KOLOZSVÁRI BOLYAI
TUDOMÁNYEGYETEM
MATEMATIKAI INTÉZET
KÖNYVTÁRA

Szakl. sz.: I 21-4

ELLIPTIKUS FÜGGVÉNYEK.

előadja:

Dr. Schlesinger Lajos.

Kolozsvár.
1901.

517.34

S-34c-14

f21-4

MATEMATIKAI INTÉZET

BOLYAI TUD. EGYETEM Kolozsvár

Az elliptikus függvények eredete az elliptikus integrálokban keresendő, elliptikus integrál alatt értvén egy $s^2 = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4$ algebrai egyenlettel értelmezett (z, s) változópár racionális $R(z, s)$ függvényének integrálját

$$\int R(z, s)\, dz .$$

Először onnan kaptak, hogy az ellipsis rectificatiója ily alakú integrálra vezet.

Legendre volt az, ki a 18. században az elliptikus integrálok elméletével legbehatóbban foglalkozott. Feltünt neki az a különös szerep, melyet ezen elméletben az $\int \frac{dz}{s}$ integrál visel, melyet első fajú integrálnak nevezett. Ennek az integrálnak tulajdonképeni jelentőségü csak Legendre után tünt ki Abel és Jacobi vizsgálataiból. Ez a két mathematicus egymástól függetlenül jött arra a gondolatra, hogy ezt az első fajú integrált két határ között véve, ezen

$$u = \int_{z_0}^{z} \frac{dz}{s}$$

függvény inverz függvényeket vizsgálja az-t,

mint az u függvényét, $z = \varphi(u)$

Jacobi és Abel kimutatták erről, hogy az egyértékű és biperiodicus függvénye u-nak, azaz léteznek két állandó mennyiség ω_1 és ω_2, miszerint

$\varphi(u + \omega_1) = \varphi(u + \omega_2) = \varphi(u)$ és ebből kifolyólag: $\varphi(u + m\omega_1 + n\omega_2) = \varphi(u)$

minden egészszámú m és n mellett.

Ez a biperiodicus függvény fogalmának történelmi fejlődése. Jacobi, későbbi éveiben a königsbergi egyetemen tartott előadásaiban már nem ezt a történelmi menetet követte, a mennyiben rájött, hogy a $z = \varphi(u)$ elliptikus függvény elmélete visszavihető egy igen egyszerűen alkotott új transcendens függvény elméletére, mely ma is a tőle kapott „Θ függvény" nevet viseli. Jacobi azt találta, hogy ez a Θ függvény teljesen elegendő az elliptikus függvények elméletének felépítésére És későbbi előadásaiban elhagyva a történelmi fejlődés menetét, a Θ függvényből indult ki, ismeretes analytikai képződménynek tételezve fel azt, ebből vezette le az ellip-

ticus függvények elméletét.

Később az elliptikus függvények elmélete még más szempontokból is ki lett fejtve. Jacobi felfedezései 1827-ben jelent meg „Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum" cím alatt. A 20-as és 30-as évek egy más fontos felfedezésel gyarapitották az analysist, t.i. Cauchy rendszeres elméletével a compl. változó függvényéről, mely elmélet nek kifejtése igen nagy befolyással volt az elliptikus függvények elméletére. Cauchy hatása alatt egyik tanitványa Liouville az ő előadásaiban uj szempontból tárgyalja az elliptikus függvények elméletét. Ő az elliptikus függvények azon tulajdonságából indul ki, hogy biperiodicusok, és az egész tárgyalás alapjául a biperiodicus függvények elméletét teszi. Ez a kiindulási pont leiegében ugyanaz, mint Jacobié, csakhogy Jacobi inkább formai számitosokkal dolgozik, mig Liouville a Cauchy féle függvénytani módszerrel. Ez utóbbi ma is a legegyszerűbb módszer, melylyel legrövidebb

úton be lehet hatolni az elliptikus függvények elméletébe.

Tehát lényegében ez a három kiindulási pont kínálkozik az elliptikus függvények elméletének tárgyalására: Vagy kiindulunk az elliptikus integrálok elméletéből és tárgyaljuk z-t, mint az u függvényét; vagy alapul vesszük a ϑ függvény elméletét, kifejtjük rép számítások útján előbb a ϑ majd az elliptikus függvények elméletét; vagy végre a Liouville szerint kiindulunk a biperiodicus függvények elméletéből.

Weierstrass az ő előadásaiban egy 4.ik módszert követett, kiindulván az elliptikus függvények összeadási tételéből. Weierstrass ama problémából indul ki, előállítani mindama egyértékű függvényeket, melyeknek összeadási tételük van és ezek segélyével fejteni ki az elliptikus függvények elméletét.

Ő különösen az elliptikus függvények

transformatio tanára fogjuk fektetni a fő-
súlyt és ezért oly kiindulási pontot fogunk
választani, mely leghamarább vezet el a
transformatiohoz. Ez a kiindulási pont
egy compromissumnak nevezhető a Liou-
ville és Jacobi féle kiindulási pontok között.
T.i. a biperiodicus függvények elméletével
kezdjük, azután bizonyos helyen elhagyva
a Liouville féle szempontokat, át-térünk a
Θ függvények tárgyalására.

Áttérve tárgyunkhoz, foglalkozzunk először
a biperiodicus függvény fogalmával.

Ha $z = \varphi(u)$ egyértékű monogén függvé-
nye az u complex változónak, és ha w_1 ezen
függvény periodusa, tehát

$$\varphi(u + w_1) = \varphi(u)$$

és ha a függvénynek az w_1-en kívül más
periodusa nincsen, mely nem volna előállítha-
tó az mw_1 alakban, hal m egész szám, ak-
kor φ egyszerűen periodicus függvénynek ne-
vezetik. Vagy más formában: ha a $\varphi(u+w)-\varphi(u)$ egyenlet minden tetszőleges u mellett

csak oly w mellett teljesül, mely $w = m w_1$, akkor mondjuk, hogy a $\varphi(u)$ függvénynek csak egy t.i. w_1 periodusa van, a függvény egyszeresen periodusos. Ilyen egyszerűen p. függvények a sinus, cosinus, tangens stb. exponentiális függvény és minden egyszerűen p. függvény ezen függvényosztályra vezethető vissza pl. előállítható, mint egy exponentiális függvény rationális függvénye.

Ha azonban a $\varphi(u)$ függvénynek az w_1^n kivül más periodusa is van, azaz $\varphi(u+w)=\varphi(u)$ teljesül oly $w = w_2$-re is, mely nem állítható elő az $m w_1$ alakban, akkor azt mondjuk, hogy a függvény **biperiodicus**, a függvénynek két különböző periodusa van s az összes periodusok előállíthatók ebben a alakban $m w_1 + n w_2$ a hol m és n egész számok.

Ezen biperiodicus függvények elméletével fogunk foglalkozni, előre is megemlítve, hogy ilyen bp. függvény az elemi függvények között nem léteznik, tovább, hogy egy előre a bp. függvény léteziének keri-

dését függőben hagyjuk, s csak később fogjuk azoknak existentiáját kimutatni azáltal, hogy azokat ténylegesen előállítjuk.

A periodusokat illetőleg megjegyzendő, hogy lényeges a $\wp$. függvényre nézve csakis a két periodus hányadosa. Mert ha $u = \alpha . v$, a hol α állandó, akkor $\varphi(u) = \varphi(\alpha v) = \psi(v)$ tehát $\varphi(\alpha v + m\omega_1 + n\omega_2) = \varphi\{\alpha(v + m\frac{\omega_1}{\alpha} + n\frac{\omega_2}{\alpha})\} =$ $= \varphi(\alpha . v) = \psi(v)$, tehát α kellő megválasztásával egy ω_1 és ω_2 periodusokkal bíró φ függvényről áttérhetünk egy $\frac{\omega_1}{\alpha}$ és $\frac{\omega_2}{\alpha}$ periodusokkal bíró ψ függvényre. Ha $\alpha = \omega_1$ akkor ψ első periodus 1, a második $\frac{\omega_2}{\omega_1}$, a miből látható, hogy csakis a két periodus hányadosa lényeges.

Legyen most $\frac{\omega_2}{\omega_1} = \alpha + \beta i$ és vessük fel azt a kérdést vajjon lehet-e az a hányados reális? azaz $\beta = 0$? Abban a feltevésben, hogy $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ valós, két esetet kell megkülönböztetni.

1.) $\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{q}{p}$ rationális szám, a hol p és q relative prímszámok. Ekkor mindig léteznek olyan m és n, egész számok miszerint:

$$mp + nq = 1$$

Legyen most $mw_1 + nw_2 = w$, akkor $pw_2 = qw$, lévén

$$pw = pmw_1 + pnw_2 = pmw_1 + qnw_1 = w_1$$

és $$qw = qmw_1 + qnw_2 = pmw_2 + qnw_2 = w_2$$

Ha tehát a két periodus hányadosa rationális, akkor létezik oly w periodus, melynek egész számú sokszorosai w_1 és w_2, ekkor tehát egyszeresen periodusos, — a miből látható, hogy bp. függvény periodusainak hányadosa nem lehet rationális.

2.) $\frac{w_2}{w_1}$ irrationális; akkor végtelen láncrészt alakjában állható elő $\frac{w_2}{w_1} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots$

Legyen a k-adik közelitő tört $\frac{m_k}{n_k}$, a hol m_k és n_k egész számok. Akkor ismeretes, hogy

$$\left| \frac{w_2}{w_1} - \frac{m_k}{n_k} \right| < \frac{1}{n_k^2}$$ és átszorozva $w_1 |n_k|$-val

adódik, hogy $$|n_k w_2 - m_k w_1| < \left| \frac{w_1}{n_k} \right|$$

De tudjuk, hogyha a közelitő törtek rendszámait mindjobban nagyobbitjuk a tört nevezője mind nagyobb és nagyobb szám lesz, sőt ha tetszőleges nagy w számot

képzelünk megadva, k mindig m_k és n_k választható olyan nagynak, hogy mihelyt még nagyobb, már $|n_k| > \omega$ és így elérhetjük, hogy $\left|\frac{w_1}{n_k}\right| < \delta$ egyenlőtlenség álljon bizonyos k-nál nagyobb bármely k értékekre. De akkor egy ilyen k-nak megfelelő m_k és n_k egész számokra nézve áll, hogy $|m_k w_2 + n_k w_1| < \delta$ a hol δ tetszőleges kis adott positiv szám. Ez az egyenlőtlenség pedig azt mondja, hogy ekkor létezik a φ egyértékű függvénynek egy tetszőleges kis periodusa, mely 0-tól különböző. Lássuk, mi következik ebből a $\varphi(u)$ függvényre nézve. Legyen u_0 oly u érték, melynek környezetében φ egyértékű véges és folytonos, és itt legyen a φ értéke z_0, $z_0 = \varphi(u_0)$; már most a feltételből kifolyólag $\varphi(u)$-nak van egy tetszőleges kis periodusa, a mi azt mondja, hogy bármily kis ρ sugárral irjunk u_0 körül kört, ezen belül végtelen sok u értékpont van, melyben φ értéke ugyanaz, mint u_0-ban. Mert ha $\varphi(u)$ az u_0 környezetében egyértékű, véges és folytonos, tehát Taylor sorával előállítható, akkor mindig lehet u_0 körül

valy véges sugarú kört írni, melyen belül $\varphi(u)$ nem ismétli sehol az u_0-ban felvett értéket. Ha tehát $\varphi(u)$ egyértékű függvény, nem lehet, hogy bármily kis, azaz végtelen kis periodusa legyen, vagyis nem lehet, hogy az $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ hányados irrationális.

Végtelen sok értékű függvénynél már lehet, hogy $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ irrationalis. Ha pl.

$$u = \frac{\omega_1}{2\pi i} \log(z-a) + \frac{\omega_2}{2\pi i} \log(z-b)$$

akkor az a pont egyszeri megkerülésével u növekedik ω_1-el, b " " " " u "

" ω_2-el, tehát a $z = \varphi(u)$ függvény biperiodikus, - de végtelen sok értékű függvény, melynek periodusai ω_1 és ω_2 nyilvánvalóan adhatnak irrationális hányadost.

Az előbbiek alapján tehát mondhatjuk, hogy egy egyértékű bip. függvény periodusainak hányadosa $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ nem lehet reális, vagyis ha $\frac{\omega_2}{\omega_1} = \alpha + \beta i$ akkor $\beta \neq 0$

Erről az $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ hányadosról feltehetjük egyszerűmindenkorra, hogy képzetes része positiv. Mert ha $\beta < 0$ volna, egyszerűen áttérünk a reciprok

értékre, $\frac{w_1}{w_2} = \frac{\alpha - \beta i}{\alpha^2 + \beta^2}$, melynek képzetes része már positiv. Tehát feltehetjük, hogy $\mathfrak{J}(\frac{w_2}{w_1}) > 0$.

Ezen megállapodásuk után induljunk ki a

$$z = \varphi(u) = \varphi(u + m w_1 + n w_2)$$

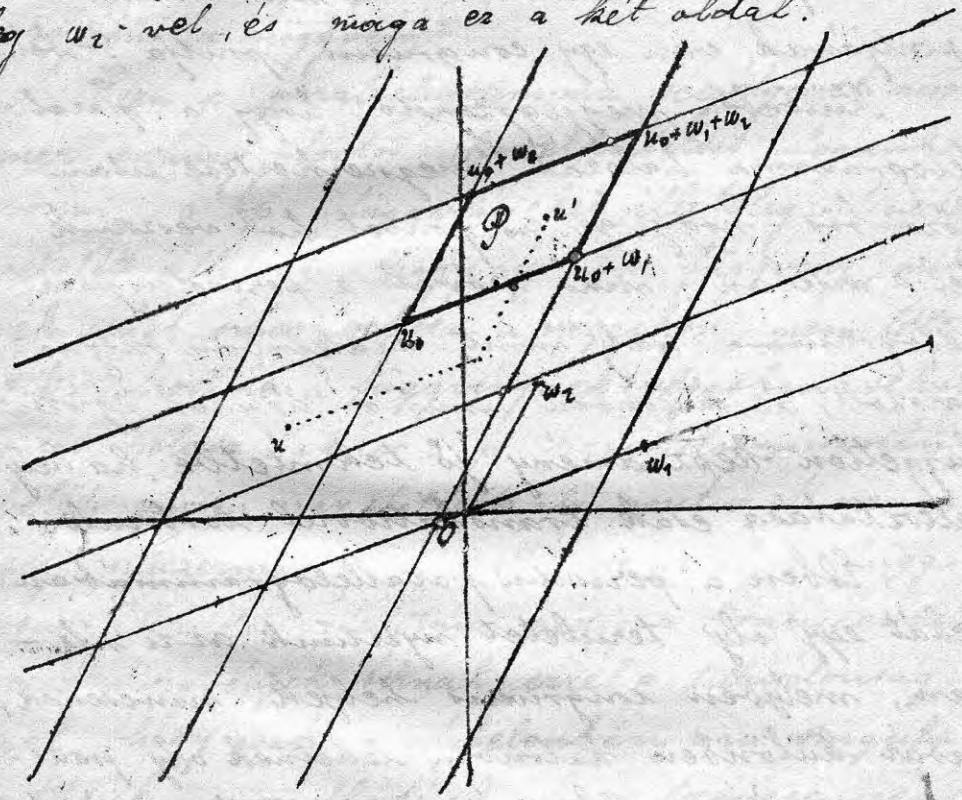
egyenletből, mely szerint az u és $u + m w_1 + n w_2$ pontok a függvényérték szempontjából teljesen **aequivalensek**. Ezt úgy szokták jelölni, hogy

$$u \equiv u + m w_1 + n w_2$$

azaz u congruens $(u + m w_1 + n w_2)$-vel. Ha tehát $u' \equiv u_1$, akkor $u' - u = m w_1 + n w_2$. Miután némely vizsgálatnál egészen közömbös hogy a független változó congruens értékei közül melyiket vesszük tekintetbe, célszerű utána nézni, hogy az u síkban lehet-e oly tartományt kijelölni, melyen belül ilyen congruens pontok nem fekszenek. Vagy más szóval, miután a $z = \varphi(u)$ függvény segélyével leképezve a z síkot az u síkra, ez a leképzés végtelen sokértékű, azaz a z sík végtelen sokszor ismétlődik az u síkban, kérdés lehet-e oly területet kijelölni az u síkban, mely a z sík egyértékű leképezése? melyen belül a végtelen sok congruens hely közül csak egy

feküdjék? A kívánt területet következőleg nyerjük. Egy tetszőleges u_0 pontból húzunk egyirányban párhuzamosokat az w_1 és w_2 periodusokhoz tartozó vectorokkal, azokkal egyenlő hosszúságban. A velök szerkesztett parallelogramma szögpontjai tehát u_0, u_0+w_1, $u_0+w_1+w_2$, u_0+w_2. Ha ezen felül felveszünk egy tetszőleges u pontot, akkor a congruens pontok egyike sem fog ezen parallelogrammán belül feküdni. De fordítva is áll, hogy bárhol vegyünk fel a síkban egy u pontot, mindig találunk egy vele congruens pontot a felvett parallelogrammában (melyet ezentúl egyszerüen P-vel fogunk jelölni). Mert ha az $u_0 \ldots u_0+w_1$ és $u_0 \ldots u_0+w_2$ egyeneseket mindkét irányban végtelenbe hosszabbítva felrakjuk folytatólag az w_1 illetőleg w_2 hosszakat, és a nyert osztás pontokon át az w_1 és w_2 vectorokkal parallelekat húzunk, az egész u sík felosztik a P-vel congruens parallelogrammákra, melyek folytonosan sorakozván egymáshoz, teljesen befödik az u síkot. Területük-

re nézve megállapodunk abban, hogy egy ilyen invidiumhoz tartozzék annak egész belseje, 4 szögpontja közül az, melyekből kiinduló két oldala egyirányban párhuzamos w_1 illetőleg w_2-vel, és maga ez a két oldal.



A felvett u pont mindenesetre benn fekszik egy ilyen parallelogrammában, mely a függvényértéke szempontjából teljesen congruens az eredeti P-vel, úgyhogy ha azt translatio által a P-vel fedésbe hozzuk, az u' pont

melyhez az u fedésbe jő, lesz P-ben az u-nak congruens pontja, azaz $u' \equiv u$. A felvett P tehát kettős tulajdonsággal bír, a mennyiben először azon belül nem fekszenek congruens pontok, másodszor a sík minden pontjának van egy congruens pontja P-ben.

Különben megjegyzendő, hogy a parallelogramma hálózat megszerkesztése után közömbös, hogy az u pontot hol veszszük fel a síkban; más szóval a periodus-parallelogramma csak mint alakjában meghatározott, de különben mint a helytől egészen független képződmény jő tekintetbe, ha helyváltoztatása csak translatióval történik.

Ebben a periodus parallelogrammában tehát egy oly területet nyertünk az u síkban, melyben congruens helyek nincsenek, habár különben különben lehetnek oly pontjai, melyekben a függvény ugyanazt az értéket veszi fel. Így pl. $\sin u' = \sin u$ ha $u' = u + 2k\pi$, a hol 2π a $\sin$ periodusa; de akkor is, ha $u' = -u + (2k+1)\pi$.

A p. parallelogramma tulajdonságából folyik, hogy ha ismerjük a függvény értékkészletét ezen belül, akkor ismerjük az egész u síkban is, tehát csak a p. parallelogrammán belül kell vizsgálni a függvényt.

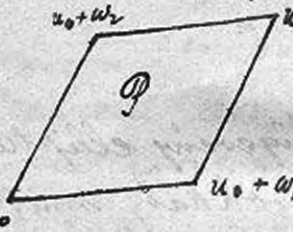
Ezen p. parallelogramma segélyével most már néhány fontos következtetést fogunk vonni, a bp. függvényeket illetőleg. Mindenekelőtt állítjuk, hogy oly bp. függvény, melynek sehol sincs polusa a végesben, nem létezik. Mert ha a függvénynek végesben sehol sincs polusa, akkor a p. parallelogrammán belül sincs, azaz létezik oly positiv M mennyiség, miszerint $|\varphi(w)| < M$, de az ilyen függvény állandó. Minthogy pedig a transcendens egész függvények bírnak ezzel a tulajdonsággal, hogy csak a végtelenben van singularitásuk, mondhatjuk, hogy transcendens egész függvény nem lehet biperiodicus és fordítva. A biperiodicus függvényeknek tehát szükségképen vannak polusaik a végesben, sőt határozatlansági helyek is lehetnek, de

mi itt csak oly bp. függvényekkel foglalkozunk, melyeknek a végesben sincsen lényegesen singularis helyük. Az ilyen bp. függvényeket elliptikus függvényeknek nevezzük. Az elliptikus függvénynek tehát csak végtelenben van lényegesen singularis helye, p. parallelogrammán belül sincsen. Ebből ismét következik, hogy a p. parallelogrammán belül a bp. függvénynek csak véges számú polusa van. Mert ha végtelen sok $\alpha_1\ \alpha_2 \ldots$ polusa volna a függvénynek ezek véges területen feküdvén, torló dási helyük α körül bármily kis sugárral irt körön belül végtelen sok polusa feküdnék a függvénynek, tehát α maga nem lehetne polus, mivel a polusok discret pontok a számsíkon. α tehát lényegesen singularis hely volna, a mi végesben lehetetlen. Tehát a bp. függvénynek a p. parallelogrammán belül csak véges számú polusa van. Legyenek ezek

$$\alpha_1\ \alpha_2 \ldots \ldots \alpha_n$$

egy λ rendű polus helyett λ elsőrendű polust számítva.

Az olyan elliptikus függvényt, melynek n elsőrendű polusa van a p. parallelogrammán belül, n-edrendű vagy n-edfokú elliptikus függvénynek nevezzük. Célszerű úgy választani a p. parallelogrammát, hogy ne legyenek a függvénynek polusai. Ezt egyszerű translatióval mindig el lehet érni. Ez a parallelogramma legyen P, akkor integrálva a φ függvényt a P határvonala mentén



$$\int_P \varphi(u)\,du = \int_{u_0}^{u_0+w_1} + \int_{u_0+w_1}^{u_0+w_1+w_2} + \int_{u_0+w_1+w_2}^{u_0+w_2} + \int_{u_0+w_2}^{u_0}$$

ez pedig, a mint tudva van $= 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}_{\alpha_k} \varphi(u)$

Az $\int_{u_0}^{u_0+w_1}$ – $\int_{u_0+w_1+w_2}^{u_0+w_2}$ összeg kiszámítása végett

legyen $u = v + w_2$, akkor

$$\int_{u_0+w_1+w_2}^{u_0+w_2} = \int_{u_0+w_1}^{u_0} \varphi(v+w_2)\,dv = -\int_{u_0}^{u_0+w_1} \varphi(v)\,dv,$$

tehát a két integrál összege 0. Épigy a 2.- és 4. ik integrál kiszámítása végett $u = v + w_1$ téve,

lesz: $\int_{u_0+w_1}^{u_0+w_1+w_2} \varphi(u)\,du = \int_{u_0}^{u_0+w_2} \varphi(u+w_1)\,dv = -\int_{u_0+w_2}^{u_0} \varphi(v)\,dv.$

tehát a 2-ik és 4. ik integrál összege is 0. És így kapjuk a tételt, hogy

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{\alpha_k} \varphi(u) = 0$$

azaz: valamely elliptikus függvénynek a periodus parallelogrammán belül fekvő polusaihoz tartozó residuk összege egyenlő zérával.

Alkalmazzuk ezt a tételt a következő függvényre: $\frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)} = \frac{d \log \varphi(u)}{du}$

Ezt szabad tennünk, ha ez a függvény elliptikus függvény ugyanazokkal a periodusokkal, mint $\varphi(u)$. Először is nyilvánvaló, hogy ha $\varphi(u+w_1) = \varphi(u)$

akkor: $\varphi'(u+w_1) = \varphi'(u)$

a mi az első egyenlet deriválásából adódik. Épígy ha

$$\varphi(u+w_2) = \varphi(u)$$

$$\varphi'(u+w_2) = \varphi'(u)$$

Továbbá ha $\varphi(u)$ csak véges számú polusokkal bir, akkor $\varphi'(u)$ is csak véges számú polussal bir és. pedig ugyanazokkal,

mint $\varphi(u)$, legfeljebb magasabb rendben. Tehát φ' és így $\frac{\varphi'}{\varphi}$ is elliptikus függvény, ugyanazokkal a periodusokkal, mint $\varphi(u)$. Alkalmazva tehát a tételt

$$\sum_{(P)} \operatorname{Res} \frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)} = 0$$

azaz P-n belül fekvő pólusokra nézve. Mik ezek a pólusok? Nyilvánvalóan $\varphi(u)$ pólusai és nullapontjai

$$\alpha_1 \; \alpha_2 \; \ldots \; \alpha_n$$

és $\beta_1 \; \beta_2 \; \ldots \; \beta_m$

Ezélszerű lesz, csupán a különböző pólusokat és nullapontokat tekintetbe venni,

$\alpha_1 \; \alpha_2 \; \ldots \; \alpha_p$, a hol α_κ egy μ_κ-adrendű pólus

és $\beta_1 \; \beta_2 \; \ldots \; \beta_q$ " β_κ " λ_κ " nulla pont; tehát $\sum_1^p \mu_\kappa = n$ és $\sum_1^q \lambda_\kappa = m$

És miután $\operatorname{Res}_{\alpha_\kappa} \frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)} = -\mu_\kappa$, $\operatorname{Res}_{\beta_\kappa} \frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)} = \lambda_\kappa$

kapjuk a tételt, mely szerint

$$\sum_1^q \lambda_\kappa - \sum_1^p \mu_\kappa = 0$$

azaz $n = m$

Tehát egy elliptikus függvény a p. parallelo-

grammán belül annyiszor válik elsőrendű nullá, a hányszor végtelenné. Továbbá ha C egy tetszőlegesen constans, $C - \varphi(u)$ is elliptikus függvény, mely ugyanott válik végtelenné, a hol $\varphi(u)$ és így elsőrendű nullapontjainak száma szintén n. Egy n-edfokú elliptikus függvény e szerint minden adott értéket n-szer veszek fel a p. parallelogrammán belül. Tovább menve integráljuk az

$$\int_{\mathfrak{P}} u \frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)} du$$

integrált, melyben az integrálandó függvény ugyan nem biperiodicus, de egyértékű, és így erre is áll, hogy

$$\int_{\mathfrak{P}} u \frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)} du = 2\pi i \sum_{(\mathfrak{P})} \operatorname{Res} u \frac{\varphi(u)}{\varphi(u)}$$

Ezen integrál kiszámítására végett gondoljuk meg, hogy az integrálandó függvény polusai ugyanazok, mint $\frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)}$ polusai, és miután α_κ környezetében

$$\frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)} = \frac{-\mu_\kappa}{u - \alpha_\kappa} + \dots \qquad \beta_\kappa \text{ környezetében} \quad \frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)} = \frac{\lambda_\kappa}{u - \beta_\kappa} + \dots$$

és

$$u = \alpha_\kappa + (u - \alpha_\kappa)$$

illetőleg $u = \beta_k + (u - \beta_k)$

Összerozva a megfelelő sorokat kapjuk, hogy

$$u\frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)} = -\frac{\alpha_k \mu_k}{u - \alpha_k} + \dots$$

illetőleg $$u\frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)} = \frac{\beta_k \lambda_k}{u - \beta_k} + \dots$$

A miből látható, hogy

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(\mathfrak{P})} u\frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)}\,du = \sum_{k=1}^{q} \beta_k \lambda_k - \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \mu_k$$

vagyha csak elsőrendű nullapontokat és polusokat veszszük tekintetbe, akkor

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(\mathfrak{P})} u\frac{\varphi(u)}{\varphi(u)}\,du = \sum_{k=1}^{p} \beta_k - \sum_{k=1}^{p} \alpha_k$$

tehát annyi, mint az elsőrendű nullapontok értékeinek összege minus az ei "rendű polusok értékeinek összege.

Most még más úton is meg kell határozni, ugyanezt az integrált. E végett az vonalas integrálok összegére bontjuk

$$\int_{\mathfrak{P}} u\frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)}\,du = \int_{u_0}^{u_0+w_1} + \int_{u_0+w_1}^{u_0+w_1+w_2} + \int_{u_0+w_1+w_2}^{u_0+w_2} + \int_{u_0+w_2}^{u_0}$$

A 3.ik integrál kiszámítására végett legyen $u = v + w_2$, akkor:

$$\int_{u_0+w_1+w_2}^{u_0+w_2} u\,\frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)}\,du = \int_{u_0+w_1}^{u_0} (v+w_2)\,\frac{\varphi'(v+w_2)}{\varphi(v+w_2)}\,dv = -\int_{u_0}^{u_0+w_1} v\,\frac{\varphi'(v)}{\varphi(v)}\,dv -$$

$$- w_2 \int_{u_0}^{u_0+w_1} \frac{\varphi'(v)}{\varphi(v)}\,dv$$

tehát az első és harmadik integrál összege:

$$\int_{u_0}^{u_0+w_1} - \int_{u_0+w_1+w_2}^{u_0+w_2} = -w_2 \int_{u_0}^{u_0+w_1} \frac{\varphi'(v)}{\varphi(v)}\,dv = -w_2 \left(\log \varphi(v)\right)_{u_0}^{u_0+w_1} =$$

$$= -w_2 \left(\log \varphi(u_0+w_1) - \log \varphi(u_0)\right).$$

Annak daczára, hogy $\varphi(u_0+w_1) = \varphi(u_0)$, a két logarithmus különbsége nem szükségképen 0, hanem azon úthoz képest, melyen u_0-tól (u_0+w_1)-ig mentünk, ez a különbség $2\pi i$-nek egy egész számú többszöröse $p.2\pi i$, úgyhogy az első és 3-ik integrál összege $-w_2 \cdot p \cdot 2\pi i$

Épen így adódik a 2ik és 4. ik integrál összegéül:

$$\int_{u_0+w_1+w_2}^{u_0+w_2} + \int_{u_0+w_2}^{u_0} = -w_1 \int_{u_0+w_2}^{u_0} \frac{\varphi'(v)}{\varphi(v)}\,dv = -w_2 \left(\log \varphi(u_0) - \log \varphi(u_0+w_2)\right)$$

$$= -w_1 \cdot q \cdot 2\pi i$$

Osztva az integrál így nyert értékét $2\pi i$-vel, kapjuk azt a fontos relatiót, hogy

$$\sum_1^n \beta_k = \sum_1^n \alpha_n - q w_2 - p w_2$$

tehát a két summa csak egy periodusban különbözik egymástól és így:

$$\sum_1^n \beta_k \equiv \sum_1^n \alpha_k$$

Ez a tétel, mely szerint minden elliptikus függvény elsőrendű nullapontjainak az összege congruens elsőrendű polusainak az összegével, Abel féle theoreémának nevezi étjük.

Sőt ezt a tételt még általánosabban is kifejezhetjük. Ha ugy nis C egy tetszőleges constans érték akkor, a mint láttuk $\varphi(u) - C$ polusai ugy'anazok mint $\varphi(u)$ polusai; ha tehát nullapontja

$$u_1 \; u_2 \ldots\ldots u_n \text{, akkor}$$

$$\sum_1^n u_k \equiv \sum_1^n \alpha_k$$

Azaz nemcsak a nullapontok summája congruens a polusok summájával, hanem egy tetszőleges értékhez tartozó pontok összege is congruens a polusok összegével. De a polusok összege álland', mig az $u_1, u_2, \ldots\ldots u_n$ értékei változnak a $z = C$ értékkel, tehát z függvényei; azt látjuk azonban, hogy $\sum_{k=1}^n u_k$ egy periodustól eltekintve állandó, t.i. annyi, mint $\sum_1^n \alpha_k = s$. Mondhatjuk tehát, hogy azon u ért.'kek összege, melyekben az elliptikus függvény ugyanazt az értéket felveszi, a p. parallelogrammán belül állandó, egyenlő" s-sel, és igy általánosan

írhatjuk, hogy $\sum_1^n \mu_\kappa \equiv s = \text{constans}$.

Ennyit az elliptikus függvény magatartásáról a p. parallelogrammán belül. Ma igyyszendő még, hogy épen a Residu tételből kifolyólag, mely szerint $\sum_\Phi \text{Res}\, \varphi(u) = 0$, első fokú elliptikus függvény nem léterik. Mert ha a_1 első rendű pólus volna, tehát

$$\varphi(u) = \frac{\delta}{u - a_1} + f.c$$

a residu tétel értelmében $\delta = 0$ lévén, ez az a_1 nem is lehetne polus, tehát $\varphi(u)$ a P-n belül sigy az egész síkon mindenütt véges volna, de akkor $\varphi(u)$ nem is volna függvény, hanem constans. Tehát egy elliptikus függvény legalább másodrendű.

Vizsgáljuk most azt az esetet, midőn két elliptikus függvénynek ugyanazok a periodusai, azaz két ell. függvény ugyanakkor a p. parallelogrammához tartozik. Legyen $z = \varphi(u)$ egy u-ed, $\sigma = \psi(u)$ egy u-ed fokú elliptikus függvény. Nyilvánvaló hogy, ha z és σ az u-nak monogén függvénye, akkor z és σ egymásnak is monogén függvénye; mert az invers függvény tételénél fogva u úgy z,

mint σ monogén függvénye, tehát u a z-nek, σ az u-nak és így σ a z-nek monogén függvénye, és fordítva. Lássuk most, milyen függvénye z a σ-nak és σ a z-nek! Legyenek z egy szabott értékéhez tartozó u értékek $u_1, u_2 \ldots\ldots u_m$ és a convergens u értékek. Ezen z értékhez tartozó σ értékeket megkapjuk, ha a megfelelő összes u értékeket behelyettesítjük $\psi(u)$-ba, nyilvánvaló, hogy ezáltal összesen m általában különböző σ érték adódik, t.i. $\psi(u_1)\ \psi(u_2)\ldots\ldots\ \psi(u_m)$

Tehát minden z értékhez m általában különböző σ érték tartozik. És fordítva, ha egy szabott σ értékhez tartozó u értékek

$$u_1', u_2' \ldots\ldots u_m'$$

és a congruens értékek, akkor ezen σ-hoz tartozó összes z értékek

$$\varphi(u_1')\ \varphi(u_2')\ldots\ldots\varphi(u_m')$$

azaz minden σ értékhez tartozik m általában különböző z érték. Összefoglalva mondhatjuk, hogy σ a z-nek m, z a σ-nak u értékű függvénye. Vizsgáljuk most ezen függvények analytikai magatartását. A P-n belül z, mint

u függvénye csak polusokkal bir, mivel elliptikus függvény, vagyis z úgy viselkedik, mint u rationalis függvénye; ebből következik az inverz függvény tételénél fogva, hogy u is, mint z függvényt a P-n belül, nem lehet határozottan. Ugyanez áll σ-ra mint u-nak és u-ra, mint σ-nek függvényére. Ebből következik, hogy z és σ, mint egymásnak függvényei sem birhatnak határozatlansági helyet. Ha ehhez még azt tudnók, hogy pld. egymásnak egyértékű függvényei, akkor ezzel ezen függvények analytikai magatartása el volna döntve, lévén akkor mindkettő rationális függvény. De hiszen z n értékű, σ m értékű függvény, és sem n, sem m nem lehet 1, legalább 2; így tehát egyik sem lehet a másiknak rationális függvénye. Hogy tehát eldönthessük ezen függvények analytikai jellegét, járjunk el következőleg. Legyenek azon σ függvények, melyek ugyanazon z-hez tartoznak: $\sigma, \sigma_2 \ldots \sigma_m$ Ha z zárt útakat ir le az ω síkjában, és kiindulunk a σ egy bizonyos ágával, akkor ezen zárt útak mentén σ legfeljebb ezt az m értéket veheti fel,

úgy, hogy egyik σ átmegy a másikba, tehát a

$\sigma_1, \sigma_2 \ldots\ldots \sigma_m$ sor átmegy a

$\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2} \ldots\ldots \sigma_{i_m}$ függvénysorba,

a hol $i_1, i_2 \ldots\ldots i_m$ az $1, 2, \ldots\ldots m$ sorrendnek egy bizonyos permutatiója. Ha tehát ezen σ értékekből egy rationális symmetrikus függvényt állítunk össze:

$$S(\sigma_1, \sigma_2 \ldots\ldots \sigma_m)$$

akkor ez a z egy zárt útja után nem változtatja értékét, ez tehát egyértékű függvénye z-nek, mely ezenkívül csak pólusokkal bír és így rationális függvénye z-nek,

$$S(\sigma_1, \sigma_2 \ldots\ldots \sigma_m) = R(z)$$

És most járjunk el következőleg. Vegyük ezen σ-knak következő rationális symmetrikus függvényeit:

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots\ldots + \sigma_m = -g_1(z)$$

$$\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \ldots\ldots + \sigma_{m-1}\sigma_m = g_2(z)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\sigma_1\sigma_2 \ldots\ldots\ldots\ldots \sigma_m = (-1)^m g_m(z)$$

melyek mind rationalis függvényei a z-nek, akkor ezen σ értékek eleget tesznek a következő algebrai

egyenletnek:

$$\sigma^m + g_1(z)\sigma^{m-1} + g_2(z)\sigma^{m-2} + \dots + g_m(z) = 0$$

tehát σ mint z függvénye eleget tesz egy ilyen algebrai egyenletnek, mely σ-ban annyiad fokú, a hányad fokú elliptikus függvény a z, és melynek coefficienssei a z rationális függvényei. Ugyanigy következik, hogy z, mint σ függvénye, eleget tesz egy $z^n + h_1(\sigma)z^{n-1} + h_2(\sigma)z^{n-2} + \dots + h_n(\sigma) = 0$ algebrai egyenletnek, melynek coefficienssei a σ rationalis függvényei. Sőt egyszerűbben is formulázhatjuk az eredményt. Képzeljük ugyanis az első egyenletet a g coefficienseit legnagyobb közös osztójával $G_0(z)$-vel keresztül szorozva, akkor az egyenlet ily alakú

$$G_0(z)\sigma^m + G_1(z)\sigma^{m-1} + \dots + G_m(z) = 0$$

a hol már a G coefficiensek a z-nek rationális egész függvényei, a baloldal tehát z és σ rationalis egész függvénye és tudjuk, hogy ez z-ben n-edfokú, mert a z és σ között fonálló algebrai egyenlet z-ben n-edfokú, tehát legalább egy ilyen G függvény n-edfokú. Ezek után kimondhatjuk a következő tételt:

Ha z és σ, ugyanazon periodusparallelogram-

mához tartozó elliptikus függvény között mindig egy algebrai relatio áll fenn, mely σ-ban annyiad fokú, mint z, és z-ben annyiadfokú, mint σ, és coefficienseci állandó mennyiségek.

Ebből a tételből fontos következtetéseket vonhatunk az elliptikus függvényekre nézve. Válasszunk ugymint σ függvény gyanánt z-nak deriváltját $\frac{dz}{du} = \varphi'(u)$. Ezt szabad tenni, mert $\varphi'(u)$ is elliptikus függvény ugyanazokkal a periodusokkal. $\frac{dz}{du}$ tehát eleget tesz a következő m-edfokú algebrai egyenletnek:

$$A_0(z)\left(\frac{dz}{du}\right)^m + A_1(z)\left(\frac{dz}{du}\right)^{m-1} + \ldots\ldots + A_m(z) = 0$$

vagy röviden $F\left(\frac{dz}{du}, z\right) = 0$

algebrai egyenletnek, melynek coefficienseci állandók és a mely $\frac{dz}{du}$-ban m-ed fokú; ez tehát egy elsőrendű m-ed fokú differentiális egyenlet, melyet Briot et Bouquet féle differentiális egyenletnek is neveznek.

Minden m-ed fokú elliptikus függvény eleget tesz egy ilyen Briot et Bouquet féle elsőrendű differentiális egyenletnek.

Ezen egyenlet coefficienseire nézve még egy

fontos észrevételt kell tennünk. Vegyük az eredeti egyenletet z és σ között

$$G_0(z)\sigma^m + G_1(z)\sigma^{m-1} + \ldots\ldots + G_m(z)\sigma^m = 0$$

és kérdezzük, milyen z értékek mellett válik σ végtelenné! Ha $\sigma = \frac{1}{\tau}$, akkor:

$$G_0(z) + G_1(z)\tau + \ldots\ldots + G_m(z)\tau^m = 0$$

Ha $\sigma = \infty$, akkor $\tau = 0$, de akkor szükségképen $G_0(z) = 0$. Vagyis az ilyen algebrai egyenletnek megoldása σ csak oly helyen lehet végtelen nagy, a hol a legmagasabb hatványu differentiális hatvány coefficiense eltünik. Ha most a mi specziális differentiális egyenletünket vesszük, akkor egyfelől világos, hogy $\frac{dz}{du}$ csak oly z válik végtelenné, a hol z maga és vgyanott $A_0(z) = 0$, a miből következik, hogy $A_0(z)$-nek, mint z egész rationális függvényének egy nullapontja sem lehet a végében, de akkor $A_0(z)$ szükségképen constans, és minthogy ezzel a constansszal az egyenletet kezdetül oszthatjuk, irhatjuk, hogy $A_0(z) = 1$. Tehát uzon elsőrendü differentiális egyenletnek, melynek elegett tesz egy m-ed fokú elliptikus függvény, mindig ez az alakja:

$$\left(\frac{dz}{du}\right)^m + A_1(z)\left(\frac{dz}{du}\right)^{m-1} + \ldots\ldots + A_{m-1}(z)\left(\frac{dz}{du}\right) + A_m(z) = 0$$

Sőt még egyszerűbb alakot is adhatunk ennek az egyenletnek. Ha ugyanis a p. parallelogrammán belül

$$u_1, u_2 \ldots\ldots u_m$$

akkor u értékek, a hol z ugyanazt az értéket felveszi, akkor tudjuk, hogy $\sum_1^m u_K \equiv s$

azaz $\sum_1^m u_K = s + p_1 w_1 + p_2 w_2$

Differentiálva ezt az egyenletet z szerint

$$\frac{du_1}{dz} + \frac{du_2}{dz} + \ldots\ldots + \frac{du_m}{dz} = 0$$

vagy

$$\frac{1}{\frac{dz}{du_1}} + \frac{1}{\frac{dz}{du_2}} + \ldots\ldots \frac{1}{\frac{dz}{du_m}} = 0$$

Tgende: $\frac{dz}{du_1}, \frac{dz}{du_2}, \ldots\ldots \frac{dz}{du_m}$

a mi differentiális egyenletünknek gyökei, ha tehát közös alsóra hozva ezen törteket összegezzük akkor a nyert törtnek számlálója a gyökök $(m-1)$ik osztályú combinationinak összege, vagyis $A_{m-1}(z)$, alsója a gyökök szorzata $A_m(z)$ tehát

$$\frac{A_{m-1}(z)}{A_m(z)} = 0 \quad \text{miből} \quad A_{m-1}(z) = 0$$

A differentiális egyenletből tehát hiányzik az első hatvány coefficiense, úgyhogy a

$$\left(\frac{dz}{du}\right)^m + A_1(z)\left(\frac{dz}{du}\right)^{m-1} + \ldots\ldots + A_{m-2}(z)\left(\frac{dz}{du}\right)^2 + A_m(z) = 0$$

differentiális egyenletnek tesz eleget minden ellipti-

cus függvény, mely egyenletben a legmagasabb hatvány coefficiense 1, az első hatvány coefficiense nulla, a többi coefficiensek a z-nek egész rationális függvényei.

Tegyük fel, hogy $z = \wp(u)$ másodfokú elliptikus függvény, azaz $m = 2$, akkor minden n-ed fokú elliptikus függvény $o = \psi(u)$ eleget tesz a következő quadraticus egyenletnek:

$$L\psi(u)^2 + M\psi(u) + N = 0$$

a hol L, M, N legfeljebb n-ed fokú egész rationális függvényei z-nek. Egy tetszőleges elliptikus függvény e szerint kifejezhető a másodfokú elliptikus függvénnyel, de nem rationálisan, mert a kifejezésben négyzetgyökjel is szerepel. Hogy ez utóbbinak jelentéséről számot adhassunk, vissgáljuk a másodfokú elliptikus függvény összefüggését a deriváltjával. Az általános tétel szerint:

$$\left(\frac{dz}{du}\right)^2 - g(z) = 0$$

a hol $g(z)$ a z-nek egész rationális függvénye, melynek fokszáma egyezik $\frac{dz}{du}$ fokszámával, ez utóbbi pedig annyi mint $\frac{dz}{du}$ elliptikus függvény polusainak száma a p. parallelogrammán

belül u-nak vagy két elsőrendű polusa van a_1 és a_2, vagy egy másodrendű polusa a. Az első esetben $\varphi(u) = \frac{\delta}{u-a_1} + f.c.$

tehát $\varphi'(u) = -\frac{\delta}{(u-a_1)^2} + f.c.$

vagyis az első esetben 4 elsőrendű polusa van $\frac{dz}{du}$-nak. A második esetben

$$\varphi(u) = \frac{\varepsilon}{(u-a)^2} + f.c.$$

$$\varphi'(u) = -\frac{2\varepsilon}{(u-a)^3} + f.c.$$

ekkor tehát $\frac{dz}{du}$-nak egy 3-adrendű polusa van. Ha tehát $z = \varphi(u)$ egy másodfokú elliptikus függvény, akkor $\left(\frac{dz}{du}\right)^2 - g(z) = 0$

egyenletben $g(z)$ a z-nek harmad vagy negyedfokú rationális egész függvénye. Ebből az egyenletből

$$du = \frac{dz}{\sqrt{g(z)}}$$ és integrálva mindkét oldalt

$$u = \int \frac{dz}{\sqrt{g(z)}} + C$$

Ha rövidség kedvéért $\sqrt{g(z)} = \frac{dz}{du} = \varphi'(u) = \sigma$, biperiodicus függvény, akkor

$$u = \int \frac{dz}{\sigma} + C$$

Tegyük fel, hogy $u = o$ mellett $z = z_0$, $\sigma = \sigma_0$, akkor az állandó meg lesz határozva és irhatjuk, hogy

$$u = \int_{(z_0 \sigma_0)}^{(z\sigma)} \frac{dz}{\sigma}$$

a hol $\sigma = \sqrt{g(z)}$, $g(z)$ harmad v. negyedfokú egész racionális függvény. Ez az u tehát egy első-fajú elliptikus integrál és a, mint látjuk, minden másodfokú elliptikus függvény egy ilyen elsőfajú elliptikus integrál inverz függvénye.

Lássuk most, miképp lehet a $g(z)$ függvényt explicite előállítani. Erre nézve okoskodjunk egy mintán $\varphi(u)$ másodfokú, minden értéket a p. parallelogrammán belül két helyen, u_1 és u_2 -ben vesz fel és tudjuk, hogy $u_1 + u_2 \equiv s$, vagyis $u_2 \equiv s - u_1$, tehát $\varphi(u_2) = \varphi(s - u_1)$ vagy általános alakban $\varphi(u) = \varphi(s - u)$ Differentiáljuk ezt u szerint, kapjuk hogy:

$$\varphi'(u) = -\varphi'(s-u)$$

mely szerint a p. parallelogrammán belül azon pontokban, a hol φ ugyanazt az értéket veszi fel, $\varphi'(u)$ ellentétesen egyenlő értékkel bír. Ha az utóbbi egyenletben $u \equiv \frac{s}{2}$, akkor

$$\varphi'\left(\tfrac{s}{2}\right) = -\varphi'\left(\tfrac{s}{2}\right)$$

az $\frac{s}{2}$ tehát vagy polusa vagy nullapontja a $\varphi(u)$ függvénynek. Hogy ezt eldönthessük, két esetet kell megkülönböztetnünk, azt az esetet, midőn a φ függvénynek két különböző: a_2 e a_2 po-

lusa van, és a midőn a kéd különböző polus összecsik a-ban. Az első esetben $\alpha_1 + \alpha_2 \equiv 0$, és mivel $\alpha_1 + \alpha_2$, azért $\left.\begin{matrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{matrix}\right\} + \frac{1}{2}$, tehát $\frac{1}{2}$ nem lehet polusa $\varphi(u)$-nak, és így $\varphi'(u)$-nak sem, következőleg $\varphi'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. De könnyű ez esetben 4-ed fokú $\varphi'(u)$ függvénynek többi 3 nullapontját is megtalálni, kiindulva a $\varphi'(u) = -\varphi'(1-u)$ egyenletből. Tegyünk ebben $u = \frac{1}{2} + \frac{\omega_1}{2}$, akkor

$$\varphi'\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{\omega_1}{2}\right) = -\varphi'\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{\omega_1}{2}\right) = -\varphi'\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{\omega_1}{2}\right)$$

tehát $\frac{1}{2} + \frac{\omega_1}{2}$ vagy polusa vagy nullapontja $\varphi'(u)$-nak; hogy nem polus, éjo így kimutatható, mint $\frac{1}{2}$-nél; ennélfogva $\frac{1}{2} + \frac{\omega_1}{2}$ is nullapontja $\varphi'(u)$-nak. Legyen továbbá:

$u = \frac{1}{2} + \frac{\omega_2}{2}$ akkor:

$$\varphi'\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{\omega_2}{2}\right) = -\varphi'\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{\omega_2}{2}\right) = -\varphi'\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{\omega_2}{2}\right)$$

és úgy mint előbb következik, hogy $\frac{1}{2} + \frac{\omega_2}{2}$ nullapontja $\varphi'(u)$-nek. Végre, ha $u = \frac{1}{2} + \frac{\omega_1}{2} + \frac{\omega_2}{2}$, kapjuk, hogy $\varphi'\left(\frac{1}{2} + \frac{\omega_1}{2} + \frac{\omega_2}{2}\right) = 0$

Tehát $\varphi'(u)$-nek nullapontjai $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} + \frac{\omega_1}{2}$, $\frac{1}{2} + \frac{\omega_2}{2}$, $\frac{1}{2} + \frac{\omega_1}{2} + \frac{\omega_2}{2}$ és nyilvánvaló, hogy ezek incongruensek, mert valamennyien elhelyezhetők ugyanabban a p. parallelogrammában. Több nulla-

pontja ezen belül nem lehet $\wp'(u)$-nak, mert 4-ed fokú elliptikus függvény. Képzeljük most a $g(z)$ függvényt felbontva lineáris tényezőkre:

$$\left(\frac{dz}{du}\right)^2 = g(z) = A(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)$$

Tehát $g(z_k)=0$, ha $k=1,2,3,4$, ekkor $\frac{dz}{du}$ is eltűnik, tehát $g(z)$-nek nullapontja ama z értékek, melyek $\wp'(u)$ zéropontjaihoz tartoznak, azaz

$$z_1=\wp\left(\tfrac{1}{2}\right),\quad z_2=\wp\left(\tfrac{1}{2}+\frac{\omega_1}{2}\right),\quad z_3=\wp\left(\tfrac{1}{2}+\frac{\omega_2}{2}\right),\quad z_4=\wp\left(\tfrac{1}{2}+\frac{\omega_1}{2}+\frac{\omega_2}{2}\right)$$

A midőn tehát $\wp(u)$-nak 4 különböző polusa van, $g(z)=\left(\frac{dz}{du}\right)^2$ eleget tesz a következő differentiális egyenletnek

$$\left(\frac{dz}{du}\right)^2 = A\left(z-\wp\left(\tfrac{1}{2}\right)\right)\left(z-\wp\left(\tfrac{1}{2}+\frac{\omega_1}{2}\right)\right)\left(z-\wp\left(\tfrac{1}{2}+\frac{\omega_2}{2}\right)\right)\left(z-\wp\left(\tfrac{1}{2}+\frac{\omega_1}{2}+\frac{\omega_2}{2}\right)\right)$$

a hol $z=\wp(u)$, és A egy állandó.

Vegyük a második esetet, midőn $\wp(u)$-nak egy másodrendű polusa van: α. Ekkor $2\alpha=s$, $\alpha=\frac{s}{2}$, Itt is úgy mint az első esetben áll, hogy

$$\wp'(u) = -\wp'(s-u)$$

Ha ebben $u=\frac{s}{2}$, kapjuk, hogy $\wp'\left(\frac{s}{2}\right)=-\wp'\left(\frac{s}{2}\right)$, de most $\frac{s}{2}$ polusa $\wp(u)$-nak, a miatt, hogy $\frac{s}{2}\equiv\alpha$. A $\wp'\left(\frac{s}{2}+\frac{\omega_1}{2}\right)$, $\wp'\left(\frac{s}{2}+\frac{\omega_2}{2}\right)$, $\wp'\left(\frac{s}{2}+\frac{\omega_1}{2}+\frac{\omega_2}{2}\right)$ függvényértékre nézve itt következik, hogy azok egyenlők az ellen-

tettjeikkel, de mivel $\frac{1}{2}+\frac{\omega_1}{2}$, $\frac{1}{2}+\frac{\omega_2}{2}$, $\frac{1}{2}+\frac{\omega_1}{2}+\frac{\omega_2}{2}$ incongruenciákkal α-val, csak nullapontjai lehetnek $\varphi'(u)$-nak. Ezek egyszersmind $\varphi'(u)$ összes nullapontjai, mert ebben az esetben $\varphi'(u)$ 3-adfokú. Midőn tehát $\varphi(u)$-nak egy másodrendű polusa van, $g(z)=\left(\frac{dz}{du}\right)^2$ eleget tesz a következő differentiális egyenletnek

$$\left(\frac{dz}{du}\right)^2 = A\left(z-\varphi\left(\frac{1}{2}+\frac{\omega_1}{2}\right)\right)\left(z-\varphi\left(\frac{1}{2}+\frac{\omega_2}{2}\right)\right)\left(z-\varphi\left(\frac{1}{2}+\frac{\omega_1}{2}+\frac{\omega_2}{2}\right)\right)$$

Látható, hogy, ha $z=\varphi(u)$ függvény ismeretes, akkor fel tudjuk állítani ezt a differentiális egyenletet, melyből azután adódik az az első fajú elliptikus integrál; u, mint φ-nek inverse függvénye.

De ha fordítva elättünk van egy elliptikus integrál

$$\int \frac{dz}{\sqrt{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)(z-\alpha_3)(z-\alpha_4)}}$$

a hol $\alpha_1 \ldots \alpha_4$ tetszőlegesen adott értékek, akkor nem tudhatjuk, hogy tényleg létezik-e egy másodfokú elliptikus függvény, mely az $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}+\frac{\omega_1}{2}$, $\frac{1}{2}+\frac{\omega_2}{2}$, $\frac{1}{2}+\frac{\omega_1}{2}+\frac{\omega_2}{2}$ pontokban épen ezen előírt értékeket veszi fel. Vagyis a mostanig elért eredményekkel még nincsen kimutatva, hogy egy ily tetszőlegesen adott integrál inverse függvénye tényleg egy

ily egyértékű biperiodicus elliptikus függvény.

Kérdezzük most, miként lehet egy tetszőleges $t = \psi(u)$ n-ed fokú elliptikus függvényt kifejezni egy másodfokú elliptikus függvénnyel. Már láttuk, hogy egy ilyen t függvény eleget tesz a következő quadraticus egyenletnek, ahol

$$\mathfrak{L} t^2 - 2\mathfrak{M} t + \mathfrak{N} = 0$$

a hol $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ a z-nek, mint másodfokú elliptikus függvénynek egész rationális függvényei. Ehhez vesszük még a $\sigma = \frac{dz}{du}$ egyenletét

$$\sigma^2 = g(z)$$

Az első egyenletből $t = \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{L}} \pm \sqrt{\frac{\mathfrak{M}^2 - \mathfrak{N}\mathfrak{L}}{\mathfrak{L}^2}}$

vagyis $(\mathfrak{L} t - \mathfrak{M})^2 = \mathfrak{M}^2 - \mathfrak{L}\mathfrak{N}$.

Világos, hogy ép úgy, mint t, ezen $(\mathfrak{L} t - \mathfrak{M})^2$ is elliptikus függvény, mert $\mathfrak{L}$ és $\mathfrak{M}$ rationális függvényei z-nek. Czélszerű lesz t helyett egy egyszerűbb τ függvényt vezetni be, úgyhogy

$$\mathfrak{L} t - \mathfrak{M} - \tau = \chi(u)$$ tehát

$$t = \frac{\tau + \mathfrak{M}}{\mathfrak{L}}$$

és $$\tau^2 = \mathfrak{M}^2 - \mathfrak{N}\mathfrak{L}$$

τ egyszerűbb függvénye z-nek, mert egy binomiens quadraticus egyenlet gyöke. Lássuk, mit

lehet ezzel a τ függvénnyel elérni. z a p-paralelogrammán belül felveszi minden lehető értékét, és pedig mindegyiket két pontban u_1 és u_1-ben a hol $u_2 \equiv s - u_1$. Ebben a két pontban $\varphi'(u_1) = -\varphi'(u_2)$ Ha tehát z az η síkjában olyan zárt útat rajzol melyen u_1 átmegy u_2-be, akkor ezen úton σ átmegy $(-\sigma)$-ba. Már most τ nintén, mint σ, a z-egész rationális függvényének négyzetgyöke, de természetes, hogy ugyanezt az okoskodást nem lehet τ-ra is alkalmazni. Mert megeshetik, hogy ha egy tetszőleges zárt útat írunk le, még olyant is, mely u_1-et átviszi u_2-be, azért τ eredeti értékéhez visszatér. De tegyük fel, hogy ez így volna, mi következnék akkor τ-ra nézve? az, hogy τ egyértékű függvénye a z-nek és mivel eleget tesz egy quadraticus egyenletnek, csak rationális függvény lehet. Ez akkor fog bekövetkezni, ha $(\omega_1 - \omega_2)$ teljes négyzet. Tehát ha a z bármilyen zárt útja után τ visszatér eredeti értékéhez, akkor τ szükségképen rationális függvénye z-nek; és minthogy $t = \tau + \frac{u}{2}$, t is rationális függvénye lesz z-nek $t = R(z)$

Vegyük most a másik lehetséges esetet, midőn z-nek nem minden zárt útja után tér vissza

τ az eredeti értékéhez, hanem vannak z-nek olyan zárt útjai, melyek τ-t átviszik $(-\tau)$-ba; ezek mivel τ egyértékű függvénye az u-nak minden esetre olyan utak, melyeken u_1 átmegy u_2-be.

Tehát tegyük fel, hogy oly útra nézve, melyen u_1 átmegy u_2-be $\chi(u_1) = -\chi(u_2)$ vagyis,

$\chi(u) = -\chi(s-u)$ De mivel ép így

$\varphi'(u) = -\varphi'(s-u)$

következik, hogy $\frac{\chi(u)}{\varphi'(u)} = \frac{\chi(s-u)}{\varphi'(s-u)}$

vagyis $\frac{\chi(u)}{\varphi'(u)}$ nem változik a z-nek semmiféle zárt útján, tehát z-nek egyértékű és e szerint rationalis függvénye: $\frac{\chi(u)}{\varphi'(u)} = R(z)$.

De még többet is lehet következtetni erre a hányadosra vonatkozólag. Mert a $\chi(u) = -\chi(s-u)$ egyenlet alapján következik, mint fenn láttuk $\varphi'(u)$-ra, hogy $\chi(u)$-nak az $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}+\frac{\omega}{2}$, $\frac{1}{2}+\frac{\omega_2}{2}$, $\frac{1}{2}+\frac{\omega}{2}+\frac{\omega_2}{2}$ szintén nullapontjai, tehát $\frac{\chi(u)}{\varphi'(u)}$ a $\varphi'(u)$, nullapontjaiban nem válik végtelenné, és így csak ott válhatik végtelenné, a hol $\chi(u)$. De $(\chi(u))^2 = \tau^2 = M^2 - 2N$ a z-nek egész rationalis függvénye, tehát csak ott válhatik végtelenné, a hol z

maga. De ha egy racionális függvénynek z-nek $\frac{\chi(u)}{\varphi(u)}$ csak $z=\infty$ mellett válik végtelenné, akkor az szükségképen egész racionális függvénye z-nek legyen az $\mathcal{P}(z)$,

$$\frac{\chi(u)}{\sigma} = \mathcal{P}(z)$$

Tehát $$\tau = \sigma . \mathcal{P}(z)$$

és így $$t = \psi(u) = \frac{\mathcal{M} + \sigma \mathcal{P}}{\mathcal{L}}$$

a hol $\mathcal{M}, \mathcal{P}, \mathcal{L}$ a z-nek egész racionális függvényei, t tehát a z és σ racionális függvénye

$$t = R(z, \sigma)$$

Ezzel kimutattuk, hogy minden elliptikus függvény rationalisan kifejezhető egy másodrendű elliptikus függvénnyel és annak u szerinti deriváltjával σ-val, és nyilvánvaló, hogy fordítva is, minden racionális függvénye z, σ-nak elliptikus függvény. Ez által az elliptikus függvények általános elmélete vissza van vezetve a másodfokú elliptikus függvények elméletére.

Tehát csak a másodfokú elliptikus függvényekkel kell behatóbban foglalkoznunk.

Ezt az eredményt különben másképen is értelmezhetjük, a mennyiben nevesebben vizsgáljuk a (z, σ) összefüggés kapcsolatát az u megfelelő értékeivel.

Tudjuk, hogy z minden értéket 2-ször vesz fel a periodus parallelogrammján belül, u-ban és (s-u)-ban, vagyis minden z-hez két u érték tartozik a periodusparallelogrammában, és emellett két σ érték is, t.i. $\varphi'(u) = \sigma$ és $\varphi'(s-u) = -\sigma$, a hol $\sigma^2 = g(z)$. Ha tehát a z-vel együtt megadjuk a hozzátartozó σ értéket is, akkor $\wp(z, \sigma)$ értékpárhoz csak egy u érték tartozik a p. parallelogrammán belül, és fordítva minden itt fekvő u értékhez egyetlen egy jól meghatározott (z, σ) tartozik úgy, hogy ha egy u bejárja az egész parallelogrammot, (z, σ) felveszi egész értékkészletét és pedig csak egyszer. Ha a p. parallelogramma minden u pontjára oda képzeljük a megfelelő (z, σ) értékpárt, akkor oly geometriai képződményünk van, melynek minden pontjához tartozik egy (z, σ) értékpár és minden (z, σ)-hez tartozik egy pontja a képződménynek. Ezt a képződményt neveznük a $\sigma^2 = g(z)$ egyenlethez tartozó Riemann féle felületnek. Ennek a felületnek csak az a hiánya az analytikai vizsgálatoknál használatos ilynemü felületekkel szemben, hogy nem zárt felü-

let, mert a C_1-el congruens C_2 és D_1-el congruens D_2 nem tartozik a parallelogrammához. Ezt a hiányt azonban egyszerűen elkerülhetjük azzal, hogy ezt a két oldalkört a parallelogrammához számítjuk és azután C_1-et C_2-vel, D_1-et D_2-vel egyenlítjük. Ilymódon a p. parallelogramma átalakul torus felületté (gyűrű felületté), mely tehát azzal a tulajdonsággal bír, hogy minden pontjához tartozik egy (z, σ) értékpár és fordítva. Ezt a felületet T-vel jelöljük, a C_1, C_2 valamint D_1, D_2 mentén felmetszett felületet pedig T jelöli. Ezt az analízis situs szempontjából tekintetében ez a T felület teljesen azonos a p. parallelogrammával, mert mindkettő egyszeresen összefüggő. A torus háromszorosan összefüggő, mert két metszéssel tudtuk átalakítani egyszeresen összefüggővé. A $\sigma^2 = g(z)$ egyenlethez tartozó, a z sík fölött elterjedő kétlevelű Riemann féle felület az analytikai situs szempontjából egyé-

lik ezzel a torussal, és át is mehetünk erről a kétlevelű Riemann féle felületekre, ha ezt a torust leképezzük a z síkra és pedig egy z síkra azon torus pontokat, melyek a (ξ, σ) értékpárokat képviselik, egy másikra azokat a torus pontokat, melyek a $(\xi, -\sigma)$ értékeket képviselik, a két z síkot az egyező z pontok fedésére mellett egymásra rakva kapjuk a kétlevelű Riemann féle felületet. A torus felületen ép úgy dolgozhatunk, mint a Riemann féle felületen, s az előbbi könnyelmesebb, mert közvetlenül a p. parallelogrammából keletkezett. A torus segélyével egyszerűen belátható, hogy minden elliptikus függvény a (z, σ) egyértékű függvénye. Mert minden elliptikus függvény egyértékű függvénye a helynek a p. parallelogrammán belül és biperiodicus voltánál fogva egyértékű marad akkor is, ha a C_1 oldalt a C_2-vel, D_1-et a D_2-vel egyesítjük; a függvény tehát a torusson is egyértékű függvénye a helynek; de a torus egyértékű képviselőjén a (z, σ) értékpárnak és így

minden elliptikus függvény egyértékű függvénye a (z, σ)-nek. Ha még hozzávesszük, hogy az elliptikus függvény a p. parallelogrammán belül csak polusokkal bir, függvénytani alapokon is következik, hogy egy ilyen függvény, mely a torusz a hely egyértékű függvénye és határozatlansági helyek nélkül bir, rationális függvénye $a(z, \sigma)$-nek.

Legyen most $t = \varphi(u) = R(z, \sigma)$ egy n-ed fokú elliptikus függvény, és $\tau = \chi(u) = S(z, \sigma)$ egy m-ed fokú " " melyek u egyanakhoz a p. parallelogrammahoz tartoznak, akkor, a mint láttuk, két ilyen ell. függvény közt, mindig egy algebrai egyenlet áll fenn

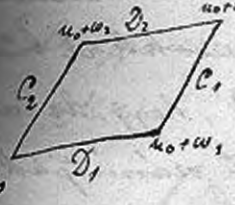
$$F(t, \tau) = 0$$

mely t-ben m-ed, τ ben n-ed fokú. Erről az egyenletről tudjuk, hogy léteznek olyan u paraméter, melynek elliptikus függvényeiként állítható elő, t és τ, $t = \varphi(u)$, $\tau = \chi(u)$ vagy a mi ugyanaz, léteznek olyan (z, σ) értékpár $[\sigma^2 = g(z)]$, melynek racionalis függvényeként állítható elő az $F(t, \tau) = 0$ egyenlettel összekapcsolt t és τ. Ha $G(t, \tau) = 0$ algeb-

rai egyenletében t és τ külön-külön kifejezhető mint egy v paraméter racionális függvénye, azt szoktuk mondani, hogy a $G(t,\tau)=0$ egyenlettel értelmezett görbe unicursalis görbe. Az $F(\tau,t)=0$ görbe már nem unicursalis. M. t. i. lehet találni olyan z paramétert, melyhez adjungálva a z egy harmad vagy 4-edfokú racionális függvényének négyzetgyökét $\sigma=\sqrt{\quad}$, ezen t és τ kifejezhető, mint a (z,σ) értékpár racionális függvénye, vagy ha $u=\int\frac{dz}{\sigma}$, paramétert vezetjük be, t és τ kifejezhető, mint ezen u elliptikus függvénye. Az ilyen görbét bicursalisnak nevezzük, vagy, a mint Clebsch mondja, az ilyen görbének „Geschlecht" száma $p=2$ míg az unicursalis görbénél $p=1$. Weierstrass a „Geschlecht" számot rangszámnak nevezi. Tehát két elliptikus függvény között fennálló algebrai egyenlet mindig elsőrangú görbét értelmez. Egy n-edrendű görbének legfeljebb $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ „kettős" pontja lehet; ha épen ennyi van, a görbe unicursalis,

ha egyggyel kevesebb, a görbe bicursalis (V. ö. Clebsch, Crelle Fournal 64-k.)

Eddig okoskodásainknak az a főkiinyorsága, hogy biperiodicus függvényekkel dolgoztunk, a nélkül, hogy ilyen függvények existentiája ki volna mutatva. Ezen existentia kérdése abban áll, hogy, ha meg adunk két petroláleges periodust w_1 és w_2, melyeknek hányadosában a képzetes rész positiv, és elgondolunk egy ezen periodusokhoz tartozó parallelogrammát, vajjon léteznek-e oly elliptikus függvények, melyek ezen periodusokkal bírnak, vagyis léteznek-e az u complex változó olyan egyértékű függvényei, melyek a p. parallelogrammában véges számú polussal bírnak, különben mindenütt egyértékűek, végesek és folytonosak és $C_1 C_2$ meg D_1 és D_2 correspondeáló pontjaiban ugyanazt az értéket veszik fel. Vagy a mi u. a.: ha adva egy torus felület, léteznek-e a torus helyének egyértékű függvényei, melyek a felületen csak véges pa-



mi helyen vélnak elsőrendben végtelenek. Ezen alakban fogalmazva a kérdést, az ily függvények existentiája tényleg kimutatható az úgynevezett Dirichlet féle principium segélyével. Egy másik eljárás, mely nem támaszkodik a Dirichlet féle minimum principiumra, Schwartz és Neumanntól ered. Úgyhogy vizsgálatainknak teljesen szilárd alapot adhatunk ezen existentia bizonyitással. Megjegyzendő különben, hogy a feladatot bizonyos tekintetben általánositani is lehet. Az u_1 és ω_2 periodusokkal bíró függvénytől ugyanis azt követeljük, hogy, ha a pontot, melyben a függvény értékét számitjuk, eltoljuk ω_1-el vagy ω_2-vel ezen két vector irányában és nagyságával, akkor a függvény értéke ne változzek. Az általánositás most abban áll, hogy 1.) nem veszünk közönséges számsikokat, hanem állandó negativ görbülettel bíró felületet vagyis Bólyai féle sikot;

2.) nem veszünk ezen a síkon belül csak két eltolást, hanem 2p eltolást és kérdezzük hogy vajjon léterik oly függvény, mely a 2p Bólyai

sikbeli eltolásra nem változtatja értékét, és véges számú hely kivételével egyértékű véges és folytonos. Ebben az értelemben véve az existentia bebizonyítás megtalálható Schlesinger: Handbuch der Theorie der lin. Diffgl. III. kötet p. 322. –

Mi itt más utat fogunk követni az existentia bizonyításban s ezzélfogva most áttérünk az ily elliptikus függvények integráljainak vizsgálatára az u síkon belül.

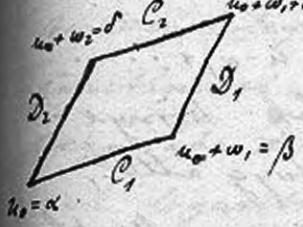
$$\int \varphi(u)\,du \quad ?$$

A legegyszerűbb eset az, midőn $\varphi(u) = 1$, ekkor $\frac{dz}{du} = \varphi'(u) = \sigma$ egyenletből du értékét helyettesítve:

$$\int du = \int \frac{dz}{\sigma}$$

Lássuk, mi jelentése van ezen integrálban a periodusoknak. Nyilvánvaló, hogy az első periodus w_1 így értelmezhető

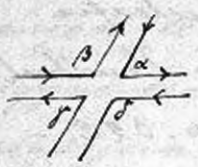
$$w_1 = \int_{u_0}^{u_0+w_1} du = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dz}{\sigma} = \int_{(D_1)} \frac{dz}{\sigma}$$



ha t. i. α tornyra térünk át. w_1 tehát a D_1 mentén vett első-fajú integrál. Éppen így:

$$w_2 = \int_{u_0+w_1}^{u_0+w_1+w_2} du = \int_{\beta}^{\gamma} \frac{dz}{\sigma} = \int_{(C_1)} \frac{dz}{\sigma}$$

vagyis w_2 nem egyéb, mint a C_1 mentén vett elsőfajú integrál. Ennek alapján most már



környű az integrál magaviseletét a torus felületen tanulmányozni, hogy végtelen sok értékű stb. Ezzel helyre van állítva a kapcsolat a jelen vizsgálat és a Riemann féle felületek elmélete között. A p. parallelogrammán belül változó u függvényére talált tételeket átvihetjük a Riemann féle felületen változó (z, σ) függvényére és alkalmazhatjuk rá az itt érvényes tételeket.

Mi azonban az u síkánál maradunk és áttérünk az elliptikus függvények integráljainak felosztására két categoriába. Ugyanis a $\int \psi(u)\,du$ függvény a periodus parallelogrammán belül birhat polusokkal. Tegyük fel, hogy a közelében

$$\psi(u) = \frac{\delta_2}{(u-\alpha)^2} + \ldots + \frac{\delta_1}{u-\alpha} + \varepsilon_0 + \varepsilon_1(u-\alpha) + \ldots$$

akkor nyilvánvaló, hogy a polusok környezetében az integrál magaviselete függ attól, hogy a $\frac{\delta_1}{u-\alpha}$ tag jelen van vagy nem. Mert ha

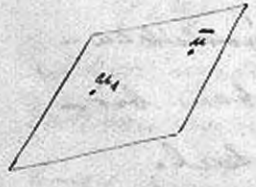
ez a tag előfordul $\varphi(u)$ sorbafejtésében, akkor az integrál végtelen sok értékű, az x polus megkerülésével változtatja értékét. Ha pedig $\delta_1 = Res_x \varphi(u) = 0$, akkor az integrál nem nemred változást az x hely megkerülésével. Az első esetben az ilyen x polust ki kellene zárni a síkból s a nyert felületet egyszeresen összefüggővé tenni a parallelogramma oldalaig alkalmazott metszéssel. Ezen a felületen belül az integrál egyértékű függvényt volna a helynek, mely a metszet átlépésével napvonalik $2\pi i \delta_1$-el.

A második esetben az integrál az egész parallelogrammán belül egyértékű függvénye a helynek, tehát egy bizonyos u_1 ponttól egy u pontig vett integrál $\int_{u_1}^{u} \varphi(u)\,du$ független az úttól. Ehhez képest az u_1 integrálokat két categoriába sorozzuk. Az első categoriába tartozó integrálok azok, melyek nem birnak logarithmusi singularitással, a másodikcategoriába tartozó integrálok ellenben birnak logarithmusi singularitásokkal.

Mi itt csak az első categoriába tartozó integrálokkal foglalkozunk és vizsgáljuk az ilyen

$$J(u) = \int_{u_1}^{u} \varphi(u)\, du$$

integrált, mint a felső határ függvényét. Ez az integrál az u-nak egyértékű függvénye. A torusfelületen ez annyit jelent, hogy a T felületen belül ez az integrál egyértékű függvénye a helynek. Vizsgáljuk, miképen változik ezen integrál értéke, ha u egy periodussal növekedik, azaz, ha u-tól átmegyünk egy vele correspondeáló ponthoz, vagyis mennyi $J(u+\tilde{w})$, a hol $\tilde{w} = m w_1 + n w_2$. E végett legczélszerűbb úgy választani a p. parallelogrammát, hogy u_1 azon belül feküdjék. Akkor u-val, mely lehet a sik egy tetszőleges pontja, correspondeal egy $\bar{u}$ a p. parallelogrammon belül, azaz $u = \bar{u} + m w_1 + n w_2$. Hanem úgy válasszuk a p. parallelogrammát, hogy annak kerületén ne legyen polusa a $\varphi(u)$ függvénynek, ekkor:



$$\int_{u_1}^{u} = \int_{u_1}^{\bar{u}} + \int_{\bar{u}}^{\bar{u}+\tilde{w}}$$

az út egészen tetszőleges. Az utóbbi integrál kiszámítása végett járjunk el következőleg. Integráljunk egy zárt úton, mely halad $\bar{u}$-tól $(\bar{u}+\tilde{w})$-on át $(u_0+\tilde{w})$-ba és innen (u_0+mw_1)-on át u_0-ba, majd vissza $\bar{u}$-ba.



Erre zárt út mentén vettve:

$$\int_{\bar{u}}^{\bar{u}+\tilde{w}} + \int_{\bar{u}+\tilde{w}}^{u_0+\tilde{w}} + \int_{u_0+\tilde{w}}^{u_0+mw_1} + \int_{u_0+mw_1}^{u_0} + \int_{u_0}^{\bar{u}} = 0$$

De a második integrálban $u = v+\tilde{w}$ substitutiót alkalmazva:

$$\int_{\bar{u}+\tilde{w}}^{u_0+\tilde{w}} \psi(u)\,du = \int_{\bar{u}}^{u_0} \psi(v+\tilde{w})\,dv = -\int_{u_0}^{\bar{u}} \psi(u)\,du$$

és ez az ötödik integrállal együtt 0-at ád.
A harmadik integrálban $u = v+mw_2$ substitutiót alkalmazva:

$$\int_{u_0+\tilde{w}}^{u_0+mw_1} \psi(u)\,du = \int_{u_0+mw_2}^{u_0} \psi(v+w_1 m)\,dv = -\int_{u_0}^{u_0+mw_2} \psi(u)\,du$$

és ezt beteéve egyenletünkbe kapjuk, hogy

$$\int_{\bar{u}}^{\bar{u}+\tilde{w}} = \int_{u_0}^{u_0+mw_2} \psi(u)\,du + \int_{u_0}^{u_0+mw_1} \psi(u)\,dw$$

De a jobboldali második integrál

$$\int_{u_0}^{u_0+mw_1} = \int_{u_0}^{u_0+w_1} + \int_{u_0+w_1}^{u_0+2w_1} + \int_{u_0+2w_1}^{u_0+3w_1} + \dots + \int_{u_0+(m-1)w_1}^{u_0+mw_1}$$

a második integrálban $u = v + w_1$ substitutiót alkalmazva $\int_{u_0}^{u_0+w_1} \psi(u)du = \int_{u_0}^{u_0+w_1} \psi(v)dv$ ejtem így a többi integrál mind egyenlő az elsővel, úgyhogy:

$$\int_{u_0}^{u_0+mw_1} \psi(u)du = m \int_{u_0}^{u_0+w_1} \psi(u)du$$ hasonlóképp adódik, hogy $\int_{u_0}^{u_0+nw_2} \psi(u)du = n \int_{u_0}^{u_0+w_2} \psi(u)du$.

Ha most ezt a két integrált, mint állandó mennyiséget Ω_1 illetőleg Ω_2-vel jelöljük:

$$\int_{u_0}^{u_0+w_1} \psi(u)du = \Omega_1 \quad \text{és} \quad \int_{u_0}^{u_0+w_2} \psi(u)du = \Omega_2$$

akkor az első egyenletben szereplő második integrál értékül adódik: $\int_{\bar{u}}^{\bar{u}+\bar{w}} = m\Omega_1 + n\Omega_2$ tehát egy állandó, melyet beléve az eredeti egyenletbe, kapjuk, hogy

$$\int_{u_1}^{u} \psi(u)du = \int_{u_1}^{\bar{u}} \psi(u)du + m\Omega_1 + n\Omega_2$$

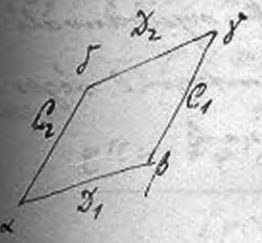
vagy, a mi ugyanazt mondja:

$$\mathcal{J}(\bar{u} + mw_2 + nw_2) = \mathcal{J}(\bar{u}) + m\Omega_1 + n\Omega_2$$

Ez az egyenlet tünteti fel az integrálfüggvény magaviseletét, ha u egy periodussal növekedik. ω_1 é. ω_2 az integrálfüggvény periodicitási modulusai. Ha u helyet bevezetjük (z,σ)-t annak alapján, hogy $z=\varphi(u)$ $\sigma=\varphi'(u)$, akkor

$$J(u) = \int_{u_1}^{u} \psi(u)\,du = \int_{z_1\sigma_1}^{z\sigma} \frac{R(z,\sigma)}{\sigma}\,dz$$

A mi integrálunk tehát egy a Riemann féle felülethez tartozó elliptikus integrál, melynek periodicitási modulusai a következő integrálalakkal vannak értelmezve:



$$\omega_1 = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(u)\,du = \int_{\mathfrak{L}_1} \frac{R(z,\sigma)}{\sigma}\,dz \quad \text{é}$$

$$\omega_2 = \int_{\beta}^{\gamma} \psi(u)\,du = \int_{\mathfrak{L}_1} \frac{R(z,\sigma)}{\sigma}\,dz$$

Tehát egyaránt, mint a hogy azokat a Riemann féle felületek elméletében láttuk.

Áttérünk most a következő integrál vizsgálatára:

$$Z = -\int_{u_1}^{u} \frac{1}{2} \frac{\varphi(u)+\varphi'(v)+[\varphi(u)-\varphi(v)]\dfrac{\varphi''(v)}{\varphi'(v)}}{[\varphi(u)-\varphi(v)]^2}\,du$$

a hol v mint parameter szerepel. Ezt az integrált

elemi másodfajú integráluak nevezzük. Áttérve az a bonus felületre, helyettesíteni kell

$$z = \varphi(u),\ \sigma = \varphi'(u),\ \xi = \varphi(v),\ \eta = \varphi'(v)$$

$$\left.\begin{aligned}\varphi''(v) &= \frac{d\eta}{dv}\\ \varphi'(v) &= \frac{d\xi}{dv}\end{aligned}\right\} \quad \frac{\varphi''(v)}{\varphi'(v)} = \frac{d\eta}{d\xi}$$

és ha u_1-nek megfelel (z, σ), akkor

$$Z = -\int_{z_1,\sigma_1}^{z,\sigma} \frac{1}{2\sigma}\,\frac{\sigma+\eta+(z-\xi)\frac{d\eta}{d\xi}}{(z-\xi)^2}\,dz$$

Foglalkozzunk most ezen elemi másodfajú integrál discussiójával. Mindenekelőtt nyilvánvaló hogy $\varphi(u)$ polusaiban α_1 és α_2-ben az integrál véges. Mert ha α_1 egyszerű polusa $\varphi(u)$-nak

$$\varphi(u) = \frac{\delta_1}{u-\alpha_1} + f.c.$$

akkor $\varphi'(u) = -\frac{\delta_1}{(u-\alpha_1)^2} + \dots\dots$

és $[\varphi(u)]^2 = \frac{\delta_1^2}{(u-\alpha_1)^2} + \dots\dots$

tehát a végtelenségnek egy fokban, mint alsóban kisebb. Az integrál emmélfogva csak akkor válik végtelenné, a hol a nevező eltűnik, tehát v-ben és a congruens helyeken, nem különben végtelenné válhatnék még $(u-v)$-ben és a congruens pontokban, mert akkor $\varphi(u-v) = \varphi(v)$, és így a nevező ott is eltűnik. De hömnyű be-

látni; hogy $u = 1 - v$ - ben az integrál véges marad.
T. i.: mivel

$$\varphi(v) = \varphi(1-v)\,,\quad \varphi'(v) = -\varphi'(1-v),\quad \varphi''(v) = \varphi''(1-v) \text{ stb.}$$

lesz $u = 1 - v$ környezetében, Taylor tétele szerint:

$$\varphi(u) = \varphi(v) - \varphi'(v)(u-\bar v) + \tfrac{1}{2}\varphi''(u)(u-\bar v)^2 + \dots \quad \text{hol } (\bar v - v)$$

$$\varphi(u) - \varphi(v) = -\varphi'(v)(u-\bar v)\left\{1 - \frac{1}{2}\frac{\varphi''(v)}{\varphi'(v)}(u-\bar v) + \dots\right\} \text{ tehát}$$

$$[\varphi(u) - \varphi(v)]^2 = \varphi'(v)^2(u-\bar v)^2\left\{1 - \frac{\varphi''(v)}{\varphi'(v)}(u-\bar v) + \dots\right\}$$

Továbbá: $\varphi'(u) = -\varphi'(v) + \varphi''(v)(u-\bar v) + \dots\dots$

$$\varphi'(u) + \varphi'(v) = \varphi''(v)(u-\bar v) + \dots\dots\,, \text{ tehát}$$

$$\varphi'(u) + \varphi'(v) + [\varphi(u) - \varphi(v)]\frac{\varphi''(v)}{\varphi'(v)} = \varphi''(v)(u-\bar v) + \dots - $$

$$- \varphi''(v)(u-\bar v) + \dots\dots = \varepsilon_1(u-\bar v)^2 + \dots$$

azaz:

$$\frac{\varphi'(u) + \varphi'(v) + [\varphi(u) - \varphi(v)]\frac{\varphi''(v)}{\varphi'(v)}}{[\varphi(u) - \varphi(v)]^2} = \frac{\varepsilon_1(u-\bar v)^2 + \dots}{\varphi'(v)^2(u-\bar v)^2\left\{1 - \dots\right\}} =$$

$$= \frac{\varepsilon_2}{\varphi'(v)^2} + \varepsilon_3(u-\bar v) + \dots\dots \quad \text{tehát:}$$

$u = \bar v$ - ben véges.

Az elemi másodfajú integrál e szerint a p. parallelogrammán belül csak az $u = v$ pontban válik végtelenné. Állítsuk elő az integrál sorba fejtését $u = v$ környezetében. A Taylor tétel szerint.

$$\varphi(u) = \varphi(v) + \varphi'(v)(u-v) + \frac{\varphi''(v)}{2!}(u-v)^2 + \dots\dots$$

$$\varphi(u) - \varphi(v) = (u-v)\varphi'(v)\left[1 + \sigma_1(u-v) + \dots\dots\right]$$

a hol $\sigma_1 = \frac{1}{2}\frac{\varphi''(v)}{\varphi'(v)}$

$$[\varphi(u)-\varphi(v)]^2=(u-v)^2(\varphi'(v))^2[1+2\delta_1(u-v)+\dots]$$

$$\varphi'(u)=\varphi'(v)+\varphi''(v)(u-v)+\dots\dots\dots$$

és $\varphi'(u)+\varphi'(v)=2\varphi'(v)+\varphi''(v)(u-v)+\dots\dots$

végre még a feleáben szereplő additiv tag

$$[\varphi(u)-\varphi(v)]\frac{\varphi''(v)}{\varphi'(v)}=\varphi''(v)(u-v)\{1+\delta_1(u-v)+\dots\}$$

Tehát a tört jelsője:

$$\varphi'(u)+\varphi'(v)+[\varphi(u)-\varphi(v)]\frac{\varphi''(v)}{\varphi'(v)}=2\varphi'(v)+2\varphi''(v)(u-v)$$

és az integrál maga:

$$Z=-\int_{u_1}^{u}\frac{1}{2}\frac{1}{(\varphi'(u)^2(u-v)^2}\frac{2\varphi'(u)+2\varphi''(v)(u-v)+\dots}{1+2\delta_1(u-v)+\dots}du$$

$$=-\int_{u_1}^{u}\frac{\varphi'(v)}{\varphi'(v)^2(u-v)^2}\frac{1+2\delta_1(u-v)+\varepsilon_2(u-v)^2+\dots}{1+2\delta_1(u-v)+\delta_2(u-v)^2+\dots}du$$

Ez a második törtet kell most sorbafejteni $(u-v)$ hatványai szerint. $(u-v)$ szorzójának meghatározására számítsuk ki,

$$\frac{d}{du}\frac{1+2\delta_1(u-v)+\varepsilon_2(u-v)^2+\dots}{1+2\delta_1(u-v)+\delta_2(u-v)^2+\dots}=$$

$$=\frac{(1+2\delta_1(u-v)+\dots)(2\delta_1+2\varepsilon_2(u-v)+\dots)-(1+2\delta_1(u-v)+\dots)(2\delta_1+2\delta_2(u-v)+\dots)}{[1+2\delta_1(u-v)+\dots]^2}$$

és $u=v$ téve $=\frac{2\delta_1-2\delta_1}{1}=0$

A sorbafejtésben tehát $(u-v)$ coefficiense 0, így ez a tag hiányzik, vagyis:

$$\frac{1+2\delta_1(u-v)+\varepsilon_2(u-v)^2+\dots}{1+2\delta_1(u-v)+\delta_2(u-v)^2+\dots} = 1+*+\beta_2(u-v)^2+\dots.$$

Ezek behelyettesítésével az integrál

$$Z = -\int_{u_1}^{u} \frac{1}{\varphi'(v)(u-v)^2}\left(1+*+\beta_2(u-v)^2+\dots\right)du$$



Ha most kijelöljük az v centrumú kört, melyen belül a sor egyenletesen convergens, és ha ε a v környezetében fekszik, akkor:

$$Z = -\left\{\int_{u_1}^{\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{u}\right\} \text{ írható.}$$

És ha u a környezetében marad, szabad a második integrált tagonként végezni, az első integrál egy állandó C_1, úgy hogy:

$$Z = C_1 + \frac{1}{\varphi'(v)(u-v)} + * + C(u-v) + \dots$$

vagy $$Z = \frac{1}{\varphi'(v)}\frac{1}{u-v} + f.c$$

Ilyen a Z magaviselete a v polus környezetében, ha most megalkotjuk a $Z(u)\,\varphi'(v) = \xi(u)$ függvényt, akkor ennek sorbafejtése v környezetében

$$\xi(u) = \frac{1}{u-v} + f.c.$$

Ezzel a függvénnyel fogunk most továbbdolgozni. A definíció értelmében:

BOLYAI TUD. EGYETEM - Kolozsvár - KÖNYVTÁR

$$\xi(u) = -\frac{\varphi'(v)}{2}\int_{u_1}^{u} \frac{\varphi'(u)+\varphi'(v)+[\varphi(u)-\varphi(v)]\frac{\varphi''(v)}{\varphi'(v)}}{[\varphi(u)-\varphi(v)]^2}\,du$$

és ez az integrálfüggvény csak v-ben és a congruens helyeken válik végtelenné első rendben, és $\operatorname{Res}_v \xi(u) = 1$. A $\xi(u)$ függvénynek, mint az első categoriába tartozó függvénynek van két periodicitási modulusa η_1 és η_2, úgy, hogy

$$\xi(u+\omega_1) = \xi(u) + \eta_1$$

$$\xi(u+\omega_2) = \xi(u) + \eta_2$$

és definitiójuk ugyanaz, mint az R_1 és R_2 definitiója.

A következőkben egy fontos relatiót fogunk megállapitani ezen η_1 és η_2 meg az ω_1 és ω_2 periodusok között. Ha ugyanis $\xi(u)$ függvényt a periodus parallelogrammán mentén integráljuk, ezen belül csak egy polusa lévén a függvénynek, melyre vonatkozó Residuje 1, következik, hogy

$$\int_{(\mathfrak{P})} \xi(u)\,du = 2\pi i \operatorname{Res}_v \xi(u) = 2\pi i$$

De másfelől

$$\int_{(\mathfrak{P})} = \int_{u_0}^{u_0+\omega_1} + \int_{u_0+\omega_1}^{u_0+\omega_1+\omega_2} + \int_{u_0+\omega_1+\omega_2}^{u_0+\omega_2} + \int_{u_0+\omega_2}^{u_0}$$

(2) (3) (4)

A második integrálban $u = v + \omega_1$ substitutiónál

$$(2) = \int_{u_0}^{u_0+\omega_2} \xi(v+\omega_1)\,dv = \int_{u_0}^{u_0+\omega_2} \xi(v)\,dv + \eta_1 \int_{u_0}^{u_0+\omega_2} dv = -(4) + \eta_1 \omega_2$$

A harmadik integrálban $u = v + \omega_2$ substituálva

$$(3) = \int_{u_0+\omega_1}^{u_0} \xi(v+\omega_2)\,dv = \int_{u_0+\omega_1}^{u_0} \xi(v)\,dv + \eta_2 \int_{u_0+\omega_1}^{u_0} dv = -(1) - \eta_2 \omega_1$$

tehát $$\int_{(P)} \xi(u)\,du = \eta_1 \omega_2 - \eta_2 \omega_1 = 2\pi i$$

vagyis $$\eta_1 \omega_2 - \eta_2 \omega_1 = 2\pi i$$

Ez az úgynevezett Legendre féle relatio, mely összeköti az elemi másodfajú integrál η_1 és η_2 periodicitási moduluvait az ω_1 és ω_2 periodusokkal.

A továbbiakban egy eljárást fogunk követni, mely classikus az elliptikus függvények elméletében. T.i. a másodfajú integrál segélyével átmegyünk a Jacobi által használt ϑ függvényhez. Ez az eljárás lényegében ugyanaz, a melyet Jacobi is követett az ő „Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum" cz. munkájában. Ez az eljárás a következőben áll: a ξ függvényről átmegyünk ennek o-tól u-ig vett integráljára, feltételezvén, hogy o nem congruens

a v pólussal. Például

$$\int_{\circ}^{u} \xi(u)\,du = G(u)$$

Ez a $G(u)$ már nem egyértékű függvény, mert

$$\xi(u) = \frac{1}{u-v} + f.c \quad \text{lévén}$$

$$G(u) = \log(u-v) + f.c.$$

Például $G(u)$-nak végtelen sok singularitása van az u síkon belül és egy ilyennek megkerülésével $G(u)$ nő $2\pi i$-vel. De már

$$e^{G(u)} = \mathfrak{F}(u)$$

függvény egyértékű az egész u síkon belül. Ez már lényegében a Jacobi féle ϑ függvény. Sőt $\mathfrak{F}(u)$ sehelyem válik végtelenné, hanem a ω. parallelogrammán belül csak a v pontban bir elsőrendű nullaponttal, lévén $\mathfrak{F}(u) = (u-v)\varepsilon^{g.c.}$

Vizsgáljuk most, miképp változik a $G(u)$ és $\mathfrak{F}(u)$ függvény, ha u egy periodussal naggorodik.

$$G(u+\omega_1) = \int_{\circ}^{u+\omega_1} \xi(u)\,du$$

és ha $u = v + \omega_1$, akkor ez folytatólag

$$= \int_{-\omega_1}^{u} \xi(v+\omega_1)\,dv = \int_{-\omega_1}^{u} \xi(u)\,du + \eta_1 \int_{-\omega_1}^{u} du$$

De $\int_{-w_1}^{u} \xi(u)\,du = \int_{-w_1}^{0} \xi(u)\,du + \int_{0}^{u} \xi(u)\,du = +\int_{-w_2}^{0} \xi(u)\,du + G(u)$

és ha $\int_{-w_1}^{0} \xi(u)\,du = \lambda_1$, a mely állandó, akkor

$$G(u+w_1) = G(u) + \eta_1(u+w_1) + \lambda_1$$

épen igy kapjuk, hogy

$$G(u+w_2) = G(u) + \eta_2(u+w_2) + \lambda_2$$

a hol $\lambda_2 = \int_{-w_2}^{0} \xi(u)\,du$

Ez a $G(u)$ függvény két funcionális egyenlete. Erről átmehetünk $\mathfrak{P}(u)$ funcionális egyenleteihez, a mennyiben

$$l^{G(u+w_1)} = \mathfrak{P}(u+w_1) = \mathfrak{P}(u)\,l^{\eta_1(u+w_1)+\lambda_1}$$

és $$\mathfrak{P}(u+w_2) = \mathfrak{P}(u)\,l^{\eta_2(u+w_2)+\lambda_2}$$

Célszerű lesz az irodalomban használt jelölések mellett tartásával az $\eta_1, \eta_2, \lambda_1$, és λ_2 helyett más állandókat: a_1, a_2, b_1, b_2, bevezetni a Körvet-kező egyenletek alapján:

$$\eta_1 = -2\pi i a_1 \qquad \eta_2 = -2\pi i a_2$$

$$\lambda_1 = -\frac{\eta_1 w_1}{2} + b_1 \pi i \qquad \lambda_2 = -\frac{\eta_2 w_2}{2} + b_2 \pi i$$

Akkor $\eta_1(u+w_1) + \lambda_1 = -2\pi i a_1 (u+w_1) - \frac{\eta_2 w_2}{2} + b_1 \pi i$

$$= -2\pi i a_1 u - 2\pi i a_1 w_1 + \pi i a_1 w_1 + b_1 \pi i$$

$=$

$$= -\pi i\,[a_1(2u+w_1)+b_1]$$

hasonlóképpen $\eta_2(u+w_2)+l_2 = -\pi i\,[a_2(2u+w_2)+b_2]$

Tehát a $T(u)$ funcționális egyenletei

$$T(u+w_1) = l^{-\pi i[a_1(2u+w_1)+b_1]}\cdot T(u)$$

$$T(u+w_2) = l^{-\pi i[a_2(2u+w_2)+b_2]}\cdot T(u)$$

Ha tehát a $T(u)$ függvényben u egy periódussal növekedik, maga a függvény egy ilyen exponentiális factorral szorzódik. A lényeges az, hogy az exponens az u-nak lineáris függvénye. Ezt a $T(u)$ függvényt nevezzük első fokú Jacobi féle függvénynek. Itt még megjegyzendő, hogy $a_2w_1 - a_1w_2 = 4$

Célszerű lesz levezetni azt vonatkozást, mely fennáll a Jacobi féle függvénynek a per. parallelogrammon belül fekvő nullapontja és az itt szereplő a_1, b_1, a_2, b_2 állandók között. E végett számítsuk ki az következő integrált

$$\int_{(P)} u\,\frac{d\log T(u)}{du}\,du = \int_{P} u\,\frac{T'(u)}{T(u)}\,du$$

Az integrál jel alatti függvény a p. parallelogrammán belül egyértékű, de $T(u)$ nullapontjában v-ben végtelenné válik, és mivel

$$T(u) = d_1(u-v) + d_2(u-v)^2 + \dots$$

$$T'(u) = d_1 + 2d_2(u-v) + \dots$$

$$\frac{\mathcal{F}'(u)}{\mathcal{F}(u)} = \frac{d_1 + 2d_2(u-v) + \dots}{d_1(u-v) + d_2(u-v)^2 + \dots}$$

$$= \frac{1}{u-v}\{1 + \varepsilon_1(u-v) + \dots\}$$

továbbá $u = v + (u-v)$

lesz $u\frac{\mathcal{F}'(u)}{\mathcal{F}(u)} = \frac{v}{u-v} + \text{f.c.}$

tehát $\operatorname{Res}_v u\frac{\mathcal{F}'(u)}{\mathcal{F}(u)} = v$

a miből következik, hogy

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(\mathfrak{P})} u\frac{d\log\mathcal{F}(u)}{du}\,du = v$$

Ha ezt az integrált négy részben fogjuk fel, írhatjuk, hogy

$$v = \frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{u_0}^{u_0+w_1} u\,d\log\mathcal{F}(u) + \int_{u_0+w_1}^{u_0+w_1+w_2} + \int_{u_0+w_1+w_2}^{u_0+w_2} + \int_{u_0+w_2}^{u_0}\right\}$$

(1) (2) (3) (4)

A második (2) integrálban $u = v + w_1$ helyettesítve,

$$(2) = \int_{u_0}^{u_0+w_2}(v+w_1)\,d\log\mathcal{F}(v+w_1)$$

és $(2)+(4) = \int_{u_0}^{u_0+w_2}\left[(u+w_1)\,d\log\mathcal{F}(u+w_1) - u\,d\log\mathcal{F}(u)\right]$

$$= \int_{u_0}^{u_0+w_2}(u+w_1)\left[d\log\mathcal{F}(u+w_1) - d\log\mathcal{F}(u)\right] + w_2\int_{u_0}^{u_0+w_2} d\log\mathcal{F}(u)$$

De $\mathcal{F}(u) = e^{G(u)} = e^{\int\xi\,du}$, tehát $\log\mathcal{F}(u) = \int\xi\,du$ és

$d\log\mathcal{F}(u) = \xi(u)\,du$, úgy hogy

$$(2)+(4) = \int_{u_0}^{u_0+w_2}(u+w_1)\left[\xi(u+w_1) - \xi(u)\right]du + w_1\int_{u_0}^{u_0+w_2} d\log\mathcal{F}(u)$$

és miután $\zeta(u+\omega_1) - \zeta(u) = \eta_1 = -2\pi i\, a_1$

lesz egyfelől

$$\int_{u_0}^{u_0+\omega_2} (u+\omega_1)\left[\zeta(u+\omega_1) - \zeta(u)\right] du = \eta_1\left[(u+\omega_1)\omega_2 + \frac{\omega_2^2}{2}\right] =$$

$$= -2\pi i\, a_1\left[(u_0+\omega_1)\omega_2 + \frac{\omega_2^2}{2}\right]$$

másfelől $\int_{u_0}^{u_0+\omega_2} d\log \vartheta(u) = \log \vartheta(u_0+\omega_2) - \log \vartheta(u_0)$

de $\vartheta(u_0+\omega_2) = e^{-\pi i\left[a_2(2u_0+\omega_2)+b_2\right]}\vartheta(u_0)$ tehát

$\log \vartheta(u_0+\omega_2) = \log \vartheta(u_0) - \pi i\left[a_2(2u_0+\omega_2)+b_2\right] - 2q\pi i$

azért kell még hozzátennünk $(-2q\pi i)$-t, mert nem tudjuk, hogy a logaritmusnak melyik ágát kell venni. Ebből most

$$\log \vartheta(u_0+\omega_2) - \log \vartheta(u_0) = -\pi i\left[a_2(2u_0+\omega_2)+b_2 - 2q\right]$$

és ezeket az értékeket behelyettesítve, kapjuk, hogy

$$(2)+(4) = -2\pi i\, a_1\left[(u_0+\omega_1)\omega_2 + \frac{\omega_2^2}{2}\right] - \pi i\,\omega_2\left[a_2(2u_0+\omega_2)+b_2-2q\right]$$

$$\text{ugyan így}\quad (1)+(3) = 2\pi i\, a_2\left[(u_0+\omega_2)\omega_1 + \frac{\omega_1^2}{2}\right] + \pi i\,\omega_2\left[a_1(2u_0+\omega_2)+b_1-2p\right]$$

és az összegek osztva $2\pi i$-vel és rendezve, kapjuk v számára:

$$v = u_0\left[a_2\omega_1 - a_1\omega_2\right] + \omega_1\omega_2(a_2-a_1) + \frac{\omega_1^2}{2}a_2 - \frac{\omega_2^2}{2}a_1 +$$

$$+ u_0\left[\omega_2 a_1 - \omega_1 a_2\right] + \frac{1}{2}\omega_1\omega_2(a_1-a_2) + \frac{1}{2}(\omega_2 b_1 - a_1 b_2) + p\omega_2 - q\omega_1$$

vagyis $v = \frac{\omega_1}{2}\left\{a_2\omega_1 - a_1\omega_2 - b_2\right\} + \frac{\omega_2}{2}\left\{a_2\omega_1 - a_1\omega_2 + b_1\right\} + p\omega_2 - q\omega_1$

Ámde $a_2\omega_1 - a_1\omega_2 = 1$, és ha még $p\omega_2 - q\omega_1$ elhagyása után $\equiv$ jelet írunk, lesz:

$$v \equiv \frac{\omega_1}{2}(1-b_2) + \frac{\omega_2}{2}(1+b_1)$$

vagy $v \equiv \frac{\omega_1+\omega_2}{2} + \frac{1}{2}(b_1\omega_2 - b_2\omega_1)$

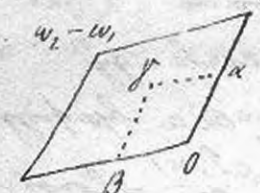
Ez az egyenlet meghatározza a $\mathfrak{F}(u)$ függvény nullapontjait v-t, és látható, hogy az teljesen meg van határozva b_1, b_2, ω_1 és ω_2-vel, független a_1 és a_2-től. Ebből következik, hogy ha két $\mathfrak{F}$ függvény F és F ugyanazokkal a periodusokkal és b-kel bír, a kettő nullapontjai megegyeznek, tehát $\frac{\mathfrak{F}(u)}{F(u)}$ hányadosuk teljesen válik nullá és végtelenné az egész számokon, tehát transcendens egész függvény. Tényleg két ily $\mathfrak{F}$ függvény hányadosát mindig elő tudjuk állítani egy egyszerű exponentiális függvénnyel.

Képzeljük el a két $\mathfrak{F}$ függvényt $\mathfrak{F}(u)$ és $\mathfrak{F}_1(u)$, melyekre nézve az exponentiális factor ugyanaz, akkor ezeknek hányadosa $\frac{\mathfrak{F}(u)}{\mathfrak{F}_1(u)}$ nem változtatja értékét, ha u ω_1 vagy ω_2-vel szaporodik, tehát hányadosunk biperiodikus; de mivel csak egy pontban válik nullá és végtelenné, ez a bp függvény szükségképen állandó, úgy hogy $\frac{\mathfrak{F}_1(u)}{\mathfrak{F}(u)} = \text{Const.}$ vagyis $\mathfrak{F}_1(u) = \text{Const}.\ \mathfrak{F}(u)$. Ebből látható, hogy a $\mathfrak{F}(u)$ függvény a két functionalis egyenlettel egy állandó faktortól eltekintve teljesen meg van határozva.

Most térjünk vissza a v nullapontra

$$v = \frac{w+w_2}{2} + \frac{1}{2}(b_1 w_2 - b_2 w_1)$$

Ha w_1 és w_2 periódusokat adottaknak tekintjük, akkor a Jacobi féle függvény nullapontja a $(b_1 w_2 - b_2 w_1)$ kifejezéstől függ, a mely különben csak annyiban játszik szerepet, a mennyiben a periódusok valamely egész számú szorzatával szaporodik. Most járjunk el következőleg. Legyen $\frac{1}{2}(b_1 w_2 - b_2 w_1) = c$ és alkossuk meg azt a parallelogrammát, melynek négy pontjai 0, w_1, $w_2 - w$, és $-w_1$; bármilyen pontja is legyen c a számsíknak, mindig van egy correspondeáló j pontja ezen a p. parallelogrammon belül. j-n át húzunk $-w_1 0$ illetőleg $w_2 0$ oldallal párhuzamost, a mig az $0 w_2$ oldalt α-ban, az $0, -w_1$ oldalt β-ban metszi. Akkor nyilvánvaló, hogy $j = \alpha + \beta$ De ha $0 \leqq \vartheta_1 < 1$ és $0 \leqq \vartheta_2 < 1$, akkor $\alpha = \vartheta_1 w_2$ és $\beta = \vartheta_2 w_1$ irható, úgy hogy $j = \vartheta_1 w_2 - \vartheta_2 w_1$; vagy ha $0 \leqq g_1 < 2$ és $0 \leqq g_2 < 2$, akkor irható $j = \frac{g_1 w_2 - g_2 w_1}{2}$ tehát $\frac{1}{2}(b_1 w_2 - b_2 w_1) \equiv \frac{g_1 w_2 - g_2 w_1}{2}$.



Ezek a g_1 és g_2 számok teljesen meghatározzák a Jacobi féle függvény nullapontját, azért a kettőt együtt a Jacobi féle függvény characteristikájának $[g_1, g_2]$ nevezzük. Az utóbbi relatió alapján egyszerűen kifejezhetők a b_1 b_2 constansok a characterustikával.

Ugyanis $\frac{1}{2}(b_1 w_2 - b_2 w_1) = \frac{1}{2}(g_1 w_2 - g_2 w_1) + p w_1 + q w_2$

ebből $\frac{1}{2} w_2 (b_1 - g_1 - 2q) = \frac{1}{2} w_1 (b_2 - g_2 - 2p)$

tehát $\frac{b_1 - g_1 - 2q}{w_1} = \frac{b_2 - g_2 + 2p}{w_2} = \mu$

a miből $b_1 = g_1 + \mu w_1 + 2q$

$b_2 = g_2 + \mu w_2 + 2p$

Ez mutatja, hogy, ha a characteristikát ismerjük, a b_1 és b_2-nek mily értékei jöhetnek tekintetbe. Ugyanahhoz a characteristikához csak olyan b fs'nok tartozhatnak, melyekben csak μ és a párosszámok változhatnak. Ezen characteristika bevezetése a következő feladatra nidit. Legyen $\vartheta(u)$ és $\vartheta_1(u)$ két Jacobi féle függvény, „jellemző" számaik megfelelőleg a_2, a_1, b_1, b_2 és a_1', b_1', a_2', b_2'. Tegyük fel, hogy a két függvénynek ugyanazok a periodusai, tehát:

$$a_2 w_1 - a_1 w_2 = 1 \text{ és } a_2' w_1 - a_1' w_2 = 1.$$

További ugyanazzal a karakteristikával bírnak

$$b_1 w_2 - b_2 w_1 \equiv g_1 w_2 - g_2 w_1$$
$$b_1' w_2 - b_2' w_1 \equiv g_1 w_2 - g_2 w_2$$

Ilyen két függvényről az imént láttuk, hogy ugyanazzal a nullaponttal bírnak. Ki fogjuk mutatni, hogy a kettő csak egy exponentialis faktorban különbözik egymástól. Ehhez végett vegyük az a számok és az w-k közti egyenleteket s alkossunk meg a megfelelő oldalak különbségét, akkor kapjuk, hogy

$$(a_2 - a_2')w_1 = (a_1 - a_1')w_2$$

vagyis $$\frac{a_2' - a_2}{w_2} = \frac{a_1' - a_1}{w_1} = \lambda$$

amiből $$a_1' = a_1 + \lambda w_1$$
$$a_2' = a_2 + \lambda w_2 \quad \|$$

A b számok és az w-k közti egyenletek

$$b_k = g_k + \mu w_k + \text{páros szám} \quad \zeta \quad (k = 1, 2)$$
$$b_k' = g_k + \mu' w_k + \quad " \quad "$$

Tehát $b_k' - b_k = (\mu' - \mu) w_k + \text{páros szám}$

amiből $b_k' = b_k + (\mu' - \mu) w_k + \text{páros szám}$ és ha $\mu' - \mu = \nu$

akkor $$b_1' = b_1 + \nu w_1 + 2n_1$$
$$b_2' = b_2 + \nu w_2 + 2n_2 \quad \|$$

Ezek a relatiók következnek abból a feltevésből, hogy a $g(u)$ és $g_1(u)$ függvényeknek ugyanaz

a periodusuk és charakteristikájuk. Ezekben az relatiokban λ és ν még tetszőleges két mennyiség. Most irjuk fel a ϑ és ϑ_1 függvény functionális egyenletét

$$\vartheta(u+w_\varkappa) = e^{-\pi i(a_\varkappa(2u+w_\varkappa)+b_\varkappa)}\vartheta(u)$$
$$\vartheta_1(u+w_\varkappa) = e^{-\pi i[a'_\varkappa(2u+w_\varkappa)+b'_\varkappa]}\vartheta_1(u) \qquad (\varkappa=1,2)$$

Helyettesitsük be az utóbbi egyenletbe $a'_\varkappa$ és $b_\varkappa$ értékét a fenti két relationrendszerből, akkor

$$\vartheta_1(u+w_\varkappa) = e^{-\pi i[(a_\varkappa+\lambda w_\varkappa)(2u+w_\varkappa)+b_\varkappa+\nu w_\varkappa+2\eta_\varkappa]}\vartheta_1(u)$$

de az exponensből $2\eta_\varkappa$ elhagyható, mert $e^{-2\eta_\varkappa\pi i} = 1$, igyhogy $\vartheta_1(u+w_\varkappa) = e^{-\pi i[(a_\varkappa(2u+w_\varkappa)+b_\varkappa]}e^{-\pi i[\lambda w_\varkappa(2u+w_\varkappa)+\nu w_\varkappa]}\vartheta_1(u)$

Ebből látható, hogy a $b_\varkappa$ constansok csakis páros számokból eltekintve vannak meghatározva, mert a Jacobi féle függvény nem változik, ha ezen $b_\varkappa$ helyébe oly b-t irunk, mely attól csak egy páros számban különböziik. Az utóbbi egyenletből látható az is, hogy ϑ_1 functionális egyenletébe ugyanaz az exponentialis factor szerepel, mint ϑ-ben, és azonkivül még egy második exponentialis factor. Megjegyzem, hogy egyszerü módon fel tudom irni az olyan függvényt, mely épen ezen utóbbi factorral azonódik, ha u egy $w_\varkappa$-val növeke-

dik; ez a függvény

$$f(u) = e^{\pi i (\lambda u^2 + \nu u)}$$

mert

$$f(u+w_k) = e^{-\pi i [\lambda (u+w_k)^2 + \nu (u+w_k)]}$$

$$= e^{-\pi i [\lambda u^2 + \nu w_k]} e^{-\pi i [\lambda w_k (2u+w_k) + \nu w_k]}$$

vagyis

$$f(u+w_k) = e^{-\pi i [\lambda w_k (2u+w_k) + \nu w_k]} f(u)$$

Most alkossuk meg $\vartheta_1(u)$ és $f(u)$ hányadosát, akkor erre áll, hogy

$$\frac{\vartheta_1(u+w_k)}{f(u+w_k)} = e^{\pi i [a_k (u+w_k) + b_k]} \frac{\vartheta_1(u)}{f(u)}$$

Világos, hogy $\frac{\vartheta_1(u)}{f(u)}$ épen úgy egy Jacobi féle függvény, mint $\vartheta(u)$, mert hisz $f(u)$ sehol sem válik nullá. Ez a hányados tehát szintén transcendens függvény, mely ugyanazok a functionalis egyenletnek tesz eleget, mint $\vartheta(u)$. Már láttuk, hogy ez a functionalis egyenlet a $\vartheta(u)$ függvényt egy állandó factortól eltekintve teljesen meghatározza. Itt is áll, hogy

$$\frac{\vartheta_1(u)}{f(u)\vartheta(u)} = \text{Const.}$$

mert ez a hányados egy biperiodikus függvény, mivel nem szenved változást, ha u egy periodussal növekedik; továbbá csak $\vartheta(u)$ egyetlen egy nullapontjában válik végtelenné, de

egy ilyen elsőfokú elliptikus függvény lesz.
A fenti egyenletből tehát következik, hogy

$$\vartheta_1(u) = C \cdot e^{-\pi i (\lambda u^2 + \nu u)} \vartheta(u)$$

vagyis egy Jacobi féle függvény, mely ugyanazzal a charakteristikával és ugyanazokkal a periodusokkal bir, mint $\vartheta(u)$, utóbbitól csak egy exponentiális tényezőben és egy constansban különbözik; vagy a mi ugyanezt mondja: ha ismerünk egy Jacobi féle függvényt, mely bizonyos (g, g_2) charakteristikához tartozik, akkor azonnal ezen charakteristikához tartozó Jacobi féle függvényeket nyerjük, ha azt egy constanssal és egy exponentialis faktorral szorozzuk, mely utóbbiban λ és ν tetszőleges numerusok. Ezt a tételt arra használjuk fel, hogy az összes ugyanahhoz (g, g_2) charakteristikához tartozó Jacobi féle függvények közül kiválasszunk egyet minél egyszerűbb állandókkal. Ha

$\lambda = -\frac{a_1}{\omega_1}$-nak választjuk, akkor $a_1' = 0$, és

$a_2' = a_2 - \frac{a_1}{\omega_1}\omega_2 = \frac{a_2\omega_1 - a_1\omega_2}{\omega_1} = \frac{1}{\omega_1}$. Ha továbbá a

$$b_k' = \mu' \omega_k + g_k + \text{páros szám}$$

képletben $\mu' = 0$ akkor $\nu = \mu - \mu' = \mu$ vagyis ν is

teljesen meg van határozva és ezzel elértük, hogy páros számoktól eltekintve $b_k' = g_k$. Ezt a Jacobi féle függvényt jelöljük t-vel, tehát $t(u)$ olyan Jacobi féle függvény, melyre nézve

$$a_1' = 0, \quad a_2' = \frac{1}{\omega_1}$$
$$b_1' = g_1, \quad b_2' = g_2$$

a hol g_1 és g_2 pozitiv és 2-nél kisebb valós számok. Ezen $t(u)$ függvény az előbbiek alapján eleget tesz a következő functionális egyenleteknek

$$\left.\begin{aligned} t(u+\omega_1) &= e^{-\pi i g_1} t(u) \\ t(u+\omega_2) &= e^{-\pi i \left[\frac{1}{\omega_1}(2u+\omega_2)+g_2\right]} t(u) \end{aligned}\right\} A.)$$

Ez a $t(u)$ tehát egy állandótól eltekintve teljesen meg van határozva. Megjegyzendő, hogy g_1 és g_2-t egyszer mindenkorra adottnak tekintjük és pedig adott egész számoknak. Ezzel természetesen a $t(u)$ függvény nullapontja is teljesen meg van határozva. Ez a t függ u_0 az u-tól, de függ az ω_1 és ω_2-től is, ezért jele $t(u\,|\,\omega_1, \omega_2)$

Tájékozódjunk a felől, hogy miképp függ az t ettől a három mennyiségtől. Mivelhogy $t(u)$ az $A.)$ egyenletekkel csak egy állandótól eltekintve, van meghatározva, a mely állandó még az ω_1 é ω_2 függvénye lehet, azért egy tájékozás a felől, hogy mi-

kép függ ez a függvény w_1 és w_2 - től, lehetetlen, mielőtt nem tudjuk, hogy miképp függ az állandó az w_1 és w_2 - től. Vizsgáljuk ezért, miképp változik a t értéke, ha u, w_1 és w_2 ugyanazzal a λ faktorral szorzódik, tehát vizsgáljuk a $t(\lambda u | \lambda w_1, \lambda w_2)$ függvényt. Egyenleteink értelmében

$$t(\lambda(u+w_1) | \lambda w_1, \lambda w_2) = e^{\pi i g_1} t(\lambda u)$$
$$t(\lambda(u+w_2) | \lambda w_1, \lambda w_2) = e^{-\pi i [\lambda w_1 (2\lambda u + \lambda w_2) + g_2]} t(\lambda u)$$

Tehát $t(\lambda u | \lambda w_1, \lambda w_2)$ ugyanannak a két funkcionális egyenletnek tesz eleget, mint $t(u)$ maga, tehát csak egy állandóban különbözik $t(u)$ - től

$$t(\lambda w | \lambda w_1, \lambda w_2) = C \cdot t(u | w_1, w_2) \qquad (1.)$$

Tehát azáltal, hogy $t(u | w_1, w_2)$ - ben a változókat ugyanazzal a tetszőleges faktorral szorozzuk, a függvény csak annyiban változik, hogy megszorzódik egy állandóval. Hogy ezt az állandót meghatározhassuk, u-nak egy fix értéket adunk, pl. $u=0$, feltéve, hogy 0 nem nullapontja t-nek. Ekkor

$$t(0 | \lambda w_1, \lambda w_2) = Const. \cdot t(0 | w_1, w_2) \qquad (2.)$$

és megalkotva (1) és (2) hányadosát

$$\frac{t(\lambda u | \lambda w_1, \lambda w_2)}{t(0 | \lambda w_1, \lambda w_2)} = \frac{t(u | w_1, w_2)}{t(0 | w_1, w_2)}$$

Ha most t egy meghatározott függvény, akkor

$t(o|w_1,w_2)$ egy fix meghatározott ~~függvény, akkor~~ $t(o|w_1w_2)$ állandó, tehát a jobboldali quotiens is egy t függvény lesz, jelöljük ezt ϑ-val, tehát

$$\frac{t(u|w_1,w_2)}{t(o|w_1,w_2)} = \vartheta(u|w_1,w_2)$$

akkor ezen ϑ, mely eleget tesz az A.) functionalis egyenleteknek, azzal a tulajdonsággal bir, hogy

$$\vartheta(\lambda u|\lambda w_1,\lambda w_2) = \vartheta(u|w_1,w_2)$$

vagyis nem változtatja értékét, ha a változókat ugyanazzal a λ-val szorozzuk. Ebből következik, hogy ϑ csakis ezen változók $u=w_1=w_2$ viszonyától függ, melyet különben tetszés szerint választhatunk. Azt fogjuk mondani, hogy ϑ függ az $\frac{u}{w_1}=w$ és $\frac{w_2}{w_1}=\tau$ hányadosoktól és mint ezen változók függvényét ϑ-val jelöljük, tehát

$$\vartheta(u|w_1,w_2) = \vartheta(w|\tau)$$

Ez a ϑ eleget tesz az A.) alatti functionalis egyenleteknek, ha azokban a $w=\frac{u}{w_1}$ és $\tau=\frac{w_2}{w_1}$ változókat bevezetjük, tehát ϑ functionalis egyenletei

$$\left.\begin{aligned}\vartheta(w+1|\tau) &= e^{-\pi i g_1}\vartheta(w|\tau)\\ \vartheta(w+\tau|\tau) &= e^{-\pi i[2w+\tau+g_2)}\vartheta(w|\tau)\end{aligned}\right\} \text{A.)}$$

A ϑ függvény nullapontját is ismerjük, mert ha t-nek $v=\frac{w_1+w_2}{2}+\frac{g_1w_2-g_2w_1}{2}$ nullapontjában

veresetjük $w-t$ és $\tau-t$, adódik ϑ nullapontjára

$$\frac{1+\tau}{2} + \frac{g_1\tau - g_2}{2}$$

és az összes nullapontokat kapjuk, ha ehhez $-pw_1+qw_2$ periódusnak megfelelőleg – hozzáadjuk $(p+q\tau)$-t a hol p és q tetszőleges egész számok, tehát az összes nullapontok

$$\frac{1+\tau}{2} + \frac{g_1\tau - g_2}{2} + p + q\tau.$$

Az átmenet az u-tól a w-hez azt hozza magával, hogy most nem az (w_1, w_2) periodus parallelogrammával van dolgunk, hanem azzal, melynek oldalai 1 és τ. Azt is tudjuk, miképp adódik ebből a ϑ függvényből a legáltalánosabb Jacobi féle ϑ függvény; egyszerűen az általános

$$T_1(u) = C \cdot e^{\pi i(\lambda u^2 + \nu u)} \vartheta\left(\frac{u}{w_1} \mid \frac{w_2}{w_1}\right) \quad (I.)$$

formula szerint, ha ebbe behelyettesítjük, hogy az

$$a_1' = a_1 + \lambda w_1 \quad \text{és} \quad b_1' = b_1 + \nu w_1 + \text{páros } z$$
$$a_2' = a_2 + \lambda w_2 \quad " \quad b_2' = b_2 + \nu w_2 + \text{páros } n.$$

formulákban a mi ϑ függvényünk esetén

$$a_1 = 0 \quad , \quad a_2 = \frac{1}{w_1}$$
$$b_1 = g_1 \quad , \quad b_2 = g_2$$

tehát $a_1' = \lambda w_1 \quad , \quad a_2' = \frac{1}{w_1} + \lambda w_2$ (II.)

$$b_1' = g_2 + \nu w_1 + 2n_1; \quad b_2' = g_2 + \nu w_2 + 2n_2$$

úgyhogy, ha az eredeti ϑ függvényből egy tetsz
leges más ϑ függvényt adott a_1', a_2', b_1', b_2' co
stansokkal megakarunk szerkeszteni, akkor ehh
az (I.) képletben szereplő λ és r mennyiségek
a (II.) egyenletek szolgáltatják.

Különben célszerű a ϑ függvény jelölésébe
a charakteristikákat is feltüntetni és írni: $\vartheta_{g_1 g_2}(w$
tudván azt, hogy a charakteristika változásával co
nullapont változik.

Foglalkozzunk most egy meghatározott char
bíró ϑ függvénnyel, s vegyük legelőbb azt, melyn
névre $g_1 = 0$, $g_2 = 0$; ezt röviden charakteristika
nélkül is jelöljük $\vartheta_{00}(w|\tau) = \vartheta(w|\tau)$
és nevezzük principalis ϑ-nak. A principá
ϑ eleget tesz a következő egyenleteknek

$$\vartheta(w+1|\tau) = \vartheta(w|\tau)$$

$$\vartheta(w+\tau|\tau) = e^{-\pi i(2w+\tau)}\vartheta(w|\tau)$$

Az első egyenlet mutatja, hogy a pr. ϑ a w perio
dicus függvénye, periodusa 1. Ebből egyszerűen
látható, hogy a pr. ϑ egyértékű függvénye $e^{+2\pi i}$
kifejezésének. Mert ha $e^{+2\pi i w} = t$, akkor
$w = \frac{\log t}{2\pi i}$; ha most t zárt utat ír le
a t síkjában, akkor w csak egy egész számn

változik, minálfogva $\vartheta(w+\tau)$ értéke nem változik, lévén w-nek 1 szerint periodikus függvénye. De tehát a pr. ϑ egyértékű függvénye a $t = e^{2\pi i w}$ argumentumnak. De ϑ a w egész transcendens függvénye, végzetben nem válik végtelenné sehol, és miután $t = e^{2\pi i w}$, következik, hogy ϑ a t-nek is mindenütt egyértékű véges és folytonos függvénye, csak $t = 0$ mellett bír singularitással, mert ott $w = -\infty$. De az ilyen egyértékű függvény előállítható a Laurent féle sorral, tehát

$$\vartheta(w) = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_k t^k$$

Ebből az alakból kiindulva elérjük azt a legelső célt, hogy a ϑ függvény existentiáját kimutassuk. Ennél ki lesz mutatva az általános Jacobi féle függvény és így a biperiodicus függvények existentiája is. Hogy a sor coefficienseit meghatározhassuk, alkalmazni kell rá a második functionális egyenletet: $\vartheta(w) = \sum A_k e^{2\pi i w_k}$

és így a második functionális egyenlet szerint

$$\sum A_k e^{2\pi k(w+\tau)} = \sum A_k e^{2\pi i k w - \pi i (2w+\tau)}$$
$$= \sum A_k e^{\pi i [(2k-2)w - \tau]}$$

Ha a k helyett $(k+1)$-et írunk, akkor is $(k=-\infty)$ től $(k=+\infty)$-ig kell alkalmazni, és akkor kapjuk, hogy

$$\sum A_k e^{2k\pi i(w+\tau)} = \sum A_k e^{\pi i[2kw+\tau]}$$

vagyis $$\sum A_k t^k e^{2\pi i k\tau} = \sum A_{k+1} t^k e^{-\pi\tau}$$

De két sor csak akkor identikus, ha a megfelelő t hatványok coefficienseci egyenlők; a fenti identitásból tehát következik, hogy

$$A_k e^{2k\pi i\tau} = A_{k+1} e^{-\pi i\tau}$$

vagy $$A_{k+1} = e^{(2k+1)\pi i\tau} A_k$$

$$A_{k+1} e^{-(k+1)^2\tau\pi i} = A_k e^{-k^2\tau\pi i}$$

De ez azt mondja, hogy az $A_k e^{-k^2\tau\pi i}$ szorzat független a k értékétől; ha tehát az utóbbi egyenletben $k=0$, akkor a szorzat értékéül adódik A_0, úgyhogy

$$A_k = A_0 e^{k^2\tau\pi i}$$

Ha tehát ismerjük az A_0 coefficienst, ezzel a többi coefficiens ezen utóbbi egyenlet értelmében meg van határozva, így adódik a pr. ϑ következő sorbafejtése

$$\vartheta(w) = A_0 \sum e^{k^2\tau\pi i} e^{2k\pi i w}$$

a hol csak A_0 szerepel, mint ismeretlen mennyiség a mi különben természetes, mert hisz a ϑ csak egy állandó faktortól eltekintve van teljesen meghatározva.

Hogy az existentia bizonyítás teljes legyen

csak azt kell még kimutatni, hogy a adott feltétel-
ről és egyenletesen convergens. Ennek eldöntésé-
re a közönséges Cauchy féle conv. criteriumot
használjuk. A sor általános tagját u_k - val je-
lölve, lesz $k > 0$ esetén

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{e^{(k+1)^2 \tau \pi i} e^{2(k+1)\pi i v}}{e^{k^2 \tau \pi i} e^{2\pi i k w}} = e^{[(2k+1)\tau + 2w]\pi i}$$

Ha most $\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \alpha + \beta i$, a hol feltételünk szerint
$\beta > 0$ és $w = x + yi$, akkor

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = e^{\pi i[(2k+1)(\alpha+\beta i) + 2x + 2yi]}$$
$$= e^{\pi i(2k+1)\alpha + 2x} \cdot e^{-[\pi(2k+1)\beta + 2y]}$$

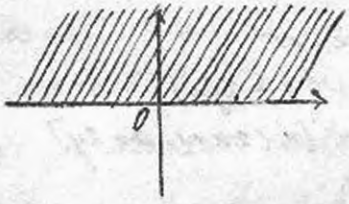
és áttérve az absolut értékre, minthogy az első fak-
tor abs. értéke 1, lesz $\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| = e^{-2\pi y} e^{-\pi\beta(2k+1)}$

Ha most k végtelenbe nő, mint pozitiv mennyi-
ség, akkor a második exponentiális factor 0-hoz
közeledik, épen a miatt, hogy $\beta > 0$; az első factor
constans, tehát

$$\lim_{k=\infty} \left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| = 0$$

Ha a Laurent féle sort negativ kitevőjü hatvá-
nyai szerint vizsgáljuk, tehát $k < 0$, akkor tekintet-
be vesszük az $\frac{u_k}{u_{k+1}}$ hányadost s annak limesét

$\kappa = -\infty$ mellett; ez nyilván 0 lesz, ha $\beta > 0$. A ϑ sor, ϑ sora tehát bármely complex w értékek mellett fe tétlenül és egyenletesen convergens, és ezzel a ϑ függvény existentiája be van bizonyítva. Mivel hog a ϑ sora csak $\beta > 0$ esetén convergens, úgy is fogal mazhatjuk, hogy ϑ sora oly τ értékek mellett c vergens, melyek a τ sik felső felében fekszene míg alsó felében a sor divergens. Magán a reáli



τ tengelyen még nem ismer jük a sor magaviseletét, é még vissza fogunk térni convergentia feltételét m egyszerűbben fogalmazhatjuk, ha bevezetjük a ζ féle jelölést, irván $e^{\tau\pi i} = q$, a mely $q = e^{\alpha\pi i - \beta}$ léven $\beta > 0$ esetén $|q| = e^{-\beta\pi} < 1$ azaz $|q| < 1$, úgy hogy a

$$\vartheta_{00}(w|\tau) = \sum_{\kappa=-\infty}^{+\infty} q^{\kappa^2} l^{2\kappa w \pi i}$$

sor a q sik egyszeresen körüli, o centrum körüli bel convergens, azon kívül divergens. A lényeges u utóbbi sorbafejtésnél az, hogy a q kitevője az n dex négyzete, úgyhogy, ha q elég kicsiny, ez a sor igen rohamosan convergál. Ez utóbbi sor külö

ben így is írható

$$\vartheta_{00}(w|\tau) = \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{k^2}\{\cos 2kw\pi + i \sin 2kw\pi\}$$

és elkülönítve a $k=0$-nak megfelelő tagot,

$$= 1 + \sum_{k=1}^{k=\infty} q^{k^2}\{\cos 2kw\pi + i\sin 2kw\pi\}$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} q^{k^2}\{\cos 2kw\pi - i\sin 2kw\pi\}$$

a mennyiben t.i. az utóbbi sorban k helyébe $(-k)$-t írva, az általános tag csak annyiban változik, hogy a sinus ellenkező jelűvé válik. És most egyesítve a két sort, a sinus kiesik és lesz

$$\vartheta_{00}(w|\tau) = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} q^{k^2}\cos 2kw\pi$$

Ebből az előállításból látható, hogy a pr. ϑ páros jellegű függvény, azaz nem változtatja értékét, ha w helyébe $(-w)$-t írunk

$$\vartheta_{00}(w|\tau) = \vartheta_{00}(-w|\tau)$$

Megjegyzendő még, hogy a pr. ϑ nullapontja $\frac{1+\tau}{2}$. Alkossuk meg most a ϑ függvény differentiálquotiensét és pedig először w szerint. A sort differentiáljuk tagonként, mert hisz egyenletesen convergens, tehát

$$\frac{d\vartheta}{dw} = \frac{d}{dw}\sum_{-\infty}^{+\infty} l^{(k^2\tau + 2kw)\pi i} = \sum_{-\infty}^{+\infty} l^{(k^2\tau+2kw)\pi i} \; 2k\pi i$$

és $\frac{d^2\vartheta}{dw^2} = -\sum_{-\infty}^{+\infty} l^{(k^2\tau+2kw)\pi i} 4k^2\pi^2$ és differen-

ciálva τ szerint: $\frac{d\vartheta}{d\tau} = \sum_{-\infty}^{+\infty} l^{(k^2\tau+2kw)\pi i} k^2\pi i$

összehasonlítva $\frac{d^2\vartheta}{dw^2}$ és $\frac{d\vartheta}{d\tau}$-t, látjuk, hogy, ha az utóbbit megszorozzuk $4\pi i$-vel, kapjuk az elsőt, tehát

$$\frac{d^2\vartheta}{dw^2} = 4\pi i \frac{d\vartheta}{d\tau}$$

Ennek a partiális differentiális egyenletnek tesz eleget ϑ, felfogva mint w és τ függvényét. —

Most átmegyünk az általános characteristikával bíró ϑ függvény levezetésére. A $\vartheta_{g_1 g_2}(w|\tau)$ ált. char. bíró ϑ függvény nullapontja, a mint láttuk, $\left(\frac{1+\tau}{2} + \frac{g_1\tau - g_2}{2}\right)$. A principális ϑ, t.i. $\vartheta_{00}(w|\tau)$ nullapontja pedig $1+\frac{\tau}{2}$, vagy az ezzel congruens helyek. Nyilvánvaló tehát, hogy ha a pr. ϑ-ban w helyébe $\left(w - \frac{g_1\tau - g_2}{2}\right)$-t írunk aly Jacobi féle függvényt kapunk, mely ugyanott tűnik el, a hol $\vartheta_{g_1 g_2}(w|\tau)$ tehát

$$\vartheta_{g_1 g_2}(w|\tau) = \vartheta_{00}\left(w - \frac{g_1\tau - g_2}{2}|\tau\right)$$

Állítsuk fel ezen függvény functionalis egyenleteit felfogva azt, mint w függvényét.

$$\vartheta_{00}\left(w-\frac{g_1\tau-g_2}{2}+1\,|\,\tau\right)=\vartheta_{00}\left(w-\frac{g_1\tau-g_2}{2}\,|\,\tau\right)$$

és $$\vartheta_{00}\left(w-\frac{g_1\tau-g_2}{2}+\tau\,|\,\tau\right)=e^{-\pi i(2w-g_1\tau+g_2\cdot\tau)}\cdot\vartheta_{00}\left(w-\frac{g_1\tau-g_2}{2},\tau\right)$$

Látható tehát, hogy ez egy Jacobi féle függvény, mely tartozik az $(1,\tau)$ periodusokhoz. Határozzuk meg ennek a,b számait. Tudjuk, hogy az w_1, w_2 periodusokkal bíró Jacobi féle függveny funcionális egyenleteiben a két exponentiális **factor**:

$$e^{-\pi i[a_1(2u+w_1)+b_1]}$$
$$e^{-\pi i[a_2(2u+w_2)+b_2]}$$

Itt $u,\ w_1,\ w_2$ helyett áll

$$w,\ 1,\ \tau$$

s összehasonlítva az általános exp. factorokat a fenti specialisakkal, látható, hogy a mi ϑ függvényünkben

$$a_1=0 \qquad a_2=1$$
$$b_1=0 \qquad b_2=-g_2\tau+g_2$$

és a characteristika (g_1,g_2). De tudjuk, hogy két ugyanazon char.-val bíró Jacobi féle függvény csak egy ilyen factorban különböző egymástól $e^{-\pi i(\lambda u^2+\nu u)}$, a hol λ és ν két jól meghatározott mennyiség; sőt a legáltalánosabb Jacobi féle függvény $T(u)$ következőleg állítható elő".

$$\vartheta(u) = \bar{C} \cdot e^{-\pi i(\lambda u^2 + \nu u)} \vartheta\left(\frac{u}{\omega_1} \mid \frac{\omega_2}{\omega_1}\right)$$

a mely $\vartheta(u)$ függvény állandó számai:

$$a_1 = \lambda\omega_1 \qquad a_2 = \frac{1}{\omega_1} + \lambda\omega_2$$

$$b_1 = g_1 + \nu\omega_1 + 2n_1 \qquad b_2 = g_2 + \nu\omega_2 + 2n_2$$

ezekhatározták meg egyszersmind a λ és ν számokat, ha a_1, a_2, b_1, b_2 ismeretesek. A mi esetünkben a legáltalánosabb 3ac. féle függvény, a melyet elő"akarunk állítani, a formái $\vartheta_{00}\left(w - \frac{g_1\tau - g_2}{2} \mid \tau\right)$, a melynek számait ismerjük, t. i. $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ stb. ha tehát egy tetszőleges, de g_1, g_2 char:val bíró Jacobi féle függvény $f(w \mid \tau)$, akkor a mi függvényünk így állítható elő

$$\vartheta_{00}\left(w - \frac{g_1\tau - g_2}{2} \mid \tau\right) = \bar{C} e^{-\pi i(\lambda w^2 + \nu w)} f(w \mid \tau)$$

A λ és ν a fentiek szerint egyszerűen határozható meg. Tudjuk ugyanis, hogy $a_1 = \lambda\omega_1$, de itt $a_1 = 0$, $\omega_1 = 1$ tehát $\lambda = 0$, s mivel $a_2 = \frac{1}{\omega_1} + \lambda\omega_1$ és $\omega_2 = \tau$, következik, hogy $a_2 = 1$, a mi helyes is. Továbbá az általános formula szerint $b_1 = g_1 + \nu\omega_1$, mert $2n_1$-től el lehet tekinteni), de a mi esetünkben $b_1 = 0$ és $\omega_1 = 1$, tehát $\nu = -g_1$ s mivel $b_2 = g_2 + \nu\tau$, beírva ν értékét, kapjuk, hogy $b_2 = g_2 - g_1\tau$, a mi helyes is. A mi utobbi egyenletünkben tehát

$\lambda = 0$, $\nu = -g_1$, úgyhogy ezeket betéve lesz:

$$\vartheta_{00}\left(w - \frac{g_1\tau - g_2}{2} \mid \tau\right) = C e^{\pi i g_1 w} f(w \mid \tau)$$

Ebből viszont kifejezhető $f(w \mid \tau)$ a principális ϑ-val, t.i.:

$$f(w \mid \tau) = C e^{-\pi i g_1 w} \vartheta_{00}\left(w - \frac{g_1\tau - g_2}{2} \mid \tau\right)$$

Ez a $(g_1 . g_2)$ char.-val bíró legáltalánosabb Jacobi féle függvény előállítása. Még csak a C állandót kell meghatározni, mely még függhet τ-tól. E végett célszerű azt követelni ettől az $f(w \mid \tau)$ függvénytől, hogy ugyanannak a partialis diff. egyenletnek tegyen eleget, a mint a principális ϑ, vagyis teljesüljön a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial w^2} = 4\pi i \frac{\partial f}{\partial \tau} \quad \text{egyenlet.}$$

E végett ki kell számítani f partialis deriváltjait.

$$\frac{\partial f}{\partial w} = C . e^{-\pi i g_1 w} \left\{ \frac{\partial \vartheta_{00}}{\partial w} - \pi i g_1 \vartheta_{00} \right\}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial w^2} = C . e^{-\pi i g_1 w} \left\{ \frac{\partial^2 \vartheta_{00}}{\partial w^2} - 2\pi i g_1 \frac{\partial \vartheta_{00}}{\partial w} - \pi^2 g_1^2 \vartheta_{00} \right\}$$

$\frac{\partial f}{\partial \tau}$ kiszámítására végett tekintetbe kell vennünk, hogy f két-féleképen függ τ-tól, mert ϑ_{00}-ban előfordul τ egyszer mint explicit argumentum, majd implicite a $\left(w - \frac{g_1\tau - g_2}{2}\right)$ argumentumban tehát a τ szerint vett totális differentiálquotiense

ϑ_{00}-ra: $\dfrac{\partial \vartheta_{00}}{\partial \tau} + \dfrac{\partial \vartheta_{00}}{\partial w}\left(-\dfrac{g_1}{2}\right)$

és betéve ezt $\dfrac{\partial f}{\partial \tau}$ kifejezésébe, lesz:

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} = e^{-\pi i g_1 w}\left\{ C \frac{\partial \vartheta_{00}}{\partial \tau} - C\frac{g_1}{2}\cdot\frac{\partial \vartheta_{00}}{\partial w} + \frac{dC}{d\tau}\vartheta_{00}\right\}$$

Betéve ezeket a partialis differentiáli egyenletünkbe, lesz

$$\frac{\partial^2 f}{\partial w} - 4\pi i \frac{\partial f}{\partial \tau} = e^{-\pi i g_1 w}\left\{ C\left(\frac{\partial^2 \vartheta_{00}}{\partial w^2} - 4\pi i \frac{\partial \vartheta_{00}}{\partial \tau}\right) - C\pi^2 g_1^2 \vartheta_{00} - 4\pi i \vartheta_{00}\frac{dC}{d\tau}\right\}$$

Mivel feltételünk nemcsak ϑ_{00} eleget tesz a partialis diff. egyenletnek, azért a zárójeles első kifejezés eltűnik, s mivel f-től azt követeljük, hogy eleget tegyen ugyanennek a diff. egyenletnek, azért nullá téve az utóbbi egyenlet jobboldalát, abból adódik, hogy

$$-C\pi^2 g_1^2 \vartheta_{00} - 4\pi i \vartheta_{00}\frac{dC}{d\tau} = 0$$

vagyis $\dfrac{dC}{d\tau} = \dfrac{\pi i g_1^2 C}{4}$

más alakban $\dfrac{1}{C}\dfrac{dC}{d\tau} = \dfrac{d\log C}{d\tau} = \dfrac{\pi i g_1^2}{4}$

integrálva $\log C = \dfrac{\pi i g_1^2}{4}\tau + \gamma$

a hol γ egy numericus állandó. Áttérve a numerusra $C = e^{\frac{\pi i g_1^2}{4}\tau} e^{\gamma}$

vagy ha $e^{\gamma} = \Gamma$, akkor

$$C = \Gamma e^{\frac{\pi i g_1^2}{4}\tau}$$

Betéve a constans értékét eredeti elállításunkba, lesz

$$\vartheta_{g_1, g_2}(w|\tau) = \Gamma e^{\frac{\pi i g_1^2}{4}\tau - \pi i g_1 w}\vartheta_{00}\left(w - \frac{g_1\tau - g_2}{2}, \tau\right)$$

A numerikus T megválasztása tetszésünktől függ. Hermite 1-nek veszi, Weber szerint $T = e^{\frac{\pi i}{4}}$, H_n Hermite szerint $T = 1$, akkor

(1.) $$\vartheta_{g_1,g_2}(w|\tau) = e^{-\pi i g_1\left(w - \frac{g_1\tau}{4}\right)} \vartheta_{00}\left(w - \frac{g_1\tau - g_2}{2}|\tau\right)$$

A ϑ_{00} ismeretes sorfejtésével dő tudjuk állítani a legáltalánosabb ϑ sorbafejtését is. Ugyanis

$$\vartheta_{g_1,g_2}(w|\tau) = e^{-\pi i g_1\left(w - \frac{g_1\tau}{4}\right)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{\pi i\left[k^2\tau + 2kw - kg_1\tau + kg_2\right]} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{\pi i\left\{\left(k^2 - kg_1 + \frac{g_1^2}{4}\right)\tau + 2k\left(w - \frac{g_1}{2}\right)\right\}}$$

(2.) $$\vartheta_{g_1,g_2}(w|\tau) = e^{\frac{\pi i g_1 g_2}{2}} \sum e^{\pi i\left\{\left(k - \frac{g_1}{2}\right)^2\tau + 2\left(k - \frac{g_1}{2}\right)\left(w + \frac{g_2}{2}\right)\right\}}$$

Ha Weber szerint választottuk volna a T értékét, az most kiesett volna.

Ha (1) ben w helyett $\left(w - \frac{g_1\tau - f_2}{2}\right)$ áll, lesz

$$\vartheta_{g_1,g_2}\left(w - \frac{g_1\tau - f_2}{2}|\tau\right) = e^{-\pi i g_1\left[w - \left(\frac{1}{2}g_1 + \frac{1}{2}f_1\right)\tau + \frac{1}{2}f_2\right]} \cdot \vartheta_{00}\left(w - \frac{(g_1+f_1)\tau - (g_2+f_2)}{2}|\tau\right)$$

Ez emlékeztet egy ϑ függvényre, melynek karakterisztikája (g_1+f_1, g_2+f_2), ez a függvény ugyanis

$$\vartheta_{g_1+f_1,g_2+f_2}(w|\tau) = e^{-\pi i(g_1+f_1)\left[w - \frac{2g_2+f_1}{4}\tau\right]} \vartheta_{00}\left(w - \frac{(g_2+f_2)\tau + (g_2+f_2)}{2}|\tau\right)$$

a két egyenlet megfelelő oldalainak hányadosát alkotva kapjuk, hogy

(3) $$\vartheta_{g_1,g_2}\left(w - \frac{g_1\tau - f_2}{2}\right) = e^{\pi i\left[f_2 w - \frac{1}{4}f_1^2\tau - \frac{1}{2}g_1 f_2\right]} \cdot \vartheta_{g_1+f_1,g_2+f_2}(w|\tau)$$

Ez a relatió köti össze a (g_1, g_2) és a $(g_1+f_1|g_2+f_2)$ char.-

val bíró ϑ függvényeket.

Ezen (3.) képletből specializálással több fontos képletet nyerünk.

1. Legyen először $g_1 = -g_1$, $g_2 = -g_2$, akkor

(1a.) $\vartheta_{g_1, g_2}\left(w + \frac{g_1\tau - g_2}{2}\right) = e^{-\pi i\left[g_1 w + \frac{1}{4} g_1^2 \tau - \frac{1}{2} g_1 g_2\right]} \vartheta_{00}(w|\tau)$

Ez quasi megfordítása az (1) képletnek.

2.) ha $g_1 = 2$, $g_2 = 0$, akkor

$$\vartheta_{g_1, g_2}(w - \tau) = e^{\pi i (2w - \tau)} \vartheta_{g_1 + 2, g_2}(w|\tau)$$

Látni fogjuk, hogy az utóbbi ϑ, melyben az első characteristika 2-vel szaporodott, csak egy numericus factorban különbözik a $\vartheta_{g_1, g_2}(w|\tau)$-től.

3.) Ha $g_1 = 0$, $g_2 = 2$ lesz.

$$\vartheta_{g_1, g_2}(w + 1) = e^{-\pi i g_1} \vartheta_{g_1, g_2 + 2}(w|\tau)$$

Ezt a két utóbbi képletet most kapcsolatba kell hozni a $\vartheta_{g_1 g_2}(w)$ függvényre érvényes functionális egyenletekkel. Ez a két functionális egyenlet

1. $\vartheta_{g_1, g_2}(w + 1) = e^{-\pi i g_1} \vartheta_{g_1, g_2}(w)$
2. $\vartheta_{g_1, g_2}(w + \tau) = e^{-\pi i (2w + \tau) - \pi i g_2} \vartheta_{g_1, g_2}(w)$

Ha 2.-ben w helyébe $(w - \tau)$-t írunk, adódik, hogy $\vartheta_{g_1, g_2}(w) = e^{-\pi i (2w - \tau) - \pi i g_2} \vartheta_{g_1, g_2}(w - \tau)$

Ha ebben $\vartheta_{g_1, g_2}(w - \tau)$ értékét a 2.) alatti eredmény-

ből helyettesítjük, adódik, hogy

$$\vartheta_{g,g_2}(w) = e^{-\pi i(2w-\tau) - \pi i g_2 + \pi i(2w-\tau)} \vartheta_{g_1+2,g_2}(w|\tau)$$

vagyis

(a.) $$\vartheta_{g_1+2,g_2}(w) = e^{\pi i g_2} \vartheta_{g,g_2}(w)$$

Tudjuk, hogy, ha az általános ϑ függvényben a második charakteristika 2-vel szaporodik, vagy általánosan egy páros számmal naporodik a ϑ függvény csak egy állandó faktorral szorzódik; g_1-nek 2-vel való naporodása esetén a mint látjuk e faktor $e^{\pi i g_2}$. – És összehasonlítva az 1. és 3. egyenletet, nyilvánvaló, hogy

(b.) $$\vartheta_{g_1,g_2+2}(w) = \vartheta_{g_1,g_2}(w)$$

Ha tehát a második charakteristika 2-vel naporodik, ez a ϑ függvényt nem változtatja meg.

Azonkívül az (1) egyenletből nyilvánvaló, hogy

(c) $$\vartheta_{-g_1,-g_2}(-w|\tau) = \vartheta_{g_1,g_2}(w|\tau)$$

mert hisz a principalis ϑ nem változtatja értékét, ha argumentuma jelt változtat. Ha tehát a charakteristika az argumentum egyszerre jelt változtat, a ϑ függvény változatlan marad. Ez a körülmény arra indít, hogy a különböző charakteristikákhoz tartozó ϑ függvények közül bizonyos typuso-

kat kiválasztunk, melyekkel a többieket meg le-
hessen határozni. És pedig az egész számú charak-
terisztikákkal bíró ϑ függvényeket fogjuk vizsgálni.
Az (a) és (b) egyenletekből nyilvánvaló, hogy csa-
kis a 2-nél kisebb abszolut értékkel bíró charakte-
risztikák jönnek tekintetbe, tehát a $-1, 0, +1$ ér-
tékeket felvevő charakterisztikák. De -1 nem jö"
tekintetbe és pedig (c) értelmében tehás csak 0 és
1. Így tehát négy különböző charakterisztika lehet-
séges

	1	2	3	4
g_1	0	0	1	1
g_2	0	1	0	1

s ennek megfelelőleg négy ilyen legegyszerűbb
ϑ függvény létezik. Az első a principális ϑ maga.
A másodiknak charakterisztikája (0, 1) lévén, (1)
értelmében

$$\vartheta_{01}(w|\tau) = \vartheta_{00}\left(w + \tfrac{1}{2}|\tau\right)$$

így függ össze a principális ϑ-val a második ϑ.
A (2) képlet szerint nyerjük a második ϑ sorát,

$$\vartheta_{01}(w|\tau) = \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{\pi i \xi k^2 \tau + 2k\left(w+\frac{1}{2}\right)\zeta}$$

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{k^2} e^{2\pi i k\left(w+\frac{1}{2}\right)}$$

$$= 1 + \sum_{1}^{\infty} q^{k^2} \left\{ e^{2\pi i k\left(w+\frac{1}{2}\right)\zeta} + e^{-2\pi i k\left(w+\frac{1}{2}\right)\zeta} \right\}$$

$$= 1 + 2\sum_{1}^{\infty} q^{k^2} \cos(2k\pi w + k\pi)$$

vagyis

$$\vartheta_{01}(w|\tau) = \vartheta_{00}(w+\tfrac{1}{2}|\tau) = 1 + 2\sum_{1}^{\infty} (-1)^k q^{k^2} \cos 2k\pi w.$$

A ϑ_{01} sora tehát abban különbözik a principális ϑ sorától, hogy abban a tagok váltakozó előjelűek. A harmadik ϑ függvény char.ja $(0,1)$, tehát (1) értelmében

$$\vartheta_{1,0}(w|\tau) = e^{-\pi i\left(w-\frac{\tau}{4}\right)}\vartheta_{00}\left(w-\frac{\tau}{2}|\tau\right)$$

és (2) adja a sorbafejtését

$$\vartheta_{1,0}(w|\tau) = \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{\pi i\tau\left(k-\frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(k-\frac{1}{2}\right)w\zeta}$$

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{\left(k-\frac{1}{2}\right)^2} e^{2\pi i\left(k-\frac{1}{2}\right)w}$$

e kétlős végtelen sorban két-két tagot össze fogunk vonni. Ha vagyunk:

$k=0,$	q kitevője	$\left(-\frac{1}{2}\right)^2$
$k=1,$	q "	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$
$k=-1,$	q "	$\left(-\frac{3}{2}\right)^2$
$k=2,$	q "	$\left(\frac{3}{2}\right)^2$

. . . . . .

és a $(-k)$ és $(k+1)$-nek megfelelő tagban a q közös exponense $\left(\frac{2k+1}{2}\right)^2$, tehát

$$\vartheta_{10}(w|\tau) = \sum_{0}^{\infty} q^{\left(\frac{2k+1}{2}\right)^2}\left\{e^{-2\pi i\frac{2k+1}{2}w} + e^{2\pi i\frac{2k+1}{2}w}\right\}$$

vagyis

$$\vartheta_{10}(w|\tau) = 2\sum_0^\infty q^{\left(\frac{2k+1}{2}\right)^2}\cos(2k+1)\pi w$$

Itt tehát q kitevőjében a páratlan számok felének négyzetei, a cosinusban a páratlan számok szerepelnek. Végül a negyedik ϑ

$$\vartheta_{11}(w|\tau) = e^{-\pi i\left(w-\frac{\tau}{4}\right)}\vartheta_{00}\left(w+\tfrac{1}{2}-\tfrac{\tau}{2}\,|\,\tau\right)$$

és a sorfejtése

$$\vartheta_{11}(w|\tau) = e^{\frac{\pi i}{4}}\sum_{-\infty}^{+\infty} e^{\pi i\left\{(k-\frac{1}{2})^2\tau + 2(k-\frac{1}{2})(w+\frac{1}{2})\right\}}$$

$$= i\sum_{-\infty}^{+\infty} q^{(k-\frac{1}{2})^2} e^{2\pi i(k-\frac{1}{2})(w-\frac{1}{2})}$$

és az előbbi módon összefoglalva a tagokat

$$\vartheta_{11}(w|\tau) = i\sum_0^\infty q^{\left(\frac{2k+1}{2}\right)^2}\left\{e^{-\pi i\frac{2k+1}{2}(w+\frac{1}{2})} + e^{\pi i\frac{2k+1}{2}(w+\frac{1}{2})}\right\}$$

$$= i\,2\sum_0^k q^{\left(\frac{2k+1}{2}\right)^2}\cos\left[(2k+1)\pi w + k\pi + \frac{\pi}{2}\right]$$

és mivel $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$, lesz:

$$\vartheta_{11}(w|\tau) = 2i\sum_0^\infty (-1)^k q^{\left(\frac{2k+1}{2}\right)^2}\sin(2k+1)\pi w$$

Tehát $\vartheta_{11}(w|\tau)$ a benne szereplő sinus miatt páratlan függvény, míg a többi ϑ páros.

$$\vartheta_{11}(-w|\tau) = -\vartheta_{11}(w|\tau)$$

a miből következik, hogy

$$\vartheta_{11}(0|\tau) = 0 \quad \text{vagyis}$$

$w=0$ a ϑ függvény nullapontja.

Sorbafejtésében elfogjuk az i faktor, mely elesett volna, ha eleitől fogva a Weber féle fak-

tort választottak volna.

Szokásos az irodalomban következőleg jelölni a ϑ függvényeket

$$\vartheta_{01}(w|\tau) = \vartheta_0(w|\tau)$$
$$\vartheta_{10}(w|\tau) = \vartheta_2(w|\tau)$$
$$\vartheta_{01}(w|\tau) = i\vartheta_1(w|\tau)$$
$$\vartheta_{00}(w|\tau) = \vartheta_3(w|\tau)$$

Jacobi a következő jelöléseket alkalmazza

$$\vartheta_0(w|\tau) = \Theta(u|w_1, w_2)$$
$$\vartheta_1(w|\tau) = H(u|w_1, w_2)$$
$$\vartheta_2(w|\tau) = \Theta_1(u|w_1, w_2)$$
$$\vartheta_3(w|\tau) = H_1(u|w_1, w_2)$$

A következő tabella magában foglalja a 4 ϑ függvényre vonatkozó nevezetesebb adatokat, melyek egyszerűen kiadódnak a már levezetett relatiókból. Ezek a ϑ függvényekre vonatkozó alapformulák. Ezekből a ϑ függvényekből azután könnyű lesz a biperiodicus függvényeket összerakni.

Következik a tabella.

A ϑ függvények közös valasformulák.

A függvény neve	$\vartheta_0(w\,|\,\tau)$	$\vartheta_1(w\,|\,\tau)$	$\vartheta_2(w\,|\,\tau)$	$\vartheta_3(w\,|\,\tau)$
Sorbafejtése	$1+2\sum_1^\infty (-1)^k q^{k^2}\cos 2kwz$	$2\sum_0^\infty (-1)^k q^{k(k+1)}\sin(2k+1)wz$	$2\sum_0^\infty q^{(k+\frac{1}{2})^2}\cos(2k+1)wz$	$1+2\sum_1^\infty q^{k^2}\cos 2kwz$
Karakteristikája	$g_1=0,\ g_2=1$	$g_1=1,\ g_2=1$	$g_1=1,\ g_2=0$	$g_1=0,\ g_2=0$
1. illapontja	$m+(2n+1)\frac{\tau}{2}$	$m+n\tau$	$\frac{1}{2}(2m+1)+n\tau$	$\frac{1}{2}(2m+1)+\frac{\tau}{2}(2n+1)$
Az ϑ változása a 1-el növelt w-re	$\vartheta_0(w\,|\,\tau)$	$-\vartheta_1(w\,|\,\tau)$	$-\vartheta_2(w\,|\,\tau)$	$\vartheta_3(w)$
τ-val	$-e^{-\pi i(2w+\tau)}\vartheta_0(w)$	$-e^{-\pi i(2w+\tau)}\vartheta_1(w)$	$e^{-\pi i(2w+\tau)}\vartheta_2(w)$	$e^{-\pi i(2w+\tau)}\vartheta_3(w)$
$\frac{1}{2}$-vel	$\vartheta_3(w)$	$\vartheta_2(w)$	$-\vartheta_1(w)$	$\vartheta_0(w)$
$\frac{\tau}{2}$-el	$ie^{-\pi i(w+\frac{\tau}{4})}\vartheta_1(w)$	$ie^{-\pi i(w+\frac{\tau}{4})}\vartheta_0(w)$	$e^{-\pi i(w+\frac{\tau}{4})}\vartheta_3(w)$	$e^{-\pi i(w+\frac{\tau}{4})}\vartheta_2(w)$
$(\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2})$-el	$e^{-\pi i(w+\frac{\tau}{4})}\vartheta_2(w)$	$e^{-\pi i(w+\frac{\tau}{4})}\vartheta_2(w)$	$-ie^{-\pi i(w+\frac{\tau}{4})}\vartheta_0(w)$	$ie^{-\pi i(w+\frac{\tau}{4})}\vartheta_1(w)$
ha w átmegy $(-w)$-be	ϑ_0	$-\vartheta_1(w)$	$\vartheta_2(w)$	$\vartheta_3(w)$

A biperiodikus függvények összetartására nézve legyen $\frac{\vartheta_1(w|\tau)}{\vartheta_0(w|\tau)} = f_1(w)$; $\frac{\vartheta_2(w|\tau)}{\vartheta_0(w|\tau)} = f_2(w)$; $\frac{\vartheta_3(w|\tau)}{\vartheta_0(w|\tau)} = f_3(w)$

Ezek az f. függvények egyértékű transcendens tört függvények; melyeknek tehát végesben nincs határozatlansági helyük és a ϑ függvények tulajdonságaiból kifolyólag (lásd a tabellát)

$$f_1(w+1) = -f_1(w)$$
$$f_1(w+\tau) = f_1(w)$$
$$f_2(w+1) = -f_2(w)$$
$$f_2(w+\tau) = -f_2(w)$$
$$f_3(w+1) = f_3(w)$$
$$f_3(w+\tau) = -f_3(w)$$

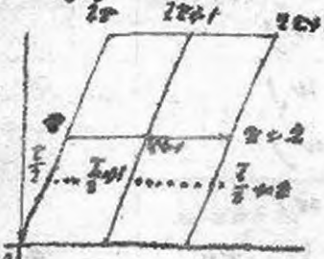
Tehát ezek nem biperiodikus függvények, nem bírnak 1 és τ periodusokkal, mert mindegyik legalább egy periodusnál jegyet változtat. de ezen függvények négyzetei nyilvánvalóan biperiodikus függvények. Ez arra indítana, hogy a ϑ függvények négyzeteivel foglalkozzunk, ezeket be kell vezetni, ha el akarunk jutni az 1 és τ periodusokkal bíró kép. függvényekhez. De a ϑ függvények négyzeteinek bevezetése nélkül is elmehetünk

bip. függvényekkel, ezekkel egy más periodusu bip. függvényekkel. Az $f_1(w)$-re nézve látható, hogy az első egyenlet ismétlésével

$$f_1(w+2) = f_1(w)$$ a másodikkal

$$f_1(w+\tau) = f_1(w)$$

tehát $f_1(w)$ egy bip. függvény 2 és τ periodusokkal. Ép igy következik, hogy $f_2(w)$-nek periodusai 2 és 2τ, és $f_3(w)$ periodusai 1 és 2τ. A megfelelő periodus-parallelogrammát magában foglalja a mellékelt ábra.



Az f_1 fokszámának megállapitása végett meg kell nézni, hogy f_2-nek hány nullapontja, illetőleg pólusa van a $[0, 2, \tau+2, \tau]$ per. parallelogrammán belül. $f_2(w)$ eltünik ott, a hol $\wp_2(w)$, tehát az $[m+n\tau]$ pontokban: $f_1(m+n\tau)=0$, a hol m és n felveszen minden egész számú értéket. A p: parallelogrammán belül fekvő nullapontok ezek közül nyilvánvalóan azok, melyekre nézve $m=n=0$, és $m=1$, $n=0$, tehát a 0 és 1 pont, ha t.i. a per. parallelogramma kiterjedését a már megállapitott értelemben vesszük. Ha $f_1(w)$

végtelenné válik akk, a hol $\vartheta_0(w)$ nullá válik, tehát $f_1(m+(2n+1)\frac{\tau}{2}) = \infty$, s pedig mindenütt csak elsőrendű végtelen, mert ϑ_0 is elsőrendű végtelen. A parallelogrammon belül fekszenek az $m=n=0$-nak megfelelő $\frac{\tau}{2}$, és az $m=1$, $n=0$-nak megfelelő $\frac{\tau}{2}+1$. Tehát az f_1 függvény a pp. belül két pontban válik elsőrendben nullá és két pontban első rendben végtelenné, ez tehát egy $(2,\tau)$ periodusokkal bíró másodrendű bip. függvény és pedig páratlan függvény, mert $f_2(-w) = -f_1(w)$.

Határozzuk meg ezen függvény a maximát. Nyilvánvaló a következő egyenletsorozat

$$f_1(w) = -f_1(w+1) = f_1(-w-1) = f_1(1-w)$$

lévén a függvény egyik periodusa 2. Tehát

$$f_1(w) = f_1(1-w)$$

vagyis a pp. belül azon pontokban, melyeknek összege 1, a függvény ugyanazt az értéket veszi fel, emélfogva $f_1(w)$-re nézve $s = 1$. Most az általános tételek szerint felállíthatjuk azt a differentiális egyenletet, melynek ez a függvény eleget tesz. Ha ugyanis $y. f_1(w) = z$,

a hol y-t majd czélszerűen fogjuk megválasztani, akkor z, felfogva, mint w másodfokú hip. függvénye, eleget tesz a következő diff. egyenletnek:

$$\frac{dz}{dw} = A\sqrt{[z-yf_1(\tfrac{1}{2})][z-y\cdot f_1(\tfrac{1}{2}+\tfrac{z}{2})][z-y\cdot f_1(\tfrac{1}{2}+\tfrac{\tau}{2})]}\cdot$$

$$\cdot\sqrt{[z-y\cdot f_1(\tfrac{1}{2}+\tfrac{z}{2}+\tfrac{\tau}{2})]}$$

Ebben az egyenletben

$$f_1(\tfrac{1}{2}) = f_1(\tfrac{1}{2}) = \frac{\vartheta_2(\frac{1}{2})}{\vartheta_0(\frac{1}{2})} = \frac{\vartheta_2(0)}{\vartheta_3(0)} = \sqrt{k'}$$

vagyis így jelöljük ezt a hányadost. $\sqrt{k}$ explicit alakja:

$$\sqrt{k} = \frac{2\sum_1^\infty q^{\frac{(2K+1)^2}{2}}}{1+2\sum_1^\infty q^{K^2}}$$

Továbbá $f_1(\frac{1}{2}+1) = f_1(\frac{1}{2}+1) = -\sqrt{k}$

$$f_1(\tfrac{1}{2}+\tfrac{\tau}{2}) = f_1(\tfrac{1}{2}+\tfrac{\tau}{2}) = \frac{\vartheta_1(\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2})}{\vartheta_0(\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2})} =$$

$$= \frac{ie^{-\pi i(\frac{1}{2}+\frac{\tau}{4})}\vartheta_0(\frac{1}{2})}{ie^{-\pi i(\frac{1}{2}+\frac{\tau}{4})}\vartheta_1(\frac{1}{2})} = \frac{\vartheta_0(\frac{1}{2})}{\vartheta_1(\frac{1}{2})} = \frac{\vartheta_3(0)}{\vartheta_2(0)} = \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

És $f_1(\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}+1) = f_1(\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}+1) = -\frac{1}{\sqrt{k}}$

Betéve ezeket a differentialis egyenletbe

$$\frac{dz}{dw} = A\sqrt{(z-y\sqrt{k})(z+y\sqrt{k})(z-y\frac{1}{\sqrt{k}})(z+y\frac{1}{\sqrt{k}})}$$

y-t legczélszerűbb így választani $y = \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{\vartheta_3(0)}{\vartheta_2(0)}$

Tehát $z = \frac{\vartheta_3(0)}{\vartheta_2(0)}\frac{\vartheta_1(w)}{\vartheta_0(w)}$, miáltal a differentiális egyenletünk következő leg alakul:

$$\frac{dz}{dw} = A\sqrt{(z-1)(z+1)\left(z-\frac{1}{\sqrt{k}}\right)\left(z+\frac{1}{\sqrt{k}}\right)}$$

vagyis

$$\frac{dz}{dw} = \frac{A}{\sqrt{k}}\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)} \qquad (1)$$

Az A constans meghatározására bizonyos előkészületeket kell tennünk, a mennyiben ehhez ismernünk kell $\frac{dz}{dw}$ értékét tetszőleges egy w érték esetén. De $\frac{dz}{dw}$ meghatározása végett differentiálni kell a ϑ függvényeket, t. i.

$$\frac{dz}{dw} = \frac{\vartheta_3(0)}{\vartheta_2(0)} \cdot \frac{\vartheta_0(w)\vartheta_3'(w) - \vartheta_1(w)\vartheta_0'(w)}{\vartheta_0(w)^2} \qquad (2)$$

ϑ_2 pedig behozza számításainkba a ϑ függvények négyzeteit. Látjuk tehát, hogy akár 1 és τ, akár 2 és τ periodusokkal bíró hp. függvényeket akarunk előállítani, feltétlenül szükséges a ϑ függvények négyzeteinek bevezetése. Az A meghatározására végett fogyjuk (1) és (2)-ben $w = 0$, akkor egyfelől

$$\left(\frac{dz}{dw}\right)_{w=0} = \frac{A}{\kappa}(\pm 1)$$

másfelől, ha a ϑ függvényeket nullaértékek egyszerűen argumentum nélkül irjuk, tehát pl. $\vartheta_2(0) - \vartheta_2$ lesz

$$\left(\frac{dz}{dw}\right)_{w=0} = \frac{\vartheta_3}{\vartheta_2} \cdot \frac{\vartheta_1'}{\vartheta_0}, \text{ tehát}$$

$$\frac{\vartheta_3}{\vartheta_2}\cdot\frac{\vartheta_1'}{\vartheta_0}=\frac{A}{k}\,(\pm 1)$$

és betéve $\frac{1}{k}$ értékeit

$$\frac{\vartheta_3}{\vartheta_2}\cdot\frac{\vartheta_1'}{\vartheta_0}=\frac{\vartheta_3^2}{\vartheta_2^2}\,A\,(\pm 1)$$

a miből $$A=\pm\frac{\vartheta_1'}{\vartheta_0}\cdot\frac{\vartheta_2}{\vartheta_3}$$

A differentiális egyenletnek tehát az lesz az alakja: $$\frac{dz}{dw}=\frac{\vartheta_1'}{\vartheta_0}\frac{\vartheta_2}{\vartheta_3}=\frac{1}{k}\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}$$

vagyis $$\frac{dz}{dw}=\frac{\vartheta_1'}{\vartheta_0}\frac{\vartheta_2}{\vartheta_3}\sqrt{(1-z^2)\left(1-\frac{\vartheta_2^4}{\vartheta_3^4}z^2\right)}$$

Hogy az itt fellépő ϑ-k értelmét felismerhessük, szükséges a ϑ függvények négyzeteit is tekintetbe venni, vagy általánosan szólva, két ϑ függvény szorzatát:

$$\vartheta_{g_1,g_2}(w|\tau)\,\vartheta_{\gamma_1,\gamma_2}(w|\tau)=\Theta(w|\tau)$$

Lássuk ezen Θ függvény functionális egyenleteit. Mintáu

$$\left.\begin{aligned}\vartheta_{g_1,g_2}(w+1)&=e^{-\pi i g_1}\vartheta_{g_1,g_2}(w)\\ \vartheta_{g_1,g_2}(w+\tau)&=e^{-\pi i g_1}e^{-\pi i(2w+\tau)}\vartheta_{g_1,g_2}(w)\end{aligned}\right\}$$

és

$$\left.\begin{aligned}\vartheta_{\gamma_1,\gamma_2}(w+1)&=e^{-\pi i\gamma_1}\vartheta_{\gamma_1,\gamma_2}(w)\\ \vartheta_{\gamma_1,\gamma_2}(w+\tau)&=e^{-\pi i\gamma_2}e^{-\pi i(2w+\tau)}\vartheta_{\gamma_1,\gamma_2}(w)\end{aligned}\right\}$$

összeszorozva a megfelelő egyenleteket, kapjuk, hogy

$$\Theta(w+1)=e^{-\pi i(g_1+\gamma_1)}\Theta(w)$$

$$\Theta(w+\tau) = e^{-\pi i(g_1+g_2)} e^{-2\pi i(2w+\tau)} \Theta(w)$$

Tehát két ϑ függvény szorzata hasonló funcionális egyenletnek tesz eleget, mint az egyszerű ϑ függvény, az egyedüli és jellemző különbség abban áll, hogy a második funcionális egyenletben a második exponensben 2 szerepel, mint szorzó. Nyilvánvaló, hogy ezekből a funcionális egyenletekből hasonló következtetéseket tudunk levonni, mint az egyszerű ϑ függvény esetén. De itt egész általánosan vesszük a dolgot, és n ϑ függvény szorzatát vizsgáljuk:

$$\vartheta_{g_1,g_2}(w|\tau)\,\vartheta_{g_1',g_2'}(w|\tau)\cdots\cdots\vartheta^{(n-1)}_{g_1^{(n-1)},g_2^{(n-1)}}(w|\tau) = \Theta(w|\tau)$$

Ennek funcionális egyenletei

$$\Theta(w+1|\tau) = e^{-\pi i(g_1+g_1'+\cdots\cdots+g_1^{(n-1)})}\Theta(w|\tau)$$

$$\vartheta(w+\tau|\tau) = e^{-\pi i(g_1+g_1'+\cdots\cdots+g_1^{(n-1)})} e^{-n\pi i(2w+\tau)}\Theta(w)$$

Itt is csak a legutolsó exponensben szereplő n a lényeges különbség az egyszerű ϑ függvény egyenleteihez képest. A feladatot tehát egész általánosan úgy fogalmazhatjuk, hogy vizsgáljuk meg az "következő" funcionális egyenleteknek eleget tevő ϑ függvényt:

$$\Theta(w+1) = e^{-\pi i\cdot g_1}\Theta(w)$$

$$\vartheta(w+\tau) = e^{-\pi i\cdot g_2} e^{n\pi i(2w+\tau)}\Theta(w)$$

Tehát egészen eltekintve attól, hogy ϑ függvények normatávol kezdtük csak azt közjük ki, hogy ϑ a w egész transcendens függvényt legyen, mely eleget tesz ennek a két functionális egyenletnek, melyben g_1 és g_2 tetszőleges számok és n egy positiv egész szám. Ezt a függvényt, mely az egész pikon kívül mindenütt egyértékű véges és folytonos és csak a végtelenben bír lényegesen singularis helyhez, jelöljük: $\Theta_{g_1 g_2}(w \mid \tau)$ -vel és azt mondjuk, hogy ez egy n-ed fokú vagy n-ed rendű Jacobi féle, illetőleg ϑ függvény, mely a $(g_1\ g_2)$ characteristikához tartozik. A függvény rendszáma a második functionalis egyenlet második exponensében nyilvánul. Ezen functionalis egyenletekből kiindulva épúgy, ki lehet fejteni az n-ed rendű ϑ függvények elméletét, mint az elsőrendűekét. Mi azonban a direct, Koenigsbergertől eredő utat fogjuk követni: Ezen az úton vissza fogjuk vezetni az n-ed rendű ϑ függvényt az egyszerű ϑ függvényre. Megjegyzendő külön-

ben, hogy az n-ed rendű Θ függvény ben minth speciális eset bennfoglaltatik az első rendű függvény ról: ta. Ezéa általánosan mondhatjuk különben, hogy egy m-ed és egy n-ed rendű Θ függvény szorzata egy $(m+n)$-ed rendű Θ függvény, melynek characteristikája az előbbiek characteristikáinak összege.

Miután a G_1 és G_2 characteristikák csak páros számoktól eltekintve vannak meghatározva, azért a következő vizsgálatokban G_1 helyett $G_1, G_1+1, \ldots G_1+2(n-1)$ tehát általánosan $G_1+2\mu = \Gamma_1$ characteristikát fogunk használni, a hol $\mu = 0, 1, 2 \ldots (n-1)$. Ezáltal a functionális egyenletek természetesen nem változnak.

Most vezessük be a következő kifejezést.

$$e^{\frac{\Pi}{n}(2w+\frac{\Pi}{2}\tau)ni}\,\Theta\left(\frac{w}{n}-\frac{g_2-\Gamma_1\tau}{2n}\right)=\Phi(w)$$

és állitsuk fel ennek functionális egyenletét.

$$\Phi(w+n) = e^{-\pi i\,\Gamma_1}\,e^{\Gamma_1 \pi i}\,\Phi(w) \quad \text{vagyis}$$

$$\phi(w+n) = \phi(w)$$

$$\phi(w+n\tau) = e^{-\pi i\, g_2}\, e^{-n\pi i\left(\frac{2w}{n}-\frac{2g_2-\Gamma_1\tau}{2n}+\tau\right)}.$$

$$\cdot e^{\Gamma_1\tau\pi i}\,\phi w = e^{-\pi i\left[g_2+2w-g_2+\Gamma_1\tau+n\tau-\Gamma_1\tau\right]}\phi w$$

$$= e^{-\pi i(2w+n\tau)}\,\phi(w).$$

Tehát ϕ eleget tesz a következő két functionális egyenletnek

$$\phi(w+n) = \phi(w)$$
$$\phi(w+n\tau) = e^{-\pi i(2w+n\tau)}\phi(w)$$

Ez a két functionális egyenlet hasonlít a principális ϑ-ra érvényes functionális egyenletekhez, csak n-ben van a differentia. Még jobban hasonlít a principális ϑ-hez a következő függvény:

$$\phi(w) + \phi(w+1) + \ldots\ldots + \phi(w+n-1) = \psi(w)$$

vagyis $$\psi(w) = \sum_{\lambda=0}^{n-1} \phi(w+\lambda)$$

Ennek functionalis egyenletei:

$\psi(w+1) = \phi(w+1) + \phi(w+2) + \ldots + \phi(w+n)$ de a $\phi(w)$ functionális tulajdonságainál fogva ez $= \psi(w)$, tehát

$$\psi(w+1) = \psi(w)$$

és $$\psi(w+n\tau) = e^{-\pi i(2w+n\tau)}\psi(w)$$

Ezek a principális ϑ functionális egyenletei, a különbség csak az, hogy itt τ helyett $n\tau$ szerepel, ez a függvény tehát $\vartheta_3(w|n\tau)$-tól csak egy állandó factorban különbözik, mely utóbbi még függhet characteristikától, azjgy jele

$C_{\pi_1 g_2}$, vagyis $\psi(w) = C_{\pi_1, g_2}\vartheta_3(w|n\tau)$

és beléve $\psi(w)$ értékét

$$\sum_{\lambda=0}^{n-1} \phi(w+\lambda) = C_{\Pi_1 g_2}\, \vartheta_3(w \mid n\tau)$$

és beléve ϕ értékét

$$\sum_{\lambda=0}^{n-1} e^{\frac{\Pi}{2n}(2w+2\lambda+\frac{\Pi_1}{2}\tau)\pi i}\, \Theta\Big(\frac{w+\lambda}{n} - \frac{g_2-\Pi_1\tau}{2n}\Big) = C_{\Pi_1 g_2}\, \vartheta_3(w \mid n\tau)$$

Most w helyébe irjunk $\Big(nw + \frac{g_2-\Pi_1\tau}{2}\Big) - \lambda$, akkor

$$\sum_{\lambda=0}^{n-1} e^{-\frac{\Pi_1}{2n}\{2nw+g_2-\Pi_1\tau+2\lambda+\frac{\Pi_1}{2}\tau\}\pi i}\, \Theta\Big(w+\frac{\lambda}{n}\Big) =$$

$$= C_{\Pi_1 g_2}\, \vartheta_3\Big(nw + \frac{g_2-\Pi_1\tau}{2} \mid n\tau\Big)$$ és ebből

$$\sum_{\lambda=0}^{n-1} e^{\frac{\Pi_1 \lambda \pi i}{n}}\, \Theta\Big(w+\frac{\lambda}{n}\Big) = e^{-\pi i \frac{\Pi_1}{2n}\left[2nw+g_2-\frac{\Pi_1}{2}\tau\right]} \cdot C_{\Pi_1 g_2}\, \vartheta_3\Big(nw + \frac{g_2-\Pi_1\tau}{2} \mid n\tau\Big).$$

Ha ebben az egyenletben Π_1 helyébe annak successiv értékeit helyettesítjük, n egyenletet nyerünk, melyeknek összegét egy kettős összeg alakjában irhatjuk. Legyen rövidség kedvéért $C_{\Pi_1 g_2} = C_{g_1+2\mu,\, g_2=\mu}$ akkor az egyenletek megfelelő oldalainak summázásából adódik a következő kettős összeg:

$$\sum_{\mu=0}^{n-1} \sum_{\lambda=0}^{n-1} e^{\frac{g_1\lambda\pi i}{n} + \frac{2\mu\lambda\pi i}{n}}\, \Theta\Big(w+\frac{\lambda}{n}\Big) = \sum_{\mu=0}^{n-1} e^{-\pi i \frac{g_1+2\mu}{2n}\left[2nw+g_2 - \frac{g_1+2\mu}{2}\tau\right]} C_{\mu+3}\Big[nw + \frac{g_2-g_1\tau}{2} - \mu\tau \mid n\tau\Big] =$$

$$= \sum_{\mu=0}^{n-1} C_\mu\, \chi_\mu(w)$$ ha t. i. C_μ faktorát szöröben $\chi_\mu(w)$-vel jelöljük. Ezt a kifejezést tovább igy irhatjuk:

$$\sum_{\lambda=0}^{n-1} e^{\frac{\varrho_\lambda \lambda \pi i}{n}} \Theta\left(w+\frac{\lambda}{n}\right) \sum_{\mu=0}^{n-1} e^{\frac{2\mu\lambda\pi i}{n}} = \sum_{\mu=0}^{n-1} c_\mu \chi_\mu(w)$$

Hogy a baloldali kettős összeg értékét meghatározhassuk, vegyük tekintetbe az itt álló második összeget. Tegyük fel először, hogy $\lambda \neq 0$, azaz hogy $\lambda > 0$ akkor nyilvánvaló, hogy ha $e^{\frac{2\lambda\pi i}{n}} = \varepsilon$, ez az ε eleget tesz az $x^n - 1 = 0$ egyenletnek. Tehát ε egy n-edik egységgyök. Nyilvánvaló továbbá, hogy

$$\varepsilon^0, \varepsilon^1, \varepsilon^2, \ldots\ldots \varepsilon^k \qquad (k \geq 0)$$

is rendre eleget tesznek az utóbbi egyenletnek, mert hisz $(\varepsilon^k)^n = (\varepsilon^n)^k = 1$. Miután azonban ezen egyenletnek csak n különböző gyöke lehet, ezen kifejezések sem lehetnek mind különbözők, hanem legfeljebb ezen kifejezések $\varepsilon^0, \varepsilon^1, \varepsilon^2 \ldots\ldots \varepsilon^{n-1}$. De általánosan szólva ez az n kifejezés nem lesz mindig egymástól különböző csak akkor, ha λ és n-nek nincsen közös osztója. Ha u. i.

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= p\lambda' \\ n &= p n' \end{aligned}\right\} (\lambda', n' \text{ relativ prim})$$

tehát p közös osztója λ és n-nek, akkor

$$e^{\frac{\lambda 2\pi i}{n}} = e^{\frac{\lambda' 2\pi i}{n'}}$$

s ez eleget tesz a következő egyenletnek

$$x^{n'} - 1 = 0$$

melynek összes különböző gyökei

$$\varepsilon^0, \varepsilon^1, \varepsilon^2 \ldots \varepsilon^{n'-1}$$

tehát n' különböző gyöke van ezen egyenletnek. Ugyanezt az n' gyököt kapjuk, ha valamennyit tetszőlegesre megszorozzuk $\varepsilon^{n'}=1$ kifejezéssel, tehát ugyanez az n' gyök

$$\varepsilon^{n'}, \varepsilon^{n'+1}, \varepsilon^{n'+2} \ldots\ldots \varepsilon^{2n'-1}$$

ugyanúgy $\varepsilon^{2n'}, \varepsilon^{2n'+1}, \varepsilon^{2n'+2} \ldots\ldots \varepsilon^{3n'-1}$ stb.

. . . . . .

ha ezt folytatjuk p-szer kapjuk azt a sorozatot, melyben az utolsó tag . . . . . $\varepsilon^{pn'-1}=\varepsilon^{n-1}$, Ezen sorozatok együtt adják az ε tetszőleges hatványait az 0-ától az $(n-1)$-ikig s mindegyik sorozat külön-külön nem más, mint maga az eredeti sorozat. Ha tehát n' és n-nek van közös osztója p, akkor az $\varepsilon^0, \varepsilon^1 \ldots\ldots \varepsilon^{n-1}$ hatványok nem mind különbözők, hanem ez az egész sorozat felosztik p teljesen identikus sorozatra. Ha ezt az általános esetet vesszük, akkor az $\varepsilon^{n'}-1=0$ egyenlet gyökeinek összege nulla lévén, következik, hogy

$$\varepsilon^0+\varepsilon^1+\varepsilon^2+\ldots\ldots+\varepsilon^{n'-1}=0$$

vagy is $\sum_{\mu=0}^{n'-1} \varepsilon^{\mu} = 0$ és így

$$\sum_{\mu=n'}^{2n'-1} \varepsilon^{\mu} = 0$$

végre az utolsó sorozatból véve a gyökök összegét

$$\sum_{\mu=(p-1)n'}^{pn'-1} \varepsilon^{\mu} = 0$$

s ha ezen egyenletek baloldalait summázzuk, kapjuk, hogy

$$\sum_{\mu=0}^{n-1} \varepsilon^{\mu} = \sum_{\mu=0}^{n-1} e^{\frac{2\mu\lambda\pi i}{n}} = 0 \quad \text{ha } \lambda > 0$$

Ha pedig $\lambda = 0$, a summa minden tagja 1, s mivel n ilyen tag fordul elő a summa értéke n. Összefoglalva tehát látjuk, hogy a λ-ra vonatkozó summából csupán a $\lambda = 0$-nek megfelelő tag marad meg, úgyhogy

$$n\,\Theta(w) = \sum_{\mu=0}^{n-1} c_{\mu}\,\chi_{\mu}(w)$$

a hol χ_{μ} a primitiv ϑ-ból összerakott egyszerű kifejezés. Az utóbbi eredmény kifejezi az úgynevezett Hermite féle principiumot, mely szerint a $G_{1,2}$ characteristikához tartozó n-edrendű legáltalánosabb ϑ függvény előállítha-

tó ily alakban

$$C_0\chi_0(w) + C_1\chi_2(w) + \ldots\ldots + C_{n-1}\chi_{n-1}(w)$$

azaz előállítható mint bizonyos jól meghatározott χ függvények homogén lineáris kifejezése állandó coefficiensekkel. A coefficiensek külön-ben egészen tetszőleges vagyis a legáltalánosabb $G_1 G_2$ characteristikához tartozó n-edrendű ϑ függvény n tetszőleges állandótól homogén és lineáris módon függ. Ebből egy egyszerű következtetést vonhatunk le. Tegyük fel, hogy volna $(n+1)$ ilyen $G_1 G_2$ characteristikához tartozó n-edrendű ϑ függvényünk: $\vartheta_1, \vartheta_2 \ldots\ldots \vartheta_{n+1}$, akkor ezen csak abban különbözhetnek egymástól, hogy a constans tenyök más és más értékkel bírnak, vagyis általánosan

$$n\,\vartheta_k(w) = \sum_{\mu=0}^{n-1} C_\mu^{(k)} \chi_\mu(w) \qquad (k = 1, 2, 3 \ldots\ldots n+1)$$

vagyis

$$n\,\vartheta_k - C_0^{(k)}\chi_0 - C_1^{(k)}\chi_1 - \ldots\ldots - C_{n-1}^{(k)}\chi_{n-1} = 0$$
$$(k = 1, 2 \ldots\ldots n+1)$$

Ha az ezen kifejezéssel képviselt $n+1$ egyenletet felfogjuk, mint az $n, \chi_0, \chi_1 \ldots\ldots \chi_{n-1}$ ismeretlenekre nézve homogén lineáris egyenlete

ket, mintáu ezek az ismeretlenek nem mind nullák, bisz $n \neq 0$, az egyenletrendszer csak úgy állhat, ha determinánsa eltűnik, tehát fell hogy

$$\begin{vmatrix} \Theta_1 & C_0^1 & C_1^1 & \dots & C_{n-1}^1 \\ \Theta_2 & C_0^2 & C_1^2 & \dots & C_{n-1}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Theta_{n+1} & C_0^{n+1} & C_1^{n+1} & \dots & C_{n-1}^{n+1} \end{vmatrix} = 0$$

legyen. Ha ezt kifejtjük az első oszlop elemei szerint és tekintetbe vesszük, hogy az aldeterminánsok állandók, kapjuk, hogy

$$c_1\Theta_1 + c_2\Theta_2 + \dots + c_{n+1}\Theta_{n+1} = 0$$

azaz ha van $n+1$ oly n-edrendű Θ függvényünk, mely ugyanazokhoz a $\Theta_1 \Theta_2$ characteristikához tartozik, akkor ezen $(n+1)$ Θ függvény között létezik egy homogén lin. relatió állandó coefficiensekkel. Fordítva is világos, hogy általánosan szólva, n olyan Θ függvényt lehet felállítani, melyek között ily homogén lin. relatió nem létezik. T. i. az állandóknak oly n-edfokú rendszerét kell választani

$$C_0^{(k)}, C_1^{(k)}, \dots \dots C_{n-1}^{(k)} \qquad (k = 1, 2, \dots n)$$

melyeknek determinánsa nullától különböző. –

$$\begin{vmatrix} C_0' & C_1' & \dots & C_{n-1}' \\ C_0^2 & C_1^2 & \dots & C_{n-1}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_0^n & C_1^n & \dots & C_{n-1}^n \end{vmatrix} \neq 0$$

Akkor az ekekkel a fenti módon értelmezett n ϑ függvény között nem létezik egy homogén lin. reláció. Más szóval csak n, lineáris független n-ed rendű és ugyanazon charakteristikához tartozó ϑ függvény létezik úgy minden $(n+1)$-ik ϑ függvény kifejezhető ezeknek lineáris függvénye gyanánt. Ez a Hermite féle principium.

Alkalmazzuk ezt az első rendű ϑ függvények négyzeteire

$$\vartheta_0^2(w),\ \vartheta_1^2(w),\ \vartheta_2^2(w),\ \vartheta_3^2(w)$$

Ezek másodrendű ϑ függvények és $\vartheta_0^2(w)$ charakteristikája 0,1 vagyis 0,0 ugyan így a többi három ϑ függvény charakteristikája, ha eltekintünk a páros számoktól 0,0, tehát a négy másodrendű ϑ függvény charakteristikája 0,0. A Hermite féle principium értelmében minden egyéb másodrendű ϑ függvény kifejezhető két ϑ függvénnyel hom. lin. módon, azaz létezik ez a két relatio:

$$\left.\begin{aligned} \vartheta_2^2(w) &= c_1 \vartheta_0^2(w) + c_2 \vartheta_1^2(w) \\ \vartheta_3^2(w) &= c_3 \vartheta_0^2(w) + c_4 \vartheta_1^2(w) \end{aligned}\right\} \quad (I)$$

Ez az előállítás csak akkor lehetséges, ha $\vartheta_1^2(w)$ és $\vartheta_1^2(w)$ között nem létezik egy hom. lin. relatio. Ez tényleg nem is létezik, mert ha

$$\alpha \vartheta_0^2(w) - \beta \vartheta_1^2(w) = 0$$ volna, ebből következnék, hogy

$$\sqrt{\alpha}\, \vartheta_0(w) = \sqrt{\beta}\, \vartheta_1(w)$$

tehát a két ϑ függvény csak egy állandó factorban különböznék egymástól, a mi pedig nem áll, mert ez a két ϑ függvény különböző characteristikához tartozik. Mondhatjuk tehát, hogy ezen négy ϑ függvény közül kettő - kettő között nem létezik egy homogén lin. relatió, vagyis lehetséges a fenti (I) alatti előállítás. A c coefficiensek meghatározása végett speciális értékeket fogunk adni w-nek, s e végett táblázatban összefoglaljuk a négy ϑ függvény értékét, ha w-nek rendre $0, \frac{1}{2}, \frac{\tau}{2}, \frac{1+\tau}{2}$ értéket adunk. Következik a túlsó lapon a táblázat összeállítása:

w	$\vartheta_0(w\mid\tau)$	$\vartheta_1(w\mid\tau)$	$\vartheta_2(w\mid\tau)$	$\vartheta_3(w\mid\tau)$
0	ϑ_0	0	ϑ_2	ϑ_3
$\frac{1}{2}$	ϑ_3	ϑ_2	0	ϑ_0
$\frac{\tau}{2}$	0	$ie^{-\frac{\tau\pi i}{4}}\vartheta_0$	$e^{-\frac{\tau\pi i}{4}}\vartheta_3$	$e^{-\frac{\tau\pi i}{4}}\vartheta_2$
$\frac{1+\tau}{2}$	$e^{-\frac{\tau\pi i}{4}}\vartheta_2$	$e^{-\frac{\tau\pi i}{4}}\vartheta_3$	$-ie^{-\frac{\tau\pi i}{4}}\vartheta_0$	0

A c_1 és c_3 constansok meghatározása végett legyen $w=0$, akkor $\vartheta_1=0$ lévén kapjuk, hogy

$$\vartheta_2^2 = c_1\vartheta_0^2$$
$$\vartheta_3^2 = c_3\vartheta_0^2$$

a mivel c_1 és c_3 meg van határozva. c_2 és c_4 meghatározása végett legyen $w=\frac{\tau}{2}$, akkor a tabella értelmében $\vartheta_0(\frac{\tau}{2})=0$, tehát

$$\left(e^{-\frac{\tau\pi i}{4}}\right)^2\vartheta_3^2 = c_2\left(ie^{-\frac{\tau\pi i}{2}}\right)^2\vartheta_0^2$$

vagyis $$\vartheta_3^2 = -c_2\vartheta_0^2$$

és $$\left(e^{-\frac{\tau\pi i}{4}}\right)^2\vartheta_2^2 = c_4\left(e^{-\frac{\tau\pi i}{4}}\right)^2\vartheta_0^2$$

vagyis $$\vartheta_2^2 = -c_4\vartheta_0^2$$

A mivel meg van határozva a c_2 és c_4 coefficiens. A nyert értékeket behelyettesítve az (I) alatti előállításokba és keresztül szorozva ϑ_0^2-val, adódik.

$$\vartheta_0^2\vartheta_2^2(w) - \vartheta_2^2\vartheta_0^2(w) + \vartheta_3^2\vartheta_1^2(w) = 0$$
$$\vartheta_1^2\vartheta_3^2(w) - \vartheta_3^2\vartheta_0^2(w) + \vartheta_2^2\vartheta_1^2(w) = 0 \qquad (1.)$$

Ezek a relatiók az egyedüliek, melyek a ϑ függvények négyzetei között léteznek (Bizonyítás: Burkhardt, Elliptische Funktionen, 1899 pag. 118, 119.).

Ebből adódik egy második nevezetes relatio, ha az (1) alatti második egyenletben $w = \frac{1}{2}$ irunk, akkor

$$\vartheta_0\vartheta_0^2 - \vartheta_3^2\vartheta_3^2 + \vartheta_2^2\vartheta_2^2 = 0$$

vagyis $$\vartheta_0^4 - \vartheta_3^4 + \vartheta_2^4 = 0 \qquad (1\alpha.)$$

Ez a relatio köti össze a ϑ függvények 0 értékeinek negyedik hatványait. (A ϑ függvény 0 értékén értve a ϑ függvény értékét $w=0$ mellett).

Ha sor alakot használunk:

$$\left[1 + 2\sum_1^\infty (-1)^k q^{k^2}\right]^4 - \left[1 + 2\sum_1^\infty q^{k^2}\right]^4 + \left[2\sum_0^\infty q^{\left(\frac{2k+1}{2}\right)^2}\right]^4 = 0$$

Ez az identitás még explicitebb alakban irható, ha a summák negyedik hatványait, mint végtelen sorokat állitjuk elő, akkor az identitás verificatiója egyszerü számelméleti módszerekkel lehetségés. Ez tehát egy első alkalmazása a Hermite féle principiumnak.

Tovább mawe ötleteink a ϑ függvények összeadási tételeinek levezetésére. Vegyünk egy

ϑ függvényt $\vartheta_{g_1 g_2}$ és vizsgáljuk azt $(u+v)$ és $(u-v)$ argumentumokra, a hol u és v két független változó. Fogjuk fel a két függvény sorozatát mintha a függvényét, akkor ez egy másodrendű ϑ függvénye lesz az u-nak s ennek charakteristikája lesz g_1, g_2. arra $0,0$, úgy hogy a két ϑ függvény sorozata előállítható, mint pl. ϑ_0^2 és ϑ_1^2 lin. függvénye. Tegyük a következő példát

$$\vartheta_3(u+v)\,\vartheta_3(u-v) = A\,\vartheta_3^2(u) + B\,\vartheta_1^2(u)$$

A és B függetlenek u u-tól, de függvényei lehetnek még v-nek. Ezeknek meghatározása végett tegyük először $u=0$, akkor

$$\vartheta_3(v)\,\vartheta_3(-v) = A\,\vartheta_3^2$$

de ϑ_3 páros függvény, tehát

$$\vartheta_3^2(v) = A\,\vartheta_3^2 \qquad (a)$$

B meghatározása végett legyen $u = \frac{1}{2}\tau + \frac{\tau}{2}$, akkor

$$i e^{-\pi i(v+\frac{\tau}{4})}\vartheta_1(v)\; i e^{-\pi i(-v+\frac{\tau}{4})}\vartheta_1(-v) = B\left(e^{-\frac{\tau\pi i}{4}}\right)^2 \vartheta_3^2$$

de ϑ_1 páratlan, úgy hogy

$$\vartheta_1^2(v) = B\,\vartheta_3^2 \qquad (b)$$

(a) és (b)-ből beírva A és B értékét az eredeti egyenletbe, kapjuk a következő relatiót:

$$\vartheta_3^2 \cdot \vartheta_3(u+v)\,\vartheta_3(u-v) = \vartheta_3^2(v)\,\vartheta_3^2(u) + \vartheta_1^2(v)\,\vartheta_1^2(u)$$

Természetes, hogy hasonló 3 kifejezés állítható fel a többi ϑ függvényre nézve is. Még általánosabb képletet nyerünk, ha a következő szorzatot alkotjuk meg

$$\vartheta_{g_1 g_2}(u+v)\,\vartheta_{\gamma_1 \gamma_2}(u-v)$$

melynek characteristikája $g_1+\gamma_1$, $g_2+\gamma_2$, s így előlesz állítható, mint két ϑ szorzat lineáris függvénye. Vegyük a következő példát

$$\vartheta_1(u+v)\,\vartheta_3(u-v)$$

a character. 1, 1 0, 0 tehát a szorzat characteristikája 1, 1, Olyen characteristikával bírnak a következő ϑ szorzatok

$$\vartheta_0(u)\,\vartheta_2(u)$$

és $$\vartheta_1(u)\,\vartheta_3(u)$$

és így írható, hogy

$$\vartheta_1(u+v)\vartheta_3(u-v) = \mathfrak{C}\,\vartheta_0(u)\,\vartheta_2(u) + \mathfrak{D}\,\vartheta_1(u)\,\vartheta_3(u).$$

$\mathfrak{C}$ és $\mathfrak{D}$ meghatározása végett legyen $u=0$, akkor

$$\vartheta_1(v)\,\vartheta_3(-v) = \mathfrak{C}\,\vartheta_0\,\vartheta_2$$

és ha $u = \frac{\tau}{2}$ $\quad i\,e^{-\pi i\left(v+\frac{\tau}{4}\right)}\,\vartheta_0(v)\,e^{-\pi i\left(-v+\frac{\tau}{4}\right)}\,\vartheta_2(-v) =$

$$= \mathfrak{D}\,i\,e^{-\frac{\tau\pi i}{4}}\,\vartheta_0\,e^{-\frac{\tau\pi i}{4}}\,\vartheta_2 \quad \text{vagyis}$$

$$\mathfrak{D}\,\vartheta_0\,\vartheta_2 = \vartheta_0(v)\,\vartheta_2(-v)$$

Behelyettesítve $\mathfrak{C}$ és $\mathfrak{D}$ értékeit, kapjuk, hogy:

$$\vartheta_0\,\vartheta_2 \cdot \vartheta_1(u+v)\,\vartheta_3(u-v) = \vartheta_1(v)\,\vartheta_3(v)\,\vartheta_0(u)\,\vartheta_2(u) + \vartheta_0(v)\,\vartheta_2(v)\,\vartheta_1(u)\,\vartheta_3(u).$$

Ha csak paradigmaként vett képletben megváltoztatjuk a ϑ indexeit, valamint az argumentumokat, összesen 32 képletet kapunk. Ezek az összeadási képletek.

Most a Hermite féle principium egy harmadik alkalmazását mutatjuk be a másodrendű ϑ függvény esetére. Vegyük ugyanis tekintetbe a ϑ függvények deriváltjait. Láttuk, hogy

$$\vartheta_{g_1 g_2}(w+1) = e^{-g_1 \pi i}\, \vartheta_{g_1 g_2}(w) \qquad 1.)$$

$$\vartheta_{g_1 g_2}(w+\tau) = e^{-g_2 \pi i}\, e^{-\pi i (2w+\tau)}\, \vartheta_{g_1 g_2}(w) \qquad 2.)$$

differenciáljuk mindkettőt w szerint:

$$3.) \quad \vartheta'_{g_1 g_2}(w+1) = e^{-\pi i g_1}\, \vartheta'_{g_1 g_2}(w)$$

$$4.) \quad \vartheta'_{g_1 g_2}(w+\tau) = e^{-g_2 \pi i}\, e^{-\pi i (2w+\tau)}\, \vartheta'_{g_1 g_2}(w) - e^{-g_2 \pi i - \pi i (2w+\tau)} \cdot \vartheta_{g_1 g_2}(w)\, 2\pi i$$

Tehát a ϑ függvény deriváltja nem ϑ függvény, ment más functionális egyenletnek nem elegét. De egyszerűen össze lehet szálni a ϑ függvényekből és deriváltjaiból egy a ϑ függvény characteristikus tulajdonságaival bíró függvényt. Kijelentjük ugyanis, hogy

$$\vartheta_{g_1 g_2}(w)\, \vartheta'_{g_1' g_2'}(w) - \vartheta'_{g_1 g_2}(w)\, \vartheta_{g_1' g_2'}(w)$$

egy másodrendű ϑ függvény. Az első functionális egyenlet egyenes ugyanúgy mint az 1.) alatti, csakhogy a characteristikus helyébe lép $(g_1 + g_1')$, ugyanígy az 2.)

alak egyenlet is fennáll, $(g_1+g_1)(g_2+g_2)$ charakterisztikák mellett. Ez tehát egy másodrendű ϑ függvény.

Még egy példát tárgyalunk, a hol a páros és páratlan függvényekkel való shatkodást alkalmazhatjuk. Vegyük a

$$\vartheta_0(w)\vartheta_1'(w) - \vartheta_0'(w)\vartheta_1(w)$$

kifejezést, melynek charakterisztikája (1.0). Ilyen charakterisztikával bir a következő két ϑ-ás szorzat: $\vartheta_0(w)\vartheta_2(w)$ és $\vartheta_2(w)\vartheta_3(w)$

úgyhogy

$$\vartheta_0(w)\vartheta_1'(w) - \vartheta_0'(w)\vartheta_1(w) = A\vartheta_0(w)\vartheta_2(w) + B\vartheta_2(w)\vartheta_3(w)$$

Az A és B coefficiensek meghatározása végett vegyük tekintetbe, hogy ϑ_0 páros és ϑ_1' páros, mert

$\vartheta_1(-w) = -\vartheta_1(w)$ és differentiálva a két oldalt $\vartheta_1'(-w) = \vartheta_1'(w)$

Továbbá ϑ_0' páratlan, ϑ_0 páratlan, tehát a baloldali determinans páros és mivel a jobboldalon $\vartheta_0(w)\vartheta_1(w)$ páratlan, a jobboldali első tag kiesik s marad, hogy

$$\vartheta_0(w)\vartheta_1'(w) - \vartheta_0'(w)\vartheta_1(w) = B\vartheta_2(w)\vartheta_3(w)$$

B meghatározása végett legyen $w=0$, akkor lesz:

$\vartheta_0 \vartheta_1 = B \vartheta_2 \vartheta_3$ tehát $B = \frac{\vartheta_0 \vartheta_1}{\vartheta_2 \vartheta_3}$.

Itt ϑ_1' nullértéke szerepel. Ezzel a nehézséggel már találkoztunk. Ugyanis a szóbanforgó nyert egyenlet:

$$\vartheta_0(w)\vartheta_1'(w) - \vartheta_0'(w)\vartheta_1(w) = \frac{\vartheta_0 \vartheta_2'}{\vartheta_2 \vartheta_3} \vartheta_2(w)\vartheta_3(w) \quad \text{I.}$$

osztva $\vartheta_0^2(w)$-vel, lesz:

$$\frac{d}{dw}\left(\frac{\vartheta_1(w)}{\vartheta_0(w)}\right) = \frac{\vartheta_0 \vartheta_3'}{\vartheta_2 \vartheta_3} \frac{\vartheta_2(w)\vartheta_3(w)}{\vartheta_0(w)\vartheta_0(w)}$$

de ez nem egyéb, mint $f_1(w)$ függvény differenciálquotiense, mert láttuk, hogy $f_1(w) = \frac{\vartheta_1(w)}{\vartheta_0(w)}$. Az állandó minthogy esetben nyilvánvaló. Ezt el fogjuk távolítani. Ha nyilvános az I. alatti kifejezést differentiáljuk w-re, lesz:

$$\vartheta_0(w)\vartheta_1''(w) - \vartheta_1(w)\vartheta_0''(w) = \frac{\vartheta_0 \vartheta_1'}{\vartheta_2 \vartheta_3}\left[\vartheta_2(w)\vartheta_0'''(w) - \vartheta_2'(w)\vartheta_3(w)\right]$$

még egyszer differentiálva

$$\vartheta_0(w)\vartheta_1'''(w) + \vartheta_0'(w)\vartheta_1''(w) - \vartheta_1'(w)\vartheta_0''(w) - \vartheta_1''(w)\vartheta_0'(w) =$$
$$= \frac{\vartheta_0 \vartheta_1'}{\vartheta_2 \vartheta_3}\left[\vartheta_2(w)\vartheta_3''(w) + 2\vartheta_2'(w)\vartheta_3'(w) + \vartheta_2''(w)\vartheta_3(w)\right]$$

Ebben legyen $w = 0$ és vegyük tekintetbe, hogy

ϑ_0,	ϑ_2,	ϑ_3	páros függvények
ϑ_0',	ϑ_2',	ϑ_3'	páratlan "
ϑ_0''	ϑ_1''	ϑ_3''	páros "
ϑ_1'''	ϑ_2'''	ϑ_3'''	páratlan "

Ellenben ϑ_1 páratlan, ϑ_1' páros, ϑ_1'' páratlan, ϑ_1'''

páros, úgyhogy $w=0$ írva eltűnnek a páratlan függvények és marad

$$\vartheta_0 \vartheta_1''' - \vartheta_1' \vartheta_0'' = \frac{\vartheta_0 \vartheta_1'}{\vartheta_2 \vartheta_3} \left[\vartheta_2 \vartheta_3'' + \vartheta_2^0 \vartheta_3 \right]$$

ezt osszuk $\vartheta_0 \vartheta_1'$-el, lesz

$$\frac{\vartheta_1''}{\vartheta_1'} = \frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0} + \frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} + \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}$$

Hogy ezeket a magasabb differentialquotienseket eltávolítsuk, legyünk tekintettel a ϑ függvényekre álló partiális differentiális egyenletre, ez volt

$$\frac{\partial^2 \vartheta_{g_1 g_2}(w)}{\partial w^2} = 4\pi i \frac{\partial \vartheta_{g_1 g_2}(w)}{\partial \tau}$$

Ha ebben $w=0$, adódik

$$\vartheta_{g_1 g_2}^0 = 4\pi i \frac{\partial \vartheta_{g_1 g_2}}{\partial \tau}$$

s ha az eredeti egyenletet még egyszer deriváljuk, lesz

$$\frac{\partial^{(3)} \vartheta_{g_1 g_2}(w)}{\partial w^3} = 4\pi i \frac{\partial^2 \vartheta_{g_1 g_2}(w)}{\partial w \partial \tau} = 4\pi i \frac{\partial \vartheta_{g_1 g_2}'(w)}{\partial \tau}$$

vagyis $$\frac{\partial^2 \vartheta_{g_1 g_2}'(w)}{\partial w^2} = 4\pi i \frac{\partial \vartheta_{g_1 g_2}'(w)}{\partial \tau}$$

tehát a partiális differentiális egyenlet a deriváltra is áll, s ha ez utóbbi egyenletben $w=0$, akkor

$$\vartheta_{g_1 g_2}^{(3)} = 4\pi i \frac{\partial \vartheta_{g_1 g_2}'}{\partial \tau}$$

Ezt a két egyenletet most felhasználjuk a magasabb diff. quotienseknek eltüntetésére. Mert nyil-

Látható, hogy

$$\frac{4\pi i \frac{\partial \vartheta_1'}{\partial z}}{\vartheta_1'} = \frac{4\pi i \frac{\partial \vartheta_0}{\partial z}}{\vartheta_0} + \frac{4\pi i \frac{\partial \vartheta_3}{\partial z}}{\vartheta_3} + \frac{4\pi i \frac{\partial \vartheta_2}{\partial z}}{\vartheta_2}$$

vagyis $4\pi i$-vel, lesz

$$\frac{\partial \log \vartheta_1'}{\partial z} = \frac{\partial \log \vartheta_0}{\partial z} + \frac{\partial \log \vartheta_3}{\partial z} + \frac{\partial \log \vartheta_2}{\partial z}$$

Az egyenlet mindkét oldalát integrálva és átmenve a numerusokhoz, adódik, hogy

$$\vartheta_1' = C \cdot \vartheta_0 \vartheta_2 \vartheta_3$$

a C numericus constans meghatározása végett vessük a ϑ függvényeket sorba fejtését, ezeket behelyettesítjük az utóbbi kifejezésbe, a numericus tagok azonosítása fogja adni C-t. Mintán

$$\vartheta_0 = 1 + 2\sum_1^\infty (-1)^k q^{k^2}$$

$$\vartheta_2 = 2\sum_0^\infty q^{\left(\frac{2k+1}{2}\right)^2}$$

$$\vartheta_3 = 1 + 2\sum_1^\infty q^{k^2}$$

$$\vartheta_1(w) = 2\sum_0^\infty (-1)^k q^{\left(\frac{2k+1}{2}\right)^2} \sin(2k+1)w\pi \quad \text{és differenciálva:}$$

$$\vartheta_1'(w) = 2\sum_0^\infty (-1)^k q^{\left(\frac{2k+1}{2}\right)^2} \cos(2k+1)w\pi\,(2k+1)\pi$$

és $w=0$ írva

$$\vartheta_1' = 2\sum_0^\infty (-1)^k (2k+1)\pi q^{\left(\frac{2k+1}{2}\right)^2}$$

Ezeket a sorfejtéseket behelyettesítve, lesz

$$2\left[\pi q^{\frac{1}{4}} - 3\pi q^{\frac{9}{4}} + \dots\right] = 2C\left[1 - 2q + 2q^4 \dots\right]\left[q^{\frac{1}{4}} - q^{\frac{9}{4}} + \dots\right]\left[1 + 2q + 2q^4 + \dots\right]$$

A megfelelő tagok összehasonlításából következik, hogy $2\pi = 2C$ tehát $C = \pi$

úgyhogy $\vartheta_1' = \pi . \vartheta_0 \vartheta_2 \vartheta_3$

Ezen identitás felhasználásával következőleg tudjuk átalakítani az első képletet

$$\vartheta_0(w)\vartheta_1'(w) - \vartheta_0'(w)\vartheta_1(w) = \pi \vartheta_0^2 \vartheta_2(w)\vartheta_3(w)$$

Most csakis a $\vartheta(0)$ értékek nem pedig a $z = \frac{\vartheta_2}{\vartheta_3}\frac{\vartheta_1(w)}{\vartheta_0(w)}$-re felállított diff. egyenletben, vagyis a

$$\frac{dz}{dw} = \frac{\vartheta_3 \vartheta_1'}{\vartheta_0 \vartheta_2}\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)} \qquad \sqrt{k} = \frac{\vartheta_2}{\vartheta_3}$$

egyenletben behelyettesítjük ϑ_1' értékét. Így

$$\frac{dz}{dw} = \pi \vartheta_3^2 \sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}$$

A $\pi\vartheta_3^2$ faktor eltávolítása végett új változót vezetünk be.

Legyen ugyanis $\pi \vartheta_3^2 = 2K$ és azután

$$w\,2K = u$$

akkor bevezetve az új változót, a diff. egyenlet következő alakul:

$$\frac{dz}{du} = \sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}$$

a hol $z = \frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}\frac{\left(\frac{u}{2K}\right)}{\vartheta_3\left(\frac{u}{2K}\right)} = sin.am.\,u$

tehát $z = t$, mint u függvényét, nevezzük sin am-

plitudo u-nak, és ez eleget tesz ennek a differenciális egyenletnek. Közelebbi meghatározásául szolgálhat még az, hogy ez a z függvény $u=0$ mellett eltűnik, ezen $\sin am\, 0 = 0$

A sinus am. elnevezés magyarázatát lehet adni a történelmi fejlődéssel. Ha nagyság

$$du = \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \quad \text{akkor ez integrálva}$$

$$u = \int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

Az állandó közelebbi meghatározásánál szolgál az, hogy $u=0$ mellett a z eltűnik, tehát:

$$u = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

Ez pedig egy elsőfajú elliptikus integrál, melyet egy mechanikai problémánál szerepel. Ha nagyság a z helyébe új változót vezetünk be, $z = \sin\varphi$, $dz = \cos\varphi\, d\varphi$ $1-z^2 = \cos^2\varphi$ és $1-k^2z^2 = 1-k^2\sin^2\varphi$, a mi integrálunk lesz

$$u = \int_0^\varphi \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi(1-k^2\sin^2\varphi)}}$$

felsőd és alsók $\cos\varphi$-vel osztva, adódik:

$$u = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \quad ;$$

Egy ilyen integrál szerepel az egyszerű mathem. inga elméletében. Ha ugyanis az egyszerű matk. inga, vagyis egy súlytalan fonalon lógó anyagi pont síkban leng, az a lengő" mozgás ismeretes lesz, ha ismerjük az amplitudot, mint az u idő függvényét. Ezt pedig ép az az egyenlet szolgáltatja, ha u az idő, ζ az amplitudo. Ezt a függvényt innen nevezték el a 18. század mathematikusai

$$\zeta = \operatorname{am} u$$

és mivel $z = \sin \zeta$, adódik, hogy $z = \sin \operatorname{am} u$.

Hogy rendesen kifejthessük a $\sin \operatorname{am} u$ függvény sajátosságait, visszamegyünk azon relatiókra, melyek a függvények négyzetei között állanak fönn. Vegyük ezt a kettőt:

$$\vartheta_0^2 \vartheta_2^2(w) - \vartheta_2^2 \vartheta_0^2(w) + \vartheta_3^2 \vartheta_1^2(w) = 0$$

$$\vartheta_0^2 \vartheta_3^2(w) - \vartheta_3^2 \vartheta_0^2(w) + \vartheta_2^2 \vartheta_1^2(w) = 0$$

Osszuk el az elsőt $\vartheta_2^2 \vartheta_0^2(w)$-vel, akkor lesz:

$$\frac{\vartheta_0^2}{\vartheta_2^2} \frac{\vartheta_2^2(w)}{\vartheta_0^2(w)} = 1 - \frac{\vartheta_3^2}{\vartheta_2^2} \cdot \frac{\vartheta_1^2(w)}{\vartheta_0^2(w)} = 1 - z^2$$

vagyis $= 1 - \sin^2 \operatorname{am} u$;

ez a körülmény arra indít, hogy a trigonometria analogiájára, ezt a kifejezést $\cos^2 \operatorname{am} u$-nak nevez-

zük, tehát $1 - \sin^2 \operatorname{am} u = \cos^2 \operatorname{am} u$.

Ezzel egy új függvényt értelmeztünk, melyet szójelével együtt teljesen értelmez a következő kifejezés

$$\operatorname{cosam} u = \frac{\vartheta_0}{\vartheta_2} \cdot \frac{\vartheta_1\left(\frac{u}{2K}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{u}{2K}\right)}.$$

ez egy állandó factortól eltekintve nem egyéb, mint az f_2 függvény.

Írjuk el a második egyenletet $\vartheta_3^2 \vartheta_0^2(w)$ - vel le

$$\frac{\vartheta_0^2}{\vartheta_3^2} \frac{\vartheta_2^2(w)}{\vartheta_0^2(w)} = 1 - \frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2} \frac{\vartheta_1^2(w)}{\vartheta_0^2(w)} = 1 - \frac{\vartheta_3^2 \vartheta_2^4}{\vartheta_2^2 \vartheta_3^4} \cdot \frac{\vartheta_1^2(w)}{\vartheta_0^2(w)}$$

$$= 1 - k^2 \sin\operatorname{am} u$$

Mert $\frac{\vartheta_2^4}{\vartheta_3^4} = (\sqrt{k})^4 = k^2$

Itt a trigonometriai függvények analogiája nem ad új jelölést ezen utóbbi függvényre nézve. Ezért Jacobi ezt a függvényt $\Delta \operatorname{am} u$ - val jelöli, (jelölvén vele azt a különbséget, mely fennáll az ellipsisbeli és trigonometricus függvények között.) Ennek a függvénynek teljes értelmezése a következő

$$\Delta \operatorname{am} u = \frac{\vartheta_0}{\vartheta_3} \cdot \frac{\vartheta_3\left(\frac{u}{2K}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{u}{2K}\right)} \quad \text{és az} \quad = f_3$$

Ezzel értelmeztük a három Jacobi féle elliptikus függvényt, melyet kissé más alakban fogunk írni. Ugyanis $\sin\operatorname{am}$ - nál szerepel $\frac{\vartheta_2}{\vartheta_3}$,

cosam-nál $\frac{\vartheta_0}{\vartheta_2}$, Δam-nál $\frac{\vartheta_0}{\vartheta_3}$. De tudjuk, hogy $\vartheta_0^4 + \vartheta_2^4 = \vartheta_3^4$ osztva ϑ_3^4-el, lesz

$$\left(\frac{\vartheta_0}{\vartheta_3}\right)^4 + \left(\frac{\vartheta_2}{\vartheta_3}\right)^4 = 1$$

vagyis $\left(\frac{\vartheta_0}{\vartheta_3}\right)^4 = 1 - \left(\frac{\vartheta_2}{\vartheta_3}\right)^4 = 1 - \kappa^2$. Jacobi ezt κ'^2 betűvel jelöli, tehát κ' úgy van értelmezve, hogy

$$\sqrt{\kappa'} = \frac{\vartheta_0}{\vartheta_3}$$

Ebből világos, hogy $\frac{\vartheta_0}{\vartheta_2} = \frac{\sqrt{\kappa'}}{\sqrt{\kappa}}$. Ezeket az új jelöléseket bevezetve, a három Jacobi féle függvény következőleg írható, ha Gudermann rövidített jelöléseit is használjuk

$$\sin\mathrm{am}\, u = \mathrm{sn}\, u = \frac{1}{\sqrt{\kappa}} \cdot \frac{\vartheta_1\left(\frac{u}{2K}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{u}{2K}\right)}$$

$$\cos\mathrm{am}\, u = \mathrm{cn}\, u = \sqrt{\frac{\kappa'}{\kappa}} \cdot \frac{\vartheta_2\left(\frac{u}{2K}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{u}{2K}\right)}$$

$$\Delta\mathrm{am}\, u = \mathrm{dn}\, u = \sqrt{\kappa'} \cdot \frac{\vartheta_3\left(\frac{u}{2K}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{u}{2K}\right)}$$

S megjegyzendő, hogy

$$\mathrm{cn}^2 u = 1 - \mathrm{sn}^2 u$$

$$\mathrm{dn}^2 u = 1 - \kappa^2 \mathrm{sn}^2 u$$

$$\kappa^2 + \kappa'^2 = 1$$

Ezekután a mi diff. egyenletünket minden más alakban tudjuk felírni. Ez az egyenlet volt:

$\frac{dz}{dw} = \sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}$ tehát most a jelölés szerint: $\frac{d\,sn\,u}{du} = cn\,u \cdot dn\,u$

Ez a differenciális összefüggés a három ell. függvény között.

Már az s függvények bevezetésénél láttuk, hogy a $\frac{\vartheta_1(w)}{\vartheta_0(w)}$ hányados hiperbolikus függvény, de nem π és π, hanem 2π és π periodusokkal. Ha w-ról átmegyünk u-hoz, lévén $w = \frac{u}{2K}$, akkor ha w szaporodik 2-vel, u szaporodik $4K$-val, s ha w szaporodik π-vel, u szaporodik $\pi \cdot 2K$-val. Jacobi szerinti jelöléssel $\pi\,2K = 2K'i$ lévén, mondhatjuk, hogy $sn\,u$ bír $4K$ és $2K'i$ periodusokkal, vagyis

$$sn(u+4K) = sn(u+2K'i) = sn\,u$$

Ha w csak 1-el szaporodik a quotiens jelét változtatja s ugyanekkor u szaporodik $2K$-val, azaz $sn(u+2K) = -sn\,u$

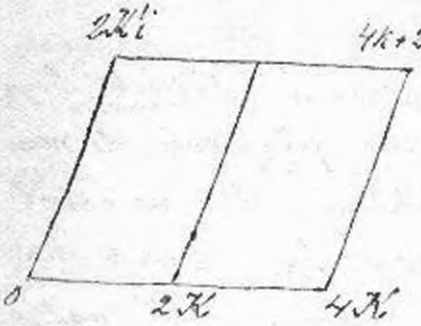
Mivel ϑ_1 páratlan, ϑ_0 páros, következik még, hogy $sn\,u$ páratlan, azaz

$$sn(-u) = -sn\,u$$

Ezt használva, írhatjuk, hogy

$$sn(u+2K) = sn(-u) \quad \text{és} \quad u\cdot

Helyébe $u - 2K$ írva, az egyenlet azt mondja, hogy $sn\,u = sn(2K - u)$ vagyis a $sn\,u$ függvény, mely bír $4K$ és $2K'i$ periodusokkal, a periodusokparallelogrammáján belül minden értékét kétszer veszi fel, s ezen két érték összeg congruens $2K$-val, vagyis a $sn\,u$ függvényre nézve $2K = s$.



A $sn\,u$ maga $4K$ és $2K'i$ periodusokkal bír, de csak előjelét változtatja meg, ha u szaporodik $2K$-val, úgyhogy $sn^2 u\,u = 2^2$ már $2K$ és $2K'i$ periodusokkal bír. Már láttuk, hogy két δ függvény hányadosa biperiodicus függvény 2ω és $2\omega'$ periodusokkal, ha ω és ω' periodusa δ függvényt adta-e hányadosa, a δ függvények négyzeteit kell vennünk. Tehát

$$sn^2 u = \frac{1}{K} \frac{\vartheta_1^2(w)}{\vartheta_0^2(w)}$$

egy biperiodicus függvény, melynek periodusai $2K$ és $2K'i$, vagyis ennek periodusparallelogrammája a $sn\,u$ pparallelogrammájának

fele. A $\sin u$ egy pontban válik másodrendben végtelenné. Célszerű lesz felállítani a $\sin u$ differentiális egyenletét. Legyen $\sin u = z$, akkor

$$\frac{d\xi}{du} = 2z\frac{dz}{du}$$

és így $u = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$ - ban bevezetve ξ-t, mint új integrációs változót lesz:

$$u = \int_0^\xi \frac{1}{2\sqrt{\xi}} \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi)(1-k^2\xi)}} = \int_0^\xi \frac{d\xi}{\sqrt{4\xi(1-\xi)(1-k^2\xi)}}$$

Tehát u, mint ξ függvénye ismét egy elsőfajú elliptikus integrál. A különbség az, hogy a míg a z változós integrálban a gyökjel alatt egy negyedfokú egész racionális függvény áll, addig itt a ξ változónak harmadfokú egész rat. függvénye áll. Vagy kissé másképp írva

$$\left(\frac{dz}{du}\right)^2 = (1-z^2)(1-k^2z^2)$$

Itt tehát az ismeretes $g(z)$ függvény egyedfokú, a mi arra mutat, hogy 2 két determinált pontban válik végtelenné; míg ξ-ra nézve

$$\left(\frac{d\xi}{du}\right)^2 = 4\xi(1-\xi)(1-k^2\xi)$$

Itt tehát $g(\xi)$ harmadfokú, a mi arra mu-

tat, hogy a p. parallelogrammon belül ξ egy másodrendű polussal bir. A

$$\frac{d\xi}{du} = \sqrt{4\xi(1-\xi)(1-\kappa^2\xi)}$$

differentiális egyenlet igy is irható

$$\frac{d\xi}{\sqrt{4\xi}} = \sqrt{(1-\xi)(1-\kappa^2\xi)}\,du$$

vagy $$\frac{-d\xi}{\sqrt{4(1-\xi)}} = -\sqrt{\xi(1-\kappa^2\xi)}\,du$$

vagy végre $$\frac{-\kappa^2 d\xi}{\sqrt{4(1-\kappa^2\xi}} = -\kappa^2\sqrt{\xi(1-\xi)}\,du$$

De tudjuk, hogy $\xi = sn^2 u$

$$1-\xi = 1-sn^2u = cn^2u$$

$$1-\kappa^2\xi = 1-\kappa^2 sn^2u = dn^2u$$

Ezeket betéve és a baloldalakat kissé másképp irva, lesz az első egyenlet $d\sqrt{\xi} = d\,sn\,u = cn\,u\,dn\,u\cdot du$

A második egyenlet

$$d\sqrt{1-\xi} = d\,cn\,u = -sn\,u\,dn\,u\cdot du$$

s végre $d\sqrt{1-\kappa^2\xi} = d\,dn\,u = -\kappa^2 sn\,u\,cn\,u\,du$

Ezen differentiális egyenletekuek tesznek eleget a három elliptikus függvény. Viszont ezek az egyenletek a három elliptikus függvény értelmezésének szolgálhatnak, ha még hozzávesszük, hogy $sn\,0 = 0$ $cn\,0 = 1$ és $dn\,0 = 1$

Vagy ha rövidség kedvéért

$$sn\,u = \lambda \quad , \quad cn\,u = \mu \quad , \quad dn\,u = \nu$$

akkor $\frac{d\lambda}{du} = \mu\nu \quad , \quad \frac{d\mu}{du} = -\lambda\nu \quad , \quad \frac{d\nu}{du} = k^2\lambda\mu$

Ez a három elsőrendű diff. egyenlet teljesen meghatározza ezt a három λ, μ, ν mennyiséget, ha még hozzávesszük a kezdeti feltételeket, melyek szerint, ha $u = 0$, akkor

$$\lambda = 0 \quad , \quad \mu = 1 \quad , \quad \nu = 1$$

Ez a három differentiális egyenlet előfordul a merev test rotatiójának problemájánál.

Ezekben összeállítottuk az elliptikus függvények differentialis vonatkozásait.

Most meg fogjuk határozni a három elliptikus függvény előállításából azoknak értékét a parallelogramma négypontjaiban, illetőleg az oldalak felező-pontjaiban. Láttuk, hogy

$$sn\,u = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\vartheta_1(w)}{\vartheta_0(w)}$$

$$cn\,u = \sqrt{\frac{k'}{k}} \frac{\vartheta_2(w)}{\vartheta_0(w)}$$

$$dn\,u = \sqrt{k'} \frac{\vartheta_3(w)}{\vartheta_0(w)}$$

a hol $\sqrt{k} = \frac{\vartheta_2}{\vartheta_3}$, $\sqrt{k'} = \frac{\vartheta_0}{\vartheta_3}$ és $\mu = w \cdot 2K$, $2K'i = 2K\tau$

Meg fogjuk határozni a függvények értékét $w = \frac{1}{2}$ azaz $u = K$, $w = \frac{\tau}{2}$, azaz $u = K'i$ és $w = \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}$ azaz $u = K + K'i$ mellett. Az előállítás szerint, tekin-

tettel a ϑ függvények tabellájára

$$sn\,K = \frac{1}{\sqrt{k}}\frac{\vartheta_2}{\vartheta_3} = 1\,, \quad cn\,K = \sqrt{\frac{k'}{k}}\,0 = 0\,, \quad dn\,K = \sqrt{k'}\,\frac{\vartheta_0}{\vartheta_3} = k'$$

$$sn\,K'i = \frac{1}{\sqrt{k}}\,i\,e^{-\frac{\tau\pi i}{4}}\,\vartheta_0 : 0 = \infty\,,$$ ép így $cn\,K'i = \infty$ és $dn\,K'i = \infty$, mert nevezőjük eltűnik:

$$sn\,(K+K'i) = \frac{1}{\sqrt{k}}\cdot\frac{e^{-\frac{\tau\pi i}{4}}\,\vartheta_3}{e^{-\frac{\tau\pi i}{4}}\,\vartheta_3} = \frac{1}{k}$$

$$cn\,(K+K'i) = \sqrt{\frac{k'}{k}}\,\frac{-i\,e^{-\frac{\tau\pi i}{4}}\,\vartheta_0}{e^{-\frac{\tau\pi i}{4}}\,\vartheta_2} = -i\,\frac{k'}{k}$$

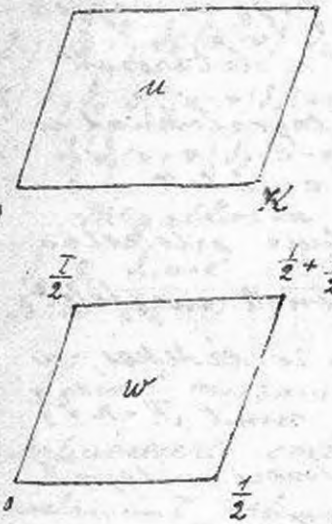
és $dn\,(K+K'i) = 0$

Táblázatban összeállítva:

w	u	sn	cn	dn
$\frac{1}{2}$	K	1	0	k'
$\frac{\tau}{2}$	$K'i$	∞	∞	∞
$\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}$	$K+K'i$	$\frac{1}{k}$	$-i\,\frac{k'}{k}$	0

Most rajzoljuk fel u-re nézve azt a parallelogrammát, melynek csúcspontjai 0, K, $K'i + K$ és $K'i$ és w-re nézve a 0, $\frac{1}{2}$, $\frac{\tau}{2}$ $\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}$ csúcspontokkal bíró parallelogrammát. Ha u a maga síkjában megy 0-tól K-ig, akkor a z-s z értelmezésében helyesen z megy 0-tól 1-ig és pedig egészen határozott úton. Ha u megy K-tól $(K+K'i)$-ig

z megy 1-től $\frac{1}{k}$-ig miközben egy jól meghatározott úton. Ha u megy $(K+K'i)$-től $K'i$-ig, akkor z arra van u megy $\frac{1}{k}$-től ∞-ig. Végre ha u megy $K'i$-től 0-ig z megy ∞-től 0-ig. Ezekből néhány következtetést lehet vonni a K és $K'i$ értelmezését illetőleg. Abból, hogy z a 0-től 1-ig halad, míg u a 0-tól K-ig, következik, hogy



$$\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = K$$

s ezzel értelmeztük K-t, mint egy 0-tól 1-ig vett integrált a z síkon belül. Ugyanígy következik, hogy

$$\int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = K'i$$

mert annyi mint $K+K'i-K$. Ezzel $K'i$ is ugyan így módon van értelmezve. De nyilvánvaló, hogy ez a két mennyiség így is értelmezhető

$$\int_{\frac{1}{k}}^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2}} = -K'$$

és $$\int_0^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = K'i$$

A mitől természetesen következik, hogy a megfelelő integrálok identitásuak. Ezeket a határozott integrálokat complet elsőfajú integráloknak is nevezzük, a mennyiben ezek az említett mechanikai problemánál az amplitudo értékétadják, mely egy egész ide-oda lengésnek megfelel. Ez az előállitása K-nak annyiban is érdekes, a mennyiben K eló volt már állitva, mint $K = \pi \vartheta_3^2$ úgyhogy annak révén a K-k értelmező integrál végtelen sorral van előállitva és fordítva.

Természetes, hogy ezen integrálokat a ξ-val is fel lehet irni pl.

$$\int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{4\xi(1-\xi)(1-k^2\xi)}} = K$$

$$\int_1^{\frac{1}{k^2}} \frac{d\xi}{\sqrt{4\xi(1-\xi)(1-k^2\xi)}} = K'i$$

Hátra van még egy képletrendszer, mely a ϑ függvények összeadási tételeiből ered és a három elliptikus függvény összeadási tételeit foglalja admi. Az említett 12 képlet közül vegyük a következőket:

1.) $\vartheta_3\vartheta_2\vartheta_0(u-v)\vartheta_1(u+v) = \vartheta_0(u)\vartheta_1(u)\vartheta_3 v)\vartheta_2(v) + \vartheta_3(u)\vartheta_2(u)$

melyből a következő három képlet adódik, ha ebben u helyébe rendre $u+\frac{1}{2}$, $u+\frac{\tau}{2}$ és $u+\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}$ írunk:

2.) $\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_0(u-v)\vartheta_2(u+v) = \vartheta_0(u)\vartheta_2(u)\vartheta_0(v)\vartheta_2(v) - \vartheta_3(u)\vartheta_1(u)\vartheta_3(v)\vartheta_1(v)$

3.) $\vartheta_3\vartheta_0\vartheta_3(u-v)\vartheta_0(u+v) = \vartheta_3(u)\vartheta_0(u)\vartheta_3(v)\vartheta_0(v) + \vartheta_2(u)\vartheta_1(u)\vartheta_2(v)\vartheta_1(v)$

4.) $\vartheta_0^2\vartheta_0(u+v)\vartheta_0(u-v) = \vartheta_0^2(u)\vartheta_0^2(v) - \vartheta_1^2(u)\vartheta_1^2(v)$

Megalkotva 1.) és 4.) hányadosait:

$$\frac{\vartheta_3}{\vartheta_0}\frac{\vartheta_2}{\vartheta_0}\frac{\vartheta_1(u+v)}{\vartheta_0(u+v)} = \frac{\vartheta_0(u)\vartheta_1(u)\vartheta_3(v)\vartheta_2(v) + \vartheta_3(u)\vartheta_2(u)\vartheta_0(v)\vartheta_1(v)}{\vartheta_0^2(u)\vartheta_0^2(v) - \vartheta_1^2(u)\vartheta_1^2(v)}$$

Immost visszanyerve a három elliptikus függvényértelmezésére, sorban felül és alul $\vartheta_0^2(u)\vartheta_0^2(v)$-vel, valamint tekintetbe véve az állandó faktorokat, kapjuk, hogy

$$sn(u+v) = \frac{sn\,u\,cn\,v\,dn\,v + sn\,v\,cn\,u\,dn\,u}{1-k^2 sn^2 u\, sn^2 v}$$

Ez a sn összeadási tétele. Épen így adódik 2.) és 4.) még 3.) és 4.) hányadosából a cn. illetőleg dn összeadási tétele:

$$cn(u+v) = \frac{cn\,u\,cn\,v - sn\,u\,sn\,v\,dn\,u\,dn\,v}{1-k^2 sn^2 u\, sn^2 v}$$

$$dn(u+v) = \frac{dn\,u\,dn\,v - k^2 sn\,u\,sn\,v\,cn\,u\,cn\,v}{1-k^2 sn^2 u\, sn^2 v}$$

Némi hasonlóságot találunk ezekben a trigonometriai sinus, cosinus és tangens összeadási tételeivel.

A két első tétel számításában az analogia teljes. A különbség, hogy a trig. sinus és cosinus egész transc. függvények, míg a sn és cn két egész transc függvény hányadosa. A tangens szintén két egész transc. függvény hányadosa, és ismét arról, hogy a tangens függvény összeadási tételében még egy nevező is szerepel, mint a sn és cn összeadási tételeiben. Új valami a dn, mert ennek a trig. függvények elméletében nincsen analogja, mivel itt a felsőben is szerepel k^2, a mely lényegesen jellemzi az elliptikus függvényeket. Ezt a k^2, mely a $\sqrt{k} = \frac{1}{2}$ egyenlettel van értelmezve, nevezzük az elliptikus függvények <u>modulusának</u>. Az elliptikus függvények modulusa tehát itt a dn összeadási tételének felsőjében is szerepel.

Ez a három összeadási tétel hasonló fontos szerepet visel az elliptikus függvények elméletében, mint a trigonometriai függvényeknél. Ezen összeadási tételek bebizonyítása a Hermite féle principiumból ered, tehát ennek alkalmazása. Az összeadási tétel már Eulertől le lett

vezetve. Euler az elsőfajú integrálokból indul ki. Ha t.i.

$$u = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \quad , \quad v = \int_0^t \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

akkor $$u + v = \int_0^z + \int_0^t$$

s most Euler azt mutatja ki, hogy ezen két integrál összegét elő lehet állítani, mint egy elsőfajú elliptikus integrált, pl. így

$$u + v = \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}}$$

a mely s össze van kalva z és t - ből s pedig következőleg

$$z = sn\,u \qquad t = sn\,v$$

$$s = sn\,(u+v)$$

s ha még felírjuk, hogy

$$\sqrt{1-z^2} = cn\,u \quad , \quad \sqrt{1-k^2z^2} = dn\,u$$

akkor az első összeadási tétel közvetlenül adja s-t, t.i.

$$s = \frac{z\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)} + t\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}{(1-k^2)z^2t^2}$$

így írva s-et, most már az összeadási tétel így fogalmazható

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} + \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}}$$

'Ha ez az egyenlet áll a három z, t és s mennyiség között, akkor áll, hogy

$$s = \frac{z\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)} + t\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}{(1-k^2)z^2t^2}$$

Az előbbi egy algebrai relatio z, s és t között és ez teljesen egyértékű az

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} + \int_0^t = \int_0^s$$

transcendens relatióval. Ez volt Euler felfogása: kimutatni, hogy ez a két egyenlet teljesen egyértékű. Egy direct bebizonyitást adott Lagrange.

A sinus összeadási tétele arra tanit, hogy ezen függvény értékét $(u+v)$-re nézve össze tudjuk rakni $\sin u$, $\sin v$, $\sin' u = \cos u \, \Delta u$ és $\sin v$-ből pedig rationálisan. A közönséges trigonometriai sinus összeadási tétele épp úgy van szerkesztve, mint a $\sin u$-é, azaz a sinus értéke $(u+v)$ mellett: $f(u+v)$ rationálisan össze van rakva $f(u)$, $f(v)$, $f'(u)$ és $f'(v)$-ből, kérdés, hogy vajjon létezik e még más ilyen függvény, mely ilyen összeadási tétellel bir? Ez a kérdés arra a feleletre vezet, hogy, ha valamely egyértékű analytikai

függvény csak a végtelenben bir lényegesen singularis helylyel és olyan, hogy összeadási tétele van, mely szerint $f(u+v)$ rationalisan összetehető u, v, $f(u)$, $f(v)$, $f'(u)$ és $f'(v)$-ből, akkor ez a függvény vagy egyszerüen periodikus, vagy biperiodikus, azaz olyan a függvény vagy valódiságban kifejezhető a sinus és cosinus függvénnyel vagy pedig pusztán rationalis természetüvel, mint minden ilyen függvény. Weierstrass azután átalakításban azon feladathoz nyult hi, megszerkesztni minden olyan függvényt, mely csak a végtelenben lényegesen singularis ponttal bir függvényeket, melyek ilyen összeadási tétellel birnak. Ezen feladat discussiójából adódott az elliptikus függvényekhez. Ezután tárgyalá, hogy miként nyerhető az összeadási tétel az elliptikus függvények elméletében, azonban, hogyabból az egész elméletet le lehet vezetni. Összehasonlítá a trigonometriai függvények elméletével, úgy $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ és az elliptikus függvényekre nézve, számos képzést vezetett le az összeadási tételből.

Most az összeadási tételekből még következtetem

le fogjuk vezetni a három elliptikus függvény periodicitási tulajdonságait, a melyeket directe is le lehetett volna vezetni a φ függvényekben, de most egyszerűbben adódnak. Ha az utolsó tabellára való tekintettel a sn összeadási tételében v helyébe $\pm K$ lép, adódik, hogy

$$sn(u \pm K) = \pm \frac{cnu\, dnu}{1 - u^2 sn^2} = \pm \frac{cnu\, dnu}{dn^2 u}$$

vagyis $$sn(u \pm K) = \pm \frac{cnu}{dnu}$$

Éppigy $$cn(u \pm K) = \mp \frac{snu\, dnu\, K'}{1 - k^2 sn^2 u} = \mp \frac{K' snu}{dnu}$$

vagyis $$cn(u \pm K) = \mp \frac{k' snu}{dnu}$$

És $$dn(u \pm K) = \frac{dnu\, k'}{1 - k^2 sn^2 u} = \frac{k'}{dnu}$$

Ez a három képlet mutatja a sn, cn, és dn magatartását, ha u növekedik $\pm K$-val. Most vezessük le azon képleteket, melyek mutatják az elliptikus függvények magatartását, ha u növekedik $(\pm K'i)$-vel. Itt $\frac{\infty}{\infty}$ alakok adódnának, de hamarább érünk célt, ha felállítjuk a következő képletet

$$m(u + K + K'i) = \frac{\frac{1}{k} cnu\, dnu}{1 - k^2 sn^2 u \frac{1}{k^2}} = \frac{1}{k} \frac{dnu}{cnu}$$

és $$cn(u + K + K'i) = \frac{-i \frac{k'}{k} cnu}{1 - i^2 sn^2 u} = \frac{-i k'}{k} \cdot \frac{1}{cnu}.$$

végre $dn(u+K+K'i) = \frac{-k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \frac{1}{k^2} - i\frac{k^2}{k^2}}{1-k^2\operatorname{sn}^2 u} = \frac{ik'}{k}\frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u}$

Most könnyen kapjuk ezekből a hiányzó képleteket, ha u helyébe $(u-K)$-t írunk, akkor adódik, hogy

$$sn(u+K'i) = \frac{1}{k\operatorname{sn} u}$$

$$cn(u+K'i) = -\frac{i}{k}\frac{dn u}{\operatorname{sn} u}$$

$$dn(u+K'i) = -i\frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{sn} u}$$

Ezekből adódik továbbá, hogy

$$\left.\begin{aligned} sn(u+2K) &= -\operatorname{sn} u \\ cn(u+2K) &= -\operatorname{cn} u \\ dn(u+2K) &= \operatorname{dn} u \end{aligned}\right\} \text{ugyanúgy} \left\{\begin{aligned} sn(u+2K'i) &= \operatorname{sn} u \\ cn(u+2K'i) &= -\operatorname{cn} u \\ dn(u+2K'i) &= -\operatorname{dn} u \end{aligned}\right.$$

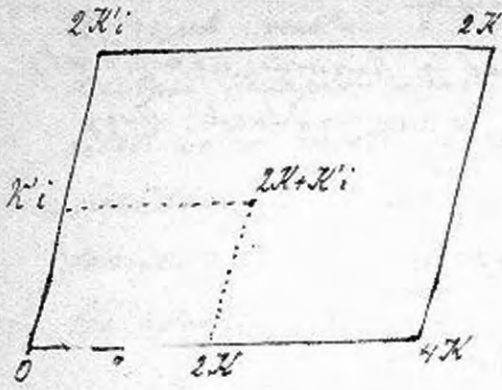
Ezekből pedig közvetlenül folynak a periodicitási tulajdonságok, hogy t.i.

$sn(u+4K) = \operatorname{sn} u$ és $sn(u+2K'i) = \operatorname{sn} u$ vagyis $\operatorname{sn} u$ periódusai $4K$ és $2K'i$

$\operatorname{cn}(u+4K) = \operatorname{cn} u$ és $cn(u+4K'i) = \operatorname{cn} u$, azaz $\operatorname{cn} u$ periódusai $4K$ és $4K'i$; és

$dn(u+2K) = \operatorname{dn} u$ és $dn(u+4K'i) = \operatorname{dn} u$, tehát $\operatorname{dn} u$ periódusai $2K$ és $4K'i$.

Vegyük a $\operatorname{sn} u$ parallelogrammáját, melynek sarkpontjai 0, $4K$, $4K+2K'i$, $2K'i$. A $\operatorname{sn} u$ értelmezéséből világos, hogy a parallelogrammát



ban fekvő nullapontok 0 és $2K$, pólusok $K'i$ és $2K+K'i$; A $sn^2u = \xi$ függvény periodusai $2K$ és $2K'i$, ennek parallelogrammája tehát fele az előbbinek, a $K'i$ a ξ függvénynek másodrendű pólusa. A sn^2u sok vizsgálatnál kényelmesebb, mint az snu. Periodusai ekkép volt i előállítva

$$2K = \pi \vartheta_0^2 \quad \text{és} \quad 2K'i = \pi\tau \vartheta_3^2$$

vagy $\vartheta_3^2 = \left(1 + 2\sum_1^\infty q^{k^2}\right)^2$ értéket beirjuk, a hol $q = e^{\tau\pi i}$, len a két periodus

$$2K = \pi\left(1 + 2\sum_1^\infty e^{k^2\tau\pi i}\right)^2$$

$$2K'i = \pi\tau\left(1 + 2\sum_1^\infty e^{k^2\tau\pi i}\right)^2$$

Ebből a előállításból is látható, hogy a két periodus független egymástól, mert mindkettő külön külön a τ-tól, tehát egymással is függési viszonyban vannak. Ha tehát azzal a feladattal szemben, hogy két tetszőleges w_2 és w_1 periodussal alkossunk bip. függvényeket, a snu

nem szolgáltatja közvetlenül a feladat megoldását, de visszavezethető erre. w_1 és w_2 úgy választandó, hogy $\frac{w_2}{w_1}$-ben az i coefficiense kényszerűen pozitív legyen, vagyis hogy $\chi(\tau) > 0$ legyen. Ha az a va τ, meg tudjuk határozni g-t, és ezzel a λ függvényeket, s ezzel függvényt meg $2K$ és $2K'i$-t, ú.-hiányra állt, hogy

$$\frac{2K'i}{2K} = \tau \quad \text{azaz} \quad \frac{w_2}{w_1} = \frac{2K'i}{2K}$$

vagyis $\frac{w_2}{2K'i} = \frac{w_1}{2K} = \frac{1}{g}$ egy állandó.

úgyhogy

$$2K = w_1 g$$
$$2K'i = w_2 g$$

Ha most $v = \frac{u}{g}$, úgy $sn^2 u = sn^2 gv$ és nyilvánvaló, hogy ha u végigfutja $2K$-val, v végigfutja $\frac{2K}{g}$-vel, vagyis átmegy $(v + w_1)$-be; ha pedig u végigfutja $2K'i$-vel, v végigfutja $\frac{2K'i}{g}$-vel azaz átmegy $(v + w_2)$-be. Ha tehát röviden $sn^2 gv = \lambda(v)$, akkor v és a függvény w_1 és w_2 periódusokkal bír és nyilvánvaló, hogy a paralelogrammán belül csak egy másodrendű pólusa bír. Fel is írhatjuk a λ függvény értékét a paralelogramma három pontjaiban. Ha $u = 0$, $v = 0$ tehát $\lambda(0) = 0$; $\lambda\left(\frac{w_1}{2}\right) = sn^2 K = 1$ $\lambda\left(\frac{w_2}{2}\right) = sn^2 K'i = \infty^2$ azaz másodrendű végtelen nagy,

továbbá

$\lambda\left(\frac{w_1+w_2}{2}\right)$ [illegible] $= \frac{1}{\lambda^2}$. Ez a $\lambda(v)$ tehát egy másodrendű elliptikus függvény, mely az w_1 és w_2 periodusokkal bír, úgy hogy minden biperiodikus függvény, mely w_1 és w_2 periodusokkal bír előállítható, mint $\lambda(v)$ és $\lambda'(v)$ racionális függvénye:

$$B(w_1, w_2) = R(\lambda(v)\lambda'(v))$$

Ezzel az elliptikus függvények elméletét bizonyos pontig is ismertnek tekinthetjük.

Egy kérdés merül fel ezen tárgyalások után. Kimutattuk, hogy ha w_1 és w_2 két adott periodus, meg tudjuk szerkeszteni a λ függvényt és annak segélyével előállíthatjuk az összes bip. függvényeket w_1 és w_2 periodusokkal. De világos, hogy ezzel még mi[illegible] kimutatva, hogy vajjon, ha w_1 és w_2 helyébe w_1' és w_2' periodusok lépnek s ezekkel felépítjük a λ függvényt s ezzel az összes bip. függvényeket, mindig más bip. függvényeket kapunk-e? Vagyis kérdés, miként függ a biperiodikus függvények összessége két adott periodustól, vajjon előfordulhat-e, hogy különböző periodus-párokhoz ugyanaz az elliptikus függvény tartozzék? Hogy ez a kérdés jo-

lehessen határozni m' és n'-t úgy, hogy álljon a következő identitás

$$m w_1 + n w_2 \equiv m' w_1' + n' w_2'$$

az (1) alatti egyenletekből

$$w_1 = \frac{\begin{vmatrix} w_1' & n_1 \\ w_2' & n_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}};$$

$$w_2 = \frac{\begin{vmatrix} m_1 & w_1' \\ m_2 & w_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}}$$

vagyis ha $\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix} = \mathfrak{D}$, akkor

$$w_1 = \frac{n_2 w_1'}{\mathfrak{D}} - \frac{n_1 w_2'}{\mathfrak{D}}$$

$$w_2 = -\frac{m_2 w_1'}{\mathfrak{D}} + \frac{m_1 w_2'}{\mathfrak{D}}$$

Hogy tehát w_1 és w_2 elő legyen állítható, mint w_1' és w_2' hom. lin. függvénye eg. számú coefficiensekkel szükséges, hogy m_1 n_2 m_1 m_2 osztható legyen $\mathfrak{D}$-vel. De akkor m_1 n_2 és n_1 m_2 osztható kell legyenek $\mathfrak{D}^2$-al és így különbségük is. De

sraffirozott ábra ugyanazzal a tulajdonsággal bír, mint az eredeti és ez is parallelogramma. Tehát a geometriai szemlélet is mutatja, hogy a két periodus nem lehet az a lényeges, a mi az elliptikus függvények rendszerét meghatározza. Hogy mi a lényeges, legegyszerűbb módon belátható, ha tisztán arithmetikailag okoskodunk.

Ha w_1 és w_2 a két adott periodus, ezen kívül az elliptikus függvények rendszerének még végtelen sok periodusa van, melyek mind az $mw_1 + nw_2$ alakúnak adva, ha m és n egész számok. Ezek közül épp az w_1 és w_2-t választottuk ki periodusoknak. Mi ezeknek kiváló tulajdonsága? Nézzük az analog kérdést az egyszerűen periodusos függvénynél, pl. a sin periodusa 2π, de minden $2k\pi$ is periodus, ha k egész szám. De azért 10π pl. nem mondható sin periodusának, mert különben kevesebb periodusa volna sin-nak és pedig 10π, 20π, 30π, ... és a negativok, míg 2π, 4π, 6π, stb. nem volna periodus. Ellenben, ha azt mondjuk, hogy 2π a sin periodusa, ezzel jellemeztük az összes periodusait,

A bip. függvényeknél is úgy van választva w_1 és w_2, hogy minden más periodus előállítható, mint ennek a kettőnek homogen lineáris függvénye egész számú coefficiensekkel. Az ilyen periodus-párt, melyből minden más periodus eren a módon összetehető", nevezzük <u>primitiv periodus-párnak</u>. Az egyszerűen periodusos függvényeknél a primitiv periodus egyértékűleg meg van határozva csak egy tétetik, w. Kérdés, hogy áll a dolog a bip. függvényeknél? Két tetszőleges periodus w_1' és w_2' így állítható elő":

$$\left.\begin{aligned} w_1' &= m_1 w_1 + n_1 w_2 \\ w_2' &= m_2 w_1 + n_2 w_2 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Kérdés miképp kell megválasztani ezt a négy egész számot, hogy w_1' és w_2' mintén primitiv peeiodus-pár legyen? vagyis mi a feltétele annak, hogy egy tetszőleges periodus $m w_1 + n w_2$ elő legyen állítható, mint w_1' és w_2' hom. lin. függ. ényel:

$$m w_1 + n w_2 = m' w_1' + n' w_2' \qquad ((1))$$

Nyilvánvaló, hogy erre nézve szükséges, hogy w_1 és w_2 (1) ből kiszámított értékeit betéve ((1)) bal-oldali kifejezésébe, a jobboldalihoz hasonló ki-fejezést kapjunk, azaz, ha m és n adva, meg

posult, geometriailag is be lehet látni, ha tekintetbe vesszük a pparallelogrammahálózatot, mely lefed az egész síkot. Ennek az a jellemző tulajdonsága, hogy minden parallelogrammában csak egy pont van, mely congruens a sík egy tetsző legyen pontjával. De ezt a tulajdonságot megőrzik, ha a pparallelogrammák tetszőleges átalakításoknak vetjük alá. Pl. minden parallelogrammából levágjuk ugyanarról a helyről ugyanazt a darabot s azután a szaggatott ábrát tekintjük periodus ábrának. Nyilvánvaló, hogy ez ugyanazokkal a tulajdonságokkal bír, mint az eredeti parallelogramma, csakhogy ezeknél elvész az a kényelem, mely pl. a parallelogramma nyújtott a periodicitás evidentiába helyezésével. De az utóbbi kényelem megtartásával is tudjuk átalakítani a hálózatot. Vágjunk le a parallelogrammából egy háromszögalakú részt és ezt csatoljuk a másik oldalhoz, akkor az így keletkezett

$m_1 n_2 - n_1 m_2 = \delta$ és $\delta : \mathfrak{D}^2$ csak akkor lehet egész számú, ha $\mathfrak{D} = \pm 1$. Tehát az első szükséges feltétel az, hogy $\mathfrak{D}^2 = 1$ legyen. Nézzük, hogy mi lesz az identitással, ha ez a feltétel teljesül. Behelyettesítve $(m w_1 + n w_2)$-be az w_1 és w_2 fenti értékeit, lesz

$$m \frac{n_2 w_1' - n_1 w_2'}{\mathfrak{D}} + n \frac{-m_2 w_1' + m_1 w_2'}{\mathfrak{D}} =$$

$$= \frac{1}{\delta} \{ (m n_2 - n m_2) w_1' + (n m_1 - m n_1) w_2' \}$$

Látható, hogy ha $\mathfrak{D} = \pm 1$, az identitás tényleg fennáll. Ez a feltétel nemcsak szükséges, hanem elegendő is. Ha tehát w_1 és w_2 az (1) alatti egyenletrendszerrel van összekapcsolva w_1' és w_2'-el, mely egyenletrendszer determinánsa ± 1, akkor és csak akkor lesz w_1' és w_2' egy primitiv periodusrendszer. Szerű lesz most az analysis és arithmetika számos fejezetében használatos jelölést bevezetni. Ha x_1 és x_2 két tetszőleges tehát határozatlan mennyiség, s ha $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, négy állandó x megalkotjuk a következő kifejezéseket

$$y_1 = \alpha x_1 + \beta x_2$$

$$y_2 = \gamma x_1 + \delta x_2$$

vagyis, ha x_1 és x_2-ből ezen 4 állandó segé-

ámegyünk azoknak homogén lin. kifejezéseire, azt próbáljuk mondani, hogy x, és x_2-re egy homogén lin. substitutiót alkalmaztunk vagyis hogy y_1 és y_2 az x_1 és x_2-ből egy homogén lin. substitutióval származott. Az ilyen lin. hom. substitutio teljesen meg van határozva, ha ismerjük a négy állandó értékét és azoknak helyét a rendszerben. Az ilyen substitutiót röviden így jelöljük:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

Az $\alpha\delta - \beta\gamma$ determinánst nevezzük a substitutio determinánsának. Csak olyan substitutióval foglalkozunk, melyeknek determinánsa nem 0, mert ha 0, akkor a két egyenlet nem független egymástól. Ezt a jelölést felhasználva így is fogalmazhatjuk az előbbi számítások eredményét: ha w_1 és w_2 egy primitiv perióduspár, akkor minden más primitiv perióduspár az w_1 és w_2-ből egy hom. lin. egész substitutióval származik, melynek determinánsa ± 1. Még csak arra nézve kell megállapodnunk, hogy minő befolyása van a substitutióra annak, ha $D = +1$ vagy $D = -1$. Az w_1, w_2 eredeti

periodusparra azt a kikötést tettük volt, hogy $\mathfrak{J}\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right) > 0$, tehát ha $\frac{\omega_2}{\omega_1} = \tau = \alpha + \beta i$, legyen $\beta > 0$. Ha tehát egy primitiv periodusparra keresünk, mely képes legyen az ω_1, ω_2 párt helyettesiteni összes számitásainkban, természetes, hogy ω_1', ω_2'-re nemcsak azt fogjuk kikötni, hogy primitiv legyen, hanem azt is, hogy az $\frac{\omega_2'}{\omega_1'} = \tau'$ hányadosban is i-nek együtthatója lényegesen pozitiv legyen, ez csak úgy lehet majd ezzel is megalkotni a $\wp n t$. Láttuk mi ennek feltétele, hogy $\mathfrak{J}(\tau') > 0$ legyen. Ha

$$\omega_1' = m_1 \omega_1 + n_1 \omega_2$$
$$\omega_2' = m_2 \omega_1 + n_2 \omega_2$$

akkor,

$$\tau' = \frac{m_2 \omega_1 + n_2 \omega_2}{m_1 \omega_1 + n_1 \omega_2} = \frac{m_2 + n_2 \tau}{m_1 + n_2 \tau}$$

Az ilyen substitutiót, a melyek τ szerint, ha ω_1 és ω_2 egy hom. lin. substitutiok szerint, nevezzük tört lin. substitutiónak, mely τ-ra vonatkozik, vagy nevezzük pozitiv substitutiónak is. Bontsuk fel most τ'-t valós és képzetes részre, ha $\tau = \alpha + \beta i$

$$\tau' = \frac{m_2 + n_2(\alpha + \beta i)}{m_1 + n_1(\alpha + \beta i)} = \frac{(m_2 + n_2\alpha + n_2\beta i)(m_1 + n_1\alpha - n_1\beta i)}{(m_1 + n_2\alpha)^2 + \beta^2 n_1^2}$$

$$= \frac{\text{valós rész} + i\,[-(m_2 + n_2\alpha)\beta n_1 + n_2\beta(m_1 + n_1\alpha)]}{(m_2 + n_2\alpha)^2 + \beta^2 n_1^2},$$

tehát $\operatorname{sgn} \mathfrak{F}(\tau') = \operatorname{sgn} \mathfrak{D}_p = \operatorname{sgn} \mathfrak{D} \cdot \mathfrak{F}(\tau)$

Ez az eredmény egész általánosan áll, ha $n, n_2 m, m_2$ tetszőleges valós számok. A mi esetünkben $\mathfrak{D} = \pm 1$ ha tehát $\mathfrak{D} = -1$ volna, lenne $\operatorname{sgn} \mathfrak{F}(\tau') \neq \operatorname{sgn} \mathfrak{F}(\tau)$ de $\operatorname{sgn} \mathfrak{F}(\tau) > 0$, tehát ha $\mathfrak{D} = -1$, akkor $\operatorname{sgn} \mathfrak{F}(\tau') < 0$ es igy a $\mathfrak{D} = -1$ eset nem használható.

Ha $\mathfrak{D} = 1$, akkor $\operatorname{sgn} \mathfrak{F}(\tau') = \operatorname{sgn} \mathfrak{F}(\tau)$. Azaz, ha w_1 és w_2 - ből egész hom. lin. substitutio révén keletkezik w_1' és w_2', mely substitutionak determinansa $+1$, akkor w_1', w_2' nemcsak primitiv, hanem olyan is, hogy a quotientsben i coefficiense positiv. Az ilyen

substitutióról, melynek determinansa 1, azt mondjuk, hogy unimodularis substitutio és pedig akár homogen akár tört substitutióval van dolgunk.

Az a körülmény, hogy $\mathfrak{D} = 1$, magával hozza, hogy ez a négy szam n_1, m_1, n_2, m_2 nem bir közös osztóval. Mert $m_1 n_2 - n_1 m_2 = 1$ lévén, ez a közös sztó csak ± 1 lehet, mert osztania kell 1-et is, tehát nincs közös osztó. Ez azért nevezetes, mert a tört lin. substitutio független egy ilyen közös osztótól, mivel azt felső és alsóban el lehet hagyni. A mi esetünkben, mikor a substitutio uni-

modularis, egy ilyen szerző nem lehetséges, csak -1. Ha tehát csupán a tört substitutióval dolgozunk ezen visszafelé a hom. lin. substitutió minden teljesen meghatározva, mert mind a négy mennyiséget (-1)-el lehet szorzani, a nélkül, hogy a projectiv substitutio megváltoznék. Tehát uni-modularis substitutio esetén a projectiv substitutio nem határozza meg teljesen a homogén substitutiót, hanem, ha adva az $\left|\begin{matrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{matrix}\right|$ tört substitutio, ehhez két hom. lin. substitutio lehetséges, t. i.:

$$\begin{pmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \begin{pmatrix} -m_1 & -n_1 \\ -m_2 & -n_2 \end{pmatrix}$$

De ez az előjel ambiguitás nem akkor kényeges nehézséget, hisz' ha w_1 és w_2 egy primitiv perioduspár, $-w_1$, $-w_2$ is az, ha tehát $+w_1$, w_2 helyett $-w_1$, $-w_2$-öt veszünk, az átmenet a két substitutio között helyre van állitva. Ép ezért a következőkben az előjel ambiguitástól el fogunk tekinteni, s a hányadosra vonatkozó projectiv substitutióval fogunk dolgozni, azért is, mert a függvényekben a τ quotiens szerepel.

Ezt a projectiv substitutiot így fogjuk jelölni

$$\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \qquad ad - bc = 1.$$

a, b, c, d pozitiv v. negativ egész számok. Ezt substitutiot röviden <u>modul substitutiónak</u> is nevezik. Igyekezzünk magunknak ezen modulsubstitutiók összetételét tárgyalását nevezni.

Képezzük, hogy egy ilyen modulsubstitutióval

$$\tau_1 \qquad \frac{a_1\tau + b_1}{c_1\tau + d_1} \qquad (1)$$

tömtünk τ τ_1-hez. Akkor τ_1 ismét egy irracionalis szám, melyben τ coefficiensei kétségtelen pozitivak. Egy átmehetünk ismét a τ_1-től a egy modulsubstitutio segélyével a τ_2-höz:

$$\tau_2 = \frac{a_2\tau_1 + b_2}{c_2\tau_1 + d_2} \qquad (2)$$

Kérdés, hogy milyen kapcsolat van az eredeti τ és ezen τ_2 között? Célszerű lesz itt egy kényelmes jelölést bevezetni a modulsubstitutiók jelölésére, irván az (1) alatti complet kifejezés helyett röviden

$$\tau_1 = S_1\tau$$

a hol tehát S_1 felfogható, mint egy functionjel.

Az S_1 tehát charakterizálja azt a modulusmeghatározást, melynek coefficienseit a_1, b_1, c_1, d_1, ezt röviden így is írjuk, hogy

$$S_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$$

Ugyanígy írható a (2) alatti substitutio helyett röviden

$$\tau_2 = S_2 \tau_1$$

a hol

$$S_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$$

Keresve a vonatkozást τ_2 és τ között, mi lévánvalóan nem kell egyebet tennünk, mint a $\tau_2 = S_2 \tau_1$ egyenletbe behelyettesíteni a τ_1 értékét, tehát

$$\tau_2 = S_2 S_1 \tau = \frac{a_2 \frac{a_1\tau + b_1}{c_1\tau + d_1} + b_2}{c_2 \frac{a_1\tau + b_1}{c_1\tau + d_1} + d_2} = \frac{(a_2a_1 + b_2c_1)\tau + a_2b_1 + b_2d_1}{(c_2a_1 + d_2c_1)\tau + c_2b_1 + d_2}.$$

Látjuk tehát, hogy a τ_2 és τ - val szintén egy projectiv substitutio áll elő van összekapcsolva, melynek determinánsa

$$\begin{vmatrix} a_2a_1 + b_2c_1 & a_2b_1 + b_2d_1 \\ c_2a_1 + d_2c_1 & c_2b_1 + d_2d_1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} = 1$$

ha t.i. az első determinans sorait componálgjuk a

a másodiken $\mathfrak{C}$ oszlopaival. Mondhatjuk tehát, hogy ha először τ-ra alkalmazzuk egy substitutiót, S_1-et, s az így nyert τ_1-re egy S_2 mod. substitutiót, a keletkező τ_2 az eredeti τ-val szintén egy modul substitutio által van összekapcsolva. Az ilyen substitutiót azt mondjuk hogy S_1 és S_2-ből van összetéve vagy componálva. Jelöljük $S_2 S_1$-vel, a hol a kiejtésben a sorrend jobbról balra halad. Ezen componált substitutio schemája

$$\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 a_1 + b_2 c_1 & a_2 b_1 + b_2 d_1 \\ c_2 a_1 + d_2 c_1 & c_2 b_1 + d_2 d_1 \end{pmatrix}$$

A compositio tehát ugyanazon törvény szerint történik, mint két determinans szorzása. Kérdés, minő befolyással van a substitutio eredményére a sorrend megfordítása. A compositio szabályai szerint

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_2 + b_1 c_2 & a_1 b_2 + b_1 d_2 \\ c_1 a_2 + d_1 c_2 & c_1 b_2 + d_1 d_2 \end{pmatrix}$$

Tehát más eredmény adódik, ha S_1-et componáljuk S_2-vel, mint midőn S_2-et componáljuk S_1-el, azaz

$$S_2 S_1 \neq S_1 S_2.$$

tehát a modulsubstitutiók componálása nem commutativ művelet. Világos, hogy akárhányszor ismételve a compositiót, az eredmény mindig modulsubstitutio lesz. De itt egy fontos észrevételt kell tennünk. Alkalmazzuk először S_1-et, erre S_2-őt és az eredményre S_3-at, akkor

$$S_3(S_2 S_1) = S_3 \tau_1, \quad \text{de} \quad \tau_2 = S_2 \tau_1 \quad \text{tehát}$$
$$= S_3 S_2 \tau_1 = S_3 S_2 \cdot \tau_1 = S_3 S_2 S_1 \tau$$

Tehát a compositio nem commutativ, hanem associativ.

$$S_3(S_2 S_1) = (S_3 S_2) S_1$$

Tehát akárhány modulsubstitutiók componálunk, mindig modulsubstitutio adódik eredményül. Az modulsubstitutiok összességének ezt a tulajdonságát, melyet úgy is kifejezhetünk, hogy a compositio ezt az összességet mindig magamagába viszi át, úgy fogalmazzuk, hogy a modulsubstitutiók összesége csoportot alkot. A csoportokra nézve néhány észrevételt teszünk. Megjegyzendő, hogy a modulsubstitutio, mint operatio itt csak paradigmaként szolgál egy általános operatio helyett. Képzeljük hogy volna bizonyos operatiók sora, melyeknek definitiójában bennfoglaltatik a [illegible] hogy

BOLYAI TUDOMÁNYEGYETEM
KÖNYVTÁR
L. r.
Kolozsvár.

tehát két ily operatiót componálni lehet bizonyos törvény szerint, melynek associationak kell lennie. Ha ezen operatiók összessége azzal a tulajdonsággal bir, hogy nem viszen ki ebből az összességből, hanem componálások alkalmazásával minden ugyanannak az összességnek egy individuumához vezet, azt mondjuk, hogy az operatiók összessége csoportot alkot. A modulusbstitutiókat, mint olyanokat, tehát az operatiók összességét értelmeztük csoportnak. Néha célszerűbb az operatiók helyett azoknak eredményeit venni, alkalmazva egy bizonyos substratumra. Tehát pl. a helyett, hogy az S_1 abstract schemáit vennők, véggyük a $x_1 - x_2$, mely keletkezik a x-ből az S_1 operatio alkalmazásával. Ezen x-k összessége, melynek a x- [illegible] a projectiv substitutio alkalmazásával keletkezik, magukban véve szintén csoportot alkotnak. Tehát nemcsak az operatiókat, hanem azok eredményeit is, alkalmazva bizonyos substratumra, szintén csoportnak tekinthetjük. Ha egy ilyen x-ra egy modulusbstitutiót alkalmazunk, ismét egy x-t kapunk. Ez az értelmezés annyiban fontos, hogy ennek segélyé-

vel be lehet látni, hogy a csoport fogalma az arithmetika elemeiben már előfordul. Így a pozitiv egész számok sora egy értelemben csoportot alkot. Ha t.i. az összeadás mint műveleti operatiónak pl. az 1-el való szaporitást, tehát az $x+1$ operatiót ezt ismételten alkalmazzuk akárhányszor, mindig egy sorozat valamely tagját kapjuk. Ha még a negativ számokat vesszük, az $x+1$ operatióhoz hozzájárul az $x-1$ operatio. Ez a két operatio nemcsak asszociativ, hanem commutativ is. De vehetjük még az ab operatiót is, ez a vesz ki az egész számok sorozatából, általában minden számtest ilyen csoport-tulajdonsággal bir.

A mi mostani substitutióink csoportja még egy nevezetes tulajdonsággal bir, mely nem közvetlen következménye a csoport fogalmának. Hogy ezt kimutathassuk, még egy fogalmat, t.i. az inverz operatio fogalmát kell bevezetnünk. Ha az S_1 substitutióval átmegyünk x-től τ_1-hez, azaz, ha

$$\tau_1 = S_1 \tau = \frac{a_1 \tau + b_1}{c_1 \tau + d_1}$$

akkor ez egyenletből ki lehet számitani τ-t a τ_1-el,

$$\tau_1(c_1\tau + d_1) = a_1\tau + b_1$$

$$\tau(c_1\tau_1 - a_1) = b_1 - d_1\tau_1$$

tehát $$\tau = \frac{-d_1\tau_1 + b}{c_1\tau_1 - a_1}$$

Ezen substitutio schemája:

$$\begin{pmatrix} -d_1 & b_1 \\ c_1 & -a_1 \end{pmatrix}$$

Ezt a substitutiót nevezzük az eredeti substitutio inversének. Nyilvánvaló, hogy ez is modulsubstitutio, mert coefficiensei egész számok és determinánsa

$$(-d_1)(-a_1) - b_1c_1 = a_1d_1 - b_1c_1 = 1$$

Ezzel nyertük a modulsubstitutiók csoportjának egy másik nevezetes tulajdonságát. Nemcsak két tetszőleges modul substitutio compositiója szolgáltat modulsubstitutiót, hanem minden modulsubstitutio inverze maga is mod. substitutio. Ez nem következik a csoport általános fogalmából. Ha pl. a pozitiv egész számok csoportját vesszük az $(x+1)$ substitutióra való ismétlésekkel, akkor ennek inverz substitutiója $(x-1)$ nem foglaltatik a csoportban, mert ezzel átmehetünk a negativ számokhoz is. A permutatiók csoportja véges csoport, mert az összes

elemek száma véges, n elem permutációinak száma $n!$. Ezek a permutációk csoportot alkotnak, mert egy permutációra permutációt alkalmazva, ismét permutációt kapunk. A véges csoportoknál a csoport fogalmában feltesszük, hogy az inverz substitutió szintén a csoporthoz tartozik. A végtelen csoportokban nem foglaltatik benne az inverz operatio felléptetése.

Az inverz operatiót másképp is értelmezhetjük. Ha t.i. τ-ra alkalmazzuk az $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$ substitutiót, keletkezik a τ_1 $\quad T_1 = S_1 \tau$

Ha, azután τ_1-re alkalmazzuk S_1 inverz operatióját tehát τ-ra alkalmazzuk az

$$\begin{pmatrix} -d_1 & b_1 \\ c_1 & -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$$

operatiót, kapjuk magát τ-t. Tehát valamely substitutio után annak inverzét alkalmázva, adódik az identitás. Kényelmes lesz az identitási substitutio jelölésére egy jelet vezetni be. Ha a fenti két substitutiót az általános szabály szerint componáljuk, adódik

$$\begin{pmatrix} -d_1 & b_1 \\ c_1 & -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

ezért ezt az identicus substitutiót egységnyi substitutiónak is nevezzük, s jelöljük röviden 1-el. Az inverz substitutio tehát az eredetivel componálva, az identicus substitutiót adja. Az S_1 jelölés analogiája szerint az inverz substitutióra nézve egy jelölést vezethetünk be, a mennyiben ezt a

$$\begin{pmatrix} -a_1 & b_1 \\ c_1 & -a_2 \end{pmatrix} S_1 = 1$$

egyenletből kiszámítva képezhetjük, tehát

$$\begin{pmatrix} -a_1 & b_1 \\ c_1 & -a_1 \end{pmatrix} = S^{-1}$$

Ez az S_1^{-1} szolgál tehát az S_1 inverz substitutiójának jelölésére. Ezen jelölés szerint:

$$S_1^{-1} S_1 = 1$$

Vegyük az inverz substitutio inverzét, ez $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$ lévén következik, hogy

$$(S^{-1})^{-1} = S_1$$

vagyis annyi, mint az eredeti substitutio. Ez a jelölés tehát annyiban célszerű, hogy úgy lehet vele számolni, mint valóságos hatványnyal.

Legyen most S egy tetszőleges modulsubstitutio és componáljuk ezt magával j-ával, akkor per analogiam

írhatjuk, hogy $SS = S^2$ annál is inkább, mert S magamagával commutabilis. Épen így

$$S.S^2 = SSS = S^3 \text{ stb.}$$

világos tehát, hogy mit kell érteni S^n alatt, t. azt jelenti, hogy a modulusbehelyettesítés n-szer magamagával componáltatik, ez is benn van a modulusbehelyettesítésben. Ugyanígy ha S^{-1} magamagával componáltatik, $S^{-1}S^{-1} = S^{-2}$, tehát S^{-2} az S^{-1} substitutio második hatványa. Ép így értelmezhető általánosan S^{-n}, a hol $n > 0$. Most mutassuk ki, hogy S^{-n} inverz substitutója S^n-nek. Ha $n = 3$

$$S^{-3}S^3 = S^{-1}S^{-1}S^{-1}SSS = S^{-1}S^{-1}SS = S^{-1}S = 1$$

mert az egyenletsorozat második részében a két belső tag 1-et ad s épígy a harmadik részében, úgyhogy marad $S^{-1}S = 1$, n-ről $(n-1)$-re való hátravetkeztetéssel ép így lehet kimutatni, hogy $S^{-n}S^n = 1$.

A modulusbehelyettesítések csoportjának egy nevezetes tulajdonsága van. Vegyünk egy tetszőleges modulusbehelyettesítést

$$\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d} = S\tau \qquad ad - bc = 1$$

Képzeljük el a τ síkát. Világos, hogy valós τ-hoz valós τ' tartozik, mert abcd egész számok. Kép-

zeljük τ-t felbontva valós és képzetes részeire $\tau = p+qi$
a hol $q>0$, akkor

$$\tau' = \frac{a(p+qi)+b}{c(p+qi)+d} = \frac{[(ap+b)+aqi][cp+d-cqi]}{(cp+d)^2+q^2}$$

$$= \frac{(ap+d)(cp+d)+acq^2+i[adq-bcq]}{(cp+d)^2+q^2}$$

de $ad-bc=1$, tehát

$$\tau' = \text{valós rész} + i\,\frac{q}{(cp+d)^2+q^2}$$

ni substitutionunk révén τ-nak i coefficiense q átváltozott $\frac{q}{(cp+d)^2+q^2}$ kifejezésre, vagyis τ' i coefficiense egyenlő előjelü τ i coefficiensével. Ha tehát τ, a mint azt eleinkül fogva feltettük, a felső félsikon marad, τ' is a felső félsikon marad és ha τ eredetileg az alsó félsikon van, τ' is itt van. A modulsubstitutionak tehát az a tulajdonsága van, hogy a valós tengelyt magamagába és minden felső magamagába transformál.

Számítsuk ki most $d\tau'$-et

$$d\tau' = \frac{(c\tau+d)a - (\tau+b)c}{(c\tau+d)^2}\,d\tau = \frac{1}{(c\tau+d)^2}\,d\tau$$

Legyen $\tau' = p'+q'i$, akkor

$$q' = \frac{q}{(cp+d)^2+q^2}$$

és az utóbbi egyenlet így írható

$$d(p'+q'i) = \frac{1}{[c(p+qi)+d]^2}(dp+i\,dq)$$

És i helyett $-i$ írva lesz

$$dp'-i\,dq' = \frac{1}{[c(p-qi)+d]^2}(dp-i\,dq)$$

És szorozva e két egyenlet megfelelő oldalait egymással, adódik, hogy

$$dp'^2+dq'^2 = \frac{dp^2+dq^2}{[c(p+d)^2+q^2]^2}$$

Ezt összevetve a $q' = \frac{q}{(cp+d)^2+q^2}$ egyenlettel, adódik hogy $\frac{dp'^2+dq'^2}{q'^2} = \frac{dp^2+dq^2}{q^2}$

Bár ha τ complex mennyiség egy modulcsoport substitutióiból áll, akkor a $\frac{dp^2+dq^2}{q^2}$ kifejezés a substitutió folytán nem változik. Ha tehát a τ complex mennyiségre alkalmazzuk a modulcsoport összes substitutióit, akkor annak a τ-nak összes transformált értékei, de ha megalkotjuk a fenti differentiális kifejezést, akkor ez az összes transformált mennyiségekre nézve ugyanazzal az értékkel bír,

vagyis ez a kifejezés a modulcsoportra nézve egy invarians és pedig egy differentiális invarians.

Célszerű lesz most egy analogiára ügyelni. A biperiodicus függvények elméletében az u és $u + m w_1 + n w_2$ értékeket aequivalens értékeknek neveztük. Az u-ról $(u + m w_1 + n w_2)$-re való átmenetet úgy foghatjuk fel, mint egy substitutiót, csakhogy ezen

$$u' = \frac{\alpha u + \beta}{\gamma u + \delta} \quad \text{substitutióban} \quad \begin{matrix} \alpha = 1, & \gamma = 0 \\ \delta = 1, & \beta = n w_1 + m w_2 \end{matrix}$$

Ha $n + w_1 = \Omega_1 u$ felfogva azt, mint operatiót, akkor az előbb bemutatott symbolicus jelölésével $\Omega_1^n u$ abban áll, hogy n-szer egymásután alkalmazzuk az operatiót, tehát

$$\Omega_1^n u = u + n w_1$$

Az Ω_1 operatio inverse $\Omega_1^{-1} u = u - w_1$, mert a kettő egymásután alkalmazva, az identitás operatiót adja. Tehát $\Omega_1^{-n} u = u - n w_1$, vagyis általánosan

$$\Omega_1^n u = u + n w_1 \qquad \text{ha } n \geq 0 \text{ egész szám.}$$

Épenigy $u + w_2 = \Omega_2 u$ és

$$\Omega_2^n u = u + n w_2 \qquad n \geq 0 \text{ egész szám}$$

A legáltalánosabb substitutio, mely összeköti a congruens helyeket, ebből a két substitutióból

van componálva következőleg

$$\Omega_1^m \Omega_2^n u = u + m w_1 + n w_2$$

Nyilvánvaló, hogy minden substitutiók összessége csoportot alkot, mely magában foglalja az összes operatiók inverset. De ezen csoport még egy nevezetes tulajdonsággal bír, a mennyiben t. i. a componálás sorrendje itt közömbös, mert pl.

$$\Omega_1^m \Omega_2^m u \; \Omega_1^{m'} \Omega_1^{n'} u = u + (m+m') w_1 + (n+n') w_2$$

Ez a csoport tehát azzal a tulajdonsággal bír, hogy substitutiói commutativek, ellentétben a modulcsoporttal. Az ilyen csoportot nevezzük Abel féle csoportnak, vagy biperivdicus csoportnak is. A bip. csoport a fenti Rettőn kívül még egy nevezetes tulajdonsággal bír, melyet most ki fogunk fejteni. Itt két operatio szerepel Ω_1 és Ω_2 és ez a két operatio olyan, hogy a csoport minden operatióját ebből a Rettőből össze tudjuk rakni. Ez annak a csoportnak különös tulajdonsága, azt fogjuk mondani, hogy a biperivdicus csoport is Ω_1 és Ω_2 substitutiokból, mint fundamentalis substitutiokból össze van téve. Ω_1 és Ω_2 a bip. csoport fundamentalis substitutiói. –

Láttuk, hogy a per. parallelogramma hálózat egy tetszőleges parallelogrammája azzal a tulajdonsággal bir, hogy minden síkbeli ponthal correspondeál a per. parallelogrammán belül egy pont, melyből azután bip. csoport valamely substitutiója által kelthetett. Ebben a p. parallelogrammában, röpen evidentiába is vannak helyezve a fundamentalsubstitutiók, t. i. a parallelogramma szembenfekvő oldalai épp a fundamentál substitutiók alkalmazásával mennek át egymásba.



Ha az u síkban veszünk egy kis vonalelemet pl. épen a figyelembe vett parallelogrammán belül, és ha $u = \xi + \eta i$, akkor a vonalelem hossza $(d\xi^2 + d\eta^2)^{\frac{1}{2}}$. Ha erre a vonalelemre a bip. csoport egy tetszőleges substitutiójál alkalmazzuk, azaz u-t által átmegyünk $u + m w_1 + n w_2 = u'$-be, akkor a megfelelő vonalelem lesz $(d\xi^2 + d\eta^2)^{\frac{1}{2}}$, mert $m w_1 + n w_2$ állandó, mely a differentiálásnál kiesik. Ez az analogia a modul csoportok és a bip. csoport közöti. Itt is van egy differentiá-

lis invarians $(d\xi^2+d\eta^2)^{\frac{1}{2}}$ vagy ha úgy tetszik, $d\xi^2+d\eta^2$, mely nem változik a bip. csoport substitutionak alkalmazásával. Ennek következménye, hogy a bip. csoport alkalmazásával minden görbe egy vele congruens görbébe megy át. A modul csoportnál nem az ívelem, hanem $\frac{dp^2+dq^2}{q^2}$ az invarians. De még egy analogia mérül fel. A bip. csoport két fundamentalis csoportból van összerakva. Kérdés, hogy létezik-e talán a modulcsoportra nézve is hasonló valami, azaz: két ily substitutio, melyből az összes többiek összerakhatók, s ha igen, le-e a modulcsoport ezzel nézve is analog valami, mint bip. csoportnál a periodus parallelogramma hálózat. A bip. csoportnál a két fundamentalis substitutio képviselő parallelogrammát a bip. csoport alaptartományának nevezzük. Ha a modul substitutiókra nézve azt kérdezzük, hogy létezik-e ilyen fundamentalis substitutiorendszer, ezt kérdést úgy fogjuk geometriailag fogalmazni, hogy létezik-e a síkban ilyen fundamentalis tartomány? Ha $\frac{\alpha z+b}{cz+d}$ $ad-bc=1$ egy modulsubstitutio, ez a z-ra vett felezőlek alkotják az első félsíkra vonatkozik, úgy hogy az alsó

felsíkot teljesen mellőzhetjük. Kérdés tehát, hogy tudunk-e a felső τ felsíkon belül egy tartományt megjelölni, mely azzal a tulajdonsággal bír, hogy egy tetszőleges τ-hoz csak egy pont tartozzék ebben a tartományban, mely a τ-ból valamely modulusbstitutio alkalmazásával keletkezett. Ezt a tartományt ismét a modulusbstitutio alaptartományának fogjuk nevezni. Azt fogjuk vizsgálni, hogy létezik-e ez az alaptartomány s hogy miképp lehet azt felállítani. Ehhez gett néhány észrevételt kell előrebocsátani a quadratikus formák néhány tulajdonságára vonatkozólag. Vegyünk egy quadratikus formát

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$$

a hol A, B, C tetszőleges valós számok. Ezt a formát nullává téve, adódik $\frac{y}{x}$ számára a következő egyenlet

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{2B}{C}\frac{y}{x} + \frac{A}{C} = 0$$

a miből

$$\frac{y}{x} = -\frac{B}{C} \pm \frac{\sqrt{B^2 - AC}}{C^2}$$

Azaz $\frac{y}{x}$ valós, ha $B^2 - AC \geq 0$, képzetes, ha $B^2 - AC < 0$. Ez utóbbi esetben nem létezik olyan reális $\frac{y}{x}$,

a melyre nézve a quadratikus forma eltűnik, akkor a folytonos függvény tulajdonságaiból következik, hogy a négyzetes forma akárhol változat jegyet, vagyis akkor a négyzetes forma x és y valós értékei mellett mindig definita forma. Csak ily definitis formákkal fogunk foglalkozni. A definita forma előjelét megkapjuk, ha x és y nak speciális értéket tulajdonítunk pl. $x=1$, $y=0$, akkor tehát

$$\operatorname{sgn}(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2) = \operatorname{sgn} \cdot A$$

Erről az A-ról egyszersmindenkorra feltesszük, hogy positiv, s így a formának mindig positiv előjele van, úgy hogy $B^2 - AC < 0$ lén a forma positiv definita forma. Világos, hogy $A > 0$, lévén, minthogy $AC - B^2 > 0$, a C is positiv, $C > 0$, mert ha $C < 0$ volna, $AC - B^2 < 0$ volna, a mi ellentétben áll a feltétellel. Positiv definita formában tehát A és C egyszerre positiv.

A formák tanában fontos a formák transformátiója lineáris substitutiók segélyével. Képzeljük x és y helyett bevezetve x' és y'-et a következő hom. lin. substitutiókat:

$$x = \alpha x' + \beta y'$$
$$y = \gamma x' + \delta y'$$

A hol $\alpha\beta\gamma\delta$ tetszőleges valós számok és $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$

A substitutio után lesz

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = A'x'^2 + 2B'x'y' + C'y'^2$$

a hol $A' = A\alpha^2 + 2B\alpha\gamma + C\gamma^2$, $B' = A\alpha\beta + B(\alpha\delta + \beta\gamma) + C\gamma\delta$

és $C' = A\beta^2 + 2B\beta\delta + C\delta^2$

Ezek a transformált coefficiensek a ez utóbbi egyenletek a transformatio egyenletei. Tésnek, mit lehet ezen transformált formáról állítani a forma definita vagy indefinitára nézve. A forma discriminansa

$$-\Delta' = B'^2 - A'C' = -\begin{vmatrix} A' & B' \\ B' & C' \end{vmatrix}$$

Le $\Delta' = \begin{vmatrix} \alpha(A\alpha + B\gamma) + \gamma(B\alpha + C\gamma) & \alpha(A\beta + B\delta) + \gamma(B\beta + C\delta) \\ \beta(A\alpha + B\gamma) + \delta(B\alpha + C\gamma) & \beta(A\beta + B\delta) + \delta(B\beta + C\delta) \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A\alpha + B\gamma & A\beta + B\delta \\ B\alpha + C\gamma & B\beta + C\delta \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}^2 \cdot \Delta$$

vagyis: $\Delta' = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}^2 \cdot \Delta$

azaz a transformatio discriminansa annyi, mint az eredeti forma discriminansa szorozva a substitutio determinansának négyzetével. Ha tehát $\alpha\beta\gamma\delta$ valósak, akkor D' előjele megegyezik D előjelével azaz pozitiv. Tehát positiv definitu forma a transformatio után is positiv definitu forma lesz. Azonkivül, lévén

$$A' = A\alpha^2 + 2B\alpha\gamma + B\gamma^2$$

látható, hogy az A' nem egyéb, mint az eredeti forma értéke $x = \alpha$, $y = \gamma$ mellett, vagyis egy valós x, y értékpár mellett, tehát $A' > 0$. Épenigy C' annyi, mint az eredeti forma értéke az $x = \gamma$, $y = \delta$ valós értékpár mellett tehát $C' > 0$. Feltettük, hogy $\alpha\beta\gamma\delta$ egész számok és hogy $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. A mi esetünkben tehát $D' = D$. Minden négyzetes formákat pedig két eredeti formából unimodularis és egész számú substitutióval keletkeznek, az eredeti formával proprie equivalens formáknak neveztetik. A kapcsolat is meg van az equivalens formák és modulsubstitutiók között, mert az x, y-ra alkalmazott substitutiók modulsubstitutiók. — Lagrange szerint már most ezen

aequivalens formák közül kiválasztunk egy speciális tulajdonsággal bíró formát; kiválasztjuk először azokat, melyekben x^2 coefficiense a legkisebb. Ilyenek mindenesetre léteznek, mert A mindig pozitiv és soha sem 0 s igy ezen A mennyiségeknek van egy alsó határuk. Legyen ez a legkisebb A röviden $\bar{A}$. Ezen végtelen sok forma közül, melyekben az első coefficiens $\bar{A}$, most kiválasztjuk azt, melyben C coefficiense a legkisebb $\bar{C}$, ez a forma legyen

$$\bar{A}x^2 + 2\bar{B}xy + \bar{C}y^2$$

Ezt nevezzük az eredeti forma reducált formájának. Erre a reducált formára nézve nyilvánvaló, hogy

1) $\bar{A} \leqq \bar{C}$. Mert ha $\bar{A} > \bar{C}$ volna, akkor alkalmazva az

$$x = -y'$$
$$y = x'$$

megengedett transformatiót, melynek determinansa 1, a forma lesz:

$$\bar{C}x'^2 - 2\bar{B}x'y' + \bar{A}y'^2$$

de ez aequivalens az eredetivel, melyben $\bar{C} < \bar{A}$ volna ez pedig ellenkezik ama feltétellel, hogy a forma első coefficiens a legkisebb legyen; tehát szükségképen $\bar{A} \leqq \bar{C}$.

I.

2.) $2|B| \geqq A$. Hogy ez. belássuk, alkalmazzuk a fenti formára a következő substitutiót

$$x = x' - \mu y'$$
$$y = y'$$

a hol μ egy tetszőleges szám, akkor a transformált forma lesz

$$A(x' - \mu y')^2 + 2B(x' - \mu y')y' + Cy'^2$$
$$= Ax'^2 + 2(B - \mu A)x'y' + (C + \mu^2 A - 2B\mu)y'^2$$

Az A ugyanaz mint az eredeti formában, az utolsó coefficiens pedig, mivel feltételünk szerint az eredeti forma reducált, nem lehet kisebb az eredeti forma C coefficiensénél, azaz áll, hogy

$$C - 2B\mu + A\mu^2 \geqq 0$$

a miből $-2B\mu + A\mu^2 \geqq 0$ azaz nem negativ. Minthogy μ egy tetszőleges egész szám, nyilvánvaló, hogy $A > 0$, tehát $A\mu^2 > 0$ lévén, a fenti egyenlőtlenség csak úgy állhat, ha

$$2|B| \geqq A. \qquad \text{II.}$$

Az I. és II. alatti tulajdonságot veszszük a reducált forma értelmezésül, azaz azt mondjuk, hogy egy forma reducált forma, ha ezzel a két tulajdonsággal bir.

Erre a reducált formára vezessünk le egy egyszerű egyenlőtlenséget. A forma diszkriminánsa

$$-D = B^2 - AC$$

és $D > 0$. Ha a forma reducált, az I. egyenlőtlenség szerint

$$A^2 \leqq AC$$

s a második szerint

$$4B^2 \leqq A^2 \leqq AC \quad \text{a miből következik,}$$

hogy

$$3B^2 \leqq AC - B^2$$

tehát

$$|B| < \sqrt{\frac{D}{3}}$$

Ez az együtt egyenlőtlenség, mely minden reducált formára áll. Mivel továbbá

$$A^2 \leqq AC \quad \text{azaz} \quad A^2 \leqq AC - B^2 + B^2$$
$$\leqq D + \frac{D}{3}$$

következik a másik ilyen egyenlőtlenség, mely szerint

$$A \leqq \sqrt{\frac{4D}{3}}$$

Kérdés most, léteznek-e több reducált forma, mely egy és ugyanazzal a formával aequivalens. Ezt fogjuk mondani, hogy az összes formák, melyek egy és ugyanazzal a formával aequivalensek proprius értelemben, egy osztályt vagy classist alkotnak. Ezen classis fogalmában benn van a substitutiók

csoportjának megoszlást, azaz ha két forma egy harmadikkal aequivalens, egymás közt is aequivalensek.

Most azt akarjuk vizsgálni, hogy egy bizonyos classison belül létezik-e több reducált forma? Tegyük fel, hogy volna kettő

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = (A\ B\ C)$$

és $$A'x^2 + 2B'xy + C'y^2 = (A'\ B'\ C')$$

az arithmetikában használatos jelölés szerint. Mindkét forma reducált lévén

$$A \leqq C \qquad 2|B| \leqq A$$

$$A' \leqq C' \qquad 2|B'| \leqq A'$$

Mintán ugyanabba a classisba tartoznak, egymásba átvihetők egy modulussubstitutióval. Legyen az

$$x = \alpha x' + \beta y'$$

$$y = \gamma x' + \delta y'$$

melynek révén ekkor az első forma átmegy a második-ba azaz

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} (A\ B\ C) = (A'\ B'\ C')$$

De a transformatio általános képletei szerint

$$A' = A\alpha^2 + 2B\alpha\gamma + C\gamma^2$$

$$B' = A\alpha\beta + B(\alpha\delta + \beta\gamma) + C\gamma\delta$$

Most a substitutio minőségét kell meghatározni, mely

szükséges akkor, hogy ez az átmenet lehetséges legyen.

$$AA' = (A\alpha + B\gamma)^2 + (AC - B^2)\gamma^2$$

$$= (A\alpha + B\gamma)^2 + D\gamma^2 \quad \text{a miből következik,}$$

hogy $$AA' > D\gamma^2$$

de mivel a két forma reducaált

$$A \leqq \sqrt{\frac{4D}{3}}$$

$$A' \leqq \sqrt{\frac{4D}{3}}$$

mert a D mindkét formára ugyanaz. És most

$$AA' \leqq \frac{4D}{3}$$

Összehasonlítva ezt az előbbi egyenlőtlenséggel, tekintettel arra, hogy γ egész szám, ez csak úgy állhat, ha vagy 1. $\gamma = 0$

2. $\gamma = \pm 1$

Az 1. esetben, lévén $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, $\alpha\delta = 1$, de akkor

$$\alpha = \delta = \pm 1$$

mindkettőt ugyanazzal az előjellel véve; ebből pedig következik, hogy

$$A' = A$$

$$B' = \pm A\beta + B$$

De $|B'| \leqq \frac{A'}{2}$, azaz $|B'| \leqq \frac{A}{2}$, azonkívül $|B| \leqq \frac{A}{2}$

De $B' - B = \pm A\beta$, a miből összevetéssel következik, hogy

szükségképen vagy $\beta = 0$

" $\beta = \pm$

a.) Ha $\beta = 0$, akkor $B' = B$ és mivel $D = AC - B^2 = A'C' - B'^2$, következik, hogy $C' = C$, azaz ebben az esetben $(A, B, C) \equiv (A' B' C')$

vagyis ekkor csak egy reducált forma van a classisban b.) ha $\beta = \pm 1$, akkor $B' - B = \mp A$, de $|B'| < \frac{A}{2}$, $|B| < \frac{A}{2}$ tehát $B' = -B = \pm \frac{A}{2}$, és mivel

$AC - B^2 = A'C' - B'^2$ Következik, hogy

$C = C'$ vagyis ebben az esetben

az egyik forma $Ax^2 \pm 2Axy + Cy^2$

a másik $Ax^2 \mp 2Axy + Cy^2$

vagyis mindkettőben $2|B| = A$

tehát ekkor két különböző reducált forma létezik a classisban, a melyek azonban csak a második coefficiens előjelében különböznek egymástól. Ezzel el van intézve a $\gamma = 0$ eset

β.) $\gamma = \pm 1$ Ekkor

$$A = A\alpha^2 \pm 2B\alpha + C$$

de $A \leqq C$, $A' \leqq C'$ Most különbséget kell tenni A és A' között nagyságra nézve. Tegyük föl, hogy A' a kisebbik, azaz $A' \leqq A$, akkor $A \leqq C$ lesz

$\cdot \equiv A \equiv C$, tehát $A' \equiv C$ úgy hogy

$$A\alpha^2 \pm 2B\alpha \equiv 0$$

De tudjuk, hogy $2|B| \equiv A$, tehát

$$A\alpha^2 \pm 2B\alpha \equiv 0$$

s a kettőt összevetve következik, hogy

$$A\alpha^2 \pm 2B\alpha = 0$$

De akkor $A' = C$ és mivel A feltevés A' és C között következik, hogy $A = C$, vagyis:

$$A = A' = C$$

Mivel $A\alpha^2 \pm 2B\alpha = \alpha(A\alpha \pm 2B) = 0$, következik, hogy vagy

$$\alpha = 0$$

$$A\alpha \pm 2B = 0$$ ha még hozzávesszük, hogy $2|B| \equiv A$, következik, hogy $\alpha = \pm 1$, tehát két eset lehetséges a.) $\alpha = 0$

b.) $\alpha = \pm 1$.

a.) ha $\alpha = 0$, akkor mivel $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ következik, hogy $-\beta\gamma = 1$, s ekkor

$B' = -B + C\gamma\delta$ vagyis $C = A$ lévén

$B' + B = \pm A\delta$, de $|B| \leq \frac{A}{2}$ és $|B'| \leq \frac{A}{2}$

következik, hogy szükségképpen

vagy $\delta = 0$

" $\delta = \pm 1$

Ha $\delta = 0$, akkor $(A'B'C') \neq (A,B,C)$ mert akkor a

$B' + B = Cy\delta = \pm C\delta$ sert beléve

$$(-B \pm C\delta)^2 - AC' = B^2 - AC$$

vagy kiszorzva

$$B^2 \mp 2B\delta C + A^2 - AC' = B^2 - AC$$

és osztva A-val, lesz

$$C' = \mp 2B\delta + C \qquad \text{de } C = A \text{ tehát}$$

$$= 2(A \mp B\delta)$$

De $B' = -B \pm A\delta$ vagyis $B\delta = -B' \pm A\delta^2$ és

mivel $\delta^2 = 1$ $\qquad = -B'\delta \pm A$

tehát $C' = \pm 2B'\delta$; de mivel $(A'B'C')$ reducált alak következik, hogy $C' \geqq A'$ azaz kell, hogy legyen $\pm 2B'\delta \geqq A'$ a mikor $\delta = \pm 1$, úgy hogy $2|B'| \geqq A'$ de mivel a forma reducált forma, áll másfelől, hogy $A \geqq 2|B'|$, tehát

$$2|B'| = A'$$

Hátra van még az az eset, midőn

$\alpha = \pm 1$, azaz $\alpha^2 = 1$ Ekkor a $\gamma = \pm 1$ esetre levezetett egyenletből következik, hogy $2B = \mp A\alpha$ úgy hogy ekkor $\qquad B' + B = A\alpha\beta$

de $|B| \geqq \frac{A}{2}$ $\quad |B'| \geqq \frac{A'}{2}$ tehát vagy $\beta = 0$, vagy $\beta = \pm 1$ Ha $\beta = 0$ akkor $B' + B = 0$, azaz

$(A'B'C') = (A, -B, C)$ mint az előbbi esetben egyenlően.

Ha $B = \pm 1$, akkor $B' + B = \pm A$ és mivel $|B'| \leqq \frac{A}{2}$ és $|B| \leqq \frac{A}{2}$, következik, hogy

$$|B| = \frac{A}{2} \quad \text{és} \quad |B'| = \frac{C}{2}$$

Összefoglalva tehát az összes eseteket, mondhatjuk, hogy két egymástól különböző reducált alak csak akkor lehetséges, ha vagy $A = C$, vagy $2|B| = A$. Különben mindig csak egy reducált alak létezik a classisban, és ez a discussio megtanított arra, hogy miképp kell az egyes esetekben az átmenetet az egyik alaktól a másikhoz létesíteni. Ha ezen két feltétel egyike sem teljesül, azaz $A \neq C$ és $A \neq 2|B|$ akkor a classison belül a reducált forma egyértékűlleg meg van határozva.

Most áttérünk az ezen eredményekből levezethető következtetésekre. Alkalmazzuk az imént kimondott tételt, mely szerint egy positiv definita négyzetes formával aequivalens formák között csak egy reducált forma létezik, kivéve ha $A = C$ és ha $2|B| = A$, – a modulsubstitutiók elméletére. Legyen

$$\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

egy modulsubstitutio, melyben $\tau = \xi + \eta i$, akkor

$$\tau' = \frac{[a(\xi+\eta i)+b][c(\xi+\eta i)+d]}{[c(\xi+\eta i)+d][c(\xi+\eta i)+d]}$$

a miből τ' valós része

$$R(\tau') = \frac{ac(\xi^2+\eta^2) + (ad+bc)\xi + bd}{c^2(\xi^2+\eta^2) + 2cd\xi + d^2}$$

és

$$|\tau'|^2 = \frac{a^2(\xi^2+\eta^2) + 2ab\xi + b^2}{c^2(\xi^2+\eta^2) + 2cd\xi + d^2}$$

Vizsgáljuk meg most a következő formát

$$x^2 + 2xy\xi + \eta^2(\xi^2+\eta^2)$$

a melyben tehát $A = 1$, $B = \xi$, $C = \xi^2+\eta^2$

Ennek discriminansa $\vartheta = \xi^2 + \eta^2 - \xi^2 = \eta^2 > 0$

Ez a forma tehát positiv definita forma, melyre alkalmazhatom az előbb levezetett tételt. Alkalmazva az

$$x = dx' + by'$$
$$y = cx' + ay' \qquad ad - bc = 1$$

mondott substitutiót, lesz a forma

$$[d^2 + 2\xi cd + c^2(\xi^2+\eta^2)]x'^2 + [bd + \xi(ad+bc) + (\xi^2+\eta^2)ac]2x'y' +$$
$$+ [b^2 + 2ab\xi + (\xi^2+\eta^2)a^2]y'^2$$

Általánosan szólva az $A \neq C$ és $A \neq 2|B|$ esetekben ezen abcd számokat csak egy módon tudjuk úgy választani, hogy a transformált forma reducált legyen, vagyis hogy

$$|\tau'|^2 \geqq 1$$

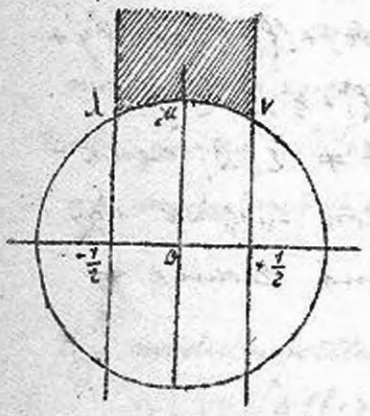
azaz $\left|\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right| \geqq 1$ legyen.

Más szóval, mivel a $2|B| < A$ úgy is írható, hogy $\left|\frac{B}{A}\right| < \frac{1}{2}$ legyen s mivel $\left|\frac{B}{A}\right|$ annyi, mint τ' jelös részének abszolut értéke, mondhatjuk, hogy ha τ egy tetszőleges értéke a felső τ félsíktól, meg tudjuk határozni az $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ modulushelyettesítéstől egy, de csakis egy τ'-nek olyan úgy, hogy teljesüljön a következő két egyenlőtlenség

$$\left|\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right| \geqq 1$$

és $$-\frac{1}{2} \leqq R\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) \leqq \frac{1}{2}$$

Ha az egyenlőtlenségi jelek állanak, csak egy modulushelyettesítés létezik, kétség csak akkor forogh at fenn, ha valamelyik egyenlőtlenségi jel is áll. Mit jelent az geometriailag? azt, hogy a felső τ síkban felvett τ-nak ezen substitutio értelmében megfelelő τ' egyfelől kívül fekszik az egységsugárú körön, másfelől $a = -\frac{1}{2}$, és $+\frac{1}{2}$, pontokban emelt merőlegesek által bezárt csík felső felében, tehát benn fekszik a rajzolt csíkterületben, és ez a terület nevezi a modulusportra nézve ugyanazt a szerepet viseli, mint a perio-



parallelogramma a kép. csoportra nézve, mert minden síkbeli z-nak csak egy megfelelő pontja fekszik ezen a területen belül, kivétel csak a terület határvonalán lehetséges, ha t.i. egyik egyenlőségi jel is áll. Ez a terület úgy foglalható fel, mint egy háromszög, melynek szögpontjai 1, i és ∞i, azon a képzetes tengely egy elem távoli pontja, két oldala párhuzamos és merőleges a valós tengelyre, a harmadik az egységnyi sugarú kör, mely derékszög alatt metszi a valós tengelyt.

Hogy az analogia teljes legyen, még egy megállapodást kell tennünk. A periodus-parallelogrammához ugyanis csak két oldalt, két nem párhuzamos oldalt számítottunk hozzátartozónak, hogy ne legyen a p. parallelogrammában két aequivalens pont. Ugyanezt mondhatjuk a modulsubstitutio megfelelő ábrájánál is, ha megvizsgáljuk a kivételes esetek geometriai jelentését.

Láttuk, hogy az $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ alakra nézve kivételes esetek voltak ezek:

$$A = C \qquad \text{és} \qquad 2|B| = A$$

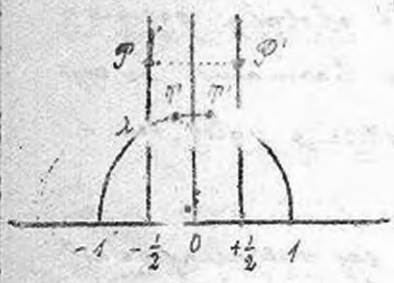
akkor az alak $x^2 + 2xy\,k(\tau') + y^2[\tau']^2$

Tehát $A = C$ megfelel az egyik egyenlőségi jelnek, $2|B| = A$ a másik egyenlőségi jelnek. E szerint kivételes

esete ben az eredeti formával aequivalens redukált forma csak ez lehet

$$Ax^2 - 2Bxy + Cy^2$$

azonban ezen kivételes esetekben a τ-val aequivalens és a háromszög határvonalán fekvő két τ' érték csak a valós rész előjelében különbözik egymástól.



Tehát a párhuzamos oldalak egyikén fekvő P-nek megfelel az éppen szemben fekvő P' és a közöven fekvő T-nek az éppen szemben fekvő T'. Ha tehát a háromszög határára nézve hasonló megállapodást akarunk tenni, mint a p. parallelogrammra nézve, egyszerűen a két aequivalens τ'-ből egyet kifogunk választani és pedig azt, melynek valós része negativ, vagyis csak a kettősen kihúzott oldalakat vesszük, mint a háromszöghöz tartozókat. Ez így értelmezett tartományon belül kivétel nélkül csak egy pont correspondeál a sík egy tetszés szerinti más pontjával. Ebben a felfogásban tulajdonképen nem háromszög, hanem négyszöggel van dolgunk, a minőt a p-nél, a hol a két körív találkozik, mintán



egy szögpont van, t.i. a $\lambda\mu\nu\omega_3$ négyszög egy szögpontja. Ebben a négyszögben a λ-nál és ν-nél fekvő szögek $\frac{2}{3}$ nagyságúak, μ-nél π és ω_3-nál σ a szög. Ez a négyszög a képzetes tengely által két symmetrikus részre bomlik fel, t.i. két háromszögre, úgy, hogy $\mu\omega_3$ ezen négyszögnek diagonálisa.

Kérdés most, vajjon lehet-e ebből ugyanazokat a következtetéseket levonni, melyek a p. parallelogramma alapján a bip. csoportra nézve levonhatók. Különösen fontos az a körülmény, hogy a p. parallelogramma ismétlésével az egész sík be lett fedve. Az ismétlés alatt jelenti, hogy egy ilyen p. parallelogrammából kiindulva a p. parallelogramma összes pontjaira alkalmazzuk az

$$u + m w_1 + n w_2$$

csoport összes substitutióit, miáltal a parallelogramma-hálózatot nyerjük.

Az másik nevezetes körülmény az, hogy az a két substitutio, a melyek a p. parallelogramma szemben-fekvő oldalait egymástól származnak, az egész csoportnak fundamentális substitutiói.

Ezen két tulajdonságnak analogját keressük tehát a modulcsoportra nézve.



Vegyünk a megállapított értelemben határolt F_0 alaptartományon belül egy τ' értéket és kérdezzük, hogy mi lesz a

$$\sigma = \frac{a\tau' + b}{c\tau' + d} \qquad ad - bc = 1$$

mod. substitutióval nyert σ által lefedett terület, vagyis mi lesz ezen substitutio értelmében az F_0-nak megfelelő tartomány? Világos, hogy a megfelelő ábra conformis, mert a substitutio egy tört lineáris függvény, mely monog. Tudjuk tehát, hogy a megfelelő ábrában a megfelelő szögek ugyanakorok. Még csak az oldalakat kell ismerni. Az F_0 négyszög oldalait vonalnak tekintsük az egyenes vonalú oldalakat végtelen nagy sugarú körívnek tekintve, s ezek a körök mind derékszög alatt metszik a valós tengelyt. Kérdezzük egész általánosan, hogy mi lesz egy a valós tengelyt derékszög alatt metsző kör leképezése egy ily mod. substitutio segélyével? Ha $\tau = \xi + \eta i$, akkor egy tetszőleges kör egyenlete

$$(\xi - m)^2 + (\eta - n)^2 = r^2$$

s ha azt akarjuk, hogy a kör a valós tengelyt derék szög alatt metsse, centruma a valós tengelyen kell fekü

jék, azaz $n=0$, tehát egy ilyen kör egyenlete:

$$\xi^2+\eta^2-2m\xi+m^2=r^2$$

vagy kissé általánosabban írva

$$a(\xi^2+\eta^2)+2b\xi+c=0$$

ebbe az alakban az $a=0$ speciális feltétel mellett beletartozik az egyenes, mint a kör határesete. – Ez tehát azon görbe, melynek leképezését keressük egy modulsubstitutio segélyével. Tét általánosan véve a dolgot, keresni fogjuk a görbe leképezését egy

$$\tau'=\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}$$

substitutióval, a hol $\alpha\delta-\beta\gamma=1$, de $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ tetszőleges valós számok. Láttuk, hogy ha $\tau=\xi+\eta i$, és $\tau'=\xi'+\eta' i$, akkor:

$$\xi'=\frac{\alpha\gamma(\xi^2+\eta^2)+(\alpha\delta-\beta\gamma)\xi+\beta\delta}{\gamma^2(\xi^2+\eta^2)+2\gamma\delta\xi+\delta^2}$$

és $$\xi'^2+\eta'^2=\frac{\alpha^2(\xi^2+\eta^2)+2\alpha\beta\xi+\beta^2}{\gamma^2(\xi^2+\eta^2)+2\gamma\delta\xi+\delta^2}.$$

A fenti körnek megfelelő görbe egyenletét kapjuk, ha ξ és η helyett ξ' és η'-t írunk, tehát a megfelelő görbe

$$a(\xi'^2+\eta'^2)+2b\xi'+c=0$$

vagy $$(\xi^2+\eta^2)[a\alpha^2+2b\alpha\gamma+c\gamma^2]+\xi[a2\alpha\beta+2b(\alpha\delta+\beta\gamma)+$$
$$+c\delta^2]+$$

$+ a\beta^2 + 2b\beta\delta + c\delta^2 = 0$

ez a kör leképezése a fenti substitutióval. Ez is egy kör, ugyanolyan mint az eredeti, csakhogy a, b, c helyébe más állandók lépnek. Ez a kör tehát minden derékszög alatt metni a valós tengelyt. Sokat fogunk ezek szerint, hogy egy a valós tengelyt derékszög alatt metsző kör egy tört substitutióval, melynek valós coefficienseiből alkotott determinansa 1, egy szintén derékszög alatt metsző körbe transformálódik.

Ennek alapján mondhatjuk, hogy ha az F_1 négyszöget egy tetszőleges modulussubstitutióval leképezzük, szintén egy négyszöget kapunk, mely a valós tengelyt derékszög alatt metsző körökből van határolva. Kérdés most, vajjon lehetséges-e, hogy az így szerkesztett négyszögek egymást átfedjék. Minden négyszögnek megfelel egy modulussubstitutió, pl. az

$$S_1 = \frac{a_1\tau' + b_1}{c_1\tau' + d_1}$$

mod. sub.-nak megfelel egy F_1, az

$$S_2 = \frac{a_2\tau' + b_2}{c_2\tau' + d_2}$$

mod. sub.nak megfelel egy F_2 négyszög, azaz:

$F_1 = S_1 F_0$, $F_2 = S_2 F_0$ stb.

Tegyük föl, hogy ez a két négyszög F_1 és F_2 egymást átfödi s egy közös részszel bir, melynek egy pontja τ_1. Akkor a τ felfogva, mint F_1 egyik pontja, megfelel F_0-ben egy τ'_1 pontnak, úgy hogy

$$\tau = S_1 \tau'_1$$

és τ felfogva, mint F_2 pontja, megfelel F_0-ban a τ'_2 pontnak, úgy hogy $\tau = S_2 \tau'_2$

Világos, hogy τ'_1 nem lehet identicus τ'_2-el, mert ha $\tau'_1 = \tau'_2$ volna a közös rész minden pontjára nézve, akkor F_1 identicus volna F_2-el, mert akkor végtelen sok τ' érték nézve $S_1 \tau' = S_2 \tau$ volna. Tehát τ'_1 és τ'_2 különböznek, ha F_1 nem esik össze F_2-vel. Ebből következik, hogy a τ pontnak az F_0 belül két különböző τ' értéke felel meg mo. substitutio egyikével a mi ki van zárva. Tehát ezek háromszögek nem födik át egymást, hanem csak egy oldal mellé rakódva, a felső felületek folytonosan folytatódnak.

Most még csak a második analogiára nézve kell tájékozódnunk, mely szerint a bip. csoportban a két fundamentális substitutióval a két párhuzamos oldal egymásból származott, s a mely két fundamentális substitutióból van összerakva az egész

bip. csoport.

Tehát vizsgáljuk, miképen viheto át a négyszög egyik oldala a másikba. Vegyük a $1\infty i$ és $r\infty i$ oldalakat, - az elsőn fekvő 1 pontnak megfelel a másodikban a szembenfekvő 2 pont, a kettő csak a valós rész előjelében különbözik egymástól. Ha 1 pontnak megfelel τ, akkor a megfelelő érték 2-ben $\tau+1$.



A τ-ről $(\tau+1)$-re való átmenetel megfelel egy mozaut-substitutionak

$$\tau+1 = \frac{a\tau+b}{c\tau+d}, \text{ a hol } a=1,\ b=0,\ c=0,\ d=1.$$

Legyen az

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e.-cu substitutio revén keletkezik egymásból a négyszög két szembenfekvő oldala.

Vegyük most a 1μ és $\mu\nu$ oldalakat. Ezeken két megfelelő pontot 3 és 4, melyek tehát symmetrice-sum fekszenek a képzetes tengelyhez. Lássuk, minő substitutioval keletkezik ez a két pont egymásból? Legyen $\tau = \xi + \eta i$, akkor $\xi^2+\eta^2 = 1$, mert τ az egységsugarú körön fekszik. A correspondeáló pont $\tau' = -\xi$. De a mi esetünkben $\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\xi+\eta i} = \frac{\xi-\eta i}{\xi^2+\eta^2} = \xi - \eta i$

és most látjuk, hogy $\tau' = -\frac{1}{\tau}$, Tehát a $\rho\sigma\tau$ ív egy pontja keletkezik a $\lambda\mu\nu$ ív megfelelő pontjából által, hogy τ helyébe $-\frac{1}{\tau}$ írunk. Ez is egy másnemű substitutio gyanánt fogható fel, t. i.

$$\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \qquad \begin{matrix} a=0 & b=1 \\ c=-1 & d=0 \end{matrix}$$

Ez a substitutio tehát

$$S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

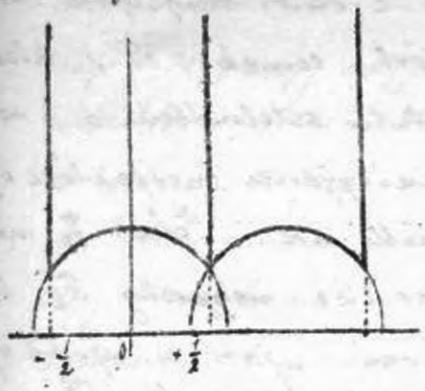
Ez tehát transformálja a négyszög harmadik oldalát a negyedikbe. Látjuk, hogy itt is, mint a bip. csoportnál, van két modul substitutio, melyeknek alkalmazásával a négyszög megfelelő oldalai egymásba mennek át. De egy lényeges különbség van a kétfele tartomány között. Láttuk, hogy a periodus parallelogramma, megfelelő oldalainak egyesítése után, egy torus vagyis gyűrű felületbe ment át tehát egy háromszorosan összefüggő felületbe. Meg fogunk ismerni oly $F(\tau)$ függvényt, mely nagyjában oly szerepet fog játszani a modulcsoportra nézve, mint a bip. csoportra nézve a biperiodicus függvény, azaz melyre nézve, ha $\frac{a\tau+b}{c\tau+d}$ egy modulsubstitutio

$$F\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = F(\tau)$$

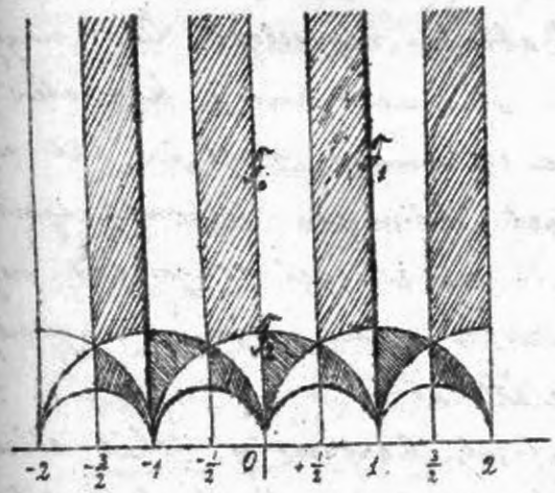
Ezt modulfüggvénynek fogjuk nevezni. Ez ilyen függvény vizsgálata arra fog indítani, hogy a modulcsoport alaptartományára nézve hasonló-képp járjunk el, mint a bip. csoportnál, azaz a ~~xxx~~ kelető oldalakat egymással egyesítsük. Ha ezt megtesszük először a párhuzamos oldalakra nézve, hengert kapunk, s ha egyesítjük a két körívet, egyfelől zárt hengert kapunk tehát egy egyszeresen összefüggő felületet, mert ez síkká deformálható. Ez az a lényeges különbség. A mint p. parallelogrammából keletkező zárt felület háromszorosan összefüggő, addig a modulcsoport alaptartományából keletkező felület egyszeresen összefüggő.

Most a bip. csoport analogiáját követve, ezt az alaptartományt, négyszöget úgy szerkesztjük, hogy a fenti két fundamentalis substitutio alkalmazásával mindig új meg új négyszögeket rakunk egymás mellé. Ha pl. F_0 leképezését akarjuk az S_1 substitutio alkalmazásával, világos, hogy minden egyes pont meg kell szerkeszteni azt a pontot, mely az 1 hozzáadásával keletkezik. Vagyis a megfelelő négyszöget megkapjuk, ha F_0-at a reális

tengely irányában s az 1 vektor nagyságával eltoljuk s ezt az eljárást a kapott idomra ismételjük. Ha pedig F_0-ra az $S_1^{-1}\tau = \tau - 1$ substitutiót alkalmazzuk, az eredeti ábra balfelé tolódik el. Tehát az F_0 alapnégyszög leképerése az $S_1\tau$ substitutióval abban áll, hogy F_0-at a reális tengely mindkét irányában végtelenszer egymás mellé rakjuk. –



Most alkalmazzuk F_0-ra az $S_2\tau$ substitutiót. Láttuk, hogy egy a valós tengelyt derékszög alatt metsző körnek egy modulusmbstitutió értelmében szintén egy a valós tengelyt derékszög alatt metsző kör felel meg. A midőn tehát F_0 leképeréét keressük $S_2\tau$ segélyével, tudjuk, hogy a képel szintén ilyen körökből lesz határolva.



Ha a 1 $-\infty i$ oldalra alkalmazzuk az $S_2\tau$ substitutiót, 1 átmegy r-be, ∞i átmegy 0-ba, s tudjuk, hogy az oldal

egy kör, melynek centruma a valós tengelyen van, tehát megszerkesztve ezt a kört, ennek 0 és r közötti íve felel meg az $S_2\,\tau$ substitutio értelmében a $\lambda\infty i$ egyenesnek. Éppenígy a $r\infty i$ oldalegyenes megfelelője egy ugyanilyen körnek 0 és λ közötti íve. Tehát F_0-nak megfelel $S_2\,\tau$ értelmében a $0r\mu\lambda 0$ négyszög, F_2. Ezen eljárás további alkalmazásával újabb és újabb ívpárokkal határolt négyszögeket kapunk. Hogy fogalmat alkothassunk magunknak, miképpen halad ezen négyszögek ismétlődése a reális tengely felé, ideiglenesen lesz tekintetbe venni az -1 és $+1$ ben emelt merőlegeseket, valamint a $(-1, 0)$ és $(0, +1)$ körívek által határolt ábrát, négyszöget. Ez a nagy négyszög symmetrikus a képzetes tengelyhez és minden szöge 0. Ezt a négyszöget könnyen felbonthatjuk az eredeti r négyszöggel congruens négyszögek bizonyos összegezésére. Van ebben a nagy négyszögben (lásd utolsó előtti ábrát.)



6 szaporatt és 6 nem szaporatt háromszög, tehát ebben a nagy négyszögben 6 kisebb négyszög foglaltatik. Világos, hogy egymás után alkalmazva a két fun-

damentalis substitutiók, mindig lehet 6 ily négyszöget egy nagy négyszögge összefoglalni. Lehet következőleg is lehet eljárni. Vesszük a nagy négyszöget, és ezt ismételjük, a szembenfekvő oldalakat egymásba transformáló substitutiók révén. Világos hogy az így transformált négyszögek nem fogják egymást átfödni. Ez világos először is a szembenfekvő oldalakra történő ismétlésekre illetőleg. A második substitutióval történő leképezések pedig mindig egymáson kívül sorakoznak és ezeknek végtelenbe való ismétlésével a valós tengely részeszerint megközelíthető, S most ezen nagy négyszögeket egyenként 6 kisebbre bontva fel, kapjuk az eredeti F_0 négyszögből származó összes négyszögeket, a melyek az $S_1\tau$ és $S_2\tau$ substitutiók ismétlés alkalmazásával egyáltalában szerkeszthetők. Ezek tehát simán és hézag nélkül borítják a z síkot. Ebből most két következtetést lehet levonni. Az első az, hogy minden $\frac{a\tau+b}{c\tau+d}$ modulussubstitutio ezekből a két $S_1\tau$ és $S_2\tau$ substitutióból összeállítható, mert minden síkbeli pontnak megfelel a modulussubstitutio révén az F_0 egy bizonyos pontja és fordítva ha F_0 bizonyos pontjára egy modulussubstitutiót al-

valamennyi, azokon a felső [illegible] egy pontja, amely bennfoglalja a mi osztásunk bizonyos négyszögében és ennek a négyszögnek megfelel az $S_1\tau$ és $S_2\tau$-ból összerakható bizonyos substitutio. Ez a két $S_1\tau$ és $S_2\tau$ substitutio tehát ugyanúgy szolgálhat az összes substitutiók előállítására, a mint szolgált $u+u$ a lép. csoport előállítására. De lényeges különbség van a kétféle fundamentalsubstitutio között. T. i. az $\Omega_1 u$ és $\Omega_2 u$ substitutiók felcserélhetők rendben,

$$\Omega_1 \Omega_2 u = \Omega_2 \Omega_1 u$$

É. a. mondhatjuk a substitutiókra nem áll, mert általában a substitutiók nem cserélhetők fel egymással, pl.

$$S_1 S_2 \tau = S_1\left(-\frac{1}{\tau}\right) = -\frac{1}{\tau} + 1 = \frac{\tau - 1}{\tau}$$

$$S_2 S_1 \tau = S_2(\tau + 1) = -\frac{1}{\tau + 1}$$

Megjegyzendő, hogy az w_2 és w_1 periódusokat úgy szoktuk választani a végtelen sok primitiv periodusrendszerből, hogy τ az F_0 alapfartományon belül feküdjék, vagyis hogy τ egy reducált négyzetes formának felelhessen meg. Az ilyen τ-val azt mondjuk, hogy reducált τ. Képzeljük egy ilyen reducált τ-val feldallítva a $\wp$ függvényeket.

$\vartheta_{g_1 g_2}(v \mid \tau)$

és kérdezzük mi lesz a ϑ függvényből, ha τ helyébe $\frac{a\tau+b}{c\tau+d}$ lép, vagyis mi lesz

$$\vartheta_{g_1 g_2}\left(v \mid \frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)$$

Tudjuk, hogy a bip. csoport a két τ-ra nézve ugyanaz lesz. De azt még nem tudjuk, hogy a két ϑ függvény közötte milyenfajta összefüggés létezik. Ezen vonatkozásról fogjuk most megvizsgálni.

A ϑ függvényekre áll a következő két egyenlet:

$$\vartheta_{g_1 g_2}(v+1 \mid \tau) = e^{-\pi i g_1} \vartheta_{g_1 g_2}(v \mid \tau)$$

$$\vartheta_{g_1 g_2}(v+\tau \mid \tau) = e^{-\pi i(2v+\tau) - \pi i g_1} \vartheta_{g_1 g_2}(v \mid \tau)$$

Célszerű lesz egy általános képletet levezetni, mely mutatja a ϑ függvény változását, ha v nagyságrendileg $(m, n\tau)$-val. Ha az első funkcionális egyenletet ismételten alkalmazzuk m-szer, az exponenciális faktor lesz $e^{-m\pi i g_1}$. A második egyenletet még egyszer alkalmazva, lesz:

$$\vartheta_{g_1 g_2}(v+2\tau \mid \tau) = e^{-\pi i(2v+3\tau) - \pi i g_2} \vartheta_{g_1 g_2}(v+\tau \mid \tau)$$

$$= e^{-\pi i(2v+3\tau) - \pi i g_2 - \pi i(2v+2\tau) - \pi i g_2} \vartheta_{g_1 g_2}(v \mid \tau)$$

$$= e^{-\pi i(4v+4\tau) - 2\pi i g_2} \vartheta_{g_1 g_2}(v \mid \tau)$$

Még egyszer alkalmazva a képletet:

$$\vartheta_{g_1 g_2}(v+3\tau|\tau) = e^{-\pi i[(4v+8\tau)+2v+\tau]-3\pi i g_2}\vartheta_{g_1 g_2}(v|\tau)$$
$$= e^{-\pi i(2v+3\tau)-3\pi i g_2}\vartheta_{g_1 g_2}(v|\tau)$$

Tehát általánosan:

$$\vartheta_{g_1 g_2}(v+n\tau|\tau) = e^{-\pi i n(2v+n\tau)-2n\pi i g_2}\vartheta_{g_1 g_2}(v|\tau)$$

(ha most v helyébe $v+m$ lép,

$$\vartheta_{g_1 g_2}(v+m+n\tau|\tau) = e^{-\pi i(mg_1+ng_2)-\pi i n(2v+n\tau)}\vartheta_{g_1 g_2}(v|\tau)$$

ez az általános egyenlet. Ezt felírjuk most úgy, hogy $g_1 g_2$ v és τ helyébe lépjen $g_1' g_2'$, v' és τ', ahol $\tau' = \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$

$ad-bc=1$.

$$\vartheta_{g_1' g_2'}(v'+m+n\tau'|\tau') = e^{-\pi i(mg_1'+ng_2')-\pi i n(2v'+n\tau')}\vartheta_{g_1' g_2'}(v'|\tau')$$

Minthogy egy állandóval való szorzás lényegesen nem változtat a változón, írhatjuk, hogy

$$v' = \frac{v}{c\tau+d}$$

Először most, mi történik, ha v növekszik 1-el?

Mivelhogy $\tau = \frac{-d\tau'+b}{c\tau-a}$ lesz

$$\frac{v+1}{c\tau+d} = v' + \frac{1}{c\frac{-d\tau'+b}{c\tau-a}+d} = v' + \frac{c\tau'-a}{-cd\tau'+bc+cd\tau'+ad} = v'+a-c\tau$$

vagyis

$$\frac{v+1}{c\tau+d} = v' + a - c\tau'$$

Tehát ha v növekszik 1-el, növekszik egy $\underline{a}$ egész számmal és τ' egy egész számú többszörösével. További

ha v szaporodik τ-val

$$\frac{v+\tau}{c\tau+d} = v' + \frac{\frac{-d\tau'+b}{c\tau'-a}}{e - \frac{-d\tau'+b}{c\tau'-a} + a} = v' + \frac{d\tau'-b}{cd\tau'+bc-cd\tau'+ad} =$$

$$= v' - b + d\tau'$$

azaz $$\frac{v+\tau}{c\tau+d} = v' - b + d\tau'$$

Tehát ekkor is épen úgy változik v'. Vegyük most a következő ϑ függvényt:

$$e^{-\pi i \frac{cv^2}{c\tau+d}} \vartheta g_1 g_2 (v'\tau') = \varphi(v)$$

ez nyilvánvalóan v függvényeként foghatói fel, ha v' helyébe bevezetjük $v-t$, s ez a $\varphi(v)$ transcendens egész függvény. Állítsuk fel ennek functionális egyenleteit arra nézve, ha v szaporodik 1, illetőleg τ-val.

$$\varphi(v+1) = e^{-\pi i \frac{c(v+1)^2}{c\tau+d}} \vartheta g_1 g_2 (v'+a-c\tau', \tau')$$

ez utóbbi ϑ függvény értékét kapjuk az 1. alatti általános képletből, ha abban $v_1 = a$, $u = -c$ és $v = v'$ képzelünk írva, tehát lesz

$$\varphi(v+1) = e^{-\pi i \frac{c(v+1)}{c\tau+d}} - \pi i (ag_1' - cg_2') + \pi i c(2v' - c\tau') \underbrace{e^{-\pi i \frac{cv}{c\tau+d}} \vartheta g_1 g_2 (v'\tau')}_{\varphi(v)}$$

$$= e^{-\pi i (ag_1' - cg_2') - \frac{\pi i}{c\tau+d}\{2cv + c - cv + ac^2\tau + bc^2\}} \varphi(v)$$

$$= e^{-\pi i (ag_1' - cg_2') - \frac{\pi i ac}{c\tau+d}\{ad - bc \quad ac\tau + bc\}} \varphi(v)$$

vagyis $$\varphi(v+1) = e^{-\pi i (ag_1' - cg_2' + c)} \varphi(v) \qquad \text{I.}$$

Ha v helyére $v+\tau$ lép

$$\varphi(v+\tau) = e^{-\pi i \frac{c(2v\tau+\tau')}{c\tau+d} - \pi i(-bg_1'+dg_2') - \pi i d\left(\frac{2v}{c\tau+d} + d\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)}\varphi(v)$$

$$= e^{-\pi i(-bg_1'+dg_2') - \frac{\pi i}{c\tau+d}\left[2v(c\tau+d)+c\tau^2+d\tau+dc\tau+a\right]}\varphi(v)+$$

$$= e^{-\pi i(-bg_1'+dg_2') + \frac{\pi i}{c\tau+d}(c\tau+d)\left[2v+\tau+bd\right]}\varphi(v)$$

Ezt a második funkcionális egyenlet

$$\varphi(v+\tau) = e^{-\pi i(2v+\tau) - \pi i(-bg_1'+\ldots+d)} \qquad \text{II.}$$

Ha felírjuk a ϑ függvényekre érvényes ker fundamentális egyenletet,

$$\vartheta_{g_1g_2}(v+1|\tau) = e^{-\pi i g_1}\vartheta_{g_1g_2}(v|\tau)$$

$$\vartheta_{g_1g_2}(v+\tau|\tau) = e^{-\ldots(2v+\tau)-\pi i}\vartheta_{g_1g_2}(v|\tau)$$

Ezt a két egyenletet tekintetbe véve, [illegible]

ezekben $g_1 = ag_1' - cg_2' + ac$

$g_2 = -bg_1' + dg_2' + bd$

[illegible] a két egyenlet teljesen egyezik az I és II. funkcionális egyenletekkel, de akkor egy ismeretes tétel értelmében a $\varphi(v)$ függvény csak egy állandó faktorban különbözik a $\vartheta_{g_1g_2}(v|\tau)$ függvénytől azaz

$$\varphi(v) = \ldots\vartheta_{g_1g_2}(v|\tau)$$

v gyök $e^{-\pi i\frac{cv}{c\tau+d}}\vartheta_{g_1g_2}\left(\frac{v}{c\tau+d}\middle|\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)$ $\varphi_{g_1g_2}\vartheta_{g_1g_2}(v|\tau)$

a φ [illegible]

$g_1 = ag_1' - cg_2' + ac$

$g_2 = -bg_1' + dg_2' + bd$.

Ezzel a felvetett kérdés, az exponenciális faktor átvitele a másik oldalra, teljesen meg van oldva. Látjuk hogy a transzformált τ-hoz tartozó δ függvény egyszerű módon kifejezhető az eredeti τ-hoz tartozó δ függvényel. Ez az egyenlet szolgáltatja a δ függvények kar. transzformációját. Szerű lineáris, mert az $(a^k b^l)$ modulusbstitutio determinansa $D = 1$.

Csak az állandó meghatározása van még hátra. Az állandó meghatározása egy általános modulusbstitutio esetén sajátságos nehézségekkel jár. Ilyen állandónak négyzete kiszámítható meghatározható. De az előjel meghatározása egyike a legnehezebb problémának az egész matheriában. De tudjuk, hogy az általános modulusbstitutio összeállítható a $(\tau+1)$ és $(-\frac{1}{\tau})$ fundamentális substitutiokból. Ezen annak alapján egy szerű módon sikerülni fog az előjel meghatározása.

A δ függvények lineáris [illegible] képlete így írható

$$\delta_{g_1 g_2}\left(\frac{v}{cv+d}, \frac{av+b}{cv+d}\right) = \varepsilon_{g_1 g_2} \cdot \delta_{g_1 g_2}(v, \tau)$$

ahol

$$g_1 = ag_1' - cg_1''$$
$$g_2 = -bg_1' + dg_2' + bc$$

g_1 és g_2 – hozzátartozó páros számot hozzáadhatunk, vagy abból kivonhatunk, ez a két kifejezés így is írható

$$g_1 = ag_2' - cg_2' - ac$$
$$g_2 = -bg_1' + dg_1' - bd$$

És most az általános g_1, g_2 characteristikához tartozó g_1' állandót ki fogjuk fejezni a g_2 characteristikához tartozó állandóval. E végett ki kell számítani a $g_1 = 0$, $g_2 = 0$ értékeknek megfelelő g_1' és g_2' értékeket az utóbbi két egyenletből, ha az $ag_1' - cg_2' = ac$, $bg_1' + dg_2' = bd$ helyett

$$ag_1' - cg_2' = ac$$
$$bg_1' + dg_2' = bd$$

Ebből

$$g_1' = \frac{\begin{vmatrix} ac & -c \\ bd & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & -c \\ -b & d \end{vmatrix}} \cdot \frac{acd + }{ad - bc} = adc + cd = cd(a+b)$$

$$g_2' = \frac{\begin{vmatrix} a & ac \\ -b & bd \end{vmatrix}}{1} = abd + abc = ab(c+d)$$

tehát

$$g_1' = cd(a+b)$$
$$g_2' = ab(c+d)$$

Ezt felhasználjuk azt a körülményt, hogy g_1', g_2'-ből a páros számokat el tekinthetünk, Ha cd páros, akkor $cd(a+b)$ és páros, tehát $g_1' = cd(a+b)$ helyett írhatjuk: $g_1' = cd$. Ha páratlan, akkor cd

d is páratlan, pl.

$$a = 2\gamma + 1 \quad , \quad d = 2\delta + 1$$

akkor $ad + bc = ad - bc + 2bc = 1 + 2bc$ szintén páratlan lévén, míntán másfelől $ad + bc = a(2\delta + 1) + c(2\gamma + 1) = 2(a\delta + b\gamma) + a + c$ az páratlan lesz, de mivel $2(a\delta + b\gamma)$ párost szükségképen $a + c$ páratlan; ellenkező esetben $cd(a - b)$ páratlan, azaz $a - b$ páratlan és $g_1' = cd$ írható. Ha tehát $g - g_2 = 0$, akkor írható $g_1' = cd$ egyenlővé $g_2 = ab$ [illegible] alakú valamennyi megfelelő transzformáció közül az

$$\text{I.} \quad \chi_{cd,ab}(v', \tau') = \vartheta_{00}\, e^{2\pi i c w'} \chi_{00}(v')$$

és az egyenlet értelmében $\vartheta_{00} = 1$. Ezzel a ϑ_{00}-hal fogjunk most kifejezni az általános $\vartheta_{g,g_2} = ?$. E végett feltehetjük azt a kifejtést, melynek segélyével χ_{00}-ból nyerjük a tetszőleges charakteristikájú χ-t. Tegyünk v helyébe $v - \frac{1}{2}(g_1\tau - g_2)$, s mivel ami lesz akkor v'-el, v' helyébe fog jönni:

$$\frac{v' - \frac{1}{2}(g_1\tau - g_2)}{c\tau + d} = v' - \frac{1}{2}\cdot\frac{(ag_1' - cg_2' - ac)\tau - d\tau' + b - (bg_1' + dg_1' - bd)(c\tau - a)}{c\tau' + d\tau + b + d(c\tau - a)}$$

$$= v' - \frac{1}{2}\,\frac{-adg_1' + cdg_2' - acd - bcg_1' - dcg_1' + bcd\tau - abg_1' - bcg_1' - abc - abg_1' + adg_1' - abd}{cb - ad}$$

$$= v - \frac{1}{2}\{\tau - g_1 + cd(a + b) + g_1 - ab(c + d)\}$$

de a zárójelekben [illegible] charakteristikájával el lehet [illegible]

páros számoktól v-igy v'-ütmegy a következő kifejezésbe

$$v' + \tfrac{1}{2}\{\tau'(-g_1' + cd) + g_2' - ab\}$$
$$= v' - \tfrac{1}{2}\{\tau(g_1' - cd) - (g_2' - ab)\}$$

Ha most az I. alatti egyenletben v helyébe $v - \frac{1}{2}(g_1\tau - g_2)$ és v' helyébe $v' - \frac{1}{2}\{\tau'(g_1' - cd) - (g_2' - ab)\}$ írunk lesz

I. $\vartheta_{cd,ab}\left(v' - \frac{1}{2}[(g_1' - cd)\tau' - (g_2' - ab)], \tau'\right) =$
$$= C_{00}\, e^{-\pi i c[v - \frac{1}{2}(g_1\tau - g_2)][v' - \frac{1}{2}\{(g_1' - cd)\tau' - (g_2' - ab)\}]}$$

Emlékezzünk most a következő ϑ képletre:

$$\vartheta_{g_1 g_2}\left(w - \frac{\lambda\tau - \mu}{2}\right) = e^{\pi i(\gamma_1 w - \frac{1}{4}\gamma_1^2\tau + \frac{1}{2}g_1\gamma_2)}\vartheta_{g_1+\gamma_1, g_2+\gamma_2}(w)$$

Ezt a képletet alkalmazva a mostani esetre, lesz $w = v'$, $\tau = \tau'$, $\gamma_1 = g_1' - cd$, $\gamma_2 = g_2' - ab$, $g_1 = cd$, $g_2 = ab$, úgy, hogy az II. egyenlet baloldala lesz:

$$e^{\pi i[(g_1' - cd)v' + (g_1' - cd)^2\tau' - \frac{1}{2}cd(g_2' - ab)]}\vartheta_{g_1' g_2'}(v'|\tau')$$

A baloldali kifejezését $\vartheta_{00}(\,)$ tétre adva, ill. az általánosság-
letből, ha abban $g_1 = 0$, $g_2 = 0$, $\gamma_1 = g_1$, $\gamma_2 = g_2$, ez tehát

$$e^{-\pi i[g_1 v - \frac{1}{4}g_1^2\tau]}\vartheta_{g_1 g_2}(v|\tau),$$

az lesz szorzva egy exponentiális factorral — ehhez
így a baloldalról is áthozzuk az exponentiális factort,
az egyenlet ilyen lesz

III. $$\vartheta_{g_1' g_2'}(v'|\tau') = C_{00}\, e^{\pi i(\psi v' - \pi i\psi^2)}\vartheta_{g_1 g_2}(v|\tau)$$

a hol $\psi = -\frac{1}{2}(g_1\tau - g_2)cv' - \frac{1}{2}[(g_1' - dc)\tau' - (g_2' - ab)]cv - (g_1' - dc)v' - g_1 v +$
$+ \frac{1}{2}c(g_1\tau - g_2)[(g_1' - dc)\tau' - (g_2' - ab)] + \frac{1}{4}(g_1' - dc)^2\tau' + \frac{1}{2}cd(g_2' - ab) - \frac{1}{4}g_1^2\tau$

vagyis $\gamma = \frac{1}{4}[g_1' - 3dc](g_2' - ab) - g_1 g_2]$

Ha ezt a III. egyenletet összehasonlítjuk a legáltalánosabb transformatio egyenlettel adódik, hogy,

$$C_{g_1 g_2} = e^{\frac{2\pi}{4}[(g_1' - 3dc)(g_2' - ab) - g_1 g_2]} C_{00}$$

Ezzel kifejeztük az általános modulusbővítési folyam fellépő transformatiós állandót egy általános $g_1 g_2$ characteristikára nézve, a, c, d, characteristikus számtól függő állandóval. Specializáljuk ezt a képletet a négy elsőrendű ϑ függvényre, a hol 1.) $(g_1 g_2) = (1,0)$, 2.) $(g_1 g_2) = (0,1)$ 3.) $(g_1 g_2) = (1,1)$ és 4.) $(g_1 g_2) = (0,0)$

a

$$g_1 = -cg_2' - ac$$
$$g_2 = -bg_1' + dg_2' - bd$$

egyenletekből a fenti $(g_1 g_2)$ characteristikáknak megfelelő $(g_1' g_2')$ characteristikák a következő táblázatba foglalandó össze:

g_1	g_2	g_1'	g_2'
1	0	cd	ad
0	1	c + cd	a + ab
1	1	d + cd	b + ab
1	1	c + d + cd	a + b + ab

Hogyanis ha $g_1 = 0$, $g_2 = 1$, akkor $ag_1' - cg_2' = ac$

$$-bg_1' + dg_2' = 1 + bd$$

a miből $g_1' = \begin{vmatrix} ac & -c \\ 1+bd & d \end{vmatrix} = c + bcd + acd = c + cd(a+b) =$

$= c + cd$

mivel $(a+b)$ elhagyható. Ugyanígy

$$g_2' = \begin{vmatrix} a & ac \\ -b & 1+bd \end{vmatrix} = a + abd + abc = a + ab(c+d) = a+ab$$

Továbbá ha $g_1 = 1$, $g_2 = 0$, lesz

$$ag_1' - cg_2^2 = 1 + ac$$
$$-bg_1' + dg_2' = bd$$

a miből $g_2' = d + cd$, $g_2' = b + ab$

ahol $g_1 = 1$, $g_2 = d$, lesz:

$$g_1' = \begin{vmatrix} a+ac & c \\ 1+bd & d \end{vmatrix} = c + d + acd + bcd = c + d + cd(a+b)$$

vagyis $g_1' = c + d + cd$

$g_2' = a + b + ab$

és utolsó char-ra egy font-s összevetett kell vennünk. Mivel nyilvánvaló $ad - bc = 1$, világos, hogy sem a, b, sem d, c nem lehet egyszerre páros, úgy hogy $c+d+cd$ egyfelől és $a+b+ab$ másfelől páratlan számok lesznek.

$(c+d+cd \quad a+b+ab) \equiv (1,1) \bmod 2.$

Tehát ε $\mathfrak{d}_{11}$ e. "mdli páratlan n. függvény egy mo- o korrespondencia folytán számból egy páratlan ν^2-ba

megy át, azaz a páratlan ϑ mindig páratlan ϑ-ba transzformálódik, a párik 3 db-ra pedig világos, hogy azok csak egymás között transzformálódnak. A fenti négy esetnek megfelelő transzformációs képletek a következők:

$$\vartheta_{cd,ab}(v'|\tau') = C_{00}\, e^{\pi i c v v'}\, \vartheta_{00}(v|\tau)$$

$$\vartheta_{c+cd,a-ab}(v'|\tau') = C_{01}\, e^{\pi i c v v'}\, \vartheta_{01}(v|\tau)$$

$$\vartheta_{d+cd,b+ab}(v'|\tau') = C_{10}\, e^{\pi i c v v'}\, \vartheta_{10}(v|\tau)$$

$$\vartheta_{c+d+cd,a+b+ab}(v'|\tau') = C_{11}\, e^{\pi i c v v'}\, \vartheta_{11}(v|\tau)$$

Az általános

$$C_{g_1 g_2'} = e^{\frac{\pi i}{4}[(g_1'+cd)(g_1'-ab)-g_1 g_2]}\, C_{00}$$

képlet szerint pedig

$$C_{01} = e^{\frac{\pi i}{4}[(c+cd+cd)(a+ab-ab)]}\, C_{00}$$

$$= e^{\frac{\pi i}{4} c(1+2d)a}\, C_{01} = e^{\frac{\pi i}{4} ac(1-2d)}\, C_{00}$$

tehát

$$\begin{cases} C_{01} = e^{\frac{\pi i}{4} ac(1-2d)}\, C_{00} \\ C_{10} = e^{\frac{\pi i}{4}(1-2c)bd}\, C_{00} \\ C_{11} = e^{\frac{\pi i}{4}[(c+d)(a+b)-1-2cd(\ldots-b)]}\, C_{00} \end{cases} \quad (4)$$

Ezek általános transzformációs képletek. Még csak C_{00}-at kell meghatározni. Ennek meghatározására fog szolgálni a $\vartheta' = \pi\, d\, v'\, \vartheta$ egyenlet. De előbb vegyük tekintetbe [illegible]

riatitzákkal való számolásnál el lehet nagyon tekinteni valamely páros számtól, de a ϑ függvények sorában az eredeti char.-nevezőt. De a char.-változással fellépő factort is meg lehet határozni, ha tekintetbe vesszük azt a két egyenletet:

$$\vartheta_{g_1+2,\,g_2}(w) = e^{g_2 \pi i}\,\vartheta_{g_1,g_2}(w)$$
$$\vartheta_{g_1,\,g_2+2}(w) = \vartheta_{g_1,g_2}(w)$$

Ha most m_1 és n_1 egész számok páros vagy páratlan voltukra nézve akkép vannak jellemezve, hogy $(m_1, n_1) \equiv (0,0)$ továbbá $(m_2, n_2) \equiv (0,1)$; $(m_3, n_3) \equiv (1,0)$ $(m_4, n_4) \equiv (1,1)$ akkor a fenti két képlet ismételt alkalmazásával adódik, hogy

$$\vartheta_{m_1,n_1}(w) = e^{n_1 \frac{m_1}{2} \pi i}\,\vartheta_{00}(w) = \vartheta_{00}(w)$$
$$\vartheta_{m_2,n_2}(w) = \vartheta_{0,1}(w)$$
$$\vartheta_{m_3,n_3}(w) = \vartheta_{1,0}(w)$$
$$\vartheta_{m_4,n_4}(w) = e^{\pi i \frac{1}{2}(m_4-1)}\,\vartheta_{11}(w)$$

Az itt nyert képleteket most specializálni fogjuk azon esetekre, melyek a két fundamentalsubstitutióra vonatkoznak, tehát mindig $\tau' = 1+\tau$ és $\tau' = -\frac{1}{\tau}$ substitutiókból minden modulussubstitutiót össze-rakható. Ez a két substitutio az általános $\tau' = \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$,

és $v' = \frac{v}{c\tau + d}$ képletek szerint körülkerüleg van jellemezve, az

elsőnél $a=1,\ b=1,\ c=0,\ d=1,\ v=v'$

a másodiknál $a=0,\ b=-1,\ c=1\ d=0,\ v' = \frac{v}{\tau}$

Ekkor első esetben az általános képletek így hangzanak:

$$\vartheta_{0,1}(v|\tau+1) = C_{00}\,\vartheta_{00}(v|\tau)$$
$$\vartheta_{0,2}(v|\tau+1) = C_{01}\,\vartheta_{01}(v|\tau)$$
$$\vartheta_{1,2}(v|\tau+1) = C_{10}\,\vartheta_{10}(v|\tau)$$
$$\vartheta_{11}(v|\tau+1) = C_{11}\,\vartheta_{11}(v|\tau)$$

De a [illegible] függvényekre áll, hogy

$$\vartheta_{g_1,g_2}(w) = \vartheta_{g_1,g_2}(w)$$

tehát 2 helyett 0, 1 helyett 1 [illegible] való, tovább az általános képlet, vizsgálva:

$$C_{01} = C_{\cdot}$$
$$C_{10} = e^{\frac{\pi i}{4}}$$
$$C_{11} = e^{\frac{\pi i}{4}}.$$

így, így a végleges képletek ezek:

$$\vartheta_{01}(v|\tau+1) = C_{00}\,\vartheta_{00}(v|\tau)$$
$$\vartheta_{00}(v|\tau+1) = C_{00}\,\vartheta_{01}(v|\tau)$$
$$\vartheta_{10}(v|\tau+1) = e^{\frac{\pi i}{4}} C_{00}\,\vartheta_{10}(v|\tau)$$
$$\vartheta_{11}(v|\tau+1) = e^{\frac{\pi i}{4}} C_{00}\,\vartheta_{11}(v|\tau) \qquad (1.)$$

A C_{00} állandó meghatározása végett differentiáljuk az utolsó egyenletet v szerint

$$\vartheta_{11}'(v|\tau+1) = e^{\frac{\pi i}{4}} C_{00}\, \vartheta_{11}'(v|\tau)$$

Most a $\vartheta_{11}' = \pi \vartheta_{00}\vartheta_{01}\vartheta_{10}$

egyenletnek megfelelőleg tegyünk az (1) alatti 3 első egyenletben $v=0$ s a három ϑ függvény szorzatát szorozzuk meg π-vel, akkor

$$e^{\frac{\pi i}{4}} C_{00}\vartheta_{11}'(0|\tau) = \pi C_{00}^3 e^{-\frac{\pi i}{4}} \vartheta_{00}(0|\tau)\vartheta_{01}(0|\tau)\vartheta_{10}(0|\tau)$$

s mivel $\vartheta_{11}'(0|\tau) = \pi \vartheta_{00}(0|\tau)\vartheta_{01}(0|\tau)\vartheta_{10}(0|\tau)$

marad hogy $1 = C_{00}^2$

tehát C_{00} második egységgyök, melynek még az előjelét kell meghatározni. Erre felhasználjuk a ϑ függvények soralakját

$$\vartheta_{00}(w|\tau) = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} q^{k^2}\cos 2kw\pi, \qquad q = e^{\tau\pi i}$$

$$\vartheta_{01}(w|\tau) = 1 + 2\sum_{1}^{\infty} q^{k^2}(-1)^k \cos 2kw\pi$$

Most vijunk $w=0$, lesz

$$\vartheta_{01}(0|\tau) = 1 + 2\sum_{1}^{\infty}(-1)^k q^{k^2}$$

$$\vartheta_{00}(0|\tau) = 1 + 2\sum_{1}^{\infty} q^{k^2}$$

Most az (1) alatti első egyenletben tegyünk τ helyébe $(\tau+1)$-et, s legyen $e^{(\tau+1)\pi i} = q\,e^{\pi i} = q'$. Mivel $C_{00}^2 =$ [illegible] tehát független τ-tól, azért C_{00} meghatározása végett τ-nak speciális értékeket adhatunk, pl.

$\tau = \infty$. Mint $f(\tau)$ > objárok $\lim_{\tau=\infty} q = 0$ ekkor $\lim_{\tau=\infty} q' = 0$, azzhogy az első 3 függvény értéke 1 lesz, a másodikéi szintén és marad, hogy $\vartheta_{00} = 1$

Ezzel az első fundamentális substitutió számára a következő végleges formulákat nyerjük:

$$\vartheta_{01}(v|\tau+1) = \vartheta_{00}(v|\tau)$$
$$\vartheta_{00}(v|\tau+1) = \vartheta_{01}(v|\tau)$$
$$\vartheta_{10}(v|\tau+1) = e^{\frac{\pi i}{4}} \vartheta_{10}(v|\tau)$$
$$\vartheta_{11}(v|\tau+1) = e^{\frac{\pi i}{4}} \vartheta_{11}(v|\tau)$$

Most átmegyünk a második fundamentális substitúcióhoz. Ennél az általános (A) képletek szerint $C_{10} = C_{00}$, $C_{01} =$ $C_{11} = e^{-\frac{\pi i}{2}} C_{00}$ lehet a mi esetünkben következő egyenletek:

$$\vartheta_{00}\left(\frac{v}{\tau}\,\middle|\,-\frac{1}{\tau}\right) = C_{00}\, e^{\pi i \frac{v^2}{\tau}} \vartheta_{00}(v|\tau)$$
$$\vartheta_{10}\left(\frac{v}{\tau}\,\middle|\,-\frac{1}{\tau}\right) = C_{00}\, e^{\pi i \frac{v^2}{\tau} + \frac{\pi i}{4}} \vartheta_{01}(v|\tau)$$
$$\vartheta_{01}\left(\frac{v}{\tau}\,\middle|\,-\frac{1}{\tau}\right) = C_{00}\, e^{\pi i \frac{v^2}{\tau} + \frac{\pi i}{4}} \vartheta_{10}(v|\tau)$$
$$\vartheta_{11}\left(\frac{v}{\tau}\,\middle|\,-\frac{1}{\tau}\right) = e^{-\frac{\pi i}{2}} C_{00}\, e^{\pi i \frac{v^2}{\tau} + \frac{\pi i}{4}} \vartheta_{11}(v|\tau)$$

Az utolsó egyenletet v szerint differenciálva, kapjuk:

$$\frac{1}{\tau} \vartheta_{11}'\left(\frac{v}{\tau}\,\middle|\,-\frac{1}{\tau}\right) = e^{-\frac{\pi i}{2}} C_{00} \left[e^{\pi i \frac{v^2}{\tau} + \frac{\pi i}{4}} \vartheta_{11}'(v|\tau) + \frac{2\pi i v}{\tau} e^{\pi i \frac{v^2}{\tau} + \frac{\pi i}{4}} \vartheta_{11}(v|\tau) \right]$$

és ha $v = 0$

$$\frac{1}{\tau} \vartheta_{11}'\left(0\,\middle|\,-\frac{1}{\tau}\right) = e^{-\frac{\pi i}{2}} C_{00}\, \vartheta_{11}'(0|\tau)$$

Ha most a $\vartheta_{11}' = \pi \vartheta_{00}\vartheta_{01}\vartheta_{10}$ képletünket alkalmazzuk, lesz:

$$\vartheta_{11}'(0|-\tfrac{1}{\tau}) = \pi \vartheta_{00}(0|-\tfrac{1}{\tau})\vartheta_{01}(0|-\tfrac{1}{\tau})\vartheta_{10}(0|-\tfrac{1}{\tau})$$

s ha az utóbbi egyenletcsoportból a három első egyenletet egymással és π-vel szorozzuk, adódik

$$\tau e^{-\frac{\pi i}{\tau}} C_{00}\vartheta_{11}'(0|\tau) = \pi C_{00}^3 \vartheta_{00}(0|\tau)\vartheta_{01}(0|\tau)\vartheta_{10}(0|\tau)$$

de $\vartheta_{11}'(0|\tau) = \pi \vartheta_{00}(0|\tau)\vartheta_{01}(0|\tau)\vartheta_{10}(0|\tau)$

tehát $\tau e^{-\frac{\pi i}{\tau}} = C_{00}^2$, a miből $C_{00} = \pm\sqrt{-\tau i}$

$\sqrt{-\tau i}$ vagy + vagy − jellel. Az előjel meghatározására felhasználjuk a ϑ sorfejtését.

$$\vartheta_{00}(0|\tau) = 1 + 2\sum_1^\infty q^{\kappa^2}$$

$$\vartheta_{00}(0|-\tfrac{1}{\tau}) = 1 + 2\sum_1^\infty q'^{\kappa^2} \quad \text{a hol } q' = e^{-\frac{\pi i}{\tau}}$$

Itt is specializálhatjuk a τ értékét; legegyszerűbb tiszta képzetes értéket adni τ-nak, $\tau = \lambda i$, a hol $\lambda > 0$, akkor $q = e^{i\lambda\pi i} = e^{-\lambda\pi} < 1$, tehát q reális, pozitív és kisebb, mint egy. Ezenkívül $q' = e^{-\frac{\pi i}{\lambda\pi i}} = e^{-\frac{\pi}{\lambda}}$ tehát q' is reális, pozitív és kisebb, mint 1. Tehát mindkét ϑ sor egy véges értékű geometriai sor, s mindkettő lényegesen pozitív, azaz

$$\vartheta_{00}(0|i\lambda) > 0 \text{ ezenkívül } \vartheta_{00}(0|-\tfrac{1}{\lambda i}) > 0$$

Ha most a már említett első egyenletben $v=0$, úgy

$$\vartheta_{00}(0|-\tfrac{1}{\tau}) = C_{00}\,\vartheta_{00}(0|\tau)$$ tehát $C_{00}>0$

Ha most $(\sqrt{\tau i})$ alatt a négyzetgyök azon értékét értjük, melyben a valós rész pozitív, akkor nyilvánvaló, hogy

$$\frac{(\sqrt{-i\tau})}{(\sqrt{\tau i})} = \varepsilon = \pm 1$$ független a τ-tól,

amiért $\tau = ki$ esetén $\varepsilon > 0$, azért minden pozitív arasz $\varepsilon = 1$, tehát $C_{00} = (\sqrt{-i\tau})$. Ezzel a második fundamentális substitutio esetén is meghatároztuk C_{00} értékét. —

Akkor meg most a következő tételek

I. $\vartheta_{cd,ab}(v'|\tau') = \sqrt{\tau}\,\vartheta_{c+cd,a+ab}(v'|\tau')\,e^{\frac{\pi i v^2}{\tau}}$

Tudjuk, hogy ezen három számpár, cd, ab

$c+cd$, $a+ab$

$d+cd$, $b+db$

páros számoktól eltekintve nem lehet más, mint $0,0$ vagy $0,1$, vagy $1,0$. Természetes, hogy ha a, b, c, d adott számok, mindig meg tudjuk határozni, hogy a három számpár közül, melyik $0,0$, 01, 10 úgyhogy minden adott substitutióra nézve pontosan meg tudjuk határozni $\varepsilon^{\pi i}$ azon kitevőjét, mely az többi tételben, mint factor fellép.

De mi ezt egyelőre határozatlannak hagyjuk, jelölvén azt $e^{\lambda\pi i}$-vel, úgy hogy

II. $\vartheta_{cd,ab}(v'|\tau')\vartheta_{c+cd,a+ab}(v'|\tau')\vartheta_{a+cd,b+ab}(v'|\tau') =$

$= e^{\lambda\pi i}\vartheta_{00}(v'|\tau')\vartheta_{01}(v'|\tau')\vartheta_{10}(v'|\tau')$

s tudjuk, hogy λ vagy $\frac{cd}{2}$, vagy $\frac{c+cd}{2}$ vagy $\frac{d+cd}{2}$

Alkalmazzuk most a $\vartheta_{c+d+cd,a+b+ab}$-re a fentebb tárgyalt $\vartheta_{m_4\tau_4} = e^{\frac{m_4\tau_4-1}{2}\pi i}\vartheta_{11}(w)$ $(m_4=1, n_4=1)$ képletet, akkor lesz

$$\vartheta_{c+d+cd,a+b+ab}(v'|\tau') = e^{\frac{c+d+cd-1}{2}\pi i}\vartheta_{11}(v'|\tau')$$

Már most differentiáljuk az ismeretes

$$\vartheta_{c+d+cd,a+b+ab}(v'|\tau') = C_{00}e^{\pi i c v v'}\vartheta_{11}(v|\tau)$$

egyenletet, v szerint, lesz

$$\vartheta'_{a+d+cd,a+b+ab}(v'|\tau')\frac{dw'}{dv} = C_{11}e^{\pi i c v v'}\vartheta'_{11}(v|\tau) + C_{11}\frac{\pi i c v}{c\tau+d}e^{\pi i c v v'}\vartheta_{11}(v|\tau)$$

Ezen eg. ellenben tegyük $v=0$ és vegyük tekintetbe az I. alatti kifejezést, akkor kapjuk, hogy

$$e^{\frac{c+d+2d-1}{2}}\vartheta'_{11}(v|\tau')\frac{1}{c\tau+d} = C_{11}\vartheta'_{11}(0|\tau)$$

Ha most a $[cd,ab]$ ($c+cd, a+ab$) stb. char.-ra vonatkozó ϑ függvények értéktáblájából megalkotjuk az I. szerzetet, abban $v'=0$ vesszük és a baloldali kifejezés helyett a II. alatti egyenlet jobboldalát írjuk

lesz

$$\vartheta^{2\pi i}\vartheta_{00}(\alpha|\tau')\,\vartheta_{01}(\alpha|\tau')\,\vartheta_{10}(\alpha|\tau') = C_{00}\,C_{01}\,C_{10}\,\vartheta_{00}(\alpha|\tau)\,\vartheta_{01}(\alpha|\tau)\,\vartheta_{10}(\alpha|\tau)$$

Most nézzük itt ezen két utolsó egyenletben a határokat minden factorit a jobboldalra és alkalmazzuk azt a tételt, hogy $\vartheta_{11}'(\alpha|\tau') = \pi\,\vartheta_{00}(\alpha|\tau)\,\vartheta_{01}(\alpha|\tau)\,\vartheta_{10}(\alpha|\tau)$ akkor lesz

$$\vartheta^{-\frac{(ac+cd-1)}{2}\pi i}(\alpha\tau+d)\,C_{11}\,\vartheta_{11}'(\alpha|\tau) = \vartheta^{-2\pi i}\,\pi\,C_{00}\,C_{01}\,C_{10}\,\vartheta_{00}(\alpha|\tau)\,\vartheta_{01}(\alpha|\tau)\,\vartheta_{10}(\alpha|\tau)$$

és alkalmazva a

$$\vartheta_{11}'(\alpha|\tau) = \pi\,\vartheta_{00}(\alpha|\tau)\,\vartheta_{01}(\alpha|\tau)\,\vartheta_{10}(\alpha|\tau)$$

egyenletet, lesz

$$\vartheta^{\pi i\left[1-\frac{(ac+cd-1)}{2}\right](\alpha\tau+d)}\,\vartheta^{\frac{\pi i}{4}[(a+b)(c+d)-1-2ac(a+d)]}\,C_{00} = C_{00}^3\,\vartheta^{\frac{\pi i}{4}[(1-2d)\alpha\alpha+(1-2a)bd]}$$

egyenlővé az exponentiális factorokat, az első kitevőjével, az exponens lesz

$$\frac{\pi i}{4}(ac+bc+ad+bd-1-2acd-2bcd-ac+2ada-bd+2bcd) = \frac{\pi i}{4}(bc+ad-1) = \frac{\pi i}{4}(bc+ad-ad+bc) + \frac{\pi i}{2}bc$$

és mert $\vartheta^{\pi i\left[1-\frac{(ac+cd-1)}{2}\right](\alpha\tau+d)}\,\vartheta^{\frac{\pi i}{2}bc} = C_{00}^2$

ezzel meghatároztuk C_{00} értékét. Még csak ± 1-et kell meghatározni. Kijelentvén, hogy ennek eldöntésére adódjék minden részletében $\left(\frac{a}{cd}\right)$ imbolitalis coefficiensi pere vagy páratlan jellegűnek nézve, mert a ad, cb-

c+cd, a+ab; d+cd, b+ab charakteristikák páros számaitól eltekintve csak 00, 01, 10 értékpárok lehetnek. Tekintettel arra, hogy ad - bc = 1, nem fordulhat elő pl. az, hogy a és b páros legyen, ép d és c sem lehet páros; de az sem fordulhat elő, hogy a és b vagy c és d páratlan legyen, mert akkor ad és bc is páratlan volna, a mi nem lehetséges, mert differenciájuk 1. Tehát csak a következő lehetőségek vannak

1.) $a \equiv 1, b \equiv 0$ akkor szükségképen $c \equiv 0, d \equiv 1$
4.) $a \equiv 1, b \equiv 0$ " " $c \equiv 1, d \equiv 1$
2.) $a \equiv 0, b \equiv 1$ " " $c \equiv 1, d \equiv 1$
3.) $a \equiv 0$ $b \equiv 0$ " " $c \equiv 1, d \equiv 1$

Más eset nem lehetséges, ha pedig a és b mindkettő páratlan

6.) $a \equiv 1, b \equiv 1$, akkor szükségképen $c \equiv 0, d \equiv 1$
$a \equiv 1, b \equiv 1$, " " $c \equiv 1, d \equiv 0$

Ezzel az összes lehetőségek ki vannak meritve. Célszerű lesz minden esetre egy paradigmát venni. Ezek megfelelőleg 1.) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; 2.) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; 3.) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; 5.) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; 6.) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ezt a 6 paradigmát nevezzük a modulonbstitutiók között fellépő 6 különböző osztály reprezentánsának. A fenti három számpár esetben következőleg alakul a megfelelő sorrendben

1.) (0,0) ; (0,1) ; (1,0)
2.) (0,0) ; (1,0) ; (0,1)
3.) (1,0) ; (0,0) ; (0,1)
4.) (1,0) ; (0,1) ; (0,0)
5.) (0,1) ; (0,0) ; (1,0)
6.) (0,1) ; (1,0) ; (0,0)

A λ értéke a hat esetben következőleg sorakozik

$$\lambda = \frac{1}{2}(c+cd),\ \frac{1}{2}(d+cd),\ \frac{1}{2}(d+cd),$$
$$\frac{1}{2}(c+cd),\ \frac{1}{2}(d+\tfrac{1}{2}cd).$$

Ezzel az L_{00}^2 meghatározása, aminek a δ függvények lin. transformatiója minden esetben el van intézve, eltekintve L_{00} előjelétől.

A modulonbstitutiók által alkotott 6 osztály a következő

osztály	a	b	c	d	az egyes osztályokban fellépő lehetséges typusok.			
1.	1	0	0	1	00	01	10	11
2.	0	1	1	1	00	10	01	11
3.	0	0	1	1	10	00	01	11
4.	1	0	1	1	10	01	00	11
5.	1	1	0	1	11	10	10	11
6.	1	1	1	0	01	10	00	11

Vagy a szokásos jelöléssel az utóbbi sorozatok így is írhatók

01	11	10	00	
s_0	s_1	s_2	s_3	a charakt. permutá-
0	1	2	3	tációja a 6 osztályban ekv.
2	1	0	3	
3	1	0	2	
0	1	3	2	
3	1	2	0	
2	1	3	0	

Megjegyzendő, hogy ezzel a lin. transformatio képletei amincsenek teljesen összeállítva, a mennyiben a C állandók hiányoznak. De ezeknek csak négyzeteit tudjuk pontosan meghatározni, ezek ezekre is van szükségünk. Elég a két fundamental substitutio esetén az állandókat teljesen meghatározni, a mint ezt meg is tettük.

Most néhány fontos észrevételt fogunk tenni az egyes osztályokat illetőleg. Ha röviden $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6$-al jelöljük az egyes osztályok reprezentansait, ezek voltak $t_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ vagyis az identicus substitutio $t_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $t_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; $t_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $t_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $t_6 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

A t_1 az identicus substitutio; t_5 a $(\tau+1)$ substitutio, vagyis az első fundamental substitutio, $t_5 = S_1$; t_2 a

$-\frac{1}{5}$ vagyis második fundamentál substitutio $t_2 = S_1$. Minthogy pedig bármilyen modulsubstitutio összetehető S_1 és S_2-ből, következik, hogy az a 6 representans is összetehető S_1 és S_2-ből - t. i. $t_1 = 1 = S_2^2$; $t_2 = S_2$, $t_3 = S_2 S_1$, mert $S_2 S_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = t_3$

$t_4 = S_2 S_1 S_2$ mert $S_2 S_1 S_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} S_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = t_4$.

$t_5 = S_1$ és $t_6 = S_1 S_2$, mert $S_1 S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = t_6$

Tegyük fel, hogy $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$ egy az 1. classishoz tartozó substitutio, azaz $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Legyen épen így

$$\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

akkor a kettőt componálva

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_2 + b_1 c_2 & a_1 b_2 + b_1 d_2 \\ c_1 a_2 + d_1 c_2 & c_1 b_2 + d_1 d_2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mert $a_1 a_2$ páratlan $b_1 c_2$ páros, tehát $a_1 a_2 + b_1 c_2 \equiv 1 \pmod 2$.

Tehát két az első classishoz tartozó substitutio compositumа szintén az első classishoz tartozik. Világos továbbá, hogy $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$ inverse $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} d_1 & -b_1 \\ -c_1 & a_1 \end{pmatrix}$ szintén az első classishoz tartozik. De az meghatározza a csoport jellegét. Tehát az első classishoz tartozó modul substitutiók csoportot alkotnak, mely némileg mintegy alcsoportja a modulsubstitutiók csoportjának. Ezt az alcsoportot jelöljük M_2-vel, az eredetit M-mel. Az M_2 jelölés onnan származik, hogy ezen csoport akkép

van jellemezve, hogy 2 sokaszorosainak elhagyásával congruens $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$-el. Nyilvánvaló, hogy a többi ötödik classis substitutiói nem alkotnak csoportot. A többi classiak, illetőleg egy fontos észrevételt kell tennünk. Tegyük fel, hogy van két tetszőleges modulsubstitutionk, melyek mod 2 ugyanannyival a char-val birnak, $\begin{pmatrix}a_1&b_1\\c_1&d_1\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}a_2&b_2\\c_2&d_2\end{pmatrix}$ mod 2 tehát $a_1 \equiv a_2$, $b_1 \equiv b_2$, $c_1 \equiv c_2$, $d_1 \equiv d_2$. vagyis az a két substitutio ugyanabba a classisba tartozik. Imost alkossuk meg a következő substitutiót

$$\begin{pmatrix}a_1&b_1\\c_1&d_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_2&b_2\\c_2&d_2\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}a_1&b_1\\c_1&d_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d_2&-b_2\\-c_2&a_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_1d_2-b_1c_2 & -a_1b_2+b_1a_2\\ c_1d_2-d_1c_2 & -c_1b_2+d_1a_2\end{pmatrix}$$

De $a_1d_2-b_1c_2 \equiv a_1d_1-b_1c_1 \equiv 1$ épigy $-a_1b_2+b_1a_2 \equiv -a_1b_1+a_1b_1 \equiv 0$ $c_1d_2-d_1c_2 \equiv c_1d_1-d_1c_1 \equiv 0$ és $-c_1b_2+d_1c_2 \equiv a_1d_1-b_1c_1 \equiv 1$, tehát a componált substitutio $\equiv \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ azaz az 1. classishoz tartozik, vagyis az M_2 csoportba. Ha tehát $\begin{pmatrix}a_1&b_1\\c_1&d_1\end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix}a_2&b_2\\c_2&d_2\end{pmatrix}$ ugyanabba a classisba tartozó substitutiók, akkor

$$\begin{pmatrix}a_1&b_1\\c_1&d_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_2&b_2\\c_2&d_2\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

Ezt úgy is irhatjuk

$$\begin{pmatrix}a_1&b_1\\c_1&d_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_2&b_2\\c_2&d_2\end{pmatrix}$$

vagyis ha $\begin{pmatrix}a_2&b_2\\c_2&d_2\end{pmatrix}$ az illető classis representansául választatik s mint ilyen t_k, akkor egy ugyanabba a classisba tartozó T_k substitutio elő lett állitható ebben

az alakban

$$T_k = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} . t_k$$

a hol $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ az első classisba tartozik. Tehát a k-adik classis substitutióit úgy nyerjük, hogy az M_2 csoport substitutióit jobbfelől componáljuk a k-adik classis representansával, $M_2 t_k$. Ügyhogy, ha az M_2 csoport összes substitutio

$$(1, \sigma_1, \sigma_2 \ldots\ldots\ldots)$$

akkor pl. a második classis összes substitutiói

$$(t_2, \sigma_1 t_2, \sigma_2 t_2 \ldots\ldots)$$

ugyanigy a többi classisok esetén, miáltal az egész discussió vissza van vezetve az M_2 csoport discussiójára is és a 6-representans discussiójára. Ebből most az is nyilvánvaló, hogy az 1. classison kivül a többi nem alkot csoportot. Mivan az M modul csoport minden substitutiója egyikébe tartozik a 6 classisnak, irhatjuk, hogy

$$M = M_2 (t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6)$$

vagyis az M csoport összes substitutióit kapjuk, ha az M_2 összes substitutióit jobbfelől componáljuk a 6 classis representansával. Az ilyen alcsoportról, mint M_2, azt mondjuk, hogy véges qualitással bíró alcsoport. –

Áttérünk most az elliptikus függvények vizsgálatára az ilyen transformatio alkalmazása esetén. Először is a fellépő állandók magaviseletéről kell tájékozódnunk, hogy t.i. mi történik a $\sqrt{k}$ és $\sqrt{k'}$ állandókkal egy a lin. transformatio esetén. A definitio szerint

$$\sqrt{k} = \frac{\vartheta_2}{\vartheta_3}, \qquad \sqrt{k'} = \frac{\vartheta_0}{\vartheta_3}$$

és $\qquad k^2 + k'^2 = 1$

Hermite külön functionális jelt használ ezen állandók jelölésére

$$\frac{\vartheta_2}{\vartheta_0} = \varphi(\tau) \quad \text{és} \quad \frac{\vartheta_0}{\vartheta_3} = \psi(\tau)$$

s ez a φ és ψ egyértékű függvényét jelenti τ-nak, a melyek azonban csak a felső τ síkon belül existálnak. Ezen jelölés szerint $k^2 = \varphi(\tau)^4$ és $k'^2 = \psi(\tau)^4$, ezeket kell megvizsgálni a τ-ra alkalmazott substitutio hatására nézve, tehát hogy mi lesz

$$\Phi(\tau) = \varphi\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)^4 ? \quad \text{és} \quad \Psi(\tau) = \psi\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)^4 ?$$

Hivatkozunk arra, hogy egy oly substitutió révén, mely congruens $\binom{1\ 0}{0\ 1}$-el, a ϑ függvények bizonyos factoroktól eltekintve magukba transformálódnak

$$\vartheta_3(v'|\tau') = C_{cc'} e^{\pi i c c' v^2} \vartheta_3(v|\tau)$$

$$\vartheta_0(v'|\tau') = C_{01}\, e^{\pi i c v v'}\, \vartheta_0(v|\tau)$$
$$\vartheta_2(v'|\tau') = C_{10}\, e^{\pi i c v v'}\, \vartheta_2(v|\tau)$$
$$\vartheta_1(v'|\tau') = C_{11}\, e^{\pi i c v v'}\, \vartheta_1(v|\tau)$$

és

$$C_{01} = e^{\frac{\pi i}{4}(1-2d)ac}\, C_{00}$$
$$C_{10} = e^{\frac{\pi i}{4}(1-2c)bd}\, C_{00}$$
$$C_{11} = e^{\frac{\pi i}{4}[(c+d)(a+b)-1-2cd(a+b)]}\, C_{00}$$

A τ-tól való függést a theta függvényekben akként fel fogjuk tüntetni, hogy pl: azt írjuk: $\vartheta_{g_1 g_2}(v|\tau) = \vartheta_{g_1 g_2}(\tau)$ A τ_2-nek megfelelő állandókat legyen k_1 és k_1' tehát

$$k_1^2 = \phi(\tau_1) = \frac{\vartheta_2^4(\tau_1)}{\vartheta_3^4(\tau_1)} \quad \text{és} \quad k_1'^2 = \psi(\tau_1) = \frac{\vartheta_0^4(\tau_1)}{\vartheta_3^4(\tau_1)}$$

És most az 1. egyenletek alapján világos, hogy

$$\frac{\vartheta_2^4(\tau_1)}{\vartheta_3^4(\tau_1)} = \frac{C_{10}^4}{C_{00}^4}\,\frac{\vartheta_2^4(\tau)}{\vartheta_3^4(\tau)}$$

s mivel $b \equiv 0$ tehát maga $bd \equiv 0$, azért $\frac{C_{10}}{C_{00}} = e^{\pi i (1-2a)ba} = 1$, úgyhogy

$$\frac{\vartheta_2^4(\tau_1)}{\vartheta_3^4(\tau_1)} = \frac{\vartheta_2^4(\tau)}{\vartheta_3^4(\tau)} \quad \text{azaz} \quad \phi\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = \phi(\tau)$$

Tehát a $\phi(\tau)$ függvény az S_2 csoport substitutióinak alkalmazásával nem változik. Előre megjósolható, hogy $\phi(\tau) + \psi(\tau) = 1$, ha tehát $\phi(\tau)$ nem változik $\psi(\tau)$ sem változik. Vizsgáljuk most k^2-et a reprezentánsok alkalmazásával. Ezek a reprezentánsok összeállíthatók a fundamentál substitutiokból következő módon:

$t_2 = S_2$, $t_3 = S_2 S_1$ $t_4 = S_2 S_1 S_2$, $t_5 = S_1$, $t_6 = S_1 S_2$

Ha tehát csak rep. mo. akarjuk vizsgálni a k^2-ra való befolyásukra nézve, elég megvizsgálni a két fundamentál substitutiót. E ezekre vonatkozó képletek:

$$\vartheta_0(v|1+\tau) = \vartheta_3(v|\tau)$$
$$\vartheta_3(v|1+\tau) = \vartheta_0(v|\tau)$$
$$\vartheta_2(v|1+\tau) = e^{\frac{\pi i}{4}} \vartheta_2(v|\tau)$$
$$\vartheta_1(v|1+\tau) = e^{\frac{\pi i}{4}} \vartheta_1(v|\tau)$$

ha $\tau_1 = \tau + 1$ akkor

$$\Phi(\tau_1) = k_1^2 = \frac{\vartheta_2^4(\tau_1)}{\vartheta_3^4(\tau_1)} = \frac{e^{\frac{\pi i}{4}} \vartheta_2^4(\tau)}{\vartheta_0^4(\tau)} = -\frac{k^2}{k'^2} = \frac{k^2}{k^2-1}$$

mivel $k^2 = \frac{\vartheta_2^4}{\vartheta_3^4}$, $k'^2 = \frac{\vartheta_0^4}{\vartheta_3^4}$. Vagyis, ha τ-ra alkalmazzuk a $t_5 = S_1$ substitutiót

$$\Phi(t_5 \tau) = \frac{\Phi(\tau)}{\Phi(\tau)-1}$$

$\Phi(\tau)$ egy lin. substitutiót szenved, melyet σ_5-tel jelölünk, úgyhogy

$$\Phi(t_5 \tau) = \sigma_5 \Phi(\tau)$$

Továbbá láttuk, hogy

$$\vartheta_3\left(\frac{v}{\tau}\middle|-\frac{1}{\tau}\right) = e^{\frac{\pi i v^2}{\tau}} (\sqrt{-i\tau})\, \vartheta_3(v|\tau)$$
$$\vartheta_2\left(\frac{v}{\tau}\middle|-\frac{1}{\tau}\right) = e^{\frac{\pi i v^2}{\tau}} (\sqrt{-i\tau})\, \vartheta_0(v|\tau)$$
$$\vartheta_0\left(\frac{v}{\tau}\middle|-\frac{1}{\tau}\right) = e^{\frac{\pi i v^2}{\tau}} (\sqrt{-i\tau})\, \vartheta_2(v|\tau)$$
$$\vartheta_1\left(\frac{v}{\tau}\middle|-\frac{1}{\tau}\right) = -i e^{\frac{\pi i v^2}{\tau}} (\sqrt{-i\tau})\, \vartheta_1(v|\tau)$$

És most alkalmazva τ-ra az $S_2 = t_2$ substitutiót, lesz $\phi(t_2\tau) = \frac{\vartheta_2^4(t_2\tau)}{\vartheta_3^4(t_2\tau)} = \frac{\vartheta_0^4(\tau)}{\vartheta_3^4(\tau)} = \varepsilon^2 = 1-\alpha^2 = 1-\phi(\tau)$

tehát t_2 alkalmazásával τ-ra, a $\phi(\tau)$ egy lin. substitutiót szenved, melyet σ_2-vel jelölünk.

$$\phi(t_2\tau) = 1-\phi(\tau) = \sigma_2\,\phi(\tau)$$

E kettőnek combinálásával adódik a többi transformatio hatása t.i.

$$\phi(t_3\tau) = \phi(t_2 t_5 \tau) = 1-\phi(t_5\tau) = 1-\frac{\phi(\tau)}{\phi(\tau)-1} = \frac{1}{1-\phi(\tau)}$$

tehát $\phi(t_3\tau) = \frac{1}{1-\phi(\tau)} = \sigma_3\,\phi(\tau)$

és ez a σ_3 össze van téve σ_2 és σ_5-ből, épúgy, mint t_3 a t_2 és t_5-ből

$$\phi(t_4\tau) = \phi(t_2 t_5 t_2\tau) = 1-\phi(t_5 t_2\tau) = 1-\frac{\phi(t_2\tau)}{\phi(t_2\tau)-1} =$$

$$= 1+\frac{1-\phi(\tau)}{1+\phi(\tau)-1} = \frac{1}{\phi(\tau)},$$ tehát ismét egy lin. substitutio $\phi(t_4\tau) = \frac{1}{\phi(\tau)} = \sigma_4\,\phi(\tau)$

És végre $\phi(t_6\tau) = \phi(t_5 t_2\tau) = \frac{\phi(t_2\tau)}{\phi(t_2\tau)-1} = \frac{1-\phi(\tau)}{1-\phi(\tau)-1} =$

$= \frac{\phi(\tau)-1}{\phi(\tau)}$ ez is egy lin. substitutio

$$\phi(t_6\tau) = \frac{\phi(\tau)-1}{\phi(\tau)} = \sigma_6\,\phi(\tau)$$

Ezzel k^2 magatartása teljesen el van intézve. Tudjuk, hogy egy $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ substitutio folytán ϕ felveheti a kö-

vetkező értékeket

$$\phi\left(\frac{\alpha\tau+b}{c\tau+d}\right) = \begin{cases} \phi(\tau) \\ \sigma_2\phi(\tau) \\ \sigma_3\phi(\tau) \\ \sigma_4\phi(\tau) \\ \sigma_5\phi(\tau) \\ \sigma_6\phi(\tau) \end{cases}.$$

Ha $\phi(\tau)=\lambda$, akkor ez a hat érték

$$\lambda,\ 1-\lambda,\ \frac{1}{1-\lambda},\ \frac{1}{\lambda},\ \frac{\lambda}{\lambda-1},\ \frac{\lambda-1}{\lambda}$$

Ez az a 6 substitutio, mely kihat a λ-ra, ha τ egy tetszőleges modulsubstitutiót szenved. Ebből következik, hogy ez a 6 lin. substitutio csoportot alkot, mert a modulsubstitutiok összessége csoportot alkot, ezeknek alkalmazásával pedig előkerül ez a 6 lin. substitutio, s így ezeknek componálása szintén egy ilyen substitutiót fog előhozni. Ez a 6 úgynevezett projectiv, vagy tört lin. substitutio tehát véges csoportot alkot. Ez a 6 substitutio a geometriában a kettős viszony elméletében is szerepel. Ha ugyanis négy pont kettős viszonya λ, azon $(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)=\lambda$, akkor a 4 pont permutálásával kiadódó 24 viszonyszám közül csak 6 különböző, s pedig épen fenti 6 érték.

Ha τ értékének egy tetszőleges symmetricus függvényét képezzük, pl:

$$\Sigma\left(\tau, \tau-1, \frac{1}{\tau-1}, \frac{1}{\tau}, \frac{1}{\tau}, \frac{\tau-1}{\tau}\right) = J(\tau)$$

akkor ez olyan függvénye a τ-nak, mely egy tetszőleges modulusbstitutio alkalmazásával nem változtatja értékét.

Tovább megyünk most az elliptikus függvények tanulmányozásában, s megvizsgáljuk azoknak magatartását a fundamental substitutiók alkalmazásával. A definitio szerint

$$sn\, u = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_0(v)}$$

$$cn\, u = \sqrt{\frac{k'}{k}} \frac{\vartheta_2(v)}{\vartheta_0(v)}$$

$$dn\, u = \sqrt{k'} \frac{\vartheta_3(v)}{\vartheta_0(v)}$$

$$v = \frac{u}{2K}, \quad 2K = \pi \vartheta_3^2$$

Lássuk, miként változnak ezek az adatok valamint a constansok a két fund. substitutio alkalmazásával. Az elsőnél $\tau_1 = \tau + 1$, tehát ha $\sqrt{k}$ átmegy $\sqrt{k_1}$-be, akkor $\sqrt{k_1} = \frac{\vartheta_2(\tau_1)}{\vartheta_3(\tau_1)} = \frac{e^{\frac{\pi i}{4}} \vartheta_2(\tau)}{\vartheta_0(\tau)}$

de $\sqrt{k} = \frac{\vartheta_2}{\vartheta_3}$, $\sqrt{k'} = \frac{\vartheta_0}{\vartheta_3}$ tehát $\sqrt{k_1} = e^{\frac{\pi i}{4}} \sqrt{\frac{k}{k'}}$

Épenigy $\sqrt{k_1'} = \frac{\vartheta_0(\tau_1)}{\vartheta_3(\tau_1)} = \frac{\vartheta_3(\tau)}{\vartheta_0(\tau)} = \sqrt{\frac{1}{k'}}$

$$2K_1 = \pi \vartheta_3^2(\tau_1) = \pi \vartheta_0^2(\tau) = \pi k' \vartheta_3^2(\tau) = k' 2K$$

$$2K_1' i = \tau, 2\, K_1 = (\tau+1)\, k' 2K = k'(2K'i + 2K)$$

mert $\tau = \frac{K'i}{K}$ Végre $v_1 = v$ és $u_1 = v\,2K_1 = vK'\,2K = K'u$

Összefoglalva, ha τ átmegy $\tau+1$-be, akkor

$2K$	$2K'i$	$\sqrt{k}$	$\sqrt{k'}$	v	u	átmegy
$K'2K$	$u'(2K+2K'i)$	$e^{\frac{\pi i}{4}}\sqrt{\frac{k}{k'}i}$	$\sqrt{\frac{1}{k'}}$	v	$K'u$	$-ba$

A második fundamentál substitutionál $\tau_1 = -\frac{1}{\tau}$ lehát $\sqrt{k_1} = \frac{\vartheta_2(\tau_1)}{\vartheta_3(\tau_1)} = \frac{\vartheta_0(\tau)}{\vartheta_3(\tau)} = \sqrt{k'}$ és $\sqrt{k_1'} = \frac{\vartheta_0(\tau_1)}{\vartheta_3(\tau_1)} = \frac{\vartheta_2(\tau)}{\vartheta_3(\tau)} = \sqrt{k}$

$2K_1 = \pi\vartheta_3^2(\tau_1) = \pi\left(\sqrt{-i\tau}\right)^2\vartheta_3^2(\tau) = \pi\cdot -i\tau\,\vartheta_3^2(\tau) = -\pi i\tau\,\vartheta_3^2(\tau) =$
$= -i\tau\,2K$ de $\tau = \frac{2K'i}{2K}$, tehát $\tau\,2K = 2K'i$ és így $2K_1 = 2K'$
$2K_1'i = \tau_1\,2K_1 = -\frac{1}{\tau}\,2K' = -\frac{2K}{2K'i}\,2K' = 2Ki$, végre
$v_1 = \frac{v}{c\tau+d} = \frac{v}{\tau}$, mert itt $c=1$, $b=-1$, és $u_1 = v_1 2K_1 =$
$= \frac{v}{\tau}\,2K' = v\,\frac{2K}{2K'i}\,2K' = -v\,2Ki$ és mivel $v\,2K = u$, lesz
$u_1 = -ui$ — Összefoglalva, ha τ átmegy $(-\frac{1}{\tau})$-ba, akkor

$2K$	$2K'i$	$\sqrt{k}$	$\sqrt{k'}$	v	u	átmegy
$2K'$	$2Ki$	$\sqrt{k'}$	$\sqrt{k}$	$\frac{v}{\tau}$	$-ui$	$-be$.

Ezek után átterhetünk magunknak az elliptikus függvényeknek transformatiójához. Az első fundamentalis substitutio alkalmazásával

$$sn(u_1|\tau_1) = e^{-\frac{\pi i}{4}}\sqrt{\frac{k'}{k}}\,\frac{e^{\frac{\pi i}{4}}\vartheta_1(v|\tau)}{\vartheta_3(v|\tau)} = \sqrt{\frac{k'}{k}}\sqrt{kk'}\,\frac{sn(u|\tau)}{dn(u|\tau)}$$

tehát
$$sn(u'n(\tau+1) = k'\,\frac{sn(u|\tau)}{dn(u|\tau)}$$
$$cn(k'u|\tau+1) = \frac{cn(u|\tau)}{dn(u|\tau)}$$

$$dn\left[u'u \mid \tau+1\right) = \frac{1}{dn(u|\tau)}$$

A második fundamentál substitutio alkalmazásával

$$sn(u,1\tau,) = \frac{1}{\sqrt{k_1}} \frac{-i\, e^{\frac{\pi i v^2}{\tau}} \vartheta_1(v\sqrt{-i\tau}\,|\,\vartheta_1(v|\tau)}{e^{\frac{\pi i v^2}{\tau}} \vartheta_2(v\sqrt{-i\tau})\,\vartheta_2(v|\tau)} =$$

$$= \frac{-i\sqrt{k}\, sn(u|\tau)}{\sqrt{k}\sqrt{\frac{k}{k_1}}\, cn(u|\tau)} \quad \text{tehát}$$

$$sn\left(-ui\,|\,-\tfrac{1}{\tau}\right) = -i\,\frac{sn(u|\tau)}{cn(u|\tau)}$$

$$cn\left(-ui|-\tfrac{1}{\tau}\right) = \frac{1}{cn(u|\tau)}$$

$$dn\left(-ui\,|\,-\tfrac{1}{\tau}\right) = \frac{dn(u|\tau)}{cn(u|\tau)}$$

Ezzel most minden tetszőleges modulsubstitutióra át tudjuk tekinteni a három elliptikus függvény változását, mert nyilvánvaló, hogy épúgy, a mint a tetszőleges modulsubstitutio összerakható a két fundamentál substitutióból, a transformált ϑ függvény is ezen két fundamentál transformatio képleteiből rakható össze. Ha a $4K$, $4K'i$ periodusfüggvények, helyett megvizsgáljuk a $\xi = sn^2(u|\tau)$ függvényt, melynek periodusai $2K$ és $2K'i$, egyszerűbb alakot nyer a transformált függvény, így pl. ha $sn^2(u|\tau) = \lambda(u|\tau)$, akkor

$$\lambda\left[k'u\,|\,\tau+1\right) = k'^2\,\frac{\lambda(u|\tau)}{1-k'\lambda(u|\tau)}$$

és

$$\lambda\left(-ui\,|\,-\tfrac{1}{\tau}\right) = -\frac{\lambda(u|\tau)}{1-\lambda(u|\tau)}$$

Tehát 1 egyszerűen tört lineáris substitutiót szenved. Ha τ-ra egy tetszőleges $\tau_1 = \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$ modulussubstitutiót alkalmazunk, akkor a megfelelő u lesz $u_1 = v.2K_1' = v.\pi\vartheta_3^2(0|\tau_1)$ A $\vartheta_3^2(0|\tau_1)$ pedig egy ϑ, melynek természete attól függ, hogy a modulussubstitutio miféle classishoz tartozik, ezért irjuk,

$$u_1 = \frac{u}{2K}\pi\vartheta_3^2(0|\tau_1) = \frac{u}{\pi\vartheta_3^2(0|\tau)}\pi\vartheta_3^2(0|\tau_1) =$$

$= u\frac{\vartheta_3^2(0|\tau_1)}{\vartheta_3^2(0|\tau)}$ tehát u_1 és u - tól csak egy állandó factorban különbözik, melyet minden egyes substitutio esetén meg tudunk határozni.

Mondhatjuk tehát, hogy

$$\lambda\left(u\frac{\vartheta_3^2(0|\frac{a\tau+b}{c\tau+d})}{\vartheta_3^2(0|\tau)}\,\middle|\,\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = \frac{\alpha\lambda(u|\tau)+\beta}{\gamma\lambda(u|\tau)+\delta}$$

Természetes, hogy $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ igen complicált, de jól meghatározott módon függnek az a, b, c, d, egész számoktól. Az általános eredmény tehát az, hogy ha τ-ra egy modulussubstitutiót alkalmazunk, akkor $\xi = sn^2u$ egy tört lin. substitutiót szenved, állandó együtthatókkal. Vészünk mi következik ebből.

$\xi = sn^2u$ közelebbről volt értelmezve

$$u = \int_0^{\xi}\frac{d\xi}{\sqrt{\xi(1-\xi)(1-k^2\xi)}}$$

melynek inverz függvénye $\xi = sn^2 u$. A fenti eredmény most azt mondja, hogy ha τ és u helyébe lép

$$\tau_1 = \frac{a\tau+b}{c\tau+d} \quad \text{és} \quad u_1 = u\,\frac{\vartheta_0^2\left(0 \mid \frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)}{\vartheta_3^2(0\mid\tau)}$$

akkor ξ helyébe lép $\xi = \frac{\alpha\xi+\beta}{\gamma\xi+\delta}$; nyilvánvaló, hogy ξ is biperiodikus függvénye u-nak, és pedig másodfokú, de más periodusokkal. ξ tehát u-nak kétp. egy értékű függvénye és így eleget tesz a következő differenciális egyenletnek

$$\frac{d\xi}{du} = \sqrt{g(\xi)}$$

ahol g a ξ-nak 3 v. 4. fokú egész rationalis függvénye. Világos, hogy $\frac{d\xi}{du_1}$ a $\sqrt{g(\xi)}$-től csak egy állandó factorban különbözik, úgy hogy

$$\frac{d\xi}{du_1} = \sqrt{a_0(\xi-a_1)(\xi-a_2)(\xi-a_3)(\xi-a_4)}$$

De $$\frac{d\xi}{du} = \sqrt{4\xi(1-\xi)(1-k^2\xi)}$$

és ha a $\xi = \frac{\alpha\xi+\beta}{\gamma\xi+\delta}$-ból ξ értékét kiszámítjuk $\xi = \frac{-\delta\cdot\beta}{\gamma\cdot\alpha}$ és ezt behelyettesítjük $\frac{d\xi}{du}$-ba, úgy szintén u helyébe u_1-et, akkor $\frac{d\xi}{du}$ differentiális egyenlete átmegy $\frac{d\xi}{du_1}$ diff. egyenletébe. Ugyanis $d\xi = \frac{(\alpha\delta-\beta\gamma)\,d\xi}{(\gamma\xi-\alpha)^2}$

$$4\xi(1-\xi)(1-k^2\xi) = 4\,\frac{-\delta\xi+\beta}{\gamma\xi-\alpha}\left(1-\frac{-\delta\xi+\beta}{\gamma\xi-\alpha}\right)\left(1-k^2\,\frac{-\delta\xi+\beta}{\gamma\xi+\alpha}\right)$$

és:

$$\frac{d\xi}{\sqrt{4\xi(1-\xi)(1-k^2\xi)}} = \frac{(\alpha\delta-\beta\gamma)\,d\xi}{2\sqrt{(\gamma\xi-\alpha)(-\delta\xi+\beta)[(\gamma+\delta)\xi-(\alpha+\beta)][(\gamma+k^2\delta)\xi-(\alpha+k^2\beta)]}}$$

vagyis $$\frac{d\xi}{\sqrt{4\xi(1-\xi)(1-k^2\xi)}} = \frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{2\sqrt{\gamma_0-\delta(\gamma+\delta)(\gamma+k^2\delta)}} \cdot \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi-\frac{\alpha}{\gamma})(\xi-\frac{\beta}{\delta})(\xi-\frac{\alpha+\beta}{\gamma+\delta})(\xi-\frac{\alpha+k^2\beta}{\gamma+k^2\delta})}}$$

De tudjuk, hogy

$$\frac{d\xi}{\sqrt{(\xi-\alpha_1)(\xi-\alpha_2)(\xi-\alpha_3)(\xi-\alpha_4)}} = \sqrt{a_0}\,du_1$$

$$\frac{d\xi}{\sqrt{4\xi(1-\xi)(1-k^2\xi)}} = du$$

s mivel du_1 a du-tól csak egy állandó factorban különböznik, következik, hogy

$$\sqrt{(\xi-\alpha_1)(\xi-\alpha_2)(\xi-\alpha_3)(\xi-\alpha_4)} = \sqrt{(\xi-\frac{\alpha}{\gamma})(\xi-\frac{\beta}{\delta})(\xi-\frac{\alpha+\beta}{\gamma+\delta})(\xi-\frac{\alpha+k^2\beta}{\gamma+k^2\delta})}$$

a miből következik, hogy

$$\alpha_1=\frac{\alpha}{\gamma},\quad \alpha_2=\frac{\beta}{\delta},\quad \alpha_3=\frac{\alpha+\beta}{\gamma+\delta},\quad \alpha_4=\frac{\alpha+k^2\beta}{\gamma+k^2\delta}=\frac{\alpha\frac{1}{k^2}+\beta}{\gamma\frac{1}{k^2}+\delta}$$

Ebből látható, hogy $\xi=\alpha_4$, az az érték, mely megfelel a $\xi=\frac{1}{k^2}$-nak. $\xi=\alpha_3$ megfelel a $\xi=1$, $\xi=\alpha_2$ a $\xi=0$ és $\xi=\alpha_1$ a $\xi=\infty$ értéknek. Tehát $\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3\,\alpha_4$ azon ξ értékek, melyek megfelelnek a négyzetgyökjel alatt szereplő ξ-ás kifejezés 0 pontjainak. Az α_4 kifejezéséből kiszámítva $\frac{1}{k^2}$-ot, lesz

$$\frac{1}{k^2}=\frac{\delta\alpha_4-\beta}{-\gamma\alpha_4+\alpha}=\frac{\alpha_4-\alpha_2}{\alpha_4-\alpha_1}\cdot\frac{-\delta}{\gamma}=\frac{\alpha_4-\alpha_2}{\alpha_4-\alpha_1}\cdot\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\alpha\delta-\beta\gamma}\cdot\frac{\delta}{\gamma}=$$

$$= \frac{\alpha_4-\alpha_2}{\alpha_4-\alpha_1}\cdot\frac{\alpha\beta+\beta\gamma-\alpha\gamma-\alpha\delta}{\alpha\delta+\beta\delta-\beta\gamma-\gamma\delta}\cdot\frac{\delta}{\gamma} = \frac{\alpha-\alpha_2}{\alpha_4-\alpha_1}\,\frac{\frac{\alpha+\beta}{\gamma+\delta}-\frac{\alpha}{\gamma}}{\frac{\alpha+\beta}{\gamma+\delta}-\frac{\beta}{\delta}} =$$

$$= \frac{\alpha_4-\alpha_2}{\alpha_4-\alpha_1}\cdot\frac{\alpha_3-\alpha_1}{\alpha_3-\alpha_2} \qquad \text{vagyis}$$

$$k^2 = \frac{\alpha_4-\alpha_1}{\alpha_4-\alpha_2} : \frac{\alpha_3-\alpha_1}{\alpha_3-\alpha_2} = (\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)$$

Tehát k^2 nem egyéb, mint az $\alpha_1 \dots \alpha_4$ mennyiségek kettős viszonya, a most kitűnik az összefüggés a kettős viszony elmélete és a modulus elmélete között, melynél láttuk, hogy minden tetszőleges modulustransformatio alkalmazásával k^2 csak azt a 6 értéket képes felvenni. A tetszőleges lin. transformatio k^2-et előállítja, mint 4 mennyiség kettős viszonyát és pedig itt egyéb tetszőlegesség nincs, mint ezen 4 mennyiség sorrendje. Ha ezt minden lehető permutálják, 6 különböző értéket kapunk. Ez magyarázza, hogy miért adódott az összes modulustransformationeknél az a 6 érték, azért, mert k^2 maga egy kettős viszony.

Az itt alkalmazott számítást visszafelé követve, ha kiindulunk az $\int \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi-\alpha_1)\dots(\xi-\alpha_4)}}$ integrálból, adódik, hogy

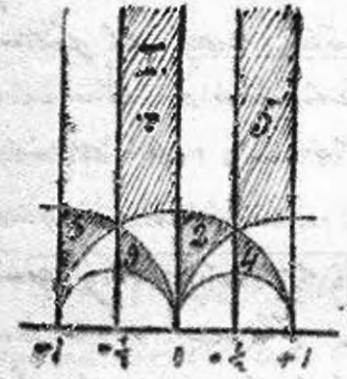
$$\int \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi-\alpha_1)\dots(\xi-\alpha_4)}} = \text{Const.} \int \frac{d\xi}{\sqrt{\xi(1-\xi)(1-k^2\xi)}}$$

s ha $\xi = z^2$,

$$= 2\cdot\int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

a t' hat értéke közül mutatom az valamelyik megfelelő valós és molynek absolut értéke kisebb, mint 1, akkor t.i. a τ elliptikus függvényt a valós értékei mellett valós értékkel kiveszi.

Miután a lineáris transformációk elméletét elmélettel elvégeztük, meg kell vizsgálnunk a modulus két értékének szerepét az geometriai képzeletében, melyet a modulusháromszögek számára a fölső τ félsíkon kellett találni. Ott ugyanis fundamentalis tartományunk 6 darab részét vettük, a pedig a straffozott részekre nézve. Vegyünk most az 1. tartományban egy τ pontot, akkor egy egyszerű geometriai okoskodás közvetlenül mutatja, hogy a τ-nak megfelelő pontja 6 tartományban nem egyéb, mint $\frac{\tau+1}{\tau}$, a 3-ban $-\frac{1}{\tau+1}$, 2-ben $\alpha\frac{1}{\tau}$, 5-ben $\tau+1$ és 4-ben $\frac{\tau}{\tau+1}$; tehát az 1, 2, 3, 4, 5, 6 tartományban megfelelőleg a $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6$ modulusértékek szerepelnek. Vagyis, ha az 1. tartományban a modulusrendszer alaptartományán belüli τ értékekre alkalmazzuk a $t_1, t_2 \ldots\ldots t_6$ reprezentánsokat, akkor azokból a többi 5 straffozott tartományé. Ha a nem straffozott 1. tar-



tartományból indulunk ki, más eredményhez jutunk. Használhatjuk tehát, hogy ha az eredeti modulcsoport alaptartományára alkalmazzuk ezt a 6 reprezentánst, akkor ezek-vel ekvivalens 6 tartomány, melyek kellő sorrendben kitöltik a nagy $(-1, 1, \infty)$ ábrát. Ez azt mondja, hogy a modulcsoportból mindegy kiválik a $t_1, \ldots t_6$ reprezentáns, visszamarad az M_2 csoport, lévén $M = M_2 (t_1, \ldots t_6)$, s mivel a 6 reprezentáns alkalmazásával a modulcsoport fundamentál tartományába, akárhányadik a nagy tartomány, következik, hogy a nagy tartomány az M_2 csoport fundamentál tartománya, vagyis a $(1, \mu, \nu, \infty)$ tartományon belül correspondeál minden τ ponttal egy és csakis egy pont valamely modulsubstitutio révén. A $(-1, 0, +1, \infty)$ nagy tartományon belül correspondeál minden τ-val 6 τ a modulcsoport substitutiói révén s pedig az, mely az alaptartományban fekvő τ-ból a 6 reprezentáns alkalmazásával keletkezik és így τ az M_2 valamely substitutió-ja révén.

A nagy négyszög correspondeáló oldalai adják az M_2 csoport fundamentál substitutióit. A kék párhuzamos oldal egymásba átmegy a $(\tau + 2)$ substitutio révén, a kék kör-ívalakú oldal pedig $\frac{\tau}{2\tau+1}$ substitutióval.

Tehát éppígy, mint a M modulcsoport össze van rakva a $\tau+1$ és $-\frac{1}{\tau}$ fundamentalsubstitutiokból, éppígy összetehető M_2 a $(\tau+2)$ és $\frac{\tau}{2\tau+1}$ -ből. Ez utóbbi eredményt tisztán számelméleti módon is lehet bebizonyítani. E végett a négyzetes formák aequivalentiáját nemcsak úgy kell értelmezni, hogy $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ egész számú és unimodularis legyen, hanem csak azokat a négyzetes formákat kell aequivalenseknek venni, melyek az első osztályba tartoznak, tehát $ad = 1$

$$b, c \equiv 0 \pmod{2}.$$

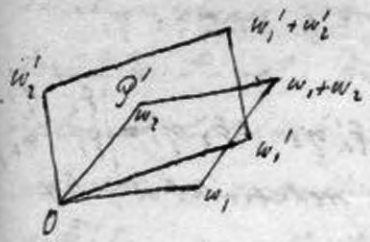
A k^2 egyértékű függvénye τ-nak, mely az M_2 csoport substitutiónak alkalmazásával nem változik, $k^2 = \phi(\tau)$ tehát $\phi(\tau)$ az M_2 csoportra nézve invariáns, de az M csoportra nézve már nem invariáns, hanem ebben 6 értéket képes felvenni. –

Ezen észrevételek után áttérünk a lin. transformatio egy új értelmezéséhez és ezzel kapcsolatban általánosításához.

Kiindulunk az w_1, w_2 periodusokhoz tartozó periodus-parallelogrammából. Legyen w_1' és w_2' egy tetszőleges más pár

$$w_1' = \alpha w_1 + \beta w_2$$
$$w_2' = \gamma w_1 + \delta w_2$$

Ha $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, akkor ($w_1'$ és w_2') minden fundamentál vagy primitiv periodusok. De mi itt csak azt tesszük fel, hogy $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ egész számok és $\alpha\delta - \beta\gamma = n > 0$ legyen, tehát a determináns egy legyen. Ilyen feltétel mellett t.i.



pozitiv egész szám $J\left(\frac{w_2'}{w_1'}\right) > 0$ lesz.

Vizsgáljuk most az (w_1, w_2) p.hoz tartozó P és az (w_1', w_2') p.hoz tartozó P' parallelogrammák viszonyát. E végett legyen

$$w_1 = \xi_2 + \eta_2 i \qquad w_1' = \xi_1' + \eta_1' i$$
$$w_2 = \xi_2 + \eta_2 i \qquad w_2' = \xi_2' + \eta_2' i$$

akkor

$$\xi_1' = \alpha\xi_1 + \beta\xi_2$$
$$\eta_1' = \alpha\eta_1 + \beta\eta_2$$
$$\xi_2' = \gamma\xi_1 + \delta\xi_2$$
$$\eta_2' = \gamma\eta_1 + \delta\eta_2$$

De egy geometriai tétel szerint, ha egy háromszög sögpontjainak coordinátái $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, $x_3 y_3$, akkor a háromszög területe:

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

a determinans abszolut értékét véve. E szerint a P paral-

lelogramma területe:

$$P = 2(0w_1w_2) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \xi_1 & \eta_1 \\ 1 & \xi_2 & \eta_2 \end{vmatrix} = \xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1$$

Per analogiam adódik, hogy $P' = \xi_1'\eta_2' - \xi_2'\eta_1' = \begin{vmatrix} \xi_1' & \eta_1' \\ \xi_2' & \eta_2' \end{vmatrix}$

és betéve az elemek értékét a fenneti relatiókból, lesz

$$P' = \begin{vmatrix} \alpha\xi_1 + \beta\xi_2 & \alpha\eta_1 + \beta\eta_2 \\ \gamma\xi_1 + \delta\xi_2 & \gamma\eta_1 + \delta\eta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 \end{vmatrix}$$

és mivel $\alpha\delta - \beta\gamma = n$, kapjuk, hogy

$$P' = n \cdot P.$$

Tehát az új periodusokból alkotott parallelogramma területe annyi, mint az eredeti periodusokból alkotott parallelogramma területe szorozva a transformatió determinánsával. Ha a transformatió lineáris, spec $n = 1$, akkor a két pparallelogramma területe egyenlő. És fordítva, ha a két pparallelogramma területe egyenlő, a két periodus-pár lineáris transformatióval megy át egymásba. Egy ilyen transformatiónál tehát a parallelogramma területe invarians.

Ha azonban az új parallelogramma területe n-ször akkora, mint az eredeti, $P' = nP$, akkora periodus kettő megválasztása mellett sikerülni fog az új P'

parallelogrammát directe felbontani a eredeti P pppre, tehát a olyan ppra, melyek közül mindegyik egyenlő területü P-vel. Ez a tétel egy speciális esete egy általános tételnek, melyet Bólyai Farkas kimondott a végszerüen egyenlő területekről, s mely szerint, ha két síkábra egyenlő területü, akkor felbontható véges számú oly részre, hogy a megfelelő részek congruensek legyenek. Bólyai ezt a tételt a Tentamenben bizonyítja, de nem egészen szigoruan, csak Réthy mutatta ki, hogy a Bólyai féle tétel nem áll egész általánossággal. Legyen pl. ha a két ábra egyenesektől határolt polygon, úgy hogy a fenti kimondott tétel egyenesen kiadódik a Bólyai féléből. Mi később ezen igazságnak más és pedig arithmeticai bizonyitását fogjuk adni. Egyelőre csak egy következtetését vonjunk le belőle, t.i. abból, hogy a P' pp. megfelel a P pp.nak. Képzeljünk most egy bip. függvényt, mely a P' pp. belül minden értéket kétszer vesz fel. Ez a függvény legyen $\varphi(u)$, deriváltja $\varphi'(u)$. Aztán legyen $\varphi(u)$ deriváltja $\varphi'(u)$ egy olyan másodfokú bp. függvény, mely a P ppphoz tartozik. Ez a $\varphi(u)$ függvény tehát a P' pp. belül minden értéket $2n$-szer veszi fel, vagyis φ a P' ppra is bp. függvény. Ebből következik, hogy

$\varphi(u)$ és $\varphi'(u)$ rationalisan kifejezhető $\psi(u)$ és $\psi'(u)$-vel

$$\varphi(u) = \left\{ \begin{matrix} \\ \varphi'(u) = \end{matrix} \right. R(\psi(u), \psi'(u))$$

s emiek a rat. függvénynek a fokszáma n; vagyis $\varphi(u)$ és $\psi(u)$ között létezik egy algebrai egyenlet

$$\Phi(\varphi, \psi) = 0$$

mely φ-ben másod-, ψ-ben $2n$-edfokú. Tehát két bip. függvény között, melyekhez tartozó pparallelogrammak egymásból egy ilyen $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $ad - bc = n$ transformatioval keletkeztek, létezik egy ilyen algebrai egyenlet. Az átmenetet egy ilyen φ bp. függvénytől egy ψ bp. függvényhez nekünk nevezni általános n-edrendü transformationak. Az általános szó arra vonatkozik, hogy itt általános esetben φ még másodfokban szerepel a $\Phi = 0$ egyenletben, mert lehet, hogy speciális esetekben φ^2 kiesik; ha ez megtörténik, tehát az egyenlet ilyen alakú

$$\Phi(\varphi', \psi^m) = 0$$

akkor φ rationalisan kifejezhető ψ-vel. Ilyenkor rationalisan n-edrendü transformatióról beszélünk. Az általános transformatio a rationális transformatiora visszavezethető. Az n-edrendü transformatio

általánosítását képezi az eddig tárgyalt első rendű transformationak, a hol a Φ egyenlet φ és ψ-ben másodfokú.

Átmegyünk most az általános n-edrendű transformatio problemájának rendszeres tárgyalásához. Látni fogjuk, hogy az n-edrendű transformatio egy igen egyszerű transformatióból és egy lin. transformatióból összerakható.

Épügy, mint az elsőrendű transformatiónál, itt fogunk menni a periodusoktól azoknak quotienséhez és $\frac{\omega_2}{\omega_1} = \tau$ irva, lesz a transformatio

$$\frac{\gamma + \delta\tau}{\alpha + \beta\tau} \quad , \quad \alpha\delta - \beta\gamma = n$$

vagy rendes jelöléssel $\frac{a\tau + b}{c\tau + d}$, $ad - bc = n$

Ez csak akkor modulensubstitutio, ha $n = 1$

Feladatunk megvizsgálni a ϑ függvények magatartását egy ily n-edrendű substitutio esetén, azaz mi lesz

$$\vartheta_{g_1 g_2}\left(v' \,|\, \frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) \quad , ad - bc = n$$

Láttuk, hogy az elsőrendű ϑ függvények periodustulajdonságait a következő képlet egyesíti.

$$\vartheta_{g_1 g_2}(v' + \lambda + \mu\tau \,|\, \tau') = e^{-\pi i(\lambda g_1' + \mu g_2' + \ldots + \pi i(\lambda\mu' + \mu\nu')}$$

$$\cdot \vartheta_{g_1' g_2'}(v' \,|\, \tau')$$

a hol $v' = \frac{nv}{c\tau+d}$, $\tau' = \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$, $ad-bc=n$; ebből

$$\tau = -\frac{d\tau'+b}{c\tau'-a}$$

Most hasonló eljárással, mint a lin. transzformációnál, bevezetünk egy $\varphi(v)$ függvényt, következőképen

$$\varphi(v) = e^{-\frac{ni\,nc\,vv}{c\tau+d}} \quad \vartheta_{g_1' g_2'}(v'|\tau') = e^{-ni\,cvv'}\,\vartheta_{g_1' g_2'}(v|\tau)$$

Megvizsgáljuk, miképen viselkedik a $\varphi(v)$ függvény, ha v szaporodik 1 és τ-val. E végett fel kell írni, hogy ni történik v'-el, ha v szaporodik 1 és τ-val. Ha v helyébe jö $v+1$, akkor v' helyébe jö

$$\frac{n(v+1)}{c\tau+d} = v' + \frac{n}{c\frac{-d\tau'+b}{c\tau'-a}+d} = v' + \frac{n(c\tau'-a)}{\underbrace{cb-ad}_{-n}} = v'+a-c\tau'$$

Ha v helyébe jö $v+\tau$, akkor v' helyébe jö

$$\frac{n(v+\tau)}{c\tau+d} = v' + \frac{n-\frac{d\tau'+b}{c\tau'-a}}{c-\frac{d\tau'+b}{c\tau'-a}+d} = v' + \frac{n(b-d\tau')}{bc-ad} = v'-b+d\tau$$

És most az általános képlet tekintetbe vételével, ha abban $\lambda=a$, $\mu=-c$

$$\varphi(v+1) = e^{\frac{-ni\,nc(v+1)^2}{c\tau+d}}\,\vartheta_{g_1' g_2'}(v'+a-c\tau'|\tau')$$

$$= e^{-\frac{ni\,nc}{c\tau+d}(2v+1)}\,e^{-ni(ag_1'-cg_2')+cni\left(2\frac{nv}{c\tau+d}-c\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)}\,\varphi(v)$$

De az exponens

$$-ni\left[ag_1'-cg_2'+\frac{1}{c\tau+d}\{2nvc+nc-2nvc+c^2(a\tau+b)\xi\right]$$

$$= -ni\left[ag_1'-cg_2'+\frac{2}{c\tau+d}\{ad-bc+ac\tau+bc\xi\right]$$

$$= -ni\,[ag_1'-cg_2'+ac]$$

Úgyhogy

$$\varphi(v+1) = e^{-\pi i\{ag_1' - cg_2' + ac\}}\varphi(v)$$

Épenigy adódik, ha az általános képletben $d = -b, \mu = d$

$$\varphi(v+\tau) = e^{\frac{-\pi i n c(v+\tau)^2}{c\tau+d}}\vartheta_{g_1'g_2'}^n(v' - b + d\tau'|\tau')$$

$$= e^{\frac{-\pi i n c(cv\tau+v^2)}{c\tau+d} - \pi i(-bg_1' + dg_2') - d\pi i\left(c\frac{nv}{c\tau+d} + d\frac{n\tau+d}{c\tau+d}\right)}\varphi(v)$$

Az exponens

$$-\pi i\{-bg_1' + dg_2' + \frac{1}{c\tau+d}(2ncv\tau + nc\tau^2 + 2nvd + d^2n\tau + d^2b)\} =$$

$$= -\pi i\{-bg_1' + dg_2' + \frac{1}{c\tau+d}[2nv(c\tau+d) + \tau(nc\tau + ad^2) + d^2b]\} =$$

de $ad - bc = n$, $ad^2 = nd + bcd$, tehát

$$= -\pi i\{-bg_1' + dg_2' + \frac{1}{c\tau+d}[2nv(c\tau+d) + \tau(n c\tau + nd) + bcd\tau + d^2b]\} =$$

$$= e^{-\pi i(-bg_1' + dg_2' + bd) - \pi i n(2v+\tau)}\varphi(v)$$

tehát $\varphi(v+\tau) = e^{-\pi i(-bg_1' + dg_2' + bd) - \pi i n(2v+\tau)}\varphi(v)$

ha tehát

$$g_1 = ag_1' - cg_2' + ac$$

$$g_2 = -bg_1' + dg_2' + bd$$

akkor

$$\varphi(v+1) = e^{-\pi i g_1}\varphi(v)$$

$$\varphi(v+\tau) = e^{-\pi i g_2 - n\pi i(2v+\tau)}\varphi(v)$$

De láttuk, hogy a v egy n-ed rendű ϑ függvényeleget tesz a következő functionális egyenletekneK.

$$\overset{(n)}{\vartheta}_{g_1g_2}(v+1|\tau) = e^{-\pi i g_1}\overset{n}{\vartheta}_{g_1g_2}(v|\tau)$$

$$\overset{n}{\vartheta}_{g_1g_2}(v+1|\tau) = e^{-\pi i g_2 - n\pi i(2v+\tau)}\overset{n}{\vartheta}_{g_1g_2}(v|\tau)$$

s kimutattuk, hogy minden n-edrendű Θ függvény ezzel a két egyenlettel van értelmezve. Látható, hogy a mi φ függvényünk egy ilyen n-edrendű Θ függvény, mert eleget tesz ugyanezen functionális egyenleteknek, úgy hogy ezzel megnyertük az n-edrendű transformatio fundamentalis képletét,

$$\vartheta_{g_1' g_2'}\left(\frac{nv}{c\tau+d} \,|\, \frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = e^{\frac{\pi i n c v^2}{c\tau+d}} \Theta_{g_1 g_2}(v|\tau)$$

a hol $\quad g_1 = a g_1' - c g_2' + ac \qquad ad - bc = n$

$$g_2 = -b g_1' + d g_2' + bd$$

A mi egy ilyen n-edrendű Θ függvény előállítását illetőleg tudjuk, hogy előállítható n speciális ilyen ϑ függvényből lineáris módon. Egy elsőrendű ϑ függvény n-ik hatványa egy ilyen n-edrendű ϑ függvény. n elsőrendű ϑ függvényekből állható n-edfokú homogén függvény szintén n-edrendű Θ függvény. Csakhogy mi $g_1 g_2$ charakt. ϑ függvényeket akarunk előállítani. Weber Rövetkezőleg állította össze ezeket. Veszszük az egyszerű ϑ függvényeit négyzetei

$$\vartheta_{00}^2(v|\tau) \quad \vartheta_{01}^2(v|\tau), \quad \vartheta_{10}^2(v|\tau), \quad \vartheta_{11}^2(v|\tau)$$

Ezen másodrendű ϑ függvények mindegyike kifejezhető kettővel. Legyen kettő közülök ϑ_0 és ϑ_1. Vegyük most ennek a kettőnek egy homogén r-edrendű függvényét

$$F_r(\vartheta_0, \vartheta_1) = \alpha_0 \vartheta_0^r + \alpha_1 \vartheta_0^{r-1} \vartheta_1 + \ldots + \alpha_r \vartheta_1^r$$

Akkal az α mennyiségek tetszőleges állandók. Ez egy $2r$-edrendű ϑ függvény, s mintán ϑ_0 és ϑ_1 karakterisztikája, $0,0$ tehát a határvonalon is, ezért az egész kifejezés char. $0,0$ Azonkívül világos, hogy ezen kifejezés páros függvény, mert a ϑ függvények négyzetei páros függvények. Ez a $F_r(\vartheta_0, \vartheta_1)$ tehát a legáltalánosabb $2r$-edrendű, $0,0$, karakterisztikája páros ϑ függvény. Most Weber nyomán a tetszőleges char. ϑ függvény előállítása a következő. Legyen n páros, $n \equiv 0 \bmod 2$, akkor az n-edrendű páros ϑ függvények:

$$\overset{(n)}{\vartheta}_{00}(v) = F_{\frac{n}{2}}(\vartheta_0, \vartheta_1)$$

$$\overset{(n)}{\vartheta}_{01}(v) = \vartheta_{00}(v)\vartheta_{01}(v) F_{(\frac{n}{2}-1)}(\vartheta_0, \vartheta_1)$$

$$\overset{(n)}{\vartheta}_{10}(v) = \vartheta_{00}(v)\vartheta_{10}(v) F_{(\frac{n}{2}-1)}(\vartheta_0, \vartheta_1)$$

$$\overset{(n)}{\vartheta}_{11}(v) = \vartheta_{10}(v)\vartheta_{01}(v) F_{(\frac{n}{2}-1)}(\vartheta_0, \vartheta_1)$$

A páratlan függvények

$$\overset{(n)}{\vartheta}_{00}(v) = \vartheta_{00}(v)\vartheta_{01}(v)\vartheta_{10}(v)\vartheta_{11}(v) F_{\frac{n}{2}-2}(\vartheta_0, \vartheta_1)$$

$$\overset{(n)}{\Theta}_{01}(v) = \vartheta_{10}(v)\,\vartheta_{11}(v)\,F\left(\tfrac{n}{2}-1\right)(\Theta_0,\Theta_1)$$
$$\overset{(n)}{\Theta}_{10}(v) = \vartheta_{10}(v)\,\vartheta_{11}(v)\,F\left(\tfrac{n}{2}-1\right)(\Theta_0,\Theta_1)$$
$$\overset{(n)}{\Theta}_{11}(v) = \vartheta_{00}(v)\,\vartheta_{11}(v)\,F\left(\tfrac{n}{2}-1\right)(\Theta_0,\Theta_1)$$

Ha pedig $n \equiv 1 \bmod 2$, akkor a páros függvények

$$\overset{(n)}{\Theta}_{00}(v) = \vartheta_{00}(v)\,F\tfrac{n-1}{2}(\Theta_0,\Theta_1)$$
$$\overset{(n)}{\Theta}_{01}(v) = \vartheta_{01}(v)\,F\tfrac{n-1}{2}(\Theta_0,\Theta_1)$$
$$\overset{(n)}{\Theta}_{10}(v) = \vartheta_{10}(v)\,F\tfrac{n-1}{2}(\Theta_0,\Theta_1)$$
$$\overset{(n)}{\Theta}_{11}(v) = \vartheta_{00}(v)\,\vartheta_{01}(v)\,\vartheta_{10}(v)\,F\tfrac{n-3}{2}(\Theta_0,\Theta_1)$$

A páratlan függvények

$$\overset{(n)}{\Theta}_{00}(v) = \vartheta_{01}(v)\,\vartheta_{10}(v)\,\vartheta_{11}(v)\,F\tfrac{n-3}{2}(\Theta_0,\Theta_1)$$
$$\overset{(n)}{\Theta}_{01}(v) = \vartheta_{00}(v)\,\vartheta_{10}(v)\,\vartheta_{11}(v)\,F\tfrac{n-3}{2}(\Theta_0,\Theta_1)$$
$$\overset{(n)}{\Theta}_{00}(v) = \vartheta_{00}(v)\,\vartheta_{01}(v)\,\vartheta_{11}(v)\,F\tfrac{n-3}{2}(\Theta_0,\Theta_1)$$
$$\overset{(n)}{\Theta}_{11}(v) = \vartheta_{11}(v)\,F\tfrac{n-1}{2}(\Theta_0,\Theta_1)$$

Ezzel az összes n-edrendű Θ függvények elő vannak állítva az elsőrendű ϑ függvényekkel, úgy hogy a mi transformalis képletünk adja a transformált ϑ kifejezését az eredeti ϑ-val, csak az állandókat kell meghatározni, az eljárás olyan, mint a lineáris transformatiónál. Igyekezni fogunk tágyos speciális transformatiókat kikeresni, melyekkel a többiek meg vannak határozva.

ezeknél az állandókat meg fogjuk határozni.
A következőkben az n-edrendű transformatió jele lesz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, tehát $ad - bc = n$, míg egy nemdul substitutio jele $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. Ha veszünk egy n-edrendű és egy m-edrendű transformatiót

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad ad - bc = n \qquad \text{és}$$

$$\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}, \quad a'd' - b'c' = m$$

s ezektől egymásután alkalmazunk, tehát

$$\tau_1 = \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \qquad \tau_1' = \frac{a'\tau + b'}{c'\tau + d'}$$

akkor a végleges transformatio

$$\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'a + b'c & a'b + b'd \\ c'a + d'c & c'b + d'd \end{pmatrix}$$

és a componált transformatio determinansa

$$\mathrm{Det}\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = m \cdot n.$$

Azaz, ha először alkalmazzuk egy m-ed, azután egy n-edrendű transformatiót, kapunk egy transformatiót, melynek rendszáma a kettő szorzata. Lássuk ennek alkalmazását. Legyen $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ egy n-ed rendű transformatio. Kiniés kizárva, hogy a négy a, b, c, d mennyiségnek közös osztója is van, legyen ez t, tehát $a = ta_1$, $b = tb_1$, $c = ct_1$, $d = td_1$; akkor n osztható lesz t^2-tel, s egy n egy

négyzetes factort tartalmaz. Ha n nem tartalmaz négyzetes factort, mies közös osztó. Tegyük fel, hogy közös osztó, t, tényleg előfordul, akkor

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$$

mely utóbbi transformatio determinansa $\frac{n}{t^2}$, foglalkozzunk most a $\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$ substitutio miveltával. Ez tulajdonképen nem is substitutio, mert e mellett τ' átmegy $\frac{t\tau}{t} = \tau$-ba, tehát τ nem változik. De változik v és pedig $v' = \frac{nv}{c\tau+d} = \frac{t^2 v}{t} = vt$, tehat v szorzója t. Az általános képlet szerint a v függvény transformatiója

$$\vartheta_{g_1' g_2'}(tv|\tau) = \vartheta^{(t^2)}_{g_1 g_2}(v|\tau)$$

de $g_1 = t g_1'$

$g_2 = t g_2'$

tehát

$$\vartheta_{g_1' g_2'}(tv|\tau) = \vartheta^{(\tau^2)}_{g_1', t g_2'}(v|\tau)$$

Látható, hogy meg kell különböztetni azt a két esetet, midőn t páros és páratlan.

Ha $t \equiv 0, \mathrm{mod}\, 2$, akkor a t^2-rendü ϑ függvény charakterisztikája 0,0, ha pedig $t \equiv 1, \mathrm{mod}\, 2$, a charakt. $g_1' g_2'$, minek a páros részétől el lehet tekinteni. Ezen transformatiónál tehát csak a v változik, szorzó-

dik t-vel, azért ezt a transformatiot szorzásnak is nevezzük. A szorzásnél tehát a g, g' characteristikája a függvény átmegy egy t^2 fokú, Θ, illetőleg g', g' characteristikáju Θ függvénybe, a szerint a mint t páros vagy páratlan.

Ha $u = v.2K$, a hol $2K = \pi \vartheta_3^2(0|\tau)$, akkor $u_1 = v_1 2K_1$, a hol $K_1 = \pi \vartheta_3^2(0|\tau)$, tehát $2K = 2K_1$, és $u_1 = v_1 2K = tu$. Tehát a transformált $sn(u|\tau)$ nem egyéb, mint $sn(tu|\tau)$. Az egész számú multiplicatio feladatát következőleg lehet tárgyalni. Ismeretes, hogy

$$sn(u+w) = \frac{snu\,cnw\,dnw + cnu\,dnu\,snw}{1 - k^2 snu\,snw}$$

Ha $w = u$,

$$sn\,2u = \frac{2\,snu\,cnu\,dnu}{1 - k^2 snu}.$$

Épen így tegyünk az eredeti egyenletben u helyébe $2v-t$, w helyébe $v-t$, akkor adódik $sn\,3v$ stb, ily módon ki tudjuk számitani $sn\,tv - t$. De egy baj van. Ti. már a számitás negyedik lépésénél fellép egy közös osztó felső és alsóban, úgyhogy ezen számitás révén, mivel a közös factort nem tudjuk meghatározni, nem kapjuk meg a snu reducált alakját s igy nem lehet általában ezen eljárás révén még arra sem következtetni, hogy hányadfoku legy

a felső és alsó. Célszerű ezért ezt az esetet, mint a transformatio speciális esetét tárgyalni.

Megjegyzendő különben, hogy ha $t = t_1 . t_2$, akkor írható

$$\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_2 & 0 \\ 0 & t_2 \end{pmatrix}$$

azaz minden t-vel való multiplicatort össze lehet rakni egy t_1 és t_2-vel való multiplicatióból. Ha tehát t-t felbontva képzeljük prímfaktorokra:

$$t = 2^a p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_r^{a_r}$$

látható, hogy a t-vel való multiplicatiót össze lehet rakni a 2-vel és ilyen $p_1 \dots p_r$ páratlan prímszámokkal való szorzásból. Tehát csak a 2-vel és a páratlan prímszámokkal való szorzással kell foglalkoznunk. A 2-vel való szorzás már el van végezve, láttuk, hogy

$$sn\,2u = \frac{2\,sn\,u\,cn\,u\,dn\,u}{1 - k^2 sn^4 u}$$

$$\text{épenigy} \qquad cn\,2u = \frac{cn^2 u - sn^2 u\,dn^2 u}{1 - k^2 sn^4 u}$$

$$dn\,2u = \frac{dn^2 u - k^2 sn^2 u\,cn^2 u}{1 - k^2 sn^4 u}$$

Látva van tehát a páratlan prímszámokkal való szorzás, a miért is általánosságban is t felfogható

lesz, mint egy páratlan szám. Következőképpen fogunk eljárni. Igyekezzünk kell az itt előforduló t^2 rendű Θ-kat a Weber-féle alakban előállítani. Tehát legyen az l-edrendű ϑ függvények négyzetei közül kiválasztott két tetszőleges ϑ_0 és ϑ_1 négyzet: $\vartheta_{11}^2(v)$ és $\vartheta_{01}^2(v)$, tehát a sor felső és alsójának négyzete. Akkor

$t \equiv 0 \bmod l$ esetén minden ϑ egy $\vartheta\vartheta$ characteristikájú Θ-ba fog átmenni, és pedig $\vartheta_{11}(tv|\tau)$ számára a páros függvényekre levezetett képlet szolgál, mert ϑ_{11} páratlan, t^2 páros, tehát

$$\vartheta_{11}(tv|\tau) = \vartheta_{00}(v|\vartheta_{01}(\tau)\vartheta_{10}(v)\vartheta_{11}(v) \mathfrak{F}_{\frac{t^2}{2}-2}(\vartheta_{11}^2(v), \vartheta_{01}^2(v))$$

Míg $\vartheta_{g_1 g_2}(tv|\tau)$ számára, a hol $g_1 g_2$ a $00, 01, 10$ számpárokra egyike, adódik

$$\vartheta_{g_1 g_2}(tv|\tau) = \mathfrak{F}_{\frac{t^2}{2}}(\vartheta_{11}^2(v), \vartheta_{01}^2(v))$$

Ez a páros számú multiplicatio.

Ha $t \equiv 1 \bmod l$, az egyszerű képlet

$$\vartheta_{g_1' g_2'}(tv|\tau) = \vartheta_{g_1' g_2'}(v|\tau) \mathfrak{F}_{\frac{t^2-1}{2}}(\vartheta_{11}^2(v), \vartheta_{01}^2(v))$$

A ϑ függvényekre itt felállított képletektől egyszerűen át lehet menni az elliptikus függvények-

hez. Csak a $t \equiv 1$ esetet fogjuk tárgyalni. Képezzük az utóbbi egyenletet osztva $[\vartheta_{01}(v)]^{t^2}$-al akkor is pedig a jobboldali első factort, az első határványnyal, a másodikat, a homogén függvényt $(\vartheta_{01}^2(v))^{\frac{t^2-1}{2}}$-vel, lesz

$$\frac{\vartheta g_1' g_2^2(tv)}{[\vartheta_{01}(v)]^{t^2}} = \frac{\vartheta g_1' g_2^2(v)}{\vartheta_{01}(v)} T_{\frac{t^2-1}{2}}\left(\frac{\vartheta_{11}^2(v)}{\vartheta_{01}^2(v)}, 1\right)$$

Ez szerint $\frac{\vartheta_{11}(tv)}{\vartheta_{01}(v)^t} = \frac{\vartheta_{11}(v)}{\vartheta_{01}(v)} \bar{A}(sn^2 u) = \frac{\vartheta_2}{\vartheta_3} sn u \bar{A}(sn^2 u)$

a hol $\bar{A}$ a $sn u$-nak $\frac{t^2-1}{2}$-edfokú egész racionális függvénye. Épenigy

$$\frac{\vartheta_{10}(tv)}{[\vartheta_{01}(v)]^{t^2}} = \frac{\vartheta_2}{\vartheta_0} cn u \bar{B}(sn^2 u)$$

a hol $\bar{B}$ szintén egész rat. függvénye $sn^2 u$-nak Továbbá

$$\frac{\vartheta_{00}(tv)}{[\vartheta_{01}(v)]^{t^2}} = \frac{\vartheta_3}{\vartheta_0} dn u \bar{C}(sn^2 u)$$

végre

$$\frac{\vartheta_{01}(tv)}{[\vartheta_{01}(v)]^{t^2}} = \bar{D}(sn^2 u)$$

Most nem kell egyebet tenni, mint ezen három első képletet a negyedikkel osztani, akkor pl. az első egyenlet baloldalán állni fog $sn(tu)$ elvetésével egy állandó $\frac{\vartheta_2}{\vartheta_3}$ factortól. Ha tehát ezen állan-

dó factorokkal átszorzunk s az új állandókkal bíró függvényeket a nélküli betűkkel jelöljük, akkor kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} sn\,tu &= sn\,u\,\frac{A(sn^2u)}{D(sn^2u)} \\ cn\,tu &= cn\,u\,\frac{B(sn^2u)}{D(sn^2u)} \qquad (1.) \\ dn\,tu &= dn\,u\,\frac{C(sn^2u)}{D(sn^2u)} \end{aligned}$$

a hol A, B, C, D, egész rationális függvényei sínak s pedig $\frac{t^2-1}{2}$ fokúi. Nevezetes az, hogy a felső és alsókban levő függvényeknek mindig közös osztójuk, a mi directe abból következik, hogy $sn^2(v)$ és $cn^2(v)$ körülbelül nem léteznek homogén lin. relatio. Ezek tehát a multiplicatio végleges képletei. Most csak az A, B, C, D, egész rat. függvények coefficienseit kell meghatározni. Az összeadási tételek alkalmazásával, ezen egész rationális függvények coefficienseinek recursios alakját mely képletes, elő fogjuk állítani, t.i.

$$sn(tu) = sn((t-2)u + 2u)$$

Most alkalmazzuk az összeadási tételt e's a felléptő:

$$\operatorname{sn}((t-2)u) = \operatorname{sn}((t-4)u + 2u) \text{ stb.}$$

Látható, hogy az összeadási tételben nem szerepel más, mint $\operatorname{sn}u$, $\operatorname{cn}u$, $\operatorname{dn}u$ és k^2, Tehát ezek ismételt alkalmazásával nem is jöhet be más állandó az A, B, C, D függvényekbe, mint k^2 s pedig rationalisan, rationális egész számú coefficiensekkel jő be k^2 a felső és alsóba. Tehát az A, B, C, D eg. rat. függvények coefficiensei a k^2-ből egész rat. módon, egész számú coefficiensekkel vannak összerakva. Az explicit képletek Abel: „Recherches sur les functions elliptiques" cz. értekezésében találhatók. Most állítsunk egy másik feladathoz, mely kapcsolatos a multiplicatio feladatával, s mely algebrai szempontból nevezetes. A multiplicatio itt levezetett képletei megfelelnek a trigonometriai függvények szorzási tételeinek. Még egyszerűbb az exponentiális függvény szorzási tétele

$$e^{tu} = (e^u)^t$$

Maradjunk ennél az egyszerű példánál, melynél felmerül a következő feladat. Ha $tu = w$, akkor $e^w = (e^{\frac{w}{t}})^t$ vagyis, ha $e^{\frac{w}{t}} = x$, akkor x

eleget tesz a következő egyenletnek

$$x^t = e^w .$$

az x most nem az argumentum szorzásából, hanem osztásából származik. Ezt az x-et osztott függvénynek, illetőleg osztott argumentumhoz tartozó függvénynek, mely eleget tesz a fenti t-ed fokú egyenletnek. Ennek az egyenletnek coefficiensei rat. függvényei e^w-nek. - e^w nem változik, ha w helyébe $w + 2p\pi i$ lép

$$e^w = e^{w+2p\pi i}$$

Így ha $x_0 = e^{\frac{w}{t}}$ az egyenlet egész gyökei, akkor összes különböző gyökei ebbe a formulába foglalhatók

$$x_p = e^{\frac{w+2p\pi i}{t}} = x_0 e^{\frac{2p\pi i}{t}}$$

ha p helyébe egy teljes maradékrendszer helyettesítünk t modulusra vonatkozólag ($p = 0, 1, 2, \ldots (t-1)$). Az x_0 mellett álló exponentiális factor tehát egy t-edik egységgyök, és pedig az $\xi^t = e^{2\pi i}$ osztási egyenlet gyöke. Az x_0 factorai tehát azon osztási egyenlet gyökei, mely származik, ha w helyébe egy periodust teszünk az eredeti egyenletben. Ezt az osztási egyenletet complet osztási egyenletnek nevezzük. Egyébként irhatjuk, hogy

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM KÖNYVTÁRA

$$x_p = R_p(x_0)$$

azaz rat. függvénye x_0-nak.

$$x_{p+q} = R_{p+q}(x_0) = R_p(x_q) = R_q(x_p)$$

Tehát az általános osztási egyenletnek $x^t = e^w$ következő tulajdonsága van: minden gyöke x_p rationális függvénye egy gyökrek $x_p = R_p(x_0)$ s ezen rationalis függvénynek az a tulajdonsága, hogy $R_p . R_q = R_q . R_p$

Az olyan algebrai egyenletet, melyben minden gyök rat. függvénye egy gyökének, mely ezzel a funkcionális tulajdonsággal bir, nevezzük Abel féle egyenletnek s az algebra kimutatja, hogy ez gyökvonások segélyével megoldható. A megoldáshoz ismernünk kell az $x_{p+q} = R_{p+q}(x_0)$ rat. függvények coefficienseit, ezek pedig itt a complet osztási egyenlet gyökei, azaz a t-ik egységgyökök.

Ha $\operatorname{sn} u = x$, $\operatorname{cn} u = y$, $\operatorname{dn} u = z$, akkor az (1.) egyenletek következőleg hangzanak

$$\mathfrak{D}(x^2)\operatorname{sn} w - x\,\mathfrak{A}(x^2) = 0$$
$$\mathfrak{D}(x^2)\operatorname{cn} w - y\,\mathfrak{B}(x^2) = 0$$
$$\mathfrak{D}(x^2)\operatorname{dn} w - z\,\mathfrak{C}(x^2) = 0$$

Ha $\operatorname{sn} w$-t ismeretesnek vesznük, akkor ez három

egyenlet az x, y, z ismeretlenekre nézve, melyekből meg tudjuk határozni az adott argumentumhoz tartozó elliptikus függvényeket, ha az eredeti argumentumhoz tartozó elliptikus függvények ismeretesek. Ezen egyenletek mindegyike k^2-ben első. – Különben világos, hogy elég csak az első egyenlettel foglalkozni, mert a másodikból

$$y = \frac{\Theta(x^2)}{\Theta(x^2)} \operatorname{cn} w$$

a harmadikból $z = \dfrac{\Theta(x^2)}{\Theta(x^2)} \operatorname{dn} w$

Ha tehát az első egyenlet gyökeit ismerjük, ezeknek behelyettesítésével adódik y és z számára valamennyi és pedig rationalis módon értett értéke. Az első egyenletet nevezzük általános osztási egyenletnek. Általános nak azért, mert itt w tetszőleges érték. Ezen egyenlet coefficienseii k^2-ben eg. rat. függvények, egész számú coefficiensekkel. Az egyenlet egyik gyöke lesz $x = \operatorname{sn} u = \operatorname{sn} \frac{w}{t}$; de az egyenlet nem szenved változást, ha w helyébe $(w + p\,4K + q\,4K'i)$ írunk. Tulajdonképpen csak $q \cdot 2K'i$ kellene

irni, de azt akarjuk, hogy a második és harmadik egyenlet is változatlan maradjon, melyben cnw és dnw szerepel. Megtéve a helyettesítést, lesz

$$x_{pq} = sn\left(\frac{w + p4K + q4K'i}{t}\right).$$

mely szintén eleget tesz az első egyenletnek, tehát az első egyenletnek végtelen sok gyöke volna, de tudjuk, hogy csak t^2 gyöke lehet szerzett kapjuk, ha p és q helyébe azoknak egy teljes maradékrendszerét helyettesítjük pl. $(p, q, = 0, 1, 2, \ldots t-1)$

A nyert x_{pq}-val osztódik szintén

$$y_{pq} = \frac{\mathfrak{H}(x_{pq})\, cnw}{\mathfrak{D}(x_{pq})}$$

épenigy z_{pq}. Az egyenletek megoldását tehát transcendens alakban nyertük elliptikus függvények segélyével. Ezen megoldások segélyével kimutatjuk, hogy az itt felirt általános osztási egyenletek algebrailag megoldhatók. E végett x_{pq}-t a következő alakban irjuk:

$$x_{pq} = sn\left(\frac{w}{t} + \frac{p4K + q4K'i}{t}\right)$$

Alkalmazzuk erre a sinus összeadási tételét

$$\chi_{pq} = \frac{sn\frac{w}{t}\,cn\frac{p4K+q4K'i}{t}\,dn\frac{p4K+q4K'i}{t} + cn\frac{w}{t}\,dn\frac{w}{t}\,sn\frac{p4K+q4K'i}{t}}{1 - k^2 sn^2\frac{w}{t}\,sn^2\frac{p4K+q4K'i}{t}}$$

de $cn\frac{w}{t} = y$, $dn\frac{w}{t} = z$, $sn\frac{w}{t} = x$, vagy

$$sn\frac{w}{t} = x_{00}, \quad cn\frac{w}{t} = y_{00}, = \frac{B(x_{00}^2)\,cnw}{D(x_{00}^2)}$$

$$dn\frac{w}{t} = z_{00} = \frac{C(x_{00}^2)\,dnw}{D(x_{00}^2)}$$

s így az utóbbi χ_{pq} racionális függvénye x_{00}-nak. Ezen rat. függvény coefficienseiben a $\frac{p4K+q4K'i}{t}$ argumentumhoz tartozó elliptikus függvények

$$\left.\begin{matrix} sn \\ cn \\ dn \end{matrix}\right\} \frac{p4K+q4K'i}{t}$$

Tegyük fel, hogy az állandók ismeretesek, akkor tehát

$$\chi_{pq} = R_{pq}(x_{00})$$

Az állandók szemmel tartásával ebből az egyenletből következik, hogy

$$\chi_{p+q', q+p'} = R_{p+p', q+q'}(x_{00})$$

Ha p helyébe p'-et, q helyébe q'-et írunk, akkor írhatjuk, hogy

$$R_{pq}(x_{p'q'}) = R_{q'p'}(x_{pq}),$$ a miből

adódik, hogy

$$R_{pq}\, R_{p'q'} = R_{p'q'}\, R_{pq}$$

mert mindkettő $= R_{p+p',\, q+q'}$

Tehát van egy algebrai egyenletünk, melynek következő tulajdonságai vannak: x_{pq} gyökök mindegyike előállítható, mint x_{00} függvénye ezen rationális függvények között áll, commutativ törvény, tehát az egyenlet Abel féle egyenlet így gyökvonással megoldható. De az Abel féle egyenlet a körosztási egyenlettől csak abban különbözik, hogy a körosztási egyenleteknél az összes gyökök egy sorietbe sorozhatók

$$x_0, x_1, \ldots\ldots x_{t-1}$$

míg itt a gyökök egy négyzetes schémába rendezhetők

$$\begin{vmatrix} x_{00} & x_{01} & \ldots\ldots & x_{0,t-1} \\ x_{10} & x_{11} & \ldots\ldots & x_{1,t-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ x_{t-1,0} & x_{t-1,1} & \ldots\ldots & x_{t-1,t-1} \end{vmatrix}$$

Tehát az elliptikus függvények általános osztási egyenlete algebrailag megoldható, feltéve, hogy a fellépő állandók ismeretesek. Legyen a

$$\sin \frac{p4K + q4K'i}{t} = \xi_{pq}$$

Ezek az állandók eleget tesznek az osztási egyenletnek, ha $w=0$, azaz $w=0$ mellett x_{pq} átmegy ξ_{pq}-ba. Ezek tehát eleget tesznek a

$$D(x^2)\sin w - x A(x^2) = 0$$ egyenletnek, ha

itt $w=0$ tehát a $x A(x^2) = 0$ vagyis

$\xi A(\xi^2) = 0$ egyenletnek.

Ezt az egyenletet nevezzük complet osztási egyenletnek, mely a $4K$ és $4K'i$-nek t részre való osztását szolgáltatja. Ha most $\sin \frac{p4K+q4K'i}{t} = \eta_{pq}$ akkor ez rationalisan kifejezhető ξ_{pq}-val,

$$\eta_{pq} = \frac{B(\xi^2_{pq})}{D(\xi^2_{pq})}$$

épigy $\sin \frac{p4K+q4K'i}{t} = \xi_{pq} = \frac{C(\xi^2_{pq})}{D(\xi^2_{pq})}$

Úgyhogy az egyedüli ismeretlenek, melyek az általános osztási egyenletek algebrai megoldásánál szerepelnek, ezek ξ_{pq} $(p,q = 1, 2, \ldots, t-1)$.

A mi ezen egyenlet tulajdonságait illeti, mely egyenlet megfelel az egységgyököket osztó egyenletnek a körosztásnál ezen tulajdonságok már mélyebbre menők.

Megjegyzendő, hogy ezen complet osztási egyenlet nem oldható meg általában algebrailag, csak bizonyos speciális modulusok esetén, pl. ha a modulus 1, $k^2=-1$, tehát az elliptikus alakja:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1+x^2)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

Ez a lemniscaticus integrál. Általában mindig megoldható, ha complex multiplicatio lehetséges.

Ezen osztási egyenlet tulajdonságai közül csak egyet fogunk tárgyalni. Nyilvánvaló, hogy $\xi_{00}=0$, tehát a complet osztási egyenlet ilyen $A(\xi^2)=0$, és azonkívül látjuk, hogy ξ^2 mnitismeretlen felfogva, az egyenlet csak $\frac{t^2-1}{2}$-ed fokú. Képezzük most a következő kifejezést

$$\xi_{p+p',q+q'} = \sin\left(\frac{p+2K+q+2K'i}{t} + \frac{p'+2K+q'+2K'i}{t}\right)$$

s az összeadási tételt alkalmazva

$$= \frac{\xi_{pq}\eta_{p'q'}\xi_{p'q'} + \xi_{p'q'}\eta_{pq}\xi_{pq}}{1-k^2\xi^2_{pq}\xi^2_{p'q'}}$$

De η_{pq} és ξ_{pq} rationálisan kifejezhető ξ_{pq}-val és így $\eta_{p'q'}$ és $\xi_{p'q'}$ is rationalisan kifejezhető $\xi_{p'q'}$-el,

tehát

$$\xi_{p+p',q+q'} = R(\xi_{pq}, \xi_{p'q'})$$

Az complet osztási egyenletek tehát az a tulajdonsága, hogy minden gyöke kettővel rationaliter kifejezhető. Ez tehát nem Abel féle egyenlet, mert ott minden gyök egygyel kifejezhető rationaliter.

Ezen észrevételek után visszatérünk a transformatio elméletéhez. Láttuk az általános n-edrendű transformatiót nézve, hogy ha az $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ elemeknek van egy t közös osztójuk

$$\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} \tau & o \\ o & t \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right)$$

s ezen $\left(\begin{smallmatrix} \tau & o \\ o & t \end{smallmatrix}\right)$ transformatio hatását már megismertük, úgy hogy feltehetjük, hogy $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$-ben minek közös osztó. Ha tehát $ad - bc = n$, akkor az n minden osztója osztja pl. a és b-t, de nem osztja d és c-t. Kimutatjuk, hogy egy ilyen n-edrendű transformatio visszavezethető egy ilyen egyszerű és két lin. transformatióra. E végett néhány számelméleti okoskodás szükséges. Legyen ξ, η két relativ primszám, képezzük a következő kifejezést $d\eta - b\xi = \delta$ $c\eta - a\xi = \gamma$; ezen két egyenletből

$$\eta = \frac{-\alpha\delta + b\gamma}{-ad + bc}, \qquad \xi = \frac{\gamma\delta - \delta c}{-ad + bc}$$

A mi így is írható

$$n\eta = b\gamma - a\delta, \qquad n\xi = d\gamma - c\delta$$

Ebből látható, hogy γ- és δ-nak minden közös osztója osztja n-et is, mert η és ξ relativ prim. Most képzeljük n-et felbontva primfactorra. Legyenek ezek $2, p_1, p_2, \ldots\ldots p_r$. Ezeket két osztályba sorozzuk. Az elsőbe azokat, melyek d és c-ben is bennfoglaltatnak, azaz osztják d és c-t; a másodikba a többieket. A ξ és η-ra csak az a feltétel volt téve, hogy relativ primszámok. Most válasszuk ξ-t úgy, hogy az első osztályba tartozó primszámokkal ne legyen osztható, de osztható legyen a másodikba tartozókkal; η pedig a második classis primszámjaival ne legyen osztható.

Ha ez így van, belátható, hogy δ és γ-nak nincs közös osztója, tehát δ és γ relativ primszámok. Most vegyük α és β-t úgy, hogy $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ legyen, akkor lesz

$$\alpha(dn - bf) - \beta(cn - a\xi) = 1$$

vagyis

$$(d\alpha - \beta c)\eta - (\alpha b - a\beta)\xi = 1$$

Most azt állítjuk, hogy az $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ substitutio így állítható elő:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & bx-a\beta \\ \xi & dx-c\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

Az első és harmadik substitutio az utóbbi relatiók értelmében unimodularis, ezek tehát lin. transformatiók. A "közepső" transformatio n-edrendű transformatio, melyabban áll, hogy τ helyébe lép $n\tau$. Tehát a legáltalánosabb n-edrendű transformatiót össze lehet rakni lin. transformatiókból s ezen egyszerű n-edrendű transformatiából melyet principalis transformationak nevezünk, s pedig első principalis transformatiónak. Hasonló módon lehetett volna kimutatni, hogy az általános n-edrendű transformatio az $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}$ transformatiöból és két lineáris transformatiából összerakható. Ezt a $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}$ a második principalis transformatiónak nevezzük s abban áll, hogy τ helyébe lép $\frac{\tau}{n}$. Ez a két principális transformatió egymásnak inverse.

A két principális transformatio elégséges az általános n-edrendű transformatio tanulmányozásához. Az első abban áll, hogy τ helyébe lép $n\tau$. Akkor v helyébe lép $v_1 = \frac{nv}{c\tau+d} = nv$ s mivel

$c=0$, az általános ϑ függvényben az exponentialis factor elesik, s lesz

$$\vartheta_{g_1' g_2'}(nv|n\tau) = \overset{(n)}{\Theta}_{g_1 g_2}(v|\tau)$$

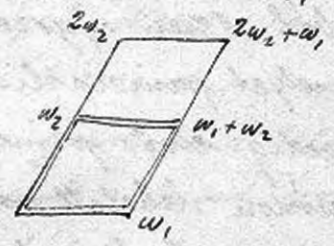
a hol most

$$g_1 = ng_1'$$
$$g_2 = ng_2'$$

Az első principális transformationál igen egyszerűen alakul az uj p. parallelogramma is. Ha az eredeti parallelogramma (w_1, w_2), és $\tau = \frac{w_2}{w_1}$ akkor $w_1' = w_1$,

$w_2' = nw_2$

tehát w_1 változatlan marad, w_2 növekedik n-nel. Ez az analytikai bebizonyitása annak, hogy az n-edrendü transformationál a transformalt parallelogramma az eredetinek n-szerese.



A második principalis transformatiónál nézve

$$\tau_1 = \frac{\tau}{n}, \quad v_1 = \frac{nv}{c\tau+d} = \frac{nv}{n} = v$$

a transformált ϑ

$$\vartheta_{g_1' g_2'}(v|\tfrac{\tau}{n}) = \overset{(n)}{\Theta}_{g_1 g_2}(v|\tau)$$

és itt

$$g_1 = g_1'$$
$$g_2 = ng_2'$$

Látható, hogy lényeges differentiál ter az, vajjon n páros vagy páratlan.[2]

Ha $n \equiv 0 \bmod 2$, akkor az első principális transformationál $g_1 \equiv 0$, $g_2 \equiv g'$, a másodiknál $g_1 \equiv g_1'$, $g_2 \equiv 0$. Ha $n \equiv 1 \bmod 2$, akkor az első transformationál $g_1 \equiv g_1'$, $g_2 \equiv g_1'$, a másodiknál $g_1 \equiv g_2'$, $g_2 \equiv g_2'$

Tehát páros n esetén az első transformationál $0, g_2'$, a másodiknál $g_2', 0$ lép fel mint transformalt characteristika, páratlan n esetén a char. nem változik egyik esetben sem. Tehát tulajdonképen az $n = 2$ és a páratlan primszámrendü transformatiót kell tárgyalni. Kezdjük az $n = 2$-vel s állitsuk össze az erre vonatkozó képleteket. A két principális transformatio abban az esetben külön neveket nyer azon mathematicusok nevéről, kik először tanulmányozták. Az első, hol $\tau_1 = 2\tau$ és $v_1 = 2v$, neveztetik Landen féle transformationak, a második, a hol $\tau_1 = \frac{\tau}{2}$, $v_1 = v$ neveztetik Gauss félének. A Landen félénél

$$\vartheta_{g_1' g_2'}(2v|2\tau) = \overset{(2)}{\Theta}_{g g_2'}(v|\tau)$$

a Gauss félénél

$$\vartheta_{g_1' g_2'}(v|\tfrac{\tau}{2}) = \overset{(2)}{\Theta}_{g_1' 0}(v|\tau)$$

Foglalkozzunk most e másodrendű ϑ függvények explicit felállításával. Kezdjük a Landen féle

I. $\vartheta_{11}(2v|2\tau) = \vartheta_{01}(v|\tau)$; ez páratlan függvény, mert ϑ_{11} páratlan. Ebből tudjuk kiszámítani az általános képletek permutációs, hogy a ϑ_{01} különbözik a $\vartheta_{11}(v|\tau)\,\vartheta_{10}(v|\tau)$ -tól, azaz hát, hogy

$$\vartheta_{11}(2v|2\tau) = C\cdot\vartheta_{11}(v|\tau)\,\vartheta_{10}(v|\tau)$$

vagyis C-vel keresztül osztva és $\frac{1}{C} = B$ írva, lesz

$$B\,\vartheta_{11}(2v|2\tau) = \vartheta_{11}(v|\tau)\cdot\vartheta_{10}(v|\tau)$$

Vagyis $$B\vartheta_1(2v|2\tau) = \vartheta_1(v|\tau)\,\vartheta_2(v|\tau) \quad 1)$$

Ebben v helyébe $(v+\frac{\tau}{2})$ írva, lesz:

$$Bi.\ e^{-\pi i(v+\frac{\tau}{2})}\vartheta_0(2v|2\tau) = ie^{-\pi i(v+\frac{\tau}{2})}\vartheta_{10}(v|\tau)e^{-\pi i(v+\frac{\tau}{4})}\cdot\vartheta_3(v|\tau).$$

vagyis $$B\vartheta_0(2v|2\tau) = \vartheta_0(v|\tau)\,\vartheta_3(v|\tau) \quad 2)$$

A Gauss féle transformatióra nézve egy világos okoskodással

$$\vartheta_{11}(v|\tfrac{\tau}{2}) = \vartheta_{10}(v|\tau) = C\vartheta_{11}(v|\tau)\vartheta_{01}(v|\tau)$$

vagy $\frac{1}{C} = A$ írva lesz

$$A\,\vartheta_1(v|\tfrac{\tau}{2}) = \vartheta_2(v|\tau)\,\vartheta_3(v|\tau) \quad 3)$$

Ebben v helyébe $(v+\frac{1}{2})$ írva lesz:

$$A\,\vartheta_2(v|\tfrac{\tau}{2}) = \vartheta_2(v|\tau)\,\vartheta_3(v|\tau) \qquad 4.)$$

Meg kell határozni a A és B állandót. 4.) és 2.) differentiálva v szerint és $v=0$ téve lesz:

$$2B\vartheta_1'(0|2\tau) = \vartheta_1'(0|\tau)\,\vartheta_2(0|\tau)$$

és

$$A\vartheta_1'(0|\tfrac{\tau}{2}) = \vartheta_1'(0|\tau)\,\vartheta_0(0|\tau)$$

Most 2.)-t 4.)-ben $v=0$ téve, lesz

$$B\vartheta_0(0|2\tau) = \vartheta_0\vartheta_3$$

$$A\vartheta_2(0|\tfrac{\tau}{2}) = \vartheta_2\vartheta_3$$

Osztva az egyenleteket egymással, lesz:

$$\frac{2\vartheta_1'(0|2\tau)}{\vartheta_0(0|2\tau)} = \frac{\vartheta_1'\vartheta_2}{\vartheta_0\vartheta_3}$$

2.) és 4.) egyenletekből

$$\frac{\vartheta_1'(0|\frac{\tau}{2})}{\vartheta_2(0|\frac{\tau}{2})} = \frac{\vartheta_1'\vartheta_0}{\vartheta_2\vartheta_3}$$

Tudjuk, hogy $\vartheta_1' = \pi\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3$, a mi természetesen a 2τ-hoz tartozó ϑ függvényekre is áll, lesz tehát

$$\frac{2\pi\vartheta_0(0|2\tau)\,\vartheta_2(0|2\tau)\,\vartheta_3(0|2\tau)}{\vartheta_0(0|2\tau)} = \frac{\pi\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_2}{\vartheta_0\vartheta_3}$$

vagyis

$$2\vartheta_2(0|2\tau)\,\vartheta_3(0|2\tau) = \vartheta_2^2$$

$$\vartheta_0(0|\tfrac{\tau}{2})\,\vartheta_3(0|\tfrac{\tau}{2}) = \vartheta_0^2$$

Ezen két egyenlet elsejében tegyünk τ helyébe $\frac{\tau}{2}$-et, a másodikban τ helyébe $2\tau-4$, lesz az elsőből

$$2\vartheta_2(0|\tau)\vartheta_3(v|\tau) = \vartheta_2^2(0|\tfrac{\tau}{2})$$

a másodikból $\vartheta_0(0|\tau)\vartheta_3(0|\tau) = \vartheta_0^2(0|2\tau)$

Most a másodikk egyenlet szerint

$$B\vartheta_0(0|2\tau) = \vartheta_0\vartheta_3 = \vartheta_0^2(0|2\tau)$$

A negyedik egyenlet szerint továbbá

$$A\vartheta_2(0|\tfrac{\tau}{2}) = \vartheta_2\vartheta_3 = \tfrac{1}{2}\vartheta_2^2(0|\tfrac{\tau}{2})$$

a miből

$$\underline{\underline{A = \tfrac{1}{2}\vartheta_2(0|\tfrac{\tau}{2})}}$$

Ezzel az állandók meg vannak határozva, s a Landen és Gauss féle transformatiók végleges képletei:

Landen félék

I $\quad \vartheta_0(0|2\tau)\vartheta_1(2v|2\tau) = \vartheta_2(v|\tau)\vartheta_1(v|\tau)$

II. $\quad \vartheta_0(0|2\tau)\vartheta_0(2v|2\tau) = \vartheta_0(v|\tau)\vartheta_3(v|\tau)$

Gauss félék

I $\quad \vartheta_2(0|\tfrac{\tau}{2})\vartheta_1(v|\tfrac{\tau}{2}) = 2\vartheta_1(v|\tau)\vartheta_0(v|\tau)$

II, $\quad \vartheta_2(0|\tfrac{\tau}{2})\vartheta_2(v|\tfrac{\tau}{2}) = 2\vartheta_2(v|\tau)\vartheta_3(v|\tau)$

Hasonló módon következtethetők a következő képletek. Landen féléi:

$$\begin{cases} 2\vartheta_3(0\,|\,2\tau)\,\vartheta_2(2v\,|\,2\tau) = \vartheta_2^2(v\,|\,\tau) - \vartheta_1^2(v\,|\,\tau) \\ 2\vartheta_3(0\,|\,2\tau)\,\vartheta_3(2v\,|\,2\tau) = \vartheta_3^2(v\,|\,\tau) + \vartheta_0^2(v\,|\,\tau) \end{cases}$$

Gauss felék

$$\vartheta_3\left(0\,\middle|\,\frac{\tau}{2}\right)\vartheta_0\left(v\,\middle|\,\frac{\tau}{2}\right) = \vartheta_0^2(v\,|\,\tau) + \vartheta_1^2(v\,|\,\tau)$$

$$\vartheta_3\left(0\,\middle|\,\frac{\tau}{2}\right)\vartheta_3\left(v\,\middle|\,\frac{\tau}{2}\right) = \vartheta_3^2(v\,|\,\tau) + \vartheta_2^2(v\,|\,\tau)$$

Ezek a másodrendü transformatió teljes képletei, melyektől most átmegyünk az elliptikus függvények megfelelő képleteihez. A számítást csak Landen féle transformatióra fogjuk keresztül vinni

$$\sqrt{k} = \frac{\vartheta_2}{\vartheta_3}, \quad \sqrt{k'} = \frac{\vartheta_0}{\vartheta_3}, \quad 2K = \pi\vartheta_3^2, \quad 2K'i = \pi\vartheta_3^2\tau$$

és $u = v2K$. Legyenek a Landen féle transformatio esetének K-nak megfelelő betük $\mathfrak{L}$, akkor

$$\sqrt{\lambda} = \frac{\vartheta_2(0\,|\,2\tau)}{\vartheta_3(0\,|\,2\tau)} \text{ stb.}; \quad 2\mathfrak{L} = \pi\vartheta_3^2(0\,|\,2\tau) \text{ stb.}$$

$$\sqrt{\lambda} = \frac{\vartheta_2(0\,|\,2\tau)}{\vartheta_3(0\,|\,2\tau)} = \text{az (4.) egyenlet-}$$

ben $v=0$ irva lesz

$$= \frac{\vartheta_2^2 - \vartheta_1^2}{\vartheta_3^2 + \vartheta_0^2} = \frac{k}{1+k'},$$

ezek és alább ϑ_3^2-al osztva lesz

$$2\mathfrak{L} = \pi\vartheta_3^2(0\,|\,2\tau) = \frac{1}{2}(\vartheta_3^2 + \vartheta_0^2)\pi = \pi\frac{1}{2}\vartheta_3^2(1+k') =$$

$$= K(1+k').$$

Most $2\mathfrak{L}'i = \tau_1 . 2\mathfrak{L} = 2\tau K(1+k') = 2K'i(1+k')$

és $u_1 = v_1 . 2\mathfrak{L} = 2v K(1+k') = u(1+k')$

tehát $$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \cdot \frac{\vartheta_1(2v|2\tau)}{\vartheta_0(2v|2\tau)} = sn(u(1+k'), \lambda) =$$

$$= \frac{1+k'}{k} \cdot \frac{\vartheta_2(v|\tau)\vartheta_1(v|\tau)}{\vartheta_0^2(v|\tau)\vartheta_3^2(v|\tau)}$$

$$= \frac{1+k'}{k}\sqrt{\frac{k'}{k}} \cdot \frac{\frac{\vartheta_2(v|\tau)}{\vartheta_0(v|\tau)} \cdot \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{\vartheta_1(v|\tau)}{\vartheta_0(v|\tau)}}{\frac{1}{k}\sqrt{k'}\ \frac{\vartheta_3(v|\tau)}{\vartheta_0(v|\tau)}}.$$

Így adódik, hogy

$$sn(u(1+k'), \lambda) = \frac{(1+k')\,snu.cnu}{dnu}$$

Ha $z = sn(u,k)$ $z_1 = sn(u,\lambda)$, akkor lesz

$$u_1 = (1+k')u, \quad \sqrt{\lambda} = \frac{k}{1+k'}, \quad z = (1+k')z\sqrt{\frac{1-z^2}{1-k^2z^2}}$$

Ezen transformatió alkalmazásával tehát az

$u = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-k^2z^2}}$ integrál átmegy az $u_1 = \int_0^{z_1} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-k^2z^2}}$ integrálba

A következőkben egy érdekes összefüggést fogunk tárgyalni a 2-edrendü transformatio és a medium arithmetica geometricum között. Látható, hogy ha $v=0$, a Landen és Gauss féle transformatio egyre megy akkor a Landen féle egyenletekben a 2τ argumentumos ϑ függvény, a Gauss féle egyen-

letekben $\frac{\tau}{2}$ argumentumos ϑ függvény ki van fejezve a τ argumentumos ϑ függvényekkel, úgy, hogy egyik rendszer a másikba átvihető, egyik a másiknak reciprokja.

Induljunk ki a Lande-féle transformatiókból. Legyen

$a_0 = \vartheta_3^2(0|\tau)$ $b_0 = \vartheta_0^2$, $c_0 = \vartheta_2^2$ vagy esetleg arányos mennyiségek, akkor az ismeretes

$\vartheta_3^4 = \vartheta_0^4 + \vartheta_2^4$ relatio szerint lesz:

$$c_0^2 = a_0^2 - b_0^2$$

Ezután legyen

$a_1 = \vartheta_3^2(0|2\tau)$, $b_1 = \vartheta_0^2(0|2\tau)$, $c_1 = \vartheta_2^2(0|2\tau)$

akkor $$c_1^2 = a_1^2 - b_1^2$$

Ezek tehát tulajdonképpen csak két mennyiség van értelmezve, a harmadik függ a két elsőtől. Ha most a Landen 1. féle transformatio utolsó egyenletében $v = 0$ lesz,

$$2a_1 = a_0 + b_0 \quad \text{tehát} \quad a_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}$$

és a Landen II.-ban $v = 0$ írva, lesz

$$b_1^2 = b_0 a_0, \quad \text{tehát} \quad b_1 = \sqrt{a_0 b_0}$$

a hol a négyzetgyök előjele teljesen meg van határozva, mert b_1 értelmezve van. b_1 tehát

a_0 és b_0 arithmeticai, b_1 pedig geometriai közép-arányosa.

Tovább menve, legyen

$$a_2 = \vartheta_3^2(0\,|\,4\tau), \qquad b_2 = \vartheta_0^2(0\,|\,4\tau)$$

a miből következik, hogy

$$a_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}, \qquad b_2 = \sqrt{a_1 b_1}$$

stb, n- szer ismételve ezt az eljárást, ha általánosan. $a_n = \vartheta_3^2(0\,|\,2^n\tau)$, $b_n = \vartheta_0^2(0\,|\,2^n\tau)$

stb, $a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$, $b_n = \sqrt{a_{n-1} b_{n-1}}$

s ha ezekben visszafelé helyettesítjük az értékeket kapjuk a számok egy sorozatát, melyben minden tag az előbbiek arithmeticai és geometriai Középarányosaiból alakul. Gauss foglalkozott ezen medium arithmetico geometricummal, de csak az algorithmus fordul elő egy astronomiai dolgozatban, (Determinatio ~~viath~~ attractionis quam in punctum quodvis positionis datae exerterat planeta, si eius massa per totam orbitam ratione temporis uniformiter esset dispertita) Ből az algorithmus egy elliptikus integrál kiszámítására fel van használva. De Gauss hagyá-

tében ezen medium ar. geometricum elmélete s ebből kiindulva az elliptikus függvények egy sajátságos elmélete állíttatik fel. Gauss az említett astronomiai értekezésében megmutatja, hogy

$$\lim a_n = \lim b_n = M(a,b)$$

vagyis, hogy ez a két limes létezik, s hogy a közös egyenlő s neveri ezt medium ar. geometricumnak a és b között. Gaussnak sikerült is ezt az $M(a,b)$-t előállítani, mint egy complet elsőfajú integrált. Ezen med. arith. geom. mellett Gauss még egy más algorithmussal is foglalkozott, melyben nem három mennyiség szerepel, mint az előbbiben, hanem 4. De ez az általános algorithmus nem egyéb, mint a Gauss féle transformatio az általános Gauss féle algorithmus 2 függvényekre nézve. Az általános Gauss féle algorithmus átmegy a med. arithm. geometricum algorithmusába, ha bizonyos $\delta = 0$.

A δ függvények elméletéből kiindulva lehet most a Gauss féle algorithmus és pedig úgy az általános, mint a speciális algorithmus tényeit kifejteni.

Az erre vonatkozó irodalmat illőleg lásd.

„Schlesinger Handbuch der Diff. El. 3 kötet továbbá a Berliner Acad. Sitzungsberichte 1898, melyben a med. arithm. geom. elmélete ki van fejtve.

Ez a med. arith. geom. még annyiban is nevezetes, hogy egy algorithmust mutat, mely akképp származik, hogy τ helyébe jő $2\tau, 4\tau, \ldots 2^n\tau$. Igaz ugyan, hogy $\nu = 0$ mellett, de az általános Gauss-féle algorithmus egy tetszőleges ν mellett is ad ilyen sorozatot. Képzeljük ekkor $\tau, 2\tau, \ldots 2^n\tau$ értékekre nézve megalkotva a ν függvényeket. Ha sikerül ezen függvényekből τ-nak egy olyan függvényét összeállítani, $\Phi(\tau)$, mely nem változtatja értékét, ha τ helyébe 2τ jő, azaz $\Phi(\tau) = \Phi(2\tau)$, akkor természetes, hogy ez akkor sem változtatja értékét, ha τ helyébe $2^n\tau$ lép, azaz $\Phi(2^n\tau) = \Phi(\tau)$. Ez a függvény tehát invariáns feláll[illegible]tása Gaussnál is előfordul, s ennek összefüggése most levezetendő invariánssal érdekes eredményeket ad. (Ez a most levezetendő invariáns Weber könyvében szerepel.) Ennek felállítása végett járjunk el következőleg. A Gauss II. relatióban τ helyébe

irjunk $2\tau - t$, lesz

$$2\vartheta_3^2(v|2\tau)\vartheta_2(v|2\tau) = \vartheta_2\vartheta_1(v|\tau)$$

Ezt szorozva a Landen II. vel, lesz

$$2\vartheta_0(0|2\tau)\vartheta_0(2v|2\tau)\vartheta_3(v|2\tau)\vartheta_2(v|2\tau) = \vartheta_2\vartheta_0(v|\tau)\vartheta_2(v|\tau)\vartheta_3(v|\tau) \quad a.)$$

De láttuk, hogy

$$2\vartheta_2(0|2\tau)\vartheta_3(1|2\tau) = \vartheta_2^2 \quad (1.)$$

$$\vartheta_0\vartheta_3 = \vartheta_0^2(0|2\tau) \quad (2.)$$

Ezen két relatio szorzatát képezve, lesz

$$\vartheta_2(0|2\tau)\vartheta_3(0|2\tau)\vartheta_0^2(0|2\tau) = \vartheta_0\vartheta_3\vartheta_2^2 \quad b.)$$

Az a.) és b.) összevetve alkotva lesz

$$\frac{\vartheta_0^2(2v|2\tau)\vartheta_3(v|2\tau)\vartheta_3(v|2\tau)}{\vartheta_0(0|2\tau)\vartheta_3(0|2\tau)\vartheta_2(0|2\tau)} = \frac{\vartheta_0(v|\tau)\vartheta_3(v|\tau)\vartheta_3(v|\tau)}{\vartheta_0\vartheta_3\vartheta_2}$$

Tegyünk ebben v helyébe $\frac{v}{n}$-et, a hol n páratlan egész szám és $(v = 1, 2, \ldots n-1)$ ezt $n(n-1)$ relatiot összeszorozva, lesz

$$\prod_{v=1}^{n-1} \frac{\vartheta_0(\frac{2v}{n}|2\tau)\vartheta_3(\frac{v}{n}|2\tau)\vartheta_2(\frac{v}{n}|2\tau)}{[\vartheta_0(0|2\tau)\vartheta_3(0|2\tau)\vartheta_2(0|2\tau)]^{n-1}} =$$

$$= \frac{\prod_{v=1}^{n-1}\vartheta_0(\frac{v}{n}|\tau)\vartheta_2(\frac{v}{n}|\tau)\vartheta_3(\frac{v}{n}|\tau)}{\vartheta_0^{n-1}\vartheta_3^{n-1}\vartheta_2^{n-1}} \quad A.)$$

A baloldali ϑ_0-ban szerepel egyedül $\frac{2v}{n}$ argumentum, a többiben $\frac{v}{n}$. De gondoljunk meg a kö-

vetkezőt: ν felvesszen minden értéket 1-től $n-1$-ig ($\nu = 1, 2, \ldots n-1$), tehát ($2\nu = 2, 4 \ldots 2n-2$.) S mivel feltételünk szerint $n = 2\mu+1$, csak jo'-eatlan, irható

$(2\nu = 2, 4 \ldots n-1, \lambda n+1, n+3 \ldots n+n-2)$

tehát a 2ν értéksorozatát két sorozatra tudjuk felbontani, melynek elsejében levő értékek a ν értékei közt is elő fordulnak, a másodikban pedig így irható: $n+\lambda$, ($\lambda = 1, 3, \ldots n-2$) vagyis λ azon értékeket felveri, melyeket ν is felvesz, de a melyek az első sorban nem fordulnak elő. Most

$$\vartheta_0\left(\frac{n+\lambda}{n}|2\tau\right) = \vartheta_0\left(\frac{\lambda}{n}+1|2\tau\right) = \vartheta_0\left(\frac{\lambda}{n}|2\tau\right) \quad (\lambda = 1, 3 \ldots n-2)$$

úgy hogy 2ν-nek adhatjuk ezeket az értékeket,

$(2\nu = 2, 4 \ldots n-1, \quad 1, 3 \ldots n-2)$

vagyis 2ν ugyanazokat az értékeket veri fel, mint ν maga, úgyhogy az A.) képletben a baloldali $\vartheta_0\left(\frac{2\nu}{n}|2\tau\right)$ helyett $\vartheta_0\left(\frac{\nu}{n}|2\tau\right)$ irható, s lesz

$$\frac{\prod_{\nu=1}^{n-1}\vartheta_0\left(\frac{\nu}{n}|2\tau\right)\vartheta_3\left(\frac{\nu}{n}|2\tau\right)\vartheta_2\left(\frac{\nu}{n}|2\tau\right)}{\left[\vartheta_0(0|2\tau)\vartheta_3(0|2\tau)\vartheta_2(0|2\tau)\right]^{\frac{n-1}{2}}} \quad \frac{\prod_{\nu=1}^{n-1}\vartheta_0\left(\frac{\nu}{n}|\tau\right)\vartheta_2\left(\frac{\nu}{n}|\tau\right)\vartheta_3\left(\frac{\nu}{n}|\tau\right)}{\vartheta_0^{n-1}\vartheta_3^{n-1}\vartheta_2^{n-1}}$$

Ez a képlet már is a kívánt invarianst szolgáltatja, mert a baloldalon a τ, a jobboldalon a 2τ

argumentumos ϑ függvények szerepelnek, tehát a jobboldali kifejezés nem változtatja értékét, ha τ helyébe $3\tau, 4\tau, \ldots 2^n\tau$ lép. Ezen a képleten még egy kis egyszerűsítést lehet alkalmazni. Ugyanis a $(\nu = 1, 2 \ldots n-1)$ sorozat így is írható

$$\left(\nu = 2, 4 \ldots 2\tfrac{n-1}{2},\ n-2\tfrac{n-1}{2}, \ldots n-4, n-2\right)$$

tehát $\left(\frac{\nu}{n} = \frac{2k}{n},\ \frac{n-2k}{n}\right)$ ahol $\left(k = 1, 2, \ldots \frac{n-1}{2}\right)$.

Ha az utolsó egyenlet jobb oldalán $\frac{\nu}{n}$ helyére $\frac{n-2k}{n}$-t teszünk, akkor lévén $\vartheta_0(\nu+1) = \vartheta_0(\nu)$

$$\vartheta_3(\nu+1) = \vartheta_3(\nu)$$

$$\vartheta_2(\nu+1) = -\vartheta_2(\nu)$$

az előjeltől eltekintve ugyan az adódik, mintha $\frac{\nu}{n}$ helyébe $\frac{2k}{n}$-t írtunk volna,

Ebből látható, hogy a jobboldali productumban minden tag kétszer fordul elő, t.i. egyszer, mint $\frac{2k}{n}$ egyszer, mint $\frac{n-2k}{n}$ argumentumos tag. A jobboldali hányados tehát egy négyzet, mely esetleg az előjelben különbözik a következő négyzettől

$$\pm\left\{\underbrace{\frac{\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \vartheta_0\left(\frac{2k}{n}\right)\vartheta_2\left(\frac{2k}{n}\right)\cdot\vartheta_3\left(\frac{2k}{n}\right)}{\vartheta_0^{\frac{n-1}{2}}\vartheta_3^{\frac{n-1}{2}}\vartheta_2^{\frac{n-1}{2}}}}_{\Phi(\tau)}\right\}^2$$

Ez a négyzet nem változtatja értékét, ha τ helyébe 2τ jő. De a négyzetgyökről, tehát $\Phi(\tau)$-ról nem tudjuk, hogy vajjon nem változtatja-e az előjelét, ha τ helyébe 2τ lép. Az eddigiekből világos, hogy ez a négyzet a τ egyértékű véges és folytonos függvénye, mely értelmezve van a felső τ félsíkon belül. Mivel folytonos a τ-tól 2τ-hoz való átmenetelnél csak akkor változtat jegyet, ha a záró értéken keresztül megy, a mi azonban nem történik, mivel $\Phi(\tau)$ban szereplő ϑ-függvények τ minden a felső félsíkban fekvő értéke mellett zérótól különböző értékűek, úgyhogy ez a kifejezés sohasem válik 0-á, s így előjelét sem változtatja, tehát egészen változatlan marad. Tehát $\Phi(\tau)$ nem változik, ha τ helyébe 2τ lép, így akkor sem, ha τ helyébe $2^\lambda\tau$ lép.

$$\Phi(\tau) = \Phi(2^\lambda\tau)$$

a hol λ lehet bármilyen nagy érték, úgyhogy írható

$$\Phi(\tau) = \lim_{\lambda=\infty} \Phi(2^\lambda\tau)$$

De ha $\lambda=\infty$, $2^\lambda\tau$ is $=\infty$, de úgy, hogy i coefficiense lényegesen positiv marad. S mivel $q=e^{\pi i\tau}$, lesz $\lim q=0$, ezt megtéve, lesz

$$\lim_{q=0} \vartheta_0(v|\tau) = 1$$
$$\lim_{q=0} \vartheta_3(v|\tau) = 1$$

tehát $\lim_{q=0} \frac{\vartheta_2(v|\tau)}{\vartheta_2(0|\tau)} = \lim_{q=0} \frac{q^{\frac{1}{4}}\cos v\pi + q^{\frac{7}{4}}\cos 3v\pi + \dots}{q^{\frac{1}{4}} + q^{\frac{9}{4}} + \dots}$

és előbb $q^{\frac{1}{4}}$-el osztva, a limes $= \cos r\pi$ ha $v = \frac{2k}{n}$

írva $\phi(\tau)$-ben lesz $\frac{n-1}{2}$

$$\phi(\tau) = \prod_{k=1} \cos \frac{2k}{n}\pi$$

Ha most a $z^n - 1 = 0$ egyenletben, melynek gyökei

$$\cos \frac{2k}{n}\pi + i \sin \frac{2k}{n}\pi \qquad (k = 0, 1, 2 \dots n-1)$$

elhagyjuk a $z = 1$ gyököt, azaz elosztjuk az egyenlet

baloldalát $(z-1)$-el, $(z^n - 1) : (z-1) = z^{n-1} + z^{n-2} + \dots z + 1$

akkor a $z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + z + 1 = 0$

egyenlet gyökei $z = \cos \frac{2k}{n}\pi + i \sin \frac{2k}{n}\pi$

$$(k = 1, 2 \dots n-1)$$

Ez egy reciprok egyenlet, melynek ha z eleget tesz,

eleget tesz $\frac{1}{z}$ is, Ha alkalmazzuk az $x = z + \frac{1}{z}$ trans-

formatiót, adódik ebből az egyenletből, hogy

$$x = 2\cos \frac{2k}{n}\pi \qquad (k = 1, 2 \dots \frac{n-1}{2})$$

eleget tesz a következő egyenletnek

$$x^{\frac{n-1}{2}} + x^{\frac{n-3}{2}} - 1 - \left(\frac{n-1}{2} - 1\right)x^{\frac{n-3}{2}} - 2 \dots \dots \pm 1 = 0$$

Ezen egyenlet gyökeinek száma az előjelből elté-

Szintve egyenlő a constans taggal, tehát

$$\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} 2\cos\frac{2k}{n}\pi = \pm 1$$

és osztva mindkét oldalt $2^{\frac{n-1}{2}}$-vel, adódik, hogy

$$\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \cos\frac{2k}{n}\pi = \pm\frac{1}{2^{\frac{n-1}{2}}}$$

ez tehát a fentebbi Quotiens értéke - eltekintve az előjeltől. Az előjel meghatározásánál következőleg járunk el: Megszámoljuk ezen szorzatban a negativ cosinusok számát, ha ez páros, az előjel +, ha páratlan, az előjel −. A szorzatban szereplő cosinusok ezek

$$\cos\frac{2\pi}{n},\ \cos\frac{4\pi}{n},\ \ldots\ldots\ \cos\frac{\frac{n-1}{2}\,2\pi}{n}$$

és $\cos\frac{2k\pi}{n} < 0$, ha $\frac{\pi}{2} < \frac{2k\pi}{n} < \frac{3\pi}{2}$ vagyis ha $\frac{n}{4} < k < \frac{3n}{4}$. De nekünk k-nak csak azon positiv egész értékre van szükségünk, melyek $k \leqq \frac{n-1}{2}$ tehát csak azon cosinusok negativok, melyekben $\frac{n}{4} < k < \frac{n}{2}$. Ezen intervallumban $\frac{n\pm1}{4}$ egész szám foglalsik. Ha tehát $\frac{n}{8}$ maradékkal ±1 ad, ez a szám páros, ha a maradék ±3, a szám páratlan, és ennek megfelelőleg az előjel $+1$ illetőleg $-$. Vagyis a szorzat előjele $(-1)^{\frac{n^2-1}{8}} = \left(\frac{n}{2}\right)$, úgyhogy

$$\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \cos\frac{2k}{n}\pi = \left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{\frac{n-1}{2}}}$$

vagyis $$2^{\frac{n-1}{2}} \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} J_0\left(\frac{2k}{n}\right) J_2\left(\frac{2k}{n}\right) J_3\left(\frac{2k}{n}\right) = \left(\frac{n}{2}\right) J_0^{\frac{n-1}{2}} \frac{n-1}{2} J_3^{\frac{n-1}{2}}$$

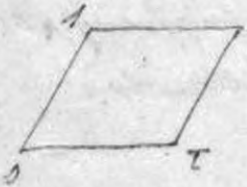
Ezekután térjünk ismét az n-edrendű transformatióra, s tárgyaljuk az első principiális transformatiót, mely abban áll, hogy $\tau_1 = n\tau$, $v_n = nv$ és n páratlannak van feltételezve, mert a páros transformatiót már elvégeztük. Lesz

$$\vartheta_{11}(nv/n\tau) = \vartheta_{12}^{(n)}(v/\tau)$$

ezt az n-edrendű ϑ függvényt kell meghatározni. E végett tekintetbe vesszük a ϑ_{11} függvény 0 pontjait. A tabella szerint

$$\vartheta_{11}(v/\tau) = 0 \quad \text{ha} \quad v = p + q\tau$$

a hol p és q egész számok. Tehát $\vartheta_{11}(nv/n\tau) = 0$ ha $nv = p + qn\tau$ vagyis ha $v = \frac{p}{n} + q\tau$, Ezek az n-edrendű ϑ függvény nullapontjai. Természetes, hogy nekünk csakis a pp. belül fekvő nullapontokra van szükségünk ezek pedig a



$q = 0$ és $p = 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots \frac{n-1}{n}$ pontok, tehát n nullapontja van ezen n-edrendű ϑ függvénynek a pp. belül.

Most összeállítunk egy n-edrendű ϑ függvényt, melynek épen n nullapontja van, és characteristikája (11) ez lesz a keresett ϑ függvény. A nullapontokat két csoportra bontjuk, az elsőben

$$0, \quad \frac{2}{n}, \quad \frac{4}{n}, \quad \ldots\ldots \quad \frac{n-1}{n}$$

a másodikban $\frac{1}{n}$ helyébe $\frac{1-n}{n}$, $\frac{3}{n}$ helyébe $\frac{3-n}{n}$, ... $\frac{n-2}{n}$ helyébe $-\frac{2}{n}$ írva, ismét congruens nullapontokat kapunk, úgyhogy a páratlan p értékeknek megfelelő nullapontok

$$-\frac{2}{n}, \quad -\frac{4}{n}, \quad \ldots\ldots \quad -\frac{(n-1)}{n}$$

Nyilvánvaló, hogy a keresett ϑ n-edrendű függvény ez:

$$\vartheta_1(v) \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \vartheta_1\left(\frac{2k}{n}+v\right)\vartheta_1\left(\frac{2k}{n}-v\right)$$

Mert ennek először is épen a ϑ_1 n nullapontja van. Továbbá a productum characteristikája $\delta, 0$ lévén az egész kifejezés characteristikája (1,1). Ez az n-edrendű ϑ függvény ugyanazon functionális egyenleteknek tesz eleget, mint $\vartheta_{11}^{(n)}(v|\tau)$. Ha tehát megállapítjuk a kettőnek hányadosát, ez egy biperiodicus függvény lesz, mely sehelyen válik 0-á, ez tehát állandó:

$$\frac{\Theta_n^{(n)}(v|\tau)}{\vartheta_1(v)\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}\vartheta_1\left(\frac{2k}{n}+v\right)\vartheta_1\left(\frac{2k}{n}-v\right)} = \frac{1}{2}$$

a mitől következik a transformáit ϑ-ra nézve, hogy

$$C\vartheta_{11}(nv|n\tau) = \vartheta_2(v)\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}\vartheta_1\left(\frac{2k}{n}+v\right)\vartheta_1\left(\frac{2k}{n}-v\right)$$

A többi ϑ-ra egyszerűen megkapjuk a megfelelő képleteket, ha v helyébe $v+\frac{1}{2}$, $v+\frac{\tau}{2}$ és $v+\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}$ lép, n által ϑ_1 átmegy ϑ_0 ϑ_2 ϑ_3-ba lesz

$$C\vartheta_\lambda(nv|n\tau) = \vartheta_1(v)\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}\frac{\vartheta_\lambda}{\vartheta_1}\left(\frac{2k}{n}+v\right)\frac{\vartheta_\lambda}{\vartheta_1}\left(\frac{2k}{n}-v\right)$$

$$(\lambda = 0, 2, 3)$$

Az állandó meghatározásánál az ismert kell következtetni, felhasználván azt identitást

$$\vartheta_1' = \pi\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3$$

Az első egyenlet differentiálva v szerint és $v=0$ írva lesz

$$nC\vartheta_1'(nv|n\tau) = \vartheta_1'(v)\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}\vartheta_1\left(\frac{2k}{n}+v\right)\vartheta_1\left(\frac{2k}{n}-v\right)+\vartheta_1(v)$$

szorozva a productum differentiálquotiensével.

Innen $v=0$ téve, marad

$$1.) \quad nC\vartheta_1'(0|n\tau) = \vartheta_1'\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}\vartheta_1^2\left(\frac{2k}{n}\right)$$

a második összefoglaló egyenletből adódik $v=0$

2.) $\mathcal{C}\vartheta_\lambda(0|n\tau) = \vartheta_1(0) \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \vartheta_\lambda^2\left(\frac{2k}{n}\right) \quad (\lambda = 0,2,3)$

Ha most az 1. egyenletet osztjuk $n\mathcal{C}$-vel, majd a $\vartheta_1' = \pi \vartheta_0 \vartheta_2 \vartheta_3$ képlet felhasználásával a 2.)-ben kifejezett három képlet megfelelő oldalait összeszorozzuk egymással és π-vel akkor a két egyenlet összehasonlításából következik, hogy

$$\frac{\vartheta_1'}{n\mathcal{C}} \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \vartheta_1^2\left(\frac{2k}{n}\right) = \frac{\pi}{\mathcal{C}^3} \vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3 \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \vartheta_0^2\left(\frac{2k}{n}\right)\vartheta_2^2\left(\frac{2k}{n}\right)\vartheta_3^2\left(\frac{2k}{n}\right)$$

Még egyszer alkalmazva a mi képletünket és $\mathcal{C}$-vel keresztül szorozva lesz

$$\mathcal{C}^2 = n\left\{\frac{\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \vartheta_0\left(\frac{2k}{n}\right)\vartheta_2\left(\frac{2k}{n}\right)\vartheta_3\left(\frac{2k}{n}\right)}{\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \vartheta_1\left(\frac{2k}{n}\right)}\right\}^2$$

Négyzetgyököt vonva

$$\mathcal{C} = \frac{\sqrt{n}\left(\frac{2}{n}\right)\vartheta_1^{\frac{n-1}{2}}\vartheta_2^{\frac{n-1}{2}}\vartheta_3^{\frac{n-1}{2}}}{2^{\frac{n-1}{2}} \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \vartheta_1\left(\frac{2k}{n}\right)}$$

A $\sqrt{n}$ előjelének meghatározása végett legyen $q > 0$, azaz $\tau = \infty$, akkor a páros ϑ függvények 1-re reducálódnak, tehát $\mathcal{C} = 1$, lesz; emiatt $\sqrt{n}$ jelét úgy kell választani, hogy az $\left(\frac{2}{n}\right)$ jellel együtt $(+1)$-et adjon. E szerint értékesítve, kapjuk a következő transzformációs kép-

letet

$$\sqrt{n}\,\vartheta_1(nv|n\tau)\,\vartheta_2^{\frac{n-1}{2}}\vartheta_3^{\frac{n-1}{2}}\vartheta_0^{\frac{n-1}{2}} = 2^{\frac{n-1}{2}}\vartheta_1(0)\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}\vartheta_1\left(\frac{2k}{n}|\tau\right)\vartheta_1\left(\frac{2k}{n}+v|\tau\right)\vartheta_1\left(\frac{2k}{n}-v|\tau\right)$$

$(\alpha=0,\ 2,\ 3)$

Ezen képletektől most már egyszerűen át lehet menni az elliptikus függvényekre vonatkozó képletekhez.

Ezen képletekben mint állandók szerepelnek a $\vartheta_1\left(\frac{2k}{n}\right)$ függvényértékek, melyek a

$$\frac{2}{n},\ \frac{4}{n},\ \ldots\ldots\ \frac{2(n-1)}{n}$$

argumentumokra vonatkoznak. A ϑ függvények periódusai $2,\ \tau$, a mi megfelel az elliptikus függvényeknél $4K,\ 2Ki'$ periódusoknak, úgy hogy ha átmegyünk az elliptikus függvényekhez, ott szerepelni fog

$$sn\left(\frac{4vK}{n}\right),\ cn\left(\frac{4vK}{n}\right),\ dn\left(\frac{4v.K}{n}\right)$$

Ezek az értékek a complet osztási egyenlet gyökei, úgyhogy az első principális transformatio explicit képletében mint állandók szerepelnek a complet osztási egyenlet gyökei. Hasonlóképen a második principalis transformationnak megfelelően szerepelni fog $sn\left(\frac{4vKi'}{n}\right)$ stb. Ha tehát a transformatiót szerkesztjük

vinni, előbb a complex valóri egyenletet kell megoldani, a mi algebrailag nem lehetséges, s így ezek a képletek csak transcendens alakban adják a transformált σ függvényeket. Ezeket a képletekkel fordítva fel lehet használni arra, hogy az osztási egyenleteket megoldjuk transcendens függvényekkel.

Különösen egy speciális eset történelmileg érdekes. Ugyanis ezen gondolatmenet segélyével sikerült az általános ötödfokú egyenletet ilyen elliptikus függvények segélyével megoldani. Ezt Kroneckernek és Hermite körülbelül egy időben mutatta ki, hogy t. i. az ötödfokú egyenlet, mely az 5-el való osztás complex osztási egyenletével identificálható, elliptikus függvényekkel megoldható.

Az előbbiekben tárgyaltuk a multiplicatiót mint a transformatio speciális esetét. Ez abban állott, hogy az elliptikus függvényekre alkalmaztuk a $\left(\begin{smallmatrix} \tau & 0 \\ 0 & t \end{smallmatrix}\right)$ transformatiót. Ezzel τ nem változott, $\tau_1 = \tau$ volt, míg $v_1 = nv$,

és $u_1 = nu$ volt. Abel vetette fel az az általános kérdést, hogy ha $sn\,u$-ban u helyébe μu lép, a hol μ egy állandó, miként lesz $sn(\mu u)$ az u-nak olyan bipériodicus függvénye, mely ugyanazokkal a periódusokkal bír, mint $sn\,u$. Ezen kérdés eldöntése végett következőleg járunk el. Vegyünk általánosan $\varphi(u)$ egy bipériodicus függvényt, melynek periódusai (w, w_1), $\frac{w_1}{w} = \tau$ és $J(\tau) > 0$. Azt akarjuk, hogy $\varphi(\mu u)$ is bipériodicus függvény legyen ugyanezekkel a periódusokkal. Ha u helyébe lép $u + pw_1 + qw_2$,

akkor μu " " $\mu u + p\mu w_1 + q\mu w_2$.

vagyis különösen, ha u szaporodik w_1-el, μu szaporodik μw_1-el és ha u szaporodik w_2-el, μu szaporodik w_2-el tehát μw_1 és μw_2 is periódus, és így következőleg fejezhetők ki

$$\mu w_1 = dw_1 + cw_2$$
$$\mu w_2 = bw_1 + aw_2$$

a hol $abcd$ egész számok. Ez a szükséges feltétel, hogy $\varphi(u)$ és $\varphi(\mu u)$ periódusai ugyanazok legyenek. Ebből a két egyenletből

$$\tau = \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \qquad (1)$$

és $\mu = c\tau + d.$

Ha most τ egy tetszőleges periodus lánygadar, melyben $\mathfrak{I}(\tau) > 0$, ez az (1) egyenlet csak akkor állhat, ha $a = d$ és $b = c = 0$, ez esetben $\mu = d$, vagyis egy egész szám, úgyhogy ebben az esetben közönséges szorzással van dolgunk. Ez az eset már el lévén intézve, csak azt az esetet kell még tekintetbe venni, midőn az (1) egyenlet nem teljesül identice minden τ-ra, hanem meghatározza a τ-t, tehát ha τ a következő negyzetes egyenletnek gyöke

$$c\tau^2 + (d-a)\tau - b = 0 \qquad \text{I.}$$

Számítsuk ki ebből τ-t. Ha az ellentett jellel vett discriminans $\Delta = -4bc - (d-a)^2 = 4(ad-bc) - (a+d)^2$ és $ad - bc = n$, egész számot írva, $\Delta = 4n - (a+d)^2$ tehát

$$\tau = \frac{a - d + i\sqrt{\Delta}}{2c}$$

s mivel $\mathfrak{I}(\tau) > 0$, a $\sqrt{\Delta}$ jele úgy határozandó meg, hogy $\operatorname{sgn}\sqrt{\Delta} = \operatorname{sgn} c$ legyen

És innen $$\mu = \frac{a + d + i\sqrt{\Delta}}{2}. \qquad (2.)$$

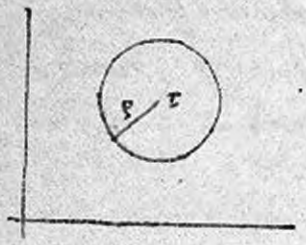
és $n = \frac{\Delta + (a+d)^2}{4} = \frac{(a+d)^2 - (i\sqrt{\Delta})^2}{4} = \frac{a+d-i\sqrt{\Delta}}{2} \cdot \frac{a+d+i\sqrt{\Delta}}{2}$

Látjuk, hogy φ τ-tól csak abban különbözik, hogy ott $-d$ helyett $+d$ áll, s hogy c-vel szorzva van, tehát μ eleget tesz a következő négyzetes egyenletnek

$$\mu^2 - (a+d)\mu + n = 0$$

Mit mond ez a képlet? Az, hogy $\varphi(u+v)$ ugyanazokkal a periodusokkal bírjon, mint $\varphi(u)$, csak akkor oldható meg akképp, hogy μ ne legyen egész szám, ha τ egy (I) ilyen négyzetes gyöke, és ha μ a (2) alatti képzetes mennyiség. Hogy ez a (2) alatti mennyiség képzetes, könnyen belátható, mert τ nem lehet valós, tehát $\Delta > 0$, és így μ képzetes. Ezért nevezzük ezt a feladatot a complex multiplicatio feladatának; mert ha μ nem egész szám, szükségképp complex, akkor a biperiodicus függvények, melyekre nézve egy ilyen multiplicatio lehetséges, speciális függvények, mivel τ egy ilyen négyzetes egyenletnek tartozik eleget tenni. Az ilyen τ-kat singularis τ-knak nevezzük.

Ezen singularis értékekre nézve egy érdekes észrevételt fogunk itt tenni. T. i. a felső τ síkban képzeljük egy tetszőleges τ értéket. Ha e körül egy tetszőleges kis sugárral kört írunk, ezen belül még végtelen sok singularis τ értékek feküsznek, tehát azzal a tulajdonsággal bírnak, hogy a felső τ sík minden pontjának minden közelében végtelen sok feküsznek. Ezt Cantor úgy fejezi ki, hogy a singularis τ értékek a felső τ síkon belül mindenütt sűrűn fekszenek (überall dicht). Ebből látszik, hogy ezen singularis τ értékeknek egy általános jelentésük van. Ha t. i. tekintetbe vesszük, hogy τ képzetes és irrationalis, látjuk, hogy τ a praxisban csak közelítőleg ismeretes, úgyhogy ilyen esetben τ helyett mindig vehetünk egy singularis τ-t, Ezek a singularis τ-k tehát complex multiplicatiot engednek.



Érdekes az itt bebizonyított szükséges feltétel elegendő voltát is felismerni. Legyen τ egy

ilyen négyzetes egyenlet gyöke

$A\tau^2 + B\tau + C = 0$, a miben A, B, C egész számok. Továbbá $\Delta = 4AC - B^2 > 0$ tehát τ képzetes. Ez és a

$$c\tau^2 + (d-a)\tau - b = 0$$

egyenlet baloldala csak egy faktorban különbözhetik egymástól, tehát $c = Ax$, $b = -Cx$, $d-a = Bx$, x egész szám. Ha most $a+d = y$, akkor lévén

$$\tau = \frac{-B + i\sqrt{\Delta}}{2A}$$

$$\mu = c + d\tau = \tfrac{1}{2}(y + x i\sqrt{\Delta})$$

$$n = \tfrac{1}{4}(y^2 + \Delta x^2)$$

t. i. $\Delta = 4AC - B^2$, tehát $\Delta = x^2(-4bc - (d-a)^2)$ tehát az előbbi Δ-nak x^2-szorosa.

Ezek tehát legáltalánosabb előállításai a τ, μ, n mennyiségeknek.

A mi az általános előállítását illeti az ilyen $\varphi(u\,u)$-nek az most, feltéve, hogy τ és μ a fenti módon van előállítva bipériodicus függvény, mely ugyanazon periodusokkal bír, mint $\varphi(u)$. Ha ezen bip. függvénynek tény-

leges előállítását akarjuk nyerni a $\varphi(u)$-val, ismerni kell, hogy $\varphi(\mu u)$ a per. parallelogrammán belül hányadrendű. E végett következőleg okoskodunk. Ha

a átmegy $(u + pw_1 + qw_2)$-be,

μu " $(\mu u + \mu p w_1 + \mu q w_2)$-be (II.)

Ezen (II.) értékek tehát congruensek (röviden $\equiv$) μu-val. T. i. tekintetbe kell venni, hogy

$$\mu u + p(dw_1 + cw_2) + q(bw_1 + aw_2) = \mu u + w_1(pd+qb) + w_2(cp+aq)$$

tehát a (II.) értékek tényleg congruensek μu-val. De általánosan nézve ezek nem az összes, μu-val congruens értékek, mert csak $\mu u + p'w_1 + q'w_2$ alakúak, hol p' és q' egész számok. A II. értékek tehát csak azokat a μu-val congruens értékeket adják, a hol

$$p' = pd + qb$$
$$q' = cp + qa$$

Világos, hogy általánosan nem lehet minden egész számot ebben az alakban előállítani. Ez csak akkor lehetséges, ha a két egyenletből p és q mint egész szám adódik, feltéve, hogy p' és q' is az.

Erre pedig szükséges és elégendő, hogy $ad - bc = 1$ legyen. Ha ez nem teljesül, ha tehát $n \neq 1$, akkor II. nem adja az összes, μu-val congruens értékeket. S most úgy áll a dolog, hogy ebben az esetben az összes μu-val congruens értékek kétrangos számú osztályba sorozhatók. Az elsőbe tartoznak azok, melyek a II. képlettel vannak adva, aztán van egy érték, a u_1, mely nem tartozik ezen első osztályba, akkor az 2.) $u_1 + \mu p w_1 + \mu q w_2$ egy második osztályt alkot, melynek tagjai szintén $\equiv \mu u$-val. Ha van még egy u_2, mely sem az 1.) sem a 2.) osztályba sem tartozik, ez meghatároz egy harmadik osztályt

3.) $$u_2 + \mu p w_1 + \mu q w_2$$

Tehát a μu-val congruens számok kétrangos véges számú osztályba sorozhatók. Ha ezeknek száma r, és $\varphi(u)$ egy d-rendű bij. függvény, akkor $\varphi(\mu u)$ egy rd-rendű bij. függvény, mert a parallélogrammán belül μu mellett előfordul még u_1 u_2 stb. Ezek a körülmények meghatározzák azt a rendkívül érdekes és mély

összefüggést, mely a complex multiplicatio és a számelmélet magasabb részei között fennáll. Különösen Kronecker tanulmányozta ezt az összefüggést.

Csak azzal az esettel foglalkozunk néhány szóval, mely kiadódik, ha $n = 1$. Ekkor csak 1 periódusosztály van, $\nu = 1$. Ha pl. $\varphi(u) = \operatorname{tn} u$, akkor $\operatorname{sn}(\mu u)$ is másodrendű elliptikus függvény lesz. Mivel továbbá $\operatorname{sn}(\mu u)$ éppúgy, mint $\operatorname{sn} u$ páratlan függvény, az állandók kellő megválasztásával el lehet érni, hogy

$$\operatorname{sn}\mu u = \varrho \cdot \operatorname{sn} u \quad \text{legyen}$$

Ez az eset tehát akkor áll be, ha $n = 1$. De

$$n = \tfrac{1}{4}(y^2 + \Delta x^2)$$

és

$$\mu = \tfrac{1}{2}(y + x i \sqrt{\Delta})$$

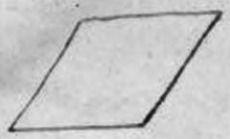
x, y és Δ egész számok, és pedig $\Delta > 0$. Lássuk az eseteket, melyekben $n = 1$

1.) $x = 0$, $y = 2$, akkor $\mu = 1$, tehát $\operatorname{sn}\mu u = \operatorname{sn} u$. Ez triviális eset.

2.) $x = \pm 1$, $y = \pm 1$, $\Delta = 3$, akkor $\mu = \frac{\pm 1}{2}, \frac{\pm i\sqrt{3}}{2}$.

τ eleget tesz egy másodfokú egyenletnek, mely-

nek discriminansa $-\sqrt{3}$, tehát τ egy harmadik vagy hatodik egységgyök. Ekkor a per. parallelogramma egy romhus, melynek két külső szöge 60° és 120°.



3.) $\lambda = \pm 2$, $\gamma = 0$, $\Delta = 1$.

akkor $\mu = \pm i$, tehát τ eleget tesz egy négyzetes egyenletnek, melynek discriminansa -1, tehát $\tau = \pm i$; ekkor a per. parallelogramma négyzet. Ez a lemniscaticus függvények ereje.

Ez a négy eset az egyenlőtlenségben, melyekben a complex multiplicatioval adódó $sn(\mu u) = C sn u$.

Tankönyvek:

Koenigsberger, Briot et Bouquet, Kirchhoff, Weber.

Vége. 1901. jun 23.

BOLYAI TUD. EGYETEM
KÖNYVTÁRA II.
4200/8622-1957
KOLOZSVÁR

M. 680

KOLOZSVÁRI BOLYAI
TUDOMÁNYEGYETEM
MATEMATIKAI INTÉZET
KÖNYVTÁRA

Szakl. sz.: 680