VÁLYI GYULA

ÉRTEKEZÉSEI.

A MÁSODRENDŰ

PARTIALIS DIFFERENTIALIS EGYENLETEK

ELMÉLETÉHEZ.

IRTA

S A BÖLCSÉSZETTUDORI CZIM ELNYERÉSE VÉGETT A KOLOZSVÁRI M. KIR. TUD.-EGYETEM MENNYISÉGTAN-TERMÉSZETTUDOMÁNYI KARÁHOZ BENYÚJTOTTA

VÁLYI GYULA

VIZSGÁLT TANÁRJELÖLT.

KOLOZSVÁRT.

NYOMATOTT STEIN JÁNOS M. K. EGYETEMI NYOMDÁSZNÁL.

1880.

$V\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) dx.dy$ kettős egészlete legnagyobb vagy legkisebb értékének meghatározására az első szükséges feltételt

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial V}{\partial p} + \frac{d}{dy}\frac{\partial V}{\partial q} = o \qquad \left(p = \frac{\partial z}{\partial x}, q = \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

egyenlet adja, vagy kibontott alakban:

$$\frac{\partial P}{\partial p}.r + 2\frac{\partial P}{\partial q}s + \frac{\partial Q}{\partial q}t = o \qquad 1.)$$

$$\left(P = \frac{\partial V}{\partial p}, Q = \frac{\partial V}{\partial q}, r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)$$

Monge bebizonyitotta,*) hogy

$$Rr + Ss + Tt + U = o$$

másodrendű partialis differentialis egyenletnek, a hol R, S, T, U függvényei x, y, z, p, q-nak, csak akkor van

$$u = F(v)$$

alakú első rendű általános megoldása, — a hol u és v függvényei x, y, z, p, q-nak, F tetszés szerinti függvény, — ha

$$u = \text{constans}, \; v = \text{constans}$$

megoldásai ennek a közönséges differentialis egyenletrendszernek:

$$Rdy^2 - Sdx\,dy + Tdx^2 = o$$
$$Rdy.dp + Tdx.dq + Udx.dy = o$$
$$dz - pdx - qdy = o$$

*) „Histoire de l'Académie des Sciences" 1784. Szigorú bizonyítást ad Boole „Ueber die partielle Differentialgleichung $Rr + Ss + Tt + U(s^2 - rt) = V$." (Crelle, Journal LXI. kötet.)

**

Czélunk meghatározni a szükséges és elégséges feltételeket arra nézve, hogy az 1. egyenletnek $u = F(v)$ alakú első rendű általános megoldása lehessen, egyszersmind megmutatni, miképen lehet ezeket a feltételeket felhasználni magának az egészletnek meghatározására.

I.

Azt az esetet előre kizárhatjuk, a mikor $\frac{\partial P}{\partial p} = \frac{\partial Q}{\partial q} = o$, mert ebben az esetben az 1. egyenlet $s = o$ egyenletre redukálódik, a melynek egészlete $z = f(x) + \varphi(y)$ alakban ismeretes. Ezért feltehetjük, hogy $\frac{\partial P}{\partial p}$, $\frac{\partial Q}{\partial q}$ közűl legalább az egyik nem $= o$.

A következőkben feltesszük, hogy $\frac{\partial P}{\partial p}$ nem $= o$.

Az 1. egyenlethez tartozó Monge-féle simultan egyenletek:

$$\frac{\partial P}{\partial p} dy^2 - 2\frac{\partial P}{\partial q} dx.dy + \frac{\partial Q}{\partial q} dx^2 = o \qquad a)$$

$$\frac{\partial P}{\partial p} dy.dp + \frac{\partial Q}{\partial q}. dx.dq = o \qquad b)$$

$$dz - pdx - qdy = o \qquad c)$$

vagy ha

$$\sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial q}\right)^2 - \frac{\partial P}{\partial p}\cdot\frac{\partial Q}{\partial q}} = D,\quad \frac{\frac{\partial P}{\partial q} - D}{\frac{\partial P}{\partial p}} = f,\quad \frac{\frac{\partial P}{\partial q} + D}{\frac{\partial P}{\partial p}} = g$$

jelöléseket behozzuk, $a)$ egyenlet lesz:

$$(dy - fdx)(dy - g.dx) = o$$

igy a szerint, a mint az egyik vagy a másik factort teszszük $= o$, kapjuk fennebbi egyenletek helyett a következőket:

$$\left.\begin{aligned} &dy - fdx = o \\ &dp + gdq = o \\ &dz - (p + qf)\,dx = o \end{aligned}\right\} 2) \text{ vagy } \left.\begin{aligned} &dy - gdx = o \\ &dp + fdq = o \\ &dz - (p + qg)\,dx = o \end{aligned}\right\} 3.)$$

Igy arra nézve, hogy az 1. egyenletnek $u = F(v)$ alakú általános elsőrendű egészlete legyen, szükséges és elégséges, hogy a 2. vagy 3. egyenlet-rendszernek két egészlete legyen meghatározható.

Vegyük a 2. alatti rendszert.

$dp + gdq = o$ egyenlet magában egészelhető, mert g p és q függvénye. Egészlete

$$\varphi = \text{Constans}$$

ha φ megoldása ennek a partialis differentialis egyenletnek:

$$g\frac{\partial\varphi}{\partial p} - \frac{\partial\varphi}{\partial q} = o \quad 4.)$$

Ha φ megoldás, akkor $F(\varphi)$ is az, a hol F tetszés szerinti függvény.

Hogy a 2. egyenletrendszernek még egy egészlete legyen, szükséges és elégséges, hogy meghatározni tudjunk olyan λ és μ szorzókat, hogy

$$\lambda\,(dy - fdx) + \mu\,(dz - (p + qf)\,dx) = o$$

egészelhető legyen $\varphi = \text{Constans}$ egészlet felhasználásával. Erre nézve szükséges, hogy

$$\lambda\,,\ \mu \text{ és } \lambda f + \mu\,(p + qf)$$

csak annyiban függjenek p-től és q-tól, a mennyiben φ függvényei, azaz a 4. egyenletnek megoldásai kell hogy legyenek. Igy állani kell ezeknek az egyenleteknek:

$$g\,\frac{\partial\lambda}{\partial p} - \frac{\partial\lambda}{\partial q} = o$$

$$g\,\frac{\partial\mu}{\partial p} - \frac{\partial\mu}{\partial q} = o$$

$$\lambda\left(g\,\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial q}\right) + \mu\left(g\,\frac{\partial\,(p + qf)}{\partial p} - \frac{\partial\,(p + qf)}{\partial q}\right) = o$$

Tegyük

$$g\,\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial q} = \frac{A}{\frac{\partial P}{\partial p}}$$

$$g\,\frac{\partial\,(p + qf)}{\partial p} - \frac{\partial\,(p + qf)}{\partial q} = g - f + q\left(g\,\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial q}\right) = \frac{B}{\frac{\partial P}{\partial p}}$$

akkor az utolsó egyenlet:

$$\lambda A + \mu B = o$$

alkalmazzuk erre még egyszer a $\left(g\frac{\partial}{\partial p}-\frac{\partial}{\partial q}\right)$ miveletet. Lesz:

$$\lambda\left(g\frac{\partial A}{\partial p}-\frac{\partial A}{\partial q}\right)+\mu\left(g\frac{\partial B}{\partial p}-\frac{\partial B}{\partial q}\right)=o$$

A két egyenletből λ és μ eliminálása után

$$A\left(g\frac{\partial B}{\partial p}-\frac{\partial B}{\partial q}\right)-B\left(g\frac{\partial A}{\partial p}-\frac{\partial A}{\partial q}\right)=o \quad 5.)$$

Ez a feltétel tehát szükséges arra, hogy a 2. egyenletrendszernek két egészlete legyen, de elégséges is. Mert az 5. egyenlet azt mondja ki, hogy vagy $A=o$, vagy pedig $\frac{B}{A}$ függvénye φ-nek.

Első esetben $dy-fdx=o$ egyenlet egészelhető, mert $A=o$ szerint f csak φ függvénye, igy $\varphi=\text{Const.}$ egészlet felhasználásával egészlete lesz:

$$y-f.x=\text{Const.}$$

Második esetben $dz-(p+qf)\,dx-\frac{B}{A}(dy-fdx)=o$ egyenlet egészelhető, mert 5. szerint $\frac{B}{A}$ φ függvénye, s akkor $p+qf-\frac{B}{A}f$ is az, mert a 4. egyenletnek megfelel. Ugy hogy $\varphi=\text{Const.}$ egészlet felhasználásával fennebbi egyenlet egészlete lesz:

$$z-\left(p+qf-\frac{B}{A}f\right)x-\frac{B}{A}y=\text{Const.}$$

E szerint az 5. egyenlet adja a szükséges és elégséges feltételt arra nézve, hogy az 1. egyenletnek $u=F(v)$ alakú első rendű általános egészlete lehessen.

Az 5. egyenlet átalakitására határozzuk meg A és B értékét, felhasználva f, g és D definitióját.

$$A=\frac{\partial P}{\partial p}\left(g\frac{\partial f}{\partial p}-\frac{\partial f}{\partial q}\right)=\frac{\partial D}{\partial q}-f\frac{\partial D}{\partial p}$$

$$B=\frac{\partial P}{\partial p}\left(q\left(g\frac{\partial f}{\partial p}-\frac{\partial f}{\partial q}\right)+g-f\right)=q\left(\frac{\partial D}{\partial q}-f\frac{\partial D}{\partial p}\right)+2D$$

Ezeknek egyszerűbb alakot adhatunk, ha D-t, a melyet eddig, mint p és q függvényét tekintettük, ezután q és P függvényeűl veszszük fel, azaz p és q helyett q és P-t vezetjük be új variabilisokúl. Ha D-nek ily értelemben q és P szerint vett partialis differentialis quotienseit D_1 és D_2-vel jelöljük:

$$\frac{\partial D}{\partial q} = D_1 + D_2 \frac{\partial P}{\partial q}$$

$$\frac{\partial D}{\partial p} = D_2 \frac{\partial P}{\partial p}$$

ezeket bevezetve, lesz:

$$A = D_1 + DD_2 \qquad B = q\,(D_1 + DD_2) + 2D$$

Az 5. egyenlet szerint

$$A^2 \left(g \frac{\partial \frac{B}{A}}{\partial p} - \frac{\partial \frac{B}{A}}{\partial q} \right) = o$$

vagy ha $\frac{B}{A}$-nak, mint q és P függvényének part. diff. quotienseit $\left(\frac{B}{A}\right)_1$ és $\left(\frac{B}{A}\right)_2$-vel jelöljük:

$$A^2 \left[\left(\frac{B}{A}\right)_1 - D \left(\frac{B}{A}\right)_2 \right] = o$$

vagy A és B értékének helyettesitése után

$$-\,2\,DD_{11} + 2\,D^3 D_{22} + 3\,D_1^2 + D^2 D_2^2 = o \qquad 6.)$$

ha D_{11} és D_{22}-vel D-nek q és P szerint vett második part. diff. quotiensét jelöljük.

Ha D ennek az egyenletnek eleget tesz, eleget tesz $-D$ is. Már pedig a 3. egyenletrendszer csak annyiban különbözik a 2. egyenletrendszertől, hogy a hol itt D, ott $-D$ áll. Tehát ha a 2. rendszernek két egészlete van, két egészlete van a 3. rendszernek is. Ebből pedig Monge tantétele szerint következik, hogy az 1. másodrendű partialis differentialis egyenletnek vagy két $u = F(v)$ alakú elsőrendű általános egészlete van, vagy egy sincsen.

A 2. és 3. egyenletrendszer azonos, ha $D = o$. Ekkor az egyenletrendszernek három egészlete van, mert ezen esetben $A = o$, $B = o$, ezek pedig azt fejezik ki, hogy f és $p + qf$ csak φ függvényei, igy $dy - fdx = o$

$$dz - (p + gf)\,dx = o$$

egyenletek $\varphi =$ Const. egészlet felhasználásával egészelhetők. Ha egészleteiket $\psi =$ Const. $\chi =$ Const. által jelöljük, akkor az 1. egyenletnek elsőrendű általános egészletei lesznek:

$$\psi = F(\varphi) \quad , \quad \chi = G(\varphi)$$

a hol F és G tetszés szerinti függvények.

Tehát ebben az esetben is két elsőrendű általános egészlete van az 1. egyenletnek.

II.

Mihelyt D a 6. egyenletnek megfelel, azonnal bizonyos, hogy a 2. és 3. egyenletrendszernek két-két egészlete van, s igy az 1. egyenletnek két elsőrendű általános egészlete. Az egészelésnél egyedüli nehézséget

$$dp + gdq = o \qquad dp + fdq = o$$

egyenletek egészelése adhat, a melyek egyes esetekben complicált differentialis egyenletek lehetnek. Meg fogjuk mutatni, hogy ugyanazzal a számitással, a mely szükséges arra nézve, hogy az elsőrendű általános egészletek létezéséről meggyőződjünk, egyszersmind megkapjuk ezeknek az egyenleteknek egészleteit is. Egyes esetekben ugyan nem kapjuk közetlenűl magukat az egészleteket, de épen ezen esetekre megmutatjuk, hogy a fennebbi egyenletek olyanok, a melyek egészelésére módszereink vannak.

Hogy rövidebben fejezhessük ki magunkat, minden függvényt, a mely $=$ Const. téve $dp + gdq = o$ egyenlet egészletét adja, φ függvénynek, azt pedig, a mely $=$ Const. téve $dp + fdq = o$ egyenlet egészletét adja, ψ függvénynek fogjuk nevezni.

A 2. egyenletrendszerrel szoros összefüggésben levő A-nak és B-nek megfelelőleg a 3. egyenletrendszernél bevezetjük a-t és b-t, definiálva következőképen:

$$a = \frac{\partial P}{\partial p}\left(f\frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial g}{\partial q}\right) = -D_1 + DD_2$$

$$b = \frac{\partial P}{\partial p}\left(f\frac{\partial(p+qg)}{\partial p} - \frac{\partial(p+qg)}{\partial q}\right) = q\,(-D_1 + DD_2) - 2D$$

$a = o$ a feltétel arra, hogy g ψ függvény legyen,

$b = o$ a feltétel arra, hogy $(p + qg)$ ψ függvény legyen.

Az 5. alatti egyenletnek megfelelő

$$a^2\left(f\frac{\partial\frac{b}{a}}{\partial p}-\frac{\partial\frac{b}{a}}{\partial q}\right)=o \quad 7.)$$

a és b értékének betevése után ujra a 6. egyenletet adja, mint fennebb már kimutattuk. Ugy hogy a 7. és 5. egyenlet egy és ugyanaz.

A következőkben összeállitjuk az összes eseteket, a melyek az 1. egyenlet egészelésénél eléjőhetnek.

1.) $D = o$. Ekkor a 2-ik és 3-ik egyenletrendszer azonos. $dp + gdq = o$ egyenlet $dP = o$ alakot ölt, tehát P φ függyény. A mellett ezen esetben $A = o$, $B = o$, tehát f és $p + qf$ is φ függvények, ugy hogy az 1. egyenlet elsőrendű általános egészletei lesznek.

$$y - f.x = F(\varphi) \qquad z - (p + qf)\, x = G(\varphi)$$

a hol φ helyett P, f vagy $p + qf$ vehető.

2.) $D =$ Constans. Ekkor $A = a = o$, tehát f φ függvény, g ψ függvény. Még egy φ és ψ függvény könnyen kapható. Ugyanis $dp + gdq = o$ egyenlet igy is irható: $dP + Ddq = o$, és $dp + fdq = o$, igy is: $dP - Ddq = o$. Tehát jelen esetben $P + Dq$ φ függvény, $P - Dq$ ψ függvény. Az 1. egyenlet egészletei lesznek:

$$y - f.x = F(\varphi) \quad , \quad y - g.x = G(\psi)$$

a hol φ helyett f vagy $P + Dq$, — ψ helyett g vagy $P - Dq$ is vehető.

3.) $A = o$, de D és f nem constansok.

Az 5. alatti egyenlet teljesülvén, a vele egy ugyanazon 7. egyenlet szerint $\frac{b}{a}$ ψ függvény. Másfelől $A = o$ szerint f ψ függvény. A számára ezt az értéket is kaptuk volt:

$$A = \frac{\partial D}{\partial q} - f\frac{\partial D}{\partial p}$$

tehát $A = o$ szerint D is ψ függvény. Igy az 1. egyenlet egészletei lesznek:

$$y - f.x = F(f)$$

$$z - \frac{b}{a}y + \left(\frac{b}{a}g - p - qg\right)x = G(\psi)$$

a hol ψ helyett $\frac{b}{a}$ vagy D vehető.

4.) $A = o$, D nem Constans, de $f =$ Constans. Ez az egyik eset, a mikor nem irhatjuk fel készen az 1. egyenlet egészleteit. Mert f ugyan eleget tesz a φ-t definiáló 4. egyenletnek, de $dp + gdq = o$ egészletét még sem szolgáltathatja. ψ függvényünk ugyan most is van, mert D és $\frac{b}{a}$ ψ függvények. Ha a második constans is volna, D feltétel szerint nem az. Igy egyik egészlet most is:

$$z - \frac{b}{a} y + \left(\frac{b}{a} g - p - qg\right) x = G(\psi)$$

a hol $\psi = D$ vagy $\frac{b}{a}$.

Hogy a másik egészletet meghatározhassuk, határozzuk meg, milyen alakú kell hogy legyen V, hogy f constansnak jőjön ki?

$\dfrac{\dfrac{\partial P}{\partial q} - D}{\dfrac{\partial P}{\partial p}} = f$ egyenletből V számára ezt a part. diff. egyenletet kapjuk:

$$f^2 \frac{\partial P}{\partial p} - 2f \frac{\partial P}{\partial q} + \frac{\partial Q}{\partial q} = o$$

ennek egészlete a Monge módszere szerint:

$$V = q.\Phi(p + qf) + \Psi(p + qf)$$

Ebből $P = q.\Phi^1 + \Psi^1$; $Q = \Phi + f.(q\Phi^1 + \Psi^1)$ és $D = \Phi^1$. Tehát $P = qD + \omega(D)$, a hol ω függvényjel.

Az egészelendő egyenlet: $dp + gdq = o$, mint emlitők, azonos ezzel: $dP + Ddq = o$. Tehát a mostani esetre:

$$2D.dq + \left(q + \omega^1(D)\right) dD = o.$$

Ez pedig q-ban vonalos differentialis egyenlet, a mely ismert módszer szerint egészelhető. Igy határozhatunk meg ebben az esetben egy φ függvényt, a melylyel azután lesz a másik egészlete az 1. egyenletnek:

$$y - f.x = F(\varphi)$$

5.) $\frac{B}{A} = C$, $\frac{b}{a} = c$ constansok.

Ebben az esetben D megfelel ennek a két egyenletnek:

$$(q-C)(D_1+DD_2)+2D=o$$
$$(q-c)(-D_1+DD_2)-2D=o$$

de akkor meg ennek is:

$$(q-c)(q-C)D_1+D(2q-C-c)=o$$

ennek egészlete azonban: $D=\dfrac{\omega(P)}{(q-C)(q-c)}$

Hogy a fennebbi egyenleteknek is megfeleljen, kell lenni:

$$C-c+\omega^1(P)=o$$

tehát $\omega(P)=(c-C)P+e$, a hol e egészleti constans.

Tehát a szóban forgó eset csak akkor lehetséges, a mikor

$$D=\frac{(c-C)P+e}{(q-c)(q-C)}$$

De ekkor a Monge-féle egyenletrendszerek (2. és 3.) könynyen egészelhetők.

$dP+Ddq=o$ egészlete lesz: $\varphi=\dfrac{q-c}{q-C}\Big((c-C)P+e\Big)=\text{Const.}$

$dP-Ddq=o$ egészlete lesz: $\psi=\dfrac{q-C}{q-c}\Big((c-C)P+e\Big)=\text{Const.}$

tehát az 1. egyenlet elsőrendű egészletei lesznek:

$$z-Cy+(Cf-p-qf)x=F(\varphi)$$
$$z-cy+(cg-p-qg)x=G(\psi)$$

6.) $\dfrac{B}{A}=C$ constans, $\dfrac{b}{a}$ azonban nem.

Az 5. egyenlet állván, a vele azonos 7. egyenlet szerint $\dfrac{b}{a}$ ψ függvény. Csak φ függvényt kell még kapnunk. $\dfrac{B}{A}=C$ adja D számára ezt az egyenletet:

$(q-C)(D_1+DD_2)+2D=o$. Ennek egészlete pedig

$$P+(q-C)D=\omega\Big((q-C)^2D\Big)$$

a hol ω tetszés szerinti függvény.

A φ-t definiáló egyenlet: $dP+Ddq=o$ lesz:

$$(q-C)dD-d\omega=o$$

Azonban $(q-C)^2D=\chi(\omega)$ alakban meghatározható.

Ezt bevezetve az egyenlet lesz:

$$\frac{dD}{\sqrt{D}} - \frac{d\omega}{\sqrt{\chi(\omega)}} = o$$

Igy φ meghatározása quadraturára van visszavive. Az 1. egyenlet egészletei lesznek:

$$z - Cy + (Cf - p - qf)\,x = F(\varphi)$$

$$z - \frac{b}{a}\,y + \left(\frac{b}{a}\,g - p - qg\right)x = G\left(\frac{b}{a}\right)$$

7.) Sem $\frac{B}{A}$, sem $\frac{b}{a}$ nem constans, de a 6. egyenlet áll. Ekkor az ezzel azonos 5. szerint $\frac{B}{A}$ φ függvény, 7. szerint $\frac{b}{a}$ ψ függvény. Tehát az egészletek lesznek:

$$z - \frac{B}{A}\,y + \left(\frac{B}{A}\,f - p - qf\right)x = F\left(\frac{B}{A}\right)$$

$$z - \frac{b}{a}\,y + \left(\frac{b}{a}\,g - p - qg\right)x = G\left(\frac{b}{a}\right)$$

8.) D az 5. egyenletnek nem tesz eleget. Ekkor $u = F(v)$ alakú elsőrendű általános egészlete 1.-nek nincsen.

Az előbbiek illustrálására lássunk egy pár példát.

1. $V = \sqrt{p^2 + q^2}$; ebből:

$$P = \frac{p}{V},\ Q = \frac{q}{V},\ \frac{\partial P}{\partial p} = \frac{q^2}{V^3},\ \frac{\partial P}{\partial q} = \frac{-pq}{V^3},\ \frac{\partial Q}{\partial q} = \frac{p^2}{V^3},\ D = o$$

$$f = g = -\frac{p}{q}$$

Az egészelendő egyenlet:

$$q^2 r - 2pq\,s + p^2 t = o$$

Elsőrendű egészletei:

$$y - \frac{p}{q}\,x = F\left(\frac{p}{q}\right)$$

$$z = G\left(\frac{p}{q}\right)$$

Ez a második egyenlet könnyen egészelhető még egyszer. Egészlete:

$$y = x\omega(z) + \chi(z)$$

2. $V = \frac{1}{2}\left(\frac{p+1}{q+1}\right)^2$. Ebből

$$P = \frac{p+1}{(q+1)^2}, Q = -\frac{(p+1)^2}{(q+1)^3}, \frac{\partial P}{\partial p} = \frac{1}{(q+1)^2}, \frac{\partial P}{\partial q} = -\frac{2(p+1)}{(q+1)^3},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial q} = \frac{3(p+1)^2}{(q+1)^4}, D = \frac{p+1}{(q+1)^3} = \frac{P}{q+1}, f = -\frac{3(p+1)}{q+1}, g = -\frac{p+1}{q+1}$$

$A = o$. tehát ez a példa a fennebb 3. alatt felsorolt esethez tartozik.

Az egészelendő egyenlet:

$$(q+1)^2 r - 4(p+1)(q+1)s + 3(p+1)^2 t = o$$

Elsőrendű egészletei;

$$y + 3\frac{p+1}{q+1} = F\left(\frac{p+1}{q+1}\right)$$

$$x + y + z = G\left(\frac{p+1}{(q+1)^3}\right)$$

3. A minimalis felületek problemájánál $V = \sqrt{1+p^2+q^2}$

$$P = \frac{p}{V}, \quad Q = \frac{q}{V}, \quad \frac{\partial P}{\partial p} = \frac{1+q^2}{V^3}, \quad \frac{\delta P}{\delta q} = \frac{-pq}{V^3}, \quad \frac{\partial Q}{\partial q} = \frac{1+p^2}{V^3}$$

$D = \frac{i}{V^2}$ (ha i a képzetes egység.)

D és P között a relatio: $D = \frac{i(1-P^2)}{1+q^2}$

$\frac{B}{A} = \frac{Pq+i}{P-iq}$ az 5. egyenlet: $\left(\frac{B}{A}\right)_1 - D\left(\frac{B}{A}\right)_2 = o$

nak nem felel meg.

Tehát a megfelelő part. diff. egyenletnek $u = F(v)$ alakú elsőrendű általános megoldása nincsen.

III.

A 6. egyenlet azokat a V függvényeket definiáló partialis differentialis egyenlet, a melyekre vonatkozó 1. egyenletnek $u = F(v)$ alakú elsőrendű általános egészletei vannak. Ha a 6. egyenletet egészelni tudnók, akkor megkapnók az összes ilyen V függvényeket.

A 6. egyenlet Monge-féle part. diff. egyenlet D számára. Ha a hozzátartozó simultan-egyenleteket alakitjuk, s az ezek egészelésére szolgáló módszereket*) alkalmazzuk, meggyőződhetünk, hogy a 2. és 3. egyenletrendszerekkel analog simultan egyenleteknek csak egy-egy egészlete határozható meg. Ezek által kaphatunk a 6. egyenlet számára egy particularis egészletet három tetszés szerinti constanssal. Ez az egészlet:

$$D = \frac{(a-b)(P+c)}{(a-q)(b-q)}$$

Ha Imschenetsky módszerét**) alkalmazzuk, a és b constansokat P és q, — c constanst a és b függvényének tekintjük, még pedig ugy, hogy

$$\frac{\partial D}{\partial a} = \frac{P+c}{(a-q)^2} + \frac{a-b}{(a-q)(b-q)} \frac{\partial c}{\partial a} = o$$

$$\frac{\partial D}{\partial b} = -\frac{P+c}{(b-q)^2} + \frac{a-b}{(a-q)(b-q)} \frac{\partial c}{\partial b} = o$$

akkor c számára a part. diff. egyenlet:

$$(a-b)\sqrt{-\frac{\partial c}{\partial a} \cdot \frac{\partial c}{\partial b}} \cdot \frac{\partial^2 c}{\partial a . \partial b} + \frac{\partial c}{\partial a} \cdot \frac{\partial c}{\partial b} - 1 = o$$

De ennek egészelésére eddig módszert nem ismerünk. Igy a 6. egyenlet általános egészletét nem tudjuk meghatározni.

Egy nehány particularis megoldást fennebb már láttunk. Ilyenek ezek:

$D_1 \pm DD_2 = o$ ennek egészlete $P \mp qD = F(D)$

$(q+a)(D_1 \pm DD_2) + 2D = o$ ennek egészlete $P \pm (q+a)D = F((q+a)^2 D)$

*) Imschenetsky „Etude sur les méthodes d'integration des équations aux dérivées partielles du second ordre.“ III. fejezet.

**) Ugyanott IV. fejezet.

MATHEMATIKAI ÉS TERMÉSZETTUDOMÁNYI ÉRTESITŐ
KÜLÖNLENYOMAT AZ I. KÖTET 8. 9. FÜZETÉBŐL.

A KÉT FÜGGETLEN VÁLTOZÁS MÁSODRENDŰ SIMULTAN PARCZIÁLIS DIFFERENCZIÁLIS EGYENLETEK INTEGRÁLÁSÁRÓL.

VÁLYI GYULA,
kolozsvári egyet. magántanártól.

Két másodrendű parcziális differencziális egyenlet*

$$\left.\begin{aligned} F_1(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0 \\ F_2(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1)$$

közös egészlete meghatározására elég, ha r, s, t mennyiségeket x, y, z, p, q függvényeiképen meg tudjuk úgy határozni, hogy az 1) egyenletek álljanak, és

$$\left.\begin{aligned} dz - pdx - qdy &= 0 \\ dp - rdx - sdy &= 0 \\ dq - sdx - tdy &= 0 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 2)$$

közönséges differencziális egyenletrendszer három egymástól független egészlettel integrálható legyen.

Erre a szükséges és elégséges feltételek:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial y} + q\frac{\partial r}{\partial z} + s\frac{\partial r}{\partial p} + t\frac{\partial r}{\partial q} = \frac{\partial s}{\partial x} + p\frac{\partial s}{\partial z} + r\frac{\partial s}{\partial p} + s\frac{\partial s}{\partial q} \\ \frac{\partial t}{\partial x} + p\frac{\partial t}{\partial z} + r\frac{\partial t}{\partial p} + s\frac{\partial t}{\partial q} = \frac{\partial s}{\partial y} + q\frac{\partial s}{\partial z} + s\frac{\partial s}{\partial p} + t\frac{\partial s}{\partial q} \end{aligned}\right| \ldots\ldots \overset{3}{2)}$$

Keresünk egy új relácziót

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots 4)$$

---

* p, q, r, s, t mint rendesen z-nek x és y szerint vett első és másodrendű parcziális differencziális hányadosait jelölik.

úgy, hogy az 1) és 4) egyenletekkel adott r, s, t a 3) egyenleteknek megfeleljenek.

Az 1) és 4) egyenletek r, s, t mennyiségeket, mint x, y, z, p, q függvényeit adják. Ily feltétel alatt parcziálisan differencziálva x, y, z, p, q szerint sorra megkapjuk a 3) egyenletekben szereplő $\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial s}{\partial x}, \frac{\partial t}{\partial x}, \ldots \frac{\partial r}{\partial p}, \ldots \frac{\partial r}{\partial q} \ldots$, quotiensek értékeit. A kikapott értékeket betéve, ezeket az egyenleteket nyerjük:*

$$\left.\begin{array}{l} D\dfrac{F, F_1, F_2}{y, s, t} + q\,.\,D\dfrac{F, F_1, F_2}{z, s, t} + s\,.\,D\dfrac{F, F_1, F_2}{p, s, t} + t\,.\,D\dfrac{F, F_1, F_2}{q, s, t} = \\ = D\dfrac{F, F_1, F_2}{r, x, t} + p\,.\,D\dfrac{F, F_1, F_2}{r, z, t} + r\,.\,D\dfrac{F, F_1, F_2}{r, p, t} + s\,.\,D\dfrac{F, F_1, F_2}{r, q, t} \\ \text{és} \\ D\dfrac{F, F_1, F_2}{r, s, x} + p\,.\,D\dfrac{F, F_1, F_2}{r, s, z} + r\,.\,D\dfrac{F, F_1, F_2}{r, s, p} + s\,.\,D\dfrac{F, F_1, F_2}{r, s, q} = \\ = D\dfrac{F, F_1, F_2}{r, y, t} + q\,.\,D\dfrac{F, F_1, F_2}{r, z, t} + s\,.\,D\dfrac{F, F_1, F_2}{r, p, t} + t\,.\,D\dfrac{F, F_1, F_2}{r, q, t} \end{array}\right\} \quad 5)$$

Ezek az elsőrendű parcziális differencziális egyenletek határozzák meg F-et. Ha az 5) egyenleteknek $F = F_1$ és $F = F_2$ evidens közös egészleteken kívül más közös integráljuk nincsen, az 1) egyenleteknek sincsen közös integráljuk. Az 5) egyenletek legáltalánosabb közös integrálja vezet r, s, t legáltalánosabb értékeihez és azután a 2) egyenletrendszer egészelése z legáltalánosabb értékéhez.

Az elsőrendű símultan parcziális differencziális egyenletek integrálása, valamint az integrálható elsőrendű nem teljes közönséges differencziális egyenletrendszer integrálása is ismeretes. Tehát feladatunk in principio meg van oldva.

Hasonló eljárással egészelhető k símultan k-ad rendű két független változás parcziális differencziális egyenlet, — a mint könnyen belátható.

---

* $D\frac{F, F_1, F_2}{u, v, w}$ mint szokás, F, F_1, F_2-nek u, v, w-re vonatkozó függvénydeterminansát jelöli.

Egy egyszerű példa szolgáljon az egészelési eljárás illustrálására.

Keressük

$$r=q \text{ és } t=p \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 6)$$

legáltalánosabb közös integrálját.

Az s meghatározására szolgálnak a 3) egyenletek szerint:

$$\frac{\partial s}{\partial x}+p\frac{\partial s}{\partial z}+q\frac{\partial s}{\partial p}+s\frac{\partial s}{\partial q}=p$$

$$\frac{\partial s}{\partial y}+q\frac{\partial s}{\partial z}+s\frac{\partial s}{\partial p}+p\frac{\partial s}{\partial q}=q \quad .$$

ezek általános egészlete:

$$F(u_0, u_1, u_2, u_3)=0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad 7)$$

a hol

$$u_0=z-s$$

$$u_1=(s+p+q)e^{-x-y}$$

$$u_2=(s+\alpha^2 p+\alpha q)\,e^{-\alpha x-\alpha^2 y}$$

$$u_3=(s+\alpha p+\alpha^2 q)e^{-\alpha^2 x-\alpha y}$$

α egyik complex harmadik egységgyök, F tetszés szerinti függvény.

A 2) egyenletrendszer integrálására hozzuk be z, p, q, s helyett u_0, u_1, u_2, u_3 mennyiségeket. Igy integrálandó egyenletekűl kapjuk:

$$du_0+e^{x+y}du_1=0$$

$$du_0+e^{\alpha x+\alpha^2 x}du_1=0$$

$$du_0+e^{\alpha^2 x+\alpha y}du_2=0$$

Tekintettel a 7) egyenletre ez az egyenletrendszer æquivalens ezzel:

$$du_0=0,\ du_1=0,\ du_2=0,\ du_3=0.$$

Tehát a legáltalánosabb közös egészletet

$$u_0 = c_0,\ u_1 = 3c_1,\ u_2 = 3c_2,\ u_3 = 3c_3$$

egyenletek adják, a hol $c_0\, c_1\, c_2\, c_3$ tetszés szerinti constansok. Ezekből

$$z = c_0 + c_1 e^{x+y} + c_2 e^{\alpha x + \alpha^2 y} + c_3 e^{\alpha^2 x + \alpha y}$$

vagy reális alakban:

$$z = c_0 + c_1 e^{x+y} + c_2 e^{-\frac{x+y}{2}} \sin \frac{x-y}{2}\sqrt{3} + c_3 e^{-\frac{x+y}{2}} \cos. \frac{x-y}{2}\sqrt{3}$$

MATHEMATIKAI ÉS TERMÉSZETTUDOMÁNYI ÉRTESITŐ.

KÜLÖNLENYOMAT A II. KÖTET 4. ÉS 5. FÜZETÉBŐL.

TÖBBSZÖRÖSEN KOLLINEÁR HÁROMSZÖGEK KÚPSZELETEKNÉL.

Dr. VÁLYI GYULA,

kolozsvári egyet. magántanártól.

Két kollineár háromszöghez, tudvalevőleg, mindig meghatározható olyan kúpszelet, a melyre nézve a két háromszög polárrecziprók. Ha a két háromszög r-szeresen kollineár, * $(r=2, 3, 4, 6)$, akkor r ilyen kúpszelet létezik. Ezeknek egymáshoz való viszonyát akarjuk meghatározni.

Legyen abc és 123 két háromszög kollineár, ha a és 1, b és 2, c és 3 megfelelő szögpontok. Vagy jelképpel kifejezve, legyen a két-háromszög $(a_1\, b_2\, c_3)$-kollineáczióban. Akkor czélszerűen megválasztott koordináta-rendszer mellett:

$$\begin{array}{llll} \overline{bc}: & x=0 & \overline{23}: & \lambda x + y + z = 0 \\ \overline{ca}: & y=0 & \overline{31}: & x + \mu y + z = 0 \\ \overline{ab}: & z=0 & \overline{12}: & x + y + \nu z = 0 \end{array}$$

és az a kúpszelet, a melyre nézve a polárrecziproczitás fennáll:

$$k \equiv \lambda x^2 + \mu y^2 + \nu z^2 + 2yz + 2zx + 2xy = 0$$

Vegyük most a többszörös kollineáczió eseteit sorra vizsgálat alá.

1. A két háromszög egyszersmind $(a_1\, b_3\, c_2)$-kollineáczióban is van, ha $\mu = \nu$. Az ehhez tartozó kúpszelet:

$$k_1 \equiv \lambda x^2 + y^2 + z^2 + 2\mu yz + 2zx + 2xy = 0$$

tehát $k - k_1 \equiv (\mu - 1)\,(y-z)^2$, ebből következik, hogy a két kúpszelet kétszeresen érinti egymást, az érintési húr $\overline{a1}$ egyenes.

* Mehrfache Collineation von zwei Dreiecken. A GRUNERT-féle *Archiv der Mathematik und Physik* 70-ik kötetében. (105—110. lap).

Lássuk, hogy ez a feltétel, a mely szükségesnek jött ki, egyszersmind elégséges is?

k és k_1 kettős érintkezésben levő kúpszeletek egyenlete czélszerűen választott koordináta-rendszer mellett:

$$k \equiv \xi^2 + 2\eta\zeta = 0$$
$$k_1 \equiv l\xi^2 + 2\eta\zeta = 0$$

Legyenek az 1 pont koordinátái: $0, \eta_1\ \zeta_1$, a 2 pont koordinátái: ξ_2, η_2, ζ_2. k tartozzék az $(a_1\ b_2\ c_3)$, k_1 az $(a_1\ b_3\ c_2)$-kollineáczióhoz. Akkor

$$\overline{ac}: \quad \xi_2\,\xi + \zeta_2\,\eta + \eta_2\,\zeta = 0 \qquad \text{(2 polárja } k \text{-ra nézve)}$$
$$\overline{ab}: \quad l\xi_2\,\xi + \zeta_2\,\eta + \eta_2\,\zeta = 0 \qquad \text{(2 polárja } k_1\text{-re nézve)}$$

Most azonban 3 egyfelől $\overline{ab}$ polusa k-nál, $(l\,\xi_2, \eta_2, \zeta_2)$, másfelől $\overline{ac}$ polusa k_1-nál $\left(\frac{\xi_2}{l}, \eta_2, \zeta_2\right)$ tehát $l^2 = 1$, és így $l = -1$ kell hogy legyen, mert $l = 1$ k_1-et k-val azonossá tenné.

Tehát a szükséges és elégséges feltételek:

a) k és k_1 kettős érintésben kell, hogy legyen;

b) annak a két szorzónak (l) az összege, a melyeknek alkalmazásával $k + lk_1$ két első fokú szorzóra oszlik, kell, hogy 0 legyen.

Ha ezek a feltételek állanak, 2 egészen tetszés szerint, 1 az érintési húron tetszés szerint választható, de ezek azután 3-at egyértékűleg meghatározzák úgy, hogy 123 háromszög k és k_1-re nézve ugyanazon háromszöghöz polárrecziprók.

2. A két háromszög $(a_1\ b_2\ c_3)$, $(a_1\ b_3\ c_2)$, $(a_3\ b_2\ c_1)$ és $(a_2\ b_1\ c_3)$-kollineáczióban van egymáshoz, ha $\lambda = \mu = \nu$.

$$\left.\begin{array}{llr} k \equiv \lambda x^2 + \lambda y^2 + \lambda z^2 + 2\ yz + 2\ zx + 2\ xy = 0 & \text{tartozik az} & (a_1 b_2 c_3) \\ k_1 \equiv \lambda x^2 + y^2 + z^2 + 2\lambda yz + 2\ zx + 2\ xy = 0 & \text{«} \quad \text{«} & (a_1 b_3 c_2) \\ k_2 \equiv x^2 + \lambda y^2 + z^2 + 2\ yz + 2\lambda zx + 2\ xy = 0 & \text{«} \quad \text{«} & (a_3 b_2 c_1) \\ k_3 \equiv x^2 + y^2 + \lambda z^2 + 2\ yz + 2\ zx + 2\lambda xy = 0 & \text{«} \quad \text{«} & (a_2 b_1 c_3) \end{array}\right\} \text{kollineáczióhoz,}$$

Tehát

$$k - k_1 \equiv (\lambda - 1)(y - z)^2 \qquad k_2 - k_3 \equiv (\lambda - 1)(y - z)(-2x + y + z)$$
$$k - k_2 \equiv (\lambda - 1)(z - x)^2 \qquad k_3 - k_1 \equiv (\lambda - 1)(z - x)(x - 2y + z)$$
$$k - k_3 \equiv (\lambda - 1)(x - y)^2 \qquad k_1 - k_2 \equiv (\lambda - 1)(x - y)(x + y - 2z)$$

Ezekből világosan látszik a négy kúpszelet egymáshoz való helyzete. Ha még figyelembe veszszük azt, hogy k és k_1, k és k_2, k és k_3 érintési húrjainak közös pontjától (1, 1, 1) a k-hoz húzható érintők:

$$x+\alpha y+\alpha^2 z=0 \quad \text{és} \quad x+\alpha^2 y+\alpha z=0$$

(α egyik komplex harmadik egységgyök) akkor az eredményt a következő módon fejezhetjük ki: annak a harmadfokú két változós (binär) formának, a mely $= 0$ téve a három érintési húrt $y-z=0$, $z-x=0$, $z-y=0$) állítja elé, harmadfokú kovariansát k_1, k_2, k_3-nak az előbbieket kiegészítő közös húrjai ($-2x+y+z=0$, $x-2y+z=0$, $x+y-2z=0$) alkotják, HESSE-féle kovariánsát pedig a k-hoz húzható két érintő.

Ha tehát ezt a két érintőt és a hozzájuk tartozó érintési húrt veszszük koordináta-tengelyeknek, a kúpszeletek egyenletei egyszerűbben lesznek:

$$\begin{aligned}
k &\equiv \xi^2+2\eta\zeta=0 & &\text{vagyis} & k &\equiv \xi^2+2\eta\zeta=0\\
k_1 &\equiv \xi^2+2\eta\zeta+(\eta-\zeta)^2=0 & & & k_1 &\equiv \xi^2+\eta^2+\zeta^2=0\\
k_2 &\equiv \xi^2+2\eta\zeta+(\alpha^2\eta-\alpha\zeta)^2=0 & & & k_2 &\equiv \xi^2+\alpha\eta^2+\alpha^2\zeta^2=0\\
k_3 &\equiv \xi^2+2\eta\zeta+(\alpha\eta-\alpha^2\zeta)^2=0 & & & k_3 &\equiv \xi^2+\alpha^2\eta^2+\alpha\zeta^2=0
\end{aligned}$$

Reális alakban kapjuk az egyenleteket, ha η és ζ helyett $\eta+\zeta i$ és $-\eta+\zeta i$-vel arányos mennyiségeket hozunk be új változókul.

Akármely pontja $\eta-\zeta=0$ egyenesnek vehető az 1 pontnak de általa az 123 háromszög egyértékűleg határozott úgy, hogy a négy kúpszeletre vonatkozólag ugyanazon háromszög jön ki polárrecziprók gyanánt.

3. A két háromszög $(a_1\, b_2\, c_3)$, $(a_2\, b_3\, c_1)$ és $(a_3\, b_1\, c_2)$ kollineáczióban van egymáshoz, ha $\lambda\mu\nu=1$.

$$\left.\begin{aligned}
k_1 &\equiv \lambda x^2+\mu^2 y^2+\nu z^2+2yz+2zx+2xy=0 \text{ tartozik az } (a_1\, b_2\, c_3)\\
k_2 &\equiv x^2+\mu y^2+\mu\nu z^2+2\mu\nu yz+2zx+2\mu xy=0 \quad \text{«} \qquad \text{«} \quad (a_2\, b_3\, c_1)\\
k_3 &\equiv x^2+\mu\nu y^2+\nu z^2+2\mu\nu yz+2\nu zx+2xy=0 \quad \text{«} \qquad \text{«} \quad (a_3\, b_1\, c_2)
\end{aligned}\right\}\text{kollineáczióhoz,}$$

Ezek a kúpszeletek, általában, nem érintik egymást. Vonatkoztassuk a két elsőt közös polárháromszögükre. Egyenleteik legyenek:

$$k_1 \equiv \xi^2+\eta^2+\zeta^2=0$$
$$k_2 \equiv l\xi^2+m\eta^2+n\zeta^2=0$$

1 pont koordinátái legyenek $\xi_1\ \eta_1\ \zeta_1$. Akkor

$\overline{bc}$: $\quad \xi_1\xi+\ \ \eta_1\eta+\ \ \zeta_1\zeta=0$ (1 polárja k_1-re nézve)

$\overline{ab}$: $\quad l\xi_1\xi+m\eta_1\eta+n\zeta_1\zeta=0$ (1 polárja k_2-re nézve)

2 pont koordinátái: $\dfrac{\xi_1}{l}, \dfrac{\eta_1}{m}, \dfrac{\zeta_1}{n}$ ($\overline{bc}$ polusa k_2-re nézve)

3 pont koordinátái: $l\xi_1, m\eta_1, n\zeta_1$ ($\overline{ab}$ polusa k_1-re nézve)

De már most $\overline{ac}$

egyfelől: $\dfrac{\xi_1}{l}\xi+\dfrac{\eta_1}{m}\eta+\dfrac{\zeta_1}{n}\zeta=0$ (mint 2 polárja k_1-re nézve)

másfelől: $l^2\xi_1\xi+\ m^2\eta_1\eta+n^2\zeta_1\zeta=0$ (mint 3 polárja k_2-re nézve)

tehát $l^3=m^3=n^3$ kell, hogy legyen. (Vehetjük $=1$)

Két lényegesen különböző eset van:

a) $l=m=1$, $n=\alpha$. Ekkor

$$k_1 \equiv \xi^2+\eta^2+\ \ \zeta^2=0$$
$$k_2 \equiv \xi^2+\eta^2+\alpha\,\zeta^2=0 \quad \text{és a mint könnyen belátható:}$$
$$k_3 \equiv \xi^2+\eta^2+\alpha^2\zeta^2=0$$

de ez realis alakba nem vihető át, így geometriai létele nincsen;

b) $l=1$, $m=\alpha$, $n=\alpha^2$. Ekkor

$$k_1 \equiv \xi^2+\ \ \eta^2+\ \ \zeta^2=0$$
$$k_2 \equiv \xi^2+\alpha\,\eta^2+\alpha^2\zeta^2=0$$
$$k_3 \equiv \xi^2+\alpha^2\eta^2+\alpha\,\zeta^2=0$$

Ez az eset jön elé, ha a harmadfokú egyenlet, melynek gyökei l, m, n, tiszta egyenlet lesz, ha tehát az a két jól ismert szimultán invariáns, a melyet Salmon θ és θ'-sal jelöl, egyszerre 0 értéket kap.

A fentebbi három kúpszelethez háromféleképen lehet olyan negyedik kúpszeletet kapni, a melylyel együtt azok egy négyszeresen polárrecziprók háromszögeket megengedő rendszert alkotnak. Ezek a kúpszeletek:

$$k_4 \equiv \xi^2+2\eta\zeta=0,\quad k_5 \equiv \eta^2+2\zeta\xi=0,\quad k_6 \equiv \zeta^2+2\xi\eta=0$$

A hat kúpszelet végül olyan rendszert akkor, hogy rá nézve 123 és *abc* háromszögök, a hol

$$\begin{array}{llll}
\overline{bc}: & \alpha\xi+\eta+\zeta=0 & \overline{23}: & \alpha^2\xi+\eta+\zeta=0 \\
\overline{ca}: & \xi+\alpha\eta+\zeta=0 & \overline{31}: & \xi+\alpha^2\eta+\zeta=0 \\
\overline{ab}: & \xi+\eta+\alpha\zeta=0 & \overline{12}: & \xi+\eta+\alpha^2\zeta=0
\end{array}$$

hatszorosan polárrecziprókok.

A hat kúpszelet közűl legfölebb négy valós, a két háromszög pedig mindig képzetes.

TÖBBSZÖRÖSEN PERSPEKTIV TETRAÉDEREK.

VÁLYI GYULA, kolozsvári egyetemi tanártól.

Két tetraéder perspektiv helyzetben van, ha a megfelelő szögpontokat összekötő egyenesek egy pontban metszik egymást. (A perspektivitás czentruma.) Ekkor a megfelelő élek tudvalevőleg metszik egymást és az átmetszési pontjok egy síkban feküsznek (a perspektivitás síkja).

Legyenek *abcd* és 1234 perspektiv tetraéderek megfelelő szögpontjai a és 1, b és 2, c és 3, d és 4 — vagy jelképpel kifejezve, legyen a két tetraéder az $(a_1 b_2 c_3 d_4)$ — perspektiv helyzetben. Czélszerűen választott koordináta-rendszer mellett az oldalok egyenletei lesznek:

$$\begin{array}{llll} \overline{bcd}: & x=0 & \overline{234}: & \lambda x+y+z+t=0, \\ \overline{acd}: & y=0 & \overline{134}: & x+\mu y+z+t=0, \\ \overline{abd}: & z=0 & \overline{124}: & x+y+\nu z+t=0, \\ \overline{abc}: & t=0 & \overline{123}: & x+y+z+\rho t=0, \end{array}$$

a perspektivitás síkja:

$$x+y+z+t=0,$$

a perspektivitás czentrumának koordinátái:

$$\frac{1}{\lambda-1}, \frac{1}{\mu-1}, \frac{1}{\nu-1}, \frac{1}{\rho-1},$$

Az oldalok egyenleteinek ily alakban felirásával már előre kizárjuk azt az esetet, mikor a második tetraéder valamelyik oldala az első tetraéder valamelyik élén megy keresztül. A mellett feltesszük, hogy mind a két tetraéder valóságos tetraéder, tehát λ, μ, ν, ρ közül legfennebb egyik lehet $=1$.

Keressük a feltételeket arra nézve, hogy a két tetraéder, a szögpontok megfelelését változtatva, ismét perspektiv helyzetben legyen.

Az összes, képzelhető összeállítások jelképei $(a_1 b_2 c_3 d_4)$-ből az indexek permutálásával vezethetők le. Az erre szükséges szubstitucziók alap-formái a következők:

$$(1)\,(2)\,(3,\,4)$$
$$(1)\,(2,\,3,\,4)$$
$$(1,\,2,\,3,\,4)$$
$$(1,\,2)\,(3,\,4)$$

Nézzük sorra, hogy melyik vezethet ismét perspektiv helyzethez?

1. Hogy a két tetraéder az $(a_1 b_2 c_4 d_3)$ által jelzett módon is perspektiv helyzetű legyen, többek között kellene, hogy $\overline{ac}$ és $\overline{14}$, $\overline{bd}$ és $\overline{23}$ messék egymást, tehát $\overline{abc}$ $\overline{acd}$, $\overline{124}$ $\overline{134}$ síkok egyfelől, — $\overline{abd}$, $\overline{bcd}$, $\overline{123}$, $\overline{234}$ síkok másfelől egy-egy pontban messék egymást. Ez megkívánná, hogy $\nu = \rho = 1$ legyen, mi valóságos tetraédereknél lehetetlen.

2. Hogy a két tetraéder az $(a_1 b_3 c_4 d_2)$ által jelzett módon is perspektiv helyzetben lehessen, többek között kellene, hogy $\overline{ab}$ és $\overline{13}$, $\overline{ac}$ és $\overline{14}$ messék egymást, mi csak $\mu = \nu = 1$ feltétel mellett volna lehetséges, ez pedig valóságos tetraédereknél nem fordúlhat elő.

3. Hogy $(a_2 b_3 c_4 d_1)$ is perspektiv helyzetet adjon, kellene, hogy $\overline{ab}$ és $\overline{23}$, $\overline{cd}$ és $\overline{14}$ messék egymást: Ez $\lambda = \nu = 1$ feltételhez vezet, mi valóságos tetraédereknél lehetetlen.

4. Hogy a két tetraéder az $(a_2 b_1 c_4 d_3)$ által jelzett módon perspektiv helyzetű legyen, kell, hogy $\overline{ac}$ és $\overline{24}$, $\overline{ad}$ és $\overline{23}$, $\overline{bc}$ és $\overline{14}$, $\overline{bd}$ és $\overline{13}$ egyenesek messék egymást. Ez $\lambda\nu = 1$, $\lambda\rho = 1$, $\mu\nu = 1$, $\mu\rho = 1$ feltételekhez vezet, melyek közül egyik a más háromnak következése. Ezen egyenletekből következik:

$$\lambda = \mu = \frac{1}{\nu} = \frac{1}{\rho}.$$

A két tetraéder ekkor egyszersmind $(a_3 b_4 c_1 d_2)$ módon is perspektiv helyzetű, ha $\lambda = \frac{1}{\mu} = \nu = \frac{1}{\rho}$. A két egyenletrendszer valóságos tetraédernél csak úgy állhat fenn együtt, ha $\lambda = \mu = \nu = \rho = -1$.

De ekkor egyszersmind az $(a_4 b_3 c_2 d_1)$ perspektivitás is jelen van, tehát a perspektivitás négyszeres.

Összefoglalva az eredményt:

a) kétszeres a perspektivitás, ha λ, μ, ν, ρ közül kettő-kettő egyenlő és a nem egyenlők egymásnak reciprókjai;

b) négyszeres a perspektivitás, ha $\lambda = \mu = \nu = \rho = -1$.

Lássuk ez utóbbi esetet közelebbről.

$$\begin{array}{llll}
\overline{bcd}: & x = 0, & \overline{234}: & -x + y + z + t = 0, \\
\overline{acd}: & y = 0, & \overline{134}: & x - y + z + t = 0, \\
\overline{abd}: & z = 0, & \overline{124}: & x + y - z + t = 0, \\
\overline{abc}: & t = 0, & \overline{123}: & x + y + z - t = 0,
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
(a_1 b_2 c_3 d_4) & \text{perspektivitás síkja:} & x + y + z + t = 0, \\
(a_2 b_1 c_4 d_3) & \text{« \quad «} \quad : & x + y - z - t = 0, \\
(a_3 b_4 c_1 d_2) & \text{« \quad «} \quad : & x - y + z - t = 0, \\
(a_4 b_3 c_2 d_1) & \text{« \quad «} \quad : & x - y - z + t = 0.
\end{array}$$

Egyszersmind, a mint könnyű meggyőződni, a perspektivitás czentrumai a négy utolsó sík alkotta tetraéder szögpontjai. Mindenik szögpont a szemben fekvő oldalhoz, mint a perspektivitás síkjához tartozó czentrum. Ha x helyett $-x$-et írunk, a második tetraéder oldalainak egyenletei a harmadikéiba mennek át és viszont, jeléül annak, hogy a három tetraéder olyan rendszert alkot, hogy akármelyik kettő közülök négyszeresen perspektiv, a harmadik tetraéder szögpontjai a perspektivitás czentrumai, oldalai a perspektivitás síkjai. Három tetraéder ilyen rendszerét Stephanos dezmikusnak nevezte.*

Mellékesen megjegyezve, már a kétszeres perspektivitásnál áll a tantétel, hogy az egyiknek czentruma a másiknak síkjában fekszik. A négyszeres perspektivitás czentrumairól és síkjairól szóló fennebbi tantétel ennek egyszerű következése.

---

* Stephanos. Sur les systémes desmiques de trois tétraèdres. Bulletin des sciences math. et astr 2-e série, t. III.

A PERSPEKTIV TETRAÉDEREK TANÁHOZ.

VÁLYI GYULÁ-tól.

Ha két tetraéder megfelelő szögpontjait összekötő egyenesek egy pontban metszik egymást, akkor a megfelelő oldalok átmetszési egyenesei egy síkban feküsznek, — és megfordítva. — Két tetraéder ilyen helyezetét perspektivnek mondjuk.

Két perspektiv tetraéder megfelelő élei metszik egymást. A megfelelő élek síkjainak közös pontját a perspektivitás czentrumának, — a megfelelő élek metszéspontjainak közös síkját a perspektivitás síkjának nevezzük.

Kérdés, hogy megfordítva, két tetraéder megfelelő élei metszésének a perspektiv helyzet szükséges következése-e? *

Legyenek két tetraéder megfelelő szögpontjai A és A', B és B' C és C', D és D' — megfelelő oldalai a és a', b és b', c és c', d és d'. A jelölés legyen úgy választva, hogy pl. a az A szögponttal szemben fekvő oldal legyen.

A két tetraéder megfelelő élei messék egymást.

Ha a két tetraédernek nincs közös oldala, akkor az a és a' síkokban fekvő megfelelő élek metszéspontjai a két sík közös egyenesén $(\overline{aa'})$ feküsznek. Épen így b és b' megfelelő éleinek metszéspontjai $\overline{bb'}$, — c és c' megfelelő éleinek metszéspontjai $\overline{cc'}$, — d és d' megfelelő éleinek metszéspontjai $\overline{dd'}$ egyenesen feküsznek. $\overline{aa'}$, $\overline{bb'}$, $\overline{cc'}$,

Ha a két tetraédernek nincs közös szögpontja, akkor az A és A' pontokon átmenő megfelelő élek síkjai a két pont közös egyenesén $(\overline{AA'})$ mennek keresztül. Épen így B és B' megfelelő éleinek síkjai $\overline{BB'}$, — C és C' megfelelő éleinek síkjai $\overline{CC'}$, — D és D' megfelelő éleinek síkjai $\overline{DD'}$ egyenesen mennek keresztül. $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$, $\overline{DD'}$

* Kőnig Gyula úrral folytatott levelezésben közösen tisztázott kérdés.

$\overline{dd'}$ négy egyenes közül akármelyik kettő metszi egymást. Mert pl. $\overline{aa'}$ is, $\overline{bb'}$ is keresztülmegy $\overline{CD}$ és $\overline{C'D'}$ megfelelő élek közös pontján. De a négy egyenesnek nincs közös pontja. Tehát közös síkjoknak kell lenni. (A perspektivitás síkja.)	négy egyenes közül akármelyik kettő metszi egymást. Mert pl. $\overline{AA'}$ is, $\overline{BB'}$ is benne van $\overline{cd}$ és $\overline{c'd'}$ megfelelő élek közös síkjában. De a négy egyenesnek nincs közös síkja. Tehát közös pontjuknak kell lenni. (A perspektivitás czentruma.)

Ha a két tetraédernek egy-egy megfelelő oldala (a és a') és egy-egy rajta fekvő megfelelő szögpontja (B és B') közös, akkor

ha b és b' nem közös sík, a bennök fekvő megfelelő élek metszéspontjai $\overline{bb'}$ egyenesen feküsznek. Tehát $\overline{bb'}$ egyenes és B (B') pont közös síkja a perspektivitás síkja.	ha A és A' nem közös pont, a rajtuk átmenő megfelelő élek síkjai $\overline{AA'}$ egyenesen mennek keresztül. Tehát $\overline{AA'}$ egyenes és a (a') sík közös pontja a perspektivitás czentruma.

Ha pedig a és a', b' és b' közös oldalok, A és A', B és B' közös szögpontok, akkor

$\overline{AB}$ ($\overline{A'B'}$) egyenes minden síkja a perspektivitás síkjáúl vehető.	$\overline{ab}$ ($\overline{a'b'}$) egyenes minden pontja a perspektivitás czentrumáúl vehető.

Egyetlen eset van még hátra, a mikor a két tetraédernek egy-egy megfelelő oldala (a és a') s a szemben fekvő szögpont (A és A') közös a nélkül, hogy más megfelelő közös elem volna. Ekkor a megfelelő élek metszik egymást, de a perspektiv helyzet csak akkor van meg, ha

a közös oldalban fekvő háromszögök perspektivek.	a közös szögpontban összefutó háromélek perspektivek.

Tehát annak az egy esetnek kivételével, a mikor két tetraédernek csak egy-egy megfelelő oldala és a szemben fekvő szögpontja közös, a megfelelő élek metszéséből a perspektiv helyzet szükségképen következik.

A NÉGYZETES ALAKOK TANÁHOZ.

VALYI GYULA-tól.

Arra a kérdésre felel meg ez a doldozat, hogy milyen n-változós négyzetes alakok alakíthatók át első fokú helyettesítéssel m $(<n)$-változós négyzetes alakká?

Megmutatja, hogy olyanok, a melyeknek determinánsa és összes átlói aldeterminánsai * az $(m+1)$-ik fokig bezárólag elenyésznek, — de ha az m-ed fokú átlói aldeterminansok között van olyan, a mely nem enyészik el, akkor a négyzetes alakot első fokú helyettesítéssel kevesebb, mint m-változóssá átalakítani nem lehet.

I.

Menjen át

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum a_{ik} x_i x_k, \quad (a_{ik} = a_{ki})$$
$$(i, k = 1, 2, \ldots n)$$

négyzetes alak

$$x_i = \sum c_{ik} y_k \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$
$$(k = 1 \ldots n)$$

első fokú helyettesítéssel

$$g(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \sum b_{ik} y_i y_k \quad (b_{ik} = b_{ki})$$
$$(i, k = 1, 2 \ldots n)$$

négyzetes alakba.

---

* Átlói aldeterminans alatt olyat értünk, a melynek minden főátlói eleme az eredeti determinansban is főátlói elem.

A két alak deriváltjai

$$f_i = \tfrac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_i}\,,\; g_i = \tfrac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial y_i}\,, \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

között ez az összefüggés van:

$$g_i\,(y_1, \ldots y_n) = \sum_{k=1}^{n} f_k\,(x_1 \ldots x_n)\,.\,c_{ki} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f_k\,(c_{1i}, c_{2i}, \ldots c_{ni})\,.\,x_k.$$

Tehát az átalakított négyzetes alakban y_i nem fog előfordulni ha $g_i = 0$, azaz, ha

$$f_k\,(c_{1i}, c_{2i}, \ldots c_{ni}) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots n),$$

de ez az egyenletrendszer csak úgy állhat fenn, ha az eredeti négyzetes alak determinánsa

$$D = |\,a_{ik}\,|$$
$$(i, k = 1, 2, \ldots n)$$

elenyészik. Ebből következik:

1. ha D nem $= 0$, akkor a négyzetes alakot első fokú helyettesitéssel kevesebb változóssá tenni nem lehet;

2. ha $D = 0$, akkor a négyzetes alak első fokú helyettesitéssel kevesebb változóssá átalakítható, a változók száma annyival lévén apasztható, mint a hány egymástól lineár módon független megoldása van az

$$f_i(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

egyenletrendszernek.

II.

Legyen D és összes átlói aldeterminansa az $(m + 1)$-ik fokig bezárólag $= 0$, míg ez az m-ed fokú átlói aldeterminans

$$d = |\,a_{ik}\,|$$
$$(i, k = 1, 2 \ldots m)$$

ne enyésszék el.

Szükségképen $m > 0$, mert ha az összes átlói második fokú $(a_{ii}a_{kk} - a_{ik}^2)$ és első fokú (a_{ii}) aldeterminánsok elenyésznek, D minden eleme $= 0$ lenne; ezt az esetet pedig figyelmen kívül hagyhatjuk.

Jelöljük $\Delta_{\alpha\beta}$-val azt az $(m+1)$-ik fokú determinánst, melyet d-ből D α-ik sorának $(m+1)$-ik sorúl és β-ik oszlopának $(m+1)$-ik oszlopúl hozzá irásával származtathatunk le.

Mindenik $\Delta_{\alpha\beta} = 0$, mert

ha α vagy $\beta \leq m$, a determináns két sora vagy oszlop azonos;

ha $\alpha = \beta > m$, akkor $\Delta_{\alpha\beta}$, mint $(m+1)$-fokú átlói aldetermináns, a feltétel szerint $= 0$;

ha $\alpha \gtreqless \beta$ s mind a kettő $> m$, akkor az az $(m+2)$-ik fokú determináns, a melyet d-ből az α-ik és β-ik sor és rovat hozzáirásával nyerhetünk, összes átlói első rendű aldeterminánsaival együtt a feltétel szerint $= 0$, de akkor az elenyésző szimmetrikus determinánsok ismert tulajdonsága szerint minden első rendű aldetermináns is elenyészik, tehát $\Delta_{\alpha\beta}$ is.

Ennek alapján nem lesz nehéz kimutatni, hogy az adott körülmények között

$$f_i\,(x_1 x_2 \ldots x_n) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

egyenletrendszernek $(n-m)$ egymástól lineár módon független megoldása van, a mennyiben minden, az első m egyenletet kielégítő értékrendszer a többit is kielégíti.

Jelöljük azt az m-ed fokú determinanst, melyet d determináns α-ik $(\alpha \leq m)$ oszlopának kihagyásával és D β-ik oszlopa m első elemének m-ik oszlopúl hozzá irásával nyerhetünk (a nyert determinánst $(-1)^{m+\alpha+1}$ jegygyel véve) $d_{\alpha\beta}$-val.

Akkor, a mint azonnal kimutatjuk, ezen $(n-m)$ értékrendszer:

$$\left.\begin{array}{ll} x_\alpha = d_{\alpha, m+\beta} & (\alpha = 1, 2, \ldots m) \\ x_{m+\gamma} = 0 & (\gamma = 1, \ldots \beta-1, \beta+1, \ldots n-m) \\ x_{m+\beta} = d & \end{array}\right\} (\beta = 1, 2, \ldots n-m)$$

mindenike kielégíti az $f_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots n)$ egyenletrendszert. Ugyan is a fentebbi értékeket helyettesítve:

$$f_i\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \Delta_{i, m+\beta} = 0.$$

Ha tehát f átalakítására ezt az első fokú helyettesítést használjuk:

$$x_\alpha = y_\alpha + \sum_{\beta=1}^{n-m} d_{\alpha, m+\beta} y_{m+\beta} \qquad (\alpha = 1, 2, \dots m)$$

$$x_{m+\beta} = d y_{m+\beta}, \qquad (\beta = 1, 2, \dots n-m)$$

a melynek determinánsa $= d^{n-m}$ tehát nem 0, akkor az átalakított négyzetes alakból $y_{m+\beta}$ $(\beta = 1, 2, \dots n-m)$ ki fog esni, és így az átalakított négyzetes alak lesz:

$$g(y_1, y_2, \dots, y_m) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} a_{ik} y_i y_k,$$

a melynek mint m változós négyzetes alaknak determinánsa $(= d)$ nem enyészik el, és így kevesebb, mint m változót tartalmazó négyzetes alakká első fokú helyettesítéssel át nem alakítható.

MATHEMATIKAI ÉS TERMÉSZETTUDOMÁNYI ÉRTESITŐ.

KÜLÖNNYOMAT A VIII. KÖTET 2. FÜZETÉBŐL.

A HARMADRENDŰ GÖRBÉK ELMÉLETÉHEZ.

VÁLYI GYULÁ-tól.

Jelölések. Nagy betükkel egy síkbeli harmadrendű görbe pontjait fogjuk jelölni.

Értelmezések.

1. A pontból B pontot projicziálni annyit tesz, mint AB egyenesnek a görbével való harmadik metszéspontját felkeresni. Maga magát projicziálni pedig annyit tesz, mint a hozzá tartozó érintőnek a görbével való harmadik metszéspontját (tangencziális pont) felkeresni.

2. Inflexió-pont az, a melyik tangencziális pontjával öszszeesik.

3. $ABC\ldots$ perspektiv $A_1B_1C_1\ldots$-gyel, ha egyik a másiknak a görbe valamely pontjából (perspektiv-czentrum) vont projekcziója.

4. Ha AB maga magával perspektiv, akkor neve megfelelő pontpár. (MAC-LAURIN-féle korrespondenczia.)

I.*

1. tantétel. Ha AB és A_1B_1, AB és A_2B_2 perspektiv, akkor A_1B_1 és B_2A_2 perspektiv.

Ha AB projekcziója P_1-ből A_1B_1 és P_2-ből A_2B_2, akkor

$$\left.\begin{matrix} P_1AA_1 \\ P_2BB_2 \\ A_2B_1 \end{matrix}\right\} \text{egyeneseknek} \quad \left.\begin{matrix} P_1BB_1 \\ P_2AA_2 \\ A_1B_2 \end{matrix}\right\} \text{egyenesekkel való met-}$$

széspontjai közül nyolcz a görbén fekszik, de akkor a kilenczedik

* Ezen tantételek egy részének más alakban való bebizonyítása látható SALAMON-nak «Higher planes curves» czímű művében.

(A_1B_2 és A_2B_1 metszéspontja) is a görbén van. Tehát A_1B_1 és B_2A_2 perspektiv.

Következés. Ha A, B, C egy egyenesben vannak, akkor tangencziális pontjaik (A_t, B_t, C_t) is egy egyenesben feküsznek.

Ugyanis BC projekcziója B-ből B_tA és C-ből AC_t.

Tehát ha A és B inflexió-pontok, C is az.

2. tantétel. Ha $ABC\ldots$ és $A_1B_1C_1\ldots$ perspektiv, P pontból vont projekczióik $A_2B_2C_2\ldots$ és $A_3B_3C_3\ldots$ is perspektiv.

AB-vel perspektiv A_1B_1 és A_2B_2, tehát A_1B_1 és B_2A_2 perspektiv.

A_1B_1-gyel perspektiv B_2A_2 és A_3B_3, tehát A_2B_2 és A_3B_3 perspektiv.

Épen így perspektiv A_2C_2 és $A_3C_3\ldots$ tehát $A_2B_2C_2\ldots$ és $A_3B_3C_3\ldots$ is.

3. tantétel. Ha AB megfelelő pontpár, bármely projekcziója is az.

Ha AB és AB perspektiv, projekcziója A_1B_1 szintén maga magával perspektiv.

4. tantétel. Ha AB és A_1B_1 perspektiv megfelelő pontpárok, akkor kétszeresen perspektivek.

Ha AB és AB, AB és A_1B_1 perspektiv, AB és B_1A_1 is perspektiv.

5. tantétel. Ha AB és A_1B_1 kétszeresen perspektiv, akkor mind a kettő megfelelő pontpár.

AB és A_1B_1, BA és A_1B_1 perspektiv lévén, AB és AB is perspektiv, — épen úgy A_1B_1 és A_1B_1.

6. tantétel. Ha $ABCD$ maga magával perspektiv, akkor AB és CD, AC és DB, AD es BC perspektiv megfelelelő pontpárok. *

Legyen $ABCD$ közös tangencziális pontja P. Ezzel $ABCD$ pontok közül legfölebb egy esik össze. Legyenek A és C különbözők P-től.

AC harmadik metszéspontja legyen B_1. Feltevéseink alapján B_1 különbözik A-tól és C-től, de összeeshetik B-vel vagy D-vel.

Ha B_1 összeesik B-vel, akkor AB projekcziója A-ból PC.

* Itt előre bebizonyítottnak van feltéve az a tantétel, hogy P-ből négy érintő húzható a görbéhez, a melyek egyike a P-hez tartozó érintővel összeesik, ha P inflexió-pont.

Tehát PC megfelelő pontpár. De akkor P inflexió-pont és D öszszeesik P-vel. Tehát AB és CD perspektiv.

Ha pedig B_1 sem B-vel, sem D-vel nem esik össze, akkor AB projekcziója B_1-ből csak CD lehet.

Épen így perspektivek AC és DB, AD és BC.

Megjegyzés. AB, AC, AD megfelelő pontpárokból a megfelelő pontpároknak három hálózata vezethető le projicziálás által. Ezeknek a következő két alaptulajdona van:

1. Ugyanazon hálózathoz tartozó két pár kétszeresen perspektiv. Ugyanis ha AB két projekcziója A_1B_1 és A_2B_2, akkor A_1B_1 és B_2A_2 perspektiv, de akkor A_1B_1 és A_2B_2 is, mert mind a kettő megfelelő pontpár;

2. két különböző hálózathoz tartozó pár nem lehet perspektiv. Mert különben a kiindulásúl vett párok (pl. AB és AC) is perspektivek lennének, a mi lehetetlen.

7. tantétel. Ha $ABCD$ maga magával perspektiv, akkor közös tangencziális pontjaik (P) és diagonális pontjaik ($A_1B_1C_1$) szintén négy, maga magával perspektiv pont.

Ugyanis AB, AC, AD projekcziói A-ból PD_1, PB_1, PA_1.

II.

Azt a kérdést vetem most fel, hogy vannak-e a görbén többszörösen perspektiv háromszögök?

1. Ha ABC-vel $A_1B_1C_1$ és $A_1C_1B_1$ perspektiv, akkor BC és B_1C_1 kétszeresen perspektiv megfelelő pontpárok. Ha a két perspektiv-czentrum P_1 és P_2, akkor kellene, hogy $P_1P_2AA_1$ egy egyenesben feküdjenek. De ez lehetetlen, mert a görbe harmadrendű.

A többszörös perspektivitásnak ez az esete tehát ki van zárva.

2. Ha ABC-vel $A_1B_1C_1$ és $B_1C_1A_1$ perspektiv, akkor AB és AC perspektiv, mert A_1B_1-gyel egyszer AB, másszor CA perspektiv. Tehát BC és A_t (A tangencziális pontja) egy egyenesben feküsznek, ép így CA és B_t, AB és C_t.

De akkor ABC-vel $C_1A_1B_1$ is perspektiv. Ugyanis AB-vel AC, AC-vel A_1C_1 tehát AB-vel C_1A_1 perspektiv, BC-vel BA, BA-val B_1A_1, tehát BC-vel A_1B_1 perspektiv. Tehát a perspektivitás háromszoros.

(A_1B_2 és A_2B_1 metszéspontja) is a görbén van. Tehát A_1B_1 és B_2A_2 perspektiv.

Következés. Ha A, B, C egy egyenesben vannak, akkor tangencziális pontjaik (A_t, B_t, C_t) is egy egyenesben feküsznek.

Ugyanis BC projekcziója B-ből B_tA és C-ből AC_t.

Tehát ha A és B inflexió-pontok, C is az.

2. tantétel. Ha $ABC\ldots$ és $A_1B_1C_1\ldots$ perspektiv, P pontból vont projekczióik $A_2B_2C_2\ldots$ és $A_3B_3C_3\ldots$ is perspektiv.

AB-vel perspektiv A_1B_1 és A_2B_2, tehát A_1B_1 és B_2A_2 perspektiv.

A_1B_1-gyel perspektiv B_2A_2 és A_3B_3, tehát A_2B_2 és A_3B_3 perspektiv.

Épen így perspektiv A_2C_2 és $A_3C_3\ldots$ tehát $A_2B_2C_2\ldots$ és $A_3B_3C_3\ldots$ is.

3. tantétel. Ha AB megfelelő pontpár, bármely projekcziója is az.

Ha AB és AB perspektiv, projekcziója A_1B_1 szintén maga magával perspektiv.

4. tantétel. Ha AB és A_1B_1 perspektiv megfelelő pontpárok, akkor kétszeresen perspektivek.

Ha AB és AB, AB és A_1B_1 perspektiv, AB és B_1A_1 is perspektiv.

5. tantétel. Ha AB és A_1B_1 kétszeresen perspektiv, akkor mind a kettő megfelelő pontpár.

AB és A_1B_1, BA és A_1B_1 perspektiv lévén, AB és AB is perspektiv, — épen úgy A_1B_1 és A_1B_1.

6. tantétel. Ha $ABCD$ maga magával perspektiv, akkor AB és CD, AC és DB, AD es BC perspektiv megfelelelő pontpárok.*

Legyen $ABCD$ közös tangencziális pontja P. Ezzel $ABCD$ pontok közül legfölebb egy esik össze. Legyenek A és C különbözők P-től.

AC harmadik metszéspontja legyen B_1. Feltevéseink alapján B_1 különbözik A-tól és C-től, de összeeshetik B-vel vagy D-vel.

Ha B_1 összeesik B-vel, akkor AB projekcziója A-ból PC.

* Itt előre bebizonyítottnak van feltéve az a tantétel, hogy P-ből négy érintő húzható a görbéhez, a melyek egyike a P-hez tartozó érintővel összeesik, ha P inflexió-pont.

Tehát PC megfelelő pontpár. De akkor P inflexió-pont és D öszszeesik P-vel. Tehát AB és CD perspektiv.

Ha pedig B_1 sem B-vel, sem D-vel nem esik össze, akkor AB projekcziója B_1-ből csak CD lehet.

Épen így perspektivek AC és DB, AD és BC.

Megjegyzés. AB, AC, AD megfelelő pontpárokból a megfelelő pontpároknak három hálózata vezethető le projicziálás által. Ezeknek a következő két alaptulajdona van:

1. Ugyanazon hálózathoz tartozó két pár kétszeresen perspektiv. Ugyanis ha AB két projekcziója A_1B_1 és A_2B_2, akkor A_1B_1 és B_2A_2 perspektiv, de akkor A_1B_1 és A_2B_2 is, mert mind a kettő megfelelő pontpár;

2. két különböző hálózathoz tartozó pár nem lehet perspektiv. Mert különben a kiindulásúl vett párok (pl. AB és AC) is perspektivek lennének, a mi lehetetlen.

7. tantétel. Ha $ABCD$ maga magával perspektiv, akkor közös tangencziális pontjaik (P) és diagonális pontjaik ($A_1B_1C_1$) szintén négy, maga magával perspektiv pont.

Ugyanis AB, AC, AD projekcziói A-ból PD_1, PB_1, PA_1.

II.

Azt a kérdést vetem most fel, hogy vannak-e a görbén többszörösen perspektiv háromszögök?

1. Ha ABC-vel $A_1B_1C_1$ és $A_1C_1B_1$ perspektiv, akkor BC és B_1C_1 kétszeresen perspektiv megfelelő pontpárok. Ha a két perspektiv-czentrum P_1 és P_2, akkor kellene, hogy $P_1P_2AA_1$ egy egyenesben feküdjenek. De ez lehetetlen, mert a görbe harmadrendű.

A többszörös perspektivitásnak ez az esete tehát ki van zárva.

2. Ha ABC-vel $A_1B_1C_1$ és $B_1C_1A_1$ perspektiv, akkor AB és AC perspektiv, mert A_1B_1-gyel egyszer AB, mászszor CA perspektiv. Tehát BC és A_t (A tangencziális pontja) egy egyenesben feküsznek, ép így CA és B_t, AB és C_t.

De akkor ABC-vel $C_1A_1B_1$ is perspektiv. Ugyanis AB-vel AC, AC-vel A_1C_1 tehát AB-vel C_1A_1 perspektiv, BC-vel BA, BA-val B_1A_1, tehát BC-vel A_1B_1 perspektiv. Tehát a perspektivitás háromszoros.

Legyen

$\binom{ABC}{A_1B_1C_1}$-nek perspektivitás czentruma A_2,

$\binom{ABC}{C_1A_1B_1}$-nek perspektivitás czentruma B_2,

$\binom{ABC}{B_1C_1A_1}$-nek perspektivitás czentruma C_2.

Akkor ABC-vel $A_2B_2C_2$ is háromszorosan perspektiv A_1, B_1, C_1-gyel mint czentrumokkal.

A háromszoros perspektivitás kimutatására tehát csak azt kell megmutatnunk, hogy létezik olyan háromszög ABC, a melynél AB és AC, BC és BA, CA és CB perspektivek.

Legyen EFG három inflexió-pont egy egyenesben. Akkor EF és EG, FG és FE, GE és GF perspektivek. De akkor P pontból vont projekczióik ABC is analog tulajdonnal birnak. Ha P nem inflexió-pont, A sem az, és így ABC három pont lesz, mely háromszöget alkot.

Az oly három pontot (ABC), a melynél AB és AC, BC és BA, CA és AB perspektiv, *triász*-nak fogjuk nevezni.

Ezekről a következő tantételek állanak:

1. tantétel. Minden triászhoz háromféleképen lehet kapni vele háromszorosan perspektiv inflexió-triászt.

Legyen E inflexió-pont és EA harmadik metszéspontja P. Legyen P-ből ABC triász projekcziója EFG. Akkor EF és EG perspektiv, tehát EFG egy egyenesben vannak.

FE és FG perspektiv, de akkor F tangencziális pontjával összeesik, tehát inflexió-pont. Tehát G is inflexió-pont. És ABC háromszorosan perspektiv EFG-vel.

Ha most E_1 az előbbiektől különböző inflexió-pont, hasonló módon kapható ABC-vel háromszorosan perspektiv $E_1F_1G_1$ inflexió-triász, melynek pontjai az előbbiéitől különbözők.

Ha E_2 az eddigiektől különböző inflekszió-pont, az megint egy új triászhoz (E_2 F_2 G_2) vezet, mely ABC-vel szintén háromszorosan perspektiv.

E szerint a 12 inflexió-triász projicziálás által négy hálózathoz vezet.

2. tantétel. Ugyanazon hálózathoz tartozó két triász háromszorosan perspektiv, még pedig ha EFG egy projekcziója ABC, egy másik projekcziója $A_1B_1C_1$, akkor egyik perspektivitás: ABC, $A_1C_1B_1$.

AB és EF, EF és EG, EG és A_1B_1 perspektiv, tehát AB és A_1C_1 perspektiv.

AC és EG, EG és EF, EF és A_1B_1 perspektiv, tehát AC és A_1B_1 perspektiv.

A három czentrum megint ugyanazon hálózathoz tartozó triászt alkot.

3. tantétel. Két különböző hálózathoz tartozó triász nem perspektiv.

Mert ha az volna, a kiindulási triászok is azok volnának. Ezeknek pedig van egy közös pontjuk. Legyen egyik EFG, a másik EHK. Akkor kellene, hogy EFG vagy EHK-val, vagy EKH-val perspektiv legyen. De ez lehetetlen.

A négy hálózat tehát egymástól lényegesen különböző.

4. tantétel. Ha ABC triász tangencziális pontjai $A_tB_tC_t$, akkor ABC és $A_tC_tB_t$ perspektiv.

ABC triász lévén, A_tBC, AB_tC, ABC_t egy-egy egyenesen feküsznek. Tehát ABC projekcziója A-ból $A_tC_tB_t$. Tehát ugyanazon hálózathoz tartozó triász, mind ABC.

5. tantétel. Ha P valós pont, az őt triászszá kiegeszítő négy pontpár közűl csak egy pár valós.

Legyen E egy valós inflexió-pont. A kérdéses pontpárokat megkapjuk, ha EP harmadik metszéspontjából (a mely pedig realis) azon inflexió-pontpárokat projicziáljuk, a melyek E-vel egy egyenesben vannak. Ezek közűl tudvalevőleg csak egy pár van valós, s csak ez vezet valós párhoz. Egy van közülök conjugált complex, az ugyan ilyen párhoz vezet, úgy hogy az összekötő egyenes valós.

III.

Nem ugyan a görbén, de azzal szoros összefüggésben vannak hatszorosan perspektiv háromszögök is. Ilyenek az inflexió-triászok egyenesei által alkotott háromszögek.

Legyen a 9 inflexió-pont:

1 2 3
4 5 6
7 8 9

a jelölés legyen úgy választva, hogy 123, 456, 789, 147, 258, 369, 159, 267, 348, 168, 249, 357 egy egyenesben legyenek. Jelöljük ezen egyeneseket ugyanezen sorrendben abc $a_1b_1c_1$ $a_2b_2c_2$ $a_3b_3c_3$ betükkel.

abc és $a_1\,b_1\,c_1$ perspektiv. (Nem az előző szakaszokban, hanem a rendes értelemben értve.)

Ugyanis aa_1 közös pontja 1, bb_1 közös pontja 5 és cc_1 közös pontja 9, 159 pedig egy egyenesben (a) vannak.

abc és $a_1\,b_1\,c_1$ itt két tetszés szerint kiragadott és tetszés szerinti megfelelésbe hozott tagja azon négy háromszögből álló rendszernek, a melyet a 12 inflexió-triász egyenesei alkotnak. Tehát kimondhatjuk:

A négy háromszög közűl akármelyik kettő hatszorosan perspektiv, a perspektivitások tengelyei a másik két háromszög oldalai.

Hozzátehetjük még, hogy a perspektivitások czentrumai a másik két háromszög szögpontjai. A hatszorosan perspektiv háromszögnél a czentrumok és tengelyek ezen relativ helyzetét egy régibb dolgozatomban kimutattam.*

---

* A GRUNERT-féle Archiv der Mathematik und Physik 1883. évi folyamában.

MATHEMATIKAI ÉS TERMÉSZETTUDOMÁNYI ÉRTESITŐ.

KÜLÖNNYOMAT A VIII. KÖTET 8–9. FÜZETÉBŐL.

A MÁSODRENDŰ FELÜLETEK OSZTÁLYOZÁSA.

VÁLYI GYULÁ-tól.

A térbeli Descartes-féle pontkoordinátákban másodfokú egyenlet geometriai értelmét és ezzel kapcsolatban a másodrendű felületek osztályozását minden térbeli geometriáról írott könyv tartalmazza. De nem találhatók meg bennök azon egyszerű kriteriumok, a melyek segítségével minden adott esetben könnyen meg lehessen határozni a felület faját.

Ezen a hiányon akar segíteni az itt összeállított táblázat.

A felület egyenletét:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{23}yz+2a_{31}zx+2a_{12}xy+2a_{14}xt+2a_{24}yt+$$
$$+2a_{34}zt+a_{44}t^2=0.$$

alakban veszem fel, a hol minden együttható valós és nem mindenikök $=0$.

$t=0$ a végtelenben fekvő sík egyenlete.

Legyen:

$$D=|a_{ik}|, \quad (a_{ik}=a_{ki})$$
$$(i,\ k=1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

es A_{ik} az a_{ik}-hoz tartozó aldeterminåns.

I.

$A_{44}\lessgtr 0$ czentrális felületek.

1. $a_{11}a_{22}-a_{22}^2>0$, $a_{11}A_{44}>0$.

   a) $D>0$ képzetes ellipszoid.

   b) $D=0$ képzetes kúp.

   c) $D<0$ valós ellipszoid.

2. $a_{11}a_{22}>0$, $a_{11}A_{44}<0$ vagy $a_{11}a_{22}-a_{12}^2\leq 0$.

a) $D>0$ egyköpenyű hiporboloid.
b) $D=0$ valós kúp.
c) $D\not\geq 0$ kétköpenyű hiperboloid.

II.

$A_{44}=0$, $D\lesseqgtr 0$ paraboloidok.
1. $D>0$ hyperbolikus paraboloid.
2. $D<0$ elliptikus paraboloid.

III.

$A_{44}=0$, $D=0$, de A_{11}, A_{22}, A_{33} között van el nem enyésző. Hengerek.

1. A_{44} átlói aldeterminánsai között van el nem enyésző, és az >0.*

a) $a_{ii}A_{kk}\geq 0$ ($i, k=1, 2, 3$) képzetes henger.
b) $a_{ii}A_{kk}\leq 0$ ($i, k=1, 2, 3$) elliptikus henger.

2. A_{44} átlói aldeterminánsai között van el nem enyésző és az <0, hiperbolikus henger.

3. A_{44} minden átlói aldeterminánsa $=0$, parabolikus henger.

IV.

$A_{11}=A_{22}=A_{33}=A_{44}=0$, $D=0$. Két sík.

1. A másodfokú átló aldeterminánsok között van el nem enyésző és az >0; két képzetes sík.

2. A másodfokú átlói aldeterminánsok között van el nem enyésző és az <0; két valós sík.

3. A másodfokú átlói aldeterminánsok mind elenyésznek; kétszeres sík.

---

* Ha több volna el nem enyésző, akkor azok egyenlő előjelüek, mert valós elemekből álló, elenyésző szimmetrikus determináns aldeterminánsai tudvalevőleg nem lehetnek különböző előjelüek.

MATHEMATIKAI ÉS TERMÉSZETTUDOMÁNYI ÉRTESITŐ.

KÜLÖNNYOMAT A IX. KÖTET 1. FÜZETÉBŐL.

A HARMADRENDŰ GÖRBÉK ELMÉLETÉHEZ.

VALYI GYULÁ-tól.

(Második közlemény.)*

Ebben a közleményben kimutatom, hogy a síkbeli harmadrendű görbén vannak r-szeresen perspektiv sokszögek is. (r tetszés szerinti pozitív egész szám.)

Azok a tantételek, a melyeket az első közlemény a megfelelő pontpárokra és a triászokra vonatkozólag kimond, csak speciális esetei ($r=2$ és $r=3$) az itt bebizonyítandó tantételeknek.

Az első közlemény élén felsorolt jelölések és értelmezések erre a közleményre is vonatkoznak.

I.

A síkbeli harmadrendű görbe egyenlete háromszög pontkoordinátákban (x,y,z) erre az alakra hozható:

$$y^2z=4x^3-g_2xz^2-g_3z^3$$

ha $(0,1,0)$-pontul egyik inflexió-pontot, $z=0$ egyenesűl az ehez tartozó érintőt, $y=0$ egyenesűl az ehez tartozó harmonikus polárt, $x=0$ egyenesűl az $(1,0,0)$-pont polár-egyenesét és végül az egység-pontot czélszerűen választjuk.

Ha ezt az egyenletet összehasonlítjuk a Weierstrass-féle $p(u)$ függvény differencziálegyenletével, a mely szerint

$$p'(u)^2=4p(u)^3-g_2p(u)-g_3,$$

látható, hogy a görbe u paraméterrel így állítható elő:

$$x:y:z=p(u):p'(u):1.$$

---

* Az első közlemény az Értesitő 1889 novemberi füzetében jelent meg.

Ha az egyenletek jobb oldalán álló harmadfokú alak diszkriminánsa nem 0, akkor a görbe hatodosztályú és $p(u)$ másodrendű elliptikus függvény.* Itt ezt fogjuk feltenni.

A görbének ezen parametrikus előállítása különösen fontos azért, mert ekkor a görbének egy n-edrendű görbével való $3n$ metszéspontját az az egyszerű analitikai viszony köti össze, hogy parametereik összege periodus.

Ha ugyanis $f(x, y, z)=0$ az n-edrendű görbe egyenlete, akkor a metszéspontok parameterei $f(p(u),p'(u),1)$ — elliptikus-függvény zérusai. Ez a függvény pedig $3n$-edrendű elliptikus függvény, melynek $3n$-szeres polusai a periodus-pontok, tehát zérusainak összege, az elliptikus függvények ismert tulajdonsága szerint, periodus.

Ennek a tantételnek csak arra a legegyszerűbb esetére lesz szükségünk, hogy A, B, C egy egyenesben fekvő pontok paramétereinek (a,b,c) összege periodus. Ezt szimbolikusan így fogjuk kifejezni:

$$a+b+c\equiv 0$$

Behozzuk ugyanis ezt a jelölést:

$a\equiv b$ jelentse azt, hogy $a=b+2\nu\omega+2\nu'\omega'$, a hol ν és ν' egész számok, 2ω és $2\omega'$ pedig egy pár primitiv-periodusa $p(u)$-nek.

II.

Legyen $A_0A_1 \dots A_{r-2}\, A_{r-1}$ r-szög perspektiv egyfelől $B_0B_1 \dots B_{r-2}\, B_{r-1}$ másfelől $B_1B_2 \dots B_{r-1}\, B_0$ r-szöggel, vagy szimbolikusan kifejezve álljanak fenn egyidejűleg az

$$\begin{pmatrix} A_k \\ B_k \end{pmatrix} \text{ és } \begin{pmatrix} A_k \\ B_{k+1} \end{pmatrix}$$

perspektivitások.

Itt és a következőkben A és B indexéül $(r-1)$-nél nagyobb és negativ indexeket is alkalmazunk. Ezeket úgy értelmezzük, hogy

* A $p(u)$-függvényt teljesen jellemzi ez a két tulajdonsága:

1. $p(u)$ másodrendű elliptikus függvény,

2. $p(u)-\frac{1}{u^2}=0$, ha $u=0$.

legyenek egyjelentésűek a (mod r) veendő legkisebb nem negativ maradékaikkal.

Legyen a fentebbi két perspektivitás czentruma C_0 és C_1. A pontok parametereit megfelelő kis betűvel jelölve, a két perspektivitást kifejezik:

$$\begin{matrix} a_k+b_k+c_0 \equiv 0 \\ a_k+b_{k+1}+c_1 \equiv 0 \end{matrix} \quad (k=0,1,\ldots r-1)$$

Ezekből következnek:

$$\begin{matrix} a_{k+1}-a_k \equiv c_1-c_0 \\ b_{k+1}-b_k \equiv c_0-c_1 \end{matrix} \quad (k=0,1,\ldots r-1)$$

és ezekből az általánosabb

$$\begin{matrix} a_k-a_l \equiv (k-l)(c_1-c_0) \\ b_k-b_l \equiv (k-l)(c_0-c_1) \end{matrix} \quad (k,l=0,1\ldots r-1)$$

kongruencziák. Tehát

$$a_k-a_l \equiv b_{l+h}-b_{k+h},$$

vagyis

$$a_k+b_{k+h} \equiv a_l+b_{l+h},$$

Ezek a kongruencziák azt mondják ki, hogy a két r-szögre nézve az

$$\begin{pmatrix} A_k \\ B_{k+h} \end{pmatrix}, (h=2,3,\ldots r-1)$$

perspektivitások is fennállanak. Tehát a perspektivitás r-szeres. Ha a perspektiv czentrumok C_h $(h=0,1,\ldots, r-1)$ akkor

$$a_k+b_{k+h}+c_h \equiv 0, (k,h=0,1,\ldots r-1).$$

Ugyanezek a kongruencziák mondják ki, hogy

$$\begin{pmatrix} A_k \\ C_{-k+h} \end{pmatrix} \text{— perspektivitás } B_h \text{ czentrummal}$$

és

$$\begin{pmatrix} B_k \\ C_{k+h} \end{pmatrix} \text{— perspektivitás } A_{-h} \text{ czentrummal}$$

fennáll.

Kimondhatjuk tehát a következő tantételt: *1. tantétel.* Ha A_k, B_k $(k=0,1,\ldots r-1)$ r-szögök $\begin{pmatrix} A_k \\ B_k \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} A_k \\ B_{k-1} \end{pmatrix}$ perspektivitásban vannak, akkor egyszersmind az $\binom{A_k}{B_{k+h}}$ $(h=2,3,\dots r-1)$ perspektivitásra is fennállanak. Ha a perspektivitások czentrumai $C_h\,(h=0,1,\dots r-1)$, akkor az ABC r-szögök közül akármelyik kettő r-szeresen perspektiv, a harmadik r-szög pontjai a czentrumok.

Az r-szeresen perspektiv r-szögök lételének bebizonyítására elég megmutatni, hogy van r olyan inkongruens szám $a_k\,(k=0,1,-r-1)$, a melyekre nézve $a_{k+1}-a_k$ különbségek kongruensek.

Mert ha az a számok ilyenek, válasszuk c_0 számot tetszés szerint, a $b_k\,(k=0,1\dots r-1)$ számokat és a c_1 számot pedig válaszszuk úgy, hogy

$$\begin{matrix} a_k+b_k+c_0\equiv 0 \\ a_{k+1}-a_k\equiv c_1-c_0 \end{matrix} \quad (k=0,1\dots r-1)$$

legyen. Akkor egyszersmind

$$a_k+b_{k+1}+c_1\equiv 0$$

lesz. Tehát az a_k számok által meghatározott r-szög bármelyik projekcziójával r-szeresen perspektiv.

Az ilyen r-szöget r *ásznak* (duász, triász, tetrász, pentász etc.) fogjuk nevezni.

Az a_k számok meghatározására szolgálnak

$$a_{k+1}-a_k\equiv\varepsilon\,(k=0,1,\dots r-1)$$

a hol ε független k-tól.

Az első k kongruencziát összeadva:

$$a_k-a_0\equiv k\varepsilon,$$

mind az r-et összeadva:

$$0\equiv r\varepsilon.$$

Hogy r inkongruens a számot kapjunk, kell hogy $0<k<r$ mellett $k\varepsilon$ ne legyen $\equiv 0$.

Ezeknek a feltételeknek megfelel

$$\varepsilon=\frac{2\nu\omega+2\nu'\omega'}{r},$$

ha $\nu\,\nu'$ r egész számoknak nincs közös osztójuk. Az ilyen számokat primitiv r-ed periodusoknak fogjuk nevezni.

Ha ε ilyen, $a_k \equiv a_0 + k\varepsilon\ (k=0,1,\ldots,r-1)$ tetszés szerinti a_0 mellett egy r-ászt határoz meg.

Az összes inkongruens ε-okot megkapjuk, ha $\nu\,\nu'$ helyett az r-nél kisebb nem negativ számok közűl a következőképen választunk össze számpárokat:

ν legyen olyan szám, hogy r-rel legnagyobb közös osztója $=d$, ν' pedig d-hez relativ prim. Ezeknek a számpároknak a száma:

$$\varphi\left(\frac{r}{d}\right)\cdot\frac{r}{d}\varphi(d)$$

Ismételjük ezt r minden osztójára, az 1 és r számokat is beleértve.

Az inkongruens primitiv r-ed periodusok száma tehát

$$S = \Sigma\frac{r}{d}\varphi(d)\varphi\left(\frac{r}{d}\right)$$

vagy, a mi egyre megy,

$$S = \Sigma d\varphi(d)\varphi\left(\frac{r}{d}\right)$$

a hol az összeg $\varphi(r)$-rel osztható, mert ha ε primitiv r-ed periodus, $\lambda\varepsilon$ is az, ha λ relativ prim r-hez.

Könnyű látni, hogy a_0 megválasztása után ε és $\lambda\varepsilon$ ugyanazon r-ászhoz vezet. Tehát az A_0-hoz tartozó különböző r-ászok száma $\frac{1}{\varphi(r)}\cdot S$.

Így a görbét $\frac{1}{\varphi(r)}\Sigma d\varphi(d)\varphi\left(\frac{r}{d}\right)$-számú hálózata az r-ászoknak lepi be.* A görbe minden pontja lehet szögpontja egynek minden hálózatból.

---

* Ha a görbének nincs oválisa, akkor ezen hálózatok közűl csak egy valós.

Ovál görbéknél a valós hálózatok száma

egy, ha r páratlan,
kettő, ha $r \equiv 0 \pmod 4$,
három, ha $r \equiv 2 \pmod 4$.

A hálózatok képviselésére választhatjuk azokat az r-ászokat, a melyekre nézve $a_0 \equiv 0$, a melyeknek tehát A_0 szögpontja az az inflexió-pont, a melyet a koordináta-rendszer (0,1,0) pontjául választottunk. A hálózatok ezekből projicziálással származtathatók.

Az r-ászokra vonatkozólag a következő tantételeket mondhatjuk ki:

2. *tantétel.* Ugyanazon hálózathoz tartozó két r-ász r-szeresen perspektiv.

Mert ha $a_k \equiv a_0 + k\varepsilon$, $b_k \equiv b_0 + k\varepsilon$ $(k=0,1 \ldots r-1)$ akkor $a_k + b_{-k} \equiv a_0 + b_0$, tehát egyik a másiknak projekcziója a $-(a_0+b_0)$ parameterű pontból. De akkor egyszersmind r-szeresen perspektivek.

3. *tantétel.* Két különböző hálózathoz tartozó r-ász nem perspektiv

Mert ha $a_k \equiv a_0 + k\varepsilon$ és $b_k \equiv b_3 + k\varepsilon_1$ (a hol ε_1 nem $\equiv \lambda\varepsilon$) r-ászok perspektivek volnának, azok volnának a velök perspektiv $k\varepsilon$ és $k\varepsilon_1$ $(k'=0,1 \ldots r-1)$ r-ászok is, és pedig r-szeresen perspektivek. Egyik perspektivitásnál 0 és 0 parameterű pontok jönnének megfelelésre, tehát egyik perspektiv-czentrum a 0-parameterű pont volna. De ha ezen perspektivitás szerint ε és $\lambda\varepsilon_1$ volnának megfelelők, abból $\varepsilon + \lambda\varepsilon_1 \equiv 0$ következnék, a mi lehetetlen.

4. *tantétel.* Ha $r = r_1 . r_2$, akkor az r-ász pontjai egyszersmind r_1 számú r_2-ászt alkotnak.

Ugyanis $a_k \equiv a_0 + k\varepsilon$ $(k=0,1, \ldots r_1 r_2 - 1)$ parameterű pontok közül

$a_{k+hr_1} \equiv a_0 + k\varepsilon + hr_1\varepsilon$ $(k < r_1, h=0,1, \ldots r_2-1)$ pontra r_2-ászt alkotnak, mert $r_1\varepsilon$ primitiv r_2-ed periodus.

5. *tantétel.* Egy r-ász szögpontjainak tangencziális pontjai páratlan r esetén ugyanazon hálózathoz tartozó r-ászt, páros r esetén pedig $\frac{r}{2}$ - ászt alkotnak.

Az u-parameterű pont tangencziális pontja $-2u$ parameterű. Tehát $a_k \equiv a_0 + k\varepsilon$ pontok tangencziális pontjai: $-2a_0 - 2k\varepsilon$, a miből a tantétel következik.

ha $\nu\,\nu'\,r$ egész számoknak nincs közös osztójuk. Az ilyen számokat primitiv r-ed periodusoknak fogjuk nevezni.

Ha ε ilyen, $a_k \equiv a_0 + k\varepsilon$ $(k=0,1,\ldots,r-1)$ tetszés szerinti a_0 mellett egy r-ászt határoz meg.

Az összes inkongruens ε-okot megkapjuk, ha $\nu\,\nu'$ helyett az r-nél kisebb nem negativ számok közűl a következőképen válasszunk össze számpárokat:

ν legyen olyan szám, hogy r-rel legnagyobb közös osztója $=d$, ν' pedig d-hez relativ prim. Ezeknek a számpároknak a száma:

$$\varphi\left(\frac{r}{d}\right)\cdot\frac{r}{d}\varphi(d)$$

Ismételjük ezt r minden osztójára, az 1 és r számokat is beleértve.

Az inkongruens primitiv r-ed periodusok száma tehát

$$S=\Sigma\frac{r}{d}\varphi(d)\varphi\left(\frac{r}{d}\right)$$

vagy, a mi egyre megy,

$$S=\Sigma d\varphi(d)\varphi\left(\frac{r}{d}\right)$$

a hol az összeg $\varphi(r)$-rel osztható, mert ha ε primitiv r-ed periodus, $\lambda\varepsilon$ is az, ha λ relativ prim r-hez.

Könnyű látni, hogy a_0 megválasztása után ε és $\lambda\varepsilon$ ugyanazon r-ászhoz vezet. Tehát az A_0-hoz tartozó különböző r-ászok száma $\frac{1}{\varphi(r)}\cdot S.$

Így a görbét $\frac{1}{\varphi(r)}\Sigma d\varphi(d)\varphi\left(\frac{r}{d}\right)$-számú hálózata az r-ászoknak lepi be.* A görbe minden pontja lehet szögpontja egynek minden hálózatból.

---

* Ha a görbének nincs oválisa, akkor ezen hálózatok közűl csak egy valós.

Ovál görbéknél a valós hálózatok száma

egy, ha r páratlan,

kettő, ha $r\equiv 0 \pmod 4$,

három, ha $r\equiv 2 \pmod 4$.

A hálózatok képviselésére választhatjuk azokat az r-ászokat, a melyekre nézve $a_0 \equiv 0$, a melyeknek tehát A_0 szögpontja az az inflexió-pont, a melyet a koordináta-rendszer (0,1,0) pontjául választottunk. A hálózatok ezekből projicziálással származtathatók.

Az r-ászokra vonatkozólag a következő tantételeket mondhatjuk ki:

2. *tantétel.* Ugyanazon hálózathoz tartozó két r-ász r-szeresen perspektiv.

Mert ha $a_k \equiv a_0 + k\varepsilon$, $b_k \equiv b_0 + k\varepsilon$ $(k=0,1 \ldots r-1)$ akkor $a_k + b_{-k} \equiv a_0 + b_0$, tehát egyik a másiknak projekcziója a $-(a_0+b_0)$ parameterű pontból. De akkor egyszersmind r-szeresen perspektivek.

3. *tantétel.* Két különböző hálózathoz tartozó r-ász nem perspektiv

Mert ha $a_k \equiv a_0 + k\varepsilon$ és $b_k \equiv b_3 + k\varepsilon_1$ (a hol ε_1 nem $\equiv \lambda\varepsilon$) r-ászok perspektivek volnának, azok volnának a velök perspektiv $k\varepsilon$ és $k\varepsilon_1$ $(k'=0,1 \ldots r-1)$ r-ászok is, és pedig r-szeresen perspektivek. Egyik perspektivitásnál 0 és 0 parameterű pontok jönnének megfelelésre, tehát egyik perspektiv-czentrum a 0-parameterű pont volna. De ha ezen perspektivitás szerint ε és $\lambda\varepsilon_1$ volnának megfelelők, abból $\varepsilon + \lambda\varepsilon_1 \equiv 0$ következnék, a mi lehetetlen.

4. *tantétel.* Ha $r = r_1 . r_2$, akkor az r-ász pontjai egyszersmind r_1 számú r_2-ászt alkotnak.

Ugyanis $a_k \equiv a_0 + k\varepsilon$ $(k=0,1,\ldots r_1 r_2 - 1)$ parameterű pontok közül

$a_{k+hr_1} \equiv a_0 + k\varepsilon + hr_1\varepsilon$ $(k < r_1, h=0,1,\ldots r_2-1)$ pontra r_2-ászt alkotnak, mert $r_1\varepsilon$ primitiv r_2-ed periodus.

5. *tantétel.* Egy r-ász szögpontjainak tangencziális pontjai páratlan r esetén ugyanazon hálózathoz tartozó r-ászt, páros r esetén pedig $\frac{r}{2}$ - ászt alkotnak.

Az u-parameterű pont tangencziális pontja $-2u$ parameterű. Tehát $a_k \equiv a_0 + k\varepsilon$ pontok tangencziális pontjai: $-2a_0 - 2k\varepsilon$, a miből a tantétel következik.

III.

A többszörös perspektivitásnak az r-ászoknál fellépő esetét monocziklikusnak nevezhetjük.

A policziklikus többszörös perspektivitás esete az, a mikor

$$A_k^h,\, B_h^k \begin{pmatrix} h=1,2, \dots s \\ k=0,1,2,\dots r_h-1 \end{pmatrix}$$

pontokból álló sokszögek egyszerre

$$\begin{pmatrix} A_k^h \\ B_k^h \end{pmatrix} - \quad \text{és} \quad \begin{pmatrix} A_k^h \\ B_{k+1}^h \end{pmatrix}$$

perspektivitásban vannak.

Itt és a következőkben A^h B^h pontok indexei $(\bmod r_h)$— veendő legkisebb nem negativ maradékaikkal helyettesítendők.

A két perspektivitásból következik, hogy

$a_{k+1}^{(h)} - a_k^{(h)} \begin{pmatrix} h=1,2,\dots s \\ k=0,1,\dots r_2-1 \end{pmatrix}$ különbségek kongruensek kell, hogy legyenek. Úgy hogy

$$a_{k+1}^{(h)} - a_k^{(h)} \equiv \varepsilon$$

a hol ε független h-tól és k-tól.

Ezekből következik

$$r_h \varepsilon \equiv 0 \, (h=1,2,\dots s)$$

és ha r legnagyobb közös osztója az r_2 számoknak, egyszersmind

$$r\varepsilon \equiv 0.$$

Az ennek megfelelő ε egyszersmind a megelőző kongruencziáknak is eleget tesz.

Továbbá $a_k^{(2)} \equiv a + k\varepsilon \, (k=0,1\dots r_2-1)$ kongruencziákból látszik, hogy $r_2 > r$ esetében az A^2 pontok közül csak r egymástól különböző, ezek egy r-ászt alkotnak. Ezek mindenike $\frac{r_1}{r}$-szer számítva adja a h-ik pontcsoportot.

Lényegében tehát a sokszög áll s számú r-ászból, a melyek ugyanazon hálózathoz tartoznak.

És megfordítva, ha ugyanazon hálózathoz tartozó s számú r-ászt veszünk, azok akármely projekcziójukkal r-szeresen perspektiv sr-szögöt alkotnak.

Tehát az r-szeresen perspektiv sokszögek a sikbeli harmadrendű görbénél vagy r-ászok pedig ugyanazon hálózathoz tartozó r-ászokból vannak összetéve.

Végül megemlítem, hogy a $p(u)$-függvény helyére harmadrendű negyedosztályú görbéknél (görbék kettős ponttal) egyszerűen periodusos függvény $\left(\frac{c^2}{\sin^2 cu} - \frac{c^2}{3}\right.$, a hol c valós, ha a kettős pont izolált és c tiszta képzetes, ha a kettős pont igazi), — harmadrendű és harmadosztályú görbéknél (görbék csúcscsal) pedig raczionális függvény $\left(\frac{1}{u^2}\right)$ lép.

Ennek alapján könnyű megmutatni, hogy a csúcsos harmadrendű görbéknél r-ászok nincsenek, a kettős pontosoknál vannak ugyan, de csak egy hálózatot alkotnak. Még pedig ha a kettős pont izolált, akkor ez a hálózat valós, — ha pedig a kettős pont igazi, akkor csak a duászok hálózata valós.*

---

* *Helyreigazitás.* A szerkesztőség fölhasználja az alkalmat, hogy VÁLYI úr utolsó közleményébe (VIII. kötet, 219. l.) becsúszott sajtóhibát kijavítson:

az 1. sorban: $a_{11}a_{22}^2$ helyett: $a_{11}a_{22}—a_{12}^2$

a * alatt álló jegyzetben: *aldeterminánsai* helyett: *átlói aldeterminánsai.*

SZÁMELMÉLETI PROBLEMA A GEOMETRIÁBAN.

*Határoztassanak meg az összes háromszögek, a melyeknek oldalait egész számok mérik, területét és kerületét pedig ugyanaz az egész szám méri.**

Legyenek az oldalak pozitiv egész mérőszámai a, b, c. Akkor a feladat szerint

$$\frac{(a+b+c)\,(-a+b+c)\,(a-b+c)\,(a+b-c)}{16}=(a+b+c)^2$$

Hogy a baloldalon egész szám álljon, kell hogy $a+b+c$ páros legyen, mert ha $a+b+c$ páratlan, a számláló többi tényezői is ilyenek, és így ezeknek szorzata nem volna osztható 16-tal.

Tegyük $a+b+c=2s$, akkor

$$(s-a)\,(s-b)\,(s-c)=4s.$$

Tegyük még

$$\left.\begin{aligned} s-a&=\alpha \\ s-b&=\beta \\ s-c&=\gamma \end{aligned}\right\}$$

akkor

$$s=\alpha+\beta+\gamma$$

és

$$\alpha\beta\gamma=4\,(\alpha+\beta+\gamma).$$

A háromszög reális, ha α, β, γ pozitivok.

1. Kimutatom, hogy α, β, γ különbözők.

Mert ha $\gamma=\beta$ volna, következnék, hogy

$$\alpha\beta^2=4\alpha+8\beta$$

* Ezen különben ismeretes probléma teljes megoldása tudtunkkal ez ideig még nincsen közzétéve.

tehát

$$(\alpha\beta-4)^2=4(\alpha^2+4)$$

holott α^2+4 pozitiv egész α mellett nem lehet négyzetszám.

Legyen

$$\alpha>\beta>\gamma.$$

2. Kimutatom, hogy $\gamma>2$ nem lehet.

Mert ha $\gamma\geqq 3$ volna, abból

$$3\alpha\beta\leqq 4(\alpha+\beta+\gamma)<4\alpha+8\beta$$

következnék, azaz

$$(3\alpha-8)\,(3\alpha-4)<32$$

volna, a mi

$$\alpha>\beta>\gamma\geqq 3$$

mellett lehetetlen.

Tehát γ vagy 1, vagy 2.

I. Ha $\gamma=1$, akkor

$$\alpha\beta=4\ (\alpha+\beta+1)$$
$$(\alpha-4)\ (\beta-4)=20.$$

Ez adja az

$$\left.\begin{matrix}\alpha=24\\ \beta=\ 5\end{matrix}\right\},\qquad \left.\begin{matrix}\alpha=14\\ \beta=\ 6\end{matrix}\right\}\quad \text{és}\quad \left.\begin{matrix}\alpha=9\\ \beta=8\end{matrix}\right\}$$

megoldásokat.

II. Ha $\gamma=2$, akkor

$$\alpha\beta=2\ (\alpha+\beta+2)$$
$$(\alpha-2)\ (\beta-2)=8.$$

Ez adja

$$\left.\begin{matrix}\alpha=10\\ \beta=\ 3\end{matrix}\right\}\quad \text{és}\quad \left.\begin{matrix}\alpha=6\\ \beta=5\end{matrix}\right\}$$

megoldásokat.

Tehát az öt megoldásban $a\ b\ c$ értékei:

6, 25, 29,
7, 15, 20,
9, 10, 17,
5, 12, 13,
6, 8, 10.

Vályi Gyula.

MATHEMATIKAI ÉS TERMÉSZETTUDOMÁNYI ÉRTESITŐ.

KÜLÖNNYOMAT A X. KÖTET 1. FÜZETÉBŐL.

A HARMADRENDŰ GÖRBÉK ELMÉLETÉHEZ.

(Harmadik közlemény.)*

VÁLYI GYULA, levelező tag székfoglalója.

A síkbeli harmadrendű görbén vannak olyan zárt sokszögök, a melyeknél mindenik szögpont a megelőzőnek tangencziális pontja. Az ilyen sokszögöt STEINER-sokszögnek nevezzük.**

Ebben a közleményben először kimutatom a STEINER-sokszögök lételét és meghatározom számukat. Azután felkeresem azokat a STEINER-r-szögöket, a melyek egyszersmind r-ászok. Végül részletesebben foglalkozom a STEINER-háromszögökkel és a triászokkal.

I.

A síkbeli harmadrendű és hatodosztályú görbe parameteres előállítása czélszerűen választott koordinátarendszer mellett

$$x : y : z = p(u) : p'(u) : 1$$

a hol $p(u)$ az ismert másodrendű elliptikus függvény 2ω, $2\omega'$ primitiv periodusparral.

Legyenek $A_0 A_1 A_2 \ldots A_{r-1}$ valamely STEINER-r-szög szögpontjai és legyen A_0 parametere a_0.

* Az első közlemény az Értesítő 1889 novemberi, a második az 1890 októberi füzetében jelent meg. Az azokban használt jelölések és értelmezések ebben a közleményben is használtatnak.

** Ezekkel a sokszögekkel STEINER után MANNHEIM, SYLVESTER, CLEBSCH, LINDEMANN és mások foglalkoztak. Számukat PICQUET határozta meg a Journal de l'école polytechnique 54. kötetében. (1884.) Formulája különbözik az itt adott két formulától.

Akkor

A_1-nek, mint A_0 tang. pontjának parametere $-2a_0$
A_2-nek, mint A_1 « « « $(-2)^2a_0$
. . . . . .
A_k-nak, mint A_{k-1} « « « $(-2)^ka_0$

és minthogy A_{r-1} tangentiális pontja A_0:

$$(-2)^r a_0 \equiv a_0$$

míg $0 < k < r$ mellett $(-2)^k a_0$ nem $\equiv 0$.

A STEINER-r-szög értelmezéséből következik, hogy szögpontjai czikluson permutálhatók, azért mindenik szögpont parameterének megvan ez a tulajdona.

Tehát a STEINER-r-szögök szögpontjainak parameterei

$$\left((-2)^r - 1\right) u \equiv 0$$

kongruenczia azon gyökei, melyek hasonló alakú, de kisebb exponensű kongruencziának nem gyökei.

Ebből az következik, hogy

1. a STEINER-egyszögök (inflexio-pontok) parameterei

$$3u \equiv 0$$

gyökei. Ezek a következők:

$$\begin{array}{ccc} 0\,, & \dfrac{2\omega}{3}\,, & \dfrac{4\omega}{3} \\[2ex] \dfrac{2\omega'}{3}\,, & \dfrac{2\omega+2\omega'}{3}\,, & \dfrac{4\omega+2\omega'}{3} \\[2ex] \dfrac{4\omega'}{3}\,, & \dfrac{2\omega+4\omega'}{3}\,, & \dfrac{4\omega+4\omega'}{3} \end{array}$$

Ha a megfelelő pontokat

$$\begin{array}{ccc} 1, & 2, & 3 \\ 4, & 5, & 6 \\ 7, & 8, & 9 \end{array}$$

számokkal jelöljük, akkor

$$123,\ 456,\ 789,\ —\ 147,\ 258,\ 369$$
$$159,\ 267,\ 348,\ —\ 168,\ 249,\ 357$$

a négy triász-hálózathoz tartozó, egymás között háromszorosan perspektiv három-három inflexio-triász.

2. STEINER-hétszögök nincsenek, mert az ezekre vonatkozó kongruenczia megint

$$3u \equiv 0,$$

3. A primitiv ρ-adperiodusok STEINER-r-szögök szögpontjait meghatározó parameterek, ha

$$(-2)^k - 1 \qquad (k = 1,\ 2,\ 3\ \ldots)$$

számsorban az r-ik tag az első, mely ρ-val osztható, azaz ha -2 (mod ρ) r-hez tartozik, mint exponenshez.

Ha tehát a STEINER-r-szögök számát $S(r)$-rel, a primitiv ρ-adperiodusok számát $P(\rho)$-val jelöljük, akkor a STEINER-r-szögök szögpontjainak száma

$$r\,.\,S(r) = \Sigma\, P(\rho)$$

a hol az összeg mindazokra a számokra vonatkozik, melyekre, mint moduluszokra nézve -2 exponense r.

Ugyanezt a számot még a következőképen is meg lehet határozni:

$$\big((-2)^r - 1\big)\, u \equiv 0$$

összes inkongruens gyökeit adja

$$u = \frac{2\nu\omega + 2\nu'\omega'}{R}$$

a hol $R = |(-2)^r - 1|$, ha ν és ν' helyett egymástól függetlenül teszszük a $0, 1, \ldots R-1$ számokat. Számuk tehát R^2. Legyen:

$$R^2 = \big((-2)^r - 1\big)^2 = Q(r).$$

Hogy a STEINER-r-szögök szögpontjainak számát megkapjuk, le kell ebből vonnunk azon gyökök számát, melyek hasonló alakú, de kisebb exponensű kongruencziát is kielégítnek. Erről a kisebb exponensről könnyű belátni, hogy szükségképen r-nek valamely osztója. Ha tehát r különböző primfaktorai $p_1, p_2, \ldots$, akkor le kell vonnunk az $\frac{r}{p_2}, \frac{r}{p_1} \ldots$ exponensű kongruencziák gyökeinek számát.

De akkor kétszer vontuk le azokét, a melyek már az $\frac{r}{p_1 p_2} \ldots$ exponensű kongruencziát is kielégítik. Ezek száma tehát egyszer visszaadandó. És így tovább, egészen azt a gondolatmenetet követve, mint a melylyel az r-nél nem nagyobb pozitiv számok között az r-hez relativ primeket meg lehet számlálni, következik, hogy

$$r \,.\, S(r) = Q(r) - \Sigma Q\left(\frac{r}{p_1}\right) + \Sigma Q\left(\frac{r}{p_1 p_2}\right) + \cdots$$

Megjegyzés. Ugyanazt a módszert lehet használni a primitiv r-edperiodusok megszámlálásánál is. Ott r^2-é az a szerep, a mi itt $Q(r)$-nek jut. Épen azért

$$P(r) = r^2 - \sum \frac{r^2}{p_1^2} + \sum \frac{r^2}{p_1^2 p_2^2} \cdots \cdots = r^2 \Pi \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)$$

a hol a szorzat r különböző primfaktoraira terjed ki. Ez a formula különben ismeretes.

Az r-ász hálózatok száma

$$\frac{P(r)}{\varphi(r)} = r \, \Pi \left(1 + \frac{1}{p}\right)$$

Kényelmesebb formula, mint a második közleményben adott, mely szerint ugyanez a szám

$$\frac{1}{\varphi(r)} \Sigma \, d \, \varphi(d) \, \varphi\left(\frac{r}{d}\right)$$

a hol az összeg r minden osztójára (1 és r beleértve) vonatkozott.

II.

Most felkeresem azokat a Steiner-r-szögöket, a melyek egyszersmind r-ászok.

Egy STEINER-r-szög szögpontjainak parameterei

$$(-2)^k \cdot a_0 \qquad (k=0, 1, \ldots r-1)$$

a hol a_0 gyöke a

$$((-2)^r-1)\,u \equiv 0$$

kongruencziának, de hasonló alakú, kisebb exponensűnek nem.

Egy r-ász szögpontjainak parameterei

$$a_0+kr \qquad (k=0, 1, \ldots r-1)$$

a hol ε primitiv r-edperiodus.

A két r-szög szögpontjai a sorrendre nem ügyelve, ugyanazok, ha

$$((-2)^k-1)a_0 \quad \text{és} \quad kr \qquad (k=1, 2, \ldots r-1)$$

sorok tagjai páronként kongruensek.

Az első számsor egyik tagja $-3a_0$ és a többi ennek egész számú sokszorosa; a második számsor egyik tagja ε és a többi ennek egész számú sokszorosa.

Szükséges tehát, hogy

1. $3a_0$ primitiv r-edperiodus, és így a_0 maga primitiv $3r$-edperiodus legyen,

2. $3r$-re, mint modulusra nézve -2 exponense r legyen, mert csak így adhat a primitiv $3r$-edperiodus STEINER-r-szögöt.

De ez a két feltétel elégséges is. Mert ekkor

$$((-2)^k-1)\,a_0 \qquad (k=1, 2, \ldots r-1)$$

sor tagjai egy primitiv r-edperiodusnak $(3a_0)$ olyan egész számú sokszorosai, hogy a szorzó egész számok r-rel nem oszthatók és (mod r) ingruensek, mint a hogy annak r-ásznál lenni kell.

De a 2. feltétel csak úgy teljesül, ha r valamely hatványa 3-nak.

Mert legyen $r=3^\lambda r_1$, a hol r_1 3-mal nem osztható páratlan szám. (A páros számokat a 2. feltétel előre kizárja.)

Ismeretes, hogy az exponens, melyhez valamely szám (mod m) tartozik, osztója $\varphi(m)$-nek. Tehát jelen esetben r-nek osztania kell $\varphi(3r)$-et.

$$\varphi(3r) = \varphi(3^{\lambda+1} . r_1) = 2 . 3^{\lambda} . \varphi(r_1)$$

és így r_1-nek osztania kell $\varphi(r_1)$-et. Tehát $r_1 = 1$.

De ha $r = 3^{\lambda}$, akkor csakugyan -2 exponense r, ha a modulus $3r$.

Ugyanis

$$-2 = 1 - 3$$

egyenletet ismételten 3-ik hatványra emelve

$$(-2)^{3^{\lambda}} = 1 + a_{\lambda+1} . 3^{\lambda+1} \quad (\lambda = 1, 2, \ldots)$$

egyenleteket kapjuk, a hol $a_{\lambda+1}$ nem osztható 3-mal, a miből az állítás következik.

Tehát ha $r = 3^{\lambda}$, akkor a primitiv $3r$-edperiodusok olyan STEINER-r-szögöket határoznak meg, amelyek egyszersmind r-ászok.

Ha $r = 3^{\lambda}$, akkor a primitiv $3r$-edperiodusok száma $8 . 3^{2\lambda}$. Tehát az r-ász STEINER-r-szögök száma $8 . 3^{\lambda}$. Ezekből egy r-ász-hálózatra 6 jut, mert ha $r = 3^{\lambda}$, az r-ász hálózatok száma $4 . 3^{\lambda-1}$.

Megjegyzendő még, hogy $r = 3$ esetében minden STEINER-háromszög egyszersmind triász is, míg $r = 3^{\lambda} > 3$ esetében nem minden STEINER-r-szög egyszersmind triász, csak azok, a melyek szögpontjainak parameterei primitiv $3r$-edperiodusok. Hogy ezeken kívül vannak STEINER-r-szögök, következik a számukat meghatározó első formulából.

Lássuk most az egy hálózathoz tartozó hat STEINER-sokszög relativ helyzetét.

Legyen $r = 3^{\lambda}$ és vegyük az r-ászok azon hálózatát, a melyet $\frac{2\omega}{r}$ primitiv r-edperiodus jellemez.

Legyen $\frac{2\omega}{3r} = \eta$. Akkor a hálózathoz tartozó hat STEINER-r-szög szögpontjainak parameterei a következők:

$$\left.\begin{array}{ll}
1. & (-2)^k\eta \\
2. & (-2)^k\left(\eta+\frac{2\omega'}{3}\right)\equiv(-2)^k\eta+\frac{2\omega'}{3} \\
3. & (-2)^k\left(\eta+\frac{4\omega'}{3}\right)\equiv(-2)^k\eta+\frac{4\omega'}{3} \\
4. & -(-2)^k\eta \\
5. & -(-2)^k\eta-\frac{2\omega'}{3} \\
6. & -(-2)^k\eta-\frac{4\omega'}{3}
\end{array}\right\} k=0,1,\ldots r-1$$

A három elsőt első csoportnak, a három utolsót második csoportnak nevezem.

Ezekről a Steiner-r-szögökről, a melyek egyszersmind r-ászok, a következő tantételek állanak:

1. *tantétel.* Minden Steiner-r-ász maga-magával perspektiv minden szögpontjából, mint czentrumból.

Ugyanis ha $r=3^\lambda$, minden $3n+1$ alakú szám mod $3r$ megkapja a maga kongruens társát a

$$(-2)^k \qquad (k=0,1,2\ldots r-1)$$

számsorban, és így k, h számokhoz mindig tartozik *egy* olyan szám, hogy

$$(-2)^k+(-2)^h+(-2)^l\equiv 0 \qquad (\text{mod } 3r)$$

A miből az következik, hogy a Steiner-r-ász két szögpontját összekötő egyenes ugyanezen sokszög egyik szögpontjában metszi harmadszor a görbét.

2. *tantétel.* Egy csoportbeli két Steiner-r-ász perspektiv czentrumai a csoport harmadik tagjának szögpontjai.

3. *tantétel.* Az egy csoportbeli három Steiner-r-ász szögpontjai olyan pontrendszert alkotnak, a mely maga-magával perspektiv a maga szögpontjaiból, mint czentrumokból.

Épen úgy bizonyíthatók, mint az első tantétel.

4. *tantétel.* Két külön csoportbeli, de ugyanazon hálózathoz tartozó Steiner-r-ász perspektiv czentrumai között van egy inflexiótriász is.

Például az 1. és 4. sokszögök perspektivek a $0, \frac{2\omega}{3}, \frac{4\omega}{3}$ parameterű inflexió-pontokból, mint czentrumokból.

Ha $r = 3$, nincs is több perspektiv-czentrum.

Ezekre tehát állanak még a következő tantételek is:

5. *tantétel.* Két ugyanazon hálózathoz, de különböző csoporthoz tartozó STEINER-háromszög az ugyanazon hálózathoz tartozó inflexió-triászok egyikével olyan pontrendszert alkot, a mely maga-magával maga-magából perspektiv.

6. *tantétel.* Egy hálózathoz tartozó hat STEINER-háromszög a kilencz inflexió-ponttal maga-magával maga-magából perspektiv pontrendszert alkot.

III.

A STEINER-háromszögök viszonyát a triászokhoz akarom még megvizsgálni, azért részletesebben kell foglalkoznom a triászokkal.

A négy triászhálózatot jellemző primitiv harmadperiodusok

$$\frac{2\omega}{3}, \quad \frac{2\omega'}{3}, \quad \frac{2\omega+2\omega'}{3}, \quad \frac{2\omega-2\omega'}{3}$$

Jelöljük ezek egyikét ε-nal és vizsgáljuk az általa jellemzett hálózatot.

A hálózathoz tartozó egyik triász szögpontjainak parameterei

$$u, \qquad u+\varepsilon, \qquad u+2\varepsilon \equiv u-\varepsilon$$

Hogy könnyebben lehessen róluk beszélni, a következő elnevezéseket használom:

1. *Pontpár*nak nevezem egy triász két szögpontját együtt. Ilyenek $(u, u+\varepsilon)$, $(u+\varepsilon, u-\varepsilon)$, $(u-\varepsilon, u)$. A pontpár egyik tagját a másik *társá*nak mondom.

2. *Oldal*nak nevezem egy pontpár egyenesét.

3. *Kisérő pont*nak mondom az oldal harmadik metszéspontját a görbével.

4. *Kiegészítő pont*nak hívom azt a pontot, a mely a pontpárral triászt alkot.

Ezekről a következő tantételek állanak:

1. *tantétel.* A kiegészítő pontnak a kisérő pont tangencziális pontja.*

Mert az $(u+\varepsilon,\ u-\varepsilon)$-pontpár kiegészítőjének u, kisérőjének $-2u$ a parametere.

Ebből az következik, hogy csak inflexió-triászoknál esik össze a kisérő pont a kiegészítővel.

2. *tantétel.* A pontpár egyik tagja csak akkor esik össze kisérőjével, ha oldala a hálózathoz tartozó egyik STEINER-háromszög oldala.

$(u+\varepsilon,\ u-\varepsilon)$-pontpár kisérőjének parametere $-2u$, és $u\pm\varepsilon\equiv-2u$ feltételből $3u\equiv\pm\varepsilon$ következik, melynek épen a hálózathoz tartozó hat STEINER-háromszög 18 szögpontja tesz eleget.

Tehát az oldalok közül csak a STEINER-háromszögök oldalai érintik a görbét.

3. *tantétel.* A görbe minden pontja a hálózat egy pontpárjához kiegészítő, kettejéhez tartozó, négyéhez kisérő pont.

Az u parameterű pont kiegészitő az $(u+\varepsilon,\ u-\varepsilon)$-párhoz, tartozó az $(u,\ u+\varepsilon)$-, $(u-\varepsilon,\ u)$-párokhoz, kisérő ahhoz a négy párhoz, a melyek kiegészítőjének ő a tangencziális pontja. Ez a négy kiegészítő pont

$$-\frac{u}{2},\quad -\frac{u}{2}+\omega,\quad -\frac{u}{2}+\omega',\quad -\frac{u}{3}+\omega+\omega'$$

parameterű.

4. *tantétel.* A görbe egy pontján hat oldala a hálózatnak megy keresztül.

T. i. a pontot két társával összekötő két oldal és az a négy oldal, a melyeken kisérő pont.

Ezek közül kettő összeesik, ha a pont a hálózathoz tartozó egyik STEINER-háromszög szögpontja. Ekkor ugyanis a pont a hozzá tartozó két pontpár egyikéhez kisérő pont is, azért a két első oldal egyike azonos a négy utóbbi oldal egyikével.

Három esik össze, ha a pont inflexió-pont, t. i. a hálózathoz

* Ez a tantétel az első közlemény II. részében is be volt bizonyítva.

tartozó egyik inflexió-triász három oldala, melyek kettejéhez tartozó, egyikéhez kisérő pont.

Jelöljük az adott harmadrendű és hatodosztályú görbét g-vel, a hálózat oldalainak beburkoló görbéjét γ-val.

Az oldalnak γ-val való érintési pontját a következő lemma segítségével lehet meghatározni.

Lemma. Ha ABC és $A_1B_1C_1$ háromszögök perspektivek, akkor BC egyenest

$$AB \text{ és } A_1C_1, \quad AC \text{ és } A_1B_1, \quad AA_1 \text{ és } B_1C_1$$

egyenesek involuczióban metszik.*

Hogy ezt a lemmát czélunkra felhasználhassuk, legyen EFG a hálózathoz tartozó egyik inflexió-triász és ABC, $A_1B_1C_1$ ennek projekcziói P és P_1 pontokból. Akkor ABC és $A_1B_1C_1$ két perspektiv tagja a hálózatnak.**

Ha P_1 végtelen közel jön P-hez, akkor a fentebbi involutorikus pontpárok elseje B-ben, másodika C-ben egy-egy ponttá egyesül, BC és AA_1 metszéspontja A tangencziális pontjába, tehát BC pontpár kisérőjébe — végül BC és B_1C_1 metszéspontja BC-nek γ-val való érintési pontjába esik. Tehát

5. *tantétel.* Akármelyik oldalon a pontpárhoz a kisérő pont harmonikus társa a γ-val való érintési pont.

A fennebbi tantételekből és a PLÜCKER formuláiból γ következő tulajdonságait lehet kiolvasni:

1. γ hatodosztályú görbe három háromszoros érintővel.

Következik a 4. tantételből. Háromszoros érintők a hálózathoz tartozó inflexió-triászok egyenesei, mert ezek háromszor számítnak az oldalra s tehát γ érintői között is. Az 5. tantételből következik, hogy a három érintési pont egymástól különböző.

2. γ érinti a g-görbét a hálózathoz tartozó hat STEINER-háromszög 18 szögpontjában.

Következik a 2., 4., 5 tantételekből.

---

* Ha BC és B_1C_1, CA és C_1A_1, AB és A_1B_1 egy egyenesben fekvő metszéspontjait $A_2B_2C_2$-vel jelöljük, a lemma egyszerűen következik $AA_1B_2C_2$ teljes négyszög oldalainak BC egyenessel való átmetszéséből.

** Első közlemény II. 2. tantétel.

3. γ rendszáma 12.

A harmadrendű g-vel 18 érintési pontját kimutattuk, a mi felér legalább 36 metszési ponttal. Tehát γ rendszáma $\rho \geq 12$.

Másfelől Plücker harmadik formulája szerint a rendszám (ρ), osztályszám ($\tilde{\omega}$), kettős érintők száma (τ) és inflexió-érintők száma (ι) között ez a viszony:

$$\rho = \tilde{\omega}(\tilde{\omega} - 1) - 2\tau - 3\iota$$

A mostani esetre alkalmazva, minthogy három háromszoros érintő egyenlő értékű 9 kettős érintővel:

$$\rho = 30 - 18 - 3\iota \leq 12$$

Tehát $\rho = 12$, $\iota = 0$ és γ érintkezései g-vel első rendűek.

4. γ pontsingularitásai 18 csúcs és 30 kettős pont, vagy ezekkel egyenlő értékűek. Fajszáma 1.

Az eddigi adatok alapján következik Plücker formuláiból.

Ilyen görbe négy van, a négy triász-hálózatnak megfelelőleg. Jelöljük a

$$\frac{2\omega}{3},\quad \frac{2\omega'}{3},\quad \frac{2\omega+2\omega'}{3},\quad \frac{2\omega-2\omega'}{3}$$

primitiv harmadperiodusokkal jellemzett hálózatokat 1, 2, 3, 4 számokkal s oldalaik beburkoló görbéit $\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4$-gyel.

Tegyük

$$\frac{2\omega}{3} = \varepsilon,\quad \frac{2\omega'}{3} = \varepsilon'.$$

A négy görbe közül kettő-kettő közös érintőit könnyű meghatározni a következő tantétel alapján:

6. *tantétel.* Azok az egyenesek, a melyek egyik hálózatban az egy-egy csoportbeli három-három Steiner-háromszög szögpontjait összekötik, a más három hálózatban úgy szerepelnek, mint oldalok.

Ilyen egyenes az első hálózatban például az, a mely az

$$\frac{\varepsilon}{3},\quad \frac{\varepsilon}{3} + \varepsilon',\quad -\frac{2\varepsilon}{3} - \varepsilon'$$

parameterei Steiner-háromszög szögpontokat összeköti.

Ez az egyenes azonban

$\left(\frac{\varepsilon}{3}, \quad \frac{\varepsilon}{3}+\varepsilon'\right)$-pontpár oldala a 2-ik-,

$\left(-\frac{2\varepsilon}{3}-\varepsilon', \quad -\frac{2\varepsilon}{3}-\varepsilon'+(\varepsilon+\varepsilon')\right)$-pontpár oldala a 3-ik-,

$\left(-\frac{2\varepsilon}{3}-\varepsilon', \quad -\frac{2\varepsilon}{3}-\varepsilon'-(\varepsilon-\varepsilon')\right)$-pontpár oldala a 4-ik hálózatban.

Ebből az következik, hogy ha $h, i. k, l$ bármely permatácziója az 1, 2, 3, 4 számoknak:

a) γ_h és γ_i közös érintői a k és l hálózotok agy-egy csoportbeli STEINER-háromszögeinek szögpontjait összekötő egyenesek. Számuk 36.

b) γ_h, γ_i és γ_k közös érintői az l hálózat egy-egy csoportbeli STEINER-háromszögeinek szögpontjait összekötő egyenesek. Számuk 18.

*

Végül megemlítem, hogy harmadrendű negyedosztályú görbéknél (görbék kettős ponttal) az egyetlen triászhálózat oldalainak beburkolója negyedosztályú hatodrendű görbe egy háromszoros érintővel. Pontsingularitásai 6 csúcs is 4 kettős pont. Fajszáma 0.

A MÁSODRENDŰ FELÜLETEK OSZTÁLYOZÁSÁRÓL.

Általánosan ismeretesek azok az egyszerű kritériumok, a melyekkel a másodrendű görbék faját meg lehet határozni.

Ha a görbék egyenlete

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}xz+2a_{23}yz+a_{33}z^2=0,$$

a hol $z=0$ a sík végtelen távol fekvő egyenese, és ha

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad (a_{ik}=a_{ki})$$

A_{ik} az a_{ik}-hoz tartozó aldetermináns, akkor a kritériumok a következők:

I. $A \gtrless 0$.

1. $A_{33}>0$.
   - *a)* $a_{11}A>0$. *Képzetes ellipszis.*
   - *b)* $a_{11}A<0$. *Valós ellipszis.*
2. $A_{33}<0$. *Hiperbóla.*
3. $A_{33}=0$. *Parabóla.*

II. $A=0$.

1. A_{11}, A_{22}, A_{33} között van pozitiv.* *Két képzetes egyenes.*
2. A_{11}, A_{22}, A_{33} között van negativ. *Két valós egyenes.*
3. $A_{11}=A_{22}=A_{33}=0$. *Egy kétszeres egyenes.*

---

* Ismeretes, hogy egy valós elemekből álló elenyésző szimmetrikus determináns átlói aldeterminánsai nem lehetnek különböző előjelűek. Ugyanis az adjungált determinánsok tulajdonsága $A=0$ esetében az, hogy

$$A_{ii}\cdot A_{kk}=A_{ki}\,.$$

Kevésbbé ismeretesek azok a hasonlóan egyszerű explicit kritériumok, a melyek a másodrendű felületek fajának meghatározására szolgálnak.

Ezeket egy táblázatba összeállítva bizonyítás nélkül közöltem volt az Akadémia «Mathematikai és természettudományi értesítő»-jében. (VIII. kötet, 218—219. lap).

Nem lesz talán érdektelen, ha itt most bizonyítással együtt közlöm azt a táblázatot.

Ha a felület egyenlete

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{23}yz+2a_{31}zx+2a_{12}xy+2a_{14}xt+2a_{24}yt+$$
$$+2a_{34}zt+a_{44}t^2=0,$$

a hol $t=0$ a végtelen távol fekvő sík, és ha

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad (a_{ik}=a_{ki})$$

A_{ik} az a_{ik}-hoz tartozó aldetermináns, akkor a fennebb összeállított kritériumok segítségével első sorban a felület végtelen távol fekvő pontjait fogjuk megvizsgálni.

Ezekre nézve $t=0$ és

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}xz+2a_{23}yz+a_{33}z^2=0.$$

Az utóbbi egyenlet magában annak a kúpnak egyenlete, melynek egyenes alkotói a felület végtelen távol fekvő pontjai felé mutatnak. Ennek a kúpnak megvizsgálására elég azt egy síkkal átmetszeni. Vegyük ilyen síkul pl. a $z=1$ síkot. A metszési görbe egyenlete ugyanaz, ha benne z homogénná tevő koordináta.

Az adott felület végtelen távol fekvő pontjai alkotta görbére a kritériumok a következők:

I. $A_{44} \gtrless 0.$

1. $a_{11}a_{22}-a_{12}^2>0, \quad a_{11}\,.\,A_{44}>0.$ *Képzetes kúpszelet.*

2. $a_{11}a_{22}-a_{12}^2>0, \quad a_{11}\,.\,A_{44}<0,$

vagy

$a_{11}a_{22}-a_{12}^2 \leqq 0.$ *Valós kúpszelet.*

II. $A_{44}=0$.

1. A_{44} átlói aldeterminánsai között van pozitiv.

Két képzetes egyenes.

2. A_{44} átlói aldeterminánsai között van negativ.

Két valós egyenes.

3. A_{44} átlói aldeterminánsai mind elenyésznek.

Egy kétszeres egyenes.

A II. 1 és II. 2. esetekben a végtelen távol fekvő sik a felületet érinti egy pontban, a II. 3. esetében pedig érinti egy egész egyenes hosszán.

A kúp, henger és két sík felismerésére az a körülmény vezet, hogy ezeken olyan pontok is vannak, a melyekhez határozott érintő sík nem tartozik. (Szinguláris pont.)

Ismeretes, hogy $f=0$ felület (x_1, y_1, z_1, t_1)-pontjához tartozó érintő sík egyenlete a következő:

$$x \,.\, f_1(x_1, y_1, z_1, t_1,)+yf_2(x_1, y_1, z_1, t_1)+zf_3(x_1, y_1, z_1, t_1)+$$
$$+tf_4(x_1, y_1, z_1, t_1)=0,$$

a hol

$$f_1=\frac{\partial f}{\partial x}, \quad f_2=\frac{\partial f}{\partial y}, \quad f_3=\frac{\partial f}{\partial z}, \quad f_4=\frac{\partial f}{\partial t}.$$

Az (x_1, y_1, z_1, t_1)-pont szinguláris, ha $f_1=f_2=f_3=f_4=0$, mikor ha $x=x_1, y=y_1, z=z_1, t=t_1$.

Tehát a szinguláris pontokat

$$\begin{aligned}
a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+a_{14}t&=0\\
a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z+a_{24}t&=0\\
a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z+a_{34}t&=0\\
a_{41}x+a_{42}y+a_{43}z+a_{44}t&=0
\end{aligned}$$

egyenletek határozzák meg.

A következő esetek lehetségesek:

1. $A \gtrless 0$. *Nincs szinguláris pont.*

2. $A=0$, de átlói aldeterminánsai között van el nem enyésző. *Egy szinguláris pont van.*

Megkülönböztetendő alesetek:

a) $A_{44} \gtrless 0$. *A szinguláris pont végesben van.*

b) $A_{44}=0$. *A szinguláris pont végtelen távol fekszik.*

3. A és átlói aldeterminánsai elenyésznek, de a másodfokú átlói aldeterminánsok nem. *Szinguláris egyenes.*

4. A és összes átlói harmad és másodfokú aldeterminánsai elenyésznek. *Egy szinguláris sík.*

Igy válnak ki a kúp, henger, két sík és a kétszeres sík.

A hiperboloidok elválasztására ismernünk kell még a kritériumot arra nézve, hogy az érintő sík valós vagy képzetes egyeneseket vág-e ki a felületből?

Válaszszuk egy perczre a felület egy pontját koordináta-kezdőpontnak a hozzá tartozó érintő síkot xy-síknak. A felület egyenlete ilyen koordináta-rendszer mellett:

$$b_{11}x^2+b_{22}y^2+b_{33}z^2+2b_{23}yz+2b_{31}zx+2b_{12}xy+2b_{34}zt=0.$$

Az xy-síktól kimetszett két egyenes ($z=0$ sík)

$$b_{11}x^2+2b_{12}xy+b_{22}y^2=0$$

Valósak, ha $b_{11}b_{22}-b_{12}^2<0$

Képzetesek, ha $b_{11}b_{22}-b_{12}^2>0$.

De a b-koefficiensek determinánsa

$$B=-(b_{11}b_{22}-b_{12}^2)\,a_{34}^2$$

Tehát a kimetszett egyenesek *valósak* $B>0$, *képzetesek* $B<0$ esetében.

Azonban ismeretes, hogy egy négyzetes alak linear transzformácziójánál az eredeti alak determinánsa A, a transzformált alak determinánsa B és a transzformáczió determinánsa C között ez a viszony:

$$B=AC^2$$

Tehát B és A egyenlő előjelű. Sőt akkor sem változik a determináns jele, ha a felület egyenletét valós szorzóval szorozzuk, mert A negyedfokú determináns és így minden elemének jelváltozásával jele nem változik.

Igy kimondhatjuk, hogy *a felület valós pontjaihoz tartozó érintő síkok valós vagy képzetes egyeneseket vágnak ki a felületből a szerint, a mint A positiv, vagy negativ.*

Igy válnak a hiperboloidok és paraboloidok két fajra; hasonlóképen az ellipszoidok is.

Ha a felületnek nincs végtelen távol fekvő pontja és $A > 0$, *a felület egészen képzetes.* Mert ha volna valós pontja, ahoz két valós egyenest kimetsző érintő sík tarozněk, mi pedig valós végtelen távol fekvő pontokat kivánna.

Hogy pedig $A < 0$ esetében a felület valós, így bizonyítható be:

$$f(1, 0, 0, 0) = a_{11}$$
$$f(A_{41}, A_{42}, A_{43}, A_{44}) = A_{44} . A$$

(Legkönnyebben úgy számitható ki, hogy felhasználjuk a homogén függvények ama jól ismert tulajdonságát, hogy

$$2f = xf_1 + y . f_2 + 2f_3 + tf_4.$$

Tehát

$$f(1, 0, 0, 0) . f(A_{41}, A_{42}, A_{43}, A_{44}) = a_{11} . A_{44} . A$$

Már pedig, ha nincs valós végtelen távol fekvő pont, $a_{11} . A_{44} > 0$; és így $A < 0$ esetében f értéke az $(1, 0, 0, 0)$- és $(A_{41}, A_{42}, A_{43}, A_{44})$-pontokban ellenkező előjelű, a miből a felület valós volta következik.

A teljesség okáért még megemlítem, hogy a hengerek fajának meghatározására, messük azokat a koordináta-síkokkal. Legalább egyikök igazi kúpszeletben vágja és ez meghatározza a fajt.

Síkpár esetében annak eldöntésére, hogy ezek valósak-e vagy képzetesek, metszőkül használjuk a koordináta-tengelyeket és a koordináta-síkok végtelen távol fekvő egyeneseit. Ezen hat egyenes közül legalább egy külön két pontban metszi a két síkot, azok valós vagy képzetes volta a kérdést eldönti. A feleletet tehát a másodfokú átlói aldeterminánsok előjele adja meg.

Az eddigiekben teljes bebizonyítást nyert a következő táblázat helyes volta:

I. $A_{44} \gtrless 0$.

1. $a_{11}a_{22} - a_{22}^2 > 0, \quad a_{11} . A_{44} > 0$.

$a)$ $A > 0$. *Képzetes ellipszoid.*

$b)$ $A = 0$. *Képzetes kúp.*

$c)$ $A < 0$. *Valós ellipszoid.*

2. $a_{11}a_{22} - a_{22}^2 > 0, \quad a_{11} . A_{44} < 0$ vagy $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \leqq 0$.

$a)$ $A > 0$. *Egyköpenyű hiperboloid.*

$b)$ $A = 0$. *Valós kúp.*

$c)$ $A < 0$. *Kétköpenyű hiperobolid.*

II. $A_{44} = 0, \quad A \gtrless 0$.

1. $A > 0$. *Hiperbolikus paraboloid.*

2. $A < 0$. *Elliptikus paraboloid.*

III. $A_{44} = 0, \quad A = 0$, de A_{11}, A_{22}, A_{33} között van el nem enyésző.

1. A_{44} átlói aldeterminánsai között van positiv.

$a)$ $a_{ii} A_{kk} \geqq 0$ $(i, k = 1, 2, 3)$ *Képzetes henger.*

$b)$ $a_{ii} A_{kk} \leqq 0$ $(i, k = 1, 2, 3)$ *Elliptikus henger.*

2. A_{44} átlói aldeterminánsai között van negativ.

Hiperbolikus henger.

3. A_{44} összes átlói aldeterminánsai elenyésznek.

Parabolikus henger.

IV. $A_{11} = A_{22} = A_{33} = A_{44} = 0, \quad A = 0$.

1. A másodfokú átlói aldeterminánsok között van pozitiv.

Két képzetes sík.

2. A másodfokú átló aldeterminánsok között van negativ.

Két valós sík.

3, A másodfokú átlói aldeterminánsok mind elenyésznek.

Egy kétszeres sík.

Vályi Gyula.

MATHEMATIKAI ÉS TERMÉSZETTUDOMÁNYI ÉRTESITŐ.

KÜLÖNNYOMAT A X. KÖTET 8—9. FÜZETÉBŐL.

A NEGYEDRENDŰ ÉS ELSŐFAJÚ TÉRBELI GÖRBÉKRŐL.

VÁLYI GYULA l. t.

Azok a térbeli algebrai görbék első fajúak, a melyek raczionális viszonyban vannak a síkbeli algebrai első fajú görbékkel és így parameteresen elliptikus függvényekkel fejezhetők ki a következő alakban:

$$x_k = \lambda \,.\, F_k\big(p(u), p'(u)\big) \quad (k=1, 2, 3, 4)$$

a hol $p(u)$ az ismert másodrendű elliptikus függvény 2ω, $2\omega'$ primitiv periodus-párral, az F függvények $p(u)$ és $p'(u)$ raczionális egész függvényei közös osztó nélkül és λ arányossági szorzó.

Ez a parameteres előállítás különösen azért fontos, mert így a görbének akármely algebrai felülettel való metszéspontjait az az egyszerű reláczió köti össze, hogy parametereik összege periodus.

Mert ha a felület egyenlete

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0,$$

akkor a metszéspontok parameterei

$$f(F_1, F_2, F_3, F_4)$$

elliptikus függvény zérusai. De ennek az elliptikus függvénynek pólusai a periodusppontok, és épen ezért, az elliptikus függvények ismert tulajdonsága szerint zérusainak összege periodus.

Ha az F elliptikus függvények rendszámai között a legnagyobb n, akkor a görbe n-edrendű, mert egy tetszés szerint választott síkkal n metszéspontja van. Tehát negyedrendű és első fajú görbéknél

$$F_k = a_{k1}\, p(u)^2 + a_{k2}\, p'(u) + a_{k3}\, p(u) + a_{k4}$$
$$(k=1, 2, 3, 4),$$

hol $|a_{kh}|$ determináns nem $=0$, ha a görbe térbeli. Ezeknél tehát a fennebbi egyenletekből következik

$$p(u)^2 : p'(u) : p(u) : 1 = x : y : z : t,$$

a hol x, y, z, t a koordináták lineáris homogén függvényei el nem enyésző determinánssal és így mint új tetraéderes koordináták vezethetők be.

Tehát a negyedrendű és első fajú térbeli görbék parameteres előállítása mindig erre az alakra hozható :

$$x : y : z : t = p(u)^2 : p'(u) : p(u) : 1.$$

A következőkben a fentebb bebizonyított tantételnek csak arra a legegyszerűbb esetére hivatkozunk, mely szerint a görbe négy pontja egy síkban van, ha parametereik (u_1, u_2, u_3, u_4) összszege periodus, vagy a szokott jelölést használva, ha

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \equiv 0.$$

I.

Azon egyenesek összeségét, a melyek az

$$u + v \equiv c$$

feltételnek megfelelő (u, v) pontpárokat vágnak ki a görbéből, *húrrendszernek* fogjuk nevezni, a c és $-c$ parameterű húrrendszereket pedig *konjugáltaknak.*

Ha $2c$ nem $\equiv 0$, akkor a konjugált húrrendszerekről a következő tantételt mondhatjuk ki.

1. *tantétel.* Ugyanazon húrrendszerhez tartozó két húr nem metszi egymást, ellenben két konjugált húrrendszerhez tartozó húrok metszik egymást.

Mert ha

$$u + v \equiv c, \qquad u_1 + v_1 \equiv c$$
$$u' + 'v \equiv -c, \qquad u_1' + v_1' \equiv -c,$$

akkor

$$u + v + u_1 + v_1 \equiv 2c \quad \text{nem} \equiv 0$$
$$u' + v' + u_1' + v_1' \equiv -2c \ \text{nem} \equiv 0,$$

ellenben

$$u+v+u'+v'\equiv 0.$$

Ebből következik, hogy a konjugált húrrendszerek egy másodrendű és másodosztályú felület egyeneseinek két raját alkotják.

A c más-más értékéhez tartozó felületek közül akármelyik kettőnek teljes átmetszési görbéje az adott görbe, mert a görbe minden pontján, minden húrrendszerből egy húr megy keresztül. Tehát ezek a felületek felület-sort alkotnak.

A felület-sorhoz négy kúp is tartozik, ezeknél a konjugált húrrendszerek azonosak. Tehát parametereik

$$2c\equiv 0$$

gyökei. Ezek $o, \omega, \omega', \omega+\omega'$.

Ezeket *kúpos húrrendszereknek* fogjuk nevezni.

2. tantétel. Minden húrrendszerhez a görbe négy érintője tartozik. Ezeknek érintési pontjai csakis a kúpos húrrendszereknél feküsznek egy síkban.

A c húrrendszerhez tartozó érintők érintési pontjainak parameterei

$$2u\equiv c$$

gyökei. Ezek

$$\frac{c}{2}, \quad \frac{c}{2}+\omega, \quad \frac{c}{2}+\omega', \quad \frac{c}{2}+\omega+\omega'.$$

Összegük $\equiv 2c$ és így csak kúpos húrrendszereknél $\equiv 0$.

A kúpos húrrendszerekhez tartozó érintők érintési pontjainak parametereire nézve

$$2u\equiv 0, \text{ vagy } \omega, \text{ vagy } \omega' \text{ vagy } \omega+\omega',$$

tehát

$$4u\equiv 0.$$

Ezekben a pontokban tehát a símúló sík a görbét harmadrendben érinti.

Parametereik

$$u\equiv i.\frac{2\omega}{4}+k.\frac{2\omega'}{4}, \; (i, k=0, 1, 2, 3).$$

Jelöljük röviden (ik)-val, a hol i, k csak mod. 4 határozottak.

A (00)-kúphoz tartozó érintési pontok:

$$(00),\ (20),\ (02),\ (22),$$

a (20)-kúphoz tartozók:

$$(10),\ (30),\ (12),\ (32),$$

a (02)-kúphoz tartozók:

$$(01),\ (21),\ (03),\ (23),$$

a (22)-kúphoz tartozók:

$$(11),\ (31),\ (13),\ (33).$$

Ki lehet mutatni, hogy az egyik csoporthoz tartozó négy pont alkotta teljes négyszög diagonális pontjai a többi három kúp csúcsai.

Mert pl. az első csoportnál

$$(00)\,(20) \quad \text{és} \quad (02)\,(22)$$

pontpárok húrjai a (20)-kúpos húrrendszerhez tartoznak és így metszéspontjuk a (20)-kúp csúcsa.

Áll tehát a következő tantétel:

3. tantétel. A görbén átmenő négy másodrendű kúp csúcsaiból alkotott tetraéder síkjai vágják ki a görbéből azt a 16 pontot, a melyekben a símúló sík harmadrendben érint. A tetraéder három csúcsa diagonális háromszögét alkotja a síkjától kivágott négy pont teljes négyszögének. Ezen négy ponthoz tartozó érintők átmennek a tetraéder szemben fekvő csúcsán és az ehhez tartozó kúpos húrrendszer tagjai, símúló síkjaik pedig a kúp azon négy egyenes alkotójához tartozó érintő síkok.

Ha a görbe két, rajta átmenő másodrendű felület egyenletével van megadva, akkor a fentebbi tantétel alapján ennek a 16 pontnak meghatározása algebrai úton lehetséges épen úgy, mint a síkbeli harmadrendű görbék 9 inflexió-pontjának meghatározása.

II.

A görbe pontjaira nézve a projicziálás és a perspektiv helyzet fogalmát a következő értelmezésekkel vezetjük be:

1. ha ABC a görbe pontjai, akkor AB húrból C pontot projicziálni annyit tesz, mint ABC síknak a görbével való negyedik metszéspontját felkeresni.

2. A görbén fekvő $A_1B_1C_1 \ldots$, $A_2B_2C_2 \ldots$ pontrendszerek perspektivek, ha egyikük a másiknak a görbe valamely húrjából vett projekcziója.

Ha a húr parametere c, a projicziált ponté a, a projekczióé b, akkor

$$a+b+c\equiv 0.$$

Az eredmény ugyanaz marad, ha projicziáló tengelyül a c-húrrendszer akármelyik tagját választjuk.

A többszörösen perspektiv sokszögökre vonatkozólag felmerülő kérdés analitikai kifejezése és megoldása ugyanaz, mint a síkbeli harmadrendű görbéknél.* Elég lesz a főbb eredményeket felsorolnunk.

A többszörösen perspektiv sokszögnek alap-tipusa az r-ász. Egy r-ász szögpontjainak parameterei

$$a+k\varepsilon, \quad (k=0, 1, \ldots r-1),$$

a hol ε primitiv r-edperiodus, a tetszés szerinti parameter.

Két r-ászt ugyanazon hálózathoz számítunk, ha a hozzájuk tartozó primitiv r-edperiodusok (ε és ε_1) között

$$\varepsilon_1\equiv\lambda\varepsilon$$

reláczió áll, a hol λ relativ prim r-hez.

Az r-ász hálózatok száma

$$H(r)=r\Pi\left(1+\frac{1}{p}\right)$$

a hol a szorzat r különböző primfaktoraira terjed ki.**

---

* A harmadrendű görbék elméletéhez. Második közlemény. Az Értesítő IX. kötetében (18—25 lap).

** Harmadik közlemény. Az Értesitő X. kötetében, 5-ik lap.

1. tantétel. Ugyanazon hálózathoz tartozó két r-ász r-szeresen perspektiv, két különböző hálózathoz tartozó r-ász nem perspektiv.

2. tantétel. Egy hálózatból tetszés szerint kiválasztott három r-ászhoz mindig tartozik ugyanazon hálózat egy negyedig r-ásza úgy, hogy minden sík, mely a görbét a három első r-ász egy-egy pontjában metszi, negyedszer a negyedik r-ász egyik pontját metszi ki a görbéből.

Mert ha

$$\begin{array}{l} a_1+k_1\varepsilon \\ a_2+k_2\varepsilon \\ a_3+k_3\varepsilon \\ a_4+k_4\varepsilon \end{array} \quad (k_1, k_2, k_3, k_4=0, 1, \ldots r-1)$$

r-ászok úgy vannak választva, hogy

$$a_1+a_2+a_3+a_4\equiv 0,$$

akkor egyszersmind

$$(a_1+k_1\varepsilon)+(a_2+k_2\varepsilon)+(a_3+k_3\varepsilon)+(a_4+k_4\varepsilon)\equiv 0,$$

ha

$$k_1+k_2+k_3+k_4\equiv 0 \pmod r),$$

Négy ilyen r-ász pontjait r^3 számú síkkal lehet a görbéből kivágni úgy, hogy mindenik sík mind a négy r-ász egy-egy pontját vágja ki a görbéből.

3. tantétel. A görbe összes pontjait egyik pontjából egy síkra projicziálva, a projekczió síkbeli harmadrendű és hatodosztályú görbe. Az r-ászok projekcziói a síkbeli harmadrendű görbére nézve r-ászok.

III.

Az A pont simúló síkjának a görbével való negyedik metszéspontját *A oszkuláczios pontjának* nevezzük.

Ha A parametere a, akkor oszkuláczios pontjáé $-3a$.

STEINER-*sokszögnek* hívjuk a görbén fekvő olyan zárt sokszöget, a melynek mindenik szögpontja a megelőzőnek oszkuláczios pontja.

Ezek meghatározására, valamint a velök kapcsolatban felmerülő kérdések tárgyalására ugyanazt a módszert lehet használni, mint a síkbeli harmadrendű görbéknél.*

A főbb eredmények a következők:

1. tantétel. A STEINER r-szögök szögpontjainak parameterei

$$\left((-3)^r-1\right)u\equiv 0$$

azon gyökei, a melyek hasonló alakú, de kisebb exponensű kongruencziának nem gyökei.

Ebből következik, hogy minden r-hez tartoznak STEINER-sokszögek. Ha számuk $S(r)$, a primitiv ρ-edperiodusoké $P(\rho)$, akkor

$$r\,.\,S(r)=\Sigma P(\rho),$$

a hol az összeg mindazon ρ-kre vonatkozik, a melyekre, mint modulusra nézve -3 exponense r.

Ha

$$Q(r)=\left((-3)^r-1\right)^2$$

jelölést használunk, ugyanezen számra áll ez a formula is:

$$r\,.\,S(r)=Q(r)-\Sigma Q\left(\frac{r}{p_1}\right)+\Sigma Q\left(\frac{r}{p_1 p_2}\right)\ldots$$

a hol $p_1 p_2 \ldots$ különböző primfaktorai r-nek.

2. tantétel. Egy STEINER r-szög csak akkor lehet egyszersmind r-ász, ha r kettőnek valamely hatványa és a sokszög szögpontjainak parameterei primitiv $4r$-edperiodusok.

3. tantétel. Ha $r=2^\lambda$, akkor minden r-ászhálózathoz 8 STEINER r-szög tartozik, a melyek négyével két csoportba oszlanak.

Zárt pontrendszernek fogjuk nevezni az olyan pontok összességét, a melyek közül akármelyik hárman átmenő sík negyedszer is a rendszerhez tartozó pontban vágja a görbét.

4. tantétel. Egy STEINER r-ász szögpontjai, valamint egy r-ász hálózathoz tartozó egy csoportbeli STEINER r-ászok szögpontjai együtt zárt pontrendszert alkotnak.

5. tantétel. Azon STEINER-rászok szögpontjai, a melyeknél $r=2^\lambda$ ($\lambda=0, 1, 2, \ldots k$), együtt zárt pontrendszert alkotnak.

---

* A harmadrendű görbék elméletéhez. Harmadik közlemény. Az Ertesítő X. kötetében. (2–13. lap.)

Mert ezen pontrendszer parameterei

$$2^{k+2}.u \equiv 0$$

összes gyökei. Már pedig, ha u_1, u_2, u_3 gyökök, — $(u_1+u_2+u_3)$ is az, a miből a tantétel következik.

6. tantétel. Olyan r-ász szögpontjai (r tetszés szerinti), a melynek egyik szögpontja Steiner-egyszög, zárt pontrendszert alkotnak.

Mert egy ilyen r-ász szögpontjainak parameterei

$$a+k\varepsilon \qquad (k=0, 1, \ldots r-1),$$

a hol ε primitiv r-edperiodus és a

$$4a \equiv 0$$

gyöke.

Tehát

$$(a+k_1\varepsilon)+(a+k_2\varepsilon)+(a+k_3\varepsilon)+(a+k_4\varepsilon) \equiv 0,$$

ha

$$k_1+k_2+k_3+k_4 \equiv 0 \text{ (mod } r).$$

MATHEMATIKAI ÉS TERMÉSZETTUDOMÁNYI ÉRTESITŐ.

KÜLÖNNYOMAT A XI. KÖTET 1. FÜZETÉBŐL.

DESARGUES TANTÉTELÉNEK TÉRBELI ANALOGONJÁRÓL.

VÁLYI GYULA . tagtól.

DESARGUES tantétele a síkban így is fogalmazható:

Ha a két háromszög megfelelő szögpontjait összekötő egyenesek lineáris sugársorhoz tartoznak, akkor a megfelelő oldalok metszéspontjai lineáris pontsor tagjai.

Tekintetbe véve azt, hogy a térben a lineáris sugársor reciprókja megint lineáris sugársor, analog tantételnek a következőt lehet tekinteni:

Ha a két tetraéder megfelelő szögpontjait összekötő egyenesek lineáris sugársorhoz tartoznak, akkor a megfelelő oldalsíkok metszési egyenesei szintén lineáris sugársor tagjai.

Két tetraéder ilyen viszonyát *lineáris*-nak fogjuk nevezni.

Ez a tantétel, melyet alább bebizonyítunk, azután annak a kérdésnek felvetéséhez vezet, hogy vannak-e többszörösen lineáris tetraéderek? Kimutatjuk létezésüket és felkeressük összes fajaikat.

1. A lineáris sugársorokról.

Ha p egyenes térbeli koordinátái

$$p_{ik} \; (i, k = 1, 2, 3, 4, \; p_{ik} + p_{ki} = 0),$$

akkor ezeket a következő egyenlet köti össze:

$$[p] = p_{23}p_{14} + p_{31}p_{24} + p_{12}p_{34} = 0.$$

Ha a p, q egyenesek koordinátái p_{ik}, q_{ik}, akkor a feltétel arra nézve, hogy a két egyenes messe egymást:

$$[p, q] = [q, p] = p_{23}q_{14} + p_{31}q_{24} + p_{12}q_{34} + \\ + p_{14}q_{23} + p_{24}q_{31} + p_{34}q_{12} = 0.$$

Erre a két egyenletre a következőkben szükségünk van.

1. Keressük fel a két egyenes (p és q) meghatározta lineáris sugársort. Ekkor

$$s_{ik} = \lambda p_{ik} + \mu q_{ik}$$

csak úgy lehetnek vonalkoordináták, ha

$$[s] = \lambda\mu [p, q] = 0.$$

Tehát két egyenes csak úgy származtat lineáris sugársort, ha metszik egymást. A sugársor azon egyenesek összeségéből áll, a melyek p és q közös pontján keresztülmennek és közös síkjában feküsznek, mert p és q minden közös metszője (l) metszi az s egyenest is. Ugyanis

$$[s, l] = \lambda [p, l] + \mu [q, l].$$

A sugársornak ezt a faját *síkbeli lineáris sugársornak* fogjuk nevezni.

A feltétel arra nézve, hogy három adott egyenes síkbeli lineáris sugársorhoz tartozzék, abban áll, hogy a koordinátáikból alkotott matrix összes harmadfokú determinánsainak el kell enyészniök.

2. Keressük fel a három egyenes (p, q és r) meghatározta lineáris sugársort, ha a három egyenes nem tartozik síkbeli lineáris sugársorhoz. Ismét

$$s_{ik} = \lambda p_{ik} + \mu q_{ik} + \nu r_{ik}$$

csak úgy lehetnek vonal-koordináták, ha

$$[s] = \mu\nu [q, r] + \nu\lambda [r, p] + \lambda\mu [p, q] = 0.$$

A következő eseteket kell megkülönböztetnünk:

a) p, q, r egyenesek kettőnként nem metszik egymást.

Ekkor a sugársor egyszerűen végtelen sok tagból áll azzal a tulajdonsággal, hogy p, q, r minden közös metszője (l) őket is metszi. Mert

$$[s, l] = \lambda [p, l] + \mu [q, l] + \nu [r, l].$$

Ebből az következik, hogy a sugársor a p, q, r egyenesek meghatározta másodrendű és másodosztályú felületen (egyköpenyű hyperboloid vagy hyperbolikus paraboloid) fekszik és azon azt az egyenesrajt alkotja, melynek p, q, r is tagjai.

b) p és q metszik egymást, de p és r, q és r nem.

Ekkor

$$[s] = \nu(\lambda[p, r] + \mu[q, r]) = 0$$

egyenlet azt mutatja, hogy a sugársor két síkbeli lineáris sugárból áll. Egyiknek ($\nu = 0$) alapsugarai p és q, a másikéi

$$p_{ik} \cdot [q, r] - q_{ik}[p, r] \text{ és } r \text{ egyenesek.}$$

Tehát két sikbeli lineáris sugársor külön czentrummal és síkkal, de közös sugárral. A közös sugár koordinátái

$$[q, r] \cdot p_{ik} - [p, r] \cdot q_{ik}.$$

c) p és q, q és r metszik egymást, de p és r nem.

Ekkor

$$[s] = \lambda\nu[p, r] = 0$$

egyenlet mutatja, hogy a sugársor megint két síkbeli lineáris sugársorból áll p és q, q és r alapsugarakkal, tehát megint két síkbeli lineáris sugársor külön czentrummal és síkkal, de közös sugárral.

d) p, q, r egyenesek kettőnként metszik egymást és így vagy közös pontjuk, vagy közös síkjok van.

Ekkor $[s] = 0$ egyenlet identitás. Így a sugársor kétszeresen végtelen sok tagból áll, melyeket p, q, r minden közös metszője metszi.

Ha p, q, r egyeneseknek közös pontja van, ezen mennek át az összes sugarak *(sugárpont)*, ha p, q, r egyeneseknek közös sikja van, ebben feküsznek az összes sugarak *(sugársík)*.

Az eddigiekből az következik, hogy ha négy egyenes lineáris sugársorhoz tartozik, de hármanként nem tartoznak síkbeli lineáris sugársorhoz, akkor a következő négy eset lehetséges:

1. A négy egyenes egy másodrendű és másodosztályú felületen fekszik, de kettőnként nem metszik egymást. *(Hyperbolikus sugarak.)*

2. A négy egyenes két szögöt alkot külön szögponttal és síkkal, de olyan helyzetben, hogy egyiknek szögpontja a másiknak síkjában fekszik és viszont. *(Kétszögös sugarak.)*

3. A négy egyenesnek közös pontja van. *(Pontbeli sugarak.)*

4. A négy egyenesnek közös síkja van. *(Síkbeli sugarak.)*

A feltétel arra nézve, hogy négy adott egyenes lineáris sugársorhoz tartozzék, abban áll, hogy a koordinátáikból alkotott matrix összes negyedfokú determinánsainak el kell enyészniök.

2. A lineáris tetraéderekről.

Legyenek két tetraéder szögpontjai $A_1A_2A_3A_4$, $B_1B_2B_3B_4$ és oldalsíkjai $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$, $\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4$. A jelölés legyen úgy választva, hogy pl.

$$\alpha_1 = A_2A_3A_4.$$

Megfelelő elemek legyenek az egyenlő indexüek.

Az első tetraédert válasszuk a koordinátarendszer alapjának és így a szögpontok koordinátái legyenek:

$$\begin{array}{cccc} 1\,0\,0\,0 & \quad b_{11}b_{12}b_{13}b_{14} \\ 0\,1\,0\,0 & \quad b_{21}b_{22}b_{23}b_{24} \\ 0\,0\,1\,0 & \quad b_{31}b_{32}b_{33}b_{34} \\ 0\,0\,0\,1 & \quad b_{41}b_{42}b_{43}b_{44} \end{array}$$

Minthogy a második tetraéder is valóságos, a b_{ik} elemek determinánsa $B \lesseqgtr 0$.

Az oldalsíkok koordinátái

$$\begin{array}{cccc} 1\,0\,0\,0 & \quad B_{11}B_{12}B_{13}B_{14} \\ 0\,1\,0\,0 & \quad B_{21}B_{22}B_{23}B_{24} \\ 0\,0\,1\,0 & \quad B_{31}B_{32}B_{33}B_{34} \\ 0\,0\,0\,1 & \quad B_{41}B_{42}B_{43}B_{44} \end{array}$$

a hol B_{ik} jelenti B determinánsban a b_{ik} elem aldeterminánsát.

A következőkben feltesszük, hogy b_{ik}, B_{ik} elemek közül egyik sem $=0$. Ezzel azt mondjuk ki, hogy egyik tetraéder szögpontjai közül egyik se feküdjék a másik tetraéder valamelyik oldalsíkjában. Ezzel egyszersmind kimondottuk azt is, hogy a megfelelő szögpontokat összekötő egyenesek közül három-három ne feküdjék egy síkban és a megfelelő oldalsíkok metszési egyenesei közül három-három ne messe egymást egy pontban.

A megfelelő szögpontokat összekötő egyenesek koordinátái, ha azokat

$$p_{23}\,p_{31}\,p_{12}\,p_{14}\,p_{24}\,p_{34}$$

sorrend szerint soroljuk fel:

$$\begin{matrix} 0 & -b_{13} & b_{12} & b_{14} & 0 & 0 \\ b_{23} & 0 & -b_{21} & 0 & b_{24} & 0 \\ -b_{32} & b_{31} & 0 & 0 & 0 & b_{34} \\ 0 & 0 & 0 & -b_{41} & -b_{42} & -b_{43} \end{matrix}$$

A négy egyenes lineáris sugársorhoz tartozik, ha ezen matrix összes negyedfokú determinánsai elenyésznek. Ez a következő hét egyenlethez vezet:

$$(1) \qquad b_{12}b_{23}b_{31} = b_{13}b_{32}b_{21}$$

$$(2) \qquad b_{13}b_{34}b_{41} = b_{14}b_{43}b_{31}$$

$$(3) \qquad b_{14}b_{42}b_{21} = b_{12}b_{24}b_{41}$$

$$(4) \qquad b_{23}b_{34}b_{42} = b_{24}b_{43}b_{32}$$

$$(5) \qquad b_{12}b_{23}b_{34}b_{41} = b_{14}b_{43}b_{32}b_{21}$$

$$(6) \qquad b_{13}b_{34}b_{42}b_{21} = b_{12}b_{24}b_{43}b_{31}$$

$$(7) \qquad b_{14}b_{42}b_{23}b_{31} = b_{13}b_{32}b_{24}b_{41}$$

De a négy utolsó egyenlet a három elsőnek következése, mert

(4) következik (1), (2) és (3) —
(5) « (1) és (2) —
(6) « (2) és (3)
(7) « (3) és (1)

szorzásából.

A koordináták homogének és feltétel szerint 0-től különbözők lévén, előre beigazíthatók úgy, hogy

$$b_{21} = b_{12}, \; b_{31} = b_{13}, \; b_{41} = b_{14}$$

legyen. De akkor a három első egyenlet szerint egyszersmind

$$b_{23} = b_{32}, \; b_{34} = b_{43}, \; b_{42} = b_{24},$$

azaz B szimmetrikus determináns.

Épen így a feltétel arra nézve, hogy a megfelelő oldalsíkok metszési egyenesei lineáris sugársorhoz tartozzanak, abban áll, hogy a B_{ik} elemek determinánsát a soroknak czélszerűen választott faktorokkal szorzásával szimmetrikussá lehessen tenni.

De egy determináns és adjungáltja közül, ha egyik szimmetrikus, a másik is az. Ebből az következik, hogy:

Ha a két tetraéder megfelelő szögpontjait összekötő egyenesek lineáris sugársorhoz tartoznak, akkor a megfelelő oldalsíkok metszési egyenesei szintén lineáris sugársor tagjai, és megfordítva.

De ha a

$$b_{ik} = b_{ki}$$

egyenletek állanak, akkor a két tetraéder között polárrecziprocitás áll fenn arra a másodrendű és másodosztályú felületre nézve, melynek egyenlete síkkoordinátákban

$$\Sigma b_{ik} u_i u_k = 0.$$

Áll tehát a következő tantétel is:

Minden tetraéder bármely másodrendű és másodosztályú felületre vonatkozó polárreciprókjával lineáris viszonyban van.*

A lineáris viszony fajainak meghatározására megjegyzendő, hogy a feltétel arra nézve, hogy A_1B_1 és A_2B_2 messék egymást:

$$b_{13}b_{24} = b_{14}b_{23} = 0.$$

A $b_{ik} = b_{ki}$ feltételeket tekintetbe véve, ugyanez a feltétel arra nézve is, hogy A_3B_3 és A_4B_4 messék egymást.

A_1B_1 és A_3B_3, A_2B_2 és A_4B_4 metszik egymást, ha

$$b_{12}b_{34} - b_{14}b_{32} = 0$$

A_1B_1 és A_4B_4, A_2B_2 és A_3B_3 metszik egymást, ha

$$b_{12}b_{43} - b_{13}b_{42} = 0.$$

A három egyenlet közül kettőnek a harmadik következése.

Vegyük tekintetbe ezenkivül azt, hogy az adjungált determinánsok ismert tulajdonsága szerint:

$$b_{13}b_{24} - b_{14}b_{23} = 0 \text{ és } B_{31}B_{42} - B_{32}B_{41} = 0$$

---

* Ez a tantétel CHASLES-tól ered. Lásd SALMON-FIEDLER Analytische Geometrie des Raumes I. kötet 180. lap (második kiadás) és a hozzá csatolt jegyzetet.

egyenletek közül egyik a másiknak következése, azaz ha A_1B_1 és A_2B_2 egyenesek metszik egymást, metszik egymást $\alpha_3\beta_3$ és $\alpha_4\beta_4$ is.

Ezek alapján a lineáris viszonynak következő három faját kell megkülönböztetnünk:

1. Mind a megfelelő szögpontokat összekötő egyenesek, mind a megfelelő oldalsíkok metszési egyenesei hyperbolikus sugarak. *(Hyperbolikus viszony.)*

2. Mind a megfelelő szögpontokat összekötő egyenesek, mind a megfelelő oldalsíkok metszési egyenesei kétszögös sugarak. *(Kétszögös viszony.)*

3. A megfelelő szögpontokat összekötő egyenesek pontbeli, a megfelelő oldalsíkok metszési egyenesei sikbeli sugarak. *(Perspektiv viszony.)*

Ezek közül, tudtunkkal, eddig csak a perspektiv viszony volt figyelembe véve.

3. A többszörösen lineáris tetraéderekről.

Legyenek $A_1A_2A_3A_4$ és $B_1B_2B_3B_4$ tetraéderek lineáris viszonyban az

$$\begin{pmatrix} A_1A_2A_3A_4 \\ B_1B_2B_3B_4 \end{pmatrix}$$

szimbolummal feltüntetett módon, a hol megfelelő elemek egymás alatt állanak.

Az a kérdés merül fel, hogy ezen a viszonyon kivül, melyet *alapviszony*-nak fogunk nevezni, lehet-e még más lineáris viszony is a két tetraéder között?

Azt a viszonyt, melynek szimboluma az alapviszonyéból úgy származtatható, hogy a B elemek indexeire az S-szubstitucziót alkalmazzuk, S-viszonynak fogjuk nevezni. E szerint az alapviszony új jele lesz 1, mint az identikus szubstituczió jele.

Az S-viszony feltételeit megkapjuk, ha a

$$\begin{aligned} b_{12}b_{23}b_{31} &= b_{13}b_{32}b_{21} \\ b_{13}b_{34}b_{41} &= b_{14}b_{43}b_{31} \\ b_{14}b_{42}b_{21} &= b_{12}b_{24}b_{41} \\ b_{23}b_{34}b_{42} &= b_{24}b_{43}b_{32} \end{aligned}$$

egyenletekben, melyek közül háromnak következménye a negyedik, az első indexekre az S-szubstitucziót alkalmazzuk s azután felhasználjuk a $b_{ik} = b_{ki}$ egyenleteket, a melyek az alapviszony létezését mondják ki.

1. Az (12)-viszony feltételei

$$b_{13}b_{24} = b_{14}b_{23}$$
$$b_{11}b_{23}^2 = b_{22}b_{13}^2$$
$$b_{11}b_{24}^2 = b_{22}b_{14}^2$$

A harmadik egyenlet a két elsőnek következése. Az első egyenlet kimondja, hogy A_1B_1 és A_2B_2, A_3B_3 és A_4B_4 metszik egymást, tehát ebben az esetben sem az alapviszony, sem az (12)-viszony nem lehet hyperbolikus.

2. Az (12) (34)-viszony feltételei

$$b_{11}b_{23}b_{24} = b_{22}b_{13}b_{14}$$
$$b_{33}b_{41}b_{42} = b_{44}b_{31}b_{32}$$

3. Az (1234)-viszony feltételei

$$b_{11}b_{22}b_{34} = b_{12}b_{13}b_{24}$$
$$b_{22}b_{33}b_{41} = b_{23}b_{13}b_{24}$$
$$b_{33}b_{44}b_{12} = b_{34}b_{13}b_{24}$$
$$b_{44}b_{11}b_{23} = b_{41}b_{13}b_{24}$$

A négy egyenlet közül háromnak következménye a negyedik.

4. Az (123)-viszony feltételei

$$b_{11}b_{24}b_{34} = b_{14}^2b_{23}$$
$$b_{22}b_{34}b_{14} = b_{24}^2b_{31}$$
$$b_{33}b_{14}b_{24} = b_{34}^2b_{12}$$

Ezekből és a hasonló feltételekből a következő összefüggéseket lehet kiolvasni:

1. Az (12), (23), (31) viszonyok közül kettő a harmadikat maga után vonja.

2. Az (12), (34), (12) (34) viszonyok közül kettő a harmadikat maga után vonja.

3. Az (12)(34), (13)(24), (14)(23) viszonyok közül kettő a harmadikat maga után vonja.

4. Az (123), (132) viszonyok közül egyik a másikat maga után vonja.

5. Az (123), (234), (14)(23) viszonyok közül kettő a harmadikat maga után vonja.

6. Az (1234)-viszony maga után vonja az (1432) és (13)(24) viszonyokat.

A többszörösen lineáris tetraéderek fajait következőképen osztjuk három csoportba:

1. A meglevő viszonyok között van perspektiv is. Alapviszonynak ilyent választunk.

2. A meglevő viszonyok között nincs perspektiv, de van kétszögös. Alapviszonynak ilyent választunk.

3. A meglevő viszonyok mind hyperbolikusok.

I.

Legyen az alapviszony perspektiv. Válasszuk egységpontnak a perspektiv czentrumot és így $B_1B_2B_3B_4$ koordinátái legyenek

$$\begin{matrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \mu & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \nu & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \rho \end{matrix}$$

Hogy a négy pont különböző legyen $\lambda\mu\nu\rho$ közől legfölebb egyik lehet $=1$. A következőkben ezt kikötjük.

1. Az (12)-viszony feltétele:

$$\lambda = \mu$$

2. Az (12)(34)-viszony feltételei:

$$\lambda = \mu, \quad \nu = \rho$$

3. Az (1234)-viszony feltételei:

$$\lambda = \frac{1}{\mu} = \nu = \frac{1}{\rho}$$

4. Az (123)-viszony feltételei:

$$\lambda = \mu = \nu = 1$$

Ez a viszony tehát lehetetlen.

Ezeknek és a hasonló feltételeknek kombinálásával kapjuk meg az összes eseteket. A hasonló eseteket egyikökkel képviseltetve, csak a lényegesen különböző eseteket soroljuk fel.

Meglevő viszonyok:

1. Az 1 perspektiv és az (12) kétszögös viszony, ha $\lambda=\mu$, ν és ρ ezektől és egymásközt különbözők.

2. Az 1 perspektiv és (12), (23), (31) kétszögös viszonyok, ha

$$\lambda=\mu=\nu\gtrless\rho.$$

3. Az 1 perspektiv és az (12), (34), (12)(34) kétszögös viszonyok, ha

$$\lambda=\mu\gtrless\nu=\rho\gtrless\frac{1}{\lambda}.$$

4. Az 1 és (13)(24) perspektiv, az (13) és (24) kétszögös, az (1234) és (1432) hyperbolikus viszonyok, ha

$$\lambda=\frac{1}{\mu}=\nu=\frac{1}{\rho}\gtrless-1.$$

5. Az 1 perspektiv és az (12), (13), (14), (23), (24), (34), (12)(34), (13)(24), (14)(23) kétszögü viszonyok, ha

$$\lambda=\mu=\nu=\rho\gtrless-1.$$

6. Az 1, (12)(34), (13)(24), (14)(23) perspektiv és az (12), (13), (14), (23), (24), (34), (1234), (1432), (1243), (1342), (1324), (1423) kétszögös viszonyok, ha

$$\lambda=\mu=\nu=\rho=-1.$$

Ebben a csoportban tehát a lineáris viszony sokszorossági számai:

$$2,\ 4,\ 6,\ 10,\ 16.$$

Megjegyzem, hogy a többszörösen perspektiv viszonyokat már egy régibb alkalommal felkerestem volt,* de akkor a kétszögös és hyperbolikus viszonyok figyelmen kivül maradtak.

---

* Mathematikai és természettudományi Értesítő. IV. kötet, 6—8. lap.

II.

Legyen az alapviszony kétszögös és pedig úgy, hogy A_1B_1 és A_2B_2, A_3B_3 és A_4B_4 messék egymást.

Válasszuk A_1B_1 és A_2B_2 metszéspontját egységpontnak és így $B_1B_2B_3B_4$ koordinátái legyenek

$$\begin{matrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \mu & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \nu & a \\ 1 & 1 & a & \rho \end{matrix}$$

Hogy a viszony ne legyen perspektiv, kizárjuk az $a = 1$ esetet. Hogy a pontok különbözők legyenek, kizárjuk a

$$\lambda = \mu = 1 \text{ és } \nu = \rho = a$$

eseteket. A következőkben mellőzzük az olyan esetet, mikor perspektiv viszony is fellép, mert az ilyen eseteket már letárgyaltuk. Így mellőzzük a

$$\lambda = \mu = \frac{1}{a} \text{ és } \nu = \rho = 1$$

eseteket, mert az elsőnél az (12), másodiknál a (34) perspektiv viszony lépne fel.

1. Az (12)-viszony feltétele:

$$\lambda = \mu$$

2. A (34)-viszony feltétele:

$$\nu = \rho$$

3. Az (13)-viszony feltételei:

$$\lambda = \nu,\ a = 1,$$

tehát mellőzendő. Épen így mellőzendők (14), (23), (24).

4. Az (12)(34)-viszony feltételei:

$$\lambda = \mu,\ \nu = \rho$$

5. Az (13)(24)-viszony feltételei:

$$\lambda a = \nu,\ \mu a = \rho$$

6. Az (1324)-viszony feltételei:

$$\lambda = \mu,\ \nu = \rho,\ \lambda\nu = a$$

7. Az (1234)-viszony feltételei:

$$\lambda\mu a = 1,\ \lambda\rho = 1,\ \mu\nu = 1$$

8. Az (123)-viszony feltételei:

$$\lambda a = 1,\ \mu a = 1,\ \nu = a^2.$$

De ekkor a fellépő (12)-viszony perspektiv volna, azért ez az eset mellőzendő, valamint az összes hármas cziklusok.

Megint csak a lényegesen különböző eseteket soroljuk fel, a hasonlókat egyikükkel képviseltetve. Oda tesszük a feltételeket arra nézve, hogy perspektiv viszony, vagy a felsorolt viszonyokon kivül más ne lépjen fel. A fennebb felsorolt kikötések mindenikhez oda értendők.

Meglevő viszonyok:

1. Az 1 kétszögös és az (13)(24) hyperbolikus viszonyok, ha

$$\lambda a = \nu,\quad \mu a = \rho,\quad \lambda \gtrless \mu,\ \lambda\mu \gtrless 1,\quad \lambda\mu a \gtrless 1.$$

2. Az 1 és (13)(24) kétszögös viszonyok, ha

$$\lambda a = \nu,\quad \mu a = \rho,\quad \lambda\mu = 1,\quad \lambda \gtrless \mu.$$

3. Az 1 és (13)(24) kétszögös, az (1234) és (1432) hyperbolikus viszonyok, ha

$$\lambda a = \nu,\ \mu a = \rho,\quad \lambda\mu a = 1,\quad 1 \gtrless \lambda \lesseqgtr \mu \gtrless 1.$$

4. Az 1, (1234), (13)(24), (1432) kétszögös viszonyok, ha

$$\lambda = \rho = 1,\quad \mu\nu = \mu a = 1.$$

5. Az 1 és (12) kétszögös viszonyok, ha

$$\lambda = \mu,\quad \nu \gtrless \rho.$$

6. Az 1, (12), (34) és (12) (34) kétszögös viszonyok, ha

$$\lambda = \mu, \quad \nu = \rho, \quad 1 \gtreqless \lambda\nu \gtreqless a, \quad \lambda a \gtreqless \nu.$$

7. Az 1, (12), (34), (12) (34) kétszögös és az (1324), (1423) hyperbolikus viszonyok, ha

$$\lambda = \mu = \frac{a}{\nu} = \frac{a}{\rho} \gtreqless -1.$$

8. Az 1, (12), (34), (12) (34) kétszögös és az (13) (24), (14) (23) hyperbolikus viszonyok, ha

$$\lambda = \mu, \quad \lambda a = \nu = \rho, \quad 1 \gtreqless a\lambda^2 \gtreqless a.$$

9. Az 1, (12), (34), (12) (34), (13) (24), (14) (23), (1324) és (1423) kétszögös viszonyok, ha

$$\lambda = \mu = -1, \quad \nu = \rho = -a.$$

10. Az 1, (12), (34), (12) (34), (13) (24), (14) (23), (1234), (1432), (1243), (1342) kétszögös viszonyok, ha

$$\lambda = \mu = \frac{1}{\nu} = \frac{1}{\rho}, \quad \lambda^2 a = 1.$$

Ebben a csoportban tehát a sokszorossági számok:

2, 3, 6, 8, 10.

III.

Ha a meglevő viszonyok mind hyperbolikusok, akkor a jelek között csere nem fordulhat elő.

Vegyük először azt az esetet, mikor az alapviszony mellett az (13) (24)-viszony is fellép. Válasszuk B_1 pontot egységpontnak. Az (13) (24)-viszony feltételei szerint $B_1 B_2 B_3 B_4$ koordinátái legyenek:

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & c & c & b \\ 1 & c & ac & a \\ 1 & b & a & \lambda a \end{matrix}$$

Hogy mind az alapviszony, mind az (13)(24)-viszony hyperbolikus legyen, feltesszük, hogy a, b, c különbözők és $\lambda a \gtrless 1, \lambda c \gtrless 1$.

A lényegesen különböző eseteket soroljuk fel.

Meglevő viszonyok:

1. Az 1 és (13)(24) hyperbolikus viszonyok, ha a, b, c, λ a következő pontokban felsorolt és az ezekhez hasonló feltételeket nem elégítik ki.

2. Az 1, (1234), (13)(24), (1432) hyperbolikus viszonyok,* ha

$$\lambda = \frac{b}{ac}, \quad 1 \gtrless b \gtrless ac.$$

3. Az 1, (12)(34), (13)(24), (14)(23), hiperbolikus viszonyok, ha

$$\lambda = b, \quad bc \gtrless 1, \quad ca \gtrless 1, \quad ab \gtrless 1.$$

4. Az 1, (13)(24), (124), (142), (234), (243) hyperbolikus viszonyok, ha

$$\lambda = -1, \quad a + c = 0 \quad b = ac \gtrless -1.$$

Még csak az az egy eset van hátra, mikor az alapviszonyon kívül fellépő viszonyok jelei hármas cziklusok. Vegyük példának azt az esetet, mikor a meglevő viszonyok 1, (234), (243).

Ha B_1 pontot egységpontnak választjuk, $B_1B_2B_3B_4$ koordinátái lesznek

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & b & c \\ 1 & b & c & a \\ 1 & c & a & b \end{matrix}$$

A viszonyok hyperbolikusok és más viszony nem lép fel, ha a, b, c különbözők és a

$$\begin{aligned} b + c = 0, &\quad bc = a \\ c + a = 0, &\quad ca = b \\ a + b = 0, &\quad ab = c \end{aligned}$$

egyenletpárok egyike sem érvényes.

---

* Ilyen viszony van a negyedrendű és első fajú térbeli görbéken egy hálózathoz tartozó két tetrász között. (Értesítő, X. kötet, 244—251. lap.) Mert az ott értelmezett perspektiv viszony ugyanaz, mint az itt értelmezett hyperbolikus viszony.

A harmadik csoportban tehát a sokszorossági számok:

$$2, 3, 4, 6.$$

Végül megemlítem, hogy ugyanazt a többszörösen lineáris viszonyt többféleképen lehet szubstituczió-jelekkel jellemezni, mert a meglevő viszonyok akármelyike választható alapviszonynak. De az átmenet egyik jelrendszerről a másikra egyszerű. Ha új alapviszonynak azt vesszük, melynek régi jele S volt, akkor a régi alapviszony új jele lesz S^{-1}, azé a viszonyé pedig, melynek régi jele S_1 volt, lesz S_1S^{-1}, a hol a szubstitucziók szorzásának sorrendje jobbról balra van értve.

MATHEMATIKAI ÉS TERMÉSZETTUDOMÁNYI ÉRTESITŐ.

KÜLÖNNYOMAT A XII. KÖTET 5. FÜZETÉBŐL.

TÖBBSZÖRÖSEN LINEÁRIS TETRAÉDEREK A NEGYEDRENDŰ ÉS ELSŐFAJÚ TÉRBELI GÖRBÉN.*

VÁLYI GYULA l. tagtól.

A negyedrendű és elsőfajú térbeli görbe paraméteres összeállítása czélszerűen választott koordináta-rendszer mellett

$$x:y:z:t = p(u)^2 : p'(u) : p(u) : 1.$$

A görbe pontjait a paraméter megfelelő értékeivel fogjuk jelölni.

Csak azokra a lineáris viszonyokra fogunk tekintettel lenni, a melyeknél a két tetraéder szögpontjai a görbén vannak és a megfelelő szögpontokat összekötő egyenesek ugyanazon húrrendszerhez tartoznak. Hogy az ilyen viszonyt a két tetraéder között esetleg fellépő más lineáris viszonyoktól megkülönböztethessük, *húros viszonynak* fogjuk nevezni.

Ha a két tetraéder szögpontjai $u_1u_2u_3u_4$ és $v_1v_2v_3v_4$ akkor az

$$\begin{pmatrix} u_1u_2u_3u_4 \\ v_1v_2v_3v_4 \end{pmatrix}$$

húros viszony feltételei:

$$u_1 + v_1 \equiv u_2 + v_2 \equiv u_3 + v_3 \equiv u_4 + v_4 \equiv c.$$

Ha $2c$ nem $\equiv 0$, akkor a viszony hyperbolikus, ha $2c \equiv 0$, akkor a viszony perspektiv. A perspektiv czentrum a görbén átmenő négy másodrendű kúp egyikének csúcsa. Ezeket röviden

* Ez a közlemény folytatása egyfelől a *negyedrendű és elsőfajú térbeli görbék* (Ertesítő X. kötet 244—251. lap), másfelől a DESARGUES *tantételének térbeli analogonjáról* (Értesítő XI. kötet 30—44. lap) irott közleményeimnek. Az azokban használt jelöléseket és elnevezéseket ebben is használom.

kúpcsúcsoknak fogjuk nevezni és a megfelelő kúpos húrrendszerek parametereivel $(c, w, w', w+w')$ jelölni. A görbén átmenő másodrendű felületsor többi tagjait röviden *hyperboloidoknak* fogjuk nevezni.

Minthogy az egyik tetraédert a másikba projicziáló húrrendszer paramétere egy pár megfelelő szögponttal már meg van határozva, azért az alapviszony mellett fellépő húros viszonyok szubstituczió-jelei között sem csere, sem hármas cziklus nem jöhet elő és a húros viszonyok sokszorossági száma legfennebb 4 lehet.

I.

Az alapviszony mellett az (12)(34) húros viszony is fellép, ha egyszerre

$$u_1 + v_1 \equiv u_2 + v_2 \equiv u_3 + v_3 \equiv u_4 + v_4 \equiv c_1$$
$$u_1 + v_2 \equiv u_2 + v_1 \equiv u_3 + v_4 \equiv u_4 + v_3 \equiv c_2$$

a hol c_1 és c_2 nem kongruensek.

Ezekből

$$u_2 - u_1 \equiv u_4 - u_3 \equiv c_2 - c_1 \equiv c_1 - c_2,$$

és így

$$2(c_2 - c_1) \equiv 0,$$

tehát $c_2 - c_1 \equiv \omega$, vagy ω', vagy $\omega + \omega'$.

Ha ezek egyikét $\tilde{\omega}$-val jelöljük, akkor az első tetraéder szögpontjai

$$u_1,\ u_1 + \tilde{\omega},\ u_3,\ u_3 + \tilde{\omega}$$

azaz $u_1 u_2$ és $u_3 u_4$ ugyanazon hálózathoz tartozó duászok. Két ilyen duászt *duászpár*-nak fogjuk nevezni.

Egy duászpárt bármely húrrendszerrel a görbére projicziálva az elsővel kétszeresen lineáris duászpárt kapunk, mert

$$u_1 + v_1 \equiv u_1 + \tilde{\omega} + v_2 \equiv u_3 + v_3 \equiv u_3 + \tilde{\omega} + v_4 \equiv c_1$$

kongruencziákból

$$u_1 + v_2 \equiv u_1 + \tilde{\omega} + v_1 \equiv u_3 + v_4 \equiv u_3 + \tilde{\omega} + v_3 \equiv c_1 + \tilde{\omega}$$

következik.

A két viszony együtt hyperbolikus, vagy együtt perspektiv. Perspektiv-czentrumok vagy az 0 és $\tilde{\omega}$, vagy az $\tilde{\omega}'$ és $\tilde{\omega}+\tilde{\omega}'$ kúpcsúcsok, ha $2\tilde{\omega}$ és $2\tilde{\omega}'$ primitiv perioduspárt jelölnek.

A kétszeresen hyperbolikus húros viszonynak különösen érdekes esete az, mikor a két projicziáló húrrendszer konjugált azaz ugyanazon hyperboloidon fekszik. Ennek szerinte

$$2c_1 + \tilde{\omega} \equiv 0.$$

Az ennek megfelelő

$$\frac{\tilde{\omega}}{2}, \quad -\frac{\tilde{\omega}}{2}, \quad \frac{\tilde{\omega}}{2} + \tilde{\omega}', \quad -\frac{\tilde{\omega}}{2} + \tilde{\omega}'$$

értékek közül a két első és a két utolsó konjugált húrrendszernek paraméterei.

Tehát az $\tilde{\omega}$-hálózathoz két hyperboloid tartozik azzal a tulajdonsággal, hogy akármelyikök a hálózathoz tartozó bármely duászpárt konjugált húrrendszereivel ugyanazon duászpárba projicziálja.

Mind a három duász-hálózathoz tartozik két-két ilyen hyperboloid. Összesen tehát 6 van. Konjugált húrrendszereik paraméterei a 12 primitiv negyed-periodus.

II.

Az 1 és (12) (34) húros viszonyok mellett az (13) (24) húros viszony is fellép, ha nemcsak u_1u_2 és u_3u_4, hanem u_1u_3 és u_2u_4 is duászpárok. Ilyen tetraéder szögpontjai

$$u_1, \quad u_1+\omega, \quad u_1+\omega', \quad u_1+\omega+\omega'$$

De akkor u_1u_4 és u_2u_3 is duászpárok, tehát az (14) (23) húros viszony is fellép. A húros viszony négyszeres.

A négy szögpontra nézve az a jellemző, hogy a hozzájok tartozó négy érintő ugyanazon húrrendszerhez ($2u_1$) tartozik. Négy ilyen pontot együtt *négyes*-nek (quadrupel) nevezünk.

A görbe minden pontja tagja egy négyesnek.

Akármely két négyes négyszeresen lineáris viszonyban van az 1, (12) (34), (13) (24), (14) (23) jelekkel jellemzett módon. A projicziáló húrrendszerek paraméterei c, $c+\omega$, $c+\omega'$, $c+\omega+\omega'$, tehát a négy viszony egyszerre hyperbolikus vagy egyszerre perspektiv.*

Az előbbi pontban említett három hyperboloid-pár bármelyike akármely négyest ugyanazon négyesbe projicziálja konjugált húrrendszereivel.

III.

Az 1, (1234), (13) (24), (1432) húros viszonyok egy hálózathoz tartozó két tetrásznál lépnek fel.

Két ilyen tetrász szögpontjai

$$u, \quad u+\varepsilon, \quad u+2\varepsilon, \quad u+3\varepsilon,$$
$$v, \quad v+3\varepsilon, \quad v+2\varepsilon, \quad v+\varepsilon,$$

a hol ε primitiv negyed-periodus.

A projicziáló húrrendszerek paraméterei

$$c_1 \equiv u+v \equiv c, \quad c_2 \equiv c+3\varepsilon, \quad c_3 \equiv c+2\varepsilon, \quad c_4 \equiv c+\varepsilon.$$

Ezekből

$$2c_1 \equiv 2c_3 \equiv c_2+c_4, \quad 2c_2 \equiv 2c_4 \equiv c_1+c_3,$$

tehát az 1 és 3, 2 és 4 viszonyok egyszerre hyperbolikusok, vagy egyszerre perspektivek. De ha két viszony perspektiv, akkor a másik két viszony projicziáló húrrendszerei konjugáltak.

Minden tetrászhoz két vele kétszeresen perspektiv tetrász tartozik. Az ε-hálózatnál perspektiv-czentrumok vagy a 0 és 2ε, vagy a $2\varepsilon'$ és $2\varepsilon+2\varepsilon'$ kúpcsúcsok, ha 4ε, $4\varepsilon'$ primitiv perioduspárt jelentenek.

A tetrászt ugyszólva a két tetrászba projicziálják a 2ε-duászhálózathoz tartozólag az I. pontban kimutatott két hyperboloid konjugált húrrendszerei.

Továbbá

$$c_1+c_2 \equiv c_3+c_4$$
$$c_1+c_4 \equiv c_2+c_3,$$

* A négyesekről eddig említett tantételeket geometriai úton SCHRÖTER bizonyította be. (Grundzüge einer rein geometrischen Theorie der Raumkurve vierter Ordnung erster Species. 1890.)

tehát ha az 1 és 2, vagy az 1 és 4 projicziáló húrrendszerei konjugáltak, a két másik viszony projicziáló húrrendszerei is azok.

A feltétel erre

$$2c + 3\varepsilon \equiv 0 \quad \text{vagy} \quad 2c + \varepsilon \equiv 0.$$

Az ezeknek megfelelő

$$\frac{\varepsilon}{2},\ \frac{3\varepsilon}{2},\ \frac{5\varepsilon}{2},\ \frac{7\varepsilon}{2};\quad \frac{\varepsilon}{2}+2\varepsilon',\ \frac{3\varepsilon}{2}+2\varepsilon',\ \frac{5\varepsilon}{2}+2\varepsilon',\ \frac{7\varepsilon}{2}+2\varepsilon'$$

értékek közül a négy első és a négy utolsó ugyanazon tetrászba projicziáló, kettenként konjugált húrrendszerek paraméterei.

Tehát minden tetrász-hálózathoz két-két pár hyperboloid tartozik azzal a tulajdonsággal, hogy bármelyik pár konjugált húrrendszereivel a hálózathoz tartozó akármely tetrászt ugyanazon tetrászba projiciálja.

A 6 tetrász-hálózathoz együtt 24 ilyen hyperboloid tartozik. Konjugált húrrendszereik parameterei a primitiv nyolczad-periodusok.

MATHEMATIKAI ÉS TERMÉSZETTUDOMÁNYI ÉRTESITŐ.

KÜLÖNNYOMAT A XII. KÖTET 2–3. FÜZETÉBŐL.

A POLÁRRECZIPRÓK TETRAÉDEREKRŐL.

VÁLY GYULA, l. tagtól.

Minden tetraéder bármely másodrendű és másodosztályú felületre vonatkozó polárrecziprókjával lineáris viszonyban van.* Az a kérdés, hogy ez a viszony hyperbólikus, kétszögös vagy perspektiv-e?

Legyen adva a felület és a tetraédernek három szögpontja A, B, C. Tegyük fel, hogy ABC sík a felületet nem érinti.

Válaszszuk a koordináta-rendszer három első alappontjának A, B, C pontot, negyedik alappontnak pedig ABC sík pólusát (D_1), a mely pont egyszersmind a polárrecziprók tetraéder negyedik szögpontja.

Ilyen koordináta-rendszer mellett a felület egyenlete síkkoordináták (u, v, w, s) mellett

$$a_{11}u^2+a_{22}v^2+a_{33}w^2+2a_{23}vw+2a_{31}wu+2a_{12}uv+s^2=0.$$

Ha a tetraéder negyedik szögpontja ξ, η, ζ, 1, akkor a polárrecziprók tetraéder szögpontjai

$$\begin{array}{cccc} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & -\xi \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & -\eta \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{39}, & -\zeta \\ 0, & 0, & 0, & 1. \end{array}$$

A két tetraéder lineáris viszonya hyperbólikus, kétszögös vagy perspektiv a szerint, a mint

$$a_{31}\eta - a_{12}\zeta = 0$$
$$a_{12}\zeta - a_{23}\xi = 0$$
$$a_{23}\xi - a_{31}\eta = 0$$

* *Értesítő* XI. kötet 35. lap.

egyenletek közül egy sem, vagy csak egy, vagy mind a három teljesül.

1. Ha $a_{23} = a_{31} = a_{12} = 0$, azaz A, B, C pontok kettenként konjugáltak, akkor $ABCD$ tetraéder D pont bármely helyzeténél polárrecziprókjával perspektiv viszonyban van.

2. Ha a_{23}, a_{31}, a_{12} közül csak kettő enyészett el, pl. $a_{23} = = a_{31} = 0$, azaz C pont és AB egyenes konjugáltak, akkor $ABCD$ tetraéder pollárrecziprókjával

perspektiv viszonyban van, ha D pont az ABD_1 síkba esik;
kétszögös viszonyban van minden más esetben.

3. Ha a_{23}, a_{31}, a_{12} közül csak egy, vagy egy sem enyészik el, legyenek BC, CA, AB egyenesek konjugált polárjai a', b', c'. Akkor

$$\begin{aligned} a_{31}y - a_{12}z &= 0 \\ a_{12}z - a_{23}x &= 0 \\ a_{23}x - a_{11}y &= 0 \end{aligned}$$

az Aa', Bb', Cc' síkok egyenletei. A három sík egy egyenesben (p) metszi egymást.

$ABCD$ tetraéder lineáris viszonya polárrecziprókjához
perspektiv, ha D pont a p egyenesen van;
kétszögös, ha D pont az Aa', Bb', Cc' síkok egyikében van;
hyperbólikus minden más esetben.

Ugyanez az eredmény akkor is, ha ABC sík a felületet érinti.

Az eddigiek akkor is állanak, ha a felület helyére kúpszelet lép. Ekkor ugyan a tetraéder polárrecziprókja a kúpszelet síkjában fekvő négy pont, de azért most is áll, hogy a megfelelő pontokat összekötő egyenesek lineáris sugársorhoz tartoznak.

Ha kúpszeletül éppen a tér végtelen távolban fekvő képzetes körét veszszük, akkor a tetraéder szögpontjait polárrecziprókja megfelelő pontjaival összekötő egyenesek nem egyebek, mint a tetraéder magasságai. Aa', Bb', Cc' síkok BC, CA, AB egyenesekre merőlegesek. Végül p egyenes az ABC háromszög magasságpontjában a háromszög síkjára merőleges.

Tehát $ABCD$ tetraéder magasságai
egy pontban metszik egymást, ha D pont a p egyenesen van;

kétszögös sugarak, ha D pont az Aa', Bb', Cc' síkok egyikében van;

hyperbolikus sugarak minden más esetben.

Az ABC, ABD, ACD, BCD háromszögek magasságpontjaiban ezek síkjaira merőleges egyenesek (p, q, r, s) mindenik metszi a tetraéder mindenik magasságát. Ebből az következik, hogy a négy egyenes a magasságokéval egyenlő jellegű lineáris sugársorhoz tartozik.

Ha a magasságok két szöget alkotnak P_1 szögponttal σ_1, P_2 szögponttal σ_2 síkban, akkor p, q, r, s egyenesek szintén két szöget alkotuak P_1 szögponttal σ_2, P_2 szögponttal σ_1 síkban.

Ha a magasságok hyperbolikus sugarak, akkor p, q, r, s ugyanazon hyperboloid másik egyenese rajához tartoznak.

Ha a p, q, r, s egyenesekkel párhuzamos magasságok p_1, q_1, r_1, s_1, akkor pp_1, qq_1, rr_1, ss_1, síkok egy pontban, a hyperboloid czentrumában metszik egymást.

Hibaigazítás. *Vályinak* az Értesítő XI. kötete 322—326. lapjain közölt czikkében a következő sajtóhibák javítandók ki:

323. lap 2. sorában $(c, w, w', w + w)$ helyett $(0, \omega, \omega', \omega + \omega')$.

324. lap 6. sorában szerinte helyett feltétele.

325. lap alulról 6. sorában úgyszólva helyett ugyanabba teendő.

A MÁSODRENDŰ FORGÁSI FELÜLETEKRŐL.*

A másodrendű forgási felületek kritériumainak az a levezetése, melyet itt közlök, véleményem szerint egyszerűbb és egyenesebb azoknál, a melyek az ismert elemző geometriai tankönyvekben láthatók.

A levezetés alapját a következő két determináns-tétel alkotja:

1. ha a reális elemekből álló szimmetrikus determináns elenyészik, akkor az átlói aldeterminánsok között nem lehetnek különböző előjelűek;

2. ha a szimmetrikus determináns összes átlói aldeterminánsaival elenyészik, akkor velök együtt az összes aldeterminánsok elenyésznek.

Ez a két tétel egyszerű következése az elenyésző szimmetrikus determinánsok azon ismert tulajdonságának, mely szerint

$$A_{ii}A_{kk}-A_{ik}^2=0,$$

a hol A_{ii}, A_{kk}, A_{ik} az $|a_{ik}|$ szimmetrikus determináns a_{ii}, a_{kk}, a_{ik} elemeinek aldeterminánsai.

I.

Ismeretes, hogy annak eldöntése vajon a derékszögű pontkoordinátás egyenletével adott másodrendű felület forgási felület-e, egyértelmű annak eldöntésével, hogy a felülethez tartozó Laplace-egyenletnek van-e többszörös gyöke?

A Laplace-egyenlet

* Előadva a Math. és Phys. Társulat 1893 november hó 30-án tartott szakülésén.

$$\varDelta(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (a_{ik} = a_{ki})$$

melynek, mint ismeretes, minden gyöke reális.

Ha az aldeterminánsokat szokásos módon $\varDelta_{ik}\,(i, k = 1, 2, 3)$ jelekkel jelöljük, akkor deriváltjai:

$$-\varDelta'(\lambda) = \varDelta_{11} + \varDelta_{22} + \varDelta_{33}$$

$$\frac{1}{2}\varDelta''(\lambda) = (a_{11}-\lambda) + (a_{22}-\lambda) + (a_{33}-\lambda).$$

Ha λ kétszeres gyök, akkor

$$\varDelta(\lambda) = 0, \quad \varDelta_{11} + \varDelta_{22} + \varDelta_{33} = 0$$

egyenletek együtt teljesülnek. Minthogy azonban $\varDelta_{11}$, $\varDelta_{22}$, $\varDelta_{33}$ különböző előjelűek nem lehetnek, egyenként kell elenyészniök. De akkor az elébb emlitett 2. tétel szerint az összes aldeterminánsok elenyésznek.

Ha λ háromszoros gyök, akkor az előbbi feltételekhez járul még

$$\varDelta''(\lambda) = 0.$$

Ez az elenyésző $\varDelta_{11}, \varDelta_{22}, \varDelta_{33}$ determinánsok átlói aldeterminánsai összegének elenyészését kivánja, a mi megint csak úgy lehet, ha ezek egyenkint s velök együtt $\varDelta$ összes elemei elenyésznek. Tehát λ csak akkor lehet háromszoros gyök, ha

$$a_{23} = a_{31} = a_{12} = 0$$
$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = \lambda,$$

azaz ha a felület gömb. Ezt az esetet a következőkben kizárjuk.

Azt már láttuk, hogy ha λ kétszeres gyök, akkor $\varDelta$ összes aldeterminánsai elenyésznek. A tétel azonban meg is fordítható következőképen:

ha van olyan szám λ, mely mellett $\varDelta$ összes aldeterminánsai elenyésznek, akkor λ kétszeres gyök, mert a

$$\varDelta(\lambda) = 0, \quad \varDelta'(\lambda) = 0$$

feltételeket kielégiti.

Az aldeterminánsok között Δ_{23}, Δ_{31}, Δ_{12} λ-ban lineárisok. Ezek elenyészése a következő egyenleteket adja:

$$1)\qquad a_{23}(a_{11}-\lambda)=a_{12}\,a_{13}$$

$$2)\qquad a_{31}(a_{22}-\lambda)=a_{23}\,a_{21}$$

$$3)\qquad a_{12}(a_{33}-\lambda)=a_{31}\,a_{32}.$$

a) Ha a_{23}, a_{31}, a_{12} közűl egyik sem enyészik el, akkor a három egyenletből:

$$\lambda=a_{11}-\frac{a_{12}\,a_{13}}{a_{23}}=a_{22}-\frac{a_{23}\,a_{21}}{a_{31}}=a_{22}-\frac{a_{31}\,a_{33}}{a_{12}}.$$

Továbbá az 1), 2), 3) egyenletek közűl kettő-kettő összeszorzásával meggyőződünk, hogy

$$\Delta_{11}=0,\ \Delta_{22}=0,\ \Delta_{33}=0.$$

Tehát λ kétszeres gyök, ha

$$a_{11}-\frac{a_{12}\,a_{13}}{a_{23}}=a_{22}-\frac{a_{23}\,a_{21}}{a_{31}}=a_{33}-\frac{a_{31}\,a_{32}}{a_{12}}.$$

b) Ha a_{23}, a_{31}, a_{12} közűl egyik elenyészik, akkor, hogy 1), 2), 3) egyenletek teljesüljenek, legalább még egy másiknak is el kell enyésznie. Hogy a három analog esetet egybe foglalhassuk, legyen h, i, k valamely permutácziója az 1, 2, 3 számoknak és tegyük fel, hogy

$$a_{hi}=a_{hk}=0,\quad a_{ik}\gtrless 0.$$

Az összes aldeterminánsok elenyészésének feltételei:

$$\lambda=a_{hh},\ (a_{ii}-a_{hh})\,(a_{kk}-a_{hh})-a_{ik}^2=0.$$

c) Ha $a_{23}=a_{31}=a_{12}=0$, akkor az összes aldeterminánsok elenyészésének feltétele:

$$\lambda=a_{ii}=a_{kk}\gtrless a_{hh}.$$

Az utolsó megszorítást a háromszoros gyök kizárásáért tettük oda.

Ezzel a forgási felületek összes kriteriumát kimerítettük.

II.

Ismeretes, hogy a Laplace-egyenlet λ gyökéhez tartozó főirány iránykoszinusainak $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ arányát

$$(a_{11}-\lambda)\,\alpha_1 + a_{12}\,\alpha_2 + a_{13}\,\alpha_3 = 0$$
$$a_{21}\,\alpha_1 + (a_{22}-\lambda)\,\alpha_2 + a_{23}\,\alpha_3 = 0$$
$$a_{31}\,\alpha_1 + a_{32}\,\alpha_2 + (a_{33}-\lambda)\,\alpha_3 = 0$$

egyenletek határozzák meg.

Legyen most λ kétszeres gyök.

a) Ha a_{23}, a_{31}, a_{12} közül egy sem enyészik el, akkor

$$\lambda = a_{11} - \frac{a_{12}\,a_{13}}{a_{23}} = a_{22} - \frac{a_{23}\,a_{21}}{a_{31}} = a_{33} - \frac{a_{31}\,a_{32}}{a_{12}}.$$

Tehát a fennebbi három egyenlet helyére lesz

$$a_{12}a_{13}\alpha_1 + a_{23}a_{21}\alpha_2 + a_{31}a_{32}\alpha_3 = 0.$$

E szerint az

$$a_{12}a_{13}x_1 + a_{23}a_{21}x_2 + a_{31}a_{32}x_3 = 0$$

síkban képviselt minden irány főirány. Tehát ez a sík a forgási felület parallel-köreinek iránysíkja.

b) Ha

$$a_{hi} = a_{hk} = 0, \quad a_{ik} \gtrless 0,$$

akkor

$$\lambda = a_{hh}, \quad (a_{ii}-a_{hh})\,(a_{kk}-a_{hh}) - a_{ik}^2 = 0.$$

Tehát a parallel-körök iránysíkjának egyenlete:

$$(a_{ii}-a_{hh})\,x_i + a_{ik}x_k = 0$$

vagy

$$a_{ki}x_i + (a_{kk}-a_{hh})\,x_k = 0.$$

c) Ha

$$a_{23} = a_{31} = a_{12} = 0, \quad \lambda = a_{ii} = a_{kk} \gtrless a_{hh}$$

akkor a parallel-körök iránysíkjainak egyenlete:

$$x_h = 0.$$

Vályi Gyula.

II.

Ismeretes, hogy a Laplace-egyenlet λ gyökéhez tartozó főirány iránykoszinusainak $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ arányát

$$\begin{aligned}(a_{11}-\lambda)\,\alpha_1 + a_{12}\,\alpha_2 + a_{13}\,\alpha_3 &= 0\\ a_{21}\,\alpha_1 + (a_{22}-\lambda)\,\alpha_2 + a_{23}\,\alpha_3 &= 0\\ a_{31}\,\alpha_1 + a_{32}\,\alpha_2 + (a_{33}-\lambda)\,\alpha_3 &= 0\end{aligned}$$

egyenletek határozzák meg.

Legyen most λ kétszeres gyök.

a) Ha a_{23}, a_{31}, a_{12} közül egy sem enyészik el, akkor

$$\lambda = a_{11} - \frac{a_{12}\,a_{13}}{a_{23}} = a_{22} - \frac{a_{23}\,a_{21}}{a_{31}} = a_{33} - \frac{a_{31}\,a_{32}}{a_{12}}.$$

Tehát a fennebbi három egyenlet helyére lesz

$$a_{12}a_{13}\alpha_1 + a_{23}a_{21}\alpha_2 + a_{31}a_{32}\alpha_3 = 0.$$

E szerint az

$$a_{12}a_{13}x_1 + a_{23}a_{21}x_2 + a_{31}a_{32}x_3 = 0$$

síkban képviselt minden irány főirány. Tehát ez a sík a forgási felület parallel-köreinek iránysíkja.

b) Ha

$$a_{hi} = a_{hk} = 0, \quad a_{ik} \gtrless 0,$$

akkor

$$\lambda = a_{hh}, \quad (a_{ii}-a_{hh})\,(a_{kk}-a_{hh}) - a_{ik}^2 = 0.$$

Tehát a parallel-körök iránysíkjának egyenlete:

$$(a_{ii}-a_{hh})\,x_i + a_{ik}x_k = 0$$

vagy

$$a_{ki}x_i + (a_{kk}-a_{hh})\,x_k = 0.$$

c) Ha

$$a_{23} = a_{31} = a_{12} = 0, \quad \lambda = a_{ii} = a_{kk} \gtrless a_{hh}$$

akkor a parallel-körök iránysíkjainak egyenlete:

$$x_h = 0.$$

Vályi Gyula.

A TETRAÉDER MAGASSÁGAIRÓL.

Legyenek a tetraéder szögpontjai A_1, A_2, A_3, A_4 és a rajtok átmenő magasságvonalak a_1, a_2, a_3, a_4. Legyenek továbbá az $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_1$, $A_4A_1A_2$, $A_1A_2A_3$ háromszögek magasságpontjaiban ezek síkjaira merőleges egyenesek b_1, b_2, b_3, b_4.

Feltesszük, hogy mind a négy szögpont végesben, de nem egy síkban van. Ezzel azt is kizártuk, hogy két magasság párhuzamos, három magasság egy síkkal párhuzamos legyen.

I.

1. tantétel. a_i *és* b_k *egyenesek metszik egymást.**

Mert mind a két egyenes benne van az A_i ponton átmenő és A_lA_m egyenesre merőleges síkban.

a_i b_k egyenesek közös pontját $(a_i b_k)$-val, közös síkját $[a_i b_k]$-val fogjuk jelölni.

2. tantétel. Ha a_i *egyenest* a_k *és* a_l *egyenesek metszik, akkor egy pontban metszik és ezen a ponton* a_m *egyenes is átmegy, a* b*-egyenesek pedig a magasságokkal összeesnek.*

Minthogy b_m egyenes a_i és a_k egyeneseket metszi, de velök egy síkban nem lehet, (a_ia_k)-ponton kell átmennie. Épen így át kell mennie (a_ia_l)-ponton is. De a_i egyenessel nem eshetik össze, mert iránya más, azért (a_ia_k), (a_ia_l)-pontoknak kell egybe esniök. Legyen ez a pont M.

Ezen a ponton átmennek b_i, b_k, b_l egyenesek is, mert pl. b_i

* Itt is a következőkben i, k, l, m egyik tetszés szerint vett permutáczióját jelentik az 1, 2, 3, 4 számoknak.

metszi a_k, a_l egyeneseket, de velök egy síkban nem lehet. Igy a_i egyenessel össze kell esnie, mert azzal egy pontja és iránya közös. Épen így esnek össze b_k és a_k, b_i és a_i.

Végül a_m egyenes is átmegy M ponton, mert b_i, b_k egyeneseket metszi s velök egy síkban nem lehet. Igy össze kell esnie b_m egyenessel.

3. tantétel. Ha a_i és b_i egyenesek összeesnek, akkor a magasságok egy pontban metszik egymást és összeesnek a b-egyenesekkel.

Minthogy b_i egyenes a_k, a_l egyeneseket metszi és a_i egyenessel összeesik, az előbbi tantétel értelmében a magasságok egy pontban metszik egymást és a b-egyenesekkel összeesnek.

4. tantétel. Ha a_i egyenest a magasságok közül csak a_k metszi, akkor a_l és a_m egyenesek is metszik egymást, még pedig úgy, hogy $(a_l a_m)$-pont $[a_i a_k]$-síkban, $(a_i a_k)$-pont $[a_l a_m]$-síkban van.

Minthogy b_i egyenes a_k egyenest metszi és a_i egyenessel párhuzamos, azért $[a_i a_k]$-síkban kell lennie. Ugyanebben a síkban van b_k egyenes is hasonló okból. De akkor b_i, b_k egyenesek metszik egymást. $(b_i b_k)$-pont nem esik össze $(a_i a_k)$-ponttal, mert különben a magasságok, a feltétel ellenére, egy pontban metszenék egymást.

Minthogy továbbá a_l, a_m egyenesek metszik b_i, b_k egyeneseket s három közülök egy síkban nem lehet, egymást is metszik a $(b_i b_k)$-pontban, a mely pedig az $[a_i a_k]$-síkban van.

Az előbbi gondolatmenetet i és l, k és m felcserelésével végigjárva rájövünk, hogy viszont $(a_i a_k)$-pontnak $[a_l a_m]$-síkban kell lennie.

5. tantétel. Ha a magasságok kettenként nem metszik egymást, akkor egy egyköpenyű hyperboloidon vannak.

Fektessünk át $a_i a_k a_l$ egyeneseken egy másodrendü felületet. Ez szükségképen egyköpenyű hyperboloid lesz, mert a három egyenes nem párhuzamos egy síkkal.

Minthogy a b-egyenesek az a-egyeneseket metszik, azok is rajta lesznek ezen a hyperboloidon valamint a_m egyenes is, a mely viszont a b-egyeneseket metszi.

6. tantétel. Ha a magasságok kettenként nem metszik egymást, akkor az $[a_i b_i]$*-síkok egy pontban metszik egymást.*

$[a_i b_i]$-sík ugyanis átmegy az előbb szerkesztett hyperboloid czentrumán, mert annak két párhuzamos egyenesét tartalmazza.

Az eddig bebizonyított tantételekből az következik, hogy a tetraéder magasságaira nézve három eset lehetséges.

1. A magasságok egy pontban metszik egymást.

Ekkor A_i szögpont b_i egyenesre esik. De elég ezt egyik szögpontról tudni arra nézve, hogy mindenikre álljon.

2. A magasságok két szöget alkotnak külön szögponttal és síkkal, de olyan helyzetben, hogy az egyik szögpontja a másik síkjában van és viszont.

Ekkor A_i szögpont az $A_k b_i$, $A_l b_i$, $A_m b_i$* síkok egyikébe esik.

2. A magasságok egy egyköpenyű hyperboloid egyik egyenesrajához tartoznak.

II.

7. tantétel. Ha a tetraéder magasságai egy pontban metszik egymást, akkor $A_i A_k$ *és* $A_l A_m$ *egyenesek merőlegesek egymásra.*

Mert $A_i A_k$ egyenes merőleges $[a_l a_m]$-síkra, a melyben pedig $A_l A_m$ egyenes benne van.

Ennek egyszerű következése a

8. tantétel. Ha a tetraéder magasságai M *pontban metszik egymást, akkor* $A_i A_k A_l M$ *tetraéder magasságai* A_m *pontban metszik egymást.*

Ha a tetraéder A_1, A_2, A_3 szögpontjainak megtartásával A_4 szögpontot b_4 egyenesen változtatjuk, folytonosan olyan tetraédert kapunk, melynek magasságai egy pontban (M) metszik egymást.

Az $A_1 A_2 A_4$ síktól leírt síksor és az $A_3 A_4$ egyenestől leírt sugársor projektívek, mert a megfelelő tagok egymásra merőlegesek. A két sort b_4 egyenessel átvágva meggyőződünk, hogy az A_4 és M

---

* Ha b_i az A_k ponton menne át, akkor $A_k b_i$ sík alatt az A_k ponton átmenő és $A_l A_m$ egyenesre merőleges sík értendő.

pontoktól leírt pontsorok projektívek. De a két pontsor az előbbi tantétel alapján fel is cserélhető. Tehát áll a következö

9. tantétel. b_4 *egyenesen az* A_4M *pontpárok involucziót alkotnak, melynek czentruma az* $A_1A_2A_3$ *síkban van.*

A tantétel utolsó része abból következik, hogy ha A_4 pont b_4 egyenesen a végtelenbe távozik, $a_1a_2a_3$ magasságok s velök M pont is $A_1A_2A_3$ síkba esik.

Az involuczió hiperbolikus, parabolikus vagy elliptikus a szerint, a mint $A_1A_2A_3$ háromszög hegyes-, derék- vagy tompaszögű, mert

ha $A_1A_2A_3$ hegyesszögű háromszög, A_4M pontok $A_1A_2A_3$ sík ugyanazon oldalára esnek;

ha $A_1A_2A_3$ derékszögű, M pont a derékszögnél levő szögpontba esik, akárhol is vegyük fel A_4 pontot b_4 egyenesen;

ha $A_1A_2A_3$ tompaszögű, A_4M pontok $A_1A_2A_3$ sík különböző oldalára esnek.

Ha K az involuczió egyik kettőspontja, akkor $A_1A_2A_3K$ tetraédernek K-ban találkozó élei egymásra kölcsönösen merőlegesek. Tehát

10. tantétel. Azon pontok száma, a melyekből egy háromszög mindenik oldala derékszög alatt látszik, 2, 1 vagy 0 a szerint, a mint a háromszög hegyes-, derék- vagy tompaszögű.

Vályi Gyula.

DESARGUES TANTÉTELENEK TÉRBELI ANALOGONJÁRÓL.

1. A térbeli vonalkoordinátákról.

Ha az egyenes vonal helyzetét tetraéderes koordináta-rendszerre vonatkozólag meg akarjuk határozni, vagy az egyenesnek az alapsikokkal való metszéspontjait, vagy az egyenest az alappontokból projicziáló síkokat vehetjük segítségül.

Legyenek az alappontok $A_1A_2A_3A_4$ és vegyük az egyenest először két pontja

$$M(x_1x_2x_3x_4) \quad \text{és} \quad N(y_1y_2y_3y_4)$$

által adottnak.

A két pont meghatározta lineáris pontsor változó elemének koordinátái

$$\lambda x_i+\mu y_i \; (i=1, 2, 3, 4);$$

tehát az i-ik alapsík metszéspontjára nézve

$$\lambda : \mu = y_i : -x_i.$$

Ha behozzuk a

$$p_{ik}=x_i y_k - x_k y_i$$

jelölést, a mely szerint

$$p_{ik}+p_{ki}=0, \; p_{ii}=0,$$

az alapsikok metszéspontjainak koordinátái lesznek:

$$\begin{matrix} 0 & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & 0 & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & 0 & p_{34} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & 0 \end{matrix} \qquad 1)$$

Az egyenest az alappontokból projicziáló síkok

$$A_i MN\ (i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

egyenleteiből könnyű ezek koordinátáit kiolvasni. E koordináták lesznek:

$$\begin{matrix} 0 & p_{34} & p_{42} & p_{23} \\ p_{43} & 0 & p_{14} & p_{31} \\ p_{24} & p_{41} & 0 & p_{12} \\ p_{32} & p_{13} & p_{21} & 0 \end{matrix} \qquad 2)$$

Látszik ezekből, hogy az egyenesnek a koordináta-rendszerhez való viszonyát p_{ik} számok arányai határozzák meg.

De ezek nem függetlenek egymástól, mert az 1) pontok akármelyike benne van a 2) síkok akármelyikében. Ebből az következik, hogy

$$[p] \equiv p_{23}p_{14} + p_{31}p_{24} + p_{12}p_{34} = 0.$$

Megfordítva, ha a p_{ik} számokat a

$$p_{ik} + p_{ki} = 0,\ [p] = 0$$

feltételeknek megfelelően választjuk s van közöttük 0-tól különböző ezek a számok egyetlenegy egyenes vonalat fognak meghatározni, mert az 1) pontok közül három-három egy egyenesben lesz, a 2) síkok közül három-három egy egyenesben metszi egymást, minthogy a két mátrix összes harmadfokú determinánsai elenyésznek. A két úton meghatározott egyenes pedig ugyanaz, mert az 1) pontok mindenike benne van a 2) síkok mindenikében.

E szerint a p_{ik} számokat az *az egyenes vonal koordinátáinak* nevezhetjük.*

Igy minden egyenesnek hat koordinátát adunk, melyeket rendesen a

$$p_{23},\ p_{31},\ p_{12},\ p_{14},\ p_{24},\ p_{34}$$

sorrendben szoktunk felsorolni. Ezeket a

$$[p] = 0$$

* A vonalkoordinátákat PLÜCKER vezette be. (Neue Geometrie des Roumes.)

egyenlet köti össze s a mellett csak egymáshoz való arányuknak van geometriai értelme.

Az összes egyenesek igy négyszeresen végtelen sokaságot alkotnak, de analitikai előállításuk olyan, mintha ötszörösen végtelen sokaságból kimetszett quadratikus sokaságot alkotnának.

Azonban ez a legtermészetesebb meghatározási mód, mert a koordináta-rendszernek hat alapegyenese van, t. i. a tetraéder hat éle. Igy ezek épen úgy, mint az alappontok és alaksikok azzal vannak jellemezve, hogy koordinátáik egy híjával elenyésznek. A_iA_k alapegyenes koordinátái közül csak p_{ik} nem $=0$.

Tegyük fel másodszor, hogy az egyenes két síkja

$$M(u_1u_2u_3u_4) \quad \text{és} \quad N(v_1v_2v_3v_4)$$

által van adva.

Ha a

$$\pi_{ik}=u_iv_k-u_kv_i$$

jelöléseket, használjuk az egyenest az alappontokból projicziáló síkok koordinátái

$$\begin{matrix} 0 & \pi_{12} & \pi_{13} & \pi_{14} \\ \pi_{21} & 0 & \pi_{23} & \pi_{24} \\ \pi_{31} & \pi_{32} & 0 & \pi_{34} \\ \pi_{41} & \pi_{42} & \pi_{43} & 0 \end{matrix} \qquad 3)$$

és az alapsíkok metszéspontjainak koordinátái

$$\begin{matrix} 0 & \pi_{34} & \pi_{42} & \pi_{23} \\ \pi_{43} & 0 & \pi_{14} & \pi_{31} \\ \pi_{24} & \pi_{41} & 0 & \pi_{12} \\ \pi_{32} & \pi_{13} & \pi_{21} & 0 \end{matrix} \qquad 4)$$

Minthogy a 3) síkok mindenike átmegy a 4. pontok mindenikén,

$$[\pi]=\pi_{23}\pi_{14}+\pi_{31}\pi_{24}+\pi_{12}\pi_{34}=0.$$

Ha MN és MN egyenesek azonosak, akkor 1. és 4., 2 és 3. matrix megfelelő elemeinek arányosoknak kell lenniök.

Tehát

$$\pi_{23}:\pi_{31}:\pi_{12}:\pi_{14}:\pi_{24}:\pi_{34}=p_{14}:p_{24}:p_{34}:p_{23}:p_{31}:p_{12}$$

Igy koordináta-meghatározásunk a dualitás elvével is egyezik.

Az egyenes vonal geometriájából még csak arra a feltételre lesz szükségünk, a mely mellett két koordinátáival (p_{ik}, q_{ik}) adott egyenes metszi egymást.

Legyen p egyenes két pontja

$$M(x_1 x_2 x_3 x_4) \quad \text{és} \quad N(y_1 y_2 y_3 y_4),$$

q egyenes két pontja

$$R(z_1 z_2 z_3 z_4) \quad \text{és} \quad S(t_1 t_2 t_3 t_4).$$

A két egyenes metszi egymást, ha

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ t_1 & t_2 & t_3 & t_3 \end{vmatrix} = 0.$$

A Laplace-tétel szerint az az egyenlet így is írható:

$$[p, q]=[q, p]=p_{23}q_{14}+p_{31}q_{24}+p_{12}q_{34}+p_{14}q_{23}+p_{24}q_{31}+p_{34}q_{12}.$$

2. A lineáris sugársorokról.

1. Keressük fel a két egyenes (p és q) meghatározta lineáris sugársort. Ekkor

$$s_{ik}=\lambda p_{ik}+\mu q_{ik}$$

csak úgy lehetnek vonalkoordináták, ha

$$[s]=\lambda\mu[p, q]=0.$$

Tehát két egyenes csak úgy származtat lineáris sugársort, ha metszik egymást. A sugársor azon egyenesek összeségéből áll, a melyek p és q közös pontján keresztülmennek és közös síkjában feküsznek, mert p és q minden közös metszője (l) metszi az s egyenest is. Ugyanis

$$[s, l]=\lambda[p, l]+\mu[q, l].$$

A sugársornak ezt a faját *síkbeli lineáris sugársornak* fogjuk nevezni.

A feltétel arra nézve, hogy három adott egyenes síkbeli lineáris sugársorhoz tartozzék, abban áll, hogy a koordinátáikból alkotott matrix összes harmadfokú determinánsainak el kell enyészniök.

2. Keressük fel a három egyenes (p, q és r) meghatározta lineáris sugársort, ha a három egyenes nem tartozik síkbeli lineáris sugársorhoz. Ismét

$$s_{ik}=\lambda p_{ik}+\mu q_{ik}+\nu r_{ik}$$

csak úgy lehetnek vonal-koordináták, ha

$$[s]=\mu\nu[q, r]+\nu\lambda[r, p]+\lambda\mu[p, q]=0.$$

A következő eseteket kell megkülönböztetnünk:

a) p, q, r egyenesek kettőnként nem metszik egymást.

Ekkor a sugársor egyszerűen végtelen sok tagból áll azzal a tulajdonsággal, hogy p, q, r minden közös metszője (l) őket is metszi. Mert

$$[s, l]=\lambda[p, l]+\mu[q, l]+\nu[r, l].$$

Ebből az következik, hogy a sugársor a p, q, r egyenesek meghatározta másodrendű és másodosztályú felületen (egyköpenyű hyperboloid vagy hyperbolikus paroboloid) fekszik és azon azt az egyenesrajt alkotja, melynek p, q, r is tagjai.

b) p és q metszik egymást, de p és r, q és r nem.

Ekkor

$$[s]=\nu(\lambda[p, r]+\mu[q, r])=0$$

egyenlet azt mutatja, hogy a sugársor két síkbeli lineáris sugársorból áll. Egyiknek ($\nu=0$) alapsugarai p és q, a másikéi

$$p_{ik}\cdot[q, r]-q_{ik}[p, r] \text{ és } r \text{ egyenesek.}$$

Tehát két síkbeli lineáris sugársor külön czentrummal és síkkal, de közös sugárral. A közös sugár koordinátái

$$[q, r]\cdot p_{ik}-[p, r]\cdot q_{ik}.$$

c) p és q, q és r metszik egymást, de p és r nem.

Ekkor

$$[s]=\lambda\nu[p, r]=0$$

egyenlet mutatja, hogy a sugársor megint két síkbeli lineáris sugársorból áll p és q, q és r alapsugarakkal, tehát megint két síkbeli lineáris sugársor külön czentrummal és síkkal, de közös sugárral.

d) p, q, r egyenesek kettőnként metszik egymást és így vagy közös pontjuk, vagy közös síkjok van.

Ekkor $[s]=0$ egyenlet identitás. Igy a sugársor kétszeresen végtelen sok tagból áll, melyeket p, q, r minden közös metszője metszi.

Ha p, q, r egyeneseknek közös pontja van, ezen mennek át az összes sugarak *(sugárpont)*, ha p, q, r egyeneseknek közös síkja van, ebben feküsznek az összes sugarak *(sugársík)*.

Az eddigiekből az következik, hogy ha négy egyenes lineáris sugársorhoz tartozik, de hármanként nem tartoznak síkbeli lineáris sugársorhoz, akkor a következő négy eset lehetséges:

1. A négy egyenes egy másodrendű és másodosztályú felületen fekszik, de kettőnként nem metszik egymást. *(Hiperbolikus sugarak.)*

2. A négy egyenes két szögöt alkot külön szögponttal és síkkal, de olyan helyzetben, hogy egyiknek szögpontja a másiknak síkjában fekszik és viszont. *(Kétszögös sugarak.)*

3. A négy egyenesnek közös pontja van. *(Pontbeli sugarak.)*

4. A négy egyenesnek közös síkja van. *(Síkbeli sugarak.)*

A feltétel arra nézve, hogy négy adott egyenes lineáris sugársorhoz tartozzék, abban áll, hogy a koordinátáikból alkotott mátrix összes negyedfokú determinánsainak el kell enyészniök.

Ezek után áttérhetünk Desargues tantétele analogonjának felkeresésére.

3. A lineáris tetraéderekről.

Desargues tantétele a síkban így is fogalmazható:

Ha a két háromszög megfelelő szögpontjait összekötő egyenesek lineáris sugársorhoz tartoznak, akkor a megfelelő oldalok metszéspontjai lineáris pontsor tagjai.

Tekintetbe véve azt, hogy a térben a lineáris sugársor recziprókja megint lineáris sugársor, analog tantételnek a következőt lehet tekinteni:

Ha a két tetraéder megfelelő szögpontjait összekötő egyenesek lineáris sugársorhoz tartoznak, akkor a megfelelő oldalsíkok metszési egyenesei szintén lineáris sugársor tagjai.

Két tetraéder ilyen viszonyát *lineáris*-nak fogjuk nevezni.

A tantétel bebizonyítása következő:

Legyenek két tetraéder szögpontjai $A_1A_2A_3A_4$, $B_1B_2B_3B_4$ és oldalsíkjai $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$, $\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4$. A jelölés legyen úgy választva, hogy pl.

$$\alpha_1 = A_2A_3A_4 .$$

Megfelelő elemek legyenek az egyenlő indexűek.

Az első tetraédert válasszuk a koordinátarendszer alapjának és így a szögpontok koordinátái legyenek:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \quad & b_{11}b_{12}b_{13}b_{14} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & b_{21}b_{22}b_{23}b_{24} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & b_{31}b_{32}b_{33}b_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & b_{41}b_{42}b_{43}b_{44} . \end{array}$$

Minthogy a második tetraéder is valóságos, a b_{ik} elemek determinánsa $B \lesseqgtr 0$.

Az oldalsíkok koordinátái

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \quad & B_{11}B_{12}B_{13}B_{14} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & B_{21}B_{22}B_{23}B_{24} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & B_{31}B_{32}B_{33}B_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & B_{41}B_{42}B_{43}B_{44} , \end{array}$$

a hol B_{ik} jelenti B determinánsban a b_{ik} elem aldeterminánsát.

A következőkben feltesszük, hogy b_{ik}, B_{ik} elemek közül egyik sem $=0$. Ezzel azt mondjuk ki, hogy egyik tetraéder szögpontjai közül egyik se feküdjék a másik tetraéder valamelyik oldalsíkjában. Ezzel egyszersmind kimondottuk azt is, hogy a megfelelő szögpontokat összekötő egyenesek közül három-három ne feküdjék egy síkban és a megfelelő oldalsíkok metszési egyenesei közül három-három ne messe egymást egy pontban.

A megfelelő szögpontokat összekötő egyenesek koordinátái, ha azokat

$$p_{23}, p_{31}, p_{12}, p_{14}, p_{24}, p_{34}$$

sorrend szerint soroljuk fel:

$$\begin{matrix} 0 & -b_{13} & b_{12} & b_{14} & 0 & 0 \\ b_{23} & 0 & -b_{21} & 0 & b_{24} & 0 \\ -b_{32} & b_{31} & 0 & 0 & 0 & b_{34} \\ 0 & 0 & 0 & -b_{41} & -b_{42} & -b_{43} \end{matrix}$$

A négy egyenes lineáris sugársorhoz tartozik, ha ezen mátrix összes negyedfokú determinánsai elenyésznek. Ez a következő hét egyenlethez vezet:

(1) $$b_{12}b_{23}b_{31}=b_{13}b_{32}b_{21}$$
(2) $$b_{13}b_{34}b_{41}=b_{14}b_{43}b_{31}$$
(3) $$b_{14}b_{42}b_{21}=b_{12}b_{24}b_{41}$$
(4) $$b_{23}b_{34}b_{42}=b_{24}b_{43}b_{32}$$
(5) $$b_{12}b_{23}b_{34}b_{31}=b_{14}b_{43}b_{32}b_{21}$$
(6) $$b_{13}b_{34}b_{42}b_{21}=b_{12}b_{24}b_{43}b_{31}$$
(7) $$b_{14}b_{42}b_{23}b_{31}=b_{13}b_{32}b_{24}b_{41}$$

De a négy utolsó egyenlet a három elsőnek következése, mert

(4) következik (1), (2) és (3)—
(5) « (1) és (2)—
(6) « (2) és (3)
(7) « (2) és (1)

szorzásából.

A koordináták homogének és feltétel szerint 0-tól különbözők lévén, előre beigazíthatók úgy, hogy

$$b_{21}=b_{12},\ b_{31}=b_{13},\ b_{41}=b_{14}$$

legyen. De akkor a három első egyenlet szerint egyszersmind

$$b_{23}=b_{32},\ b_{34}=b_{43},\ b_{42}=b_{24},$$

azaz B szimmetrikus determináns.

Épen így a feltétel arra nézve, hogy a megfelelő oldalsikok metszési egyenesei lineáris sugársorhoz tartozzanak, abban áll, hogy a B_{ik} elemek determinánsát a soroknak czélszerűen választott faktorokkal szorzásával szimmetrikussá lehessen tenni.

De egy determináns és adjungáltja közül, ha egyik szimmetrikus, a másik is az. Ebből az következik, hogy:

Ha a két tetraéder megfelelő szögpontjait összekötő egyenesek lineáris sugársorhoz tartoznak, akkor a megfelelő oldalsíkok metszési egyenesei szintén lineáris sugársor tagjai, és megfordítva.

De ha a

$$b_{ik} = b_{ki}$$

egyenletek állanak, akkor a két tetraéder között polárreciproczitás áll fenn arra a másodrendű és másodosztályú felületre nézve, melynek egyenlete síkkoordinátákban

$$\Sigma b_{ik}\, u_i\, u_k = 0.$$

Áll tehát a következő tantétel is:

Minden tetraéder bármely másodrendű és másodosztályú felületre vonatkozó polárrecziprókjával lineáris viszonyban van.*

A lineáris viszony fajainak meghatározására megjegyzendő, hogy a feltétel arra nézve, hogy A_1B_1 és A_2B_2 messék egymást:

$$b_{13}b_{24} - b_{14}b_{23} = 0.$$

A $b_{ik} = b_{ki}$ feltételeket tekintetbe véve, ugyanez a feltétel arra nézve is, hogy A_3B_3 és A_4B_4 messék egymást.

A_1B_1 és A_3B_3, A_2B_2 és A_4B_4 metszik egymást, ha

$$b_{12}b_{34} - b_{14}b_{32} = 0$$

A_1B_1 és A_4B_4, A_2B_2 és A_3B_3 metszik egymást, ha

$$b_{12}b_{43} - b_{13}b_{42} = 0.$$

---

* Ez a tantétel CHASLES-tól ered. Lásd SALMON-FIEDLER Analytische Geometrie des Raumes I. kötet 180. lap (második kiadás) és a hozzá csatolt jegyzetet.

A három egyenlet közül kettőnek a harmadik következése.

Vegyük tekintetbe ezenkívül azt, hogy az adjungált determinánsok ismert tulajdonsága szerint:

$$b_{13}b_{24}-b_{14}b_{23}=0 \text{ és } B_{31}B_{42}-B_{32}B_{41}=0$$

egyenletek közül egyik a másiknak következése, azaz ha A_1B_1 és A_2B_2 egyenesek metszik egymást, metszik egymást $\alpha_3\beta_3$ és $\alpha_4\beta_4$ is.

Ezek alapján a lineáris viszonynak következő három faját kell megkülönböztetnünk:

1. Mind a megfelelő szögpontokat összekötő egyenesek, mind a megfelelő oldalsíkok metszési egyenesei hiperbolikus sugarak. *(Hiperbolikus viszony.)* *

2. Mind a megfelelő szögpontokat összekötő egyenesek, mind a megfelelő oldalsíkok metszési egyenesei kétszögös sugarak. *(Kétszögös viszony.)*

3. A megfelelő szögpontokat összekötő egyenesek pontbeli, a megfelelő oldalsíkok metszési egyenesei síkbeli sugarak. *(Perspektiv viszony.)*

Vályi Gyula.

---

* A tantételnek ez a része Hermes-től ered. (Crelle-Journal, 56. kötet.)

MATHEMATIKAI ÉS TERMÉSZETTUDOMÁNYI ÉRTESITŐ.

KÜLÖNNYOMAT A XII. KÖTET 10. FÜZETÉBŐL.

TÖBBSZÖRÖS INVOLUCZIÓ.

VÁLYI GYULA l. tagtól.

I.

A lineáris pontsorban keressünk fel olyan pontrendszereket

$$A_h B_h, \quad (h=0,\ 1,\ \ldots,\ r-1\ ;\ r>2),$$

a melyek egyszerre az

$$\binom{A_h}{B_h} \quad \text{és} \quad \binom{A_h}{B_{h+1}}$$

szimbólumokkal feltüntetett kétféle involuczióban vannak, a hol az indexek mod. r redukálandók.

Tegyük fel, hogy a két involuczió közös pontpárja (MM') nem kettős pont. Válaszszuk ezt a pontpárt a pontsor alappontjainak, az egységpontot egyelőre határozatlanul hagyva.

Ha A_h koordinátája a_h, B_h koordinátája β_h, akkor a két involucziót kifejezik az

$$\begin{aligned} a_h \cdot \beta_h &= c \\ a_h \cdot \beta_{h+1} &= c_1 \end{aligned} \qquad (h=0,\ 1,\ \ldots,\ r-1) \qquad 1)$$

egyenletek.

Ezekből

$$\frac{a_{h+1}}{a_h} = \frac{\beta_h}{\beta_{h+1}} = \frac{c}{c_1} \qquad (h=0,\ 1,\ \ldots,\ r-1). \qquad 2)$$

Az r egyenlet összeszorzásával kapjuk

$$\left(\frac{c}{c_1}\right)^r = 1,$$

tehát $\frac{c}{c_1}$ valamely r-ik egységgyök. Jelöljük ε-nal.

A 2) egyenletekből következnek továbbá

$$a_h = a_0\varepsilon^h,\ \beta_h = \beta_0\varepsilon^{-h} \quad (h=0, 1, \ldots, r-1) \qquad 3)$$

Hogy tehát az a és β számok között egyenlők ne legyenek, ε-nak primitiv r-ik egységgyöknek kell lennie.

A 3) egyenletekből következnek még az

$$a_h \cdot \beta_{h+k} = a_0\beta_0\varepsilon^{-k} = c\varepsilon^{-k} \quad (h=0, 1, \ldots, r-1)$$

egyenletek, a melyek azt mondják ki, hogy a két pontrendszer között az

$$\begin{pmatrix} A_h \\ B_{h+k} \end{pmatrix} \quad (k=0, 1, \ldots, r-1)$$

involucziók mindenike fenn áll, tehát az involuczió r-szeres.

Az MM' pontpár mindenik involuczióhoz tartozik, a miből az következik, hogy ezen involucziók kettőspontjai maguk is involucziót alkotnak MM' pontokkal, mint kettőspontokkal. Ilyen involucziókról azt mondjuk, hogy *involucziósor*-hoz tartoznak.

Az A_h, B_h pontrendszereket r-*ász*-oknak (triász, tetrász etc.) nevezzük. MM' az r-ász és a hozzátartozó involucziósor *alappontjai.*

Az r-ászokról a következő tantételeket mondhatjuk ki:

1. tantétel. Az r-ász pontjainak az alappontjai meghatározta involucziósorhoz tartozó bármelyik involuczióban involutórikus társai megint r-ászt alkotnak, a mely az előbbivel r-szeresen involutórikus.

2. tantétel. A pontsor akármelyik két pontját alappontoknak választva, azokhoz egyszerűen végtelen sok r-ász tartozik, melyek összeségét r-*ászrendszer*-nek hívjuk. A pontsor minden pontja (az alappontok kivételével) tagja a rendszer egy r-ászának.

3. tantétel. Ugyanazon rendszerhez tartozó két r-ász r-szeresen involutórikus, sőt minden r-ász maga-magával is r-szeresen involutórikus az

$$\begin{pmatrix} A_h \\ A_{-h+k} \end{pmatrix}, \quad (k=0, 1, \ldots, r-1)$$

szimbólumokkal feltüntetett módon.

4. tantétel. Ugyanazon rendszerhez tartozó két r-ász között fennálló r involuczió kettős pontjai ugyanazon alappontokhoz tartozó $(2r)$-ászt alkotnak.

Az utolsó tantétel abból következik, hogy az r involuczió egyenletei

$$\alpha_h \cdot \beta_{h+k} = c\varepsilon_1^{-k} \qquad (k=0, 1, \ldots, r-1);$$

tehát a kettős pontok koordinátái

$$\pm \sqrt{c\varepsilon^{-k}} \qquad (k=0, 1, \ldots, r-1)$$

ezek pedig $\sqrt{c}$-től az összes $(2r)$-ik egységgyököknek, mint faktoroknak hozzájárulásával különböznek, a miből a tantétel következik.

II.

Az r-ász pontjainak koordinátáit képzetes alakban kaptuk ugyan meg, de azért vannak reális r-ászok is.

Az r-ász alappontjait a pontsor alappontjainak, egyik pontját (A_0) egységpontnak választva, az r-ász pontjainak koordinátái:

$$\varepsilon^h, (h=0, 1, \ldots, r-1)$$

a hol ε primitiv r-ik egységgyök.

Ezen számok mindenikének abszolut értéke $=1$. Ilyen számok összessége pedig lineáris transzformáczióval, a mi egyetértelmü új koordinátarendszer bevezetésével, reálissá tehető.

A legegyszerűbb ilyen transzformáczió

$$t' = i \cdot \frac{1-t}{1+t},$$

a hol t a régi, t' az új koordináta, i a képzetes egység.

Ugyanezen transzformáczióval reálisokká lesznek a rendszer mindazon r-ászainak koordinátái, a melyekben $|\beta_0| = 1$.

A rendszer alappontjainak, melyek régi koordinátái $0, \infty$, új koordinátái lesznek $i, -i$ tehát konj. komplex pontpár. Tehát ugyanazon rendszerhez tartozó két reális r-ász r involuczziójának kettős pontjai mindig elliptikus involucziót alkotnak.

A két r-ász között fennálló r involuczió mindenike hyperbólikus, mert

$$\varepsilon^h, \ \beta_0\varepsilon^{-h} \ (h=0, 1, \ldots, r-1)$$

involucziói kettős pontjainak régi koordinátái

$$\pm\sqrt{\beta_0\varepsilon^{-k}}, \ (k=0, 1, \ldots, r-1)$$

ezek abszolut értéke pedig $=1$, ha $|\beta_0|=1$. Igy ugyanaz a lineàris transzformáczió, a mely a két r-ász koordinátáit valósokká teszi, valósokká teszi a kettős pontok koordinátáit is, a mi az involucziók hyperbólikus voltát bizonyítja.

Még megjegyzem, hogy egy r-edfokú binär forma gyökeitől meghatározott r pont akkor alkot r-ászt, ha a forma lineáris transzformáczióval

$$x_1^r+x_2^r$$

alakra hozható. Az r-ász alappontjait a HESSE-féle covariáns szolgáltatja, a mely ilyen formáknál egy quadratikus forma $(r-2)$-ik hatványa.

A legegyszerűbb eseteket külön felemlítve:

három pont, ha egymástól különbözők, mindig triászt alkot;

négy pont csak akkor alkot tetrászt, ha a hozzátartozó biquadratikus forma harmadfokú invariánsa 0, másodfokú invariánsa nem 0, azaz ha a négy pont harmónikus.

III.

Az r-ászok némely tulajdonságainak kimutatására a következő algebrai segédtételre van szükségünk:

Ha az

$$axx'+bx+b'x'+c=0$$

egyenlettel adott kapcsolatban, a hol $ac-bb'$ nem 0, az r-ik egységgyököknek $(r>2)$ r-ik egységgyökök felelnek meg, az csak úgy lehetséges, ha

$$\begin{aligned} &\text{vagy } b=b'=0, \quad a^r=(-c)^r, \\ &\text{vagy } a=c=0, \quad b^r=(-b')^r. \end{aligned}$$

Ugyanis a fennebbi egyenletből

$$x'=-\frac{bx+c}{ax+b'}$$

és így az r-ik egységgyököknek csak akkor felelhetnek meg r-ik egységgyökök, ha

$$(-bx-c)^r-(ax+b')^r \quad \text{és} \quad x^r-1$$

függvények x-től független faktorban különböznek egymástól.

De akkor többek között állanak az egyenletek:

$$(-1)^r a^{r-1} b' = b^{r-1} c$$
$$(-1)^r a^{r-2} b'^2 = b^{r-2} c^2,$$

a mely egyenletekből az következik, hogy $abb'c$ mindenike nem lehet 0-tól különböző, mert különben volna

$$\frac{a}{b'} = \frac{b}{c},$$

a mi feltevésünkkel ellenkezik.

De ha $abb'c$ között van 0-értékű, akkor csak az említett két eset lehetséges.

Ennek a tételnek segítségével megfelelhetünk az r-ászokra vonatkozó következő két kérdésre:

1. Ugyanazon rendszerhez tartozó két r-ász között állhat-e fenn több, mint r involuczió?

Legyenek a két r-ász pontjainak koordinátái:

$$\alpha_h = \varepsilon^h, \quad \beta_h = \beta_0 \varepsilon^{-h} \quad (h=0, 1, \ldots, r-1),$$

a hol ε primitiv r-ik egységgyök.

A két r-ász között fennálló involuczió egyenlete:

$$a\alpha\beta + b(\alpha+\beta) + c = 0,$$

a hol az α-knak bizonyos sorrend szerint felelnek meg a β-k.

A fennebbi segédtétel szerint ez csak úgy lehetséges, ha vagy

$$b=0, \quad (a\beta_0)^r = (-c)^r,$$

a mi a két r-ász között már ismert r involuczióhoz vezet, vagy

$$a=c=0, \quad (-\beta_0)^r = 1,$$

a mi azt mondja, hogy

$$\varepsilon^h, \quad -\varepsilon^h, \quad (h=0, 1, \ldots, r-1)$$

két r-ász között még egy $(r+1)$-ik involuczió is fennáll, melynek kettős pontjai az r-ászok alappontjai. Tehát ez az involuczió nem tartozik a többi r involuczió sorához.

Tehát minden r-ászhoz tartozik egy vele $(r+1)$-szeresen involutorikus r-ász. Páros r esetében a két r-ász azonos, páratlan r esetében különböző s egymást $(2r)$-ászra egészítik ki.

P. ahoz a triászhoz, melynek pontjai

$$1, \quad \varepsilon, \quad \varepsilon^2,$$

négyszeresen involutórikus az a triász, melynek pontjai

$$-1, \quad -\varepsilon, \quad -\varepsilon^2.$$

Tehát a két triászhoz tartozó két kubikus forma közül az egyik a másiknak kubikus covariánsa.

2. Különböző rendszerhez tartozó két r-ász között állhat-e fenn többszörös involuczió?

Legyenek a két r-ász pontjainak koordinátái

$$\alpha_h = \varepsilon^h, \quad \beta_h \, (h=0, \quad 1, \ldots, r-1)$$

s álljon fenn közöttük ez a két involuczió:

$$a\,\alpha\beta + b(\alpha+\beta) + c = 0,$$
$$a'\alpha'\beta + b'(\alpha'+\beta) + c' = 0,$$

a hol sem b, sem b' nem 0, mert különben a két r-ász ugyanazon rendszerhez tartoznék.

Minthogy az α és β számok különbözők, parabolikus involuczió ki van zárva, azért $ac-b^2$, $a'c'-b'^2$ egyike sem 0.

A két egyenletből

$$(ab'-a'b)\,\alpha\alpha' + (ac'-bb')\,\alpha + (bb'-a'c)\,\alpha' + (bc'-b'c) = 0,$$

a hol α és α' bizonyos sorrend szerint az r-ik egységgyököket futják át.

Ez csak úgy lehetséges, ha vagy

$$ab'-a'b=0, \quad bc'-b'c=0$$

a mi a két involuczió azonosságát jelentené, vagy

$$ac' = bb' = a'c$$

és

$$(ab'-a'b)^r=(b'c-bc')^r.$$

Ezekből pedig következik

$$a^r=c^r$$

tehát

$$c=a\varepsilon^k,$$

a hol ε primitiv r-ik egységgyök, k valamely egész szám.

Továbbá

$$a':b':c'=b\varepsilon^{-k}:a:b.$$

Tehát ha a két r-ász között fenn áll az $(a, b, a\varepsilon^k)$ involuczió, fenn áll egyszersmind a $(b\varepsilon^{-k}, a, b)$ involuczió is. Igy kétszeres involuczió lehetséges, de többszörös nem.

Az első r-ász alappontjainak (MM'), melyek koordinátái 0, ∞ az első involuczióban társai

$$-\frac{a\varepsilon^k}{b}, \quad -\frac{b}{a},$$

a második involuczióban pedig

$$-\frac{b}{a}, \quad -\frac{a\varepsilon^k}{b},$$

tehát ugyanaz a két pont, csak felcserélve. Erre a két pontra nézve pedig az a jellemző, hogy koordinátáik szorzata ε^k, a mi azt mutatja, hogy hozzátartoznak azon involucziók egyikéhez, a melyek az r-ászhoz tartoznak.

A talált eredményt a következő tantételhen állíthatjuk össze:

Ha egy r-ász alappontjai MM' és az r-ászhoz tartozó r involuczió egyikéhez tartozó pontpár NN', akkor abban a két involuczióban, melyek elsejét

$$MN, \; M'N',$$

másodikát

$$MN', \; M'N$$

pontpárok határozzák meg, az r-ász pontjainak involutorikus társai ugyanazon pontrendszert alkotják. De a két pontrendszer között ezen a két involuczión kívül más nem létezik.

IV.

Az r-ászok felkeresésénél abból a feltevésből indultunk ki, hogy az

$$\binom{A_h}{B_h}, \quad \binom{A_h}{B_{h+1}}$$

involucziók közös pontpárja nem kettős pont.

Most kimutatjuk, hogy ez a feltevés az egyedül lehetséges.

Legyen ugyanis, ha lehet, a két involuczió közös pontpárja kettős pont (K), úgy hogy az első involuczió kettős pontjai KK_1, a másodikéi KK_2.

Ha K pontot a pontsor első alappontjának, K_1K_2 pontokhoz harmonikus társát második alappontnak és az egységpontot czélszerűen választjuk, a két involuczió egyenletei:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_h \cdot \beta_h \quad - \alpha_h - \beta_h &= 0 \\ \alpha_h \cdot \beta_{h+1} + \alpha_h + \beta_{h+1} &= 0 \end{aligned}\right\} (h=0, 1, \ldots, r-1).$$

Ezekből

$$2\beta_h \cdot \beta_{h+1} + \beta_h - \beta_{h+1} = 0 \ (h=0, 1, \ldots, r-1).$$

Ebből az látszik, hogy ha β számok között egyik $=0$, mindenik $=0$.

Ez azonban nem tekinthető igazi megoldásnak, mert akkor minden pont egybe esnék.

Más megoldás azonban nincs. Mert ha mindenik β 0-tól különböző, az előbbi egyenletekből

$$2 + \beta_{h+1}^{-1} - \beta_h^{-1} = 0 \qquad (h=0, 1, \ldots, r-1)$$

és az r egyenlet összeadásával

$$2r = 0$$

a mi lehetetlen.

Tehát az I. fejezet elején tett az a feltevés, hogy a két involuczió közös pontpárja nem kettős pont, az egyedül lehetséges.

V.

A többszörös involucziónak az r-ászoknál fellépő esetét *monocziklikus*-nak nevezhetjük. *Polycziklikus* többszörös involuczió esete az, mikor

$$A_h^k \quad B_h^k \quad \begin{pmatrix} k=1, 2, \ldots, s \\ h=0, 1, \ldots, r_k-1 \end{pmatrix}$$

pontrendszerek egyszerre az

$$\begin{pmatrix} A_h^k \\ B_h^k \end{pmatrix} \text{ és } \begin{pmatrix} A_h^k \\ B_{h+1}^k \end{pmatrix}$$

szimbólumokkal feltüntetett kétféle involuczióban vannak, a hol $A^k B^k$ indexei mod. r_k redukálandók.

A két involuczió közös pontpárját (MM') megint a pontsor alappontjainak választva, a két involucziót kifejezik

$$\begin{matrix} \alpha_h^{(k)} \cdot \beta_h^{(k)} = c \\ \alpha_h^{(k)} \cdot \beta_{h+1}^{(k)} = c_1 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} k=1, 2, \ldots, s \\ h=0, 1, \ldots, r_k-1 \end{pmatrix}$$

egyenletek.

Ezekből

$$\left(\frac{c}{c_1}\right)^{r_k} = 1 \quad (k=1, 2, \ldots, s)$$

Ha az r_k számok legnagyobb közös osztója r, akkor ezek az egyenletek egybe vonhatók össze:

$$\left(\frac{c}{c_1}\right)^r = 1.$$

Az A_h^k pontok csak akkor lehetnek különbözők, ha $r_1 = r_2 = \ldots = r_s = r$ és $\dfrac{c}{c_1}$-nek primitiv r-ik egységgyök (ε).

Ekkor

$$\alpha_h^{(k)} = \alpha_0^{(k)} \cdot \varepsilon^h, \quad \beta_h^{(k)} = \beta_0^{(k)} \cdot \varepsilon^{-h}$$

és

$$\alpha_0^{(k)} \cdot \beta_0^{(k)} = c \quad (k=1, 2, \ldots, s).$$

Tehát a pontrendszerek ugyanazon rendszerhez tartozó s számú r-ászból állanak, melyek r-szeresen involutorikusok.

Tehát a polyciklikus többszörös involuczió lényegében nem ad újat.

Az eddig talált eredmények könnyen átvihetők a kúpszeleten és a térbeli harmadrendű görbén fekvő pontsorokra.

Ezekről szól a következő két fejezet.

VI.

A kúpszeleten fekvő pontsor paraméteres előállitása czélszerűen választott koordináta-rendszer mellett

$$x:y:z=1:\lambda:\lambda^2.$$

A pontsor egyes pontjait a paraméter megfelelő értékeivel fogjuk jelölni.

A pontsor alappontjai $(0, \infty)$ a koordináta-rendszer első és harmadik alappontját alkotják, a pontsor egységpontja egyszersmind a koordináta-rendszer egységpontja is.

A λ és μ pontokat összekötő egyenes ($\lambda\mu$-egyenes) egyenlete:

$$\lambda\mu . x-(\lambda+\mu)-y+z=0, \tag{1}$$

a λ-ponthoz tartozó érintőé:

$$\lambda^2 . x-2\lambda-y+z=0. \tag{2}$$

Tehát $z=0$, $x=0$ az alappontokhoz tartozó érintők, $y=0$ az alappontokat összekötő egyenes.

Az 1) egyenletből könnyen kiolvasható, hogy λ kettős arányszáma a

$$\mu 0,\quad \mu\infty,\quad \mu\lambda,\quad \mu 1$$

egyeneseknek. Ha tehát a kúpszelet összes pontjait egyik pontjából a kúpszelet síkjában fekvő egyenesre projiciáljuk, λ a származó lineáris pontsor változó elemei koordinátájának is tekinthető.

Az 1) egyenletből következik továbbá, hogy a kúpszeleten

$$a\lambda\mu+b(\lambda+\mu)+c=0$$

egyenlettel adott involuczió pontpárjait összekötő egyenesek az $(a, -b, c)$-pontban metszik egymást. Ezt a pontot az involuczió *origo*-jának nevezhetjük.

Involucziósornak olyan involucziók összességét neveztük, a melyeknek közös pontpárja (λ, μ) van. Ezek origói a $\lambda\mu$-egyenesen vannak.

Ha a λ_h, μ_h $(h=0, 1, \ldots, r-1)$ pontrendszerek

$$\binom{\lambda_h}{\mu_h}$$

involuczióban vannak, azt úgy is mondhatjuk, hogy a pontrendszerek *perspektiv* helyzetben vannak, mert a $\lambda_h \mu_h$ egyenesek az origóban metszik egymást, a $\lambda_h \lambda_k$, $\mu_h \mu_k$ megfelelő egyenesek metszéspontjai az origó polárisára esnek. Tehát az origó perspektiv-czentrum, polárisa perspektiv-tengely.

A többszörös involuczióra vonatkozó tantételek tehát kúpszeletnél úgy mondhatók ki, mint többszörös perspektivitásra vonatkozók.

Csak a két legfontosabb tantételt említem fel.

I. tantétel. A kúpszeleten léteznek olyan rendszerei a beirt r-szögöknek (r-ászok), a melyeknél ugyanazon rendszerhez tartozó két r-ász r-szeresen perspektiv. A perspektiv-czentrumok egy egyenesen vannak, s azon lineáris pontsorbeli r-ászt alkotnak.

A tantétel utolsó része onnan következik, hogy ha az r-ászok alappontjait a pontsor alappontjainak választjuk, a két r-ász szögpontjai

$$\alpha_0 \varepsilon^h, \ \beta_0 \varepsilon^{-h} \ (h=0, 1, \ldots, r-1)$$

a hol ε primitiv r-ik egységgyök. Az r involuczió konstánsai:

$$1, \ 0, \ -\alpha_0 \beta_0 \varepsilon^{-k} \ (k=0, 1, \ldots, r-1)$$

ugyanazok egyszersmind az involucziók origóinak koordinátái, a mi mutatja, hogy ezek lineáris pontsorbeli r-ászt alkotnak.

II. tantétel. Minden r-ászhoz tartozik egy vele $(r+1)$-szeresen perspektiv r-ász. A perspektiv-czentrumok közül r egyenesen van, az $(r+1)$-ik ezen egyenes pólusa.

Különösen érdekes az az eset, mikor a kúpszelet kör és az r-ászrendszer alappontjai a kör végtelen távol fekvő konj. komplex pontjai.

Az egység-súgarú kör egyenlete homogén derékszögű koordinátákban:

$$x^2+y^2=z^2$$

vagy más alakban

$$(x+yi)(x-yi)=z^2.$$

A kivánt koordináta-rendszerre megyünk át, ha

$$x-yi=\xi,\quad z=\eta,\quad x+yi=\zeta.$$

Ha az (xyz)-pont irányszöge ϑ, lesz

$$\xi:\eta:\zeta=e^{-\vartheta i}:1:e^{\vartheta i}=1:e^{\vartheta i}:e^{2\vartheta i},$$

tehát jelen esetben $\lambda=e^{\vartheta i}$. A kör valós pontjaiban $|\lambda|=1$.

A rendszer egy r-ászának szögpontjai:

$$\alpha_0\varepsilon^h=e^{\left(\alpha+\frac{2h\pi}{r}\right)i},\quad (h=0, 1,\ldots r-1),$$

a hol $|\alpha_0|=1$ és így α valós.

Az r-ász pontjainak irányszögei:

$$\alpha+\frac{2h\pi}{r},\quad (h=0, 1,\ldots, r-1),$$

tehát az r-ász körbe irt szabályos r-szög.

E szerint a körbe irt szabályos r-szögök rendszerint a kör egy pontjából a kör síkjában fekvő egyenesre projiciálva, pontsorbeli r-ászrendszert kapunk.

Megfordítva, lineáris pontsorbeli r-ászrendszert úgy projiciálva a projiciáló centrumon átmenő körre, hogy a rendszer alappontjaihoz, mint kettős pontokhoz tartozó involuczió circuláris involuczióba projiciáltassék (a mi mindig lehetséges, mert ez az involuczió elliptikus), az r-ászrendszer a körbe irt szabályos r-szögök rendszerébe megy át.

Tehát az r-ászok geometriai szerkesztése r ugyanazon értékei mellett lehetséges, mint a szabályos r-szögöké.

VII.

A térbeli harmadrendű görbén fekvő pontsor paraméteres előállítása czélszerűen választott koordinátarendszer mellett

$$x:y:z:t=1:\lambda:\lambda^2:\lambda^3.$$

A $\lambda\mu\nu$-sík egyenlete:

$$\lambda\mu\nu\,.\,x-(\mu\nu+\nu\lambda+\lambda\mu):y+(\lambda+\mu+\nu)\,.\,z-t=0. \qquad 1)$$

A $\lambda\mu$-húr egyenletei:

$$\begin{aligned} \lambda\mu\,.\,x-(\lambda+\mu)\,.\,y+z&=0,\\ \lambda\mu\,.\,y-(\lambda+\mu)\,.\,z+t&=0. \end{aligned} \qquad 2)$$

Az 1) egyenletből következik, hogy λ kettős arányszáma a

$$\mu\nu 0,\quad \mu\nu\infty,\quad \mu\nu\lambda,\quad \mu\nu 1$$

síkoknak.

A 2) egyenletekből következik, hogy azon húrok geometriai helye, a melyek az

$$a\lambda\mu+b(\lambda+\mu)+c=0$$

involuczió pontpárjait kötik össze, az a másodrendű felület, melynek egyenlete:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & t \\ a & -b & c \end{vmatrix}=0.$$

A kétszeresen végtelen sok involucziónak megfelel a görbén átmenő kétszeresen végtelen sok másodrendű felület. A parabolikus involuczióknak ($ac-b^2=0$) megfelelnek a másodrendű kúpok, a melyek a harmadrendű görbét ennek pontjaiból projiciálják.

Annak az involucziósornak, melynek közös pontpárja λ, μ, megfelel az a másodrendű felületsor, melynek alapgörbéjét a harmadrendű görbe a $\lambda\mu$-húrral együtt alkotja.

Ha a $\lambda_h\mu_h$ ($h=0, 1, \ldots, r-1$) pontrendszerek $\binom{\lambda_h}{\mu}$ involuczióban vannak, egy alkalommal már használt kifejezéssel élve azt is mondhatjuk, hogy a két pontrendszer *hyperbolikus* viszonyban van, mert a megfelelő pontokat összekötő egyenesek egyköpenyű hyperboloidon vagy hyperbolikus paraboloidon vannak.

E szerint a többszörös involuczióra vonatkozó tantételek úgy mondhatók ki, mint többszörös hyperbolikus viszonyra vonatkozók.

A főtétel így hangzik:

A térbeli harmadrendű görbén olyan rendszerei léteznek az

r-ászoknak, hogy ugyanazon rendszerhez tartozó két r-ász r-szeresen hyperbolikus. A projiciáló r hyperboloid másodrendű felületsorhoz tartozik.

Egy érdekes speczialis esetet akarok itt felemlíteni.

Ha ugyanazon rendszerhez tartozó két triászhoz ($A_2A_3A_4$, $B_2B_3B_4$) hozzá vesszük a rendszer alappontjait (A_1, B_1), olyan két tetraédert kapunk, a melyek az

$$\begin{pmatrix} A_1A_2A_3A_4 \\ B_1B_2B_3B_4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A_1A_2A_3A_4 \\ B_1B_3B_4B_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A_1A_2A_3A_4 \\ B_1B_4B_2B_3 \end{pmatrix}$$

módon hyperbolikusok: A_1B_1 konj. komplex pontok helyett az őket összekötő valós egyenes két tetszés szerint választott valós pontját véve, két valós tetraédert kapunk abban a háromszorosan hyperbolikus viszonyban, a melyet a többszörösen lineáris tetraéderek fajainak felkeresésénél mint utolsó esetet soroltam volt fel.*

A többszörösen hyperbolikus tetraédereknek itt fellépő más esetei a negyedrendű és első fajú térbeli görbénél is előfordúlnak,** de ez az egy nem.

* Értesítő XI. kötet, 43. lap.

** Értesítő XI. kötet, 322—326. lap.

A $\lambda\mu\nu$-sík egyenlete:

$$\lambda\mu\nu \, . \, x - (\mu\nu + \nu\lambda + \lambda\mu) : y + (\lambda + \mu + \nu) \, . \, z - t = 0. \tag{1}$$

A $\lambda\mu$-húr egyenletei:

$$\begin{aligned} \lambda\mu \, . \, x - (\lambda+\mu) \, . \, y + z &= 0, \\ \lambda\mu \, . \, y - (\lambda+\mu) \, . \, z + t &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Az 1) egyenletből következik, hogy λ kettős arányszáma a

$$\mu\nu 0, \quad \mu\nu\infty, \quad \mu\nu\lambda, \quad \mu\nu 1$$

síkoknak.

A 2) egyenletekből következik, hogy azon húrok geometriai helye, a melyek az

$$a\lambda\mu + b(\lambda+\mu) + c = 0$$

involuczió pontpárjait kötik össze, az a másodrendű felület, melynek egyenlete:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & t \\ a & -b & c \end{vmatrix} = 0.$$

A kétszeresen végtelen sok involucziónak megfelel a görbén átmenő kétszeresen végtelen sok másodrendű felület. A parabolikus involuczióknak ($ac - b^2 = 0$) megfelelnek a másodrendű kúpok, a melyek a harmadrendű görbét ennek pontjaiból projiciálják.

Annak az involucziósornak, melynek közös pontpárja λ, μ, megfelel az a másodrendű felületsor, melynek alapgörbéjét a harmadrendű görbe a $\lambda\mu$-húrral együtt alkotja.

Ha a $\lambda_h\mu_h$ ($h = 0, 1, \ldots, r-1$) pontrendszerek $\binom{\lambda_h}{\mu}$ involuczióban vannak, egy alkalommal már használt kifejezéssel élve azt is mondhatjuk, hogy a két pontrendszer *hyperbolikus* viszonyban van, mert a megfelelő pontokat összekötő egyenesek egyköpenyű hyperboloidon vagy hyperbolikus paraboloidon vannak.

E szerint a többszörös involuczióra vonatkozó tantételek úgy mondhatók ki, mint többszörös hyperbolikus viszonyra vonatkozók.

A főtétel így hangzik:

A térbeli harmadrendű görbén olyan rendszerei léteznek az

r-ászoknak, hogy ugyanazon rendszerhez tartozó két r-ász r-szeresen hyperbolikus. A projiciáló r hyperboloid másodrendű felületsorhoz tartozik.

Egy érdekes speczialis esetet akarok itt felemlíteni.

Ha ugyanazon rendszerhez tartozó két triászhoz ($A_2A_3A_4$, $B_2B_3B_4$) hozzá vesszük a rendszer alappontjait (A_1, B_1), olyan két tetraédert kapunk, a melyek az

$$\begin{pmatrix}A_1A_2A_3A_4\\B_1B_2B_3B_4\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}A_1A_2A_3A_4\\B_1B_3B_4B_2\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}A_1A_2A_3A_4\\B_1B_4B_2B_3\end{pmatrix}$$

módon hyperbolikusok: A_1B_1 konj. komplex pontok helyett az őket összekötő valós egyenes két tetszés szerint választott valós pontját véve, két valós tetraédert kapunk abban a háromszorosan hyperbolikus viszonyban, a melyet a többszörösen lineáris tetraéderek fajainak felkeresésénél mint utolsó esetet soroltam volt fel.*

A többszörösen hyperbolikus tetraédereknek itt fellépő más esetei a negyedrendű és első fajú térbeli görbénél is előfordúlnak,** de ez az egy nem.

---

* Értesítő XI. kötet, 43. lap.

** Értesítő XI. kötet, 322—326. lap.

TÖBBSZÖRÖS INVOLUTIO.

VÁLYI GYULA l. tagtól.

Második közlemény.*

Az első közlemény az egy dimensiós geometria többszörös involutioival foglalkozott. Ebben a közleményben a sík véges számú pontból álló pontrendszereinek többszörös involutioit keressük fel.

I.

A síkban *involutio* alatt két collinearis pontrendszernek azt az esetét értjük, mikor a sík bármely pontjának, számíttassék az akár az egyik, akár a másik pontrendszerhez, ugyanazon pont a collinearis társa.

Ha $X(x_1x_2x_3)$ és $Y(y_1\,y_2\,y_3)$ egymásnak ilyen módon kétszeresen megfelelő pontok, akkor egyszerre állanak a következő egyenletek:

1.
$$\begin{aligned} \varrho y_i &= a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+a_{i3}x_3 \\ \sigma x_i &= a_{i1}y_1+a_{i2}y_2+a_{i3}y_3 \end{aligned} \qquad (i=1,\ 2,\ 3)$$

a hol az involutio determinansa

$$A = \underset{i,\ k=1,\ 2,\ 3}{|\,a_{ik}\,|} \text{ nem} = 0.$$

Ezekből az egyenletekből A aldeterminansaira (A_{ik}) nézve az következik, hogy

2.
$$A_{ik}=\lambda a_{ki} \qquad (i,\ k=1,\ 2,\ 3)$$

---

* Az első közlemény az Értesítő XII. kötetének 394—407 lapjain.

a hol

$$\lambda = \frac{A}{\varrho\sigma},$$

ezekből pedig az adjungált determinánsra vonatkozó tantétel szerint

3. $$A = \lambda^3$$

A 2. egyenletek

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}+\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+\lambda \end{vmatrix}$$

determináns aldeterminánsaira (Δ_{ik}) nézve azt mondják ki, hogy

4. $$\begin{aligned} \Delta_{ik} &= 0 & &(ha\ i \gtrless k) \\ \Delta_{ii} &= \lambda(\lambda + a_{11} + a_{22} + a_{33}) & &(i=1,\ 2,\ 3) \end{aligned}$$

Az elemek és aldeterminánsok között fennálló egyenletek szerint ezekből következnek:

5. $$\begin{aligned} \Delta_{ii} \cdot a_{ik} &= 0 & &(ha\ i \gtrless k) \\ \Delta_{ii}(a_{ii} + \lambda) &= \Delta & &(i=1,\ 2,\ 3) \end{aligned}$$

Megjegyzendő, hogy a 2. 3. egyenletek alapján Δ így is kifejezhető:

6. $$\Delta = 2\lambda^2(\lambda + a_{11} + a_{22} + a_{33}).$$

A 4. 5. 6. egyenletekből az involutionak következő két faját lehet felismerni:

a) ha

$$\lambda + a_{11} + a_{22} + a_{33} \text{ nem} = 0,$$

akkor az 5. 6 egyenletekből látható, hogy

$$\begin{aligned} a_{ik} &= 0 & &(i \gtrless k) \\ a_{ii} &= \lambda & &(i=1,\ 2,\ 3) \end{aligned}$$

tehát az involutio egyenletei

$$\varrho y_i = \lambda x_i \qquad (i=1,\ 2,\ 3)$$

azaz a sík minden pontja maga-magának involutiós társa.

Az involutio többszörösségének megszámlálásánál az involutionak ezt a faját nem számítjuk.

b) Ha

7. $$\lambda+a_{11}+a_{22}+a_{33}=0,$$

akkor Δ összes aldeterminánsaival együtt elenyészik, és így van hat olyan szám, $c_i\, d_i\,(i=1, 2, 3)$, a melyekkel Δ elemei így fejezhetők ki:

$$a_{ik} \quad = c_i d_k \qquad (ha\ i \gtrless k)$$
$$a_{ii}+\lambda = c_i d_i \qquad (i=1, 2, 3)$$

és 7. egyenlet szerint

8. $$2\lambda = c_1 d_1 + c_2 d_2 + c_3 d_3.$$

Az involutio egyenletei ebben az esetben

9. $$\varrho y_i = -\lambda x_i + c_i (d_1 x_1 + d_2 x_2 + d_3 x_3) \qquad (i=1, 2, 3)$$

és ezekből az egyenletekből 8. felhasználásával

10. $$\varrho (d_1 y_1 + d_2 y_2 + d_3 y_3) = \lambda (d_1 x_1 + d_2 x_2 + d_3 x_3)$$

A 9. 10. egyenletekből látszik, hogy az a pont, a melynek koordinátái

$$\varrho y_i + \lambda x_i \qquad (i=1, 2, 3)$$

összeesik a $(c_1 c_2 c_3)$-ponttal, az a pont pedig, a melynek koordinátái

$$\varrho y_i - \lambda x_i \qquad (i=1, 2, 3)$$

rajta van a $(d_1 d_2 d_3)$-egyenesen.

Tehát az involutiós pontpárokat a $(c_1 c_2 c_3)$-pont *(involutio-centrum)* és a $(d_1 d_2 d_3)$-egyenes *(involutio-tengely)* harmonikusan választják el. Ebből az következik, hogy a centrum és a tengely minden egyes pontja maga-magának involutiós társa *(kettős pont)*. E szerint az involutionak ez a faja a perspektiv-collinearis viszonyhoz tartozik.

Ezt az involutiot teljesen meghatározza centruma és tengelye, vagy két involutiós pontpárja, ha egyikük sem kettős pont.

Az involutio egyenletei legegyszerűbbek, ha a centrumot a coordinata-rendszer egyik alappontjának, a tengelyt szemben fekvő alapegyenesnek választjuk.

Ha a centrum (0, 0, 1)-pont, a tengely (0 0 1)-egyenes, akkor a 8. egyenlet szerint

$$2\lambda=1$$

és az involutio egyenletei

$$\begin{aligned} 2\varrho y_1&=-x_1\\ 2\varrho y_2&=-x_2\\ 2\varrho y_3&=x_3 \end{aligned}$$

Hasonlóképen egyszerűek az involutio egyenletei akkor is, ha két alappont (pl. az első és második) involutiós pontpár, a harmadik alappont pedig a tengelyen fekszik.

Ha a centrum koordinátái $c_1\ c_2\ 0$, akkor feltevéseink szerint a tengely koordinátái $c_2\ c_1\ 0$. A 8. egyenlet szerint

$$\lambda=c_1c_2$$

és az involutio egyenletei:

$$11.\qquad \begin{aligned} \varrho y_1&=\ c_1^2\ x_2\\ \varrho y_2&=\ c_2^2\ x_1\\ \varrho y_3&=-c_1c_2x_3 \end{aligned}$$

A többszörös involutio tárgyalásához épen ezekre az egyenletekre van szükségünk.

II.

Keressünk fel a síkban olyan pontrendszereket

$$A_hB_h{}^{(h=0,\ 1,\ldots,\ r-1;\ r>2)}$$

a melyek egyszerre az

$$\begin{pmatrix}A_h\\B_h\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}A_h\\B_{h+1}\end{pmatrix}$$

symbolumokkal feltüntetett kétféle involutioban vannak, a hol az indexek mod. r redukálandók.

Tegyük fel, hogy a két involutio centrumai (C, C') és tengelyei (t, t') különbözők és egyik centrum sem fekszik a másik involutio tengelyén. Tegyük fel továbbá, hogy CC' egyenes nem megy át tt' ponton.

Ilyen feltevések mellett a CC' egyenesen létező két pontinvolutio közös pontpárja nem kettős pont. Válaszszuk ezt a két pontot a koordináta-rendszer első és második alappontjának, tt' pontot harmadik alappontnak. Ilyen koordináta-rendszer mellett mind a két involutio egyenletei a 11. egyenletek szerint alakúlnak.

$$
\begin{array}{llll}
\text{Legyenek } A_h & \text{koordinátái} & a_{h_1} & a_{h_2} & a_{h_3} \\
B_h & \text{«} \quad \text{«} & b_{h_1} & b_{h_2} & b_{h_3} \\
C & \text{«} \quad \text{«} & c_1 & c_2 & 0 \\
C' & \text{«} \quad \text{«} & c'_1 & c'_2 & 0
\end{array}
$$

Akkor a két involutiot kifejezik

$$
\begin{array}{ll}
\varrho_h b_{h_1} = c_1^2 a_{h_2}, & \varrho'_{h+1} b_{h+1,1} = c_1'^2 a^{h_2} \\
\varrho_h b_{h_2} = c_2^2 a_{h_1}, & \varrho'_{h+1} b_{h+1,2} = c_2'^2 a_{h_1} \\
\varrho_h b_{h_3} = -c_1 c_2 a_{h_3}, & \varrho'_{h+1} b_{h+1,3} = -c'_1 c'_2 a_{h_3}
\end{array}
\tag{12.}
$$

$$(h=0, 1, \ldots, r-1)$$

Három esetet kell megkülönböztetnünk.

1. Ha az a_{h_3} b_{h_3} ($h=0, 1, \ldots, r-1$) számok egyike 0, akkor mindegyikök 0, a mint a 12. egyenletekből könnyen látható.

Ekkor az $A_h B_h$ ($h=0, 1, \ldots, r-1$) pontok a CC' linearis pontsorhoz tartoznak és a feltett két involutio szerint ugyanazon rendszerhez tartozó két r-ászt alkotunk.*

2. Tegyük fel, hogy az a_{h_3} b_{h_3} ($h = 0, 1, \ldots, r-1$) számok egyike sem 0.

Ha az a_{h_1} ($h=0, 1, \ldots, r-1$) számok egyike 0, akkor a 12. egyenletek szerint a b_{h_2} a_{h_1} ($h=0, 1, \ldots, r-1$) számok mindenike 0,

Nem homogén koordinátákra térve át, legyenek

$$
\begin{array}{lllll}
A_h & \text{coordinatái} & 0 & a_h & 1 \\
B_h & \text{«} \quad \text{«} & 1 & 0 & \beta_h \\
C & \text{«} \quad \text{«} & \gamma & 1 & 0 \\
C' & \text{«} \quad \text{«} & \gamma' & 1 & 0
\end{array}
$$

* Első közlemény I.

A 12. egyenleteknek mind a két oszlopában az első egyenletet a harmadikkal osztva:

$$\begin{aligned} a_h\,\beta_h\ \ \gamma + 1 &= 0 \\ a_h\,\beta_{h+1}\gamma' + 1 &= 0 \end{aligned} \qquad (h=0,\,1,\,\ldots,\,r-1)$$

Ezekből az egyenletekből épen úgy, mint az első közlemény I. fejezetében, az következik, hogy az $A_h B_h$ pontrendszerek között az

$$\begin{pmatrix} A_h \\ B_{h+k} \end{pmatrix} \qquad (k=0,\,1,\,\ldots,\,r-1)$$

involutiok mindenike fennáll. Legyenek a centrumok

$$C_k\,(k=0,\,1,\,\ldots,\,r-1).$$

A formulák legsymmetrikusabbak, ha a koordináta-rendszer egység-pontját úgy választjuk, hogy $\alpha_0=\beta_0=-1$ legyen. Ha még a B_h pontok megszámozásának sorrendjét B_0-tól indulva ellenkezőre változtatjuk, lesznek

A_h	koordinátái	0	$-\varepsilon^h$	1
B_i	« «	1	0	$-\varepsilon^i$
C_k	« «	$-\varepsilon^k$	1	0

a hol ε primitiv r-ik egységgyök.

$A_h B_i C_k$ egy egyenesben vannak, ha

$$h+i+k \equiv 0\ (\mathrm{mod.}\ r)$$

Ebből látható, hogy a három pontrendszer három r-ászt alkot, a melyek közül akármelyik kettő r-szeresen involutiós a harmadik r-ász pontjaival, mint centrumokkal.

Az r-ászok alappontjai az egyeneseiktől alkotott háromszög szögpontjaiba esnek. Épen azért a három r-ász közűl legfeljebb egy lehet reális, mert reális r-ásznak alappontjai conjugált complexek.*

Három r-ász ilyen kapcsolatának legegyszerűbb esete ($r=3$) a síkbeli harmadrendű görbéknél fordul elő. A kilencz inflexio-pont ilyen rendszert alkot.

* Első közlemény II.

3. Tegyük fel, hogy A_h B_h pontok koordinátái közül egy sem 0.

A 12. egyenletekből következik, hogy

$$\frac{a_{h_1}a_{h_2}}{a^2_{h_3}}=\frac{b_{h_1}b_{h_2}}{b^2_{h_3}}=\frac{b_{h+1,1}b_{h+1,2}}{b^2_{h+1,3}}$$

$$(h=0,\ 1,\ldots,r-1).$$

Tehát ezen törtek értéke h-tól független. Jelöljük c-vel. E szerint az A_hB_h pontok mindegyike rajta van azon a kúpszeleten, melynek egyenlete

$$x_1x_2-cx_3^2=0.$$

A feltett két involutioból pedig az következik, hogy a kúpszeleten ugyanazon rendszerhez tartozó két r-ászt alkotnak.*

III.

Az $\begin{pmatrix}A_h\\B_h\end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix}A_h\\B_{h+1}\end{pmatrix}$ involutiokkal összekötött pontrendszereknél az elébb tárgyalt eseten kívül még a következő esetek jöhetnének elő:

1. a két involutio centruma közös, tengelye különböző ;
2. a két involutio tengelye közös, centruma különböző ;
3. a két involutio centruma és tengelye különböző, de a centrumokat összekötő egyenes átmegy a tengelyek metszéspontján ;
4. az egyik involutio centruma a másik involutio tengelyén fekszik ;
5. mind a két involutio centruma a másik involutio tengelyén fekszik.

Akármelyikét ezen eseteknek feltéve, legyen P a két tengely közös pontja. (A 2. esetben P bármely pontja lehet a közös tengelynek, de mégis válaszszuk úgy, hogy ne legyen a centrumokkal egy egyenesben).

P pont mind a két involutioban maga-magának involutiós

* Első közlemény VI.

társa. Azért a két feltett involutio azt kivánná, hogy az $A_h B_h$ $(h=0, 1, \ldots, r-1)$ pontok mindegyike vele összeessék, mihelyt csak egy is közülök P-be esnék.

Tegyük fel azért, hogy egyikük sem esik össze P-vel.

Projiciáljuk a két pontrendszert P-ből. Olyan sugarakat kapunk $(a_h b_h)$, a melyek között egyszerre állanak az

$$\begin{pmatrix} a_h \\ b_h \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_h \\ b_{h+1} \end{pmatrix}$$

involutiok.

Azonban a 4 első esetben a két sugár-involutionak egyik kettős sugara közös. De akkor az összes sugarak ezzel a kettős sugárral összeesnek,* és így $A_h B_h$ pontok mind ezen az egyenesen vannak. Minthogy azonban P közös kettős eleme az ezen egyenesen fellépő két involutionak, azért vagy az összes pontoknak, vagy az A_h és B_h pontoknak külön-külön egy-egy pontban kellene összeesniök a két feltett involutio miatt. Igazi pontrendszerekről tehát ezekben az esetekben nem lehetne szó.

Az 5. esetben a P centrumu két sugár-involutionak mind a két kettős sugara közös, így a két involutio azonos. A feltett két involutio így most csak azt kivánja, hogy az a_h és b_h sugarak külön-külön egybe essenek és így az A_h, B_h pontok külön-külön egy-egy egyenesen vannak.

A pontok eloszlását részletesebben kell megvizsgálnunk.

Legyenek a centrumok CC', a tengelyek tt' és tegyük fel, hogy C centrum t' tengelyen, C' centrum t tengelyen fekszik.

Válaszszuk C, C' és tt' pontot a koordináta-rendszer alappontjainak.

Azt az esetet előre kizárhatjuk, mikor $A_h B_h$ pontok egyikének harmadik koordinátája 0, mert akkor mindegyiké 0 volna s a két feltett involutio azt kivánná, hogy az A_h és B_h pontok egy-egy pontban harmoniásan a centrumokhoz egyesüljenek.

Legyenek A_h koordinátái a_{h_1} a_{h_2} 1
B_h « « b_{h_1} b_{h_2} 1.

* Első közlemény IV.

Az I. fejezetnek ilyen koordináta-rendszerre vonatkozó egyenletei szerint (az arányossági szorzókat osztással eliminálva)

$$\begin{matrix} b_{h_1} = -a_{h_1}, & b_{h+1,1} = a_{h_1} \\ b_{h_2} = a_{h_2}, & b_{h+1,2} = -a_{h_2} \end{matrix} \quad (h=0, 1, \ldots, r-1)$$

Ezekből pedig az következik, hogy

az A_{2n} pontok koordinátái	a_{01}	a_{02}	1
az A_{2n+1} « « « «	$-a_{01}$	$-a_{02}$	1
a B_{2n} « « « «	$-a_{01}$	a_{02}	1
a B_{2n+1} « « « «	a_{01}	$-a_{02}$	1.

Tehát az A_h és B_h pontok két-két pontban egyesülnek. A négy pont együtt olyan teljes négyszöget alkot, melynek átlói pontjai a centrumok és a tengelyek metszéspontja.

A pontok többszörösségét mellőzve kimondhatjuk tehát, hogy csak két pár pont kettős involutiojánál fordul elő az az eset, hogy mind a két involutio centruma a másik involutio tengelyén fekszik. Minthogy azonban két pár pont az involutiot épen csak meghatározza, a többszörös involutio igazi esetei csak azok, mikor $r > 2$.

A monocyclikus többszörös involutio igazi eseteit tehát a II. fejezet teljesen kimeríti.

IV.

A polycyclikus többszörös involutio esete az, mikor

$$A_h^k\ B_h^k \quad \begin{pmatrix} k=1, 2, \ldots, s \\ h=0, 1, \ldots, r_k-1 \end{pmatrix}$$

pontrendszerek között egyszerre fennállanak az

$$\begin{pmatrix} A_h^k \\ B_h^k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_h^k \\ B_{h+1}^k \end{pmatrix}$$

involutiok.

A két involutio centrumait összekötő egyenesen fellépő két involutio közös pontpárját és a két involutio tengelyeinek metszéspontját választjuk megint alappontoknak.

Feleslegesnek tartom a kérdés részletes tárgyalását, mert az az első közlemény V. és ezen közlemény II. fejezeteinek menetétől nem különbözik.

Elég lesz a főbb eredményeket felsorolni.

1. Ha a két pontrendszer pontjai különbözők, akkor

$$r_1 = r_2 = \ldots = r_s.$$

Jelöljük közös értéküket r-rel.

2. Ha $A_h^k\, B_h^k$ $(h = 0, 1, \ldots, r-1)$ pontok egyikének valamelyik koordinátája 0, akkor A_h^k és B_h^k lineáris pontsorbeli r-ászok.

3. Ha $A_h^k\, B_h^k$ $(h=0, 1, \ldots, r-1)$ pontok koordinátái 0-tól különbözők, akkor ezen pontok kúpszeleten vannak, melynek egyenlete

$$x_1 x_2 - c_k x_3^2 = 0$$

s azon ugyanazon rendszerhez tartozó r-ászokat alkotnak.

c_k a különböző cyclusokra különböző lehet.

Tehát a kúpszeletek, a melyeken az ilyen cyclusok pontjai feküsznek, kettős érintkezésben vannak. Az érintési pontok az r-ászok közös alappontjai. Reális r-ászoknál tehát a kúpszeletek kettős érintkezése képzetes.

4. Az involutio-centrumok lineáris pontsorbeli, az involutio-tengelyek lineáris sugársorbeli r-ászt alkotnak.

Végeredményképen pedig kimondhatjuk, hogy *a sík többszörösen involutiós véges pontrendszerei linearis és quadratikus pontsorbeli r-ászokra bonthatók szét.*

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1895. október 21.-én tartott üléséből.)