjük s mondhatjuk, hogy, ha p-nek rögzített értéket adunk és a q-t változtatjuk, akkor a felületen görbe származik. Ha tehát a p-t parameternek tekintjük, akkor a p minden értékének megfelel egy ilyen görbe; a p = const. egyenletekkel tehát egy görbe sereget állítottunk elő. Egészen hasonlóképen van a dolog, hogy ha már most a q-nak adunk rögzített értéket, q = const., akkor az x, y, z mint a p-nek a függvénye áll elő s igy ez ismét egy görbét jelent; ha már most a q minden értéket fel vesz, akkor nyerünk egy görbe sereget.-

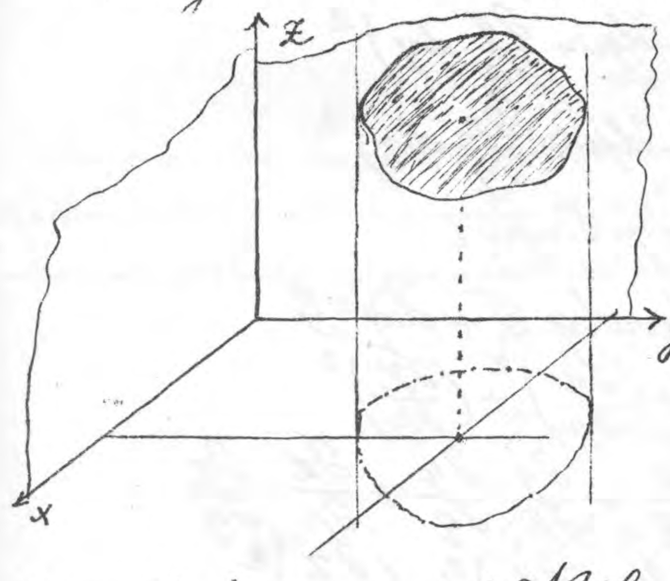


Kaptunk tehát két görbe sereget, a melynek két individuuma, $q = q_0$ és $p = p_0$ metszi egymást. A $p = p_0$ és $q = q_0$-nak megfelel egy jól meghatározott felületbeli pont. Más szóval minden felületbeli pont előáll, mint két ilyen individuális görbének a metsző pontja. E szerint a p = const. és q = const. a felületen két görbe sereget értelmez és mint ezen két görbesereg egy individuum párjának a metszőpontja áll elő" a felület minden pontja. Ez tehát teljesen olyan, mint a



sík coordinatáinak esetében, a hol minden pont előáll, mint egy x és y egyenes metszőpontja vagy polarcoordinatákban: minden pont mint egy körnek és bizonyos φ azimuthal bíró egyenesnek a metsző" pontja áll elő."- Épen ezért a „p"-ket és „q"-kat felületbeli koordinatáknak szoktuk nevezni.-

Mi a jelentése annak, ha a z-t, mint x és y függvényét állítjuk elő."- Képzeljük a felületet projiciálva az xy síkra, akkor az xy síkban kapunk egy zárt görbét. Ebben a projectióban $x = x_0$ és $y = y_0$ értékpár határoz meg egy pontot. A z függvénye az ezen projectióban levő" xy értékpároknak. Mik lesznek az



x = const. és y = const.? Nyilvánvalóan az x = const. görbék az (yz) síkkal párhuzamos síkoknak és a felületnek a metszővonalai lesznek, az y = const. görbék pedig az (xz) síkkal parallel síkoknak és a felületnek a metszővonalai. Ez a két görbesereg tehát sík görbékből áll. Ha most már nem a parameter görbéket, hanem egy a felületen levő" tetszőleges görbéket veszünk, akkor ennek az előállitását úgy nyerjük, ha a p és q-t, mint egy segéd változó függvényeit tekintjük: $p=f(t)$; $q=g(t)$, mert akkor az x, y, z, mint egyetlen változó függvényei lesznek elő-állítva s így görbét értelmeznek. A felületen levő görbét e szerint a felületbeli coordináták segélyével úgy értelmezhetjük, mint a sík görbét az x, y által, t. i. a p és q-t, mint egy változó parameter függvényeit fogjuk fel. Állítsuk elő ezen görbe ívelemét:

$$ds=(dx^2+dy^2+dz^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$dx^2=\left(\frac{\partial x}{\partial p}dp+\frac{\partial x}{\partial q}dq\right)^2$$

$$dy^2=\left(\frac{\partial y}{\partial p}dp+\frac{\partial y}{\partial q}dq\right)^2$$

$$dz^2=\left(\frac{\partial z}{\partial p}dp+\frac{\partial z}{\partial q}dq\right)^2$$

a hol p, q a „t"-nek a függvényei;

$$ds^2=dp^2.\mathcal{E}+2dp.dq.\mathcal{F}+dq^2\mathcal{G}$$

$$\mathcal{E}=\left(\frac{\partial x}{\partial p}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial p}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial p}\right)^2$$

$$\mathcal{F}=\frac{\partial x}{\partial p}.\frac{\partial x}{\partial q}+\frac{\partial y}{\partial p}.\frac{\partial y}{\partial q}+\frac{\partial z}{\partial p}.\frac{\partial z}{\partial q}$$

$$\mathcal{G}=\left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial q}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial q}\right)^2$$

Látjuk, hogy az ívelem a dp és dq-nak egy másodfokú homogén rationális egész függvénye, vagy a mint mondani szokták: egy quadratikus formája.-

Ez a quadratikus forma az egész elméletben alapvető szerepet játszik. Ennek a quadratikus formának egy igen fontos tulajdonsága van; feltéve, hogy a mi felületünk valós felület és hogy annak ábrázolására valós coordinatákat választottunk, vagyis olyan görbéket, a melyek valóban existálnak. Hogy a quadratikus forma ezen tulajdonságát feltüntessük, még egy geometriai észrevételt kell tennünk:–

Képzeljünk a felületen egy P pontot s fektessünk ezen keresztül egy görbét, a melyen a p és q-t, mint az ívhossznak a függvényeit gondoljuk előállítva. Szerkeszünk meg a P pontban a kérdéses görbéhez az érintőt, akkor ezen érintő iránycosinusai:

$$\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}. -$$

Természetes, hogy az érintő általában nem fekszik a felületen. Jelöljük az érintő futó coordinatáit ξ, η, ζ-val, akkor az érintő egyenlete ez lesz:

$$\xi - x = \tau \cdot \frac{dx}{ds}$$

$$\eta - y = \tau \cdot \frac{dy}{ds}$$

$$\zeta - z = \tau \cdot \frac{dz}{ds}$$

a hol τ egy parameter.–

Így is írhatjuk az érintő egyenletét:

$$\xi - x = \tau \left(\frac{\partial x}{\partial p} \cdot \frac{dp}{ds} + \frac{\partial x}{\partial q} \cdot \frac{dq}{ds} \right)$$

. . . .

. . . .

Ezekben az egyenletekben azt a speciális görbét, a melyet kiválasztottunk, az „ s" individualizálja, mint a melynek a függvényeikért jelentkeztek a p és q felületbeli koordináták. Vegyük most a felírt három egyenletet, stekintsük az 1, $\tau \frac{dp}{ds}$, $\tau \cdot \frac{dq}{ds}$ ismeretlenekre nézve. – Mivel az egyenletrendszer ezen ~~ismeretlen~~ ismeretlenekben lineáris és homogén s ezen ismeretlenek mind nem lehetnek 0-ak, mivel köztük van az 1 és, nyilvánvalóan csak úgy állhat fenn, ha a rendszer determinánsa zérus. :

$$\begin{vmatrix} \xi - x & \frac{\partial x}{\partial p} & \frac{\partial x}{\partial q} \\ \eta - y & \frac{\partial y}{\partial p} & \frac{\partial y}{\partial q} \\ \zeta - z & \frac{\partial z}{\partial p} & \frac{\partial z}{\partial q} \end{vmatrix} = 0$$

Ezen egyenletben a speciális görbének semmi nyoma nincs, mert az „ s" nem szerepel benne. Ez az egyenlet tehát fenn áll valamennyi oly érintőre nézve, a mely a felületen fekvő görbéhez az x, y, z pontban húzható. Ez az egyenlet egy síknak az egyenlete. Tehát azon érintők, a melyek a felület valamely pontján átmenő, a felületen fekvő görbékhez, ezen pontban húzhatók, mind egy síkban vannak, a melyet a felület érintő síkjának nevezünk. – Ezen sík egyenlete :

$$A(\xi - x) + B(\eta - y) + C(\zeta - z) = 0$$

a hol :

$$A = \frac{\partial y}{\partial p} \cdot \frac{\partial z}{\partial q} - \frac{\partial y}{\partial q} \cdot \frac{\partial z}{\partial p}$$

$$B = \frac{\partial x}{\partial q} \cdot \frac{\partial z}{\partial p} - \frac{\partial x}{\partial p} \cdot \frac{\partial z}{\partial q}$$

$$\mathcal{C} = \frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial y}{\partial q} - \frac{\partial x}{\partial q}\cdot\frac{\partial y}{\partial p}$$

Ezek az érintő sik coefficiensei; az érintősik és a koordináta síkok hajlásszögeinek iránycosinusait, vagy a mi ugyanaz az érintő-sík normálisának és a koordináta tengelyek egymással képzett szögeinek iránycosinusait a következő kifejezések szolgáltatják:

$$\frac{\mathcal{A}}{\sqrt{\mathcal{A}^2+\mathcal{B}^2+\mathcal{C}^2}}\;;\;\frac{\mathcal{B}}{\sqrt{\mathcal{A}^2+\mathcal{B}^2+\mathcal{C}^2}}\;;\;\frac{\mathcal{C}}{\sqrt{\mathcal{A}^2+\mathcal{B}^2+\mathcal{C}^2}}$$

Jelöljük az érintő sík iránycosinusait:

$\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$ - vel, akkor:

$$\mathcal{X} = \frac{\mathcal{A}}{\sqrt{\mathcal{A}^2+\mathcal{B}^2+\mathcal{C}^2}}\;;\;\mathcal{Y} = \frac{\mathcal{B}}{\sqrt{\mathcal{A}^2+\mathcal{B}^2+\mathcal{C}^2}}\;;\;\mathcal{Z} = \frac{\mathcal{C}}{\sqrt{\mathcal{A}^2+\mathcal{B}^2+\mathcal{C}^2}}$$

Természetes, hogy ez a sík akkor existál, és akkor egyértékűleg van meghatározva, ha $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ és $\mathcal{C}$ mennyiségek nem egyszerre zérusok. – Ha mind a három mennyiség $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ egyszerre zérus, akkor az érintő sík nem létezik, illusoriussá válik. Az $\mathcal{A}=0$, $\mathcal{B}=0$, $\mathcal{C}=0$ simultán fennállása három egyenletet szolgáltat, a melyek p és q között állanak fenn. Tehát két mennyiség között három egyenlet áll fent. Ha csak két egyenletünk volna, akkor ezek bizonyos speciális p, q értékpárokat szolgáltatnának, tehát isolált pontokat adnának. – Meglehet, hogy ezen isolált pontok közül a harmadik egyenletnek egyik sem tesz eleget, akkor tehát nem is fordulhat elő azon eset, hogy $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ egyszerre zérus legyen. Nyilvánvaló, hogy ez a három egyenlet csak bizonyos felületeknek csak bizonyos pontjaiban teljesülhet. Ugy kell ezt érteni, hogy vannak felületek, a melyeknek egy pontjában sem teljesül-

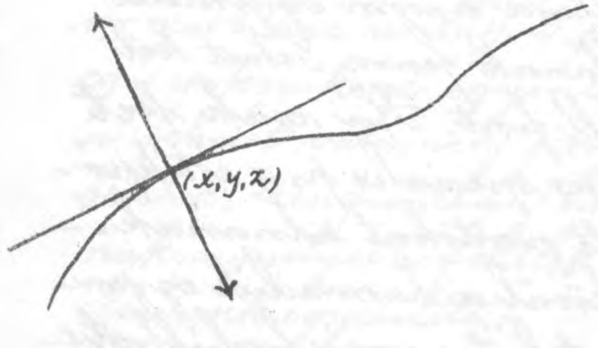
46.

het ez a három egyenlet egyszerre, de lehetnek olyan felületek, a melyeknek bizonyos pontjaiban egyszerre teljesül ez a három egyenlet, de másokban nem. Az olyan pontokat, a melyekben $\mathcal{A}=0$, $\mathcal{B}=0$, $\mathcal{C}=0$ egyszerre teljesül : a felület singularis pontjainak nevezzük. Egy ilyen singularis pont pl. a kúp csúcsa; a gömbnek egyáltalában nincs singularis pontja.-

Mindenekelőtt a nem singularis, vagy másképen a regularis pontokra fogjuk kifejteni a felületek elméletét; ha a felületnek vannak singularis pontjai, akkor ezeket egyelőre mellőzzük és a felületnek olyan részére szorítkozunk, a hol az $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ függvények nem egyszerre nullák.

Súgár kongruentia.-

Ha a felületnek egy reguláris pontját veszszük, akkor ahhoz határozott érintő sík tartozik. Emeljünk erre az érintő síkra



merőlegest a felület kérdéses pontjában; ezt a merőlegest a felület normálisá-nak nevezzük. Ennek a normálisnak iránycosinusai, a három coordinata tengelyekre vonatkoztatva : $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ s így ezen normalisnak az egyenlete :

$$\xi = x + \tau \mathfrak{X}$$
$$\eta = y + \tau \mathfrak{Y}$$
$$\zeta = z + \tau \mathfrak{Z}$$

a hol a τ jelenti a normális tetszésszerinti pontjának a felület x, y, z koordinátás pontjától. Képzeljük a normálist a felület minden pontjában megszerkesztve, akkor az x, y, z helyébe:

$$x = \varphi(p, q)$$
$$y = \psi(p, q)$$
$$z = \chi(p, q)$$

függvényeket kell a normális egyenletében írni; hasonlóképen a $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ kifejezésébe is bele kell helyettesíteni x, y, z ezen alakját. Ilyenformán kapunk oly egyeneseket, a melyeknek coefficiensei x, y, z; $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ két parametertől függnek. Az egyenesek oly összegével van tehát dolgunk, a mely összesség két parametertől függ. –

Képzelhetünk általánosan olyan egyenest, a melynek coefficiensei két parametertől függnek:

$$\xi = f(p, q) + \tau . F(p, q)$$
$$\eta = g(p, q) + \tau . G(p, q)$$
$$\zeta = h(p, q) + \tau H(p, q)$$

a hol f, g, h; F, G, H a parameternek tetszésszerinti függvényei. Az egyeneseknek ilyen két dimensiós összességét: sugárcongruentiának szokás nevezni. Ha egy felületnek minden pontjában megszerkesztjük a normálist, akkor ezek egy sugárcongruentiát alkotnak. Ennek a fordítottja nem áll, vagyis, ha veszünk egy tetszésszerinti sugárcongruentiát: f, g, h; F, G, H coefficiensekkel, akkor ez a sugárcongruentia általában nem fogja egy felület normálisait előállítani. Tehát a normálisok összessége egy speciális kongruentia: úgynevezett: normálkongruentia. Ez következik abból, hogy míg az x, y, z még lehetnek tetszésszerinti függvények, addig már a $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ nem tetszésszerinti függvények. Megjegyzendő, hogy a felületek elméletét úgy is lehet tekinteni, mint a normálisok sugárcongruentiájának elméletét, mert minden tételt, a melyet a felületekre kimondunk, átlehet fordítni egy olyan tételre, a mely a normálcongruentiára áll. Az általános sugár-congruentiák elméletét is ki lehet fejteni, a mely a normal kongruentiák (felületek elmélete) elméletét, mint speciálist tartalmazza. Ezt az elméletet ki is fejtették, nevezetesen: Kummer az ő nagy munkájában.-

Az általános sugár kongruentia elmélete a felületek elméletéhez képest nem nyújt valami lényegesen újat, csak míg itt quadratikus formák, ott bilineáris formák szerepelnek.-

A normális congruentiákra nézve egy megállapodással fogunk élni; mint a rajz is mutatja, a normális, mint mindkét irányban végtelenbe menő sugár van értelmezve; most egy olyan megállapodást teszünk, a melynek alapján a normális, mint határozott irányú fél sugár lesz értelmezve. Állapodjunk meg abban, hogy a $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ kifejezéseiben szereplő négyzetgyököt absolut értékre vesszük, tehát positivnak s akkor az A, B, C mennyiségek irányával lesz a normális iránya meghatározva. Ha tehát normálisról, minden hozzátétel nélkül szólunk, mindig az így értelmezett félsugarat értjük.-

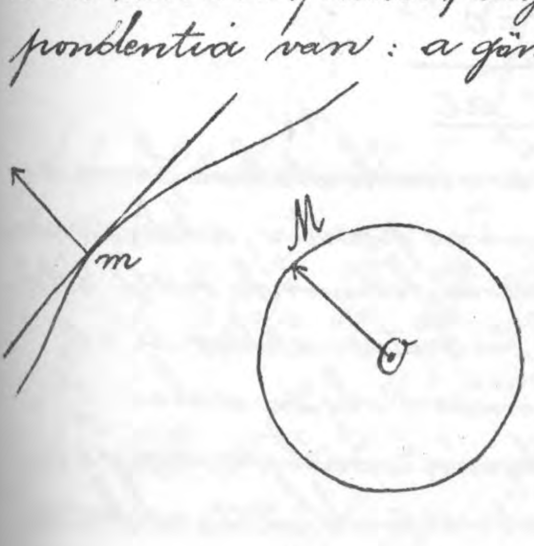
Ha most már vesszük a $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ mennyiségeket, négyzetre emeljük s összeadjuk: akkor:

$$X^2+Y^2+Z^2=1$$

Ha tehát én az X, Y, Z mennyiségeket, mint coordinatákat fogom fel, akkor ezek összessége egy gömb lesz, a melynek a centruma a koordinata rendszer origója és rádiusa az egység. Ezt a gömböt úgy kapjuk, ha a coordinaták kezdőpontjából párhuzamost húzunk a felület minden normálisához s ezekre a párhuzamosokra felrakjuk az egységet s így kapjuk a gömböt, mint az X, Y, Z értelmezéséből közvetlenül látszik.- Természetes, hogy ezen gömbön nem az a nevezetes, hogy pontjai egységnyi távolban vannak a koordinaták kezdőpontjától, hanem az, hogy a gömb pontjai: X, Y, Z, mint a felületbeli coordinatáknak (p és q) a függvényei vannak előállítva:

$$X = \Phi(p,q)$$
$$Y = \Psi(p,q)$$
$$Z = X(p,q)$$

Tehát ennek a gömbnek a pontjai ugyanazon parameterekkel vannak előállítva, mint a mi felületünknek a pontjai, más szóval a felület pontjai és a gömb pontjai között correspondentia van: a gömb valamelyik M pontja felel meg



a felület m pontjának s az m-ben vont normális párhuzamos az M-hez tartozó rádiusvectorral.- A gömbnek ezen M pontja egyértelműen van meghatározva, mert csak egy fél sugarat veszünk. Tehát ez a gömb és felület korrespondentiában áll egymással; a felület minden pontjának megfelel a gömb bizonyos pontja. Hogy, ha a felület minden egyes pontját a gömb bizonyos pontjai által képviselve gondoljuk, akkor a gömb bizonyos egyszeri vagy esetleg többszöri befedése által kapjuk a felület bizonyos leképezését a gömb egyes részeire. Ezt a leképezést Gauss féle leképezésnek nevezzük, a gömböt Gauss féle gömbnek; Gauss az egység sugarú gömböt égi gömbnek nevezi.-

Most térjünk vissza arra a quadratikus formára, a melyet a felületen fekvő görbe ívelemeré nézve találtunk:

$$ds^2 = \mathcal{E}.dp^2 + 2\mathcal{F}.dp.dq + \mathcal{G}.dq^2$$

Ezen quadratikus formának bizonyos tulajdonsága van, a melynek feltüntetésére e forma discriminansát kell megvizsgálnunk.-

Legyen egy quadratikus formánk s képzeljük 0-al egyenlőnek téve:

$$au^2 + 2buv + cv^2 = 0$$

$$a\left(\frac{u}{v}\right)^2 + 2b\left(\frac{u}{v}\right) + c = 0$$

$$\frac{u}{v} = -\frac{b}{a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - ac}{a^2}}$$

A $\sqrt{\ }$ jel alatt szereplő mennyiség a quadratikus forma discriminansa. Ha a discriminans positiv, akkor van oly $\frac{u}{v}$ valós mennyiség, a melyre nézve a formánk null értéket vesz fel, de ha a discriminans negativ, akkor $u=0$, $v=0$ triviális értékpár kivételével nincsen olyan valós $\frac{u}{v}$, tehát nincsen olyan valós u, v értékpár, a melyre nézve a quadratikus forma $=0$. Ha tehát $ac - b^2 > 0$, akkor a mi quadratikus formánk csakis $u=0$, $v=0$ mellett tünik el. Ebből következik, hogy, ha a quadratikus formát u és v függvényének tekintem, akkor ez valós u, v-re nem tünik el s igy nem is változtatja előjelét, mert egy folytonos függvény csak úgy változtathatja meg előjelét, ha átmegy a 0-n. Ha tehát $ac-b^2>0$ a quadratikus forma mindig ugyazon előjellel bír. Ha most ezt az előjelt ismerni akarom, akkor meghatározom a függvény előjelét speciális u, v érték mellett; pl $v=0$ mellett, akkor a függvény lesz au^2. Ha tehát „a" positiv, akkor a forma positiv, ha „a" negativ, a forma negativ. – Az olyan formáról, a mely mindig határozott előjelü, azt mondjuk, hogy forma definita, és pedig, positiv definita ha „a" positiv, negativ definita, ha „a" negativ. Ha $ac-b^2<0$, akkor a forma indefinita.

Mi a ds^2 formáról kiakarjuk mutatni, hogy az forma definita. E végből képezzük a discriminanst:

$$\mathcal{E}\mathcal{G}-\mathcal{F}^2=\left[\left(\frac{\partial x}{\partial p}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial p}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial p}\right)^2\right]\left[\left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial q}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial q}\right)^2\right]-$$
$$-\left[\frac{\partial x}{\partial p}\cdot\frac{\partial x}{\partial q}+\frac{\partial y}{\partial p}\cdot\frac{\partial y}{\partial q}+\frac{\partial z}{\partial p}\cdot\frac{\partial z}{\partial q}\right]^2$$

A baloldalra alkalmazzunk egy már többször használt identitást:

$$\mathcal{E}\mathcal{G}-\mathcal{F}^2=\left(\frac{\partial y}{\partial p}\cdot\frac{\partial z}{\partial q}-\frac{\partial y}{\partial q}\cdot\frac{\partial z}{\partial p}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial q}\cdot\frac{\partial z}{\partial p}-\frac{\partial x}{\partial p}\cdot\frac{\partial z}{\partial q}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial p}\cdot\frac{\partial y}{\partial q}-\frac{\partial x}{\partial q}\cdot\frac{\partial y}{\partial p}\right)^2$$
$$=\mathcal{A}^2+\mathcal{B}^2+\mathcal{C}^2$$

Az $\mathcal{E}\mathcal{G}-\mathcal{F}^2$ tehát mindig lényegesen positiv, a mivel ki van mutatva, hogy ez a mennyiség mindig lényegesen positiv s így a ds^2 mindig forma definita és nyilvánvalóan positiv definita forma, mert az $\mathcal{E} > 0$. Ez egy nagyon fontos eredmény, mert e szerint ds^2-ből mindig lehet négyzetgyököt vonni s így a ds mindig valós. Épen ez a valós felületek karakteristikuma. A valós felületekhez tartozó ívelem tehát mindig valós mennyiség.–

Eddigi eredményeink szerint az ívelem négyzetének a kifejezése positiv definita forma; minden felülethez meghatározható a Gauss féle gömb; ezen fekünznek azon pontok, melyeknek koordinátái: $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$, a felület normálisainak az iránycosinusai.– A felület és ezen gömb között korrespondencia van: a mennyiben a felület minden pontjának megfelel a gömbnek egy jól meghatározott pontja. Ha tehát veszünk a felületen egy görbét, ennek a gömbön megfelel egy görbe, a melynek előállítását úgy nyerjük, hogy a $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$-t, mint a p és q függvényeit előállítjuk s már most a p és q között ugyanazt a relatiót statuáljuk, a melylyel a görbe a felületen volt ~~értelmezve~~. Ha pl. a felületen fekvő görbe úgy volt előállítva, hogy $p = f(t)$ és $q = g(t)$ szerepelt az x, y, z kifejezésében, akkor:

$$\mathfrak{X} = \Phi(f(t), g(t))$$
$$\mathfrak{Y} = \Psi(f(t), g(t))$$
$$\mathfrak{Z} = \chi(f(t), g(t))$$

szolgáltatja a megfelelő gömbi görbe előállítását. Jelöljük ezen megfelelő görbe ívelemét $d\sigma$-val, akkor lesz:

$$d\sigma = \sqrt{d\mathfrak{X}^2 + d\mathfrak{Y}^2 + d\mathfrak{Z}^2}$$

vagy:

$$= \sqrt{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial p}dp + \frac{\partial \Phi}{\partial q}dq\right)^2 + \cdot \cdot + \cdot}$$

vagy, ha rendezzük:

$$= \sqrt{\mathfrak{E}\,dp^2 + 2\mathfrak{F}\,dp.dq + \mathfrak{G}.dq^2}$$

A $\sqrt{\ }$ alatt szereplő mennyiség ismét positiv definita forma, ennek így is kell lennie, mert hiszen a gömbre vonatkozik.

A ds^2 és $d\sigma^2$ quadratikus formák a felületek elméletében alapvető szerepet játszanak. Az első forma a felületen fekvő tetszésszerinti görbe ívelemének a négyzetét, a másik forma pedig a megfelelő gömbi görbe ívelemének a négyzetét szolgáltatja.-

A görbék elméletében a geometriai jelentéssel bíró mennyiségeket kutattuk, másszóval a koordinatákból és derivaltjaikból összerakott olyan kifejezéseket, a melyek a coordináta rendszer transformatiojával (eltolás) nem változnak. A görbék elméletében tehát alapvető transformatióként az szerepelt, a mely a tér eltolásait szolgáltatta.-

A felületek elméletében is először azokkal a kifejezésekkel kell foglalkoznunk, a melyeknek geometriai jelentésük van.- Ámde ezen mennyiségek mellett még bizonyos általánosabb transformátióval értelmezett mennyiségeket is kell tekintetbe vennünk. T.i. vizsgálnunk kell a felület azon transformátióit, a melyek mellett az ívelem változatlan marad.- Az nyilvánvaló, hogy a tér összes eltolásai változatlanul hagyják az ívelemet. Vannak azonban ennél még általánosabb transformátiók, a melyek szintén nem változtatják a felület ívelemét.-

Szemléletileg a következő módon alkothatunk ezekről képet. Képzeljük, hogy a felületünk egy igen vékony hártya, a melyet deformálni, hajlítani lehet, de nem lehet nyujtani, vagyis a hártya nem rugalmas, sem nyujtást, sem összeszorítást nem szenved, pl. a végtelenül vékony papírlap. Mi történik, hogy, ha a felületet hajlítjuk, tehát nyujtás és összeszorítás nélkül deformáljuk? Nyilvánvaló, hogy, ha veszünk két pontot s azok között egy görbe hosszát, s ha most a felületet a mondott értelemben hajlítjuk, akkor a görbe hossza a két pont között változatlan marad. Más szóval a felületnek egy olyan transformatiója mellett, a mely szemléletileg a hajlításnak felel meg, az ívelem nem változik meg. Ez sokkal általánosabb transformátió, mint az eltolás, mert két felület, a mely egymásból hajlítás által keletkezik, teljesen más geometriai alakzat lehet. Vegyünk pl. egy síkot, ezt a síkot hajlítás által hengerré, vagy kúppá lehet átalakítani, míg eltolás által a sík, mint ilyen nem változik.-

Most már az eltolások invariánsai mellett még tekintetbe veszzük azokat a geometriai fogalmakat, a melyek egyszersmind a hajlításnak is invariánsai. A hajlítással nem változik az ívelem. Fordítva analytikailag a felület azon transformátjóit értjük a hajlításon, a melylyel az ívelem nem szenved változást; ezen értelmezésnél nem vagyunk tekintettel arra, hogy az analytikailag így értelmezett hajlításnak fizikailag is hajlítás feleljen meg. Az ívelemet az E, F, G mennyiség segélyével állítjuk elő: ennélfogva az x, y, z, és $\frac{\partial x}{\partial p}$, $\frac{\partial x}{\partial q}$ .... mennyiségeknek minden olyan geometriai értelemmel biró kifejezéseit, a melyek csak E, F és G-től függnek, hajlitási invariánsnak nevezzük. Természetes, hogy a kifejezés még az E, F és G-nek p és q szerint képzett deriváltjától is függhet.

A következőkben mindig élesen megkülönböztetendők a hajlitási invariánsok, a nem hajlitási invariánsoktól.-

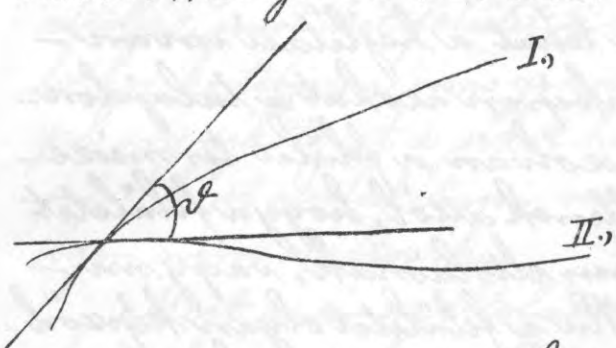
Képzeljük, hogy a felületen emberi észszel biró lények volnának, a melyek a felületből nem tudnak kimozdulni és mást nem is tudnak észlelni, mint a mi a felületen végbe megy. Egy ilyen lény összes ismereteit abból szerezheti, hogy a felületen méréseket tesz; a ds-el ő úgy operál, mint mi az: $x^2+y^2+z^2$-al. Ha most ezt a felületet hajlitjuk, akkor a kérdéses lény ezt a hajlitást nem veszi észre, mert minden a mit ő mér: változatlan marad.- Ha tehát a hajlitási invariánsokat keressük, akkor tulajdonképen azokat a tulajdonságokat keressük, a melyek úgy szólván a felület természetéhez tartoznak, a melyek függetlenek attól, hogy a felületet a három dimensiós térben milyen eltolásnak, vagy milyen hajlitásnak vetjük alá.- Ha a felületet olyan képződménynek tekintjük, a mely a rajta levő méretek alapján magában fenáll, akkor az olyan felületeket, a melyek egymásból hajlitás által keletkeznek, nem kell különbözőknek tekintenünk. Más szóval, ha a hajlitási invariánsokat vizsgáljuk, akkor olyan tulajdonságokat vizsgálunk, a melyek függetlenek a felületen kivül levő képződményektől. Azért ezeket a tulajdonságokat intrinsék tulajdonságoknak nevezzük; ezek csak az E, F, és G-től függenek.-

A Gauss-féle gömb tulajdonságai nem intrinsék tutajdonságok, mert függnek a felület normálisaitól. Ha a felületet hajlítjuk, akkor a normálisok változnak s így a Gauss féle gömbre való leképezés a hajlításnál mindig változást fog szenvedni.-

Azt fogjuk látni, hogy a felület összes geometriai tulajdonságait osztályozhatjuk, a szerint, hogy csak a ds-től vagy a ds és $d\sigma$-tól függnek. A nem intrinsék tulajdonságok a Gauss féle gömbbel, az intrinsék tulajdonságok az ívelemmel írhatók le.-

Most a felületek elméletében szereplő geometriai jelleggel bíró kifejezéseket állítjuk fel.-

Legyen a felületen egy pont s fektessünk ezen ponton keresztül két görbét: I.) és II.). Határozzuk meg ezen két görbének a hajlásszögét. Két görbe hajlásszögén, a metszőponthoz tartozó két érintő hajlásszögét értjük.-



Képzeljük, hogy az egyik görbe így van előállítva:

$$
\text{I.)}\ \begin{cases} p = f(s) \\ q = g(s) \end{cases}
$$

a másik:

$$
\text{II.)}\ \begin{cases} p = f'(s') \\ q = g'(s') \end{cases}
$$

„s" az I.) görbe, „s'" a II.) görbe ívhosszát jelenti. Az I.) görbéhez tartozó érintő iránycosinusai:

$$
\frac{dx}{ds},\ \frac{dy}{ds},\ \frac{dz}{ds}
$$

A II.) görbéhez tartozó érintő iránycosinusai:

$$\frac{dx}{ds'}, \quad \frac{dy}{ds'}, \quad \frac{dz}{ds'}$$

A két görbe hajlásszögének a kosinusa:

$$\cos\vartheta = \frac{dx}{ds}\cdot\frac{dx}{ds'} + \frac{dy}{ds}\cdot\frac{dy}{ds'} + \frac{dz}{ds}\cdot\frac{dz}{ds'}$$

Most már ki kell számítanunk a deriváltakat. Lesz akkor:

$$\cos\vartheta = \left(\frac{\partial x}{\partial p}\cdot\frac{dp}{ds} + \frac{\partial x}{\partial q}\cdot\frac{dq}{ds}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial p}\cdot\frac{dp}{ds'} + \frac{\partial x}{\partial q}\cdot\frac{dq}{ds'}\right) + \cdot \; + \cdot$$

Ha a szorzást elvégezzük, akkor adódik:

$$\cos\vartheta = \frac{dp}{ds}\cdot\frac{dp}{ds'}\left[\left(\frac{\partial x}{\partial p}\right)^2 + \cdot + \right] + \cdot$$

$$= \frac{dp}{ds}\cdot\frac{dp}{ds'}\mathcal{E} + \frac{dp}{ds}\cdot\frac{dq}{ds'}\mathcal{F} + \frac{dp}{ds'}\cdot\frac{dq}{ds}\mathcal{F} + \frac{dq}{ds}\cdot\frac{dq}{ds'}\mathcal{G}$$

Tehát a hajlásszög cosinusa meg van határozva a p és q, s és s' szerinti deriváltjaival és az $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ és $\mathcal{G}$-vel. –

Emeljük ki a $\frac{dp}{ds}\cdot\frac{dp}{ds'}$ – t

$$\cos\vartheta = \frac{dp}{ds}\cdot\frac{dp}{ds'}\left\{\mathcal{E} + \mathcal{F}\left(\frac{\frac{dq}{ds'}}{\frac{dp}{ds'}} + \frac{\frac{dq}{ds}}{\frac{dp}{ds}}\right) + \mathcal{G}\,\frac{\frac{dq}{ds}}{\frac{dp}{ds}}\cdot\frac{\frac{dq}{ds'}}{\frac{dp}{ds'}}\right\}$$

$$\frac{\frac{dq}{ds'}}{\frac{dp}{ds'}} = \frac{dq}{dp}$$

Ez a q-nak p szerint vett differentiál hányadosa, arra a görbére nézve, a melynek az ívhossza: s'. Ha tehát a II.) görbére nézve az s'-et kielimináljuk, akkor p és q között kapunk egy bizonyos relátiót. Ebben a relátióban felfoghatom a „q"-t, mint a p függvényét. Jelöljük a q-nak p szerint vett diff.

hányadosát k'-vel a II. görbére nézve, akkor: $\frac{dq}{dp} = k'$
Hasonlóképen az I. görbére:

$$\frac{dq}{ds} : \frac{dp}{ds} = \frac{dq}{dp} = k$$

Mondhatom, hogy a k, illetve k' mennyiségekkel a két görbe jellemezve van; tehát, ha ismerem a k és k'-t, akkor ezzel a két görbe meg van határozva. Ezeknek a mennyiségeknek a segélyével a két görbe hajlásszögének a cosinusa lesz:

$$\cos\vartheta = \frac{dp}{ds} \cdot \frac{dp}{ds'}\left[\mathfrak{E} + \mathfrak{F}(k+k') + \mathfrak{G}k.k'\right]$$

Ebből a kifejezésből most már sok mindenféle következtetést tudunk levonni. Pl. arra, hogy a két görbe egymást derékszög alatt messe, szükséges, hogy:

$$\cos\vartheta = 0$$

legyen, de mivel: $\frac{dp}{ds} \cdot \frac{dp}{ds'}$ nem lehet 0, következik, hogy:

$$\mathfrak{E} + \mathfrak{F}(k+k') + \mathfrak{G}.k.k' = 0$$

Ez intrinsék tulajdonság, a mely hajlítással nem változik.
Keressük fel most a $p = c_1$ és $q = c_2$ koordinata görbék hajlás szögét abban a pontban, a hol a két görbe metszi egymást. - Az első görbére nézve:

$$\frac{dp}{ds} = 0$$

A másodikra nézve: $\frac{dq}{ds'} = 0$
Ebből következik, hogy:

$$\cos\vartheta = \mathfrak{F}\frac{dp}{ds'} \cdot \frac{dq}{ds}$$

Az első görbére nézve az ívelem kifejezéséből a dp-vel szorzott tagok elmaradnak:

$$ds^2 = G.dq^2$$

$$ds = \sqrt{G}.dq$$

$$\frac{dq}{ds} = \frac{1}{\sqrt{G}}$$

A második görbe esetében $dq=0$, tehát az ívelem kifejezéséből a dq-val szorzott tagok maradnak el:

$$ds' = \sqrt{E}.dp$$

$$\frac{dp}{ds'} = \frac{1}{\sqrt{E}}$$

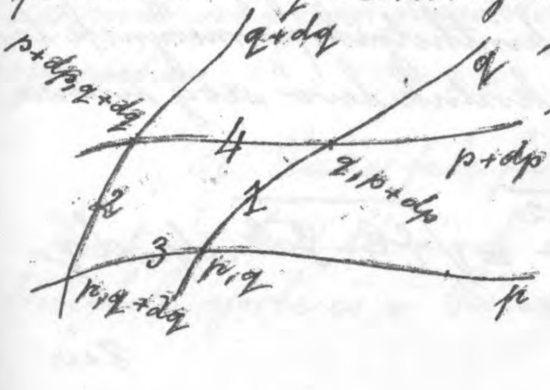
Ha a $\frac{dq}{ds}$, $\frac{dp}{ds'}$ értékét behelyettesítjük a $\cos\vartheta$ kifejezésébe, akkor lesz:

$$\cos\vartheta = \frac{F}{\sqrt{E.G}}$$

Ebből $\sin\vartheta$:

$$\sin\vartheta = \sqrt{\frac{EG-F^2}{EG}}$$

Ezt az eredményt most a következő feladat megoldására használjuk fel: képzeljünk a felületen egy $p=const.$ és $q=const.$ görbét; vegyük ezekhez a végtelenül szomszédos: $p=const.$ és $q=const.$ görbéket: ezek egy felületi négyszöget



határolnak s ennek a négyszögnek akarjuk meghatározni a területét.= E végből mindenekelőtt az 1, 2, 3, 4 számokkal jelzett oldalak hosszát fejezzük ki.-

1.) mentén $q = const.$, tehát:

$$ds = \sqrt{\mathcal{E}}\cdot dp$$

Az $\mathcal{E}$ értékét p, q pontban kell venni:

1.) $$ds = \mathcal{E}^{\frac{1}{2}}(p,q)dp$$

2.) $$ds = \sqrt{\mathcal{E}}.dp = \mathcal{E}^{\frac{1}{2}}(p,q+dq).dp$$

3.) $$ds = \sqrt{\mathcal{G}}\cdot dq = \mathcal{G}^{\frac{1}{2}}(p,q)dq$$

4.) $$ds = \sqrt{\mathcal{G}}\,.\,dq = \mathcal{G}^{\frac{1}{2}}(p+dp,q)dq$$

Most a 2.) és 4.) kifejezések meghatározására alkalmazzuk a Taylor féle sort, de abban az elsőnél magasabb rendü kicsinyeket elhagyhatjuk:-

2.) $$\mathcal{E}^{\frac{1}{2}}(p,q+dq) = \mathcal{E}^{\frac{1}{2}}(p,q) + \frac{\partial\mathcal{E}^{\frac{1}{2}}(p,q)}{\partial q}dq + \cdots$$

4.) $$\mathcal{G}^{\frac{1}{2}}(p+dp,q) = \mathcal{G}^{\frac{1}{2}}(p,q) + \frac{\partial\mathcal{G}^{\frac{1}{2}}(p,q)}{\partial p}dp + \cdots$$

Tehát:

2.) $$ds = \left[\mathcal{E}^{\frac{1}{2}}(p,q) + \frac{\partial\mathcal{E}^{\frac{1}{2}}(p,q)}{\partial q}dq\right]dp$$

4.) $$ds = \left[\mathcal{G}^{\frac{1}{2}}(p,q) + \frac{\partial\mathcal{G}^{\frac{1}{2}}(p,q)}{\partial p}dp\right]dq$$

E szerint az 1.) és 2.) ; 3 és 4 oldalak, másodrendü kicsinyek elhanyagolásával egyenlőknek számithatók s mivel a (p, q) pontban van határozott érintő sik, a négyszögünket sik parallelogrammának tekinthetjük, a melynek területét az 1.) és 3.) oldalaknak s a köztük levő szög sinusának a szorzata adja; tehát:

$$\mathcal{E}^{\frac{1}{2}}.\mathcal{G}^{\frac{1}{2}}.dp.dq.\sqrt{\frac{\mathcal{E}\mathcal{G}-\mathcal{F}^2}{\mathcal{E}\mathcal{G}}} = \sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}-\mathcal{F}^2}.dp.dq$$

adja a parallelogramma területét.-

Láthatjuk, hogy a felület, vagy területelem szintén hajlitási invariáns. Ha tehát a felületen rajzolunk egy zárt görbét s ezen zárt görbe által határolt felületrésznek a területét akarjuk meghatározni, akkor vesszük ezt a kettős integrált:

$$\iint \sqrt{EG - F^2}\,.\,dp\,.\,dq$$

Sik esetében: $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$

tehát: $E = 1;\ F = 0;\ G = 1.$

s a terület meghatározását:

$$\iint dx\,.\,dy$$

kettős integrál szolgáltatja:-

A:

$$\iint \sqrt{EG - F^2}\,dp\,.\,dq$$

kifejezés megint hajlitási invariáns.-

Kérdés, hogy a felületbeli coordináták milyen feltételek alatt metszik állandóan derékszög alatt egymást? Ehhez szükséges, hogy $\cos\vartheta$ mindig 0 legyen, a mi akkor fog bekövetkezni, ha $F = 0$. Ebben az esetben az ivelem kifejezése a következő lesz:

$$ds = (E\,.\,dp^2 + G\,dq^2)^{\frac{1}{2}}$$

Ez már nagyon hasonlit a sikbeli görbék ivelemének a kifejezéséhez.-

A Gauss féle fundamentál mennyiségek.-

Most át kell térnünk egy oly vizsgálathoz, a mely a felületbeli görbe és a Gauss féle gömbön ennek megfelelő görbe ívhosszait szolgáltató quadratikus formákra vonatkozik.-

$$ds^2 = E.dp^2 + 2F.dp.dq + G.dq^2$$

Ez a kifejezés a felületbeli görbe ívhosszának az előállítása. A megfelelő görbe ívhosszát a Gauss féle gömbön a következő kifejezés állítja elő:

$$d\sigma^2 = \mathfrak{E}.dp^2 + 2\mathfrak{F}.dp.dq + \mathfrak{G}.dq^2$$
$$= dX^2 + dY^2 + dZ^2$$

Foglalkozzunk most a két forma egymásközti vonatkozásával, a miből majd látni fogjuk, hogy a ds^2 és $d\sigma^2$ között identikus relátiók állanak fenn; hogy tehát e quadratikus forma nem független egymástól. Ezen relátiók levezetése végett kényelem szempontjából a $d\sigma$ helyett egy más kifejezést fogunk felhasználni, a mely azonban a $d\sigma$-ra közvetlenül visszavezethető. T.i. ezt a kifejezést fogjuk felhasználni:

$$-dx.dX - dy.dY - dz dZ =$$
$$= -\left(\frac{\partial x}{\partial p}dp + \frac{\partial x}{\partial q}dq\right)\left(\frac{\partial X}{\partial p}.dp + \frac{\partial X}{\partial q}dq\right) - \cdots\cdots$$

Képzeljük ezt a kifejezést kiszorozva és rendezve, akkor megint lesz egy quadratikus formánk, a melyet így jelöljünk:

$$D.dp^2 + 2D'dp.dq + D''dq^2$$

$$D = -\left(\frac{\partial x}{\partial p}.\frac{\partial X}{\partial p} + \cdot\cdot + \cdot\right)$$

$$2D' = -\left(\frac{\partial x}{\partial p}.\frac{\partial X}{\partial q} + \frac{\partial x}{\partial q}.\frac{\partial X}{\partial p} + \cdots\right)$$

$$D'' = -\left(\frac{\partial x}{\partial q}.\frac{\partial X}{\partial q} + \cdots\right)$$

Az $\mathfrak{E}, \mathfrak{F}, \mathfrak{G}$-t Gauss féle első fundamentál mennyiségeknek, a $\mathfrak{D}, \mathfrak{D}', \mathfrak{D}''$-t pedig Gauss féle második fundamentál mennyiségeknek nevezzük. A Gauss értekezésében: „Disquisitiones generales ...." a $\mathfrak{D}, \mathfrak{D}', \mathfrak{D}''$ mennyiségek annyiban különböznek az itt jelöltektől, hogy ezek amazokba : $\sqrt{\mathfrak{E}\mathfrak{G}-\mathfrak{F}^2}$-al való szorzás által mennek át.-

Most mindenek előtt ezeket a Gauss féle második fundamentál mennyiségeket kell átalakítani.- Vegyük ezt a determinánst:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial p} & \frac{\partial y}{\partial p} & \frac{\partial z}{\partial q} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = 0$$

$$= \frac{\partial x}{\partial p} \cdot \mathfrak{X} + \frac{\partial y}{\partial p} \cdot \mathfrak{Y} + \frac{\partial z}{\partial q} \mathfrak{Z} = 0$$

Alkossuk meg ezt a determinánst:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial p} & \frac{\partial y}{\partial p} & \frac{\partial z}{\partial p} \\ \frac{\partial x}{\partial p} & \frac{\partial y}{\partial p} & \frac{\partial z}{\partial p} \\ \frac{\partial x}{\partial q} & \frac{\partial y}{\partial q} & \frac{\partial z}{\partial q} \end{vmatrix} = 0$$

Ha ezt a determinánst az első sor elemei szerint kifejtjük, akkor kapjuk, hogy:

$$\frac{\partial x}{\partial p} \cdot \mathfrak{X} + \frac{\partial y}{\partial p} \cdot \mathfrak{Y} + \frac{\partial z}{\partial p} \cdot \mathfrak{Z} = 0$$

Mivel azonban a determináns akkor is 0 volna, ha a $\frac{\partial x}{\partial p}$, $\frac{\partial y}{\partial p}$, $\frac{\partial z}{\partial p}$, és $\frac{\partial x}{\partial q}$, $\frac{\partial y}{\partial q}$, $\frac{\partial z}{\partial q}$ elemek helyet cserélnének, következik, hogy:

$$\frac{\partial x}{\partial q}\cdot\mathfrak{X}+\frac{\partial y}{\partial q}\cdot\mathfrak{Y}+\frac{\partial z}{\partial q}\mathfrak{Z}=0$$

Differentiáljuk mindkét egyenletet p és q szerint:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial p^2}\cdot\mathfrak{X}+\frac{\partial^2 y}{\partial p^2}\cdot\mathfrak{Y}+\frac{\partial^2 z}{\partial p^2}\cdot\mathfrak{Z}+\frac{\partial x}{\partial p}\cdot\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial p}+\frac{\partial y}{\partial p}\cdot\frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial p}+\frac{\partial z}{\partial p}\cdot\frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial p}=0$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial q\partial p}\cdot\mathfrak{X}+\frac{\partial^2 y}{\partial q\partial p}\cdot\mathfrak{Y}+\frac{\partial^2 z}{\partial q\partial p}\cdot\mathfrak{Z}+\frac{\partial x}{\partial p}\cdot\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial q}+\frac{\partial y}{\partial p}\cdot\frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial q}+\frac{\partial z}{\partial p}\cdot\frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial q}=0$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial p\partial q}\cdot\mathfrak{X}+\cdots\cdots+\frac{\partial x}{\partial q}\cdot\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial p}+\cdots\cdots=0$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial q^2}\cdot\mathfrak{X}+\cdots\cdots+\frac{\partial x}{\partial q}\cdot\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial q}+\cdots\cdots=0$$

Most fejezzük ki a $\mathfrak{D}, \mathfrak{D}', \mathfrak{D}''$ mennyiségeket:

$$\mathfrak{D}=-\left(\frac{\partial x}{\partial p}\cdot\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial p}+\cdots\right)=\frac{\partial^2 x}{\partial p^2}\cdot\mathfrak{X}+\cdots\cdots$$

$$\mathfrak{D}'=\frac{\partial^2 x}{\partial p\partial q}\cdot\mathfrak{X}+\cdots\cdots$$

$$\mathfrak{D}''=\frac{\partial^2 x}{\partial q^2}\cdot\mathfrak{X}+\cdots\cdots$$

Ezek szerint a képletek szerint $\mathfrak{D}, \mathfrak{D}', \mathfrak{D}''$ mennyiségeket most már determináns formában állíthatjuk elő: T. i.:

$$\frac{1}{\sqrt{\mathfrak{E}\mathfrak{G}-\mathfrak{F}^2}}\cdot\begin{vmatrix}\frac{\partial^2 x}{\partial p^2} & \frac{\partial x}{\partial p} & \frac{\partial x}{\partial q}\\ \frac{\partial^2 y}{\partial p^2} & \frac{\partial y}{\partial p} & \frac{\partial y}{\partial q}\\ \frac{\partial^2 z}{\partial q^2} & \frac{\partial z}{\partial p} & \frac{\partial z}{\partial q}\end{vmatrix}=\mathfrak{D}$$

s. i. t.

A D' és D''-t kapjuk, hogy ha az első oszlop elemei helyébe $\frac{\partial^2 x}{\partial q \partial p} \ldots$ illetőleg $\frac{\partial^2 x}{\partial q^2} \ldots$ t írunk; Gauss közvetlenül a determinansokat jelöli: D, D', D''-vel. A

$$D.dp^2 + 2D'dp\,dq + D''dq^2 = -(dx\,dX + \ldots)$$

quadratikus forma egy eltolási invariáns, amennyiben geometriai fogalmat representál. Hogy ezt belássuk s ezen forma geometriai jelentését evidentiába helyezzük, okoskodjunk a következőképen: Jelöljük a felületi görbe ívelemét ds-el, a Gauss féle gömbön lévő megfelelő görbe ívelemét $d\sigma$-val; tekintsük most ezt a kifejezést:

$$-\left(\frac{dx}{ds}\cdot\frac{dX}{d\sigma} + \frac{dy}{ds}\cdot\frac{dY}{d\sigma} + \frac{dz}{ds}\cdot\frac{dZ}{d\sigma}\right)$$

$\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$ a felületen fekvő görbe valamelyik pontjához tartozó érintő iránycosinusai, a: $\frac{dX}{d\sigma}, \frac{dY}{d\sigma}, \frac{dZ}{d\sigma}$ a Gauss féle gömbön a megfelelő görbe megfelelő pontjához tartozó érintő iránycosinusai. Tehát a felírt kifejezés a két érintő hajlásszögének a cosinusával azonos, s igy maga a quadratikus forma arányos a felületen fekvő görbe valamely pontjához tartozó érintő és a Gauss féle gömbön lévő megfelelő görbe megfelelő pontjához tartozó érintő hajlásszögének kosinusaival.- A quadratikus forma tehát tényleg geometriai fogalom s igy az eltolásra nezve invariáns.-

Most már egyszerű számitás révén felfogjuk állitani a kapcsolatot a kétféle fundamentál mennyiségek között.-

Vegyük ezt a determinanst:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial p} & \frac{\partial x}{\partial q} & \mathfrak{X} \\ \frac{\partial y}{\partial p} & \frac{\partial y}{\partial q} & \mathfrak{Y} \\ \frac{\partial z}{\partial p} & \frac{\partial z}{\partial q} & \mathfrak{Z} \end{vmatrix} = \frac{\mathfrak{A}^2+\mathfrak{B}^2+\mathfrak{C}^2}{\sqrt{\mathfrak{E}\mathfrak{G}-\mathfrak{F}^2}} = \sqrt{\mathfrak{E}\mathfrak{G}-\mathfrak{F}^2}$$

Ez a determináns egy új előállítását szolgáltatja az $\mathfrak{E}\mathfrak{G}-\mathfrak{F}^2$-nak s mi ránk nézve az a fontos, hogy ez a determináns, a felület minden reguláris pontjában különbözik 0-tól. Erre a körülményre való tekintettel, a következőképen járhatunk el:

Legyen: $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ tetszésszerinti függvényei a p és q-nak; azután alkossuk meg ezeket az egyenleteket:

$$\mathfrak{L} = \alpha\frac{\partial x}{\partial p} + \beta\frac{\partial x}{\partial q} + \gamma\cdot\mathfrak{X}$$

$$\mathfrak{M} = \alpha\frac{\partial y}{\partial p} + \beta\frac{\partial y}{\partial q} + \gamma\cdot\mathfrak{Y}$$

$$\mathfrak{N} = \alpha\frac{\partial z}{\partial p} + \beta\frac{\partial z}{\partial q} + \gamma\cdot\mathfrak{Z}$$

Ha az α, β, γ mennyiségeket lineáris mennyiségeknek fogjuk fel, akkor α, β, γ ezen lineáris egyenletrendszerből mindig kiszámítható, mert a rendszer determinánsa különbözik 0-tól.— Ezt most fellehet használni bizonyos differentiál hányadosok kiszámitására.—

A Christoffel féle symbolumok.—

Hozzuk be a következő jelöléseket:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial p^2} = x_{11}\,; \quad \frac{\partial^2 x}{\partial q\,\partial p} = x_{12}\,; \quad \frac{\partial^2 x}{\partial q^2} = x_{22}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial p^2} = y_{11}\ ;\ \frac{\partial^2 y}{\partial q \partial p} = y_{12}\ ;\ \frac{\partial^2 y}{\partial q^2} = y_{22}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial p^2} = z_{11}\ ;\ \frac{\partial^2 z}{\partial q \partial p} = z_{12}\ ;\ \frac{\partial^2 z}{\partial q^2} = z_{22}$$

Tehát a második partiális deriváltak: x_{ik}, y_{ik}, z_{ik} .– $(i, k = 1, 2)$

L, M és N helyett vegyük most: x_{ik}, y_{ik}, z_{ik}-t:

$$x_{ik} = \alpha_{ik} \frac{\partial x}{\partial p} + \beta_{ik} \frac{\partial x}{\partial q} + \gamma_{ik} \cdot \mathfrak{X}$$

$$y_{ik} = \alpha_{ik} \frac{\partial y}{\partial p} + \beta_{ik} \frac{\partial y}{\partial q} + \gamma_{ik} \cdot \mathfrak{Y}$$

$$z_{ik} = \alpha_{ik} \frac{\partial z}{\partial p} + \beta_{ik} \frac{\partial z}{\partial q} + \gamma_{ik} \cdot \mathfrak{Z}$$

Az α_{ik}, β_{ik}, γ_{ik} mennyiségeket ebből az egyenletrendszerből kitudjuk számítani. Célszerü lesz a következő eljárást alkalmazni: Szorozzuk meg az első egyenletet: $\frac{\partial x}{\partial p}$-vel, a másodikat: $\frac{\partial y}{\partial p}$-vel és a harmadikat: $\frac{\partial z}{\partial p}$-vel és adjuk össze; azután szorozzuk ezen egyenleteket rendre: $\frac{\partial x}{\partial q}$, $\frac{\partial y}{\partial q}$, $\frac{\partial z}{\partial q}$ val s adjuk össze, végre $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ vel végezzük ez operátiót.– Az igy előálló három uj egyenlet az eredetivel teljesen aequivalens rendszert alkot, mert a factorokból alkotott determináns különbözik 0-tól.– A szorzás és összegelés elvégzése után, kapjuk ezt az egyenletrendszert:

$$\frac{\partial x}{\partial p} x_{ik} + \frac{\partial y}{\partial p} y_{ik} + \frac{\partial z}{\partial p} z_{ik} = \alpha_{ik}\, \mathfrak{E} + \beta_{ik}\, \mathfrak{F}$$

$$\frac{\partial x}{\partial q} x_{ik} + \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot = \alpha_{ik}\, \mathfrak{F} + \beta_{ik}\, \mathfrak{G}$$

$$\mathfrak{X} \cdot x_{ik} + \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot = \gamma_{ik}$$

Az utolsó egyenlet közvetlenül szolgáltatja a γ_{ik}-t; a két középső egyenlet adja az α_{ik} és β_{ik}-t.-

Most még egy pár jelölést lesz célszerű behozni. Jelöljük a $\mathfrak{D}$-t, mivel x_{11} ... fordúl elő benne: $\mathfrak{D}_{11}$.

A: $\mathfrak{D}'$-t, mivel x_{12} ... " " " : $\mathfrak{D}_{12}$

A: $\mathfrak{D}''$-t mivel x_{22} ... " " " : $\mathfrak{D}_{22}$

Állandó jelölésekül vezessük be a következőket:

$$x_{ik}\frac{\partial x}{\partial p}+y_{ik}\frac{\partial y}{\partial p}+z_{ik}\frac{\partial z}{\partial p}=\begin{bmatrix} i\,k \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x_{ik}\frac{\partial x}{\partial q}+y_{ik}\frac{\partial y}{\partial q}+z_{ik}\frac{\partial z}{\partial q}=\begin{bmatrix} i\,k \\ 2 \end{bmatrix}$$

Ezeket a mennyiségeket nevezni fogjuk első Christoffel féle symbolumoknak. Ezekben a symbolukban i és k felcserélhető lévén, ilyen symbolum nyílván 6 van. Ezen első symbolumok segélyével be fogjuk vezetni a második Christoffel féle symbolumokat.-

$$\begin{bmatrix} i\,k \\ 1 \end{bmatrix}=\alpha_{ik}\,\mathfrak{E}+\beta_{ik}\,\mathfrak{F}$$

$$\begin{bmatrix} i\,k \\ 2 \end{bmatrix}=\alpha_{ik}\,\mathfrak{F}+\beta_{ik}\,\mathfrak{G}$$

$$\mathfrak{D}_{ik}=\gamma_{ik}$$

A két első egyenletből kitudjuk számítani az α_{ik} és β_{ik}-t, s kapjuk, hogy:

$$\alpha_{ik}=\frac{1}{\mathfrak{E}\mathfrak{G}-\mathfrak{F}^2}\left(\begin{bmatrix} i\,k \\ 1 \end{bmatrix}\mathfrak{G}-\begin{bmatrix} i\,k \\ 2 \end{bmatrix}\mathfrak{F}\right)$$

$$\beta_{ik}=\frac{1}{\mathfrak{E}\mathfrak{G}-\mathfrak{F}^2}\left(\begin{bmatrix} i\,k \\ 2 \end{bmatrix}\mathfrak{E}-\begin{bmatrix} i\,k \\ 1 \end{bmatrix}\mathfrak{F}\right)$$

Ezeket az így előállított kifejezéseket már most, mint második Christoffel féle symbolumokat vezetjük be és írjuk:

$$\alpha_{ik} = \left\{ {ik \atop 1} \right\}$$

$$\beta_{ik} = \left\{ {ik \atop 2} \right\}$$

Ezeknek a második Christoffel féle symbolumoknak a száma szintén 6.–

Az első Christoffel féle symbolumoknak még egymás alakját fogjuk előállítani, a mely előállítás azért fontos, mert ezen symbolumok geometriai jelentését világítja meg. $\mathcal{E}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{F}$ mennyiségek explicit kifejezése ez volt:

$$\mathcal{E} = \left(\frac{\partial x}{\partial p}\right)^2 + \cdot + \cdot$$

$$\mathcal{F} = \frac{\partial x}{\partial p} \cdot \frac{\partial x}{\partial q} + \cdot + \cdot$$

$$\mathcal{G} = \left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)^2 + \cdot + \cdot$$

Differentiáljuk most ezeket a mennyiségeket p és q szerint:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial p} = 2 \frac{\partial x}{\partial p} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial p^2} + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial q} = 2 \frac{\partial x}{\partial p} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial q \partial p} + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p} = \frac{\partial x}{\partial q} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial p^2} + \cdot \cdot \cdot \cdot + \frac{\partial x}{\partial p} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial p \partial q} + \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q} = \frac{\partial x}{\partial p} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial q^2} + \cdot \cdot \cdot \cdot + \frac{\partial x}{\partial q} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial q \partial p}$$

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p} = 2 \cdot \frac{\partial x}{\partial q} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial q \partial p} + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q} = 2 \cdot \frac{\partial x}{\partial q} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial q^2} + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

Most már közvetlenül láthatjuk, hogy $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ és $\mathcal{G}$ p és q szerint vett partiális deriváltjait közvetlenül kitudjuk fejezni az első Christoffel féle symbolumokkal. T.i.:

$$\begin{bmatrix} 11 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial p}$$

$$\begin{bmatrix} 12 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial q}$$

$$\begin{bmatrix} 22 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q} - \frac{1}{2}\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p}$$

$$\begin{bmatrix} 11 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p} - \frac{1}{2}\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial q}$$

$$\begin{bmatrix} 12 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p}$$

$$\begin{bmatrix} 22 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q}$$

Ezen előállítás azt mutatja, hogy az első Christoffel féle symbolumok hajlítási invariánsok, a mennyiben csak $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ és $\mathcal{G}$-től, meg ezek deriváltjaitól függnek. Mivel a második Christoffel féle symbolumok az első Christoffel féle symbolumokból és $\mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}$-ből vannak összerakva, következik, hogy ezek is hajlítási invariánsok. Megjegyzendő azonban, hogy ezek a hajlítási invariánsok nem eltolási invariánsok, vagyis geometriai jelentéssel nem bírnak. Ha az első Christoffel féle symbolumok kifejezéseit belehelyettesítjük a második Christoffel féle symbolumok kifejezéseibe, akkor kapjuk ezek explicit előállítását az $\mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}$-vel:

$$\begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{\mathcal{G}\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial p} + \mathcal{F}\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial q} - 2\mathcal{F}\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p}}{2(\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2)}$$

$$\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} = \frac{\mathcal{G}\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial q} - \mathcal{F}\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p}}{2(\mathcal{E}\mathcal{G}-\mathcal{F}^2)}$$

$$\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix} = \frac{2\cdot\mathcal{G}\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q} - \mathcal{G}\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p} - \mathcal{F}\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q}}{2(\mathcal{E}\mathcal{G}-\mathcal{F}^2)}$$

$$\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix} = \frac{2\mathcal{E}\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p} - \mathcal{E}\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial q} - \mathcal{F}\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial p}}{2(\mathcal{E}\mathcal{G}-\mathcal{F}^2)}$$

$$\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} = \frac{\mathcal{E}\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p} - \mathcal{F}\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial q}}{2(\mathcal{E}\mathcal{G}-\mathcal{F}^2)}$$

$$\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix} = \frac{\mathcal{E}\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial q} + \mathcal{F}\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p} - 2\mathcal{F}\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q}}{2(\mathcal{E}\mathcal{G}-\mathcal{F}^2)}$$

Ezek a Christoffel féle symbolumok azért fontosak, mert hasonló symbolumokat lehet levezetni abban az esetben is, a midőn nem egy binär quadratikus formával van dolgunk, hanem tetszésszerinti számu határozatlanokkal megalkotott quadratikus formával.–

Pl. ha van egy ilyen quadratikus formánk:

$$\sum_i \sum_k a_{ik}\, dp_i\, dp_k \qquad (a_{ik} = a_{ki})$$
$$(i, k = 1, 2, \ldots n)$$

Ez tetszésszerinti n esetében egy n dimensiós képzödménynek felel meg; $n = 3$ esetben megfelel egy 3-dimensiós képzödménynek, a mely azonban általánosabb, mint a tér.

Megjegyzendő, hogy nekünk tulajdonképen nincs szükségünk ezekre az explicit kifejezésekre; nekünk teljesen elegendő a Christoffel féle symbolumok első előállitása azon megjegyzéssel, hogy hajlitási invariansok ezek.–

Ezen Christoffel féle symbolumok segélyével most már azt a 9 egyenletet, a melyekből kiindultunk, más alakban írhatjuk,:

$$
\mathrm{I.)}\left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 x}{\partial p^2} &= \begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial p} + \begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial q} + \mathfrak{D}\mathfrak{X} \\
\frac{\partial^2 y}{\partial p^2} &= \begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial y}{\partial p} + \begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{\partial y}{\partial q} + \mathfrak{D}\mathfrak{Y} \\
\frac{\partial^2 z}{\partial q^2} &= \begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial z}{\partial p} + \begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{\partial z}{\partial q} + \mathfrak{D}\mathfrak{Z} \\
\frac{\partial^2 x}{\partial p \partial q} &= \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial p} + \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial q} + \mathfrak{D}'\mathfrak{X} \\
\frac{\partial^2 y}{\partial p \partial q} &= \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
\frac{\partial^2 z}{\partial p \partial q} &= \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
\frac{\partial^2 x}{\partial q^2} &= \begin{Bmatrix} 2\,2 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial p} + \begin{Bmatrix} 2\,2 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial q} + \mathfrak{D}\mathfrak{X} \\
\frac{\partial^2 y}{\partial q^2} &= \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
\frac{\partial^2 z}{\partial q^2} &= \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot
\end{aligned}
\right.
$$

Most még két egyenletrendszert állítunk fel olyformán, hogy $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ helyett a:

$$\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial p}, \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial p}, \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial p}$$

illetőleg:

$$\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial q}, \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial q}, \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial q}.$$

függvényeket írjuk. Az ismeretleneket jelöljük $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, illetőleg: $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$-vel

$$\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial p} = \alpha_1 \frac{\partial x}{\partial p} + \beta_1 \frac{\partial x}{\partial q} + \gamma_1 \cdot \mathfrak{X}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial p} = \alpha_1 \frac{\partial y}{\partial p} + \beta_1 \frac{\partial y}{\partial q} + \gamma_1 \cdot \mathfrak{Y}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial p} = \alpha_1 \frac{\partial z}{\partial p} + \beta_1 \frac{\partial z}{\partial q} + \gamma_1 \mathfrak{Z}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial q} = \alpha_2 \frac{\partial x}{\partial p} + \beta_2 \frac{\partial x}{\partial q} + \gamma_2 \cdot \mathfrak{X}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial q} = \alpha_2 \frac{\partial y}{\partial p} + \beta_2 \frac{\partial y}{\partial q} + \gamma_2 \cdot \mathfrak{Y}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial q} = \alpha_2 \frac{\partial z}{\partial p} + \beta_2 \frac{\partial z}{\partial q} + \gamma_2 \cdot \mathfrak{Z}$$

Az első egyenletrendszer első egyenletét szorozzuk meg: $\frac{\partial x}{\partial p}$-vel, a másodikat $\frac{\partial y}{\partial p}$-vel, a harmadikat $\frac{\partial z}{\partial p}$-vel és adjuk össze; azután szorozzuk meg ezen egyenleteket rendre $\frac{\partial x}{\partial q}$, $\frac{\partial y}{\partial q}$, $\frac{\partial z}{\partial q}$-val s adjuk össze; végül ismételjük ezen eljárást $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$-re, akkor kapjuk az eredeti egyenletrendszerrel teljesen aequivalens ezt az egyenletrendszert:

$$\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial p} \cdot \frac{\partial x}{\partial p} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial p} \cdot \frac{\partial y}{\partial p} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial p} \cdot \frac{\partial z}{\partial p} = \alpha_1 \mathfrak{E} + \beta_1 \mathfrak{F} = -\mathfrak{D}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial p} \cdot \frac{\partial x}{\partial q} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial p} \cdot \frac{\partial y}{\partial q} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial p} \cdot \frac{\partial z}{\partial q} = \alpha_1 \mathfrak{F} + \beta_1 \mathfrak{G} = -\mathfrak{D}'$$

$$\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial p} \cdot \mathfrak{X} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial p} \cdot \mathfrak{Y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial p} \cdot \mathfrak{Z} = \gamma_1$$

Hasonló eljárásnak vetve alá a második egyenletrendszert, kapjuk a következő egyenletrendszert:

$$\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial q}\cdot\frac{\partial x}{\partial p}+\frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial q}\cdot\frac{\partial y}{\partial p}+\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial q}\cdot\frac{\partial z}{\partial p}=\alpha_2\mathfrak{E}+\beta_2\mathfrak{F}=-\mathfrak{D}'$$

$$\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial q}\cdot\frac{\partial x}{\partial q}+\ldots\ldots\ldots=\alpha_2\mathfrak{F}+\beta_2\mathfrak{G}=-\mathfrak{D}''$$

$$\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial q}\cdot\mathfrak{X}+\frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial q}\mathfrak{Y}+\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial q}\cdot\mathfrak{Z}=\gamma_2$$

Mindkét egyenletrendszerben a harmadik egyenletek baloldala: 0, tehát:

$$\gamma_1=0,\quad \gamma_2=0$$

mert:

$$\mathfrak{X}^2+\mathfrak{Y}^2+\mathfrak{Z}^2=1$$

$$2\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial p}\cdot\mathfrak{X}+2\frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial p}\cdot\mathfrak{Y}+2\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial p}\mathfrak{Z}=0$$

$$2\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial q}\cdot\mathfrak{X}+2\frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial q}\cdot\mathfrak{Y}+2\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial q}\mathfrak{Z}=0$$

A két-két első egyenletből most közvetlenül kiszámíthatjuk az α_1, β_1 illetve α_2, β_2-t. Ha ezeket behelyettesítjük az eredeti egyenleteinkbe, kapjuk, hogy:

$$(\mathrm{II.})\quad\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial p}&=\frac{\mathfrak{F}\mathfrak{D}'-\mathfrak{G}\mathfrak{D}}{\mathfrak{E}\mathfrak{G}-\mathfrak{F}^2}\cdot\frac{\partial x}{\partial p}+\frac{\mathfrak{F}\mathfrak{D}-\mathfrak{E}\mathfrak{D}'}{\mathfrak{E}\mathfrak{G}-\mathfrak{F}^2}\cdot\frac{\partial x}{\partial q}\\
\frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial p}&=\ldots\ldots\ldots\\
\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial p}&=\ldots\ldots\ldots\\
\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial q}&=\frac{\mathfrak{F}\mathfrak{D}''-\mathfrak{G}\mathfrak{D}'}{\mathfrak{E}\mathfrak{G}-\mathfrak{F}^2}\cdot\frac{\partial x}{\partial p}+\frac{\mathfrak{F}\mathfrak{D}'-\mathfrak{E}\mathfrak{D}''}{\mathfrak{E}\mathfrak{G}-\mathfrak{F}^2}\cdot\frac{\partial x}{\partial q}
\end{aligned}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l}\frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial q} = \ldots\ldots \\ \frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial q} = \ldots\ldots\end{array}\right.$$

A mi az I., egyenleteket a II., egyenletektől lényegesen megkülönbözteti, ez az a körülmény, hogy míg az I., egyenletek koefficiensei hajlítási invariánsok, addig a II., coefficiensei már nem azok, mert a $\mathfrak{D}, \mathfrak{D}', \mathfrak{D}''$ mennyiségek is előfordúlnak bennük. –

Az I., egyenletrendszer az x, y, z második deriváltjait fejezi ki, az x, y, z, p és q szerint képzett első deriváltjaival és $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$-vel:

1., $\frac{\partial^2 x}{\partial p^2} = \ldots\ldots$

$\ldots\ldots$

$\ldots\ldots$

4., $\frac{\partial^2 x}{\partial p \partial q} = \ldots\ldots$

$\ldots\ldots$

$\ldots\ldots$

7., $\frac{\partial^2 x}{\partial q^2} = \ldots\ldots$

$\ldots\ldots$

Ha a kijelölt egyenleteket tekintjük, láthatjuk, hogy ezek párciális differentiál egyenletek az x-re nézve. Ha ilyen partiális differentiál egyenleteket veszünk, akkor azoknak jobb oldalai nem lehetnek függetlenek egymástól, t.i. teljesülniök kell azoknak a feltételeknek, a melyek szerint :

$$\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial p^2}\right) = \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial q^2}\right)$$

úgy, hogy ha az 1., egyenletet deriváljuk q szerint, ugyanazt kell kapnunk, mintha a 4., egyenletet deriváljuk p szerint. A partiális differentiál egyenleteknél úgy van a dolog, hogy :

$$\frac{\partial x}{\partial p} = \mathcal{P}$$

$$\frac{\partial x}{\partial q} = Q$$

nem lehetnek függetlenek egymástól, hanem teljesülniök kell az integrabilitási feltételeknek. Nekünk épen ezeket az integrabilitási feltételeket kell felállitnunk.-

A II., rendszerben $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ első p és q szerint vett parciális deriváljai szerepelnek; ezekre nézve szintén az integrábilitási feltételeket kell felirnunk.-

Megjegyzendő, hogy nekünk nem kell foglalkoznunk annak a kimutatásával, hogy ezek az integrábilitási feltételek teljesülnek-e? mi a priori tudjuk, hogy ezeknek teljesülniök kell, mert hiszen mi olyan x függvényekből indultunk ki, a melyek p és q-nak függvényei.-

Az integrábilitási feltételek tehát nekünk identikus relatiókat szolgáltatnak a függvényeink között. Vegyük az:

$$\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial p^2}\right) = \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial q^2}\right)$$

relatiót:

$$\frac{\partial}{\partial q}\left(\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial x}{\partial p}+\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial x}{\partial q}+\mathfrak{D}\mathfrak{X}\right)-\frac{\partial}{\partial p}\left(\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial x}{\partial p}+\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial x}{\partial q}+\mathfrak{D}'\mathfrak{X}\right)=0$$

A második integrabilitási feltétel szerint:

$$\frac{\partial}{\partial p}\cdot\left(\frac{\partial^2 x}{\partial q^2}\right)=\frac{\partial}{\partial q}\cdot\left(\frac{\partial^2 x}{\partial q\partial p}\right)$$

Lesz:

$$\frac{\partial}{\partial p}\left(\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial x}{\partial p}+\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial x}{\partial q}+\mathfrak{D}''\mathfrak{X}\right)-\frac{\partial}{\partial q}\left(\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial x}{\partial p}+\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial x}{\partial q}+\mathfrak{D}'\mathfrak{X}\right)=0$$

Megjegyzendő, hogy, ha ez a két feltétel teljesül, akkor valamennyi további feltétel ezek következménye.-

Természetesen ilyen két-két egyenlet tartozik az y-hoz és z-hez is.-

Ha most már az első egyenletet kidifferenciáljuk, akkor az x-nek második, a $\mathfrak{X}$-nek első deriváltjai jönek elő az így nyert egyenletben. Képzeljük ezek helyébe behelyettesítve az I. és II. egyenletrendszerekből adódó kifejezéseket, s rendezzük azután az egyenletet:

$$\frac{\partial x}{\partial p},\ \frac{\partial x}{\partial q},\ \mathfrak{X}$$

szerint, akkor kapunk egy homogén lineáris egyenletet, mert az x, p és q szerint vett második és a $\mathfrak{X}$ első deriváltjai ezekkel homogén lineáris alakban vannak kifejezve. Kapjuk tehát ezt az egyenletet:

$$\alpha\frac{\partial x}{\partial p}+\beta\frac{\partial x}{\partial q}+\gamma\cdot\mathfrak{X}=0$$

$$\alpha=\frac{\partial}{\partial q}\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}-\frac{\partial}{\partial p}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}+\mathfrak{D}\cdot\frac{\mathfrak{F}\mathfrak{D}''-\mathfrak{G}\mathfrak{D}'}{\mathfrak{E}\mathfrak{G}-\mathfrak{F}^2}-$$

$$-\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\}-\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}-\mathcal{D}'\frac{\mathcal{F}\mathcal{D}'-\mathcal{G}\mathcal{D}}{\mathcal{E}\mathcal{G}-\mathcal{F}^2}$$

β vacat.

$$\gamma=\left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\}\mathcal{D}'+\left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}\mathcal{D}''-\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\mathcal{D}-\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}\mathcal{D}'+\frac{\partial\mathcal{D}}{\partial q}-\frac{\partial\mathcal{D}}{\partial p}$$

Ha most a 2., 5., 8., egyenleteket vettük volna, akkor megint kaptunk volna egy egyenletet, melyben azonban az x helyét az y foglalja el, a $\mathfrak{X}$ helyét a $\mathfrak{Y}$; hasonló áll a 3., 6., 9., egyenletekre z és $\mathfrak{Z}$ szerint.-

Kapjuk e szerint ezt az egyenletrendszert:

$$\alpha\frac{\partial x}{\partial p}+\beta\frac{\partial x}{\partial q}+\gamma.\mathfrak{X}=0$$

$$\alpha\frac{\partial y}{\partial p}+\beta\frac{\partial y}{\partial q}+\gamma.\mathfrak{Y}=0$$

$$\alpha\frac{\partial z}{\partial p}+\beta\frac{\partial z}{\partial q}+\gamma.\mathfrak{Z}=0$$

Mivel azonban:

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial p} & \frac{\partial x}{\partial q} & \mathfrak{X}\\ \vdots & \vdots & \vdots\end{vmatrix}=0$$

ez az egyenletrendszer csak $\alpha=0$, $\beta=0$, $\gamma=0$ mellett teljesül. E szerint:

$$\frac{\partial}{\partial q}\left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\}-\frac{\partial}{\partial p}\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}+\left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}+\left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\}+\mathcal{D}.\frac{\mathcal{F}\mathcal{D}''-\mathcal{G}\mathcal{D}'}{\mathcal{E}\mathcal{G}-\mathcal{F}^2}-$$

$$-\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\}-\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}-\mathcal{D}'\frac{\mathcal{F}\mathcal{D}'-\mathcal{G}\mathcal{D}}{\mathcal{E}\mathcal{G}-\mathcal{F}^2}=0$$

Ez az első "alapvető" identitás, a melyre szükségünk lesz: ezt Gauss féle identitásnak nevezzük.-

Másfelől áll ez az identitás is:

$$(A.)\quad \left\{{11 \atop 1}\right\}D'+\left\{{11 \atop 2}\right\}D''-\left\{{12 \atop 1}\right\}D-\left\{{12 \atop 2}\right\}D'+\frac{\partial D}{\partial q}-\frac{\partial D}{\partial p}$$

A Gauss féle identitást és az A, identitást tisztán:

$$\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial p^2}\right)=\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial p\partial q}\right)$$

relátióból származtattuk.- Ha most a

$$\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial q^2}\right)=\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial p\partial q}\right)$$

identitást használjuk fel, akkor megint kapunk egyenleteket, a melyek a $\mu=0$ mellé, még egy új identitást szolgáltatnak.- T.i. első identitásúl megint a Gauss féle adódik. Az új identitás ez lesz:

$$(B.)\quad \left\{{22 \atop 1}\right\}D+\left[\left\{{22 \atop 2}\right\}-\left\{{12 \atop 1}\right\}\right]D''-\left\{{12 \atop 2}\right\}D''+\frac{\partial D''}{\partial p}-\frac{\partial D'}{\partial q}=0$$

Ez a három identitás szükséges és elegendő arra, hogy a mi rendszerünk integrabilis legyen és épen ezért csak ezek a független relációk.-

Az (A., és (B.) relátiókat Mainardi-Codazzi féle relátióknak nevezik.- Mainardi közölte ezeket 1856, s tőle függetlenűl Codazzi 1868.-

A Gauss féle relatió az: „Disquisitiones generales circa superficies curvas" című munkában volt először közölve.-

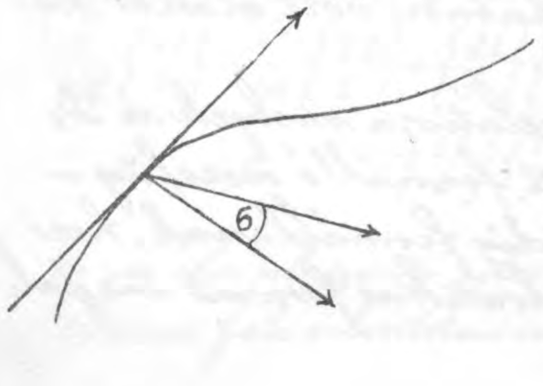
Látni fogjuk, hogy ez a három relatió, a melyek a D, D', D'' és E, F, G mennyiségek között fennálló összefüggést szolgáltatják, nemcsak mindig fennállanak, ha egy bizonyos felülethez a két quadratikus formát megad.

kotjuk, hanem kitudjuk mutatni azt is, hogy ha tetszésszerinti módon veszünk két differentiál formát, a melyekben $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ és $\mathcal{D}, \mathcal{D}', \mathcal{D}''$ egészen tetszőleges függvények egyébként, de az említett relatióknak eleget tesznek, akkor mindig van olyan felület, a melyre nézve ez a két quadratikus forma épen a fundamentál formákat képezi. Ez a három relátió szükséges, de egyszersmind elegendő is ahhoz, hogy a két quadratikus forma felületet értelmezzen.-

Be fogjuk bizonyitni, hogy, ha a két quadratikus forma adva van, akkor az illető felület bizonyos térbeli eltolásoktól eltekintve már meg van határozva, épen úgy, mint a görbék esetében az r és ρ által a görbe, mint geometriai képződmény teljesen jellemezve volt. Ennek a bebizonyitásában úgyszólván kulminál a felületek elmélete.-

Mielőtt ennek a bizonyitásához áttérnénk, még bizonyos geometriai quantitásokkal kell foglalkoznunk, a melyek a felületi görbék görbületére vonatkoznak, s a melyek úgyszólván geometriai interpretációi leszenek mindazoknak a számitásoknak, a melyeket idáig végeztünk.-

Fektessünk a felület valamelyik pontján át egy görbét, a melyet oly módon képzeljünk értelmezve, hogy a felületi coordinatákat: p és q, mint az ívhossz függvényeit állitjuk elő:



$$p = f(s)$$
$$q = g(s)$$

Ezen görbe valamely x, y, z pontjában az érintő iránycosinusait a következő mennyiségek szolgáltatják:

$$\alpha = \frac{dx}{ds} = \frac{\partial x}{\partial p}.p' + \frac{\partial x}{\partial q}q'$$

$$\beta = \frac{dy}{ds} = \frac{\partial y}{\partial p}.p' + \frac{\partial y}{\partial q}q'$$

$$\gamma = \frac{dz}{ds} = \frac{\partial z}{\partial p}.p' + \frac{\partial z}{\partial q}q'$$

Ez az érintő nyilvánvalóan a felület kérdéses pontjához tartozó érintő síkban fekszik. Képzeljük az illető pontban a görbe főnormálisát meghúzva (a főnormális a simuló sik és a normális sik metszővonala). Általánosan szólva a főnormális nem esik össze a felület normálisával, hanem azzal bizonyos σ szöget képez. Ha a főnormális iránycosinusait szokásos l, m, n-el jelöljük, a felületi normálisét: $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$-vel, akkor:

$$\cos\sigma = \mathfrak{X}.l + \mathfrak{Y}.m + \mathfrak{Z}.n$$

A Frenet-Serret képletek szerint a főnormális iránycosinusait kitudjuk fejezni az érintő iránycosinusainak: „s" szerint képezett deriváltjaival és az első görbülettel: r-el.- Lesz ezek behelyettesítése után:

$$\cos\sigma = (\mathfrak{X}\alpha' + \mathfrak{Y}\beta' + \mathfrak{Z}\gamma')r$$

$$\frac{\cos\sigma}{r} = \mathfrak{X}\frac{d^2x}{ds^2} + \mathfrak{Y}\frac{d^2y}{ds^2} + \mathfrak{Z}\frac{d^2z}{ds^2}$$

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{\partial^2 x}{\partial p^2}p'^2 + 2\frac{\partial^2 x}{\partial p\partial q}p'q' + \frac{\partial^2 x}{\partial q^2}q'^2 + \frac{\partial x}{\partial p}p'' + \frac{\partial x}{\partial q}q''$$

. . . .

. . . .

Ha ezeket a kifejezéseket behelyettesitjük: $\frac{\cos\sigma}{r}$ egyenletébe, akkor kapjuk:

$$\frac{\cos\sigma}{r} = p'^2\left(\mathfrak{X}\frac{\partial^2 x}{\partial p^2} + \dots\right) + 2p'q'\left(\mathfrak{X}\frac{\partial^2 x}{\partial p\partial q} + \dots\right) +$$
$$+ q'^2\left(\mathfrak{X}\frac{\partial^2 x}{\partial q^2} + \dots\right) + p''\underbrace{\left(\mathfrak{X}\frac{\partial x}{\partial p} + \dots\right)}_{=0} + q''\underbrace{\left(\mathfrak{X}\frac{\partial x}{\partial q} + \dots\right)}_{=0}$$

Ámde a $(\dots)$ jelekben álló kifejezések nem egyebek, mint $\mathfrak{D}, \mathfrak{D}', \mathfrak{D}''$ s így lesz:

$$\frac{\cos\sigma}{r} = \mathfrak{D}p'^2 + 2\mathfrak{D}'p'q' + \mathfrak{D}''q'^2$$

Ha most a p' és q' helyébe beírjuk a $\frac{dp}{ds}$ és $\frac{dq}{ds}$-t, akkor, mint közös nevező a ds^2 szerepel, s ha ennek az értékét behelyettesítjük, akkor kapjuk, hogy:

$$\frac{\cos\sigma}{r} = \frac{\mathfrak{D}dp^2 + 2\mathfrak{D}'dp\,dq + \mathfrak{D}''dq^2}{\mathfrak{E}dp^2 + 2\mathfrak{F}dp\,dq + \mathfrak{G}dq^2}$$

Az illető görbe individualitása a $\frac{dp}{dq}$-ban nyilvánul.

Vegyünk mindjárt egy speciális esetet. Ha a felület érintő síkjában az illető ponton átmenő sugársorból kiválasztunk egyet, akkor ehhez tartoznak bizonyos α, β, γ iránycosinusok. Ezek magukban véve meghatározzák a $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$ és $\frac{dz}{ds}$-eket. Ezekkel ismét meg lesz határozva a $\frac{dp}{dq}$; az α, β, γ, a $\frac{dp}{ds}$, $\frac{dq}{ds}$ lineáris egyenleteivel vannak meghatározva: viszont meghatározhatók ezekből a $\frac{dp}{ds}$, $\frac{dq}{ds}$ illetőleg:

$$\frac{dp}{ds} \cdot \frac{1}{\frac{dq}{ds}} = \frac{dp}{dq}$$

Mondhatjuk tehát, hogy, ha veszünk az érintő síkban egy tetszőleges egyenest, akkor ez által megvan határozva $\frac{dp}{dq}$ vagy: $\frac{dq}{dp}$.-

Ha tehát egy egyenest választunk a kérdéses felületi ponthoz tartozó érintő síkban, a mely ezen a ponton megy keresztül s ezen és a felületi normálison keresztül egy síkot fektetünk, akkor ez a sík metszeni fogja a mi felületünket egy görbében, a melynek jellege az illető pontban egy bizonyos $\frac{dp}{dq}$-val meg van határozva. Mondhatom tehát, hogy minden egyes $\frac{dp}{dq}$-hoz, vagy minden egyes sugárhoz tartozik egy normál metszet, vagyis egy olyan görbe, a melyet a felületből kimetsz az illető egyenesen és a felületi normálison átmenő sík.- Ez a normál metszet tehát egy sík görbe, a melynek a simuló síkja az a sík, a melyben az egész görbe benn fekszik.- Azonban a normál metszet fogalmát általánosíthatjuk úgy, hogy akkor is normálmetszetnek mondjuk a görbét, ha az nem síkbeli, hanem térbeli görbe, de a simuló síkja magában foglalja a felületi normálist is, de magában foglalja a görbe főnormálisát is, a miből következik, hogy ebben az esetben a görbe főnormálisa összeesik a felületi normálissal, mint végtelen egyenes, mint sugár; de azért két eset lehetséges; a két egyenes alkothat 0, vagy π szöget egymással, a szerint, a mint megválasztott irányuk egyezik vagy ellenkezik.- Normál metszet esetében mondhatjuk, hogy a σ-val jelölt szög:

$$\sigma = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases}$$

Ez által van a normál metszet jellemezve. Mindkét esetben a σ szög cosinusának absolut értéke: 1. Tehát normál metszet esetében:

$$\pm\frac{1}{r}=\frac{Ddp^2+2D'dpdq+D''dq^2}{Edp^2+2Fdpdq+Gdq^2}$$

Jelöljük a normál metszet görbületét más metszetekétől való megkülönböztetés végett: $\frac{1}{R}$

$$\pm\frac{1}{R}=\frac{Ddp^2+\ldots}{Edp^2+\ldots}$$

Ha most tekintjük a sugársor egy individuumát, akkor ehhez tartozik először is egy síkbeli normál metszet és mind azok a térbeli görbék, a melyeknek simuló síkja keresztül megy a felületi normálison: ezek a normál metszetek; - ezekhez mind ugyanazon R tartozik. - De a normál metszeteken kívül még más metszetek is tartanak a sugársor kiválasztott individuumához, vagyis vannak más olyan görbék is, a melyeknek ez érintőjük, de a melyeknek simuló síkjai már nem tartalmazza a felületi normálist. Az ilyen metszeteket, megkülönböztetésül ferde metszeteknek nevezzük. Mint már fennebb is jeleztük, metszeten nem kell mindig síkbeli görbét érteni. Természetesen most már minden a sugár individuumhoz tartozó metszet ugyanazon $\frac{dp}{dq}$-val van jellemezve s így a ferde metszeteket jellemezzük egyszerűen azon szöggel, a melyet a felület normálisa a ferde metszet főnormálisával képez. Ha van egy ilyen ferde metszetünk, a melyre nézve az $\frac{1}{r}$ meghatározott mennyiség, akkor mondhatom, hogy:

$$\frac{\cos\sigma}{r} = \frac{\mathcal{D}dp^2+\dots}{\mathcal{E}dp^2+\dots}$$

$$= \pm\frac{1}{\mathcal{R}}$$

$$r = \pm \mathcal{R}.\cos\sigma$$

$$|r| = |\mathcal{R}.\cos.\sigma|$$

Ez a relátió áll fenn a normál metszet és az ugyanazon sugár individuumhoz tartozó ferde metszet görbültsége között.- Más szóval, ha a normál metszet görbültségét felrakjuk a felületi normálisra, és azt projiciáljuk a ferde metszet simuló síkjára, akkor kapjuk a ferde metszet görbültségét!

Ezt a tételt Meusnier féle tételnek nevezzük.-

A Meusnier féle tétel értelmében, ha a felületen fekvő görbék görbültségi viszonyait akarjuk vizsgálni, szorítkozhatunk a normál metszetek vizsgálatára, mert minden ferde metszet görbületét közvetlenül kitudjuk fejezni a normál metszet görbületének és a ferde metszet főnormalisa, meg a felület normalisa által képezett szög kosinusának a szorzatával. Nézzük most, hogy a normál metszeteknél, hogy alakul a dolog.

A görbék elméletében az első görbületnek nem volt természetes előjele; ott az első görbületnek mindig pozitív előjelt adtunk. Itt szintén úgy fogunk eljárni, hogy a R-nek, mint görbületnek szintén mindig pozitív előjelt fogunk adni, vagyis az $\frac{1}{R}$-t identificálni fogjuk ezen kifejezésnek:

$$\frac{\mathcal{D}dp^2+2\mathcal{D}'dpdq+\mathcal{D}''dq^2}{\mathcal{E}dp^2+2\mathcal{F}dpdq+\mathcal{G}dq^2}$$

az absolut értékével. Az r, vagyis a ferde metszet egyenlő legyen: $\mathcal{R}.\cos\varphi$ positiv értékével; ezen konventió szerint:

$$r = \mathcal{R}.\cos\varphi$$

A szerint, hogy $\cos\varphi$ positiv, vagy negativ, vesszük a $\mathcal{R}$-t positivnak vagy negativnak.-

Ezen konventió nemcsak célszerü, hanem fontos is, a menynyiben, mint látni fogjuk, azok a felületi pontok, a melyekben $\mathcal{R}$ positiv, nagyon elválnak azoktól, a melyekben negativ.

Az érintőt úgy jellemeztük volt, hogy valamiképen meghatároztuk a: $\frac{dq}{dp}$-t: nevezzük ezt röviden k-nak, akkor:

$$\mathcal{R} = \frac{\mathcal{E} + 2\mathcal{F}k + \mathcal{G}k^2}{\mathcal{D} + 2\mathcal{D}'k + \mathcal{D}''k^2}$$

Látjuk tehát, hogy az $\mathcal{R}$ úgyszólván függvénye és pedig rationális tört függvénye a k-nak. Természetes, hogy a coefficiensek még függvényei a p, q-nak, ámde most egy rögzitett pontról van szó, tehát a p és q-t ebből a szempontból állandónak tekinthetjük. Ha most a k-t változtatom, vagyis az érintőt az érintő síkban a kérdéses pont körül forgatom, akkor az $\mathcal{R}$-nek a k-val való változását ez a formula szolgáltatja.-

Vegyünk most két olyan görbét, a melyeknek érintőjük merőlegesek egymásra. Fentebb kiszámitottuk két görbe egymáshoz való hajlásszögét s a feltétel, hogy a két görbe merőleges legyen egymásra így szólt: Ha az egyik görbére nézve: $\frac{dq}{dp} = k_1$ és a másikra nézve k_2, akkor, hogy a két görbe az illető pontban merőleges legyen egymásra, kell, hogy:

$$\mathcal{E} + \mathcal{F}(k_1+k_2) + \mathcal{G}k_1k_2 = 0$$

legyen.- Vizsgáljuk most a k_1 és k_2 irányokhoz tartozó metszetek görbültségét.-

Kiszámítjuk mindenek előtt az:

$$\frac{1}{\mathcal{R}_1} + \frac{1}{\mathcal{R}_2}$$

értékét. Hogy a számítást, minél áttekinthetőbb alakban végezzük, vegyük tekintetbe ezt az identitást:

$$(\alpha + 2\beta k_1 + \gamma k_1^2)(a + 2bk_2 + ck_2^2) +$$
$$+ (a + 2bk_1 + ck_1^2)(\alpha + 2\beta k_2 + \gamma k_2^2) =$$
$$= 2\big(\alpha + \beta(k_1+k_2) + \gamma k_1k_2\big)\big(a + 2b(k_1+k_2) + ck_1k_2\big) +$$
$$+ (\alpha c - 2\beta b + \gamma a)(k_1 - k_2)$$

$$\frac{1}{\mathcal{R}_1} + \frac{1}{\mathcal{R}_2} = \frac{\mathcal{D} + 2\mathcal{D}'k_1 + \mathcal{D}''k_1^2}{\mathcal{E} + 2\mathcal{F}k_1 + \mathcal{G}k_1^2} + \frac{\mathcal{D} + 2\mathcal{D}'k_2 + \mathcal{D}''k_2^2}{\mathcal{E} + 2\mathcal{F}k_2 + \mathcal{G}k_2^2} =$$

$$= \frac{(\mathcal{D}+2\mathcal{D}'k_1+\mathcal{D}''k_1^2)(\mathcal{E}+2\mathcal{F}k_2+\mathcal{G}k_2^2) + (\mathcal{D}+2\mathcal{D}'k_2+\mathcal{D}''k_2^2)(\mathcal{E}+2\mathcal{F}k_1+\mathcal{G}k_1^2)}{(\mathcal{E}+2\mathcal{F}k_1+\mathcal{G}k_1^2)(\mathcal{E}+2\mathcal{F}k_2+\mathcal{G}k_2^2)}$$

Az identitás felhasználásával, ha abban:

$$\alpha = \mathcal{D},\ \beta = \mathcal{D}',\ \gamma = \mathcal{D}'';\ a = \mathcal{E},\ b = \mathcal{F},\ c = \mathcal{G}\text{-t}$$

teszünk, kapjuk, hogy:

$$\frac{1}{\mathcal{R}_1} + \frac{1}{\mathcal{R}_2} = \frac{\cancel{2[\mathcal{D}+\mathcal{D}'(k_1+k_2)+\mathcal{D}''k_1k_2][\mathcal{E}+2\mathcal{F}(k_1+k_2)+\mathcal{G}k_1k_2]} + (\mathcal{D}\mathcal{G}-2\mathcal{D}'\mathcal{F}+\mathcal{D}''\mathcal{E})\cancel{(k_1-k_2)}}{(\mathcal{E}\mathcal{G}-\mathcal{F}^2)\cancel{(k_1-k_2)}}$$

Tehát:
$$\frac{1}{\mathcal{R}_1} + \frac{1}{\mathcal{R}_2} = \frac{\mathcal{E}\mathcal{D}'' - 2\mathcal{F}\mathcal{D}' + \mathcal{G}\mathcal{D}}{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2}$$

Ezen a kifejezésen feltünő, hogy független az egymásra merőleges érintők helyzetétől, mert k_1 és k_2 nem fordúl elő benne. Ha tehát az érintő síkban két egymásra merőleges érintőt forgatunk, ez a forgatás az:

$$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$$

értéket változatlanúl hagyja.-

A normál metszet görbületi rádiusát ez a képlet állította elő:

$$R=\frac{E+2Fk+Gk^2}{D+2D'k+D''k^2}$$

Ha ezt a kifejezést egy fix pontra vizsgáljuk, akkor függvénye lesz a k-nak; ez a k úgyszólván független változó, a mely $-\infty$-től $+\infty$-ig minden értéket feltud venni. Képzeljük most, hogy ez a k tényleg változik, akkor a R is fog változni, mint ennek a k-nak tört racionalis függvénye. Mivel pedig R a k valós változónak folytonos valós függvénye, nyilvánvaló, hogy, ha k visszatér kiindúlási értékéhez, akkor az R is vissza fog térni. Tehát az R egy bizonyos értékkészletet fog befutni, ha k minden értéket felvesz. Tehát csak két eset lehetséges:

1., R egyáltalában nem változik,

2., R változik.-

Mikor lesz az R független a k-tól? Nyilván csak akkor, ha k kiesik az egyenletből; ez pedig csak akkor következik be, ha:

$$E:F:G=D:D':D''$$

A mint látjuk ez a feltétel p és q között két egyenletet szolgáltat.- Egy általános felület esetén ez a két egyenlet a p és q számára isolált értékeket szolgáltat. Ezek az értékek a felület különös jellegű pontjai lesznek. Az ilyen pontokat a felület umbilicus pontjainak nevezzük.-

Megeshetik azonban, hogy ez a két egyenlet a felület minden pontjára teljesül: ilyen pl. a gömb. Az is előfordul, hogy a két egyenlet nem teljesül identice, de nem is discrét pontokat szolgáltat, hanem egy görbét, a melynek tehát minden pontja umbilicus. Tehát a két egyenlet vagy discrét pontokat szolgáltat (a háromtengelyü ellipsoid tengelyeinek végpontjai), vagy identitást (gömb esetén) vagy egy, vagy több görbét az umbilicus pontok számara.-

Ezt az esetet egyelőre mellőzzük.-

Vegyük a második esetet, vagyis a mikor az R a k-val változik, tehát a felületnek egy nem umbilicus pontjával van dolgunk. Ebben az esetben lesz egy minimális és maximális R a kérdéses felülethez, és pedig nemcsak bizonyos szomszédos k-ra nézve, hanem úgy kell érteni, hogy az összes R-ek között lesz egy legnagyobb (maximum maximorum) és lesz egy legkisebb (minimum minimorum.)

Keressük fel ezeket a maximumokat és minimumokat. A lehetséges maximumok és minimumok az R-nek k szerint vett differentiális hányadosát 0-vá teszik.-

$$(\mathcal{D}+2\mathcal{D}'k+\mathcal{D}''k^2)(2\mathcal{F}+2\mathcal{G}k)-(\mathcal{E}+2\mathcal{F}k+\mathcal{G}k^2)(2\mathcal{D}'+2\mathcal{D}''k)=0$$

Ezen egyenlet szolgáltatja azon k értékeket, a melyek között vannak a maximumok és minimumok. Hajtsuk végre a szorzást:

$$DF-ED'-(2D'F+GD-ED''-2FD')k+(FD''+2D'G-2FD''-GD')k^2 = 0$$

Ez az egyenlet a k számára két értéket szolgáltat s mivel egy maximumnak és minimumnak szükségképen elő kell fordúlnia, mondhatjuk, hogy ezen quadratikus egyenlet egyik gyöke lesz a maximum, a másik a minimum. Az R tehát csak egyszer veszi fel a legnagyobb és legkisebb értéket. Egy ideig monoton nő, míg eléri legnagyobb értékét, ettől kezdve monoton fogy legkisebb értékébe s innen monoton növe vissza jut a kiindúlási értékhez, vagy fordítva.

A k egyenletét még így is írhatjuk:

$$\frac{E+Fk}{F+Gk} = \frac{D+D''k}{D'+D''k}$$

Jelöljük ezen egyenlet gyökeit k' és k''-vel. Kérdés, hogy k' és k'' valósak-e? Azt állítjuk, hogy szükségképen valósak! Igen, mert, ha ezen egyenlet gyökei nem volnának valósak, akkor az R nem vehetne fel extremális értéket. Mivel azonban az R folytonos függvénye a k-nak és eredeti értékéhez visszatér, egy ilyen extremum okvetlenül létezik, tehát van egy valós gyöke ezen egyenletnek; de ha az egyik gyök valós, akkor a másik is az.

Jelöljük a k'nek megfelelő R et ρ_1-el, a k''-nek megfelelőt: ρ_2-vel, akkor:

$$\rho_1 = \frac{E+2Fk'+Gk'^2}{D+2D'k'+D''k'^2}$$

és:

$$\rho_2 = \frac{\mathcal{E}+2\mathcal{F}k''+\mathcal{G}k''^2}{\mathcal{D}+2\mathcal{D}'k''+\mathcal{D}''k''^2}$$

A k' és k'' egészen határozott irányokat képviselnek: ezeket főirányoknak, a hozzájuk tartozó normálmetszeteket főnormálmetszeteknek s ezek görbületeit főgörbületeknek nevezzük:–

Tekintettel arra, hogy a fenti egyenlet k' és k''-re teljesül, mondhatom, hogy:

$$\underset{\cdot\mathcal{E}}{1} : \underset{\cdot\mathcal{F}}{(k'+k'')} : \underset{\cdot\mathcal{G}}{k'k''} = \underset{\cdot\mathcal{E}}{(\mathcal{D}'\mathcal{G}-\mathcal{F}\mathcal{D}'')} : \underset{\cdot\mathcal{F}}{(\mathcal{E}\mathcal{D}''-\mathcal{G}\mathcal{D})} : \underset{\cdot\mathcal{G}}{(\mathcal{D}\mathcal{F}-\mathcal{D}'\mathcal{E})}$$

Szorozzuk meg az arány első megfelelő tagjait $\mathcal{E}$-vel, a másodikat $\mathcal{F}$-el, a harmadikat: $\mathcal{G}$-vel s alkossuk meg ezt a kifejezést:

$$\mathcal{E}+\mathcal{F}(k'+k'')+\mathcal{G}k'k'' = C\cdot\begin{vmatrix} \mathcal{E} & \mathcal{E} & \mathcal{D} \\ \mathcal{F} & \mathcal{F} & \mathcal{D}' \\ \mathcal{G} & \mathcal{G} & \mathcal{D}'' \end{vmatrix} = 0$$

Ez az egyenlet k' és k'' között azt mondja, hogy a k' és k''-nek megfelelő két irány merőleges egymásra.–

A főirányok tehát merőlegesek egymásra.– Az egymásra merőleges irányokhoz tartozó normálmetszetek görbületeire szóló relatió szerint tehát:

$$\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2} = \frac{\mathcal{E}\mathcal{D}''-2\mathcal{F}\mathcal{D}'+\mathcal{G}\mathcal{D}}{\mathcal{E}\mathcal{G}-\mathcal{F}^2}$$

Szorozzuk meg most a fennebbi arány megfelelő tagjait rendre: $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$, $\mathcal{D}''$-el, akkor kapjuk a k' és k'' között a következő egyenletet:

$$\mathcal{D}+\mathcal{D}'(k'+k'')+\mathcal{D}''k'k''=C. \begin{vmatrix} \mathcal{D} & \mathcal{E} & \mathcal{D} \\ \mathcal{D}' & \mathcal{F} & \mathcal{D}' \\ \mathcal{D}'' & \mathcal{G} & \mathcal{D}'' \end{vmatrix} = 0$$

A k' és k'' tehát ezt a két egyenletet teljesitik:

$$\mathcal{E}+\mathcal{F}(k'+k'')+\mathcal{G}k'k''=0$$

$$\mathcal{D}+\mathcal{D}'(k'+k'')+\mathcal{D}''k'k''=0$$

Számitsuk ki most az:

$$\frac{1}{\rho_1}\cdot\frac{1}{\rho_2} \quad \text{értéket.-}$$

$$\frac{1}{\rho_1}\cdot\frac{1}{\rho_2}=\frac{\mathcal{D}+2\mathcal{D}'k'+\mathcal{D}''k'^2}{\mathcal{E}+2\mathcal{F}k'+\mathcal{G}k'^2}\cdot\frac{\mathcal{D}+2\mathcal{D}'k''+\mathcal{D}''k''^2}{\mathcal{E}+2\mathcal{F}k''+\mathcal{G}k''^2}$$

Használjuk fel a fennebb alkalmazott identitást ugy, hogy a számlálóban: $\alpha = a = \mathcal{D}$, $\beta = b = \mathcal{D}'$; $\gamma = c = \mathcal{D}''$ a nevezőben: $\alpha = a = \mathcal{E}$, $\beta = b = \mathcal{F}$; $\gamma = c = \mathcal{G}$ legyen.- Ezen identitás segélyével kapjuk, hogy:

$$\frac{1}{\rho_1}\cdot\frac{1}{\rho_2}=\frac{\mathcal{D}\mathcal{D}''-\mathcal{D}'^2}{\mathcal{E}\mathcal{G}-\mathcal{F}^2}$$

Tehát: $\frac{1}{\rho_1}\cdot\frac{1}{\rho_2}$ előállitható, mint a két forma determinánsainak a hányadosa.-

Ezek után most már azonnal felirhatjuk azt a quadratikus egyenletet, a melynek gyökei szolgáltatják a két fő görbületet. Lesz:

$$\frac{1}{\rho^2}+\mathcal{H}\frac{1}{\rho}+\mathcal{K}=0 \qquad \text{és:}$$

$$\mathcal{H}=\frac{2\mathcal{F}\mathcal{D}'-\mathcal{G}\mathcal{D}-\mathcal{E}\mathcal{D}''}{\mathcal{E}\mathcal{G}-\mathcal{F}^2}\ ; \quad \mathcal{K}=\frac{\mathcal{D}\mathcal{D}''-\mathcal{D}'^2}{\mathcal{E}\mathcal{G}-\mathcal{F}^2}$$

Mind a két mennyiségnek geometriai jelentése van. Tehát ez a két kifejezés eltolásra nézve invariáns jellegű. A $-\mathcal{H}$-t Sophie Germain féle a $\mathcal{K}$-t Gauss féle görbületnek nevezzük.–

A Gauss féle görbületet illetően egy igen fontos észrevételt tehetünk. Ha ugyanis felhasználjuk a Gauss féle relatiót, akkor kapjuk, hogy:

$$\mathcal{K} = \frac{\mathcal{D}\mathcal{D}'' - \mathcal{D}'^2}{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2} = \frac{1}{\mathcal{F}}\left[\frac{\partial}{\partial p}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial q}\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\right]$$

Tehát a $\mathcal{K}$ tisztán a Christoffel féle symbolumokkal és $\mathcal{F}$-el kifejezhető; ezek hajlitási invariánsok lévén, áll az a fontos tétel, hogy egy felület Gauss féle görbülete hajlitási invariáns. A Sophie Germain féle görbület már nem hajlitási invariáns, mert ennek kifejezésében szerepelnek $\mathcal{D}, \mathcal{D}', \mathcal{D}''$ s ezeket nem lehet az $\mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}$-vel kifejezni, (a $\mathcal{D}\mathcal{D}'' - \mathcal{D}'^2$ azonban kifejezhető, mint csupán az $\mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}$ függvénye).–

Térjünk most vissza arra a quadratikus egyenletre, a mely a k' és k''-t szolgáltatta:

$$(\mathcal{D}'\mathcal{G} - \mathcal{D}''\mathcal{F})k^2 + (\mathcal{D}\mathcal{G} - \mathcal{D}''\mathcal{E})k + \mathcal{D}\mathcal{F} - \mathcal{D}'\mathcal{E} = 0$$

Abból indúltunk ki, hogy, ha az érintő, a mely egy pont körül forog, teljes forgást végezve, a k visszatér eredeti értékéhez, vele együttal az $\mathcal{R}$ is visszatér; a Rolle tétel értelmében tehát az $\mathcal{R}$ szükségképen bír egy extremummal, a miből következik, hogy a felírt quadratikus egyenletnek legalább is egy valós gyöke van, de ha az egyik gyök valós, akkor már a másik is az. Következik, hogy legfeljebb két extremum van. De, ha egy függvény egy intervallum két végpontjában ugyanazt az értéket veszi fel s ezen intervallumon belül két extremuma van, akkor ezek közül az egyik szükségképen maximum, a másik minimum. A ϱ_1 és ϱ_2 mindenesetre maximális és minimális értéke az R-nek.-

Most nemcsak egy rögzitett pontot, hanem egy felület összes pontjait fogjuk tekintetbe venni. A $k = \frac{dq}{dp}$ sigy a:

$$(D'G - D''F)\left(\frac{dq}{dp}\right)^2 + (DG - D''E)\frac{dq}{dp} + DF - D'E = 0$$

egy differentiális egyenlet pl. a q-ra, mint a p függvényére. Ez a differentiális egyenlet elsőrendű, másodfokú; a differentiális egyenlet coefficiensei függvényei úgy a p-nek, mint a q-nak. Ez a differentiális egyenlet a q-t értelmezi, mint a p függvényét.-

Képzeljük ezt a quadratikus kifejezést felbontva lineáris tényezőire:

$$\left(\alpha \frac{dq}{dp} + \beta\right)\left(\gamma \frac{dq}{dp} + \delta\right) = 0$$

Ez a differentiális egyenlet, csak kétféleképen teljesülhet, vagy

1.) $$\alpha . \frac{dq}{dp} + \beta = 0$$

2.) $$\gamma . \frac{dq}{dp} + \delta = 0$$

E szerint a mi differentiális egyenletünk nem egy, hanem két differentiális egyenlet összetétele, melyek q számára két különböző függvényt értelmeznek. Egy ilyen elsőrendű differentiális egyenlet általános megoldása egy tetszésszerinti állandótól függ, lesz tehát:

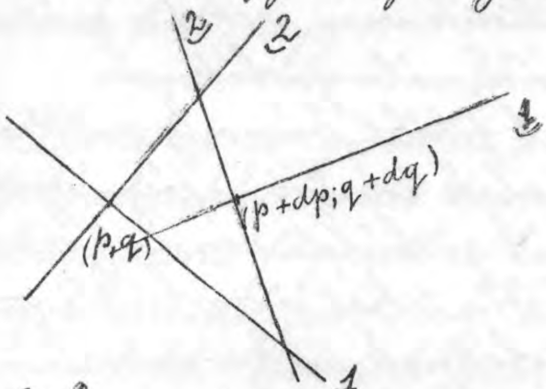
$$q = f(p, c)$$

és

$$q = g(p, c)$$

Úgy az első, mint a második egyenlet egy görbét értelmez a felületen, és pedig C minden értéke mellett más és más görbét, tehát tulajdonképen görbe sereget. Nevezzük az első egyenlet által értelmezett görbe sereget első, a második egyenlet által értelmezettet pedig második görbe seregnek.-

Nézzük, hogy milyen jelentéssel bírnak ezek.- Induljunk ki a felületnek bizonyos p, q coordinátás pontjából s húzzuk meg ebben a főgörbületi irányokat: 1, 2. Menjünk most egy végtelenül szomszédos ponthoz: $\left(\begin{matrix} p+dp, \\ q+dq \end{matrix}\right)$



s szerkesszük meg ehhez is a főgörbületi irányokat 1, 2, úgy, hogy 1. olyan jellegű görbülethez tartozzék, mint az előbbi 1. irány, a 2. szintén. Ilyen formán tovább haladva egy második, harmadik stb. szomszédos ponthoz, tulajdonképen azt tesszük, hogy a quadratikus egyenlet értelmében a felület minden pontjához megszerkesztem az egyik és a másik érintőt, a melyek egy-egy görbét fognak burkolni. Az a görbe, a melyet az 1. érintők burkolnak az 1, egyenletnek egy megoldása; az pedig a melyet a 2. érintők burkolnak a 2, egyenletnek szolgáltatja egy megoldását.-

Ezek a görbék azzal a tulajdonsággal bírnak, hogy érintőjük minden pontban az ezen ponthoz tartozó bizonyos főirány. Ezeket a görbéket nevezni fogjuk görbületi vonalaknak (lineae curvaturae). Ezek a görbületi vonalak ezzel a diff. egyenlettel vannak értelmezve:

$$(\mathcal{D}'\mathcal{G}-\mathcal{D}''\mathcal{F})\left(\frac{dq}{dp}\right)^2+(\mathcal{D}\mathcal{G}-\mathcal{D}''\mathcal{E})\frac{dq}{dp}+\mathcal{D}\mathcal{F}-\mathcal{D}'\mathcal{E}=0$$

A felület minden pontján át halad két görbületi vonal, melyek közül egyiknek a maximális, másiknak a minimális főirányok az érintői. Olyan tehát ez a két görbe sereg, mint a mi koordinata görbéink voltak. Közelfekvő az a gondolat, hogy mivel ezeknek a görbületi vonalaknak ilyen fontos geometriai jelentésük van, ezeket a görbületi vonalakat vezessük be koordinátagörbéknek. – Jegyezzük meg a következőket: A felület bármely pontjában egymást metsző görbületi vonalak érintői a főirányok a melyek merőlegesek egymásra. A görbületi vonalak rendszere tehát orthogonális rendszer. Ha tehát a görbületi vonalakat választjuk parameter görbéknek, akkor mivel orthogonális görbék, a priori mondhatom, hogy:

$$\mathcal{F} = 0$$

Ez azonban még nem elegendő, mert ez minden orthogonális rendszerben áll.–

Nézzük mi lesz a második feltétel?

Forduljunk ebből a célból a diff. egyenlethez, a mely megadja a feltételt arra, hogy a coordinata vonalak a görbületi vonalak legyenek:

$$(\mathcal{D}'\mathcal{G}-\mathcal{D}''\mathcal{F})dq^2+(\mathcal{D}\mathcal{G}-\mathcal{D}''\mathcal{E})dp\,dq+(\mathcal{D}\mathcal{F}-\mathcal{D}'\mathcal{E})dp^2=0$$

Nyilvánvaló, hogy a coordináta görbék akkor lesznek a görbületi vonalak, ha $p=c$ és $q=c$ képezik azt a két görbe sereget, a melyek ezen differentiális egyenletnek megoldását képezik. Hogy $q=c$ és $p=c$ megoldása legyen ezen differentiális egyenletnek, ahhoz kell, hogy:

$$\mathcal{D}'\mathcal{G}-\mathcal{D}\mathcal{F}=0$$

$$\mathcal{D}\mathcal{F}-\mathcal{D}'\mathcal{E}=0$$

legyen. Ámde $\mathcal{F}=0$ s így:

$$\mathcal{D}'\mathcal{G}=0\,,\quad \mathcal{D}'\mathcal{E}=0$$

Mivel $\mathcal{E}$ és $\mathcal{G}$ nem lehetnek egyidejüleg 0-ák, mert akkor a vonalelem identice 0 volna, tehát nem volna valós felületünk, kell, hogy:

$$\mathcal{D}'=0 \quad \text{legyen.-}$$

Ha tehát a görbületi vonalakat választjuk coordináta görbéknek, akkor a két fundamentál quadratikus formában hiányozni fognak a kettős szorzatok, pusztán a négyzetes tagok maradnak meg. Ezt tehát, mint szükséges feltételt ismertük fel. Kifogjuk most mutatni, hogy elegendő is.-

Tegyük fel ugyanis, hogy most teljesül ez a feltétel:

$$\mathcal{F}=0,\quad \mathcal{D}'=0$$

Nézzük, hogy mik lesznek a görbületi vonalak. A differentiális egyenlet most ez lesz:

$$(\mathcal{D}\mathcal{G}-\mathcal{D}''\mathcal{E})\,dp\,dq=0$$

Tegyük fel most egyelőre, hogy:

$$\mathcal{D}\mathcal{G}-\mathcal{D}''\mathcal{E}\neq 0$$

akkor ezen differentiál egyenlet általános megoldásai:

$$p=c$$
$$q=c$$

Tehát ebben az esetben a $p=c$, $q=c$ koordinátagörbék a görbületi vonalak.- Nehézség csak akkor volna, ha teljesülne, hogy:

$$\mathcal{D}\mathcal{G}-\mathcal{D}''\mathcal{E}=0$$

a mi azt mondja, hogy:

$$\mathcal{E}:\mathcal{G}=\mathcal{D}:\mathcal{D}''$$

vagy mert $\mathcal{F}$ és $\mathcal{D}'$ ugyis 0-k, hogy:

$$\mathcal{E} : \mathcal{F} : \mathcal{G} = \mathcal{D} : \mathcal{D}' : \mathcal{D}''$$

Ez a kifejezés a felület egy tetszésszerinti pontjában csak úgy lehet helyes, ha az a felületi pont umbilicus; identice pedig akkor, ha a felület minden pontja umbilicus pont. Az ilyen felületek esetében szó sem lehet görbületi vonalakról, mert hisz az umbilicus pontokat épen az jellemzi, hogy bennük nincs sem maximum, sem minimum.-

Ha tehát az umbilicus pontokat kizárjuk, akkor mondhatjuk, hogy:

$$\mathcal{F} = 0, \quad \mathcal{D}' = 0$$

a szükséges és elegendő feltétel arra, hogy a coordináta görbék a görbületi vonalak legyenek.-

Használjuk fel most ezt a coordináta rendszert egy igen nevezetes tétel bizonyítására.-

Megjegyzendő, hogy az itt következő vizsgálódások csak olyan felületekre érvényesek, a melyeknek nem minden pontja umbilicus pont.-

Irjuk fel a főgörbületek kifejezéseit:

$$\rho_1 = \frac{\mathcal{E} + \mathcal{G}k'^2}{\mathcal{D} + \mathcal{D}''k'^2}$$

$$\rho_2 = \frac{\mathcal{E} + \mathcal{G}k''^2}{\mathcal{D} + \mathcal{D}''k''^2}$$

Jelen esetben azonban a k' és k'' közül az egyik 0, a másik ∞. Legyen pl. most $k' = 0$ és $k'' = \infty$, akkor:

$$\rho_1 = \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{D}}$$

$$\rho_2 = \frac{\mathcal{G}}{\mathcal{D}''}$$

Ezek lesznek most már a főgörbületi értékek. Írjuk fel ezután tetszésszerinti normálmetszet görbületének a kifejezését:

$$\frac{1}{R}=\frac{\mathcal{D}dp^2+\mathcal{D}''dq^2}{\mathcal{E}dp^2+\mathcal{G}dq^2}$$

$$=\mathcal{D}\left(\frac{dp}{ds}\right)^2+\mathcal{D}''\left(\frac{dq}{ds}\right)^2=\frac{\mathcal{E}}{\rho_1}\left(\frac{dp}{ds}\right)^2+\frac{\mathcal{G}}{\rho_2}\left(\frac{dq}{ds}\right)^2$$

Ennek a képletnek most egy igen fontos geometriai interpretatióját fogjuk adni.-

Állítsuk fel e végből azt a kifejezést, a mely két, a felületen fekvő görbe hajlásszögének a kosinusát szolgáltatja. Mivel a mostani esetben $\mathcal{F}=0$, lesz:

$$\cos\vartheta=\mathcal{E}\cdot\frac{dp}{ds}\cdot\frac{dp}{ds'}+\mathcal{G}\frac{dq}{ds}\cdot\frac{dq}{ds'}$$

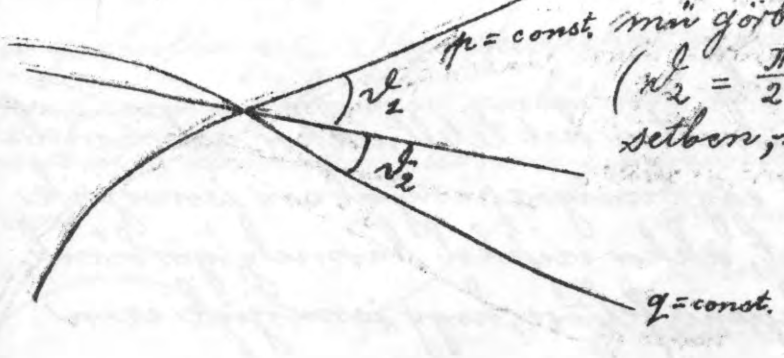
Ha ds és ds' a kérdéses görbék ívelemét jelölik.-

Vegyük most a ds' ívelemhez tartozó görbét, $p=$const.-nak, s képezzen ezzel a ds ívelemű görbe ϑ_1 szöget, akkor lesz: mivel:

$$ds'^2=\mathcal{G}.dq^2$$

$$\text{és:}\quad\frac{dq}{ds'}=\frac{1}{\sqrt{\mathcal{G}}}$$

$$\cos\vartheta_1=\mathcal{G}\frac{dq}{ds}\cdot\frac{1}{\sqrt{\mathcal{G}}}=\sqrt{\mathcal{G}}\cdot\frac{dq}{ds}$$



A $q=$const. görbével a ds ívelemű görbe ϑ_2 szöget képezzen, $\left(\vartheta_2=\frac{\pi}{2}-\vartheta_1\right)$, akkor ebben az esetben, mivel most:

$$ds'^2=\mathcal{E}dp^2$$

$$\frac{dp}{ds'}=\frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}}}$$

$$\cos\vartheta_2 = \mathcal{E}\cdot\frac{dp}{ds}\cdot\frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}}} = \sqrt{\mathcal{E}}\cdot\frac{dp}{ds}$$

$$\cos\vartheta_1 = \sqrt{\mathcal{G}}\cdot\frac{dq}{ds}$$

Ezeknek a cosinusoknak az előjelük nem határozott, a mi természetes is, mert minden ϑ_1 mellett a $\pi-\vartheta_1$-nek megfelelő előállítást is ez a kifejezés szolgáltatja. Ugyanez áll a ϑ_2-re is.–

Hogy itt következő relátiónk csinosabb legyen ϱ_1 és ϱ_2 kifejezését cseréljük fel, írva:

$$\varrho_1 = \frac{\mathcal{G}}{\mathcal{D}''}\ ;\quad \varrho_2 = \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{D}}$$

akkor:

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2\vartheta_2}{\varrho_2} + \frac{\cos^2\vartheta_1}{\varrho_1}$$

Ez a képlet most már teljesen geometriailag értelmezhető és bizonyos tekintetben analog a Meusnier féle tételhez. A míg ugyanis a Meusnier féle tétel egy tetszésszerinti ferde metszet görbületét állítja elő a hozzátartozó normálmetszet görbületének és a ferdemetszet simuló síkja, meg a felület normálisa által képzett szög cosinusának a szorzatával, addig a jelen kifejezés bármely normálmetszet görbületének előállítását adja kifejezve a főgörbületekkel s azon szögek cosinusaival, a mely alatt a normálmetszet simuló síkja a főgörbületi irányokhoz hajlik.–

Ez a tétel Eulertől ered.–

Ha most már összevetjük ezt a két tételt, akkor azt mondhatjuk, hogy, ha a felület egy bizonyos pontjában ismerjük a főgörbültségeket ϱ_1 és ϱ_2-t, akkor ezekkel bármely görbének a görbültségét kitudjuk fejezni, feltéve, hogy ismerjük ezen görbe simuló síkjának a hajlásszögét a felület normálisához s érintőjének hajlásszögeit a főgörbületi irányokhoz. Tehát a felületi görbék görbültségeinek ismeretéhez csak a két főgörbület ismerete szükséges; ezek pedig teljesen meg vannak határozva H és K által.-

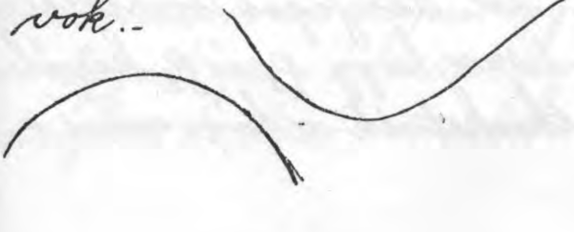
Az Euler féle tételnek még egy igen érdekes geometriai interpretátiót lehet adni. Emlékezzünk vissza ugyanis a következőre: A felületen fekvő görbe görbültségét egy bizonyos előjellel választottuk. Megállapodtunk tudniillik abban, hogy: $\frac{1}{R}$ számára az előállítást positiv értékével vettük. Mivel ezen előállításban a nevező mindig positiv, így az $\frac{1}{R}$ előjele lényegesen függ a számlálótól.-

Ezen megállapodás szerint a felületen fekvő görbék esetleg különböző előjelű görbültséggel bírnak.-

Megeshetik, hogy ez a szorzat:

$$\frac{1}{\rho_1\rho_2}=K$$

a felület valamely pontjában positiv, vagy negativ, vagy még 0 is lehet; positiv akkor lesz, ha ρ_1 és ρ_2 mindkettő egyenlő jelű.- ρ_1 a maximális, ρ_2 a minimális görbület legyen, vagy a hogy tetszik.- Ha a legnagyobb és legkisebb görbültségek positivok, akkor valamennyi metszetnek positiv a görbültsége.- Ilyenkor tehát a felületi görbék mind ugyanazon értelemben görbülnek, valamint akkor is, ha mind a kettő, a maximális, meg a minimális görbület negativok.-



Ha azonban a főgörbületek ellenkező előjelűek, akkor lesznek görbék, a melyek befelé és megint mások, a melyek kifelé görbülnek. Ebben az esetben ezen a helyen nyereg alakja lesz a felületnek: –

Ez akkor van, ha $K < 0$

Ha $K = 0$, akkor az egyik görbületi rádius szükségképen ∞ lesz s igy ilyenkor harmadrendü végtelen kicsinyektől eltekintve az egyik fönormálmetszet az érintövel lesz azonos. –

Foglalkozzunk most ezekkel az esetekkel részletesen. – Vegyük a Gauss féle görbületet positivnak. –

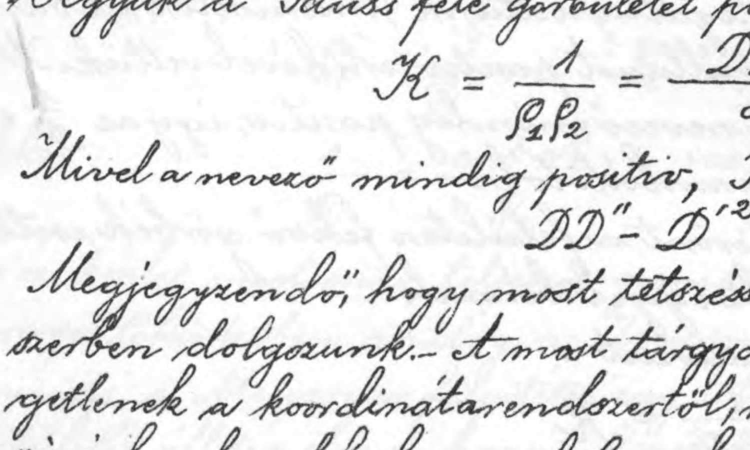
$$K = \frac{1}{\rho_1 \rho_2} = \frac{DD'' - D'^2}{EG - F^2}$$

Mivel a nevező mindig positiv, $K > 0$ csak akkor lehet, ha

$$DD'' - D'^2 > 0$$

Megjegyzendő, hogy most tetszésszerinti koordinátarendszerben dolgozunk. – A most tárgyaltak egyáltalában függetlenek a koordinátarendszertől, mert hiszen mind geometriai fogalmakkal van dolgunk. –

Szerkesszük meg most az érintő síkot s fogjuk fel ebben a fögörbületi irányokat, mint egy derékszögü koordinata rendszer tengelyeit. Vizsgáljuk ebben a coordinata rendszerben ezt a görbét:



$$\frac{\xi^2}{\rho_1} + \frac{\eta^2}{\rho_2} = 1$$

Ez egy kúpszeletet állít elő. Lényeges természetesen, hogy ρ_1 és ρ_2 közül egyik se legyen 0. Ez pl. bekövetkezhetnék a kúp csúcs –

pontjában. Az ilyen singularitásokat azonban egyelőre zárjuk ki.-

Jelen esetben, mivel ρ_1 és ρ_2 egyenlő előjelűek, a kúpszelet egy ellipsis lesz, a melynek tengelyei: $\sqrt{\rho_1}$ és $\sqrt{\rho_2}$, ha ρ_1 és ρ_2 positivok; ha ρ_1 és ρ_2 negativok volnának, akkor az absolut értéküket kellene venni.- Az t.i. csak felfogás dolga, hogy, ha mindkettő egyenlő előjelű, positivnak, vagy negativnak vesszük-e. Ha pl. mindkettő negativ volna, akkor megváltoztatjuk álláspontunkat. Az a lényeges, hogy a kettő együtt milyen egyező, vagy ellenkező előjelű-e? A mi esetünkben tehát mindenképen egy $\sqrt{\rho_1}$ és $\sqrt{\rho_2}$ tengelyű ellipsist képvisel felírt egyenletünk. Vegyünk most az ellipsis centrumából kiindulva egy tetszésszerinti rádius vectort, a mely tehát megint egy bizonyos érintő irány lesz, s jelöljük ennek az ellipsishez mért hosszát $\sqrt{\rho}$-val, akkor lesz:

$$\xi = \sqrt{\rho}\cdot\cos\vartheta_1$$
$$\eta = \sqrt{\rho}\cdot\cos\vartheta_2$$

$$\frac{\cos^2\vartheta_1}{\rho_1} + \frac{\cos^2\vartheta_2}{\rho_2} = \frac{1}{\rho}$$

A mi a baloldalon áll, az nem más, mint a felvett érintő irányhoz tartozó normálmetszet görbülete; $R = \sqrt{\rho}$.

Tehát épen úgy, hogy a főtengelyek négyzetei a fögörbületi rádiusok az ellipsis egy tetszésszerinti rádius vectorának a négyzete, a rádius vectorral meghatározott ezen érintő irányhoz tartozó normálmetszet görbületi rádiusát állítja elő. Ha tehát egy olyan pontban vizsgáljuk a felület görbültségi viszonyait, a melyben $K>0$, akkor a leírt módon szerkesztett ellipsis segélyével igen egyszerü módon tudjuk a felületen fekvő görbék görbültségi viszonyait evidenciába helyezni.- Ezt a görbét nevezni szokás Dupin féle indicatrixnak.-

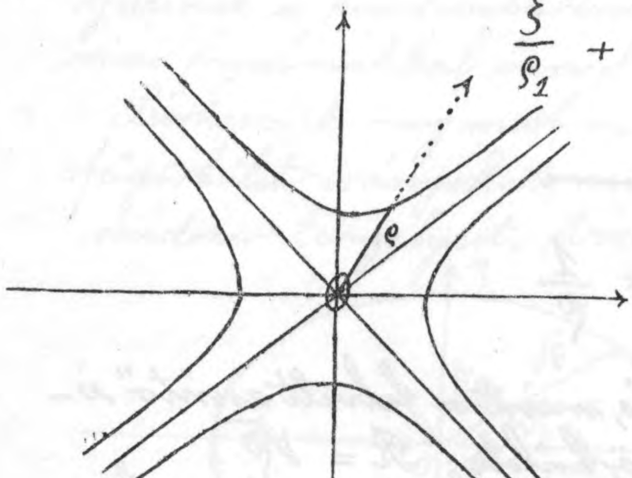
Megjegyzendő, hogy, ha a kérdéses felületi pont umbilicus, akkor $\rho_1=\rho_2$ lévén, az ellipsis átmegy egy $\sqrt{P}$ sugarú körbe, a hol: P a közös görbületi rádius.-

Foglalkozzunk most azzal az esettel, a mikor a két főgörbület ellenkező előjelü:

$$K=\frac{1}{\rho_1\rho_2}=\frac{\mathcal{D}\mathcal{D}''-\mathcal{D}'^2}{\mathcal{E}\mathcal{G}-\mathcal{F}^2}<0$$

Az érintő síkban most is a két főgörbületi irányt választjuk koordináta tengelyeknek s megint vizsgáljuk a:

$$\frac{\xi^2}{\rho_1}+\frac{\eta^2}{\rho_2}=1$$



görbét, a mely jelen esetben két hyperbolát állít elő. Nevezetesen:

$$\frac{\xi^2}{-|\rho_1|}+\frac{\eta^2}{|\rho_2|}=1$$

és:

$$\frac{\xi^2}{|\rho_1|}+\frac{\eta^2}{-|\rho_2|}=1$$

Ennek a két hyperbolának közös assymtotái vannak. Az ilyen hyperbolákat coniugáltaknak mondjuk.-

Ebben az esetben egy tetszésszerinti irányban húzott rádius vector ismét előállítja a megfelelő normálmetszethez tartozó görbületet. Ezt is Dupin féle indicatrixnak nevezzük. Nevezetes most, hogy míg az elliptikus pont esetében (nevezzük ugyanis az olyan pontokat, a melyekben a Dupin féle indicatrix ellipsis: röviden elliptikus pontoknak, míg az olyanokat pedig, melyekben a Dupin indicatrix hyperbola: hyperbolikus pontoknak) az assymptoták képzetesek, hyperbolikus pontok esetében valósak. - Mi ezen assymptotáknak a jelentésük? Az assymptotáknak megfelelő rádius vector nem találja a görbét, tehát ez a rádius vector végtelen nagy lesz, tehát egyszersmind a megfelelő normál metszet görbületi rádiusa is $\mathcal{R} = \infty$

$$\mathcal{R} = \frac{\mathcal{E}dp^2 + 2\mathcal{F}dpdq + \mathcal{G}dq^2}{\mathcal{D}dp^2 + 2\mathcal{D}'dpdq + \mathcal{D}''dq^2}$$

Ez csak úgy lehet ∞, ha a nevező eltűnik. Az assymptoták irányát tehát a következő differentiális relácio szolgáltatja:

$$\mathcal{D}.dp^2 + 2\mathcal{F}.dp.dq + \mathcal{D}''dq^2 = 0$$

Ha felfogjuk pl. a q-t, mint a p függvényét, akkor kapunk egy elsőrendű, másodfokú differentiális egyenletet. Ennek a differentiális egyenletnek csak akkor lesznek valós megoldásai, hogy, ha:

$$\mathcal{D}'^2 - \mathcal{D}\mathcal{D}'' > 0$$

a mi talál jelen feltételünkkel. Tehát csak olyan pontokban bír ezen egyenlet valós gyökökkel, a melyekben a Gauss féle görbület negatív.

Tekintsünk el most olyan pontoktól, a melyekben a görbültség 0. Ha a felületnek egy olyan részletét veszük a melyben a $K \neq 0$, akkor ez a K folytonos függvénye lesz a p és q-nak. Ha már most a K egy pontban positiv, akkor e-zen pont körül kijelölhetünk egy olyan felület részletet, a melyben a K mindenütt positiv. Ugyanez áll a $K < 0$ pontokra is. De, ha a felületen vannak olyan pontok, a melyekben $K > 0$ és vannak olyanok, a melyekben $K < 0$, akkor szükségképen a K - mint folytonos függvény - csak ugy mehet a + értékből a - értékbe, ha közben a 0 értéken is átmegy, a miből következik, hogy azon pontokat, a melyekben: $K > 0$, vagyis a melyeknek Dupin féle indicatrixa ellipsis, azoktól, a melyekben $K < 0$, vagyis, a melyeknek Dupin féle indicatrixuk hyperbola, a $K = 0$ egyenletnek megfelelő pontok, tehát általánosságban egy görbe választja el.- Megeshetik, hogy a $K = 0$ egyenletnek megfelelő görbék két dimensionális felületrészt töltenek be, ez azonban csak akkor fordulhat elő, ha $K \equiv 0$, pl. a sik.-

Képzeljük, hogy egy olyan felületrészszel van dolgunk, a melyben $K > 0$, vagyis a melyen belül a Dupin féle indicatrix ellipsis. Menjünk rendre a szomszédos pontokhoz s mindenikhez rajzoljuk meg a Dupin féle ellipsiseket, akkor, ha ezeknek a tengelyeit veszük, ezek burkolni fogják a görbületi vonalakat. Ugyanez áll negativ K esetében a Dupin féle hyperbola tengelyeiről. A Dupin féle indicatrixok tengelyei a görbületi vonalakat burkolják. Közelfekvő most az a gondolat, hogy keressük a hyperbolák asymtotáinak burkoltját, úgynevezett envelopját. Ezek nyilvánvalóan azok a görbék lesznek, a melyek eleget tesznek ezen differentiális egyenletnek:

$$D + 2D'\frac{dq}{dp} + D''\left(\frac{dq}{dp}\right)^2 = 0$$

Ezeket assymptotikus görbéknek nevezzük. Ezek a görbék csak olyan pontokban valósak, a melyeknek a Gauss féle görbülete negativ. Pl. a gömbön nincsenek valós assymptotikus vonalak, mert a gömb Gauss féle görbültsége mindenütt positiv és hozzátehetjük, hogy állandó, t. i., ha a gömb rádiusa P, akkor a Gauss féle görbület: $\frac{1}{P^2}$. Azt már az előbbiekből tudjuk, hogy a gömbön görbületi vonalak nincsenek. Ha ellenben egy forgási hyperboloist képzelünk, akkor ennek lesznek assymptotikus vonalai, mert vannak olyan pontjai, a melyekben: $K < 0$.

Az assymptotikus vonalak differentiális egyenlete:

$$D + 2D'\frac{dq}{dp} + D''\left(\frac{dq}{dp}\right)^2 = 0$$

Ezek az assymptotikus görbék olyan felületen, a melynek mindenütt negativ a görbültsége, szintén választhatók paraméter görbék gyanánt. - Nyilvánvaló, hogy ezek a paraméter görbék akkor és csak akkor lesznek az assymptotikus görbék, ha p = const. és q = const. a differentiális egyenletnek megoldásai; ez nyilván megköveteli, hogy:

$$D'' = 0 \quad \text{és} \quad D = 0$$

legyenek. Ez nemcsak szükséges, hanem, mint közvetlenül látszik elégséges feltétel is. -

A felületen van tehát most két görbe seregünk: a görbületi vonalak és az assymptotikus vonalak. Most közelfekvő volna vizsgálni azokat a görbéket, a melyek ennek az egyenletnek tesznek eleget:

$$\mathcal{E}dp^2 + 2\mathcal{F}dp.dq + \mathcal{G}dq^2 = 0$$

Ezek a görbék való felületen sohasem léteznek, mert ez a forma egy definita forma. Azok a görbék, a melyek ezen egyenletnek eleget tesznek úgy értelmezhetők, hogy ívelemük 0. Ezeket a görbéket minimális görbéknek is nevezzük. A valós felületen lévő minimális görbék tehát mindig képzetesek, de azért néha ezeket is választjuk paraméter görbéknek. A minimális görbék akkor lesznek parameter görbék, ha:

$$\mathcal{E} = 0, \quad \mathcal{G} = 0$$

Ezzel teljes áttekintést nyertünk a felület egy pontjában egy pontjában lévő görbültségi viszonyokról. Az eddigi számítások egészen simán mentek bármely coordinata rendszerben. Ha azonban mélyebb betekintést akarunk nyerni a felület bizonyos pontja környezetében lévő új viszonyokról, akkor már az általános coordinata-rendszerrel nem boldogulunk, úgy, hogy azon vizsgálatok szerint, a milyeneket végezünk, más és más coordinatarendszert kell bevezetnünk a célszerűségnek megfelelően. Úgy, hogy mielőtt tovább mennénk a koordinata transformatióról kell egy pár szót szólnunk.-

Koordináta transformátió.-

Ez a kis fejezet tisztán algebrai jellegű lesz. Az új változók bevezetése abban áll, hogy p és q helyett új mennyiségeket vezetünk be olyanformán, hogy:

$$p = f(p_1, q_1) \; ; \quad q = g(p_1, q_1)$$

Úgy kell képzelni a dolgot, hogy a Descartes féle coordináták: x, y, z-t nem bolygatjuk, csak a parametereket p és q helyettesitjük ujakkal. Természetesen szükséges, hogy f és g függetlenek legyenek egymástól, hogy viszont a p_1 és q_1-et is kifejezhessük a p és q-val. Ehhez szükséges, hogy a functionális determináns ne legyen 0.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial p_1} & \frac{\partial f}{\partial q_1} \\ \frac{\partial g}{\partial p_1} & \frac{\partial g}{\partial q_1} \end{vmatrix} \neq 0$$

Vezessük be ezeket az uj változókat az ivelem kifejezésébe. E végből alkossuk meg előbb ezeket a differentiáléKat:

$$dp = \frac{\partial f}{\partial p_1} dp_1 + \frac{\partial f}{\partial q_1} dq_1$$

$$dq = \frac{\partial g}{\partial p_1} \cdot dp_1 + \frac{\partial g}{\partial q_1} \cdot dq_1$$

A dp és dq ki vannak fejezve, mint a dp_1 és dq_1 homogén lineáris függvényei. Ha tehát ezeket bevezetem az ivelem kifejezésébe, akkor ez nem lesz egyébb, mint ezen quadratikus formának a transformatiója egy lineáris substitutió segélyével. – Ezt a formát is transformáljuk:

$$D dp^2 + 2D' dp dq + D'' dq^2$$

Ezt a formát is egy lineáris substitutiónak vetjük alá. Az algebrából ismeretes, hogy ha két ilyen quadratikus formát lineáris substitutiónak vetünk alá, akkor vannak, bizonyos a koefficiensekből alkotott kifejezések, a melyek nem változnak. A transformátió után a két forma ismét quadratikus formába megy át, igy:

$$\mathcal{E}dp^2 + 2\mathcal{F}.dpdq + \mathcal{G}dq^2 = \mathcal{E}_1 dp_1^2 + \ldots\ldots$$

$$\mathcal{D}dp^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots = \mathcal{D}_1 dp_1^2 + \ldots\ldots$$

Egyöntetűség kedvéért használjuk ezeket a jelöléseket:

$$\mathcal{E} = a_{11},\ \mathcal{F} = a_{12},\ \mathcal{G} = a_{22};\ \mathcal{E}_1 = \alpha_{11},\ \mathcal{F}_1 = \alpha_{12},\ \mathcal{G}_1 = \alpha_{22}$$

$$\mathcal{D} = b_{11},\ \mathcal{D}' = b_{12},\ \mathcal{D}'' = b_{22};\ \mathcal{D}_1 = \beta_{11},\ \mathcal{D}_1' = \beta_{12},\ \mathcal{D}_1'' = \beta_{22}$$

$$dp = x\ ;\ dq = y\ ;\ dp_1 = \xi,\ dq_1 = \eta$$

$$\frac{\partial f}{\partial p_1} = \lambda_{11}\ ;\ \frac{\partial f}{\partial q_1} = \lambda_{12}$$

$$\frac{\partial g}{\partial p_1} = \lambda_{21}\ ;\ \frac{\partial g}{\partial q_1} = \lambda_{22}$$

E jelölések alkalmazásával ezt a két quadratikus formát kapjuk:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}\,xy + a_{22}y^2$$

és:

$$b_{11}x^2 + 2b_{11}\,xy + b_{22}y^2$$

Transformáljuk most ezeket az által, hogy:

$$x = \lambda_{11}\xi + \lambda_{12}\eta$$

$$y = \lambda_{21}\xi + \lambda_{22}\eta$$

tesszük, a hol a $\lambda_{11}, \lambda_{12}\ldots$ csak azon megszorításnak vannak alávetve, hogy:

$$\begin{vmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

legyen. Ezen két transformátió alkalmazása által, a következő két quadratikus forma áll elő:

$$\alpha_{11}\xi^2 + 2\alpha_{12}\xi\eta + \alpha_{22}\eta^2$$

és

$$\beta_{11}\xi^2 + 2\beta_{12}\xi\eta + \beta_{22}\eta^2$$

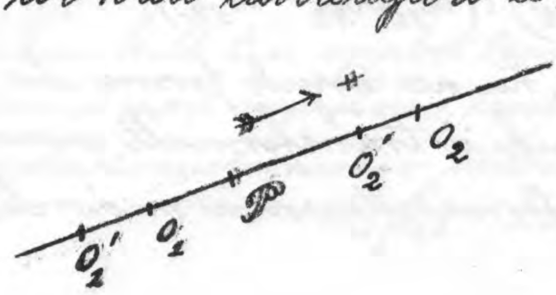
Most a két eredeti forma koefficienseiből olyan kifejezéseket akarunk megalkotni, a melyek a kijelölt transformátióra nézve invariánsok, vagyis:

$$J(a_{11}, a_{12}, a_{22}; b_{11}, b_{12}, b_{22}) = J(\alpha_{11} \cdots \alpha_{22}; \beta_{11} \cdots \beta_{22})$$

Most az ily átalakítás geometriai jelentésével akarunk foglalkozni.-

Hogy, ha van egy quadratikus formánk s azt 0-vá teszszük, akkor kapunk két értéket. Két ilyen értéket egy egyenesen fekvő ponttal lehet képviselni. Tudniillik vegyünk ezen az egyenesen két rögzitett pontot O_1 és O_2, már most az egyenes bármely pontját meghatározza ennek a két rögzitett ponttól számitott távolsága, illetve e távolságok hányadosa; úgy kell venni, hogy az egyenesen egy irányt határozunk meg, a melyben a távolságot positivnak, az ellenkező irányban pedig negativnak számitjuk.-

Most már a quadratikus forma által adott : $\frac{x}{y}$ érték meghatároz egy olyan pontot, a melynek mondjuk az O_1-től való távolsága x és az O_2-től való távolsága y, vagy homogén koordinatákban: (x, y) jelöli meg a pontot.-



Természetesen beszélünk nemcsak valós, hanem képzetes

pontról is az egyenesen, ha $\frac{x}{y}$ képzetes.-
A transformátió most abban áll, hogy az O_1, O_2 pontok helyett O_1' és O_2' rögzített pontokat vezetünk be. Ha már most a P coordinátáit ξ, η-val jelöljük, akkor az x, y, a ξ, η-val épen a kijelölt egyenletekkel van összekapcsolva.-
Ilyen módon mindenik quadratikus forma két pontot fog képviselni ezen az egyenesen, t. i. azt a két pontot, a melyek azon értékpárokkal adódnak, a melyekre nézve az illető quadratikus forma eltünik.- Ha már most invariánsokat keresek, akkor tulajdonképen olyan kifejezéseket keresek, a melyeknek geometriai jelentésük van. Pl., ha az a két pont, a mely az első formával van képviselve (x_1, y_1) és (x_2, y_2) összeesik, akkor ez nyilvánvalóan egy geometriai tény, a melynek független kell lenni a koordináták választásától. Ez a két pont akkor esik össze, ha

$$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$$

Mivel ez geometriai tény, következik, hogy ennek a coordináta transformátió után is fenn kell állani, más szóval, ha a pontokat O_1' és O_2'-re vonatkoztatjuk, akkor is össze kell esniök, a mi csak úgy lehetséges, ha:

$$\alpha_{12}^2 - \alpha_{11}\alpha_{22} = 0$$

Ez tényleg be is következik, és pedig azon identitásnál fogva, a mely ezen két kifejezés között fennáll: t. i.:

$$\alpha_{11}\alpha_{12} - \alpha_{12}^2 = (\lambda_{11}\lambda_{22} - \lambda_{12}\lambda_{21})^2 \cdot (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)$$

a miből közvetlenül látszik, hogy, ha az egyik forma discriminánsa eltünik, akkor eltünik a transformált quadratikus formáé is. Ugyanez áll természetesen a második formára is:

$$\beta_{11}\beta_{22}-\beta_{12}^2=(\kappa_{11}\cdot\kappa_{22}-\kappa_{12}\cdot\kappa_{21})^2\cdot(b_{11}\cdot b_{22}-b_{12}^2)$$

Az ilyen kifejezésekről, a melyek még nem absolut invariánsok, hanem szorzódnak még a substitutió vala-mely hatványával, azt lehetne mondani, hogy relatív invariánsok.- Ha most már a két formára nézve egy absolut invariánst akarunk megalkotni, akkor vesszük a relatív invariánsok hányadosát:

$$\frac{b_{11}b_{22}-b_{12}^2}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}=\frac{\beta_{11}\beta_{22}-\beta_{12}^2}{\alpha_{11}\cdot\alpha_{22}-\alpha_{12}^2}$$

A mi esetünkben ez a hányados nem egyéb, mint a görbület Gauss féle mértéke: K, a mely tehát, mint absolút invariáns jelentkezik a felület fundamental formára nézve s így a K egy tetszésszerinti transformátió mellett algebrai alakjára nézve is változatlan marad. Még másképen is kapunk egy ilyen absolut invariánst t. i. van nekünk két quadratikus formánk, vagyis az egyenesen négy pontunk; hogy ha ez a négy pont harmonikus fekvésű, akkor ez szintén geometriai tény, a melynek a transformált koordinátáik mellett is fenn kell állania.

Ha a négy pont harmonikus helyzetű, akkor:

$$a_{11}b_{22}-2a_{12}b_{12}+a_{22}b_{11}=0$$

Nem kell t. i. egyebet tenni, mint megalkotni a kettős viszonyt s ezt egyenlővé tenni: -1 el.- Ez fennáll a koordináta transformátió után is, tehát:

$$\alpha_{11}\beta_{22}-2\alpha_{12}\beta_{12}-\alpha_{22}\beta_{11}=0$$

Ez megint egy identitásban nyer kifejezést, t. i.:

$$\alpha_{11}\beta_{22}-2\alpha_{12}\beta_{12}+\alpha_{22}\beta_{11}=(\lambda_{11}\cdot\lambda_{22}-\lambda_{12}\lambda_{21})^2\cdot(a_{11}b_{22}-2a_{12}b_{12}+a_{22}b_{11})$$

~~Ez egy úgynevezett~~ simultán invariánsa két quadratikus formának, a mely, ha eltűnik, a négy pont harmonicus fekvésű.-

Ebből tehát megint megtudok alkotni egy absolut invariánst:

$$\frac{a_{11}b_{22}-2a_{12}b_{12}+a_{22}b_{11}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}=\frac{\alpha_{11}\beta_{22}-2\alpha_{12}\beta_{12}+\alpha_{22}\beta_{11}}{\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}^2}$$

A mi esetünkben ez a kifejezés az ugynevezett: Sophie-Germain féle görbület: H.-

Ki lehet mutatni, hogy csak ez a két, egymástól független absolut invariáns létezik. Természetes, hogy ezeknek akármilyen kombinációja invariáns lesz.-

Tehát a H és K algebrailag felfogva azzal a jelentéssel bírnak, hogy a két fundamentál quadratikus formának simultán és absolut invariánsai vagy más szóval, ha új felületi koordinatákat vezetünk be, a mi által a differentiálékat lineáris substitutióknak vetjük alá, ezek a mennyiségek nemcsak, hogy értéküket nem változtatják, hanem még az alakjukat is megtartják.-

A mi még a K -t illeti, arról kimutatták azt is, hogy hajlítási invariáns, vagyis csak az E, F, G és ezek deriváltjainak a függvénye, a mi azt jelenti, hogy, ha veszem ezt a kifejezést:

$$ds^2=Edp^2+2Fdpdq+Gdq^2$$

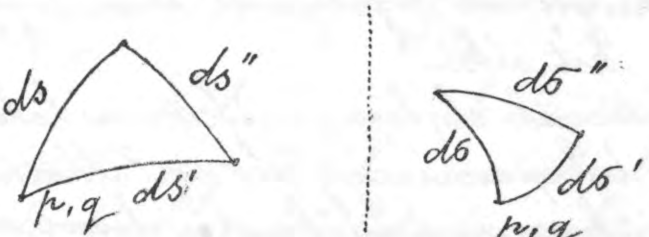
akkor mindazokra a felületekre nézve, a melyeknek ívelemét ez a kifejezés szolgáltatja (ilyen pedig végtelen sok van, t.i. mindazok, a melyek egymásból hajlítással keletkeznek,) a Gauss féle görbület ugyanaz. Közelfekvő most az a kérdés, hogy mi lesz akkor, ha két olyan felületünk van, a melyeknek ívelemeik nem identikusak ugyan egymással, de csak egy bizonyos faktorban különböznek:

$$ds^2 = \Lambda^2 \cdot d\sigma^2$$

a hol a Λ^2 a p és q akármilyen függvénye lehet.

A felületek leképezése.-

Nézzük, hogy a fenti kifejezés milyen vonatkozást jelent a két felület közt.- Vegyük az egyik felületnek egy bizonyos p, q pontját s menjünk ebből egy végtelen szomszédos ponthoz; a másik felületen a korrespondeáló p, q pontból a korrespondeáló szomszédos ponthoz menjünk, akkor kapunk egy bizonyos: ds-t és $d\sigma$-t, a melyekre nézve:



$$\frac{ds}{d\sigma} = \Lambda(p, q)$$

Tehát ez a hányados csakis a kiindulási pont koordinátáitól függ. Ha most egy más görbe mentén megyünk akkor is áll, hogy:

$$\frac{ds'}{d\sigma'} = \Lambda(p, q)$$

A két egyenletből kapjuk, hogy:

$$ds : ds' = d\sigma : d\sigma'$$

Ha most már ds'', illetve $d\sigma''$-vel a háromszögeket bezárjuk, akkor:

$$ds : ds' : ds'' = d\sigma : d\sigma' : d\sigma''$$

Ezeket a háromszögeket, mint síkháromszögeket lehet felfogni, a melyek hasonlók egymáshoz, tehát a megfelelő szögeik egyenlők.- A vonatkozás a két felület között tehát konformis, a mennyiben végtelen kis ábrák hasonlók a két felületen s a megfelelő szögek egyenlők.- (Hajlításnál a végtelen kis ábrák congruensek). Úgy mondhatjuk, hogy ez a leképezés a legkisebb részekben hasonló.-

Kérdés most már, hogy lehet e két felületet úgy vonatkoztatni egymásra, hogy a leképezés konformis legyen? A függvénytan elemeiből ismeretes, hogy két sík egymásra komplex változók függvényei segélyével konformisan leképezhető." Gauss kimutatta, hogy két tetszésszerinti felület komplex változók függvényeinek segélyével épen úgy leképezhető" egymásra, mint két sík.-

Egyelőre azt a kérdést intézzük el, hogy mikép lehet egy tetszésszerinti felületet leképezni egy síkra? Most a felületet annyiban ismerjük, a mennyiben ívelemе meg van adva; tehát tulajdonképen végtelen sok felületet tekintünk, de a melyek egymásból hajlítással keletkeznek. T. i. a jelen vizsgálatok szempontjából az egymásból hajlítással származó felületeket nem tekintjük különbözőknek, épen úgy mint geometriai vizsgálatoknál az eltolással származókat.-

Képzeljük az ívelem kifejezését lineáris tényezőire felbontva:

$$ds^2=\left[\sqrt{E}\,dp+(F+i\sqrt{EG-F^2})\frac{dq}{\sqrt{E}}\right]\cdot\left[\sqrt{E}\,dp+(F-i\sqrt{EG-F^2})\frac{dq}{\sqrt{E}}\right]$$

Ez a két tényező képzetes és pedig egymással conjugált képzetes. Mind a kettő ilyen alakú:

$$M\,dp+N\,dq$$

A két tényező egymásból az által keletkezik, hogy az N-ben $+i$ helyett $-i$-t teszünk; épen ezért elégséges csak az egyik tényezőt vizsgálni.-

Egy ilyen kifejezésről be fogjuk bizonyítni, hogy, ha az nem total differentiale, akkor egy μ factorral való szorzás által azzá tehetjük; μ függvénye a p és q-nak. Ugyanis ahhoz, hogy:

$$\mu M\,dp+\mu N\,dq=d\Phi(p,q)=du$$

legyen, szükséges, hogy:

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial q}=\frac{\partial(\mu N)}{\partial p}$$

Ennek a μ függvénynek az existentiája a partiális differentiális egyenletek elméletével biztosítva van. Ezt a μ-t Euler féle multiplikátornak nevezzük. Ránk nézve azonban fontos tudni, hogy hány ilyen μ van és milyen az összefüggés közöttük. Ha:

$$\mu(M\,dp+N\,dq)=d\,\Phi(p,q)=du$$

$$\mu_1(M\,dp+N\,dq)=d\,\Phi'(p,q)=dv$$

$$\frac{\mu}{\mu_1}=\frac{du}{dv}$$

Nyilvánvaló, hogy a $du=0$ lesz, ha $dv=0$ és viszont, más szóval, ha $u = \text{const.}$, akkor $v = \text{const.}$. Ez a függvény értelmezése szerint azt mondja, hogy v függvénye az u-nak:

$$v = f(u)$$

Irhatjuk tehát:

$$\frac{\mu}{\mu_1} = f'(u) = f'(\Phi(p,q))$$

$$\mu_1 = f'(\Phi(p,q))$$

Ha tehát a μ-t megszorozzuk a $\Phi(p,q)$-nak egytetszésszerinti függvényével, akkor megkapjuk a μ_1 multiplikátort. Nyilvánvaló, hogy ennek a fordítottja is áll, vagyis ha μ egy multiplicator s ezt megszorozzuk $g(\Phi(p,q))$-val, akkor:

$$\mu \cdot g(\Phi(p,q))$$

megint multiplicátor lesz. Ugyanis:

$$\mu \cdot g(\Phi(p,q))(M\,dp + N\,dq) = g(\Phi)\,d\Phi$$

Vegyük most:

$$\int g(\Phi)\,d\Phi = \mathcal{G}(\Phi)$$

kifejezést, ez egy jól meghatározott függvénye lesz a Φ-nek, s igy:

$$g(\Phi)\,d\Phi = d\,\mathcal{G}(\Phi)$$

irhatjuk. Ezzel kimutattuk, hogy, ha μ egy multiplicator, a melylyel való szorzás által vizsgált kifejezésünk $d\Phi$-be megy át, akkor minden más multiplicátor: $\mu g(\Phi)$ alakban állitható elő és fordítva, ha g tetszésszerinti függvénye a Φ-nek, ez a szorzat mindig multiplicátor lesz, a mi összhangzatban van azzal a ténnyel, hogy:

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial p} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial q}$$

általános megoldása egy tetszésszerinti függvénytől függ, más szóval, ha μ egy megoldása ennek a differentiális egyenletnek, akkor: $\mu . g(\Phi)$ is az.-

Térjünk vissza most arra a speciális lineáris formára, a melyet az ivelem felbontásából kaptunk:-

$$\sqrt{E}.dp + (F + i\sqrt{EG - F^2})\frac{dq}{\sqrt{E}}$$

a $\sqrt{\ }$ itt kétes előjellel bír, úgy, hogy ebben a formában mind a két tényező képviselve van.-

Ha μ multiplicator, akkor általánosan szólva ez is komplex lesz, azaz:

$$\mu = m + ni$$

Félreértések elkerülése végett itt megjegyezzük, hogy a dolgot nem lehet úgy fogni fel, hogy ezt a multiplicatort mindig meg lehet találni. Ennek a μ-nek a meghatározása általánosan szólva igen nehéz feladat, a mely elemi módszerek segélyével ismeretes függvényekkel nem oldható meg.- Kimondott tételünk csak annyit mond, hogy a μ existál. Hogy ez tényleg így van, azt azzal is illustrálhatjuk, hogy, ha a multiplikátort valami módon meghatároztuk, akkor már ez a differentiális egyenlet:

$$M dp + N dq = 0$$

integrálva van, mert akkor írhatom, hogy:

$$d\Phi(p,q) = 0\ , \quad \Phi(p,q) = \text{const.}$$

Tehát a multiplicátor felkeresése nem egyéb, mint egy ilyen differentiális egyenlet integrálása, a mi általánosan szólva igen nehéz feladat.-

Képzeljük, hogy ismerünk egy ilyen multiplicátort, akkor:

$$(m+n.i)\left(\sqrt{\mathcal{E}}.dp+(\mathcal{F}+i\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}-\mathcal{F}^2})\frac{dq}{\sqrt{\mathcal{E}}}\right)=d(u+v.i)$$

Ha most ebbe a kifejezésbe $+i$ helyett $-i$-t teszek, akkor:

$$(m-n.i)\left(\sqrt{\mathcal{E}}dp+(\mathcal{F}-i\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}-\mathcal{F}^2})\frac{dq}{\sqrt{\mathcal{E}}}\right)=d(u-v.i)$$

Ha most ezeket egymással összeszorozzuk, akkor:

$$(m^2+n^2)(\mathcal{E}dp^2+2\mathcal{F}dpdq+\mathcal{G}dq^2)=du^2+dv^2$$

Ha tudunk tehát egy multiplikátort találni, akkor feltudunk állítni olyan u és v függvényeket:

$$u=u(p,q),\quad v=v(p,q)$$

a melyekkel az ivelem ilyen módon fejezhető ki:

$$(m^2+n^2)ds^2=du^2+dv^2$$

$$ds^2=\frac{1}{m^2+n^2}\cdot(du^2+dv^2)$$

Az u és v-t interpretálhatjuk, mint sikbeli derékszögű coordinátákat, t. i., ha ezt megtesszük, akkor:

$$du^2+dv^2=d\sigma^2$$

ez lesz egy sikbeli görbe iveleme.-

A felület és a sik ivelemei között ez a viszony:

$$ds=\frac{1}{\sqrt{m^2+n^2}}\cdot d\sigma$$

Tehát most a felületet, a melynek iveleme ds, ezen két függvény segélyével leképeztem egy sikra; t. i. a felület p, q koordinatás pontja megfelel a sik u, v coordinatás pontjának. Ez a leképezés konformis, tehát a szögeket konserválja.-

Eredményképen tehát kimondhatjuk, hogy minden tetszés-szerinti felületrészt (t. i. csak olyan felületekről lehet szó, a melyeknek nincs singuláris pontjuk, mert csak az i-lyenekre érvényesek a végzett számítások,), a mely nem bír singuláris pontokkal, conformisan le lehet képezni egy sík részre. Ez a leképezés egy integrációt fog követelni, nevezetesen ennek az Euler féle multiplicátornak a kiszámitását.-

Az eszközölt számitás révén, az ivelem ebben az alakban van előállitva:

$$ds^2 = \frac{1}{m^2+n^2}(du^2+dv^2)$$

Az u és v-t, mint felületbeli coordinátákat foghatjuk fel. Ebben az előállitásban:

$$\mathcal{E} = \mathcal{G} = \frac{1}{m^2+n^2}\,, \quad \mathcal{F} = 0$$

vagyis a két szélső coefficiens egyenlő egymással, s az: $\mathcal{F} = 0$, a mi azt mondja, hogy az u = const., v = const. coordináták orthogonálisak, a mit a síkra való conformis leképezésből már előre lehetett látni.- Az ilyen coordinátákat igen gyakran alkalmazzák a felületek vizsgálatában; nevezzük ezeket: isothermikus coordinátáknak.- Az isothermikus coordináták tehát az által vannak jellemezve, hogy:

$$\mathcal{E} = \mathcal{G}; \quad \text{és} \quad \mathcal{F} = 0$$

vagyis a felület conformis leképezését szolgáltatják a síkra.-

Ezeket az isothermikus coordinátákat valamivel általánosabb coordináták előállitására használhatjuk fel.-

$$\frac{\partial(u+v.i)}{\partial p} = (m+ni)\sqrt{\mathcal{E}}$$

$$\frac{\partial(u+v.i)}{\partial q} = (m+n.i)\frac{\mathcal{F}+i(\mathcal{E}\mathcal{G}-\mathcal{F}^2)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\mathcal{E}}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial p} = m.\sqrt{\mathcal{E}}$$

$$\frac{\partial v}{\partial p} = n.\sqrt{\mathcal{E}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial q} = \frac{m\mathcal{F}}{\sqrt{\mathcal{E}}} - n\frac{\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}-\mathcal{F}^2}}{\sqrt{\mathcal{E}}}$$

$$\frac{\partial v}{\partial q} = m.\frac{\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}-\mathcal{F}^2}}{\sqrt{\mathcal{E}}} + n\frac{\mathcal{F}}{\sqrt{\mathcal{E}}}$$

A $\sqrt{\mathcal{E}}$ előjelét fixáljuk s az egész számítás folyamán megtartjuk ezt a rögzitett előjelt.-

Most már a következő eljárást lehet követni. A $\frac{\partial u}{\partial q}$ és $\frac{\partial v}{\partial q}$ kifejezéséből kieliminiáljuk az m és n-t, s akkor lesz:

$$\frac{\partial u}{\partial q} = \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{E}}.\frac{\partial u}{\partial p} - \frac{\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}-\mathcal{F}^2}}{\mathcal{E}}.\frac{\partial v}{\partial p}$$

$$\frac{\partial v}{\partial q} = \frac{\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}-\mathcal{F}^2}}{\mathcal{E}}.\frac{\partial u}{\partial p} + \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{E}}.\frac{\partial v}{\partial p}$$

Tehát az u és v mennyiségek ilyen partiális differentiális egyenleteknek tesznek eleget.-

Természetes, hogy épen igy kilehetne számitani ezen egyenletekből a: $\frac{\partial u}{\partial p}$ és $\frac{\partial v}{\partial p}$-t.-

Fejezzük ki most a $\frac{\partial v}{\partial p}$-t és a $\frac{\partial v}{\partial q}$-t a $\frac{\partial u}{\partial p}$ és $\frac{\partial u}{\partial q}$-val és viszont, akkor kapjuk, hogy:

Tegyük ugyanis:

$$u_1 = f(u)$$
$$v_1 = g(v)$$

a hol az f és g tetszésszerinti függvényét jelenti az u, illetve v-nek.-

$$du_1 = f'(u)du$$
$$dv_1 = g'(v)dv$$
$$du^2 + dv^2 = \frac{du_1^2}{f'(u)^2} + \frac{dv_1^2}{g'(v)^2}$$

Ha most már u_1-et és v_1-et választjuk coordinatáknak, akkor az ívelem kifejezése ez lesz:

$$ds^2 = \frac{1}{m^2+n^2} \cdot \frac{du_1^2}{f'(u)^2} + \frac{1}{m^2+n^2} \cdot \frac{dv_1^2}{g'(v)^2}$$

Jelen esetben $\mathcal{E} \neq \mathcal{G}$, de csak annyiban, hogy $\mathcal{E}$ kifejezésében osztóképp pusztán u-nak a függvénye, $\mathcal{G}$ kifejezésében ugyancsak osztóképp pusztán a v-nek egy függvénye áll, úgy hogy:

$$\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{G}} = \frac{g'(v)^2}{f'(u)^2}$$

Ezeket az u_1, v_1 koordinatákat általánositott isothermikus coordinatáknak nevezzük. Mi azonban csak az $\mathcal{E} = \mathcal{G}$ speciális isothermikus koordinatákat fogjuk használni.

Most azt az összefüggést fogjuk fel keresni, a mely a konformis leképezés és a komplex változók között fennáll.-

Ha ismét vesszük azt a lineáris formát, a melynek: $m + n.i$ multiplicatora volt, akkor ezeknek szorzata: $u + v.i$-nek totáldifferentiálja. Mondhatom ennélfogva, hogy:

$$(\alpha.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial p} = \dfrac{\mathcal{F}\dfrac{\partial u}{\partial p} - \mathcal{E}\dfrac{\partial u}{\partial q}}{\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}-\mathcal{F}^2}} \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial q} = \dfrac{\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}-\mathcal{F}^2}}{\mathcal{E}}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial p} + \dfrac{\mathcal{F}}{\mathcal{E}}\cdot\dfrac{-\mathcal{E}\dfrac{\partial u}{\partial q}+\mathcal{F}\dfrac{\partial u}{\partial p}}{\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}-\mathcal{F}^2}} \end{cases}$$

$$= \frac{\mathcal{E}\mathcal{G}}{\mathcal{E}\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}-\mathcal{F}^2}}\cdot\frac{\partial u}{\partial p} - \frac{\mathcal{E}\mathcal{F}}{\mathcal{E}\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}-\mathcal{F}^2}}\cdot\frac{\partial u}{\partial q}$$

$$= \frac{\mathcal{G}}{\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}-\mathcal{F}^2}}\cdot\frac{\partial u}{\partial p} - \frac{\mathcal{F}}{\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}-\mathcal{F}^2}}\cdot\frac{\partial u}{\partial q}$$

Ezekből az egyenletekből már most kifejezhetjük az u deriváltjait a v deriváltjaival, mert a rendszer determinánsa:

$$\frac{\mathcal{E}\mathcal{G}-\mathcal{F}^2}{\mathcal{E}\mathcal{G}-\mathcal{F}^2} \neq 0$$

s kapjuk, hogy:

$$(\beta.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial p} = \dfrac{\mathcal{E}}{\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}-\mathcal{F}^2}}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial q} - \dfrac{\mathcal{F}\dfrac{\partial u}{\partial p}}{\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}-\mathcal{F}^2}} \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial q} = \dfrac{-\mathcal{G}\dfrac{\partial v}{\partial p} - \mathcal{F}\dfrac{\partial v}{\partial q}}{\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}-\mathcal{F}^2}} \end{cases}$$

Ezek a relatiók emlékeztetnek azokra a relatiókra, a melyek egy complex változónak valós és képzetes részeire nézve fennállanak.- Tényleg az említett relációk csak speciális esetei az $(\alpha.)$; $(\beta.)$ relatióknak, mert ezek, ha: $\mathcal{E} = \mathcal{G}$ és $\mathcal{F} = 0$, közvetlenül amazokba mennek át.-

Most ezekből a relációkból elimináció útján partiális differentiális egyenleteket vezetünk le az u és v számára.-

Ha én most az (α.) egyenletek közül az első egyenletét differentiálom q szerint, s a másodikat p szerint, akkor ennek a kettőnek egyeznie kell s így kapom, hogy:

$$\frac{\partial}{\partial p}\cdot\left(\frac{\mathcal{G}\frac{\partial u}{\partial p}-\mathcal{F}\frac{\partial u}{\partial q}}{\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}-\mathcal{F}^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial q}\cdot\left(\frac{\mathcal{E}\frac{\partial u}{\partial q}-\mathcal{F}\frac{\partial u}{\partial p}}{\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}-\mathcal{F}^2}}\right)=0$$

Hasonló módon járunk el a (β.) egyenletekkel s akkor a v-re nézve kapunk ugyanilyen egyenletet. Ha ezeket kidifferentiáljuk p és q szerint, akkor az u és v-re nézve kapunk egy másodrendű partiális differentiális egyenletet; jelöljük ennek a baloldalát egy pillanatra $\underset{p,q}{\Delta}$-val, akkor:

$$\underset{p,q}{\Delta} u=0;\quad \underset{p,q}{\Delta} v=0$$

Ezen másodrendű pártiális differentiális egyenletnek u és v egy tetszés szerinti felületen eleget tesznek mindig. Ez a partiális differentiális egyenlet igen sok tekintetben hasonló szerepet visz a felületen, mint a Laplace féle a síkban.- Először Kirchoff állította fel, egy mathematikai-physikai problémából kiindulva. Ez megint egy analógont mutat a Laplace féle egyenlettel. Ha ugyanis a síkban veszünk egy stacionárius elektromos áramlást (lehetne folyadék, vagy hőáramlást is venni), akkor ezen áramlás potentiálja eleget tesz a Laplace féle differentiális egyenletnek:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p^2}+\frac{\partial \varphi}{\partial q^2}=0$$

ha most p és q síkbeli coordinátákat jelentenek.-

Ha most képzelünk egy tetszésszerinti vezető felületet s ebben veszünk stationárius áramlást, akkor ennek a potentiálja eleget tesz a Kirchoff féle partiális differentiális egyenletnek.- Ezért épúgy, mint a síkban a Laplace féle egyenletnek eleget tevő függvényeket potentiál függvényeknek nevezzük: a Kirchoff féle partiális differentiális egyenletnek eleget tevő függvényeket felületbeli potentiáloknak nevezzük, a melyeket nem kell összetéveszteni a felületi potentiálokkal; a felületi potentiál ugyanis egy felületi rétegben elhelyezett tömeg potentiálját jelenti.-

Ha a síkban van egy tetszésszerinti potentiál függvényünk, ezt úgy foghatjuk fel mindig, mint egy komplex változó függvényének valós részét, a melyhez a képzetes részt megszerkeszthetjük s ez megint potentiál függvény lesz. Tehát a síkban a potentiál függvények teljesen identikusak azokkal, a melyek egy complex változó függvényének valós és képzetes részét teszik.-

A felületek esetében hasonlóképen áll a dolog. Tehát nemcsak az isothermikus koordináták bevezetése által nyerünk a Kirchoff féle differentiális egyenletnek eleget tevő u és v függvényeket, hanem, ha ismerjük ezen diff. egyenletnek egy tetszésszerinti megoldását: mindig tudunk isothermikus koordináta párt szerkeszteni.-

Legyen $\overset{\circ}{u}$ a Kirchoff féle diff. egyenletnek egy megoldása; akkor:

$$\Delta_{p,q} \overset{\circ}{u} = 0$$

Ebből tüstént következik, hogy:

$$\left(\frac{-\mathcal{E}\frac{\partial u}{\partial q}+\mathcal{F}\frac{\partial u}{\partial p}}{\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}-\mathcal{F}^2}}\right)dp+\left(\frac{\mathcal{G}\frac{\partial u}{\partial p}-\mathcal{F}\frac{\partial u}{\partial q}}{\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}-\mathcal{F}^2}}\right)dq$$

ez egy totaldifferentiál; ha most ezt integráljuk, kapunk egy v függvényt, a mely egy tetszőleges állandótól eltekintve lesz meghatározva. Ezen v függvény azzal a tulajdonsággal bír, hogy u és v isothermikus coordinátapárt alkotnak, a mennyiben az (α) és (β) relatiók teljesülnek azok partiális deriváltjaira nézve. Ebben áll a felületbeli potentiál szerepe az isothermikus coordináták előállítására nézve.-

Specializáljuk most már a dolgot, hogy az egész elmélet összefüggését lássuk a közönséges Laplace féle diff. egyenlettel.-

Ugy indultunk ki, hogy a:

$$ds^2 = \mathcal{E}dp^2 + 2\mathcal{F}dp\,dq + \mathcal{G}dq^2$$

formát lineáris factoraira bontottuk; az ilyen lineáris factor multiplicátorait felkerestük, a mi által egy totál differentiált állitottunk elő s ebből kaptuk az u és v isothermikus coordinátákat s ezeknek partiális deriváltjaira levezettük a jelzett tételeket.-

Tegyük fel most már, hogy a p és q is izothermikus coordináták voltak, úgy, hogy: $\mathcal{E}=\mathcal{G}$, és $\mathcal{F}=0$ identice, akkor kapjuk azt a vonatkozást, a mely a különböző isothermikus koordináták között fennáll.- Az (α.) egyenletekből lesz:

$$(\alpha)\ \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial p} = -\dfrac{\partial u}{\partial q} \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial q} = \dfrac{\partial u}{\partial p} \end{cases}$$

s a (β.) egyenletekből:

$$(\beta.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial p} = \dfrac{\partial v}{\partial q} \\ \dfrac{\partial u}{\partial q} = -\dfrac{\partial v}{\partial p} \end{cases}$$

Hogy most az (α.) és (β.) egyenletek ugyanazok, az természetes, mert hiszen eredetileg is azok voltak.

Ha tehát p és q már eredetileg isothermikus koordinaták voltak, akkor az u és v, p és q szerint vett partiális deriváltjai ugyanazon relációknak tesznek eleget, a melyek komplex változók valós és képzetes részeire fennállanak, más szóval:

$$u + v.i = f(p + q.i)$$

Ez tehát a legáltalánosabb vonatkozás, a mely két isothermikus koordinata rendszer között fennáll. Az: $u + vi$ mindig monogén függvénye a $p + q.i$ komplex változónak. Ebben az esetben a Kirchoff féle diff. egyenlet egyszerűen a Laplace félére reducálódik.-

Itt azonban még egy megjegyzést kell tennünk. T.i. mi mindig úgy számitottunk, hogy $\sqrt{E}$-nek a positiv előjelét vettük. Épen olyan joggal vehettük volna természetesen a negatív előjelét is és akkor kaptuk volna, hogy:

$$(\alpha'.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial p} = \dfrac{\partial u}{\partial q} \\ \dfrac{\partial v}{\partial q} = -\dfrac{\partial u}{\partial p} \end{cases}$$

Ezek már nem a közönséges parciális differentiális egyenletek, a melyek egy függvény valós és képzetes részei között fennállanak; ámde ebben az esetben:

$$v + u.i = - i\,(- u + v.i)$$

tehát $v + ui$ függvénye lesz a $p - q.i$-nek. Tehát nem kell, hogy $u + v.i$ függvénye legyen a $p + qi$-nek, lehet a $v + u.i$ függvénye a $p - q.i$-nek, s akkor is kapunk isothermikus coordinátákat. Tehát a legáltalánosabb kapcsolat két különböző isothermikus koordinátarendszer közt az, hogy $u + v.i$ függvénye a $p + q.i$-nek, vagy $v + u.i$ a $p - q.i$-nek.-

Ez az eredmény most már képessé tesz arra, hogy ha ismerünk egy isothermikus koordinatarendszert, ebből akárhány mást levezethessünk. Legyen ugyanis (p, q) isothermikus coordinátarendszerünk, akkor nem kell egyebet tennünk, mint megalkotni $p + qi$-nek egy monogén függvényét s felbontani azt valós és képzetes részére, az így adódó függvénypár megint egy isothermikus koordinatarendszert határoz meg.-

Ha egy felületre isothermikus coordinátarendszert vezetünk be, az egyértelmű azzal, hogy a felületet leképezzük konformisan egy síkra. Ha ugyanis:

$$ds^2 = Edp^2 + 2F.dpdq + Gdq^2$$
$$= \lambda^2\,(du^2 + dv^2)$$

akkor u és v felfogva derékszögű síkbeli coordinátákgyanánt: kapjuk a felület conformis leképezését a síkra.-

A konformis leképezésnek ez az elmélete Gausstól ered, a ki a koppenhágai akadémiához benyújtott pályamunkájában fejtette ezt ki először.-

A konformis leképezésnek különösen a térkép szerkesztésben van nagy gyakorlati jelentősége.

Ezzel elhagyjuk a conformis leképezés elméletét s tovább megyünk a felületek vizsgálatában.–

Konformis leképezésnél az ívelem szorzódik egy bizonyos λ factorral. A midőn λ a p, q-nak, vagy u, v-nek egy tetszésszerinti függvénye, ez a szó szoros értelemben vett leképezés, a hol az ábrák a végtelen kicsinyben hasonlók.– Ha a λ állandó, akkor az ábrák a két felületen a végesben is hasonlók.– Még speciálisabb esete ennek az, a mikor $\lambda = 1$, ez a letérítésnek, vagy hajlításnak esete, a midőn is a mérések az egyiken úgy végezhetők, mint a másikon.– Hajlítás esetében a Gauss féle görbület invariáns marad. Hajlítással az első quadratikus forma maga magába megy át. Még speciálisabb transformatióhoz jutunk, ha nemcsak az első quadratikus forma, hanem a

$$Ddp^2 + 2D'dpdq + D''dq^2$$

forma is ugyanaz marad: így jutunk az eltoláshoz. Ez által visszatértünk arra a feladatra, a melyet már egyszer megfogalmaztunk; t. i. mondottuk, hogy ennek a két quadratikus formának a megadásával kimutathatjuk, hogy a felület, mint geometriai képződmény meg van határozva. Ha most már az olyan felületeket vesszük, a melyekre nézve a második quadratikus forma sem különbözik, akkor karakterizáljuk az olyan felületeket, a melyek egymásból eltolás (translatio) útján keletkeznek. Ha tehát a hajlítások közül kiválasztjuk azokat a melyek a második formán nem változtatnak: az eltolásokhoz

jutunk. Ismét rendszeresen felhasználjuk a Gauss féle gömböt, a melyet a megelőző számításokban mellőztünk volt.
Eredetileg ugyanis így indúltunk ki:
vettük az ivelemet:

$$ds^2 = Edp^2 + \cdots$$

Ehhez állítottuk az:

$$\mathfrak{E}dp^2 + 2\mathfrak{F}.dpdq + \mathfrak{G}.dq^2$$

formát, a mely a Gauss féle gömbön az ivelem négyzete, s mondottuk, hogy ez az a két fundamentál forma, a melyekből a felületek elméletét le kell vezetni. A $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ és x, y, z differentiáljaiból megalkottuk ezt a kifejezést:

$$-(dx.d\mathfrak{X} + dy\,d\mathfrak{Y} + dz.d\mathfrak{Z}) = Ddp^2 + \cdots$$

Kényelem szempontjából ezt a formát használtuk, a mely igen egyszerű kapcsolatban áll a $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$-el, úgy, hogy a:

$$Ddp^2 + \cdots$$

forma lényegében mint a Gauss féle gömb ivelemének a helyettesítője tekinthető. Ezt egyszerű módon kimutatjuk.–

A Gauss féle gömb koordinátái: $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ a felület koordinátáinak x, y, z deriváltjaiból vannak összerakva:

$$\mathfrak{X} = \Phi(p, q)$$

$$\mathfrak{Y} = \Psi(p, q)$$

$$\mathfrak{Z} = X(p, q)$$

$$d\mathfrak{X}^2 + d\mathfrak{Y}^2 + d\mathfrak{Z}^2 = \mathfrak{E}.dp^2 + 2\mathfrak{F}dpdq + \mathfrak{G}.dq^2$$

$$\mathfrak{E} = \left(\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial p}\right)^2$$

$$\mathcal{F} = \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial p} \cdot \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial q} + \cdot + \cdot$$

$$\mathcal{G} = \left(\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial q}\right)^2$$

Most számitsuk ki ezeket a mennyiségeket, a Christoffel féle symbolumok felhasználásával:

$$\mathfrak{E} = \left(\frac{\mathcal{F}\mathcal{D}' - \mathcal{G}\mathcal{D}}{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2} \cdot \frac{\partial x}{\partial p} + \frac{\mathcal{F}\mathcal{D} - \mathcal{E}\mathcal{D}'}{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2} \cdot \frac{\partial x}{\partial q}\right)^2 + \cdot + \cdot$$

Képzeljük már most ezeket a binomiumokat négyzetre emelve, akkor kapjuk:

$$\mathfrak{E} = \left(\frac{\mathcal{F}\mathcal{D}' - \mathcal{G}\mathcal{D}}{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2}\right)^2 \mathcal{E} + 2\left(\frac{(\mathcal{F}\mathcal{D}' - \mathcal{G}\mathcal{D})(\mathcal{F}\mathcal{D} - \mathcal{E}\mathcal{D}')}{(\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2)^2}\right)\mathcal{F} + \left(\frac{\mathcal{F}\mathcal{D} - \mathcal{E}\mathcal{D}'}{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2}\right)\mathcal{G}$$

Ezt a kifejezést most összevonjuk, u. i.:

$$(\mathcal{F}\mathcal{D}' - \mathcal{G}\mathcal{D})^2\mathcal{E} + 2(\mathcal{F}\mathcal{D}' - \mathcal{G}\mathcal{D})(\mathcal{F}\mathcal{D} - \mathcal{E}\mathcal{D}')\mathcal{F} + (\mathcal{F}\mathcal{D} - \mathcal{E}\mathcal{D}')\mathcal{G} =$$

$$= \cancel{\mathcal{F}^2\mathcal{D}'^2\mathcal{E}} - \cancel{2\mathcal{F}\mathcal{D}\mathcal{D}'\mathcal{G}.\mathcal{E}} + \cancel{\mathcal{G}^2\mathcal{D}^2.\mathcal{E}} + \cancel{2\mathcal{F}^3\mathcal{D}\mathcal{D}'} - \cancel{2\mathcal{G}\mathcal{D}^2\mathcal{F}^2} -$$

$$-2\mathcal{F}^2\cancel{\mathcal{E}\mathcal{D}'^2} + \cancel{2\mathcal{G}\mathcal{D}\mathcal{E}\mathcal{D}'\mathcal{F}} + \mathcal{F}^2\cancel{\mathcal{D}^2\mathcal{G}} - \cancel{2\mathcal{F}\mathcal{D}\mathcal{D}'\mathcal{E}\mathcal{G}} + \cancel{\mathcal{E}^2\mathcal{D}'^2\mathcal{G}} =$$

$$-\mathcal{F}^2(-\cancel{\mathcal{E}\mathcal{D}'^2} - 2\mathcal{F}\mathcal{D}\mathcal{D}' + \cancel{2}\mathcal{G}\mathcal{D}^2 + \cancel{2}\mathcal{E}\mathcal{D}'^2 - \cancel{\mathcal{D}^2\mathcal{G}}) +$$

$$+ \mathcal{E}\mathcal{G}.(\mathcal{E}\mathcal{D}'^2 - 2\mathcal{F}\mathcal{D}\mathcal{D}' + \mathcal{D}^2\mathcal{G}) = (\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2)(\mathcal{E}\mathcal{D}'^2 - 2\mathcal{F}\mathcal{D}\mathcal{D}' + \mathcal{D}^2\mathcal{G})$$

Tehát:

$$\mathfrak{E} = \frac{\mathcal{E}\mathcal{D}'^2 - 2\mathcal{F}\mathcal{D}\mathcal{D}' + \mathcal{G}\mathcal{D}^2}{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2}$$

A Gauss és Sophie Germain féle görbület felhasználásával ezt a kifejezést még másképen is irhatjuk. Alkossunk meg u. i. ezt a kifejezést:

$$\mathcal{K}\mathcal{E}+\mathcal{H}\mathcal{D}=\frac{(\mathcal{D}\mathcal{D}''-\mathcal{D}'^2)\mathcal{E}+(2\mathcal{F}'-\mathcal{E}\mathcal{D}''-\mathcal{G}\mathcal{D})\mathcal{D}}{\mathcal{E}\mathcal{G}-\mathcal{F}^2}$$

$$=\frac{-\mathcal{E}\mathcal{D}'^2+2\mathcal{D}\mathcal{D}'-\mathcal{G}\mathcal{D}^2}{\mathcal{E}\mathcal{G}-\mathcal{F}^2}$$

Ennélfogva:

$$\mathfrak{E}=-(\mathcal{K}\mathcal{E}+\mathcal{H}\mathcal{D})$$

Ugyanezt a számítást végezhetjük az $\mathfrak{F}$ és $\mathfrak{G}$-re is s kapjuk:

$$\mathfrak{F}=-(\mathcal{K}\mathcal{F}+\mathcal{H}\mathcal{D}')$$

$$\mathfrak{G}=-(\mathcal{K}\mathcal{G}+\mathcal{H}\mathcal{D}'')$$

És most már igazolást nyer azon állításunk, amely szerint:

$$-(dx\,d\mathfrak{X}+dy\,d\mathfrak{Y}+dz\,d\mathfrak{Z})$$

igen egyszerű kapcsolatban van a Gauss féle gömb ivelemével.:

$$\mathfrak{E}dp^2+2\mathfrak{F}dpdq+\mathfrak{G}dq^2=$$

$$=-\mathcal{K}(\mathcal{E}dp^2+2\mathcal{F}dpdq+\mathcal{G}dq^2)-\mathcal{H}(\mathcal{D}dp^2+2\mathcal{D}'dp.dq+\mathcal{D}''dq^2)$$

Teljes joggal mondhatjuk tehát, hogy az:

$$\mathfrak{E}dp^2+\ldots\ldots$$

forma helyett vehettük a

$$\mathcal{D}dp^2+\ldots\ldots$$

formát, mert az előbbi ezzel és az

$$\mathcal{E}dp^2+\ldots\ldots$$

formával, egyszerű lineáris kapcsolatban van.-

Egy egyszerű, de az elmélet szempontjából fontos következtetést vonhatunk. – Képzeljük u. i. az

$$\mathfrak{E}\,dp^2 + 2\mathfrak{F}\,dp\,dq + \mathfrak{G}\,dq^2$$

quadratikus formának a discriminánsát:

$$\mathfrak{E}\mathfrak{G} - \mathfrak{F}^2 = (\mathcal{K}\mathcal{E} + \mathcal{H}\mathcal{D})(\mathcal{K}\mathcal{G} + \mathcal{H}\mathcal{D}'') -$$

$$-(\mathcal{K}\mathcal{F} + \mathcal{H}\mathcal{D}')^2 = \mathcal{K}^2(\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2) + \mathcal{K}\mathcal{H}(\mathcal{E}\mathcal{D}'' + \mathcal{G}\mathcal{D} - 2\mathcal{F}\mathcal{D}') +$$

$$+ \mathcal{H}^2(\mathcal{D}\mathcal{D}'' - \mathcal{D}'^2)$$

Ezt még másképen is írhatjuk; t. i. a $\mathcal{H}\mathcal{K}$ szorzója nem más, mint a Sophie Germain féle görbület számlálójának ellentettje s így írhatjuk,

$$\mathfrak{E}\mathfrak{G} - \mathfrak{F}^2 = \mathcal{K}^2(\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2) - \mathcal{K}\mathcal{H}^2(\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2) + \mathcal{H}^2(\mathcal{D}\mathcal{D}'' - \mathcal{D}'^2)$$

$$\mathfrak{E}\mathfrak{G} - \mathfrak{F}^2 = \mathcal{K}^2(\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2)$$

tehát:

$$\sqrt{\frac{\mathfrak{E}\mathfrak{G} - \mathfrak{F}^2}{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2}} = \mathcal{K}$$

A Gauss féle görbület tehát nem más, mint a Gauss féle gömbi ívelem és a felületi ívelem discriminánsai-nak a hányadosa. – Ez nemcsak formális calculus tekintetében érdekes és fontos eredmény, hanem ennek alapján a Gauss féle görbületnek egy fontos geometriai interpretatióját adhatjuk. –

Vegyük ugyanis a terület, vagy felület elem kifejezését, a felületre és a Gauss féle gömbre vonatkoztatva:

$$t = \sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2}\,.\,dp\,.\,dq$$

Ha ezt a kis területet leképezzük a Gauss féle gömbre, akkor kapjuk, hogy a megfelelő terület:

$$A = \sqrt{EG - F^2} \cdot dp\,dq$$

Eszerint K nem egyéb, mint:

$$\frac{A}{t} = K$$

Tehát egy felületnek a Gauss féle görbülete úgy értelmezhető, hogy veszünk a felületen, a kérdéses pontot körülzáró végtelen kis területet, ezt leképezzük a Gauss féle gömbre s vesszük az ott keletkező végtelen kis ábrának a területét: a két terület hányadosa nem egyéb, mint a Gauss féle görbület mértéke. Ez a Gauss féle görbület egy ujabb geometriai interpretatiója. – Ha tehát ismerjük a felület egy végtelen kis ábrájának a területét s azt megszorozzuk a Gauss féle görbület mértékével, akkor megkapjuk a Gauss féle gömbön a megfelelő ábra területét.–

Hogy a K kifejezésében egy $\sqrt{\ }$ fordul elő, az nyilván valóan onnan ered, hogy a felület valamely pontjának a Gauss féle gömbre való leképezése nincs egyértelműleg meghatározva, mert a felület valamely pontjának megfelelő pontját úgy találjuk a Gauss féle gömbön, hogy a felület kérdéses pontjához tartozó normálissal párhuzamos rádius döféspontját vesszük. Mivel ilyen rádius kettő van, különös conventió nélkül a felület egy pontjának a Gauss féle gömbön két pont felel meg. Ha azonban a felület normálisának határozott irányt adunk és ezen konventió réa leképezést egyértelművé tesszük, akkor a $\sqrt{\ }$ is határozott előjelt kap. – Ilyen konventiót tényleg vezettünk be, mert az: K,... értelmezésében már előfordul egy konvenció, a mennyiben az értelmezésében szereplő: „$\sqrt{\ }$ mindig positiv előjelével veendő", úgy, hogy valójában most a K-nak határozott előjele lesz. Most láthatjuk, hogy miért előnyösebb a:

$$Ddp^2 + \ldots$$

formát használni; t. i. mert ott a $\sqrt{\ }$-t már határozott előjellel látunk el. –

A mi most már a Gauss féle görbületet illeti; hogy t. i.

$$K = \frac{1}{t}$$

arra vonatkozólag meg kell jegyeznünk, hogy Gauss a görbületnek ezen értelmezéséből indul ki a „Disquisitiones ..." című munkájában és úgy tünteti fel a dolgot, mintha ez az értelmezés a síkbeli görbék görbületének bizonyos általánosításából adódott volna ki. – Azt mondja ugyanis, vegyünk egy sík görbét s tekintsük ennek az ívelemét, akkor ezen görbének a görbülete úgy lesz értelmezve: hogy veszünk két végtelenül szomszédos érintőt s ezeknek egymáshoz való hajlásszögét elosztjuk az ívelemmel; e helyett úgy is vehetjük a dolgot, hogy két végtelenül szomszédos normálist veszünk s azoknak a hajlásszögét elosztjuk az ívelemmel, vagy még másképen: veszünk egységnyi rádiusu kört a síkban s vesszük ebben azt a két rádiust, a melyek a két végtelen szomszédos normálissal párhuzamosak, akkor ezen rádiusok hajlásszöge maga az ívelem s így:

$$k = \frac{d\sigma}{ds}$$

Azt mondja most Gauss, hogy teljesen analog módon járunk el, hogy, ha a felületen veszünk egy kis négyszöget s ennek megszerkesztjük a képét a Gauss féle gömbre s az így nyert két terület hányadosa a K

Ő tehát úgy tünteti fel ebben az értekezésében a dolgot, mintha ennek az analogiának a révén jutott volna el a felületi görbület fogalmához. Egy néhány évvel ezelőtt kiadták a Gauss hagyatékát, a mely többek között a „Disquisitiones..." című értekezésének egy korábbi fogalmazványát tartalmazza. Ebből és néhány régebbi feljegyzéséből kitűnik, hogy Gauss nem így, hanem más módon jutott a görbület értelmezéséhez. Egyes feljegyzéseiben t.i. Gauss a konformis leképezésből indul ki. Mint már előbb említettük, Gauss a konformis leképezéssel a koppenhágai akadémiához benyújtott pálya-munkájában foglalkozott:- Elsősorban felület elméleti tanulmányaiban a konformis leképezéssel, vagy a mi ugyanaz az izothermikus koordinátákkal foglalkozott. Ha az isothermikus koordinátákat bevezetjük, akkor:

$$ds^2 = \lambda (du^2 + dv^2)$$

vagy olyan jelölésben, a milyent Gauss az említett feljegyzéseiben használ:

$$ds^2 = n^2 (dx^2 + dy^2)$$

Már ez a feljegyzés mutatja, hogy az u és v-t ő, mint síkbeli koordinátákat interpretálja. Írjunk fel most a görbület Gauss féle mértékének kifejezését isothermikus koordinátákban. Használjuk ismét eredeti jelöléseinket; a melyek szerint:

$$ds^2 = \lambda(du^2 + dv^2)$$

A Gauss féle görbületet előállítottuk a Christoffel féle symbolumokkal, ha most ezek helyébe behelyettesítjük az $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$-t, akkor a $\mathcal{K}$ számára kapjuk, hogy:

$$\mathcal{K} = \frac{1}{\mathcal{E}\mathcal{G}-\mathcal{F}^2}\left[\frac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial p\partial q} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2\mathcal{G}}{\partial p^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2\mathcal{E}}{\partial q^2}\right] +$$

$$+\frac{1}{(\mathcal{E}\mathcal{G}-\mathcal{F}^2)^2}\cdot\left[\mathcal{E}\left(\frac{1}{4}\left(\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial p}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial q}\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial p} + \frac{1}{4}\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial q}\cdot\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial q}\right)+\right.$$

$$+\mathcal{F}\left(\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial p}\cdot\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial q} - \frac{1}{2}\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial p}\cdot\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial p} - \frac{1}{2}\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial q}\cdot\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial q} - \frac{1}{4}\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial q}\cdot\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial p} + \frac{1}{4}\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial p}\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial q}\right)+$$

$$\left.+\mathcal{G}\left(\frac{1}{4}\left(\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial q}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial q}\cdot\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial p} + \frac{1}{4}\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial p}\cdot\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial p}\right)\right]$$

Specializáljuk most ezt a képletet arra az esetre, a mikor isothermikus koordinátákkal van dolgunk, vagyis a mikor:

$$\mathcal{E} = \mathcal{G} = \lambda; \qquad \mathcal{F} = 0$$

akkor:

$$\mathcal{K} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\lambda^2}\cdot\left(\frac{\partial^2\lambda}{\partial p^2} + \frac{\partial^2\lambda}{\partial q^2}\right) + \frac{1}{2}\frac{1}{\lambda^3}\left(\left(\frac{\partial\lambda}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial q}\right)^2\right)$$

Ezt még kissé másképen írhatjuk:

$$\frac{\partial.\log\lambda}{\partial p} = \frac{1}{\lambda}\cdot\frac{\partial\lambda}{\partial p}$$

$$\frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial p^2} = -\frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{\partial \lambda}{\partial p}\right)^2 + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial^2 \lambda}{\partial p^2}$$

$$\frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial q^2} = -\frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{\partial \lambda}{\partial q}\right)^2 + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial^2 \lambda}{\partial q^2}$$

$$K = -\frac{1}{2\lambda}\cdot\left(\frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial q^2}\right)$$

Vagy, ha a második deriváltak összege helyett a szokásos Δ jelet használjuk:

$$K = -\frac{1}{2\lambda}\Delta\cdot(\log \lambda) = \frac{1}{\varrho_1\cdot\varrho_2}$$

Most kövessük a Gauss feljegyzését:
Náia úgy volt, hogy:

$$ds^2 = n^2(dx^2 + dy^2)$$

$$\frac{1}{\varrho_1\varrho_2} = n^2\cdot\left(\frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \nu}{\partial y^2}\right)$$

s ez alá volt írva, hogy:

$$n = e^{\nu}$$

Ez teljesen az a képlet, a melyet az imént találtunk, azzal a különbséggel, hogy most:

$$p = x;\quad q = y;\quad \lambda = \frac{1}{n^2}$$

Továbbá még az van írva, hogy

$$\frac{1}{\varrho_1\varrho_2} = \frac{d\Sigma}{dS} = \frac{d\Sigma}{ds}\cdot n^2$$

Kérdés most már, hogy mi a jelentése ennek a második képletnek?
Erre vonatkozólag is tájékoztat az említett feljegyzés, mert oda van írva, hogy:

Σ der Raum auf der Himmelskugel.
S " " " " Fläche.
s " " " " Ebene.

Az is helyes, hogy:

$$\frac{d\Sigma}{ds}\, n^2 -$$

nak írja a Gauss féle görbületet, mert tényleg:

$$dS = \frac{1}{n^2}\, ds$$

Tényleg Gauss úgy járt el, hogy számítás útján megállapította ezt a képletet s azután interpretalta ezt a konformis leképezés révén, mert s' először a síkban, s azután magán a felületen vette ezeket a hányadosokat. Ugyancsak ebben a feljegyzésben ezeket a képleteket még valószinűnek jelzi.–

Most már csak az a kérdés, hogy miképen jutott Gauss ehhez a valószinűséghez? Hogy erre nézve fogalmat alkothassunk, a következő megjegyzéseket kell tennünk:

Vegyünk a felületen egy zárt (véges legyen) görbétől határolt ábrát. Legyen:

$$\Phi(p, q) = 0$$

ezen görbe egyenlete, s tekintsük úgy a dolgot, hogy a görbén belül: $\Phi(p,q) < 0$, azon kívül > 0. Számítsuk ki ezen ábra területét:

$$\iint\limits_{\Phi(p,q)<0} \sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}-\mathcal{F}^2}\cdot dp\cdot dq$$

Képzeljük most ezen zárt görbétől határolt ábrát leképezve a Gauss féle gömbre, akkor ezen a gömbön a megfelelő ábra területe lesz:

$$\iint\limits_{\Phi<0} \sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}-\mathcal{F}^2}\cdot dpdq =$$

$$= \iint\limits_{\Phi<0} \sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}-\mathcal{F}^2}\cdot K.dpdq$$

A $\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}-\mathcal{F}^2}$ és a K hajlitási invariánsok lévén, ha a felületet hajlitjuk: a Gauss féle gömbön lévő ábra területe nem változik. Ez semmiképen sem evidens dolog, mert a hajlitással változnak a normálisok s igy a leképezésnek is változnia kell, mind a mellett azt látjuk, hogy a zárt görbétől határolt ábra Gauss gömbi képe nem változtatja a területét a hajlitással.-

Ez a tétel fel van jegyezve Gaussnál és pedig Gauss ezt a tételt találta először s ennek alapján jutott ahhoz a tételhez, hogy a K is hajlitási invariáns.- Gauss eredetileg egy polygont vesz a felületen, ezt leképezi a róla elnevezett gömbre s kimutatja, hogy, ha a felületet hajlitjuk: a leképezési ábra területe változatlan marad.-

Ezen históriai kitérés után, még egy néhány megjegyzést teszünk a leképezésre vonatkozólag.-

Képzeljük, hogy a görbületi vonalakat választjuk paraméter görbéknek, akkor $\mathcal{F}=0$, és $\mathcal{D}'=0$ lévén:

$$ds^2 = \mathcal{E}.dp^2 + \mathcal{G}dq^2$$

$$dS^2 = -\mathcal{K}(\mathcal{E}dp^2 + \mathcal{G}dq^2) - \mathcal{H}(\mathcal{D}dp^2 + \mathcal{D}''dq^2)$$

$$= -\left[(\mathcal{K}\mathcal{E} + \mathcal{H}\mathcal{D})dp^2 + (\mathcal{K}\mathcal{G} + \mathcal{H}\mathcal{D}'')dq^2\right]$$

dS a Gauss féle gömbön jelenti az ívelemet.-
Látjuk ebből, hogy, ha a felületen a görbületi vonalakat választjuk parameter görbéknek, akkor ezek a parameter görbék a Gauss féle gömbön is derékszög alatt fogják egymást metszeni. Ha általánosan felveszünk egy orthogonális rendszert, akkor az nem lesz a Gauss gömbön orthogonális, vagyis, ha $\mathcal{F} = 0$, akkor még $F \neq 0$ lehet. Ha azonban: $\mathcal{F} = 0$ és $\mathcal{D}' = 0$, akkor már szükségképen $F = 0$, mert:

$$F = -(\mathcal{K}\mathcal{F} + \mathcal{H}\mathcal{D}')$$

Ha most már tudjuk, hogy:

$$\mathcal{F} = 0 \text{ és } F = 0$$

akkor mi következik ebből? Az, hogy:

$$\mathcal{H}\mathcal{D}' = 0$$

Két eset lehetséges. Lehet: $\mathcal{H} = 0$, vagyis:

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = 0$$

Ez csak speciális felületen lehetséges. Az olyan felületet, a melyre nézve $\mathcal{H} = 0$, minimális felületnek nevezzük. Az ilyen felületek esetében, abból, hogy $\mathcal{F} = 0$, és $F = 0$ semmiképen sem következik, hogy az orthogonális rendszer a görbületi vonalak rendszere.-

Az ilyen felületeknél:

$$dS^2 = -\mathcal{K}(\mathcal{E}dp^2 + \mathcal{G}dq^2) = -\mathcal{K}.ds^2$$

Tehát a minimális felületeknél a leképezés a Gauss féle gömbre konformis. Ha tehát a minimális felületeket a normálisaik segélyével leképezzük a Gauss gömbre, akkor ez a leképezés a legkisebb részekben hasonló lesz. Ha tehát a felületen veszünk egy tetszésszerinti orthogonális rendszert, $F=0$, akkor a Gauss féle gömbön $\mathcal{F}=0$, ha a leképezés konformis s így abból, hogy $F=0$ és egyidejüleg $\mathcal{F}=0$, a minimális felületekre nem következik semmi.-

Indokuljuk most a minimális felület elnevezést. Képzeljünk egy zárt görbét a térben, s fektessünk ezen keresztül felületeket; a variátió számításban azt a problémát tárgyalják, hogy melyik felületnek van ezek közül a legkisebb területe. Ha a görbe sík görbe, akkor már a puszta szemlélet mutatja, hogy a síknak van a legkisebb területe. Egy zárt térgörbén át nem lehet síkot fektetni, itt tehát nem triviális a probléma, a melynek analytikai megfogalmazása az, hogy:

$$\iint\limits_{\Phi} \sqrt{EG-F^2}\, dpdq.$$

minimumát határozzuk meg. Ez a variátio számítás feladata.- Kell, hogy az első variátió eltünjék, a mi egy pártiális differentiális egyenletet szolgáltat. Ez a pártiális diff. egyenlet, az úgynevezett Lagrange féle pártiális diff. egyenlet, nem más, mint:

$$H=0$$

Ezért nevezik a $H=0$ felületeket minimális felületeknek. Ezek a minimális felületek függvénytani szempontból is nevezetesek, mert a Gauss féle gömbre conformisan lévén leképezhetők, leképezésük komplex változók monogén függvényeinek segélyével eszközölhető."-

Riemann és Weierstrass a minimális felületek elméletét épen a monogén függvények segélyével fejtették ki. Ezeket a minimális felületeket modellek segélyével is igen szépen lehet bemutatni. Képzeljük u. i. ezt a zárt görbét drótból és mártsuk szappan oldatba: a szappan oldat a dróton egy lamellát fog alkotni, a mely a kapilláris erő befolyása alatt igyekszik olyan alakot elfoglalni, hogy az a felület minimális legyen, vagyis a drót kitöltésére minél kevesebb anyag használódjék.-

Különösen Plateau foglalkozott a minimális felületek elméletével physikai szempontból, azután meg Schwarz, a ki a minimális felületek elméletét igen számos és fontos értekezésben tárgyalja.- Ő állított elő olyan oldatokat, a melyek bizonyos állandó lamellák szerkesztését engedik meg. Itt a minimális felületek elméletét részletesen nem tárgyaljuk, az elmondottakat csak tájékozódás végett említettük fel.-

Ha mellőzzük a minimális felületeket, vagyis feltételezzük, hogy H nem identikusan 0 (minimális felületek esetében $H \equiv 0$), akkor, ahhoz, hogy F-el egyidejüleg $F = 0$ legyen, feltétlenül szükséges, hogy $D' = 0$ legyen vagyis, ha egy olyan görbe seregünk van, a melyre nézve tudjuk, hogy a felületen orthogonális, és hogy a Gauss féle gömbön is az, akkor ez okvetlenül a görbületi vonalak serege.-

Most elhagyjuk a Gauss gömbre való leképezés elméletét, bár még sok érdekes megjegyzést lehetne tenni. Visszatérünk most arra a problémára, hogy mit lehet mondani az olyan felületekről, a melyekre nézve mind a két fundamentál quadratikus forma:

$$Edp^2 + \dots$$

és

$$Ddp^2 + \dots$$

ugyanaz.

Ez ideig négyféle transformátióval foglalkoztunk. Először vettük a közönséges deformátiót, a mely nyujtással és összeszorítással jár s a hol az egyik felület egy bizonyos részén lévő pontok korrespondeálnak a másik felület egy másik részén lévő pontokkal. Ez az általános transformátió. Ha már most olyan ez a korrespondentia, hogy két felület megfelelő pontjaiban az ívelemek arányosak, akkor kapjuk a konformis leképezést. Ha az ívelemek identikusak, akkor a hajlítás fogalmához jutunk. A negyedik eset az, a mikor a felületek legalább geometriai tulajdonságaikra nézve identikusak, a mikor tehát a felületek eltolás révén keletkeznek egymásból.-

Kaptuk tehát a következő transformátiókat:

1., Általános transformátió;
2., Konformis leképezés;
3., Hajlitás;
4., Eltolás.

Két egyszeresen összefüggő felületet az első transformátió révén mindig tudunk egymásra vonatkoztatni, sőt Gauss elméletéből kitűnik, hogy a második transformátió révén is, és pedig minden megszorítás nélkül.- Hajlátás útján már csak speciális felületek vonatkoztathatók egymásra; az eltolás pedig még speciálisabb felületeket állít vonatkozásba. - Mi most épen a 4.,-ik transformátióval akarunk foglalkozni. -

Legyen:

$$\mathcal{E} dp^2 + \dots$$

és $$\mathcal{D} dp^2 + \dots$$

két felületre nézve ugyanaz. Vezessük be most paraméter görbéknek a görbületi vonalakat. A görbületi vonalak differentiál egyenleteiben szerepelnek az $\mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}$, és $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$ $\mathcal{D}''$ mennyiségek:

$$(\cdot\,\cdot)\, dp^2 + (\cdot\,\cdot)\, dp\, dq + (\cdot\,\cdot)\, dq^2 = 0$$

Képzeljük ezt az egyenletet lineáris tényezőire felbontva:

$$\alpha . dp + \beta dq = 0$$

$$\gamma . dp + \delta . dq = 0.$$

Képzeljünk most mind a két kifejezéshez egy multiplicátort szerkesztve olyan formán, hogy:

$$\mu (\alpha . dp + \beta . dq) = d\, u(p, q)$$

$$\nu (\gamma . dp + \delta . dq) = d\, v(p, q)$$

akkor u = const. és v = const. lesz a görbületi vonalak két serege. Ha ezeket az u és v görbéket paraméter görbéknek vezetjük be, akkor:

$$ds^2 = \mathcal{E}_1 . du^2 + \mathcal{G}_1 dv^2$$

$$d\sigma^2 = \mathcal{D}_1 . du^2 + \mathcal{D}_1'' . dv^2$$

Természetesen azt az esetet ki kell zárnunk, a mikor egy felület olyan, hogy minden pontja umbilicus, mert ekkor a görbületi vonalak differentiál egyenletei illuzóriussá válnak, a mennyiben ilyenkor a coefficiensek identikusan eltünnek.-

A következő vizsgálatainkban lényeges lévén, hogy az u és v valós görbék legyenek, arra kell biztositékot szereznünk, hogy tényleg valósak.- Nem kell egyebet tennünk, mint a görbületi vonalak diff. egyenletében megalkotni a discriminánst és utána nézni, hogy positiv-e, vagy negativ. Ez a discriminans a következő:

$$4.(\mathcal{D}\mathcal{F}-\mathcal{D}'\mathcal{E})(\mathcal{D}'\mathcal{G}-\mathcal{D}''\mathcal{F})-(\mathcal{D}\mathcal{G}-\mathcal{D}''\mathcal{E})^2=$$
$$=-\left\{\left(\mathcal{E}\mathcal{D}''-\mathcal{G}\mathcal{D}-\frac{2\mathcal{F}}{\mathcal{E}}(\mathcal{E}\mathcal{D}'-\mathcal{F}\mathcal{D})\right)^2+4\,\frac{\mathcal{E}\mathcal{G}-\mathcal{F}^2}{\mathcal{E}^2}(\mathcal{E}\mathcal{D}'-\mathcal{D}\mathcal{F})^2\right\}$$

$\mathcal{E}\mathcal{G}-\mathcal{F}^2$ positiv lévén a $\{\cdot\}$ positiv s igy maga a discriminans negativ, tehát u és v mindig valós. Ha tehát $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ csak olyanok, hogy:

$$\mathcal{E}\mathcal{G}-\mathcal{F}^2>0,$$

akkor a görbületi vonalak mindig valósak.-

Most tekintsünk el attól, hogy felülettel van dolgunk; vegyük, hogy van két quadratikus formánk:

$$\mathcal{E}dp^2+2\mathcal{F}.dp.dq+\mathcal{G}dq^2$$

és

$$\mathcal{D}dp^2+2\mathcal{D}'dpdq+\mathcal{D}''dq^2$$

Erre a két quadratikus formára feltételezzük, hogy:

$$\mathcal{E}\mathcal{G}-\mathcal{F}^2>0\text{, hogy }\mathcal{E},\mathcal{F},\mathcal{G},\mathcal{D},\mathcal{D}'',\mathcal{D}'$$

között fennállanak a Mainardi-Codazzi és a Gauss féle relációk, egyébként legyenek $\mathcal{E},\mathcal{F},\mathcal{G},\mathcal{D},\mathcal{D}',\mathcal{D}''$ egészen tetszésszerinti függvényei a p-nek és q-nak. Befogjuk most bizonyítani, hogy áll a következő két tétel:- Mindig van végtelen sok felület, a melyekre nézve ez a két quadratikus forma a fundamentál forma; továbbá ez a sok felület egymásból mind eltolással származik, úgy, hogy geometriai szempontból véve a dolgot, csak egy olyan felület van, a melyre nézve ez a két quadratikus forma a fundamentál forma, tehát ezen két quadratikus forma segélyével a felület, mint geometriai képződmény teljesen meg van határozva.- Ez a két quadratikus forma tehát olyan szerepet játszik a felületek elméletében, mint a flexió és torzió a görbék elméletében.-

A számítás egyszerűsítése végett most ebbe a két formába új coordinátákat vezetünk be teljesen azon módon, a hogy ezt a felületekre nézve tárgyaltuk.- T.i. felállítjuk a görbületi vonalak diff. egyenletét, felbontjuk lineáris faktoraira, a melyekről tudjuk, hogy valósak jelen esetben. Igy kapunk bizonyos u, v mennyiségeket, a melyeket új coordinátáknak vezetünk be. A transformált quadratikus formában a középső tagok kiesnek, s csak a négyzetes tagok maradnak meg. Hogy új jelöléseket ne vezessünk be, tegyük fel, hogy p és q már eleve ezek a coordináták, vagyis a két formában csak a quadratikus tagok szerepelnek.- Az algebrában is lehet két quadratikus formát simultán négyzetes alakra transformálni.-

Abban az esetben, ha $F=0$, és $D'=0$, a Mainardi-Codazzi és a Gauss féle relációk lényegesen egyszerüsödnek. Ezeket a relátiókat most felírjuk explicit alakjukban. Ezek szerint ugyanis:

$$
(\mathcal{G}.\mathcal{C})\left\{
\begin{aligned}
& DD'' + \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}}}\frac{\partial\sqrt{\mathcal{E}}}{\partial p}\right) + \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{1}{\sqrt{\mathcal{G}}}\cdot\frac{\partial\sqrt{\mathcal{E}}}{\partial q}\right) = 0 \\
& \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{D}{\sqrt{\mathcal{E}}}\right) - \frac{D''}{\mathcal{G}}\cdot\frac{\partial\sqrt{\mathcal{E}}}{\partial q} = 0 \\
& \frac{\partial}{\partial p}\cdot\left(\frac{D''}{\sqrt{\mathcal{G}}}\right) - \frac{D}{\mathcal{E}}\cdot\left(\frac{\partial\sqrt{\mathcal{E}}}{\partial p}\right) = 0
\end{aligned}
\right.
$$

Képzeljük, hogy be volna bizonyítva, hogy egy olyan felület existál, a melyre nézve a két adott quadratikus forma a fundamental forma. Szerkesszünk ezen felület minden pontjában egy háromlábast, a melynek egyik lába a felületi normális, a más két lába pedig a két főirány. A mi parameterink most úgy vannak választva, hogy a főirányok a p = const., és q = const. görbék érintői.- Vegyünk most egy derékszögű koordinátarendszert, legyenek ebben:

$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ a q = const. görbe érintőjének iránycosinusai;
$\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ a p = const. " " "
$\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ a felületi normális iránycosinusai.-

Ezen 9 mennyiség között fennáll az ismeretes 22 relátió, mivel egy orthogonális koordinátarendszerre vonatkoztattunk egy háramlábast.-

A q = const. görbe ívelemе:

$$ds_q^2 = \mathcal{E}dp^2$$

$$ds_q = \sqrt{\mathcal{E}}.dp$$

A q = const. görbe érintőjének iránycosinusai ezek lesznek:

$$\alpha_1 = \frac{dx}{ds_q} = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}}}\frac{\partial x}{\partial p}$$

$$\beta_1 = \frac{dy}{ds_q} = \frac{1}{\sqrt{E}} \cdot \frac{\partial y}{\partial p}$$

$$\gamma_1 = \frac{dz}{ds_q} = \frac{1}{\sqrt{E}} \cdot \frac{\partial z}{\partial p}$$

Megjegyzendő, hogy x, y, z a p, q ismeretlen függvényei s épen annak a bizonyitásáról van szó, hogy léteznek olyan x, y, z függvények, a melyekkel meglehet alkotni a felirt két quadratikus formát.-

A $p = \text{const.}$ görbe iveleme:

$$ds_p = \sqrt{G} . dq$$

érintőjének iránycosinusai:

$$\alpha_2 = \frac{dx}{ds_p} = \frac{1}{\sqrt{G}} \cdot \frac{\partial x}{\partial q}$$

$$\beta_2 = \frac{dy}{ds_p} = \frac{1}{\sqrt{G}} \cdot \frac{\partial y}{\partial q}$$

$$\gamma_2 = \frac{dz}{ds_p} = \frac{1}{\sqrt{G}} \cdot \frac{\partial z}{\partial q}$$

Az $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ nem egyéb, mint: $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$.

Már most meg kell alkotnunk ezen iránycosinusok deriváltjait p és q szerint. Az $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ p és q szerint vett deriváltjainak kifejezésében az x, y, z második deriváltjai szerepelnek; az $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ partiális deriváltjaiban pedig a $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ p és q szerint vett első partiális deriváltjai. Ezekre vannak formuláink! Mivel jelen esetben az explicit alakok elég egyszerűek, a symbolumok helyett mindjárt ezeket használhatjuk.-

Megjegyzendő, hogy az egész számítást $\mathfrak{F} \neq 0$ és $\mathfrak{D} \neq 0$

esetében is elvégezhetnénk, csakhogy akkor igen compli-
cált kifejezésekhez jutnánk.-

$$
(E.)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial \alpha_1}{\partial p} &= -\frac{1}{\sqrt{G}}\cdot\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial q}\alpha_2 + \frac{D}{\sqrt{E}}\cdot\alpha_3\\
\frac{\partial \alpha_1}{\partial q} &= \frac{1}{\sqrt{E}}\cdot\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial p}\alpha_2\\
\frac{\partial \alpha_2}{\partial p} &= \frac{1}{\sqrt{G}}\cdot\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial q}\alpha_1\\
\frac{\partial \alpha_2}{\partial q} &= -\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial p}\alpha_1 + \frac{D''}{\sqrt{G}}\alpha_3\\
\frac{\partial \alpha_3}{\partial p} &= -\frac{D}{\sqrt{E}}\cdot\alpha_1\\
\frac{\partial \alpha_3}{\partial q} &= -\frac{D''}{\sqrt{G}}\cdot\alpha_2
\end{aligned}
\right.
$$

A $\beta_1, \beta_2, \beta_3$; $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$-ra nézve teljesen analog egyenletek állanak.-

Ha van két quadratikus formánk:

$$Edp^2 + Gdq^2,$$

és

$$Ddp^2 + D''dq^2$$

a melyek közül az első forma definita s D, D'' között teljesülnek a (G. C) képletek, akkor felírhatunk írni (E.) 18 egyenletet, s ez a 18 egyenlet integrábilis.-

A (E.) egyenletek hasonló szerepet játszanak, mint a Frenet-Serret féle képletek a görbék elméletében, a mennyiben az iránycosinusok deriváltjait tartalmazzák.-

Ha (E.) egyenleteket integráljuk, akkor lesz 9 mennyiségünk: $\alpha_1, \beta_1, \ldots\ldots$ s ezen 9 mennyiség között fennáll 22 reláció, a mi az orthogonális transformátió következménye.- Ezen 9 mennyiség segélyével megalkotjuk ezeket a kifejezéseket:

$$x = \int\left(\frac{\partial x}{\partial p}dp + \frac{\partial x}{\partial q}dq\right) =$$

$$= \int\left(\sqrt{E}\,\alpha_1 dp + \sqrt{G}\,\alpha_2 dq\right)$$

$$y = \int\left(\sqrt{E}.\beta_1 dp + \sqrt{G}.\beta_2 dq\right)$$

$$z = \int\left(\sqrt{E}\,\gamma_1 dp + \sqrt{G}.\,\gamma_2 dq\right)$$

Ha az (E.) 18 egyenletet megoldottuk, akkor megtudjuk alkotni e kifejezéseket. Most még csak azt kell tisztáznunk, hogy ezek a differentiálok totálisak-e?, vagy nem; mert ha nem azok, akkor nem tudjuk az x, y, z-t megalkotni. De okvetlenül totálisak, mert ezekre a kifejezésekre a Mainardi-Codazzi feltételek kompatibilisek, a mi az integrálhatóságot vonja maga után. Ezzel ki is van mutatva, hogy van olyan felület, a melyre nézve a felírt két forma a fundamentál forma. Most vizsgáljuk, hogy mikepen változik ez a felület, ha az (E.) rendszernek más és más megoldásait veszszük.- A megoldásokban ugyanis még bizonyos tetszésszerintiség van, de nem függvényi, hanem csak állandói tetszésszerintiség szerepel, mert bár pariciális differentiális egyenletekkel van dolgunk, azonban ezek száma épen kétszer annyi, mint a hány függvény van.-

Azt fogjuk vizsgálni, hogy az (E.) egyenlet párticuláris megoldásai között milyen vonatkozás van? E végből az (E.) pártiális egyenleteiből alkossunk total differentiál egyenleteket:

$$d\alpha_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial E}{\partial q}\alpha_2 + \frac{D}{\sqrt{E}}\alpha_3\right)dp + \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial p}\alpha_2 dq$$

$$d\alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial q}\alpha_1 dp + \left(-\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial p}\alpha_1 + \frac{D}{\sqrt{G}}\alpha_3\right)dq$$

$$d\alpha_3 = -\frac{D}{\sqrt{E}}\alpha_1 dp - \frac{D''}{\sqrt{G}}dq$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

Legyen $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1 \dots$ egy particuláris megoldási rendszer s legyen $\bar{\alpha}_1, \bar{\beta}_1, \bar{\gamma}_1 \dots$ egy másik megoldási rendszer.

A felirt három egyenletet szorozzuk meg $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \bar{\alpha}_3$-al azután irjuk fel az $(\bar{E}.)$ rendszert s annak három első egyenletét szorozzuk meg $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$-al és ezt a hat egyenletet adjuk össze:

$$\bar{\alpha}_1 d\alpha_1 + \bar{\alpha}_2 d\alpha_2 + \bar{\alpha}_3 d\alpha_3 + \alpha_1 d\bar{\alpha}_1 + \alpha_2 d\bar{\alpha}_2 + \alpha_3 d\bar{\alpha}_3 \equiv$$

$$\equiv -\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial q}\alpha_2\bar{\alpha}_1 dp + \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial q}\alpha_2\bar{\alpha}_1 dp + \cdot - \cdot + \cdot - \cdot = 0$$

$$d\left(\alpha_1\bar{\alpha}_1 + \alpha_2\bar{\alpha}_2 + \alpha_3\bar{\alpha}_3\right) = 0$$

Kaptuk tehát, hogy az (E.) rendszernek az a nevezetes tulajdonsága van, hogy particuláris megoldásai között ilyen relációk állnak fenn:

$$\alpha_1\bar{\alpha}_1 + \alpha_2\bar{\alpha}_2 + \alpha_3\bar{\alpha}_3 = \text{const.}$$

Valamint:

$$\beta_1\bar{\beta}_1+\beta_2\bar{\beta}_2+\beta_3\bar{\beta}_3=\text{const.}$$

$$\gamma_1\bar{\gamma}_1+\gamma_2\bar{\gamma}_2+\gamma_3\bar{\gamma}_3=\text{const.}$$

Ezeknek az állandóknak a meghatározására most már ugyanazt az eljárást fogjuk alkalmazni, a melyet a görbék elméletében követtünk volt, a mikor azt akartuk kimutatni, hogy, ha két görbére nézve a torzió és a flexió, mint ívhosszuk függvényei azonosak: akkor az a két görbe eltolással keletkezik egymásból.-

Úgy fogunk eljárni, hogy vesszük az $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$-nak megfelelő x, y, z felületet, aztán az $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \bar{\alpha}_3$-nak megfelelő felületet: $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ s ha már most, az első felületen a: $p_0 q_0$ coordináta párnak megfelel egy x_0, y_0, z_0 pont, s a második felületen egy $\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0$ pont, akkor a második felületet olyan módon toljuk el, hogy $\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0$ pontja az első felület x_0, y_0, z_0 pontjába essék. Ezen eltolás végeztével az x_0, y_0, z_0 pont körül egy olyan forgatást végzünk, hogy a két felület normálisai ebben a pontban összeessenek. Végre egy utolsó forgatás által ellehet érni, hogy az x_0, y_0, z_0 pontban mindkét háromlábas coincidáljon.-

Képzeljük a második felületet már eleitől fogva így választva, akkor a $p_0 q_0$ pontban:

$$\alpha_1=\bar{\alpha}_1\,,\quad \alpha_2=\bar{\alpha}_2\,,\quad \alpha_3=\bar{\alpha}_3\quad \ldots.$$

lévén s mert $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ... irány cosinusok, lesz:

$$\left(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2\right)_{p_0,q_0}=1\quad \ldots\ldots$$

Tehát egyuttal:

$$\alpha_1\bar{\alpha}_1+\alpha_2\bar{\alpha}_2+\alpha_3\bar{\alpha}_3=1$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

a mi csak úgy lehetséges, hogy:

$$\alpha_1 = \bar{\alpha}_1 \; ; \quad \alpha_2 = \bar{\alpha}_2 \; ; \; \dots\dots$$

Ez pedig azt mondja, hogy, ha két felületet, a melyek ugyanazon fundamentál formákhoz tartoznak, olyan helyzetbe hozunk egymással, hogy egy pontjuk összeessék, s ebben a pontban a háromlábasak is összeesnek, akkor a megfelelő pontpárakhoz tartozó háromlábasak a két felület egész terjedelmében párhuzamosak.-

Most csak azt kell kimutatnunk, hogy a két felület teljesen fedi egymást, azaz:

$$x = \bar{x}\,, \quad y = \bar{y}\,, \quad z = \bar{z}$$

$$x = \int \sqrt{E}\,\alpha_1\,dp + \sqrt{G}\,\alpha_2\,dq$$

$$\bar{x} = \int \sqrt{E}\,\bar{\alpha}_1\,dp + \sqrt{G}\,\bar{\alpha}_2\,dq$$

De mert:

$$\alpha_1 = \bar{\alpha}_1 \quad \dots\dots$$

következik, hogy:

$$x - \bar{x} = \text{const.}$$
$$y - \bar{y} = \text{const.}$$
$$z - \bar{z} = \text{const.}$$

Ámde:

$$x_0 - \bar{x}_0 = 0$$
$$y_0 - \bar{y}_0 = 0$$
$$z_0 - \bar{z}_0 = 0$$

Tehát egyúttal:

$$x \equiv \bar{x}$$
$$y \equiv \bar{y}$$
$$z \equiv \bar{z}$$

Kaptuk tehát azt az eredményt, hogy, ha van két quadratikus formánk:

$$\mathcal{E}dp^2 + \cdots\cdots$$

és $$\mathcal{D}dp^2 + \cdots\cdots$$

az első egy positiv definita forma, a második pedig olyan, hogy coefficiensei teljesitik a (G.C.) relátiókat, akkor ezen két quadratikus formához általában véve végtelen sok felület tartozik, a melyek azonban egymásból mind eltolás által keletkeznek, úgy, hogy mint geometriai képződményt egynek tekintjük valamennyit, más szóval a felirt két quadratikus forma a felület, mint geometriai képződményt teljesen meghatározza. Megjegyzendő, hogy az első feltétel:

$$\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}-\mathcal{F}^2}>0$$

csak arra vonatkozik, hogy a felület valós legyen, különben következtetéseinket ettől a megszoritástól menten alkalmazhattuk volna. Ez a két quadratikus forma:

$$\mathcal{E}dp^2+2\mathcal{F}dpdq+\mathcal{G}dq^2=dx^2+dy^2+dz^2$$

$$\mathcal{D}dp^2+2\mathcal{D}'dpdq+\mathcal{D}''dq^2=-(dx\,d\mathfrak{X}+dy\,d\mathfrak{Y}+dz\,d\mathfrak{Z})$$

szolgáltatja a felület úgynevezett intrinsecus egyenleteit, azaz oly egyenleteit, a melyek függetlenek a coordináta rendszer választásától.-

Megjegyzendő, hogy a számitás mechanizmusára itt nem adtunk semmiféle indikációt, vagyis arról nem szólottunk, hogy az (E.) rendszert hogyan lehet tényleg integrálni.- Aránylag igen egyszerű módon az egész integráció processust a Riccati féle differentiális egyenlet integrálására lehet visszavezetni, épen úgy mint a görbéknél;-

$$\frac{dy}{dx} = \alpha_0 + \alpha_1 y + \alpha_2 y^2$$

a hol α_0, α_1, α_2 függvényei az x-nek.

Ezzel a felületek elméletében oda jutottunk, a hová a görbék elméletében, a mennyiben most teljes áttekintésünk van a felületek transformációiról, invariánsairól, s azoknak analytikai jelentéséről.-

Lényeges, hogy a felületek elméletében találtunk egy sajátságos tranaformátiót: a hajlítást, s erre nézve láttuk, hogy egy olyan tulajdonság, vagy kifejezés, a mely pusztán az első quadratikus forma koefficienseitől függ, a hajlitásnál invariáns, míg az olyanok, a melyek a Gauss féle forma coefficienseitől függnek, mint a normálisok tulajdonságai, a hajlitással mindig változni fognak.- Azoknál a felületeknél, a melyek az első quadratikus formából hajlitás által keletkeznek az első forma ugyanaz; ha ehhez hozzá veszszük a $Ddp^2 + \ldots$ formát, a mely minden felületre más, karakterizálni tudjuk az összes felületeket, a melyek egymásból hajlitás által keletkeznek.- A Mainardi-Codazzi féle relatiók, bizonyos tetszésszerintiséggel előállitják a D', D'', D-t az E, F, G-ből. Tehát az a feladat, hogy határozzuk meg az összes egymásból hajlitással keletkező felületeket, vagy más fogalmazásban meghatározni az egymásra leteríthető felületeket, abban áll, hogy határozzuk meg a legáltalánosabb mennyiségeket, a melyek a Mainardi-Codazzi féle relatióknak eleget tesznek.- Ezt a feladatot általánosan explicit formában nem lehet megoldani; De sikerült igen érdekes speciális eseteket tárgyalni és sikerült bizonyos tulajdonságokat általánosan is levezetni. Megemlíthetjük Weingartennek 1884-ben megjelent jubileumi dolgozatát, valamint az „Acta mathematika" XXI. kötetében 1897-ben közé tett eredetileg a párisi akadémiához benyújtott pályamunkáját, a melyekben ezen vizsgálatok tárgyalva vannak.-

Ezekkel a vizsgálatokkal itt nem foglalkozhatunk részletesen.-

Átfogunk térni oly tulajdonságok kifejtéséhez, a melyek hajlítási invariánsok, tehát az első quadratikus formával meg vannak határozva, vagy a mint mondhatjuk a felületnek belső tulajdonságai, a melyek függetlenek attól, hogy a felület a térben miként van elhelyezve nemcsak eltolás, hanem hajlítás tekintetében is, a melyek más szóval nem függnek mástól, mint a felületen eszközölt mérésektől.- Olyan tulajdonságokkal foglalkozunk, a melyek a felületen belül végzett mérésekből felismerhetők.- Ezen belső tulajdonságok közül mostanáig csak a görbület Gauss féle mértékét ismertük fel, s ezt is egy bizonyos kerülő úton, t.i. kimutattuk, hogy a K hajlítási invariáns. Azonban a K-nak az értelmezése nem volt tisztán belső mérésekkel eszközölve.- Mostanáig két értelmezését ismerjük a K-nak. Mind a két értelmezésnél kilép a K a felületből s mi csak a posteriori analytikailag tudjuk belátni, hogy ez a K pusztán a belső mérésektől függ. Most keresni fogjuk a K-nak olyan értelmezését, a mely tisztán a felületen belül végzett mérésektől függ. Ezen kivül még nem találkoztunk olyan fogalommal, a mely ilyen hajlitási invariáns lett volna, eltekintve a szögtől, a mely nemcsak hajlitási invariáns, hanem a konformis leképezésnél is az. Közelfekvő mindenekelőtt a felületen fekvő görbének a görbültségét vizsgálni, nem mint térbeli görbének, hanem mint felületi görbének a görbültségét. Ha ugyanis, mint térbeli görbének a görbültségét vizsgáljuk, akkor még mindig összehasonlitjuk a körrel, tehát a felületre nézve idegen képződménynyel. Ez emlékeztet a sikbeli geometriára. Ez a felületnél paradigma jellegével bir.- De ha van nekünk egy felületünk, akkor közelfekvő az a gondolat, hogy a felületen fekvő görbének a görbültségét egy a felületen fekvő kanonikus görbének a görbültségével mérjük össze, ne pedig egy idegenszerű görbének a görbültségével, a milyen pl. a kör.

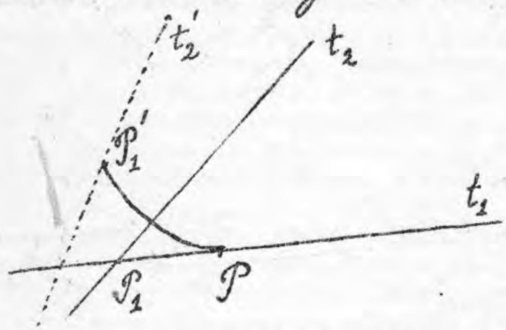
Igen egyszerű módon adhatunk egy olyan definiciót a mely, a mint később látni fogjuk, a felületen belül végzett mérésekből eredő görbültségi fogalomra vezet.- Vegyük a felületen fekvő görbének a közönséges görbültségét, úgy, a hogy értelmeztük; a normálmetszet görbültsége:

$$\frac{1}{r} = \frac{D dp^2 + 2D' dp dq + D'' dq^2}{E dp^2 + 2F dp dq + G dq^2}$$

Ebből a ferdemetszetek görbültségét a Meusnier tétele segélyével kapjuk meg.-

Vegyük most már ezt a görbét, s gondoljuk meg, hogy miképen értelmeztük a közönséges görbültséget. - A görbének két végtelenül szomszédos pontján: P és P_1-en fektetjük a t_1 és t_2 érintőt, s az ezek által bezárt szöget elosztjuk az ívelemmel: akkor kapjuk a görbületet.-

Ha már most ezen érintőkön keresztül síkot fektetünk, ez a sík lesz a görbe simuló síkja. Ha most a P pontban fektetjük az érintő síkot a felülethez, akkor ez átmegy a t_1-en, de már a t_2-n nem, úgy, hogy a görbület előbbi értelmezése kilép a felületből, benn fekszik a simuló síkban, a melynek pedig semmi köze a felülettel.-



Képzeljük az érintő síkba projiciálva a PP_1 ívelemet, orthogonálisan, akkor az érintő síkban előáll egy síkbeli görbe s már most ennek a síkbeli görbének egyik érintője lesz a t_1. Hogyan kapjuk most a végtelenül szomszédos érintőt? Nyilvánvalóan úgy, hogy a t_2 érintőt projiciáljuk az érintő síkra. Legyen a P_1 projectiója P_1', a t_2-é t_2', akkor a síkbeli görbe görbületét kapjuk, ha a t_2' és t_1 hajlás szögét a projectio ívelemével elosztjuk.- Ezt az értelmezést fogjuk most részletesebb vizsgálat tárgyává tenni.- Ezen első tekintetre mesterkéltnek látszó értelmezésről ki fog adódni, hogy ez a felületen fekvő görbének egy hajlítási invariáns elemét szolgáltatja s ezenkívül elvezet olyan vonalak értelmezéséhez, a melyek egy tetszésszerinti felületen hasonló szerepet viselnek, mint az egyenes vonalak a síkban; ezen görbék segélyével kimutatjuk, hogy az igy értelmezett görbület a síkbeli görbületnek a legtermészetesebb általánosítása.-

Hogy a következő tárgyalást jobban áttekinthessük, a fő eredményeket előre fogalmazzuk meg.

A fent értelmezett görbületet: tangentiális, vagy geodetikus görbületnek nevezzük és erről kimutatjuk, hogy hajlítási invariáns.-

A síkban az egyenest az által jellemeztük, hogy görbülete 0., most keresni fogjuk a felületen azon görbéket, a melyekre nézve a geodetikus görbület 0, s ezeket nevezni fogjuk a felületen fekvő geodetikus vonalaknak. Ez az eljárás még mindig bizonyos önkényszerűség bélyegét viseli magán. De most ki fog adódni a geodetikus görbének egy fontos tulajdonsága, a mely a geodetikus görbét, mint az egyenes általánosítását mutatja be. A geodetikus görbe ugyanis, szintés hajlitási invariáns, mert a görbültsége hajlitási invariáns.-

Ha a felületen veszünk két pontot, akkor ezeken keresztül mindig tudunk egy geodetikus görbét fektetni, s ennek a görbének most már az a tulajdonsága van, hogy az összes ezen két ponton keresztül fektethető görbék között a legkisebb a két pont közt mért ívhossza: más szóval a két pont között a legrövidebb út.- Ez teljesen analog a síkbeli egyenes egy fundamentális tulajdonságával.-

Ha a síkban van egy anyagi pontunk, s annak adunk egy bizonyos kezdő sebességet s aztán minden külső erő befolyásától mentten magára hagyjuk, akkor az a pont a síkban egy egyenesen mozog. Ha most a felületen képzelünk egy anyagi pontot, a mely mindig rajta marad a felületen s ennek adunk egy lökést s aztán magára hagyjuk, akkor ez az anyagi pont egy geodétikus görbét fog rajzolni a felületen.-

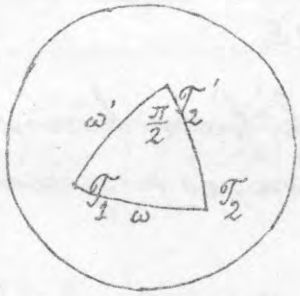
Azt már említettük, hogy a felületnek két pontján mindig tudunk egy geodétikus görbét átfektetni. Vegyük most a felület tetszésszerinti görbéjét. Fektessünk ennek két végtelenül szomszédos pontján át egy geodétikus vonalat, akkor ezt per analogiám a görbe geodetikus érintőjének nevezzük.- Ha most a görbe két végtelenül szomszédos pontjában fektetjük ezen geodetikus érintőket s ezeknek a hajlásszögét osztjuk el az ívelemmel, akkor kapjuk a geodétikus görbületet. Így visszatértünk a kiindulási ponthoz, igazolva, hogy ez az önkényesnek tetsző constructio a felület lényegében fekvő tulajdonságot jelent.-

Legyen t_1 és t_2 két végtelenül szomszédos érintő, s legyen ezeknek hajlásszöge: ω,
akkor:

$$\frac{1}{r} = \frac{\omega}{ds}$$

Fektessük az illető pontban az érintő síkot, erre az érintő síkra reá projiciáljuk a t_2 érintőt, a mely nem fekszik bent az érintő síkban.- A t_2 érintő projectioját jelöljük t_2'-el, az érintő síkban fellépő síkbeli görbe érintői: t_1 és t_2' lesznek (végtelenül szomszédosak.) Nevezzük ezek hajlásszögét: ω'-nek, akkor a geodetikus görbület : $\dfrac{\omega'}{ds}$

Most arról van szó, hogy vonatkozásba hozzuk az ω és ω_1 mennyiséget. Ezen célból a P_1 pontból, mint centrumból rajzoljunk egy egység sugarú gömböt, akkor ezen a gömbön a t_1, t_2, t_2' egyenesek három pontot szúrnak ki: T_1, T_2, T_2'. Fektessünk ezen pontokon keresztül egy gömbi háromszöget, akkor nyilvánvaló, hogy a T_2'-nél fellépő szög derékszög lesz, mert hiszen orthogonálisan projiciáltunk. A T_1 mellett fellépő szög nem egyéb, mint a $(t_1 t_2')$ és $(t_1 t_2)$ síkoknak egymáshoz való hajlása, tehát a simuló síknak és az érintő síknak egymáshoz való hajlása:



$$\varepsilon = \measuredangle\,(\text{érintő és simuló sík})$$

A T_1T_2 átfogó nem egyéb, mint annak a szögnek a mértéke, a mely alatt a t_1 és t_2 érintők egymáshoz hajolnak: ω; a T_1T_2' pedig a síkbeli görbe végtelenül szomszédos érintőinek a hajlás szöge: ω'. – A derékszögű gömbháromszögre vonatkozó tétel szerint:

$$tg\,\omega' = tg\,\omega \cdot \cos\varepsilon$$

ω és ω' végtelenül kicsiny szögek, tehát a tangensük helyett magukat e szögeket vehetjük, azaz:

$$\omega' = \omega \cdot \cos\varepsilon$$

Az ε-t úgy is foghatjuk fel, mint a felületi normálisnak s a görbe binormálisának egymáshoz való hajlásszögét. A normális iránycosinusai: X, Y, Z, s a binormálisé λ,

μ, ν, a hol a Frenet-Serret képletek szerint:

$$\lambda = r(y'z'' - z'y'')$$
$$\mu = r(z'x'' - x'z'')$$
$$\nu = r(x'y'' - y'x'')$$

a hol a (') és ('') az ívhossz szerint képezett első, illetőleg második deriváltakat jelentik. Tehát:

$$\cos\varepsilon = r\left[\mathfrak{X}(y'z'' - z'y'') + \mathfrak{Y}(z'x'' - x'z'') + \mathfrak{Z}(x'y'' - y'x'')\right]$$

A geodetikus görbület tehát ez lesz:

$$\frac{1}{r_g} = \frac{\omega'}{ds} = \frac{\omega . \cos\varepsilon}{ds} = \frac{1}{r} \cdot \cos\varepsilon$$

A geodetikus görbületet tehát úgy kapjuk, ha a közönséges görbületet $\frac{1}{r}$ felrakjuk a simuló síkra, és projiciáljuk az érintő síkba.-

$$\frac{1}{r_g} = \mathfrak{X}(y'z'' - z'y'') + \mathfrak{Y}(z'x'' - x'z'') + \mathfrak{Z}(x'y'' - x''y')$$

$$= \begin{vmatrix} x' & x'' & \mathfrak{X} \\ y' & y'' & \mathfrak{Y} \\ z' & z'' & \mathfrak{Z} \end{vmatrix}$$

Most már ki kell számítanunk az x', x'' .... stb.

$$x' = \frac{\partial x}{\partial p} p' + \frac{\partial x}{\partial q} q'$$

$$x'' = \frac{\partial^2 x}{\partial p^2} p'^2 + 2\frac{\partial^2 x}{\partial p \partial q} p'q' + \frac{\partial^2 x}{\partial q^2} q'^2 + \frac{\partial x}{\partial p} p'' + \frac{\partial x}{\partial q} q''$$

Vegyük most azokat a képleteket, a melyekkel a p és q szerint képezett második deriváltakat előállítottuk:

$$x_{ik} = \begin{Bmatrix} ik \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial p} + \begin{Bmatrix} ik \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial q} + D\mathfrak{X}$$

Ha ezeket bevezetjük, akkor az x'', y'', z'' kifejezéseit rendezhetjük : $\frac{\partial x}{\partial p}, \frac{\partial x}{\partial q}$, $\mathfrak{X}$ hatványai szerint:

$$x'' = a\frac{\partial x}{\partial p} + b\frac{\partial x}{\partial q} + c\mathfrak{X}$$

$$a = \genfrac\{\}{0pt}{}{11}{1} p'^2 + 2\genfrac\{\}{0pt}{}{12}{1} p'q' + \genfrac\{\}{0pt}{}{22}{1} q'^2 + p''$$

$$b = \genfrac\{\}{0pt}{}{11}{2} p'^2 + 2\genfrac\{\}{0pt}{}{12}{2} p'q' + \genfrac\{\}{0pt}{}{22}{2} q'^2 + q''$$

$$c = \mathfrak{D}p'^2 + 2\mathfrak{D}'p'q' + \mathfrak{D}''q'^2$$

Egészen hasonló kifejezéseket kapunk az y'' és z'' számára. A fentebbi determinánst most már így írhatjuk:

$$\begin{vmatrix} p'\frac{\partial x}{\partial p} + q'\frac{\partial x}{\partial q} \; ; & a\frac{\partial x}{\partial p} + b\frac{\partial x}{\partial q} + c\mathfrak{X} \; ; & \mathfrak{X} \\ \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \\ \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

Ezt a determinánst két determináns szorzatára bontjuk:

$$\begin{vmatrix} p' & q' & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial p} & \frac{\partial y}{\partial p} & \frac{\partial z}{\partial p} \\ \frac{\partial x}{\partial q} & \frac{\partial y}{\partial q} & \frac{\partial z}{\partial q} \\ \mathfrak{X} & \mathfrak{Y} & \mathfrak{Z} \end{vmatrix} = (p'b - aq')\sqrt{\mathfrak{E}\mathfrak{G} - \mathfrak{F}^2}$$

Itt egy előjel még határozatlan, a mi különben természetes is, mert görbületről van szó, a melynek valamilyen konvenció szerint határozzuk meg az előjelét. Nem kell most egyebet tennünk, mint behelyettesitni az a, b kifejezéseit, s akkor kapjuk, hogy:

$$\frac{1}{r_g} = \sqrt{\mathfrak{E}\mathfrak{G} - \mathfrak{F}^2}\Big\{p'q'' - q'p'' + p'^3\genfrac\{\}{0pt}{}{11}{2} + p'^2q'\Big[2\genfrac\{\}{0pt}{}{12}{2} - \genfrac\{\}{0pt}{}{11}{1}\Big] - p'q'^2\Big[2\genfrac\{\}{0pt}{}{12}{1} - \genfrac\{\}{0pt}{}{12}{2}\Big] - q'^3\genfrac\{\}{0pt}{}{12}{1}\Big\}$$

Ez a kifejezés csak $\mathcal{E},\mathcal{F},\mathcal{G}$-től függ, tehát a geodetikus görbület tényleg hajlítási invariáns. Ebben már óriási előnye van a közönséges görbület felett.-

Most keressük azokat a görbéket, a melyekre nézve az $\frac{1}{r_g}=0$. Minthogy $\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}-\mathcal{F}^2}\neq 0$, az $\frac{1}{r_g}$ csak azokra a görbékre nézve lesz 0, a melyekre nézve a második factor 0. Ebben i-lyenféle tagok szerepelnek: $p'q''-p''q'$; p'^3, q'^3 . . . . . a $(')(")$ a p, illetőleg a q „s" szerint képzett első, illetve második deriváltjait jelentik. Most a q-t, mint p függvényét fogjuk fel s a jelzett tagok helyett a q-nak p szerint vett deriváltjait vezetjük be.-

$$\frac{dq}{dp}=\frac{q'}{p'}$$

$$\frac{d^2q}{dp^2}=\frac{p'q''-p''q'}{p'^2}\cdot\frac{ds}{dp}=\frac{p'q''-p''q'}{p'^3}$$

Osszuk el az említett factort p'^3-al, akkor:

$$\frac{d^2q}{dp^2}+\left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}+\left[2\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}-\left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\}\right]\frac{dq}{dp}-\left[2\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}-\left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\}\right]\left(\frac{dq}{dp}\right)^2-$$

$$-\left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\}\left(\frac{dq}{dp}\right)^3=0$$

Ez a differentiális egyenlet szolgáltatja a felületen azokat a görbéket, a melyeknek a geodetikus görbületük 0, ezeket geodetikus görbéknek nevezzük. Ezekről a görbékről szintén nyilvánvaló, hogy hajlítási invariánsok.- Célszerű lesz ezen geodetikus görbéknek a kifejezését felállítani explicit alakban. Lesz:

$$\frac{d^2q}{dp^2}(\mathcal{E}\mathcal{G}-\mathcal{F}^2)+\mathcal{E}\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial p}-\frac{1}{2}\mathcal{E}\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial q}-\frac{1}{2}\mathcal{F}\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial p}-\frac{dq}{dp}\Big(\mathcal{E}\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial p}+\mathcal{F}\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial p}-$$

$$-\frac{3}{2}\mathcal{F}\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial q}-\frac{1}{2}\mathcal{G}\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial p}\Big)+$$

$$+\left(\frac{dq}{dp}\right)^2\left(G\frac{\partial E}{\partial q}+F\frac{\partial F}{\partial p}-\frac{3}{2}F\frac{\partial E}{\partial q}-\frac{1}{2}E\frac{\partial G}{\partial q}\right)-$$

$$-\left(\frac{dq}{dp}\right)^3\left(G\frac{\partial F}{\partial q}-\frac{1}{2}G\frac{\partial G}{\partial p}-\frac{1}{2}F\frac{\partial G}{\partial q}\right)=0$$

Ezen differentiális egyenlet másodrendű lévén, az általános megoldása két tetszésszerinti állandót fog tartalmazni:

$$q=\Phi(p;c_1,c_2)$$

Ezt a két állandót, vagy úgy határozzuk meg, mint az elméleti fizikában; tehát megszabjuk, hogy egy bizonyos $p=p_0$ mellett $q=q_0$ és $\frac{dq}{dp}=q_0'$ legyen:

$$q_0=\Phi(p_0;c_1,c_2)$$
$$q_0'=\Phi'(p_0;c_1,c_2)$$

Tehát bármely felületi ponthoz rendelhetünk egy tetszésszerinti irányú geodetikus görbét. Vagy úgy is meghatározhatjuk ezen állandókat, hogy megszabjuk, mi szerint:

$p=p_0$ mellett $q=q_0$ és $p=p_1$ mellett $q=q_1$ legyen:

$$q_0=\Phi(p_0,c_1,c_2)$$
$$q_1=\Phi(p_1,c_1,c_2)$$

Ez geometriailag azt jelenti, hogy a felület bármely két pontján tudunk geodetikus vonalat fektetni, de csak egyet, mert a c_1 és c_2 megadásával a q megvan határozva. Sík esetében a mondottak világosan láthatók, t.i. síkban az egyenes vonalak a geodetikus vonalak; ezekről tudjuk, hogy bármely ponton át tudunk akár milyen irányú egyenest fektetni s hogy továbbá két ponton át csak egy egyenes fektethető, de egy minden esetre. Különben directe is látható, hogy sík esetében az egyenes vonalak a geodetikus vonalak, u. i.:

$$x = \varphi(x)$$
$$y = \psi(y)$$
$$z = \chi(x, y)$$
$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

Tehát: $\mathcal{E} = 1$, $\mathcal{G} = 1$, $\mathcal{F} = 0$

Ha ezen értékeket behelyettesitjük a differentialis egyenletbe, akkor:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$
$$\frac{dy}{dx} = C_1$$
$$y = C_1 x + C_2$$

A geodetikus vonalak ezen értelmezéséből, azoknak egy nevezetes tulajdonságát vezethetjük le. T. i.:

$$\frac{1}{r_g} = \frac{1}{r} \cos \varepsilon$$

a hol ε nem egyéb, mint a binormális hajlásszöge a felület normálisához, vagy a mi ugyanaz a görbe simuló síkjának a hajlása az érintő síkhoz. Ha a görbe geodetikus vonal, akkor:

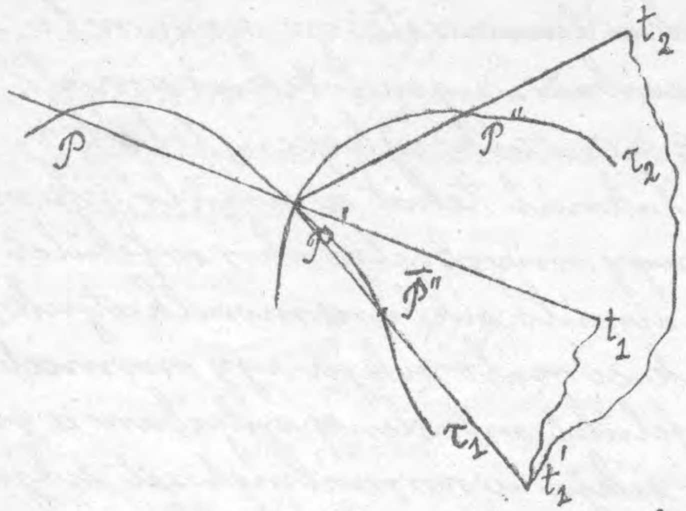
$$\frac{1}{r_g} = 0$$

tehát, vagy $\frac{1}{r} = 0$, a mikor a geodetikus vonal egyenes, mint a síkban; ez természetesen csak speciális felületeknél fordulhat elő; ilyenkor természetesen szó sem lehet simuló síkról.- Ha azonban a geodetikus vonal nem egyenes, akkor $\cos\varepsilon = 0$ szükségképen, tehát: $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$.- A geodetikus vonalaknál tehát a simuló sík merőleges az érintő síkra, vagy mivel ilyenkor a felület normálisa benne van a simuló síkban, mondhatjuk, hogy a geodetikus vonalak simuló síkja egy normálmetszet simuló síkja; a felület minden pontjában a geodetikus vonalak simuló síkja a normálmetszet síkjával esik össze, vagy a mi ugyanaz, a geodetikus vonalak főnormálisa a felület minden pontjában összeesik a felület normálisával.- Ezzel a geodetikus vonalaknak egy tisztán geometriai értelmezését kaptuk.-

A geodetikus görbület úgy volt értelmezve, hogy két végtelenül szomszédos pontban P és P' meghúztuk az érintőket: t_1 és t_2, most a második érintőt orthogonálisan ráprojiciáltuk a P pont érintő síkjára: t_2' s már most:

$$\frac{\sphericalangle (t_1 t_2')}{ds}$$

a geodetikus görbületet szolgáltatta. Most a geodetikus görbületnek egy más értelmezését vezetjük be. Vegyünk 3 pontot: P, P', P'', hogy a felületen mind végig belül maradjunk, kössük össze a P és P'-t egy geodetikus vonallal (ez mindig lehetséges) épp úgy a P és P''-t ugyancsak egy geodetikus vonallal; nevezzük az elsőt: τ_1-nek, a másodikat τ_2-nek. Határozzuk meg ezeknek a hajlásszögét. E végből meg kell határoznunk e két geodetikus vonalak érintőit. A P és P''-on fekte-



tünk egy t_1' érintőt, akkor: $(t_1' t_2)\sphericalangle$ lesz a két geodetikus vonal hajlásszöge. A $(t_1' t_2)$ az érintő sík, a $(t_1 t_1')$ a τ_1 geodetikus vonal simuló síkja. Ámde tudjuk, hogy a geodetikus görbe simuló síkja merőleges az érintő sikra. Tehát a t_1'-t kapom, ha t_1-en keresztül merőleges síkot fektetünk az érintő síkra.

$$t_1' = \text{orthog. projectio } t_1 \text{ (az érintő sikra)}$$

úgy, hogy:

$$\frac{\sphericalangle (t_2 t_1')}{ds} = \frac{(\tau_2 \tau_1)\sphericalangle}{ds}$$

Mivel a $t_2 t_1'$ ugyanaz, mint a mely a geodetikus görbület számlálójában szerepelt: úgy is értelmezhetjük a geodetikus görbületet, hogy veszünk a görbén 3 végtelenül szomszédos pontot: P, P', P''; fektetünk a P, P' és P', P'' pontokon keresztül geodetikus vonalakat, nevezhetjük ezeket végtelenül szomszédos geodetikus érintőknek, ezeknek a hajlás szöge osztva az ívelemmel: adja a geodetikus görbületet. Ilyenformán a geodetikus vonalak segélyével a felületi görbék görbülete egészen úgy van értelmezve, mint a síkbeli görbéké.–

Most még egy további analogiát lehet a síkbeli egyenesek és a geodetikus görbék között felállítani. Ezen célból a felület egyenlete ilyen alakban legyen adva:

$$F(x, y, z) = 0$$

Az érintő sík egyenlete valamely x, y, z pontban ez lesz:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\xi - x) + \frac{\partial F}{\partial y}(\eta - y) + \frac{\partial F}{\partial z}(\zeta - z) = 0$$

A felület normálisa iránycosinusainak viszonya ez:

$$X : Y : Z = \frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial y} : \frac{\partial F}{\partial z}$$

Ha tehát a binormális iránycosinusait λ, μ, ν-el jelöljük, akkor ez lesz a geodetikus görbék egyenlete:

$$\lambda X + \mu Y + \nu Z = 0$$

vagy: $$\lambda \frac{\partial F}{\partial x} + \mu \frac{\partial F}{\partial y} + \nu \frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(y'z'' - z'y'') + \frac{\partial F}{\partial y}(z'x'' - x'z'') + \frac{\partial F}{\partial z}(x'y'' - y'x'') = 0$$

Most képzeljük az F-be a geodetikus vonalak valamelyik előállítását behelyettesítve, akkor F identice 0 lesz, s továbbá:

$$\frac{dF}{ds} = \frac{\partial F}{\partial x} x' + \frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial z} z' = 0$$

Kaptunk $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$ számára két homogén lineáris differentiális egyenletet, a melyekből ezen mennyiségek viszonya kiszámítható:

$$\frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial y} : \frac{\partial F}{\partial z} = M_1 : M_2 : M_3$$

$$\begin{aligned} M_1 &= z'(z'x'' - x'z'') - y'(x'y'' - y'x'') \\ &= x''(y'^2 + z'^2) - x'(y'y'' + z'z'') \\ &= x''(y'^2 + z'^2 + x'^2) - x'(x'x'' + y'y'' + z'z'') \end{aligned}$$

Ámde:

$$x'^2+y'^2+z'^2=1$$

$$d(x'^2+y'^2+z'^2)=2(x'x''+y'y''+z'z'')=0$$

Tehát:

$$M_1=x''$$

$$M_2=y''$$

$$M_3=z''$$

Kapjuk tehát a geodetikus vonalakra nézve, hogy:

$$\frac{\partial F}{\partial x}:\frac{\partial F}{\partial y}:\frac{\partial F}{\partial z}=x'':y'':z''$$

Ez a proportio két másodrendü differentiális egyenletet szolgáltat a geodetikus görbékre nézve; van még ezenkivel egy differentiális egyenletünk t. i.:

$$x'^2+y'^2+z'^2=1,$$

úgy, hogy a geodetikus görbék:

$$x=f(s)$$

$$y=g(s)$$

$$z=h(s)$$

függvényeinek a meghatározására három differentiális egyenletünk van.

A proportiót, ha tetszik így is írhatjuk:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x}{ds^2}&=\lambda\frac{\partial F}{\partial x}\\ \frac{d^2y}{ds^2}&=\lambda\frac{\partial F}{\partial y}\\ \frac{d^2z}{ds^2}&=\lambda\frac{\partial F}{\partial z}\end{aligned}\right\}\quad(\lambda)$$

Ilyen alakba írhatjuk a geodetikus görbék egyenletét, ha a felület adva van. A diff. egyenletek ezen alakja egy mechanikai interpretátióra is alkalmas.-

Képzeljünk a felületen egy mozgó pontot, a mely a felületről nem tud távozni. Tegyük fel, hogy külső erő nem hat, akkor a gyorsuló erő D'Alambert elve szerint magából a kényszerből adódik, a mely mindig helyettesíthető egy erővel, a melynek componensei jelenleg:

$$\mu\frac{\partial F}{\partial x}, \mu\frac{\partial F}{\partial y}, \mu\frac{\partial F}{\partial z}$$

a pont tömegét kényelem szempontjából egynek véve: kapjuk:

$$\ddot{x} = \mu\frac{\partial F}{\partial x}$$

$$\ddot{y} = \mu\frac{\partial F}{\partial y}$$

$$\ddot{z} = \mu\frac{\partial F}{\partial z}$$

A μ az úgynevezett Lagrange féle parameter. Ha most felírjuk az eleven erő elvét: akkor kapjuk, hogy:

$$\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z} = \mu\left(\frac{\partial F}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial F}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial F}{\partial z}\dot{z}\right)$$

A jobb oldali kifejezés azonban nem egyéb, mint F-nek t szerint képezett totális diff. hányadosa, tehát a jobb oldal 0, mert F a pálya görbére identice teljesül. Ennélfogva a baloldal:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = 0$$

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \text{constans} = c^2$$

Ez az eleven erő elve. Az egyenlet azt mondja, hogy:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2=\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=C^2$$

Tehát a mozgás úgy megy végbe, a felületen, hogy egyenlő idő alatt egyenlő utat fut meg az anyagi pont. -
Most már azt a görbét is közvetlenül megtudjuk határozni, a melyben a mozgás véghez megy. -
Ha veszszük ugyanis:

$$\frac{dx}{ds}=x'=\frac{dx}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}=\frac{1}{c}\dot{x}$$

$$\frac{dy}{ds}=y'=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}=\frac{1}{c}\cdot\dot{y}$$

$$\frac{dz}{dt}=z'=\frac{dz}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}=\frac{1}{c}\dot{z}$$

$$x''=\ddot{x}\,\frac{1}{c^2}$$

$$y''=\ddot{y}\,\frac{1}{c^2}$$

$$z''=\ddot{z}\,\frac{1}{c^2}$$

Ha most már a mozgás differentiális egyenleteibe: $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$ helyébe beírjuk ezeket, akkor megkapjuk a pálya görbe diff. egyenleteit ebben az alakban:

$$x''=\frac{\mu}{c^2}\cdot\frac{\partial F}{\partial x}$$

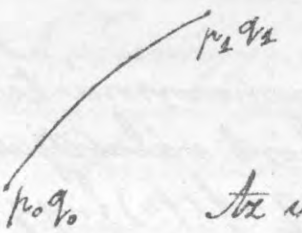
$$y''=\frac{\mu}{c^2}\cdot\frac{\partial F}{\partial y}$$

$$z''=\frac{\mu}{c^2}\cdot\frac{\partial F}{\partial z}$$

A pálya görbe differentiális egyenletei egyeznek a geodetikus görbe diff. egyenleteivel.– Tehát a geodetikus vonal mechanikai szempontból ugyanazt a szerepet viseli a felületen, a mit az egyenes vonal a síkban.–

Most arra a kérdésre vonatkozólag kell egy pár megjegyzést tennünk, hogy a geodetikus vonal a felület két pontja között a legrövidebb utat szolgáltatja-e.?

Vegyünk a felületen két pontot $p_0 q_0$, és $p_1 q_1$, fektessünk ezeken át egy görbét: $q = f(p)$. Számítsuk ki ezen görbe ívhosszát a $p_0 q_0$ és $p_1 q_1$ pontok között:



$$ds^2 = E dp^2 + 2F dp\, dq + G dq^2$$

$$\frac{ds}{dp} = \sqrt{E + 2F\frac{dq}{dp} + G\left(\frac{dq}{dp}\right)^2}$$

Az ívhossz lesz: $$S = \int_{p_0 q_0}^{p_1 q_1} \frac{ds}{dp}\, dp =$$

$$= \int_{p_0}^{p_1} \sqrt{E + 2F\frac{dq}{dp} + G\left(\frac{dq}{dp}\right)^2}\, dp$$

Most már a következő problemát állíthatjuk fel: Fektessünk ezen a két ponton keresztül különböző görbéket s minden ilyen görbére nézve számítsuk az S-et. Ez az S a különböző görbékre nézve más és más lesz, az S tehát függ a $q = f(p)$ görbe választásától (azt nem lehet mondani, hogy S függvénye az $f(p)$-nek). Felvethetjük most azt a kérdést, hogy, ha az $f(p)$-t különbözőképen választjuk, akkor melyik $f(p)$ mellett lesz az S minimum? Ez mit is jelent? Az S mindig egy állandó érték, a mely más és más lesz, ha az $f(p)$ görbét különbö zőkép választjuk meg, geometriailag szólva, ha az $f(p)$-t variáljuk. T.i. a két pont között kifeszitve gondolunk egy nyujtható fonalat s azt deformáljuk úgy, hogy a két pont között egész hosszában a felülethez simúljon. Ezt a kérdést is úgy kell érteni, mint a közönséges maximum-minimumot, t.i. azt, hogy az S valamely görbére nézve a legkisebb, úgy kell érteni, hogy a közvetlen szomszédságában a legkisebb.-

Milyen féle ez a probléma? van nekünk egy határozott integrálunk:

$$\int_{p_0}^{p_1} \Phi\left(p, q, \frac{dq}{dp}\right)$$

Ezt az integrált oly módon akarjuk minimummá tenni, hogy a p-nek alkalmas függvényeként választjuk meg a q-t. Ez a probléma tehát olyan $q=f(p)$ függvény meghatározását kivánja, a melyre nézve ez az integrál kisebb, mint bármely szomszédos görbére nézve. Ez a feladat a variátió számitás körébe tartozik. A variátió számitás problémájánál is úgy szoktunk eljárni, mint a közönséges maximum, minimum számitás esetében. Ahhoz ugyanis, hogy egy bizonyos x mellett $f(x)$ függvénynek maximuma vagy minimuma lehessen: szükségesnek ismertük fel, hogy:

$$\frac{df}{dx} = 0$$

legyen. Annak eldöntéséhez, hogy tényleg van-e extremum, a magasabb rendű deriváltak megvizsgálása volt szükséges. Teljesen analog módon járunk el a variatió számitás esetében is. Úgy képzeljük ugyanis a dolgot, hogy a q egy kis variaciót szenved, a melynek következtében q átmegy $q+\xi$-be s vele együtt természetesen a $\frac{dq}{dp}$ is átmegy: $\frac{dq}{dp}+\eta$-ba, a hol ξ és η kicsiny variátiók. – Most meghatározzuk az eredeti és a variált görbére vonatkozó integrálok különbségét s jelöljük:

$$\Delta\Phi\left(p,q,\frac{dq}{dp}\right)=\Phi\left(p,q+\xi,\frac{dq}{dp}+\eta\right)-\Phi\left(p,q,\frac{dq}{dp}\right)$$

Ezt nevezni szoktuk az integrál totális variatiójának. Ez megfelel a közönséges esetben $f(x+h)-f(x)$-nek. Már most a totális variátiót a variatiók dimensiója szerint sorba-bontjuk, épenúgy, mint a függvény totális differentiálját a h hatványai szerint, jelen esetben a ξ és η hatványai szerint. Természetesen a ξ és η nem függetlenek egymástól. Ha ilyenképen kitüntetjük azokat a tagokat, a melyek a variatiókat linearisan tartalmazzák, kapjuk az első variatiót. Azután kitüntetjük azokat a tagokat, a melyek a variatiókat másodfokon tartalmazzák: ezek adják a második variatiót és így tovább. – Most teljesen azon okoskodással, mely a függvények esetében szokásos, kapjuk, hogy, ha az eredeti görbének: $q=f(p)$ extremum felel meg, akkor az első variatió szükségképen eltünik:

$$\delta\int\Phi\left(p,q,\frac{dq}{dp}\right)=0$$

mert különben a totalis variatió előjele változnék a szerint, hogy balfelöl, vagy jobb felöl variálunk. Az a tény, hogy az első variatió eltünik, egy differentiális egyenletet szolgáltat az ismeretlen függvény részére, a mely igy hangzik:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial q}-\frac{d}{dp}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial q'}\right)=0$$

$$q'=\frac{dq}{dp}$$

Ezen egyenlet a q''-t is tartalmazza, tehát általánosan szólva egy másodrendü parciális differentiális egyenlet. Nevezzük ezt Euler-Lagrange féle diff. egyenletnek, a mely a variatió számitásban ugyanazt a szerepet játsza, mint a közönséges maximum, minimum számitásban az $f'(x)=0$. Az a kérdés, hogy ez a diff. egyenlet tényleg szolgáltat-e extremumot, másodrendü variatiók vizsgálatába ütközik. Ha a mi esetünkben, a mikor:

$$\Phi=\sqrt{\mathcal{E}+2\mathcal{F}\frac{dp}{dq}+\mathcal{G}\left(\frac{dp}{dq}\right)^2}$$

megalkotjuk a Lagrange féle diff. egyenletet, akkor épen a geodetikus vonalak diff. egyenletét kapjuk. - Ezzel természetesen még nincs kimutatva, hogy a geodetikus vonal két pont között tényleg a legrövidebb út. Csak az van kimutatva, hogy, ha van ilyen legrövidebb út: akkor az a geodetikus vonal. - Tényleg lehet gondolni olyan felületeket, a melyekre nézve a geodetikus vonalak nem adják a legrövidebb útat. Vegyük pl. a gömböt, ezen a geodetikus vonalak a legnagyobb körök. Ha a gömbnek két olyan pontját veszszük, a melyek elegendő közel esnek egymáshoz, akkor tényleg a geodetikus vonal a legrövidebb út, mint a felrajzolt esetben. Ha azonban két diametralisan szemben

lévő pontot veszünk, azokon végtelen sok legnagyobb kört fektethetünk, úgy, hogy itt egyáltalában nem beszélhetünk legrövidebb útról.- A variátió számitásnak a felhasználása a geodetikus vonalak differentiális egyenletének a felállitására módszertani szempontból igen fontos.-

Most a geodetikus görbültségre nézve fogunk még néhány megjegyzést tenni.-

Állitsuk fel a geodetikus görbültség kifejezését a:

$$p = const., \quad q = const.$$

parameter görbékre nézve. Általánosan:

$$\frac{1}{r_g} = \sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}-\mathcal{F}^2}\left\{\ldots\right\}$$

Ebben a kifejezésben szerepeltek a p', q', p'', q'', a melyek a p és q-nak ívhossz szerint képezett deriváltjaít jelentik.

A $p = const.$ görbére nézve: $p' = 0$, $p'' = 0$

$$\frac{1}{r_g} = \sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}-\mathcal{F}^2}\left\{{22 \atop 1}\right\}q'^3$$

vagy, mivel $p = const.$ esetén:

$$\frac{dq}{ds} = q' = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{G}}}$$

$$\frac{1}{r_g} = \sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}-\mathcal{F}^2}\cdot\frac{\left\{{22 \atop 1}\right\}}{\mathcal{G}^{3/2}}$$

Specializáljak ezt a kifejezést arra az esetre, ha orthogonális rendszerrel van dolgunk, vagyis, ha $\mathcal{F}=0$.

Ebben az esetben a $p = const.$ görbe geodetikus görbültségének az explicit kifejezése a következő lesz:

$$\frac{1}{r_g}=\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}-\mathcal{F}^2}\cdot\frac{-\mathcal{F}\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial q}+2\mathcal{G}\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial q}-\mathcal{G}\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial p}}{2(\mathcal{E}\mathcal{G}-\mathcal{F}^2)}\cdot\frac{1}{\mathcal{G}^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}}\cdot\frac{-\mathcal{G}\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial p}}{2\mathcal{E}\mathcal{G}}\cdot\frac{1}{\mathcal{G}^{3/2}}=-\frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}}}\cdot\frac{1}{2}\mathcal{G}^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial p}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}}}\cdot\frac{\partial\sqrt{\mathcal{G}}}{\partial p}$$

Hasonló eljárással kapjuk, hogy a q= const. görbe geodetikus görbültsége:

$$\frac{1}{r_g}=-\frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}\mathcal{G}}}\cdot\frac{\partial\sqrt{\mathcal{E}}}{\partial q}$$

A Gauss féle coordinátarendszer.

Most már a fenti képleteknek a felhasználásával egy igen fontos koordinata rendszert fogunk bevezetni.- Ez a coord:- rendszer teljesen analog lesz a polárkoordinátákhoz (a síkban).- Ez a coord.-rendszer lényegében abban fog állani, hogy vesszük a felület egy pontjából kiinduló geodetikus görbéknek egész seregét, ezeknek mindenikére egyenlő hosszakat mérünk s ezen hosszaknak megfelelő pontokat vesszük. Már mostan egyik paraméter görbe sereg lesz a geodetikus vonalak serege. Ez nagyon fontos, mert a több dimensiós képződményeknél is teljesen analog koordináta rendszert vezethetünk be.- Ezt a coord.-rendszert Gauss vezette be.-

Gondoljunk tehát mindenekelőtt egy orthogonális coord:-rendszert, olyanformán, hogy:

$$ds^2 = E\,dp^2 + G\,dq^2$$

legyen. Rendezzük úgy be a dolgot, hogy a $q=\text{const.}$ görbék geodetikus vonalak legyenek. Ezt természetesen igen könnyen elérhetjük, csak arról kell gondoskodnunk, hogy a geodetikus vonalak egyenlete a $q=\text{const.}$ mellett teljesüljön. A $q=\text{const.}$ görbe geodetikus görbültsége általánosan:

$$\frac{1}{r_g} = -\frac{1}{\sqrt{EG}} \cdot \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial q}$$

Ez a kifejezés most $=0$, mert a $q=\text{const.}$ görbe most geodetikus vonal.- Tehát:

$$-\frac{1}{\sqrt{EG}} \cdot \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial q} = 0$$

$\frac{1}{\sqrt{EG}}$ nem lehet 0, tehát szükségképen:

$$\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial q} = 0$$

A $\sqrt{E}$ tehát független a q-tól, pusztán a p-nek a függvénye:

$$\sqrt{E} = M(p)$$

Természetes, hogy ez fordítva elegendő arra, hogy a q geodetikus vonal legyen. Tehát azt, hogy az egyik paraméter görbesereg a geodetikus vonalak serege legyen, igen könnyen elérhetjük az által, hogy az E-t függetlennek válasszuk a q-tól. Most egy új p-t vezethetünk be: vegyük ugyanis ezt az integrált:

$$\int_{p_0}^{p} M(p)\,dp = \lambda(p) = \bar{p}$$

Ezt a $\lambda(p)$-t bevezetjük, mint új paramétert és jelöljük $\bar{p}$-al. Most épen úgy, mint előbb p és q-val, $\bar{p}$ és q-val fejezhetjük ki a koordinátákat a felületen;

$$d\bar{p} = M(p)\,dp = \sqrt{E}\cdot dp$$

$$d\bar{p}^2 = E\,dp^2$$

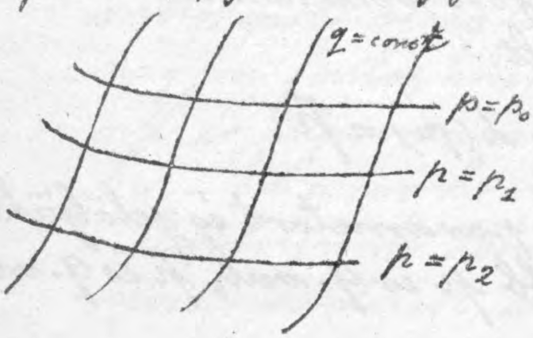
A G-be szintén bevezetjük a $\bar{p}$-t. Az ivelem kifejezése ez lesz:

$$ds^2 = d\bar{p}^2 + G\,dq^2$$

Hogy, ha egy orthogonális coord.-rendszerben az egyik paraméter görbe sereg a geodetikus vonalak serege, akkor a jelzett átalakitással ellehet érni, hogy E egy absolut constáns legyen. A $\bar{p}$ helyett a következőkben egyszerűen p-t irhatunk, úgy képzelve a dolgot, hogy a p-t már a priori úgy választottuk meg, hogy:

$$ds^2 = dp^2 + G\,dq^2$$

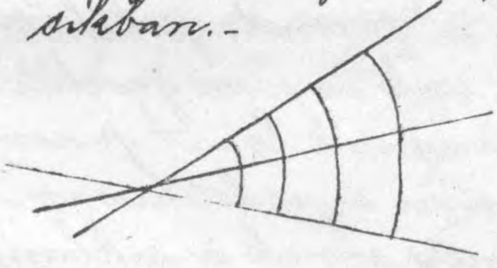
Nézzük most, hogy a $p = \text{const.}$ görbék milyen jellegűek? Tudjuk rólok mindenek előtt azt, hogy a $q = \text{const.}$ görbéket derékszög alatt metszik, tehát orthogonális trajectóriái a geodetikus vonalaknak. Ha tehát veszük a geodetikus vonalaknak egyik seregét a $q = \text{const.}$ görbéknek s ezeknek orthogonális trajectoriait $p = \text{const.}$ görbéknek, akkor mindig ellehet érni, hogy az ivelemnek a felírt kifejezése legyen.-



Számitsuk ki most egy $q = \text{const.}$ görbének az ivhosszát két különböző $p = \text{const.}$ görbe közt. A $q = \text{const.}$ görbének az ivhossza egyszerűen:

$$\int_{p_0}^{p_1} dp = p_1 - p_0$$

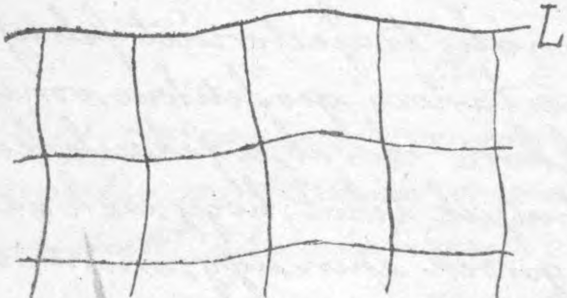
a p_1 és p_0 görbék között. Itt a q = const. görbe speciális jellege nem is szerepel, más szóval, akármelyik geodetikus görbe, (a mely természetesen, mint parameter görbe szerepel) ívhossza két p = const. görbe között ugyanaz és egyenlő a két parameter érték különbségével. Ha tehát a geodetikus vonalak orthogonális trajectoriáit felrajzoljuk, akkor a felvett sereghez tartozó geodetikus vonalak mindenikének ugyanakkora darabja fekszik két két trajectoria között. Mondhatjuk tehát, hogy ezek az orthogonális görbék parallel görbék épen úgy, mint a síkban.-



Ez nem magától értetődő dolog, hanem egy igen nevezetes tulajdonság. A mi fogásunk, t. i. a p ügyes bevezetése, abban állott, hogy mi épen a geodetikus vonalakból levágott darabokat vezettük be coordinátáknak.- Más szóval a p = const. görbék nem egyebek, mint kiindulva egy bizonyos pontból, a geodetikus vonalakon mért ívhosszak. Ez a p-knek geometriai jelentése.-

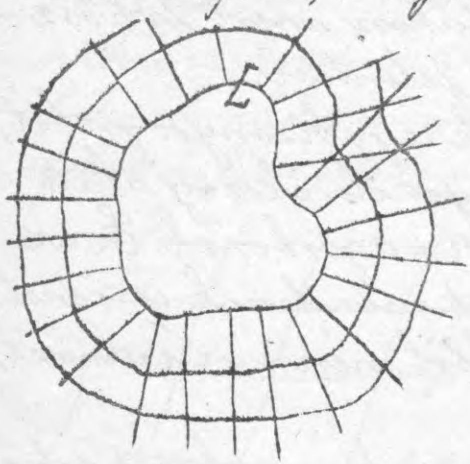
Úgy mondhatnánk, hogy veszünk egy bizonyos görbét, a mely a geodetikus vonalak seregét derékszög alatt metszi s ezt az L görbét veszük $p = 0$ görbének. Ez az orthogonális trajektória már most mindenik q = const. görbén meghatároz egy pontot s ebből mérve az ívhosszt, ez az ívhossz közvetlenül lesz a p.

Rajzoljunk egy vezérgörbét L s ennek minden pontjában fektetjük azt a geodetikus vonalat, a mely ezen vezér görbét derékszög alatt metszi. Ilyen geodetikus vonal általánosan szólva csak egy van. Ezeket a geodétikus vonalakat vesszük $q = const.$ görbéknek. Most már kétféle módon járhatunk el, vagy úgy, hogy minden egyes $q = const.$ görbére egyenlő hosszakat rakunk fel s ezeknek a végpontjait összekapcsoljuk, az így adódó görbék a $q = const.$ görbéket derékszög alatt metszik; vagy



úgy is járhatunk el, hogy vesszük a $q = const.$ görbéket derékszög alatt metsző görbéket: ezek az összes geodétikus görbékből egyenlő darabokat vágnak le. – A p nem egyéb, mint az L görbétől számítva a geodetikus vonalakon mért ívhossz. Mi felel meg ennek a síkban?

A síkban képzeljük az L görbét akármilyen zárt görbének s szerkesszük meg ezen zárt görbének összes normálisait kifelé, rakjunk fel ezekre egyenlő hosszakat, akkor kapunk egy ilyen pókhálószerű képződményt. Ebben a pókhálóban most van egy síkbeli coordináta rendszerünk, a melyben az ívelem kifejezése a következő:



$$ds^2 = dp^2 + G dq^2$$

Itt a p nem egyéb, mint a vezérgörbe valamely pontjától számított ívhossz a normálisokon. –

Ebben az új coordinátarendszerben most már ténylegevidentiába helyezhetjük, hogy a geodétikus vonalak tényleg a legrövidebb útat határozzák meg két pont között. Vegyünk ugyanis egy tetszőleges geodetikus görbét, akkor tudom, hogy annak hossza két pont között:

$$\int_{p_0}^{p_1} dp = p_1 - p_0$$

Képzeljünk most ezen két pont között egy más görbét fektetve, a melyre nézve:

$$q = \varphi(p)$$

Számítsuk ki ennek a görbének az ívhosszát a p_0 és p_1 pontok között; lesz:

$$\int_{p_0}^{p_1} (dp^2 + G\,dq^2)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \int_{p_0}^{p_1} \left[1 + G\left(\frac{dq}{dp}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} dp = \int_{p_0}^{p_1} \left[1 + G\varphi'(p)^2\right]^{\frac{1}{2}} dp$$

A G-be természetesen a q helyébe belekepzeljük a $\varphi(p)$-t. A mi felületünk valós felület, tehát $EG - F^2$ lényegesen positiv, vagy mert jelen esetben $F=0$, következik, hogy: $EG > 0$, vagy mert $E = 1$; $G > 0$.

Az integráljel alatt szerepel: $\sqrt{1 + G\varphi'(p)^2}$, mivel:

$$G.\varphi'(p)^2 > 0$$

a négyzetgyökjel alatt szereplő kifejezés lényegesen nagyobb, mint: 1, s így maga a $\sqrt{\ }$ is nagyobb 1-nél. Most már a középérték tétel egyszerű alkalmazásából következik, hogy:

$$\int_{p_0}^{p_1} \sqrt{1+G\varphi'(p)^2} \cdot dp > \int_{p_0}^{p_1} dp$$

Tehát a geodetikus vonal tényleg a legrövidebb útat adja két pont között. Állítsuk fel most a bevezetett koordináta rendszerben, a melyet ezután mindig Gauss féle koordinátarendszernek fogunk nevezni, a geodetikus görbület kifejezését.

Az ivelem kifejezésében:

$$ds^2 = dp^2 + G dq^2$$

A G helyett használjuk ezt a jelölést:

$$G = m^2$$

a mit tehetünk, hiszen a G mindig lényegesen positiv. Tehát:

$$ds^2 = dp^2 + m^2 dq^2$$

Most már ebben a coord.-rendszerben igen egyszerűen kiszámithatjuk a Christoffel féle symbolumok értékét s a geodetikus görbültséget explicit formában igen egyszerűen kapjuk:- Egy tetszés szerinti görbére nézve:

$$\frac{1}{r_g} = \frac{1}{m}\left\{ m^2(p'q''-q'p'') + \frac{\partial m^2}{\partial p} p'^2 q' + \frac{1}{2}\frac{\partial m^2}{\partial q} p' q'^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2} m^2 \frac{\partial m^2}{\partial p} q'^3 \right\}$$

$$\frac{dp}{dq} = \frac{p'}{q'}$$

$$\frac{d^2p}{dq^2} = \frac{p''q' - p'q''}{q'^2} \cdot \frac{1}{q'}$$

$$\frac{1}{r_g} = -q'^3\left\{ m\frac{d^2p}{dq^2} - 2\frac{\partial m}{\partial p}\left(\frac{dp}{dq}\right)^2 - \frac{\partial m}{\partial q}\frac{dp}{dq} - m^2\frac{\partial m}{\partial p}\right\}$$

$$q' = \frac{dq}{ds} = \frac{dq}{\sqrt{dp^2+m^2dq^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{dp}{dq}\right)^2+m^2}}$$

Jelöljük: $\frac{dp}{dq} = \varkappa$

akkor mondhatom, hogy:

$$q' = \frac{1}{\sqrt{\varkappa^2+m^2}}$$

$$\frac{1}{r_g} = -\frac{1}{(\varkappa^2+m^2)^{3/2}} \cdot \left\{ m\frac{d\varkappa}{dq} - 2\frac{\partial m}{\partial p}\varkappa^2 - \frac{\partial m}{\partial q}\varkappa - m^2\frac{\partial m}{\partial p} \right\}$$

$$= -\frac{1}{(\varkappa^2+m^2)^{3/2}} \cdot \frac{\partial m}{\partial p}(\varkappa^2+m^2) + \frac{1}{(\varkappa^2+m^2)^{3/2}}\left\{ m\frac{d\varkappa}{dq} - \frac{\partial m}{\partial p}\varkappa^2 - \frac{\partial m}{\partial q}\varkappa \right\}$$

$$\frac{d}{dq}\left(\frac{\varkappa}{(\varkappa^2+m^2)^{1/2}}\right) = (\varkappa^2+m^2)^{1/2}\frac{d\varkappa}{dq} - \varkappa\frac{1}{2}(\varkappa^2+m^2)^{-\frac{1}{2}}\left[2\varkappa\frac{d\varkappa}{dq} + 2m\left(\frac{\partial m}{\partial p}\varkappa + \frac{\partial m}{\partial q}\right)\right] =$$

$$= \frac{(\varkappa^2+m^2)\frac{d\varkappa}{dq} - \varkappa\frac{2dq}{dq} - \varkappa^2 m\frac{\partial m}{\partial p} - \varkappa m\frac{\partial m}{\partial q}}{(\varkappa^2+m^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Ha ezt bevezetjük: $\frac{1}{r_g}$ kifejezésébe, akkor kapjuk, hogy:

$$-\frac{1}{r_g} = -\frac{1}{(\varkappa^2+m^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\partial m}{\partial p} + \frac{1}{m}\frac{d}{dq}\left(\frac{\varkappa}{(\varkappa^2+m^2)^{\frac{1}{2}}}\right)$$

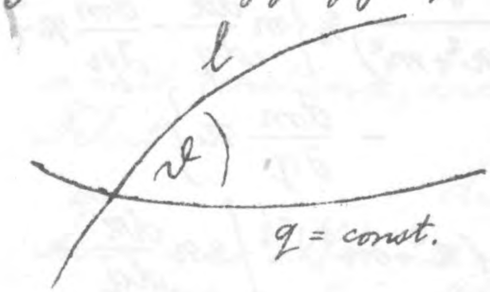
Ebből most már közvetlenül kapjuk a geodetikus vonalak differentiális egyenletét, ha t. i. a jobb oldalt 0-nak írjuk. Ha ebben a speciális coord.-rendszerben felállítjuk a Lagrange féle diff. egyenletet, akkor közvetlenül ezt az alakot kapjuk, a mi az $\frac{1}{r_g} = 0$ ból kiadódik, vagyis:

$$\frac{1}{(\kappa^2+m^2)^{1/2}} \cdot \frac{\partial m}{\partial p} = \frac{1}{m}\frac{d}{dq}\left(\frac{\kappa}{(\kappa^2+m^2)^{1/2}}\right)$$

Ezt a sajátságos formát Gauss állította fel a „Disquisitiones . . . ." 19 §. ban. Ez a differentiális egyenlet másodrendű, mert már:

$$\kappa = \frac{dp}{dq}$$

Most már egy speciális feladatot kell ebben a koordinátarendszerben megoldanunk. Képzeljünk ugyanis, hogy a felületen van egy tetszésszerinti görbe; ennek minden pontján átmegy egy q = const. görbe. A tetszőlegesen felvett



és a q = const. görbe hajlásszöge: ϑ legyen. A mi ezen hajlásszögnek az értelmét illeti, meg kell jegyeznünk, hogy így, a tetszőleges, mint a q = const. görbére nézve positiv iránynak azt veszük, a melyben az ívhosszak nőnek.-

Képzeljük, hogy a tetszésszerint felvett l görbe az által van jellemezve, hogy:

$$p = \varphi(s)$$

$$q = \psi(s)$$

A hol „s" az l görbe mentén vett ívhosszat jelenti.

$$\kappa = \frac{dp}{dq} = \frac{\varphi'(s)}{\psi'(s)}$$

A ϑ kiszámításara alkalmazzuk az általános képletet a mi speciális coord. rendszerünkben. Lesz:

$$\cos\vartheta = \frac{dp}{ds}\cdot\frac{dp}{d\sigma} + \frac{dq}{ds}\cdot\frac{dq}{d\sigma}\, m^2$$

a hol σ a $q = \text{const.}$ görbe mentén vett ívhosszat jelenti, „s" pedig az l görbe ívhossza. Jelen esetben:

$$\frac{dq}{d\sigma} = 0$$

lévén:

$$\cos\vartheta = \frac{dp}{ds} \cdot \frac{dp}{d\sigma}$$

Ámde:

$$d\sigma^2 = dp^2$$

a $q = \text{const}$ görbére nézve. Tehát:

$$\frac{dp}{d\sigma} = 1$$

s így:

$$\cos\vartheta = \frac{dp}{ds} - \frac{\frac{dp}{dq}}{\frac{ds}{dq}} = \frac{R}{\sqrt{R^2+m^2}}$$

Szükségünk lesz még a $\sin\vartheta$-ra is:

$$\sin\vartheta = \sqrt{1-\cos^2\vartheta} = \sqrt{1 - \frac{R^2}{R^2+m^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{m^2}{R^2+m^2}} = \frac{m}{\sqrt{R^2+m^2}}$$

Állítsuk fel az l görbére nézve a geodetikus görbültséget:

$$-\frac{1}{r_g} = \frac{1}{m}\left\{-\frac{\partial m}{\partial p} \cdot \frac{m}{(R^2+m^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{d}{dq}\left(\frac{R}{(R^2+m^2)^{\frac{1}{2}}}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{m}\left\{-\frac{\partial m}{\partial p}\sin\vartheta + \frac{d\cos\vartheta}{dq}\right\}$$

$$= \frac{1}{m}\left\{-\frac{\partial m}{\partial p} - \sin\vartheta\frac{d\vartheta}{dq}\right\}$$

$$\frac{1}{r_g} = \frac{\sin\vartheta}{m}\cdot\left(\frac{\partial m}{\partial p} + \frac{d\vartheta}{dq}\right)$$

Tegyük fel, hogy az l görbe maga is egy geodetikus vo-

46

nal, akkor:

$$\frac{\sin\vartheta}{m}\cdot\left(\frac{\partial m}{\partial p}+\frac{d\vartheta}{dq}\right)=0$$

Két eset lehetséges t.i. l maga egy $q=\text{const.}$ görbe, a mikor is $\vartheta=0$. Tehát az első factornak az eltűnése szolgáltatja a $q=\text{const.}$ görbéket. Ha az l nem egy $q=\text{const.}$ görbe, hanem akármilyen más geodetikus vonal, akkor a második factor lesz 0:

$$\frac{\partial m}{\partial p}+\frac{d\vartheta}{dq}=0$$

Ez az egyenlet úgy tekinthető, mint geodetikus vonalak differentiális egyenlete, a melyekből a $q=\text{const.}$ görbék hiányoznak; a $q=\text{const.}$ görbék nem tesznek eleget ennek a differentiális egyenletnek.–

Szorozzuk meg most a: $-\frac{1}{r_g}$-t ds-el:

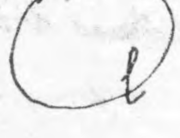
$$-\frac{ds}{r_g}=-\frac{\sin\vartheta\, ds}{m}\left(\frac{\partial m}{\partial p}+\frac{d\vartheta}{dq}\right)$$

$$=\frac{-ds}{\sqrt{k^2+m^2}}\cdot\left(\frac{\partial m}{\partial p}+\frac{d\vartheta}{dq}\right)$$

$$=-\frac{\sqrt{dp^2+m^2dq^2}}{\sqrt{k^2+m^2}}\cdot\left(\frac{\partial m}{\partial p}+\frac{d\vartheta}{dq}\right)$$

$$=-\frac{\partial m}{\partial p}dq-d\vartheta$$

Képzeljük az l görbét zárt görbének s integráljuk ennek mentén a $-\frac{ds}{r_g}$ kifejezést:



$$-\int_l\frac{ds}{r_g}=-\int_l\frac{\partial m}{\partial p}dq-\int_l d\vartheta$$

A legutolsó integrált igen könnyen elintézhetjük. Képzeljük ugyanis az l-t abban az irányban befutva, a merre az ívhosszak nőnek. Az l görbe minden pontjában fektetjük a $q=$ const. görbét s ϑ-t mindig a megszabott irányban számítjuk. Ha az l görbe folytonos, s ha egyszer teljesen befutottuk, akkor a kiindulási ponthoz ϑ 2π-nyi szaporulatával jutunk vissza. Ez nyilvánvalóan nem áll, ha a görbének csucsa van, mert

akkor akkor a 2π-ből lekell vonni a csúcs két érintőjének a hajlásszögét. Ha tehát felteszszük, hogy az l folytonos görbe, akkor:

$$\int_l d\vartheta = 2\pi$$

Ez tulajdonképen a zárt görbe értelmezése, mert analytikailag úgy mondhatjuk, hogy a zárt görbe befutásánál az: $\int d\vartheta$ 2π lesz.

Az:

$$\int_l \frac{ds}{r_g}$$

azt jelenti, hogy a görbének minden pontjában megszerkesztjük a geodetikus görbületet, ezt megszorozzuk az ívelemmel s ezt integráljuk az egész görbe mentén. A geodetikus görbületet azonban úgy értelmezzük, mint két, végtelenül szomszédos geodetikus érintő hajlásszögének és az ívelemnek a hányadosát; tehát:

$$\int_l \frac{ds}{r_g} = \int_l \frac{d\omega}{ds} \cdot ds = \int_l d\omega$$

31

A kontingencia szögeket összegezve, kapjuk az integrált.-

$$-\int_l \frac{ds}{r_g} + 2\pi = -\int_l \frac{\partial m}{\partial p} dq$$

A jobb oldali integrál átalakítására egy ismeretes tételt alkalmazunk, melynek segélyével, ha a felületünket egy síkra leképezve gondoljuk, kettős integrál alakjában írható.-

Ha ugyanis van egy integrálunk egy zárt görbe mentén, akkor ezt mindig így írhatjuk kettős integrál alakjába:

$$\int_l \mathcal{P}(x,y)\,dy = \iint \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} dx\,dy$$

(l) = l görbe belsejére

Ha ezt alkalmazzuk formálisan, akkor kapjuk, hogy:

$$\int_l \frac{\partial m}{\partial p} dq = \iint_{(l)} \frac{\partial^2 m}{\partial p^2} dp\,dq$$

A $dp\,dq$ helyett vezessük be a terület elemet:

$$dw = m\,dp\,dq$$

$$\frac{1}{m} dw = dp\,dq$$

$$\int_l \frac{\partial m}{\partial p} dq = \iint_{(l)} \frac{\partial^2 m}{\partial p^2} \cdot \frac{1}{m} dw$$

$$-\int_l \frac{ds}{r_g} + 2\pi = \iint_{(l)} \left(-\frac{1}{m} \frac{\partial^2 m}{\partial p^2}\right) dw$$

Az integrál jelalatti kifejezés régi ismerősünk, t.i. nem más, mint a görbület Gauss féle mértéke. Erről direct számítással meggyőződhetünk, akármelyik kifejezését vegyük is a K-nak. Ugyanis:

$$K = \frac{1}{\rho_1 \rho_2} = \frac{1}{F}\left[\frac{\partial}{\partial p}\left\{ {12 \atop 1} \right\} + \dots\right]$$

Ha most már ebbe a kifejezésbe belehelyettesítjük $F=0$, $E=1$, $G=m^2$-t, akkor kapjuk, hogy:

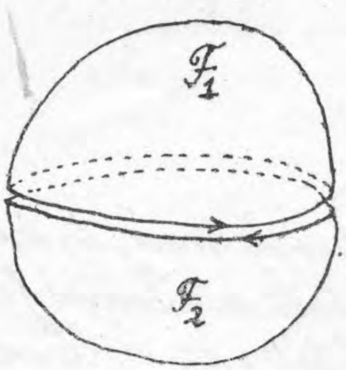
$$K = -\frac{1}{m}\cdot\frac{\partial^2 m}{\partial p^2}$$

A fenti képlet tehát így írható:

$$-\int_l \frac{ds}{r_g} + \int_l d\vartheta = \iint_{(l)} -K.\,dw$$

A jobb oldali integrállal is találkoztunk már, t.i. a mikor kiszámítottuk egy zárt idomnak a Gauss féle gömbre vett leképezésének a területét: ez volt az úgynevezett curvatura integra. Úgy, hogy a felírt képlet tiszta geometriai jelentéssel bír. – Ez az úgynevezett: Ossian - Bonnet féle képlet. Ennek fontosságát mindjárt egy pár példán illustrálni fogjuk. – Az első alkalmazása e képletnek azért fontos, mert a geometriának egy olyan tételét fogja szolgáltatni, a mely nem infinitesimális viszonyokra, hanem magára az egész felületre vonatkozik. – Mi ez ideig teljesen infinitesimalis viszonyokkal foglalkoztunk, t.i. egy reguláris pont közvetlen környezetével. Most be fogjuk mutatni, hogy ezek a vizsgálódások az egész felületre vonatkozólag adnak némi tájékoztatást. –

Vegyünk egy zárt felületet, a melynek sehol nincs singuláris pontja; tekintsünk pl. egy olyan zárt felületet, a mely egy gömbnek folytonos deformatiójából keletkezik. Ez tehát az analysis situs szempontjából egy egyszeresen összefüggő felület. Ha tehát ezen a felületen egy pontot kiszúrunk s ebből kiindulva, egy önmagába visszatérő metszetet fektetünk, akkor ez által a felület két egymástól elkülönült süvegre bomlik. Képzeljünk most mind a két süvegre



bevezetve Gauss féle coordináta rendszert. A süvegeken „l" görbének vehetjük a metszet partjait szolgáltató görbét s azt mondjuk, hogy positiv irányul mind két süvegre nézve azt veszszük, a melyben befutva az l-t, az illető süveg balfelől marad. Alkalmazzuk most az Ossian-Bonnet féle képletet az $\mathfrak{F}_1$ és $\mathfrak{F}_2$ süvegre:

$$\iint\limits_{(\mathfrak{F}_1)} K\,d\omega = -\int\limits_{l^+} \frac{ds}{r_g} + \int\limits_{l} d\vartheta$$

$$\iint\limits_{(\mathfrak{F}_2)} K\,d\omega = -\int\limits_{l^-} \frac{ds}{r_g} + \int\limits_{l} d\vartheta$$

Ha az l folytonos görbe: $\int d\vartheta = 2\pi$ úgy alsó, mint a felső félsikban. (Ha az l l nem volna folytonos érintőkkel bíró görbe, akkor ugyan nem volna: $\int\limits_l d\vartheta = 2\pi$, hanem annál kisebb, de mindenesetre úgy a felső, mint az alsó süvegre nézve ugyanaz). A jobb oldali integrál már egészen más természetű.

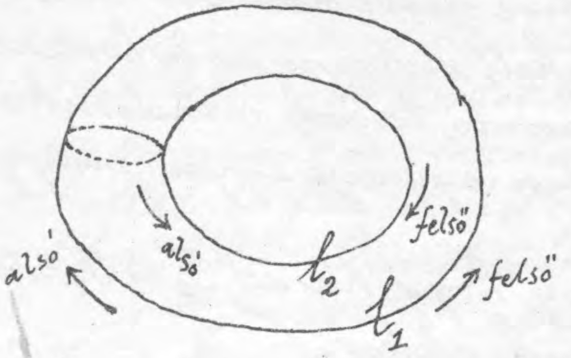
$$\int_{l^+} \frac{ds}{r_g}$$

azt mondja, hogy az l^+ görbére nézve kell vennünk a geodetikus görbületeket s meg kell szorozni az ívhosszal. Nyilvánvaló, hogy az összegezendő tagok mindenikének megfelel az: $\int_{l^-} \frac{ds}{r_g}$ - ben egy vele egyező nagyságú, de ellenkező jelű tag, úgy, hogy, ha az F_1 és F_2-re szóló integrálokat összegezzük, akkor:

$$\iint_{(F)} K\,dw = \text{felső}\int_{l} d\vartheta + \text{alsó}\int_{l} d\vartheta = 4\pi$$

Hogy, ha tehát egy egyszeresen összefüggő zárt felületre vesszük a curvatura integrált, annak az értéke 4π lesz. Ez már a curvatura integrál értelmezéséből evidens. Ugyanis én vettem egy zárt felületet, a mely a gömbből folytonos deformátióval keletkezett; ha ennek a leképezését vesszük a Gauss féle gömbre, akkor ez a leképezés az egész Gauss féle gömböt beteríti és pedig egyszer; tehát jelen esetben a curvatura integrál épen a Gauss féle gömb felületét adja, a mi pedig tudvalevőleg: 4π. Tehát a nyert eredmény magában nem volna különös nevezetességű, csakhogy most már egy igen elönyös általánositását adhatjuk ennek.-

Vegyünk ugyanis most egy többszörösen összefüggő zárt felületet. Vegyük egyelőre paradigmaképen a tórus felületet, a mely háromszorosan összefüggő. Nyilvánvaló, hogy a torust nem lehet folytonos deformatió révén a gömbből nyerni. De az előbbi okoskodást most is alkalmazhatjuk.-



Fektessünk a torus felületen két retrosectiót, egyet a külső, egyet a belső aequator mentén. Akkor a torus szétesik két süvegre. Ezen két süvegre most megint alkalmazhatjuk az Ossian-Bonnet képletet. A positiv fordulást mindkét süvegre úgy állapitsuk meg, hogy a süveg bal felől maradjon; e szerint a külső körre nézve más a haladási irány, mint a belsőre. Hogy a Bonnet képletét közvetlenül alkalmazhassuk, fektessünk egy segédmetszetet, a mely a dolog lényegére befolyással nem lesz, mivel úgy positiv, mint negativ irányban futjuk be s igy a reá vonatkozó tagok kiesnek. Irhatjuk tehát:

$$\iint_{(F_1)} = -\int_{l_1^+} \frac{ds}{r_g} + \int_{l_1} d\vartheta - \int_{l_2^-} \frac{ds}{r_g} + \int_{l_2} d\vartheta$$

$$\iint_{(F_2)} = -\int_{l_1^-} \frac{ds}{r_g} + \int_{l_1} d\vartheta - \int_{l_2^+} \frac{ds}{r_g} + \int_{l_2} d\vartheta$$

Vegyük ezeket az integrálokat a felső süvegre vonatkozólag. Az: $\int_{l_1^+} d\vartheta$ és $\int_{l_2^-} d\vartheta$ egymás lerontják, úgy, hogy ezek a tagok mindkét képletből hiányozni fognak.- Ha tehát összeadjuk a két képletet, kapjuk, hogy:

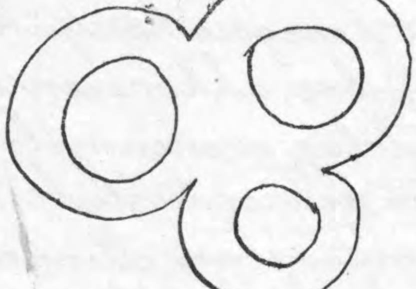
$$\iint_{(F)} K d\omega = 0$$

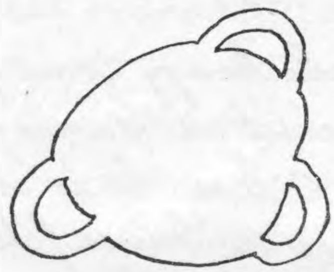
Ha tehát veszünk egy torus felületet s megszerkesztjük annak a leképezését a Gauss féle gömbre, akkor ezen leképezés területe 0 lesz. Ez is evidens dolog, a mennyiben a torus leképezése a Gauss féle gömböt kétszer teriti be, a két fedő lap a curvatura integrál számitásában ellenkező értelemben szerepel, úgy, hogy az előreláthatólag 0 lesz. Mégis szolgáltat ebben az esetben a Bonnet féle képlet valami olyant, a mi nem triviális, a mennyiben bizonyos bepillantást enged a leképezés geometriai természetébe.-

Nézzük most, hogy a nyert eredményt, hogyan tudnánk általánositani tetszésszerinti, mondjuk egy 2p+1 szeresen összefüggő felületre. Vizsgáljuk meg, hogy hogyan juthatnánk ilyen felületekhez. Ha két torust a rajzban feltüntetett módon összeolvasztunk s aztán az éle-

ket valami módon elsimitjuk, kapunk egy minden pontjában reguláris, 5-szörösen összefüggő" felületet.- Ugyanilyen felülethez jutunk az analysis situs szempontjából, ha a gömbön, úgy mondhatnánk, két fogantyút alkalmazunk.-

Ha három torust olvasztunk össze, akkor 7 szeresen ösz-





összefüggési szám: 7.

szefüggő" felületet kapunk, valamint akkor is, ha a gömbön 3 fogantyút alkalmazunk, úgy, hogy áll ez a viszony:

torus (fogantyú) szám : 1, 2, 3, ...

összefüggési szám : 3, 5, 7, ...

Ha p fogantyút alkalmazunk, akkor kapunk egy: $2p+1$ szeresen összefüggő" zárt felületet.- Ha most egy ilyen felületre alkalmazzuk a fennebb vázolt okoskodást, szóról-szóra kapjuk, hogy:

$$\iint_{(F_{2p+1})} K d\omega = 4\pi(1-p)$$

Ez már most egy rendkívüli fontos eredmény. Tudniillik a görbület Gauss féle mértéke egy hajlítási invariáns; ha én ezt egy felületen végig integrálom, kapok egy olyan számot, a mely nemcsak hajlításnál, hanem egyszersmind minden folytonos deformátiónál is invari-áns marad, mert az összefüggési szám invariáns folytonos deformátiókra. Az ilyen esetek, t. i. midőn egy inváriáns mennyiséget, pl. integrátiónak vetvén alá, annak inváriáns voltát tágítjuk, általánosabb invariánssá tesszük, mindig igen nevezetesek. Míg a K maga, csak infinitesimális szempontból invariáns, addig az:

$$\iint\limits_{(F_{2p+1})} K d\omega$$

az egész felületre, tehát az analysis situs szempontjá-ból invariáns.-

végе.

Nagy Gyula gyorsíró.
Nagy Imre leíró.

Kolozsvárt. 1907. XII. 20.