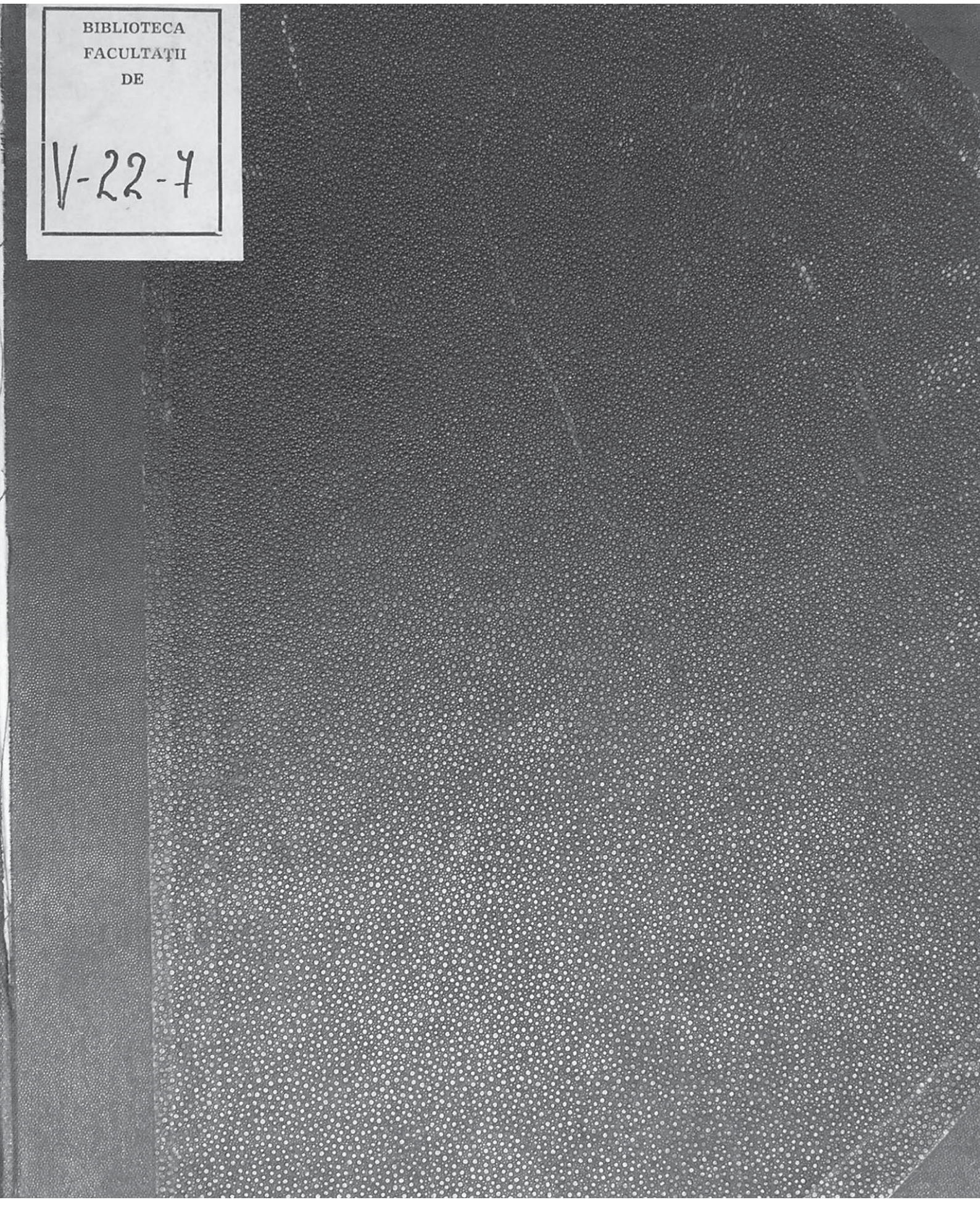
UNIVERSITATEA
„Reg. Ferdinand I", Cluj

SEMINARUL
DE
MATEMATICI

Nr. 7184

BIBLIOTECA
FACULTAȚII
DE

V-22-7



Elemi függvénytan

előadja:

Dr. Vályi Gyula

UNIVERSITATEA DIN CLUJ
SEMINARUL
DE
MATEMATICI
Nº 31

Inv. 1455

MATHEMAT. SEMINAR
KOLOZSVÁR

Kolozsvárt 1900.

Stilay L. KÖNYOMDA KOLOZSVÁR KIRÁLY u 22 sz.

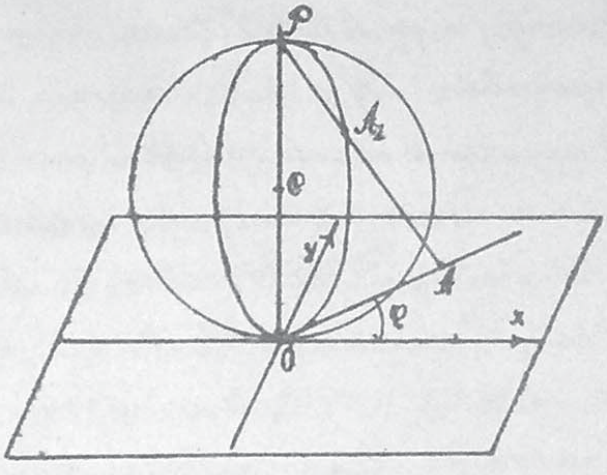
V-22-7

MATEMATIKAI
KOLOZSVÁR
EGYETEM
INTÉZET

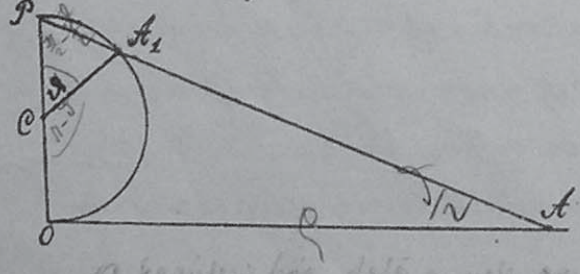
A számgömb

A következő tárgyalásokban a számfogalmat legáltalánosabb alakjában, tehát a complex számkörben fogjuk használni.

A számot rendesen a számsík pontjaival szokás ábrázolni, kölcsönösen egyértelmű vonatkozást létesítvén az összes complex számok és a számsík összes pontjai között. Van azonban még egy más ábrázolási módszer, melynél az összes complex számok egy gömbnek, az úgynevezett számgömbnek pontjaival vannak megfelelésbe hozva. Ez a módszer különösen függvénytani vizsgálatoknál célszerű. Legyen σ a számsík, O a síkbeli coordinatarendszer kezdőpontja, Ox a reális tengely positiv, Oy a képzetes tengely positiv ága. Most vegyünk fel egy egységnyi átmérőjű gömböt, mely a σ számsíkot O-ban érinti, még pedig azon az oldalon, melyről nézve a positiv reális tengely az óramutatóval ellenkező irány-



ban hozható 90° foknyi forgással a positiv képzetes tengelybe. Ez az úgynevezett számgömb, melynek az O-val átellenes pontja P a számgömb pólusa, C a centruma. Legyen most az $a+bi=\varrho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ compl. számnak megfelelő pont a számsikon A, akkor a PA egyenes a gömböt egy A_1 pontban metszi; a számgömbnek ezen A_1 pontja ábrázolja, mint az A-nak megfelelő pont az $a+bi=\varrho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ compl. számot. Nyilvanvaló, hogy így a számgömb minden pontjához tartozik egy compl. szám és fordítva minden compl. számhoz tartozik a számgömbnek egy, és csakis egy pontja. Az A_1 pontnak helyzetét a gömbön két szöggel határozzuk meg. A POx-en átfektetett úgynevezett első meridián sik, és a PA_1A-n átfektetett úgynevezett második meridiánsik egy-egy főkörben metszik a számgömböt, és nyilvánvaló, hogy a két meridián sik hajlásszöge ~~nem~~ együtt, mint a $\varrho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ complex szám amplitudoja φ, s a PAO sik meghatározására elég, ha feltesszük, hogy $0\leq\varphi<2\pi$. Az A_1 meghatározására szolgáló második szög a $PCA_1=\vartheta$ szög, mely $0\leq\vartheta\leq\pi$ intervallumban változván, teljesen elégséges a gömb valamennyi pontjainak meghatározására, a fenti intervallumban változó φ szöggel együtt. A gömbnek minden pontjához tartozik tehát egy φ és egy ϑ szög, s ezek tökéletesen meghatározzák az illető pontot a számgömbön. A φ szög viszonya a complex számhoz már ismeretes; a ϑ egyszerű összefüggésben van a ϱ-val. Ha ugyanis tekintetbe vesszük a második meridiansikot, a

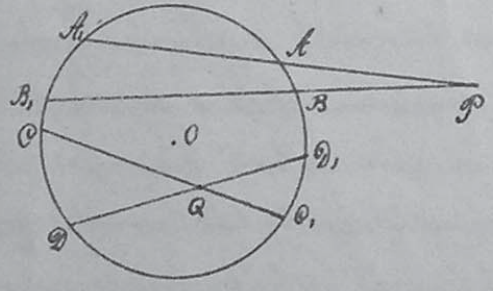


rajta fekvő PA_1O félkörrel és az A ponttal, látható, hogy $OA=\varrho$, $PCA_1x=\vartheta$, tehát $A_1COx=\pi-\vartheta$, és az utóbbival ugyanazon az A_1O iven fekvő kerületi

szög $A_1PO\sphericalangle = \frac{\pi}{2} - \vartheta$ és így az APO derékszögű háromszögben $OAP\sphericalangle = \frac{\vartheta}{2}$ lévén: $\operatorname{cotg}\frac{\vartheta}{2} = \frac{AO}{PO} = \frac{\varrho}{1} = \varrho$. Tehát a számgömbnek φ és ϑ szögekkel bíró pontjához tartozó compl. szám analytikai kifejezése: $\operatorname{cotg}\frac{\vartheta}{2}(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Ha a $\varrho = \operatorname{cotg}\frac{\vartheta}{2}$-ben $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, akkor $\varrho = 1$; tehát a $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ szöggel bíró pontok, melyek a számgb. aequatorán fekszenek, oly compl. számokat képviselnek, melyeknek absolut értéke 1. Ha $\vartheta > \frac{\pi}{2}$, akkor $\varrho < 1$, tehát az alsó félgömbön fekvő pontok absolut értéke kisebb mint 1; és ha $\vartheta < \frac{\pi}{2}$, $\varrho > 1$, vagyis a felső félgömbön fekvő pontok absolut értéke nagyobb mint 1. Ha $\vartheta = 0$, $\varrho = \infty$, s ha $\vartheta = \pi$, $\varrho = 0$. Tehát a ∞ absolut értékkel bíró számot ábrázolja a P polus, és ennek az ábrázolási módnak ép az az előnye, hogy a végtelen nagy complex számnak (melynek absolut értéke $\varrho = \infty$) van határozott pontja, míg a számsíkon való ábrázolásnál ez nem lehetséges. Ebből mindjárt következik ezen ábrázolási módszernek egy másik nagy előnye: a limesek ugyanis a számgömbbel való ábrázolásnál kivétel nélkül egyforma képet nyernek. Ha ugyanis $\lim a_n = A$ véges, akkor a számsorozatban bizonyos tagon túl bármely tagnak megfelelő pont a számsíkon A-ból, mint centrumból igen kis sugárral leírt körön belül fekszik; tehát véges limes esetén a számsorozat pontjai a síknak egy véges pontja körül összesűrűsödnek. Ellenben ha $\lim a_n = \infty$, az bármily nagy valós N megadása után tehető $|a_n| > N$, akkor a számsorozat tagjait ábrázoló pontok a számsíkban szétszóródnak, a legnagyobb körön is kívül esnek, bizonyos helytől kezdve. Nem így van ez a számgömbbel való ábrázolásnál. Mert ha $|\operatorname{cotg}\frac{\vartheta}{2}| < \varepsilon$, azaz $\lim \operatorname{cotg}\frac{\vartheta}{2} = 0$ akkor a számsorozat tagjai 0-ban, ha $\lim \operatorname{cotg}\frac{\vartheta}{2} = A$ véges, akkor a gömbfelület valamely más pontja, és végül ha $\lim \operatorname{cotg}\frac{\vartheta}{2} = \infty$,

vagyis $\lim \delta = 0$, akkor a számsorozat pontjai mind a P polus körül zsúfolodnak össze. Szóval ennél az ábrázolási módszernél a limest mindig egy határozott pont képviseli, mely körül a számsorozat tagjai összezsúfolodnak. Ezt az ábrázolási módszert, midőn a sík összes pontjait a gömb polusából a gömbfelületre projicidáljuk, stereographikus projectionak nevezzük. Lássuk ennek néhány nevezetes tulajdonságát.

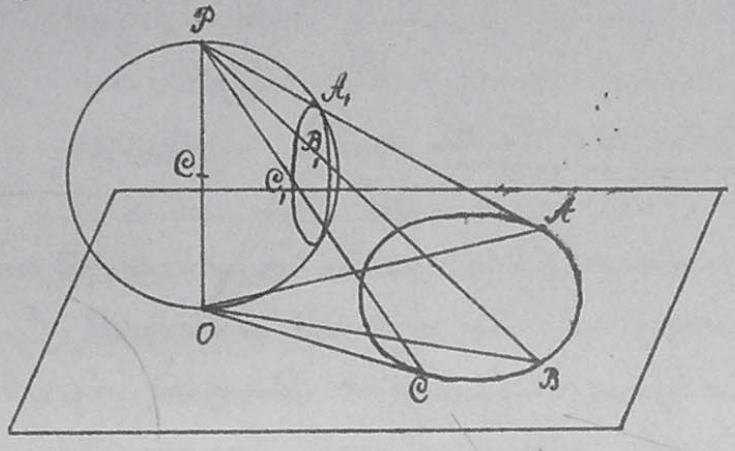
1. A sík egyeneseinek és köreinek a gömbön csak körök felelnek meg. Egyenesnél ez nimdjárt belátható, mert az egyenesen és a P poluson át fektetett sík egy a P poluson átmenő körben metszi a gömböt. Hogy a köröknek is körök felelnek meg, annak igazolása végett hivatkozunk arra az ismeretes elemi geometriai tételre, mely szerint, ha egy P pontból a kör síkjában, a körhöz 2 szelőt húzunk, akkor a metszésből keletkezett távolságok között következő relatio áll fenn:



$$PA.PA_1 = PB.PB_1 = \text{a kör potentiája a P pontra vonatkozólag, állandó, és pedig positiv, ha P pont a körön kivül van,}$$

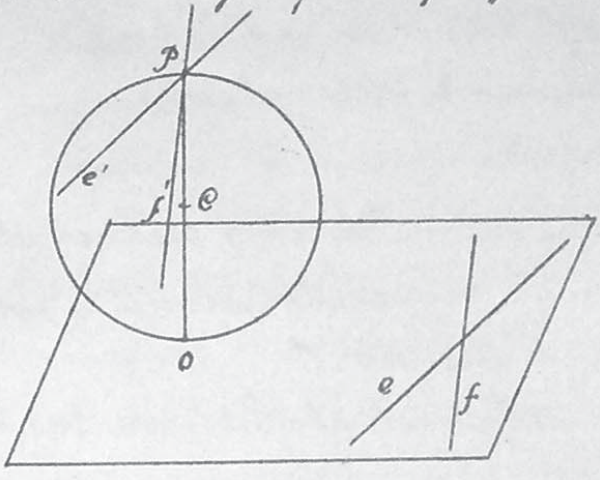
mivel akkor a két vector egyenlő irányú, és negativ, ha a P pont, (Q) a körön belül van, mivel akkor a két vector ellenkező irányú. Ugyanez a tétel áll a gömbre is, vagyis ha egy tetszésszerinti pontból két szelőt húzunk a gömbhöz, mindkét szelőnél a lemetszett hosszak szorzata ugyanaz, mert hisz a két szelő síkja egy körben metszi a gömböt, melyre áll a tétel. Ezt a szorzatot nevezzük a gömb potentiájának, mely a gömbfelületen fekvő pontra nézve nulla. De ezt a két tételt meg is lehet fordítani: ha a síkban négy pontot

úgy veszünk fel, hogy ezek a szorzatok egyenlők legyenek, akkor ezek egy körön, vagy a térben felvéve, egy gömbön fekszenek. Ezután könnyü kimutatni, hogy a számsik köreinek a gömbön körök felelnek meg. Legyenek ugyanis az ABC körön fekvő pontoknak megfelelő



pontok a gömbön A_1, B_1, C_1, akkor az AOP derékszögü háromszögben $OA_1 \perp AP$ lévén, lesz, $\overline{PO}^2 = PA \cdot PA_1$, de $\overline{PO}^2 = 1$, tehát $PA \cdot PA_1 = PB \cdot PB_1 = PC \cdot PC_1 = 1$ és igy az A, B, C valamint a megfelelő A_1, B_1, C_1 pontok ugyanazon a gömbön fekszenek, melynek metszése a számgömbbel egy kör, ezen pedig rajta vannak az A_1, B_1, C_1 pontok és igy a sikbeli kör többi pontjainak megfelelő pontok is, vagyis az A, B, C körnek a sikban megfelel a számgömbön az A_1, B_1, C_1 kör

2. A stereografikus projectio egy másik nevezetes tulajdonsága, hogy a síkon és a gömbön a megfelelő idomok szögei egyenlők. Elég kimutatni, hogy két sikbeli egyenes e és f szöge megegyezik a megfelelő gömbkörök szögével. A két gömbkör szögét adja a P-polusban azokhoz húzott e' és f' érintők szöge. De $e \parallel e'$ és $f \parallel f'$,



tehát a stereografikus projectióban a szögek megmaradnak.

Valahányszor két felület (itt a számsik és a számgömb) olyan vonatkozásba jő egymással, hogy a megfelelő idomok szögei egyenlők, azt mondjuk, hogy a két felület conformis. Ezzel a conformitással a későbbiekben többször fogunk találkozni.

A számcsoportok.

Valamely szám meg van határozva, ha ismerjük annak reális és képzetes részét, vagy absolut értékét és szögét. Gyakran a számoknak oly meghatározását adjuk bizonyos kijelentés által, mely meghatározás alá nemcsak egy, hanem több, esetleg végtelen sok szám tartozik. Az ilyen kijelentéssel meghatározott számok számcsoportot alkotnak, melyek a kijelentés természete szerint különfélék lehetnek. Lássunk néhány számcsoportot.

I. kijelentés: a dekadikus rendszer szerint k számjegygyel bírható számok. Ezek:

$$10^{k-1}, 10^{k-1}+1, 10^{k-1}+2, \ldots\ldots 10^k - 1.$$

II. „ A positiv egész számok reciprokjai:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\ldots \frac{1}{n}$$

III. „ A positiv rationalis valódi törtek; ezeknek alakja $\frac{m}{n}$, a hol $m < n$ és mindkettő felveszi a positiv rationalis számok értékeit.

IV. „ Azok a számok, melyeknek absolut értéke $|a| = 1$

V. „ „ „ „ „ „ „ „ $|a| < 1$

VI. „ „ „ „ „ „ „ „ $|a| > 1$

Ezek a példák mutatják a számcsoportok különféleségét és egyszersmind különbségét. Mert látjuk, hogy vannak véges számu tagból álló csoportok, mint I, és vannak végtelen sok tagból álló csoportok, mint II-VI. Utóbbiak ismét többfélék. Lehet, hogy a csoport egyes tagjait ábrázoló pontok discret pontok, azaz mindig tudunk bármely ábrázoló pont körül oly kört irni, melyen belül csak ez a pont van. Vegyük pl. a II. csoportot, s alkossuk meg az n és (n+1)-ik tagjának különbségét, vagyis azt a közt, mely ezen két tag között van: $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$ s bármily kicsiny is a különbség, mindig tudunk olyan kis ε mennyiséget adni, mely $\varepsilon < \frac{1}{n(n+1)}$, úgyhogy az ε-nal n-ből irt körön belül csak az n-nek megfelelő pont feksziik. A II csoport tagjait ábrázoló pontok, vagy röviden a II. csoport pontjai tehát discret pontok, a II. csoport discret számcsportot alkot. A többi III-VI. csoportok mind zsúfoltak, vagyis bármily kis sugárral irva valamelyik pont körül egy kört, ezen belül mindig vannak még pontok, melyek még a csoporthoz tartoznak. De azért nem mindegyik ad geometriai folytonosságot, mint pl. a III. csoport, melynél a rationális számok között ott vannak még az irrationalis számpontok is. A többi már geometriai folytonosságot ad. A II. csoport pontjai kört alkotnak egységnyi sugárral, az V.ik a körön belüli véges, a VI.ik a körön kivüli végtelen terület folytonossága.

Első feladatunk most, a számcsoportok közös tulajdonságait vizsgálni. Véges számú tagból álló csoportoknál egyszerü a feladat, mert a tagokat mind fel tudjuk sorolni és bizonyos elv szerint, pl. a realis számokat nagyság szerint, a complex számokat az absolut érték nagysága szerint táblázatba foglalni.

A végtelen sok számot tartalmazó számcsoportoknál csak valami közös definitiot adhatunk, mely a számcsoport bármely tagját meghatározza, de az összes számokat nem tudjuk felírni. A végtelen sok tagból álló számcsoportoknál két nevezetes tulajdonságot találunk. Így a II. példát véve szemügyre, látható, hogy ha a 0 pontból bármily kis ε sugárral kört irunk, ezen belül a csoportnak még mindig végtelen sok tagja van; mert ha $n > \frac{1}{\varepsilon}$, tehát $\frac{1}{n} < \varepsilon$, akkor már az $\frac{1}{n}$-en túli tagok mind a körön belül vannak. Az ilyen, 0-hoz hasonló pontot, melyből bármily kis sugárral kört irva, ezen belül még mindig végtelen sok tagja van a csoportnak, nevezzük torlódási helynek. Ki fogjuk mutatni, hogy minden, végtelen sok tagból álló számcsoportnak van ilyen torlódási helye, legalább egy. Kimutatjuk először reális, véges, de végtelen sok tagból álló számcsoportokra. Hogy a tagok véges értékűek, azt jelenti, hogy valamennyi bizonyos H és h véges egész számok közé esnek, úgyhogy h-nál valamennyien nagyobbak és H-nál kisebbek. Osszuk fel ezt a számközt egész számú közökre:

$$h,\ h+1,\ h+2,\ \ldots\ H-1,\ H$$

megállapodván abban, hogy ezen tagok mindegyike csak egy közhöz tartozzék, még pedig h az első, $h+1$ a második, stb. közhöz, $H-1$ az utolsó közhöz. A számközök száma $H-h$ véges. Ha tehát a $(k-1)$-ik számkör egy száma x, akkor

$$h+k \leqq x < h+k+1$$

Miután a számközök száma véges, feltevésünk szerint pedig az eredeti számkör végtelen sok számot tartalmaz, kell

lennie ezen H-k számköz között legalább egy olyannak, (lehet több is), melyen belül végtelen sok szám van. Legyen ez pl. az a_0, a_0+1 számköz. Most ezt felosztjuk 10 részre,

$$a_0,\ a_0+\frac{1}{10},\ a_0+\frac{2}{10},\ \ldots\ a_0+\frac{9}{10},\ a_0+1.$$

Ezen számközök között is kell lennie legalább egynek, melyben a számcsoportnak végtelen sok tagja van, legyen ez $a_0+\frac{a_1}{10}, a_0+\frac{a_1+1}{10}$; ha rövidség kedvéért $a_0+\frac{a_1}{10}=\alpha_1$, akkor ez a köz $\alpha_1, \alpha_1+\frac{1}{10}$. Ezt ismét osszuk fel 10 részre

$$\alpha_1,\ \alpha_1+\frac{1}{10^2},\ \alpha_1+\frac{2}{10^2},\ \ldots\ \alpha_1+\frac{9}{10^2},\ \alpha_1+\frac{1}{10}$$

Itt is van egy $\alpha_2, \alpha_2+\frac{1}{10^2}$ köz, melyben végtelen sok szám foglaltatik, és így tovább, n-szer ismételve ezt az eljárást, végre egy olyan határozott $\alpha_n, \alpha_n+\frac{1}{10^n}$ számközhöz jútunk, melyen belül végtelen sok tagja van a számcsoportnak. Ezek a számközök a következők

$$\begin{array}{l} \alpha_1,\ \alpha_1+\frac{1}{10} \\ \alpha_2,\ \alpha_2+\frac{1}{10^2} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \alpha_n,\ \alpha_n+\frac{1}{10^n} \\ \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

melyeknek kezdő számjai, ha az eljárást végtelen folytatjuk, egy nem fogyó $\alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \alpha_3 \leqq \ldots \leqq \alpha_n \leqq \ldots$ számsorozat alkotnak, melynek tagjai mind kisebbek mint α_0+1. Ezen sorozatnak tehát van limese, s ki fogjuk mutatni, hogy ez a limes a számcsoport torlódási helye. Ezen számsorozat limese α akkor képez torlódási helyet, ha abból bármily kis szabol ε-nal kört irva; ezen belül még végtelen sok tagja van a számcsoportnak. Válasszuk n-et úgy, hogy $\frac{1}{10^n} < \varepsilon$ legyen.

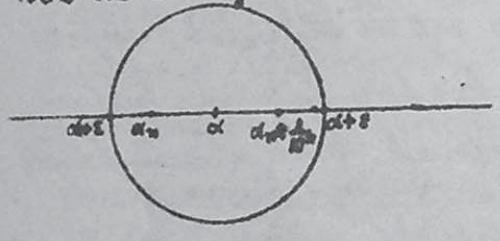
ekkor az n-edik, vagyis $a_n, a_n + \frac{1}{10^n}$ közt véve, ennek határai és α közös lyen a nagysági viszony

$$a_n \leq \alpha \leq a_n + \frac{1}{10^n}$$

és miután még $\frac{1}{10^n} < \varepsilon$, következik, hogy

$$\alpha + \varepsilon > a_n + \frac{1}{10^n}$$

de $\alpha - \varepsilon < a_n$, mert hiszen a felvett kör nagysága $\frac{1}{10^n}$ és ha ennél nagyobb számot, t.i. ε-t vonunk le a benne fekvő α-ból, ez a különbség kisebb lesz, mint a_n. Tehát a felvett $a_n, a_n + \frac{1}{10^n}$ kör az ε sugarú körön belül van, a körön belül pedig végtelen sok tagja van a számcsoportnak, vagyis az α limes tényleg torlódási helye a számcsoportnak.



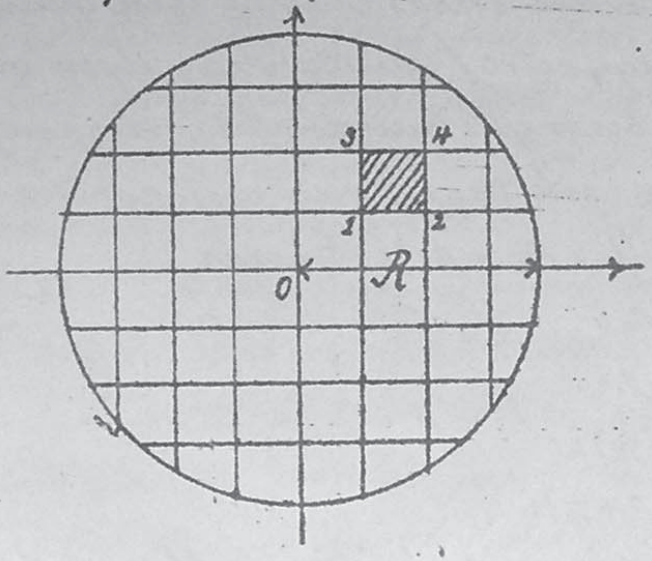
Most vegyük azt az esetet, midőn a számcsoporthoz végtelen sok reális, de nem mind véges szám tartozik. Ebben az esetben a torlódási hely meghatározására a következő közöket veszük

$$-1, +1$$
$$-2, +2$$
$$\ldots\ldots$$
$$-n, +n$$
$$\ldots\ldots$$

s itt most két eset lehetséges. 1.) lehet olyan véges számkörhöz jutni, minden belül végtelen sok szám van; 2.) akármeddig nagyítjuk a kört, mindig csak véges számú tag lesz benne. Utóbbi esetben a számvonal végtelen távoli pontja a torlódási hely, mely a számgömbön való ábrázolásnál a polusba esik.

Tehát a végtelen sok reális tagból álló számcsoportoknak mindig van torlódási helyök. P. az $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots \frac{1}{n}, \ldots$ számcsoportnak torlódási helye 0, a mely tehát a csoporton kivül van. Vannak olyan számcsoportok, melyeknek végtelen sok a torlodási helyök, mint pl. a $\mathfrak{M}$-nak, mert ilt minden positiv valódi rationális tört torlódási hely.

Most bizonyitsuk be a tételt arra az esetre, midőn a számcsoport complex számokból áll. Itt is két eset lehetséges.



1. a számok végesek, azaz létezik olyan R véges sugaru kör, melyen belül fekszenek a csoport összes tagjai, vagyis bármely a tagjának absolut értéke $|a| < R$. Ekkor is van legalább egy torlodási hely. Ha ugyanis a realis tengely $+1, 2, 3, \ldots$ valamint a képzetes tengely $-1, -2, +3, \ldots$ pontjain át az illető tengelyekre merőlegeseket húzunk, az R sugarú kör területe csupa egységnyi területü négyzetekre oszlik fel. Ezek mindegyikének azt a pontját tekintjük kiindulási pontnak, a melyekből kiinduló oldalai a positiv tengelyekkel egyirányban párhuzamosak. Mindegyik négyzethez tartozzanak a benne fekvő összes pontok, a kiindulási pont és az abból kiinduló két oldala. Ily módon a kör belsejének mindegyik pontja csak egy négyzethez van számitva. Ezen négyzetek száma a körön belül véges, mert kisebb, mint $(2R)^2$

Miután feltettük, hogy a körön belül végtelen sok szám van, mindenesetre van legalább egy quadratum (esetleg több is), melyen belül a számcsoportnak végtelen sok tagja van. Legyen ezen quadratum kezdőpontja $a_0+b_0 i$, akkor miután az oldala 1,

a második (2) pontja $(a_0+1)+b_0 i$

(3) " $a_0+(b_0+1)i$

(4) " $(a_0+1)+(b_0+1)i$

mely utóbbiak azonban már nem tartoznak a quadratumhoz. Bármely, a quadratumben fekvő két pont távola tehát kisebb mint $\sqrt{2}$. Most egy oldalnak 10 részre osztásával az egész quadratumot felosztjuk 100 kisebb negyzetre. Miután egy ilyen quadratum oldala $\frac{1}{10}$, azért azon bizonyos quadratum szögpontjai, melyben szükségképen végtelen sok tagja van a csoportnak, ha kezdőpontja $(a_0+\frac{a_1}{10}=\alpha_1)+(b_0+\frac{b_1}{10}=\beta_1)i$, azaz

$\alpha_1+\beta_1 i$

a (2) pont $\alpha_1+\frac{1}{10}+\beta_1 i$

a (3) " $\alpha_1+(\beta_1+\frac{1}{10})i$

a (4) " $\alpha_1+\frac{1}{10}+(\beta_1+\frac{1}{10})i$

Ebben a quadratumban már két pont távola kisebb mint $\frac{1}{10}\sqrt{2}$. A felosztást ebben a quadratumban ismételve, és igy tovább, végre az n-edik felosztás után olyan igen kis quadratumhoz jutunk, melynek szögpontjai $\alpha_n+\beta_n i = (a_0+\frac{a_1}{10}+\cdots+\frac{a_n}{10^n})+(b_0+\frac{b_1}{10}+\cdots+\frac{b_n}{10^n})i$

$(\alpha_n+\frac{1}{10^n})+\beta_n i$

$\alpha_n+(\beta_n+\frac{1}{10^n})i$

$(\alpha_n+\frac{1}{10^n})+(\beta_n+\frac{1}{10^n})i$

és a melyben két pont távola kisebb, mint $\frac{1}{10^n}\sqrt{2}$, s a melyen

belül a csoportnak végtelen sok tagja van. Ezt az eljárást végtelenbe folytatva, kapunk az α és β mennyiségek számára két monoton szabályos számsorozatot

$$\alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \alpha_3 \leqq \ldots \leqq \alpha_n \leqq \ldots \qquad \lim \alpha_n = \alpha$$

$$\text{és} \qquad \beta_1 \leqq \beta_2 \leqq \beta_3 \leqq \ldots \leqq \beta_n \leqq \ldots \qquad \lim \beta_n = \beta$$

és most ki fogjuk mutatni, hogy $\alpha + \beta i$ a complex számcsoportnak torlódási helye. Hiszen az új quadratum a régiben mindig bennfoglaltatik, s ha adva bizonyos ε, mindig úgy választhatjuk n-et, hogy $\varepsilon > \frac{1}{10^n}\sqrt{2}$ legyen, de akkor az n-edik quadratum, melyen belül végtelen sok tagja van a csoportnak, az $(\alpha+\beta i)$-ből ε sugárral írott körön belül van. Véges értékü tagok esetén tehát mindig van legalább egy torlódási helye a complex számcsoportnak.

2., Ha a tagok nem mind végesek, akkor a 0-ból egymásután 1, 2, 3 ... sugárral kört irva, ezek között vagy létezik olyan, melyen belül végtelen sok tagja van a csoportnak, s ekkor az előbbi esettel van dolgunk, vagy ilyen kört sohasem találunk, s akkor a számgömb polusa a torlódási hely.

Kimutattuk tehát, hogy végtelen sok tagból álló számcsoportnak mindig van legalább egy torlódási helye.

A számcsoportoknak egy másik fontos tulajdonsága a következő vizsgálatnál adódik. Vegyünk először reális és véges ~~értékü~~ számú tagokból álló számcsoportot. Világos, hogy mindig létezik a csoportban ~~olyan~~ vagy szám, mely valamennyinél legnagyobb, ezt maximumnak nevezzük, ~~vagy~~ és olyan, mely valamennyinél kisebb, ezt minimumnak nevezzük. Maximum

tehát a számcsoportnak az a számja, melynél nincs nagyobb, és minimum, melynél nincs kisebb a csoportban. Lássuk, mint van ez a végtelen sok tagból álló csoportoknál. Vegyük pl. az

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$$ csoportot; nyilvánvaló,

hogy 1 ennek a csoportnak maximuma, de nincs minimuma, mert a legkisebb tagnál is kisebb található. Hanem fontos hely ill a 0, mely nem tartozik a csoporthoz, de mihelyt bármily kis ε-nal nagyobbítjuk, már kapunk a csoportban olyan számot, mely ennél kisebb. De ilyen számot, a milyen a 0 ebben a példában; mely nem tartozik a számcsoporthoz, de bármily kis ε-nal nagyobbítva azt, már találunk a csoportban nálánál kisebbet, a számcsoport felső határának nevezzük; míg alsó határának az olyan számot nevezzük, mely nem tartozik a csoporthoz, de bármily kevéssel kisebbítve azt, találunk a csoportban olyan számot, mely ennél nagyobb. És most ki fogjuk mutatni, hogy végtelen sok tagu számcsoportnak mindig van vagy maximuma, vagy felső határa, és van vagy minimuma vagy alsó határa. Tehát ha pl. nincs maximuma, mindenesetre van felső határa.

Mutassuk ki ezt először véges számokkal bíró reális számcsoportra, melyben végtelen sok tag van. Az ilyen csoport, a mint látjuk, mindig két véges egész szám közé szorítható, k és K közé. Irjuk a számközt osszuk fel egységnyi közökre,

$$k, k+1, k+2, \ldots K-1, K.$$

Ezen egységnyi közökből vegyük azt a legelsőt, mely már tartalmazza a csoport tagjait, de a mely előtt a csoportnak nincs

nek tagjai; legyen ez a köz a_0, a_0+1. Ezt osszuk fel 10 részre.

$$a_0,\ a_0+\tfrac{1}{10},\ a_0+\tfrac{2}{10},\ \ldots\ a_0+\tfrac{9}{10},\ a_0+1.$$

Ezek is legyen az első, mely már tartalmaz tagokat:

$$a_0+\frac{a_1}{10}=a_2,\quad a_0+\frac{a_1+1}{10}=a_1+\tfrac{1}{10}$$

vagy röviden $a_1,\ a_1+\frac{1}{10}$; ezt is 10 részre osztva, legyen a kérdéses köz $a_2,\ a_2+\frac{1}{10^2}$ és így tovább folytatva $a_3,\ a_3+\frac{1}{10^3}$

$\ldots\ldots\ldots$

n-szer ismételve $a_n,\ a_n+\frac{1}{10^n}$ és így tovább a végtelenbe.

$\ldots\ldots\ldots$

Így az α-knak egy monoton növő sorozatát kapjuk, melynek van határozott véges limese

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ \lim a_n=\alpha$$

és most ki fogjuk mutatni, hogy α mindenesetre vagy alsó határa, vagy minimuma a csoportnak, vagyis hogy α-t bármily kis ε-nal kisebbítve, $\alpha-\varepsilon$ már nem tartozik a csoporthoz, míg bármily kevéssel ~~kisebbítve~~ nagyobbítva $(\alpha+\varepsilon)$-ndl már kisebb számok is vannak a csoportban. Ugyanis világos, hogy $a_n \leqq \alpha \leqq a_n+\frac{1}{10^n}$, mert egyfelől lehet, hogy a_n-nel megszünik a sorozat, másfelől, hogy a_n után mind 9-esek következnek, melyeknek limese $\frac{1}{10^n}$, úgyhogy $\alpha=a_n+\frac{1}{10^n}$ is lehet. Ha most n-et úgy választjuk, hogy $\varepsilon>\frac{1}{10^n}$, akkor $\alpha-\varepsilon<a_n+\frac{1}{10^n}-\frac{1}{10^n}=a_n$ azaz $\alpha-\varepsilon<a_n$, bármilyen kis adott mennyiség legyen ε. Miután pedig feltevésünk szerint a_n-nél kisebb számok nem tartoznak a számcsoporthoz, $\alpha-\varepsilon$ sem tartozik oda. Másfelől $\alpha+\varepsilon>a_n+\frac{1}{10^n}$, és miután fel-

tevésünk szerint $(\alpha_n + \frac{1}{10^n})$-nél kisebb számok is vannak a számcsoportban, azért $(\alpha+\varepsilon)$-nál is kisebb számok vannak a csoportban. Ha már most α a csoporthoz tartozik, akkor minimum, ha nem, akkor α a csoportnak alsó határa, egyik szerepet tehát mindenesetre viseli.

Könnyen kimutatható az is, hogy létezik mindig maximum vagy pedig felső határ. Legyen pl. a sorozat, mely a számcsoportot képviseli, fogyó

$$\alpha_1 > \alpha_2 > \ldots > \alpha_n > \ldots$$

akkor a tagok jegyét ellenkezőre változtatva, növő sort kapunk

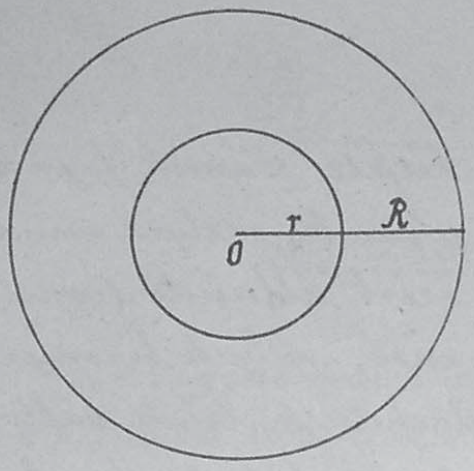
$$-\alpha_1 < -\alpha_2 < \ldots < \alpha_n < \ldots$$

melyről már kimutattuk, hogy van vagy minimuma vagy alsó határa. Legyen ez $-\alpha$, akkor nyilvánvaló, hogy α az eredi számsorozatnak maximuma illetőleg felső határa.

Tehát véges értékü, de végtelen sok tagból álló számcsoportnak mindig van vagy maximuma vagy felső határa és van vagy minimuma vagy alsó határa. Pl. a positiv valódi törtek számcsoportjának nincs se maximuma, se minimuma, hanem van alsó határa, ez 0, és van felső határa, ez 1.

Végtelen nagy értékü tagokat is tartalmazó csoportnál, ha van olyan tag, mely nagyobb mint egy tetszésszerint megadott positiv N mennyiség, akkor a csoport felső határa $+\infty$, (maximum nincs); és ha van olyan tagja a csoportnak, mely kisebb bármily megadott negativ $(-N)$ mennyiségnél, akkor a csoport alsó határa $-\infty$ (minimum nincsen). Igy pl. az összes egész számok oly csoportot alkotnak, melynek felső határa $+\infty$, alsó határa $-\infty$.

Complex számoknál, véve a tagok absolut értékét, reális számcsoporthoz jutunk, melyre érvényes az imént bebizonyított tétel.



És átvive ezt a complex számcsoportra, mondhatjuk véges absolut értékü tagokból álló csompl. számcsoporthoz mindig lehet irni o körül egy r sugaru és egy nagyobb R sugarú kört, melyek között fekszenek a csoport összes tagjai. Ha r az absolut értékek minimuma, akkor belső körön is vannak a csoport tagjait ábrázoló pontok; ha r alsó határ, akkor magán a körön nincsenek pontjai a számcsoportnak, de kivülről végtelenül megközelitik azt. Épen igy, ha R az absolut tagok maximuma, a külső kö örön is vannak a csoportnak pontjai, de azon kivül nincsenek, mig ha R felső határ, a pontok belülről végtelenül megközelitik a kört, de rajta nincsenek a csoportnak pontjai. Ha $r=0$, $R=\infty$, a pontok az egész számsikon szétszóródnak. Ha $r=R$, a csoport összes pontjai rajta vannak ezen az egy körön. Igy pl. a IV. csoport pontjai mind az egységsugaru körön fekszenek.

Megismertük tehát a számcsoportok két fontos tulajdonságát: a torlódási helyet és a határokat, melyekre a későbbiekben sokszor történik hivatkozás.

A függvény.

További vizsgálatainkban kétféle számok fognak előjönni, úgymint adott, határozott számok, melyek mindig ugyanazzal az egy értékkel bírnak és ezért állandó (constans) számoknak neveztetnek, valamint olyanok, melyek bizonyos számesoporton belül minden értéket felvehetnek, tehát változó értékkel bírnak, azért ezeket változó (variabilis) számoknak nevezzük, és geometriailag a számcsoport területén mozgó ponttal ábrázoljuk. Az állandókat az ABC-kezdő a, b, c, d, ... a változókat végső: x, y, z, u, v, ... betűivel jelöljük. A változók lehetnek folytonosan avagy nem folytonosan változók a szerint, a mint a mozgó pont azon értékei, melyeket felvehet mozgása közben, geometriai folytonosságot adnak, vagy nem. A változók azonkívül lehetnek egyenesen változók (a milyenek pl. a reális változók), és területen változók (complex változók). Mi többnyire folytonos változókkal fogunk dolgozni (összes complex számok).

Az olyan kifejezést, melyben állandók és változók szerepelnek bizonyos müveleti operatiókkal egybekötve, függvénynek, az illető változók függvényének nevezzük. A változók száma szerint van 1, 2, 3, ... változós függvény. Egy változós függvényben a reális változót x, a complex

változót $z = x + yi$ fogja jelölni. Magának a függvénynek a jele $f(x)$, $f(z)$.

Rationalis függvények

A rationális egész függvény.

A függvényeket azon operatiók szerint osztályozzuk, melyek által az állandók a változókkal össze vannak kötve.

Az oly függvényt, melyben az állandók a változókkal csupán az összeadás, kivonás, szorzás és osztás, tehát a rationális-operatiókkal vannak egybe kötve, rationalis függvénynek nevezzük és pedig rationalis egész függvénynek, ha csak a három első, rationalis tört függvénynek, ha az osztás operatiója is szerepel.

Foglalkozzunk először a rationalis egész függvényekkel, kutatva azoknak jellemző tulajdonságait.

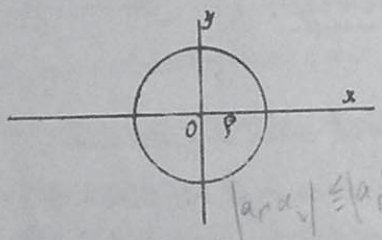
Miután a rationalis függvény csupa egyértékü operatiókkal keletkezett, azért ha a z változónak határozott véges értéket adunk, a függvény is egyértékü és véges. A kijelölt operatiok elvégzése után minden rationalis egész függvény a következő normális alakra hozható

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$$

a hol $a_0, a_1, \ldots a_n$ constans mennyiségek. A változó legmagasabb hatványkitevőjét nevezzük a rationális egész függ-

vény fokszámának. A felírt r. eg. függvény tehát n-edfokú, a mikor is $a_n \neq 0$.

Már említettük a rat. eg. függvény egyik fontos és jellemző tulajdonságát, t.i. hogy egyértékű és véges (a végesben). Most vizsgáljuk a függvényt egy 0 centrumu igen kis ρ sugaru körön belül, tehát csak olyan z értékek mellett, melyekre nézve $|z| < \rho < 1$, és hasonlitsuk össze a függvény értékét a terület bármely pontjában bármely pontjában, azzal, melyet a 0-ban vesz fel. Miután $f(0) = a_0$, lesz



$$f(z) - f(0) = a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$$
$$= z(a_1 + a_2 z + \cdots + a_n z^{n-1})$$

tehát
$$|f(z) - f(0)| \leqq |z|(|a_1| + |a_2||z| + \cdots + |a_n||z|^{n-1})$$

A jobboldalt mindenesetre meguagyobbitjuk, ha mindegyik $|a|$ helyett azoknak A maximumát, $|z|$ helyett a nálánál nagyobb ρ-t irjuk be, és, miután $\rho < 1$, még az egész sort végtelenbe folytatjuk, tehát
$$|f(z) - f(0)| < A\rho(1 + \rho + \rho^2 + \cdots \text{ ad infin.})$$
és beirva a zárjelben levő geometriai sor értékét $\frac{1}{1-\rho}$-t
$$|f(z) - f(0)| < \frac{A\rho}{1-\rho}$$

Ha most η egy tetszésszerint megadott kis positiv szám, mindig megválaszthatjuk a ρ sugarat úgy, hogy $\frac{A\rho}{1-\rho} = \eta$ legyen, t.i. $\rho = \frac{\eta}{A+\eta}$ teendő, de akkor ezen a ρ sugaru körön belül
$$|f(z) - f(0)| < \eta$$
vagy miután $|z| < \rho$, mondhatjuk, hogy bármilyen kis positiv mennyiség legyen η, $|f(z) - f(0)| < \eta$, mihelyt $|z| < \frac{\eta}{A+\eta}$ a hol A a rationális eg. függvény coefficiensei abszolut értékeinek maximuma. A rationalis eg. függvény tehát olyan tulajdonságú,

$+ A\rho = \eta - \eta\rho$
$\rho(A+\eta) = \eta$
$\rho = \frac{\eta}{A+\eta}$

hogy bármilyen kis positiv η mennyiség megadása után tudunk 0 körül olyan kis sugaru kört irni, melyben belül a rat. eg. függvény értéke bármely pontban absolut értékre nézve kevesebbet különbözik a függvény absolut értékétől 0-ban, mint a mekkora az a kis η mennyiség; vagy a mi ugyanazt mondja: a függvény értékváltozása 0 körül végtelen kicsiny, ha z értékváltozása a végtelen kicsiny. Ha valamely függvény ezzel a tulajdonsággal bir, azt mondjuk, hogy a függvény az illető hely körül, melyet végtelen kicsinynyel megnöveszetettünk, folytonos. Tehát a rat. eg. függvény a 0 körül folytonos. Daczára annak, hogy az $|f(z)-f(0)|$ különbség végtelen kicsiny a 0 közvetlen szomszédságában, mégse válik itt nullá, csak 0-ban. Hogy ezt beláthassuk, irjuk fel a függvényt annak tekintetbe vételével, hogy egyes coefficiensek nullak is lehetnek, a mint a függvényben végig haladunk. Tegyük fel, hogy a_k az első nullától különböző coefficiens, akkor $f(z)-f(0) = z^k(a_k + a_{k+1}z + \cdots + a_n z^{n-k})$

ez a különbség csak akkor nulla, ha vagy z, vagy a zárjeles kifejezés nulla. A z-ről azonban feltesszük, hogy nem nulla; a zárjeles kifejezés meg csak akkor, az az oly z értékek mellett nulla, ha a_n absolut értékre egyezik a z-vel szorzott tagok absolut értékével, de ellenkező jelü, ámde a fentmondottak alapján

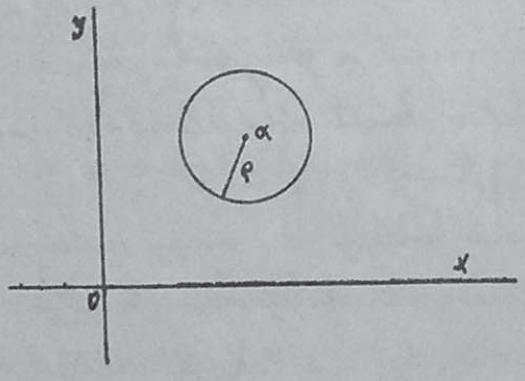
$$|a_{k+1}z + \cdots + a_n z^{n-k}| < |a_k| \text{, mihelyt } |z| < \frac{|a_k|}{A'+|a_k|}$$

Ha tehát ezzel a $|z|$ sugárral (melynek kifejezésében A' az $|a_{k+1}|$ $|a_{k+2}|$ $\cdots$ $|a_n|$ coefficiensek maximuma) 0-ból kört irunk, ezen belül a zárjeles kifejezés seholsem tünik el, csak a 0-ban, tehát $|f(z)-f(0)|$ seholsem tünik el, csak 0-ban. Ezzel ki van mutatva,

hogy a rat. eg. függvény azt az értékét, melyet 0-ban felvett, ennek közvetlen szomszédságában nem ismétli (értvén közvetlen közelség alatt a 0-hoz végtelen közeb eső pontok összességét. Ez a tulajdonsága a rat. eg. függvénynek szintén hozzátartozik a folytonosság definitiójához.

Kimutattuk tehát, hogy a rat. eg. függvény a 0 körül folytonos, a mi azt jelenti, hogy a x változót a 0-ból végtelen kevéssel kimozditván, a függvény értéke is csak végtelen keveset változik, és azt az értékét, melyet 0-ban felvett, ennek közvetlen szomszédságában nem ismétli.

Áttérünk most annak kimutatására, hogy a rat. eg. függvény a számsiknak minden más, végesben fekvő, pontja körül szintén folytonos. Legyen α a számsiknak egy tetszőleges pontja, és vizsgáljuk a függvényt egy α centrumu ρ sugaru körön belül, mely $\rho < 1$. Az α körüli pontok formulája $z = \alpha + h$, a hol $|h| = |z - \alpha| < \rho$. Tehát nem kell egyebet tenni, mint a rat. eg. függvényben x helyébe $(\alpha + h)$-t tenni, h-t a $|h| < \rho$ intervallumban változónak tekinteni és a függvény értékét ezen h értékek mellett, összehasonlitani a függvény értékével α-ban. Ha $f(x)$-ben x helyébe $(\alpha + h)$-t helyettesitünk, lesz



$$f(\alpha + h) = a_0 + a_1(\alpha + h) + a_2(\alpha + h)^2 + \cdots + a_n(\alpha + h)^n$$

ha most a fellépő binomokat kifejtjük, és a h ugyanazon hatványával szorzott tagokat egymás alá irjuk, lesz

$$f(\alpha+h) = a_0 +$$
$$a_1\alpha + a_1 h +$$
$$a_2\alpha^2 + 2a_2\alpha h + a_2 h^2 + \dots$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$a_\kappa\alpha^\kappa + \binom{\kappa}{1} a_\kappa \alpha^{\kappa-1} h + \binom{\kappa}{2} a_\kappa \alpha^{\kappa-2} h^2 + \dots + a_\kappa h^\kappa +$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_n\alpha^n + \binom{n}{1} a_n \alpha^{n-1} h + \binom{n}{2} a_n \alpha^{n-2} h^2 + \dots\dots + a_n h^n$$

Az összeadásnál tekintetbe kell venni, hogy az első oszlop nem egyébb, mint $f(\alpha)$; ha az eredeti $f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$ függvényben a változó kitevőjét mindig az illető tag elé irjuk szorzónak, és abban a tagban a kitevőt eggyel kisebbitjük, a nyert

$$f'(z) = a_1 + 2a_2 z + \dots + n a_n z^{n-1}$$

függvényt az eredeti függvény deriváltjának nevezzük, a mely eggyel alacsonyabb foku mint $f(z)$. Látható, hogy ha a második oszlopban álló tagok összegéből h-t közös tényezőnek kivesszük, annak szorzója nem egyébb mint $f'(\alpha)$. Ép igy a harmadik oszlopban $\frac{h^2}{2!}$-t közös tényezőnek kivéve, annak szorzója lesz $f''(\alpha)$ a hol $f''(z)$ az $f'(z)$ deriváltja, tehát $f(z)$ második deriváltja, stb az $(n+1)$-ik oszlopban a $\frac{h^n}{n!}$ közös tényező szorzója $f^{(n)}(\alpha)$, vagyis a függvény n-edik deriváltjának értéke $z=\alpha$ mellett. Ennélfogva

$$f(\alpha+h) = f(\alpha) + f'(\alpha)h + \frac{f''(\alpha)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(\kappa)}(\alpha)}{\kappa!}h^\kappa + \dots + \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}h^n$$

Ezt a sort, mely előállitja az n-edfokú rationális egész függvény értékét $(\alpha+h)$-ban, ha ismerjük magának a függvénynek és összes n deriváltjának az értékét α-ban, nevezzük Taylor féle sornak. A Taylor féle sor segélyével könnyü lesz kimutatni, hogy a rationális eg. függvény a számoknak bármely

α pontja körül folytonos. Mert az $f(\alpha+h)$ épen olyan n-edfokú rationalis eg. függvénye h-nak, mint az eredeti $f(z)$ a z-nek, tehát (1.) $|f(\alpha+h)-f(\alpha)|<\eta$ ha $|h|<\frac{\eta}{A_1+\eta}$

a hol A_1 a h^k hatványok coefficiensei közöl a maximum; és

(2.) $f(\alpha+h)-f(\alpha)\neq 0$, ha $|h|<\left|\frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}\right|\cdot\frac{1}{A_1+\left|\frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}\right|}$

ha t.i. $\frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}$ az első ℓ nem tüno" derivált. Hogy ezen derivaltak közöl tényleg van egy legelső nulltól különböző, kitünik onnan, hogy $a_n\neq 0$, tehát az n-edik derivált $f^{(n)}(\alpha)=n(n-1)\ldots 2.1.a_n=n!a_n$, ha tehát más nem, ez mindig nulltól különböző. Igy tehát a rationális függvény (1) és (2). értelmében a már definiált módon a számsik minden helye körül folytonos.

Van azonban a függvény folytonosságának még egy más definitiója is. Ha ugyanis valamely $f(z)$ függvényről ki akarjuk mutatni, hogy a számsik α pontja körül folytonos-e, veszünk egy szabályos számsorozotot, melynek limese α, tehát pl.

I. $z_1, z_2, z_3, \ldots\ldots z_n\ldots\ldots$ $\lim z_n=\alpha$

és ezen sorozat tagjaira nézve megalkotjuk a függvény értékeit

$f(z_1), f(z_2), f(z_3), \ldots\ldots f(z_n)\ldots\ldots$

ha ezen sorozat szabályos és n alkalmas megválasztásával $|f(z_n)-f(\alpha)|<\eta$ tehető, ~~vagyis ha ezen~~ utóbbi sorozat limese $f(\alpha)$, akkor nyilvánvalóan a függvény α körül folytonos. Könnyen belátható, hogy a rat. eg. függvény (1). és (2.) alapjára teljesiti ezt a feltételt, mert hisz $|f(z_n)-f(\alpha)|<\eta$, mihelyt $|z_n-\alpha|<\frac{\eta}{A_1+\eta}$; már pedig ez a különbség tetszésszerinti kicsinnyre tehető, mivel az I. sorozat szabályos.

Ha a Taylor féle sorban $z=(\alpha+h)$-ból visszahelyettesítjük h értékét $h=z-\alpha$, kapjuk, hogy

$$f(z)=f(\alpha)+f'(\alpha)(z-\alpha)+\frac{f''(\alpha)}{2!}(z-\alpha)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(z-\alpha)^n$$

Tehát a számsiknak α helye körül a rat. eg. függvény előállítható egy $(z-\alpha)$ hatványai szerint haladó sorral.

Vizsgáljuk most a rat. eg. függvényt a számsik végtelen távoli pontja körül, tehát ha $z=\infty$. E végett írjuk a függvényt fordított sorrendben $f(z)=a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_2z^2+a_1z+a_0$ z^n hatványt kivéve közös tényezőnek és $\frac{1}{z}=\zeta$ írva, majd áttérve az absolut értékre

$$|f(z)|=|z^n||\,a_n+a_{n-1}\zeta+\cdots+a_1\zeta^{n-1}+a_0\zeta^n\,|$$

Mivel növekedő z-vel a ζ fogy, nyilvánvaló, hogy

$$|a_{n-1}\zeta+\cdots+a_0\zeta^n|<\eta\,,\quad \text{ha } |\zeta|<\frac{\eta}{A_1+\eta}\,,\quad \text{vagyis ha } |z|>\frac{A_1+\eta}{\eta}$$

úgyhogy $\qquad |f(z)|>|z^n|(|a_n|-\eta)\quad$ ha $\quad |z|>\frac{A_1+\eta}{\eta}$

a hol A_1 a a coefficiensek közöl a maximum absolut értéke.
Az utóbbi egyenlőtlenségből következik, hogy

$$\frac{|f(z)|}{|z^n|}>|a_n|-\eta \qquad \text{és mivel } \lim_{z=\infty}\eta=0,$$

következik, hogy $\qquad \lim_{z=\infty}\frac{|f(z)|}{|z^n|}=|a_n|$

a mi azt mondja, hogy a végtelen távoli helyen $f(z)$ és z^n egyenlő rangú nagyok; vagyis ha z első rangu végtelen nagy, akkor $f(z)$ n-edrangú végtelen nagy. Tehát az n-edfoku rat. eg. függvény a végtelen távoli helyen n-edrangu végtelen nagy, vagy a mint mondani szoktuk, a rat. eg. függvénynek a végtelen távoli helyen n-edrendü polusa van. Sőt kijelölhetjük azt a $|z|$ értéket, melyen túl a függvény absolut értéke állandó-

an nagyobb marad egy tetszésszerinti adott N-nél. Mert $|f(z)| > |z|^n(|a_n| - \eta)$ lévén, ha $|z|^n(|a_n| - \eta) \geqq N$ azaz $|z| \geqq \sqrt[n]{\frac{N}{|a_n| - \eta}}$ akkor $f(z) > N$. Ha tehát ezen utóbbi $|z|$-el 0-ból körz írunk, ezen kívül a függvény abszolut értéke mindenütt nagyobb N-nél.

Vizsgáljuk most, milyen értékeket vehet fel a rationalis eg. függvény a végesben. Ki fogjuk mutatni, hogy mindig lehet 0 körül olyan véges sugarú kört írni, melyen kívül a függvény sohasem lehet nulla, tehát a melyen belül fekszenek a rat. eg. függvény összes nullapontjai. Ugyanis

$$f(z) = z^n(a_n + a_{n-1}\xi + a_{n-2}\xi^2 + \cdots + a_0\xi^n)$$

ha $z \neq 0$, a függvény csak úgy lehet nulla, ha a zárjeles kifejezés 0. De tudjuk, hogy mihelyt $|\xi| < \frac{|a_n|}{A_1 + |a_n|}$, vagyis mihelyt $|z| > \frac{A_1 + |a_n|}{|a_n|}$, a zárjeles kifejezés nem tűnhetik el. Ha tehát ezzel a $|z|$ sugárral kört írunk 0-ból, ezen kívül a függvény sohasem tűnhetik el, csak ezen belül, tehát a függvény összes nullapontjai végesben fekszenek.

Kérdés, most, vajjon van-e a rat. eg. függvénynek ilyen nullapontja, és mi következik abból, ha ilyen tényleg létezik. Vegyük az n-edfokú rat. eg. függvényt

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$$

és tegyük fel, hogy szigorúan bebizonyítottuk azt a tételt, miszerint minden rat. eg. függvénynek van legalább egy nullapontja. Lássuk, mi következik abból. Legyen α_1 az $f(z)$ nullapontja, akkor $0 = a_0 + a_1\alpha_1 + a_2\alpha_1^2 + \cdots + a_n\alpha_1^n$ és a kettő különbségét alkotva

$$f(z) = a_1(z - \alpha_1) + a_2(z^2 - \alpha_1^2) + \cdots + a_n(z^n - \alpha_1^n)$$

$$= (z-\alpha_1)\left[a_1 + a_2(z+\alpha_1) + \cdots + a_n(z^{n-1} + z^{n-2}\alpha_1 + \cdots + \alpha_1^{n-1})\right]$$

mert is ismeretes tétel, hogy $\frac{z^k - \alpha_1^k}{z-\alpha_1} = z^{k-1} + z^{k-2}\alpha_1 + \cdots + z\alpha_1^{k-2} + \alpha_1^{k-1}$.

És ha a $(z-\alpha_1)$-el szorzott $(n-1)$-edfoku rationális függvényt $f_1(z)$-vel jelöljük, kapjuk, hogy $f(z) = (z-\alpha_1) f_1(z)$, a hol $f_1(z)$-ben a változó legmagasabb hatványának z^{n-1}-nek ugyanaz az a_n a coefficiense, mint $f(z)$-ben a z^n-nek, ez azonnal kitünik, ha a [ ] zárjeles kifejezést z hatványai szerint rendezzük. Az utolsó egyenlet tehát azt mondja, hogyha α_1 az $f(z)$-nek nullapontja, akkor ez levválaszt a függvényből egy $(z-\alpha_1)$ <u>prim-factort</u>, melynek szorzója egy z-ben már csak n-edfoku rat. eg. függvény s a melyben z legmagasabb hatványának coefficiense ugyanaz, mint $f(z)$-ben z legmagasabb hatványának coefficiense. Miután feltételünk szerint minden rat. függvénynek van legalább egy gyöke, szükségképen $f_1(z)$-nek is van biztosan egy gyöke, legyen ez α_2, akkor az előbbiek szerint

$$f_1(z) = (z-\alpha_2)\cdot f_2(z)$$

a hol $f_2(z)$ már csak $(n-2)$-edfoku. A feltétel szerint $f_2(z)$-nek szintén van egy gyökle α_3, úgyhogy

$$f_2(z) = (z-\alpha_3) f_3(z)$$

és igy tovább folytatva a következtetést $(n-1)$-szer, kapjuk, hogy

$$f_{n-1}(z) = (z-\alpha_n) f_n(z)$$

a hol már $f_n(z)$ nulladfoku, azaz állandó, és mivel másfelől benne a legmagasabb hatvány coefficiense a_n, következik, hogy $f_n(z) = a_n$. Ha ezeket az értékeket most visszafelé behelyettesitjük, kapjuk, hogy

$$f(z) = a_n(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)(z-\alpha_3)\cdots(z-\alpha_n)$$

A feltételből tehát következik, hogy minden n-edfokú rationalis eg. függvény előállítható mint n primfactor szorzata, vagy a mi ugyanazt mondja, minden egész rationális egész függvénynek épenséggel n gyöke van. Hogy több nullapontja nem lehet, mint n, kiolvasható a szorzatalakból. Ha. ugyanis α_{n+1} egy az előbbi n nullaponttól különböző nullapontja volna a mi n-edfokú rat. eg. függvényünknek, akkor

$$0 = a_n(\alpha_{n+1}-\alpha_1)(\alpha_{n+1}-\alpha_2)\ldots(\alpha_{n+1}-\alpha_n)$$

egyenlet csak úgy állhatna fenn, ha $a_n = 0$, a mi pedig a feltétellel ellenkezik. Ha tehát a függvény tényleg n-edfokú, akkor csakis n nullapontja lehet. Ebből következik minden egy másik tétel. Ha ugyanis adva van egy legfeljebb n-edfokú rat. eg. függvény, mely z-nek több mint n értéke mellett eltünik, ez csak úgy lehetséges, hogy a függvény összes coefficienseí, tehát maga a függvény is identikusan, nulla. Mert, ha n nullapontja van a függvénynek, akkor

$$f(z) = a_n(z-\alpha_2)(z-\alpha_2)\ldots(z-\alpha_n)$$

ha most α_{n+1} egy az előbbiektől különböző nullapont, akkor a

$$0 = a_n(\alpha_{n+1}-\alpha_2)(\alpha_{n+1}-\alpha_2)\ldots(\alpha_{n+1}-\alpha_n)$$

egyenlet csak úgy teljesülhet, ha $a_n = 0$. Ez által az n-edfokú egyenlet reducalódik egy $(n-1)$-edfokura, melynek a feltevés szerint több mint $(n-1)$ gyöke lévén, következik, hogy a_{n-1} is eltünik, stb. eltünik $a_{n-2}, \ldots a_3, a_2, a_1, a_0$, vagyis eltünnek a függvény összes coefficienseí, a függvény identikusan nulla. Ebből továbbá következik, hogy ha két n-edfokú rat. eg. függvény

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n$$

$$g(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots + b_n z^n$$

több mint n z érték mellett egyenlő egymással, akkor ez csak úgy lehetséges, hogy a megfelelő coefficiensek egyenlők egymással. Mert a két függvény különbsége

$$\varphi(z) = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1) z + \dots + (a_n - b_n) z^n$$

ennek pedig a feltétel értelmében több mint n nullapontja van, de akkor $a_0 - b_0 = 0, \dots a_n - b_n = 0$

vagyis $a_0 = b_0, \dots a_n = b_n$

vagyis a két függvény identikus

Ezen tételeknek most megadjuk a biztos alapot azáltal hogy bebizonyítjuk, miszerint minden rat. eg. függvénynek van legalább egy gyöke. Az algebrának ezen alaptételét először Gauss bizonyította be 4 ízben, majd Cauchy és Hamilton is bebizonyította. Mi itt Hamilton bizonyítását fogjuk követni.

Hamilton teljes inductiot használ és kimutatja először, hogy minden első és másodfoku függvénynek van nullapontja. Ugyanis $a_0 + a_1 z = 0$ egyenletből $z = -\frac{a_0}{a_1}$; tehát minden első fokú rat. eg. függvénynek van egy gyöke.

Az $a_0 + a_1 z + a_2 z^2 = a_0 + a_2 \left(z + \frac{a_1}{2a_2}\right)^2 - \frac{a_1^2}{4a_2} = 0$ másodfokú egyenletből $\left(z + \frac{a_1}{2a_2}\right)^2 = \frac{a_1^2 - 4a_0 a_2}{4a_2^2}$ tehát

$$z = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}}{2a_2}$$

vagyis minden másodfokú rat. eg. függvénynek van – plánéket nullapontja, tehát legalább egy mindenesetre van.

És most áttérve a teljes inductiora, tegyük fel, hogy

a tétel helyes egy $(n-1)$-ed fokú függvényre s mutassuk ki, hogy ekkor érvényes egy n-edfokúra is. Ha a teljes indukció sikerül, a tétel általános érvényessége be van bizonyítva, mert helyes egy 2-odfokúra, tehát egy 3, 4, ... n-edfokúra is.

Feltesszük tehát, hogy egy $(n-1)$-ed fokú függvénynek van legalább egy nullapontja, s most vegyünk egy n-edfoku függvényt

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$$

és mutassuk ki, hogy ennek az algebrai egyenletnek van legalább egy gyöke. Feltehetjük, hogy $a_0 \neq 0$, mert hisz ha $a_0 = 0$, akkor $z=0$ már egy gyöke az egyenletnek. A fenti követelést tehát így is irhatjuk

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z = -a_0$$

Továbbá vegyük tekintetbe, hogy az alacsonyabb hatványok coefficiensei közül nemelyek el is tünhetnek, és tegyük fel, hogy a_k az első nulltól különböző coefficiense; akkor a követelés

$$z^k (a_n z^{n-k} + a_{n-1} z^{n-k-1} + \dots + a_{k+1} z + a_k) = -a_0$$

A zárjeles kifejezés egy $(n-k)$-adfokú függvény s mivel k legalább 1, azért feltevésünk szerint a zárjeles kifejezésnek van egy nullapontja, ez akkor primfactorokra bontható

$$a_n (z-\beta_1)^{k_1} (z-\beta_2)^{k_2} \dots (z-\beta_r)^{k_r}$$

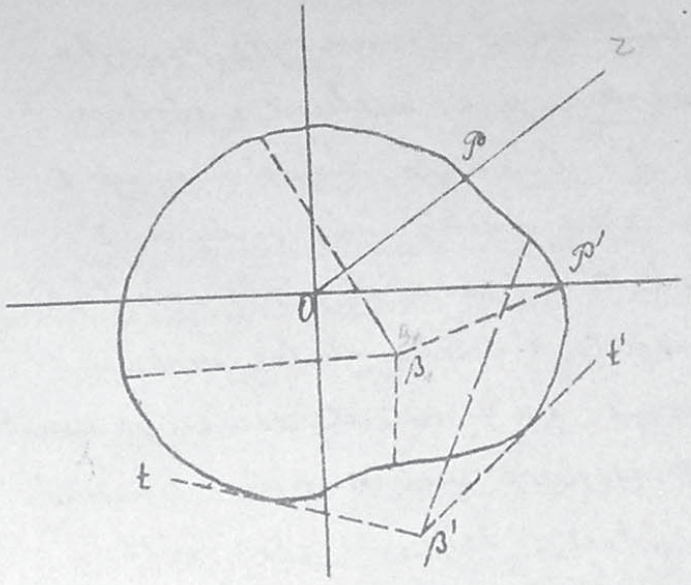
mert lehet, hogy nemely $\beta - k$ többszörös gyökei a zárjeles függvénynek, a mi akkor fog bekövetkezni, ha egy-egy a primfactor többször lép fel, ha tehát $\beta_1, \beta_2, \dots \beta_r$ ezen függvénynek $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_r$ - szeres gyöke, akkor a fenti egyenlet így is irható

$$z^k \cdot a_n (z-\beta_1)^{\lambda_1} (z-\beta_2)^{\lambda_2} \dots (z-\beta_r)^{\lambda_r} = -a_0$$

keresztül osztva az egyenletet a_0-al, és $\frac{a_n}{a_0} = A$ írva, jelöljük az egyenlet baloldalán így fellépő függvényt $\varphi(z)$-vel, tehát

$$\varphi(z) = Az^k(z-\beta_1)^{k_1}(z-\beta_2)^{k_2}\cdot\ldots\cdot(z-\beta_r)^{k_r} = -1$$

Feladatunk tehát kimutatni, hogy létezik mindenesetre z-nek legalább egy értéke, mely mellett $\varphi(z) = -1$, azaz a mely mellett $|\varphi(z)| = 1$ és $\arg.\varphi(z) = \pi + 2k\pi$. Úgy járunk el, hogy először keressük azaz értékeket, melyek mellett az első feltétel teljesül, azután ezekből kikeressük azt, mely a másodikat is kielégíti. A számsíknak nullapontjából húzzunk egy tetszésszerinti Oz egyenest, s ezen változtassuk a z-t 0-tól ∞-ig. Ha $z=0$, akkor $\varphi(z)=0$, s ha z elég nagy, akkor $|\varphi(z)| > N$ tehető; s miután a rationális egész függvény folytonos, kell lennie 0 és ama z között egy olyan z pontnak, melyben $|\varphi(z)| = 1$. Legyen ez a pont az Oz egyenesen P. Úgy azaz áll az O-ból kiinduló valamennyi egyenesre, mindegyiken van egy olyan P pont, melyben $|\varphi(z)| = 1$. Ezek a P pontok pedig a függvény folytonosságából kifolyólag folytonosan sorakoznak egymáshoz, és így O-körül zárt görbét alkotnak. A mig z ezen a zárt görbén végighalad, $|\varphi(z)|$ állandóan 1.



És most ki kell mutatni, hogy ezen z értékek között van legalább 1, melyre nézve $\varphi(z)$ szöge $\pi + 2k\pi$, azaz aequivalens π-vel. E végett

meg kell vizsgálni, hogy a $\varphi(z)$ szorzat szöge milyen határok között változhatik, ha z egyszer végig megy a görbén. Miután szorzat szöge annyi, mint a tényezők szögeinek összege, külön meg kell vizsgálni a tényezők szögváltozásait. Kiindulunk pl. a reális tengelyből, a görbe P' pontjából. A constans lévén, szöge α nem változik; z a P'-ben 0 szöggel bir, egyszeri körüljárás után növekedik 2π-vel, tehát z^k szöge növekedik $2k\pi$-vel. A többi factoroknál különbséget kell tennünk, mert a β-ák egyike sem fekhetik a görbében, mivel ezek mellett $\varphi(z)=0$; ezek vagy a görbén belül, vagy azon kivül fekszenek. Legyen egy a görbén belül fekvő nullapont β_1; ennek ábrázoló pontja B_1, akkor a B_1P' vectort jellemzi $(z-\beta_1)$. Ennek szöge legyen α_1, akkor $(z-\beta_1)^{\lambda_1}$ szöge $\lambda_1.\alpha_1$ s ha z végig jár a görbén és pedig az óramutató járásával ellenkező értelemben, akkor α_1 szaporodik 2π-vel, tehát $\lambda\alpha_1$ szaporodik $\lambda.2\pi$-vel. Tegyük fel, hogy s ilyen a görbén belül fekvő β van: $\beta_1, \beta_2, \dots \beta_s$

A második csoportba tartoznak azok a β-k, melyek a görbén kivül fekszenek. Legyen egy ilyen β'. Látható, hogy a mig z végighalad a görbén, $(z-\beta')$ szöge α'-ször addig nő, mig a β' ábrázoló pontját B'-et P'-el összekötő egyenes a görbe érintőjévé válik, azontul ismét fogy és eredeti α' értékével tér vissza. Ennélfogva tehát $(z-\beta')^{\lambda'}$ kezdő-szöge $\lambda'\alpha'$, visszatérési szöge szintén $\lambda'\alpha'$. Ugyanez áll a második csoport valamennyi tényezőjére, mely csoportban vannak a $\beta_{s+1}, \beta_{s+2}, \dots \beta_r$ nullapontok. Ha tehát az egyes tényezők

$$A,\quad z^k,\quad (z-\beta_1)^{\lambda_1}, \dots (z-\beta_s)^{\lambda_s}, (z-\beta_{s+1})^{\lambda_{s+1}}, \dots (z-\beta_r)^{\lambda_r}$$

kezdő szögeik $\quad \alpha,\quad 0,\quad \lambda_2\alpha_2, \dots \lambda_s\alpha_s, \lambda_{s+1}\alpha_{s+1}) \dots \lambda_r\alpha_r$

ekor növekedéseik megfelelőleg

$$0,\ 2k\pi,\ \lambda_1 2\pi,\ \ldots \lambda_s 2\pi,\ 0,\ \ldots\ 0$$

s ha A a $\varphi(z)$ kezdő szöge, tehát $A = \alpha + \lambda_1\alpha_1 + \cdots + \lambda_s\alpha_s + \cdots + \lambda_r\alpha_r$ akkor egyszeri körüljárás után $\varphi(z)$ szöge

$$A + 2\pi(\varepsilon + \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots \lambda_s)$$

a hol a zárjelben csupa positiv egész számok vannak, mert hisz k és a λ kitevők legalább az 1 értéket felveszik. Mondhatjuk tehát, hogy miközben z a zárt görbe valamely pontjából kiindulva azon végig megy, $\varphi(z)$ szöge mindenesetre növekedik legalább 2π-vel. Ha most tekintetbe vesszük, hogy a míg z a zárt görbén végig halad, azalatt a megfelelő $\varphi(z)$ az egységsugaru körön legalább egyszer körülhalad, nyilvánvaló, hogy $\varphi(z)$ legalább egyszer át fog menni a reális tengely (-1) pontján. Tehát mindenesetre létezik legalább egy olyan z érték, mely mellett $\varphi(z) = -1$. De ugyanezen z érték mellett teljesülni fog az $a_n z^\varkappa (z-\beta_1)^{\lambda_1} \ldots (z-\beta_r)^{\lambda_r} + a_0 = 0$

vagyis az $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$ egyenlet

a mi azt mondja, hogy a baloldalán álló n-edfokú rat. eg. függvénynek van legalább egy nullapontja. Ebből, a mint láttuk, következik, hogy minden n-edfokú rat. eg. függvény n gyökkel bir, vagyis a függvény felbomlik n lineáris factorra $f(z) = a_n(z-x_1)(z-x_2)\cdots(z-x_n)$

Ez azonban csak egyik szélső eset, midőn a gyökök mind különbözők. Ha több gyök összeesik, akkor az illető primfactorok a szorzatalakban mint egy hatvány szerepelnek, és a kitevő mutatja, hogy hány gyök esik össze, vagyis hányszoros az illető

gyök. Az általános eset tehát az, midőn az $f(z)$ függvénynek

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r$ gyökei

$k_1, k_2, \ldots k_r$-szeres gyökök, akkor

$$f(z) = a_n (z-\alpha_1)^{k_1}(z-\alpha_2)^{k_2}\ldots(z-\alpha_r)^{k_r}$$

$k_1, k_2, \ldots k_r$ a gyökök sokszorossági számainak neveztetnek. A másik szélső eset az, midőn a függvény összes nullapontjai összesnek α-ban, tehát a függvénynek egy n-szeres gyöke van, akkor

$$f(z) = a_n (z-\alpha)^n$$

Természetes, hogy az a tétel, miszerint minden n-edfoku rat. eg. függvénynek épen n gyöke van, úgy értendő, hogy a függvény minden k-szoros gyöke k egyszerü gyöknek számitandó.

Taylor sora azonnal mutatja, hogy mikor van a függvénynek többszörös nullapontja. Tegyük fel, hogy α a függvény egyik nullapontja, akkor e körül sorbabontva a függvényt Taylor tétele szerint $f(z) = f(\alpha) + f'(\alpha)(z-\alpha) + \ldots + \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(z-\alpha)^n$

Már most ha azt akarjuk, hogy α egyszerü nullapontja legyen $f(z)$-nek, azaz hogy $f(z)$ a $(z-\alpha)$ factorral osztható legyen, $f(\alpha)$-nak el kell tünnie; hogy $(z-\alpha)^2$-al legyen osztható $f(z)$, ahhoz szükséges, hogy $f'(\alpha)$ is eltünjék, stb., hogy α k-szoros gyöke legyen $f(z)$-nek, azaz hogy $f(z)$ a $(z-\alpha)^k$ factorral osztható legyen, ahhoz szükséges, hogy $f^{(k-1)}(\alpha)$ is eltünjék, de már $f^{(k)}(\alpha) \neq 0$ legyen. Tehát arra, hogy α az $f(z)$ függvénynek k-szoros nullapontja legyen, szükséges, hogy úgy a függvény maga, valamint a k-adikig vett összes deriváltjai $z=\alpha$ mellett eltünjenek, de már a k-adik derivált $z=\alpha$ mellett nulltól különböző legyen. És fordítva, ha ez teljesül, akkor α a függvénynek k-szoros nullapontja.

Azt is könnyen eldönthetjük a Taylor féle sorral, hogy $f(z)$-nek k-szoros gyöke hányszoros gyöke az egyes deriváltaknak. Ugyanis

$$f'(z) = f'(\alpha) + f''(\alpha)(z-\alpha) + \frac{f'''(\alpha)}{3!}(z-\alpha)^2 + \cdots \frac{f^{(n-1)}(\alpha)}{(n-1)!}(z-\alpha)^{n-1}$$

Ha most α az $f(z)$-nek csak kétszeres nullapontja, vagyis ha csak $f'(\alpha)=0$, akkor az utóbbi egyenlet értelmében α az $f'(z)$-nek egyszerű nullapontja. Úgy következik, hogy egész általánosan, ha α az $f(z)$-nek k-szoros nullapontja, akkor az első deriváltnak már csak $(k-1)$ szeres, a második deriváltnak csak $(k-2)$-szeres nullapontja, stb. a $(k-1)$-ik deriváltnak egyszerű nullapontja, de már a k-adik deriváltnak nem nullapontja.

Ebből a tételből következtetést vonhatunk, miképen viselkedik a függvény annak egy k-szoros nullapontja körül. Ha ugyanis α k-szoros nullapont, akkor a Taylor féle sorból a k első tag eltünvén,

$$f(z) = \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}(z-\alpha)^k + \frac{f^{(k+1)}(\alpha)}{(k+1)!}(z-\alpha)^{k+1} + \cdots$$

tehát

$$\frac{f(z)}{(z-\alpha)^k} = \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!} + \frac{f^{(k+1)}(\alpha)}{(k+1)!}(z-\alpha) + \cdots$$

és

$$\lim_{z=\alpha} \frac{f(z)}{(z-\alpha)^k} = \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}$$, a mi azt mondja, hogy

$$f(z) (=) (z-\alpha)^k$$

vagyis $f(z)$ egyenlő" rangu kicsiny $(z-\alpha)^k$-val. Ha $(z-\alpha)$ elsőrangu végtelen kicsiny, akkor $f(z)$ k-adrangu végtelen kicsiny, és így kapjuk azt a tételt, hogy egy k-szoros nullapont körül a függvény k-adrangu végtelen kis mennyiség.

Kérdés, ha megadunk egy tetszésszerint határozott © számot, léteznek-e olyan x értékek, melyek mellett $f(z) = ©$. Más alakban ez az

egyenlet $f(z)-c=0$. Ennek pedig, mint n-edfoku rat. eg. függvényt tartalmazó egyenletnek épen n gyöke van, a miből következik, hogy $f(z)$ függvény n helyen veszi fel az adott c értéket. Tehát minden n-edfoku rat eg. függvény egy tetszésszerint adott értéket a számsiknak n helyén vesz fel.

Tegyük fel, hogy a függvény coefficienseci reálisok, akkor

$$f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n$$

z-nek reális értékei mellett reális lesz, z-nek complex értékei mellett complex. Ha pedig z helyébe először egy complex számot, azután ennek conjugáltját tesszük, akkor az $f(z)$ megfelelő értékei is conjugált complexek lesznek. Mert ha pl. az első z érték

$z_1=x+yi=\varrho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ a második $z_2=x-yi=\varrho(\cos\varphi-i\sin\varphi)$

akkor a k-adik tag a két esetben

$$a_k z_1^k=a_k\varrho^k\cos k\varphi+ia_k\varrho^k\sin k\varphi$$
$$a_k z_2^k=a_k\varrho^k\cos k\varphi-i\cdot a_k\varrho^k\sin k\varphi$$
$$(k=1,2,\cdots n)$$

tehát a megfelelő tagok conjugáltak és így a függvényértékek maguk is conjugált complexek, azaz ha

$$f(z_1)=X+Yi$$

akkor $$f(z_2)=X-Yi$$

Ebből következik, hogy, ha egy $f(z)$ reális coefficiensekkel biró rat. eg függvénynek egy complex nullapontja van, akkor mindig van egy ehhez conjugált complex nullapontja is. Mert ha $f(z_1)=X+Yi=0$, és ez mindig lehetséges. Ha külön $X=0$ és $Y=0$, de akkor $f(z_2)=X-Yi$ is eltünik azaz $f(z_2)=0$, tehát z_2 is nullapontja a függvénynek. Ha az egyik nullapont $z_1=x+yi$, és $z_2=x-yi$, akkor a megfelelő pro-

factorok szorzata $(z-\alpha-\beta i)(z-\alpha+\beta i) = (z-\alpha)^2+\beta^2$

tehát két conjugált complex nullapont primfüggvényeinek szorzata egy quadratikus reális függvény, és így mondhatjuk, hogy minden, reális coefficiensekkel bíró, rat. eg. függvényt fel lehet bontani első és másodfoku factorokra.

A rationalis egész függvény meghatározása Lagrange formulája.

Egy n-edfoku rat. eg. függvényben (n+1) constans szerepel: $a_0, a_1, \ldots a_n$. Ez az (n+1) coefficiens teljesen meghatározza a függvényt, De más (n+1) adat is szolgálhat a rat. eg. függvény meghatározására. Tegyük fel, hogy megadjuk azt az n helyet: $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$, ahol egy megszerkesztendő n-edfokú rat. eg. függvény eltünik, és azt a β_{n+1} helyet, a hol a függvény értéke $u_{n+1} \neq 0$, akkor ezen adatokból a kérdéses függvény megszerkeszthető. Mert egyfelől

$$f(z) = a_n(z-\beta_1)(z-\beta_2)\ldots\ldots(z-\beta_n)$$

másfelől $$u_{n+1} = a_n(\beta_{n+1}-\beta_1)(\beta_{n+1}-\beta_2)\ldots\ldots(\beta_{n+1}-\beta_n)$$

a melyből $$a_n = \frac{u_{n+1}}{(\beta_{n+1}-\beta_1)\ldots\ldots(\beta_{n+1}-\beta_n)}$$ és ezt beteve az

első formulába $$f(z) = u_{n+1}\frac{(z-\beta_1)\ldots\ldots(z-\beta_n)}{(\beta_{n+1}-\beta_1)\ldots\ldots(\beta_{n+1}-\beta_n)} \qquad \text{I.}$$

ha ezt a kifejezést rendezzük, megkapjuk a kivánt n-edfokú rat. eg. függvényt, a mely a $\beta_1 \ldots \beta_n$ helyeken eltünik, a β_{n+1} helyen pedig felveszi az u_{n+1} értéket.

Egy más meghatározási módja a rat. eg. függvénynek, Le-

grangetől származik. E szerint megszerkeszthetjük az n-edfokú rat. eg. függvényt $f(z)$-t, ha megmondjuk, hogy

$f(z)$ értéke a $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n, \beta_{n+1}$ helyeken

$u_1, u_2, \ldots u_n, u_{n+1}$

Ugyanis az előbbi formula szerint meghatározzuk az $n\varphi_1$ n-edfokú rat. eg. függvényt, melynek értéke $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n, \beta_{n+1}$ helyen

$u_1, 0, \ldots 0, 0$; továbbá azt a

φ_2 " " " " $0, u_2, \ldots 0, 0$; " " "

. . . . . azt a

φ_n " " " " $0, 0, \ldots u_n, 0$, és végre " "

φ_{n+1} " " " " $0, 0, \ldots 0, u_{n+1}$.

akkor a keresett függvény

$$f(z) = \varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_n + \varphi_{n+1} \qquad \text{III.}$$

mert ez az összeg egy n-edfokú rat. eg. függvény (lévén mindegyik tagja az), mely a $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{n+1}$ helyeken az előírt értékekkel bir, mivel mindannyiszor az illető β-vab nem egyenlő indexü φ függvények az összegből eltünnek. Ilyen $f(z)$ függvény, mely a fenti előírt tulajdonságokkal bir, csak egy van. Mert tegyük fel, hogy volna még egy, az előbbitől különböző alaku $g(z)$ függvény, mely ugyanazokkal a tulajdonsagokkal bir, mint $f(z)$; kimutatjuk, hogy ez a két rat. eg. függvény identikus. Mert megalkotva a kettő különbségét, ez a $\chi(z) \equiv f(z) - g(z) = 0$, ha $z = \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n, \beta_{n+1}$ vagyis ez a különbséges n-edfoku rat. eg. függvény (n+1) helyen válik nullá, de akkor coefficiensei egy ismeretes tétel szerint nullák, vagyis ugyancsak tétel szerint a két $f(z)$ és $g(z)$ függvény identikus. Tehát csak egy ilyen $f(z)$ függvény létezik.

Az I. alatti formulát Lagrange féle formulának nevezzük. Ezt egyszerűbb alakban is felirhatjuk. E végett lássuk előbb, miképen lehet a szorzatalakban adott $f(z)$ függvényi első deriváltját a primfactorokkal kifejezni. Ha a Taylor féle sorban szerint z helyébe $(z+h)$-t irunk, akkor

$$f(z+h) = f(z) + f'(z)h + \cdots + \frac{f^{(n)}(z)}{n!}h^n$$

tehát a h-val szorzott rész a függvény első deriváltja. Ennélfogva, ha a függvény szorzatalakjában

$$f(z) = a_n(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_n)$$

z helyébe $(z+h)$-t irunk és a szorzásokat elvégezzük, akkor a h-val szorzott tagok összege $f'(z)$. Miután az

$$f(z+h) = a_n(z-\alpha_1+h)(z-\alpha_2+h)\cdots(z-\alpha_n+h)$$

szorzatból csakis a h-val szorzott tagokra van szükségünk, ezeket nyerjük, ha vesszük az első factorból a h-t és ezt szorozzuk a többi factorok $(z-\alpha_k)$ alakú tagjaival $(k=2,3,\ldots n)$; ezt tesszük valamennyi factorból kiragadott h-ra nézve, akkor ezen szorzatok összege $f'(z)h$, tehát

$$\begin{aligned} f'(z) = {} & a_n(z-\alpha_2)(z-\alpha_3)\cdots\cdots(z-\alpha_n) + \\ & + a_n(z-\alpha_1)(z-\alpha_3)\cdots\cdots(z-\alpha_n) + \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots + \\ & + a_n(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots\cdots(z-\alpha_{n-1}) \end{aligned}$$

Ezen képlet szerint nyerjük a függvény első deriváltját, ha a függvény szorzatalakban van megadva. Ebből adódnak az első derivált értékei a függvény nullapontjaiban

$$\begin{aligned} f'(\alpha_1) &= a_n(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)\cdots\cdots(\alpha_1-\alpha_n) \\ f'(\alpha_2) &= a_n(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)\cdots\cdots(\alpha_2-\alpha_n) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f'(\alpha_n) &= a_n(\alpha_n-\alpha_1)(\alpha_n-\alpha_2)\cdots\cdots(\alpha_n-\alpha_{n-1}) \end{aligned}$$

vagyis az első derivált értéket valamely nullapontban megkapjuk, ha ebből a nullapontból levonva rendre a többi nullapontokat, ezen különbségek szorzatát még az a_n constanssal szorozzuk.

Ezeket tudva most már egyszerűbb alakban is felirhatjuk a Lagrange féle formulát. Legyen ugyanis

$$g(z) = (z-\beta_1)(z-\beta_2)\dots(z-\beta_n)(z-\beta_{n+1})$$

akkor

$$g'(\beta_1) = (\beta_1-\beta_2)(\beta_1-\beta_3)\dots(\beta_1-\beta_n)(\beta_1-\beta_{n+1})$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$g'(\beta_{n+1}) = (\beta_{n+1}-\beta_1)(\beta_{n+1}-\beta_2)\dots\dots(\beta_{n+1}-\beta_n)$$

De láttuk, hogy a Lagrange féle formulában szereplő φ_1 az I formula szerint:

$$\varphi_1 = u_1 \frac{(z-\beta_2)(z-\beta_3)\dots(z-\beta_{n+1})}{(\beta_1-\beta_2)(\beta_1-\beta_3)\dots(\beta_1-\beta_{n+1})}$$ diagramf.

a felső nem egyébb, mint $\frac{g(z)}{z-\beta_1}$, az alsó $g'(\beta_1)$ és $u_1 = f(\beta_1)$, tehát

$$\varphi_1 = \frac{f(\beta_1)}{g'(\beta_1)} \cdot \frac{g(z)}{z-\beta_1}$$

analog uton adódik, hogy $\varphi_2 = \frac{f(\beta_2)}{g'(\beta_2)} \cdot \frac{g(z)}{z-\beta_2}$

stb.

ezeket a φ függvényeket összegezve, kapjuk a Lagrange féle formula következő egyszerü alakját

$$f(z) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{f(\beta_k)}{g'(\beta_k)} \cdot \frac{g(z)}{z-\beta_k}$$

Tört rationalis függvény.

Az olyan függvényt, melyben a változó az állandókkal a négy rationalis operatio: összeadás, kivonás, szorzás és osztás által van összekapcsolva, nevezzük tört rationalis függvénynek. Bármily complicált módon is legyenek az állandók a változóval összekapcsolva, ha elvégezzük a négy operatiot, mindig erre a normalis alakra hozhatjuk a tört rat. függvényt:

$$F(z)=\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n}{b_0+b_1z+b_2z^2+\cdots+b_mz^m}$$

Tehát a tört rationális függvény két eg. rat. függvény hányadosa, melynek felsője és alsója lehetnek egyenlő, vagy különböző fokúak. A normális alakban a felső n, az alsó m-edfokú és $n \gtrless m$.

Miután a rationális operatiók egyértékűek, azért a tört rat. függvény is egyértékű. Tehát általánosan: a rationalis függvény egyértékű függvény. De a tört rat. függvény már nem mindig véges és határozott, mert lehet z-nek olyan értéke, mely mellett $F(z)=\frac{0}{0}$ határozatlan alakot ölt. Azonban ki fogjuk mutatni, hogy mindig lehet úgy átalakítani a tört rat. függvényt, hogy az sohasem vehessen fel határozatlan alakot. Ugyanis mit jelent az, hogy $F=\frac{0}{0}$? azt, hogy van olyan z érték, pl. α, mely mellett $f(\alpha)=0$ és $g(\alpha)=0$, vagyis van a felső és alsó függvénynek egy közös gyöke. De tudjuk, hogy akkor mindkettő osztható a $(z-\alpha)$ primfaktorral (vagy esetleg ennek egy magasabb hatványával). A tört rationális függvény tehát csak akkor válik határozatlanná, ha a felső és alsó függvénynek közös osztója van, mert ilyenkor mindig van közös gyö-

ke is. Erre a közös osztóra nézve vezessünk le néhány szükséges tételt.

Ha adva két rat. eg. függvény $f(z)$ és $\varphi(z)$, akkor $f(z)$ osztható lesz $\varphi(z)$-vel, ha létezik olyan $\psi(z)$ rat. eg. függvény, miszerint $f(z) = \varphi(z).\psi(z)$. Ez definiálja az osztható dgot.

Ha két függvény $f(z)$ és $g(z)$ külön-külön osztható egy $\varphi(z)$ függvénnyel, akkor összegük és különbségük is osztható ezzel a $\varphi(z)$-vel.

Mert ha
$$f(z) = \varphi(z) \cdot \psi(z)$$
$$g(z) = \varphi(z) \cdot \chi(z)$$
akkor
$$f(z) \pm g(z) = \varphi(z)[\psi(z) \pm \chi(z)] = \varphi(z) \cdot \tau(z)$$
a mi azt mondja, hogy az összeg és különbség is osztható $\varphi(z)$-vel.

Ha $f(z)$ osztható $\varphi(z)$-vel, de $g(z)$ nem, akkor összegük és különbségük sem osztható $\varphi(z)$-vel; mert ha
$$f(z) = \varphi(z) \cdot \psi(z)$$
és feltennők, hogy $f(z) \pm g(z) = \varphi(z) \cdot \tau(z)$, akkor ebből következnék, hogy
$g(z) = \varphi(z) \cdot \chi(z)$ azaz osztható volna $\varphi(z)$-vel, pedig feltettük, hogy nem osztható.

Azt a legmagasabb fokú eg. rat. függvényt, mely két adott eg. rat. függvényt oszt, nevezzük a két függvény legnagyobb közös osztójának. Ezek után könnyű lesz átalakítani a tört rat. függvényt úgy, hogy ne vehesse fel egy helyen sem a $\frac{0}{0}$ alakot. Ha ugyanis $f(z)$ és $g(z)$ ezen tört rat. függvény felső- illetőleg alsója, akkor a kettő legnagyobb közös osztója $\varphi(z)$, tehát
$$f(z) = \varphi(z) \cdot f_1(z)$$
$$g(z) = \varphi(z) g_1(z)$$
akkor $f_1(z)$ és $g_1(z)$-nek már nem lehet közös gyöke, mert volna, pl. α, akkor mindkét függvény még osztható volna $(z-\alpha)$-val, tehát volna $f(z)$ és $g(z)$-nek egy a $\varphi(z)$-nél magasabb fokú legnagyobb közös osztója,

a mit pedig kizártunk, mert feltettük, hogy $q(z)$ a legnagyobb közös osztó. Így tehát osztva felsőt és alsót $q(z)$-vel,

$$F(z) = \frac{f_1(z)}{g_1(z)}$$ már sohasem válik határozatlanná. A későbbiekben mindig feltesszük, hogy a tört rat. függvény ezen értelemben már át van alakítva. Ezen észrevételeket még kiegészítjük annak megmutatásával, miképen lehet két adott eg. rat. függvény legnagyobb közös osztóját felkeresni.[2] A két függvényt, $f(z)$ és $g(z)$-t, előbb rendezzük z fogyó hatványai szerint, aztán a magasabb fokút osztjuk az alacsonyabb fokúval (ha fokszámaik egyenlők, akármelyikkel osztathatunk). Legyen pl. $f(z)$ fokszáma n, $g(z)$ fokszáma m, és $n \geq m$, akkor két eset lehetséges:

1.) Lehet, hogy $\frac{f(z)}{g(z)} = q(z)$, vagyis $f(z)$ a $g(z)$-vel osztható maradék nélkül, a $q(z)$ hányados tehát rat. eg. függvény. Ebben az esetben a két függvény legnagyobb közös osztója maga $g(z)$.

2.) Lehet, hogy $\frac{f(z)}{g(z)} = q(z) + \frac{r_1(z)}{g(z)}$ - vagyis $f(z)$ nem osztható $g(z)$-vel maradék nélkül, de ekkor a maradék $r_1(z)$ már legfeljebb csak $(m-1)$ edfokú. A fenti egyenlőségből két fontos következtetést vonhatunk. Ezt átszorozva $g(z)$-vel, kapjuk, hogy

$$f(z) = g(z) \cdot q(z) + r_1(z) \qquad \text{I.}$$

és ebből $$f(z) - g(z) \cdot q(z) = r_1(z) \qquad \text{II.}$$

Az I egyenletből következik, hogy a $g(z)$ osztónak és az $r_1(z)$ maradéknak legnagyobb közös osztójával az $f(z)$ osztandó is osztható. És II.-ből következik, hogy az osztandó és osztó legnagyobb közös osztójával a maradék is osztható. Ez mindjárt megmutatja az utat, melyen haladva

a két függvény legnagyobb közös osztóját megtalálhatjuk. Mert I. értelmében, ha felkeressük az osztó és maradék legnagyobb közös osztóját, ez az $f(z)$ és $g(z)$-nek is legnagyobb közös osztója lesz, de ez a feladat már egyszerűbb, mert hisz $r_1(z)$ legfeljebb $(m-1)$-ed fokú. Tehát úgy haladunk tovább, hogy felkeressük $g(z)$ és $r_1(z)$ legnagyobb közös osztóját, mi véget előbbit utóbbiával elosztjuk. Nem vesszük tekintetbe azt az esetet, midőn az osztás maradéka nulla, ekkor ugyanis a legutolsó hányados a keresett legn. k. osztó. Tehát legyen I. analogiájára

$$g(z) = r_1(z)\,q_1(z) + r_2(z)$$

a hol $r_2(z)$ már legfeljebb $(m-2)$-edfokú. Most $r_1(z)$-t tekintjük osztandónak, $r_2(z)$-t osztónak, lesz $r_1(z) = r_2(z)\cdot q_2(z) + r_3(z)$ és így tovább folytatva, mindig a legutolsó osztót osztandónak, a maradékot osztónak tekintve, végre, miután a maradék foka mind lejebb száll, két eset következhetik be. 1.) Lehet, hogy a k-adik osztásnál nem lép fel maradék, azaz

$$r_{k-1}(z) = r_k(z)\cdot q_k(z)$$

ekkor a már mondottak alapján ezen utolsó osztó $r_k(z)$ az $f(z)$ és $g(z)$ legnagyobb közös osztója, mert hisz minden előtte való osztó és osztandónak legnagyobb közös osztója.

2.) Lehet, hogy a k-adik osztás maradéka egy nulltól különböző állandó, azaz

$$r_{k-1}(z) = r_k(z)\cdot q_k(z) + \mathrm{Const.}$$

ekkor nyilvánvaló, hogy $f(z)$ és $g(z)$-nek nincs közös osztója. Mert ha volna, akkor a II. tétel szerint lefelé következtetve, ez az utolsó osztónak $r_k(z)$-nek és a Const.nak is közös osztója volna, de ez absurdum. Ebben az esetben tehát $f(z)$ és $g(z)$-nek nem lévén közös gyöke, az $\frac{f(z)}{g(z)}$ tört rat. függvény sehol sem válik határozatlanná.

Két rat. eg. függvény legnagyobb osztójának ezen felkeresési módja Euclidestől származik.

Ezek után térjünk át a tört rat. függvény tulajdonságainak vizsgálatára, természetesen feltéve, hogy a határozatlanság kiküszöbölése végett az esetleges átalakitást keresztül vittük.

Legyen a mi függvényünk

$$F(z)=\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n}{b_0+b_1z+b_2z^2+\cdots+b_mz^m}$$

Vizsgálva a függvény magaviseletét a számsik különböző helyein, három esetet kell megkülönböztetnünk: 1.) a hely, mely körül a függvényt vizsgáljuk sem a felsőnek, sem az alsónak nem nullapontja; 2.) a hely a felsőnek nullapontja, az alsónak nem; 3.) az illető hely az alsónak nullapontja, a felsőnek nem. Vegyük az eseteket rendre.

1.) Ki fogjuk mutatni, hogy olyan α pont körül, mely sem a felsőnek, sem az alsónak nem nullapontja, a tört rat. függvény folytonos. Ha ugyanis $z=\alpha+h$, a hol $|h|<\varrho$, mely ϱ felett később rendelkezünk, akkor

$$F(z)=\frac{f(\alpha+h)}{g(\alpha+h)}=\frac{f(\alpha)+f'(\alpha)h+\cdots+\frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}h^n}{g(\alpha)+g'(\alpha)h+\cdots+\frac{g^{(m)}(\alpha)}{m!}h^m}$$

és $F(\alpha)=\frac{f(\alpha)}{g(\alpha)}$, tehát a kettő különbségét alkotva

$$F(\alpha+h)-F(\alpha)=\frac{g(\alpha)f(\alpha+h)-f(\alpha)g(\alpha+h)}{g(\alpha)\cdot g(\alpha+h)}$$

. Miután a felsőben a h-val nem szorzott tagok összege $f(\alpha)g(\alpha)-f(\alpha)g(\alpha)=0$, marad ott h-nak eg. rationalis függvénya constans tag nélkül, mely legfeljebb m vagy n-edfokú, a szerint, hogy melyik nagyobb fokszámu. Tehát

$$F(\alpha+h)-F(\alpha)=\frac{A_1h+A_2h^2+\cdots}{g(\alpha)\cdot g(\alpha+h)}=\frac{A_1h+A_2h^2+\cdots}{g(\alpha)\left[g(\alpha)+g'(\alpha)h+\cdots+\frac{g^{(n)}(\alpha)}{n!}h^n\right]}$$

Feltevésünk értelmében $g(\alpha) \neq 0$, és így megadhatunk egy olyan véges ϱ_1 igen kis pozitiv mennyiséget, hogy mihelyt $|h| < \varrho_1$, már $g(\alpha+h) \neq 0$, és pedig az α centrumu ϱ_1 sugarú körön belül mindenütt. Ha most a $g(z)$ függvény minimalis értéke m, akkor ez nyilvánvalóan kisebb mint $g(\alpha)$ és $g(\alpha+h)$, vagy legalább is nem nagyobb, mert hisz a ϱ_1 sugaru körön belül mindkettő nulltól különböző. Ha tehát a nevezőben $g(\alpha)$ és $g(\alpha+h)$ helyett m-et irunk, a jobboldalt nagyobbitjuk, tehát ha $|h| < \varrho_1$, akkor

$$F(\alpha+h) - F(\alpha) < \frac{1}{m^2}(A_1 h + A_2 h^2 + \cdots)$$

már most a jobboldalon csak egy egész rationális függvény áll, melynek absolut értéke tetszésszerint kicsinyré tehető, ha benne a h-t elégge megszoritjuk. (T.i. $|A_1 h + \cdots| < \eta$, ha $|h| < \frac{\eta}{A+\eta}$, a hol A az $A_1, A_2, \ldots$ coefficiensek maximuma). Ha tehát meyadunk egy tetszőleges kis positiv η mennyiséget és megszoritjuk másodszor a $|h|$-t úgy, hogy $|h| < \frac{\eta m^2}{A+\eta m^2} = \varrho_2$, akkor

$$|F(\alpha+h) - F(\alpha)| < \eta$$

a mely egyenlőtlenség azt fejezi ki, hogy <u>oly hely körül, mely sem a felső-nek sem az alsónak nem nullapontja, a tört rat. függvény folytonos.</u> Igaz, hogy ezne bizonyitásnál $|h|$ számára két felső határt szabtunk ki, ϱ_1 és ϱ_2, de ha mindkét esetben a kisebbiket vesszük, az egyenlőtlenség teljesülni fog. Itt is áll az, hogy a tört rat. függvény azt az értékét, melyet α-ban felvesz, annak közvetlen közelében nem ismétli. Hogy ezt beláthassuk, vegyük tekintetbe, hogy a felsőben levő A coefficiensek közül némelyek el is tünhetnek. Legyen A_k az első nulltól különböző coefficiens, akkor

$$F(\alpha+h) - F(\alpha) = h^k \frac{A_k + A_{k+1} h + \cdots}{g(\alpha)\, g(\alpha+h)}$$

Hartogs

s a mint láttuk, h-t mindig meglehet szoritani ugy, hogy $g(\alpha+h)$ a nulltól különböző legyen, de akkor h-nak minden ezen megszoritott intervallumon belül eső és α-tól különböző értékei mellett ugy h^n, mint a felsők nulltól különbözők, tehát $F(\alpha+h)-F(\alpha) \neq 0$ vagyis a tétel helyes.

2.) A második eset az, midőn a felső $f(z)$ bizonyos α pontban eltünik az alsó nem. Általánosság kedvéért tegyük fel mindjárt, hogy α az $f(z)$ k-szoros nullapontja, akkor a mint tudjuk a k-dikig kizárolag minden derivóált $z=\alpha$ mellett eltünik, ügy hogy

$$F(\alpha+h)=\frac{\frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}h^k+\frac{f^{(k+1)}(\alpha)}{(k+1)!}+\cdots}{g(\alpha)+g'(\alpha)h\cdots}=h^k\frac{\frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}+\frac{f^{(k+1)}(\alpha)}{(k+1)!}+\cdots}{g(\alpha)+g'(\alpha)h}$$

tehát $\lim_{h=0}\frac{F(\alpha+h)}{h^k}=\frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!\,g(\alpha)}$ s ha h elsőrangu végtelen kicsiny, akkor ez azt jelenti, hogy $F(\alpha+h)$, vagyis a függvény értéke ezen α pont körül k-ad rangu végtelen kicsiny, a mi, a mint láttuk, azt jelenti, hogy a tört rationalis függvénynek arra pontban (α), hol a felsőnek k-szoros α pontja van, szintén k-szoros nullapontja van.

3.) A harmadik eset az, midőn bizonyos β pontban az alsó $g(z)$ eltünik, mig a felső véges marad. Tegyük fel mindjárt, hogy β a $g(z)$-nek k-szoros nullapontja, akkor

$$F(\beta+h)=\frac{f(\beta+h)}{g(\beta+h)}=\frac{f(\beta)+f'(\beta)h+\cdots\cdots}{\frac{g^{(k)}(\beta)}{k!}h^k+\frac{g^{(k+1)}(\beta)}{(k+1)!}+\cdots}=\frac{1}{h^k}\cdot\frac{f(\beta)+f'(\beta)h+\cdots\cdots}{\frac{g^{(k)}(\beta)}{k!}+\frac{g^{(k+1)}(\beta)}{(k+1)!}+\cdots\cdots}$$

tehát $\lim_{h=0}\frac{F(\beta+h)}{\frac{1}{h^k}}=\frac{f(\beta)\,k!}{g^{(k)}(\beta)}$ s mivel $\lim_{h=0}\left(\frac{1}{h^k}\right)$

egy k-ad rangu végtelen nagy mennyiség, mondhatjuk, hogy a tört rat. függvény ezen β körül egy k-ad rangu végtelen nagy mennyiség, a miből következik, hogy a tört rat. függvény oly helyen, mely az alsónak k-szoros nullapontja k-szoros polussal bir.

Mondhatjuk tehát, hogy a számsík oly helyc, mely a felsőnek k-szoros nullapontja, a függvénynek is k-szoros ∞-pontja, az alsónak k-szoros nullapontja, a tört függvénynek k-szoros polusa. Lássuk most miként viselkedik a tört rat. függvény a végtelen távoli pontban? E végett irjuk $F(z)$ oly alakban, hogy a felsőt és alsót az alsó legmagasabb hatványának coefficiensével osztjuk, úgy hogy z^m coefficiense 1 legyen. Tehát

$$F(z) = \frac{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots a_1 z + a_0}{z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots b_1 z + b_0}$$

normal alak

és kivéve z^n és z^m-t $F(z) = \frac{z^n}{z^m} \cdot \frac{a_n + a_{n-1}\zeta + \dots + a_1 \zeta^{n-1} + a_0 \zeta^n}{1 + b_{m-1}\zeta + \dots + b_1 \zeta^{m-1} + b_0 \zeta^m}$, ha $\frac{1}{z} = \zeta$

ha most $z = \infty$, akkor $\zeta = 0$, s így a második tört limese $\frac{a_n}{1} = a_n$ látható tehát, hogy $\lim_{z=\infty} F(z)$ csupán a $\frac{z^n}{z^m}$ hányadostól függ, s itt 3 esetet kell megkülönböztetni.

1. $n > m$, akkor $\frac{z^n}{z^m} = z^{n-m}$ s mivel $\lim_{z=\infty} z^{n-m} = \infty$, lesz $\lim_{z=\infty} \frac{F(z)}{z^{n-m}} = \infty$, vagyis a végtelen távoli pont a tört rat. függvénynek $(n-m)$-szeres polusa.

2. $n = m$, akkor $\frac{z^n}{z^m} = 1$, tehát $\lim F(z) = a_n$, vagyis a tört irrationalis függvénynek a végtelen távoli pontban véges értéke van.

3. $n < m$, akkor $\frac{z^n}{z^m} = \frac{1}{z^{m-n}}$ és $\lim_{z=\infty} \frac{1}{z^{m-n}} = \lim_{\zeta=0} \zeta^{m-n} = 0$ lévén

$\lim_{z=\infty} \frac{F(z)}{\frac{1}{z^{m-n}}} = a_n$, tehát a tört rat. függvénynek a végtelen távoli pontban $(m-n)$ szeres nullapontja van.

Látjuk tehát, hogy a különbség a tört r. és az egész r. függv. közt az, hogy annak a végesben is vannak polusai.

Könnyű most, hogy egy adott C értéket hányszor vesz fel az $F(z)$ függvény. Ha $F(z) = \frac{f(z)}{g(z)} = C$, akkor $f(z) - g(z) \cdot C = 0$, ennek az egész rat. függvénynek pedig annyi nullapontja van, a mennyi a legnagyobb hatványoknak kitevője.

Így tehát egy adott C értéket annyiszor vehet fel egy tört rat.

függvény, a számuyi a benne szereplő legmagasabb kitevő.

Ugyanaz áll, ha $c = 0$ és ha $c = \infty$. Lássuk hány helyen veszi fel $F(z)$ a 0 és ∞ értéket. Itt 3 esetet kell megkülönböztetni, a szerint, a mint $n > m$, $n = m$ és $n < m$. A következő táblázat mutatja a helyek számát az egyes esetekben 0 és ∞-re.

		a $n > m$	b $n = m$	c $n < m$
1.	0	n	n	m
2.	∞	n	m	m

UNIVERSITATEA DIN CLUJ
SEMINARUL
DE
MATEMATICĂ

1.a.) ha $n > m$, végtelenben nem lehet 0 pont, mert ott $F(z) = \infty$ s csak $f(z) = 0$-nak n helye lehet $F(z)$-nek n nullapontja.

1.b.) ha $n = m$, ugyanazon okból végtelenben nem lehet 0 pt, ($F(z) = a_n$), tehát szintén $f(z) = 0$ n nullapontja lesz $F(z)$-nek nullapontja.

1.c.) ha $n < m$, akkor egyfelől $f(z) = 0$-nak n nullapontja felel meg, de megfelel $g(z) = 0$ m-n nullapontja is, mert az előbb tárgyalt 3 eset szerint a végtelen távoli pont is $(m-n)$ szeres nullapont, ha $n < m$, tehát összesen $n + m - n = m$ nullapontja lesz ekkor $F(z)$-nek.

2.a.) $F(z)$-nek értéke 2 esetben válhatik végtelenné, először $g(z) = 0$-nak m véges gyöke mellett, azaztán az 50. old. 1.) szerint $f(z)$-nek $(n-m)$ szeres polusában, azaz a végtelen $(n-m)$ helyén, tehát n helyen.

2.b.) ha $n = m$, $F(z)$ csakis $g(z) = 0$ m véges gyöke mellett lehet végtelen.

3.c.) ha $n < m$ szintén csak $g(z) = 0$ m véges pontjában.

Vizsgaljuk most a függvény természetét a polusok közelében felhasználva annak következő alakját

$$F(z) = \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots + b_m z^m}$$

az $F(z)$ polusai a nevezőfüggvény nullapontjai, vagyis ha $n > m$, akkor $z = \infty$ is az $F(z)$ polusai. Ezek körül kell tehát

vizsgálni a függvényt. Tegyük először a véges polusokat. Általánosság kedvéért mindjárt feltesszük, hogy a $g(z)$ nullapontjai többszörösek, legyenek tehát a nullapontok $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots\ldots \beta_r$ s a sokszorosági számok $k_1, k_2, k_3, \ldots\ldots k_r$, a hol $k_1 + k_2 + k_3 + \cdots + k_r = m$ akkor nyilvánvaló, hogy $g(z) = (z-\beta_1)^{k_1} \cdot g_1(z)$, a mely $g_1(z)$ függvénynek a β_1 már nem o pontja. Minthogy k_1-szeres nullapontesetén

$$g(z) = \frac{g^{(k_1)}(\beta_1)}{k_1!}(z-\beta_1)^{k_1} + \frac{g^{(k_1+1)}(\beta_1)}{(k_1+1)!}(z-\beta_1)^{k_1+1} + \ldots\ldots + \frac{g^{(m)}(\beta_1)}{m!}(z-\beta_1)^m,$$

ezt osztva $(z-\beta_1)^{k_1}$-el, lesz $g_1(z) = \frac{g^{(k_1)}(\beta_1)}{k_1!} + \frac{g^{(k_1+1)}(\beta_1)}{(k_1+1)!}(z-\beta_1) + \cdots + \frac{g^{(m)}(\beta_1)}{m!}(z-\beta_1)^{m-k_1}$

Ha most vizsgálni akarjuk a függvényt β_1 polus körül, akkor $z = \beta_1 + h_1$ teendő s akkor

$$\mathfrak{F}(\beta_1 + h_1) = \frac{f(\beta_1 + h_1)}{h_1^{k_1} \cdot g_1(\beta_1 + h_1)}$$

$$h_1^{k_1}\mathfrak{F}(\beta_1 + h_1) = \frac{f(\beta_1) + f'(\beta_1)h_1 + \frac{1}{2!}f''(\beta_1)h_1^2 + \ldots\ldots}{g_1(\beta_1) + g_1'(\beta_1)h_1 + \frac{1}{2!}g_1''(\beta_1)h_1^2 + \cdots}$$

Minthogy a nevező a 0-tól különböző, mert hisz β_1 már nem nullapontja $g_1(z)$-nek, azért a tört által jelölt osztást elvégezhetjük, folytassuk ezt addig, míg h_1 legmagasabb hatványa $h_1^{k_1-1}$ lesz. A jellejő coefficienseket A jelölve, lesz

$$h_1^{k_1}\mathfrak{F}(\beta_1 + h_1) = A_0' + A_1'h_1 + A_2'h_1^2 + \ldots\ldots + A_{k_1-1}'h_1^{k_1-1} + \frac{h_1^{k_1}f_1(h_1)}{g_1(\beta_1 + h_1)}$$

tehát az osztásból előáll egy egész rat. függvény, meg egy tört rat. függvény, a hol $f_1(h_1)$ a h_1-nek egy bizonyos rat. függvénye s most osztva az egyenlet mindkét oldalát $h_1^{k_1}$-el s $h_1 = z - \beta_1$ téve

$$\mathfrak{F}(z) = \underbrace{\frac{A_0'}{(z-\beta_1)^{k_1}} + \frac{A_1'}{(z-\beta_1)^{k_1-1}} + \ldots\ldots + \frac{A_{k_1-1}'}{z-\beta_1}}_{\psi_1(z)} + \frac{f_1(z-\beta_1)}{g_1(z)}$$

Ily alakra lehet redukcálni a tört rat. függvényt; észrevehető hogy a jobboldali törtek az utolsó kivételével a β_1 polusban mind végtelenné válik, míg az utolsó véges marad, mert

hisz $g_1(z)$-nek a β_1 nem nullhelyontja. A β_1 helyen végtelenné váló törtcket nevezzük a β_1 polushoz tartozó partialis történek s ezek összege legyen $\psi_1(z)$; akkor

$$F(z) - \psi_1(z) = \frac{f_1(z-\beta_1)}{g_1(z)} \qquad \text{I.}$$

a mi azt mondja, hogy a β_1 polusra nézve az $F(z) - \psi_1(z)$ különbség véges mennyiség (lehet 0 is) daczára annak, hogy ott a β_1 helyen mind $F(z)$ mind $\psi_1(z)$ végtelenné válik. Ezt az eljárást ismételhetjük a többi polusokra nézve is, s mindenkor egy alg. osztás által egy az Jenntihez hasonló maradék tört rat. függvényhez és egy az Jenntihez hasonló tulajdonságu partialis törtcsoporthoz jutunk. Jelöljük a $\beta_2, \beta_3, \ldots\ldots \beta_r$-hez tartozó part. törtek összegét megfelelőleg $\psi_2(z), \psi_3(z), \ldots\ldots \psi_r(z)$-vel. Látva van még az $n \geq m$ esetén a függvény megvizsgálása a $z=\infty$ polus körül. E végett a függvényeme alakját használjuk

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots\ldots + a_0}{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \ldots + b_0}$$

s most már a kijelölt algebrai osztást addig végezzük, míg épen egy egy eg. rat. függvényt kapunk, tehát a míg

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \underbrace{A_0 z^{n-m} + A_1 z^{n-m-1} + \ldots + A_{n-m}}_{\psi_0(z)} + \frac{f_0(z)}{g(z)}$$

a hol $f_0(z)$ már kisebb fokú mint $g(z)$, s így látható, hogy $z=\infty$ mellett a $\psi_0(z)$-vel jelölt eg. rat. függvény végtelenné válik, míg az utolsó tört $z=\infty$ mellett eltünik, vagyis $F(z) - \psi_0(z) = 0$ (II.) ha $z=\infty$. S most már ki fogjuk mutatni, hogy

$$F(z) = \psi_0(z) + \psi_1(z) + \psi_2(z) + \ldots\ldots + \psi_r(z)$$

E végett alkossuk meg ezt a különbséget

$$F(z) - \psi_0(z) - \psi_1(z) - \psi_2(z) - \ldots\ldots - \psi_r(z).$$

s ennek a függvénytani jellegét vizsgáljuk. E vizsgálatnál 3 eset lehetséges. Lehet hogy ez a különbség egész vagy

tört. rat. függvény, vagy lehet, hogy constans.

1.) Ha a függvény tört rat. kell, hogy véges polusai legyenek.

$F(z)$ polusai β_1 β_2 ..... β_r

$\psi_0(z)$-nek nincs véges polusa, csak $z=\infty$

$\psi_1(z)$ polusa β_1, $\psi_2(z)$-é β_2 ..... $\psi_r(z)$ polusa β_r.

Igen de 53 I. szerint $F(z) - \psi_1(z)$ véges, azaz nincs véges polusa β_1-ben; vagy szintén nem polusa a β_1 a $\psi_0(z)$, $\psi_2(z)$ ..... $\psi_r(z)$-nek. Tehát β_1 nem lehet e különbség polusa. Ugyanez áll a β_2 β_3 ... β_r polusokra, egyik sem lehet a különbség függvénynek polusa. Tehát nem lévén véges polus, a függvény nem lehet tört rat. függvény.

2.) De egész rat. függvény sem lehet, mert ehez szükséges, hogy $z=\infty$ a függvény polusa legyen. Amde II szerint $F(z) - \psi_0(z)$ nem válik végtelenné, hanem eltünik $z=\infty$ mellett, ugyanúgy áll a $\psi_1(z)$ $\psi_2(z)$ ..... $\psi_r(z)$ partialis törtekre, és így $z=\infty$ mellett nem lévén polus, a függvény egész rat. függv. sem lehet.

3.) Lehetne tehát a függvény constans. De mivel $z=\infty$ mellett az egész különbség nulla lesz, azért o ez a constans, vagyis a függvény értéke o, a mi azt jelenti, hogy

$$F(z) = \psi_0(z) + \psi_1(z) + \psi_2(z) + \cdots\cdots \psi_r(z)$$

a hol $\psi_0(z)$ egy eg. rat. függvény, a többi tagok pedig csupa partialis törtek összegei. Ez az egyenlet tehát azt a tételt fejezi ki, hogy minden tört rat. függvény előállítható mint egy eg. rat. függvénynek a partialis törtek összege. Mintán ezen ψ függvényeknek csak egy-egy polusuk van, mondhatjuk, hogy minden rat. tört függvényt elő lehet állítani mint egy polusos függvények összege. Az 52 old. ut utolsó előtti egyenletből látható mikép kell valamely β_r polushoz tartozó part. törtek számbáloit: A_0^r, A_1^r, ... $A_{k_r-1}^r$ meghatározni. Megszorozzuk $F(z)$-t $(z-\beta_r)^{k_r}$-el s ebben $z = \beta_r + h$ helyettesitünk, rendezzük szám-

lálóit és nevezőit k növő hatványai szerint, s azután végrehajtjuk az osztást, addig a míg k-nak kitevője egyggyel kisebb mint az $3r$ polus sokszorosságái számnál, az így nyert hányadosban k hatványainak coefficienseit adják megfelelőleg a partialis törtek számlálóit.

A tört rationalis függvény sorbafejtése.

A partialis törtek segitségével most már a tört rationális függvényt végtelen sorral állithatjuk elő, még pedig a binomialis tétel alapján, ha a kitevő negativ. A binomialis tétel alapján nyerjük

$$(I.) \qquad \frac{1}{(1-z)^\kappa} = (1-z)^{-\kappa} = 1 + \binom{-\kappa}{1}(-z) + \binom{-\kappa}{2}(-z)^2 + \cdots + \binom{-\kappa}{n}(-z)^n + \cdots$$

ez convergens, ha $|z| < 1$, divergens, ha $|z| \geq 1$. Egy általános coefficiens

$$\binom{-\kappa}{n} = \frac{-\kappa\cdot(-\kappa-1)(-\kappa-2)\cdot\cdots\cdot(-\kappa-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\cdots\cdot n}$$

$$= \frac{(-1)^n \kappa(\kappa+1)(\kappa+2)\cdot\cdots\cdot(\kappa+n-1)}{n!} = (-1)^n\cdot\binom{\kappa+n-1}{n}$$

ily módon positiv felsőre átalakitva az összes coefficienseket, kapjuk, hogy

$$(1-z)^{-\kappa} = 1 + \binom{\kappa}{1}z + \binom{\kappa+1}{2}z^2 + \cdots\cdots + \binom{\kappa+n-1}{n}z^n + \cdots = S_\kappa(z)$$

A binomialis sor ezen alakja szolgáltatja a kiindulási pontot a tört rat. függvény sorbafejtésére, a mely igen sokféleképen történhetik. E végett először partialis törtekre bontjuk fel a függvényt. A partialis törtek általános alakja

$$\frac{1}{(z-\beta)^\kappa}\cdot \text{const.}, \text{ tehát csak } \frac{1}{(z-\beta)^\kappa}\text{-t kell sorbafejteni}$$

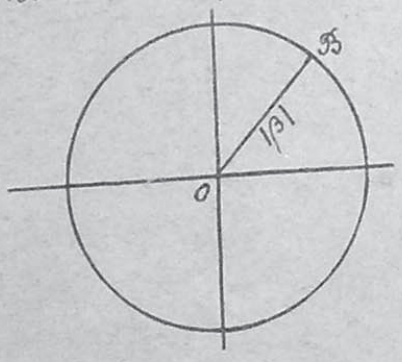
Lássuk tehát a különböző soralakokat.

1.) $(z-\beta)^{-\kappa} = [(-\beta)(1-\frac{z}{\beta})]^{-\kappa}$ átalakitást használva, lesz

$$\frac{1}{(z-\beta)^\kappa} = \frac{1}{(-\beta)^\kappa}\cdot\frac{1}{(1-\frac{z}{\beta})^\kappa} = \frac{1}{(-\beta)^\kappa}S_\kappa\left(\frac{z}{\beta}\right) \qquad (1.)$$

Ez az $S(\frac{z}{\beta})$ sor pedig I. szerint convergens, ha $|\frac{z}{\beta}| < 1$ vagy

is hx $|z| < |\beta|$, tehát convergens egy a β pont abszolut értékével,



$|\beta|$ - val o-ból leirt körön belül. Ez a kör az convergentia tartomány.

2.) Más tulajdonságu sort kapsank, hax $(z-\beta)$-ból z-t vesszük ki factornak

$$(z-\beta) = z\left(1-\frac{\beta}{z}\right), \text{ tehát}$$

$$\frac{1}{(z-\beta)^\kappa} = \frac{1}{z^\kappa}\left(1-\frac{\beta}{z}\right)^{-\kappa} = \frac{1}{z^\kappa} S_\kappa\left(\frac{\beta}{z}\right) \qquad (2)$$

ez a sor I szerint convergens, ha $|\frac{\beta}{z}| < 1$, tehát ha $|z| > |\beta|$ vagy is az $|\beta|$-vel o-ból irt körön kivül. Láttyuk tehát, hogy a parciális törteknek különbözö sorbabontásuk lehet, az egyik a körön belül, a másik azon kivül convergens. Az (1) sor halad z-nek positiv egész hatványai szerint, mig (2) halad $\frac{1}{z}$ pos. egész hatványai szerint. Az (1) és (2) egyenlöségek

$$\frac{1}{(z-\beta)^\kappa} = \frac{1}{(-\beta)^\kappa} S_\kappa\left(\frac{z}{\beta}\right) \quad , \quad |z| < |\beta|$$

$$\frac{1}{(z-\beta)^\kappa} = \frac{1}{z^\kappa} S_\kappa\left(\frac{\beta}{z}\right) \quad , \quad |z| > |\beta|$$

csak addig birnak értelemmel, mig a kikötött feltételek teljesülnek, tehát a mig értelme van egyik vagy másik oldalnak.

Más soralakot kapunk, hax $z-\beta = z-\alpha-\beta-\alpha)$ identicus átalakitást használjuk, a hol α egy különben tetszés szerinti, de β-töl különböző szám. S most a szerint, a mint $(z-\alpha)$-t vagy $-(\beta-\alpha)$ vesszük ki, lesz

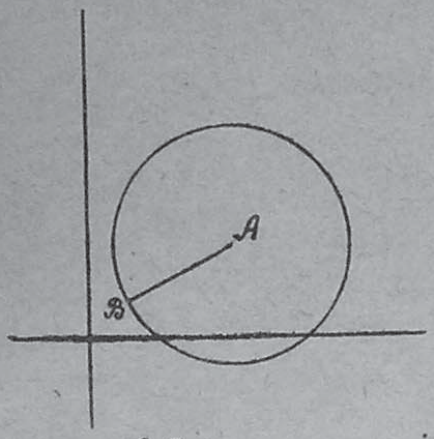
(1.) $(z-\beta) = (\alpha-\beta)\left(1-\frac{z-\alpha}{\beta-\alpha}\right)$

(2.) $z-\beta = (z-\alpha)\left(1-\frac{\beta-\alpha}{z-\alpha}\right)$ sorunk megfelelöleg

$$\frac{1}{(z-\beta)^\kappa} = \frac{1}{(\alpha-\beta)^\kappa}\cdot\left(1-\frac{\beta-\alpha}{\beta-\alpha}\right)^{-\kappa} = \frac{1}{(\alpha-\beta)^\kappa} S_\kappa\left(\frac{z-\alpha}{\beta-\alpha}\right) \qquad \text{I.}$$

$$\frac{1}{(z-\beta)^\kappa} = \frac{1}{(z-\alpha)^\kappa}\left(1-\frac{\beta-\alpha}{z-\alpha}\right)^{-\kappa} = \frac{1}{(z-\alpha)^\kappa} S_\kappa\left(\frac{\beta-\alpha}{z-\alpha}\right) \qquad \text{II.}$$

Vizsgáljuk ennek két sorbabontás tulajdonságait, convergentia feltételeit. Az I. sor halad $(z-\alpha)$ positiv egész hatványai szerint és convergens, ha $|\frac{z-\alpha}{\beta-\alpha}| < 1$ azaz $|z-\alpha| < |\beta-\alpha|$.



Ha az α-nak megfelelő pont A, a β nullapontnak megfelelő pont B, akkor az I sor convergens az A-ból AB sugárral írt körön belül.

A II sor haladó $\frac{1}{z-\alpha}$ positiv, tehát $(z-\alpha)$ neg.-egész hatványai szerint s mintán szorzónak ott áll a sor előtt $\frac{1}{(z-\alpha)^\kappa}$, azért a sorbeli legkisebb hatványa $\frac{1}{(z-\alpha)^\kappa}$. Ez a sor convergens, ha $\left|\frac{\beta-\alpha}{z-\alpha}\right| < 1$, vagyis ha $|z-\alpha| > |\beta-\alpha|$, tehát az A-ból AB sugárral írt kör peripheriáján kívül.

Látjuk tehát hogy egy racionalis partialis tört mily sokféleképp bontható sorba, a mennyiben a tetszőleges számú lehet. Az α-nak megfelelő A pontot nevezzük a sorbabontás centrumának, s ez lehet a számsíknak minden B-től különböző pontja. Ugyanilyen sorabakok léteznek a partiális törtek bármelyikére.

Ezek után most már könnyű lesz tört rat. függvény sorbabontása. Legyenek az $F(z)$ tört rat. függvény polusai

$\beta_1\ \beta_2\ \beta_3 \cdots\cdots \beta_r$ s a megfelelő sokszorossági számok $\kappa_1\ \kappa_2\ \kappa_3 \cdots\cdots \kappa_r$ s az egyes polusokhoz tartozó partiális törtek összege:

$\psi_1\ \psi_2\ \psi_3 \cdots\cdots \psi_r$, akkor, ha még tekintetbe vesszük, hogy $n \geq m$ esetén még egy eg. rat. függvény $\psi_0(z)$ is felléphet, lesz

$$F(z) = \psi_0(z) + \psi_1(z) + \psi_2(z) + \cdots\cdots + \psi_r(z)$$

Már most pl. $\psi_2(z) = \frac{A_0'}{(z-\beta_2)^{\kappa_2}} + \frac{A_1'}{(z-\beta_2)^{\kappa_2-1}} + \cdots\cdots + \frac{A_{\kappa_2-1}'}{(z-\beta_2)}$

ezen partialis törteket egyenként sorbabonthatjuk $(z-\alpha)$ pos. vagy neg. egész hatványai szerint. Az első szerint

$$\frac{A_0'}{(z-\beta_1)^{\kappa_2}} = \frac{A_0'}{(\alpha-\beta_1)^{\kappa_2}} S_{\kappa_2}\left(\frac{z-\alpha}{\beta_1-\alpha}\right)$$

$$\frac{A_1'}{(z-\beta_2)^{\kappa_2-1}} = \frac{A_1'}{(\alpha-\beta_1)^{\kappa_2-1}} S_{\kappa_2-1}\left(\frac{z-\alpha}{\beta_1-\alpha}\right)$$

$$\frac{A_2'}{(z-\beta_2)^{\kappa_2-2}} = \frac{A_2'}{(\alpha-\beta_2)^{\kappa_2-2}} S_{\kappa_2-2}\left(\frac{z-\alpha}{\beta_2-\alpha}\right)$$

. . . . . .

. . . . . .

$$\frac{A_{\kappa_1-1}}{z-\beta_1} = \frac{A_{\kappa_1-1}}{\alpha-\beta_1} S_1\left(\frac{z-\alpha}{\beta_1-\alpha}\right)$$

Ha ezen sorokat összevonjuk, azaz összeadjuk, akkor egy $(z-\alpha)$ pos. egész hatványai szerint haladó sort kapunk, jelöljük ezt $P(z-\alpha)$ -val, akkor tehát $\psi_2(z) = P_2(z-\alpha)$, mely convergens ha $|z-\alpha| < |\beta_2-\alpha|$.

Ha $(z-\alpha)$ negativ hatványai szerint (II) bontjuk sorba a $\psi_2(z)$ partialis törtjeit, akkor az előbbihez hasonló módon kapjuk ezen sorok összeadásából egy $(z-\alpha)$ negativ egész hatványai szerint haladó sort, jelöljük ezt $N_2(z-\alpha)$ - val, akkor másfelől $\psi_2(z) = N_2(z-\alpha)$, mely convergens $|z-\alpha| > |\beta_2-\alpha|$ mellett. Ugyanilyen módon állithatjuk elő egy ilyen $P(z-\alpha)$ vagy $N(z-\alpha)$ sorral a többi $\psi(z)$-ket is. $\psi_0(z)$ egész rationalis függvény lévén Taylor sora szerint sorba bontható

$$P_0(z-\alpha) = \psi_0(z) = \psi_0(\alpha) + \psi_0'(\alpha)(z-\alpha) + \cdots\cdots + \frac{\psi_0^{(n-m)}(\alpha)}{(n-m)!}(z-\alpha)^{n-m}$$

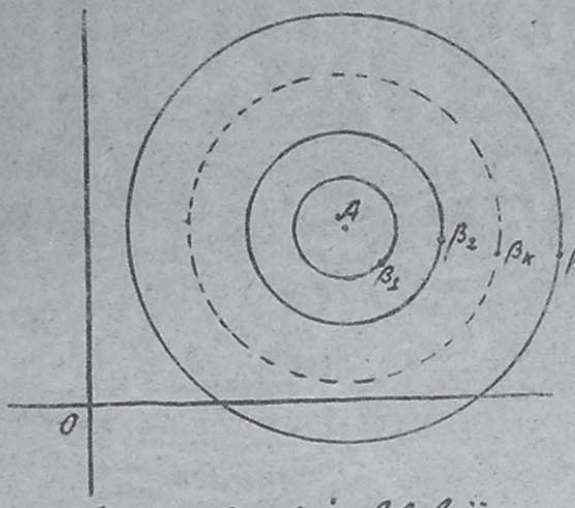
$(z-\alpha)$ pos. egész hatványai szerint. Ezen N vagy P sorokat összevonva kapjuk az $F(z)$ tört függvényt előállitva $(z-\alpha)$ hatványai szerint egy végtelen sorral.

Nyilvánvaló, hogy azt a sorbabontást kell venni, mely egyszerre alkalmazható mindegyik ψ-re.

Lássuk ezen sorbabontás egyszerű geometriai ábrázolását. Legyen A a sorbabontás centruma s az A-tól való távolságuk sorrendjében legyenek a polusok

$$\beta_1\ \beta_2\ \beta_3 \ldots\ldots\ldots\ldots \beta_r$$

Ezen távolságokkal A-körül irjunk concentrikus köröket. Most már könnyü kimutatni, hogy lehet találni olyan sorbabontást, mely érvényes az első körön belül vagy r-edik körön kivül, sőt olyant is lehet találni, mely egy bizonyos



kör-gyürün belül érvényes. Ilyen is két sorbabontási alakunk van: $P(z-\alpha)$ és $N(z-\alpha)$. Ha most az első kör peripheriáján belül érvényes sorbabontást akarunk, vesszük a $P(z-\alpha)$ alakot

$$F(z) = \psi_0(z) + P_1(z-\alpha) + \cdots\cdots P_r(z-\alpha)$$

mert valamennyi P, tehát az $F(z)$ nek közös convergentia területe a legkisebb kör.

Ha egy a legkülső körön kivül érvényes sorbabontást akarunk, vesszük az $N(z-\alpha)$ alakot valamennyi partialis törtesportra

$$F(z) = \psi_0(z) + N_1(z-\alpha) + \cdots\cdots + N_r(z-\alpha)$$

mert $N_1(z-\alpha)$ érvényes ha $|z-\alpha| > |\beta_1-\alpha| \cdots$ és $N_r(z-\alpha)$, ha $|z-\alpha| > |\beta_r-\alpha|$, tehát az r-dik körön kivül valamennyi érvényes.

Ha azt akarjuk, hogy az sorbabontás bizonyos körgyürüben legyen érvényes, mindig találhatunk ilyen körgyürüt, melyben nem fekszik polus, s ha most a gyürüre belül fekvő polusok $\beta_1\ \beta_2\ \beta_3 \cdots \beta_k$, azon kivül fekvők $\beta_{k+1}, \beta_{k+2}, \cdots \beta_r$, akkor annak szerint az $N(z-\alpha)$, ezekre a $P(z-\alpha)$ alakot alkalmazva olyan

$$F(z) = N_1(z-\alpha) + \cdots + N_k(z-\alpha) + \cdots\cdots + P_r(z-\alpha) + \psi_0$$

sorbabontásunk van, mely halad $(z-\alpha)$ pos. és neg. hatványai szerint s érvényes a gyürüben fekvő összes pontokra, ha ugyanis az összes N-ket egy $(z-\alpha)$ neg. és az összes P-ket egy $(z-\alpha)$ pos. hatványai szerint haladó sorrá vonjuk össze.

Megjegyzendő különben, hogy két sorbabontást, mely a legbelső körön belül s a legkülsőn kivül érvényes, partialis törtek nélkül is szerkeszthetünk. Az első esetben

$$F(z) = \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f(\alpha) + f'(\alpha)(z-\alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(z-\alpha)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(z-\alpha)^n}{g(\alpha) + g'(\alpha)(z-\alpha) + \frac{g''(\alpha)}{2!}(z-\alpha)^2 + \cdots + \frac{g^{(m)}(\alpha)}{m!}(z-\alpha)^m}$$

s az osztást elvégezve, kapunk egy $(z-\alpha)$ pos. egész hatványai szerint haladó sort, mely érvényes a legkisebb körön belül. A második esetben

$$F(z) = \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(z-\alpha)^n + \frac{f^{(n+1)}(\alpha)}{n+1!}(z-\alpha)^{n-1} + \dots + f(\alpha)}{\frac{g^{(m)}(\alpha)}{m!}(z-\alpha)^m + \frac{g^{(m-1)}(\alpha)}{(m-1)!}(z-\alpha)^{m-1} + \dots + g(\alpha)}$$

s az osztást elvégezve, ha $n \geq m$, kapunk először egy egész racion. függvényt s ha a pozitív hatványok elfogytak, egy $(z-\alpha)$ neg. hatványai szerint haladó végtelen sort, mely e szerint érvényes a legkülső körön kívül.

A Cauchy féle formulák.

Vessük fel most azt a kérdést, melyet az egész racionális függvényekre Lagrange formulája $f(z) = \sum_{n=1}^{m+1} \frac{f(\beta_n)}{g'(\beta_n)} \cdot \frac{g(z)}{z-\beta_n}$ oldott volt meg, hogy t. i. hány ismeretes adat határozza meg a tört rat. függvényt s azután lássuk, miképp lehet az erre szükséges adatokból a függvényt megszerkeszteni? Ez a vizsgálódás fog vezetni a Lagrange féle formula általánosítására, a Cauchy féle formulára. Egy oly tört rat. függvény, mely nek számlálója n-ed, nevezője m-ed fokú, általános alakja ilyen

$$F(z) = \frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots + z^m}$$

ebben tehát $n+m+1$ coefficiens van, ha ezeket ismerjük a függvény határozott, meg tudjuk szerkeszteni. Most lehet hogy nem a coefficienseket ismerjük, hanem más adatokat $n+m+1$ számmal. Pl. szerkesszük meg az $F(z)$ függvényt, ha adva az az n hely, melyen $F(z) = 0$ és további $m+1$ helyen adva függvény értéke, tehát ha

$$\begin{array}{lllllllll} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \dots & \beta_n & \beta_{n+1} & \beta_{n+2} & \dots & \beta_{n+m}, \beta_{n+m+1} \\ F(z) = 0, & 0, & 0, & \dots & 0, & u_{n+1}, & u_{n+2} & \dots & u_{n+m}, u_{n+m+1} \end{array}$$

minthán $F(z)$ nullapontjai a számláló $f(z)$ nek nulla-

pontjai, azért $$F(z)=\frac{L(z)}{g(z)}=\frac{(z-\beta_1)(z-\beta_2)\cdot\ldots\cdot(z-\beta_n)}{g(z)}$$

tehát csak a $g(z)$-t kell a többi feltételeknek megfelelőleg meghatározni, az adatok értelmében

$$u_{n+1}=\frac{(\beta_{n+1}-\beta_1)(\beta_{n+1}-\beta_2)\cdot\ldots\cdot(\beta_{n+1}-\beta_n)}{g(\beta_{n+1})} \quad \text{a miből}$$

$$g(\beta_{n+1})=\frac{(\beta_{n+1}-\beta_1)(\beta_{n+1}-\beta_2)\cdot\ldots\cdot(\beta_{n+1}-\beta_n)}{u_{n+1}} \quad \text{hasonló módon}$$

$$g(\beta_{n+2})=\frac{(\beta_{n+2}-\beta_1)(\beta_{n+2}-\beta_2)\cdot\ldots\cdot(\beta_{n+2}-\beta_n)}{u_{n+2}}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$g(\beta_{n+m+2})=\frac{(\beta_{n+m+2}-\beta_1)(\beta_{n+m+2}-\beta_2)\cdot\ldots\cdot(\beta_{n+m+2}-\beta_n)}{u_{n+m+2}}$$

az adatokból tehát ismerjük a $g(z)$ értéket egyegyel több helyen $(m+2)$, a hanyad fokú (m), ebből pedig már megtudjuk szerkeszteni a Lagrange féle formula alapján a $g(z)$ függvényt, ugyanis a szerint

$$g(z)=\left[\frac{(\beta_{n+1}-\beta_1)(\beta_{n+1}-\beta_2)\cdot\ldots\cdot(\beta_{n+1}-\beta_n)}{u_{n+1}}\cdot\frac{(z-\beta_{n+1})(z-\beta_{n+2})\cdot\ldots\cdot(z-\beta_{n+m+2})}{(z-\beta_{n+1})\cdot(\beta_{n+1}-\beta_{n+2})\cdot\ldots\cdot(\beta_{n+1}-\beta_{n+m+2})}\right.$$

$$+\frac{(\beta_{n+2}-\beta_1)(\beta_{n+2}-\beta_2)\cdot\ldots\cdot(\beta_{n+2}-\beta_n)}{u_{n+2}}\cdot\frac{(z-\beta_{n+1})(z-\beta_{n+3})\cdot\ldots\cdot(z-\beta_{n+m+2})}{(\beta_{n+2}-\beta_{n+1})(\beta_{n+2}-\beta_{n+3})\cdot\ldots\cdot(\beta_{n+2}-\beta_{n+m+2})}$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\left.+\frac{(\beta_{n+m+1}-\beta_1)\cdot\ldots\cdot(\beta_{n+m+1}-\beta_n)}{u_{n+m+1}}\cdot\frac{(z-\beta_{n+1})(z-\beta_{n+2})\cdot\ldots\cdot(z-\beta_{n+m})}{(\beta_{n+m+1}-\beta_{n+1})(\beta_{n+m+1}-\beta_{n+2})\cdot\ldots\cdot(\beta_{n+m+1}-\beta_{n+m})}\right]$$

a [—]-ben fel van írva az első tag teljes alakja, de ez nem számítandó az összegben, vitatva áll az egyszerüsített alak, melyeknek, mintájára van egyszerüsített alakban irva a többi tag is.

Látható tehát, hogy az $g(z)$ összeg mindegyik tagja úgy második felében nem fordul elő a számlálóban és nevező-

ben mint kivonandó az $\alpha_i \beta$, melyre az illető tag vonatkozik (az elsőnél nem forul elő β_{n+1}, a k-adiknál β_{n+k}), úgy hogy a

k-adik tag ... $\dfrac{(\beta_{n+k}-\beta_1)(\beta_{n+k}-\beta_2)\cdots(\beta_{n+k}-\beta_n)}{u_{n+k}} \cdot \dfrac{(z-\beta_{n+1})(z-\beta_{n+2})\cdots(z-\beta_{n+k-1})(z-\beta_{n+k+1})\cdots(z-\beta_{n+m+1})}{(\beta_{n+k}-\beta_{n+1})\cdots(\beta_{n+k}-\beta_{n+k-1})(\beta_{n+k}-\beta_{n+k+2})\cdots(\beta_{n+k}-\beta_{n+m+1})}$

minthogy a második tört felső jében és alsójában egyenlő számú, minthogy pedig m tényező van, szabad úgy a felső mint az alsó minden egyes tényezőjét (-1)-el szorozni, akkor az általános tag lesz

$$\frac{(\beta_{n+k}-\beta_1)(\beta_{n+k}-\beta_2)\cdots(\beta_{n+k}-\beta_n)}{u_{n+k}} \cdot \frac{(\beta_{n+1}-z)(\beta_{n+2}-z)\cdots(\beta_{n+k-1}-z)(\beta_{n+k+1}-z)\cdots(\beta_{n+m+1}-z)}{(\beta_{n+1}-\beta_{n+k})\cdots(\beta_{n+k-1}-\beta_{n+k})(\beta_{n+k+1}-\beta_{n+k})\cdots(\beta_{n+m+1}-\beta_{n+k})}$$

és így $g(z)=\sum_{k=1}^{m+1} \dfrac{(\beta_{n+k}-\beta_1)\cdots(\beta_{n+k}-\beta_n)}{u_{n+k}} \cdot \dfrac{(\beta_{n+1}-z)\cdots(\beta_{n+k-1}-z)(\beta_{n+k+1}-z)\cdots(\beta_{n+m+1}-z)}{(\beta_{n+1}-\beta_{n+k})\cdots(\beta_{n+k-1}-\beta_{n+k})(\beta_{n+k+1}-\beta_{n+k})\cdots(\beta_{n+m+1}-\beta_{n+k})}$

tehát

$$F(z)=\frac{(z-\beta_1)(z-\beta_2)(z-\beta_3)\cdots\cdots(z-\beta_n)}{\sum_{k=1}^{m+1} \dfrac{(\beta_{n+k}-\beta_1)(\beta_{n+k}-\beta_2)\cdots(\beta_{n+k}-\beta_n)}{u_{n+k}} \cdot \dfrac{(\beta_{n+1}-z)\cdots(\beta_{n+k-1}-z)(\beta_{n+k+1}-z)\cdots(\beta_{n+m+1}-z)}{(\beta_{n+1}-\beta_{n+k})\cdots(\beta_{n+k-1}-\beta_{n+k})(\beta_{n+k+1}-\beta_{n+k})\cdots(\beta_{n+m+1}-\beta_{n+k})}}$$

Vezessük be most a rövidített jelölést: Jelentse

$$P(\beta_{n+1}\beta_{n+2}\cdots\beta_{n+m+1};\ \beta_1\beta_2\cdots\beta_n)$$

azt a szorzatot, melyet kapunk, hogyha az α_i előtti minden β-ból levonjuk az α_i utáni mindegyik β-t s az ugyan különbségeket összeszorozzuk. Ha már most a fenti $F(z)$ felsőjét és alsóját egyfelől $u_{n+1}\cdot u_{n+2}\cdots u_{n+m+1}$ szorzattal szorozzuk, másfelől a

$$P(\beta_{n+1}\beta_{n+2}\cdots\beta_{n+m+1};\ \beta_1\beta_2\cdots\beta_n)$$

szorzattal osztjuk, akkor az $F(z)$ nevezőjének első részében a számláló kiesik a P-ben tagjának szorzata ellenében, melyeket kapunk, ha β_{n+k}-ból levonjuk az α_i utáni összes tagokat, tehát a számláló elhagyása után a P-ből ki kell hagyni a β_{n+k}-t, a nevező u_{n+k} szintén kiesik s akkor az $u_{n+1}u_{n+2}\cdots\cdots u_{n+m+1}$ szorzatból ki kell hagyni u_{n+k}-t. Az $F(z)$ nevezőjének második részében a nevezőt belevonhatjuk P-be oly formán, hogy P-ben α_i utáni részhez hozzáírjuk az α_i előtti részből hiányzó β_{n+k}-t. Lesz tehát az átalakítás feltüntetésével

$$F(z)=\frac{u_{n+1}\cdot u_{n+2}\cdot\dots\cdot u_{n+\kappa}\cdots u_{n+m+1}\,P(\beta_{n+1},\beta_{n+2},\dots,\beta_{n+m+1};\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)}{\sum_{\kappa=1}^{m+1} u_{n+1}u_{n+2}\cdots u_{n+\kappa-1}u_{n+\kappa+1}\cdots u_{n+m+1}\,P(\beta_{n+1},\dots,\beta_{n+\kappa},\dots,\beta_{n+m+1};\beta_1,\dots,\beta_n)\,(\beta_{n+1}-\beta_{n+\kappa})\cdots(\beta_{n+m+1}-\beta_{n+\kappa})}\cdot\frac{(z-\beta_1)(z-\beta_2)\cdots\cdots(z-\beta_n)}{(\beta_{n+1}-z)\cdots(\beta_{n+\kappa-1}-z)(\beta_{n+\kappa+1}-z)\cdots(\beta_{n+m+1}-z)}$$

$$=\frac{u_{n+1}\cdot u_{n+2}\cdots u_{n+\kappa}\cdots u_{n+m+1}}{u_{n+1}\cdots u_{n+\kappa-1}\,u_{n+\kappa+1}\cdots u_{n+m+1}\,P(\beta_{n+1},\dots,\beta_{n+\kappa-1},\beta_{n+\kappa+1},\dots,\beta_{n+m+1};\beta_1,\dots,\beta_n,\beta_{n+\kappa})}\cdot\frac{(z-\beta_1)(z-\beta_2)(z-\beta_3)\cdots\cdots(z-\beta_n)}{(\beta_{n+1}-z)\cdots(\beta_{n+\kappa-1}-z)(\beta_{n+\kappa+1}-z)\cdots(\beta_{n+m+1}-z)}\qquad(2)$$

tehát a keresett

$$(I.)\quad F(z)=\frac{u_{n+1}\cdots u_{n+\kappa}\cdots u_{n+m+1}\,P(\beta_{n+1},\beta_{n+2},\dots,\beta_{n+m+1};\beta_1,\beta_2,\dots\beta_n)}{\sum_{\kappa=1}^{m+1} u_{n+1}\cdots u_{n+\kappa-1}\,u_{n+\kappa+1}\cdots u_{n+m+1}\,P(\beta_{n+1},\dots,\beta_{n+\kappa-1},\beta_{n+\kappa+1},\dots,\beta_{n+m+1};\beta_1,\dots,\beta_n,\beta_{n+\kappa})}\cdot\frac{(z-\beta_1)(z-\beta_2)\cdots\cdots(z-\beta_n)}{(\beta_{n+1}-z)\cdots(\beta_{n+\kappa-1}-z)(\beta_{n+\kappa+1}-z)\cdots(\beta_{n+m+1}-z)}$$

Tehát a felső n van az összes u-k szorzata szorozva egy törttel, melynek számlálójában a nullaponthoz megfelelő β-k szerepelnek, alsójában a felső részében a számlálóban levő u-knak megfelelő β-k, második részében a nullaponthoz megfelelő β-k szerepelnek; az F(z) tört alsójában van az összes u-k szorzata, elhagyva a κ-dikat ($u_{n+\kappa}$) szorozva egy törttel, melynek felső részében épen ezen u-hoz megfelelő β-k szerepelnek (tehát $\beta_{n+\kappa}$ kimarad) a nevezőben pedig felső részében ugyanazok a β-k mint fenn, második részében a nullapontokhoz megfelelő β-k megtoldva az első részből kimaradt $\beta_{n+\kappa}$-val; ezen egész szorzatokat megalkotva az összes u-khoz megfelelő β-kra, s ezeket összegezve, kapjuk F(z) nevezőjét.

Ezen feladat megoldásával sikerülni fog mostan annak az általánosabb feladatnak a megoldása, hogy szerkesztessék meg az az F(z) függvény, melynek felső n-ed fokú, alsója m-ed fokú, s mely n+m+1 adott helyen előírandó értékkel bír, tehát $\beta_1\ \beta_2\ \dots\ \beta_n\ \beta_{n+1}\ \dots\ \beta_{n+m+1}$ helyeken

$$F(z)=u_1\ u_2\ \dots\ u_n\ u_{n+1}\ \dots\ u_{n+m+1}.$$

Először kimutatjuk, hogy csak egy ilyen függvény létezik, mert tegyük fel, hogy $\frac{f_1(z)}{g_1(z)}$ függvény ugyanazokkal a tu-

$\frac{f(z)}{g(z)}$

lajdonsagokkal birnak, mint $\frac{f(z)}{g(z)}$, akkor minden egyes β-ra nézve ve ket függvény egyenlő volna, azaz minden egyes β-ra nézve, tehát $n+m+1$ helyen $\frac{f(z)}{g(z)} - \frac{f_1(z)}{g_1(z)} = 0$, vagyis $f(z) \cdot g_1(z) - f_1(z) g(z) = 0$ volna, de mivel ez az $f g_1 - f_1 g$ függvény legfeljebb $n+m$-ed foku, a feltétel szerint $n+m+1$ helyen 0 az értéke, azért egy ismeretes tétel értelmében $f g_1 = f_1 g$, vagyis

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f_1(z)}{g_1(z)},$$ tehát a két függvény identicus.

Most először meg fogjuk szerkeszteni a kivánt függvényt, azután ki fogjuk mutatni, hogy tényleg a kivánt tulajdonsagokkal bir. A függvény szerkeszteése a következő: Az adott $n+m+1$ β-ból ragadjunk ki n-et mindenfelekép, tehát $\binom{n+m+1}{n}$ féleképen s mindegyik csoportra nézve szerkesszük meg az I. nevezőjét, ezen nevezők összege fogja adni a keresett függvény nevezőjét. Az egész müveletet ugy fogjuk jelölni, hogy a legelső csoportokra, tehát a $\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_n$ és $\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_m$ csoportokra alkotjuk meg a felsőt illetőleg alsót és mindkettő elé Σ jeleket helyezünk, jelezvén ez által, hogy a mit ezen csoportokkal tettünk, azt kell tenni az összes $\binom{n+m+1}{n}$ illetőleg $\binom{n+m+1}{m}$ csoportokra nézve. A keresett függvény tehát ilyen alakú

$$F(z) = \frac{\sum \nu_{n+1} \cdot \nu_{n+2} \cdots \nu_{n+m+1} \cdot \frac{(z-\beta_1)(z-\beta_2)\cdots(z-\beta_n)}{P(\beta_{n+1}\beta_{n+2}\cdots\beta_{n+m+1};\ \beta_1\cdots\beta_n)}}{\sum \nu_1 \nu_2 \cdots \nu_m \cdot \frac{(\beta_1 - z)(\beta_2 - z)\cdots(\beta_m - z)}{P(\beta_1\beta_2\cdots\beta_m;\ \beta_{m+1}\cdots\beta_{n+m+1})}} \qquad \text{II.}$$

Tehát a felső mindegyik tagját megkapjuk, ha a felvett csoport összes n β-ját levonva a z-ből ezeket összeszorozzuk s elosztjuk egy oly P-vel, melynek első részében szereplő β-k indexei különböznek a felvett csoportbeli β-k indexeitől, s ugyanily indexek szerepelnek a felsőben levő ν-k mellett is; a P második részében szerepelnek a felvett csoportbeli β-k; a törtalsójában levő összes tagokat megkapjuk, ha a felvett csoport összes m β-jából levonva z-t, ezeket összeszorozzuk s elosztjuk oly P-vel, melynek első részében ugyanezek a β-k szerepelnek, s az alsó-

ban levő u-k is ilyen indexüek, míg a β második részében a többi β-k vannak. Ez az így nyert Cauchy-féle formula, a mely tehát $n+m+1$ helyen adott értékéből construálja a tört rat. függvényt.

Mutassuk ki most azt, hogy ez az így szerkesztett függvény tényleg a kivánt tulajdonságokkal bír. Látható, hogy a felső n-ed, az alsó m-ed fokú, mert annyi n, itt m lineáris tényező szerepel mindegyik tagban. A felsőben levő tagok száma $T_1 = \binom{n+m+1}{n}$, az alsóban $T_2 = \binom{n+m+1}{n}$, tehát

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ lévén

$$T_1 = \frac{(n+m+1)!}{n!(m+1)!}, \text{ és } T_2 = \frac{(n+m+1)!}{m!(n+1)!}, \qquad \frac{T_1}{T_2} = \frac{m!(n+1)!}{n!(m+1)!} = \frac{n+1}{m+1}$$

tehát a szerint, a mint $n \gtrless m$, lesz $T_1 \gtrless T_2$.

Tehát a fokszámra vonatkozó feltétel ki van elégítve, most mutassuk ki, hogy az adott helyeken a függvény tényleg az adott megfelelő értékeket veszi fel. Elég ha kimutatjuk, hogy egy helyen pl β_{n+m+1} helyen tényleg felveszi az u_{n+m+1} értéket, a többi analog megy. Ha Π z helyébe β_{n+m+1}-et teszünk, akkor a felső és alsóban mindazok a tagok, melyekben z mellett nem szerepel a β_{n+m+1} tehát annyi, a hány féleképen a $\beta_1 \beta_2 \beta_3 \ldots \beta_{n+m}$-ekből n β-t ki lehet venni, vagyis $\binom{n+m}{n}$. Ugyanazon okból marad az alsóban $\binom{n+m}{n}$ tag. De $\binom{n+m}{n} = \frac{(n+m)!}{n!\,m!} = \binom{n+m}{n}$ és így a helyettesítés után a felsőben és alsóban egyenlő számu tag marad.

Most ki fogjuk mutatni, hogy mindegyik tag a felsőben (a helyettesítés után) csak abban különbözik az alsó megfelelőjétől, hogy a felső tagok még u_{n+m+1}-et tartalmaznak a megfelelő alsó tagokon kivül, hogy tehát

$$T(\beta_{n+m+1}) = \frac{C_1 u_{n+m+1} + C_2 u_{n+m+1} + C_3 u_{n+m+1} + \ldots}{C_1 \quad + C_2 \quad + C_3 \quad + \ldots}$$

Elég kimutatni ezt, a felső és alsó első tagjáról. Ha a felsőben a

$\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_n$ csoport szerepel, vagyanakkor az alsóban (63.L.)szerint a $\beta_{n+1} \beta_{n+2} \cdots \beta_{n+m}$ csoport szerepel (mert β_{n+m+1} kimaradt).
A felső egyik tagja tehát

$$u_{n+1} u_{n+2} \cdots u_{n+m} \cdot u_{n+m+1} \cdot \frac{(\beta_{n+m+1} - \beta_2)(\beta_{n+m+1} - \beta_2) \cdots (\beta_{n+m+1} \beta_n)}{P(\beta_{n+1} \cdots \beta_{n+m+1} ; \beta_1 \beta_2 \cdots \beta_n)}$$

$$= \frac{u_{n+1} u_{n+2} \cdots u_{n+m} \cdot u_{n+m+1}}{P(\beta_{n+1} \cdots \beta_{n+m} ; \beta_1 \beta_2 \cdots \beta_n)} \qquad (1.)$$

az alsó megfelelő tagja $u_{n+1} u_{n+2} \cdots u_{n+m} \cdot \frac{(\beta_{n+1} - \beta_{n+m+1}) \cdots (\beta_{n+m} - \beta_{n+m+1})}{P(\beta_{n+1} \cdots \beta_{n+m} ; \beta_1 \cdots \beta_n \beta_{n+m+1})}$

$$= \frac{u_{n+1} u_{n+2} \cdots u_{n+m}}{P(\beta_{n+1} \cdots \beta_{n+m} ; \beta_1 \cdots \beta_n)} = C_1 \qquad (2.)$$

látható tehát, hogy a felsőben álló (1.) = (2.) $\cdot u_{n+m+1}$. Ugyanezt az viszonyt lehet kimutatni a számláló bármelyik tagja s a nevező megfelelő tagja közt, vagyis ha a nevező tagjai

$C_1 C_2 C_3 \cdots C_x \cdots$ - akkor a felső

megfelelő tagjai $C_1 u_{n+m+1}, C_2 u_{n+m+1} \cdots C_x u_{n+m+1} \cdots$

s így tényleg $F(\beta_{n+m+1}) = \frac{u_{n+m+1}(C_1 + C_2 + \cdots)}{C_1 + C_2 + \cdots} = u_{n+m+1}$

vagyanígy $F(\beta_{n+1}) = u_{n+1}$ stb. tehát a Cauchy féle formulával szerkesztett függvény tényleg a kívánt tulajdonságokkal bír.

A β-k megadásánál vigyázni kell, hogy egyenlők ne legyenek, mert $n+m+1$ különböző helyen kell megadni a függvény értékét s miután a tört rat. függvény vagyanazt az értéket vagy n vagy m helyen veszi fel, nem szabad $n+1$ illetőleg $m+1$ helyen vagyanazt az u-t adni.

Pl. ha $n = m = 1$, akkor 3 helyen kell megadni a függvény értéket $\begin{matrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{matrix}$ s akkor Cauchy formulája szerint

$$F(z) = \frac{u_2 u_3 \frac{z - \beta_2}{P(\beta_2 \beta_3 ; \beta_2)} + u_3 u_1 \cdot \frac{z - \beta_2}{P(\beta_3 \beta_2 ; \beta_2)} + u_1 u_2 \frac{z - \beta_3}{P(\beta_2 \beta_2 ; \beta_3)}}{u_2 \frac{\beta_1 - z}{P(\beta_1 ; \beta_2 \beta_3)} + u_2 \cdot \frac{\beta_2 - z}{P(\beta_2 ; \beta_2 \beta_3)} + u_3 \cdot \frac{\beta_3 - z}{P(\beta_3 ; \beta_2 \beta_2)}}$$

ha $z = \beta_1$, akkor a felsőben és alsóban kiesik az első tag, a lesz a felső

$$\frac{u_3 u_1}{\beta_3 - \beta_2} + \frac{u_2 u_2}{\beta_2 - \beta_3} = \frac{u_2 (u_3 - u_2)}{\beta_3 - \beta_2}$$ az alsó:

$$\frac{u_2}{\beta_2 - \beta_3} + \frac{u_3}{\beta_3 - \beta_2} = \frac{u_3 - u_2}{\beta_3 - \beta_2}$$ és így

$$\mathcal{F}(\beta_1) = \frac{\frac{u_2 (u_3 - u_2)}{\beta_3 - \beta_2}}{\frac{u_3 - u_2}{\beta_3 - \beta_2}} = u_1$$

ejo így $\mathcal{F}(\beta_2) = u_2$; $\mathcal{F}(\beta_3) = u_3$

Lineáris transformációk.

Láttuk, hogyha a

$$Z = \mathcal{F}(z)$$

akár egész, akár törtrationalis függvény, az mindig egyértékü, azaz a valtozó z minden értékéhez csak egy meghatározott Z érték tartozik, de ha már Z-t fogjuk fel mint független változót, vagyis a Z egy adott értékéhez annyi z érték tartozik, a hányad foku az illető rationális függvény. A

$$z = \mathcal{G}(Z)$$

függvényt, mely abban különbözik az eredetitől, hogy a változók szerepet cseréltek, nevezzük az eredeti függvény inverz függvényének. Tehát az invers függvény mindig többértékü, még az eredeti függvény csak egyértékü. Egyetlen egy rationális függvény van, melynek invers függvénye is egyértékü, ez az első foku egész és tört rationalis függvény, nevezik lineáris függvényeknek is.

Az egész lineáris függvény általános alakja

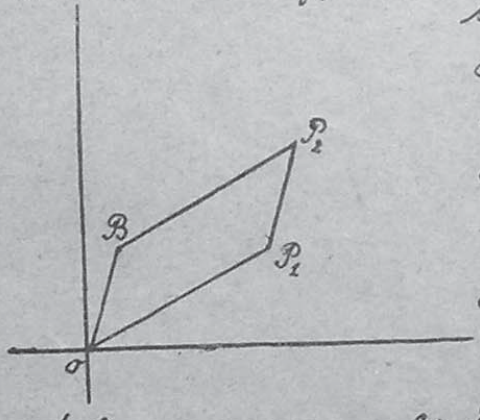
$$Z = az + b$$

Hogy ennek a transzformációnak analytikai jelentőségét kimutathassuk, egyszerübb eseteket vesszünk fel s ezekből rakjuk össze az általánost. Ilyen egyszerü lin. transformatio három van:

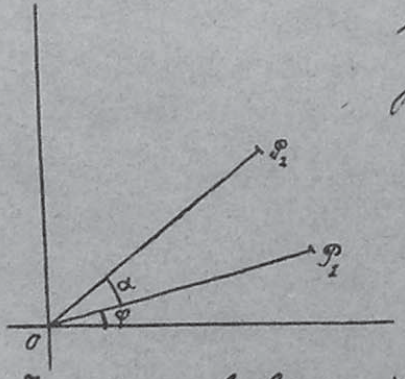
I. $Z = z + b$, minden z-hez tartozik egy Z

" Z- " " " z.

A geometriai interpretatioban megkülönböztetjük a z és Z számsikot, amannak pontjai ábrázolják a z értékeket, emnek pontjai a megfelelő Z értékeket. Egyszerüség kedvéért ezt a két sikot egymásra fektetjük, mire egytartván azonban a z és Z sik elnevezést, vagyis a z és Z pontokat ábrázoló közös sikot kettös siknak tekintjük. Ha most a z-nek megfelelő pont P_1, a b-nek megfelelő pont B, akkor az I lin. transformatioban kijelölt operatiót elvégezve, vagy az OP_1 és OB vectorokat összeadva, a Z ábrázoló pontja P_2 lesz, az OP_2 vector tehát önmagával párhuzamosan el lett tolva OB irányban. Mondhatjuk tehát, hogy az I alatti lin transformatio folytán a számsik összes pontjait ábrázoló vectorok önmagukkal párhuzamosan eltolatnak; ez a transformatió tehát párhuzamos eltolásban áll.



II. $Z = cz$, a hol $c = (\cos\alpha + i\sin\alpha)$ tehát $|c| = 1$ vagyis $Z = (\cos\alpha + i\sin\alpha)z$. Ha a z ábrazoló pontja P_1, szöge φ, akkor a fenntí c complex számmal való szorzás folytán a z szöge növekedik α-val abszolut értéke változatlan marad s a nyert P_2 pont ábrázolja ezen z megfelelő Z-t; ugyanez áll valamennyi z-re. A II transformatio folytán tehát az egész z számsik o körül α szöggel kiforgattatik, ez a kiforgatott sik lesz a Z sik. A II transformatio tehát o pont körüli pontforgatásban áll.



III. $Z = \varrho \cdot z$, a hol ϱ positiv reális szám, melynek szöge o. Az ezzel való szorzás tehát nem változtatja a z szögét, csak radius vectorát nagyobbítja vagy kisebbíti a ϱ-nak az 1-hez való viszonya szerint, s az így nyert P_2 pont lesz a Z sik megfe-

lelő pontja vagyis a transformált z. Ugyanez történik a z számsík összes pontjaival. A III. transformatio tehát nyujtásban áll.

Nyilvánvaló továbbá, hogy az I és II szerint transformált idomok egybevágók az eredetiekkel, míg a III szerint transformált idomok hasonlók az eredeti z számsíkbeliekhez.

A II és III transformációkból van összetéve az az általánosabb transformátió, midőn

$$Z = az \text{ , a hol } a = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha) \qquad (4)$$

tehát $Z = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)z$

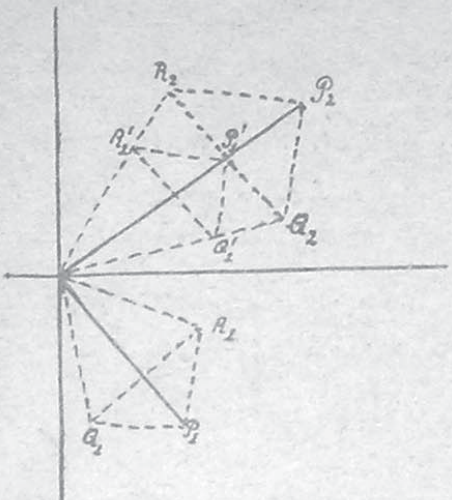
ennél a transformációnál a z számsíkról a Z számsíkra való átmenet indirect történik két lépésben; először alkalmazzuk a

(1.) $Z_1 = (\cos\alpha + i\sin\alpha)z$ azután a

(2.) $Z = \rho Z_1$ transformatiót, mert az így

nyert $Z = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)z = az$ vagyis más

szóval először kiforgatjuk z-t o körül α szög alatt (1), azután az így kiforgatott P_1'-et megnyujtjuk ρ-szor az 1-hez való aránya szerint s az így nyert P_2 lesz a Z számsík megfelelő pontja. Látható hogy ezen általánosabb transformátio szerint nyert z számsíkbeli idomok hasonlók a megfelelő z számsíkbeli idomokhoz, mert hiszen pl.



$P_1 Q_1 R_1 \Delta \cong P_1' Q_1' R_1'$ és ez utóbbi $P_1' Q_1' R_1' \Delta \sim P_2 Q_2 R_2 \Delta$, tehát $P_2 Q_2 R_1 \sim P_2 Q_2 R_2$

Ezen utóbbi transformációnál a forgatást és nyujtást sorrendre nézve fel lehet cserélni, tehát alkalmazzuk először a

$Z_2 = \rho \cdot z$ azután a

$Z = (\cos\alpha + i\sin\alpha) z_2$ elemi transformá-

tiót, mert akkor $Z = (\cos\alpha + i\sin\alpha) z = az$

Ezek után áttérhetünk az általános lineáris egészra-

tionális transzformációra, $Z = az + b$, ez az általános trans-

formáció mindig összetehető a fenti 3 elemi transfor-

mációból, tehát parallel eltolás-, forgatás- és egyiránya

nyújtásból. Először alkalmazzuk a (4.) alatti általá-

nosabb transzformációt, mely forgatásból és nyújtásból

van összetéve, azután a párhuzamos eltolást, ha tehát

$$\frac{Z = az + b}{\begin{array}{l} z_1 = az \\ Z = z_1 + b \end{array}}$$

akkor először a

azután a

transzformációt alkalmaz-

va, lesz $Z = az + b$. ezt.

De már ezen általános egészben transzformációnál a

constansok változása nélkül nem lehet felcserélni az

átalakítás sorrendjét, azaz ha pl. először akarjuk alkal-

mazni a párhuzamos eltolást, azután a forgatást és nyújtást, először át kell alakítani, a constansokat, közös tényezőnek kivevén a-t, tehát ha

$$Z = a\left(z + \frac{b}{a}\right)$$

akkor lehet először a $z_2 = z + \frac{b}{a}$ parallel eltolást, azután

a $Z = a z_2$ forgatást és nyújtást al-

kalmazni.

Lehet azonban ezt az általános transzformációt másképp is végezni; vessük fel ugyanis azt a kérdést, hogy van-e a z számsíknak olyan pontja, mely a transzformáció után helyén marad, vagyis van-e oly pont a z-számsíkban, mely a Z számsík megfelelő pontjával összeesik. Hogy ezt a c-t megkaphassuk, nem kell egyebet tenni, mint

$Z = az + b$ - ben Z és z helyébe c-t tenni, akkor

$c = ac + b$

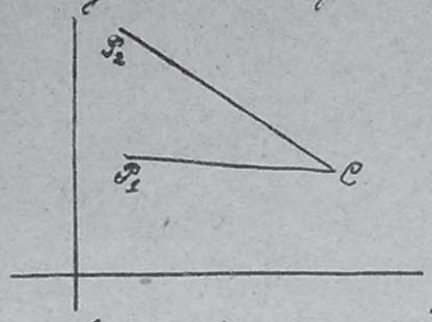
$c = \frac{b}{1-a}$ ez az a z szám, melynek meg-

felelő pontja a transformáció daczára is helyén marad, mert tényleg

$$a\underbrace{\frac{b}{1-a}}_{z} + b = \underbrace{\frac{b}{1-a}}_{Z}$$

természetesen feltéve, hogy $a \neq 1$. Ezzel a c-vel most már könnyebben végezhetjük az általános transformátiót, nevezetesen

$$Z = az + b$$
$$c = ac + b$$
$$Z - c = a(z - c)$$



ha tehát z ábrázoló pontja P_1 c-é C akkor z-c jelenti azt a vectort, melynek kezdőpontja C, végpontja P_1, s a nyert formula azt mondja, hogy ha a (z-c) vectort megszorozzuk a-val, vagyis C-körül elforgatjuk és nyujtjuk, kapjuk a Z-c vectort, melynek végpontja a keresett P_2 pont. Ezen transformatiónál tehát nem alkalmaztunk parallel eltolást, mert nem o, hanem a helyén maradó C körül forgattuk a z-t. Hogyha $a = 1$, akkor

$$c = \frac{b}{1-a} = \infty,$$

tehát a végtelen távoli pont körül kell forgatni, vagyis parallel eltolni, a mint az különben abból is látható, hogy ebben az esetben

$$Z = z + b,$$

ez pedig parallel eltolás.

Térjünk most át a lineáris tört transformatióra. A lineáris tört transformatio általános alakja

$$Z = \frac{az + b}{cz + d},$$

a hol $c \neq o$ kell legyen, vagyis

végrehajtva az osztást $Z = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c(cz + a)}$

Tehát hogy Z a z-től függjön, kell hogy bc-ad $\neq o$ legyen. Ennek negatívját (ad-bc)-t a lin. tört transformatio determinánsának nevezzük; tehát a lin. tört transformatio determinánsa o-tól különböző kell legyen. Ennek inverz függvénye

$$z = \frac{dZ - b}{-cZ + a}$$

ar inverz függvényt tehát megkapjuk, ha a-t a d-vel felcseréljük, b és c jelét ellenkezőre változtatjuk, és z-t felcseréljük Z-vel, tehát az inverz függvénynek is ugyanaz a determinánsa.

Hogy az általános tört transzformációt végrehajthassuk meg kell ismerkednünk a legegyszerűbb tört transzformációval, ez a következő

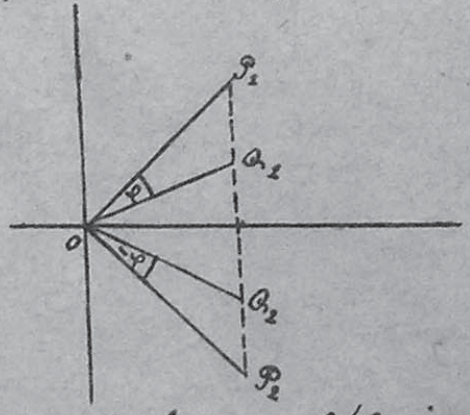
IV. $Z = \frac{1}{z}$

ez a negyedik elemi lineáris transzformáció s bármilyen lineáris rat. transzformáció ebből a 4 elemi transzformációból rakható össze. Lássuk ennek geometriai tulajdonságait A vizsgálatra célszerű polárkoordinátákat használni. Legyen $z = (r, \varphi)$, $Z = (R, \Phi)$, a hol $R = \frac{1}{r}$ és $\Phi = -\varphi$ mert hiszen $Z = \frac{1}{z}$. S most két lépésben fogjuk végezni ezt az elemi transzformációt, először

$Z_1 = (R, \Phi_1)$ a hol $R = \frac{1}{r}$ és $\Phi_1 = \varphi$

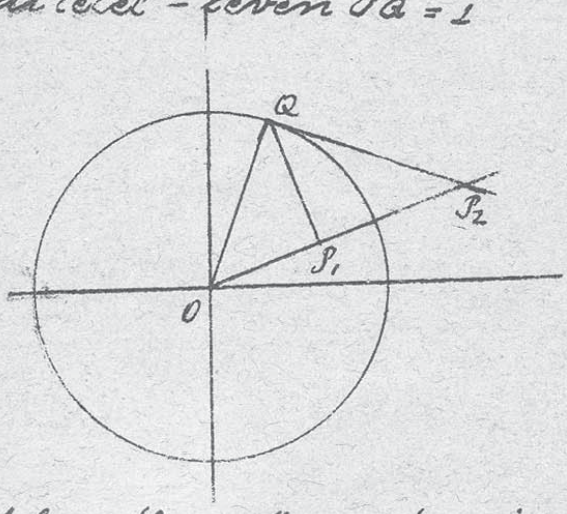
azután $Z = (R, \Phi)$ a hol $\Phi = -\Phi_1 = -\varphi$

Tehát az első lépésnél csak a radius vector változik, átmegy a reciprocba, azért ezt az első lépést reciprok radius vectorokkal való transzformációnak nevezzük; a második lépésnél csak a szög változik, átmegy a negatívba, vagyis az első lépéssel nyert minden pont átmegy a tükörképébe, azért a második lépést tükrözésnek is nevezzük. a tükrözéssel nyert idomok egybevágók az eredetiekkel, de a szögek ellentett irányúak mint pl. a $\angle P_1 O A_1$ és $\angle A_2 O P_2$



Fontos a reciprok rad. vectorokkal való transzformálás. Ez úgy történik, hogy O-ból írunk egy egység sugarú kört; a P_1 pont

vagy a körön kívül vagy belül van. Legyen P_1 a körön belül, akkor P_1-ben az OP_2-re normálist emelve, ennek a körrel való metszéspontjában Q-ban a körhöz érintőt húzunk, a mely OP_1-egyenest a keresett P_2 pontban metszi; rP_2 tényleg reciproka lesz az OP_1-nek, mert az OQP_2 Δ-ben egy ismeretes geometriai tétel - fején $OQ = 1$



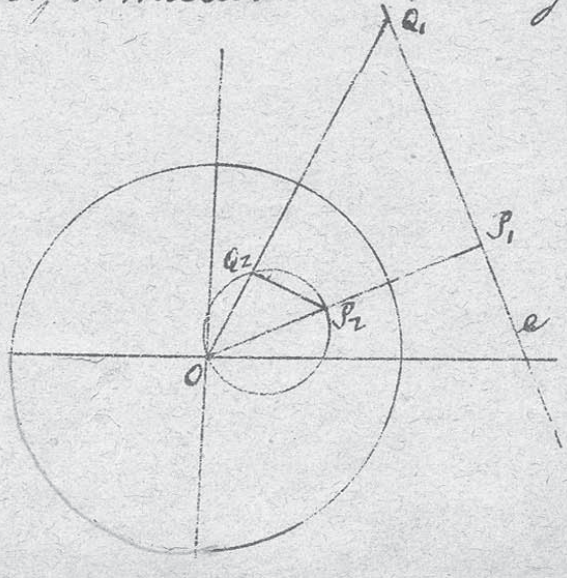
$$\overline{OQ}^2 = OP_1 \cdot OP_2 = 1 \text{ tehát}$$

$$OP_2 = \frac{1}{rP_1}, \text{ vagyis}$$

$$R = \frac{1}{r}$$

Ha P_2 pont a körön kívül van, az eljárás fordított, azaz először húzunk P_2-ből a körhöz érintőt, az érintési Q pontból OP_2-re normálist bocsátunk, mely OP_2-et a keresett P_2 pontban metszi (az ábrán P_1 felcserélendő a második esetben P_2-vel.) Ezen P_1 és P_2 pontokról azt mondjuk, hogy egymásnak inverz pontjai, tehát P_1 a P_2 inverz pontja és fordítva. Ez tehát akkor van, midőn a pontokhoz tartozó számok abszolut értékei egymásnak reciprokjai (szögeik egyenlők s így egy az O-ból kiinduló egyenesen fekszenek.)

Lássuk ezen reciprok radius vectorokkal való transformálásnak néhány tulajdonságát, így különösen, mi a síkbeli egyenesnek és körnek inverse? Ki fogjuk mutatni, hogy ezen transformatio folytán a z számsík egyenesei és körei a Z számsík körökbe mennek át.



Vegyük fel az egyenest s erre ejtsünk O-ból merőlegest; P_2 talppont inverz pontja le-

gyen P_2; az egyenes egy más, Q pontját O-val összekötő OR_1 e-
gyenesre bocsássunk merőlegest. Könnyű lesz kimutatni
hogy ennek talppontja R_2 a Q_2 inverse, vagyanis $OQ_2P_2 \triangle \sim OP_2Q_1 \triangle$

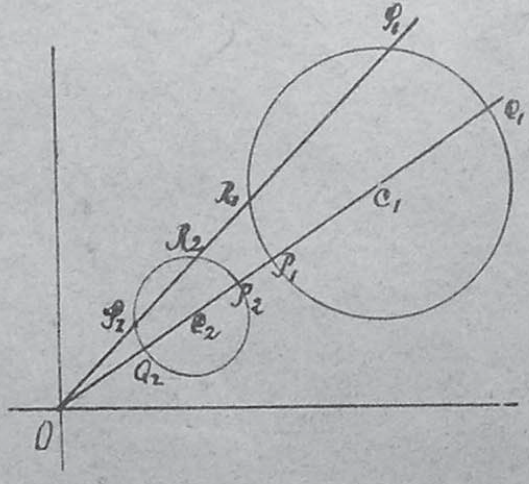
tehát $OQ_1 : OP_2 = OP_1 : OQ_2$

de mivel P_1 inverse P_2-nek, azért $OP_2 \cdot OP_2 = 1$, tehát

$$OQ_1 \cdot OQ_2 = 1$$

$$OQ_2 = \frac{1}{OQ_1}$$

s mivel Q_2-nél derékszög van, azért Q_2, a Q_1 inverse az OP_2
átmérőjű körön fekszik. Ez a kör átmegy az O ponton, mert
ha Q_1 az egyenesen ∞-be távozik, Q_2 az O-ba jön s mialatt
Q_1 visszatér, Q_2 az egész kört bejárja. Mondhatjuk tehát,
hogy egyenes inverse egy az O ponton átmenő kör.



Hasonlóképp kilehet mutatni,
hogy körnek inverse kör. Köss-
ük össze a kör C_1 centrumát
O-val, OC_1 a kört P_2 és Q_2-ben met-
szi hasonlóképp húzzunk O-ból
egy más szelőt, mely a kört R_1
illetőleg S_1-ben metszi. Legyen
most $OP_2 = p_1$, $OQ_1 = q_1$

$OR_1 = r_1$, $OS_1 = s_1$

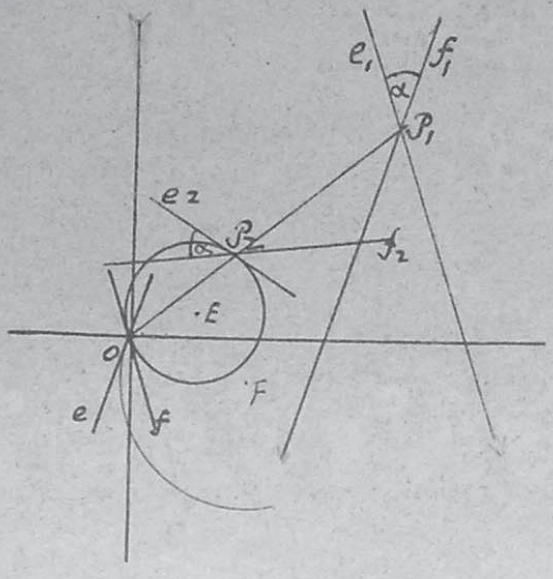
akkor $p_1 q_1 = r_1 s_1 = C$ a kör po-
tentiája, s ha P_1 inverse P_2,

$OP_2 = p_2$, akkor $q_1 = \frac{C}{p_1} = C p_2$, ebből $p_2 = \frac{1}{C} q_1$ $\Big\|$ $q_1 = \frac{1}{C} p_1$

és így $r_2 = \frac{1}{C} s_1$ $\Big\|$ $s_1 = \frac{1}{C} r_1$

vagyis a felvett kör bármelyik pontjának inverz pontját meg-
kapjuk, ha ezen pontot az O-val összekötő egyenesnek a kör-
rel való metszéspontjához tartozó r. vectort megszorozzuk
a kör potentiájának reciprokjával, tehát egy állandóval;
az így nyert r. vector végpontja a keresett inverz pont. Mi-
után α szerint a kör összes pontjainak radius vectorai ugyan-
ezen arány szerint változnak, a keletkező idom hasonló lesz

az eredetihez, tehát kör. Ezzel ki van mutatva, hogy körív-verse szintén kör, mely azonban nem megy át a O ponton. Ezen reciprok radiális vektorokkal való transformálásnak egy másik fontos tulajdonsága, hogy szögek egyenlő nagyságu de ellenkező irányu szögekbe mennek át. Vegyük fel nyugodtan az egymást metsző e_1 és f_1 egyeneseket, melyeknek szöge $e_1 f_1$; e_1-nek megfelel az E centrumu kör; f_1-nek az F centrumu kör, a P_1 szögpontnak a két kör P_2 metszőpontja. A két körnek hajlásszöge a P_2-ben huzott érintők $e_2 f_2$ szöge. Az O pontban huzott érintők $e \parallel e_1$ és $f \parallel f_1$ s mivel $\angle ef = \angle e_2 f_2$, azért $\angle e_1 f_1 = \angle e_2 f_2$ másfelől, ha pl. a balról jobbra haladó forgási irányt ($e_1 f_1$) állapitjuk meg, látható, hogy $\angle e_2 f_2$ forgás iránya ellenkező. Mondhatjuk tehát, hogy szögeknek egyenlő nagyságu, de ellentett irányu szögek felelnek meg.



Ezek a reciprok vektorokkal való transformatio főbb tulajdonságai.

A tükrözésnél és a reciprok radiális vektorlal való transformatióból tehető össze az emlitett $Z = \frac{1}{z}$ elemi tört transformatio. Mivel az invers átalakitásnál a szögek negativok lesznek, ezek pedig tükrözéssel ismét ellenkezőre változnak, azért ezen elemi transformatio folytán a szögek nagysága és iránya nem változik, csak a radius vektor megy át a reciprokba.

A tárgyalt 4 elemi racionális transformatióból most már könnyen tehető össze az általános lineáris tört transformatio. Ha ugyanis

$$Z = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c(cz+d)}$$

akkor a következő 5 lépéssel jutunk célhoz.

1.)	$Z_1 = cz$	forgatás és nyújtás
2.)	$Z_2 = Z_1 + d$	párhuzamos eltolás vek-
3.)	$Z_3 = \frac{1}{Z_2}$	torok radiális vektor
4.)	$Z_4 = \frac{bc-ad}{c} Z_3$	transzformáció és tükrö-
végre 5.)	$Z = Z_4 + \frac{a}{c}$	zés forgatás és nyújtás
		párhuzamos eltolás.

mert $Z = Z_4 + \frac{a}{c} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c} Z_3 = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c} \cdot \frac{1}{Z_2} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c(cz+d)}$

A lineáris tört transzformáció hasonlót a konformis átalakításhoz. Láttuk, hogy két sík konformis, ha az egyik sík egymásnak és köreinek a másikban körök felelnek meg s a megfelelő szögek egyenlők. Itt is a megfelelő idomok legkisebb részecskéikben hasonlók egymáshoz. Ha a konformitás illetőleg folytonosság a hasonlóságban a z és Z számsík egy bizonyos pontja körül megszűnik, úgyanis ha az

$$Z = \frac{az+b}{cz+d}$$ lineáris függvényben

$z = -\frac{d}{c}$, akkor $Z = \infty$

és ha az $z = \frac{dZ-b}{-cZ+a}$ inverz függvényben

$Z = \frac{a}{c}$ akkor $z = \infty$

tehát a kis z számsíknak $-\frac{d}{c}$, a Z számsíknak $\frac{a}{c}$ pontjában megszűnik a függvény folytonossága, tehát a konformitás is.

Egyszerű és kettős arányszám.

A $Z = az+b$ egész racionális transzformációban két állandó szerepel és így két adat az egész racionális transzformációt teljesen meghatározza, úgy hogy, ha ismeretes, hogy a

z_3-nek megfelel Z_1
z_2-nek " Z_2, akkor ezzel teljesen meg van határozva a z_3-hoz tartozó Z_3

Ugyanis a Lagrange féle formula szerint

$$Z = \frac{Z_1}{z_1 - z_2}\frac{z - z_2}{} + \frac{Z_2}{z_2 - z_1}\frac{z - z_1}{} \quad \text{és } z \text{ szerint rendezve}$$

$$Z = \frac{Z_1 - Z_2}{z_1 - z_2} z + \frac{z_2 Z_1 - z_1 Z_2}{z_1 - z_2}$$

így minden tetszésszerint behelyettesített z értékhez meg van határozva a megfelelő Z érték.

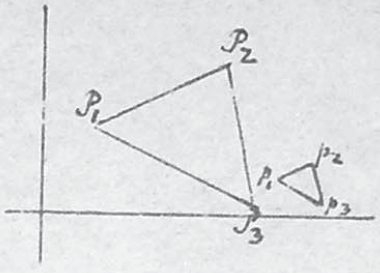
Lássuk, ha ismeretes, hogy egy egész rat. transformatio folytán a $z_1\ z_2\ z_3$ átmegy a $Z_1\ Z_2\ Z_3$ - ből milyen összefüggés van ezen 6 érték között?

$$\left.\begin{aligned} Z_1 &= az_1 + b \\ Z_2 &= az_2 + b \\ Z_3 &= az_3 + b \end{aligned}\right\} \text{ ezekből } \begin{aligned} Z_3 - Z_1 &= a(z_3 - z_1) \\ Z_2 - Z_3 &= a(z_2 - z_3) \end{aligned} \text{ osztva}$$

$$\frac{Z_3 - Z_1}{Z_2 - Z_3} = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_3}$$

Ez a relatio független az a és b állandóktól, így bármely lin. eg. transformatiónál változatlan marad. Ezt a kifejezést nevezzük z_3 egyszerű arányszámának z_1 és z_2-re vonatkozólag. Ez az egyenlőség kifejezi ezen két complex arányszám egyenlőségét; ha két complex szám egyenlő, abszolut értékeik egyenlők, szögeik aequivalensek, tehát

$$\frac{|Z_3 - Z_1|}{|Z_2 - Z_3|} = \frac{|z_3 - z_1|}{|z_2 - z_3|} \quad \text{ha a}$$



megfelelő pontok $P_2\ P_2\ P_3$, ez egyenlőség azt mondja, hogy

$$\frac{P_2 P_2}{P_2 P_3} = \frac{p_2 p_3}{p_2 p_3}$$

tehát az oldalak arányosak, a szögek egyenlők, így a két há-

$$\left.\begin{aligned} Z_1 &= \frac{az_1+b}{cz_1+d} \\ Z_2 &= \frac{az_2+b}{cz_2+d} \\ Z_3 &= \frac{az_3+b}{cz_3+d} \end{aligned}\right\}$$

$$Z_3 - Z_1 = \frac{az_3+b}{cz_3+d} - \frac{az_1+b}{cz_1+d} = \frac{(ad-bc)(z_3-z_1)}{(cz_1+d)(cz_3+d)}$$

$$Z_2 - Z_3 = \frac{az_2+b}{cz_2+d} - \frac{az_3+b}{cz_3+d} = \frac{(ad-bc)(z_2-z_3)}{(cz_2+d)(cz_3+d)}$$

osztva

$$\frac{Z_3-Z_1}{Z_2-Z_3} = \frac{z_3-z_1}{z_2-z_3}\cdot\frac{cz_2+d}{cz_1+d}$$

hasonló módon

$$\frac{Z_4-Z_1}{Z_2-Z_4} = \frac{cz_2+d}{cz_1+d}\cdot\frac{z_4-z_1}{z_2-z_4}$$

$$\frac{Z_3-Z_1}{Z_2-Z_3} : \frac{Z_4-Z_1}{Z_2-Z_4} = \frac{z_3-z_1}{z_2-z_3} : \frac{z_4-z_1}{z_2-z_4} = (Z_1 Z_2 Z_3 Z_4)$$

ez a keresett relatió 4-4 megfelelő pont körül, mely tehát nem függ a constansoktól és így semminemü lineáris transformációnál nem változik. Ezt a relátiót nevezzük az adott 4 complex szám kettős arányszámának s jelöljük $(z_1 z_2 z_3 z_4) = (z_1 z_2 z_3 z_4)$ s ha ismerjük a kettős arányszám értéket valamint a $z_2 z_2 z_3$ - nak megfelelő $Z_1 Z_2 Z_3$ - t, akkor a kettős arányszám egyenletéből meghatározhatjuk a z_4 - nek megfelelő Z_4 - t. Kérdés mikor reális és mikor complex 4 complex szám kettős viszonya? A mint könnyü kimutatni, 4 complex szám kettős viszonya akkor reális, ha a 4 szám megfelelő pontjai egy körön fekszenek. Tegyük fel most, hogy a 4 $Z_1 Z_2 Z_3 Z_4$ pont egy körön fekszik. Ennek megfelelő 4 $z_1 z_2 z_3 z_4$ pontja akkor egy egyenesen fekszik, de akkor ezeknek $(z_2 z_2 z_3 z_4) = t$ kettős viszonya reális s mivel

$$(Z_1 Z_2 Z_3 Z_4) = (z_1 z_2 z_3 z_4) = t$$

, azért a körön fekvő 4 complex szám kettős arányszáma reális; ha a négy complex szám nem fekszik egy körön (sem egyenesen) akkor t sem reális, hanem complex.

Lássunk ez utobbi transformációra egy példát:

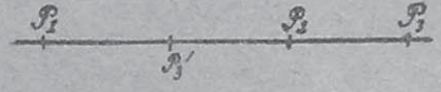
Keressük azt a lineáris tört transformatiót, melynél a

$-i$	0	$+i$	- nek a z számokban meg-
-1	$-i$	$+1$	a Z számokban.

felel

rosszú hasonló.

Lássuk mikor complex és mikor reális az egyszerü arányszám? Akkor, ha a szöge 0 vagy π, s mintán ezen arányszámnak mint hányadosnak szöge annyi mint a számláló és nevező vector szögeinek különbsége s ez 0 vagy π kell legyen; mért mondhatjuk, hogy 3 pont egyszerü arányszáma reális, ha az a három pont egy egyenesen fekszik. A P_3 pont fekhetik a P_1 és P_2 egy oldalán, s akkor a $\frac{P_3P_1}{P_2P_1}$ arányszám positiv, s fekhetik P_1 és P_2 között (P_3') s akkor az arányszám negativ. Minden más esetben 3 pt egyszerü arányszáma complex.



Legyen a reális egészarányszám

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_3} = \frac{z_3 - z_2}{z_2 - z_3} = t$$ akkor ebből

$$z_3 = \frac{z_1 + z_2 t}{1 + t}$$

ha tehát ismerjük az egy egyenesen fekvő $z_1 z_2 z_3$ pontokat s így ezekuek reális arányszámát t-t, továbbá a z_1 és z_2-nek megfelelő Z_1 és Z_2 pontokat, akkor ezen egyenlet szolgáltatja a z_3-nak megfelelő Z_3 pontot.

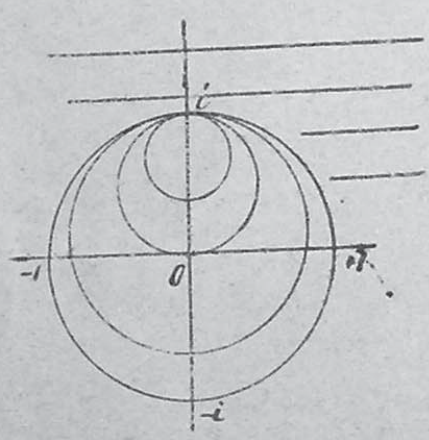
Lássuk a hasonló kérdést a tört rat. transformationnál. Mintán $c \neq 0$, felsőt és alsót mindig el lehet osztani c-vel, úgy hogy ily alakra hozható

$$Z = \frac{az + b}{z + c}$$

és így csak 3 constans lévén, a tört rat. transformatiót 3 adattal teljesen meg van határozva, így pl. ha megadjuk hogy

z_1 z_2 z_3 - nak megfelel
Z_1 Z_2 Z_3 akkor egy tetszőleges z_4 hez egy határozott Z_4 fog tartozni.

Lássuk ezne 4-4 mennyiség között a kapcsolatot:



a $-i, 0, +i$ pontok a reális tengelyen fekszenek; a $-1, -i, +1$ pontok az egységsugarú 0 centrumú körön. Tehát ha z a reális tengelyen $-i$-től 0-ig jut, Z az egységsugarú körön $-i$-től i-ig jut. Számítsuk ki tehát ezt a transzformációt

$$Z = \frac{az+b}{cz+d}$$

ha $z=-i$ és $z=-1$, akkor $-1 = \frac{-a+b}{-c+d}$, $\quad -a+b = c-d$ (1.)

" $z=-i$ és $z=0$ " $-i = \frac{b}{d}$, $\quad b = -id$ (2.)

" $z=+i$ és $z=+1$, " $i = \frac{a+b}{c+d}$, $\quad a+b = c+d$ (3.)

$2b = 2c$, $b=c$ (1.)+(3.)

$2a = 2d$, $a=d$ (3.)−(1.)

és $b=-id$, ha $b=1$, akkor $1=-id$

$d=-\frac{1}{i}=i$ és így $c=d=i$, $b=c=1$

Tehát a keresett transzformáció

$$Z = \frac{iz+1}{z+i}$$

ha $z=\infty$, $Z=i$, ha $Z=\infty$, $z=-i$, tehát ha z a $-\infty$-ből 0-n át $+\infty$-be távozik, Z az egységsugarú körön $-i$-től -1-en át $(+i)$-be s innen $(+1)$-en át $-i$-be távozik. Kérdés, hogy a z számoknak a reális tengely fölött lekvő része a Z számok melyik részével van megfeleltetésben. Ha z számokban a reálistengellyel párhuzamos egyeneseket húzunk, ezek mind az i ponton átmenő s az egységsugarú kört belülről érintő körökbe mennek át, tehát mondhatjuk, hogy a z számok felső részének megfelel az egységsugarú kör belseje.

Hatványsorok.

Az irracionális számokat az analízisben végtelen

sorokkal definiáltuk. Ugyanezt tehetjük a racionális függvényekkel vagyis megengedjük, hogy valamely rat. függvény végtelen sok tagból álljon. Vegyük először azt az esetet, midőn a rationalis egész operatiókat végtelen sokszor alkalmazzuk a változók és állandók között. Így jutunk a következő végtelen sorhoz.

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots\cdots + a_n z^n + \cdots$$

az ilyen sort, a melynél a változó folyton növekedő hatványon szerepel, hatványsornak nevezzük. Az ilyen sor lehet racionális értékű is. Természetesen csak azokkal a hatványsorokkal foglalkozhatunk, melyek convergensek, vagyis ha vannak z nek olyan értékei, melyek mellett a sor véges értékű. Egy egyszerű kritériumot ennek eldöntésére a következő: ha létezik oly r érték, mely mellett a hatványsor tagjai végesek, akkor ezen r-nél kisebb $|z|$ értékek mellett a hatványsor feltétlenül convergens. Tehát feltesszük, hogy

$|a_n| r^n < M$ és $|z| < r$ a hatványsor feltétlenül convergens, ha $|a_0| + |a_1||z| + |a_2||z^2| + \cdots\cdots + |a_n||z|^n + \cdots$ convergens, mivelhogy $|a_n| r^n < M$, azért $|a_n| < \frac{M}{r^n}$ ha tehát az utóbbi sorban mindenütt ezen egyenlőtlenség szerint helyettesítjük a constansokat, akkor nagyobbítunk, vagy hogy

$$|a_0| + |a_1||z| + \cdots\cdots + |a_n||z|^n + \cdots < M\left(1 + \frac{|z|}{r} + \left(\frac{|z|}{r}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{|z|}{r}\right)^n + \cdots\right)$$

a zárjelben levő geometriai sor pedig convergens, ha $|z| < r$, vagyanekkor convergens tehát az absolut értékek sora is, vagy hogy a hatványsor $|z| < r$ mellett feltétlenül convergens. Az ilyen hatványsoroknak 3 typusa van, melyeket 3 példán fogunk megismerni.

(1.) $$1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots\cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots\cdots$$

Kimutatjuk, hogy ez a hatványsor a számsík minden véges helyén feltétlenül convergens, még pedig azért, mert akarmilyen nagy r számot tudunk kijelölni, melynél a sor tagjai végesek, melynél kisebb $|z|$ értékek mellett tehá-

a hatványsor feltétlenül convergens. Mert legyen $|z| = N$ bármilyen nagy szám, mindig találhatunk oly helyet a sorban, melyen túl a tagok már nem fogynak. Ha ugyanis ez a hely $n > N$, akkor az n-ediken túli tagok

$$\frac{N^n}{n!} + \frac{N^n}{n!} \cdot \frac{N}{n+1} + \frac{N^n}{n!} \cdot \frac{N^2}{(n+1)(n+2)} + \cdots\cdots$$

ezek között pedig legnagyobb az első, mert az azután következők egy 1-nél kisebb számban különböznek tőle s ennitán az első tag N bármely nagy véges értéke mellett véges, azért a mi kritériumunk értelmében ez az utóbbi sor minden $|z| < N$ vagyis bármily nagy z mellett feltétlenül convergens s minitán az n-dik előtti tagok összege véges mondhatjuk hogy az (1.) hatványsor az egész számokon feltétlenül convergens. Az ilyen hatványsorokat korlátlanul convergens hatványsoroknak nevezzük.

(2.) $$1 + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \cdots\cdots + \frac{z^n}{n} + \cdots\cdots$$

Ha $z = 1$, a sor minden tagja véges és így ez a hatványsor feltétlenül convergens, ha $|z| < 1$. De már $z = 1$ mellett divergens mint harmonicus sor. Ez a hatványsor tehát feltétlenül convergens az egységsugarú kör kerületén belül. Az ilyen sorokat korlátlan convergens hatványsoroknak nevezzük.

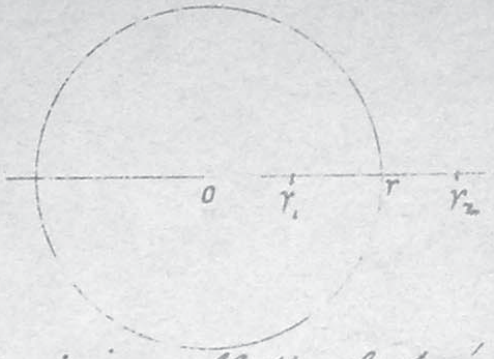
(3.) $$1 + z + 2!z^2 + 3!z^3 + \cdots\cdots + n!z^n + \cdots$$

Ki fogjuk mutatni, hogy nem létezik olyan 0-tól különböző érték, mely mellett a sor tagjai mind végesek lennének. Mert legyen ε bármilyen kis szabott szám, ha $\frac{1}{n} < \varepsilon$, vagyis $n\varepsilon > 1$, akkor az n-dik tagon túl következő tagok egy minden határon túl növekedő számsorozatot alkotnak. Ugyanis az (n)-dik tag: $(n-1)!\varepsilon^{n-1} = a$, az (n+1)dik $a \cdot n\varepsilon$, azután $a(n+1)(n)\varepsilon^2$ stb. vagyis ha $n\varepsilon = \varrho > 1$ akkor az n-diken túli tagok megfelelőleg mind nagyobbak mint az $a\varrho^2$, $a\varrho^3$, $a\varrho^4$, ……

minden határon túl növekedő sorozat tagjai, tehát nem végesek, és így nem létezik olyan o-tól különböző z értékünk, mely mellett ez a sor véges volna. Ha $z=0$, $P(z)=1$. Tehát a hatványsor csak a 0 helyen convergens. Az ilyen sorokat kizárjuk a használatból.

Látjuk tehát, hogy a hatványsornak 3 typusa lehet. A korlátlanul convergens hatványsor hasonlít az egész rationalis függvényhez, mert mint ez, a számsík összes helyein véges értékű; azért a korlátlanul convergens hatványsorok által definiált függvényt transcendens egész függvénynek nevezzük, egésznek azért, mert mindenütt véges, és transcendensnek, mert fokszáma minden határon túl nő. A második typust alkotják a korlátoltan convergens hatványsorok, a melyek csak bizonyos körön belül convergensek, és a harmadikat azok, melyek csak a számsík 0 helyén convergensek.

Most ki fogjuk mutatni, hogy ha a hatványsor korlátoltan convergens, a convergentia tartománya mindig egy kör területe, melynek centruma 0. Ha ugyanis z helyébe véges r értékeket teszünk, lesznek ezen r-ek közt olyanok, melyek mellett a sor tagjai végnélkül nőnek. Így módon a pos. számokat 2 csoportra oszthatjuk, az első csoport tagjai mellett a hatványsor tagjai végesek, a második csoport tagjai mellett a hatványsor tagjai minden határon túl nőnek. Ha r_1 az első csoportba tartozik, akkor a hatványsor mindazon z-ek mellett, melyek $|z| < r_1$ convergens; ha r_2 a második csoportba tartozik, akkor a hatványsor mindama z-k mellett, melyek $|z| > r_2$ divergens.



az első csoportnak szükségképen lesz vagy maximu-

ma, vagy felső határa, legyen ez r. Ha r maximum, akkor maga r mellett is, még végesek a hatványsor tagjai, ha r „felső" határ, r-et bármily kevéssel kisebbítve már olyan számot kapunk, mely mellett a sor tagjai végesek; tehát minden két esetben a sor convergens, ha $|z| < r$, s pedig feltétlenül divergens, ha $|z| > r$. Tehát a sor feltétlenül convergens az r sugarú kör kerületén belül.

Lássuk most a hatványsornak egy nevezetes tulajdonságát. Tegyük fel, hogy a hatványsor magán a convergentia kör kerületén is feltétlenül convergens, ha tehát

$$|z| \leqq r$$

mellett a sor feltétlenül convergens, akkor convergens lesz ez a sor $|P(r)| = |a_0| + |a_1| r + |a_2| r^2 + \ldots\ldots + |a_n| r^n + \ldots$

és így a mint azt az analizisből tudjuk, felbontható egy véges S_n és egy végtelen R_n részre, mely utóbbi $|R_n| < \varepsilon$ tehető. Már most ki fogjuk mutatni, hogy ha $|z| \leqq r$, a $P(z)$ is felbontható egy véges $P_n(z)$ és egy végtelen $R_n(z)$ részre, mely $|R_n(z)| < \varepsilon$, vagyis $|P(z) - P_n(z)| < \varepsilon$ tehető

Ugyanis $P(z) - P_n(z) = a_{n+1} z^{n+1} + a_{n+2} z^{n+2} + \ldots\ldots$

$|P(z) - P_n(z)| \leqq |a_{n+1}||z|^{n+1} + |a_{n+2}||z|^{n+2} + \ldots\ldots$

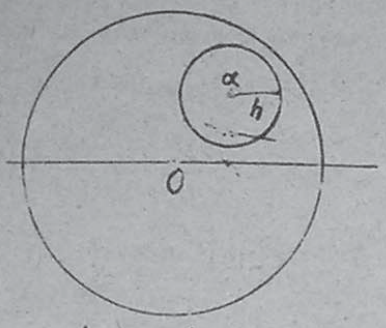
s ha $z = r$,

$\leqq R_n < \varepsilon$

tehát $|P(z) - P_n(z)| < \varepsilon$, a hol ε tetszés szerinti kis mennyiség, s az egyenlőtlenség a konvergentia kör kerületén belül mindig fennáll. A hatványsornak ezt a tulajdonságát, mely szerint mindig ki tudunk jelölni olyan területet, melyen belül a sor tagjainak summázásában egyaránt a pontosságot tudjuk elérni, nevezzük egyenletes convergentiának. A hatványsor tehát a convergentia területen belül először feltétlenül, másodszor egyenletesen convergens.

A hatványsor ezen tulajdonságát felhasználhatjuk annak kimutatására, hogy a hatványsorral definiált függvény a convergentia területen belül mindenütt

folytonos. Legyen egy ilyen hely a körön belül α, s az α körüli pontok formulája $z = \alpha + h$ a hol egyenlőre $|h| < \varrho$ és $\alpha + h$ is a körön belül van.



Ki kell mutatni, hogy

$$|P(\alpha+h) - P(\alpha)| < \varepsilon$$

Miután a hatványsor a körön belül feltétlenül convergens, az előbbi tétel alapján felbonthatjuk azt két részre

$$P(z) = P_n(z) + R_n(z)$$

úgy, hogy $|R_n(z)| < \frac{\varepsilon}{3}$ mindazon z-kre nézve, mely a körön belül fekszenek, tehát $R_n(\alpha+h) < \frac{\varepsilon}{3}$

és $R_n(\alpha) < \frac{\varepsilon}{3}$

és most $P(\alpha+h) - P(\alpha) = P_n(\alpha+h) - P_n(\alpha) + R_n(\alpha+h) - R_n(\alpha)$

$$|P(\alpha+h) - P(\alpha)| < |P_n(\alpha+h) - P_n(\alpha)| + \frac{2\varepsilon}{3}$$

de mivel $P_n(z)$ rationális egész függvény, azért folytonos a számsik bármely helyén tehát az α körön belül is és így

$|P_n(\alpha+h) - P_n(\alpha)| < \frac{\varepsilon}{3}$ tehető,

úgy hogy $|P(\alpha+h) - P(\alpha)| < \varepsilon$

Igaz ugyan hogy $P_n(z)$-nél a h-t külön kellett megszoritani, de ha a két megszoritás közül a kisebbik ϱ-t vesszük, akkor a $P(z)$ az α körön belül folytonos lesz, s akkor ez utóbbi egyenlőtlenség azt mondja, hogy a hatványsorral definiált függvény a convergentia területén belül folytonos. —

Most vizsgáljuk a $P(z)$ függvényt a 0 hely körül. Itt is áll az a tétel, mint az egész rat. függvénynél, hogy a 0 pont körül lehet egy bizonyos suggárral kört irni, melyen belül a $P(z)$ függvény azon értékét, melyet a 0 pontban felvett, nem ismétli. Ha $z=0$, $P(0) = a_0$ s ha tekintettel vagyunk arra, hogy a $P(z)$-ben a z coefficiensei közül négymelyek 0-k is lehetnek, akkor

$$P(z) = a_0 + z^k(a_k + a_{k+1}z + \cdots\cdots)$$

tehát $$P(z) - P(0) = z^k(a_k + a_{k+1}z + \cdots\cdots)$$

s most kimutatjuk, hogy ez a differentia nem lehet 0, ha $z \neq 0$; $z^k \neq 0$, a zárjelben álló kifejezés egy hatványsor, a melynél z-t mindig meghatározhatjuk úgy, hogy az alá húzott z-től rész kisebb legyen, mint $|a_k|$, mert hiszen felbonthatjuk egy egész rat. függvénnyre és egy $R_n(z) < \frac{a_k}{2}$-re, s ha most z-t annyira megszorítjuk, hogy az egész rat. függvény $< \frac{a_k}{2}$, akkor az alá húzott rész kisebb mint a_k. –

Ebből a tételből mindjárt egy fontos következtetést vonhatunk: Ha egy hatványsornak az a tulajdonsága, hogy egy 0 környezettel bíró

$$a_1\ a_2\ a_3\ a_4 \ldots\ldots a_n \ldots \quad \lim a_n = 0$$

sorozat tagjai mellett, tehát egy a 0 pont körül írt kis körön belül értéke 0, ez csak úgy lehetséges, hogy az a coefficiensek mind 0-k. Mert tegyük fel az ellenkezőt, hogy volna egy olyan legelső $a_k \neq 0$, akkor.

$$P(z) = z^k(a_k + a_{k+1} z + \ldots\ldots)$$ volna, de akkor mindig lehetne oly 0-tól különböző z-t meghatározni, mely mellett az alá húzott rész kisebb volna, mint a_k, de akkor $P(z) \neq 0$ volna, pedig feltettük, hogy 0, s így $P(z)$ csak úgy lehet 0, ha a coefficienseci is mind 0-k.

Ebből következik egy másik tétel. Ha

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots\ldots$$
$$Q(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots\ldots$$

két hatványsor, melyek ugyanazon, 0 környezettel bíró, a sorozat tagjai mellett egyenlő értékűek, akkor ez a két hatványsor egymással identicusan egyenlő, mert

$$S = P(z) - Q(z) = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1) z + (a_2 - b_2) z^2 + \ldots\ldots$$

s ez csak úgy lehetséges a fenntí tétel értelmében, hogy

$$a_0 = b_0,\ a_1 = b_1,\ \ldots\ldots\ a_n = b_n \ldots\ldots$$

tehát a két hatványsor identicus. Éppen ez a különbség a hatványsor és az egész rat. függvény között, hogy a még annyiszor két függvény identitására elég volt, ha azok $n+1$

helyen egyértékűek voltak, akkor két hatványsor csak akkor lehet identikus, ha azok végtelen sok helyen egyenlő értékűek.

Ezzel egyszersmind be van bizonyítva az is, hogy a nem azonosan egyértékű függvényt két különböző módon nem lehet sorba bontani.

Más hatványsoralakok.

Van a hatványsornak még más alakja is, melyeknek tulajdonságait az előbbire való transzformáció útján könnyen kiolvashatjuk. Ilyen

(1) $a_0 + a_1 (z-\alpha) + a_2 (z-\alpha)^2 + \dots\dots\dots$

ha $z - \alpha = Z$, akkor kapjuk az

(1*) $a_0 + a_1 Z + a_2 Z^2 + \dots\dots$ sort, melynek convergentiájára 3 eset lehetséges. Ha korlátlanul, tehát Z minden értéke mellett convergens, akkor, lévén $z - Z + \alpha$, az (1) sor is korlátlanul convergens. Ha (1*) convergens $|Z| < r$ mellett, akkor (1.) convergens $|z-\alpha| < r$ mellett, vagyis az α ponttól r sugárral írt körön belül. Ezt nevezik a centrumu sorbafejtésnek. S ha (1*) csak $Z = 0$ mellett convergens, akkor (1) csak $z = \alpha$ mellett convergens. Tehát a $(z-\alpha)$ pozitiv egész hatványai szerint haladó sor vagy az egész számsíkon, vagy az α centrumu körön belül convergens.

Egy másik alakja a hatványsornak, mely $\frac{1}{z}$ pozitiv egész hatványai szerint halad

(2.) $a_0 + a_1 \frac{1}{z} + a_2 \left(\frac{1}{z}\right)^2 + \dots\dots\dots$

ha $Z = \frac{1}{z}$, akkor kapjuk az

(2*) $a_0 + a_1 Z + a_2 Z^2 + \dots\dots\dots$ sort.

Ha (2*) korlátlanul convergens, minden véges Z mellett, akkor z is véges és (2) korlátlanul convergens. Ha $Z = \infty$, $z = 0$ mellett (2) már nem convergens. Ha $Z = 0$, $z = \infty$, akkor conv.

geres, mert értéke a_0. Ha pedig (2^x) korlátoltan convergens $|z|<r$ mellett, akkor (2) convergens $|z|<r$ mellett, tehát ha $r>|z|>\frac{1}{r}$, vagyis egy o centrumu körön kivül. S végre ha $z=o$ mellett lesz a (2^x) convergens, akkor (2) $z=\infty$ mellett convergens, értéke a_0.

Tehát az $\frac{1}{z}$ positiv, egész hatványai szerint haladó sor convergens vagy az egész számsikon kivéve a o helyet; vagy egy o centrumu kör kerületén kivül az egész számsikon, tehát korlátoltan convergens.

Egy általánosabb soralak az, mely halad z-nek positiv és negativ egész hatványai szerint:

$$(3)\qquad a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots\cdots\cdots$$
$$+a_{-1}z^{-1}+a_{-2}z^{-2}+\cdots\cdots\cdots$$

Ha ez a sor convergens, akkor feltétlenül convergens, még pedig az első rész egy R sugaru körön belül, a második rész pedig, mely halad $\frac{1}{z}$ positiv egész hatványai szerint, egy r sugaru körön kivül. Hogy tehát a két rész egyszerre, vagyis az egész hatványsor convergens legyen, kell hogy $r<R$ legyen sakkor a korlátoltan convergens (3.) sor convergentia tartománya ezen két kör által alkotott körgyürü. E mellett lehetséges, hogy $R=\infty$, $r=o$, s akkor a (3) sor convergens az egész számsikon.

Térjünk most vissza a hatványsor legegyszerübb alakjára

$$P(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots\cdots\cdots$$

Tegyünk z helyébe oly $(z+h)$ számot, mely még belül van a convergentia területén s melynek szöge megegyezik z szögével, akkor $|z+h|=|z|+|h|$ minthogy $(z+h)$ belül van a convergentia területen, azért $(z+h)$ mellett is feltétlenül convergens a sor, tehát a

$$|a_0|+|a_1|(|z|+|h|)+|a_2|(|z|+|h|)^2+\cdots\cdots\cdots$$

sor convergens. De akkor convergens az a sor is, melyet kapunk, ha ebből a sorból tetszésszerinti tagokat kiragadunk. Vegyük ki pl. azokat a tagokat, melyek h első hatványával

vannak szorozva, akkor a következő sort kapjuk:

$$|a_1| + 2|a_2||z| + 3|a_3||z|^2 + \dots\dots\dots + n|a_n||z|^{n-1} + \dots$$

mely convergens, és így a

$$P'(z) = a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \dots\dots\dots + n a_n z^{n-1} + \dots$$

sor feltétlenül convergens. Ez pedig nem egyébb mint az eredeti $P(z)$ sor deriváltja $P'(z)$. Tehát ha egy hatványsor bizonyos körön belül convergens, akkor ennek tagonkénti deriválásából származó sor is convergens ezen a körön belül. Hogy a körön kívül nem lehet convergens, könnyen kimutatható. Legyen ugyanis z egy pont a $P'(z)$ convergentia területén, akkor erről kimutatható, hogy belül van a $P(z)$ convergentia területén is tehát hogy annak ezen belül van illetőleg a két területnek összes esik. Ha ugyanis ezen z mellett convergens $P'(z)$, akkor e mellett convergens az a sor is, melyet kapunk ha $P'(z)$-t z-vel szorozzuk, tehát az

$$|a_1||z| + 2|a_2||z|^2 + \dots\dots\dots + n|a_n||z|^n + \dots\dots \text{ sor, ez}$$

annál inkább convergens, ha az $1, 2, \dots n \dots$ szorzókat elhagyjuk s eléje a véges értékű a_0-t írjuk, de akkor az eredeti $P(z)$ sort kapjuk, a mely tehát szintén convergens ezen z mellett. Ezzel pedig ki van mutatva, hogy a hatványsor deriváltjának convergentia területe ugyanaz mint az eredeti soré. Minthogy az első deriváltat mint eredeti függvényt tekinthetjük, erre nézve érvényes a tétel, így hogy általánosan kimondható, miszerint a hatványsor összes deriváltjai ugyanott convergensek, a hol maga a hatványsor.

Ha a $P(z) = |a_0| + |a_1||z| + \dots\dots\dots + |a_n||z|^n + \dots\dots$ sor convergens bizonyos körön belül, akkor ugyanitt convergens sort kapunk, ha ezt a sort először $|z|$-el azután bizonyos törtszámokkal szorozzuk, vagyis convergens lesz a sor is:

$$a_0|z| + \frac{|a_1||z|^2}{2} + \dots\dots\dots + \frac{|a_n||z|^{n+1}}{n+1} + \dots\dots\dots$$

de akkor ezen a körön belül feltétlenül convergens a követ-

kerő sor

$$a_0 z + a_1 \frac{z^2}{2} + \ldots\ldots\ldots + a_n \frac{z^{n+1}}{n+1} + \ldots\ldots$$

Ennek a sornak a deriváltja az eredeti sor. Azt az operatiót, melylyel ezt a sort az eredetiből nyertük, nevezzük integrálásnak. Tehát a hatványsorból integrálással nyert sor ugyanott convergens, hol az eredeti, de tovább nem; mert ha az integrált sornak convergentia tartománya nagyobb volna, mint az eredetié, akkor az eredeti sornak, mint ezen sor deriváltjának ugyanaz a convergentia köre volna, ez tehát ellenmondás.

Általánosan mondhatjuk tehát, hogy a hatványsorból deriválással és integrálással nyert sorok ugyanott convergensek, a hol az eredeti és pedig egyenletesen és feltétlenül convergensek.

De már a határvonalon magán különböző természetüek lehetnek ezek a sorok, a mint azt a következő példa mutatja. Az

$$1 + z + z^2 + \ldots\ldots z^n + \ldots\ldots\ldots$$

sor convergens, ha $|z| < 1$, divergens, ha $|z| \geq 1$. Az integrált sor

$$z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \ldots\ldots\ldots + \frac{z^{n+1}}{n+1} + \ldots\ldots$$

a mint az a Weierstrass féle convergentia kritériumokból ismeretes, szintén feltétlenül convergens az egységsugarú körön belül, de a kerület $+1$ pontjában divergens, míg a kerület többi pontjaiban feltételesen convergens.

A kétszeri integrálással származott sor:

$$\frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{2 \cdot 3} + \ldots\ldots\ldots + \frac{z^{n+2}}{(n+1)(n+2)} + \ldots\ldots$$

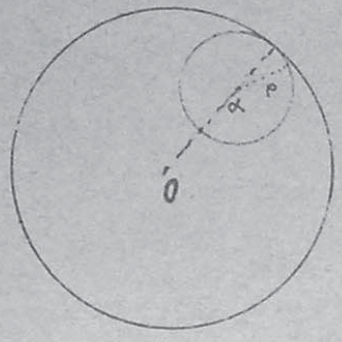
ez a körön belül és magán az egész kerületen feltétlenül convergens, de már azontúl szintén divergens.

Taylor tétele a hatványsorokra.

(I.) $P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots\ldots + a_n z^n + \ldots\ldots$

az előbbiek alapján könnyü lesz kimutatni a hatványsor viselkedését a convergentia terület bármely pontja körül.

Legyen α egy pont az r sugarú c. területen belül, $z=\alpha+h$ a körüli pontok formulája a hol $|h|<\varrho$, ϱ alatt értvén az α pont távolságát a convergentia kör kerületétől.



Szóval vizsgáljuk a hatványsorral definiált függvényt egy oly α centrumu körön belül, mely a convergentia kört belülről érinti.

(1.) $P(\alpha+h) = a_0 + a_1(\alpha+h) + \cdots + a_n(\alpha+h)^n + \cdots$

Ha ezen h-k körül éppen azt vesszük, mely az α sugár irányában fekszik, akkor erre nézve $|\alpha+h| = |\alpha| + |h|$ sort helyettesítve:

$$|a_0| + |a_1|(|\alpha|+|h|) + |a_2|(|\alpha|+|h|)^2 + \cdots + |a_n|(|\alpha|+|h|)^n + \cdots$$

egy convergens sor, ugyhogy az (1) sor nemcsak ezen specialis h mellett, hanem minden más irányu h mellett annál inkább feltétlenül convergens, és igy az (1) hatványsor a tagok bármilyen sorrendje szerint feltétlenül convergens, rendezzük tehát a sort igy, hogy először a h-tól mentes

$$a_0 + a_1\alpha + \cdots + a_n\alpha^n + \cdots \qquad (1.)$$

azután a h első hatványával

$$(a_1 + 2a_2\alpha + 3a_3\alpha^2 + \cdots + n a_n \alpha^{n-1} + \cdots)\, h \qquad (2.)$$

azután a h második hatványival

$$(a_2 + \frac{3\cdot 2}{2} a_3\alpha + \cdots + \frac{n(n-1)}{2} a_n \alpha^{n-2} + \cdots)h^2 \qquad (3.)$$

stb. szorzott tagokat irjuk. De (1.) nem egyébb, mint $P(\alpha)$, (2) nem egyébb mint $P'(\alpha)$, (3) annyi mint $\frac{P''(\alpha)}{2}$ stb., ugyhogy

$$P(\alpha+h) = P(\alpha) + P'(\alpha)h + P''(\alpha)\frac{h^2}{2} + \cdots$$

ez a Taylor féle sor, mely tehát a hatványsorokra is érvényes.

Ha $z=\alpha+h$-ból $h=(z-\alpha)$-t helyettesitünk, kapjuk az eredeti I sort más alakban:

$$(\bar{I}.) \quad P(z) = P(\alpha) + P'(\alpha)(z-\alpha) + \frac{P''(\alpha)(z-\alpha)^2}{2!} + \cdots + \frac{P^{(n)}(\alpha)(z-\alpha)^n}{n!} + \cdots$$

Az eredeti sor convergens volt, ha $|z|<r$, ez pedig feltétle-
nül convergens, ha $|z-\alpha|<\varrho$, de a míg amott a convergen-
tia-kör centruma a 0 pont, addig itt a centrum α. Ha, a
mint már láttuk, a z pos. egész hatványai szerint halad-
dó sor transcendens egész függvényt értelmez, akkor ez is
olyant értelmez; ha pedig az eredeti sor korlátoltan con-
vergens, tehát a 0 centrumu, r sugaru körön belül, ak-
kor ez is korlátoltan convergens, meg pedig az α sugaru kö-
rön belül; tehát a centrumok különbözök leven a két kör
nem eshetik össze, de azért az az utóbbi convergentia terü-
let benn van az eredetiben, sőt megeshetik, hogy azon
túl is terjed, a mint az a következő példából látható:
Vegyük ezt a sort:

$$\text{I.}\qquad 1+z+z^2+\ldots\ldots\ldots+z^n+\ldots\ldots$$

mely convergens, ha $|z|<1$, tehát a 0 centrumu, egységsu-
garu körön belül. Ha most $z=\alpha+h$ s rendezzük a sort h
hatványai szerint, azután $h=z-\alpha$ helyettesítünk, akkor
ilyen sort kapunk

$$(1)\qquad A_0+A_1(z-\alpha)+A_2(z-\alpha)^2+\ldots\ldots\ldots$$

mely convergens az eredeti körön belül, s most kimutatjuk
hogy convergentia köre a körön kívül is terjed. Tudjuk u-
gyanis, hogy ennek a sornak az értéke $\frac{1}{1-z}$, azaz

$$\text{I.}\qquad \frac{1}{1-z}=1+z+z^2+\ldots\ldots\ldots$$

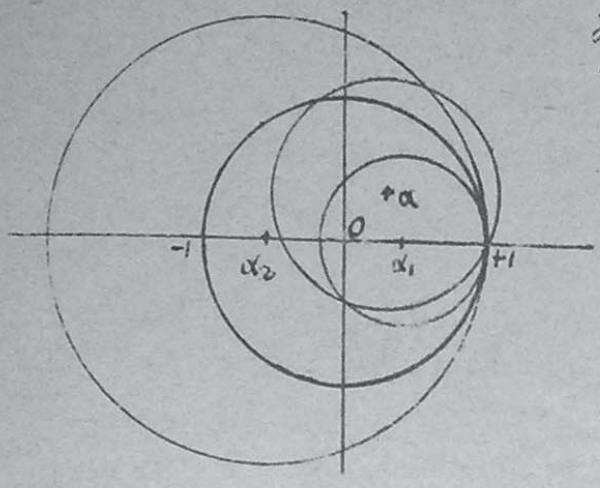
ezt pedig tudjuk a körül sorbafejteni, ha ugyanis
$1-z=1-\alpha-(z-\alpha)$, akkor

$$\frac{1}{1-z}=\frac{1}{1-\alpha-(z-\alpha)}=\frac{1}{1-\alpha}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-\alpha}{1-\alpha}}$$ ez pedig

$$(2.)\qquad =\frac{1}{1-\alpha}\left(1+\frac{z-\alpha}{1-\alpha}+\frac{(z-\alpha)^2}{(1-\alpha)^2}+\ldots\ldots\ldots\right)$$

ez is, mint (1) convergens legalább a régi területen belül,
mert $(z-\alpha)$ hatványai szerint halad; de tudjuk, hogy ha
valamely sort (itt I) kétfélekép tudunk bizonyos hely kö-
rül sorbafejteni (t.i. (1) és (2) szerint) akkor ez a két sor

teljesen identicus; a (2)-ről azonban tudjuk, hogy feltétlenül convergens, ha $\left|\frac{z-\alpha}{1-\alpha}\right| < 1$, vagyis ha $|z-\alpha| < |1-\alpha|$, tehát (1) is nagyanott convergens, azaz egy α centrumu, $+1$-en átmenő körön belül. Már pedig ez a kör csak akkor van belül a régin, ha centrumu, α, a positiv reális tengelyen fekszik a minden más helyzeténél, tehát ha α complex, vagy negativ, a sor convergentia területe túlterjed a régi körön, sőt az utolsó esetben magát a régi kört is magában foglalja.



Az olyan sort, melyet kapunk, ha az eredetiben $z = \alpha + h$ helyettesítünk, azután ezt rendezzük h hatványai szerint, s végre $h = z - \alpha$ helyettesítünk; nevezzük az eredeti sor leszármazottjának. Tehát a

I. $\quad P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots$ leszármazottja

II. $\quad P(z) = P(\alpha) + P'(\alpha) + \frac{P''(\alpha)}{2!}(z-\alpha)^2 + \ldots\ldots\ldots$

hogy kitüntessük, hogy az utóbbinak convergentia területe nem ugyanaz, mint az eredeti-é, mert a z centrum: a leszármazott sort így jelöljük Weierstrass szerint: $P(z/\alpha)$

Ha vesszük az I derivváltját s ennek leszármazottját, akkor ez

$$P'(z/\alpha) = P'(\alpha) + P''(\alpha)(z-\alpha) + \frac{P'''(\alpha)}{2!}(z-\alpha)^2 + \ldots\ldots$$

ugyanahhoz az eredményhez jutunk, ha vesszük az I sor leszármazottjának, II-nek derivváltját. Itt is áll, hogy

$P'(z)$ nem ugyanaz, mint $P'(z/\alpha)$

Tehát a $P(z)$ függvény leszármazottjából derivválás útján kapjuk a $P(z)$ derivváltjának leszármazottját.

Cauchy tétele a függvény maximumáról.

A 88. old. 3 alatt láttuk, hogy a positiv és negativ hatvá-

nyrk szerint haladó sor convergentia területe egy körgyürü.
Vegyünk most már ezen a gyürü-területen egy 0 centrumu
ϱ sugarú kört. Egy nevezetes összefüggést fogunk kimutatni
ezen legnagyobb érték között, melyet a függvény a kör kerü-
letén felvesz, és a függvény coefficensei között.

Először véges számú tagokból álló sorral definiált függ-
vényre mutatunk ki egy egyszerü tételt, mely szerint, ha
a véges tagú függvény

$$\varphi(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots\cdots + a_n z^n + a_{-1} z^{-1} + a_{-2} z^{-2} + \cdots\cdots + a_{-m} z^{-m}$$

és M ezen a maximális érték, melyet $\varphi(z)$ a ϱ sugarú körön
felvesz, akkor $|M| \geqq |a_0|$

Vegyünk minél több helyet a ϱ sugarú körön szerkben vegyük
a függvény értékét, ezen helyeket úgy formulázzuk, hogy
veszünk egy complex ε számot, melynek $|\varepsilon| = 1$, akkor a

$$\varrho\varepsilon\ ,\ \varrho\varepsilon^2,\ \varrho\varepsilon^3,\ \varrho\varepsilon^4 \cdots\cdots\ \varrho\varepsilon^n$$

olyan pontok, melyek mind a ϱ sugarú körön fekszenek s
most ezeket z helyébe téve alkossuk meg a

$$\varphi(\varrho) = a_0 + a_1\varrho + a_2\varrho^2 + \cdots\cdots + a_n\varrho^n + a_{-1}\varrho^{-1} + a_{-2}\varrho^{-2} + \cdots + a_{-m}\varrho^{-m}$$

$$\varphi(\varrho\varepsilon) = a_0 + a_1\varrho\varepsilon + a_2\varrho^2\varepsilon^2 + \cdots\cdots + a_n\varrho^n\varepsilon^n + a_{-1}\varrho^{-1}\varepsilon^{-1} + a_{-2}\varrho^{-2}\varepsilon^{-2} + \cdots + a_{-m}\varrho^{-m}\varepsilon^{-m}$$

$$\varphi(\varrho\varepsilon^2) = a_0 + a_1\varrho\varepsilon^2 + a_2\varrho^2\varepsilon^4 + \cdots\cdots + a_n\varrho^n\varepsilon^{2n} + a_{-1}\varrho^{-1}\varepsilon^{-2} + a_{-2}\varrho^{-2}\varepsilon^{-4} \cdots + a_{-m}\varrho^{-m}\varepsilon^{-2m}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi(\varrho\varepsilon^n) = a_0 + a_1\varrho\varepsilon^n + a_2\varrho^2\varepsilon^{2n} + \cdots\cdots + a_n\varrho^n\varepsilon^{n^2} + a_{-1}\varrho^{-1}\varepsilon^{-n} + a_{-2}\varrho^{-2}\varepsilon^{-2n} \cdots + a_{-m}\varrho^{-m}\varepsilon^{-nm}$$

Most adjuk össze ezeket; hallgatagúl feltesszük, hogy ε sem első, sem
második ..... sem n, sem m-edik egységgyök, azaz hogy $\varepsilon, \varepsilon^2 \ldots \varepsilon^n, \ldots \varepsilon^m \neq 1$
ezt például azért tesszük fel, mert pl. az utolsó rovatban álló ε-kat
összegezve

$$1 + \varepsilon^n + \varepsilon^{2n} + \cdots\cdots + \varepsilon^{nk} = \frac{\varepsilon^{n(k+1)} - 1}{\varepsilon^n - 1}$$

hogy a nevező el ne tünjék, $\varepsilon^n \neq 1$ kell legyen. Így most összegezve

$$\varphi(\varrho) + \varphi(\varrho\varepsilon) + \cdots\cdots + \varphi(\varrho\varepsilon^n) = (k+1)a_0 + a_1\varrho\frac{\varepsilon^{n+1} - 1}{\varepsilon - 1} + \frac{\varepsilon^{2(n+1)} - 1}{\varepsilon^2 - 1}a_2\varrho^2 + \cdots + \frac{\varepsilon^{(n+1)m} - 1}{\varepsilon^m - 1}a_n\varrho^n$$

$$+ \frac{\varepsilon^{-(n+1)} - 1}{\varepsilon^{-1} - 1}a_1\varrho^{-1} + \frac{\varepsilon^{-2(n+1)} - 1}{\varepsilon^{-2} - 1}a_2\varrho^{-2} + \cdots + \frac{\varepsilon^{-(m+1)m} - 1}{\varepsilon^{-m} - 1}a_m\varrho^{-m}$$

ha az első tagon túli tagok összegét S_k-val jelöljük, s $(n+1)$-el osztva lesz

$$\frac{\varphi(\varsigma)+\varphi(\varsigma\varepsilon)+\cdots\cdots+\varphi(\varsigma\varepsilon^{\kappa})}{\kappa+1} = a_0 + \frac{1}{\kappa+1} S_\kappa$$

miután $|\varepsilon|=1$, azért ε bármily nagy hatványa véges és különbözik 1-től, úgy hogy S_k κ-nak bármily nagy értéke mellett véges marad, és most az abszolut értékre térve át:

$$\frac{|\varphi(\varsigma)|+|\varphi(\varsigma\varepsilon)|+\cdots\cdots+|\varphi(\varsigma\varepsilon^{\kappa})|}{\kappa+1} \geqq |a_0| - \frac{1}{\kappa+1}|S_\kappa| \qquad \text{I.}$$

S most szükségünk van egy melléktételre: Ha egy egyenlőtlenségben két helyen egy-egy állandó szerepel s egy helyen oly változó, mely minden határon alul kisebbedik, akkor szabad ezt a tagot elhanyagolni, tehát ha a és b const. és η a változó és ha az $a \geqq b-\eta$ egyenlőtlenség minden η érték mellett érvényes, akkor írhatjuk, hogy $a \geqq b$. Ugyanis, ha η negativ annak elhagyásával a priori fennáll az egyenlőtlenség; tehát csak arra az esetre kell kimutatni a tétel helyességét, ha $\eta > 0$. Tegyük fel, hogy η elhagyásával $a < b$ volna, ki fogjuk mutatni, hogy ez ellenmondásra vezet, mert ha $a < b$, akkor $b-a > 0$ s akkor $(b-a)$ és 0 közül még végtelen sok positiv szám létezik, tegyük fel, hogy η egy ilyen szám (mert hiszen η lehet bármilyen kicsiny), akkor

$$b-a > \eta > 0 \quad \text{azaz}$$
$$b-a-\eta > 0$$
$$\text{tehát} \quad b-\eta > a \quad \text{már pedig feltevésünk szerint} \quad b-\eta \geqq a \quad \text{bármilyen kis } \eta \text{ mellett és}$$

így a $b > a$ feltétel tényleg ellenmondáshoz vezet, úgyhogy

$$a \geqq b \quad \text{akár pos., akár neg. kis } \eta \text{ elhagyása}$$

után. –

Ezzel az esettel van dolgunk az I alatti egyenlőtlenségnél is, mert miután κ végnélkül nőhet — mert hiszen végtelen sok olyan ε szám van, melynek $|\varepsilon|=1$ és a mely sem nem n-dik sem nem m-dik egységgyök — $\frac{1}{\kappa+1}$ vég nélkül fogy,

még a többi véges. és ha mostan minden φ helyébe annak maximális értékét irom, lesz I.-ből

$$\frac{(\kappa+1)M}{\kappa+1} \geqq |a_0| - \frac{1}{\kappa+1}|S_\kappa|$$

vagyis $M \geqq |a_0| - \frac{1}{\kappa+1}|S_\kappa|$ és a fenntiététel értelmében

$$M \geqq |a_0| \qquad (2.)$$

Ezzel be van bizonyítva, hogy a maximalis érték, melyet a $\varphi(z)$ függvény a ϱ sugarú kör kerületén felvehet, nem lehet kisebb mint a szabad tag absolut értéke.

De a hasonló tételt kimutathatjuk a $\varphi(z)$ függvény többi coefficienseire is. Ha ugyanis a

$$\varphi(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots\ldots\ldots + a_n z^n + a_{-1} z^{-1} + a_{-2} z^{-2} + \ldots\ldots\ldots + a_{-m} z^{-m}$$

mindkét oldalát megszorozzuk z^{-k}-val, akkor

$$\varphi(z) \cdot z^{-k} = a_0 z^{-k} + a_1 z^{-k+1} + \ldots\ldots + a_{k-1} z^{-1} + a_k + a_{k+1} z + \ldots\ldots + a_{-1} z^{-(k+1)} + \ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

függvényt kapjuk, mely hasonló az előbbiher, s melynek szabad tagja a_k. Erre tehát ugyanaz a tétel érvényes; a $\varphi(z)$ maximuma M, z^{-k} maximuma a ϱ sugarú körön ϱ^{-k}, tehát

$$M \cdot \varrho^{-k} \geqq |a_k|$$

$$M \geqq |a_k| \varrho^k \qquad (2.)$$

ha pedig mindkét oldalt megszorozzuk z^k-val, akkor

$$\varphi(z) z^k = a_0 z^k + a_1 z^{k+1} + \ldots\ldots\ldots + a_{-1} z^{k-1} + \ldots\ldots + a_{-k} + a_{-k-1} z^{-1} + \ldots\ldots\ldots$$

a hol a_{-k} a szabad tag, tehát

$$M \cdot \varrho^k \geqq |a_{-k}|$$

$$M \geqq |a_{-k}| \varrho^{-k} \qquad (3.)$$

Ha tehát megtartjuk a (2) egyenlőtlenséget azon feltevéssel, hogy $k \geqq 0$ lehet, akkor a

$$M \geqq |a_k| \varrho^k \qquad k \geqq 0$$

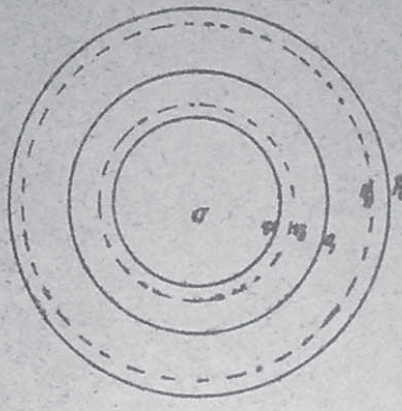
képlet magában foglalja mindhárom esetet, tehát azt az általános tételt, hogy ha a $\varphi(z)$ függvény coefficienseit rendre

Harkány

megszorozzuk 1 ill. ϱ^1, ill. ϱ^2, ... ϱ^k .....
vagy 1 " ϱ^{-1} " ϱ^{-2}, ... ϱ^{-k} ..... számokkal,
akkor ezen a_0 " $a_1\varrho$ " $a_2\varrho^2$ ..... $a_k\varrho^k$ .....
vagy a_0 " $a_{-1}\varrho^{-1}$ " $a_{-2}\varrho^{-2}$ ..... $a_{-k}\varrho^{-k}$ .....
szorzatok absolut értékre nézve nem lehetnek nagyobbak mint a $\varphi(z)$ függvény maximális értéke a ϱ sugarú kör kerületén.

Ennek a tételnek a kiterjesztése a végtelen sok tagu függvényekre, tehát a hatványsorokra fogja adni a Cauchy féle tételt. Vegyük ugyanis a következő negyas kitevőjü hatványsort:

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ a_{-1} z^{-1} + a_{-2} z^{-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$



Láttuk hogy ezen hatványsor convergentia területe egy körgyürü, melynek belső köre a neg. kitevőjü sor convergentia területének alsó határa külső köre a positiv kitevőjü sor convergentia területének felső határa r. illetőleg R sugarakkal. Már most a 84 oldal szerint tudjuk, hogy a positiv kitevőjü sor egyenletesen convergens, azaz a R sugarú körön belül lehet olykört (R_1) meghatározni, melyen belül vagy magán a körön is oly pontossagot tudunk elérni a függvény n tagjainak summazásaban, hogy a többiek elhagyásával elkövetett hiba kisebb mint pl. $\frac{\varepsilon}{2}$, a hol ε tetszés szerint kicsiny. Ugyanez áll a neg. kitevőjü sorra, itt is találhatunk a r sugarú körön kivül egy hasonló tulajdonságu r_1 kört, melyen kivül tetszésszerinti pontossággal summázhatjuk az első m tagot, úgy hogy az elkövetett hiba kisebb mint $\frac{\varepsilon}{2}$. Hatsó hát vesszünk olyan ϱ sugarú kört, mely az $r_1 R_1$ körgyürün belül fekszik, ennek kerületén mindkét sor egyenletesen convergens lesz. Legyen most a $P(z)$ sor ezen emlitett pontosság-

gal két részre osztva, s jelöljük az n első positiv és m első neg. kitevőjü tag summázása után fennmaradó maradéktagok összegét $R(z)$-vel, akkor

$$\frac{P(z)-R(z)}{Q(z)} = a_0 + a_1 z + \dots\dots\dots + a_n z^n + a_{-1} z^{-1} + \dots\dots\dots + a_{-m} z^{-m}$$

akkor a jobboldalon álló véges tagú függvényre már érvényes a fenntitétel a ϱ sugarú kör pontjaira nézve; $P(z)$ maximális értéke a ϱ sugarú körön legyen M és miután a megszorítás folytán $|R(z)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, azért a balol-bali függvény maximuma $M+\varepsilon$ és $M-\varepsilon$ közt fekszik, úgyhogy ha $0 < \vartheta < 1$, akkor $M + \vartheta\varepsilon \geqq |a_0|$

és miután ε nagysága a mi hatalmunkban áll, vehetjük azt végtelen kicsinynek, sakkor $M \geqq |a_0|$.

Ha a hatványsort egy véges mennyiséggel szorozzuk, az convergens marad, szorozzuk tehát z^{-k}, akkor

$$P(z) z^{-k} = a_k + a_{k+1} z + \dots\dots\dots + a_{k-1} z^{-1} + \dots\dots\dots$$

s erre alkalmazva az előbbi tételt

$M \varrho^{-k} \geqq |a_k|$ s igy kapjuk azt az általános tételt

hogy $M \geqq |a_k| \varrho^k$ a hol $k \gtrless 0$

Ez a Cauchy féle tétel, a hatványsor maximális értéke a ϱ sugarú körön s a coefficiensek közti összefüggésről.

Megjegyzendő különben, hogy Cauchy ezt a tételt integrális calculussal vezette le; ezen egyszerü bizonyitási mód Weierstrasstól ered. Ez a tétel érvényes akkor is, ha a hatványsor csupa positiv vagy csupa negativ hatványok szerint halad.

A convergentia eldöntésére vonatkozó tétel és Cauchy tétele a maximumról, képezik ezen elmélet alaptételeit.

Lássuk most, minő fontos következtetéseket lehet vonni a Cauchy féle tételből?

1) Egy egyértékü függvényt nem lehet két különböző

alakra hozni z positiv és negativ hatványai szerint olyformán, hogy ezen két sor ugyanazon ς sugarú körön convergens és annak minden egyes pontjában egyenlő értékü legyen. Mert tegyük fel, hogy az egyik sor

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ a_{-1} z^{-1} + a_{-2} z^{-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{conv. ha } |z| = \varsigma$$

a másik $Q(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots$

$$+ b_{-1} z^{-1} + b_{-2} z^{-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{conv. ha } |z| = \varsigma$$

és hogy a ς sugarú kör minden egyes pontjában a két függvény egyenlő, akkor ezen pontokra nézve

$$P(z) - Q(z) = 0$$

és így a maximális érték a körön

$$M = 0$$

és mivel ezen $P(z) - Q(z)$ függvényre érvényes Cauchy tétele,

$$0 \geq |a_n - b_n| \varsigma^n$$

de mivel a jobb oldalon csupa abszolut érték áll, azért az egyenlőtlenségi jel elesik, s mivel $\varsigma \neq 0$, azért a jobboldal csak úgy lehet 0, ha $a_n = b_n$, $n = 0, 1, 2, 3 \ldots\ldots$ tehát a két függvény megfelelő coefficiensei egyenlők, a két függvény identicus

2.) Legyen adva egy olyan hatványsor, mely transcendens egész függvényt értelmez

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Akkor ez a hatványsor z bármily nagy értéke mellett convergens és így Cauchy tétele érvényes bármilyen nagy z illetőleg ς sugarú körön,

$$M \geq |a_n| \varsigma^n$$

lehet, hogy némely coefficiensek 0-k; tegyük fel, hogy $a_n \neq 0$, akkor ezen egyenlőtlenségből látható, hogy a transcendens függvény maximumra minden határon túl nőhet, ha ς sugár, melynek körén a maximum vétetik, elég nagy.

Itt ismét egy lényeges különbség látható az egész rat. függvény és az egész transcendens függvény között, ott kimutattuk mutatni, hogy ha adva [illegible]

kört, melyen túl állandóan (tehát minden z értéke mellett,) nagyobb a függvény értéke mint N; itt csak azt tudjuk kimutatni, hogy mindig irhatunk oly nagy ϱ sugárral kört, melyen a függvény maximuma nagyobb mint N, de azért lehet a körön olyan hely, melyben a függvény értéke esetleg kisebb mint N.

Néhány tétel a leszármaztatott hatványsorokról.

Azt az eljárást, midőn a

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots\ldots\ldots$$

hatványsorban $z = \alpha + h$ helyettesítve, azt h hatványai szerint rendezzük, azután ismét $h = (z-\alpha)$-t helyettesítünk, neveztük leszármaztatásnak; és a

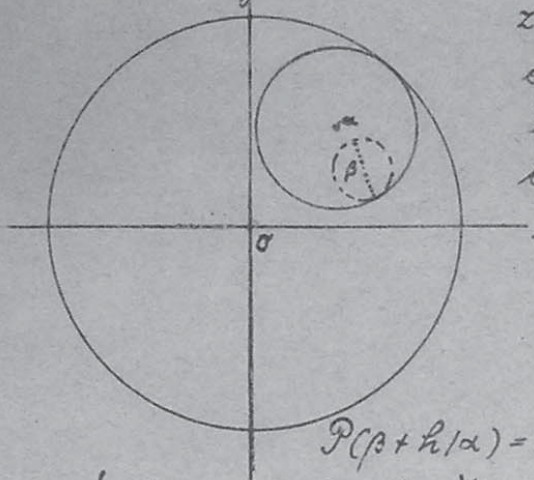
$$P(z/\alpha) = P(\alpha) + P'(\alpha)(z-\alpha) + \frac{P''(\alpha)}{2!}(z-\alpha)^2 + \ldots\ldots$$

sort az eredeti leszármaztjának neveztük. Láttuk, hogy a hető convergentia területe nem ugyanaz, a mannak 0, annak a a centruma, és ϱ sugara az α-nak az eredeti convergentia körtől való távolsága, habár megeshetik, hogy a leszármaztt sor convergens területe túlterjed a régi körön. De a két terület közös pontjaiban a két sor értéke ugyanaz. Láttuk továbbá, hogy épigy lehet átmenni a $P(z)$ deriváltjáról $P'(z)$ ről annak leszármaztjára $P(z/\alpha)$-ra, melynek convergentia területe ugyanaz mint $P(z/\alpha)$ és pedig azért mert ugyanezt az eredményt kapjuk, $P(z)$ leszármaztját $P(z/\alpha)$-t deriváljuk $P'(z/\alpha)$ a derivált és eredetije pedig mindig ugyanazzal a convergentia területtel bír.

Ismételjük most már a leszármaztatás operatióját a $P(z)$ első leszármaztján $P(z/\alpha)$-n. Vegyük tehát $P(z/\alpha)$-t eredeti sornak, melynek convergentia területe legalább az α centrumu, ϱ sugarú kör és ezen belül vegyünk fel egy β pontot s e körül bontsuk sorba a $P(z/\alpha)$-t,

azzal helyettesítünk $z=\beta+h$, tehát

$z-\alpha=\beta-\alpha+h$



épen mert β a ρ sugarú körön belül van, a sor ezen belül feltétlenül convergens, szabad tehát h hatványai szerint rendezni, és így

$$P(\beta+h/\alpha)=P(\alpha)+P'(\alpha)(\beta-\alpha+h)+\frac{P''(\alpha)}{2!}(\beta-\alpha+h)^2+\ldots$$

s rendezve h hatványai szerint, a h-tól mentes tagok adják $P(\beta/\alpha)$ stb.

$$P(\beta+h/\alpha)=P(\beta/\alpha)+P'(\beta/\alpha)h+\frac{P''(\beta/\alpha)}{2!}h^2+\ldots\ldots\ldots$$

és $h=z-\beta$ helyettesítve, kapjuk, hogy

$$P(z/\alpha\beta)=P(\beta/\alpha)+P'(\beta/\alpha)(z-\beta)+\frac{P''(\beta/\alpha)}{2!}(z-\beta)^2+\ldots\ldots$$

tulajdonképen az jönne ki, hogy ez a sor egyenlő $P(z/\alpha)$-val, de mivel ez a sor egy oly területen belül bizonyan convergens, melynek centruma β és sugara a β távolsága a ρ sugarú kör kerületétől, azért ez nem bír egyenlőséggel a convergentia területtel, mint $P(z/\alpha)$ s ezért jelöljük ezt a sort $P(z/\alpha\beta)$-val, a mi azt jelenti, hogy $P(z)$-ről átmentünk egy α centrumu sorra, s erről, ezen belül fekvő β centrumu sorra. De mivel β belül van az r sugarú körön, szabad z-ről direct átmenni β-ra s akkor kapjuk a következő sorbafejtést,

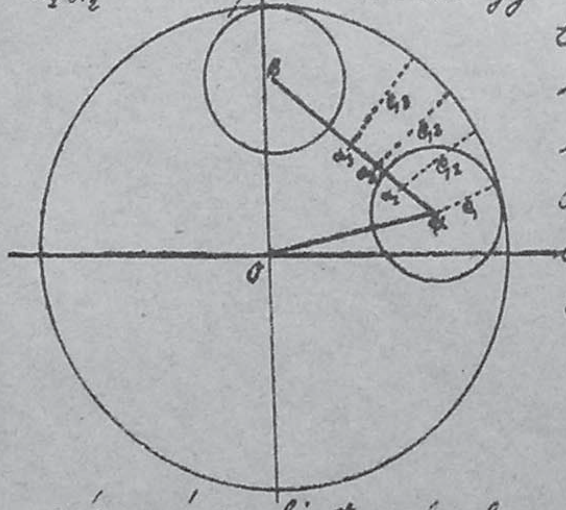
$$P(z/\beta)=P(\beta)+P'(\beta)(z-\beta)+\frac{P''(\beta)}{2!}(z-\beta)^2+\ldots\ldots\ldots$$

a mely convergens egy β centrumu területen, mely az r sugarú kört belülről érinti és így magában foglalja $P(z/\alpha\beta)$ convergentia területét; de tudjuk hogy az α körön belül $P(z)=P(z/\alpha)$, s mivel β az α körön belül van, $P(\beta)=P(\beta/\alpha)$ épígy $P'(\beta)=P'(\beta/\alpha)$, tehát a két sor tagról tagra ugyanaz, mert mindkettő halad $(z-\beta)$ hatványai szerint és így a megfelelő coefficiensek egyenlők, úgyhogy mindkettő a β centrumu körön belül, melynek sugara β távolsága az eredeti kör kerületétől, feltétlenül convergens. Kaptuk tehát azt a tételt, hogy akár

követve akár közvetlenül származtatunk az eredetiből új sort, a kettő mindig azonos.

A leszármaztatás operátorjával ily módon végtelen sok hatványsort kapunk, mindegyik külön centrumu területtel, de ki fogjuk mutatni, hogy ezek között nincsen különbség, mind egyenlő jellegüek, azaz bármelyiket téve első helyre, ebből valamennyit leszármaztathatjuk, igy magát az eredeti sort is.

Vegyük tehát a $P(z)$ hatványsort, mely convergens az r sugaru, 0 centrumu körön belül, s terjünk át az ismeretes módon a $P(z/\alpha)$ és $P(z/\beta)$ leszármaztatott sorokra. Ki fogjuk mutatni, hogy többszörösen körbevigtatott leszármaztatással a $P(z/\alpha)$-ból levezethetjük a $P(z/\beta)$-t vagy $P(z)$-t. Összekötve α-t β-val, erre rakjunk föl α-tól kezdve β felé egy ϱ-nál kisebb ϱ_1 távolt $\alpha_1 \alpha_2 \cdots\cdots$ pontokkal. Igy választva az osztáspontokat, az α_1 biztosan belül van az α convergentia területén és igy α-ról áttérhetünk α_1-re s lesz $P(z/\alpha\alpha_1) = P(z/\alpha_1)$



Az α_1 centrumra, ϱ_1 sugarú körön belül fekszik α_2, s igy áttérhetünk α_2 centrumra s lesz

$$P(z/\alpha\alpha_1\alpha_2) = P(z/\alpha_2)$$

erről hasonló okból α_3-ra

$$P(z/\alpha\alpha_1\alpha_2\alpha_3) = P(z/\alpha_3)$$

s igy végre eljutunk olyan α_n osztási ponthoz, illetőleg sorbabontáshoz, melyen belül fekszik β, akkor α_n-ról áttérve $\alpha\beta$-ra lesz,

$$P(z/\alpha\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \cdots\cdots \alpha_n\beta) = P(z/\beta)$$

vagyha z-t a 0-val helyettesitjük össze, hasonló osztási pontokkal, lesz

$$P(z/\alpha\gamma_1\gamma_2 \cdots\cdots \gamma_n 0) = P(z)$$

Tehát egyik sorbabontás a másikba átvezethető leszármaztatással.

Vessünk fel most egy más kérdést. Láttuk hogy ilyen le-

származtatott sor végtelen sok van, mivel α-t bárhol felvehetjük a convergentia területén belül. Azt is láttuk, hogy a geometriai sor leszármazottjának convergentia területe túlléjr a régi convergentia kör határán, úgy hogy itt a függvényt oly helyeken is tudtuk értelmezni, (a függvény továbbfolytatása) a hol az eredeti sorbabontással nem tudtuk. A kérdés most az, vajjon lehetséges-e, hogy a $P(z)$ összes leszármazottjainak convergentia területe, túlléjjen az eredeti körön? Hogy ezt a kérdést eldönthessük, szükségünk van először egy más tételre. Mintán egyanis α felvehet bárminy értéket az r sugarú körön belül, fogjuk fel α-t mint változót ebben az intervallumban, akkor a minden szabott értékéhez tartozik egy convergentia sugár, azaz minden egyes α helyen a leszármaztatott sor convergentia területének sugara, más és más lesz. Így a sugaraknak egész csoportját kapjuk, mely csoportnak egyfelől van maximuma vagy felső határa, másfelől minimuma vagy alsó határa. És most tételgyanánt ki fogjuk mutatni, hogy ez az alsó határ 0. Tegyük fel az ellenkezőt, hogy t.i. egy 0-tól különböző ς ezen sugarak alsó határa, ki fogjuk mutatni, hogy az ellentmondásra vezet, mely szerint az eredeti sor convergentia területének sugara nagyobb volna mint r.

Ha egyanis ς az alsó határ, akkor bármilyen α centrumu sorbabontás egy ς sugarú körön belül biztosan convergens és így tetszésszerinti α centrum körül sorbabontva

$P(z) = t \qquad z = \alpha + h \;,\; |h| < \varsigma$

$$P(z)\alpha = P(\alpha) + P'(\alpha)h + \ldots\ldots\ldots + \frac{P^r(\alpha)}{n!}h^r + \ldots\ldots$$

ez a sor convergens feltételünk szerint a ς sugarú körön belül; vegyük most $\varsigma_1 < \varsigma$, akkor a $P(z)$ függvény maximuma a ς_1 sugaru kör peripheriáján Cauchy tétele szerint:

$$M = \left|\frac{P^r(\alpha)}{r!}\right| \varsigma_1^r \qquad h = \varsigma_1$$

$$M\varsigma_1^{-r} = \left|\frac{P^r(\alpha)}{r!}\right|$$

a hol x alatt oly változó számot értünk, mely $|a|<r$, és ezen összes a centrumu ϱ_2 sugarú körökön felleljvő függvény maximumokuak a maximuma M. És most fejtsük ki $\frac{P^r(a)}{r!}$ ez a

$P(z)$-nek r-edik deriváltja $z=a$ mellett

$$P^r(z)=r!a_r+(r+1)r\cdots 2a_{r+1}z+(r+2)(r+1)\cdots 3a_{r+2}z^2+\cdots+(r+\kappa)(r+\kappa-1)\cdots(\kappa+2)a_{r+\kappa}z^\kappa+\cdots$$

osztva $r!$-al $\frac{P^r(z)}{r!}=a_r+\binom{r+1}{r}a_{r+1}z+\binom{r+2}{r}a_{r+2}z^2+\cdots+\binom{r+\kappa}{r}a_{r+\kappa}z^\kappa+\cdots\cdots$

és $\frac{P^r(a)}{r!}=a_r+\binom{r+1}{r}a_{r+1}a+\binom{r+2}{r}a_{r+2}a^2+\cdots+\binom{r+\kappa}{r}a_{r+\kappa}a^\kappa+\cdots\cdots$

legyen most már $|a|=r_1<r$, akkor ez utóbbi függvénynek az r_1 sugarú körön vett maximális értékére szintén áll a Cauchy féle tétel, mely szerint most

$$M\varrho_1^{-r}\geq\binom{r+\kappa}{r}|a_{r+\kappa}|r_1^\kappa$$

ez az egyenlőtlenség pedig áll r és κ bármily nagy értékei mellett. Ha tehát $(r+\kappa)$-t fixirozzuk oly módon, hogy $r+\kappa=n$ legyen s ennek megfelelőleg r és κ-t változtatjuk, kapjuk a következő egyenlőtlenségeket:

ha $r=0$, $k=n$	$M\varrho_1^{-0}=M\geq\binom{n}{0}\lvert a_n\rvert r_1^n$	ϱ_2^0
" $r=1$, $k=n-1$	$M\varrho_1^{-1}\geq\binom{n}{1}\lvert a_n\rvert r_1^{n-1}$	ϱ_2^1
" $r=2$, $k=n-2$	$M\varrho_1^{-2}\geq\binom{n}{2}\lvert a_n\rvert r_1^{n-2}$	ϱ_2^2
.....	.....	.
ha $r=n$, $\kappa=0$	$M\varrho_1^{-n}\geq\binom{n}{n}\lvert a_n\rvert$	ϱ_2^n

vegyük most $\varrho_2<\varrho_1$ és ϱ_2 megfelelő hatványaival szorozzuk meg a fenti egyenlőtlenségeket, s azokat adjuk össze, akkor

$$M\left(1+\frac{\varrho_2}{\varrho_1}+\frac{\varrho_2^2}{\varrho_1^2}+\cdots+\frac{\varrho_2^n}{\varrho_1^n}\right)\geq|a_n|(r_1+\varrho_2)^n$$

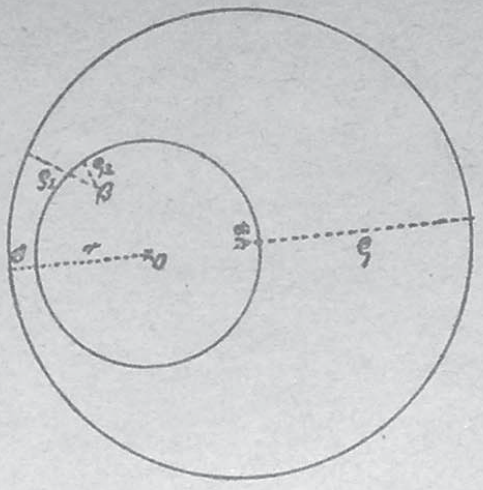
a bal oldali zárójeles kifejezés egy geom. haladvány, melyet végnélkül folytatva

$$\frac{M}{1-\frac{\varrho_2}{\varrho_1}}>|a_n|(r_1+\varrho_2)^n$$

a jobboldali kifejezés nem egyébb, mint a $P(z)$ hatványsor $(n+1)$ edik tagja, a_nz^n, ha abba $z=r_1+\varrho_2$ helyettesítünk s miután a baloldal egy állandó kifejezés, ez az egyenlőtlenség azt mondja, hogy a $P(z)=a_0+a_1z+\cdots\cdots a_nz^n+\cdots$ hatványsor bármely tagja véges marad, ha abban $|z|=r_1+\varrho_2$ helyettesítünk,

ez pedig azt mondja, hogy a $P(z)$ eredeti hatványsor feltétlenül convergens egy O centrumu $(r_1+\varrho_2)$ sugaru körön belül; de mivel $r_1 < r$ és $\varrho_2 < \varrho_1 < \varrho$, azért $|z| < r+\varrho$, és így a $P(z)$ hatványsor convergens volna egy $(r+\varrho)$ sugarú körön belül, de ez ellenmondás mert a $P(z)$ convergentia körének sugara csak r. Ezzel tehát ki van mutatva az a tétel, hogy a $P(z)$-ből leszármaztatott sorok convergentia sugarainak alsó határa nem lehet o-tól különböző, tehát o.

Ezen tétel segitségével, könnyü lesz most többek közt kimutatni azt a tételt hogy a leszármaztatott sor convergentiá területe sohasem foglalhatja magába az eredeti sor convergentia körét, hanem vagy metszi azt, vagy érinti.



Tegyük fel, hogy $P(z)$ convergentia körének sugara r, $P(z)$-ből származtassuk le $P(z/\alpha)$-t, s tegyük fel, hogy ennek a centruma ϱ sugaru convergentia köre egészen magában foglalja a régit. Kimutatjuk, hogy ez az előbbi tétel helytelen voltát vonná maga után. Ha ugyanis a régi convergentia körön belül felveszünk egy β-t, akkor

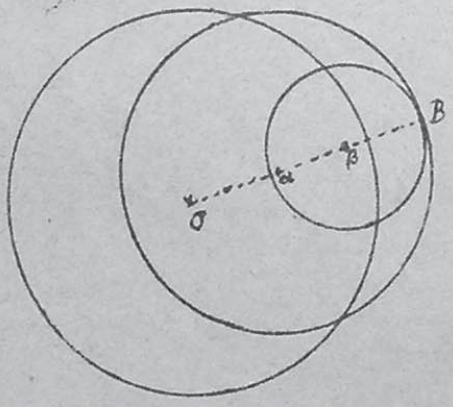
$$P(z/\alpha\beta) = P(z/\beta)$$

a $P(z/\beta)$ biztosan convergens a ϱ_2 sugarú körön belül, $P(z/\alpha\beta)$ pedig a ϱ_2 sugarú körön belül, s mivel a kettő identicus, azért $P(z/\beta)$ vagyis a $P(z)$ összes többi leszármazottjai convergentia köreinek sugara nagyobb volna a két kör legkisebb távolságánál, o-nál a mely pedig feltételünk szerint nem o, vagy más szavakkal a $P(z)$ összes leszármazottjai convergentia sugarainak alsó határa $o \pm o$ volna, ez pedig ellenkezik az előbb bebizonyitott tétellel. Kivülről már érinthetik a két kör, mert ekkor legalább egy o sugarú kör van, azután metszheti vagy belülről érintheti. Ezen tétel alapján, mindjárt meg is mondhatjuk, hogy milyen

határérték körül váltakozhatók a leszármaztatott sorok konvergenciasugara. Ha egyenlő a sorbafejtési centrumra, a sugár r_0, akkor az "egyszerű" esetben minden körön kívül esnek a körök $r_2 = r+|\alpha|$, minden más esetben kisebb. A legrosszabb eset, a mikor a két kör belülről "érintkezik", akkor $r_2 = r-|\alpha|$, minden más esetben annél nagyobb és így

$$r+|\alpha| \geq r_2 \geq r-|\alpha|$$

Ezzel a tételhez hozzá van mutatva az is, hogy ha az eredeti hatványsor konvergencia tartománya véges, az összes leszármaztatottak is végesek.



Szintén a fenti tételnek következménye, hogy ha valamely x centrumra sorbafejtés konv. területe túlmegy a régi körön, akkor az a-t a 0-val összekötő sugár minden x-nál nagyobb B centrumra sorbafejtés területe is túllépi a régi körön. Mert $R(x/\beta) = R(x/\alpha\beta)$ s miután a $R(x/\alpha\beta)$ konv. kör belül, melynek centruma β és sugara β-nak az origótól való távolsága βB, azért $R(x/\beta)$ is túllépi a régi körön. De ez nem áll minden radiusra, mert nem minden radiusra vannak ilyen körök, mert hisz ezen sugarak első határára 0. Tehát kell léteznie legalább egy radiusnak, melyen a sorbafejtés konvergencia területei nem lépnek túl a régi körön. Ha ennek a radiusnak a körrel való átdöfési pontja P, akkor ez a P pont egyik konvergencia területbe sem horható, mert ezen P pont körüli sorbafejtésnek sugara 0 s így ezen a helyen nem is adhat értelmet a függvénynek. Az ilyen pontját a peremjelenségnek, melyben a függvényt nem értelmezhetjük, az az a melyben a hatványsor divergens, nevezzük singuláris pontnak. Tehát minden hatványsor konvergencia körének a peremjelenségén van legalább egy singuláris pont, de lehet több is s így vannak oly

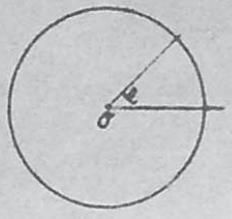
hatványsorok, melyeknél az egész kör peripheriája csupa singuláris pontokból áll. Lássunk egy-egy példát erre a két ritkább esetre:

(1.) a geometria sor $1+z+z^2+\ldots\ldots+z^n+\ldots = \frac{1}{1-z}$

ha $|z|<1$. Ezt bármely centrum körül, mely $|\alpha|<1$, sorba tudjuk bontani. De ha $\alpha=1$, a függvény végtelenné válik, elveszti értelmét és így a geometriai sornak az egységsugaru kör $+1$ pontjában singularis pontja van.

(2.) $P(z) = z^{1} + z^{1\cdot 2} + z^{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots\ldots + z^{n!} + \ldots\ldots = \sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}$

Ez a sor conv., ha $|z|<1$, mert $z=1$ mellett a sor összes tagjai végesek, de divergens $|z|\geq 1$ mellett. Smost bebizonyítjuk, hogy az egységsugaru körön csupa singularis pontjai vannak ezen sornak. Ugyanisjárjuk be az O-ból kiinduló radiusvectorral az egész kör területét, s legyen z változó φ szög formulája $\varphi = \frac{2p\pi}{q}$ a hol p és q egész rat. számok. Az ilyen szöggel biró complex z-re kifejezése



$$z = \varrho\left(\cos\frac{2p\pi}{q} + i\sin\frac{2p\pi}{q}\right)$$

$$z^q = \varrho^q(\cos 2p\pi + i\sin 2p\pi) = \varrho^q$$

és $z^{ql} = \varrho^{ql}$

tehát z azon hatványai, melyeknek kitevője q-val osztható, positiv egész számok s így a (2) sorban a q-dik hatványon túli tagok mind pos. egész számok, s ennek alapján a sort két részre oszthatjuk

$$P(z) = \sum_{n=1}^{q-1} z^{n!} + \varrho^{q!} + \varrho^{(q+1)!} + \ldots\ldots$$

De összeg abs. ért. ke nagyobb vagy egyenlő a két tag abs. ért. ének különbségével.

$$|P(z)| \geq \varrho^{q!} + \varrho^{(q+1)!} + \ldots\ldots - \left|\sum_{n=1}^{q-1} z^{n!}\right|$$

Ha a kivonandóban az abs. értékek összegét veszem, az egész kifejezés megkisebbedik; miután pedig $\varrho<1$, vesszük, az egész összeg kisebb mint $(q-1)$, mert

$\sum_{n=1}^{q-1} z^{n!} = z^1 + z^{1\cdot 2} + \ldots\ldots + z^{(q-1)!} < z + z + \ldots\ldots + z = (q-1)z$

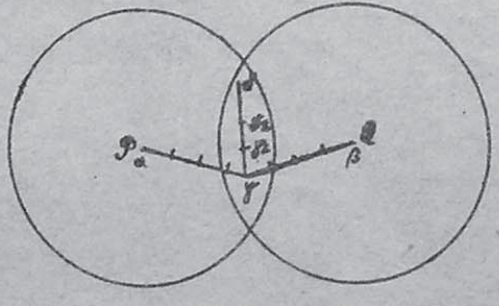
mert hiszen $|z|<1$ és most $(q-1)|z| < q-1$, ha tehát $|z|$ helyébe a nálánál nagyobb 1-et tesszük. Így tehát

$$\left|\sum_{n=1}^{q-1} z^{n!}\right| < q-1 \quad \text{és}$$

$$|P(z)| > \varrho^{q!} + \varrho^{(q+1)!} + \ldots\ldots + \ldots - (q-1)$$

Ha most a kiválasztott radiuson a periodicitáshoz közeledünk végnélkül, a $P(z)$ végtelenbe nő s így az a pont, a hol a radius a kört metszi, singuláris pont lesz. De ez ismétlődik minden radiusra, melynek szöge $\frac{2\pi r}{q}$, ilyen pedig végtelen sok van, betöltik metszéspontjaikkal az egész kört s így az egész kör csupa singuláris pontokból áll.

Még egy nevezetes tételt mutassunk ki a leszármaztatott hatványsorokra. Vegyünk egy $P(z|\alpha)$ hatványsort a centrummal és egy $Q(z|\beta)$ hatványsort β centrummal; amaz halad $(z-\alpha)$ ez $(z-\beta)$ hatványai szerint. S most tegyük fel, hogy a két hatványsor convergentia területének van közös része, s hogy ezen közös terület egy bizonyos γ pontjában sőt annak közvetlen közelében a P és Q függvény egyenlő értékű; ki fogjuk mutatni, hogy akkor a két függvény a közös terület minden pontjában egyenlő értékű és az egyik függvény a másikból leszármaztatható, egyik a másiknak folytatása. Ugyanis így úgy az α mint a β körön belül lévén, mindkettő az γ körül sorbafejthető és akkor



$$P(z|\alpha) = P(z|\alpha\gamma)$$
$$Q(z|\beta) = Q(z|\beta\gamma)$$

még pedig az γ körül írható bármilyen kis körön belül, mivel pedig ezen kis körön belül $P(z|\alpha) = Q(z|\beta)$ azért úgyanitt

$$P(z|\alpha\gamma) = Q(z|\beta\gamma)$$

Tehát e két $(z-\gamma)$ hatványai szerint haladó sor azonos, vagyis coefficienseik egyenlők. Vegyük fel most a közös területen a tetszés sze-

rinti δ pontot, s legyen γ-nak az α és β köröh peripheriájától mért legkisebb távolsága r és $r_1 < r$, s mérjük rá az $\gamma\delta$ egyenesre γ-tól kezdve az r_1-et. Ha már most az ismeretes módon átmegyünk egyik osztási ponttól a másikig, akkor $P(z/\alpha\gamma)$-ból átmenve $P(z/\alpha\gamma\gamma_1)$-re, lesz $P(z/\alpha\gamma\gamma_1) = P(z/\alpha\gamma_1)$. $Q(z/\beta\gamma)$-ból átmenve $Q(z/\beta\gamma\gamma_1)$-re, lesz $Q(z/\beta\gamma\gamma_1) = Q(z/\beta\gamma_1)$ és mivel $P(z/\alpha\gamma) = Q(z/\beta\gamma)$ azért $P(z/\alpha\gamma_1) = Q(z/\beta\gamma_1)$

hasonlókból $P(z/\alpha\gamma_2) = Q(z/\beta\gamma_2)$

. . . . . .

$P(z/\alpha\delta) = Q(z/\beta\delta)$

tehát a két függvény értéke a δ helyen is egyezik, s mivel δ tetszés szerinti, a két függvény a közös terület minden pontjában egyenlő értékü, de akkor egy ismeretes tétel szerint, közvetitő lépésekkel átmehetünk egyik függvényből a másikba. Tehát a két sor ugyanazon függvényhez tartozik, csakhogy más-más körön belül adja a függvény értékét.

Láttuk az eddigiekben, hogy valamely hatványsornak végtelen sok leszármaztatott sora van, s ezek mind egyenlő jellegüek, egyik a másikból leszármaztatható s visszavezethető az eredetire. A hatványsoroknak ily összefüggő rendszerét Weierstrass szerint analytikai függvénynek nevezzük. Az analytikai függvény tehát egy hatványsor s ennek leszármazottjai által van definiálva. Mivel az analytikai függvény egyetlen egy hatványsorral meg van adva, azért az analytikai függvényt monogénnek nevezzük, mert ebből az egyből az összeseket levezethetjük. Mindama helyeket, melyeken az analyt. függvény nincsen definiálva, singularis helyeknek nevezzük, azokat pedig, a hol a függvény értelmezve van, közönséges vagy regularis helyeknek nevezzük.

A leszármaztatás módszere most módot nyújt a hatványsorokkal definiált függvények osztályozására. Ha ugyanis $P(z)$ t α körül sorbabontjuk, s ebből a $P(z/\alpha)$-ból kiindul-

az, követi-e leszármaztatásokkal ismét visszatérünk $P(z/\alpha)$-hoz illetőleg α-hoz, akkor 2 eset lehetséges:

1.) Lehet, hogy a függvény ugyanazzal az értékkel tér vissza α-hoz melylyel abból kiindult, ilyenkor azt mondjuk, hogy a függvény egyértékű.

2.) Lehet, hogy a függvény nem ugyanazzal az értékkel tér vissza α-hoz, melylyel abból kiindult, hanem különböző utakon végezve a leszármaztatásokat, mindig különböző értékkel tér vissza α-hoz; ilyenkor azt mondjuk, hogy a hatványsorral definiált függvény többértékű, speciálisan n értékű, ha n különböző értékkel tér vissza.

Vegyük pl. a következő függvényt: $\sqrt[n]{z}$

Ki fogjuk mutatni, hogy az analytikai függvény n értékű és monogén.

Mindenekelőtt látható, hogy 0 ennek a függvénynek singuláris pontja, mert tegyük fel, hogy regulárius pont, akkor e körül sorba lehetne fejteni, s volna csak $a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots\dots\dots$ de másfelől tudjuk, hogy a sor értéke 0-ban $\sqrt[n]{0} = 0$, ez pedig csak úgy lehet, ha $a_0 = 0$, akkor a sor ilyen volna

$$\sqrt[n]{z} = a_1 z + a_2 z^2 + \dots\dots$$

$$z = (a_1 z + a_2 z^2 + \dots\dots)^n.$$

de a jobboldali kifejezésnek legalacsonyabb hatványa z^n, tehát a jobboldalon z^1 hatványnak coefficiense 0, s mivel ez az egyenlet csak úgy állhat, ha a megfelelő coefficiensek egyenlők, következnék, hogy $1 = 0$ volna, a mi lehetetlen, tehát 0 csak singuláris pont lehet erre a függvényre nézve.

És most mutassuk ki először, hogy $\sqrt[n]{z}$ analytikus függvény. Az analyt. függvény minden regulárius hely körül sorbafejthető; ez itt tényleg lehetséges, mert ha $z \alpha \neq 0$, és

$$z = \alpha + h = \alpha\left(1 + \frac{h}{\alpha}\right)$$

akkor $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\alpha}\left(1 + \frac{h}{\alpha}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\alpha}\left(1 + \left(\frac{\frac{1}{n}}{1}\right)\frac{h}{\alpha} + \left(\frac{\frac{1}{n}}{2}\right)\frac{h^2}{\alpha^2} + \dots\dots\right)$

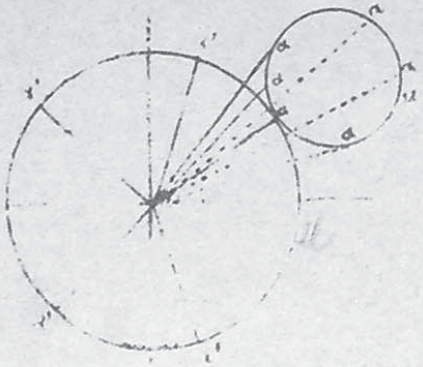
s $h = z - \alpha$ helyettesítve $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\alpha}\left(1 + \left(\frac{\frac{1}{n}}{1}\right)\frac{(z-\alpha)}{\alpha} + \left(\frac{\frac{1}{n}}{2}\right)\frac{(z-\alpha)^2}{\alpha^2} + \dots\dots\right)$ (1)

s ez a sorbafejtés convergens, ha $\left|\frac{z-\alpha}{\alpha}\right| < 1$ azaz ha $|z-\alpha| < \alpha$, vagyis

convergens egy a centrumától adott körön belül, melyikben at-
megy a 0 pontban.

Most mutassuk ki, hogy az függvény n értékű, az α valami-
nek mert fölé az (1) sorbafejtésben tényezőhöz tartozó
$\alpha = (\sqrt[n]{\varrho}, \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n})$, ha mint $\alpha = (\varrho, \varphi)$ a z pont x-hez tartozó leg-
kisebb pozitív szög. Ez azért nyilvánvaló, hogy n értékű, azon n
értéket megkapjuk, ha rendre $k = 0, 1, 2 \dots (n-1)$-et helyettesítünk, és
így az (1) sorbafejtés alapján is n különböző értéke lesz $\sqrt[n]{z}$-nek a
kezdő $P(z/\alpha); \dots\dots P_{n-1}(z/\alpha)$ sorok által vannak definiálva, me-
lyeket egyenként az (1) sorbafejtésből nyerünk, ha abban $\sqrt[n]{\alpha}$-nak n
értékét egymás után behelyettesítjük. Tehát a függvénytényleg n értékű.

Végre mutassuk ki, hogy ez a függvény monogen, azaz hogy
a sorbafejtések közül bármelyiket előre téve, ebből a többiek ered-
hetjük. Látható, hogy az (1) sor zárójeles része, bizonyos szám α mellett
lett egyértékű, s csak az $\sqrt[n]{\alpha}$ szorzó n értéke váltogatja a függvény
értékét. S mivel a függvény x körül folytonos, azért ha bizo-
nyos x-adott x-hez megállapított $\sqrt[n]{\alpha}$ értéktől folytonosan indul
meggyek át egy c körül fekvő x-hez, a függvény megfelelő érté-
kein is folytonosság szerint fognak sorakozni. Irtuljuk ki
azokból az értékből, midőn $x = 0$, azaz
$(\sqrt[n]{\varrho}, \frac{\varphi}{n})$-ből, ez legyen tehát az x körül
az adott x-hez megállapított függvény-
érték. Itt most 2 eset lehetséges:



1.) ha x-ből kiindulva oly után tér-
vissza, mely nem zárja
körül a 0-t, akkor a szöge eleinten
nő, azután ismét egy a régi érté-
kével tér vissza, úgy hogy ekkor a
függvény értéke is ugyanaz marad.

2.) ha a kerület 0-t körülfutja, akkor annak szöge az α útmen-
tén folyton növekedik s mint $\varphi + 2\pi$ tér vissza, s akkor a megfe-
lelő függvényérték már $(\sqrt[n]{\varrho}, \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n})(1 + (\frac{1}{n})(\frac{z-\alpha}{\alpha}) + \dots\dots) = P_1(z/\alpha)$

úgy hogy ha ezen az úton erélszerüen választjuk a közvetitő lépéseket, a $P_0(z/\alpha)$-ból eljuthatunk egyszeri körülmenéssel $P_1(z/\alpha)$-ba, még pedig pozitiv irányban haladva. Ha kétszer járunk körül ily közvetitő lépésekkel, akkor a szög már 4π-vel megnöveked-ve tér vissza, s igy kétszeri körülmenéssel eljutunk $P_2(z/\alpha)$-hoz stb. $(n-1)$ szeri körülmenéssel $P_{n-1}(z/\alpha)$-hoz s ha n-szer járunk körül ismét $P_0(z/\alpha)$-hoz jutunk. Ugyanez történik, ha negativ irány-ban járunk körül. Mivel ain $\sqrt{0} = 0$, azért a singuláris pont-ban a függvény egyértékü, minden más helyen, tehát a 0 közvetlen közelében is n értekü a függvény, és igy ha oly u-tonalon visszatérünk α-hoz, mely 0-on átmegy, 0-ban a függvény egyszerre egyértékü lesz, s annak közvetlen szomszédságában egy-szerre átcsap folytonosság nélkül bármily értékre, azért a 0 pontot itt elágazási helyeknek is nevezzük.

Az eddig bebizonyitott értékeket ki fogjuk terjeszteni a neg. hatványai szerint haladó hatványsorokra is. Előbb a-zonban oly sorokról kell néhány tételt levezetnünk, melyek-nek tagjai külön-külön hatványsorok. Legyen egy ilyen hat-ványsor

$$P_1(z) + P_2(z) + \cdots\cdots + P_n(z) + \cdots\cdots \qquad \text{I.}$$

a hol tehát az egyes P-k külön hatványsorok

$$P_1(z) = a_0^{(1)} + a_1^{(1)} z + \cdots\cdots + a_n^{(1)} z^n + \cdots\cdots$$

$$P_2(z) = a_0^{(2)} + a_1^{(2)} z + \cdots\cdots + a_n^{(2)} z^n + \cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Erről a hatványsorról feltesszük, hogy egyenletesen conv. és e-gyes tagjai külön külön bizonyos 0 centrumu területen belül convergensek, s hogy a ϱ sugaru kör a közös convergentia terü-let, azaz ha ezen belül fekvő bármely értéket helyettesitünk a tagokba, azok végesek maradnak. Feltesszük továbbá, hogy ezek a tagsorok mind egyenletesen convergensek, azaz bár-mily kis η megszabása után, mindig tudunk annyi véges számu tagot summázni, hogy az elkövetett hiba kisebb legyen mint η. Ilyen feltételek mellett ki fogjuk mutatni, a hö-

vetkező" tételt:

1.) Ha a tagsorok megfelelő coefficienseit summázzuk, convergens sorokat kapunk, azaz, az

$$a_0^{(1)} + a_0^{(2)} + a_0^{(3)} + \cdots\cdots = A_0$$
$$a_1^{(1)} + a_1^{(2)} + a_1^{(3)} + \cdots\cdots = A_1$$
$$a_2^{(1)} + a_2^{(2)} + a_2^{(3)} + \cdots\cdots = A_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_n^{(1)} + a_n^{(2)} + a_n^{(3)} + \cdots\cdots = A_n$$

sorok mind convergensek, tehát egy véges $A_0, A_1 \cdots\cdots A_n \cdots$ számmal helyettesíthetők.

2.) Ha ezen A számokkal hatványsort alkotunk, akkor ez a

$$P(z) = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \cdots\cdots + A_n z^n + \cdots\cdots$$

hatványsor is convergens a ϱ sugarú körön belül, sőnak minden pontjában egyenlő" értékü az eredeti I hatványsorral;

és ezzel ki lesz mutatva, hogy szabad - ilyen feltételek mellett - az adott I sor tagjait tetszés szerinti sorrendben summázni tehát egy hatványsorrá összevonni.

Ezen tétel bebizonyitásánál a Cauchy féle tételre fogunk hivatkozni. Ha az eredeti sort egyszerüen

$$P_1 + P_2 + P_3 + \cdots\cdots P_n + \cdots\cdots$$

alakban irjuk, akkor az egyenletes convergentia feltételéből következik, hogy

$$|P_{n+1} + P_{n+2} + \cdots\cdots P_{n+\kappa}| < \varepsilon \quad \text{tehető} \quad (\kappa = 0, 1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

Miután a $|\cdots|$ jel között véges számú conv. sorok állanak, egy ismeretes analytikai tétel alapján szabad ezeket igy summázni, hogy a megfelelő" tagokat summázzuk; legyen tehát

$$a_0^{(n+1)} + a_0^{(n+2)} + \cdots + a_0^{(n+\kappa)} = r_{0\,n\kappa}$$
$$a_1^{(n+1)} + a_1^{(n+2)} + \cdots + a_1^{(n+\kappa)} = r_{1\,n\kappa}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$r_{0\,n\kappa}$ nem egyéb, mint A_0-ból az n-diken túli k tag összege, hasonlóképen értelmezendő" $r_{1\,n\kappa}$, $r_{2\,n\kappa}$ stb. Már most a fenntiegyenlőtlenség azt mondja, hogy $|r_{0\,n\kappa} + r_{1\,n\kappa} z + r_{2\,n\kappa} z^2 + \cdots + r_{r\,n\kappa} z^r + \cdots| < \varepsilon$ (II)

vegyünk most már egy ϱ_2 sugarú kört, mely $\varrho_2 < \varrho$, akkor ezen φ periphériáján is áll az egyenletes convergentia, de akkora Φ függvény maximuma is

$$|M| < \varepsilon$$

s mivel Cauchy tétele szerint

$$|r_{\nu n+k}| \varrho_2^{\nu} < M < \varepsilon \text{ lesz}$$

$$|r_{\nu n+k}| < \varepsilon \varrho_2^{-\nu}$$

de mivel ϱ_2 véges, azért az $\varepsilon \varrho_2^{-\nu}$ szorzat bármily kicsinnyé tehető s mivel általánosan $r_{\nu n+k}$ az A_ν sor n-diken túli k tagjának összege, azért ez az utolsó egyenlőtlenség azt mondja, hogy az A-n mind convergensek, ezzel a tétel első része be van bizonyítva.

Ha most a coefficienseikből alkotott convergens sorok értékét rendre $A_0, A_1 \ldots A_n \ldots$ el jelöljük és megalkotjuk a

III. $$P(z) = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots\ldots\ldots$$

hatványsort, akkor a ϱ sugarú körön belül ez is convergens lesz és mindenütt egyenlő értékű a régivel. Ezt a tételt úgy fogjuk kimutatni, hogy megalkotjuk a III és I sor első n tagjának összegéből az S_n illetőleg Σ_n-ből az $S_n - \Sigma_n$ különbséget, s kimutatjuk hogy ennek limese $\lim_n (S_n - \Sigma_n) = 0$, a mivel ki lesz mutatva, hogy a két sor egyenlő.

Itt két egyenlőtlenségre van szükségünk. Osszuk fel az A sorokat két egyenlő részre; az első n tag összegét jelöljük s-el, a maradék részt r-el tehát

$$A_0 = s_{0n} + r_{0n}$$

$$A_1 = s_{1n} + r_{1n}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A_\nu = s_{\nu n} + r_{\nu n}$$

Már most az egyik már ismeretes egyenlőtlenség azt mondja, hogy $|r_{\nu n+k}| < \varepsilon \varrho_2^{-\nu}$ $(k = 0, 1, 2, 3 \ldots)$ tehát bármily nagy k-ra s így az egész maradékra, úgyhogy azt is írhatjuk

$$|r_{\nu n}| < \varepsilon \cdot \varrho_2^{-\nu} \qquad (1)$$

a második egyenlőtlenséget hasonlóképp nyerjük; ugyanis

$$\Sigma_n = P_1 + P_2 + \dots + P_n$$

s így szabad ezen véges számú convergens sorokat úgy összegezni, hogy a megfelelő tagokat summázzuk, de akkor

$$\Sigma_n = s_{0n} + s_{1n}z + s_{2n}z^2 + \dots\dots\dots$$

de a Σ_n feltételünk szerint véges értékű s egyenletesen convergens, s így a ϱ_2 sugarú körön is az; ha tehát ezen való maximális értékét M-el jelöljük, akkor Cauchy tétele szerint

$$|s_{rn}|\varrho_1^r \leqq M$$

$$|s_{rn}| \leqq M\varrho_1^{-r} \qquad \text{hol } r = 0, 1, 2, 3 \dots \quad (2)$$

Ezen két egyenlőtlenség segélyével most könnyü lesz kimutatni, hogy $\lim_{n=\infty}(S_n - \Sigma_n) = 0$

Ugyanis

$$S_n - \Sigma_n = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \dots\dots + A_n z^n$$

$$-s_{0n} - s_{1n}z - s_{2n}z^2 - \dots\dots - s_{nn}z^n - s_{n+1,n}z^{n+1} - \dots$$

$$S_n - \Sigma_n = r_{0n} + r_{1n}z + r_{2n}z^2 + \dots\dots + r_{nn}z^n - s_{n+1,n}z^{n+1} - \dots$$

ki kell mutatni, hogy a jobboldali kifejezés bármily kicsinynyé tehető. Ha most áttérünk az abszolut értékre, s az r-eis s-ek helyébe az (2) (2) egyenlőtlenségek alapján helyettesitünk, akkor

$$|S_n - \Sigma_n| < \varepsilon\left(1 + \frac{|z|}{\varrho_2} + \frac{|z|^2}{\varrho_2^2} + \dots\right) - M\left(\frac{|z|^{n+1}}{\varrho_1^{n+1}} + \frac{|z|^{n+2}}{\varrho_1^{n+2}} + \dots\right)$$

ha ugyanis az első sort végnélkül folytatjuk; a geometriai sorokat összevonva

$$|S_n - \Sigma_n| < \frac{\varepsilon}{1 - \frac{|z|}{\varrho_2}} + \frac{M\frac{|z|^{n+1}}{\varrho_1^{n+1}}}{1 - \frac{|z|}{\varrho_1}}$$

ha most $|z| < \varrho_2$ akkor az első tört nevezője állandó, úgyszintén a második-é is, s ha egyfelől ε-t elég kicsinynek másfelől n-et elég nagynak vesszük, nyilvánvaló hogy bármily kis η megadása után

$$|S_n - \Sigma_n| < \eta \quad \text{tehető}$$

de akkor

$$\lim(S_n - \Sigma_n) = 0$$

tehát

$$\lim S_n = \lim \Sigma_n$$

$P(z)$ = az eredeti sor még pedig a ϱ sugarú körön belül.

Ez a tétel Weierstrasstól ered s rövidem igy hangzik: Ha végtelen sok hatványsor egyenletesen convergens sort alkot, akkor ezt a sort összevonhatjuk egyetlen egy convergens hatvány-

sorrá oly formán, hogy az egyes hatványsorokból x ugyanazon hatványainak coefficienseit egy taggá vonjuk össze, az így nyert sor is ugyanott convergens, a hol a régi és értéke is ugyanaz.

Ezen tétel segítségével most már könnyű lesz mindazon tételeket, melyeket a positiv kitevőjü hatványai szerint haladó hatványsorokra kimutattunk, kiterjeszteni a neg. hatványai szerint haladó sorokra.

Láttuk hogy analit. függvény minden függvény mely bizonyos helyek körül sorbabontható; láttuk azt is, hogy az analit. függvény monogen s vannak singularis pontjai, melyek körül a függvény nem bontható sorba, és regularis helyei, melyek körül sorbabontható.

A α-t regularis helynek nevezzük valamely függvényre nézve, ha $(x-\alpha)=z$ pos. hatványai szerint az a függvény sorbabontható, ha tehát létezik a függvény

$$P(x) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots\ldots \qquad (\text{I})$$

alaku sorbabontása.

Az α-t reguláris helynek nevezzük valamely függvényre nézve, ha létezik ezen függvénynek $(x-\alpha)$ pos. egész hatványai szerint haladó sorbabontása.

$$P(x/\alpha) = P(\alpha) + P'(\alpha)(x-\alpha) + \frac{P''(\alpha)}{2.}(x-\alpha) + \ldots\ldots\ldots (\text{II.})$$

A ∞ helyét a számoknak (ill. polusát a számgömbnek) regularis helynek nevezzük valamely függvényre nézve, ha létezik ennek x neg. egész kitevőjü hatványai szerint haladó sorbabontása $P(x/\infty) = a_0 + a_1 \frac{1}{x} + a_2 \frac{1}{x^2} + \ldots\ldots\ldots$ (III.)

A függvények ezen három sorbabontási alakját, tehát a 0, a számsika, s a számok ∞ távoli pontja körül nevezzük a függvény elemeinek.

Most ki fogjuk mutatni, hogy a végtelen távoli helyen definiált függvénynek, tehát a III függvényelemnek szintén megvan ez a tulajdonsága, hogy belőle bármely más pont körül sort lehet származtatni.

Legyen tehát adva a

$$P(z/\infty) = a_0 + a_1\frac{1}{z} + a_2\frac{1}{z^2} + \cdots\cdots$$

Ez a hatványsor a mint tudjuk egyenletesen convergens egy O centrumu, r sugaru körön kivül az egész számsikon, ha $r=1$, akkor a convergentia terület az egész számsik, kivéve a O pontot, mert ebben a $P(z/\infty)$ nincsen értelmezve. Már most próbáljuk ezt a függvényt sorbabantani egy a körül mely kivül van az r sugaru körön, tehát feltesszük, hogy $z = a+h$ és $|h| < \varrho$ a hol ϱ az a-nak minimálistávolsága a r sugaru körtől, mert ezen a ϱ sugaru körön belül $P(z/\infty)$ biztosan convergens. Imost $P(a+h/\infty) = a_0 + a_1\frac{1}{a+h} + a_2\frac{1}{(a+h)^2} + \cdots\cdots + a_n\frac{1}{(a+h)^n} + \cdots$ de itt most már egy végtelen sok hatványsorból álló egyenletesen convergens sorunk van, mert hisz az $\frac{1}{a+h}, \frac{1}{(a+h)^2}, \cdots$ stb. függvényeket az (I. 42) szerint sorbafejtjük ezen képlet szerint:

$$(1-z)^{-\kappa} = 1 + \binom{\kappa}{1}z + \binom{\kappa+1}{2}z^2 + \cdots\cdots + \binom{\kappa+n-1}{n}z^n + \cdots\cdots$$ ez convergens, ha $|z|<1$ s ha most $z = a+h = a(1+\frac{h}{a})$ akkor ezen értéket helyettesítve egy sort kapunk, mely convergens, ha $|\frac{h}{a}|<1$, azaz $|h|<a$ mely tehát convergens egy a centrumu ϱ O-n átmenő körön belül, úgy hogy a következő sorok az a centrumu, ϱ sugaru körön belül biztosan convergensek:

$$a_1\left|\ \frac{1}{a+h} = \frac{1}{a}\left(1+\frac{h}{a}\right)^{-1} = \frac{1}{a} - \binom{1}{1}\frac{h}{a^2} + \binom{2}{1}\frac{h^2}{a^3} - \cdots\cdots + (-1)^n\binom{n}{n}\frac{h^n}{a^{n+1}} + \cdots\right.$$
$$a_2\left|\ \frac{1}{(a+h)^2} = \frac{1}{a^2}\left(1+\frac{h}{a}\right)^{-2} = \frac{1}{a^2} - \binom{2}{1}\frac{h}{a^3} + \binom{3}{1}\frac{h^2}{a^4} - \cdots\cdots + (-1)^n\binom{n+1}{n}\frac{h^n}{a^{n+2}} + \cdots\right.$$
$$a_3\left|\ \frac{1}{(a+h)^3} = \frac{1}{a^3}\left(1+\frac{h}{a}\right)^{-3} = \frac{1}{a^3} - \binom{3}{1}\frac{h}{a^4} + \binom{4}{1}\frac{h^2}{a^5} - \cdots\cdots + (-1)^n\binom{n+2}{n}\frac{h^n}{a^{n+3}} + \cdots\right.$$
$$\cdots\left|\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\right.$$

Ha már most ezen sorokat megfelelőleg megszorozzuk $a_1, a_2 \cdots\cdots$ coefficienseekkel s ezeket összeadjuk a Weierstrass tétele szerint, akkor a szabad tagok összege, hozzávéve még a_0-t nem egyéb mint $P(a/\infty)$.

Ha az eredeti $P(z/\infty) = a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots\cdots$ sort derivál-juk, kapjuk a $P'(z/\infty) = -\frac{a_1}{z^2} - \frac{2a_2}{z^3} - \frac{3a_3}{z^4} - \cdots\cdots$ sort s ez ugyanott convergens, a hol $P(z/\infty)$; látható most, hogy a h első hatvá-

nyával szorzott tagok összege, nem egyéb, mint $P'(\alpha|\infty)$, h^2-al szorzott tagok összege $\frac{P''(\alpha|\infty)}{2!}$ stb., s így kapjuk hogy

$$P(\alpha+h|\infty) = P(\alpha|\infty) + P'(\alpha|\infty)h + \frac{P''(\alpha|\infty)}{2!}h^2 + \cdots\cdots$$

vagy $h = z-\alpha$ helyettesítve

$$P(z|\infty\,\alpha) = P(\alpha|\infty) + P'(\alpha|\infty)(z-\alpha) + \frac{P''(\alpha|\infty)}{2!}(z-\alpha)^2 + \cdots\cdots$$

s ez a sor biztosan convergens az α centrumu, ϱ sugarú körön belül, s ezen a területen egyértékü az eredeti sorral. Látható tehát, hogy a ∞ távoli hely körüli sorbabontás ugyanazzal a tulajdonsággal bír, mint a többi függvényelem, azaz sorbabontható bármely pont körül a convergentia területén. Ezért jogosult ez az eljárás, hogy a végtelen távoli hely körüli sorbabontást a függvényelemek közé számítsuk.

Különben könnyü kimutatni itt is, hogy a függvény és összes deriváltjainak convergentia területe ugyanaz, fedik egymást. Mert legyen a függvény

$$P(z) = a_0 + a_1\frac{1}{z} + a_2\frac{1}{z^2} + \cdots\cdots$$

$$P'(z) = -a_1\frac{1}{z^2} - a_2\frac{2}{z^3} - \cdots\cdots$$

tegyük fel hogy $P'(z)$ bizonyos a $P(z)$ convergentia területén belül fekvő z mellett convergens, kimutatjuk, hogy e mellett $P(z)$ is convergens. Mert ha $P'(z)$ convergens, akkor $|a_1|\frac{1}{|z|^2} + 2|a_2|\frac{1}{|z|^3} + \cdots\cdots + n|a_n|\frac{1}{|z|^{n+1}} + \cdots$ is convergens, s ez marad, ha a numerikus tényezőket elhagyjuk, z-vel szorzunk, s a_0-t hozzáadunk, de akkor az eredeti $P(z)$-t kapjuk. Tehát a két terület ugyanaz.

Így tehát a számsík egész kiterjedésére definiáltuk a közönséges helyeket. Azon helyek összességét, melyekben a függvény sorbabontása lehetséges, nevezzük a függvényértelmezési tartományuknak.

Már most a singuláris helyeket meg fogjuk különböztetni egymástól. Legyen ugyanis $f(z)$ egy függvény, mely bizonyos convergentia területtel bír s β az $f(z)$ singuláris pontja; ha már most létezik $(z-\beta)$-nak olyan positiv egész hatványa, $(z-\beta)^n$, melylyel $f(z)$-t szorozva, ezen $(z-\beta)^n f(z)$ függvénynek a β nem singuláris helye azaz közönséges, akkor azt mondjuk, hogy β az $f(z)$-nek nem lényegesen singuláris pontja. Ha tehát β az $f(z)$-nek nem lény. sing. pontja akkor létezik a következő sorbabontás:

I. $(z-\beta)^\kappa f(z) = a_0 + a_1(z-\beta) + a_2(z-\beta)^2 + \ldots\ldots\ldots$ .tehát

II. $f(z) = \underbrace{\frac{a_0}{(z-\beta)^\kappa} + \frac{a_1}{(z-\beta)^{\kappa-1}} + \cdots + \frac{a_{\kappa-1}}{(z-\beta)}}_{\varphi(z)} + a_\kappa + a_{\kappa+1}(z-\beta) + a_{\kappa+2}(z-\beta)^2 + \ldots$

vagyis nem leny. sing. hely körül a függvény egy oly végtelen hatványsorral állítható elő, melynek első véges részét az ezen helyhez tartozó partialistörtek alkotják, második részre egy $(z-\beta)$ positiv eg. kitevőjű hatványai szerint haladó sor, melyre nézve tehát β közönséges hely; a partialistörtek a β helyen végtelenné válnak, tehát β ezekre nézve polus és így β az $f(z)$-nek is polusa. A polaritást úgy szüntethetjük meg, hogy megszorozzuk $f(z)$-t $(z-\beta)^\kappa$-al, mert erre nézve β közönséges hely, vagy pedig levonjuk $f(z)$-ből a part. törteket, sakkor $f(z) - \varphi(z)$-re nézve β közönséges hely, azt a legkisebb κ számot, mely mellett $(z-\beta)^\kappa f(z)$ függvény a β körül már rendes viselkedésű, nevezzük az $f(z)$ függvény sokszorossági számának. Ilyenkor II-ben $a_0 \neq 0$, mert ha $a_0 = 0$, akkor mindkét oldal osztható volna $(z-\beta)$-val sakkor $(\kappa-1)$ volna a legkisebb sokszorossági szám. Látható, hogy $f(z)$ ily κ-szoros polus körül κ-ad rangú végtelen nagy mennyiség, mert

$$\lim_{z=\beta} \frac{f(z)}{\frac{1}{(z-\beta)^\kappa}} = a_0$$

Azt is kimutatjuk, hogy ily polusok körül a függvénynek csak közönséges helyei vannak, azaz, hogy ezen polusok körülált, discreét pontok, ugyanis II-ben az a_κ után következő hatványsor convergens egy β centrum, ϱ sugarú körön belül, s ha most ezen belül egy $\beta \neq \alpha$ pontot veszünk, akkor e körül úgy a part. törtek $\varphi(z)$, mint ezen hatványsor is sorbabonthatók — mert hisz a part. törtek csak a β centrum körül nem bonthatók sorba — tehát az ϱ sugarú kör belsejének minden pontja az $f(z)$-re nézve közönséges, és így a polusok izolaltak, a mennyiben minden polus közönséges helyekkel van körülvéve. Látjuk tehát, hogy a függvénynek a végesben fekvő nem leny. sing. pontjai egyszersmind annak polusai.

Ugyanaz áll a végtelenben fekvő polusokra nézve, mert tudjuk, hogy a mi értelme van $(z-\beta)$-nak a végesben, olyan értelme van $\frac{1}{z}$-nek a végtelen távoli helyen. A végtelen távoli helyet

a függvényre nézve nem lényegesen singuláris helynek nevezzük, ha léteznek $\frac{1}{z}$-nek oly pos. egész kitevőjű hatványai, melyekkel $f(z)$-t szorozva $\frac{1}{z^n}\cdot f(z)$-re nézve a ∞ távoli hely már körönséges hely, azaz a melyre nézve már léteznek az

$$\frac{1}{z^n} f(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots\cdots$$

$\frac{1}{z}$ pos. egész hatványai szerint haladó sorbabontás, s ekkor

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n + \frac{a_{n+1}}{z} + \frac{a_{n+2}}{z^2} + \cdots\cdots$$

ha tehát végtelen a függvénynek nem lény. sing. pontja, akkor a függvény előállítható az utóbbi egyenlet szerint egy eg. rat. függvényből s egy a ∞ helyen rendes viselkedésű hatványsorból, azaz a melyre nézve a ∞ távoli hely körönséges hely. Az első részt alkotó eg. rat. függvény a végtelen távoli helyen végtelenné válik, mivel

$$\lim_{z=\infty} \frac{f(z)}{z^n} = a_0$$

mondhatjuk, hogyha a végtelen távoli hely a függvénynek nem lényegesen singularis pontja, akkor ez a hely a függvénynek n-szeres pólusa, a mely körül a függvény n-adrangu végtelen nagy mennyiség. Ez a pólusis irodált, mert az $f(z)$ második részét alkotó hatványsor convergens egy 0 centrumu, ϱ sugaru körön kivül, s ha ezen kivül akárhol felveszek egy α pontot, e körül $f(z)$ mindkét része sorbabontható. A polaritást itt is úgy szünteljük meg, hogy az $f(z)$ függvényt elosztjuk z^n-al, vagy pedigar eg. rat. részt levonjuk $f(z)$-ből.

Ha pedig β olyan hely, melyre nézve nem léteznek oly $(z-\beta)^n$ hatvány, melyekkel $f(z)$-t szorozva, a szorzatra nézve β körönséges hely volna, akkor azt mondjuk, hogy β az $f(z)$ függvénynek lényegesen singularis helye, és így a végtelen távoli hely lény. sing. hely, ha nem léteznek $\frac{1}{z}$-nek egy hatványa sem, melyekkel $f(z)$-t szorozva, erre nézve a végtelenségi hely körönséges hely volna.

Tehát 3 féle singularis helyet ismertünk meg: 1) nem lényegesen singularis hely vagyis pólus; 2) elágazási hely, melyben a többértékü függvény kevesebb értéket nyer, s 3.) lényegesen sing. hely.

Így pl. minden transcendens egész függvénynek a végtelen távoli helyen lényegesen singularis helye van. Legyen pl. ily függvény

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots\cdots$$

Hartogs

a melyről tehát feltesszük, hogy az egész számsíkon convergens. akkor

$$\frac{1}{z^\kappa}\cdot f(z) = \underbrace{\frac{a_0}{z^\kappa} + \frac{a_1}{z^{\kappa-1}} + \cdots\cdots + \frac{a_{\kappa-1}}{z}}_{} + \underbrace{a_\kappa + a_{\kappa+1}z + a_{\kappa+2}z^2 + \cdots\cdots}$$

s bármily nagy is legyen κ, a függvény második részre mindig egy z pos. egész hatványai szerint haladó hatványsor lesz, melyre nézve pedig $z=\infty$ pólus, tehát a transcendens eg. függvénynek a ∞ távoli helyen lényegesen singuláris helye van.

Mihelyt valamely függvénynek végtelen sok pólusa van, a függvénynek mindig van lényegesen singuláris helye. Mert tudjuk, hogy e végtelen sok pólusból álló számcsoportnak van legalább egy torlódási helye, legyen ez P, akkor P-ből bármily kis sugárral kört írva, ezen belül még mindig végtelen sok pólus van s így P maga nem lehet sem közönséges hely sem pólus, mert a pólusok discret pontok, a közönséges hely körül pedig a függvény sorbabontható, de ez itt nem lehet, hanem lényegesen singularis hely.

Most ki fogjuk mutatni, hogy valahányszor egy analytikai függvénynek nincsen lényegesen singularis helye, ez csakrat. függvény lehet. Mert tegyük fel először, hogy a végesben vannak pólusai; ezek nem lehetnek végtelen nagy számmal, mert különben ezeknek torlódási helye az előbbiek alapján lény. sing. hely volna, ez pedig ellenkezik feltételünkkel. Tehát feltesszük, hogy az $f(z)$ függvénynek a végesben véges számu pólusai vannak:

$$\beta_1 \,,\ \beta_2 \,,\ \beta_3 \cdots\cdots \beta_r$$

sokszor. számok $\kappa_1 \quad \kappa_2 \quad \kappa_3 \cdots\cdots \kappa_r$

s most tudjuk, hogy a következő szorzatra nézve ezen β-k már nem pólusok: $f(z)(z-\beta_1)^{\kappa_1}(z-\beta_2)^{\kappa_2}(z-\beta_3)^{\kappa_3}\cdots\cdots(z-\beta_r)^{\kappa_r}$

Ha pedig a végtelen távoli hely e függvény pólusa, akkor így irható $a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots\cdots + a_n z^n$

de ez a sor nem lehet végtelen sor, mert különben erre nézve a ∞ távoli pont lény. sing. hely volna, s így e sor az $a_n z^n$ taggal végződik, vagy hogy

$$f(z) = \frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n}{(z-\beta_1)^{\kappa_1}(z-\beta_2)^{\kappa_2}\cdots(z-\beta_r)^{\kappa_r}}$$

egy rat. függveny. Tehát a tétel helyes. De fordítva is áll, hogy a rat. függvénynek nincsenek lény. sing. helyei, csak pólusai lehetnek.

Ha egy analytikai függvénynek sem a végesben, sem a végtelenben sing. helye nincsen, akkor ez csak constans lehet. Mert legyen egy ilyen függvény: $F(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots\cdots\cdots$ először is ez a függvény nem lehet végtelen sor, mert akkor erre nézve a ∞ távoli hely leny. singuláris volna; tehát csak véges, de z-től semfügghet, mert akkor ∞ erre nézve polus volna, s így $F(z)$ szükségképpen const.

Most az analitikai függvényeket különböző operátiokknak vetjük alá, s kimutatjuk, hogy ily módon ismét analit. függvényekhez jutunk.

<u>Összeadás.</u> Legyen két analit. függvény $f(z)$ és $g(z)$ s legyen ezeknek egy közös értelmerési tartománya. Kimutatjuk, hogy ezen belül van $f(z)+g(z)$-nek is az értelmerési tartománya. Mert egy ezen belül fekvő α körül

$$f(z) = f(\alpha) + f'(\alpha)(z-\alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(z-\alpha)^2 + \cdots\cdots$$

hasonlóképen

$$g(z) = g(\alpha) + g'(\alpha)(z-\alpha) + \frac{g''(\alpha)}{2!}(z-\alpha)^2 + \cdots\cdots$$

s akkor

$$f(z)+g(z) = f(\alpha)+g(\alpha) + (f'(\alpha)+g'(\alpha))(z-\alpha) + \left(\frac{f''(\alpha)}{2!} + \frac{g''(\alpha)}{2!}\right)(z-\alpha)^2 + \cdots$$

tehát $(g(z)+f(z))$ szintén sorbabontható α körül, s így ez is analyt. függvény, melynek értelmerési tartománya α közös értelmerési tartomány.

Miután az analit. függvény sorbabontásában a $(z-\alpha)$-val szorzott tag a függvény első deriváltja, azért

$$(f(z)+g(z))' = f'(z) + g'(z)$$

Tehát összeg deriváltja, annyi mint a deriváltak összege.

<u>Szorzás.</u> Legyen adva két analyt. függvény $f(z)$ és $g(z)$. Mindegyiknek van convergentia területe, s feltesszük, hogy ezeknek van közös részük, ha α ezen a közös területen van, akkor

$$f(z) = f(\alpha) + f'(\alpha)(z-\alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(z-\alpha)^2 + \cdots\cdots$$

$$g(z) = g(\alpha) + g'(\alpha)(z-\alpha) + \frac{g''(\alpha)}{2!}(z-\alpha)^2 + \cdots\cdots$$

Miután a közös területen e két sor feltétlenül convergens, szabad őket az ismeretes módon összeszorozni, s akkor

$$f(z)\,g(z) = f(\alpha)\,g(\alpha) + (f'(\alpha)\,g(\alpha) + f(\alpha)\,g'(\alpha))(z-\alpha) + \cdots =$$

tehát e két függvény szorzata is sorbabontható $(z-\alpha)$ pos. eg. kitevőjű hatványai szerint, tehát analyt. függvény. Miután $(z-\alpha)$ coefficiense a függvény deriváltja az α helyen, azért ha z-t α szorzatsor con-

vergentia területére szorítjuk, akkor ezen a területen a szorzat deriváltja

$$(f(z)\cdot g(z))' = f'(z)\,g(z) + f(z)\,g'(z)$$

a mi több tényezős esetén is érvényes, úgy hogy általánosan

$$(f_1(z)f_2(z)\cdots f_n(z)' = f_1'(z)f_2(z)\cdots f_n(z) + f_1(z)f_2'(z)\cdots f_n(z) + \cdots + f_1(z)\cdots f_n'(z)$$

s a szorzatfüggvénnyel osztva:

$$\frac{(f_1(z)f_2(z)\cdots f_n(z))'}{f_1(z)f_2(z)\cdots f_n(z)} = \frac{f_1'(z)}{f_1(z)} + \frac{f_2'(z)}{f_2(z)} + \cdots + \frac{f_n'(z)}{f_n(z)}$$

Egy formula, melyre később hivatkozás fog történni.

Most ki fogjuk mutatni, hogy minden analytikus függvény reciprokja is analytikus függvény; s pedig 3 helyen fogjuk vizsgálni a függvényt: 1.) oly helyen, mely az $f(z)$-re közönséges hely és nem 0 pont; 2.) oly helyen, mely az $f(z)$-re nézve közönséges hely és 0 pont; s 3.) mely az $f(z)$-re nézve polus.

1.) Legyen tehát α az $f(z)$-re nézve közönséges hely és nem 0 pont, akkor e körül

$$f(z) = f(\alpha) + \underbrace{f'(\alpha)(z-\alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(z-\alpha)^2 + \cdots}_{\text{I.}}$$

s mivel $f(\alpha) \neq 0$ $\quad f(z) = f(\alpha) + \psi(z)$;

miután $\psi(z)$ oly függvény, mely α körül sorbabontható $z=\alpha$ mellett 0, azért α körül folytonos és így mindig tehető $|z-\alpha|<\varrho$ úgy, hogy $|\psi(z)|$ kisebb legyen bármily kis számnál. Legyen ϱ olyan, hogy $|z-\alpha|<\varrho$ mellett $|\psi(z)|<f(\alpha)$, akkor ezzel könnyű lesz kimutatni, hogy $\frac{1}{f(z)}$ is analyt. függvény, mert

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{f(\alpha)+\psi(z)} = \frac{1}{f(\alpha)}\cdot\frac{1}{1+\frac{\psi(z)}{f(\alpha)}} = \frac{1}{f(\alpha)}\left(1+\frac{\psi(z)}{f(\alpha)}\right)^{-1}$$ s mivel

$\left|\frac{\psi(z)}{f(\alpha)}\right|<1$, azért a bin. tétel alapján ez $= \frac{1}{f(\alpha)}\left[1 - \frac{\psi(z)}{f(\alpha)} + \frac{\psi(z)^2}{f(\alpha)^2} - \cdots\right]$

ez a sor egyenletesen convergens, s ha most $\psi(z)$ értékét I-ből helyettesítjük, akkor szabad az így keletkezett végtelen sok sorból álló hatványsort egyegyé összevonni, úgy hogy folytatólag

$$= \frac{1}{f(\alpha)}\left[1 - \frac{f'(\alpha)(z-\alpha)+\frac{f''(\alpha)}{2!}(z-\alpha)^2+\cdots}{f(\alpha)} + \frac{(f'(\alpha)(z-\alpha)+\cdots)^2}{f(\alpha)^2} + \cdots\right]$$

s ezt rendezve $(z-\alpha)$ hatványai szerint s $\frac{1}{f(\alpha)}$-val beszorozva:

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{f(\alpha)} - \frac{f'(\alpha)}{f(\alpha)^2}(z-\alpha) + \cdots\cdots$$

tehát az ily α helyek körül $\frac{1}{f(z)}$ is sorbabontható, tehát analytikus függvény. Ebből az egyenletből látható az is, hogy

$$\left(\frac{1}{f(z)}\right)' = -\frac{f'(z)}{f(z)^2}$$

ez a függvény reciprokjának deriváltja oly helyen, mely a függvénynek,

tehát a reciprokoknak is körönséges helye s nem o pontja.

2.) Legyen α az $f(z)$ függvénynek o pontja s pedig általanosság kedvéért κ-szoros o pont, kimutatjuk, hogy ez az α $\frac{1}{f(z)}$-re nézve κ-szoros pólus. Mert $f(z) = \frac{f^{\kappa}(\alpha)}{\kappa!}(z-\alpha)^{\kappa} + \cdots\cdots$

és $\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{\frac{f^{\kappa}(\alpha)}{\kappa!}(z-\alpha)^{\kappa} + \cdots}$ s szorozva $(z-\alpha)^{\kappa}$-val

$$(z-\alpha)^{\kappa}\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{\underbrace{\frac{f^{\kappa}(\alpha)}{\kappa!} + \frac{f^{\kappa+1}(\alpha)}{\kappa+1}(z-\alpha) + \cdots}_{\psi(z)}}$$

s ezt a jobboldali kifejezést éppúgy mint az imént $(z-\alpha)$ pr. e. hatványai szerint sorba lehet bontani, mert $\psi(z)$ az α helyen 0, tehát

$$(z-\alpha)^{\kappa}\frac{1}{f(z)} = P(z/\alpha)$$

így ez az α az $\frac{1}{f(z)}$-re nézve κ-szoros pólus. Miután pedig $f(z)$ és $\frac{1}{f(z)}$ között a reciprocitás kölcsönös, azért megfordítva is az $f(z)$ pólusa az $\frac{1}{f(z)}$-nek nullapontja s a sokszorossági szám ugyanaz marad. Mert különben is, ha β az $f(z)$-nek κ-szoros pólusa, ez azt jelenti, hogy

$$(z-\beta)^{\kappa}f(z) = a_0 + a_2(z-\beta) + \cdots\cdots -$$

és így $\frac{1}{(z-\beta)^{\kappa}f(z)} = \frac{1}{a_0 + \psi(z)}$, a mely $\psi(z)$ tehát β körül sorbabontható, és így $(z-\beta)^{\kappa}$-val keresztül szorozva

$$\frac{1}{f(z)} = (z-\beta)^{\kappa}\cdot P(z/\beta)$$

a mi azt jelenti, hogy β az $\frac{1}{f(z)}$-nek κ-szoros nullapontpontja.

Ezekből következik, hogy ha $f(z)$-re nézve valamelyik pont lényegesen singuláris hely, akkor ez annak reciprokjára nézve is lény. sing. hely, mivel sem pólus sem körönséges hely nem lehet. Az elágarási helyek is ugyanazok, mert ha ezen a helyen $f(z)$ értékei között egyenlők is vannak, a reciprokok között is egyenlők vannak.

Ugyanezek a tételek állanak a végtelentávoli helyre, azaz ha a végtelentávoli hely $f(z)$-re nézve körönséges hely és nem o pont, akkor ugyanez az $\frac{1}{f(z)}$-re is, vagyis ha

$$f(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots\cdots$$

akkor $\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{a_0 + \psi(z)} = P(z/\infty)$

mert $\psi(z)$ halad $\frac{1}{z}$ pos. eg. kitevőjü hatványai szerint s 0, ha $z=\infty$.

<u>Osztás.</u> Ezek alapján könnyü kimutatni, hogy két anal. függvény

hányadosa is analyt. függvény, mert

$$\frac{f(z)}{g(z)} = f(z) : \frac{1}{g(z)}$$ ezek szorzata pedig anal. függvény.

A derivált $\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)' = f'(z) \cdot \frac{1}{g(z)} - f(z) \frac{g'(z)}{g(z)^2} = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g(z)^2}$

Lássunk most más kapcsolatot két anal. függvény között. Vegyük a következő két anal. függvényt: $f(z)$ és $F(z)$ s alkossuk meg a következő függvényt: Legyen $Z = f(z)$ tehát

$$\mathfrak{F}(Z) = \mathfrak{F}(f(z))$$

f tehát a z-nek függvénye, $\mathfrak{F}$ az $f(z)$-nek függvénye. Ezt neveznük összetett összetett függvény-nek. Erről kimutatjuk, hogy szintén anal. függvény, ha α az $f(z)$-re nézve közönséges hely és $f(\alpha) = A$ az $F(Z)$-re nézve közönséges hely.

Mert ekkor $f(z) = f(\alpha) + f'(\alpha)(z-\alpha) + \cdots\cdots\cdots$

s ha most $f(\alpha) = A$ és $Z = f(z)$, akkor $Z = A + \psi(z)$ a mely $\psi(z)$ a körül végtelen kicsiny. Ha most feltesszük, hogy A az $F(z)$-re nézve közönségeshely, hogy tehát anal. függvény, akkor

$$\mathfrak{F}(Z) = \mathfrak{F}(A) + \mathfrak{F}'(A)(Z-A) + \cdots\cdots$$

a mely convergens, ha $|Z-A| < \varrho$ s ha most $Z-A = \psi(z)$ miután $\psi(z)$ a körül végtelen kicsiny, megszoríthatjuk z-t úgy, hogy $|\psi(z)| < \varrho$ legyen s akkor

$$\mathfrak{F}(f(z)) = \mathfrak{F}(A) + \mathfrak{F}'(A)\psi(z) + \frac{\mathfrak{F}''(\alpha)}{2!}\psi(z)^2 + \cdots\cdots\cdots$$

ez a sor ezen a területen belül egyenletesen convergens, mert egy bizonyos mennyiség hatványai szerint halad, s most ψ-ért betéve a végtelen hatványsort, végtelen sok hatványsorból álló sort kapunk:

$$\mathfrak{F}(f(z)) = \mathfrak{F}(f(\alpha)) + \mathfrak{F}'(f(\alpha))(f'(\alpha)(z-\alpha) + \cdots\cdots) + \mathfrak{F}''(f(\alpha))(f'(\alpha)(z-\alpha) + \cdots)^2 + \cdots$$

ezt rendezve $z-\alpha$ hatványai szerint

$$\mathfrak{F}(f(z)) = \mathfrak{F}(f(\alpha)) + \mathfrak{F}'(f(\alpha))(f'(\alpha)(z-\alpha) + \cdots\cdots -$$

Tehát az összetett függvény is sorbafejthető $(z-\alpha)$ hatványai szerint, s így anal. függvény. E képletből az összetett függvény deriváltja is azonnal kiadódik

$$\mathfrak{F}(f(z))' = \mathfrak{F}'(f(z))f'(z)$$

Tehát mindama z helyek, melyek a belső függvényre közönséges helyek s melyek mellett a belső függvény a külsőre nézve közönséges hely, arokat az összetett függvényre nézve is közönséges helyek. Singularis helyek azon helyek körül lesznek, melyek az $f(z)$-re nézve singularis helyek, azután melyekhez olyan értékei tartoznak $f(z)$-nek, melyek az $\mathfrak{F}(z)$-nek singularis helyei.

Exponentialis függvény.

Alkalmazzuk most már az eddig tanultakat nehány egyszerűbb függvényre.

Láttuk, hogy a hatványozásnak volt egyedül ez a tulajdonsága, hogy

$$f(\alpha)\cdot f(\beta) = f(\alpha+\beta) \quad \text{és}$$
$$f(\alpha) = [f(1)]^{\alpha}$$

s ez áll α-nak minden reális értéke mellett. Kérdés most az, létezik-e olyan anal. függvény, melynek ez a tulajdonsága, vagyis a mely következő egyenlőségnek tesz eleget: $f(z_1)\cdot f(z_2) = f(z_1+z_2)$

és $f(z) = [f(1)]^{z}$

Ha sikerül kimutatni, hogy ily anal. függvény tényleg létezik, akkor ennek értelme leend z minden értéke mellett, a mi által a hatványozás értelmezve lesz complex kitevő esetén is. Ezt az analytikai függvényt exponentiális függvénynek fogjuk nevezni, a mennyiben itt a változó z a kitevőben szerepel. Ezen függvény felkeresésénél alapúl fogjuk használni azt az egyenletet, hogy $f(z_1)\cdot f(z_2) = f(z_1+z_2)$ mert hiszen ezt a tulajdonságot követeljük meg az exponentiális függvénytől.

Előbb azonban lássuk ennek az exponentiális függvénynek nehány jellemző tulajdonságát.

I. Az exponentiális függvénynek nincsen 0 helye, mert ha volna olyan z érték, mely mellett $f(z_1)=0$, akkor

$$f(z_1)\cdot f(z_2) = f(z_1+z_2) = f(z) = 0$$ volna, azaz az exponentiális függvény mindenütt 0 volna, de akkor ez nem is lenne függvény.

II. Az exponentiális függvénynek nincsen polusa a végesben. Mert ha $f(z_1)=\infty$, akkor $f(z_1+z_2)=f(z)=\infty$ volna, a miért mondja, hogy akkor az egész számsík csupa polusokból állana, de akkor ez nem is volna függvény.

III Az exponentiális függvény értéke a 0 helyen: 1, mert ha $z_1=0$

$$f(0)\cdot f(z_2) = f(0+z_2) = f(z_2)$$

$$f(0) = \frac{f(z_1)}{f(z_2)} = 1$$

IV. Ha van az exp. függvénynek valahol körönségeshelye, akkor a 0 is ilyen lesz.

Mert tegyük fel, hogy α körönségeshely, akkor

$$f(z) = A_0 + A_1(z-\alpha) + A_2(z-\alpha)^2 + \cdots$$

a melysor convergens, ha $|z-\alpha| < \varrho$ s $z-\alpha = z_1$ téve, ha $|z_1| < \varrho$, vagyis az

$$f(\alpha + z_1) = A_0 + A_1 z_1 + A_2 z_1^2 + \cdots$$ sor convergens, ha $|z_1| < \varrho$, ha most $f(-\alpha)$-val keresztül szorzunk, s az új coefficienseket α-val jelöljük,

$$f(-\alpha)\cdot f(\alpha+z) = f(z_1) = a_0 + a_1 z_1 + a_2 z_1^2 + \cdots$$ a miért mondja, hogy mihelyt létezik az exp. függvénynek egy hely körüli sorbabontása, ebből mindig le vezethetünk egy 0 körüli sorbabontást, tehát a 0 ténylegkörönseges hely s mivel $z_1 = 0$ mellett $f(0) = 1$, azért $a_0 = 1$. Lássuk most a többi coefficienseket. Tehát

$$f(z) = 1 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$$

ez convergens, ha $|z| < \varrho$. Hogy már most erre a sorra az $f(z_1)\cdot f(z_2) = f(z_1+z_2)$ egyenletet alkalmazhassuk úgy kell megszoritani a z_1 és z_2-t, hogy $|z_1+z_2| < \varrho$ legyen. Ezt elérjük, ha $|z_1| < \frac{\varrho}{2}$ és $|z_2| < \frac{\varrho}{2}$, mert akkor $|z_1+z_2| < \varrho$ és most

$$f(z_1) = 1 + a_1 z_1 + a_2 z_1^2 + \cdots + a_n z_1^n + \cdots$$

$$f(z_2) = 1 + a_1 z_2 + a_2 z_2^2 + \cdots + a_n z_2^n + \cdots$$

$$f(z_1+z_2) = 1 + a_1(z_1+z_2) + a_2(z_1+z_2)^2 + \cdots + a_n(z_1+z_2)^n + \cdots \quad \text{I.}$$

Miután $f(z_1)$ és $f(z_2)$ is feltétlenül convergens, szabad a kettőt tetszésszerinti sorrendben összeszorozni s miután a szorzatsor abs. értékre nézve convergens, tehát a szorzatsor is feltétlenül convergens s így szabad azt tetszésszerinti sorrendben irni, tehát általánosan

$$f(z_1)\cdot f(z_2) = \sum a_h a_k z_1^h z_2^k, \text{ hol } h = 0 \cdots \infty,\ k = 0 \cdots \infty \quad \text{II}$$

$$= 1 + a_1(z_1+z_2) + (a_2 z_1^2 + \cdots a_1^2 z_1 z_2 + a_2 z_2^2) + \cdots + (a_n z_1^n + a_{n-1} a_1 z_1^{n-1} z_2 + \cdots + a_1 a_{n-1} z_1 z_2^{n-1} + a_n z_2^n) + \cdots$$

Már most feltettük, hogy (I) és (II) egyenlő oly z-k mellett, melyek abs. értékre nézve kisebbek $\frac{\varrho}{2}$-nél. Már most $|z_1+z_2| < \varrho$ s épúgy $|z_1| + |z_2| < \varrho$ s így az I sorban elvégezve a hatványozást, ezen sor az abs. értékek mellett is convergens, tehát feltétlenül convergens, s így szabad tetszésszerinti sorrendben irni az I sort. Ha már most z_2-t egy pillanatra állandónak tekintjük és I és II-öt z_1 hatványai szerint rendezzük, akkor

I.) $B_0 + B_1 z_2 + B_2 z_2^2 + \dots\dots$

II.) $C_0 + C_1 z_2 + C_2 z_2^2 + \dots\dots$

ez a két kifejtés egyenlő", tehát $B_0 = C_0$, $B_1 = C_1$, $B_2 = C_2$, ... igen de B-ék is olyan függvények, melyek z_1 minden értéke mellett egyenlők, s úgy az, hogy I és II egyenlő z_1 és z_2 minden értéke mellett, azt kívánja, hogy a $z_1^h \cdot z_2^k$ coefficiense I és II-ben is ugyanaz legyen. Ez tehát végtelen sok követelést foglal magában. Ezek a követelések az α-k meghatározására vezetnek. De ezen követelések egy részével is meg lehet határozni az α-kat, s kimutatjuk, hogy ezek az így meghatározott α-k kielégítik a többi követeléseket is.

Kiindulunk pl. abból a követelésből, hogy $z_1^{n-1} z_2$ coefficiense mindkét sorban ugyanaz kell legyen. A II sorban $z_1^{n-1} z_2$ coefficiense $a_{n-1} a_1$. Az I sorban az $a_n (z_1 + z_2)^n$ tagban fordul elő $z_1^{n-1} z_2$ s pedig a második tag, tehát a megfelelő coefficiens I-ben $n \cdot a_n$, s a követelés hogy

$$a_{n-1} a_1 = n a_n$$

még pedig n minden értéke mellett, illetőleg, ha $n = 2, 3 \dots$ ezen egyetlen követelésből tehát következik, hogy

$$a_1 a_2 = 2 a_2 \qquad \text{ebből} \quad a_2 = \frac{a_1^2}{2}$$

$$a_2 a_1 = 3 a_3 \qquad " \quad a_3 = \frac{a_1 a_2}{3} = \frac{a_1^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$a_3 a_1 = 4 a_4 \qquad " \quad a_4 = \frac{a_3 a_1}{4} = \frac{a_1^4}{4!}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$a_{n-1} a_1 = n a_n \qquad " \quad a_n = \frac{a_1^n}{n!} \qquad (1)$$

vagyis meghatároztuk az összes coefficiensek értékét. S most ki kell mutatni, hogy ezek a coefficiensek tényleg kielégítik a többi követeléseket is. Kimutatjuk, hogy ezen (1) általános képlet alapján meghatározva mindkét sorban ugyanazon $z_1^h \cdot z_2^k$ tag coefficiensét, ez a két coefficiens tényleg egyenlő h és k bárminé pos. eg. értéke mellett. II-ben ezen $z_1^h z_2^k$ coefficiense

$$a_h a_k = \frac{a_1^h}{h!} \cdot \frac{a_1^k}{k!} = \frac{a_1^{h+k}}{h!\,k!}$$

Miután $z_1^h \cdot z_2^k$-nak dimenzióju $(h+k)$, azért ezen tag az I $a_{h+k} (z_1 + z_2)^{h+k}$ hatványainak tagja, vagyis az I-ben a $z_1^h \cdot z_2^k$ coefficiense $a_{h+k} \binom{h+k}{k}$, de $a_{h+k} = \frac{a_1^{h+k}}{(h+k)!}$ és $\binom{h+k}{k} = \frac{(h+k)!}{h!\,k!}$, tehát $a_{h+k} \binom{h+k}{k} = \frac{a_1^{h+k}}{h!\,k!}$, tehát ugyanaz-

az mint a Π sorban. És így az (1) képlet tényleg a mi exponentiális függvényünknek coefficienseit adja, úgy hogy az exponentiális függvény a következő sorral van értelmezve

$$f(z) = 1 + a_1 z + \frac{a_1^2 z^2}{2!} + \cdots\cdots + \frac{a_1^n z^n}{n!} + \cdots\cdots$$

Erről a sorról most már ki fogjuk mutatni, hogy az egész számsíkon convergens, tehát úgy hogy az általa értelmezett függvény transcendens eg. függvény. Mert adjunk z-nek bármily nagy véges értéket, akkor ezen z mellett $N > |a_1 z| = N_1$

ha most az (N)-ik tagot vesszük, ez $\frac{a_1^{N-1} z^{N-1}}{(N-1)!}$ az $(N+1)$-ik tag $\frac{a_1^{N-1} z^{N-1}}{(N-1)!} \cdot \frac{|a_1 z|}{N}$

tehát már kisebb mint az N-ik, mert $\left|\frac{a_1 z}{N}\right| < 1$, s az ezutáni tagok mind kisebbek, tehát z bármily nagy véges értéke mellett a sor tagjai végesek maradnak s így a sor az egész számsíkon convergens. Miután reális z esetén $f(z) = f(1)^z$ ezen függvénynél is áll., hogy $f(z_1) \cdot f(z_2) = f(z_1 + z_2)$ azért általánosan bármily complex z értek mellett $f(z) = [f(1)]^z$.

Ezen exponentiális függvény azaz hatvány alapszámát megkapjuk, ha $z = 1$, ekkor az alapszám

$$a = 1 + a_1 + \frac{a_1^2}{2!} + \frac{a_1^3}{3!} + \cdots\cdots \qquad (1)$$

tehát az alapszámnak végtelen sok értéke lehet. Ha $a_1 = 1$, kapjuk ezt az ismeretes sort $e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \cdots\cdots \frac{1}{n!} + \cdots\cdots$

ez a legegyszerűbb eset, azért nevezzük rendesen ezen e alapszámmal bíró függvényt exponentiális függvénynek, miután

$$f(z) = [f(1)]^z$$

azért $$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots\cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots\cdots \qquad (2.)$$

összehasonlítva (2)-t (1)-el, látható, hogy $a = e^{a_1}$ és

$$e^{a_1 z} = a^z = 1 + a_1 z + \frac{a_1^2 z^2}{2!} + \cdots\cdots + \frac{a_1^n z^n}{n!} + \cdots\cdots$$

vagy $a^z = e^{a_1 z}$, tehát $(e^{a_1})^z = e^{a_1 z}$

Ezen exponentiális függvény alaptulajdonsága tehát

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$$

Miután anal. függvény, illetőleg transcendens függvény, bármely hely körül sorbafejthető. Bontsuk sorba pl. α körül

$$z = \alpha + h$$

$$e^{\alpha + h} = e^\alpha e^h = e^\alpha \left(1 + h + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + \cdots\cdots\right) \qquad \text{s } h = z - \alpha \text{ téve}$$

$$e^z = e^\alpha\left(1+(z-\alpha)+\frac{(z-\alpha)^2}{2!}+\frac{(z-\alpha)^3}{3!}+\dots\right)$$

Ebből adódik azonnal e^z deriváltja, a mely nem egyéb, mint $(z-\alpha)$ coefficiense e^α. Ha tehát α bejárja az egész számsikot $(e^z)' = e^z$.

Ez a derivált s az a tulajdonság, hogy $f(0)=1$, annyira jellemzik az exponentiális függvényt, hogy már e kettő alapján lehetne a függvényt sorbabontani.

Vizsgáljuk már most, mikép változik a függvény értéke z-vel. Ha $z = x+yi$ $\quad e^z = e^{x+yi} = e^x \cdot e^{yi}$.

Tehát nem szükséges a függvényt complex kitevő mellett vizsgálni, hanem csak tiszta reális exponens mellett

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

ha tehát x pos. és reális, a függvény is pos. és reális s x-el együtt minden határon túl nő, meg pedig mivel

$$\frac{e^x}{x^n} = \frac{1}{x^n} + \frac{1}{x^{n-1}} + \frac{1}{2!\,x^{n-2}} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{x}{(n+1)!} + \dots \text{ igy}$$

$\lim \frac{e^x}{x^n} = \infty$ azaz $e^x > x^n$

Miután továbbá $e^{-x} \cdot e^x = e^0 = 1$, azért ha x reális neg., akkor $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ és igy ha e exponense a neg. számok során át nő a végtelenbe, a függvény értéke minden határon alul fogy. Tehát $\lim_{x=+\infty} e^x = \infty$ és $\lim_{x=-\infty} e^x = 0$

A végtelen távoli hely tehat lényegesen singulláris hely az exponentiális függvényre nézve. Látható, hogy a függvény reális kitevő esetén csak pos. értékeket vesz en fel, mert ha

$x =$	$-\infty$	0	$+\infty$
$e^x =$	0	1	$+\infty$

s pedig minden értéket csak egyszer, mert folyton nő.

Vizsgáljuk már most a függvényt, ha az exponenst tiszta képzetes szám $z = yi$, a sorbabontás szerint.

$$e^{yi} = 1 + yi + \frac{(yi)^2}{2!} + \frac{(yi)^3}{3!} + \dots + \frac{(yi)^n}{n!} + \dots$$

s mivel $i^{4k} = 1$, $i^{4k+1} = i$, $i^{4k+2} = -1$, $i^{4k+3} = -i$, azért $P(y)$-al jelölve a reális tagok összegét, $S(y)$-al az i-al szorzott tagok összegét, akkor

$$P(y) = 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \dots + (-1)^k \frac{y^{2k}}{(2k)!} + \dots$$

$$S(y) = y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \dots + (-1)^k \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!} + \dots$$

úgy hogy $P(y)$ mint az $S(y)$ függvény eg. transcendens függvényei az

y-nak. Vizsgáljuk most ezeknek tulajdonságait.

Ha C-ban y helyébe $(-y)$-t teszünk: $C(y) = C(-y)$ I.

az ilyen függvényt, melynek értéke nem változik, ha a független változó előjele ellenkezőre változtatik, nevezzük páros függvénynek.

Ha S-ben y helyébe $(-y)$-t írunk: $S(y) = -S(y)$

Tehát az S függvény páratlan függvény.

Lássuk a deriváltakat:

$$C'(y) = -y + \frac{y^3}{3.1} - \frac{y^5}{5.1} + \cdots\cdots = -S(y), \text{ tehát } C'(y) = -S(y)$$
$$S'(y) = 1 - \frac{y^2}{2.1} + \frac{y^4}{4.1} + \cdots\cdots = C(y) \text{ tehát } S'(y) = C(y) \quad \Big\} \text{ II.}$$

Ezen C és S függvények értelmezéséből következik, hogy

$$e^{yi} = C(y) + i \cdot S(y) \qquad \text{és I alapján}$$
$$\underline{e^{-yi} = C(y) - i \cdot S(y)} \qquad \text{összeszorozva}$$
$$1 = C^2(y) + S^2(y) \qquad \text{III.}$$

Tehát a C és S függvény olyan, hogy négyzeteik összege 1, ennélfogva y bármily értéke mellett a két függvény abs. értékére nézve kisebb mint 1. Ha az egyik 0, a másik ± 1 s akkor az illetőnek maximális, illetőleg minimális értéke. Tehát az S és C függvények értéke $+1$ és -1 között váltakozik; mégpedig reális y mellett.

Most vizsgáljuk e függvényeket kisebb pos. y értékek mellett. Ki fogjuk mutatni, hogy S a 0 és 2 között pos., míg C a 0 és 1 között pos., de 2-ben neg. Ha vegyes a következő csoportosításal írjuk a tagokat:

$$S(y) = y\left(1 - \frac{y^2}{2.3}\right) + \frac{y^5}{5.1}\left(1 - \frac{y^2}{6.7}\right) + \frac{y^9}{9.1}\left(1 - \frac{y^2}{10.11}\right) + \cdots\cdots$$

látható, hogy a míg y a 0-tól 2-ig nő, S állandóan pos. marad, mert a zárjeles kifejezések pos. maradnak.

Tehát $\quad S(y) > 0 \quad$ ha $\quad 0 < y \leqq 2$

Ugyúgy ha C-t módosított alakban írjuk,

$$C(y) = 1 - \frac{y^2}{2.1} + \frac{y^4}{4.1}\left(1 - \frac{y^2}{5.6}\right) + \cdots\cdots$$

látható, hogy ha y 0-tól 1-ig nő, a $C(y)$ állandóan pos. marad. S ha másképp alakítjuk a csoportokat

$$C(y) = 1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{2.3.4} - \frac{y^6}{6.1}\left(1 - \frac{y^2}{7.8}\right) - \frac{y^{10}}{10.1}\left(1 - \frac{y^2}{11.12}\right) - \cdots\cdots$$

azonnal kitűnik, hogy $y = 2$ mellett $C(y) < 0$, mert

$$C(2) = 1 - 2 + \frac{2}{3} - \cdots \quad \text{csupa negatív tagok.}$$

Tehát $C(y)>0$, ha $0<y\leq 1$ és $C(y)<0$, ha $y=2$, a mig tehát y az 1-től 2-ig nő, $C(y)$ okvetlenül fel-vesz valahol a 0 értéket még pedig csak egyszer. Ert könyvetkezőleg lehet kimutatni egy segédtétel alapján, mely szerint, ha egy reális $f(x)$ függvény deriváltja kicsinyes α helyen pos. $f(\alpha)>0$, a függvény ezen a helyen növöben van, míg ha a derivált $f'(\alpha)<0$, a függveny ezen a helyen fogyóban van. Ugyanis mit teszen az, hogy a függvény növöben v. fogyóban van? Hogyha α-t megnagyobbitom egy igen kis pos. h mennyiséggel $f(\alpha+h)-f(\alpha)>0$, ill. $f(\alpha+h)-f(\alpha)<0$, de

$$f(\alpha+h)=f(\alpha)+\frac{f'(\alpha)}{1!}h+\frac{f''(\alpha)}{2!}h^2+\cdots\cdots$$

tehát

$$f(\alpha+h)-f(\alpha)=h\left[f'(\alpha)+\frac{f''(\alpha)}{2!}h+\cdots\cdots\right]$$

már most ha h elég kicsiny, az alá húzott rész kisebbé tehető mint $f'(\alpha)$ s akkor pos. h mellett az egész külsőség $f'(\alpha)$ előjelét veszi fel, vagyis tényleg

$f(\alpha+h)-f(\alpha)>0$ ha $f'(\alpha)>0$

$f(\alpha+h)-f(\alpha)<0$ ha $f'(\alpha)<0$

természetesen, ha $f'(\alpha)\neq 0$. Tehát a függvény nő, ha $f(x)>0$ és fogy, ha $f(x)<0$. Miután már most a $C(y)$ deriváltja $-S(y)$ és $S(y)$ az 1 és 2 között állandóan pos., azért $C'(y)$ az 1 és 2 között állandóan neg. és igy $C(y)$ ezen intervallumban állandóan fogy, s miután az 1-ben még pos., a 2-ben már neg. azért mindenesetre letesik 1 és 2 között olyértek, melyben $C(y)=0$, s pedig csak egy. Jelöljük ezt az értéket $\frac{\pi}{2}$-vel, akkor $C(\frac{\pi}{2})=0$, a hol $1<\frac{\pi}{2}<2$. Ha III-ban $y=\frac{\pi}{2}$ tesrünk, marad $S(\frac{\pi}{2})=+1$, de miután $1<\frac{\pi}{2}<2$, s ezen intervallumban $S(y)>0$, azért $S(\frac{\pi}{2})=+1$.

Ezek alapján most már könnyen alkothatunk magunknak fogalmat a C és S függvények viselkedéséről, ha y tetszésszerint változik. Az exponentialis függvény és ezen C és S függvény között a következő relációt kaptuk volt

$$e^{yi}=C(y)+iS(y) \qquad (1)$$

$$e^{\frac{\pi}{2}i}=i \qquad (2.)$$

s hay $=\frac{\pi}{2}$

ha ezt először 2, majd 3 és 4-ik hatványra emeljük, kapjuk hogy

$$e^{\pi i}=-1 \qquad (3.)$$

tehát csak tisztán képzetes exponens mellett az exp. függvény negativ

$$e^{\frac{3\pi}{2}i}=-i \qquad (4.)$$

$$e^{2\pi i}=+1 \qquad 5.$$

Igy mondhatjuk, hogy πi páratlan számu többszörösei mellett az exp.

függvény értéke -1, páros számú többszörösei mellett $+1$.

Ezen egyenletek segélyével néhány fontos tulajdonságot vezethetünk le a C és S számára (1) × (2) hagyjuk

$$e^{(y+\frac{\pi}{2})i} = -S(y) + C(y)\,i = C(y+\tfrac{\pi}{2}) + S(y+\tfrac{\pi}{2})\,i$$

és így $\quad C(y+\frac{\pi}{2}) = -S(y)$

$$S(y+\tfrac{\pi}{2}) = C(y) \qquad \text{IV.}$$

Tehát elég ismerni az S és C értéket 0-tól $\frac{\pi}{2}$-ig.

(1)×(3) $\quad e^{(y+p)i} = -C(y) - S(y)\,i$

de ez másfelől $\quad = C(y+p) + S(y+p)\,i$

tehát $\quad C(y+p) = -C(y)$

$$S(y+p) = -S(y) \qquad \text{V}$$

és (1)×(5) $\quad e^{(y+2p)i} = C(y) + S(y)\,i$

$$= C(y+2p) + S(y+2p)\,i$$

tehát $\quad C(y+2p) = C(y)$

$$S(y+2p) = S(y) \qquad \text{VI.}$$

Ez utóbbi egyenletek ezt mondják, hogy a C és S függvény értéke nem változik, ha y növekedik $2p$-vel. Az ilyen függvényeket periodikus függvényeknek nevezzük, itt $2p$, vagy $\frac{\pi}{2}$ nek 4-szerese, a periódus.

Miután $\quad e^{2\pi i} = +1$, azért

$$e^{2r+2\pi i} = e^{z}$$

vagyis az exp. függvény is periodikus, de a periódusa tiszta képzetes, t.i. $2\pi i$. Ha $y = y_1$, azután $y = y_2$, akkor

$$e^{y_1 i} = C(y_1) + S(y_1)\,i$$

$$e^{y_2 i} = C(y_2) + S(y_2)\,i$$

$$e^{(y_1+y_2)i} = C(y_1)C(y_2) - S(y_1)S(y_2) + [S(y_1)C(y_2) + C(y_1)S(y_2)]\,i$$

ez másfelől $\quad = C(y_1+y_2) + S(y_1+y_2)\,i$

tehát

$$C(y_1+y_2) = C(y_1)C(y_2) - S(y_1)S(y_2) \quad (1.)$$

$$S(y_1+y_2) = S(y_1)C(y_2) + C(y_1)S(y_2) \quad (2.) \qquad \text{VII.}$$

ha $y_1 = y_2 = y$, $\quad S(2y) = 2S(y)C(y) \quad (3.)$

$$C(2y) = C(y)^2 - S(y)^2$$

azonkívül $\quad 1 = C(y)^2 + S(y)^2$

$$2C(y)^2 = 1 + C(2y) \quad (1)$$

$$2S(y)^2 = 1 - C(2y) \quad (2) \qquad \text{VIII.}$$

Látjuk tehát, hogy a C és S-függvények épp olyan tulajdonságokkal bírnak mint a cosinus illetőleg sinus, s most ki fogjuk mutatni, hogy a $C(y)$ tényleg $\cos y$, sa $S(y)$ tényleg nem egyéb mint $\sin y$, úgyhogy az exponentiális és trigonometricus függvények a legszorosabb kapcsolatban vannak egymással. Ezt Euler mutatta ki.

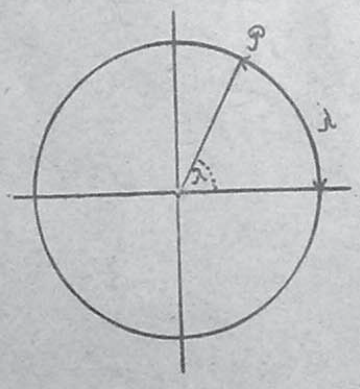
Ugyanis vegyük y-nak reális értékét, s pedig $y=\lambda$

$$e^{\lambda i} = C(\lambda) + S(\lambda)\, i$$

s mivel $C(\lambda) > 0$ és $S(\lambda) > 0$ továbbá

$$1 = C(\lambda)^2 + S(\lambda)^2$$

azért $e^{\lambda i}$ egy olyan complex szám, mely az egységsugarú körön fekszik és pedig az első quadránsban; szöge legyen λ, akkor másfelől a derékszögű és polárcoordinata rendszer összefüggése alapján tudjuk, hogy



$$C(\lambda) = \cos\lambda$$

$$S(\lambda) = \sin\lambda$$

s ha a VII-ben $y_1 = y_2 = \lambda$, akkor

$$C(2) = C(\lambda)^2 - S(\lambda)^2 = \cos^2\lambda - \sin^2\lambda = \cos 2\lambda$$

$$S(2) = 2S(\lambda)C(\lambda) = 2\sin\lambda\cos\lambda = \sin 2\lambda$$

" " " $y_1 = y_2 = 2$ "

$$C(4) = C(2)^2 - S(2)^2 = \cos^2 2\lambda - \sin^2 2\lambda = \cos 4\lambda$$

$$S(4) = 2S(2)C(2) = 2\sin 2\lambda\cos 2\lambda = \sin 4\lambda$$

.....

segéz általánosan

$$C(2^n) = \cos(2^n\lambda)$$

$$S(2^n) = \sin(2^n\lambda)$$

s miután minden positiv eg. szám előállítható a 2-es számrendszerben, azaz mint 2 hatványainak összege azért hivatkozva az összeadási tételre általánosan minden positiv egész m számra nézve

$$C(m) = \cos m\lambda$$

$$S(m) = \sin m\lambda$$

Ugyanezt lehet kimutatni, ha a független változó véges tört szám. Mert VIII-ból

$$C(y) = \sqrt{\frac{1+C(2y)}{2}}$$

$$S(y) = \sqrt{\frac{1-C(2y)}{2}}$$

s ha most $y = \frac{1}{2}$, akkor

$$C\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+C(1)}{2}} = \sqrt{\frac{1+\cos\lambda}{2}} = \cos\frac{\lambda}{2}$$

$$S\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-C(1)}{2}} = \sqrt{\frac{1-\cos\lambda}{2}} = \sin\frac{\lambda}{2}$$

Hasonlómódon

$$C\left(\tfrac{1}{4}\right) = \cos\frac{\lambda}{4}$$

$$S\left(\tfrac{1}{4}\right) = \sin\frac{\lambda}{4}$$

általánosan $C\left(\frac{1}{2^n}\right) = \cos\frac{\lambda}{2^n}$

$S\left(\frac{1}{2^n}\right) = \sin\frac{\lambda}{2^n}$

s miután minden tört számra nézve, mely $\frac{1}{2}$ hatványainak véges összegeként előállítható, alkalmazhatjuk az összeadási tételt, általánosan mondhatjuk, hogy minden véges y számra nézve, mely előállítható mint egy pos. egész szám és $\frac{1}{2}$ hatványainak véges összege:

$$\left.\begin{aligned} C(y) &= \cos\lambda y \\ S(y) &= \sin\lambda y \end{aligned}\right\} ((1))$$

S most mutassuk ki, hogy ez áll bármilyen pos. racionális vagy irracionális számra. Egész általánosan minden positiv szám előállítható mint egy pos. egész szám és egy véges vagy végtelen tört a kettes számrendszerben, tehát:

$$y = y_0 + \frac{\varepsilon_1}{2} + \frac{\varepsilon_2}{2^2} + \cdots\cdots + \frac{\varepsilon_n}{2^n} + \cdots\cdots$$

ha $y_1 = y_0 + \frac{\varepsilon_1}{2}$; $y_2 = y_0 + \frac{\varepsilon_1}{2} + \frac{\varepsilon_2}{2^2}$, ... $y_n = y_0 + \frac{\varepsilon_1}{2} + \cdots + \frac{\varepsilon_n}{2^n}$;

akkor ezen y-ok egy szabályos számsorozatot alkotnak, azaz

$$y_1\ y_2\ y_3 \cdots\cdots\cdots y_n \cdots\cdots \quad \lim y_n = y$$

De a $C(y)$ függvény mint transcendens egész függvény folytonos és így a folytonosság definitiója szerint ezen szabályos sorozat egyes tagjaira alkalmazva a C függvényt annyit $C(y_1)\ C(y_2) \cdots\cdots\cdots C(y_n) \cdots$ sorozat szabályos, és így $\lim C(y_n) = C(y)$

igen de ezen utóbbi sorozat tagjaira nézve érvényes az ((1)) képlet azaz

$$C(y_n) = \cos(\lambda y_n)$$

s pedig a sorozat minden tagjára, tehát a határra nézve is, és mivel az $\cos$ sinus folytonos függvény $\lim(\cos\lambda y_n) = \cos\lambda y$, azért a határban is

$$C(y) = \cos\lambda y$$

$$S(y) = \sin\lambda y$$

ép így

a hol most y bármilyen positiv rat. vagy irrat. szám. Ép így negativ y mellett; miután $C(-y) = C(y) = \cos y\lambda = \cos(-y\lambda)$ tehát

$$C(-y) = \cos(-y\lambda)$$

$$S(-y) = -S(y) = -\sin y\lambda = \sin(-y\lambda)$$

$$S(-y) = \sin(-y\lambda)$$

És most ki fogjuk mutatni, hogy ez a $\lambda = 1$. Ismeretes, hogy

$$\lim_{\alpha=0} \frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1$$

ha $\alpha = \lambda y$, ahol y a 0-hoz közeledik, akkor

$$\lim_{y=0} \frac{\sin \lambda y}{\lambda y} = 1 \qquad \text{vagyis } \lambda \text{ állandó lévén}$$

$$\lim_{y=0} \frac{\sin \lambda y}{y} = \lambda$$

de másfelől $\quad \frac{\sin \lambda y}{y} = \frac{S(y)}{y}$, azért

$$\lim_{y=0} \frac{S(y)}{y} = \lambda \qquad (1$$

igen de $\quad \frac{S(y)}{y} = 1 - \frac{y^2}{3.!} + \frac{y^4}{5.!} - \cdots\cdots\cdots$

és így másfelől $\quad \lim_{y=0} \frac{S(y)}{y} = 1 \qquad (2.$

tehát (1 és (2 alapján $\quad \lambda = 1$

Ezzel pedig ki van mutatva, hogy a független változó bármilyen értéke mellett

$$C(y) = \cos(y)$$
$$S(y) = \sin(y)$$

A következőkben tehát C és S helyett cosinust és sinust írunk. A fentiekből kapjuk egyszersmind két függvény sorbafejtését reális értékek mellett:

$$\cos y = 1 - \frac{y^2}{2.!} + \frac{y^4}{4.!} - \frac{y^6}{6.!} + \cdots\cdots$$
$$\sin y = y - \frac{y^3}{3.!} + \frac{y^5}{5.!} - \frac{y^7}{7.!} + \cdots\cdots\cdots$$

Másfelől kapjuk, hogy $\left.\begin{aligned} e^{yi} &= \cos y + i \sin y \\ e^{-yi} &= \cos y - i \sin y \end{aligned}\right\}$ I.

$$e^{yi} + e^{-yi} = 2 \cos y$$
$$e^{yi} - e^{-yi} = 2 \sin y \cdot i$$
$$\cos y = \frac{e^{yi} + e^{-yi}}{2}$$
$$\sin y = \frac{e^{yi} - e^{-yi}}{2i}$$

Most határozzuk meg $\frac{\pi}{2}$ értékét. Ez oly érték mely mellett $C = 0$, tehát

$$C\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = 0 = \cos \tfrac{\pi}{2}, \quad \text{tehát}$$

$$\frac{p}{2} = \frac{\pi}{2} \quad , \quad p = \pi$$

és így $\qquad e^{z + 2\pi i} = e^z$

vagyis az exponentiális függvény periodusa $2\pi i$.

Vizsgáljuk már most az exp. függvény értékváltozásait a complex $z = x + yi$ „tető" értékváltozásai mellett

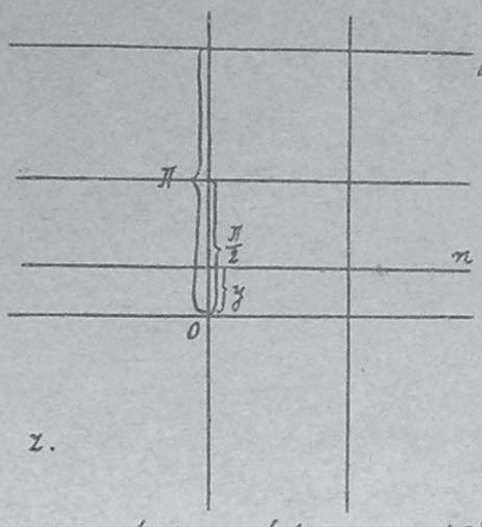
$$e^z = e^x e^{yi} = e^x (\cos y + i \sin y) = Z$$

tehát $\quad |e^z| = e^x = |Z|$

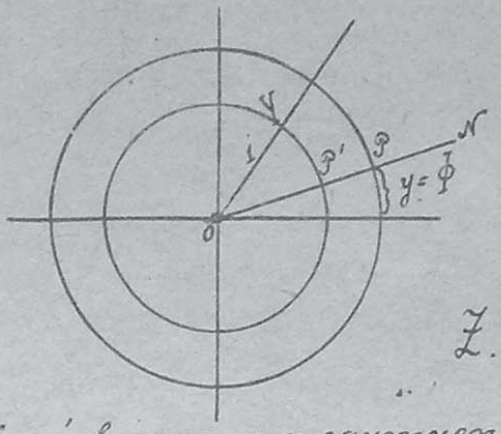
$$\angle e^z = y = \angle Z$$

Hogy megvizsgálhassuk Z értékváltozásait z változásával, fel-veszünk két számsikot ugyanazon hosszegységgel. Az egyikben fogjuk ábrázolni z-t derékszögü coordinatákkal, tehát $z = x + yi$ a másikban Z-t polárcoordinatákkal $Z = (R, \Phi)$ az összefüggés a kettő között

$$|Z| = R = e^x$$
$$\angle Z = \Phi = y$$



z.

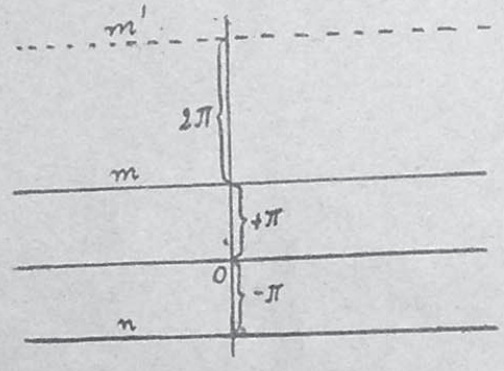


Z.

Ha y állandó és x a reális tengelylyel párhuzamos n egyenesen változik, akkor a Z számsik $\Phi = y$ állandó, csak $R = e^x$ változik az ON egyenesen s pedig a mig x változik $-\infty$-től 0-nát $+\infty$-ig, addig R változik 0-tól $+\infty$-ig; R midőn $x=0$, $e^0 = R = 1$, tehát $x=0$-nak megfelel az egységsugaru körön egy pont megfelelő y szögalatt P'. Ha y változik, akkor minden y-hoz tartozik egy 0-ból kiinduló szára Z számsikban. Igy pl. az $y=0$ azaz reális tengelynek megfelel a $\Phi = 0$ tehát pos. reális tengelya Z számsikban; ha $y = \frac{\pi}{2}$, e^x a pos. tiszta képzetes; ha $y = \pi$, e^x a negativ reális és ha $y = -\frac{\pi}{2}$, e^x a negativ tiszta képzetes tengelyen változik x-al együtt.

Ha x-et vesszük állandónak, azaz az y-al parallel egyeneseken változtatjuk y-t, akkor ezen párhuzamos egyeneseknek mind körök felelnek meg a Z számsikban; ugyanis egy határozott ily párhuzamos mellett e^x állandó, azaz R állandó, csak $y = \Phi$ szög változik s igy ha y változik 0-tól 2π-ig, addig Z az $e^x = R$ sugaru körön egyszer végig megy pos. irányban, ha y is 0-tól $= 2\pi$-ig változik. Ha $x=0$, $R=1$ tehát az y tengelynek megfelela jelzett értelemben az egységsugaru kör, a melyet Z x-szor fut be, addig a mig y 0-tól $2x\pi$-ig változik.

Vegyünk most a reális tengelytől $+\pi$ és $-\pi$ távolságban egy azzal párhuzamos m illetőleg n egyenest. Az ezek által bezárt végtelen hosszu terület sávhoz számitsuk hozzá az m-et, de n-et nem. Ki fogjuk mutatni, hogy a mig z ezen sávon belül változik, addig Ž az egész számsikhot bejárja. Ha ugyanis z a reális tengelyen változik $-\infty$-től 0-n át $+\infty$-ig, akkor Ž megfelelőleg változik a reális tengelyen.



0-től $+\infty$-ig. Ha most a reális z tengelyt eltoljuk folytonosan önmagával párhuzamosan m-be, tehát $+\pi$-re, akkor ezen párhuzamosak megfelelnek a Ž számsik felső részében levő, o-ból kiinduló egyenesek; mert hisz a mig a reális tengely m-be jött, azalatt a Ž számsikban a reális tengely pos. ága megfordult π alatti pos. irányban. Tehát a sáv felső felének megfelelnek a Ž számsik felső felének összes pontjai. Ha a z reálistengelyt lefelé n-be toljuk, tehat $(-\pi)$-re, akkora Ž pos. reális tengely negativ irányban fordul ki π szög alatt s igy a sáv alsó felének megfelelnek a Ž számsik alsó felében levő összes pontok. Tehát a z számsik m n sávának, melynek dimensiója 2π, megfelelnek a Ž számsik összes pontjai és pedig igy, hogy ezen sáv minden egyes pontjához csak egy pont tartozik a Ž számsikban, és a Ž számsik minden egyes pontjához csak egy pont tartozik a z számsik ezen sávában. De ha az m n sávot felfelé eltoljuk 2π-vel, azaz az m n sáv minden pontjának ordinatáját megnöveljük 2π-vel mig x állandó marad, tehát egy y-al parallel egyenes mentén, akkor a mint az az előző geometriai interpretatióból látható a megfelelő Ž értékek ugyanazok lesznek, mert hisz R ugyanaz, a szög megnövekedett 2π-vel, tehát ugyanaz, vagy is az m n' sávhoz ugyanazon Ž értékek tartoznak mint az n m sávhoz. Ezt pedig végtelenszer lehet ismételni le és felfelé, igy hogy a z számsik felosztik csupa periodicus sávokra vagy is ezikkekre 2π dimensióban, melyek által vannak jellemezve, hogy a Ž egy értékéhez minden periódus-

ban tartozik egy érték, vagyis végtelen sok érték; az nem periodust nevezzük főperiodusszámoknak. Ha tehát felvesszünk a z számsíkban egy Z értéket, melynek abs. értéke $R = e^x$, szöge $\Phi = y$, akkor ehez a z számsíkban tartoznak azok az értékek, melyeknek abscissája $x = \log R$ ordinátája pedig $y + 2k\pi$, hol k felvehet minden értéket $-\infty$ és $+\infty$ közt, vagyis a $Z = (R, \Phi)$-nek megfelel $x + (y + 2k\pi)i = \log R + (y + 2k\pi)i$

Az exponentiális függveny inverz függési viszonyát neverik logarithmusnak és pedig természetes logarithmusnak; ha tehát $e^z = Z$. akkor

$$z = \log Z = \log R + (\Phi + 2k\pi)i$$

vagyis

$$\log Z = \log R(\cos\Phi + i\sin\Phi) = \log R + (\Phi + 2k\pi)i$$

Tehát egy complex szám log. annyi mint az abs. érték logarithmusa hozzáadva a $2k\pi$-vel megnövesztett szög és i szorzata és pedig úgy véve Φ-t, hogy $-\pi < \Phi \leq \pi$ sert neverzük a szög főértékének és ennek megfelelőleg az összes logarithmusok főértékének neverzük azt, melyben a szög főértéke szerepel, ezt LZ-vel jelölve, lesz

$$LZ = \log R + \Phi i$$

és $\log Z = LZ + 2k\pi i$ hol $k = -\infty \cdots 0 \cdots +\infty$.

A logarithmus fő tulajdonsága: Ha Z_1 és Z_2 2 complex szám, akkor

$$e^{\log Z_1} = Z_1$$
$$e^{\log Z_2} = Z_2$$
$$e^{\log Z_1 + \log Z_2} = Z_1 Z_2$$

tehát

$$\log Z_1 Z_2 = \log Z_1 + \log Z_2$$

ez az egyenlet azt jelenti, hogy ha $\log Z_1$ és $\log Z_2$ végtelensok értékeiből egyet-egyet kivesszünk s ezeket összeadjuk ez az összeg előfordul a $\log Z_1 Z_2$ végtelensok értékei között.

A logarithmusnak mint inverz függvénynek a tárgyalását az inverz függvények tárgyalására hagyjuk s áttérünk most a trigonometricus függvényekre.

H.

Trigonometricus függvények.

Ezentúl tanulmányozni fogjuk a cosinus és sinust az egész

szinsikon, tehát bármily complex értékek mellett. A definíciót ad-
ja a következő két sor:

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2.!} + \frac{z^4}{4.!} - \frac{z^6}{6.!} + \dots \quad (1.$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3.!} + \frac{z^5}{5.!} - \frac{z^7}{7.!} + \dots \quad (2.$$

sez az exponentialis függvénnyel való összefüggését adja a következő"
két egyenlet:

$$\cos z = \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2} \quad (a.)$$

$$\sin z = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i} \quad (b.)$$

Fő tulajdonságai itt is érvényesek, mint a reális számkörben. Ü-
gyanis (1.)+(2.)i

$$\cos z + i \sin z = 1 + iz - \frac{z^2}{2.!} - i\frac{z^3}{3.!} + \frac{z^4}{4.!} - \dots\dots$$

$$= 1 + iz + \frac{(iz)^2}{2.!} + \frac{(iz)^3}{3.!} + \frac{(iz)^4}{4.!} + \dots = e^{zi}$$

tehát

$$e^{zi} = \cos z + i \sin z \quad (3.$$

miután (1) páros (2.) páratlan függvény

$$\left.\begin{aligned} \cos(-z) &= \cos z \\ \sin(-z) &= -\sin z \end{aligned}\right\} \quad (I)$$

(3)-ba (-z) téve

$$e^{-zi} = \cos z - i \sin z \quad (4.)$$

(3)·(4)

$$1 = \cos^2 z + \sin^2 z \quad (II.)$$

Továbbá

$$e^{z_1 i} = \cos z_1 + i \sin z_1$$

$$e^{z_2 i} = \cos z_2 + i \sin z_2$$

$$e^{(z_1+z_2)i} = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2 + i(\sin z_2 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2) \quad (5.)$$

$$e^{-(z_1+z_2)i} = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2 - i(\sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2) \quad (6.)$$

de mivel másfelől

$$e^{(z_1+z_2)i} = \cos(z_1+z_2) + i \sin(z_1+z_2)$$

$$e^{-(z_1+z_2)i} = \cos(z_1+z_2) - i \sin(z_1+z_2)$$

(5) és (6) összeadva és 2-vel osztva, majd kivonva és 2i-vel osztva, kapjuk

$$\left.\begin{aligned} \cos(z_1+z_2) &= \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2 \\ \sin(z_1+z_2) &= \sin z_1 \cos z_2 - \cos z_1 \sin z_2 \end{aligned}\right\} \quad III.$$

Ezen I., II. és III. egyenletek alapján azután az összes trigonometriai for-
mulák érvényesek maradnak complex változó esetén is.

Kérdés, hol vannak a sinus és cosinus 0 helyei complex változó
esetén. Erre felel az (a) és (b) egyenlet, mert

$\cos z = 0$ ha $e^{zi} + e^{-zi} = 0$ azaz ha

$$e^{zi} = -e^{-zi}$$

keresztül osztva e^{zi}-el $e^{2zi} = -1$ már pedig

$e^{2zi} = -1$ ha

$$2zi = (2\kappa+1)\pi i$$

$$\text{azaz } z = (2\kappa+1)\frac{\pi}{2} \qquad \kappa = -\infty \dots 0 \dots +\infty$$

$\sin z = 0$, ha $e^{zi} - e^{-zi} = 0$

$e^{zi} = e^{-zi}$

$e^{2zi} = 1$ ez teljesül, ha z

$2zi = 2\kappa\pi i$

azaz $z = \kappa\pi$

Tehát a sin. és cos. 0 helyei a complex számkörben is ugyanazok, mint a reális számkörben.

Kérdés, hányszor veszi fel a sinus ugyanazt az értéket és hol? Adva tehát $\sin z_1$, keressük azt a z értéket, mely mellett $\sin z = \sin z_1$ azaz $\sin z - \sin z_1 = 0$ s ez szorzatalakban írva $2\sin\frac{z-z_1}{2}\cos\frac{z+z_1}{2} = 0$ ez teljesül, ha 1.) $\sin\frac{z-z_1}{2} = 0$, vagyis $\frac{z-z_1}{2} = \kappa\pi$

$$z = z_1 + 2\kappa\pi \qquad (1.)$$

2.) $\cos\frac{z+z_1}{2} = 0$ " $\frac{z+z_1}{2} = (2\kappa+1)\frac{\pi}{2}$

azaz ha $z = -z_1 + (2\kappa+1)\pi \qquad (2.)$

Tehát a z-knek 2 végtelen szorzata van, melyekben a sinus ugyanazon értéket veszi fel. E kettőt összefoglalhatjuk a következő kifejezésben

$$z = (-1)^h z_1 + h\pi \qquad ((1))$$

mert ha h páros, kapjuk (1)-et, ha páratlan kapjuk (2)-t.

Épígy meghatározhatjuk mindazon helyeket, ahol a cosinus bizonyos adott értékkel bír. $\cos z = \cos z_1$

$$\cos z - \cos z_1 = 0$$

$$2\sin\frac{z-z_1}{2}\sin\frac{z+z_1}{2} = 0 \qquad \text{s ez teljesül, ha}$$

1.) $\frac{z-z_1}{2} = \kappa\pi$, azaz $z = z_1 + 2\kappa\pi$

2.) $\frac{z+z_1}{2} = \kappa\pi$, " $z = -z_1 + 2\kappa\pi$

tehát általánosan $z = \pm z_1 + 2\kappa\pi \qquad ((2))$

helyeken ugyanazt az értéket veszi fel a cosinus, mint z_1-ben.

Ha pl. (2)-ben $\kappa = 0$, kapjuk hogy $\sin z_1 = \sin(\pi - z_1)$.

Tehát a számsíkon végtelensok hely van, melyekben a sinus és cosinus ugyanazzal az értékkel bír, mint egy adott helyen; de ezen helyek két-két végtelen sorozatát alkotják a számoknak.

Próbáljuk most már ezen függvényeknél is a számsikból olyterületet kihasítani, melyen belül a cosinus illetőleg sinus minden értéke előjön.

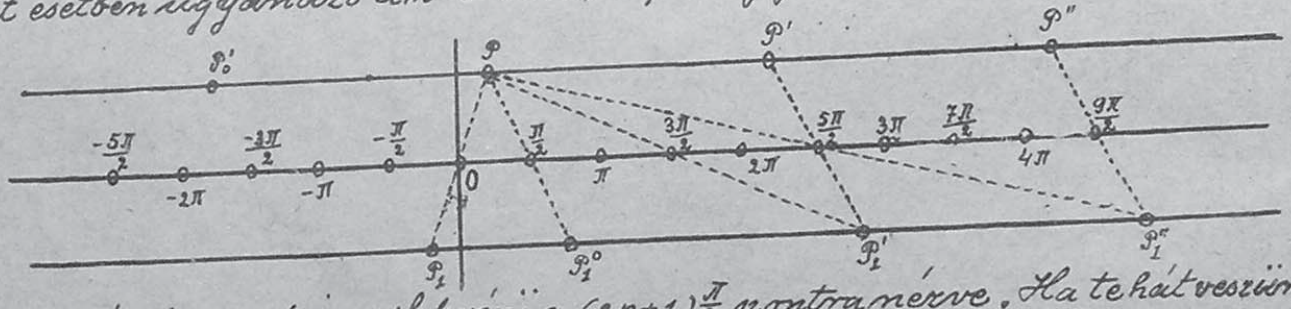
Vegyük pl. a sinust. Láttuk hogy azoka helyek, a hol a sinus ugyanazt az értéket veszi fel, mint z_1-ben, a következő két sororozattal vannak adva, illetőleg csoportal definiálva

$$z_1 + 2k\pi \qquad (1.)$$

$$\text{és} \quad -z_1 + (2k+1)\pi = z' \qquad (2.)$$

s ez utóbbi egyenletből $\frac{z'+z_1}{2} = (2k+1)\frac{\pi}{2}$

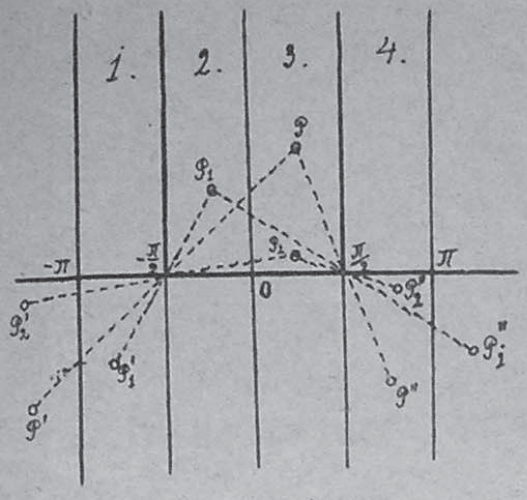
vagyis oly két hely számtani középarányosa, hol a sinus ugyanaz a két csoportban, annyi mint $\frac{\pi}{2}$ páratlan számu többszöröse, mindkét esetben ugyanazt a k-t véve, ez pedig geometriailag azt jelenti,



hogy z_1 és z' symetricus fekvésü a $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ pontra nézve. Ha tehát veszünk egy z_1-nek megfelelő P pontot, akkor a $(-z_1)$-nek megfelelő P_1 pont ehez symetricusan fekszik o-ra nézve (mert ha $z_1 = a+bi$, $-z_1 = -a-bi$) és most az (1) csoportnak megfelelő értékek a P-n átmenő x-el párhuzamos egyenesen, fekszenek a P-től 2π, 4π .... $2k\pi$ távolban jobbra és balra, míg a (2) csoportnak megfelelő" értékek a P_1-en átmenő" s x-el párhuzamos egyenesen fekszenek P_1-től π, 3π, ... $(2k+1)\pi$ távolban jobbra és balra, tehát úgy, hogy P és $P_1°$, P és P_1', P és P_1'' ..... összeköttetésének felezőpontjában megfelelőleg van $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$ .... $\frac{5\pi}{2}$ ..... vagy más szóval P és $P_1°$ symetricusan fekszik $\frac{\pi}{2}$-re nézve, P és P_1' $\frac{3\pi}{2}$-re nézve stb. ép igy negativ irányban. Ugyanez áll, ha P helyett $P'P''$... áll. Vagyis ha az első" csoport bármelyik értékének symetricusát veszük $\frac{\pi}{2}$ páratlan szám többszörösére nézve, kapjuk a (2) csoport egy értékét, tehát egy olyan helyet, melyen a sinus ugyanazon értékkel bir.

Már most könnyü lesz a számsikból oly sávot kihasitani, melyen a sinus minden értékét csak egyszer veszi fel. Miután a

sinus periodusa 2π, azért ezen sáv szélessége 2π kell legyen. Ha tehát $(-\pi)$-ben és π-ben az y tengelyel párhuzamosokat húzunk, akkor a sinus azon értékeket, melyeket ezen sávban felvesz, minden más, 2π szélességű sávban csak ismétli. Elegendő" tehát a sinust ebben a sávban vizsgálni. A sáv $(-\pi)$-n átmenő" oldalát nem számítjuk a sávhoz, hanem az előzőhöz. Már most tudjuk, hogy e sáv minden pontjához tartozik egy $\frac{\pi}{2}$ vagy $-\frac{\pi}{2}$-hez szimetrikusan fekvő" pont pl P-hez P'és P", ezek egyike, itt P" mindig a sávon belül fekszik, ilyen P_1-hez P_1'; P_2-hez P_2'' a hol a sinus ugyanoly értékű. Tehát a sávon belül mindig két pontban veszi fel a sinus ugyanazt az értéket, kivételt képez a $\frac{\pi}{2}$ és $-\frac{\pi}{2}$ pont, mert ezek párjukkal összeesnek s itt a sinus értéke +1 illetőleg -1, tehát ez az a két kivételes érték, melyekhez csak egy pont tartozik a sávon belül; $\frac{\pi}{2}$ illetőleg $-\frac{\pi}{2}$, minden más értékhez 2 pont tartozik a sávon belül s ezen pontpárok egyik pontja mindig a $\frac{\pi}{2}$ és $-\frac{\pi}{2}$ pontokon átmenő" párhuzamosak által alkotott sávban fekszik. Ha tehát oly sávot akarunk, melyen belül minden értéket a sinus csak egy pontban veszen fel, egyszerűen a $+\frac{\pi}{2}$ és $-\frac{\pi}{2}$ ponton át y-al párhuzamost húzunk. Ezen a sávon belül minden érték csak egyszer fordul elő. Ha csupán az absolut érték változásait akarjuk vizsgálni, elegendő" ezen sávnak a positiv kéjszelestengelyel párhuzamos részében vizsgálni a függvényt, mert az alsó részben a megfelelő" negativ értékek fordulnak elő. Ezt a sávot így lehet jellemezni, ha $z = x + yi$, akkor vagy $\frac{\pi}{2} > x > -\frac{\pi}{2}$, és y lehet tetszésszerinti, vagy $x = \pm\frac{\pi}{2}$ és $y \geq 0$.



Ezen területre nyert eredményeket át lehet vinni a cosinusra, mert

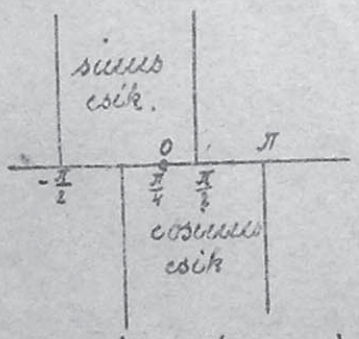
$$\sin z' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - z'\right) = \cos z$$

vagy ha $z = \frac{\pi}{2} - z'$ akkor

$$\cos z = \sin z'$$

de akkor $\frac{z + z'}{2} = \frac{\pi}{4}$

tehát a mely hely a $\frac{\pi}{4}$-re nézve symetricusan fekszik a z'-hez, ott a co-
sinus ugyanoly értékü mint a sinus z'-ben vagyis mindazok a
helyek, a hol a cosinus ugyanoly értékü mint a sinus a maga
csikjában, ezen csik összes pontjaihoz $\frac{\pi}{4}$-re nézve symetricusan fek-
szenek, tehát azt a csikot, melyben a cosinus minden értékét csak
egyszer veszi fel, megkapjuk, ha sinus csikot $\frac{\pi}{4}$ körül π szög alatt
megforditjuk. Igy egy oly csikhoz jutunk, mely egyfelöl a reális
tengelynek $0-\pi$ részre, másfelöl ezen 0 és π-ben a tengelyre emelt
merölegesek alsó fele által van határolva, ez a cosinus csik, melyet



igy lehet jellemezni, ha $z=x+yi$ vagy $0<x<\pi$ és
y tetszésszerinti, vagy $x=\pi$ és $y \leqq 0$.
Elég megvizsgálni a sinus csikban a sinus ér-
tékváltozásait, mert ugyanigy változtatja ér-
tékét a cosinus a cosinus csikban.
Tudjuk, hogy a sin. és cos. összeadási tétele ér-
vényes a complex számkörben is, tehát ha

$z=x+yi$, úgy $\sin(x+yi) = \sin x \cos(yi) + \cos x \sin(yi)$

$\cos(x+yi) = \cos x \cos(yi) - \sin x \sin(yi)$

Ebből látható, hogy elég vizsgálni a sinust és cosinust, reális
és tiszta képzetes értékek mellett. Reális értékek mellett már ismer-
jük a trigonometriából, mint trigonometriai sinust és cosinust,
tehát csak tiszta képzetes értékek mellett kell vizsgálni.

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2.!} + \frac{z^4}{4.!} - \frac{z^6}{6.!} + \cdots\cdots \qquad (1)$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3.!} + \frac{z^5}{5.!} - \frac{z^7}{7.!} + \cdots\cdots \qquad (2)$$

s most adjunk z-nek tiszta képzetes értéket, $z=yi$, akkor (1) páros
lévén $\cos(yi) = 1 + \frac{y^2}{2.!} + \frac{y^4}{4.!} + \frac{y^6}{6.!} + \cdots\cdots$

tehát a cosinusnak az a tulajdonsága, hogy tiszta képzetes változó
mellett értéke reális és positiv és y növésével minden határon túl nő,
tehát egészen más tulajdonsága, mint a trigonometriai cosinus, azért
ezt cosinus hyperbolicusnak nevezzük s jelöljük Chy, azaz cosinus
hyperbolicus y.
Miután (2) páratlan, i minden tagban előfordul s igy

Harkay.

$$\sin(yi) = i\left(y + \frac{y^3}{3.!} + \frac{y^5}{5.!} + \frac{y^7}{7.!} + \dots\right)$$

tehát a sinus tiszta képzetes változó mellett szintén tiszta képzetes értékkel bír és minden határon túl nő. Ez a zárjeles függvény az úgy nevezett sinus hyperbolicus y (Shy), úgyhogy

$$\cos(yi) = Chy$$
$$\sin(yi) = i\,Shy$$

Nyertük tehát a két hyperbolicus függvényt:

$$Chy = 1 + \frac{y^2}{2.!} + \frac{y^4}{4.!} + \frac{y^6}{6.!} + \dots\dots$$
$$Shy = y + \frac{y^3}{3.!} + \frac{y^5}{5.!} + \frac{y^7}{7.!} + \dots\dots$$

Lássuk ezeknek néhány tulajdonságát. A Chy páros, a Shy páratlan függvény, azaz

$$\left.\begin{aligned} Ch(-y) &= Chy \\ Sh(-y) &= -Shy \end{aligned}\right\} \text{I}$$

amaz nő 1-től $+\infty$-ig, ez pedig 0-tól ∞-ig. Továbbá látható, hogy

$$Chy + Shy = e^y \qquad (1)$$
$$Chy - Shy = e^{-y} \qquad (2.)$$

$$Chy = \frac{e^y + e^{-y}}{2}$$
$$Shy = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

(1)×(2)-ből $\qquad Ch^2y - Sh^2y = 1 \qquad$ II

amiből látható, hogy a Chy értéke mindig nagyobb mint a Shy, mert $Ch^2y = Sh^2y + 1$. A többi tulajdonság mind a trigonometriai formulákból adódnak, ha a változó yi. Pl.

$$\cos(y_2 i + y_2 i) = \cos(y_1 i)\cos(y_2 i) - \sin(y_1 i)\sin(y_2 i)$$

vagyis $\quad Ch(y_1 + y_2) = Chy_1 \cdot Chy_2 + Shy_2 \cdot Shy_1 \qquad$ III.

épúgy $\quad \sin(y_2 i + y_2 i) = \sin(y_2 i)\cos(y_2 i) + \cos(y_2 i)\sin(y_2 i)$

azaz $\quad Sh(y_1 + y_2) = Sh y_1 \cdot Ch y_2 + Ch y_2 \cdot Sh y_2 \qquad$ IV

ha $y_2 = y_2$ $\quad Ch(2y) = Ch^2y + Sh^2y$

$Sh(2y) = 2\,Shy \cdot Chy$ ezt combinálva II-vel

$Ch(2y) + 1 = 2\,Ch^2y \qquad$ V.

$Ch(2y) - 1 = 2\,Sh^2y$

Ezek után most már képet nyerhetünk, milyen értéket vesz fel a sinus és cosinus, ha változnak a független változóval? Legyen tehát $\sin z = Z$. A z és Z ábrázolására két számsíkot veszünk fel, melyeknek megfelelő pont-

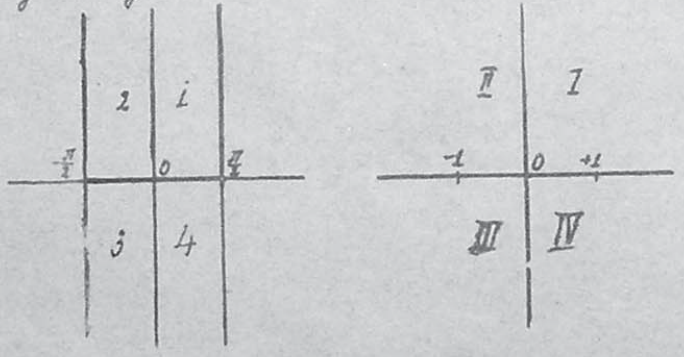
jai azok lesznek, melyek a fenntiegyenletnek eleget tesznek. Ha $z=x+yi$

$$\sin z = \sin(x+yi) = \sin x \cos yi + \cos x \sin yi = \sin x \operatorname{Ch} y + i \cos x \operatorname{Sh} y = Z = X + Yi$$

tehát a z és Z között az összefüggés a következő:

$$X = \sin x \operatorname{Ch} y \qquad (1)$$
$$Y = \cos x \operatorname{Sh} y$$

ennek alapján pedig könnyű lesz a z számsík pontjaihoz a Z számsík megfelelő pontjait felkeresni. Ki fogjuk mutatni, hogy a míg z bejárja az egész végtelen számsíkot, addig Z bejárja az egész számsíkot.



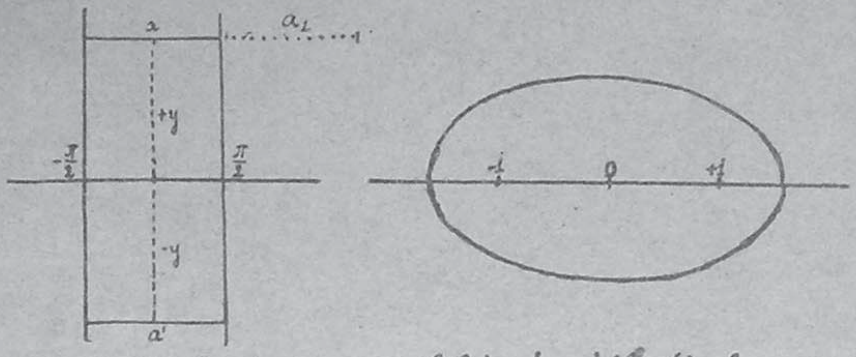
Azt a trigonometriából tudjuk, hogy míg x változik $-\frac{\pi}{2}$ és $+\frac{\pi}{2}$ között, addig Z változik -1-től $+1$-ig. Kérdés, milyen z-k mellett lesz még Z reális? Nyilvánvaló akkor, ha $Y=0$, s ez (1) szerint 0, ha $\operatorname{Sh} y = 0$ azaz $y=0$, tehát a reális tengelyen, a mint ezt az imént láttuk; de akkor is, ha $\cos x = 0$, vagyis ha $x = \pm\frac{\pi}{2}$ és pedig Z positiv reális, ha $x=\frac{\pi}{2}$, és $y=0 \ldots\ldots \infty$, negativ reális, ha $x=-\frac{\pi}{2}$, $y=0 \ldots\ldots \infty$. Vagyis ha z bejárja a $\frac{\pi}{2}$ és $-\frac{\pi}{2}$ pontokban emelt merőlegeseket - kezdve a reális tengelytől - akkor Z megfelelőleg bejárja a positiv reális tengelyt kezdve $+i$-től illetőleg a neg. reális tengelyt kezdve -1-től. Vagyis a míg z bejárja a sinus csík egész határvonalát, addig Z bejárja az egész reális tengelyt $-\infty$-től 0-on át $+\infty$-ig. Ha $x=0$, $y=-\infty \ldots\ldots +\infty$, akkor $X=0$, míg Y szintén $-\infty$ és $+\infty$ között változik, vagyis a z számsík tiszta képzetes tengelye. S most nyilvánvaló, hogy ha $0<x<\frac{\pi}{2}$ és $y \geq 0$, akkor $X>0$ és $Y>0$ ha $-\frac{\pi}{2}<x<0$, $y \geq 0$, akkor $X<0$, $Y>0$, azaz a sinus csík 1 részének megfelel a Z számsík I quadránsa, a 2 résznek a II quadráns, éppígy 3-nak III és 4-nek IV. Azaz a míg z a sinus csíkot bejárja, addig Z bejárja az egész számsíkot. Így változik Z a z-vel.

Lássuk most a sinus csíkban a reális tengellyel parallel egyenesnek mi felel meg a Z számsíkban. Tehát y állandó, x változik $-\frac{\pi}{2}$ és $\frac{\pi}{2}$ között. Eliminálva (1)-ből x-et olymódon, hogy mindkét egyen-

Let oldalait négyzetre emeljük és azt Ch^2y-el, ezt Sh^2y-el osztva és összeadva, kapjuk a következő egyenletet

$$\frac{X^2}{Ch^2y} + \frac{Y^2}{Sh^2y} = 1$$

Ez pedig nem egyéb mint egy ellipsis egyenlete, s így ha z állandó +y és -y mellett bejárja a sinus csíkban az x tengellyel párhuzamos egyenest, Z megfelelő értékei egy ellipsisen helyezkednek el; ennek fo-

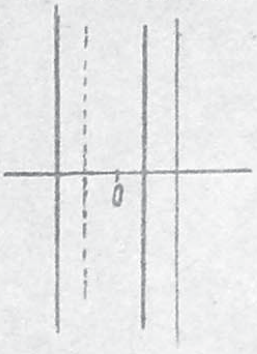


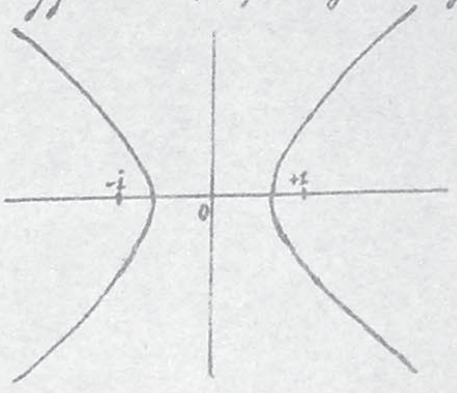
cus pontjait is azonnal kiszámíthatjuk, mert az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellipsis-nek focusa $\sqrt{a^2-b^2}$; tehát ezen ellipsis focusai $\sqrt{Ch^2y - Sh^2y} = \pm 1$ pontok. Ezen ellipsis alsó részét nemcsak a -y alatt párhuzamosan változó z-k adják, hanem az a'-hez $\frac{\pi}{2}$-hez vagy $-\frac{\pi}{2}$-re nézve szimmetrikusan fekvő a_1 vonaldarabon változó z-k is. Tehát mondhatjuk, hogy a tengellyel párhuzamos egyeneseknek a z számsíkban, +1 és -1 focusokkal bíró ellipsisek felelnek meg a Z számsíkban.

Lássuk, mi felel meg az y tengellyel párhuzamos egyenesnek a Z számsíkban. Itt tehát x állandó, y változik $-\infty$-től $+\infty$-ig. (1)-ből eliminálva y-t úgyhogy mindkét egyenletet négyzetre emeljük, s osztva annak oldalait $\sin^2 x$-el, ezért $\cos^2 x$-el s a kettőt összeadjuk, kapjuk a következő egyenletet:

$$\frac{X^2}{\sin^2 x} - \frac{Y^2}{\cos^2 x} = 1$$

ez pedig egy hyperbola egyenlete, és pedig ha z egy a $0 - \frac{\pi}{2}$ közt átmenő egyenesen változik kapjuk a hyperbolának az I és IV





quadránsokban fekvő ágát, ha pedig a z egy -x alatt, tehát o-ra nézve

egy az előbbihez szimmetrikus egyenesen fáltörik, akkor kapjuk a hyperbola másik ágát a II és III quadransokban. Mivel az $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ hyperbolának focusait a $\sqrt{a^2+x^2}$ kifejezés adja, azért a hyperbola focusai itt is $\sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x} = \pm 1$. Mondhatjuk tehát, hogy a reális tengelyre merőleges és 0-hoz szimmetrikusan fekvő egyeneseknek a sinuscsikban megfelel egy $+1$ és -1 focusokkal bíró hyperbola a Z számsikban.

Most még ki fogjuk mutatni, hogy az (1) relációkkal összekapcsolt két számsík egymásnak conformis leábrázolása, vagyis hogy a z számsík legkisebb részeiben is hasonló a Z számsíkhoz.

Egészáltalánosan ki fogjuk mutatni, hogy valahányszor felveszünk egy analytikai függvényt, s a független változót egyik, a függvényt magát egy másik számsíkon ábrázoljuk, akkor ezt a két síkot oly vonatkozásba hozzuk, hogy a két sík conformis leábrázolást nyer.

Legyen $f(z) = Z$ egy tetszőleges analyt. függvény s vegyük fel a z és Z számsíkot. Kimutatjuk, hogy mindazon helyek, a hol $f(z)$-nek közönséges helye van, és az első derivált különbözik 0-tól, olyanok, melyekhez Z megfelelő helyei conformisak. Legyen tehát α helyen

$$\left.\begin{aligned} f(\alpha) &= A \\ \text{és}\quad f'(\alpha) &\neq 0 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

kimutatjuk, hogy α és A környékei egymásnak conformis leábrázolásai. Mivel α az $f(z)$-re nézve közönséges hely, azért

$$f(z) = f(\alpha) + f'(\alpha)(z-\alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(z-\alpha)^2 + \cdots\cdots$$

vagyis (1) alapján $Z - A = f'(\alpha)(z-\alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(z-\alpha)^2 + \cdots\cdots$

ha most egymás z_1 értéket veszünk az előbbi sorbafejtés conv. körén belül, akkor erre nézve $Z_1 - A = f'(\alpha)(z_1-\alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(z_1-\alpha)^2 + \cdots\cdots$

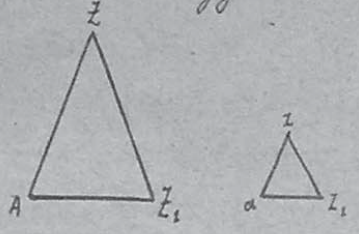
és így $$\frac{Z-A}{Z_1-A} = \frac{z-\alpha}{z_1-\alpha} \cdot \frac{f'(\alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(z-\alpha) + \cdots\cdots}{f'(\alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(z_1-\alpha) + \cdots\cdots}$$

Ha most áttérünk α-hoz végtelen közel fekvő z értékekre, akkor a megfelelő Z is végtelen közel fog feküdni A-hoz, azaz $z-\alpha$ és $Z-A$ egyszersmind végtelen kicsinnyé válnak egyszerre, s így egyszintén $z_1-\alpha$ és Z_1-A is, s így egyszersmind az jobboldali második tört limese $\frac{f'(\alpha)}{f'(\alpha)} = 1$, vagy hogy

$$\lim \frac{Z-A}{Z_1-A} = \lim \frac{z-\alpha}{z_1-\alpha}$$

a mi azt mondja, hogy ezen végtelen kis mennyiségek viszonyai egyenlők, azaz $\left|\frac{Z-A}{Z_1-A}\right| = \left|\frac{z-\alpha}{z_1-\alpha}\right|$ és $\angle \frac{Z-A}{Z_1-A} \equiv \angle \frac{z-\alpha}{z_1-\alpha}$

tehát a z és Z számsik megfelelő vectorai arányosak és szögeik acquivalensek, vagyis a megfelelő idomok legkisebb részecskéikben hasonlók, tehát a két számsik ezen α illetőleg A hely körül egymásnak conformis leábrázolása.



Hogy az (1) alatti feltétel tényleg szükséges a conformitáshoz, könnyen kimutatható. Mert ha $f'(\alpha)=0$ és az első el nem tünő derivált a κ-dik, akkor

$$Z - A = \frac{f^{(\kappa)}(\alpha)}{\kappa!}(z-\alpha)^\kappa + \frac{f^{(\kappa+1)}(\alpha)}{(\kappa+1)!}(z-\alpha)^{\kappa+1} + \dots\dots$$
$$Z_1 - A = \frac{f^{(\kappa)}(\alpha)}{\kappa!}(z_1-\alpha)^\kappa + \frac{f^{\kappa+1}(\alpha)}{(\kappa+1)!}(z-\alpha)^{\kappa+1} + \dots\dots$$

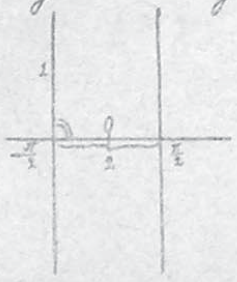
tehát $\lim \frac{Z-A}{Z_1-A} = \lim \frac{(z-\alpha)^\kappa}{(z_1-\alpha)^\kappa} = \lim \left(\frac{z-\alpha}{z_1-\alpha}\right)^\kappa$

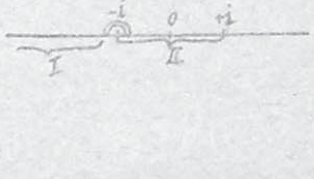
amiből látható, hogy a megfelelő vectorok szögei nem egyenlők, mert ha $\frac{z-\alpha}{z_1-\alpha}$ szöge φ, akkor $\frac{Z-A}{Z_1-A}$ szöge annyi mint $\left(\frac{z-\alpha}{z_1-\alpha}\right)^\kappa$ szöge vagyis annyi mint $\kappa\cdot\varphi$, tehát a megfelelő idomok nem hasonlók, s így az ilyen α A körül a két sik nem is nyer conformis leábrázolást. Tehát minden analyt. függvénynél a z és Z ábrázoló sikja egymásnak conformis leábrázolása mindazon helyek körül, a hol az első derivált különbözik a 0-tól, de nem conformis azon helyeknél, a hol az első derivált eltünik.

Mindezeket igazolva találjuk a sinusnál, mely sintén analytikai függvény, ha $f(z) = \sin z$

$f'(z) = \cos z$

s látható, hogy ez a derivált csak a $\pm\frac{\pi}{2}$ helyeken tünik el, $\cos(\pm\frac{\pi}{2}) = 0$, és így az számsik $+\frac{\pi}{2}$ és $-\frac{\pi}{2}$, valamint a Z számsik $\sin\frac{\pi}{2} = +1$ és $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$ helyeinél megszünnek a conformitás. Miután $\sin z$ második deriváltja $-\sin z$ a $\pm\frac{\pi}{2}$ helyeken nem tünik el, tehát itt $\kappa = 2$, azért itt ezen kivételes pontok körüli vectorok szögeinek a Z számsikban kétszer akkora szögek fe-





lelnek meg. Így pl. 1 és 2. vektorok szöge $\frac{\pi}{2}$ és a megfelelelő vektorok szöge(I II)=π.
Tehát az általános tétel teljesen igazolva van a sinusnál.

Mivelán $\sin z' = \cos z = Z$, ha $\frac{z'+z}{2} = \frac{\pi}{4}$, azért megkapjuk a z helyen a Z értékét, ha áttérünk a z' helyre s itt vesszük a sinus értékét, a mint azt már láttuk.

Milyen értéket nyer a függvény, ha z a sinusvonal hosszán a végtelenbe megy? Látni fogjuk, hogy a függvény minden határon túl nőni fog. Mert ha $\sin z = Z$

$$X = \sin x \operatorname{Ch} y$$
$$Y = \cos x \operatorname{Sh} y$$

s ha most x-nek bizonyos állandó értéket adunk, míg y nő a $-\infty$-től $+\infty$-ig akkor Ch y és Sh y is minden határon felül nő, tehát maga Z is minden határon túl nő, azaz $\lim \sin(x+yi) = \infty$, ha $\lim y = \infty$ s pedig akár pozitiv akár negativ számok során át megy y a végtelenbe.

Tangens és cotangens.

Mint a trigonometriában, úgy itt is a complex számkörben fogjuk értelmezni a tangens és cotangens függvényt és pedig

$$\operatorname{tang} z = \frac{\sin z}{\cos z}$$
$$\operatorname{cotg} z = \frac{\cos z}{\sin z}$$

Ezen definitióból kiolvashatók e két függvény tulajdonságai. A tangens két transcendens függvény hányadosa, o pontjai tehát a sinus o pontjai polusai a cosinus o pontjai, vagyis

$$\operatorname{tg} z = 0, \text{ ha } z = k\pi, \text{ s ekkor } \operatorname{cotg} z = \infty$$
$$\operatorname{tg} z = \infty, \text{ ha } z = (2k+1)\tfrac{\pi}{2}, \text{ " } \operatorname{cotg} z = 0$$

Azonkivül mindkét függvény periodusos, de periodusuk π, mert

$$\operatorname{tg}(z+\pi) = \frac{\sin(z+\pi)}{\cos(z+\pi)} = \frac{-\sin z}{-\cos z} = \operatorname{tg} z.$$

tehát a tg. periodusa π, s így elég vizsgálni olyan csikon belül, melynek szélessége π, melynek határvonalai a $+\frac{\pi}{2}$ és $-\frac{\pi}{2}$-ben az x tengelyre emelt merőlegesek, melyek egyikét itt is kizárjuk a területből. Lássuk, milyen értéket vesz fel a tangens, ha z a képzetes tengelyen $+\infty$ vagy $-\infty$-be tart? Ennek megvizsgálására azt az összefüggést használjuk fel, mely a sinus, cosinus és az exponentiális függvény között fennáll.

Legyen ugyanis $z = x + yi$.

akkor $tg\, z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{1}{i}\frac{e^{zi} - e^{-zi}}{e^{zi} + e^{-zi}}$ s felsőt, alsót e^{zi}-vel szorozva

$= \frac{1}{i}\frac{e^{2zi} - 1}{e^{2zi} + 1} = \frac{1}{i}\frac{e^{-2y+2xi} - 1}{e^{-2y+2xi} + 1}$ 82,

s miután az exponentiális függvény abs. értéke csak a reális értéktől, tehát itt 2y-tól függ, azért, mivel $x = 0$, $\lim_{y=+\infty} tg\, z = \frac{1}{i} \cdot \frac{-1}{1} = -\frac{1}{i} = i$ és

$\lim_{y=-\infty} tg\, z = \frac{1}{i} = -i$

mert $\frac{1}{i}\frac{e^{-2y+2xi} - 1}{e^{-2y+2xi} + 1} = \frac{1}{i}\frac{1 - \frac{1}{e^{-2y+2xi}}}{1 + \frac{1}{e^{-2y+2xi}}}$ és ennek limese

$y = -\infty$ mellett $\frac{1}{i}$, tehát $\lim tg(x+yi) = i$, ha $\lim y = +\infty$

$\lim tg(x+yi) = -i$, ha $\lim y = -\infty$ a co-

tangensnél fordítva áll: $\lim \operatorname{cotg}(x+yi) = -i$, ha $\lim y = +\infty$

$\lim \operatorname{cotg}(x+yi) = i$, ha $\lim y = -\infty$

K.

Logarithmus.

Láttuk, hogy az $e^z = Z$ exponentiális függvény inverz függvénye $z = \log Z$, a melynek tehát az a tulajdonsága, hogy $e^{\log z} = z$.

Láttuk továbbá, a logarithmusnak azt a fő jellemző tulajdonságát, hogy $\log z_1 + \log z_2 = \log z_1 z_2$. Ezt a functionalis egyenletet fogjuk felhasználni arra, hogy egy olyan analyt. függvényt keressünk, mely az exponentiális függvénynek inverz függvénye, a mely tehát eleget tesz ezen functionális egyenletnek:

$$F(z_1) + F(z_2) = F(z_1 z_2) \qquad I.$$

Azonnal látható, hogy a 0 pont erre a függvényre nézve singuláris pont, azaz nem bontható e körül sorba, mert ha o körönséges hely volna, I alapján $F(0) + F(z_2) = F(0)$ azaz $F(z_2) = 0$ volna, ez pedig nem volna z-nek függvénye. Tehát fel kell tennünk, hogy a számsík 0 pontja singularis hely, mely körül a függvény nem bontható sorba. Ezért tehát z positiv egész hatványai szerint haladó sorbabontás nem léteznik, hanem más sorbabontási centrumot kell választani. Ilyen centrum gyanánt vesszük (+1)-et, ez körönséges hely mert ha $z_1 = 1$ $F(1) + F(z_2) = F(z_2)$ tehát $F(1) = 0$, azaz függv

vény értéke $a+1$ pontban 0.

Ha most $z=1+h$ és rendezzük a sort h pozitiv egész hatványai szerint, ilyen sort kapunk: $F(1+h)=a_0+a_1h+a_2h^2+\cdots\cdots+a_nh^n+\cdots$ (1)

ez az analyt. függvény ismeretes lesz, ha ismerjük a coefficienseket, azt tudjuk, hogy $a_0=0$, mert ha $z=1$, azaz $h=0$, $F(1)=a_0=0$. Ez a sor convergens az egységsugarú $+1$ centrumu körön belül, mert különben bonne volna a convergentia területen a 0 singularis pont. Tehát a sor convergens, ha $|h|<\varrho$, a hol $\varrho \leqq +1$.

Ezen függvénynek eleget kell tenni, ha az I functionalis egyenletnek.

Ha
$$z_1 = 1+h_1$$
$$z_2 = 1+\frac{h_2}{1+h_1}$$
akkor
$$z_1z_2 = 1+h_1+h_2$$
tehát
$$F(1+h_1)+F\left(1+\frac{h_2}{1+h_1}\right) = F(1+h_1+h_2) \qquad (2)$$

az (1) sornak tehát olyannak kell lenni, hogy, ha $h=h_1$, majd $h=\frac{h_2}{1+h_1}$ helyettesitünk, a két sor összege egyenlő legyen azzal, melyet nyerünk, ha $h=h_1+h_2$. Hogy a (2) három függvényre az (1) sorbabontást alkalmazhassuk, h_1 és h_2-öt úgy kell megszoritani, hogy $|h_1+h_2|<\varrho$ legyen, ezt elérjük, ha $|h_1|<\frac{\varrho}{2}$ és $|h_2|<\frac{\varrho}{2}$, mert akkor a (2) alatti függvény elsőjét (1) szerint sorbabonthatjuk, mivel $|h_1|<\frac{\varrho}{2}$, úgyszintén a (2) harmadik alatti függvényt, mert $|h_1+h_2|<\frac{\varrho}{2}$, de a (2) alatti másodikfüggvényt is, mert ha $|h_2|<\frac{\varrho}{2}$, akkor $|1+h_1|>1-\frac{\varrho}{2}$, s mivel $\varrho \leqq 1$, azért $\frac{\varrho}{2} \leqq \frac{1}{2}$, vagyhogy $1-\frac{\varrho}{2} \geqq 1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, tehát $|1+h_1|>\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{1+h_1} < 2$$

s mivel még $|h_2|<\frac{\varrho}{2}$, tehát $\left|\frac{h_2}{1+h_1}\right|<\varrho$

Ilyen h_1 és h_2 mellett a (2) alatti mindhárom függvényt sorbabonthatjuk. Lesz tehát a baloldal

(3.) $F(1+h_1)+F\left(1+\frac{h_2}{1+h_1}\right)=a_1h_1+a_2h_1^2+\cdots+a_nh_1^n+\cdots+a_1h_2(1+h_1)^{-1}+\cdots+a_nh_2^n(1+h_1)^{-n}+\cdots$

és a jobboldal $F(1+h_1+h_2)=a_1(h_1+h_2)+a_2(h_1+h_2)^2+\cdots+a_n(h_1+h_2)^n+\cdots$ (4)

s ez a két sorbabontás ugyanazt a függvényt értelmezi, ha $|h_1|$ és $|h_2|<\frac{\varrho}{2}$, de akkor megfelelő coefficienseik egyenlők kell legyenek. A (3) sor negat. kitevőjü hatványait a binomicális tétel szerint sorbabonthatjuk, s ezek feltétlenül convergensek lesznek; tehát

$$(1+h_1)^{-x} = 1-\binom{x}{1}h_1+\binom{x+1}{2}h_1^2+\cdots+(-1)^n\binom{x+n-1}{n}h_1^n+\cdots \qquad (4)$$

A functionális egyenlet már mostan számtalan sok egyenlet teljesülését követeli (a megfelelő tagok coefficienseinek egyenlőségét). De mi csak egyggyel fogjuk meghatározni az (1) sor coefficienseit, s ki fogjuk mutatni, hogy az így meghatározott coefficiensek eleget tesznek a többi egyenleteknek is. Vegyük pl. a $h_1^{n-1}h_2$ tagot. Ennek dimensiója n. A(3) sorban az a tag, melyben ez a kifejezés előfordul, a második sor első tagja:

$$a_1 h_2(1+h_1)^{-1} = a_1 h_2(1-h_1+h_1^2+\cdots+(-1)^{n-1}h_1^{n-1}+\cdots)$$

ezen kifejezés coefficiense ebben a tagban $(-1)^{n-1}\cdot a_1$, a(4) sorban a $h_1^{n-1}h_2$ kifejezés az n-edik tagban fordul elő:

$$a_n(h_1+h_2)^n = a_n\left(h_1^n+n h_1^{n-1}h_2+\cdots\right)$$

ezen kifejezés coefficiense ebben a tagban $n\cdot a_n$. A functionalis egyenletalapján ez a két coefficiens egyenlő, azaz $n a_n = (-1)^{n-1}\cdot a_1$ ebből

$$a_n = \frac{(-1)^{n-1}\cdot a_1}{n}$$

ez a képlet adja az (1) sor összes coefficienseit kifejezve az első coefficiensssel, a_1-el. Ki kell mutatni, hogy az ezen képlettel meghatározott coefficiensek eleget tesznek a többi egyenleteknek is. Tehát ki kell mutatni, hogy a $h_1^p h_2^q$ coefficiense mindkét sorban ugyanaz. A (3)-ban ez a kifejezés előfordul a következő tagban:

$$a_q h_2^q(1+h_1)^{-q} = a_q h_2^q\left(1-\binom{q}{1}h_1+\binom{q+1}{2}h_1^2+\cdots+(-1)^p\binom{p+q-1}{p}h_1^p+\cdots\right)$$

tehát a coefficiens $a_q(-1)^p\binom{p+q-1}{p}$ s a formula szerint betéve a_q értékét

$$= (-1)^{p+q-1}\frac{a_1}{q}\binom{p+q-1}{p} = (-1)^{p+q-1}\frac{a_1}{q}\cdot\frac{(p+q-1)(p+q-2)\cdots q}{1\cdot\cdots\cdot p}$$

$$= (-1)^{p+q-1}\frac{a_1}{p}\binom{p+q-1}{p-1}$$

tehát az első (3) sorban a coefficiens $(-1)^{p+q-1}\frac{a_1}{p}\binom{p+q-1}{p-1}$

A (4) sorban a $h_1^p h_2^q$ kifejezés előfordul a következő tagban:

$$a_{p+q}(h_1+h_2)^{p+q} = a_{p+q}\left(h_1^{p+q}+\cdots+\binom{p+q}{q}h_1^p\cdot h_2^q+\cdots\right)$$

tehát a coefficiens $a_{p+q}\binom{p+q}{q} = a_{p+q}\binom{p+q}{p}$, mert hisz $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$ s betéve a_{p+q} értékét $= (-1)^{p+q-1}\frac{a_1}{p+q}\cdot\frac{(p+q)\cdots(q+1)}{1\cdot\cdots\cdot p} = (-1)^{p+q-1}\frac{a_1}{p}\binom{p+q-1}{p-1}$

tehát a coefficiens itt is $(-1)^{p+q-1}\frac{a_1}{p}\binom{p+q-1}{p-1}$ és így a formula helyes.

Ennek alapján a keresett függvény

$$F(1+h) = a_1\left(h_1-\frac{h_1^2}{2}+\frac{h_1^3}{3}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{h_1^n}{n}+\cdots\right) \qquad (5.)$$

ez a sor convergens, ha $|h|<1$, mert $|h|=1$ mellett a sor-tagjai végig-

sek. De mindegyik tag mellett ott szerepel tényező gyanánt a_1, a mely le-
het tetszésszerinti. Úgy kell tehát meghatározni a_1-et, hogy a természetes lo-
garithmust kapjuk. A természetes logarithmus definitiója

$$e^{\log(1+h)} = 1+h$$

ha tehát az exponentialis függvény sorjában $z = \log(1+h)$, akkor

$$e^{\log(1+h)} = 1 + \log(1+h) + \frac{[\log(1+h)]^2}{2!} + \cdots\cdots = 1+h$$

ha ezen sor mindegyik tagját (5.) szerint sorbabontjuk, az így nyert
sorokat h hatványai szerint rendezzük, akkor, lévén az egész sor
annyi mint $1+h$, a megfelelő tagok coefficienseci egyenlők és így $a_1 = 1$
tehát $\log(1+h) = h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} - \frac{h^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{h^n}{n} + \cdots\cdots$ s ez a
sor convergens, ha $|h| < 1$.

De könnyü megkapni a sorbabontást a számoknak bármely helye
körül, kivéve a 0-t. Bontsuk sorba pl. α körül

$$z = \alpha + h = \alpha\left(1 + \frac{h}{\alpha}\right) \qquad \text{akkor}$$

$$\log z = \log\alpha + \log\left(1+\frac{h}{\alpha}\right) = \log\alpha + \frac{h}{\alpha} - \frac{h^2}{2\alpha^2} + \frac{h^3}{3\alpha^3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{h^n}{n\alpha^n} + \cdots$$

s ez convergens, ha $\left|\frac{h}{\alpha}\right| < 1$, azaz $|h| < |\alpha|$, tehát egy α centrumu körön
belül, mely átmegy a 0 ponton. Ha most $h = z - \alpha$, akkor

$$\log z = \log\alpha + \frac{z-\alpha}{\alpha} - \frac{(z-\alpha)^2}{2\alpha^2} + \cdots\cdots + (-1)^{n-1}\frac{(z-\alpha)^n}{n\alpha^n} + \cdots\cdots$$

ez a logarithmus sorbabontása, a mely érvényes a számoknak bár-
mely helye körül s miután minden $\log\alpha$ - nak végtelen sok ér-
téke van, azért $\log z$ is végtelen sok értékü.

Ez utóbbi sorbabontásból kiolvasható egyszerüen mind a logarithmus
derivaltja $(\log z)' = \frac{1}{z}$. - tehát a log. derivaltja ratio-
nális függvény. Ha sikerül a log. derivaltját kimutatni függetle-
nül annak sorbabontásától, akkor ezzel a tulajdonságával szintén
megkaphatjuk a log. sorbabontását. A derivaltat egyszerüen meg
lehet kapni az invers függvény derivalási szabálya szerint. Ha
ugyanis $f(z) = z$ és ennek invers függvénye $z = F(z)$, akkor
$f(F(z)) = z$, ha tehát f a direct, F az invers operatio, akkor ezek egy-
másután alkalmazva megsemmisitik egymást. Ez az utóbbi
függvény összetett függvény s ennek derivaltja

$$z' = \left[f(F(z))\right]' = f'(F(z)) \cdot F'(z) = 1$$

tehát $F'(z) = \frac{1}{f'(F(z))}$

Tehát az invers függvény deriváltja annyi mint az eredeti függvény deriváltjának reciprokja, betéve a független változó helyébe az invers függvényt. A mi esetünkben az eredeti függvény

$$f(z) = e^z = z$$

s az invers $F(z) = \log z$ és így $F'(z) = (\log z)' = \frac{1}{e^{\log z}} = \frac{1}{z}$

Tehát direct nyertük a log. deriváltját. Miután a $\log z$ nem egyéb mint deriváltjának $\frac{1}{z}$-nek integrálja, egyszerüen ez utóbbit kell sorbabontani s az így nyert sort integrálni. Ha tehát $z = 1+h$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1+h} = 1 - h + h^2 - h^3 + \dots \quad \text{sort integrálva}$$

$$\log(1+h) = C + h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} - \dots \quad \text{de miután } h=0 \text{ mellett}$$

$\log 1 = 0$, azért $C = 0$, azaz a const. 0, s így ugyanezt a sort nyertük, mint előbb.

A logarithmus sorbabontása segélyével kiszámíthatjuk bármely számnak logarithmusát. E végett alakitsuk át az eredeti sort; ez volt

$$\log(1+h) = h - \frac{h^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{h^n}{n} + \dots$$

s ez convergens, ha $|h| < 1$. Mi itt a reális számkörre fogunk szorítkozni. Ha $h = -h$,

$$\log(1-h) = -h - \frac{h^2}{2} - \dots - \frac{h^n}{n} - \dots$$

s e kettő különbsége

$$\log\frac{(1+h)}{(1-h)} = 2\left(h + \frac{h^3}{3} + \frac{h^5}{5} + \dots\right) = \varphi(h)$$

ez a sorulak már practicus számitásra alkalmas. Mivel szorzat logarithmusa annyi mint a tényezők logarithmusainak összege, elegendő az összes primszámoknak logarithmusát meghatározni. Ha

$h = \frac{1}{3}$, $\frac{1+h}{1-h} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}} = 2$, és így $\log 2 = \varphi\left(\frac{1}{3}\right)$

$h = \frac{1}{2}$, $\frac{1+h}{1-h} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = 3$ és így $\log 3 = \varphi\left(\frac{1}{2}\right)$

de ez a két sorbabontás nem eléggé gyorsan convergál, azért más sort kapunk, ha $h = \frac{1}{5}$, $\frac{1+h}{1-h} = \frac{3}{2}$ és $\log\frac{3}{2} = \log 3 - \log 2 = \varphi\left(\frac{1}{5}\right)$ és ha

$h = \frac{1}{7}$, $\frac{1+h}{1-h} = \frac{8}{6} = \frac{2^2}{3}$, $\log\frac{2^2}{3} = 2\log 2 - \log 3 = \varphi\left(\frac{1}{7}\right)$

s a kettőt összeadva, kapjuk $\log 2 = \varphi\left(\frac{1}{5}\right) + \varphi\left(\frac{1}{7}\right)$

a felsőt 2-vel szorozva és összeadva $\log 3 = 2\varphi\left(\frac{1}{5}\right) + \varphi\left(\frac{1}{7}\right)$

ezek már jobban convergáló sorok. A következő primszámok 5 és 7. ezek számára igen jól convergáló sorokat kapunk, ha $h = \frac{1}{19}$, $\frac{1+h}{1-h} = \frac{20}{18} = \frac{10}{9} = \frac{2\cdot 5}{3^2}$ ekkor ugyanis $\log 2 + \log 5 - 2\log 3 = \varphi\left(\frac{1}{19}\right)$, tehát ismerve $\log 2$ és $\log 3$

$$\log 5 = \varphi\left(\tfrac{1}{19}\right) + 2\log 3 - \log 2$$

és ha $h = \frac{1}{99}$, $\frac{1+h}{1-h} = \frac{100}{98} = \frac{50}{49} = \frac{25^2}{7^2}$, akkor $\log 2 + 2\log 5 - 2\log 7 = \varphi\left(\frac{1}{99}\right)$ tehát

$$\log 7 = \tfrac{1}{2}\left[\log 2 + 2\log 5 - \varphi\left(\tfrac{1}{99}\right)\right]$$

ezeket ismerve felállíthatjuk az általános formulát a többi prímszámok logarithmusainak kiszámitására. Ha $h = \frac{1}{2n-1}$, akkor $\frac{1+h}{1-h} = \frac{2n}{2n-2} = \frac{n}{n-1}$ és

$$\log n - \log(n-1) = \varphi\left(\tfrac{1}{2n-1}\right)$$

már most ezen képlet alapján a prímszámok logarithmusait fokonként számitjuk ki, azaz ha n az illető prímszám, akkor feltételezzük, hogy már ismeretes az előző prímszámoknak, tehát az $(n-1)$ összetett számnak is a logarithmusa. Igy pl. ismerve már 2, 3, 5 és 7 logarithmusát, ha $n = 11$, akkor

$$\log 11 - \log 10 = \varphi\left(\tfrac{1}{21}\right), \text{ azaz}$$

$$\log 11 = \varphi\left(\tfrac{1}{21}\right) + \log 10 = \varphi\left(\tfrac{1}{21}\right) + \log 2 + \log 5.$$

ez igy megy tovább. Az igy nyert log. mind természetes logarithmusok. De könnyü ezekből megkapni a megfelelő 10 alapú vagyis közönséges logarithmusokat, a kettő közötti összefüggés alapján. Ugyanis

$$e^{\log 10} = 10$$

$$e^{\log 10 \cdot \log_{10} a} = 10^{\log_{10} a} = a, \quad \text{tehát}$$

$$\log a = \log 10 \cdot \log_{10} a \quad \text{és igy}$$

$$\log_{10} a = \frac{1}{\log 10} \cdot \log a$$

a hol $\frac{1}{\log 10}$ a közönséges log. rendszer modulusa, s ez ismeretes, mert kiszámitottuk $\log 10 = \log 2 + \log 5$.

Bármely számnak közönséges logarithmusát tehát megkapjuk, ha természetes logarithmusát megszorozzuk a közönséges log. rendszer modulusával (0·4342945 ···)

Ezek a logarithmusra vonatkozó legfontosabb formulák.

Most térjünk át arra az érdekes kapcsolatra, mely a log. és a harmonicus sor közt fenáll. E végett alkossuk meg a következő sort:

$$(1 - \log 2) + \left(\tfrac{1}{2} - \log \tfrac{3}{2}\right) + \left(\tfrac{1}{3} - \log \tfrac{4}{3}\right) + \cdots + \left(\tfrac{1}{n} - \log \tfrac{n+1}{n}\right) + \cdots \quad (I)$$

erről a sorról ki fogjuk mutatni, hogy convergens és tagjai mind positivek. Vegyük meg yanis az általános tagban szereplő

$$\log \frac{n+1}{n} = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{n^3} - \cdots$$

tehát az általános tag $\frac{1}{n} - \log\frac{n+1}{n} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{n^3} + \cdots -$

ez egy convergens sor, melynek tagjai fogynak, tehát értéke positiv, vagyis az I sor általános tagja, tehát minden tagja positiv. Most is kell mutatni, hogy I convergens. Tudjuk, ha 2 sor általános tagjai egyenlő rangúak, akkor a két sor egyszerre convergens. Hasonlítsuk össze az I sor általános tagját t. i. (1)-et a következő sor általános tagjával:

(2) $\quad 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots\cdots$ a mely sorról tudjuk, hogy convergens. Tehát

$$\frac{\frac{1}{n}-\log\frac{n+1}{n}}{\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3n}+\cdots\cdots$$

ez a sor convergens és értéke fekszik $\frac{1}{2}$ és $\frac{1}{2}-\frac{1}{3n}$ közt, ha n-nek legkisebb értékétvesszük $n=1$, akkor kapjuk a legszélső határokat $\frac{1}{2}$ és $\frac{1}{6}$, tehát ezen határnyados lim. fekszik $\frac{1}{2}$ és $\frac{1}{6}$ között, úgyhogy az I és (2) sor általános tagjai egyenlő rangú kicsinyek, és mivel a (2) sor convergens, azért egy is convergens. Tehát I convergens és tagjai positivek. A sornak tehát van határozott értéke, legyen ez C. Tudjuk, hogy a sor értéke annyi mint az n első tag összegének limese. Meg kell tehát alkotni az I sor első n tagjának összegét

$$\left.\begin{array}{l} 1-\log 2 \\ \frac{1}{2}-\log\frac{3}{2} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \frac{1}{n-1}-\log\frac{n}{n-1} \end{array}\right\}\ \text{összeadva.}$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n-1}-\log n$$

mert $\log 2+\cdots+\log\frac{n}{n-1}=\log 2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdots\cdots\frac{n}{n-1}=\log n$ ezen $n-1$ első tag összegének limese $\lim\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\log n\right)=C$ ha ehhez adjuk még $\lim\frac{1}{n}=0$, akkor $\lim\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right)=C$ ez az egyenlet világot vet a harmonicus sorra, eddig tudtuk, hogy divergens most látjuk, hogy értéke és $\log n$ különbsége mindjobban közeledik egy constanshoz, C-hez, melyet Euler féle constansnak nevezünk, s mely nem egyéb, mint I sor értéke.

Egy másik összefüggést kapunk azon tétel alapján, hogy a convergens sorban mindig lehet olyan helyet kijelölni, melytől kezde akárhány tag összege kisebb, mint egy tetszésszerinti kis ε. Ha pl az I sorban az n-dik tagtól summázunk,

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{n} - \log\frac{n+1}{n} \\ \frac{1}{n+1} - \log\frac{n+2}{n+1} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \frac{1}{n+m} - \log\frac{n+m+1}{n+m} \end{array}\right\}$$

ez az összeg pos. s ha n elég nagy és m tetszésszerinti, akkor kisebb mint ε, azaz $0 < \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots\cdots + \frac{1}{n+m} - \log\frac{n+m+1}{n} < \varepsilon$

Most tegyük fel, hogy az alsókban az összes, κ számjeggyel leírható számok állanak, tehát $n = 10^{\kappa-1}$ és $n+m = 10^{\kappa}-1$, akkor ezen törtek összegét szokás szerint C_κ-val jelölve, lesz

$$C_\kappa - \log\frac{10^\kappa}{10^{\kappa-1}} = C_\kappa - \log 10 \qquad \text{és}$$

$$0 < C_\kappa - \log 10 < \varepsilon$$

tehát $\lim_{\kappa} C_\kappa = \log 10$

ha tehát a harmonicus sorban összefoglaljuk azon tagokat, melyek nevezői κ számjegyűek, akkor ezen összegnek limese κ-ra nézve, $\log 10$.

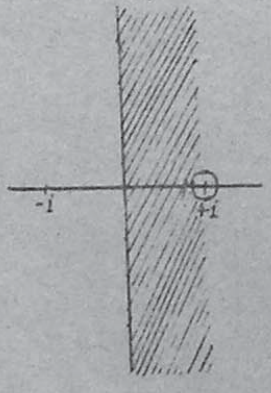
Ez az összefügges a logarithmus mat. és a harmonicus sor között. Még egy sorbabontási alak létezik a log. számára, mely azt igen nagy területen állítja elő, de csak theoreticus értéke van. Láttuk ugyanis, hogy

$$\log\frac{1+h}{1-h} = 2\left(h + \frac{h^3}{3} + \frac{h^5}{5} + \cdots\cdots\right)$$

s ez convergens, ha $|h| < 1$. Ha most $\frac{1+h}{1-h} = Z$, akkor ebből $h = \frac{Z-1}{Z+1}$, tehát a

$$\log Z = 2\left(\frac{Z-1}{Z+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{Z-1}{Z+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{Z-1}{Z+1}\right) + \cdots\cdots\right)$$

sor előállítja a függvényt oly területen, melyre nézve $|h| = \left|\frac{Z-1}{Z+1}\right| < 1$ azaz $|Z-1| < |Z+1|$, tehát oly pontokra nézve, melyeknek távolsága a (-1)-től nagyobb mint a (+1)-től, tehát a képzetes tengely jobboldalán.



fekvő félsíkon. De practicus haszna nincs ezen sorbabontásnak, mert csak akkor convergál erősen ha Z igen keveset különbözik 1-től, tehát csak az 1 pont körül használható.

Mutassuk ki mostan, hogy a logarithmus többértékűssége daczára is monogén függvény.

Ugyanis ha $e^z = Z$

$$z = \log Z$$

ha most z és Z-t külön síkban ábrázoljuk akkor, ha $z = x + yi$ és

$$z = R(\cos\Phi + i\sin\Phi), \quad \text{lesz}$$

$$e^{x+yi} = e^x(\cos y + i\sin y) = R(\cos\Phi + i\sin\Phi)$$

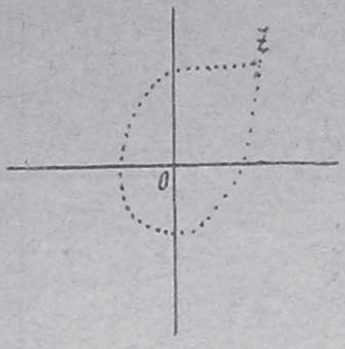
tehát $e^x = R$ $\quad y = \Phi + 2k\pi$

és ebből $\quad x = \log R$

$\quad y = \Phi + 2k\pi$

vagyis $\quad \log z = \log R + (\Phi + 2k\pi)i$ $\quad$ I.

ha $-\pi < \Phi \leq \pi$ a logarithmus főszöge, akkor $\mathrm{Log}\, z = \log R + \Phi i$ a log. főértéke. Ha most z-t váltaztatjuk és z megfelelő értékeit a folytonosság szerint sorakoztatjuk egymáshoz, akkor alkalmas ritón vive a z-t, a z felveszen minden értéket. Ha vgyanis z egyszer körülmegy o körül, akkor a megfelelő Log z már nem eredeti értékével, hanem $2\pi i$-vel növekedve tér vissza, azaz $(\mathrm{Log}\, R + \Phi i)$-ből lett $\mathrm{Log}\, R + (\Phi + 2\pi)i$, s ha k-szor járja körül z a o-t, akkor a log. megnövekedik $2k\pi i$-vel, azaz $\mathrm{Log}\, R + (\Phi + 2k\pi)i$ a miből látható, hogy ha z mindig csak a o körüli ritat teszi meg, log z akörben minden értéket felveszen, tehát a logarithmus monogén függvény.



A log. néhány fontosabb esete I szerint

$$\log 1 = 2k\pi i$$

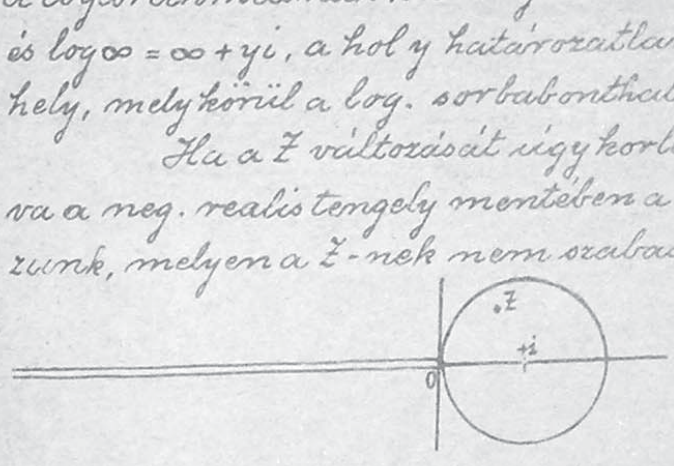
$$\log(-1) = (\pi + 2k\pi)i = (2k+1)\pi i$$

$$\log i = \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)i$$

$$\log(-i) = \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)i$$

a logarithmusnak két singuláris helye van, o és ∞, mert $\log o = -\infty + yi$ és $\log\infty = \infty + yi$, a hol y határozatlan, minden más hely közönséges hely, mely körül a log. sorbafejthető.

Ha a z változását úgy korlátozzuk, hogy a o pontból kiindulva a neg. realis tengely mentében a végtelenbe egy metszést alkalmazunk, melyen a z-nek nem szabad átlépni, és megállapodunk abban, hogy ezen metszés felső határvonalába a z még bemehet, de az alsóba nem, akkor látható, hogy-



ha z a $(+1)$-ből, hol $\operatorname{Log} z = 0$, kiindul, a felső mezőn a szög csak $(+\pi)$-ig növekedig, esetleg $+\pi$ is felvehető, míg az alsó mezőn a szög csak $(-\pi)$-ig növekhet, és így ezen változások közben a $\operatorname{Log} z$ csak a főértéket veheti fel, azaz ha z-ből kiindul s bármilyen úton bejárja a metszett síkot, ugyanazzal a szöggel tér vissza, s mivel ez a szög $+\pi$ és $-\pi$ között fekszik, csak egy értéket, t.i. a főértéket veszi fel $\operatorname{Log} z$. Megjegyzendő, hogy azok a sorbabontások, melyeket a log. számára felállítottunk, mind a log. főértéket szolgáltatják. Így

(1) $$h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} - \frac{h^4}{4} + \cdots\cdots\cdots = \operatorname{Log}(1+h)$$

mert ha $h=0$, akkor a sor értéke 0, azaz $\operatorname{Log}(1) = 0$, mert ha ez a sor nem a főértéket adná, akkor $\log(1) = 2\kappa\pi i$ volna. Erről különben úgy is meggyőződhetünk, hogy tesszük $1+h = z$, azaz $h = z-1$, miután a fenti sorbabontás csak $|h| < 1$ mellett convergens, tehát ha $|z-1| < 1$ azaz egy $(+1)$ centrumu, 0-n átmenő körön belül, nyilvánvaló, hogy ezen belül z-nek a szöge, bármily úton, nem fog növekedni. Ugyanez áll a következő sorra is:

(2). $$-h - \frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{3} - \frac{h^4}{4} - \cdots\cdots = \operatorname{Log}(1-h)$$

ez is a főértéket adja, melynek szöge $+\pi$ és $-\pi$ között fekszik, de akkor a kettő különbsége

$$\operatorname{Log}\left(\frac{1+h}{1-h}\right) = 2\left(h + \frac{h^3}{3} + \frac{h^5}{5} + \cdots\right)$$

szintén a főértéket adja. –

A sinus- és cosinus invers függvénye. Arcussinus.

A trigonometriában a $\sin z = z$ invers függvényét így jelöltük $z = \operatorname{arc\,sin} z$ és itt ezen inverz függvény alatt a z sinushoz tartozó ívet értettük; ezt az elnevezést megtartjuk a complex számkörben is és így egész általánosan a $\sin z = z$ invers függvénye $z = \operatorname{arc\,sin} z$.

Ezen függvénynek a trigonometriában csak akkor van értelme, ha z $+1$ és -1 között fekszik, azaz ha $|z| \leq 1$, különben csak analytikus jelentőségü.

Ezen függvénytanulmányozását most megkönnyíti az, hogy össze lehet tenni egy logaritmusból és alg. függvényből, melyeknek tulajdonságait már ismerjük. Tudjuk ugyanis, hogy

$$\sin z = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i} = Z \qquad \text{ebből}$$

$$e^{zi} - e^{-zi} = 2iZ \qquad \text{és szorozva } e^{zi}\text{-vel}$$

$$e^{2zi} - 2iZe^{zi} - 1 = 0 \qquad \text{és megfejtve ezt a négyzetes}$$

egyenletet $\quad e^{zi} = iZ + \sqrt{1 - Z^2}$

$$zi = \log(iZ + \sqrt{1 - Z^2})$$

tehát $\quad z = \frac{1}{i}\log(\sqrt{1 - Z^2} + iZ) = \operatorname{arc\,sin} Z$

vagyis $\quad \operatorname{arc\,sin} Z = \frac{1}{i}\log(\sqrt{1 - Z^2} + iZ)$

Előállítottuk tehát arc sin-t mint összetett függvényt, a külső függvény logaritmus, a belső alg. függvény, mert gyökvonás is fordul elő benne. Ezen előállításból most ki lehet olvasni az arcus sin. tulajdonságait.

Mindenekelőtt lássuk hol vannak ezen függvénynek singularitásai. Az összetett függvény singularitásai a belső és külső függvény singularitásai. A belső alg. függvény sing. a végtelen távoli hely, mely egyszersmind a külső logaritmusra is sing. hely; a belső függvényben levő négyzetgyökre nézve (9) szerint sing. az a hely, a hol $1 - Z^2 = 0$, azaz $Z = \pm 1$. A külső log.ra lehetne sing. hely 0, de kimutatjuk, hogy ez nem következhetik be egy Z-re sem; mert ha

$$\sqrt{1 - Z^2} + Zi = 0 \qquad \text{volna, akkor}$$

$$i - Z^2 = -Z^2 \qquad \text{volna, a mi abszurdum.}$$

Tehát az arcus sinus sing. helyei végtelen, $+1$ és -1. Minden más hely közönséges, mely körül a függvény sorbafejthető. Az I előállításból látható, hogy egy szabott Z-hez az arcus sinus végtelen sok értékkel bír, azaz végtelen sok értékű függvény és pedig azért, mert a log., melylyel elő van állítva, végtelen sok értékű. Másfelől az is látható, hogy ezen végtelen sok érték két csoportot alkot, mert a log. alatti négyzetgyök kétértékű $+\sqrt{1 - Z^2}$ és $-\sqrt{1 - Z^2}$. Ha tehát az egyik négyzetgyököt vesszük kapjuk az arc sin értékek egyik ágát, a másik gyökhez a másik ágát.

Ha az egyik csoportbeli értékek egyike arc sin Z akkor abból az

első csoport valamennyi értékét megkapjuk, ha állandóan a positiv négyzetgyökőt véve, vesszük az ehez tartozó log. összes értékeit. Az első csoportbeli értékek tehát $\arcsin_1 z + \frac{1}{i} 2k\pi i$ vagy is

$$\arcsin_1 z + 2k\pi \qquad (1)$$

a két csoporthoz tartozó értékek viszonyából levezethetjük a második csoport értékeit is. Ugyanis

$$\arcsin_1 z = \frac{1}{i} \log\left(\sqrt{1-z^2} + iz\right)$$
$$\arcsin_2 z = \frac{1}{i} \log\left(-\sqrt{1-z^2} + iz\right)$$

összeadva, és a jobboldalon a szorzat log. véve

$$\arcsin_1 z + \arcsin_2 z = \frac{1}{i} \log(-1) = \frac{1}{i}(2k+1)\pi i = (2k+1)\pi$$

ebből $$\arcsin_2 z = -\arcsin_1 z + (2k+1)\pi \qquad (2)$$

Tehát az első csoport összes értékeit (1) szerint megkapjuk, ha egyik értékéhez $2k\pi$-t hozzáadunk és ha (2) szerint ezen első csoportbeli érték negativjához hozzáadjuk a π páratlan számu többszöröseit, kapjuk a második csoport összes értékeit. Ez teljesen megegyezik azzal az eredménnyel, melyet a sinus egyenlőértékü helyeire nézve kaptunk. Lássuk tehát, hogy itt is elég ismerni a függvény egyetlenegy értékét és igy célszerü, mint a logaritmusnál megállapitani itt is a függvény főértékét. Főértéknek egyszerüen azt fogjuk nevezni, melyet a belső függvényben a négyzetgyök és a külső függvényben a log. főértékéből adódik. A négyzetgyökre nézve megállapodunk abban, hogy

$$\sqrt{1-z^2} = a+bi$$
$$= -a-bi$$

két érték közül az a főérték, melynek reális része positiv, vagyha ez 0, - melynek képzetes része positiv. Ha tehát $\sqrt{1-z^2} > 0$, akkor

$$\operatorname{Arc}\sin z = \frac{1}{i} \operatorname{Log}\left(\sqrt{1-z^2} + iz\right)$$

lesz az arc sin. főértéke. Lássuk mi az arc sin. főértéke $+1$ és -1 sing. helyeken? Ha

$z = +1$ $\quad \operatorname{Arc}\sin(1) = \frac{1}{i} \operatorname{Log}(i) = \frac{1}{i} \frac{\pi}{2} i = \frac{\pi}{2}$

s ha $z = -1$ $\quad \operatorname{Arc}\sin(-1) = \frac{1}{i} \operatorname{Log}(-i) = \frac{1}{i}\left(-\frac{\pi}{2}\right) i = -\frac{\pi}{2}$

minden más esetben a négyzetgyök nem 0. Már most a Log. után álló két mennyiség közötti viszonyból könnyü lesz megállapitani az Arc sin. értékváltozásait. Ha ugyanis

$$\sqrt{1-z^2} = a_1 + b_1 i$$

$i\,\overline{z} = a_2 + b_2 i$ $\quad$ II.

négyzetre emelve $\quad 1 - z^2 = a_2^2 - b_2^2 + 2a_2 b_2 i$

$\underline{-z^2 = a_2^2 - b_2^2 + 2a_2 b_2 i}$ $\quad$ kivonva az alsót

$1 = a_1^2 - a_2^2 + b_2^2 - b_1^2 + 2(a_1 b_2 - a_2 b_2) i$

de akkor $\quad a_1^2 - a_2^2 + b_2^2 - b_2^2 = 1$ $\quad (1)$

$a_1 b_1 - a_2 b_2 = 0$, vagyis

$a_2 b_1 = a_2 b_2$

$a_1^2 b_1^2 = a_2^2 b_2^2$ $\quad (2)$

és ezek alapján most ki fogjuk mutatni, hogy I reális része a_1 mindig nagyobb, mint II reális része a_2. Egyszerűen kimutatjuk, hogy $a_1^2 > a_2^2$. Mert tegyük fel, hogy lehetne $\quad a_1^2 \leqq a_2^2$

akkor $\quad a_2^2 - a_2^2 \leqq 0$

de akkor (1) szerint volna $\quad b_2^2 - b_1^2 > 0$

azaz $\quad b_1^2 < b_2^2$

tehát $\quad \underline{a_1^2 b_1^2 < a_2^2 b_2^2}$,

pedig (2) szerint $\quad a_1^2 b_1^2 = a_2^2 b_2^2$

Tehát ki van mutatva, hogy $\sqrt{1-z^2}$ reális része nagyobb mint $i\,\overline{z}$ reális része, és miután Arcsin.-ban a $\sqrt{1-z^2}$ reális része pozitiv, azért a Log. mögötti összeg reális része mindig pozitiv; tehát Arc sin z-ben a Log. mögött egy az I vagy IV quadránsban fekvő complex szám áll, melynek szöge tehát $\quad -\frac{\pi}{2} < \varphi \leqq \frac{\pi}{2}$

Miután a Log. nál a szög főértékét kell venni, mely $-\pi < \Phi < \pi$ azért ez a φ szög megfelel a Log. követelményeinek. E szerint, ha

$\mathrm{Log}\,(\sqrt{1-z^2} + i\,\overline{z}) = c + di$, akkor $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ és mivel $\quad \mathrm{Arc\,sin}\,z = \frac{1}{i}(c+di) = -i\cdot(c+di) = d + ci$ $\quad$ azaz

$\mathrm{Arc\,sin}\,z = d + ci$, a hol $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ azért mondhatjuk hogy az arcus sinus főértékének reális része $+\frac{\pi}{2}$ és $-\frac{\pi}{2}$ közt fekszik. Ez is megfelel a sinusnál nyert azon eredménynek, hogy a $+\frac{\pi}{2}$ és $(-\frac{\pi}{2})$-ben emelt merőlegesek által határolt sávon belül a sinus felveszi az összes értékeket.

Most ki fogjuk mutatni, hogy két arc sin összegét mindig elő lehet állitani mint egy arc. sinust. Ha ugyanis

$$\arcsin z_1 = \frac{1}{i}\log(\sqrt{1-z_1^2} + z_1 i)$$

$$\arcsin z_2 = \frac{1}{i}\log(\sqrt{1-z_2^2} + z_2 i)$$

(1) $$\arcsin z_1 + \arcsin z_2 = \frac{1}{i}\log[\underbrace{\sqrt{1-z_1^2}\sqrt{1-z_2^2} - z_1 z_2}_{z'} + \underbrace{(z_1\sqrt{1-z_2^2} + z_2\sqrt{1-z^2})i}_{z}]$$

Ki fogjuk mutatni, hogy $z'^2 + z^2 = 1$, vagyanis

$$z^2 = z_1^2(1-z_2^2) + z_2^2(1-z_1^2) + 2z_1 z_2\sqrt{1-z_1^2}\sqrt{1-z_2^2}$$

$$z'^2 = (1-z_1^2)(1-z_2^2) + z_1^2 z_2^2 - 2z_1 z_2\sqrt{1-z_1^2}\sqrt{1-z_2^2}$$

beszorozva és összeadva lesz $z^2 + z'^2 = 1$

tehát $$z' = \sqrt{1-z^2}$$

és így (1) következőleg is írható

$$= \frac{1}{i}\log(\sqrt{1-z^2} + zi) = \arcsin z,$$ a hol tehát

$$z = z_1\sqrt{1-z_2^2} + z_2\sqrt{1-z_1^2},$$ úgyhogy

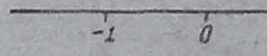
$$\arcsin z_1 + \arcsin z_2 = \arcsin(z_1\sqrt{1-z_2^2} + z_2\sqrt{1-z_1^2})$$

Ez az arcus sinus összeadási tétele, s ez az egyenlet azt jelenti, hogyha $\arcsin z_1$ és $\arcsin z_2$ végtelen sok értékei közül egyet-egyet kiválasztunk akkor ezeknek összege előfordul a harmadik arc. sin végtelen sok értéi között is.

Ha $z_1 = z_2 = z$ akkor $2\arcsin z = \arcsin(2z\sqrt{1-z^2})$

Különben mindezek a formulák a trigonometriai formulákból is levezethetők.

Lássuk már most az arc sin sorbabontását. A három szing. hely, ∞. $+1$ és -1 kivételével minden más hely körül sorbabontható a függvény. Miután az arc sinusnak csak oly z sinusértékek mellett van trigonometriai jelentése, melyek $|z| \leq 1$, azért csak is ilyenkor fogjuk a sorbabontást keresni. Centrumul választjuk a 0 pontot. Miután valamely hely körüli sorbabontás mindig a legközelebbi singuláris helyig bír érvénnyel, azért ezen 0 centrumu sorbabontás területe az egységsugaru kör lesz. Legczélszerűbb lesz a főértéket sorbabontani. Ezt úgy is tehetnők, hogy $\arcsin z = \frac{1}{i}\log(\sqrt{1-z^2} + iz)$ lévén egyszerüen sorbabontjuk a logarithmust. De sokkal egyszerűbb és alkalmasabb módszer, ha először meghatározzuk az arc sin deriváltját, ezt sorbabontjuk és a nyert sort integrálják. Az inverz függvény deriváltja $\mathfrak{F}'(z) = \frac{1}{f'(\mathfrak{F}(z))}$



Amiesetünkben $f(z) = \sin z = Z$

$F(Z) = \arcsin Z$ és mivel $(\sin z)' = \cos z$, továbbá

$\cos z = \sqrt{1-\sin^2 z} = \sqrt{1-Z^2}$ azért lesz

$(\arcsin Z)' = \frac{1}{\cos z} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 z}} = \frac{1}{\sqrt{1-Z^2}}$ s ha $\sqrt{1-Z^2}$ reális

részét positivnak veszem, akkor $(\mathrm{Arc}\sin Z)' = \frac{1}{\sqrt{1-Z^2}}$

Ezt pedig a binomialis tétel szerint sorba tudjuk bontani

$$\frac{1}{\sqrt{1-Z^2}} = (1-Z^2)^{-\frac{1}{2}}$$

s ez épp a főértéket fogja adni, mert ha $Z=0$, kapunk $+1$-et, ennek realis része pedig positiv. Tehát a binomiális tétel szerint

$$(1-Z^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \binom{-\frac{1}{2}}{1}(-Z^2) + \binom{-\frac{1}{2}}{2}(-Z^2)^2 + \ldots + \binom{-\frac{1}{2}}{n}(-Z^2)^n + \ldots$$

Számítsuk ki ennek általános tagját:

$$\binom{-\frac{1}{2}}{n} = \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)\ldots(-\frac{1}{2}-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n}$$

$$= (-1)^n \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n}$$

Ezt az általános tagot szorozni kell még $(-Z^2)^n = (-1)^n Z^{2n}$-el, miáltal a $(-1)^n$ szorzó kiesik, úgyhogy most

$$(\mathrm{Arc}\sin Z)' = 1 + \frac{1}{2}Z^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}Z^4 + \ldots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}Z^{2n} + \ldots$$

s ez a sor convergens, ha $|Z|<1$. Ezt a sort kell most integrálni. A felépő constans $C=0$ lesz, mert hiszen ez nem egyéb, mint a függvény értéke $Z=0$-ban, már pedig $\mathrm{Arc}\sin 0 = \frac{1}{i}\mathrm{Log}(1) = 0$ és így

$$\mathrm{Arc}\sin Z = Z + \frac{1}{2}\cdot\frac{Z^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{Z^5}{5} + \ldots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}\cdot\frac{Z^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$$

Ez a sor adja tehát a trigonometriai sinusnak megfelelő ívet. Ezen sor segélyével lehet a Ludolf féle szám részére egy, habár nem a legjobban convergáló sort kapni. Ugyanis tudjuk, hogy $30° = \frac{\pi}{6}$, $\sin\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}$ s $\frac{\pi}{6}$ egyszersmind az a legkisebb ív, melynek sinusa $\frac{1}{2}$, tehát

$$\mathrm{Arc}\sin\tfrac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$$

és így

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3\cdot 2^3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5\cdot 2^5} + \ldots + \frac{1\cdot 3\ldots(n-1)}{2\cdot 4\ldots 2n}\cdot\frac{1}{(2n+1)2^{2n+1}} + \ldots$$

De sokkal jobban convergáló sort fogunk kapni az arc tg segélyével.

Área cosinus.

Az arc cos inus tárgyalása épen úgy megy, mint az arc sin usé.

$$\cos z = Z$$

$$z = \text{arc} \cos Z$$

Ezt is a cosinusnak az exponentiális függvénnyel való összefüggése alapján előállítjuk olyalakban, melyből annak tulajdonságait kiolvashatjuk, mert ebből az összefüggésből

$$e^{zi} + e^{-zi} = 2Z$$

$$e^{2zi} - 2Ze^{zi} + 1 = 0$$

a négyzetes egyenletet megfejtve

$$e^{zi} = Z + \sqrt{Z^2 - 1}$$

de miután a trigonometriai cosinus $|Z| \leqq 1$, azért az négyzetgyök ebben az esetben képzetessé válik, azért ezt átalakítjuk

$$Z^2 - 1 = -(1 - Z^2)$$

$$\sqrt{Z^2 - 1} = \sqrt{1 - Z^2} \cdot i$$

$$e^{zi} = Z + \sqrt{1 - Z^2}\, i$$

ugyhogy

$$zi = \log\left(Z + \sqrt{1 - Z^2} \cdot i\right)$$

tehát

$$\text{arc} \cos Z = \frac{1}{i} \log\left(Z + \sqrt{1 - Z^2}\, i\right)$$

Tehát az arc cos is összetehető egy alg. és egy log. függvényből. Ebből az előállításból látható, hogy az arc cos sing. helyei szintén ∞, $+1$ és -1, mint az arcsinusnál.

Látható továbbá az is, hogy az arc cos is végtelen sok értékü függvény s ezen értékek szintén 2 csoportot alkotnak. Hogy ezt az értéktartományt jobban áttekinthessük, célszerü lesz levezetni azt az egyszerü összefüggést, mely az arc cos. és arcsin. közt fennáll.

$$\text{arc} \cos Z = \frac{1}{i} \log\left(Z + \sqrt{1 - Z^2} \cdot i\right)$$

$$\text{arc} \sin Z = \frac{1}{i} \log\left(\sqrt{1 - Z^2} + Zi\right)$$

mindkét esetben $\sqrt{1 - Z^2}$ ugyanazon értékét véve s akkor

$$\text{arc} \cos Z + \text{arc} \sin Z = \frac{1}{i} \log(i) = \frac{\pi}{2} + 2K\pi$$

De a $2K\pi$-t átvihetjük a baloldalra, hol az valamelyik arcusba beleolvad, úgyhogy $\text{arc} \cos Z + \text{arc} \sin Z = \frac{\pi}{2}$, ebből a relációból, ha Arc sin Z vesszük $\text{Arc} \cos Z = \frac{\pi}{2} - \text{Arc} \sin Z$ (1)

Mit fejez ki ez az egyenlet? Ha $\operatorname{Arc\,sin} z = a+bi$, akkor a mint tudjuk $-\frac{\pi}{2} < a < \frac{\pi}{2}$ és ha most $\operatorname{Arc\,cos} z = c+di$, akkor az egyenlet szerint

$$c+di = \frac{\pi}{2} - (a+bi)$$ azaz $c = \frac{\pi}{2} - a$ s ha vesszük a nak szélső értékeit, akkor $0 < c < \pi$.

Tehát az arccos főértékének reális része 0 és π között fekszik. A további tárgyalás épp úgy megy, mint az arcsinusnál. A sorbabontását (1) szerint megkapjuk, ha az $\operatorname{Arc\,sin} z$ sorában minden tagot ellenkezőre változtatva, azt $\frac{\pi}{2}$-hez hozzáadjuk.

Arcus tangens.

Az arcus tg. függvény módot fog nyújtani a Ludolfi szám igen jól convergáló sorral való előállítására. Ha

$$\operatorname{tg} z = z$$

akkor $$z = \operatorname{arc\,tg} z$$

Ezt a függvényt szintén a logarithmusra vihetjük vissza. Ugyanis

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{2}{2i}\,\frac{e^{zi}-e^{-zi}}{e^{zi}+e^{-zi}} = \frac{1}{i}\,\frac{e^{zi}-e^{-zi}}{e^{zi}+e^{-zi}} = z$$

tehát $$\frac{e^{zi}-e^{-zi}}{e^{zi}+e^{-zi}} = iz$$ felsőt és alsót szorozva e^{zi}-vel

$$\frac{e^{2zi}-1}{e^{2zi}+1} = iz$$ s ezen elsőfokú egyenletből

$$e^{2zi} = \frac{1+zi}{1-zi}$$ tehát

$$\operatorname{arc\,tg} z = \frac{1}{2i}\log\frac{1+zi}{1-zi}$$

Ebből az előállításból kiolvashatók az $\operatorname{arc\,tg} z$ sing. helyei, ezek a log. megetti függvény 0 ill. polus helyei tehát a felső és alsó 0 helyei.

$1+zi = 0$, ha $z = -\frac{1}{i} = i$

$1-zi = 0$, ha $z = \frac{1}{i} = -i$

Tehát az arc tg sing. helyei i és $-i$, más singuláris hely nincsen. A ∞ itt közönséges hely, mert ott az arc tg véges értékü. Ugyanis

$$\lim_{z}\frac{1+zi}{1-zi} = \lim_{z}\frac{\frac{1}{z}+i}{\frac{1}{z}-i} = -1$$

és így $$\lim_{z=\infty}\operatorname{arc\,tg} z = \frac{1}{2i}\log(-1) = (2k+1)\frac{\pi}{2}$$

Tehát a végtelen távoli helyen az arctg véges értékü. Az arctg is végtelen sok értékü, s ezen értékek csak egy csoportot alkotnak. A főértéket kapjuk, ha

a log. főértékét vesszük, tehát

$$\operatorname{Arc\,tg} z = \frac{1}{2i} \operatorname{Log} \frac{1+zi}{1-zi}$$

Ha $\operatorname{Log} \frac{1+zi}{1-zi} = a+bi$, akkor tudjuk, hogy $-\pi < b < \pi$ s mivel

$$\operatorname{Arc\,tg} = \frac{a}{2i} + \frac{bi}{2i} = \frac{b}{2} - \frac{ai}{2} = c+di$$

mondhatjuk, hogy az arc tg főértékének reális része fekszik $\frac{\pi}{2}$ és $-\frac{\pi}{2}$ között, azaz $-\frac{\pi}{2} < c < \frac{\pi}{2}$, mert hiszen $c = \frac{b}{2}$. Miután a log. összes értékeit megkapjuk $2k\pi i$ hozzáadásával, ha ezt $2i$-vel osztjuk, kapjuk hogy

$$\operatorname{arc\,tg} z = \operatorname{Arc\,tg} z + k\pi$$

Ha $z = -z_1$

$$\operatorname{arc\,tg}(-z) = \frac{1}{2i} \log \frac{1-zi}{1+zi}$$

$$\operatorname{arc\,tg}(z) = \frac{1}{2i} \log \frac{1+zi}{1-zi},$$

s mivel továbbá lesz

$$\operatorname{arc\,tg}(-z) + \operatorname{arc\,tg}(z) = \frac{1}{2i} \log(1) = k\pi$$

tehát

$$\operatorname{arc\,tg}(-z) = -\operatorname{arc\,tg}(z) + k\pi,$$

de mivel $k\pi$ periodus, ezt el is hagyhatjuk, s így kapjuk, hogy

$$\operatorname{arc\,tg}(-z) = -\operatorname{arc\,tg}(z)$$

a mi azt jelenti, hogy $\operatorname{arc\,tg}(-z)$ értékei között előjön $-\operatorname{arc\,tg}(z)$ is; tehát az arc tg páratlan függvény. Itt is kimutathatjuk, hogy két arc tg-ost össze lehet vonni egygyé. Ugyanis

$$\operatorname{arc\,tg} z_1 + \operatorname{arc\,tg} z_2 = \frac{i}{2i} \left(\log \frac{1+z_1 i}{1-z_1 i} + \log \frac{1+z_2 i}{1-z_2 i} \right) =$$

$$= \frac{i}{2i} \log \frac{1 - z_1 z_2 + (z_1 + z_2) i}{1 - z_1 z_2 - (z_1 + z_2) i}$$

$$= \frac{i}{2i} \log \frac{i + \frac{z_1 + z_2}{1 - z_1 z_2} \cdot i}{1 - \frac{z_1 + z_2}{1 - z_1 z_2} \cdot i}$$

ha az i-vel szorzott részt z-vel jelöljük, akkor ez nem egyébb mint $\operatorname{arc\,tg} z$ úgyhogy

$$\operatorname{arc\,tg} z_1 + \operatorname{arc\,tg} z_2 = \operatorname{arc\,tg} \frac{z_1 + z_2}{1 - z_1 z_2} \qquad (1)$$

adja két arc tg összegezési formuláját. Ha $z_2 = z_2 = z$ akkor

$$2 \operatorname{arc\,tg} z = \operatorname{arc\,tg} \frac{2z}{1 - z^2} \qquad (2)$$

és ha az eredetiben $z_2 = -z_2$, akkor lévén $\operatorname{arc\,tg}(-z_2) = -\operatorname{arc\,tg}(z_2)$, kapjuk hogy

$$\operatorname{arc\,tg} z_1 - \operatorname{arc\,tg} z_2 = \operatorname{arc\,tg} \frac{z_1 - z_2}{1 + z_1 z_2} \qquad (3).$$

Ezek az arc tg-re vonatkozó legfontosabb formulák.

Lássuk most a sorbabontását. Sing. pontnak a $+i$ és $-i$, legegyszerűbb lesz o körül sorbabontani, a mely esetben a convergentia kör sugara 1, mert

a sing. helyig terjed. Láttuk, hogy

$$\operatorname{Log}\frac{1+h}{1-h} = 2\left(h + \frac{h^3}{3} + \frac{h^5}{5} + \frac{h^7}{7} + \dots\dots\right)$$

s ha most $h = zi$ $\operatorname{Log}\frac{1+zi}{1-zi} = 2i\left(z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \dots\right)$ és osztva $2i$-vel, kapjuk

$$\operatorname{Arctg} z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \dots,$$

s ez a sor convergens, ha $|z|<1$, sőt akkor is convergens, ha $z=i$, de akkor csak feltételesen, mert $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$ csak feltételesen convergens. Ez a sor adja tehát $\operatorname{Arctg}(1)$-t. De

$$\operatorname{Arctg}(i) = \frac{1}{2i}\operatorname{Log}\frac{1+i}{1-i} \quad \text{s mivel} \quad \frac{1+i}{1-i} = \frac{1+2i-1}{2} = i, \text{ azért}$$

$$\operatorname{Arctg}(1) = \frac{1}{2i}\operatorname{Log}(i) = \frac{\pi}{4}, \text{ kapjuk } \frac{\pi}{4} \text{ számára a következő}$$

sort, mely Leibnitztől származik

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots\dots\dots$$

melynek azonban semmi praktikus hasznát nincsen, mert, miután ilyen sroroknál a hiba mértéke az eggyel kisebb hely, ha 3 tizedesnyi pontossá akarunk, tehát $\frac{1}{1000}$-ig, 500 tagot kell summázni. De vannak az arctg. számára sokkal jobban convergáló sorok. Hogy ezek hez jussunk előbb még egy tételt lássunk. Deriváljuk az Arctg-t

$$(\operatorname{Arctg} z)' = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + \dots\dots\dots = \frac{1}{1+z^2}$$

ez a derivált z reális értékei mellett állandóan positiv, a mi a mint tudjuk, azt jelenti, hogy a függvény értéke z-vel együtt nő; s mivel

$z=0$ mellett $\operatorname{Arctg} 0 = 0$

$z=1$ " $\operatorname{Arctg}(1) = \frac{\pi}{4}$

látható, hogy ha z a 0-tól 1-ig nő, a függvény 0-tól $\frac{\pi}{4}$-ig nő. Tehát 0 és 1 között fekvő értékekre nézve $\operatorname{Arctg} z < \frac{\pi}{4}$. Ha most z_1 és z_2 két pos. valódi tört s ezekhez a függvény főértékét veszem, mindegyik kisebb lesz mint $\frac{\pi}{4}$, tehát összegük kisebb mint $\frac{\pi}{2}$, vagyis más szóval, ha az (1) alatti összefüggésben ezt a két z értéket helyettesítjük, az összeg a főértéket ad.

Ha most z_1 és z_2-t úgy választjuk, hogy

(1) $\frac{z_1+z_2}{1-z_1z_2} = i$ legyen, akkor $\operatorname{Arctg} z_1 + \operatorname{Arctg} z_2 = \operatorname{Arctg}(1) = \frac{\pi}{4}$ lesz

de (1)-ből $z_2 = \frac{1-z_1}{1+z_1}$, s így z_2-nek tetszésszerinti törtértéket adva, ezzel z_2 is meg lesz határozva s így Arctg-nek megfelelően. Vegyük pl $z_1 = \frac{1}{2}$, akkor $z_2 = \frac{1}{3}$ s így $\operatorname{Arctg}\left(\frac{1}{2}\right) + \operatorname{Arctg}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{4}$, vagyis hogy

II. $\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3\cdot 2^3} + \frac{1}{5\cdot 2^5} + \cdots\cdots + \frac{1}{3} - \frac{1}{3\cdot 3^3} + \frac{1}{5\cdot 3^5} - \frac{1}{7\cdot 3^7} + \cdots\cdots$

De még jobban convergáló sort kapunk, ha kiindulunk $\operatorname{Arctg}(\frac{1}{3})$-ból

$$\operatorname{Arctg}\left(\tfrac{1}{3}\right) < \frac{\pi}{4}$$

$$2\operatorname{Arctg}\left(\tfrac{1}{3}\right) < \frac{\pi}{2}$$

és így

tehát közértük, ha alkalmazzuk a (2) alatti formulát, akkor

$$2\operatorname{Arctg}\left(\tfrac{1}{3}\right) = \operatorname{Arctg}\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{9}} = \operatorname{Arctg}\left(\tfrac{6}{8}\right) = \operatorname{Arctg}\left(\tfrac{3}{4}\right)$$

azaz $2\operatorname{Arctg}\left(\tfrac{1}{3}\right) = \operatorname{Arctg}\left(\tfrac{3}{4}\right)$ ismét még egyszer alkalmazzuk (2)-t

azaz $4\operatorname{Arctg}\left(\tfrac{1}{3}\right) = 2\operatorname{Arctg}\left(\tfrac{3}{4}\right) = \operatorname{Arctg}\frac{\frac{6}{4}}{1-\frac{9}{16}} = \operatorname{Arctg}\frac{24}{7}$ azaz

$$4\operatorname{Arctg}\left(\tfrac{1}{3}\right) = \operatorname{Arctg}\frac{24}{7} > \frac{\pi}{4}$$

tehát már túl van $\frac{\pi}{4}$-n, ki is számíthatjuk, hogy mennyivel, azaz

és (3) szerint $\operatorname{Arctg}\frac{24}{7} - \operatorname{Arctg} 1 = \operatorname{Arctg}\frac{\frac{24}{7}-1}{1+\frac{24}{7}} = \operatorname{Arctg}\frac{17}{31}$

mivel $\operatorname{Arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, lesz ebből az egyenletből

$$\frac{\pi}{4} = 4\operatorname{Arctg}\left(\tfrac{1}{3}\right) - \operatorname{Arctg}\left(\tfrac{17}{31}\right)$$

$$\pi = 16\operatorname{Arctg}\left(\tfrac{1}{3}\right) - 4\operatorname{Arctg}\left(\tfrac{17}{31}\right)$$ szép sorbafejtve

$$\pi = 16\left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{3\cdot 3^3} + \tfrac{1}{5\cdot 3^5} - \tfrac{1}{7\cdot 3^7} + \cdots\right) - 4\left(\tfrac{17}{31} - \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{17}{31}\right)^3 + \cdots\right)$$

Ez a π-nek egy igen jó convergáló előállítása. Lássuk, hány tagot kell summázni mindegyik zárjelből, hogy a hiba kisebb legyen, mint $\frac{1}{10^6}$. Az előből elég 4-et, a másodikból 1-et summázni, tehát összesen 5 tagot, mert ezek váltakozó előjelű és fogyó sorok lévén, a hiba mértékének vehető a következő tag. Az első zárjelben az 5-dik tag

$$\frac{16}{9\cdot 5^9} = \frac{16\cdot 2^9}{9\cdot 10^9} = \frac{8\cdot 2^{10}}{9\cdot 10^9} = \underbrace{\frac{8}{9}(1024)}_{<1000}\cdot\frac{1}{10^9} < \frac{10^3}{10^9} = \frac{1}{10^6}$$

5-dik tag már kisebb mint $\frac{1}{10^6}$. A második zárjelből elegendő egy tag, mert már $\frac{4}{3\cdot 17^3} < \frac{4}{3\cdot 200^3} = \frac{4}{3\cdot 8\cdot 10^6} = \frac{1}{6\cdot 10^6}$, tehát a második tag már kisebb mint $\frac{1}{10^6}$.

$$\pi = 3{,}14159\,26535\,89793\,23846\,26433\,83279\cdots\cdots$$

Arcus cotangens.

Ez a függvény a tangenssel való kapcsolata folytán igen egyszerűen tárgyalható. Ha $\operatorname{cotg} z = Z$

$$z = \operatorname{arc\,cotg} Z$$

A exponentialis függvénnyel való összefüggés alapján

$$\frac{e^{zi} + e^{-zi}}{e^{zi} - e^{-zi}} = \frac{z}{i}$$

$$\frac{e^{2zi} + 1}{e^{2zi} - 1} = \frac{z}{i} \qquad \text{ebből}$$

$$e^{2zi} = \frac{z+i}{z-i}.$$

$$2zi = \log \frac{z+i}{z-i}$$

$z = \operatorname{arc\,cotg} z = \frac{1}{2i} \log \frac{z+i}{z-i}$ és a log. mögött felsőt és alsót

osztva z-vel $= \frac{1}{2i} \log \frac{1+\frac{1}{z}i}{1-\frac{1}{z}i} = \operatorname{arctg} \frac{1}{z}$

tehát $\operatorname{arc\,cotg} z = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{z}\right)$

ép így $\operatorname{Arc\,cotg} z = \operatorname{Arctg}\left(\frac{1}{z}\right)$

Ezen összefüggés alapján a két függvény egyszerre tárgyalható.

Ezzel befejeztük a trigonometricus és cyclometricus függvények tárgyalását.

Transcendens egész függvények szorzatalakban való előállítása.

Látluk, hogy minden egész rationális függvényt szorzatalakra lehet hozni, a mennyiben minden α nullapont egy $(z-\alpha)$ lin. tényezőt választ le a függvényből, úgy hogy az n-ed fokú eg. rat. függvény előállítható, mint n lineáris tényező szorzata:

$$f(z) = a_n (z-\alpha_1)(z-\alpha_2) \cdots\cdots (z-\alpha_n)$$

Kérdés most am, érvényben marad-e ez a tétel a transcendens egész függvényeknél, a melyeknek fokai tehát minden határon túl mennek? Itt két nehézséggel állunk szemben. Az első az, hogy nem minden transc. eg. függvénynek van ∞ pontja. Így pl. az exponentialis függvénynek e^z a végesben nincsen ∞ pontja, csak a ∞ távoli hely ∞ pont, a mennyiben $\lim_{z=-\infty} e^z = 0$ és így nem is lehet ezt a függvényt primfactorokra bontani. Ugyanez áll az ily alakú függvényre is, $e^{f(z)}$, a hol $f(z)$ vagy rat. vagy transc. egész függvény; ennek sincs a végesben ∞ pontja, csak ott, a hol $f(z) = -\infty$, a mi végesértékű z mellett n nincs bevetkezik be. Ha az $e^{f(z)}$ transcendens egész függvény, mert hiszem,

$$e^{f(z)} = 1 + f(z) + \frac{f(z)^2}{2!} + \frac{f(z)^3}{3!} + \cdots\cdots\cdots\cdots$$

transc. függvénylévén, egyenletesen convergens és tagjai is egyenletesen

convergens függvények így szabad azt egyetlen egy, z pos. egész hatványai szerint haladó hatványsor rá összevonni, a mely convergens az egész számsíkon és így transc. egész függvényt értelmez. Ezzel megismertük az összes transc. egész függvényeket, melyeknek nincsen végesben pontjuk. Mert tegyük fel, hogy $F(z)$ egy ily transc. egész függvény, melynek a végesben nincsen nullapontja s vegyük a $f(z) = \log F(z)$ függvényt; ez könnyen belátható, transc. vagy rat. egész függvény, mert végesben nincsen sing. pontja, mivel véges z értékek mellett sem $F(z) = 0$, sem $F(z) = \infty$ nem lehet és így

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots\cdots$$

ha ez véges, akkor $f(z)$ rat. egész függvény, melynek a végesben nincsen pontja, ily alakra hozható $e^{f(z)}$, a hol $f(z)$ transc vagy rat. egész függvény.

A másik nehézség az, hogy vannak oly függvények, melyeknek végtelen sok pontjuk. Ugyan itt áll az is, a mi a rat. egész függvénynél, hogy minden pont egy-egy primtényezőt választ le; ha pl. $f(z)$ egy transcegész függvény azaz

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots\cdots a_n z^n + \cdots\cdots$$

és α, ennek egy pontja, akkor

$$0 = a_0 + a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_1^2 + \cdots\cdots + a_n \alpha_1^n + \cdots\cdots$$

tehát

$$f(z) = a_1 (z - \alpha_1) + a_2 (z^2 - \alpha_1^2) + \cdots\cdots + a_n (z^n - \alpha_1^n) + \cdots\cdots$$

$$= (z - \alpha_1)\left[a_1 + a_2 (z + \alpha_1) + \cdots\cdots + a_n (z^{n-1} + z^{n-2}\alpha_1 + \cdots + \alpha_1^{n-1}) + \cdots\right]$$

ha a zárjeles sort, mely szintén transc. egész függvény, $f_1(z)$-vel jelöljük, akkor

$$f(z) = (z - \alpha_1) f_1(z)$$

ha most $f_1(z)$-nek is van egy pontja α_2, akkor ez is leválaszt $f(z)$-ből egy $(z - \alpha_2)$-tényezőt, úgyhogy $f(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) f_2(z)$ stb.

ha $f(z)$-nek csak véges számú pontja van, akkor

$$f(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2)(z - \alpha_3) \cdots\cdots (z - \alpha_\kappa) f_\kappa(z)$$

a hol $f_\kappa(z)$-nek, ezen transc. egész függvénynek már nincsen véges pontja, és így $f_\kappa(z) = e^{g(z)}$ írható, úgyhogy véges sok pontok esetén a transc. egész függvény ily alakra hozható:

$$f(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \cdots\cdots (z - \alpha_\kappa) e^{g(z)}$$

De vannak analyt. függvények, melyeknek végtelen sok pontjuk van, s ezeket már nem lehet ilyen primfactorokra szétbontani. Így pl. a sinus függvény pontjai a következő sorozattal vannak megadva

$$0 \quad \pm\pi \quad \pm 2\pi \quad \pm 3\pi \quad \cdots\cdots \quad \pm n\pi \quad \cdots\cdots$$

ezek mind egyszerű gyökök, mert a $\sin z = \cos z$-nek ezek már nem gyökei. Most alkossunk meg az egyes gyökökhöz tartozó primfaktorokat. Itt nem a $(z-a)$ alakot fogjuk használni, hanem a $z-a = -a\left(1-\frac{z}{a}\right)$ alakot s ebből $\left(1-\frac{z}{a}\right)$-t fogjuk primfaktornak tekinteni, tehát olyan alakban mint az a végtelen szorzatoknál használatos. Most alkossuk meg a sinus gyökeihez tartozó primfaktorokat:

$$\begin{array}{llll} 0 & \pi & 2\pi \cdots\cdots & n\pi \cdots\cdots \text{-hez tartozik a} \\ z & 1-\frac{z}{\pi} & 1-\frac{z}{2\pi} \cdots\cdots & 1-\frac{z}{n\pi} \cdots \\ 0 & -\pi & -2\pi \cdots\cdots & -n\pi \cdots \text{-hez tartozik a} \\ z & 1+\frac{z}{\pi} & 1+\frac{z}{2\pi} \cdots\cdots & 1+\frac{z}{n\pi} \cdots \text{ primfactor.} \end{array}$$

Ezek a primfaktorok egy végtelen szorzatot alkotnak, a mely csak akkor lesz feltétlen convergens, ha az additiv tagok abs. értékeiből alkotott sor convergens ez azonban itt nem teljesül, mert $2\left(\left|\frac{z}{\pi}\right| + \left|\frac{z}{2\pi}\right| + \cdots + \left|\frac{z}{n\pi}\right| + \cdots\right)$ alk. tagsora divergens, mert hiszen $= 2\frac{|z|}{\pi}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots\right)$ és így a sinus végtelen sok gyökeihez tartozó primfaktorok nem adnak convergens szorzatot és ezért nem is szabad a sinust ily primfaktorokra felbontani. Ezen a nehézségen azzal segítünk, hogy behozzuk az úgy nevezett primfüggvényeket. Primfüggvény alatt értünk egy olyan transc. egész függvényt, melynek vagy egyáltalában nincsen, vagy csak egyetlen egy nulla gyöke van. Ha nincsen a primfüggvénynek gyöke, alakja: $e^{f(z)}$, ha a nullapontja, alakja: $z \cdot e^{f(z)}$, s végre ha a nullapont, akkor alakja $\left(1-\frac{z}{a}\right)e^{f(z)}$ ez a legáltalánosabb alak, mely csak egyhelyen válik 0-á ti $z=a$ mellett. Behozva így a primfüggvény fogalmát, kimondhatjuk a Weierstrass féle tételt, mely szerint minden transcendens egész függvényt előállhat állítani mint primfüggvények szorzatát. E tétel fogja képezni feladatunkat.

Véges számú gyök esetén már láttuk a tétel helyességét, a mennyiben a függvényt előállítottuk mint véges számú primtényezőnek és egy gyök nélkül való primfüggvénynek $e^{f(z)}$ szorzatát. Tehát csak arra az esetre kell kimutatni a tételt, ha végtelen sok gyök van. A primfüggvénynek általános alakja $\left(1-\frac{z}{a}\right)e^{f(z)}$ nem egészen határozott függvény, mert $f(z)$ lehet még rat. vagy transc. egész függvény, s éppen ennek helyes

megválasztásától függ a primfüggvényekből alkotott végtelen sor-rat convergentiája. Célszerű lesz tehát az $f(z)$ függvény specializálásával a primfüggvényeknek egy sorozatát összeállítani, melyből minden esetben a sorrat convergentiájához szükséges alakot lehet kiválasztani. Először a $+1$ ponthoz tartozó primfüggvényeket vegyük, a melyek tehát a $+1$-ben eltünnek. A legegyszerűbb ily primfüggvény

a.) $1-z$, kevésbbé egyszerű s rövidített jelölést használva

1.) $(1-z)e^{z} = E_1(z)$

2.) $(1-z)e^{z+\frac{z^2}{2}} = E_2(z)$

3.) $(1-z)e^{z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}} = E_3(z)$

. . . . . .

k.) $(1-z)e^{z+\frac{z^2}{2}+\cdots+\frac{z^k}{k}} = E_k(z)$

De adhatunk ezen primfüggvényeknek más alakot is. Ugyanis tudjuk, hogy

$$\log(1-z) = -z-\frac{z^2}{2}-\frac{z^3}{3}-\cdots = -\sum_1^\infty \frac{1}{\nu} z^\nu$$

és így $1-z = e^{\log(1-z)} = e^{-\sum_1^\infty \frac{1}{\nu} z^\nu}$

De ez a két oldal különböző, a mennyiben $1-z$ az egész számsíkon bír értelemmel, míg a jobboldali hitvény csak akkor convergens, ha $|z|<1$, így a jobboldal is csak $|z|<1$ mellett bír értelemmel. Ha most a primfüggvényekbe bevezetjük $(1-z)$-nek ezen alakját, lesz

$$E_0(z) = 1-z = e^{-\sum_1^\infty \frac{z^\nu}{\nu}}$$

$$E_1(z) = (1-z)e^{z} = e^{-\sum_2^\infty \frac{z^\nu}{\nu}}$$

$$E_2(z) = (1-z)e^{z+\frac{z^2}{2}} = e^{-\sum_3^\infty \frac{z^\nu}{\nu}}$$

. . . . . .

$$E_k(z) = (1-z)e^{z+\frac{z^2}{2}+\cdots+\frac{z^k}{k}} = e^{-\sum_{k+1}^\infty \frac{z^\nu}{\nu}}$$

Tehát minden $(+1)$-hez tartozó primfüggvényt két alakban írhatunk, az egyik convergens az egész számsíkon, a másik csak $|z|<1$ mellett. Ezekből könnyen levezethetjük az a nullaponthoz tartozó primfactorokat, ha egyszerűen z helyébe $\frac{z}{a}$-t helyettesítünk, úgyhogy

$$E_0\left(\frac{z}{a}\right) = 1-\frac{z}{a} = e^{-\sum_1^\infty \frac{1}{\nu}\left(\frac{z}{a}\right)^\nu}$$

$$E_1\left(\frac{z}{a}\right) = \left(1-\frac{z}{a}\right)e^{\frac{z}{a}} = e^{-\sum_2^\infty \frac{1}{\nu}\left(\frac{z}{a}\right)^\nu}$$

$$E_2\left(\frac{z}{a}\right) = \left(1-\frac{z}{a}\right)e^{\frac{z}{a}+\frac{z^2}{2a^2}} = e^{-\sum_3^\infty \frac{1}{\nu}\left(\frac{z}{a}\right)^\nu}$$

. . . . . .

$$E_k\left(\frac{z}{a}\right) = \left(1-\frac{z}{a}\right)e^{\sum_1^k \frac{1}{\nu}\left(\frac{z}{a}\right)^\nu} = e^{-\sum_{k+1}^\infty \frac{1}{\nu}\left(\frac{z}{a}\right)^\nu}$$

Tehát az a nullaponthoz tartozó primfüggvényeknek is két alakjuk van, az első az egész számsíkon, a második csak $|z|<|a|$, azaz az a sugarú körön belül

convergens. Ezekből a prímfüggvényekből fogunk az alak helyes megválasztásával conv. végtelen szorzatot alkotni. Mondanunkelőtt látható, hogy ha egy transc. egész függvénynek végtelen sok o pontja van, ezek körül végtelen sok végtelen messze kell legyen, mert ha végesben volna végtelen sok, ezeknek torlodási helye singularis hely volna a függvényre nézve. Mert hiszen ha $f(z)$-nek végtelen sok o pontja van, akkor $\frac{1}{f(z)}$-nek végtelen sok pólusa van a végesben, melyeknek torlodási helye lényegesen sing. hely $\frac{1}{f(z)}$-re, tehát $f(z)$-re is, már pedig $f(z)$-nek, mint transc. egész függvénynek minden végesben lény. sing. helye és így a végtelen sok o pont sűrűsödési pontja a végtelenbe hullódik, vagyis ha a o pontokat nagyságuk szerint rendezzük sorozatba, akkor $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots$ $\lim \alpha_n = \infty$
Ha valamely o pont többszörös ott annyiszor vesszük a sorozatba, a hányszoros o pont. A o nullapontot nem vesszük a sorozatba, mert ha o a φ nullapont, egyszerűen $z^k \varphi$ szorzunk a sorozat elé, tehát feltesszük, hogy az α-k mind különbözők o tól. És most rá fogjuk mutatni a következő tételt, mely alapját képezi a már említett Weierstrass féle tételnek, ha tetszés szerint megadunk végtelen sok számot, melyeknek torlodási helye a végtelenben van,

azaz $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \dots \alpha_n \dots$ $\lim a_n = \infty$ akkor minden megadjuk szerkeszteni a prímfüggvények helyes megválasztásával azt a transc. egész függvényt, melynek épen ezek a o pontjai. E végett a prímfüggvények sorából minden α-hoz választunk egy-egy prímfüggvényt, tehát az $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \dots \alpha_n \dots$ nullapontokhoz a
$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \dots \dots \lambda_n \dots$ edik prímfüggvényt, akkor ezek egy $\varepsilon_{\lambda_1}\left(\frac{z}{\alpha_1}\right) \cdot \varepsilon_{\lambda_2}\left(\frac{z}{\alpha_2}\right) \cdot \dots \cdot \varepsilon_{\lambda_n}\left(\frac{z}{\alpha_n}\right) \dots$ végtelen szorzatot alkotnak
s ha sikerül kimutatni, hogy a λ helyes megválasztása mellett ez a szorzat feltétlenül és szorosabb értelemben véve convergens, akkor ez lesz a keresett függvény.

Lássuk tehát mikor lesz ez a szorzat szoros értelemben és feltétlenül convergens? Válasszunk egy tetszés szerinti N pos. számot, s vizsgáljuk mikor lesz a mi végtelen szorzatunk $|z| < N$ értékek mellett convergens. Mivel $\lim a_n = \infty$, csak véges a lesz kisebb mint N, a többi mind nagyobb, tegyük fel hogy még $\alpha_n < N$, de már $\alpha_{n+1} > N$, akkor ennek megfelelőleg a végtelen szorzatot is két részre fogjuk szedni $\prod_{\nu=1}^{n} \varepsilon_{\lambda_\nu}\left(\frac{z}{\alpha_\nu}\right) \cdot \prod_{\nu=n+1}^{\infty} \varepsilon_{\lambda_\nu}\left(\frac{z}{\alpha_n}\right)$
az első szorzat véges és így csak a második szorzat convergentiáját kell meg-

vizsgálnunk, tehát a $\prod_{n=n_1}^{\infty} \xi_{\lambda_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)$ szorzat convergentiáját oly z-k, szorzat convergentiáját oly z-k,
melyek $|z|<N$. Minthogy ennek szorzatban az n-ek mind $>N$, azért $\left|\frac{z}{a}\right|<1$, tehát
szabad a szorzatban szereplő primfüggvényekre a másodikik alakot használ-
ni, úgyhogy $\prod_{n=n_1}^{\infty} \xi_{\lambda_n}\left(\frac{z}{a_n}\right) = \prod_{n=n_1}^{\infty} e^{-\sum_{r=1}^{\lambda_n} \frac{1}{r}\left(\frac{z}{a_n}\right)^r}$
ezen szorzat minden egyes tagja exponenciális függvény s az exponensek össze-
gezésével ezt egy exp. függvénnyé vonhatjuk össze tehát

$$= e^{-\sum_{n=n_1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\lambda_n} \frac{1}{r}\left(\frac{z}{a_n}\right)^r}$$

a mennyiben a szorzatra vonatkozó indexet a második összegzési jel alá írjuk.
A mi feladatunk tehát arra vonatkozólódott, kimutatni, hogy mindig lehet
a λ-kat úgy választani, hogy az exponensben álló kettős összeg feltétlenül con-
vergens legyen, mert hisz akkor a végtelen szorzat is feltétlenül convergens lesz.
A $\sum\sum$ feltétlenül convergens lesz, ha tagok abs. értékeinek sora convergens; de

$$\sum_{n=n_1}^{\infty} \sum_{r=\lambda_{n+1}}^{\infty} \frac{1}{r}\left|\frac{z}{a_n}\right|^r < \sum_{n=n_1}^{\infty} \sum_{r=\lambda_{n+1}}^{\infty} \left|\frac{z}{a_n}\right|^r$$

a belső $\sum$-ban n állandó, csak r változik λ_{n+1}-től ∞-ig, explicite

$$\sum_{r=\lambda_{n+1}}^{\infty} \left|\frac{z}{a_n}\right|^r = \left|\frac{z}{a_n}\right|^{\lambda_{n+1}} + \left|\frac{z}{a_n}\right|^{\lambda_{n+2}} + \left|\frac{z}{a_n}\right|^{\lambda_{n+3}} + \ldots = \left|\frac{z}{a_n}\right|^{\lambda_{n+1}} \left(1 + \left|\frac{z}{a_n}\right| + \left|\frac{z}{a_n}\right|^2 + \ldots\right)$$

$\left|\frac{z}{a_n}\right|<1$ $= \frac{\left|\frac{z}{a_n}\right|^{\lambda_{n+1}}}{1-\left|\frac{z}{a_n}\right|}$ és így $\sum_{n=n_1}^{\infty} \sum_{r=\lambda_{n+1}}^{\infty} \frac{1}{r}\left|\frac{z}{a_n}\right|^r < \sum_{n=n_1}^{\infty} \frac{\left|\frac{z}{a_n}\right|^{\lambda_{n+1}}}{1-\left|\frac{z}{a_n}\right|}$

ezen utóbbi sor általános tagja következő sor általános tagjával egyenlőrangu
$\sum_{n=n_1}^{\infty} \left|\frac{z}{a_n}\right|^{\lambda_{n+1}}$, mert hiszen hányadosuk limese $\lim_{n} \frac{1}{1-\left|\frac{z}{a_n}\right|} = 1$. Ha tehát a λ-kat
úgy választjuk – ezt pedig lehet – hogy $\sum_{n=n_1}^{\infty} \left|\frac{z}{a_n}\right|^{\lambda_{n+1}}$ sor convergens legyen, akkora
vele egyenlő rangú sor is convergens, és így maga a végtelen szorzat is feltétle-
nül convergens lesz. Ezen utolsó sor convergentia criteriumma tehát megegyez-
tik a végtelen szorzat convergentia criteriumainak a λ-t illetőleg. Ezt pl. mind-
dig elérjük, ha mindegyik λ-t kisebbnek vesszük mint az indexe, azaz $\lambda_n<n$
pl. $\lambda_n = n-1$, mert akkor $\lambda_{n+1} = n$ és akkor $\sum_{n=n_1}^{\infty} \left|\frac{z}{a_n}\right|^n < \sum_{n=n_1}^{\infty} \left|\frac{z}{a_{n+1}}\right|$, mert nagyobbitunk,
hamindegyik a helyébe a legkisebbet t. i. a_{n+1}-et tesszük. De $\left|\frac{z}{a_{n+1}}\right|<1$, úgyhogy
az utóbbi geometriai s. r. convergens, tehát a másénál kisebb sor is, és így ma-
ga a végtelen szorzat is. Így választva tehát a λ-kat, a függvények belől alkotott
végtelen szorzat feltétlenül és szorosabb értelemben convergens lesz.

Gyakori eset az, hogy a nullpontok reciprokjaihoz lehet találni oly
λ pos. exponenst, hogy $\sum_{n=n_1}^{\infty} \left|\frac{1}{a_n}\right|^\lambda$ convergens legyen. Ilyenkor mindenik λ-t
kisebbnek kell választani mint λ-at pl. $\lambda = \lambda - 1$, mert akkor

$\sum_{k=n+1}^{\infty} \left|\frac{z}{\alpha_k}\right|^{\lambda_{k+1}} = |z|^s \sum_{k=n+1}^{\infty} \left|\frac{1}{\alpha_k}\right|^s$ convergens lesz, tehát a végtelen szorzatis.

Így pl. a sinus függvény 0 pontjai $\pm\pi \pm 2\pi \pm 3\pi \cdots\cdots \pm n\pi \cdots\cdots$ és a reciprokok általános tagjának abs. értéke $\frac{1}{n\pi}$ s mivel $s=2$ mellett $\frac{1}{\pi}\sum\left(\frac{1}{n}\right)^2$ convergens, azért $\lambda = s-1 = 1$ mellett vagyis mindegyik prímfüggvényre az első alakot használva, a sinust végtelen szorzat alakjában állíthatjuk elő. Tehát kimutattuk, hogy λ czélszerű megválasztásával mindig el tudjuk érni, hogy a prímfüggvényekből alkotott végtelen szorzat feltétlenül convergens legyen. És most be kell bizonyítani, hogy ez a szorzat a kívánt tulajdonságokkal bír. Először is nyilvánvaló, hogy a $E_{\lambda_1}\left(\frac{z}{\alpha_1}\right)\cdot E_{\lambda_2}\left(\frac{z}{\alpha_2}\right)\cdots E_{\lambda_n}\left(\frac{z}{\alpha_n}\right)\cdot e^{\sum_{k=n+1}^{\infty}\sum_{r=\lambda_{k+1}}^{\infty}\frac{1}{r}\left(\frac{z}{\alpha_k}\right)^r}$ végtelen szorzat az egész számsíkon convergens, mert hiszen convergens, ha $|z| < N$, hol N tetszés szerinti nagy szám. Továbbá analyt. függvény, mert hisz minden factor analyt. függvény; az utolsóban az exponens maga is hatványsor lévén, azt össze lehet vonni egy hatványsorrá, és így az egészet egy z pos. egész hatványai szerint haladó sorrá lehet összevonni, a mely $z \neq \alpha_k$ értékek mellett nem tünik el sohasem, ha pedig z rendre $z = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n \cdots$: akkor az illető factorok is rendre eltünnek, velök az egész: függvényes így ezek az α-k mind 0 pontjai lesznek a végtelen szorzattal értelmezett függvénynek. Azonkívül ha valamelyik α κ-szoros 0 pont, akkor az illető prímfüggvény κ-szor jelenik meg a szorzatban és írhatunk helyébe $(1-\frac{z}{\alpha})^\kappa$.

Ez Weierstrassnak főtétele. Ennek segélyével most már könnyü lesz kimutatni azt a tételt, hogy minden transc. egész függvényt elő lehet állítani mint prímfüggvények szorzatát, ha ennek a függvénynek végtelenek nullapontja van, a melyeknek limese $\lim \alpha_n = \infty$, mert hiszen transc. eg. függvény. Legyen tehát $F(z)$ a szerkesztendő transc. egész függvény, s most az ismert módon alkossuk meg azt a végtelen szorzatot $g(z)$, melynek 0 pontjai ugyanazok, mint az $F(z)$-éi, melyek adva vannak, akkor megvolna az $\frac{F(z)}{g(z)}$ hányadost, vizsgáljuk ennek tulajdonságait. Mind a felső mind az alsó transc. egész függvény, tehát a végesben nincs sing. helyük de a hányadosnak sincsen, mert $g(z)$ függvény 0 pontjai csak látszólagos singularitások, mert hiszen, ha a egyik és pedig κ-szoros nullapont ez az $F(z)$-nek is κ-szoros nullapontja lévén $\frac{F(z)}{g(z)} = \frac{A_\kappa(z-\alpha)^\kappa + A_{\kappa+1}(z-\alpha)^{\kappa+1} + \cdots\cdots}{B_\kappa(z-\alpha)^\kappa + B_{\kappa+1}(z-\alpha)^{\kappa+1} + \cdots\cdots}$

és ezt val. helyettesítsük $(z-\alpha)^{\kappa}$-val $= \dfrac{A_\kappa + A_{\kappa+1}(z-\alpha)+\dots\dots\dots}{B_\kappa + \underbrace{B_{\kappa+1}(z-\alpha)+\dots\dots\dots}_{\varphi(z)}}$

$= [A_\kappa + A_{\kappa+1}(z-\alpha)+\dots\dots][B_\kappa+\varphi(z)]^{-1} = P(z|\alpha)$

Tehát az $\frac{F(z)}{G(z)}$ függvény sorbafejthető ezen α körül, mely $G(z)$-nek α pontja; ugyanez áll $G(z)$ valamennyi nullapontjaira, úgyhogy ez a függvény az egész számsíkon csupa közönséges helyekkel bír, mivel nincsenek α pontjai, ily alakra hozható $\frac{F}{G} = e^{f(z)}$, úgyhogy $F(z) = G(z)\cdot e^{f(z)}$

Tehát az $F(z)$ ismeretes nullapontjaiból még csak a $G(z)$ végtelen szorzatot tudjuk megalkotni, de ott szerepel a teljes előállításban az $e^{f(z)}$ ismeretlen függvényis, mint határozatlan factor, sőt ennek meghatározása okoz nehézséget.

Még egy tételt mutassunk ki, mely szerint ha egy egyértékű analyt. függvényről tudjuk, hogy csakis a végtelen távoli helyen van lény. singularis helye, akkor ezt mindig előtudjuk állítani mint két transc. egész függvény hányadosát. Mert legyen $F(z)$ ez az egyértékű analyt. függvény, melynek végtelen lény. sing. helye. Mivel végesben csak polusai vannak, s pedig véges számmal

$\beta_1\ \beta_2\ \beta_3\ \beta_4 \dots\dots \beta_\kappa$ sokszorossági szám
$r_1\ r_2\ r_3\ r_4 \dots\dots r_\kappa$ akkor megszüntetve a polarítást

$$\underbrace{F(z)\cdot(z-\beta_1)^{r_1}\cdot(z-\beta_2)^{r_2}\dots\dots(z-\beta_\kappa)^{r_\kappa}}_{f(z)} = G(z)$$

már transc. egész függvény, mert végesben nincs singularitása, és így

$$F(z) = \frac{G(z)}{f(z)}$$

két transc. egész függvény hányadosa, melynek alsója rat. egész függvény. Ha a polusok száma végtelen akkor $\beta_1\ \beta_2\ \beta_3 \dots\dots \beta_n \dots$ $\lim \beta_n = \infty$ ép ezért lehet oly transc. egész függvényt, $G(z)$ szerkeszteni, melynek ezek a polusok a helyei, és akkor $F(z)\cdot G(z)$ szorzatnak már sehol sem lesz polusa. Mert tegyük fel, hogy valamelyik β κ-szoros α pontja $G(z)$-nek, akkor

$$G(z) = (z-\beta_1)^{\kappa}\cdot G_1(z)$$

a hol $G_1(z)$ transc. egész függvény, melynek β_1 már nem α pontja, és így

$$F\cdot G = F\cdot(z-\beta_2)^{\kappa}\cdot G_1 = P(z|\beta)$$

azaz β_1 erre a szorzatra nézve már közönséges hely és így a körül sorbafejthető. Ugyanez ismétlődik a többi polusokkal. Úgyhogy ha

$$F(z)\cdot G(z) = F_1(z) \quad , \quad F(z) = \frac{F_1(z)}{G(z)}$$

azaz $F(z)$ előállítható mint két transc. egész függvény hányadosa. Ha visszatekintünk, erre vonatkozólag három tételt nyertünk:

1.) Ha egy egyértékű anal. függvénynek sehol sing. helye nincsen, akkor constans.
2.) Ha egy egyértékű anal. függvénynek leény. sing. helye nincsen, akkor rat. függvény.
3.) Ha egy egyértékű anal. függvénynek a végtelen távoli helyen leény. sing. hely van, akkor az a.) transcendens egész függvény, ha nincsen polusa.
b.) két transc., esetleg egy transc. és rat. egész függvény hányadosa, ha vannak polusai.

Ezen utóbbi függvények lyanoknak tekinthetők, melyek legközelebb állanak a rat. függvényekhez. Ezeket transc. egész függvényeknek nevezzük, ha nincs polusuk, és transc. tört függvényeknek, ha van polusuk. Ilyen transc. tört függvények pl. a trigonometriai tangens és cotangens, mindkettő két transc. egészfüggvénynek hányadosa t. i. $\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}$ és $\operatorname{cotg} z = \frac{\cos z}{\sin z}$, továbbá $\sec z = \frac{1}{\cos z}$ $\operatorname{cosec} z = \frac{1}{\sin z}$.

A trigonometriai függvények szorzatalakban való előállítása.

Most alkalmazzuk a Weierstrass féle tételt a trigonometriai függvények szorzatalakban való előállítására. Vegyük először a sin függvényt. és pedig következő alakjában $\sin \pi z$

Mivan a sinus o helyei $n\pi$, azért ennek a pontjai $0 \quad \pm 1 \quad \pm 2 \ldots \pm n \ldots$ Ezek a mint már láttuk, mind egyszerű o pontok és mivel az reciprokok összegét véve $\sum \frac{1}{n^2}$ convergens, azért a mint azt fentebb láttuk $\lambda = 1$ vezető, vagyis mindegyik o pontra az első p függvényt használhatjuk, melynek a mint $E_1(\frac{z}{a}) = (1 - \frac{z}{a}) e^{\frac{z}{a}}$ s így tekintetbe véve, hogy a o nullponthoz tartozó p függvény z, kapjuk $\sin \pi z$ számára a következő végtelen szorzatot:

$$\sin \pi z = e^{f(z)} \cdot z \cdot \prod_{n=-\infty}^{+\infty}{}' \left[(1 - \frac{z}{n}) e^{\frac{z}{n}} \right]$$

a $'$ jellel mutatva, hogy n értékei közül a 0 mellőzendő; erről a π-ről tudjuk hogy feltétlenül convergens, és így még csak $f(z)$ meghatározása van hátra. E végett vegyük az egyenlet mindkét oldalának logarithmusát

$$\log \sin \pi z = f(z) + \log z + \sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}' \left(\log(n - z) - \log n + \frac{z}{n} \right)$$

mert $1-\frac{z}{n}=\frac{n-z}{n}$, s ezt most mint összetett függvényt deriválva

$$\frac{1}{\sin\pi z}\cdot\pi\cdot\cos\pi z=\pi\operatorname{ctg}\pi z=f(z)+\frac{1}{z}+\sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}'\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}\right) \qquad \text{I.}$$

s megegyszer deriválva

$$\frac{\pi^2}{\sin^2\pi z}=-f'(z)+\frac{1}{z^2}+\sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}'\frac{1}{(z-n)^2} \qquad \text{II.}$$

a mennyiben az egyenlet mindkét oldalát megszorroztuk $(z-1)$-el és miután $\frac{1}{z^2}$ épp az $n=0$ mellett $\sum$-ból hiányzó tagot pótolja, azért ezt bevéve lesz

$$\frac{\pi^2}{\sin^2\pi z}=-f'(z)+\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(z-n)^2}$$

tehát $$f'(z)=\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(z-n)^2}-\frac{\pi^2}{\sin^2\pi z} \qquad (i)$$

ezen egyenlet segélyével ki fogjuk mutatni, hogy $f'(z)$ és ennek folytán maga $f(z)$ is constans. $f(z)$-ről annyit tudunk, hogy racionális vagy transc. egész függvény, azaz

$$f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots\cdots$$

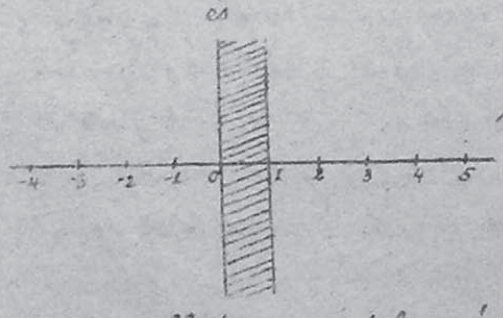
és

$$f'(z)=2a_2+2\cdot3\cdot a_3z+\cdots\cdots$$

Es most vizsgáljuk meg az (1)-ben levő két függvényt $\frac{\pi^2}{\sin^2\pi z}$ és $\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(z-n)^2}$-t, $\frac{\pi^2}{\sin^2\pi z}$ értéke végtelen nagy, ha a nevező 0 és így ennek a függvénynek végtelen sok polusa van $0,\ \pm1\ \pm2,\ \cdots\cdots\ \pm n\ \cdots\cdots$ vagyis az összes egész számok. Másfelől kimutatható, hogy ennek a függvénynek a periodusa 1; vagyanis

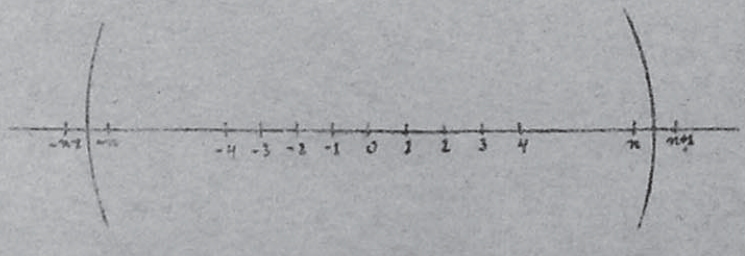
$$\sin(\pi z+\pi)=-\sin\pi z=\sin\pi(z+1)$$

$$\sin^2\pi(z+1)=\sin^2\pi z$$

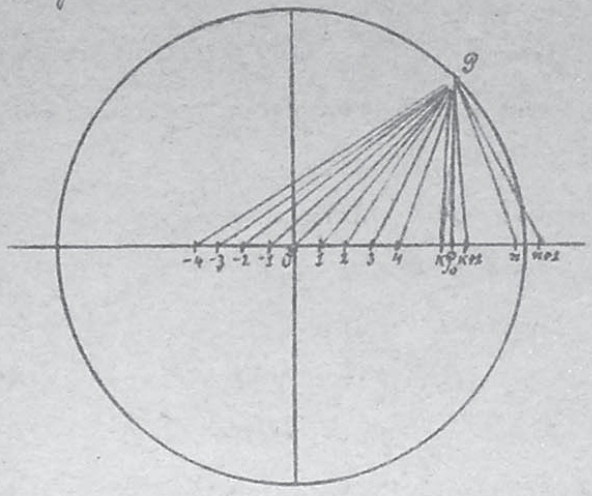


Tehát elég vizsgálni a függvényt a 0 és 1-ben emelt merőlegesek által alkotott csíkban. A $\sum$-ra nézve tudjuk, hogy convergens, mert a tagok abs. értékét véve $\sum\left|\frac{1}{z-n}\right|^2(=)\sum\frac{1}{n^2}$ mivel hányadosuk limese 1, kivárva z egész számu értékeit, mert ezek mellett is végtelenné válik; tehát ennek is az összes egész számok polusait képezik.

Már most vegyünk egy igen nagy sugarú kört, melynek sugara minden határon túl nő és a kör maga mindig két polus vaz két egészszám között menjen át. Ezen a végtelen nagysugarú körön vizsgálva a két függvényt ki fogjuk mutatni, hogy értékük állandóan véges marad, a miből következik, hogy különbségük, azaz $f'(z)$ is állandóan véges marad, tehát nem lehet sem rat. sem transc. egész függvény, mert



hiszen ezeknél mindig tudunk írni oly nagy sugarú kört, melyen a függvény értéke nagyobb, mint bármily nagy adott mennyiség, úgy tehát $f''(z)$ csakcsak. lehet. Tehát ezt mutassuk ki. A $\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z}$ periodikus függvényt véve, az $n \dots n+1$ között elterülő csíkban lévő köríven egyszerűen úgy vizsgáljuk a függvényt, hogy eltoljuk ezt a csíkot az ivel a $0 \sim 1$ csíkba. De a sinusról tudjuk, hogy értéke a végtelenbe nő, ha egyik főcsík mentén ∞-be nő és úgy $\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z}$ minden határon alúl fogy, azaz megtudunk adni egy oly M számot, melyen állandóan alúl marad a függvény értéke, vagyis állandóan véges marad. Ugyanezt fogjuk kimutatni a $\sum_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{1}{z-n}\right|^2 = \psi(z)$ függvényről. Tehát változtassuk z-t ezen a nagy sugarú körön, legyen P ez a változó pont. akkor $|z-n|$ jelenti a P pont távolát az összes egész számoktól. Ha most P helyett annak P_0 projectióját a reális tengelyen vesszük, akkor ezzel a távolságokat mind kisebbítettük, tehát $\psi(z)$-t nagyobbítottuk. Ez a P_0 vagy két egész szám közé, vagy egy egész számra esik. Az első esetben annál inkább nagyobbítunk, ha κ és $\kappa+1$ kivételével, melyek közé P_0 esik,



vesszük P_0 távolát a $\kappa+2$ vitáni illetőleg κ előtti összes egész számoktól. Igen de P_0 távola $\kappa+2$-től nagyobb mint 1, és $P_0 \sim \kappa+3 > 2$, $P_0 \sim \kappa+4 > 3$ .... és így ezen távolok helyett $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots n \dots$ véve kisebbítjük a nevezőt, tehát nagyobbítjuk a $\psi(z)$ függvényt. Ugyanez áll P_0-nak a κ előtti számoktól vett távolaira ezek helyett is $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n \dots$ véve nagyobbítjuk $\psi(z)$-t és miután a P_0-nak a κ és $\kappa+1$ pontok valamelyikétől vett távolsága $\leq \frac{1}{2}$, mert $\frac{1}{2}$ véve, ennek négyzete $\frac{1}{4}$ reciprokja 4 és kétszerese 8, mert κ és $(\kappa+1)$-től vett távolságot kisebbítettük, és így $|\psi(z)| < 2 \sum' \frac{1}{n^2} + 8$

de $\sum' \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots < 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots = 2$, tehát $\sum < 4 + 8 = 12$

Tehát mindkét függvény véges marad és így ezek különbsége $f''(z)$ nem lehet sem rat. sem transc. egész függvény, hanem const, azaz hiányzik belőle $a_3 a_4 \dots$ s így marad $f''(z) = 2a_2$, úgyhogy

$$\frac{\pi^2}{\sin^2\pi z} = -2a_2 + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-n)^2}.$$

És most hirmutatjuk, hogy $a_2 = 0$. E végett változtassuk z-t mindkét függvényben a tiszta képzetes tengelyen a végtelenbe, akkor $\lim \sin^2 \pi z = \infty$ és így $\lim \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} = 0$. Ugyanezt tegyük Σ_1-ban, $z = \kappa i$, $z - n = \kappa i - n$, $|z-n| = \sqrt{\kappa^2 + n^2}$ sha az $n=0$-

és így $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-n)^2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^2+\kappa^2}$

nak megfelelő $\frac{1}{\kappa^2}$ a Σ_1 elé visszük és a $+n$ és $-n$-hez tartozó egyenlő kifejezéseket összevonjuk, lesz $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^2+\kappa^2} = \frac{1}{\kappa^2} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+\kappa^2}$ és a Σ-t két részre-

re osztva $= \frac{1}{\kappa^2} + 2\sum_{n=1}^{\kappa} \frac{1}{\kappa^2+n^2} + 2\sum_{\kappa+1}^{\infty} \frac{1}{\kappa^2+n^2}$

és ha az első Σ-ban kihagyjuk n^2-t, akkor $\sum_{n=1}^{\kappa} \frac{1}{\kappa^2+n^2} < \frac{1}{\kappa^2} \cdot \kappa = \frac{1}{\kappa}$ és

$$\sum_{\kappa+1}^{\infty} \frac{1}{\kappa^2+n^2} < \sum_{\kappa+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \frac{1}{\kappa(\kappa+1)} + \frac{1}{(\kappa+1)(\kappa+2)} + \cdots = \frac{1}{\kappa}$$ és így írhatjuk, hogy

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^2+\kappa^2} < \frac{1}{\kappa^2} + \frac{2}{\kappa} + \frac{2}{\kappa} = \frac{1}{\kappa^2} + \frac{4}{\kappa}$$ és mivel $\lim_{\kappa=\infty} \left(\frac{1}{\kappa^2} + \frac{4}{\kappa}\right) = 0$,

$\lim_{\kappa=\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{n^2+\kappa^2} = 0$, a miből (1) szerint következik, hogy $f''(z) = 0$,

azaz $a_2 = 0$, és így $f(z)$ legfeljebb lineáris lehet, $f(z) = a_0 + a_1 z$

$f'(z) = a_1$

és most hirmutatjuk, hogy $a_1 = 0$. Ugyanis I Σ-ban $a+n$ és $-n$-hez tartozó tagokat páronként összevonva

$$\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{z+n} - \frac{1}{n} = \frac{2z}{z^2-n^2}$$ és így

$$\pi \operatorname{cotg} \pi z = a_1 + \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2-n^2}$$ és z helyébe $-z$ téve

$$-\pi \operatorname{cotg} \pi z = a_1 - \frac{1}{z} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2-n^2}$$ és összeadva következik, hogy

---

$$0 = 2a_1$$

azaz $a_1 = 0$

Tehát az $f(z)$ függvény constans, $f(z) = a_0 = C$ és ezt kell most meghatározni, azon tétel alapján, hogy $\lim_{\alpha=0} \frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1$. Mivel ugyanis $\sin \pi z = C \cdot z \prod_{-\infty}^{+\infty}{}' (1 - \frac{z}{n}) e^{\frac{z}{n}}$

osztva πz-vel lesz $\frac{\sin \pi z}{\pi z} = \frac{C}{\pi} \cdot \prod_{-\infty}^{+\infty}{}' (1 - \frac{z}{n}) e^{\frac{z}{n}}$ és mivel $z=0$ melletta baloldal 1, azért a jobboldalból maradó $\frac{C}{\pi} = 1$, azaz $C = \pi$. Ugyhogy a $\sin \pi z$ szá-

mára a következő végtelen szorzatot kapjuk

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n=-\infty}^{+\infty}{}' (1 - \frac{z}{n}) e^{\frac{z}{n}}, \qquad \text{I.}$$

a mely teljesen meg van határozva és feltétlenül convergens. Legczélszerűbb ezért a tagokat $+n$ és $-n$ hez tartozóan párosával összevonni

$$(1 - \frac{z}{n}) e^{\frac{z}{n}} \cdot (1 + \frac{z}{n}) e^{-\frac{z}{n}} = 1 - \frac{z^2}{n^2}$$ és így kapjuk ezt az egyszerűbb kife-

letet $$\sin \pi z = \pi \cdot z \cdot \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{z^2}{n^2}) \qquad \text{II.}$$

Ennek egy specziális esetéből, midőn h. i. $z=\frac{1}{2}$, hagyjuk Wallis képletét a π számára, ekkor ugyanis $\sin\frac{\pi}{2}=1$, tehát $1=\frac{\pi}{2}\prod_1^\infty(1-\frac{1}{4n^2})$ és mivel

$1-\frac{1}{4n^2}=\frac{4n^2-1}{4n^2}=\frac{(2n+1)(2n-1)}{2n\cdot 2n}$ lesz — $1=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}\cdot\frac{3\cdot 5}{4\cdot 4}\cdot\frac{5\cdot 7}{6\cdot 6}\cdots\cdots$

tehát $\frac{\pi}{2}=\frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{6\cdot 6}{5\cdot 7}\cdots\cdots$

Ez a Wallis képlete, mely Leibnitzével legelőször találtatott π számára. — A $\sin\pi z$ előállításából több képletet nyerünk, melyekre a következőkben szükségünk lesz. Ugyanis osztva πz-vel és a log. véve

$$\log\frac{\sin\pi z}{\pi z}=\sum_{n=1}^{\infty}\log(1-\frac{z^2}{n^2})$$

de $\log(1-\frac{z^2}{n^2})=-\frac{z^2}{n^2}-\frac{1}{2}\frac{z^4}{n^4}-\frac{1}{3}\frac{z^6}{n^6}-\cdots\cdots$ és így

$$\log\frac{\sin\pi z}{\pi z}=-z^2\sum_1^\infty\frac{1}{n^2}-\frac{z^4}{2}\sum_1^\infty\frac{1}{n^4}-\cdots\cdots-\frac{z^{2\kappa}}{\kappa}\sum_1^\infty\frac{1}{n^{2\kappa}}-\cdots\cdots$$

Ugyanezt a $\log\frac{\sin\pi z}{\pi z}$-t más alakban is kaphatjuk s pedig a sinus sorából

$$\sin z=z-\frac{z^3}{3.!}+\frac{z^5}{5.!}-\frac{z^7}{7.!}+\cdots\cdots$$

s most $z=z\pi$ téve és πz-vel osztva

$$\frac{\sin\pi z}{\pi z}=1-\frac{\pi^2z^2}{3.!}+\frac{\pi^4z^4}{5.!}-\cdots\cdots=1-\varphi(z)$$

és a log. véve $\log\frac{\sin\pi z}{\pi z}=\log(1-\varphi(z))=-\varphi(z)-\frac{\varphi(z)^2}{2}-\frac{\varphi(z)^3}{3}+\cdots\cdots$

mindkét előállítás a log. főértékét adja, mert $z=0$ mellett eltünik. Miután a két kifejezés identicus, kell hogy mindkettőben z ugyanazon hatványainak coefficiense egyenlők legyenek. A $\varphi(z)$ tulajdonképpen páros függvénye a πz-nek, s ennek páros kitevőjü hatványai mellett a z-ik előállításban csupa rationális törtek szerepelnek, mint $\frac{1}{3.!}$ $\frac{1}{5.!}$ stb. és ezeknek hatványai, s így hagyjuk, hogy az előállításban szereplő $\sum_1^\infty\frac{1}{n^2}$, $\sum_1^\infty\frac{1}{n^4}\ldots$ csak ezen rat. törtekben különböznek a $\pi^2, \pi^4\ldots$ -től. Ennek alapján meg lehet határozni ezen Σ-k értékeit. Így pl. z^2 coefficiense az előbben $\sum_1^\infty\frac{1}{n^2}$; z^2 a másodikban csak $\varphi(z)$-ben fordul elő, a többi tagok mind magasabb hatványokat tartalmaznak, és mivel z^2 coefficiense $\varphi(z)$-ben $\frac{\pi^2}{3.!}$, hagyjuk, hogy

$$\sum_1^\infty\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

Ezen itt előforduló rationalis törtek vezetnek az úgynevezett Bernoulli féle számokhoz.

Más képletekhez jutunk, ha az előző Σ alakunk log. veszük és deriválunk. Ekkor ugyanis $\log\sin\pi z=\log\pi+\log z+\sum_1^\infty[\log(n-z)-\log n+\frac{z}{n}]$ és deriv.

$$\pi\operatorname{cotg}\pi z=\frac{1}{z}+\sum_1^\infty{}'(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{n}) \qquad (1.)$$

$$=\frac{1}{z}+\sum_1^\infty\frac{2z}{z^2-n^2}$$

Ez nem egyéb mint a cotg. függvény parciális törtekre való bontása, a mennyiben $z=0,1,2,\ldots$ mellett ezek a törtek végtelenné válnak. Még egyszer deriválva (1)-et $\frac{\pi^2}{\sin^2\pi z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2}$ hiányjel nélkül. Itt minden pozitív is kétszeres, mert a második hatványon fordul elő.

Még egy végtelen szorzatot kapunk, ha $\sin\pi z$-ben $z-\alpha$ teszünk, ekkor ugyanis

$$\sin\pi(z-\alpha) = \pi(z-\alpha)\prod_{-\infty}^{+\infty}{}'\left(1-\frac{z-\alpha}{n}\right)e^{\frac{z-\alpha}{n}} \quad \text{és } z=0$$

$$\text{téve} \quad \sin(-\pi\alpha) = -\pi\alpha\cdot\prod_{-\infty}^{+\infty}{}'\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)e^{-\frac{\alpha}{n}}$$

ha most feltesszük, hogy α nem egész szám, akkor $\sin(-\pi\alpha)\neq 0$ és így oszthatjuk a felsőt az alsóval, s pedig tetszés szerinti módon, mert mindkettő feltétlenül convergens. Ha tehát mindkettőt keresztül szorozzuk (-1)-el, lesz

$$\frac{\sin\pi(\alpha-z)}{\sin\pi\alpha} = \left(1-\frac{z}{\alpha}\right)\prod_{-\infty}^{+\infty}{}'\frac{n+\alpha-z}{n+\alpha}e^{\frac{z}{n}}$$

$$= \left(1-\frac{z}{\alpha}\right)\prod_{-\infty}^{+\infty}{}'\left(1-\frac{z}{n+\alpha}\right)e^{\frac{z}{n}} \qquad (1)$$

Ezt a képletet is módosítjuk, arra törekszünk, hogy e exponense az α tag legyen, mely (1)-ből le van vonva t.i. $\frac{z}{n+\alpha}$. Ezt elérjük, ha felhasználjuk azt az összeget, mely $\pi\operatorname{cotg}\pi z$-t adja sebben $z=-\alpha$-t teszünk és (-1)-el keresztül szorzunk, akkor

$$\pi\operatorname{cotg}\pi\alpha = \frac{1}{\alpha} + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}'\left(\frac{1}{\alpha+n}-\frac{1}{n}\right)$$

szorozva z-vel $\pi z\operatorname{cotg}\pi\alpha = \frac{z}{\alpha} + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}'\left(\frac{z}{\alpha+n}-\frac{z}{n}\right)$ és most e-t felemelve az egyenlet (2) kétoldalára $e^{\pi z\operatorname{cotg}\pi\alpha}\cdot\frac{\sin\pi(\alpha-z)}{\sin\pi\alpha} = \left(1-\frac{z}{\alpha}\right)e^{\frac{z}{\alpha}}\prod_{-\infty}^{+\infty}{}'\left(1-\frac{z}{\alpha+n}\right)e^{\frac{z}{\alpha+n}}$

miután $n=0$ mellett a külső tagot kapjuk, ezt bevive lesz

$$e^{\pi z\operatorname{cotg}\pi\alpha}\cdot\frac{\sin\pi(\alpha-z)}{\sin\pi\alpha} = \prod_{-\infty}^{+\infty}\left(1-\frac{z}{\alpha+n}\right)e^{\frac{z}{\alpha+n}}$$ ez a kívánt elvállítás.

Ez utóbbi formulából nyerjük a

Cosinus előállítását végtelen szorzattal.

Ha ugyanis $\alpha=\frac{1}{2}$, az egész kifejezés erre reducálódik:

$$\cos\pi z = \prod_{-\infty}^{+\infty}\left(1-\frac{2z}{2n+1}\right)e^{\frac{2z}{2n+1}} \qquad \text{I.}$$

s mely egyenlet előállítja a $\cos\pi z$-t 0 pontjainak felhasználásával, ezek pedig $\pm\frac{1}{2} \quad \pm\frac{3}{2} \quad \pm\frac{5}{2} \ldots\ldots\ldots$

Midőn $n=0$ ugyanazt a tényezőt adja, mint $n=-1$

$n=1$ " " " " " $n=-2$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$n=n$ " " " " " $n=-n-1$

ezeket párosával összehasonlítjuk; ugyanis n-hez tartozik

$\left(1-\frac{2z}{2n+1}\right)e^{\frac{2z}{2n+1}}$ és $(-n-1)$-hez tartozik

$(1+\frac{2z}{2n+1})e^{-\frac{2z}{2n+1}}$ a kettő szorzata $1-\frac{4z^2}{(2n+1)^2}$

Ugyhogy $\cos\pi z = \prod_0^\infty (1-\frac{4z^2}{(2n+1)^2}) = (1-4z^2)(1-\frac{4z^2}{9})(1-\frac{4z^2}{25})\ldots\ldots$

Ezen utolsó előállításban azonban nem jerinfüggvények szerepelnek, mert itt két-két nullapontot van egybe vonva. Ulog. deriválásával ebből l. i. I-ből is ujabb formuleát nyerünk, l. i. $-\pi\,\mathrm{tg}\,\pi z = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}' (\frac{2}{2z-(2n+1)} + \frac{2}{2n+1})$ még egyszer deriválva $\frac{\pi^2}{\cos^2\pi z} = -\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{4}{[2z-(2n+1)]^2}$ vagy az előbbi formulában a $+n$ és $-n$ hez tartozó tagokat összevonva

$$-\pi\,\mathrm{tg}\,\pi z = \sum_0^\infty \frac{4z}{4z^2-(2n+1)^2}$$

Külömben más uton is megkaphatjuk $z\cos\pi z$ előállitását. Ha ugyanis

$$\sin\pi z = \pi z \prod_{-\infty}^{+\infty}{}' (1-\frac{z}{n})e^{\frac{z}{n}} \qquad z=2z \text{ tesszük}$$

$$\sin 2\pi z = 2\pi z \prod_{-\infty}^{+\infty}{}' (1-\frac{2z}{n})e^{\frac{2z}{n}}$$

Ezt a szorzatot osszuk két részre. Az egyiket alkossák a páros a másikat a páratlan számokhoz tartozó tényezők, észrevéve, hogy az $n=2k$ - hoz tartozó szorzatban $-\infty \ldots +\infty$ veendő a k, kivéve 0 és az $n=2k+1$ - hez tartozó szorzatban a k, 0-t is, ugyhogy $\sin 2\pi z = \underbrace{2\pi z \prod_{k=-\infty}^{+\infty}{}' (1-\frac{z}{k})e^{\frac{z}{k}}}_{\sin\pi z} \cdot \prod_{k=-\infty}^{+\infty}(1-\frac{2z}{2k+1})e^{\frac{2z}{2k+1}}$

De az első rész nem egyéb, mint $\sin\pi z$, azaz

$$\sin 2\pi z = 2\sin\pi z \prod_0^\infty (1-\frac{2z}{2n+1})e^{\frac{2z}{2n+1}}$$

és mivel

$$\sin 2\pi z = 2\sin\pi z \cdot \cos\pi z,$$

kapjuk a $\cos\pi z$ ismeretes előállitását $\cos\pi z = \prod_0^\infty (1-\frac{2z}{2n+1})e^{\frac{2z}{2n+1}}$

A transcendens tört függvények partiális törtekre való felbontása.

A racionális egész függvényeket fel tudtuk bontani jerinfaktorokra, a transcendens egész függvényeket jerinfüggvényekre, tehát minden esetben oly szorzókra, melyeknek csak egy nullapontjuk van. Lássuk most mire hasonló analogia a transc. tört függvényeknél, azaz fel tudjuk e bontani ezeket is, mint a rat. tört függvényeket partiális törtekre? Látni fogjuk, hogy ez lehetséges, a part. tört alakjának némi módositásával. Az erre vonatkozó Mittag-Leffler svéd mathematikustól, Weierstrass tanitványától származik. —

Transc. tört függvény nek nevezünk olyan egyértékű analytikus függvényt, $F(z)$, melynek a végtelenben lény. sing. helye van, a végesben csak polusok vannak és pedig véges vagy végtelen nagy számmal. Vegyük először azt az esetet midőn $F(z)$-nek véges számú polusai vannak

$\beta_1\ \beta_2\ \beta_3\ \dots\ \beta_n$ sokszorossági számok

$\varkappa_1\ \varkappa_2\ \varkappa_3\ \dots\ \varkappa_n$

akkor ismeretes, hogy $F(z)(z-\beta_1)^{\varkappa_1}$ a β_1 helyen már nem bír polussal, tehát a körül sorbafejthető

$$F(z)(z-\beta_1)^{\varkappa_1} = A_0 + A_1(z-\beta_1) + \dots + A_{\varkappa-1}(z-\beta_1)^{\varkappa-1} + A_\varkappa(z-\beta_1)^\varkappa + \dots$$

tehát

$$F(z) = \underbrace{\frac{A_0}{(z-\beta_1)^{\varkappa_1}} + \frac{A_1}{(z-\beta_1)^{\varkappa_1-1}} + \dots + \frac{A_{\varkappa-1}}{z-\beta_1}}_{\psi_1(z)} + \underbrace{A_\varkappa + A_{\varkappa+1}(z-\beta_1) + \dots}_{P(z/\beta_1)}$$

Tehát $F(z) - \psi_1(z) = P(z/\beta_1)$

különbségnek már nem polusa. Ez áll minden polusra, mindegyikhez tartozó partiális törtek összegét levonva $F(z)$-ből, a különbségre nézve az illető polus már közönséges hely. Legyenek tehát a $\beta_1\ \beta_2\ \dots\ \beta_n$ polushoz tartozó partiális törtösszegek $\psi_1\ \psi_2\ \dots\ \psi_n$ akkor nyilvánvaló, hogy

$$F(z) - \psi_1(z) - \psi_2(z) - \dots - \psi_n(z) = G(z)$$

különbségnek már nincsenek véges polusai; mert $F(z) - \psi_1(z)$-nek β_1 nem polusa, egyszerűen $\psi_2 \dots \psi_n$ sem; $F(z) - \psi_1(z)$-nek β_2 nem polusa egyszerűen $\psi_1\ \psi_3 \dots \psi_n$-nak sem stb. tehát egy sem polus, csak a végtelen távoli hely lény. sing. hely, a miből következik, hogy $G(z)$ transc. egész függvény és így

$$F(z) = G(z) + \psi_1(z) + \psi_2(z) + \dots + \psi_n(z)$$

Tehát véges számú polusok esetén a transc. tört függvény előállítható mint az egyes polusokhoz tartozó partiális törteknek és egy, még határozatlan, transc. egész függvénynek összege. Ez Mittag-Lefflernek tétele véges polusok esetén. Most tegyük fel, hogy $F(z)$-nek végtelen sok polusa van. Itt már hasonló nehézség mutatkozik, mint a transc. egész függvénynél, a mennyiben a partiális törtek végtelen összege nem fog convergens sort alkotni. Erre egyszerű példát szolgáltat a cotg. függvény, lévén $\operatorname{cotg} z = \frac{\cos z}{\sin z}$, ezen transc. tört függvénynek pólusai a sinus 0 pontjai, tehát $\varkappa\pi$, $(\varkappa = 0, \pm 1 \dots \infty \dots -\infty)$.

Lássuk mi a $\varkappa\pi$-hez tartozó partiális tört (csak egy van, mint $\varkappa\pi$ egyszerű pólus.)

Ennek végett $z = \varkappa\pi + h$

$$\operatorname{cotg}(\varkappa\pi + h) = \frac{\cos(\varkappa\pi + h)}{\sin(\varkappa\pi + h)} = \frac{(-1)^\varkappa \cos h}{(-1)^\varkappa \sin h} = \frac{\cos h}{\sin h} = \frac{1 - \frac{h^2}{2!} + \frac{h^4}{4!} - \dots}{h - \frac{h^3}{3!} + \frac{h^5}{5!} - \dots}$$

tehát $h \cdot \operatorname{cotg}(x\pi + h) = \frac{1 - \frac{h^2}{2!} + \frac{h^4}{4!} - \cdots}{h - \frac{h^3}{3!} + \frac{h^5}{5!} - \cdots}$

és mivel a nevező h bármely értékei mellett $\neq 0$, végrehajthatjuk a osztást

$$= 1 + A_2 h + A_2 h^2 + \cdots$$

és így $\operatorname{cotg}(x\pi + h) = \frac{1}{h} + A_2 + A_2 h^2 + \cdots$

tehát a $x\pi$-hez tartozó parciális tört $\frac{1}{h} = \frac{1}{z - x\pi}$ és most $\sum_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1}{z - x\pi} \right| (=) \sum_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1}{x\pi} \right|$

lévén, ez utóbbi divergens, tehát a parciális törtek összege divergens sort alkot. Ezért módosítjuk a parciális törtek alakját és bebizonyítjuk a következő tételt, mely Mittag-Lefflertől származik. Ha veszünk tetszés szerinti végtelen sok számot, melyek abs. érték nagyság szerint rendezve végtelen limesszel bíró számsorozatot alkotnak $\beta_1\ \beta_2\ \beta_3\ \beta_4 : \cdots \beta_n \cdots \lim \beta_n = \infty$ és minden egyes pólushoz tetszés szerinti számegyütthatókkal parciális tört összegeket alkotunk, tehát pl $\psi_2(z) = \frac{A_1'}{(z-\beta_2)^{n_2}} + \frac{A_2}{(z-\beta_2)^{n_2-1}} + \cdots + \frac{A_{n-1}}{z - \beta_2}$ s megfelelőleg $\psi_2\ \psi_2\ \psi_3 : \cdots \psi_n \cdots :$ akkor mindig tudunk szerkeztetni olyt transc. tört függvényt, melynek képpen ezek a pólusai és ezek a parciális törtjei: E végett módosítsuk a part. tört összeg alakját. Legyen általánosan

$$\psi = \frac{A_0}{(z-\beta)^n} + \frac{A_1}{(z-\beta)^{n-1}} + \cdots + \frac{A_{n-1}}{(z-\beta)}$$

ezeket a törteket közös alsóra hozva, kapunk egy tört függvényt, melynek felsője egy $(n-1)$-ed fokú rat. egész függvény $\varphi(z)$ alsója $(z-\beta)^n$, tehát

$$\psi = \frac{\varphi(z)}{(z-\beta)^n}$$

Ez lesz a parciális törtek módosított alakja. Ezt a tört függvényt minden hely körül sorba tudjuk bontani, kivéve a β helyet; tehát bontsuk sorba pl. o körül:

$$\psi(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots$$

ez a sor convergens egy o centrumu, β-n átmenő körön belül, melynek sugara tehát $\varrho = \beta$, tehát convergens, ha $|z| < \varrho$ és pedig itt egyenletesen convergens, azaz bármily kis ε megadása után fel tudjuk bontani n-es r két részre, egy véges és egy végtelen részre, mely utóbbi abs. értékre nézve kisebb mint ε; pl vegyünk egy o centrumu, $\frac{\varrho}{2}$ sugarú kört és bontsuk fel $\psi(z)$-t egy véges, tehát egész rat. $\chi(z)$ és egy végtelen $R(z)$ részre

$$\psi(z) = \chi(z) + R(z)$$

a mely $|R(z)| < \varepsilon$, ha tehát $|z| < \frac{\varrho}{2}$; akkor $\psi(z) - \chi(z) = R(z)$

És most következőleg jutunk a keresett függvényhez. Tegyük következő convergens sort

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \cdots + \varepsilon_n + \cdots$$

és mindegyik $\beta_1\ \beta_2\ \beta_3 \ldots\ldots\ldots \beta_n \ldots$ polusokra tartozó

$\psi_1\ \psi_2\ \psi_3 \ldots\ldots\ldots \psi_n \ldots$ partialis törtösszeget

a körül sorba bontva, osszuk a sort két részre, úgyhogy

$|R_1(z)| < \varepsilon_1$, $|R_2(z)| < \varepsilon_2$, $\ldots\ldots |R_n(z)| < \varepsilon_n$ .. legyen;

ezen két részre való osztásnál felléjövő $\chi_1(z), \chi_2(z), \ldots \chi_n(z) \ldots$

mut. egész függvényeket levonva a partialis törtekből legyen

$$\psi_1 - \chi_1 = \omega_1 \ , \ \psi_2 - \chi_2 = \omega_2 \ \ldots\ldots \ \psi_n - \chi_n = \omega_n$$

a mely ω-k tulajdonképpen egyszerűek, mint az R-k; akkor bebizonyítjuk, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n = \omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_n + \ldots$ feltétlenül convergens sort alkot minden helyen, mely nem polus. E végett legyen $|z| = N$ és az összes polusokat osszuk két részre, véges számú polus: pl az n első polus kisebb mint $2N$, a többi nagyobb, mint $2N$, s most az ω sort is osszuk fel két részre $\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n = \sum_{n=1}^{n} \omega_n + \sum_{n=n+1}^{\infty} \omega_n$ és most hi fogjuk mutatni, hogy $\sum_{n+1}^{\infty} \omega_n$ convergens, mert hiszen $\sum_1^n \omega_n$ véges. Ez pedig könnyen kimutatható, mert hisz $k = n+1, n+2, \ldots$ mellett

$$\varrho_1 = |\beta_n| > 2N$$

tehát

$$\frac{\varrho_1}{2} = \left|\frac{\beta_n}{2}\right| > N$$

és miután minden oly $|z|$ értékek mellett, melyek $|z| < \frac{\varrho_1}{2}$ az I egyenlőtlenségek állanak, azért, leven $|z| = N < \frac{\varrho_1}{2}$

$$\sum_{n+1}^{\infty} |\omega_n| < \sum_{n+1}^{\infty} \varepsilon_n \ ,$$

a mely utóbbi sor pedig convergens, tehát az ω_n sora is convergens és pedig feltétlenül és egyenletesen convergens. Most kellene kimutatni, hogy $\sum_1^n \omega_n$ analytikai függvény, melynek ezen β-k a polusai és ezen ψ-k a partialis törtjei; mert hiszen $\sum_1^{\infty} \omega_n$ egyenletesen convergens, tehát minden egyes tagját sorbabontva oly hely körül, mely nem polus szabad ezen sorokat összevonni, tehát ez a függvény analyt. függvény. A mi a polusokat illeti, ha vesszük pl β_1-et és ω_1-t az összegből elkülönítjük, akkor

$$\sum_2^{\infty} \omega_n = \omega_1 + \sum_2^{\infty} \omega_n$$

a második részre nézve β_1 nem polus, tehát e körül sorbabontható, és miután $\omega_1 = \psi_1 - \chi_1$ a mely χ mint mut. egész függvény a β_1 körül szintén sorbabontható, azért ezen két sorbabontást összevonva és $P(z/\beta_1)$-el jelölve, lesz.

$$\sum_1^{\infty} |\omega_n| = \psi_1 + P(z/\beta_1)$$

a mi nem

jelent egyebet, mint azt, hogy β_1 a Σ-ra nézve pólus, mert $z=\beta_1$ mellett $\psi_1=\infty$ és hogy ez a ψ_1 a β_1-hez tartozó partiális törtösszeg ezen Σ-ra nézve. Ugyanez áll valamennyi β-ra és ezzel a tétel ki van mutatva.

Ennek alapján most már könnyü kimutatni azt a tételt, hogy minden transc. tört függvényt elő lehet állitani, mint partiális törteknek és egy transc. egész függvénynek összegét. Ha ugyanis

$$\beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3 \quad \cdots \quad \beta_n \quad \cdots \qquad \lim \beta_n = \infty$$

az $F(z)$ pólusai, és minden pólushoz veszünk egy partiális tört összeget tetszésszerinti számcoefficiensekkel $\psi_1 \quad \psi_2 \quad \psi_3 \cdots \psi_n \cdots$ és megszerkesztjük az előbbiek alapján azt a transc. tört függvényt, $G(z)$-t, melynek ezek a pólusai és partiális törtjei, akkor az

$$F(z) - G(z) = H(z)$$

különbség-függvény már transc. egész függvény, mert ennek a végesben már nincsen pólusa, mivel pl. β_1 körül $F(z) = \psi_1 + P_1(z/\beta_1)$, $G(z) = \psi_1 + P_1(z/\beta_1)$ tehát $H(z) = \psi_1 + P_1(z/\beta_1) - (\psi_1 + P_1(z/\beta_1)) = P(z/\beta_1)$.

Tehát β_1 körül $H(z)$ sorbafejthető; ejjen úgy $\beta_2 \cdots \beta_n \cdots$ körül és igy

$$F(z) = G(z) + H(z)$$

vagyis az $F(z)$ transc. tört függvény elő van állitva mint egy transc. egész függvénynek és partiális törteknek ($G(z)$) összege. Ha ∞ is pólus akkor ennek partiális törtjeit $\frac{A_1}{z}$ nem módositjuk.

Periodusos függvények.

Jakobi szerint ennek tárgyalásánál a független változót u-val fogjuk jelölni. A period. függvény definitiója a következő. Valamely analytikai függvény periodusos, és a periodusa p, ha

$$f(u+p) = f(u)$$

és pedig u minden értékénél. Ezen periodusos függvényekre a következő tételek állanak: Ha egy függvénynek p és q külön periodusa, akkor $p+q$ is periodus, mert ha

$$f(u+p) = f(u)$$
$$f(u+q) = f(u)$$

u minden értéke mellett, akkor $u = u+p$ révén

$$f(u+p+q) = f(u+p) = f(u)$$

a periodus ellentettje is periodus, mert ha

$$f(u+p) = f(u)$$

$$f(u) = f(u-p)$$

és $u = u-p$

a két tételből következik az az általános tétel, hogy ha p periodus, akkor ennek így pos. mint neg. egész számu sokszorosai $\pm 2p \pm 3p \cdots \pm \kappa p \cdots$ is periodusok. Ha $\kappa = 0$, kapjuk 0, de ez nem igazi periódus. A κp, $(\kappa = 0, 1, 2 \cdots)$ vel adott periodusokat a p-ből levezetett periodusoknak nevezzük. Ha p és q is periodus, akkor az előbbiek szerint $mp+nq$ is periódus, a hol $\frac{m}{n} = -\infty \cdots +\infty$ Ezen periodusokat p és q-ból levezetett periodusoknak nevezzük. És általánosan, ha $p_1, p_2, p_3, \cdots \cdots p_\kappa \cdots$ periodusok, akkor

$$n_1 p_1 + n_2 p_2 + n_3 p_3 + \cdots \cdots n_\kappa p_\kappa \qquad n_\kappa = -\infty \cdots + \infty$$

a $p_1 \cdots p_\kappa$-ból levezetett periodusok.

Ha az összes periodusok formulája κp, akkor p-t egyszerü, vagy perióduspériódusnak nevezzük, s a függvényt magát egyszerüen periódusos függvénynek. Ha az összes periodusok p és q-ból vannak levezetve, akkor a függvény kétszeresen periodusos s p és q az alap: vagy perióduspériódusok. A függvény κ-szorosan periodusos, ha összes periodusai $p_1 p_2 \cdots p_\kappa$ prímperiodusokból vannak levezetve, de a mint mindjárt látni fogjuk a függvények legfeljebb kétszeresen periodusos függvények. Ugyanis vessük fel azt a kérdést, hogy meddig mehet valamely függvény periodusosságának a száma? E végett előbb néhány segédtételt kell levezetnünk. Az első így szól: Ha adva valamely $f(u)$ függvény, mindig meg lehet adni oly pos. számot, melynél a függvény abs. értékü periodusai valamennyien nagyobbak, vagyis más szóval a függvény periodusai nem lehetnek végtelen kicsinyek. Legyen ugyanis α a függvényre nézve közönséges hely, akkor $u = \alpha + h$ léve

$$f(\alpha+h) = f(\alpha) + f'(\alpha)\,h + \frac{f''(\alpha)}{2!}h^2 + \cdots \cdots$$

s ha a κ-dik az első el nem tünő differentiálquotiens

$$f(\alpha+h) - f(\alpha) = h^\kappa \left(\frac{f^\kappa(\alpha)}{\kappa!} + \varphi(h) \right)$$

a hol $\varphi(h) = \frac{f^{\kappa+1}(\alpha)}{(\kappa+1)!}h + \cdots$, és ez a sor convergens lévén, és $h=0$ mellett 0, mindig megadhatjuk azt a ϱ számot, úgy hogy $|h| < \varrho$ mellett

$$|\varphi(h)| < \left|\frac{f^\kappa(\alpha)}{\kappa!}\right|$$

legyen,

akkor ilyen h-k mellett $f(\alpha+h)-f(\alpha)\neq 0$ ha már mostan a ϱ sugarú körön belül periodicus volna, pl. p, akkor arra nézve $f(\alpha+p)-f(\alpha)$ volna, azaz $f(\alpha+p)-f(\alpha)=0$ már pedig a ϱ sugarú kör belsejére nézve ez a különbség nem lehet 0, és így következik, hogy ezen a körön belül nincs is a függvénynek periodusa, ha nem valamennyien azon kívül feksznek, és így valamennyien nagyobbak, mint ϱ. És ha p és q is periodus, $p-q$ is periodus lévén, mivel mindegyik periodus nagyobb mint ϱ azért $|p-q|>\varrho$ azaz bármelyikét periodusnak egymástól való távolsága nagyobb, mint ez a ϱ, a miből következik, hogy a periodusok discret pontok a számsikon, és így véges területen belül csak véges számmal lehetnek.

Legyen most p_1 az $f(\alpha)$ függvénynek egy periodusa, ábrázoló pontja P_1 és húzzuk meg az OP_1 egyenest. Nincsen kizárva, hogy ezen az egyenesen p_1-nél kisebb periodus is feksznik; legyen a legkisebb p ábrázoló pontja P, mely tehát 0-hoz legközelebb fekszik, akkor ki fogjuk mutatni, hogy ez a p prímperiodusa annak végtelen sok np periodusnak, melyek ezen az egyenesen feksznek, azaz, hogy az ezen egyenesen fekvő periodusok mind p-nek egész számú többszörösei. Tehát feltesszük, hogy p a legkisebb, akkor egy fekvés szerinti más periodust véve ezen az egyenesen, p_1

$$\frac{p_1}{p}=n+r$$

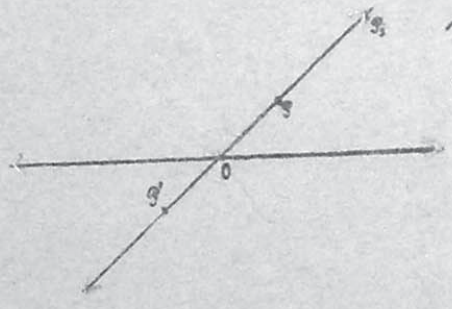
azaz e két complex szám hányadosa reális lesz, mivel szögük tehát irányfényerejük egyaránt és ez a reális szám két véges határ közé szorítható n és $n+1$ közé, tehát ha r egy 1-nél kisebb pozitiv tört szám, a hányados $n+r$ lesz; de ki fogjuk mutatni, hogy ez az r sűrűség képpen 0, mert

$$p_1=np+rp$$

Tehát $p_1-np=rp$

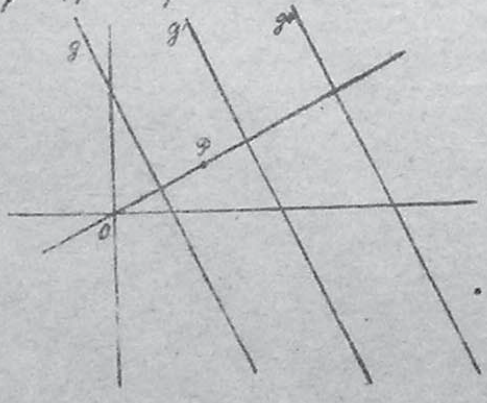
és mivel p_1 és np is periodus, azért $p_1-np=rp$ is periodus volna, azaz volna az egyenesen p-nél kisebb periodus is, a mi ellentkezik feltételeünkkel, és így $\frac{p_1}{p}=n$ azaz $p_1=np$ Tehát valamennyi periodus a legkisebbnek egész számú többszöröse. Az egyenesnek bele való megnyújtásán is végtelen sok periodus van és ezeknek legki-

sebbike, azaz 0-hoz legközelebbi ($-p$), mert ha volna egyennél közelebb fekvő, ennek ellentettje periódusvolna, de ez nem lehetséges.



Ha már most több periódus ezen az $(p,-p)$-n kívül nincsen, akkor a függvény egyszeresen periódusos, a melynek periódusai tehát mind egy egyenesen fekszenek, és a prímperiódus p.

Lássuk az ilyen egyszeresen periód. függvény tulajdonságait. Legyen ez $f(u)$, prímperiódusa p, ábrázoló pontja P. Azután vegyünk egy tetszésszerinti g egyenest, és ezt toljuk el önmagával párhuzamosan p-vel g'-be, akkor ezen gg' csíkon belül minden függvényértéket előfordul, mert hiszen ha az egész számokhoz ilyen p dimenziójú csíkokra osztjuk, ennek pontjai mind csak p-ben különbözhetnek egymástól, vagy ennek egész számú többszöröseiben; a csíkok egyik oldalát természetesen mindig a következő vagy előző csíkhoz számítjuk. A csíkok iránya tetszőleges,



azaz g tetszőleges, de nem szabad párhuzamosnak lennie $0P$-vel. Ilyen egyszeresen periódusos függvények az exponenciális és trigonometriai függvények. A legegyszerűbb függvény, melynek periódusa p, a következő: $e^{\frac{2\pi i}{p}\cdot u}$, mert

$$e^{\frac{2\pi i}{p}(u+p)} = e^{\frac{2\pi i}{p}u + 2\pi i} = e^{\frac{2\pi i}{p}\cdot u}$$

s most ki fogjuk mutatni, hogy az összes p periódusos függvények egyszerű vonatkozásba hozhatók ezzel a függvénnyel. Legyen ugyanis

$$e^{\frac{2\pi i}{p}\cdot u} = z$$

akkor $$\log z = \frac{2\pi i}{p}\cdot u. \quad \text{ebből} \quad u = \frac{p}{2\pi i}\cdot \log z$$

Ha most $f(u)$ egy tetszésszerinti u változós egyértékű p periódusos függvény, akkor

$$f(u) = f\left(\frac{p}{2\pi i}\log z\right)$$

az változó bevezetése által az f függvény látszólag végtelen sok értékűvé lett, de ez csak látszólagos, mert ha $\log z = \operatorname{Log} z + 2k\pi i$

akkor $$f\left(\frac{p}{2\pi i}\log z\right) = f\left\{\frac{p}{2\pi i}(\operatorname{Log} z + 2k\pi i)\right\} = f\left(\frac{p}{2\pi i}\operatorname{Log} z + kp\right)$$

és k p periódus lévén $= f\left(\frac{p}{2\pi i}\operatorname{Log} z\right) = F(z)$

Tehát a z változós függvény is egyértékű és így

$$f(u) = F(z) \qquad \text{és visszahozva } z \text{ értékét}$$
$$f(u) = F(e^{\frac{2\pi i}{p} \cdot u})$$

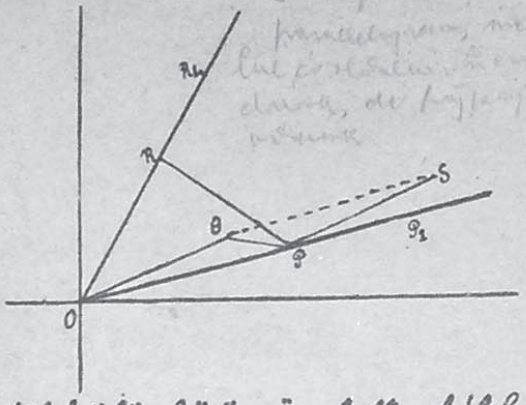
Tehát minden egyértékű p periodusos függvényt össze lehet tenni egy egyértékű F és a legegyszerűbb p periodusos függvényből. Ha $F(z)$ rat. függvény, akkor $f(u)$ minden adott értéket annyiszor veszen fel minden csikban, a hányat a rat. $F(z)$ függvény felvesszen. Pl. $\sin u$ periodusa 2π, tehát itt $p = 2\pi$ és $e^{\frac{2\pi i}{p} u} = e^{ui} = z$, de $\sin u = \frac{e^{ui} - e^{-ui}}{2i} = \frac{z - \frac{1}{z}}{2i} = \frac{z^2 - 1}{2iz}$, tehát $\sin u$ a z-nek másodfokú rat. függvénye, s így a főperiodus és minden többi csikban minden értéket 2-szer veszen fel. -

$\operatorname{tg} u$ periodusa π, tehát $e^{\frac{2\pi i}{p} u} = e^{2ui}$, úgy hogy

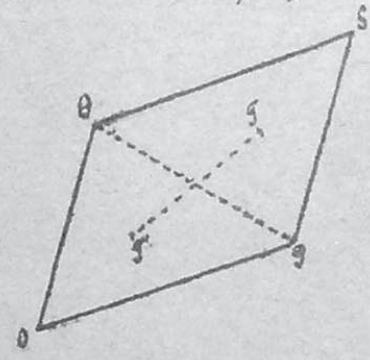
$$\operatorname{tg} u = \frac{1}{i} \frac{e^{ui} - e^{-ui}}{e^{ui} + e^{-ui}} = \frac{1}{i} \frac{e^{2ui} - 1}{e^{2ui} + 1} = \frac{1}{i} \frac{z - 1}{z + 1}$$

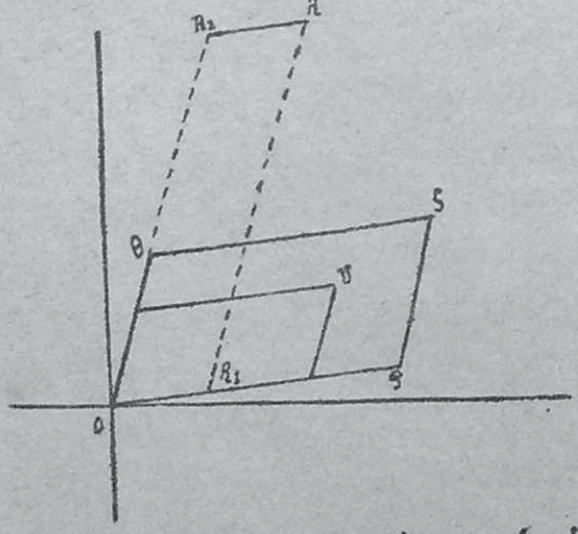
vagyis $\operatorname{tg} u$ a z-nek elsőfokú függvénye és így minden értéket csak egyszer veszen fel minden periodusban.

Lássuk most, mi történik, ha a függvénynek periodusai nem vezethetők le mind egy alapperiodusból. Tegyük fel, hogy p_1 a függvénynek egy periodusa és keressük fel az OP_1-nak azt a periodust, P mely legközelebb fekszik 0-hoz. Azután legyen R_1 egy másik periodus, az előbbitől különböző szöggel és OR_1-n szintén vegyük fel az 0-hoz legközelebb eső $R(r)$ periodust. Ekkor az OPR $\triangle$ belül esetleg lehetnek még periodusok, de csakis az előbbiektől különböző szög alatt o-ból kiinduló egyeneseken. Vegyük ezek közül azt, mely legközelebb esik OP-egyeneshez, azaz a P szögétől legkevesebbet különböző szöggel bíró egyenest és ezen keressük ki az 0-hoz legközelebb eső periodust, ez legyen Q. Így OPQ-ban oly háromszöget nyertünk, melyen belül és az oldalain nincsenek periodusok, csak a szögpontok ilyenek, és pedig p és q. Miután p és q periodus, keressük fel ennek S prontját, Könnyű látjuk, hogy az $OPQS$ parallelogrammán belül nincs a függvénynek periodusa, sem az oldalain, csak a csúcsokban. Az OPQ $\triangle$-ről kimu-



tattuk, ki kell mutatni a $PQSΔ$ ről. Tegyük fel hogy itt volna egy T periódus akkor ez szükségképpen maga után vonna egy periódust az első $Δ$-ben T_1; mert hiszen ha $p+q$ és t periodus, akkor $p+q-t=t'$ is periódus, de akkor $\frac{p+q}{2}=\frac{t+t'}{2}$ volna, azaz TT' felezőpontja összeesnék PQ felezőpontjával, tehát T' bennefeküdnék OPQ $Δ$-ben, de ez ellenmondás is így $PQSI$-ben nem lehet periodus, tehát $OPQSI$-ben sem. Tehát kimutattuk olyan parallelogramma létezését, melyen belül és oldalain nincsenek periódusok, de szögpontjai periódusok. És most kimutatjuk, hogy a többi periodus mind levezethető, P és Q-ból, a miről ki lesz mutatva, hogy a függvények legfeljebb kétszeresen periodusosak lehetnek. E végett tegyük fel, hogy megkaptuk a fenntí $OPQSI$□-et és hogy az $f(u)$ függvény egy tetszésszerinti periodusa $r=R$. Kimutatjuk, hogy $r=mp+nq$.





E végett húzunk R-nát OP és OQ-val parallelekat és legyen OQ és RR_2 metszése $R_{2\,(r_2)}$ OP és RR_2 metszése $R_{1\,(r_1)}$, akkor $r=r_1+r_2$ és most

$$\frac{r_1}{p}=n_2+\varrho_2$$

$$\frac{r_1}{p}=n_2+\varrho_2$$

mert egyenlő irányítényezővel bírnak. ϱ_2 és ϱ_2 is ≥ 0 lehet és így $r_1=n_2p+\varrho_2 p$, $r_2=n_2q+\varrho_2 q$, tehát $r=r_2+r_2=n_2p+n_2q+\varrho_2 p+\varrho_2 q$.

. de r, n_2p és n_2q periodus és így $r-n_2p-n_2q=\varrho_2 p+\varrho_2 q=v$ is periodus volna, de ez az $OPQSI$□ belül feküdnék, a mi lehetetlen, tehát szükségképpen $\varrho_1=\varrho_2=0$. és így $r=n_2p+n_2q$ vagyis ha $n_2=m$ és $n_2=n$

$$r=mp+nq$$

Tehát a függvények periodusosságának sokszorossági száma legfeljebb kettő p és q primitiv periodus pár. Erre a prim. periodus párra kell egy megállapodást tennünk. E két alapperiodus körül elsőnek tekintjük azt.

melyből a másikba menve a vector forgási szöge pos. tompa vagy hegyes szög, mert ekkor a két periodus hányadosát képezve

$$\frac{q}{p} = \varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

φ vagyis a két per. szögeinek különbsége pos. hegyes vagy tompa lévén $\varrho\sin\varphi > 0$ lesz, azaz a hányados képzetes részre pos. Ha esetleg $\frac{p}{q}$ képzetes részre neg. lenne, akkor q helyett $(-q)$ veszünk, mert hiszen

$$n_1 p + n_2 q = n_2 p - n_2(-q)$$

azaz $-q$ is alap periodus. És ekkor aztán $\frac{p}{-q}$ képzetes részre positiv lesz.

A midőn kimutattuk, hogy a függvény legfeljebb kétszeresen periodosos lehet, p és q tulajdonképen két tetszés szerinti primitiv periodus pár volt, a miből látható, hogy ép így kiindulhattunk volna egy másik p-ből és az ehez legközelebb fekvő q-ból, vagyis más szóval, a kétszeresen periodusos függvénynek végtelen sok primitiv periodus párja van, a melyből a többi összes periodus levezethető. Lássuk mi az összefüggés ez primitiv periodus párok között? Legyen p és q a kiindulásúl szolgáló prim. periodus pár és $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tetszőleges pos. vagy neg. egész számok, akkor

$$\alpha p + \beta q = p_1 \qquad (1)$$

$$\gamma p + \delta q = q_1 \qquad (2)$$

szintén periodusok lesznek épen az előbb bebizonyított tétel alapján. Vizsgáljuk most, hogy minő feltételeknek kell eleget tenniök az $\alpha\ \beta\ \gamma$ és δ egész számoknak, hogy a velök nyert p_1 és q_1 szintén prim. periodus párt alkossanak, azaz, hogy belőlök viszont p és q valamint bármely más periodus nyerhető legyen. Mindenekelőtt látható, hogy szükséges feltételnek kell, hogy $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ legyen. Mert hiszen, ha $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$ lenne, akkor eliminálva (1) és (2)-ből q-t

$$(\alpha\delta - \beta\gamma)p = p_1\delta - q_1\beta = 0$$ volna, azaz $\frac{q_1}{p_1} = \frac{\delta}{\beta}$ reális lenne, q_1 és p_1 egy egyenesen feküdnének, tehát nem lehetne primitiv periodus pár. Tehát szükséges feltétel, hogy $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ legyen és akkor (1) és (2)-ből

$$(\alpha\delta - \beta\gamma)p = p_1\delta - q_1\beta \qquad 1.)$$

$$-(\alpha\delta - \beta\gamma)q = p_1\gamma - q_1\alpha \qquad 2.)$$

Tehát

$$p = \frac{\delta}{\alpha\delta - \beta\gamma}p_1 - \frac{\beta}{\alpha\delta - \beta\gamma}q_1$$

$$q = \frac{-\gamma}{\alpha\delta - \beta\gamma}p_1 + \frac{\alpha}{\alpha\delta - \beta\gamma}q_1$$

ha most $\frac{\delta}{\alpha\delta - \beta\gamma} = \alpha_1$, $\frac{-\beta}{\alpha\delta - \beta\gamma} = \beta_1$ $\qquad \frac{-\gamma}{\alpha\delta - \beta\gamma} = \gamma_1$, $\frac{\alpha}{\alpha\delta - \beta\gamma} = \delta_1$

ésszerű akarjuk, hogy p_1 és q_1 is primitiv perioduspár legyen, akkor p és q levezethető kell legyen, mint egész számok többszöröse p_1 és q_1-nek, tehát akkor, hogy p_1 és q_1 primitiv perioduspár legyen, szükséges, hogy $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ és δ_1 egész számok legyenek, tehát $\alpha_1\delta_1 - \beta_1\gamma_1$ is; de $\alpha_1\delta_1 - \beta_1\gamma_1 = \frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{(\alpha\delta-\beta\gamma)^2} = \frac{1}{(\alpha\delta-\beta\gamma)}$ és ez utóbbi egész szám, ha $\alpha\delta-\beta\gamma = \pm 1$, ha ez a feltétel teljesül, akkor p_1 és q_1 is perim. periodus lesz, mert akkor

$$\begin{aligned} p_1\delta - q_1\beta &= \pm p \quad \Big| \cdot n_1 \\ p_1\gamma - q_1\alpha &= \mp q \quad \Big| \cdot -n_2 \end{aligned}$$

de $\alpha\beta\gamma\delta$ egész számok és így p és q levezethető p_1 és q_1-ből. Sőt az összes $n_1p_1+n_2q$ periodusok is levezethetők, mert ez utóbbi két egyenletből

$$\pm(n_1p+n_2q) = (n_1\delta - n_2\gamma)p_1 + (n_2\alpha - n_1\beta)q_1$$

ami azt mondja, hogy az összes periodusok p_1 és q_1-ből levezethetők. Tehát p_1 és q_1 perim. periodus, ha $\alpha\delta-\beta\gamma = \pm 1$. De a perim. periodusparra azt a kikötést is tettük volt, hogy $\frac{q}{p}$ képzetes része pos. legyen. Kérdés, mikor teljesül ez p_1 és q_1-nél?

$$\frac{q_1}{p_1} = \frac{\gamma p + \delta q}{\alpha p + \beta\gamma} = \frac{\delta}{\beta} + \frac{(\beta\gamma - \alpha\delta)p}{\beta(\alpha p + \beta q)} = \frac{\delta}{\beta} + \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\beta\alpha + \beta^2\frac{q}{p}}$$

ha $\beta \neq 0$

Már most feltételünk szerint $\frac{q}{p}$ képzetes része pos., β^2-el való szorzás és $\beta\alpha$ hozzáadása által a képzetes rész nem változik előjelben; és mivel $\frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$ azaz a complex szám reciprokjának képzetes része ellenkező jelű. azért tehát $\frac{1}{\beta\alpha+\beta^2\frac{q}{p}}$ képzetes része neg. Ha már most $\alpha\delta-\beta\gamma = +1$, akkor $\frac{q_1}{p_1}$ képzetes része pos. és ha $\alpha\delta-\beta\gamma = -1$, akkor $\frac{q_1}{p_1}$ képzetes része neg.

Ha tehát $\alpha\delta-\beta\gamma = +1$ vétetik, akkor p_1 és q_1 primitiv perioduspár lesz, mely a kivánt tulajdonsággal bír. De ez akkor is áll, ha $\beta = 0$, mert akkor, ha $\alpha\delta = \pm 1$, $\alpha = \pm\frac{1}{\delta}$, lesz

$$\frac{q_1}{p_1} = \frac{\gamma p + \delta q}{\alpha p} = \frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\delta}{\alpha}\cdot\frac{q}{p} = \frac{\gamma}{\alpha} \pm \frac{\delta^2 q}{p}$$

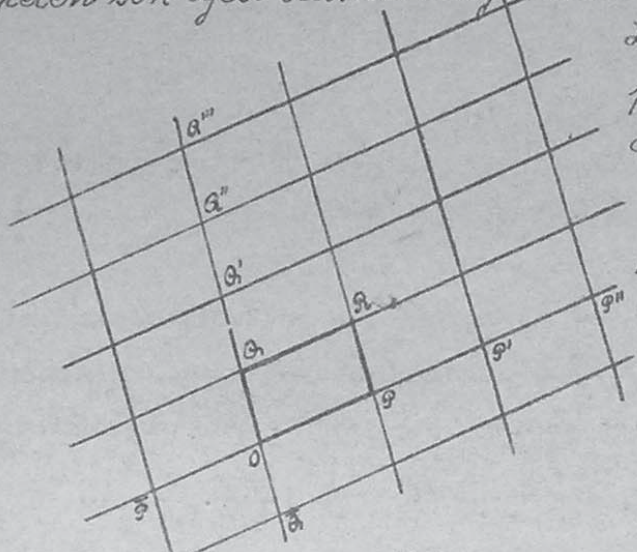
mert hiszen $\alpha\delta-\beta\gamma = \alpha\delta = \pm 1$ és mivel $\frac{q}{p}$ képzetes része positiv $\frac{\gamma}{\alpha} + \delta^2\frac{q}{p}$ képzetes része is positiv, ha $\alpha\delta = +1$ és negativ, ha $\alpha\delta = -1$ vagyis itt is p_1 és q_1 primitiv periodusparr lesz, ha $\alpha\delta-\beta\gamma = +1$.

Hatchát egy kétszeresen periodusos függvénynek egy primitiv periodusparját ismerjük, ebből végtelen sok primitiv periodusparat vezethetünk le következőleg:

$$\begin{aligned} \alpha p + \beta q &= p_1 \\ \gamma p + \delta q &= q_1 \end{aligned}$$

egyenletek adják ezen végtelen sok perim. periodusparat, ha α, β, γ és δ olyan

egész számok, melyekre nézve $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, ennek pedig végtelen sok megoldása van. Mert ha tekintetbe vesszük, hogy $\alpha\beta\gamma$ és δ relative prímszámok kell hogy legyenek, ha megadunk két relative prímszámot α és β, a hátralevő δ és γ számára egy két ismeretlenü egyenletünk van, a melynek végtelen sok egész számu megoldása van.



Lássuk most, ha p és q egy primitiv perioduspárt alkotnak, mikép lehet az ebből származtatott összes

$$n_1 p + n_2 q$$

periodusokat ábrázolni? Egyszerüen az $n_1 p$ periodusokat ábrázoló $OQ'Q''\ldots$ pontokon át OP-vel párhuzamosokat húzva, az igy nyert parallelogrammák csúcspontjai mindég pedig az összes $n_1 p + n_2 q$ periodusokat ábrázolják. Főparallelogrammának nevezzük az $OPQR$ parallelogrammát. Minden parallelogrammához hozzászámitjuk azt a csúcsát, melyből kiinduló két oldal egyirányban párhuzamos OP, illetve OQ-val továbbá ezt a két oldalt. Miután a kétszeresen periodusos függvénynek az a tulajdonsága, hogy $f(u + n_1 p + n_2 q) = f(u)$ látható, hogy elegendő, ha u bejárja a főparallelogrammát, mert az ebben felvett értékeket a többi parallelogrammában csak ismétli. Ha valamely parallelogrammának egy bizonyos pontjához meg akarjuk határozni a főparallelogrammában azt a pontot, melyben ugyanazt az értéket veszi fel, egyszerüen eltoljuk a kérdéses parallelogrammát önmagával párhuzamosan, a mig kiindulási csúcsa összeesik O-val. Ilymódon a két pont fedésbe jön. Mindazokat a helyeket, a hol a függvény ugyanazokat az értékeket veszi fel, congruens helyeknek nevezzük; ha ily két hely u és v, akkor ennek jele $u \equiv v$ és természetes, hogy $u - v = n_1 p + n_2 q$. Tehát elég ha a főparallelogrammában tanulmányozzuk a kétszeresen periodus függvényeket.

Miután a félperiodus is szerepel, jelöljük ezt a illetőleg ω'-vel igy-

hogy a primitiv periodusjaik $2\omega, 2\omega'$ és $\frac{\omega}{\omega'}$ képzetes részre pozitiv.

Már most mutassuk ki, hogy tényleg léteznek oly kétszeresen periodusos függvények, és pedig oly egyértékü, kétszeresen periodusos függvényeket fogunk keresni, melyek végesben épp úgy viselkednek, mint a rat. függvények, tehát egy és ugyanazt az értéket a periodusparallelogramma csak véges számú helyén veszik fel. A legegyszerübb függvényfajok között fogunk keresni ily függvényt. Racionális függvény nem lehet, mert ez minden értéket az egész számsikon csak véges számu helyen veszen fel, a kpr. (kétszeresen periodusos.) függvény pedig végtelenszer, mert ismétli minden ppr. (parallelogramma)-ban. Tehát az egyértékü transc. függvények között kell keresni, vagyis a transc. egész és transc. tört függvények között. Könnyen belátható, hogy transc. egész függvény nem lehet kpr., mert tegyük fel, hogy $F(u)$ ily kpr függvény volna, mely az egész számsikon convergens $F(u) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots\cdots$

Ez a függvény tehát a főppban mindenütt véges értékü, és így meg lehet adni azt a M véges mennyiséget, melyen alúl marad a függvény értéke az egész főppban, tehát az egész számsikon; igen de mivel $F(u)$ másfelöl transc. egész függvény, bármily M megadása után, tudunk oly nagykört irni, melyen a függvény maximuma nagyobb mint ez a M. Látható tehát, hogy ez a követelés kizárja egymást és így transc. egész függvények közt nincsen kpr. De ebből másfelöl az is világos, hogy szükségképen kell legyenek a kpr függvénynek a főppban 0 pontjai és polusai. Mert a transc. egész függvényeken kivül minden függvénynek vannak végesben polusai. a kpr. függvények pedig ide tartoznak. De ha $F(u)$ kpr, akkor $\frac{1}{F(u)}$ is az, tehát ezeknek is vannak polusai a végesben és ezek nem egyebek, mint $F(u)$ nullapontjai. Tehát egy kpr. $F(u)$ függvénynek szükségképen vannak polusai és nullapontjai a főppban. A kpr. függvényt tehát a tört transc. függvények között kell keresni, mert ennek vannak polusai és nullapontjai és pedig egy főpp-ban csak véges számmal, mert különben határolódási helyük lény. singularis hely, volna, pedig a transc. tört függvénynek végesben nincs lény. singularis helye. Az eddigiek alapján könnyü is lesz megállapitani a kpr. függvény alakját. Először szerkesztünk oly transc.

egész függvényt, melynek o az értéke az összes periodus pontokban, mely utóbbiak véges területen csak véges számmal vannak. Legyen ez a függvény $\sigma(u)$, melynek tehát o pontjai $2rw+2r'w'$. Legyenek most a keresett transc. tört függvénynek nullapontjai a fősíkban

$$\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3 \cdots\cdots \alpha_n$$

polusai $\beta_1\ \beta_2\ \beta_3 \cdots\cdots \beta_n$

akkor az a transc. tört függvény, mely az α helyeken és a velök congruens helyeken o értékü, a β helyeken és a velök congruens helyeken polusokkal bir, a következő $\dfrac{\sigma(u-\alpha_1)\sigma(u-\alpha_2)\sigma(u-\alpha_3)\cdots\cdots\sigma(u-\alpha_n)}{\sigma(u-\beta_1)\sigma(u-\beta_2)\sigma(u-\beta_3)\cdots\cdots\sigma(u-\beta_n)}$

Mert pl. a felső eltünik, ha $u-\alpha_1=2rw+2r'w'$, tehát ha $u=\alpha_1+2rw+2r'w'$ vagyis α_1-ben és a vele congruens helyeken, úgyszintén a többi α-ra nézve. Az alsó eltünik, azaz a függvény végtelenné válik ha pl. $u-\beta_1=2rw+2r'w'$, vagyis ha $u=\beta_1+2rw+2r'w'$; tehát β_1-ben és a vele congruens helyeken úgyszintén a többi β polusa nézve. Ez a függvény tehát a kivánt tulajdonsággal bir. Most az összes transc. tört függvények, melyeknek ugyanezek a tulajdonságaik, ettől csak egy transc. egész szorzóban különböznek és igyekben az alakban $e^{f(u)}\dfrac{\sigma(u-\alpha_1)\sigma(u-\alpha_2)\cdots\sigma(u-\alpha_n)}{\sigma(u-\beta_1)\sigma(u-\beta_2)\cdots\sigma(u-\beta_n)}$

bennfoglaltatnak az összes kp. függvények, melyeknek ezek a o pontjai és polusai.

Tehát első feladatunk megszerkeszteni ezt a σ függvényt, azután megvizsgálni ennek tulajdonságait, hogy változik, ha u periodussal növekedik azután ezt az általános alakot kell megvizsgálni, hogy mikor felel meg a kp. függvény tulajdonságainak.

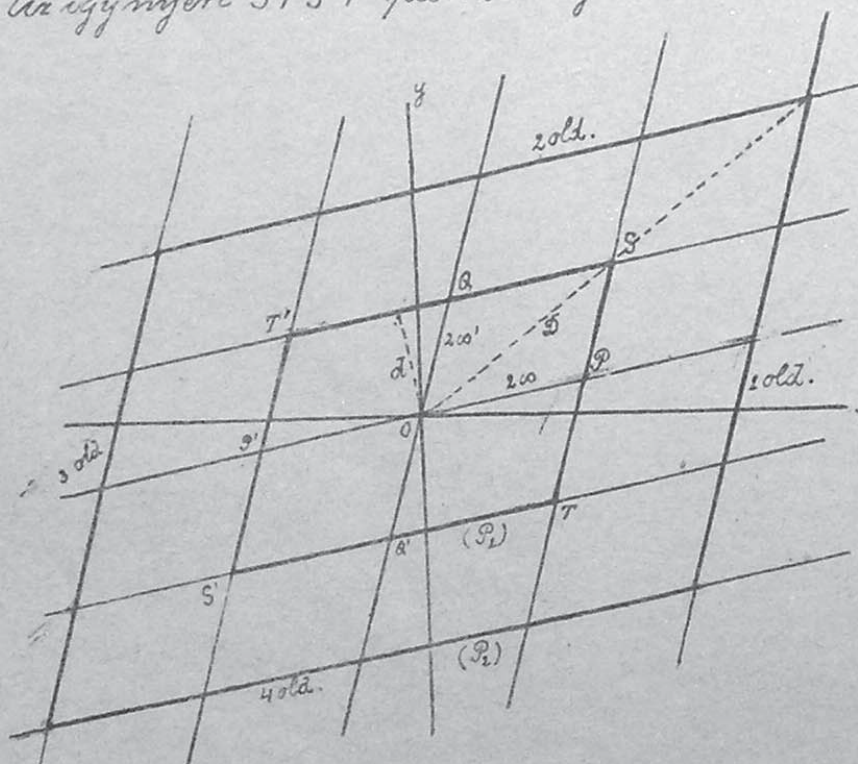
A Weierstrass féle σ függvény.

Szerkeszteni kell oly transc. egész függvényt, melynek egy keresendő kp. függvény periodus pontjaiban $2rw+2r'w'$ nulla értékü, tehát végtelen sok o ponttal bir. A függvényt szorzat alakban fogjuk előállitani. Hogy a primo függvény alakját megválaszthassuk, keresnünk kell azt a pos. egész Δ-

ez-szerint, melyre nézve a nullapontok reciprokjai conv. végtelen sort alkotnak. E végett csoportosítsuk a nullapontokat következőleg: A $2\omega, -2\omega$ és $2\omega' - 2\omega'$ pontokon át a főpontok oldalaival párhuzamosokat húzunk. Az így nyert $STS'T'$ parallelogramma kerületén fekszenek az első csoporthoz tartozó periodus-pontok: $P, S, Q, T' P' S' Q' T$. Azután $2 \cdot 2\omega - 2 \cdot 2\omega$, $2 \cdot 2\omega'$ és $-2 \cdot 2\omega'$ pontokon át fektetjük a második parallelogrammát (P_2), melynek kerületén fekvő periodus-pontok alkotják a második csoportot; azután $3 \cdot 2\omega$ stb. . . pontokon át a harmadik parallelogrammát. Az n-dik parallelogramma oldalai átmennek a $2n\omega, -2n\omega; 2n\omega', -2n\omega'$ periodus-pontokon, s az ezeken fekvő periodus-pontok alkotják az n-dik csoportot. Lássuk mennyi az egyes csoportokban levő periodusok száma? Vegyük az n-dik csoportot. Az első oldalon fekvő pontokat kapjuk, ha $2r\omega + 2r'\omega'$-ben $r = n$ és $r' = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \pm n$; az első oldalon tehát $2n+1$ pont fekszik; a második oldalon $r' = n$, $r = 0, \pm 1 \ldots \pm n$ Tehát mindegyik oldalon $2n+1$, az egész parallelogrammán tehát $4(2n+1) = 8n+4$ periodus-pont van. De a 4 szögpontot mindig kétszeresnek vettük, vagyis, az n-dik csoportban épen $8n$ periodus van. Lássuk az egyes periodusok nagyságát. Ha O-ból az első parallelogramma oldalaira egy d normálist bocsátunk és $OS = D$, akkor látható, hogy első csoport periodusaira áll a következő nagysági viszony: p_1 jelenti a periodust $d \leqq |p_1| \leqq D$ az egyenlőség legfeljebb 4 pontban állhat s pedig akkor, ha az egyik perióm: periodus-derék-szöget alkot a másikkal. A második csoport periodusaira nézve

$$2d \leqq |p_2| \leqq 2D$$

. . . . . .



s az n-dikre nézve $nd \leq |p_n| \leq nD$

és $n^s D^s \geq |p_n| \geq n^s d^s$

tehát $\frac{1}{n^s D^s} \leq \frac{1}{|p_n|^s} \leq \frac{1}{n^s d^s}$ (1)

a hol s positiv egész szám. Már azt, egész n-edik csoport tagjaira nézve a fenntebbi határok ugyanazok mindegyiknél a periodusok száma 8n és így az n-dik csoport tagjai reciprokjainak s-dik hatványait összegezve áll, hogy

$$\frac{8n}{n^s D^s} < \sum \frac{1}{|p_n|^s} < \frac{8n}{n^s d^s}$$

$$\frac{8}{n^{s-1} D^s} < \sum \frac{1}{|p_n|^s} < \frac{8}{d^s n^{s-1}}$$

Ez az egyenlőség áll minden periodusra, ha tehát ezeket n-re nézve summázzuk

$$\frac{8}{D^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{s-1}} < \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{p_n} \right|^s < \frac{8}{d^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{s-1}}$$

de az első-harmadik summa convergens, ha $s=3$, t.i. $\sum \frac{1}{n^2}$ és ugyanekkor convergens a körepén álló periodusok sora is ugyhogy $s=3$ vesendő, tehát a második fajta perimfüggvény $\zeta_2(\frac{u}{\omega}) = (1 - \frac{u}{\omega}) e^{\frac{u}{\omega} + \frac{1}{2}(\frac{u}{\omega})^2}$ a hol a helyébe kezdők az összes nullpontok: $2rw + 2r'w'$, kivévén azt $= 0$, azaz $r=r'=0$; az ennek megfelelő u szorzót a függvény elé írjuk. Tehát

$$\sigma(u) = u \prod_{r=-\infty}^{+\infty} {}' \left(1 - \frac{u}{2rw + 2r'w'}\right) e^{\frac{u}{2rw+2r'w'} + \frac{1}{2}\left(\frac{u}{2rw+2r'w'}\right)^2}$$

szerről a végtelen szorzatról kudjuk, hogy feltétlenül és szorosabb értelemben convergens.

Már most vizsgáljuk meg ennek a $\sigma(u)$ függvénynek a tulajdonságait. E végett a kétszeresen végtelen szorzatot átalakítjuk egyszeresen végtelen szorzattá következőleg: mivel a végtelen szorzat feltétlenül convergens, szabad a szorzást tetszés szerinti sorrendben végezni. Szorozzunk tehát először

$r'=0$, $r=-\infty \ldots\ldots +\infty$

azután $r'=1$, $r=-\infty \ldots\ldots +\infty$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ stb.

Jelöljük az első szorzatot P_0-val, akkor

$$P_0 = u \prod_{r=-\infty}^{+\infty} {}' \left(1 - \frac{u}{2rw}\right) e^{\frac{u}{2rw} + \frac{1}{2}\left(\frac{u}{2rw}\right)^2}$$

Ezt felfogjuk kétféleképen, külön-külön feltétlenül convergens végtelen szorzatra, a minyben P_0 így is írható

$$P_0 = u \prod_{r=-\infty}^{+\infty} {}' \left(1 - \frac{u}{2rw}\right) e^{\frac{u}{2rw}} \cdot \prod_{r=-\infty}^{+\infty} {}' e^{\frac{1}{2}\left(\frac{u}{2rw}\right)^2}$$

Határozzuk meg egyenként ezeknek értékét. Ha a sinus szorzatalakjában

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{r=-\infty}^{+\infty}{}' \left(1 - \frac{z}{r}\right) e^{\frac{z}{r}}$$

$z = \frac{u}{2\omega}$, akkor $\sin \frac{u\pi}{2\omega} = \pi \frac{u}{2\omega} \prod_{r=-\infty}^{+\infty}{}' \left(1 - \frac{u}{2r\omega}\right) e^{\frac{u}{2r\omega}}$

tehát az első végtelen szorzat $\frac{2\omega}{\pi} \sin \frac{\pi u}{2\omega}$. A második végtelen szorzat így is írható $\prod_{r=-\infty}^{+\infty}{}' e^{\frac{1}{2}\left(\frac{u}{2r\omega}\right)^2} = e^{\sum_{r=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{2} \frac{u^2}{4r^2\omega^2}} = e^{\frac{u^2}{8\omega^2} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{r^2}}$

De láttuk, hogy $\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^2} = \frac{\pi^2}{6}$, itt az exponensben ennek 2-szerese $\frac{\pi^2}{3}$ áll, tehát a második szorzat $e^{\frac{\pi^2 u^2}{24\omega^2}}$, úgyhogy $P_0 = \frac{2\omega}{\pi} e^{\frac{\pi^2 u^2}{24\omega^2}} \sin \frac{\pi u}{2\omega}$ P_1-et nyerjük ha $r'=1$, $r = -\infty \ldots\ldots +\infty$ stb. Általánosan $P_{r'}$-et nyerjük, ha r' egy fix szám és $r = -\infty \ldots\ldots +\infty$

$$P_{r'} = \prod_{r=-\infty}^{+\infty} \left(1 - \frac{\frac{u}{2\omega}}{r + r'\frac{\omega'}{\omega}}\right) e^{\frac{\frac{u}{2\omega}}{r + r'\frac{\omega'}{\omega}} + \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{u}{2\omega}}{r + r'\frac{\omega'}{\omega}}\right)^2}$$

ha t.i. $1 - \frac{u}{2r\omega + 2r'\omega'}$-ben felsőt és alsót 2ω-val osztjuk.

Ez a végtelen szorzat is felbontható két külön-külön convergens végtelen szorzatra

$$P_{r'} = \prod_{r=-\infty}^{+\infty} \left(1 - \frac{\frac{u}{2\omega}}{r + r'\frac{\omega'}{\omega}}\right) e^{\frac{\frac{u}{2\omega}}{r + r'\frac{\omega'}{\omega}}} \prod_{r=-\infty}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{u}{2\omega}}{r + r'\frac{\omega'}{\omega}}\right)^2}.$$

Határozzuk meg ezen két végtelen szorzat értékét. Láttuk, hogy

$$e^{\pi z \operatorname{cotg} \pi\alpha} \frac{\sin \pi(\alpha - z)}{\sin \pi\alpha} = \prod_{r=-\infty}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{r+\alpha}\right) e^{\frac{z}{r+\alpha}}$$

ha ebben $z = \frac{u}{2\omega}$, $\alpha = r'\frac{\omega'}{\omega}$, kapjuk az első végtelen szorzat számára

$$\prod_{r=-\infty}^{+\infty} \left(1 - \frac{\frac{u}{2\omega}}{r + r'\frac{\omega'}{\omega}}\right) e^{\frac{\frac{u}{2\omega}}{r + r'\frac{\omega'}{\omega}}} = e^{\frac{\pi u}{2\omega} \operatorname{cotg} \frac{\pi r'\omega'}{\omega}} \cdot \frac{\sin \pi\left(\frac{r'\omega'}{\omega} - \frac{u}{2\omega}\right)}{\sin \frac{\pi r'\omega'}{\omega}}$$

ez a formula csak akkor érvényes, had $\neq 0$, a mi ebben az esetben teljesül.

A második végtelen szorzat számára is van egy formulánk, melyet a sinus log. differenciálquotiensénél nyertünk

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-r)^2}$$

z helyébe $-z$ téve

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z+r)^2} \qquad (2.)$$

ha most a második végtelen szorzatot még más alakban írjuk

$$\prod_{r=-\infty}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{u}{2\omega}}{r + r'\frac{\omega'}{\omega}}\right)^2} = e^{\sum_{r=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{u}{2\omega}}{r + r'\frac{\omega'}{\omega}}\right)}$$

könnyen belátható, hogy ha (2)-ben $z = r'\frac{\omega'}{\omega}$ és $\frac{1}{2}\left(\frac{u}{2\omega}\right)^2$-el keresztül szorzunk, akkor

$$e^{\sum_{r=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{u}{2\omega}}{r + r'\frac{\omega'}{\omega}}\right)^2} = e^{\frac{u^2}{8\omega^2} \cdot \frac{\pi^2}{\sin^2 \frac{\pi r'\omega'}{\omega}}}$$

tehát

$$P_{r'} = e^{\frac{u^2}{8\omega^2} \cdot \frac{\pi^2}{\sin^2 \frac{\pi r'\omega'}{\omega}}} \cdot \frac{\sin \pi\left(\frac{r'\omega'}{\omega} - \frac{u}{2\omega}\right)}{\sin \frac{\pi r'\omega'}{\omega}} \cdot e^{\frac{\pi u}{2\omega} \operatorname{cotg} \frac{\pi r'\omega'}{\omega}}$$

Ha most $\nu' = -\infty \ldots\ldots +\infty$, kivéve 0, akkor a kétszeresen végtelen szorzat egyszeresen végtelen szorzatalakban így írható fel

$$\sigma(u) = P_0 \cdot \prod_{\nu=-\infty}^{+\infty}{}' P_{\nu'} \qquad \text{ha a } P_{\nu'}\text{-re vonatkozó productumot}$$

felbontjuk kettőre, akkor

$$\sigma(u) = \frac{2\omega}{\pi} l^{\frac{\pi^2 u^2}{24\omega^2}} \cdot \sin\frac{\pi u}{2\omega} \prod_{\nu=-\infty}^{+\infty}{}' l^{\frac{u^2}{8\omega^2 \sin^2 \frac{\pi\nu'\omega'}{\omega}}} \cdot \prod_{\nu=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{\sin\pi\left(\frac{\nu'\omega'}{\omega} - \frac{u}{2\omega}\right)}{\sin\frac{\pi\nu'\omega'}{\omega}} l^{\frac{\pi u}{2\omega}\operatorname{cotg}\frac{\pi\nu'\omega'}{\omega}}$$

ezt szabad tenni, mert az egész szorzat valamint az első is feltétlenül convergens. Tehát a leválasztott második az S. Ha az első szorzatot felviszszük az exponensbe összegnek s az első exponentiális factort ezzel összevonjuk, akkor

$$\sigma(u) = \frac{2\omega}{\pi} l^{\frac{\pi^2 u^2}{24\omega^2} + \frac{\pi^2 u^2}{8\omega^2}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{\sin^2\frac{\pi\nu'\omega'}{\omega}}} \cdot \sin\frac{\pi u}{2\omega} \cdot \prod_{\nu=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{\sin\pi\left(\frac{\nu'\omega'}{\omega} - \frac{u}{2\omega}\right)}{\sin\frac{\pi\nu'\omega'}{\omega}} l^{\frac{\pi u}{2\omega}\operatorname{cotg}\frac{\pi\nu'\omega'}{\omega}}$$

Vezessük be most a következő rövidített jelölést, legyen

$$\eta = \frac{\pi^2}{12\omega^2} + \frac{\pi^2}{4\omega}\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{\sin^2\frac{\pi\nu'\omega'}{\omega}}$$

Tehát η csak a periodusfüggvénye; ha ezt keresztül szorozzuk $\frac{u^2}{2\omega}$-val, kapjuk az első exponenst, úgyhogy

$$\sigma(u) = \frac{2\omega}{\pi} l^{\frac{\eta}{2\omega}u^2} \cdot \sin\frac{\pi u}{2\omega} \prod_{\nu=-\infty}^{+\infty}{}' \frac{\sin\pi\left(\frac{\nu'\omega'}{\omega} - \frac{u}{2\omega}\right)}{\sin\frac{\pi\nu'\omega'}{\omega}} \cdot l^{\frac{\pi u}{2\omega}\operatorname{cotg}\frac{\pi\nu'\omega'}{\omega}}$$

Még ki kell mutatni, hogy η convergens sor. Tudjuk, hogy $\sin_{y=\infty}(x+yi) = \infty$ Tehát ν'-el $\sin^2\frac{\pi\nu'\omega'}{\omega}$ is minden határon túl nő, mert $\frac{\omega}{\omega}$ complex; és pedig mivel $\sin\alpha = \frac{e^{\alpha i} - e^{-\alpha i}}{2i}$ a sinus úgy megy a végtelenbe, mint az exponentiális függvény tehát magasabb rangú végtelen nagy, mint a hatványmennyiség α, akkor bizonyos ν'-től kezdve

$$|\sin\nu'\alpha| > |\nu'\alpha|$$

$$|\sin^2\nu'\alpha| > |\nu'^2\alpha^2|$$

Tehát $\qquad \frac{1}{|\sin^2\nu'\alpha|} < \frac{1}{|\nu'^2\alpha^2|}$

és $\qquad \sum\frac{1}{|\sin^2\nu'\alpha|} < \sum\frac{1}{|\nu'^2\alpha|} = \frac{1}{\alpha^2}\sum\frac{1}{\nu'^2}$

ez utóbbi pedig convergens, tehát η is convergens, a hol $\alpha = \frac{\pi\omega'}{\omega}$. A $\sigma(u)$ legutóbbi előállításában a Π-ban a (ν') és $(-\nu')$-re vonatkozó faktorokat egygyé vonhatjuk össze. Ez a két faktor

$$\frac{\sin\pi\left(\frac{\nu'\omega'}{\omega} - \frac{u}{2\omega}\right)}{\sin\frac{\pi\nu'\omega'}{\omega}} l^{\frac{\pi u}{2\omega}\operatorname{cotg}\frac{\pi\nu'\omega'}{\omega}} \quad \text{és} \quad \frac{\sin\pi\left(\frac{-\nu'\omega'}{\omega} - \frac{u}{2\omega}\right)}{\sin\left(\frac{-\pi\nu'\omega'}{\omega}\right)} l^{\frac{\pi u}{2\omega}\operatorname{cotg}\frac{-\pi\nu'\omega'}{\omega}}$$

ezeknek szorzatában az exponentiális factor kiesik, úgyhogy

$$\sigma(u) = \frac{2\omega}{\pi} l^{\frac{\eta}{2\omega}u^2} \sin\frac{\pi u}{2\omega} \prod_{\nu=1}^{+\infty}{}' \frac{\sin\pi\left(\frac{\nu'\omega'}{\omega} - \frac{u}{2\omega}\right)\sin\pi\left(\frac{\nu'\omega'}{\omega} + \frac{u}{2\omega}\right)}{\sin^2\frac{\pi\nu'\omega'}{\omega}}$$

De a Π mögött ilyen alakú kifejezés áll

$$\frac{\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta)}{\sin^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha\cos^2\beta - \cos^2\alpha\sin^2\beta}{\sin^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha(1-\sin^2\beta) - (1-\sin^2\alpha)\sin^2\beta}{\sin^2\alpha}$$

$$= 1 - \sin^2\beta - (1-\sin^2\alpha)\frac{\sin^2\beta}{\sin^2\alpha} = 1 - \sin^2\beta - \frac{\sin^2\beta}{\sin^2\alpha} + \sin^2\beta = 1 - \frac{\sin^2\beta}{\sin^2\alpha}$$

azaz $\frac{\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta)}{\sin^2\alpha} = 1 - \frac{\sin^2\beta}{\sin^2\alpha}$ ha tehát $\alpha' = \frac{\pi v'\omega'}{\omega}$ és $\beta = \frac{\pi u}{2\omega}$, akkor a

$\sigma(u)$ így is írható

$$\sigma(u) = \frac{2u}{\pi}\, e^{\frac{\eta}{2\omega}u^2} \sin\frac{\pi u}{2\omega} \prod_{v=1}^{\infty}{}' \left(1 - \frac{\sin^2\frac{\pi u}{2\omega}}{\sin^2\frac{\pi v'\omega'}{\omega}}\right)$$

és erről a Π-ról tudjuk, hogy feltétlenül convergens, mert (η-nál) az imént mutattuk ki, hogy az additiv tagok sora

$$\sum \frac{\sin^2\frac{\pi u}{2\omega}}{\sin^2\frac{\pi v'\omega'}{\omega}} = \sin^2\frac{\pi u}{2\omega} \sum \frac{1}{\sin^2\frac{\pi v'\omega'}{\omega}}$$

feltétlenül convergens. Ebből az előállításból kiolvashatók a σ függvény tulajdonságai. Így a σ függvény páratlan jellegű, mert ha u helyébe $(-u)$ teszünk, az exponens és a productum nem változik, mert mindkettőben négyzetek szerepelnek, de a $\sin\frac{\pi u}{2\omega}$ jegyet változtat; tehát $\sigma(-u) = -\sigma(u)$ és így a σ sorában csak páratlan kitevőjű hatványok szerepelnek.

Ha u helyébe $(u+2\omega)$ teszünk

$$\sin\frac{\pi(u+2\omega)}{2\omega} = \sin\left(\frac{\pi u}{2\omega} + \pi\right) = -\sin\frac{\pi u}{2\omega}$$

és

$$\sin^2\frac{\pi(u+2\omega)}{2\omega} = \sin^2\frac{\pi u}{2\omega}$$

tehát a Π productum nem változik; $\sin\frac{\pi u}{2\omega}$ jegyet változtat; a mi az exponenciális faktort illeti, ez következő alakban:

$$\frac{\eta}{2\omega}(u+2\omega)^2 = \frac{\eta}{2\omega}(u^2 + 4u\omega + 4\omega^2) = \frac{\eta}{2\omega}u^2 + 2\eta(u+\omega)$$

tehát $e^{\frac{\eta}{2\omega}(u+2\omega)^2} = e^{\frac{\eta}{2\omega}u^2} \cdot e^{2\eta(u+\omega)}$

vagyhogy $\sigma(u+2\omega) = -e^{2\eta(u+\omega)} \cdot \sigma(u)$ II.

Ha u helyébe $u+2\omega'$ teszünk, a változást kiolvashatnók a σ függvény egyszerű alakjából, a hol ω helyett ω' és ω' helyett ω szerepel, mert hisz eredeti alakjában a σ függvény ω és ω'-ben teljesen symmetrikus (202 oldalon 2ω helyett 2ω-el is oszthattunk volna) ha ugyanazokat az átalakításokat végezzük mint ugyanott, felcserélve v és v' szerepét, akkor σ-nak oly előállításához jutunk, a hol ω és ω' szerepet cserél, η helyébe lép η', mely

$$\eta' = \frac{\pi^2}{12\omega'} + \frac{\pi^2}{4\omega'} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{\sin^2\frac{\pi v\omega}{\omega'}}$$

Tehát $$\sigma(u) = \frac{2\omega}{\pi} e^{\frac{\eta}{2\omega} u^2} \cdot \sin\frac{\pi u}{2\omega} \cdot \prod_{r=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\sin^2\frac{\pi u}{2\omega}}{\sin^2\frac{\pi r\omega'}{\omega}}\right)$$

Ebből az előállításból adódik, hogy

$$\sigma(u+2\omega') = -e^{2\eta'(u+\omega')} \cdot \sigma(u) \qquad \text{III.}$$

Ha most II szerint deriváljuk u szerint

$$\sigma'(u+2\omega) = -e^{2\eta(u+\omega)} \cdot 2\eta \cdot \sigma(u) - e^{2\eta(u+\omega)} \cdot \sigma'(u)$$

és így $\sigma(u+2\omega)$ log. differenciálhányadosa

$$\frac{\sigma'(u+2\omega)}{\sigma(u+2\omega)} = 2\eta + \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)} \qquad (3.)$$

Mivel $\sigma(u)$ páratlan, azért $\sigma'(u)$ páros jellegű, és így ha $u = -\omega$ teszünk

$$\frac{\sigma'(\omega)}{\sigma(\omega)} = 2\eta + \left[\frac{\sigma'(-\omega)}{\sigma(-\omega)}\right] = 2\eta - \frac{\sigma'(\omega)}{\sigma(\omega)}$$

a miből következik, hogy $\eta = \frac{\sigma'(\omega)}{\sigma(\omega)}$ III log. diff. quotienséből adódik

$$\eta' = \frac{\sigma'(\omega')}{\sigma(\omega')}$$

A $\frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}$ transc. tört függvényt jelöljük $\zeta(u)$-val

$$\frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)} = \zeta(u) \qquad (4)$$

ez tehát páratlan jellegű. Ezen $\zeta(u)$ alaptulajdonságai könnyen adódnak a definitiójából; (3) szerint

$$\zeta(u+2\omega) = 2\eta + \zeta(u) \qquad (1.)$$

$$\zeta(u+2\omega') = 2\eta' + \zeta(u) \qquad (2.)$$

s ezeket deriválva

$$\zeta'(u+2\omega) = \zeta'(u) \qquad d(1)$$

$$\zeta'(u+2\omega') = \zeta'(u) \qquad d(2)$$

vagyis $\zeta(u)$ kétszeresen periodikus függvény, s ezzel egyszersmind kimutatva, hogy általános léteznek ily typ. függvények. Ezt a $\zeta(u)$ függvényt következőleg jelöljük

$$-\zeta'(u) = \wp(u) \qquad (5.)$$

Ezen ζ és $\wp$ függvények számára keressünk analytikai kifejezést. Erre felhasználjuk a σ tetszeresen végtelen szorzatalakját. Ennek log. differenciálquotiense adja ζ-t s ennek deriváltja $\wp$-t. Tehát ha röviden $2r\omega + 2r'\omega' = 2\omega$

$$\sigma(u) = u \prod{}' \left(1 - \frac{u}{2\omega}\right) e^{\frac{u}{2\omega} + \frac{1}{2}\left(\frac{u}{2\omega}\right)^2}$$

$$\log\sigma(u) = \log u + \sum{}' \left(\log(2\omega - u) - \log 2\omega + \frac{u}{2\omega} + \frac{1}{2}\left(\frac{u}{2\omega}\right)^2\right)$$

és

$$\frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)} = \zeta(u) = \frac{1}{u} + \sum{}' \left(\frac{1}{u - 2\omega} + \frac{1}{2\omega} + \frac{u}{4\omega^2}\right)$$

és

a summában minden periódust téve, kivéve nullát. És most

$$-\zeta'(u) = \wp(u) = \frac{1}{u^2} + \sum{}' \left(\frac{1}{(u-2\omega)^2} - \frac{1}{4\omega^2}\right)$$

Ez a keresett két analytikai előállítás $\zeta(u)$ illetőleg $\wp(u)$ számára. $\wp(u)$

Ahát elő van állítva parciális törtekkel. (4) és (5)-ből következik, hogy ζ és p-nek ott polusai vannak, a hol σ-nak nullapontjai és pedig p-nek 2-szeres polusai és fordítva p-nek ott vannak nullapontjai, a hol σ-nak polusai. Miután σ páratlan, σ' páros, azért $\frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)} = \zeta(u)$ páratlan jellegü Ahát $\zeta(-u) = -\zeta(u)$ és ennek deriváltja $p(u)$ páros jellegü, azaz $p(-u) = p(u)$

Keressünk most egyébb kapcsolatokat. Ha III-ban u helyébe $u+2\omega$ teszünk, o

$$\sigma(u+2\omega) = -e^{2\eta'(u+2\omega+\omega')+2\eta(u+\omega)} \cdot \sigma(u)$$

az igy nyert formulába II beteszük

(6.) $$\sigma(u+2\omega+2\omega') = -e^{2\eta'(u+2\omega+\omega')} \cdot \sigma(u+2\omega) = -e^{2\eta'(u+2\omega+\omega')+2\eta(u+\omega)} \cdot \sigma(u)$$

és II-ben u helyébe $u+2\omega'$ téve, majd $\sigma(u+2\omega')$ értéket III ból behelyettesitve, kapjuk

$$\sigma(u+2\omega+2\omega') = -e^{2\eta(u+2\omega'+\omega)} \sigma(u+2\omega') = -e^{2\eta(u+2\omega'+\omega)+2\eta'(u+\omega)} \sigma(u) \quad (7)$$

Ahát kell, hogy (6) és (7) hányadosa 1 legyen, azaz

$$e^{2\eta u + 4\eta'\omega + 2\eta'\omega' + 2\eta u + 2\eta\omega - 2\eta u - 4\eta\omega' - 2\eta\omega - 2\eta' u - 2\eta'\omega'} = 1$$

de az aláhuzott részek összege 0, és igy

$$e^{4\eta'\omega - 4\eta\omega'} = e^{4(\eta'\omega - \eta\omega')} = 1$$ a mi csak akkor következik be, ha

$$4(\eta\omega' - \eta'\omega) = 2k\pi i$$

azaz

$$\eta\omega' - \eta'\omega = k\frac{\pi}{2} i$$

Ezt a k értéket kell most meghatározni. E végett kiindulunk a σ függvény egyszeresen végtelen szorzatalakjából

$$\sigma(u) = \frac{2\omega}{\pi} e^{\frac{\eta}{2\omega}u^2} \sin\frac{\pi u}{2\omega} \prod_{\nu'=1}^{\infty} \frac{\sin\pi\left(\frac{\nu'\omega'}{\omega} + \frac{u}{2\omega}\right)\sin\left(\frac{\nu'\omega}{\omega} - \frac{u}{2\omega}\right)}{\sin^2\frac{\pi\nu'\omega'}{\omega}}$$ melynek

log. diff. quotiense $\frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)} = \frac{\eta}{\omega}u + \frac{\pi}{2\omega}\operatorname{cotg}\frac{\pi u}{2\omega} + \frac{\pi}{2\omega}\sum_{\nu'=1}^{\infty}\left(\operatorname{cotg}\pi\left(\frac{\nu'\omega'}{\omega} + \frac{u}{2\omega}\right) - \operatorname{cotg}\pi\left(\frac{\nu'\omega'}{\omega} - \frac{u}{2\omega}\right)\right)$

ha ebben $u = \omega'$ teszünk, kapjuk $\frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)} = \eta'$

$$\eta' = \frac{\eta}{\omega}\cdot\omega' + \frac{\pi}{2\omega}\operatorname{cotg}\frac{\pi\omega'}{2\omega} + \frac{\pi}{2\omega}\sum_{\nu'=1}^{\infty}\left(\operatorname{cotg}\frac{\pi\omega'}{2\omega}(2\nu'+1) - \operatorname{cotg}\frac{\pi\omega'}{2\omega}(2\nu'-1)\right)$$

és ω-val keresztül szorozva, a jobboldal első tagját átvive és $\frac{\pi\omega'}{2\omega} = \alpha$ téve

$$\eta'\omega - \eta\omega' = \frac{\pi}{2}\left(\operatorname{cotg}\alpha + (\operatorname{cotg}3\alpha - \operatorname{cotg}\alpha) + (\operatorname{cotg}5\alpha - \operatorname{cotg}3\alpha) + \cdots + \operatorname{cotg}(2\nu'+1)\alpha - \operatorname{cotg}(2\nu'-1)\alpha + \cdots\right)$$

Ez nem végtelen sor értéke annyi, mint első ν' tagjából alkotott összeg limese; de az első, első 2, 3, ... ν' tagok összege rendre $\operatorname{cotg}\alpha$; $\operatorname{cotg}3\alpha \cdots \operatorname{cotg}(2\nu'+1)\alpha$ vagyis az első ν' tag összege $\operatorname{cotg}(2\nu'+1)\alpha$. És miután α képzetes része pozitiv azért $\nu' = \infty$ mellett a cotg. megetti argumentum képzetes része mint pozitiv mennyiség megy a végtelenbe és mivel $\lim_{y=\infty}\operatorname{cotg}(x+yi) = -i$, azért

$$\lim_{\nu'}\operatorname{cotg}(2\nu'+1)\alpha = -i$$ igy hogy $\eta'\omega - \eta\omega' = -\frac{\pi}{2}i$

azaz $\eta\omega' - \eta'\omega = \frac{\pi}{2} i$ (8.)

tehát $\kappa = +1$

A kétszeresen periodusos függvények létezésének kimutatása és ezen függvények felkeresése.

Keressük fel ezt a kp. transc. tört függvényt $F(u)$, melynek a főparallelogrammán belül fekvő pontjai $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3 \ldots\ \alpha_n \ldots$

polusai $\beta_1\ \beta_2\ \beta_3 \ldots\ \beta_n \ldots$

Láttuk, hogy az ezen, és az ezzel congruens o pontokkal és polusokkal bíró, transc. tört függvények mind bennefoglaltatnak ebben az alakban

$$F(u) = e^{f(u)} \frac{\sigma(u-\alpha_1)\sigma(u-\alpha_2)\ldots\sigma(u-\alpha_n)}{\sigma(u-\beta_1)\sigma(u-\beta_2)\ldots\sigma(u-\beta_n)}$$

a hol $f(u)$ vagy rat. vagy transc. egészfüggvény, vagy constans. Ezt az $f(u)$ függvényt kell most meghatározni úgy, hogy a $F(u)$ függvény kp. legyen, azaz, hogy $\frac{F(u+2\omega)}{F(u)} = 1$ és $\frac{F(u+2\omega')}{F(u)} = 1$ legyen.

Ha a fenntí $F(u)$ függvény rövidség kedvéért

$$F(u) = e^{f(u)} \prod \frac{\sigma(u-\alpha)}{\sigma(u-\beta)}$$

a hol α felveszi egymásután az összes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\ \alpha_n$

és β az összes $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots - \beta_n$ értékeket, akkor

$$F(u+2\omega) = e^{f(u+2\omega)} \prod \frac{\sigma(u-\alpha+2\omega)}{\sigma(u-\beta+2\omega)}$$

tehát

$$\frac{F(u+2\omega)}{F(u)} = e^{f(u+2\omega)-f(u)} \prod \frac{\sigma(u-\alpha+2\omega)}{\sigma(u-\alpha)} : \prod \frac{\sigma(u-\beta+2\omega)}{\sigma(u-\beta)}$$

és ha $\frac{\sigma(u+2\omega)}{\sigma(u)} = -e^{2\eta(u+\omega)}$ szerint $\frac{\sigma(u-\alpha+2\omega)}{\sigma(u-\alpha)} = -e^{2\eta(u+\omega-\alpha)} = -e^{2\eta(u+\omega)-2\eta\alpha}$

akkor $\frac{F(u+2\omega)}{F(u)} = e^{f(u+2\omega)-f(u)} (-1)^n e^{2\eta n(u+\omega) - 2\eta\Sigma\alpha} : (-1)^h e^{2h\eta(u+\omega)-2\eta\Sigma\beta}$

és ez egyenlő kell legyen 1-gyel.

Miután $(-1) = e^{\pi i}$, $(-1)^n = e^{n\pi i}$, $(-1)^h = e^{h\pi i}$, ezeket bevezetve és osztást végrehajtva, a követelés így is írható:

$$\frac{F(u+2\omega)}{F(u)} = e^{f(u+2\omega)-f(u)+n\pi i+2n\eta(u+\omega)-2\eta\Sigma\alpha-h\pi i-2h\eta(u+\omega)+2\eta\Sigma\beta} = 1$$

és ez kiteljesül, ha az exponens $2\mu i$ egész számú többszöröse, μ $(-\omega')$-szerese, tehát ha

$$f(u+2\omega) - f(u) + (n-h)\pi i + 2(n-h)\eta(u+\omega) - 2\eta(\Sigma\alpha - \Sigma\beta) = -2\mu'\pi i.$$

Ugyanehez a feltételhez jutunk a $2\omega'$ periódusra vonatkozólag, csakhogy itt η helyébe megfelelőleg η' lép, tehát másodszor kell, hogy

$$f(u+2\omega') - f(u) - (\kappa - h)\pi i + 2(\kappa - h)\eta'(u+\omega') - 2\eta'(\Sigma\alpha - \Sigma\beta) = 2\mu\pi i$$

legyen! Kérdés, mikor teljesül ez a két egyenlet egyszerre, és mi következik ezen két egyenlet teljesüléséből? Ha mindkét egyenletet kétszer deriváljuk kapjuk

$$f''(u+2\omega) - f''(u) = 0$$
$$f''(u+2\omega') - f''(u) = 0$$

Tehát $f''(u)$ kp. függvény és így $f''(u)$ nem rat., nem transc. egészfüggvény nemlehet, hanem csak constans, úgyhogy $f(u)$ legfeljebb quadratikus

$$f(u) = a_0 + a_1 u + a_2 u^2$$

Most számítsuk ki a (9) és (10)-ben szereplő $f(u+2\omega) - f(u)$ illetőleg $f(u+2\omega') - f(u)$ értékét

$$f(u+2\omega) = a_0 + a_1(u+2\omega) + a_2(u+2\omega)^2$$

tehát

$$f(u+2\omega) - f(u) = 2a_1\omega + 4a_2\omega(u+\omega)$$
$$f(u+2\omega') - f(u) = 2a_1\omega' + 4a_2\omega'(u+\omega')$$

úgyhogy a (9) és (10) feltételek így is írhatók

$$2a_1\omega + 4a_2\omega(u+\omega) + (\kappa - h)\pi i + 2(\kappa - h)\eta(u+\omega) - 2\eta(\Sigma\alpha - \Sigma\beta) = -2\mu'\pi i$$
$$2a_1\omega' + 4a_2\omega'(u+\omega') + (\kappa - h)\pi i + 2(\kappa - h)\eta'(u+\omega') - 2\eta'(\Sigma\alpha - \Sigma\beta) = 2\mu\pi i$$

s miután a jobboldalon u nem szerepel, a baloldalon is u szorzója 0 kell legyen, így kapjuk, hogy

$$4a_2\omega + 2(\kappa - h)\eta = 0 \qquad (1)$$
$$4a_2\omega' + 2(\kappa - h)\eta' = 0 \qquad (2)$$

és miután $\eta'\omega - \eta\omega' = -\frac{\pi}{2}i$

ha (1) szorozzuk ω'-vel, (2) ω-val, előbbiből utóbbiból kivonjuk kapjuk, hogy

$$(\kappa - h)\pi i = 0 \quad \text{azaz} \quad \kappa = h \qquad \underline{\text{IV}}.$$

és (1) szorozva η'-vel, (2) $-\eta$-val és összeadva $2a_2\pi i = 0$ azaz $a_2 = 0$.

Vagyis $\underline{\text{IV}}$ szerint a főpontban annyi nullpont kell legyen, mint pólus és $a_2 = 0$ kell legyen vagyis $f(u)$ csakelsőfoku rat. függvény, úgy (9) és (10) következőleg alakul át

$$2a_1\omega - 2\eta(\Sigma\alpha - \Sigma\beta) = -2\mu'\pi i \qquad (3)$$
$$2a_1\omega' - 2\eta'(\Sigma\alpha - \Sigma\beta) = 2\mu\pi i \qquad (4)$$

és (3) szorozva $(-\omega')$-vel, (4) ω-val és összeadva, kapjuk, hogy

$$(\Sigma\alpha - \Sigma\beta)\pi i = (2\mu\omega + 2\mu'\omega')\pi i$$

azaz

$$\Sigma\alpha - \Sigma\beta = 2\mu\omega + 2\mu'\omega' \qquad \underline{\text{V}}$$

Tehát a főparallelogrammában levő a pontok összegének és polusok összegének különbsége periodus kell legyen.

(3) szorozva $(-\eta')$-el (4) η-val és összeadva

$$a_2 \pi i - \pi i (2\mu\eta + 2\mu'\eta')$$

Tehát $$a_1 = 2\mu\eta + 2\mu'\eta' \qquad \text{VI.}$$

Ha tehát teljesül az V és VI feltétel, akkor $e^{a_0} = C$ írva,

$$\mathcal{F}(u) = C \cdot e^{(2\mu\eta + 2\mu'\eta')u} \cdot \frac{\sigma(u-a_1)\,\sigma(u-a_2)\cdots\sigma(u-a_n)}{\sigma(u-\beta_1)\,\sigma(u-\beta_2)\cdots\sigma(u-\beta_n)}$$

a hányadosra periodusos függvényeket <u>elliptikus függvényeknek</u> is nevezik. Az ellipt. függvényeknek tehát egy pályában egyenlő számú nullapontjai és polusai vannak; a nullapontok összege congruens a polusok összegével; az ellipt. függvény teljesen meg van határozva, ha ismerjük egy primitiv periodus párját $2\omega, 2\omega'$, a nullapontokat és polusokat, és a függvény értékét egy helyen, a hol nem 0 vagy ∞, utóbbit azért, hogy meghatározhassuk a constanst. De nem szükséges a nullapontokat és polusokat a főparallelogrammán belül venni, mert vehetünk ezek helyett congruens értékeket is sőt ezáltal egyszerűbb alakra is hozhatjuk az ellipt. függvényeket. Mivel ugyanis

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_n - \beta_1 - \beta_2 - \beta_3 - \cdots - \beta_n - 2\mu\omega - 2\mu'\omega' = 0$$

ha $\alpha_1 - 2\mu\omega - 2\mu'\omega' = \alpha_1'$ és α_1 helyett bevezetjük α_1', a mely vele congruens, akkor

$$\alpha_1' + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n - \beta_1 - \beta_2 - \cdots - \beta_n = 0$$

vagyis $$\sum\alpha = \sum\beta, \qquad \text{nemcsak congruens,} \quad (11)$$

és így V szerint $2\mu\eta + 2\mu'\eta' = 0$ lévén, az ellipt. függvény erre az alakra reducálódik

$$\mathcal{F}(u) = e \cdot \frac{\prod\sigma(u-\alpha)}{\prod\sigma(u-\beta)} \qquad \text{VII}^{*}$$

a nullapontok czélszerű megválasztásával tehát mindig erre az alakra hozhatjuk az ellipt. függvényeket. Ezentúl tehát feltesszük, hogy (11) bekövetkezik: Ha $F(u)$ ellipt. függvény és C egy tetszésszerinti constans, akkor világos, hogy $F(u) - C$ is ellipt. függvény, melynek ugyanannyi polusa és nullapontja van, mint $F(u)$-nak és pedig polusai ugyanazok

$$\beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3 \quad \cdots \quad \beta_n$$

míg nullapontjai $\gamma_1 \quad \gamma_2 \quad \gamma_3 \cdots \cdots \gamma_n$

ezen n γ érték mellett teljesül az $F(u) - C$ egyenlet. Vagyis minden ellipt.

függvény minden adott értéket annyiszor veszen fel a hány nullapontja van egy jpban, és $\sum\alpha \equiv \sum\beta \equiv \sum\gamma$ az ellipt. függvény tehát úgy viselkedik a jpban, mint a rat. egész függvény az egész számsíkon. Az ellipt. függvényt annyiad fokúnak nevezzük, a hány nullapontja van egy jpban vagyis a hányszor egy adott értéket a jpban felveszen.

Oly ellipt. függvény, melynek fokszáma 1, vagyis a melynek egy jpban egy α nullapontja és egy β pólusa volna nincsen, mert $\sum$ szerint $\alpha \equiv \beta$ vagyis az α nullponttal congruens β helyén a függvényérték nem volna 0, a mint kellene, hanem végtelen nagy. Tehát a legkisebb fokszám 2, mert hisz végtelen sok olyan szám létezik, melyekre nézve $\alpha_1 + \alpha_2 = \beta_1 + \beta_2$ s a másodfoku ellipt. függvény általános alakja

$$\mathfrak{F}(u) = C \cdot \frac{\sigma(u-\alpha_1)\sigma(u-\alpha_2)}{\sigma(u-\beta_1)\sigma(u-\beta_2)}$$

és ez a legegyszerűbb ellipt függvény. Ilyen a Weierstrass által bevezetett és fennt ismertetett $\wp(u)$ függvény, ez másodfoku ellipt. függvény, mert tudjuk, hogy ott válik végtelenné, a hol $\sigma(u) = 0$, ez pedig egy jpban két helyen következik be. Láttuk, hogy

$$\sigma(u) = u \prod \left(1 - \frac{u}{2\omega}\right) e^{\frac{u}{2\omega} + \frac{1}{2}\left(\frac{u}{2\omega}\right)^2}$$

Ebből látható, hogy $\lim_{u=0} \frac{\sigma(u)}{u} = 1$ vagyis, hogy a páratlan σ függvény sorában nincsen szabad tag és u coefficiense 1, azaz

$$\sigma(u) = u + R_3 u^3 + R_5 u^5 + \cdots \qquad (12)$$

Láttuk korábbá, hogy $\zeta(u) = \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)} = \frac{1}{u} + \sum{}'\left(\frac{1}{u-2\omega} + \frac{1}{2\omega} + \frac{u}{(2\omega)^2}\right)$

Ebből az alakból adódik $\zeta(u)$ sora o körül. Ugyanis

$$\frac{1}{u-2\omega} = -\frac{1}{2\omega}\left(1 - \frac{u}{2\omega}\right)^{-1} = -\frac{1}{2\omega} - \frac{u}{(2\omega)^2} - \frac{u^2}{(2\omega)^3} - \cdots - \frac{u^n}{(2\omega)^{n+1}} - \cdots$$

, és ebből $\frac{1}{u-2\omega} + \frac{1}{2\omega} + \frac{u}{(2\omega)^2} = -\frac{u^2}{(2\omega)^3} - \frac{u^3}{(2\omega)^4} - \cdots$

s ez convergens u o centrumu, 2ω sugarú körön belül. Ez a sorképezi általános tagját a fenntí $\sum$-nak s erre nézve summázni kell $v, v = -\infty \ldots : +\infty$. Látható, hogy ez enkörben az u párus kitevőjü hatványait tartalmazó tagok párosával kiesnek, mivel ezeknél a nevezőben álló 2ω páratlan kitevőjü hatványon szerepel. Így tehát, $\zeta(u)$ egy végtelen sok hatványsorból álló sor lesz, melyben csak u páratlan hatványai szerepelnek; ez össze lehet vonni egyetlen egy u páratlan hatványai szerint haladó sorrá, mert a megfelelő coefficiensek sorai

$$\sum{}'\frac{1}{(2\omega)^{2\varkappa}} = b_{2\varkappa} \qquad (\varkappa = 1, 2, 3 \cdots)$$

a mint láttuk convergens és így

$$\zeta(u) = \frac{1}{u} - b_4 u^3 - b_6 u^5 - b_8 u^7 - b_{10} u^9 - \dots - b_{2n+2} u^{2n+1} - \dots \quad (12)$$

És végre $p(u) = \frac{1}{u^2} + \sum{}' \left(\frac{1}{(u-2\omega)^2} - \frac{1}{(2\omega)^2} \right)$

a mi nem egyéb, mint $-\zeta'(u)$ Tehát sora adódik $\zeta(u)$ tagonkénti deriválásából

$$p(u) = \frac{1}{u^2} + 3 b_4 u^2 + 5 b_6 u^4 + 7 b_8 u^6 + \dots + 2n+1\, b_{2n+2} u^{2n} + \dots \quad (14)$$

halad u páros kitevőjü hatványai szerint, mert hisz páros függvény. Alkossuk meg $p(u)$ deriváltját $p'(u)$-t. Megjegyzendő, hogy a periodicus függvény deriváltja is periodicus függvény, mert ha

$$f(u+2\omega) = f(u) \quad \text{akkor mindkét oldalt deriválva}$$

$$f'(u+2\omega) = f'(u) \quad \text{tehát a derivált is periódfüggvény.}$$

És most $p'(u) = -\frac{2}{u^3} - \sum{}' \frac{1}{(u-2\omega)^3}$ a külső tagot beírva

$$p'(u) = -2 \sum \frac{1}{(u-2\omega)^2}$$

és u sora $p'(u) = -\frac{2}{u^3} + 2 \cdot 3 b_4 u + 4 \cdot 5 b_6 u^3 + \dots \quad (15.)$

(14.)-ből látható, hogy $p(u)$-nak 0-ban kétszeres pólusa van, (15)-ből, hogy $p'(u)$-nak 0-ban 3szoros pólusa van; tehát annak pólusai, o.o. ennek σ, σ, σ, vagyis $p(u)$ másodfoku, $p'(u)$ harmadfoku ell. függvény.

Láttuk, hogy a másodfoku ell. függvény normális alakja

$$\mathcal{F}(u) = C \frac{\sigma(u-a_1)\sigma(u-a_2)}{\sigma(u-\beta_1)\sigma(u-\beta_2)}$$

Továbbá, hogy a $p(u) - p(v)$ függvény szintén másodfoku elliptikus függvény, (ha v egy állandó, tehát $p(v)$ is) és ennek pólusai ugyanazok, mint $p(u)$ pólusai vagyis 0, 0, nullapontjai, a mint látható v és -v, úgyhogy a normális alak szerint

$$p(u) - p(v) = C \frac{\sigma(u-v)\sigma(u+v)}{\sigma^2(u)} \quad (1)$$

Most kell meghatározni a multiplicatio constanst. Tudjuk, hogy $[u^2 p(u)]_{u=0} = 1$ Tehát szorozzuk meg a fenti egyenlet oldalait u^2-el, kapjuk

$$u^2 p(u) - u^2 p(v) = C u^2 \frac{\sigma(u-v)\sigma(u+v)}{(u+A_3 u^3 + A_5 u^5 + \dots)} = C u^2 \frac{\sigma(u-v)\sigma(u+v)}{u^2(1+A_3 u^2) + \dots)^2}$$

$$= C \frac{\sigma(u-v)\sigma(u+v)}{(1+A_3 u^2 + \dots)^2}$$

és ha $u=0$, $1 = C \frac{-\sigma^2(v)}{1}$, tehát $C = -\frac{1}{\sigma^2(v)}$ ezt betéve (1)be és a $-$ jelt $\sigma(u-v)$-be téve, kapjuk

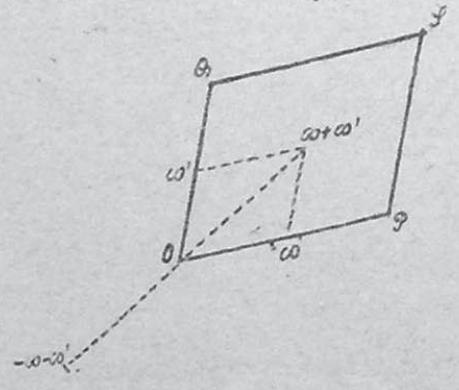
$$p(u) - p(v) = \frac{\sigma(v+u)\sigma(v-u)}{\sigma^2 u \cdot \sigma^2(v)} \quad \text{VIII}$$

Kifejeztük tehát a $p(u) - p(v)$ függvényt három σ függvényekkel. Próbáljuk ugyanígy kifejezni $p'(u)$-t is. E végett meg kell állapítani a nullapontokat és pólusokat. $p'(u)$ harmadfoku, tehát pólusai $\sigma, 0, 0$. Mivel továbbá $p'(u+2\omega) = p'(u)$

$u=-\omega$ -ra $\quad \wp'(\omega) = \wp'(-\omega) = -\wp'(\omega)$

Tehát $2\wp'(\omega)=0$ azaz $\wp'(\omega)=0$ éppúgy $\wp'(\omega')=0$ Tehát két nullpontot is-

merünk: ω és ω'. Legyen a harmadik ω_3, akkor (11) szerint $\omega_3+\omega+\omega'=o$ Tehát



$\omega_3=-\omega-\omega'$ Tehát a három nullpont: ω, ω' és $-\omega-\omega'$. Másután a harmadikkal congruens hely $-\omega-\omega'+2\omega+2\omega' = \omega+\omega'$, azért $\omega+\omega'$ is vehető harmadik nullpontgyanánt, de mi itt elő-ször $-\omega-\omega'$ vesszük, úgyhogy

$$\wp'(u) = C\,\frac{\sigma(u-\omega)\,\sigma(u-\omega')\,\sigma(u+\omega+\omega')}{\sigma^3(u)}$$

Ezt a constanst kell még meghatározni (15) sze-rint $\left[u^3\wp'(u)\right]_{u=0} = -2$

Tehát $u^3\wp'(u) = C\,u^3\,\frac{\sigma(u-\omega)\,\sigma(u-\omega')\,\sigma(u+\omega+\omega')}{u^3(1+A_3u^2+\dots)^3} = C\,\frac{\sigma(u-\omega)\,\sigma(u-\omega')\,\sigma(u+\omega+\omega')}{(1+A_3u^2+\dots)^3}$

úgyhogy $-2 = C\,\frac{\sigma(\omega)\,\sigma(\omega')\,\sigma(\omega+\omega')}{1}$ Tehát $C = -\frac{2}{\sigma(\omega)\,\sigma(\omega')\,\sigma(\omega+\omega')}$

és $\quad \wp'(u) = -2\,\frac{\sigma(u-\omega)\,\sigma(u-\omega')\,\sigma(u+\omega+\omega')}{\sigma(u)\,\sigma(\omega')\,\sigma(\omega+\omega')}$ $\qquad$ IX.

De úgy ennek a periodicus függvényt végtelen sok alakban írhatjuk fel, ha a nullpontok helyett azok componenseit vesszük. Így ha $\omega, \omega', -\omega-\omega'$ helyett meg-felelőleg congruens $-\omega, -\omega'$, $\omega+\omega'$ nullapontokat vesszük és úgyanazokat a 0,0,0 polusokat, akkor $\wp'(u) = -2\,\frac{\sigma(u+\omega)\,\sigma(u+\omega')\,\sigma(u+\omega+\omega')}{\sigma^3(u)\,\sigma(u)\cdot\sigma(\omega')\,\sigma(\omega+\omega')}$ X.

mert tényleg, ha szorzunk $\sigma^3(u)$-val és $u=0$ teszünk, kapjunk (-2)-t. (X) és (IX) összeszorozva és a faktorokat csoportosítva,

XI. $$\wp'^2(u) = 4\,\frac{\sigma(u+\omega)\,\sigma(\omega-u)}{\sigma^2(u)\cdot\sigma^2(\omega)}\cdot\frac{\sigma(\omega+\omega'+u)\,\sigma(\omega+\omega'-u)}{\sigma^2(u)\,\sigma^2(u+\omega')}\cdot\frac{\sigma(\omega'+u)\,\sigma(\omega'-u)}{\sigma^2(u)\,\sigma^2(\omega')}$$

Ha ezt az eredményt összehasonlítjuk a VIII alatti $(\wp(u)-\wp(v)$-vel látható, hogy ígyanyenegyerhető ebből, ha abban először $v=\omega$, azután $v=\omega+\omega'$ és $v=\omega'$ s ugyot három hiányzást összeszorozzuk, úgyhogy

$$\wp'^2(u) = 4\,(\wp(u)-\wp(\omega))\,(\wp(u)-\wp(\omega+\omega'))\,(\wp(u)-\wp(\omega'))$$

Legyen már most $\wp(\omega)=e_1$, $\wp(\omega+\omega')=e_2$, $\wp(\omega')=e_3$

akkor $$\wp'^2(u) = 4\,(\wp(u)-e_1)\,(\wp(u)-e_2)\,(\wp(u)-e_3)$$

$$= 4\wp^3(u) - 4(e_1+e_2+e_3)\wp^2(u) + 4(e_1e_2+e_1e_3+e_2e_3)\wp(u) + 4e_1e_2e_3$$

vagyis $\quad \wp'^2(u) = 4\wp^3(u) - g_2\wp^2(u) - g_2\wp(u) - g_3$ $\qquad$ XII.

ha úgyanis g_2, g_2, g_3 a fenntí constansokat jelentik. Ez pedig azt mondja, hogy $\wp(u)$

függvény deriváltjának a négyzete magának a függvénynek harmadfokú egész rat. függvénye. Ebből az alakból magyarázhatjuk egyszersmind az ellipt. függvény elnevezését. A hyp. függvényeknek ugyanis onnan kapták nevüket, mert inversök az ellipsis ívhosszát adó integrállal van adva. Legyen ugyanis $p(u) = U$, $p'(u) = \frac{dU}{du}$, akkor XII szerint

$$\left(\frac{dU}{du}\right) = 4U^3 - g_1 U^2 - g_2 U - g_3 \text{ és } \frac{dU}{du} = \sqrt{4U^3 - g_1 U^2 - g_2 U - g^3}$$

Tehát $$du = \frac{dU}{\sqrt{4U^3 - g_1 U^2 - g_2 U - g_3}}, \quad u = \int \frac{dU}{\sqrt{4U^3 - g_1 U^2 - g_2 U - g^3}}$$

ez pedig az ellipsis ívhosszát adó integrál. Ennek inverse U nevezetes elliptikus függvénynek. A fenntiintegrál függvénnyel különösen Euler, Lagrange és Legaudre foglalkoztak; ezen függvény inversével, az elliptikus függvénnyel Jacobi és Abel foglalkoztak. A Weierstrass módszerével, melyetmi követtünk az ellipt. függvény felkeresésében, először Liouville keresteaz ellipt. függvényeket.

Visszatérve a XII alatti előállitásra, a hol

$$g_1 = 4(e_1 + e_2 + e_3), \quad g_2 = -4(e_1 e_2 + e_2 e_3 + e_2 e_3), \quad g_3 = -4 e_1 e_2 e_3$$

ki fogjuk mutatni, hogy $g_1 = 4(e_2 + e_2 + e_3) = 0$. Láttuk, ugyanis, hogy

$$p(u) = \frac{1}{u^2} + 3b_4 u^2 + 5b_6 u^4 + \cdots\cdots$$

$$p'(u) = -\frac{2}{u^3} + 2.3 b_4 u + 4.5 b_6 u^3 + \cdots\cdots$$

Tehát (α) $p'^2(u) = \frac{4}{u^6} - \frac{24 b_4}{u^2} - 80 b_6 + \cdots\cdots$ u pos. eg. kitevőjü hatványai szerint

$p'^2(u)$-nak egymásik alakja adódik XII-ből, e végett számitsuk ki:

$$4p^3(u) = \frac{4}{u^6} + \frac{36 b_4}{u^2} + 60 b_6 + \cdots\cdots \text{ u pos. egész kitev. hatv. szerint követk.}$$

$$g_2 p^2(u) = \frac{g_2}{u^2} + 6 g_2 b_4 + \cdots\cdots \text{ u pos. eg. kitev. hatv. szerint követk.}$$

Ha ezen értékeket XII-be helyettesitjük és az igy $p'^2(u)$ számára nyert alakot összehasonlitjuk az (α) alattival, látni, hogy (α)-ban nem fordul elő u^{-4}, tehát ennek coefficiense 0 kell legyen, azaz $g_1 = 0$, ugyhogy $p'^2(u) = 4p^3(u) - g_2 p(u) - g_3$ XIII.

Most kimutatjuk azt a tételt, hogy minden ellipt. függvényt elő lehet állitani mint $p(u)$ és $p'(u)$ rat. függvényét. A tételt először arra az esetre bebizonyitjuk, ha az $F(u)$ függvény páros, $F(-u) = F(u)$. Ebben az esetben minden x nullapont ellentettje $-x$ is nullpont, úgyszintén a póluspontoknál, tehát a nullpontok

$$\alpha_1, -\alpha_1; \quad \alpha_2, -\alpha_2; \quad \cdots\cdots \quad \alpha_r, -\alpha_r;$$

$$\beta_1, -\beta_1; \quad \beta_2, -\beta_2; \quad \cdots\cdots \quad \beta_r, -\beta_r;$$

hehát összesen $2r$ nullapont és polus van és $\Sigma\alpha = \Sigma\beta$. Ebben az esetben tehát

$$F(u) = C\frac{\sigma(u-\alpha_1)\sigma(u-\alpha_2)\cdots\sigma(u-\alpha_r)\sigma(u+\alpha_r)}{\sigma(u-\beta_1)\sigma(u-\beta_2)\cdots\sigma(u-\beta_r)\sigma(u+\beta_r)} = C\frac{\sigma(\alpha_1-u)\sigma(\alpha_2-u)\cdots\sigma(\alpha_r+u)\sigma(\alpha_r-u)}{\sigma(\beta_1+u)\sigma(\beta_1-u)\cdots\sigma(\beta_r+u)\sigma(\beta_r-u)}$$

Ha most felsőt, alsót először $\sigma^2 u$.-val osztjuk, és azután felsőt szorozzuk és osztjuk $\sigma^2\alpha_1 \cdots \sigma^2\alpha_r$, alsót szorozzuk osztjuk $\sigma^2\beta_1 \cdots \sigma^2\beta_r$, akkor

$$F(u) = \underbrace{C\frac{\sigma^2\alpha_1\sigma^2\alpha_2\cdots\sigma^2\alpha_r}{\sigma^2\beta_1\sigma^2\beta_2\cdots\sigma^2\beta_r}}_{C'} \cdot \frac{\frac{\sigma(\alpha_1+u)\sigma(\alpha_1-u)}{\sigma^2 u\,\sigma^2\alpha_1}\cdots\frac{\sigma(\alpha_r+u)\sigma(\alpha_r-u)}{\sigma^2 u\,\sigma^2\alpha_r}}{\frac{\sigma(\beta_1+u)\sigma(\beta_1-u)}{\sigma^2 u\,\sigma^2\beta_1}\cdots\frac{\sigma(\beta_r+u)\sigma(\beta_r-u)}{\sigma^2 u\,\sigma^2\beta_r}}$$

De láttuk, hogy $p(u)-p(v) = \frac{\sigma(v+u)\sigma(v-u)}{\sigma^2 u\,\sigma^2 v}$ hatehát $v = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_r$, majd $v = \beta_1\cdots\beta_r$

akkor $$F(u) = C'\frac{(p(u)-p(\alpha_1))(p(u)-p(\alpha_2))\cdots(p(u)-p(\alpha_r))}{(p(u)-p(\beta_1))(p(u)-p(\beta_2))\cdots(p(u)-p(\beta_r))}$$

hehát $$F(u) = R(p(u)) \qquad \underline{XIV.}$$

vagyis páros $F(u)$ függvény előállítható mint $p(u)$-nak függvénye. Itt úgyan hallgatagúl feltettük, hogy egy nullpont sem esik össze a számsík o pontjával, de könnyű megmutatni, hogy a tétel ebben az esetben is érvényes marad. Ha úgyanis $F(u)$ páros függvény, sora $F(u) = A_0 + A_2u^2 + A_4u^4 + \cdots$ és ha $u=0$ nullapont, $A_0 = 0$, de akkor számítva azt az esetet is, midőn még több coefficiens is eltünik; u-nak mindig páros kitevőjü hatványa vehető ki közös tényezőnek, úgyhogy a páros $F(u)$ függvénynek a o pont mindig páros rendszámú nullapontja [úgyanúgy áll, ha o a polusok között fordul elő] Ha tehát a o is előfordul a nullapontok között, akkor ezeknek sorozata

$$0, 0, 0, \cdots\cdots 0\ a_{k+1}, -a_{k+1}, \cdots\cdots a_r, -a_r$$

$$\beta_1, -\beta_1, \beta_2, -\beta_2 \cdots\cdots \cdots\cdots \beta_r, -\beta_r$$

és úgy

$$F(u) = C\frac{\sigma^{2k}u\cdot\sigma(\alpha_{k+1}+u)\sigma(\alpha_{k+1}-u)\cdots\sigma(\alpha_r+u)\sigma(\alpha_r-u)}{\sigma(\beta_1+u)\sigma(\beta_1-u)\cdots\cdots\sigma(\beta_r+u)\sigma(\beta_r-u)}$$

és úgyanúgy az átalakítást végezve

$$= C\frac{\sigma^2\alpha_{k+1}\cdots\sigma^2\alpha_r}{\sigma^2\beta_1'\cdots\sigma^2\beta_r} : \frac{\frac{\sigma(\alpha_{k+1}+u)\sigma(\alpha_{k+1}-u)}{\sigma^2u\cdot\sigma^2\alpha_{k+1}}\cdots\frac{\sigma(\alpha_r+u)\sigma(\alpha_r-u)}{\sigma^2u\,\sigma^2\alpha_r}}{\frac{\sigma(\beta_1+u)\sigma(\beta_1-u)}{\sigma^2u\,\sigma^2\beta_1}\cdots\frac{\sigma(\beta_r+u)\sigma(\beta_r-u)}{\sigma^2u\,\sigma^2\beta_r}}$$

tehát $$\mathfrak{F}(u) = C'\frac{[p(u)-p(\alpha_{k+1})]\cdots[p(u)-p(\alpha_r)]}{(p(u)-p(\beta_1))(p(u)-p(\beta_2))\cdots(p(u)-p(\beta_r))} = R(p(u))$$

Tehát minden páros jellegü elliptik. Függvény kifejezhető $p(u)$-val függvényeként.

Ha $F(u)$ páratlan függvény, $F(-u) = -F(u)$, akkor $p'(u)$ páratlan lévén $\frac{F(u)}{p'(u)}$ páros lesz tehát az előbbi tétel értelmében

$$\frac{F(u)}{p'(u)} = R(p(u)) \text{ azaz } F(u) = R(p(u))\cdot p'(u) \qquad \underline{XV.}$$

Tehát a páratlan ellipt. függvény előállítható mint $p(u)$ rat. függvényének és $p'(u)$-nak szorzata.

Ha $F(u)$ nem páratlan, sem páros, akkor mindig előállítható mint egy páros és páratlan függvény összege, mert

$$F(u) = \frac{F(u)+F(-u)}{2} + \frac{F(u)-F(-u)}{2}$$

az első páros, a második páratlan függvény és így az előbbi két tétel értelmében

$$F(u) = R_1(p(u)) + R_2(p(u)).\,p'(u) \qquad \text{XVI}.$$

És egész általánosan kimutathatjuk, hogy $p(u)$ és $p'(u)$ bármely rat. függvénye ezen utóbbi alakban előállítható mint $p(u)$ rat. függvénye. E elő-gett előbb ki fogjuk mutatni ujra a XIII tétel segélyével, hogy $p'(u)$ hatványait és $p(u)$ deriváltjait $p(u)$ egész rat. függvénye gyanánt lehet kifejezni. És pedig

1.) $p'(u)$ páros kitevőjü hatványait tisztán $p(u)$ egész rat. függvénye gyanánt és $p'(u)$ páratlan kitevőjü hatványait $p(u)$ egész rat. függvényének és $p'(u)$-nak szorzatával. Mert hisz XIII szerint

$$p'^2(u) = 4p^3(u) - g_2 p(u) - g_3$$ a $p(u)$ egész rat. függvénye, tehát

$$p'^{2\kappa}(u) = [4p^3(u) - g_2 p(u) - g_3]^{2\kappa} = R(p(u))$$ szintén egész rat függvénye $p(u)$-nak és $p'^{2\kappa+1}(u) = R(p(u))\,p'(u)$

2.) $p(u)$ páros deriváltjait mint $p(u)$ egész rat. függvényét és $p(u)$ pár. illan deriváltjait mint $p(u)$ rat. függvényének és $p'(u)$-nak szorzatát. Ugyanis $p'^2(u)$ deriváltja

$$2p'(u)\cdot p''(u) = 12p^2(u)\,p'(u) - g_2 p'(u)$$ és osztva $2p'(u)$-val

$$p''(u) = 6p^2(u) - \frac{g_2}{2} = R_2(p(u))$$

ebből

$$p'''(u) = 12p(u)\cdot p'(u) = R_3(p(u))\,p'(u)$$

$$p^{(IV)}(u) = 12p'^2(u) + 12p(u)p''(u) = 12\left[4p^3(u) - g_2 p(u) - g_3 + 6p^3 - \frac{g_2}{2}p(u)\right]$$

$$p^{IV}(u) = R_4(p(u))$$ stb.

azaz

Most teljes inductióval bizonyítjuk, hogy a tétel általánosan is érvényes.

Tegyük fel, hogy érvényes 2κ-ig és $(2\kappa+1)$-ig, azaz $p^{(2\kappa)}(u) = R_{2\kappa}(p(u))$ és $p^{2\kappa+1}(u) = R'_{2\kappa}(p(u))\cdot p'(u)$ az utóbbi egyenletet deriválva:

$$p^{(2\kappa+2)}(u) = R''_{2\kappa}(p(u))\,p'^2(u) + R'_{2\kappa}(p(u))\,p''(u)$$

de $p'^2(u)$ és $p''(u)$ kifejezhető mint $p(u)$ egész rat. függvénye, tehát

$$p^{(2\kappa+2)}(u) = R_{2\kappa+2}(p(u))$$ és ennek deriváltjából

$$p^{(2\kappa+3)}(u) = R'_{2\kappa+2}(p(u))\,p'(u) = R_{2\kappa+3}(p(u))\,p'(u)$$

Ezen tételek segélyével most már könnyü lesz kimutatni, hogy $p(u)$ és $p'(u)$ bár-

mily rat. függvénye a XVI alatti alakra hozható. Mertlegyen

$$F(p(u), p'(u)) = \frac{R_0 + R_1 p'(u) + R_2 p'^2(u) + \cdots}{S_0 + S_1 p'(u) + S_2 p'^2(u) + \cdots}$$

A hol $R_0, R_1, \ldots$ és $S_0, S_1, \ldots$ még rat. függvényei $p(u)$-nak, tehát az egész rat. függvénye $p(u)$ és $p'(u)$-nak. Ha a felsőben $p'(u)$ páros kitevőjü hatványait kifejezem a fenntiek szerint $p(u)$ rat. egész függvénye gyanánt és páros kitevőjü hatványait egy rat. egész függvénynek és $p'(u)$-nak szorzatával, akkor a felső a rat. részek összevonása után ily alakra hozható $R_1(pu) + R_2(pu)\, p'(u)$. Ugyanigy hozható az alsó ily alakra $S_1(p(u)) + S_2(p(u))\, p'(u)$ vagyhogy

$$F(p(u), p'(u)) = \frac{R_1(p(u)) + R_2(p(u))\, p'(u)}{S_1(p(u)) + S_2(p(u))\, p'(u)}$$

felsőt és alsót $S_1(p(u)) - S_2(p(u))\, p'(u)$-val szorozva

$$F(p(u), p'(u)) = \frac{[R_1(p(u)) + R_2(p(u))\, p'(u)][S_1(p(u)) - S_2(p(u))]}{S_1^2(p(u)) - S_2^2(p(u))\, p'^2(u)}$$

Ha fennt elvégezzük a szorzást kapunk egy részt tartalmazó egész rat. részt $R_1(p(u))$ és egy $p'(u)$-val szorzott részt $R_2(p(u))\, p'(u)$; az egész alsó részben egész rat. függvénye $p(u)$-nak, $Q(p(u))$ és igy könnyen belátható, hogy az osztás hagyományi végrehajtásával a függvény következő alakra hozható, melyegyezik XVI-val.

$$F(p(u), p'(u)) = R_1(p(u)) + R_2(p(u))\, p'(u).$$

A $p(u)$ függvénynek is van összeadási tétele, a mennyiben $p(u+v)$ kifejezhető $p(u)$, $p(v)$ $p'(u)$ és $p'(v)$-vel rationalisan. Ugyanis láttuk, hogy $\frac{\sigma(v+u)\sigma(v-u)}{\sigma^2 u\, \sigma^2 v} = p(u) - p(v)$. Ha u változóra vállandóra megalkotjuk ennek log. differential quotiensét.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\sigma'(v+u)}{\sigma(v+u)} - \frac{\sigma'(v-u)}{\sigma(v-u)} - \frac{2\sigma' u}{\sigma u} &= \frac{p' u}{pu - pv} \\ \frac{\sigma'(v+u)}{\sigma(v+u)} + \frac{\sigma'(v-u)}{\sigma(v-u)} - \frac{2\sigma' v}{\sigma v} &= \frac{p' v}{pu - pv} \end{aligned}\right\}$$

v változóra, u vállandóra ezeket összeadva és tekintetbe véve, hogy $\frac{\sigma'(v+u)}{\sigma'(v-u)} = \zeta(u+v)$, lesz $2\zeta(v+u) - 2\zeta(u) - 2\zeta(v) = \frac{p' u - p' v}{pu - pv}$

Tehát

$$\zeta(u+v) = \zeta(u) + \zeta(v) + \frac{1}{2}\frac{p' u - p' v}{pu - pv}$$

Ezt deriváljuk először u, azután v szerint, lévén $\zeta'(u+v) = -p(u+v)$

$$p(u+v) = p(u) - \frac{1}{2}\frac{p''(u)}{p(u) - p(v)} + \frac{1}{2}\frac{p'(u)(p'(u) - p'(v))}{(p(u) - p(v))^2}$$

$$p(u+v) = p(v) + \frac{1}{2}\frac{p''(v)}{p(u) - p(v)} - \frac{1}{2}\frac{p'(v)(p'(u) - p'(v))}{(p(u) - p(v))^2}$$

Harkány

összeadva $2p(u+v) = pu + pv - \frac{1}{2}\,\frac{p'u - p'v}{pu - pv} + \frac{1}{2}\left(\frac{p''u - p''v}{pu - pv}\right)^2$ (16)

De $p''u$ és $p''v$ kifejezhető pu illetőleg pv-vel $p'^2u = 4p^3u - g_2 pu - g_3$

deriválva $2p'u\,p''u = 12p^2u - g_2 p'u$ és ebből $p''u = 6p^2u - \frac{1}{2}g_2$

hasonlóképp $p''v = 6p^2v - \frac{1}{2}g_2$

különbségük $p''u - p''v = 6(p^2u - p^2v) = 6(pu + pv)(pu - pv)$

tehát $\frac{p''u - p''v}{pu - pv} = 6(pu + pv)$ és ezt betéve (16)-ba

$$2p(u+v) = -2pu - 2pv + \frac{1}{2}\left(\frac{p'u - p'v}{pu - pv}\right)^2$$ és 2-vel osztva kapjuk a pu függvény összeadási tételét

$$pu + pv + p(u+v) = \frac{1}{4}\left(\frac{p'u - p'v}{pu - pv}\right)^2$$ XVII

Eddig az ellipt. függvényeknek kétféle alakját ismertük, σ függvényt és a pu, $p'u$ függvénnyel előállított alakját (VII*, XIV, XV, XVI.)

Most az ellipt. függvényeknek egy harmadik alakjával fogunk megismerkedni, mely analog a rat. tört függvényeknek partiálistörtekre való felbontásával. Ez az előállítás azon a tételen alapszik, hogy congruens helyek (pl pólusok) körüli sorbabontásánál a megfelelő coefficiensek egyenlők. Ha pl Fu ellipt. függvényt sorbabontjuk a körül, $u = a+h$, $h = u-a$,

$$Fa + h = A_0 + A_1 h + A_2 h^2 + \cdots\cdots$$ és az $(a + 2\omega)$

congruens hely körül $F(a+h+2\omega) = B_0 + B_1 h + B_2 h^2 + \cdots\cdots$ de mivel

$F(a+h+2\omega) = F(a+h)$, szükségképen $A_0 = B_0$, $A_1 = B_1$ .... Ha b κ-szoros pólus

$$F(b+h) = \frac{A_\kappa}{h^\kappa} + \frac{A_{\kappa-1}}{h^{\kappa-1}} + \cdots + \frac{A_1}{h} + P(h)$$

$$F(b+h+2\omega) = \frac{B_\kappa}{h^\kappa} + \frac{B_{\kappa-1}}{h^{\kappa-1}} + \cdots + \frac{B_1}{h} + P(h)$$

itt is szükségképen $A_\kappa = B_\kappa$, $A_{\kappa-1} = B_{\kappa-1}$ ...., tehát congruens pólusok körüli sorbabontásoknál a megfelelelő partiális törtek coefficiensei egyenlők. Ezen tétel alapján fogjuk felbontani az ellipt. függvényeket partiális törtekre. A főpólusokat úgy soroljuk fel, hogy mindegyiket csak egyszer soroljuk fel a sokszorossági szám hozzátételével. $\beta_1\ \beta_2\ \cdots\ \beta_r$

$\kappa_1\ \kappa_2\ \cdots\ \kappa_r$. Tudjuk, hogy minden

úgyhogy az ellipt. függvény fokszáma $\kappa_1 + \kappa_2 + \cdots + \kappa_r$. Tudjuk, hogy minden pólushoz annyi partiális törtek, legyenek ezek $\psi_1(u)\ \psi_2(u) \cdots \psi_r(u)$

Ezeknek általános alakja $\frac{A_1}{u-\beta} + \frac{A_2}{(u-\beta)^2} + \cdots\cdots + \frac{A_\kappa}{(u-\beta)^\kappa}$

Már most szerkesztünk oly transc. tört függvényt, melynek ugyanezeken a helyeken és a congruens helyeken (ugyanazokkal a coefficiensekkel) pólusai ugyanolyanok

ezekkel a parciálistörtekkel. Ehhez eljutunk a ζ függvény segélyével. Ismeretes

hogy $\zeta(u) = \frac{1}{u} + \sum\left(\frac{1}{u-2\omega} + \frac{1}{2\omega} + \frac{\omega}{4\omega^2}\right)$

Ennek 0-ban és az összes periodusokban egyszerű polusai vannak. Körül

a függvény így jellemezhető $\zeta(u) = \frac{1}{u} + \mathcal{P}(u)$ ezt deriválva

$$\zeta'(u) = \frac{1}{u^2} + \mathcal{P}'(u)$$

$$\zeta''(u) = \frac{2}{u^3} + \mathcal{P}''(u)$$

és általánosan

$$\zeta^{(\kappa)}(u) = (-1)^\kappa \frac{\kappa!}{u^{\kappa+1}} + \mathcal{P}^{(\kappa)}(u)$$

és a β polus körül

$$\zeta(u-\beta) = \frac{1}{u-\beta} + \mathcal{P}(u|\beta) \qquad | \; A_1 +$$

$$\zeta'(u-\beta) = -\frac{1}{(u-\beta)^2} + \mathcal{P}'(u|\beta) \qquad | \; -A_2$$

általánosan

$$\zeta^{(\kappa-1)}(u-\beta) = (-1)^{\kappa-1}\frac{(\kappa-1)!}{(u-\beta)^\kappa} + \mathcal{P}^{(\kappa-1)}(u|\beta) \qquad | \; (-1)^{\kappa-1}\frac{A_\kappa}{(\kappa-1)!}$$

tehát $\zeta(u-\beta)$-nak β-ban elsőrendű, $\zeta'(u-\beta)$-nak kétszeres, ... $\zeta^{\kappa-1}(u-\beta)$-nak κ-szoros polusa van. Ha most a parciális törtek coefficienseivel a kijelölt módon szorozunk, akkor látható, hogy $A_1\zeta(u-\beta) - A_2\zeta'(u-\beta) + \cdots + (-1)^{\kappa-1}\frac{A_\kappa}{(\kappa-1)!}\zeta^{(\kappa-1)}(u-\beta) = \Psi(u)$ függvénynek a β helyen és a vele congruens helyeken polusai vannak ugyanazokkal a parciálistörtekkel, mint $F(u)$-nak t.i. (1) parciális törtekkel. Ezt a $\Psi(u)$ függvényt megalkotjuk minden β polusra, legyenek ezek megfelelőleg $\Psi_1(u)\ \Psi_2(u)\ \Psi_3(u) \cdots \Psi_r(u)$ akkor világos, hogyha ezeket $F(u)$-ból levonjuk, ezen különbségnek már nincsen polusa; legyen ez a különbség függvény $\Phi(u)$ akkor ez vagy rat. vagy transc. egész függvény vagy constans. Úgy hogy

$$F(u) = \Phi(u) + \Psi_1(u) + \Psi_2(u) + \cdots + \Psi_r(u)$$

$\Psi(u)$-ban, a mint az (2)-ből látható, $\zeta(u)$ kivételével minden tag kép, $\zeta(u)$-ra pedig áll:

$$\zeta(u+2\omega) = \zeta(u) + 2\eta$$

$$\zeta(u+2\omega') = \zeta(u) + 2\eta'$$

de már $F'(u) = \Phi'(u) + \Psi_1'(u) + \Psi_2'(u) + \cdots + \Psi_r'(u)$

deriváltban minden tag $\Psi'(u)$ kivételével kép, úgyhogy megalkotva

$$F'(u+2\omega) = \Phi'(u+2\omega) + \Psi_1'(u+2\omega) + \cdots + \Psi_r'(u+2\omega)$$

és $F(u)$ különbségét $0 = \Phi'(u+2\omega) - \Phi'(u)$ azaz $\Phi'(u+2\omega) = \Phi'(u)$ épúgy $\Phi'(u+2\omega') = \Phi'(u)$, tehát $\Phi'(u)$ kép, mivel ezerint nem lehet sem rat. sem transc. egész függvény, azért constans, úgyhogy $\Phi(u)$ legfeljebb lineáris $\Phi(u) = a_0 + a_2 u$

és így $F(u) = a_0 + a_2 u + \Psi_2(u) + \cdots + \Psi_r(u)$, de kitűnik, hogy $a_2 = 0$, mert

$$F(u+2\omega) = a_0 + a_2(u+2\omega) + \Psi_1(u+2\omega) + \cdots + \Psi_r(u+2\omega)$$ és a kettő kü-

$$\text{különbségét alakban} \quad a_2 = a_2 u + \left[\Psi_1(u+2\omega) - \Psi_1(u)\right] + \cdots + \left[\Psi_r(u+2\omega) - \Psi_r(u)\right] \qquad (3.)$$

De $\Psi_2(u) = A_1\zeta(u-\beta) - A_2\zeta'(u-\beta) - \cdots$ ahol csak $\zeta(u-\beta)$ nem kpz.

$\Psi_2(u+2\omega) = A_1\zeta(u-\beta+2\omega) - A_2\zeta'(u-\beta+2\omega) - \cdots$ a kettő különbsége

$\Psi_2(u+2\omega) - \Psi_2(u) = 2A_1\eta$ ezzt a különbséget alkotva valamennyi Ψ-nél és (3)-ba

beteve
$$0 = 2a_1\omega + 2\eta\sum_{(\kappa)} A_1^{(\kappa)} \quad \Big| \cdot\omega'$$
hasonlóképp
$$0 = 2a_1\omega' + 2\eta'\sum_{(\kappa)}' A_1^{(\kappa)} \quad \Big| \cdot\omega \qquad \text{szorozva és kivonva}$$
$$0 = 2(\eta\omega' - \eta'\omega)\sum A_1^{(\kappa)} \qquad \text{de } \eta\omega' - \eta'\omega \neq 0 \text{ úgyhogy szükségképen}$$

XVIII $\sum_{(\kappa)} A_1^{(\kappa)} = 0$ tehát $a_1 = 0$

És így
$$\mathfrak{F}(u) = a_0 + \Psi_2(u) + \Psi_2(u) + \cdots + \Psi_r(u) \qquad \text{XIX}$$

Ez az ellipt. függvényeknek új analytikai előállítása a ζ függvény segélyével mint egy polusos függvények és egy bizonyos constans összege. Mellékeredmény gyanánt kaptuk a XVIII alatt azt a tételt, hogy az egy pyban fekvő polusokhoz tartozó partiális törtösszegekből a (-1)-ik hatvány coefficienseinek összege 0. Így tehát 3 módon állítottuk elő az ellipt. függvényeket: 1.) σ függvénnyel 2.) $p(u)$ és derivváltjával, 3.) ζ függvénnyel. Az utóbbi előállítás különösen akkor használatos, midőn ellipt. függvényeket integrálni kell, mert ilyenkor tagonként integrálunk, s az előforduló $\zeta, \zeta', \zeta'', \ldots$ függvények integráljai $\log\sigma, \zeta, \zeta', \ldots$ mert $\int\zeta = d\log\sigma$

Az eddigiekben megismertük az ellipt. függvények három nevezetesebb tulajdonságát: 1.) egy pyban a polusok száma egyenlő a nullpontok számával 2.) a polusok összege congruens a nullpontok összegével és 3. $\sum A_1 = 0$.

Áttérünk most a σ függvény részletesebb tárgyalására, s ez lesz különösen

A σ függvény soralakja.

Hogy a σ függvényt végtelen sorral állíthassuk elő, előbb néhány a σ függvénnyel analog függvényt kell bevezetni, melyek körülbelül olyan viszonyban vannak egy néhány tulajdonságukban a σ függvényhez, mint a cosinus a sinushoz. Ilyen függvény 3 van. Ezeknek felkeresésére kiindulunk a következő ismeretes relatióból:

$$\sigma(u+2\omega) = -e^{2\eta(u+\omega)}\cdot\sigma(u)$$

Tegyünk u helyébe $u-\omega$

$$\sigma(u+\omega) = -e^{2\eta u}\sigma(u-\omega) = e^{2\eta u}\sigma(\omega-u) \text{ és}$$

szorozva $e^{-\eta u}$-val

$$e^{-\eta u}\sigma(u+\omega) = e^{\eta u}\sigma(\omega-u)$$

Tehát a baloldali függvény páros, mert értéke nem változik, ha u helyébe $-u$

teszünk. Ezt most ezenfelül úgy módosítjuk, hogy mint a cosinusnál $u=0$ mellett értéke 1 legyen. E végett osztjuk σw-vel

$$\frac{e^{-\eta u}\sigma(u+w)}{\sigma w} = \frac{e^{\eta u}\sigma(w-u)}{\sigma w}$$

már amint látható ezzel a tulajdonsággal bír; ezen két oldallal értelmezett függvényt $\sigma_2(u)$-vel jelöljük, tehát az egyik függvény

$$\sigma_2(u) = e^{-\eta u}\frac{\sigma(w+u)}{\sigma w}$$

Ennek tulajdonságai $\left.\begin{aligned}\sigma_2(-u) &= \sigma_2(u)\\ \sigma_2(0) &= 1\end{aligned}\right\}$ (1)

Előállításából látható, hogy $\sigma_2(u)$ is transc. egész függvény. A második ilyenműfüggvényhez eljutunk úgyanilymódon az ismeretes relációból

$$\sigma(u+2w') = e^{-2\eta'(u+w')}\sigma(u)$$

ha abban u helyébe $u-w'$-t teszünk, majd $\sigma w'$-vel osztunk, ez lesz $\sigma_3(u)$, tehát

$$\sigma_3(u) = e^{-\eta' u}\frac{\sigma(w'+u)}{\sigma w'}$$

ez is az (1) alatti tulajdonságokkal bír. Az $w+w'$ félperiodus bevezetésével, úgyanily függvényhez jutunk. Ugyanis $\sigma(u+2w')$-ben u helyébe $u+2w$-t téve

$$\sigma(u+2w+2w') = -e^{2\eta'(u+2w+w')}\cdot\sigma(u+2w) = e^{-2\eta'(u+2w+w')+2\eta(u+w)}\cdot\sigma(u)$$

de az exponens összevont alakban $2(\eta+\eta')(u+w+w') - 2\eta w' + 2\eta' w$, melyhez a többi kivonandó $-2(\eta w' - \eta' w) = -\pi i$ és $e^{-\pi i} = -i$ úgy hogy $\sigma(u+2w+2w') = -e^{2(\eta+\eta')(u+w+w')}\cdot\sigma(u)$

Ebben most u helyébe $u-w-w'$-t írva és $\sigma(u+w+w') = -e^{2(\eta+\eta')u}\cdot\sigma(u-w-w')$ egyenletet $e^{-(\eta+\eta')u}$-val keresztül szorozva $e^{-(\eta+\eta')u}\sigma(u+w+w') = e^{(\eta+\eta')u}\cdot\sigma(w-w'-u)$ ezt osztva $\sigma(w+w')$-vel, kapjuk az analog 3-dik függvényt

$$\sigma_2(u) = \frac{e^{-(\eta+\eta')u}\sigma(w+w'+u)}{\sigma(w+w')}$$

mely a σ_2 és σ_3-al közösen bírja az (1) alatti tulajdonságokat, hasonlóan a cosinushoz, míg σ hasonlít a sinushoz, amennyiben $\left[\frac{\sigma(u)}{u}\right]_{u=0} = 1$. Mindegyikből tűnik el, a hol a bennök szereplő σ függvény, tehát $\sigma_1(u)$ nullapontjai w és $w+2rw+2r'w'$; $\sigma_2(u)$ nullapontjai $w+w'$ és $w+w'+2rw+2r'w'$ és $\sigma_3(u)$ nullapontjai $w'+2rw+2r'w'$. Ezen σ_1 σ_2 σ_3 függvények segélyével fogjuk σ-t végtelen sorral előállítani. Láttuk, hogy

$$\sigma(u) = \frac{2w}{\pi}e^{\frac{\eta}{2w}u^2}\cdot\sin\frac{\pi u}{2w}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\pi\left(\frac{nw'}{w}+\frac{u}{2w}\right)\sin\pi\left(\frac{nw'}{w}-\frac{u}{2w}\right)}{\sin^2\frac{\pi w'}{w}}$$

Már most vezessük be a következő jelöléseket $e^{\frac{\pi u}{2w}\cdot i} = z$ és $e^{\frac{\pi w'}{w}i} = q$. Mivel $\frac{w'}{w}$ képzetes része positiv, tehát $\frac{\pi w'}{w}$-é is, azért $\frac{\pi w'}{w}i$ reális része negativ, azaz ha $\frac{\pi w'}{w}i = x+yi$, $x<0$ és így $|q| = e^x < 1$, mert x neg. Tehát $|q|<1$. Már most

$\sin\frac{\pi u}{2\omega} = \frac{e^{\frac{\pi u}{2\omega}i} - e^{-\frac{\pi u}{2\omega}i}}{2i} = \frac{z - z^{-1}}{2i}$ és $\sin\pi\left(\frac{n\omega'}{\omega} + \frac{u}{2\omega}\right) = \frac{e^{\frac{\pi n\omega'}{\omega}i} e^{\frac{\pi u}{2\omega}i} - e^{-\frac{\pi n\omega'}{\omega}i} e^{-\frac{\pi u}{2\omega}i}}{2i} \cdot \frac{q^n z - q^{-n} z^{-1}}{2i}$

és a második sinus $\sin\pi\left(\frac{n\omega'}{\omega} - \frac{u}{2\omega}\right) = \frac{q^n z^{-1} - q^{-n} z}{2i}$ és végre $\sin\pi\frac{u\omega'}{\omega} = \frac{e^{\frac{\pi n\omega'}{\omega}} - e^{-\frac{\pi n\omega'}{\omega}i}}{2i} =$

$= \frac{q^n - q^{-n}}{2i}$, úgyhogy $\sigma(u)$-ban a Π megetti kifejezés következő alakú

$$\frac{i}{2i}\frac{(q^n z - q^{-n} z^{-1})(q^n z^{-1} - q^{-n} z)}{(q^n - q^{-n})^2} \quad \text{felsőt és alsót } q^n q^n\text{-el szorozva}$$

$$= \frac{i}{2i}\frac{(q^{2n} z - z^{-1})(q^{2n} z^{-1} - z)}{(q^{2n} - 1)^2} \quad \text{és } 1 = z \cdot z^{-1}\text{-el szorozva}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{(q^{2n} z^2 - 1)(q^{2n} z^{-2} - 1)}{(q^{2n} - 1)^2} = \frac{(1 - q^{2n} z^2)(1 - q^{2n} z^{-2})}{(1 - q^{2n})^2}$$

És így $\sigma(u)$ végtelen szorzatalakja következő

$$\sigma(u) = \frac{2\omega}{\pi} e^{\frac{\eta}{2\omega}u^2} \cdot \frac{z - z^{-1}}{2i} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - q^{2n} z^2)(1 - q^{2n} z^{-2})}{(1 - q^{2n})^2} \qquad (2)$$

És a Π megetti 3 zárjeles végtelen szorzatról tudjuk, hogy külön-külön feltételnül convergensek, mert az additiv tagokra nézve $|q| < 1$. Most z és q bevezetésével σ_1, σ_2 és σ_3-at végtelen szorzattal fogjuk előállítani. E végett először a nevezőkben szereplő $\sigma\omega$, $\sigma\omega'$ és $\sigma(\omega+\omega')$ constansokat kell meghatározni. Az első végett (2)-ben $u = \omega$ teszünk; lássuk hogy alakulnak át az egyes faktorok ha $z = e^{\frac{\pi u}{2\omega}i}$-ben $u = \omega$, $e^{\frac{\pi\omega}{2\omega}i} = e^{\frac{\pi}{2}i} = i$, tehát z helyébe kell írni i-t, $z^2 = -1$, $z^{-2} = -1$ úgyhogy $\frac{z - z^{-1}}{2i}$ helyébe lép $\frac{i+i}{2i} = 1$, tehát

$$\sigma\omega = \frac{2\omega^2}{\pi} e^{\frac{\eta\omega}{2}} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1+q^{2n})^2}{(1-q^{2n})^2} \qquad (3)$$

a mely véges értékű és nem 0. $\sigma\omega'$ végett (2)-ben $u = \omega'$-ével z helyébe lép $e^{\frac{\pi\omega'}{2\omega}i}$ s ez nem egyéb, mint $q^{\frac{1}{2}}$, melynek azt az értéket kell venni, mely kijön, ha az exp. függvény sorában $z = \frac{\pi\omega'}{2\omega}i$. Továbbá z^2 helyébe jő q, z^{-2} helyébe q^{-1}, úgyhogy (2)-ben a Π: $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1-q^{2n+1})(1-q^{2n-1})}{(1-q^{2n})^2}$

a felső első faktora $(1-q^3)(1-q^5)\ldots$, a második $(1-q)(1-q^3)\ldots$ tehát az elsőben $(1-q)$ faktor nincs meg, de ezt behozhatjuk a Π előtti faktorból, t.i.

$\frac{z - z^{-1}}{2i} = \frac{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}}{2i} = \frac{-q^{-\frac{1}{2}}(1-q)}{2i}$, ez a zárjeles faktor pótolja az elsőhiányt úgyhogy a Π előtt marad $\frac{-q^{-\frac{1}{2}}}{2i} = \frac{iq^{-\frac{1}{2}}}{2}$ és így

$$\sigma\omega' = \frac{2\omega}{\pi} e^{\frac{\eta\omega'^2}{2\omega}} \cdot \frac{iq^{-\frac{1}{2}}}{2} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1-q^{2n+1})^2}{(1-q^{2n})^2} \qquad (4)$$

S végre $\sigma(\omega+\omega')$ kiszámításánál (2)-ben $u = \omega+\omega'$-ével, z helyébe lép $e^{\frac{\pi(\omega+\omega')}{2\omega}i} = iq^{\frac{1}{2}}$ z^2 h. $-q$, z^{-2} h. $-\frac{1}{q} = -q^{-1}$, tehát Π: $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1+q^{2n+1})(1+q^{2n-1})}{(1-q^{2n})^2}$ s itt is hiányzik az

első faktorból az $(1-q)$, de ez adódik $\frac{z-z^{-1}}{2i}$-ből, ennek helyére lépve ugyanis $\frac{iq^{\frac{1}{2}}+iq^{-\frac{1}{2}}}{2i} = \frac{q^{-\frac{1}{2}}}{2}(1+q)$ úgyhogy

$$\sigma(\omega+\omega') = \frac{2\omega}{\pi} e^{\frac{\eta(\omega+\omega')^2}{2\omega}} \frac{q^{-\frac{1}{2}}}{2} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1+q^{2n-1})^2}{(1-q^{2n})^2} \qquad (5)$$

Ezek segélyével már most alkossuk meg a $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.-at z és q bevezetésével. $\sigma_1(u) = e^{-\eta u}\frac{\sigma(\omega+u)}{\sigma\omega}$ tehát még csak $e^{-\eta u}\sigma(\omega+u)$ határozandó meg. (2)-ben u helyébe $u+\omega$ írva, z helyébe lépi $e^{\frac{\pi(u+\omega)}{2\omega}i} = zi$, tehát z^2 helyett $(-z^2)$ és $\frac{z-z^{-1}}{2i}$ helyébe $\frac{iz+iz^{-1}}{2i} = \frac{z+z^{-1}}{2}$. A mi az exp. faktort illeti, ez $e^{\frac{\eta}{2\omega}(u+\omega)^2} = e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}} e^{\eta u} \cdot e^{\frac{\eta\omega}{2}}$-s ezt szorozni kell $e^{-\eta u}$-val, miáltal $e^{\eta u}$ elesik, úgyhogy

$$e^{-\eta u}\sigma(\omega+u) = \frac{2\omega}{\pi} e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}} \frac{z+z^{-1}}{2} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1+q^{2n}z^2)(1+q^{2n}z^{-2})}{(1-q^{2n})^2}$$ és ezt osztva

$\sigma\omega$-val (3) kapjuk $\sigma_1(u) = e^{\frac{\eta}{2\omega}u^2}\frac{z+z^{-1}}{2}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1+q^{2n}z^2)(1+q^{2n}z^{-2})}{(1+q^{2n})^2}$ (6)

ez helyes annyiban is, mert ha $u=0$, $\sigma_1(0)=1$. Most jön $\sigma_3(u) = e^{-\eta' u}\frac{\sigma(\omega+u)}{\sigma\omega'}$ tehát csak $e^{-\eta' u}\sigma(\omega'+u)$ számítandó ki. (2)-ben u helyébe $u+\omega'$ téve, z helyébe lépi $e^{\frac{\pi(u+\omega')}{2\omega}i} = zq^{\frac{1}{2}}$, z^2 helyébe z^2q úgyhogy a Π:

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1-q^{2n+1}z^2)(1-q^{2n-1}z^{-2})}{(1-q^{2n})^2}$$

az első faktorból hiányzó $(1-q)z^2$ tagot pótolja a Π előtti $\frac{z-z^{-1}}{2i}$, ennek helyére lépi $\frac{zq^{\frac{1}{2}}-z^{-1}q^{-\frac{1}{2}}}{2i} = \frac{-z^{-1}q^{-\frac{1}{2}}}{2i}(1-qz^2) = \frac{iz^{-1}q^{-\frac{1}{2}}}{2}(1-qz^2)$ ez utóbbi faktort bevive, lesz az exp. faktortól eltekintve $\frac{iq^{-\frac{1}{2}}z^{-1}}{2}\prod\frac{(1-q^{2n-1}z^2)(1-q^{2n-1}z^{-2})}{(1-q^{2n})^2}$ és még $e^{-\eta' u}\sigma(\omega'+u)$-ból az exponens $\frac{\eta}{2\omega}u^2 + (\frac{\eta\omega'}{\omega}-\eta')u + \frac{\eta\omega'^2}{2\omega} = \frac{\eta}{2\omega}u^2 + \frac{\eta\omega'-\eta'\omega}{\omega}u + \frac{\eta\omega'^2}{2\omega}$, de $\frac{\eta\omega'-\omega\eta'}{\omega} = \frac{\pi}{2\omega}i$ és így az exp. faktor $e^{\frac{\eta}{2\omega}u^2}e^{\frac{\pi i}{2\omega}u}e^{\frac{\eta\omega'i}{2\omega}} = e^{\frac{\eta}{2\omega}u^2}\cdot z\cdot e^{\frac{\eta\omega'i}{2\omega}}$ ez a z pedig a Π előtti z^{-1}-el 1-et ad, hatehát az így nyert $e^{-\eta' u}\sigma(\omega'+u)$-t osztjuk $\sigma\omega'$-el, kapjuk

$$\sigma_3 u = e^{\frac{\eta}{2\omega}u^2}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1-q^{2n-1}z^2)(1-q^{2n-1}z^{-2})}{(1-q^{2n-1})^2} \qquad (7)$$

Következik végre $\sigma_2 u = e^{\pi i(\eta+\eta')\frac{u}{2\omega}}\frac{\sigma[u+\omega+\omega']}{\sigma(u+\omega')}$. E végett (2.)-ben u helyébe $u+\omega+\omega'$ téve, z helyébe lépi $e^{\frac{\pi i}{2\omega}(u+\omega+\omega')} = z\cdot i\cdot q^{\frac{1}{2}}$, z^2 helyébe jő $-z^2q$, z^{-2} helyébe $-z^{-2}\cdot q^{-1}$, úgyhogy a Π:

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1+q^{2n+1}z^2)(1+q^{2n-1}z^{-2})}{(1-q^{2n})^2}$$ az első faktorból hiányzó $1-qz^2$ adódik $\frac{z-z^{-1}}{2i}$-ből, mert ennek helyére lépi $\frac{z\cdot i\cdot q^{\frac{1}{2}}+z^{-1}\cdot i\cdot q^{-\frac{1}{2}}}{2i} = z^{-1}q^{-\frac{1}{2}}\frac{z+qz^2}{2}$, mely utóbbi bevi-endő Π-be, úgyhogy exp. faktor nélkül kapjuk

$$\frac{z^{-1}q^{-\frac{1}{2}}}{2}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1+q^{2n-1}z^2)(1+q^{2n-1}z^{-2})}{(1-q^{2n})^2}$$

Most jön még $e^{-(\eta+\eta')\frac{u}{2\omega}}\sigma(u+\omega+\omega')$ exp. faktorának exponense: $\frac{\eta}{2\omega}(u+\omega+\omega')^2 - (\eta+\eta')u$
$= \frac{\eta}{2\omega}u^2 + \frac{\eta u(\omega+\omega')}{\omega} + \frac{\eta}{2\omega}(\omega+\omega')^2 - (\eta+\eta')\omega = \frac{\eta}{2\omega}u^2 + u(-\eta-\eta'+\frac{\eta(\omega+\omega')}{\omega}) + \frac{\eta}{2\omega}(\omega+\omega')^2$

$\frac{\eta}{2\omega}u^2+u\frac{\pi i}{2\omega}+\frac{\eta}{2\omega}(\omega+\omega')^2$ a mennyiben $\frac{\eta\omega'-\eta'\omega}{\omega}=\frac{\pi}{2\omega}i$, tehát az exp. faktor $e^{\frac{\eta}{2\omega}u^2}z\cdot e^{\frac{\eta}{2\omega}(u+\omega')^2}$, a mennyiben $e^{\frac{u\pi}{\omega}i}=z$ ez u z kiejti z^{-1}-et, úgyhogy $\sigma(\omega+\omega')$-vel való osztásból adódik $\sigma_2(u)=e^{\frac{\eta}{2\omega}u^2}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1+q^{2n-1}z^2)(1+q^{2n-1}z^{-2})}{(1+q^{2n-1})^2}$ (8.)

A (2), (6), (7), és (8) végtelen szorzatok nevezőiben álló constans értékű végtelen szorzatok számára a következő rövidített jelöléseket hozzuk be:

a σ-ban szereplő $q_0=\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})$

a σ_1-ben " $q_1=\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n})$

a σ_2-ben " $q_2=\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n-1})$

a σ_3-ban " $q_3=\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-1})$

mindegyik feltétlenül és szorosabb értelemben convergens. Ezen négy végtelen szorzat között következő egyszerű összefüggés áll fenn: az elsőben $1-q^{2n}=(1-q^n)(1+q^n)$ lévén $\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})=\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^n)$. Az elsőben le kell vonni 1-ből q összes egész kitevőjű hatványait 1-től ∞-ig; ezek közül a páros kitevőjű hatványokra vonatkozó különbségek szorzata adja q_0-at, a páratlan kitevőjű hatványokra vonatkozó különbségek szorzata adja q_3-at; tehát az első szorzat $\prod(1-q^n)=q_0q_3$, hasonlóképpen $\prod(1+q^n)=q_1q_2$. Ahhoz $q_0=q_0q_1q_2q_3$, és ebből $q_1q_2q_3=1$, ez az említett relatió.

Most ezen szorzatok jelének bevezetésével a mi 4 függvényünk következő alakot ölt:

$$\sigma(u)=\frac{2\omega}{\pi}e^{\frac{\eta}{2\omega}u^2}\cdot\frac{1}{q_0^2}\cdot\frac{z-z^{-1}}{2i}\prod(1-q^{2n}z^2)(1-q^{2n}z^{-2})$$

$$\sigma_1(u)=e^{\frac{\eta}{2\omega}u^2}\frac{1}{q_1^2}\cdot\frac{z+z^{-1}}{2}\prod(1+q^{2n}z^2)(1+q^{2n}z^{-2})$$

$$\sigma_2(u)=e^{\frac{\eta}{2\omega}u^2}\frac{1}{q_2^2}\prod(1+q^{2n-1}z^2)(1+q^{2n-1}z^{-2})$$

$$\sigma_3(u)=e^{\frac{\eta}{2\omega}u^2}\frac{1}{q_3^2}\prod(1-q^{2n-1}z^2)(1-q^{2n-1}z^{-2})$$

Ez a 4 függvény egyszeresen végtelen szorzatalakja. Ezek helyett most végtelen sorokat kell bevezetni. Elég ha ezt megtesszük a σ_2 függvénnyel, mert erről könnyen át lehet menni a többire. A σ_2-ben szereplő szorzat

$$\Phi(z)=\prod(1+q^{2n-1}z^2)(1+q^{2n-1}z^{-2}) \qquad (9)$$

Erről pl. σ_3-ra úgy megyünk át, hogy z^2 helyébe $(-z^2)$-et írunk. Ez a szorzat, $|q|<1$ lévén, z minden a 0-tól különböző értéke mellett feltétlenül convergens. A szorzat értéke annyi mint az első faktor szorzatának limese. Könnyen belátható, hogy ha a szorzást végrehajtjuk, felléphetnek mint összeadandók z-nek összes pos. és neg. páros kitevőjű hatványai bizonyos constans számokkal szo-

rezva, úgyhogy a $2v$ kitevőnek megfelelő coefficiencot A_v-vel jelölve $\Phi(z)$ a hörethezősorulakban is irható: $\Phi(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_v z^{2v}$

Ezen A coefficiensek meghatározására kell most egy formulát keresnünk Ez könnyen adodik a $\Phi(z)$ két functionális tulajdonságából, melyek kiolvashatók $\Phi(z)$ szorzatalakjából.

1) $\Phi(z)$ értéke nem változik, ha z helyébe $\frac{1}{z}$-t irunk, mert hiszen csak a szorzás sorrendje változik meg, a $\Phi(z)$ pedig feltétlenül convergens. Tehát $\Phi(\frac{1}{z}) = \Phi(z)$

2.) Ha $\Phi(z)$-t részleteseben kiirjuk:

$$\Phi(z) = (1+qz^2)(1+q^3z^2)(1+q^5z^2)\cdots\cdots$$
$$\cdot(1+qz^{-2})(1+q^3z^{-2})(1+q^5z^{-2})\cdots\cdot$$
$$\Phi(qz) = (1+q^3z^2)(1+q^5z^2)(1+q^7z^2)\cdots\cdots$$
$$\cdot(1+q^{-2}z^{-2})(1+qz^{-2})(1+q^3z^{-2})\cdots\cdot$$

és ha ezen utolsó sor első tagja helyett irunk $1+q^{-2}z^{-2} = q^{-2}z^{-2}(1+qz^2)$ és ez utóbbi zárjeles faktort az első sor első tagjának irjuk, látható, hogy $\Phi(qz) = q^{-2}z^{-2}\Phi(z)$ tehát $\Phi(z) = qz^2\Phi(qz)$, ez a második functionális tulajdonság.

Már most az első tulajdonság alapján $\Phi(\frac{1}{z}) = \Phi(z)$, tehát

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} A_v z^{2v} = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_{-v} z^{-2v} \quad \text{vagyis } A_v = A_{-v}, \text{ tehát elég a pos. } v\text{-khez}$$

tartozó A-kat meghatározni. A második tulajdonság alapján az összes A-kat A_0-val tudjuk kifejezni. Ugyanis

$$\Phi(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_v z^{2v} \qquad (1.)$$

$$\Phi(qz) = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_v q^{2v} z^{2v} \quad \text{és a második tulajdon-}$$

ság alapján

$$\Phi(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_v q^{2v+2} z^{2(v+2)} \qquad (2.)$$

(1) és (2)-ben z ugyanazon hatványának coefficiensei egyenlők. Vegyük a $2v$-dik hatványt. Ennek coefficiense az (1)-ben A_v, (2)-ben a coefficiencot hagyjuk, ha v helyébe $(v-1)$ teszünk, mert ekkor adódik z^{2v}, és ennek coefficiense $A_{v-1}q^{2v-1}$ tehát $A_v = A_{v-1}q^{2v-1}$ ez a recurrens formula hőti össze az A-kat e szerint tehát

$$A_2 = A_0 q$$
$$A_3 = A_2 q^3$$
$$A_4 = A_3 q^5$$
$$\cdots\cdots$$
$$A_v = A_{v-1} q^{2v-1}$$

összeszorozva $A_v = A_0 q^{v^2}$ ejt. úgy $A_{-v} = A_0 q^{v^2}$

tehát csak A_0 marad határozatlan, a mennyiben A_v értékét betéve

$$\Phi(z) = A_0 \sum_{r=-\infty}^{\infty} q^{r^2} z^{2r} \qquad (3.)$$

Csak azt kell még kimutatni, hogy ez a sor feltétlenül convergens. A sort így is írhatjuk $\Phi(z) = A_0\left(1 + \sum_{1}^{\infty} q^{r^2} z^{2r} + \sum_{1}^{\infty} q^{r^2} z^{-2r}\right)$. Kimutatjuk, hogy ez a két Σ külön külön feltétlenül convergens, és pedig a Cauchy féle conv. kritérium segélyével, megalkotva az $(n+1)$ és n-dik tag hányadosának limesét.

$\lim_n \left|\frac{q^{(n+1)^2} z^{2(n+1)}}{q^{n^2} z^{2n}}\right| = \lim_n |q^{2n+1} z^2| = 0 < 1$, és így $\lim_n \left|\frac{q^{(n-1)^2} z^{-2(n+1)}}{q^{n^2} z^{-2n}}\right| = \lim_n |q^{2n+1} z^{-2}| = 0 < 1$

mindkettő azért, mert $|q| < 1$. Tehát $\Phi(z)$ sora feltétlenül convergens. Most még A_0-t kell meghatározni. E végett csak az n első faktor szorzatát vesszük

$$\Phi_n(z) = \underbrace{(1+qz^2)(1+q^3z^2)\cdot\ldots\cdot(1+q^{2n-1}z^2)}_{1.} \cdot (1+qz^{-2})\underbrace{(1+q^3z^{-2})\cdot\ldots\cdot(1+q^{2n-1}z^{-2})}_{2.} \qquad (10.)$$

Ha ezt a szorzást végrehajtjuk, kapjuk $\Phi_n(z)$-t egy véges sorral, mely a mint látható csak z páros hatványait tartalmazza; a legnagyobb hatvány z^{2n} adódik, ha az 1.) tényezősor második tagjait szorozzuk a 2.-ik tényezősor első tagjaival, s a legkisebb hatvány z^{-2n} adódik, ha 1.) első tagjait szorozzuk 2.) második tagjaival; ha tehát ezen véges sorban felléjövő coefficienseket a-kkal jelöljük, akkor $\Phi_n(z)$ így írható $\Phi_n(z) = \sum_{r=-n}^{n} a_r z^{2r}$. Ezen a-k meghatározására $\Phi_n(z)$ két functionális tulajdonságából indulunk ki:

1.) $\Phi_n(z)$ nem változtatja értékét, ha z helyébe $\frac{1}{z}$-t írunk. Ez kitűnik (10)-ből.

2.) Ha $\Phi_n(z)$-ben z helyébe zq-t írunk,

$$\Phi_n(qz) = (1+q^3z^2)(1+q^5z^2)\cdot\ldots\cdot(1+q^{2n+1}z^2)$$
$$\cdot(1+q^{-2}z^{-2})(1+qz^{-2})\cdot\ldots\cdot(1+q^{2n+3}z^{-2})$$

Ha $(1+q^{-1}z^{-2})$ helyébe amaz egyenlőt $q^{-1}z^{-2}(1+qz^2)$ írjuk, látható, hogy

$$\Phi_n(zq) = \Phi_n(z)\, q^{-1}z^{-2}\cdot\frac{1+q^{2n+1}z^2}{1+q^{2n-1}z^{-2}}$$

és ebből $qz^2(1+q^{2n-1}z^{-2})\Phi_n(qz) = \Phi_n(z)(1+q^{2n+1}z^2) = (qz^2+q^{2n})\Phi_n(zq)$

hat.i a baloldalon qz^2-el beszorzunk ez a második functionális tulajdonság.

Ugyanezt az egyenletet írjuk most $\Phi_n(z)$ összeg alakjával

$$(qz^2+q^{2n})\sum_{r=-n}^{n} a_r q^{2r} z^{2r} = (1+q^{2n-1}z^2)\sum_{r=-n}^{n} a_r z^{2r} \qquad \text{vagyis}$$

$$\sum_{r=-n}^{n}(a_r q^{2r+1}z^{2r+2} + a_r q^{2(n+r)}z^{2r}) = \sum_{r=-n}^{n}(a_r z^{2r} + a_r q^{2n-1}\cdot z^{2r+2})$$

Ebben a két sorban z megfelelő hatványának coefficienseit egyenlőknek kell legyenek. Vegyük z^{2r} coefficienseit. Ezek a baloldalon $a_{r-1}q^{2r-1} + a_r q^{2(n+r)}$ a jobboldalon $a_r + a_{r-1}q^{2n+1}$. Ez a kettő egyenlő, $a_{r-1}q^{2r-1} + a_r q^{2(n+r)} = a_r + a_{r-1}q^{2n+1}$, ebből kapjuk az a-k számára a recurrens formulát, mely szerint $a_{r-1}(q^{2r-1} - q^{2n+1}) = a_r(1-q^{2(n+r)})$

vagyis $$a_{r-1}\, q^{2r-1}(1-q^{2(n-r+2)}) = a_r(1-q^{2(n+r)})$$

ebből $$a_r = a_{r-1}\, q^{2r-1}\,\frac{1-q^{2(n-r+2)}}{1-q^{2(n+r)}}$$

tehát $$a_1 = a_0 q\,\frac{1-q^{2n}}{1-q^{2(n+1)}}$$

$$a_2 = a_1 q^3\,\frac{1-q^{2(n-1)}}{1-q^{2(n+2)}}$$

$$a_3 = a_2 q^5\,\frac{1-q^{2(n-2)}}{1-q^{2(n+3)}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_r = a_{r-1}\, q^{2r-1}\,\frac{1-q^{2(n-r+2)}}{1-q^{2(n+r)}}$$

összeszorozva $$a_r = a_0 q^{r^2}\,\frac{(1-q^{2n})(1-q^{2(n-1)})\cdots(1-q^{2(n-r+2)})}{(1-q^{2(n+1)})(1-q^{2(n+2)})\cdots(1-q^{2(n+r)})}$$

Tehát éppenmint $\bar{\Phi}(z)$ összegben csak A_0 ismeretlen, így a $\bar{\Phi}_n(z)$ véges összegben csak a_0 ismeretlen. Ezt kell meghatározni s miután $\Phi(z) = \lim_n \bar{\Phi}_n(z)$ azért $A_0 = \lim_n a_0$. Tehát határozzuk meg a_0-t. Midőn (10)-t meghatároztuk, z^{2n} legmagasabb hatványcoefficiense $q^{1+3+5+\cdots+2n-1} = q^{n^2}$, tehát $a_n = q^{n^2}$ és az utóbbi formula szerint

$$a_n = a_0 q^{n^2}\,\frac{(1-q^{2n})(1-q^{2(n-1)})\cdots(1-q^2)}{(1-q^{2(n+1)})(1-q^{2(n+2)})\cdots(1-q^{4n})}$$

amiből következik, hogy $a_0\,\frac{(1-q^{2n})\cdots(1-q^2)}{(1-q^{2(n+1)})\cdots(1-q^{4n})} = 1$

azaz $$a_0 = \frac{(1-q^{2(n+1)})(1-q^{2(n+2)})\cdots(1-q^{4n})}{(1-q^2)(1-q^4)\cdots(1-q^{2n})}$$

Már most ennek limesét kell venni, $n=\infty$ mellett. A nevezőben álló véges szorzat ezáltal átmegy az $(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\cdots = q_0$ végtelen szorzatba, vagyis ha az alsó véges szorzat P_n, $\lim_n P_n = q_0$. A felsőben áll P_n folytatása az $(n+2)$-ik tagtól a $2n$-ig és most n-et végtelen nagynak kell venni, vagy más szóval a q_0 végtelen szorzatból igen messze fekvő helytől kezdve kell szorzani bizonyos számú faktort, de tudjuk a feltétlenül conv. végtelen szorzatok elméletéből, hogy bizonyos helytől kezdve a kérdéses tag szorzatának R_n-nek limese $\lim_n R_n = 1$. Ha tehát $a_0 = \frac{R_n}{P_n}$ akkor $A_0 = \lim_n a_0 = \frac{\lim R_n}{\lim P_n} = \frac{1}{q_0}$, tehát $A_0 = \frac{1}{q_0}$

Ez a bizonyítás nagyon nem egészen szigorú, mert a $\bar{\Phi}_n(z)$ limes átmenetében nemcsak n, hanem a faktorok száma is végtelenbe nő. A szigorú bizonyítás olyan formán menne, mint $\lim_n (1+\frac{1}{n})^n = e$ kimutatásánál. Ha most A_0 ezen értékét 3.)ba beteszszük és $q_0 = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})$-el átszorzunk, akkor

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+q^{2n-1}z^2)(1+q^{2n-1}\cdot z^{-2}) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} q^{r^2} z^{2r} \qquad I.6.$$

Ez a jobboldali sor adja a q_0-val szorzott 6_2 productumot. Most az érték módosításával ebből le fogjuk vezetni a többi 6 függvényekben szereplő productumok soralakját. Tegyünk z helyébe $z \cdot i$, akkor adódik

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1-q^{2n-1}z^2)(1-q^{2n-1}z^{-2}) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}(-1)^{\nu}q^{\nu^2}z^{2\nu} \qquad \text{II } 6_3.$$

Tehát ez a jobboldali sor nem egyéb, mint 6_3-ban előforduló productum szorozva q_0-val. Tegyünk z helyébe $q^{\frac{1}{2}}z$, tehát z^2-h. $z^{2\nu}q^{\nu}$, $z^{2\nu}$-h. $z^{2\nu}q^{\nu}$, akkor I-ből adódik $(1+z^{-2})\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+q^{2n}z^2)(1+q^{2n-2}z^{-2}) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}q^{\nu^2+\nu}z^{2\nu}$

vagyis a jobboldali exponens teljes négyzetté való hiegészítése végett $q^{\frac{1}{4}}$-el, majd még z-vel keresztül szorozva, kapjuk

$$q^{\frac{1}{4}}(z+z^{-1})\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+q^{2n}z^2)(1+q^{2n}z^{-2}) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}q^{\left(\frac{2\nu+1}{2}\right)^2}z^{2\nu+1} \qquad \text{III } 6_1$$

és ez nem egyéb, mint a 6_2-ben szereplő, constansokkal mentett Π-nak q_0-val való szorzata soralakban. Végre a 6-ban szereplő végtelen szorzatot soralakban megkapjuk, ha III 6_1-ben z helyébe iz írunk; lesz $i^{2\nu+1} = i^{2\nu}\cdot i = (-1)^{\nu}i$; $iz - iz^{-1} = i(z-z^{-1})$, tehát mindkét oldalon előjön i, ez tehát elesik, majd még keresztül osztunk i-vel és kapjuk

$$q^{\frac{1}{4}}\frac{z-z^{-1}}{i}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1-q^{2n}z^2)(1-q^{2n}z^{-2}) = \frac{1}{i}\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty}(-1)^{\nu}q^{\left(\frac{2\nu+1}{2}\right)^2}\cdot z^{2\nu+1} \qquad \text{IV}.$$

Ezen 4 összeg segélyével bevezetjük a Jacobi féle ϑ függvényeket. Láttuk, hogy $z = e^{\frac{\pi u}{2\omega}i}$, tegyünk $\frac{u}{2\omega} = v$, majd $q = e^{\frac{\pi\omega'}{\omega}i}$-ban $\frac{\omega'}{\omega} = \tau$, akkor $z = e^{v\pi i}$ és $q = e^{\pi\tau i}$. Ezen új v változó és τ érték bevezetésével jutunk az előbbi 4 formulából a Jacobi féle ϑ függvényekhez. Először I-ben összevonva két tagot ν és $(-\nu)$-hez tartozólag $q^{\nu^2}(z^{2\nu}+z^{-2\nu}) = q^{\nu^2}(e^{2\nu\pi vi}+e^{-2\nu\pi vi}) = 2q^{\nu^2}\cos(2\nu\pi v)$ s most a sor tagjait kapjuk, ha $\nu = 1, 2, \cdots$ tehát

$$\sum_{\text{I}} = 1 + 2q\cos 2\pi v + 2q^4\cos 4\pi v + \cdots + 2q^{\nu^2}\cos 2\nu\pi v + \cdots = \vartheta_3 v$$

a $\sum_{\text{II}}$-ben cos ugyan az előjelek fognak váltakozni, tehát

$$\sum_{\text{II}} = 1 - 2q\cos 2\pi v + 2q^4\cos 4\pi v - \cdots + (-1)^{\nu}2q^{\nu^2}\cos 2\nu\pi v + \cdots = \vartheta_4 v.$$

$\sum_{\text{III}}$-ban oly két tagot vonnunk egybe, a hol q exponense ugyanaz, tehát ha $\nu = 0, \nu = 1, \cdots \nu = \nu$ és $\nu = -1, \nu = -2, \cdots \nu = -\nu - 1$, tehát az általános két tag összevonása $q^{\left(\frac{2\nu+1}{2}\right)^2}(z^{2\nu+1}+z^{-2\nu-1}) = q^{\left(\frac{2\nu+1}{2}\right)^2}(e^{(2\nu+1)\pi vi}+e^{-(2\nu+1)\pi vi})$ tehát

$$\sum_{\text{III}} = 2(q^{\frac{1}{4}}\cos\pi v + q^{\frac{9}{4}}\cos 3\pi v + \cdots + q^{\left(\frac{2\nu+1}{2}\right)^2}\cos(2\nu+1)\pi v + \cdots) = \vartheta_2 v$$

és végre $\sum_{\text{IV}}$-ben is z helyébe v-t vezetve be, sinusok lépnek fel, s ha itt is

ugyanazokat az összevonásokat eszközöljük, mint előbb, kapjuk:

$$\sum_{IV} = 2(q^{\frac{1}{4}}\sin\pi v - q^{\frac{9}{4}}\sin 3\pi v + \cdots + (-1)^{\nu} q^{\frac{(2\nu+1)^2}{4}}\sin(2\nu+1)\pi v + \cdots) = \vartheta_2 v$$

Ezek az úgy nevezett ϑ függvények, melyeket Jacobi már a σ függvények előtt vezetett be az analízisbe; mi itt utóbbiakkal jutottunk a ϑ függvényekhez. A ϑ és σ függvények közt egyszerű összefüggés van; látni fogjuk, hogy az egyes ϑ függvények egyegyel alacsonyabb indexű σ függvényekkel vannak összefüggésben, tehát σ a ϑ_1-el .... σ_3 a ϑ_4-el. Ha ugyanis szemügyre vesszük a 46 függvény alakját és összevetjük a ϑ függvényeket értelmező sorokkal az equivalens végtelen szorzatokkal, látjuk, hogy

$$\sigma u = \frac{2\omega}{\pi q_0^{\frac{1}{4}}} l^{\frac{\eta}{2\omega}u^2} \frac{z-z^{-1}}{2i} \prod_{m=1}^{\infty}(1-q^{2m}z^2)(1-q^{2m}z^{-2}) = \frac{\omega}{\pi q_0^{\frac{1}{4}} q_0} l^{\frac{\eta}{2\omega}u^2} \vartheta_1\left(\frac{u}{2\omega}\right), \text{ mert } v = \frac{u}{2\omega}$$

$$\sigma_1 u = \frac{1}{q_1^{\frac{1}{4}}} l^{\frac{\eta}{2\omega}u^2} \frac{z-z^{-1}}{2} \prod_{m=1}^{\infty}(1+q^{2m}z^2)(1+q^{2m}z^{-2}) = \frac{1}{2q_0^{\frac{1}{4}} q_0 q_1^2} l^{\frac{\eta}{2\omega}u^2} \vartheta_2\left(\frac{u}{2\omega}\right)$$

$$\sigma_2 u = \frac{i}{q_1^2} l^{\frac{\eta}{2\omega}u^2} \prod_{m=1}^{\infty}(1+q^{2m-1}z^2)(1+q^{2m-1}z^{-2}) = \frac{1}{q_0 q_1} l^{\frac{\eta}{2\omega}u^2} \vartheta_3\left(\frac{u}{2\omega}\right)$$

$$\sigma_3 u = \frac{i}{q_1^2} l^{\frac{\eta}{2\omega}u^2} \prod_{m=1}^{\infty}(1-q^{2m-1}z^2)(1-q^{2m-1}z^{-2}) = \frac{1}{q_0 q_1^2} l^{\frac{\eta}{2\omega}u^2} \vartheta_4\left(\frac{u}{2\omega}\right)$$

És miután a ϑ függvényeket mint végtelen sorral állítottuk elő, azért egy állandó értékű faktortól eltekintve a σ függvényeket is előállítottuk végtelen sorral, tehát magát $\sigma(u)$-t is, a mit ezéltól kitüztük volt. Ebből az összefüggésből kiolvashatjuk a ϑ függvények nullapontjait is, mert ezek ott tünnek el, a hol a megfelelő σ függvények. $\sigma(u)=0$, ha $u = 2r\omega + 2r'\omega'$; $\sigma_1(u)=0$, ha $u = \omega + 2r\omega + 2r'\omega'$; $\sigma_2(u)=0$, ha $u = \omega + \omega' + 2r\omega' + 2r'\omega'$; $\sigma_3(u)=0$, ha $u = \omega' + 2r\omega + 2r'\omega'$. Hatehát $v = \frac{u}{2\omega}$-ben ezen u nullaértékeket betesszük, kapjuk, hogy: $\vartheta_1 v = 0$, ha $v = r + r'\frac{\omega'}{\omega} = r + r'\tau$, $\vartheta_2 v = 0$, ha $v = \frac{1}{2} + r + r'\tau$, $\vartheta_3 v = 0$, ha $v = \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2} + r + r'\tau$. és $\vartheta_4 v = 0$, ha $v = \frac{\tau}{2} + r + r'\tau$. Ezek a ϑ függvények nullpontjai. Már most állítsuk elő a ϑ függvényeket végtelen szorzattal. Egyszerűen a ϑ függvényeket értelmező sorokkal egyenlő értékű végtelen szorzatokba bevezetjük z helyébe v-t. A ϑ_1-nél szereplett $\frac{z-z^{-1}}{2}\prod(1-q^{2m})(1-q^{2m}z^2)(1-q^{2m}z^{-2})$ ez utóbbi hét faktort összevonva $1 - q^{2m}(z^2+z^{-2}) + q^{4m}$ és $z^2+z^{-2} = 2\cos 2\pi v$ irva, továbbá $\frac{z-z^{-1}}{i} = \frac{e^{\pi v i} - e^{-\pi v i}}{i} = 2\sin\pi v$, kapjuk

$$\vartheta_1 v = 2q^{\frac{1}{4}}\sin\pi v \prod_{m=1}^{\infty}(1-q^{2m})(1-2q^{2m}\cos 2\pi v + q^{4m})$$

ejen úgy $\quad \vartheta_2 v = 2q^{\frac{1}{4}}\cos\pi v \prod_{m=1}^{\infty}(1-q^{2m})(1+2q^{2m}\cos 2\pi v + q^{4m})$

$$\vartheta_3 v = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+2q^{2n-1}\cos 2\pi v + q^{4n-2})$$
$$\vartheta_4 v = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1-2q^{2n-1}\cos 2\pi v + q^{4n-2})$$

Tehát előállítottuk a ϑ függvényeket végtelen szorzattal és végtelensorral. A σ függvénynél tehát u a változó, a ϑ függvényeknél v, a milyen szerepe van ott 2ω-nek és $2\omega'$-nek, olyan szerepe van itt 1 és τ-nak. Kérdés, hogyan változik a ϑ függvények értéke, ha v növekedik 1 és τ-val. Láttuk, hogy

$$\vartheta_1 v = 2q^{\frac{1}{4}}\sin\pi v - 2q^{\frac{9}{4}}\sin 3\pi v + \cdots + (-1)^r 2q^{\left(\frac{2r+1}{2}\right)^2}\sin(2r+1)\pi v + \cdots$$
$$\vartheta_2 v = 2q^{\frac{1}{4}}\cos\pi v + 2q^{\frac{9}{4}}\cos 3\pi v + \cdots + q^{\left(\frac{2r+1}{2}\right)^2}\cos(2r+1)\pi v + \cdots$$
$$\vartheta_3 v = 1 + 2q\cos 2\pi v + 2q^4\cos 4\pi v + \cdots + 2q^{r^2}\cos 2r\pi v + \cdots$$
$$\vartheta_4 v = 1 - 2q\cos 2\pi v + 2q^4\cos 4\pi v + \cdots + (-1)^r 2q^{r^2}\cos 2r\pi v + \cdots$$

Hasonlóst v-t növeljük 1-el, akkor ϑ_1 és ϑ_2-ben a sinus illetőleg cosinus megett πv páratlan számú többszöröseí $(2r+1)\pi v$ állván, ezek így módosulnak: $(2r+1)\pi(v+1) = (2r+1)\pi v + (2r+1)\pi$, tehát az argumentum növekedik π páratlan számú többszörösével, sin és cos. jegyet változtat, úgyhogy ezáltal ϑ_1 és ϑ_2 jegyet változtat. A ϑ_3 és ϑ_4-ben cos. megett álló $2r\pi v$-ből lesz $2r\pi(v+1) = 2r\pi v + 2r\pi$ tehát az argumentum növekedik π páros számú többszörösével, a cosinus, s így maga ϑ_3 és ϑ_4 megtartja értékét. Tehát

$$\vartheta_1(v+1) = -\vartheta_1 v$$
$$\vartheta_2(v+1) = -\vartheta_2 v$$
$$\vartheta_3(v+1) = \vartheta_3 v$$
$$\vartheta_4(v+1) = \vartheta_4 v$$

Amiből egyszersmind látható, hogy ϑ_1 és ϑ_2 periodusa 2, ϑ_3 és ϑ_4 periodusa 1.

Lássuk miképp változnak az értékek, ha v τ-val növekedik; e végett a ϑ függvényeknek Σ alakját vesszük. Láttuk, hogy $\vartheta_3 v = \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{r^2} z^{2r}$, és q-t τ-val, z-t v-vel kifejezve: $\vartheta_3 v = \sum_{-\infty}^{+\infty} l^{r^2\pi\tau i + 2r\pi v i}$, ha most v helyébe $v+\tau$ írunk,

$\vartheta_3(v+\tau) = \sum_{-\infty}^{+\infty} l^{r^2\pi\tau i + 2r\pi v i + 2r\pi\tau i}$, ha most az exponens első két tagjának összevonása végett az egyenlet két oldalát $l^{\pi\tau i + 2\pi v i}$-vel szorozzuk,

$l^{\pi\tau i + 2\pi v i}\vartheta_3(v+\tau) = \sum_{-\infty}^{+\infty} l^{(r+1)^2\pi\tau i + 2(r+1)\pi v i}$ de ez a summa nem más, mint a régi ϑ_3, csakhogy itt más sorrendben summázunk, a mi könnyen belátható, ha itt $r = 1, 2, 3 \ldots$ -et veszünk, úgyanazokat a tagokat kapjuk; de $\vartheta_3 v$ feltétlenül convergens. Igy tehát $\vartheta_3(v+\tau) = l^{-\pi i(2v+\tau)}\vartheta_3 v$.

Tehát az argumentumnak τ-val való növelése folytán a függvény csak egy exp. faktorral szorzódik. Most $\vartheta_4(v) = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^\nu e^{\nu^2\pi\tau i + 2\nu\pi v i}$ s ha v helyébe $(v+\tau)$ teszünk és kereszttül szorzunk $-e^{\pi\tau i + 2\pi v i}$-vel $-e^{\pi\tau i + 2\pi v i}\vartheta_4(v+\tau) = \sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^{\nu+1} e^{(\nu+1)^2\pi\tau i + 2(\nu+1)v\pi i} = \vartheta_4(v)$, mint az előbb, tehát $\vartheta_4(v+\tau) = -e^{-\pi i(2v+\tau)}\vartheta_4 v$; $\vartheta_2(v) = \sum q^{(\nu+\frac{1}{2})^2} z^{2(\nu+\frac{1}{2})}$, s ugyanazon eljárással adódik, hogy $\vartheta_2(v+\tau) = e^{-\pi i(2v+\tau)}\cdot\vartheta_2 v$ és szorozva (-1)-el $\vartheta_1(v+\tau) = -e^{\pi i(2v+\tau)}\vartheta_1(v.)$ Összeállítva tehát

$$\left.\begin{aligned}
\vartheta_1(v+\tau) &= -e^{-\pi i(2v+\tau)}\vartheta_1 v\\
\vartheta_2(v+\tau) &= e^{-\pi i(2v+\tau)}\vartheta_2 v\\
\vartheta_3(v+\tau) &= e^{-\pi i(2v+\tau)}\vartheta_3 v\\
\vartheta_4(v+\tau) &= -e^{-\pi i(2v+\tau)}\vartheta_4 v.
\end{aligned}\right\}$$

Mindegyiknél ugyanaz az exp. faktor lépjen fel, úgyhogy két ilyen ϑ függvény hányadosa már nem változtatja értékét, ha v τ-val növekedik; tehát két ϑ függvény hányadosa periodikus függvény. Jacobi a következőket használja.

1.) $$\frac{\vartheta_1(v+1)}{\vartheta_4(v+1)} = -\frac{\vartheta_1 v}{\vartheta_4 v}$$ ennek periodusa 2

$$\frac{\vartheta_2(v+1)}{\vartheta_4(v+1)} = \frac{\vartheta_2 v}{\vartheta_4 v}$$ " " τ

tehát a $\frac{\vartheta_1 v}{\vartheta_4 v}$ periodusa 2 és τ, és mivel τ képzetes, azaz 2 és τ két önálló periodus, azért $\frac{\vartheta_1 v}{\vartheta_4 v}$ függvény kétszeresen periodusos függvény.

2.) $$\frac{\vartheta_2(v+1)}{\vartheta_4(v+1)} = -\frac{\vartheta_2 v}{\vartheta_4 v}$$, tehát 2 periodus

$$\frac{\vartheta_2(v+1)}{\vartheta_4(v+1)} = -\frac{\vartheta_2 v}{\vartheta_4 v}$$ tehát 2τ periodus

a hányados két önálló periodusa tehát 2 és 2τ, de ezek nem primitiv periodusok, hanem $1+\tau$, mert $\frac{\vartheta_2(v+1+\tau)}{\vartheta_4(v+1+\tau)} = \frac{\vartheta_2(v)}{\vartheta_4(v)}$, tehát $\frac{\vartheta_2 v}{\vartheta_4 v}$ függvény kétszeresen periodusos, primitiv perioduspárja 2, $1+\tau$

3.) $$\frac{\vartheta_3(v+1)}{\vartheta_4(v+1)} = \frac{\vartheta_3 v}{\vartheta_4 v}$$ tehát periodusa 1

$$\frac{\vartheta_3(v+1)}{\vartheta_4(v+1} = -\frac{\vartheta_3 v}{\vartheta_4 v}$$ " " 2τ

ez a $\frac{\vartheta_3 v}{\vartheta_4 v}$ függvény tehát szintén kétszeresen periodusos.

Így módon három kétszeresen periodusos függvényhez jutottunk, mind különböző prim periodusokkal. Jacobi ezeket következőleg nevezte el:

az elsőt némi módosítással sinus amplitudo

a másodikat cosinus amplitudo

a harmadikat differente amplitudo vagy Δ amplitudo.

Tárgymutató.

A számgömb 3.
A számcsoportok 8.
Racionális függvények.
A racionális egész függvény. 21
A racionális egész függvény meghatározása.
Lagrange formulája 39.
Tört racionális függvény 43.
A tört racionális függvény sorbafejtése 55.
A Cauchy féle formula 60.
Lineáris transformációk 67.
Egyszerű és kettős arányszám 76.
Hatványsorok 80
Más hatványsoralakok 87.
Taylor tétele a hatványsorokra 90.
Cauchy tétele a függvény maximumairól 93.
Néhány tétel a leszármaztatott hatványsorokról 100.
Exponenciális függvény 126.
Trigonometricus függvények 139.
Tangens és cotangens 150.
Logarithmus 151.
A sinus és cosinus inverz függvénye. Arcus sinus. 161
Arcus cosinus 166.
Arcus tangens 167.
Arcus cotangens 170.
Transcendens egész függvények szorzatalakban való előállítása. 171.

A trigonometriai függvények szorzatalakban való előállítása 179.
A transcendens tört függvények partiális törtekre való felbontása 185.
Periódusos függvények 189.
A Weierstrass féle σ függvény 199.
A kétszeresen periódusos függvények létezésének kimutatása és ezen függvények felkeresése 207.
A σ függvény soralakja. 219.

Herkny István

A

variatio-számítás elemei.

Dr. Schlesinger Lajos
után.

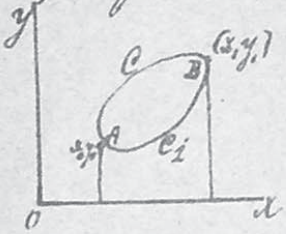
1901/02.

Ha egy kifejezésünk van, a mely változó mennyiségtől függ és ha ennek a változó mennyiségnek különböző értékekeg adunk, akkor az illető kifejezés változásáig vis az illető kifejezés különböző értékeig, a melyek a változó mennyiség különböző értékeinek felelnek meg bizonyos feltevések mellett a differentialis calculus módszereinek segélyével meglehet vizsgálni akként, hogy az illető kifejezés változásáig vizsgáljuk a változó mennyiség végtelen kis változásainál. Ebben áll a diff. calc. módszereinek lényege.

Képzeljük most, hogy egy oly kifejezésünk van, a mely nem egy változó mennyiségtől függ, hanem a mely kifejezésben még határozatlan függvények szerepelnek. Hogy a dolog világosabban láthassuk vegyünk mindjárt egy példát.

Tekintsük az:

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ y &= \psi(t) \end{aligned}\right\}$$ görbét, a melynek Descartes féle derékszögü coordinatai tehát ugy vannak előállitva, mint egy „t" parameter függvényei; legyen görbénknek a: $t=t_0$ és $t=t_1$ parameter értékeknek megfelelő kig pontja: (x,y) és (x_1,y_1) képzeljük kiszámitva emez a görbének az ivhosszág ezen kig pont közöttig. Ha az ivhossznak egyáltalában van értelme, kifejezése igy irható:



$$\int_{y_0}^{y_1} ds = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt\,;$$ mely-

lünk tehát egy olyan kifejezésig, a melyenről az imént szóltunk. Itt ugyan nem magok a φ, ψ függvények, hanem ezek deriváltjai szerepelnek, de általánosan ugy vehetjük a dolgot, hogy egy oly kifejezés képezi a vizsgálat tárgyát, a

melyben egy bizonyos függvény, ennek successiv deriváltjai, egy más függvény, ismét ennek successiv deriváltjai stb. szerepelnek. Fölvesz példánknál maradva nyilvánvaló, hogy ha az A, B pontok közt egy más görbét fektetünk, akkor ennek az uj C_1 görbének ugyanazon két pont közt más ivhossz fog megfelelni. Innen ezen uj görbének a fektetése analitikailag abban áll hogy y és y függvényalakok helyett más függvény alakokat teszünk az ivhossz kifejezésébe, az ivhossz tehát ezen két függvénytől függ, ugy hogy itt egészen más feladattal állunk szemben, mint azzal, a melyet a diff. calc. segélyével megszoktunk oldani. Itt t. i. oly kifejezésünk van a mely nem változó mennyiségektől, hanem változó függvényektől függ és az ilyen kifejezések változásának vizsgálata képezi az u. n. variatio calculus feladatát.

A variatio calculus tehát ugyszólván a diff. calc.-nak analogonja, csakhogy a mi itt változó mennyiség, az itt változó függvény.

A var. calc. hasonlóan jár el, mint a diff. calc. igyekszik t. i. egy bizonyos kifejezés változását - a mely változás az által idéztetik elő, hogy bizonyos függvény alakokat más függvényalakokkal helyettesítünk - az által tanulmányozni, hogy a szóban forgó kifejezésben a függvény alakoknak végtelen kis változását vizsgálja. Hogy mit kell azon értenünk, hogy egy függvény végtelen kis változást szenved, azt nem sokára általánosan látni fogjuk; most példánkra vonatkozólag csak annyit jegyzünk meg, hogy y' és y' függvények végtelen kis változást szenvednek, ha A és B pontok közt fektetett görbe helyébe (C) egy hozzá végtelen közel fekvő más görbét teszünk.

A var. calc. kiválólép egy feladatnak a megoldásáért lett kifejlve. Ismeretes, hogy már a diff. calc. kifejlesztése idejében is egy feladat állott előtérben, t. i. a differentia-számítás alkalmazása a függvények max. és min. - nak meghatározására, mint

azt „Legyintz alapvető" észrevételének a címe: „De maximis et minimis elemque canonibus" is mutatja és a diff. calc. célja leg megtanítsa bennünket arra, hogy miként kell egy kifejezésben, mely egy változó mennyiségtől függ, felkeresni a változónak azon specialis értékeit, a melyekre nézve az illető kifejezés extremum értéket vesz fel. Hasonló feladat megoldása czéljából lett kifejlve a variatio számítás is. Fölvett példánknál maradva, ha az A és B pontokon keresztül fektetjük az összes elképzelhető görbéket és ha mindezekre a görbékre nézve meghatározzuk A és B közötti az ívhosszat akkor felvethetjük azt a kérdést, hogy milyen görbe mentén lesz az illető ívhossz extremum, tehát mikor maximumról itt nem lehet itt is csak azt kérdezhetjük, mely A és B pont közt fektetett görbének lesz az ívhossza: minimum.? Vagyis ha adva van:

$$J = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt$$ integrál, mely φ és ψ függvényektől függ, kérdés tárgyát képezheti az, hogy a φ és ψ függvények milyen változtatása mellett lesz az „J" integrál minimum." Ez is feladatunk lehet φ és ψ-t megalkotni akként, hogy ezen specialis értékekkel megalkotott „J" integrál értéke kisebb, mint bármely más függvény érték mellett.

Természetes dolog, hogy általánosan szólva oly kifejezésekkel kell foglalkoznunk, melyek bizonyos függvény alakoktól függenek pl

$$\Phi(f(t), g(t) \ldots\ldots f'(t) g'(t) \ldots f''(t), g''(t) \ldots)$$ és vizsgálnunk kell ezeknek a kifejezéseknek a változását, ha az egyes függvények helyébe más függvényeket teszünk; azonban a var. calc. rendszerint legalább is az analytikai és geometriai alkalmazásokban oly kifejezésekkel foglalkozik, melyek határozott integrálok alakjában vannak előállítva; mint pl:

$$\int_{t_0}^{t} \Phi f(t), g(t) \ldots\ldots f'(t) g'(t) \ldots) dt$$ és épen ezért mi is főleg szintén

ilyen kifejezésekkel fogunk foglalkozni. Előbb azonban lás-
suk, miként értünk az ily függvény, illetve függvényrendszer változásán

Hogy erre szükség van mutatja a var. és diff. calc. közt
levő analogia is. A diff. calc. elméletében t. i. az extremum fela-
data nem abban áll, hogy kikeressük a független változó
azon értékét, mely mellett a függvénynek tényleg extremuma
van, hanem azon helyeket keressük, mely a szomszédos pon
tokhoz viszonyítva bir extremum jelleggel. Így áll a dolog
a variatio calc.-ban is t. i. keressük azokat a függvény ala-
kokat, melyek mellett az integral extremum azon értékek
kat, melyek képest, melyek az illető függvényeknek bizonyos ha-
tárok közt való változásától előállanak. Ha ezután vala-
mely függvényrendszernek fenn jelzett változását pon-
tosabban akarjuk értelmezni a legegyszerűbb módon a kö-
vetkezőleg járhatunk el. Képzeljük, hogy volna két függvé-
nyünk $f(t)$ és $g(t)$, a mely függvényekről feltételezzük, hogy
egyértékűek, végesek és diff.-hatók a t_0-tól t_1-ig terjedő in-
tervallumon belül, vegyünk fel még két, ugyanezen inter-
vallumon belől egyértékű, véges és diff.-ható ~~egy~~ uj függ-
vényt: $\varepsilon_1 - \xi$ és $\eta - \xi$, s képezzük az: $f(t)+\xi$ és $g(t)+\eta$ kifejezéseket.

Ha: $x = f(t)$
$y = g(t)$ } egyenletekkel felfogjuk mint egy síkbeli Σ gör-
bének az előállítását, mely görbe keresztül megy a t_0 és t_1
paraméter értékeknek megfelelő pontokon, akkor az:

$f(t)+\xi$
$g(t)+\eta$ } kifejezésekkel is úgy szemléltethetjük, mint egy Σ_1 görbe pon-
jainak a coordinatáit és most ezen két görbét egymásra le-
het vonatkoztatni akként, hogy a két görbének azon pontjait,
melyek a „t" paraméter u. a. értékeinek felelnek meg, egy-
másnak megfelelő pontoknak nevezzük. Ennélfogva
úgy képzelhetjük a dolgot, hogy a Σ_1 görbe a Σ görbétől bizo
nyos processus alkalmazásával származik, a mennyiben nem

nek egyebek semmi, mint a L görbe minden pontjának átváltoztatása a L_1 görbe megfelelő pontjába, úgyhogy a L_1 görbét felfoghatjuk mint egy a L görbe variálásából eredő görbét, azaz mint a L görbe egy variációját. Az $f(t)$ és $g(t)$ függvényrendszer variációján tehát egy rendszert értünk akkor, ha $f(t)$ és $g(t)$ helyébe $f(t)+\xi-x$ és $g(t)+\eta-t$ tesszük, a hol ξ és η : t-nek ugyancsak a t_0-tól t_1-ig terjedő intervallumon belül egyértelmű véges és diff.-ható függvényei. Célszerű lesz a következő jelölést bevezetni. Ha x-et és y-t mint $f(t)$ és $g(t)$-értelmezzük és ha ezt a két függvényt az imént jelzett módon variáljuk, akkor ξ-t: δx-el és η-t δy-al jelöljük és t ezen két függvénye nevezetük az x és y variációjának.

A variatio számítás feladatát tehát így fogalmazhatjuk: Ha van:

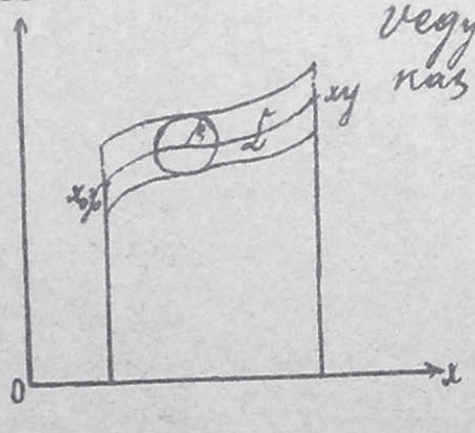
$\Phi(f(t), g(t) \ldots f'(t), g'(t) \ldots)$ kifejezésünk és ha megalkotjuk ezen kifejezést az $f(t)+\xi$, $g(t)+\eta$ függvényrendszerre:

$\Phi[f(t)+\xi, g(t)+\xi, \ldots f'(t)+\xi', g'(t)+\eta' \ldots \ldots]$; vagy másképp kifejezve látjuk egy:

$u = \Phi(x, y \ldots x', y' \ldots)$ kifejezésünk és ha az által, hogy az: $x, y \ldots x', y' \ldots$ - függvények helyébe más függvényeket írunk az:

$\bar{u} = \Phi(x+\delta x, y+\delta y, \ldots x'+\frac{d\delta x}{dt}, y'+\frac{d\delta y}{dt}, \ldots)$ kifejezésbe megyünk, akkor keresnünk kell hogy az eredeti u kifejezés micsoda változáson szenvedett az által, hogy az $\bar{u}$ kifejezésbe ment át; ezt vizsgálnunk kell, hogy miben különbözik $\bar{u}$ az eredeti u-tól. Tehát korábbi vizsgálatainknak tárgya az: $\bar{u}-u = \Delta u$ kifejezés lett, melyet az u kifejezés teljes variatiójának nevezünk. Ámde nem kell nekünk ezen Δu minőségét vizsgálni azon esetben, ha δx és δy tetszőleges függvények; hanem korlátozhatjuk vizsgálatainkban arra az esetre, midőn ezek a variációk bizonyos határon belül maradnak.

Hogy δx és δy ezen határok közé való korlátását jobban megvilágíthassuk, folyamodjunk ismét a geometriai szemlélethez.



Vegyük fel a síkban az (x,y_0) és (x,y) pontokat és ezeken keresztül a L görbét; szerkesszünk azután „ϱ" távolságot és rajzoljunk ezzel, mint sugárral körül a L görbe minden egyes pontja körül, akkor ezen körök összessége egy csíkot fog szolgáltatni a görbe síkjában, mely L görbének ϱ radiusu környezete és ha most már vmely L_1 görbe, melynek coordinatái: $x+\delta x$ / $y+\delta y$ teljesen ezen körökről befedett csík részen belül marad, akkor azt fogjuk mondani, hogy L_1 az eredeti görbe ϱ radiusu környezetében van. Ha ϱ megfelelően kicsinnyé válik, a variáló görbe tetszés szerint megfelelően közel jut a L görbéhez, ha pedig ϱ végtelen kicsinnyé válik: a L_1 görbe az eredetihez végtelen közel fog feküdni, vele végtelenül szomszédos lesz $\overline{vis}$: belőle végtelen kis variációval származott.

Ezek után nézzük, hogy egy oly kifejezés, milyet az előzőkben $\bar{u}$-val jelölnünk mikép változtatja értékét, ha „x"-t és „y"-t bizonyos variációnak vetjük alá.

Ha „x": $x+\delta x$-be és „y": $y+\delta y$-ba megy át, akkor kifejezésünkben x' helyébe $x'+\frac{d\delta x}{dt}$-t és y' helyébe $y'+\frac{d\delta y}{dt}$-t kell tennünk, úgy hogy bevezetve a:

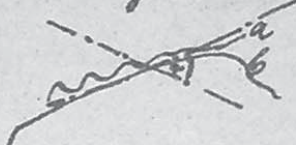
$\frac{d\delta x}{dt}=\delta x'$ és $\frac{d\delta y}{dt}=\delta y'$ jelölésekkel az $u=\Phi(x,y\ldots x',y'\ldots)$ kifejezés $x,y\ldots, x',y'\ldots$, variálása folytán az:

$\bar{u}=\Phi(x+\delta x, y+\delta y, \ldots x'+\delta x', y'+\delta y', \ldots)$ kifejezésbe fog átmenni.

Vizsgáljuk most ezt az $\bar{u}$-t arra az esetre, ha

ha a variáló görbe az eredetinek bizonyos szomszédságában fekszik. Ha tehát az illető görbe pontjai csak kis határon belül variálhatnak, akkor δx és δy függvényen t-nek t_0 és t_1 közé eső bármely értéke mellett abs. értékre nézve bizonyos határon alul fognak maradni; az azonban még ebből nem következik, hogy a deriváltak variációi $\delta x'$ és $\delta y'$ szintén csak kis határon belül változnak, mert:

$\frac{y'}{x'} = \frac{dy}{dx} = tg.\varphi$, hol φ: a görbe (x,y) pontjában vont érintőnek és a $+x$ tengelynek hajlásszögét jelenti, az tehát, hogy $\delta x'$ és $\delta y'$ szintén igen igen kis határokon belül mozognak, azt jelenteni, hogy a variálás következtében az illető görbének nemcsak pontjai mennek az igen közeli pontokba, hanem, hogy az illető görbének érintői is igen kevéssel változtatják helyzetőket, a mi nem következik be mindig, mert



pl a és b két görbe megfelelő pontjainak távolsága lehet kicsiny, mégis két megfelelő ponthoz húzott érintő hajlásszöge π elég nagy. Ezen sajátságos körülményeknél fogva szükségesnek látszik, hogy kissé élesebben fogalmazzuk meg a szomszédos görbe fogalmát, azt fogjuk mondani, hogyha nemcsak δx és δy, hanem $\delta x'$ és $\delta y'$ is alul maradnak bizonyos határon, akkor a variáló az eredeti görbének közelebbi szomszédságában van, míg ha $\delta x'$ és $\delta y'$ ról ilyesmit nem lehet állítani, tehát ha ezeknek változására nem szabunk határt, akkor a variáló görbéről azt mondjuk, hogy az eredeti görbe tágabb szomszédságában van. Ennek a disquisitionak az extremum elméletében egy erősebb és egy gyengébb extremum fog megfelelni

Képzeljük most, hogy az variáló görbe az erede-

ti görbének közelebbi, vagy szűkebb szomszédságában van, ekkor nemcsak δx és δy, hanem $\delta x'$, és $\delta y'$ is alul maradnak bizonyos határon, tehát $\bar{u}$ kifejezés is tudjuk alakítani Taylor tétele szerint:

$$\bar{u} = \Phi(x, y; x', y') + \frac{\partial \Phi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial \Phi}{\partial x'}\delta x' + \frac{\partial \Phi}{\partial y'}\delta y' + \left[\delta x, \delta y, \delta x', \delta y'\right]_2$$

a mely „2" index-el azt akarjuk jelölni, hogy a bezárt rész azon tagok összességét foglalja magában, a melyek δx, δy; $\delta x'$, $\delta y'$ mennyiségeknek legalább második dimensiójú tagjait tartalmazzák. Ezek után a teljes variációja így írható:

$$\Delta u = \bar{u} - u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial \Phi}{\partial x'}\delta x' + \frac{\partial \Phi}{\partial y'}\delta y' + \left[\delta x, \delta y; \delta x', \delta y'\right]_2,$$ ebben a kifejezésben az első

dimensiójú tagok összességét δu-val jelöljük és u első variációjának vagy egyszerűen u variációjának nevezzük, mely:

$$\delta u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial \Phi}{\partial x'}\delta x' + \frac{\partial \Phi}{\partial y'}\delta y';$$ vizsgáljuk most az első variációt néhány egyszerű esetben. Ha Φ maga x, akkor az első variáció:

$\delta x = \frac{d\delta x}{dt}$; és $\delta y' = \frac{d\delta y}{dt}$. Számítsuk ki most: $\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'}$ variációját. A teljes variáció:

$$\Delta\frac{dy}{dx} = \frac{y'+\delta y'}{x'+\delta x'} - \frac{y'}{x'} = \frac{x'\delta y' - y'\delta x'}{x'^{(1)2}} \cdot \frac{1}{1+\frac{\delta x'}{x'}}.$$ Ha most $\delta x'$ bizonyos határon belül marad, tehát megközelítő kiszámítás végett lehet tételezni, hogy az: $\frac{1}{1+\frac{\delta x'}{x'}}$ törtet sorba lehet bontani $\frac{\delta x'}{x'}$ + egész ratiónális szerint, ha tehát $\left|\frac{\delta x'}{x'}\right| < 1$, akkor írhatjuk:

$$\Delta\frac{dy}{dx} = \frac{x'\delta y' - y'\delta x'}{x'^{(1)2}}\left\{1 + \frac{\delta x'}{x'} + \left(\frac{\delta x'}{x'}\right)^2 + \dots\right\}.$$ Ha teljes variációnak ezen kifejezéséből veszük az 1-ső dimensiójú tagokat, nyerjük a definíció értelmében $\frac{y'}{x'}$ első variációját: $\frac{\delta y'}{x'} - \frac{y'}{x'^2}\delta x'$, tehát:

$$\delta\frac{dy}{dx} = \frac{x'\delta y' - y'\delta x'}{x'^{(1)2}}.$$ és így egyszersmind azt is látjuk, hogy a hányados variációját így u. a. törvény szerint nyerjük, mint a mely törvény szerint valamely hányadosnak diff.-ja képeztetik.

Előbb a variatio értelmezésénél x-t és y-t, mint „t" paramétert függvényéül vettük. A variatio számításban azonban rendesen geometriai, illetőleg mechanikai feladatokkal fogunk foglalkozni, melyekben pedig oly kifejezések játszanak nagyobb szerepet, melyek a „t" paramétertől függetlenek, ezért a „t" paramétert el fogjuk ejteni, úgy hogy vele az x abscissát fogjuk egyenlővé tenni, azaz ezen x-t fogjuk mindig mint független változót tekinteni, úgy hogy további vizsgálatainkban ily kifejezésekkel lesz dolgunk:

$F(x, y, p, \dots)$ hol $\frac{dx}{dx} = 1$ így elmarad és $p = \frac{dy}{dx}$. A többi jelölésekre nézve a következőkben állapodunk meg. Legyen x, illetve y variatiója továbbra is: δx, illetve: δy, legyenek továbbá:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\delta x}{dx} &= \delta x' \\ \frac{d\delta y}{dx} &= \delta y' \end{aligned}\right\}$$ is tekintettel arra, hogy $x' = 1$

$$\delta p = \frac{\delta y'}{x'} - \frac{y'}{x'^2}\frac{\delta x'}{x'} = \frac{d\delta y}{dx} - p\frac{d\delta x}{dx}.$$

Térjünk át ezek után a következő határozott int-ra: $J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, p)\, dx$. Vis foglalkozzunk azzal a legegyszerűbb esettel, midőn x-nek csak 1 függvényével v. i. y-al van dolgunk. Mindenekelőtt irjuk fel egyen int. teljes variatióját: $\Delta J = \int_{x_0}^{x_1} F(x+\delta x, y+\delta y, p+\delta p)\, d(x+\delta x) - \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, p)\, dx$. Mielőtt az extremum feladatát megfogalmaznók, számítsuk ki ezen ing. 1ső variatióját:

$$\Delta J = \int_{x_0}^{x_1} \left\{ F(x, y, p) + \frac{\partial F}{\partial x}\delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial p}\delta p + [\delta x, \delta y, \delta p]_2 \right\} \left(dx + \frac{d\delta x}{dx}dx\right) - \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, p)\, dx =$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} \left\{ \frac{\partial F}{\partial x}\delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial p}\delta p + F(x, y, p)\delta x' \right\} dx + \int_{x_0}^{x_1} \left\{ \frac{\partial F}{\partial x}\delta x \cdot \delta x' + \frac{\partial F}{\partial y}\delta y\, \delta x' + \frac{\partial F}{\partial p}\delta p\, \delta x' + [\delta x, \delta y, \delta p]_2 + [\delta x, \delta y, \delta p]_2 \delta x' \right\} dx$$

Ebben a második integrálban csakis legalább második dimensiojú tagokat tartalmazunk, ~~szóval jelöléssel~~ ~~ing. δJ-vel jelölve~~ úgy hogy ez rövidebben a következőleg jelölhető

$\int_{x_0}^{x_1}[\delta x, \delta y, \delta p, \delta x']_2 dx$. és most már 1ső int-s, mely az összes 1ső dimensiójú ragokat tartalmazza, rokon jelölés szerint δJ-vel jelölve az „J" int. teljes variatióját lesz:

$$\Delta J = \delta J + \int_{x_0}^{x_1}[\delta x, \delta y, \delta p, \delta x']_2 dx.$$ a hol δJ nem egyéb, mint:

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1}\left\{\frac{\partial F}{\partial x}\delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial p}\delta p + F(x, y, p)\delta x'\right\} dx.$$ Ezután igyekezünk annak a kérdésnek a tárgyalására, hogy milyen feltételek mellett lesz az ilyen integrál extremum. Ha azt akarjuk, hogy görbénkre nézve J max. legyen, akkor kell, hogy minden szomszédos görbére $\Delta J < 0$, azaz kell, hogy minden szomszédos görbére megalkotott „J" integrálból a maximalis görbére vonatkozó integrált levonva a különbség kisebb legyen mint 0; ha pedig azt akarjuk, hogy „J" minimum legyen görbénkre nézve, kell hogy: $\Delta J > 0$. Ez az eredmény egyezik a diff. calc. azon szabályával, mely szerint $f(x)$ maximuma esetén $f(x+h) - f(x) < 0$; minimum esetén pedig: $f(x+h) - f(x) > 0$ és most már a diff. calc.-ban sikerült ezen $f(x+h) - f(x)$ kifejezés előjelét egy egyszerűbb kifejezés előjelére visszavezetni t. i. az első nem tűnő páros rendszámu differencial-quot. előjelére. Ezen eljárás mintájára most mi egyszerűbb kifejezést fogunk keresni, a melynek előjele ΔJ előjelével egyezik; ez a vizsgálat itt természetesen nem lesz olyan egyszerű, mint a diff. calc.-ban, de azért mégis sikerülni fog ilyen kifejezést találni. Hogy ezen célunkat elérhessük, mindenekelőtt az első variatió δJ-t fogjuk egy kissé átalakitani. Vegyük tekintetbe ezen δJ-nek azon részét, mely így irható:

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, p)\delta x' dx = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, p)\frac{d\delta x}{dx} dx.$$ Ezen kifejezésre igen célszerűnek mutatkozik a partialis integralás, nyerjük tehát:

$$= \left[F(x, y, p)\delta x\right]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1}\delta x \frac{dF(x, y, p)}{dx} dx =$$

$-\left[\bar{F}(x,y,p)\delta x\right]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1}\delta x\left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial y}p + \frac{\partial \bar{F}}{\partial p}\frac{dp}{dx}\right)dx$. Ezek után az első variatio kifejezése következő alakra lesz:

$$\delta J = \left[\bar{F}(x,y,p)\delta x\right]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial \bar{F}}{\partial y}(\delta y - p\delta x) + \frac{\partial \bar{F}}{\partial p}\left(\delta p - \frac{dp}{dx}\delta x\right)dx \text{ és mivel:}$$

$$\delta p - \frac{dp}{dx}\delta x = \frac{d\delta y}{dx} - p\frac{d\delta x}{dx} - \frac{dp}{dx}\delta x = \frac{d}{dx}(\delta y - p\delta x), \text{ tehát:}$$

$$\delta J = \left[\bar{F}(x,y,p)\delta p\right]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1}\left\{\frac{\partial \bar{F}}{\partial y}(\delta y - p\delta x) + \frac{\partial \bar{F}}{\partial p}\frac{d}{dx}(\delta p - p\delta x)\right\}dx.$$

Alkalmazzuk most másodszor a partialis integratiót a köv. ins-ra:

$$\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial \bar{F}}{\partial p}\frac{d}{dx}(\delta y - p\delta x)dx = \left[\frac{\partial \bar{F}}{\partial p}(\delta p - p\delta x)\right]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1}(\delta y - p\delta x)\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial p}\right)dx. \text{ ezt}$$

tekintetbe véve nyerjük az első variatio számára a köv. értéket:

$$\delta J = \left[\bar{F}(x,y,p)\delta x + \frac{\partial \bar{F}}{\partial p}(\delta p - p\delta x)\right]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1}(\delta y - p\delta x)\left\{\frac{\partial \bar{F}}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial p}\right)\right\}dx.$$

Most minden tekintetben szükséges feltételeket keresünk arra nézve, hogy a mi integralunk: „J" extremum legyen. Mivel csak szükséges feltételről van szó, elegendő, ha x és y variációit: δx és δy-t specialis módon választjuk meg, t. i. a következő képen

$\delta x = ku$
$\delta y = kv$, a hol u és v x és y nak oly függvényei, melyekre nézve bizonyos folytonossági és diff-halósági feltételek teljesülnek és a „k" állandó legyen elegendő kicsiny mennyiség, oly formán, hogy δx és δy elegek legyenek azoknak a feltételeknek, melyeket ezen variacionra feláll. tettünk.

A variációknak ezen specialis megválasztásánál az „J" integral első variatioja: δJ a köv. alakban irható:

$$\delta J = k\left[\bar{F}u + \frac{\partial \bar{F}}{\partial p}(v - pu)\right]_{x_0}^{x_1} + k\int_{x_0}^{x_1}(v - pu)\left\{\frac{\partial \bar{F}}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial p}\right)\right\}dx. \text{ ; azt látjuk}$$

tehát, hogy ebben a specialis esetben az első variatio arányos a k állandó factorral, a teljes variatio pedig nem egyéb, mint:

$\Delta J = \delta J + \int_{x_0}^{x_1} [\kappa u, \kappa v, \kappa(\frac{dv}{dx} - p\frac{du}{dx})]_2 dx$. vagy ha a κ-val arányos első variációt kw-el a teljes variációnak a második, vagyis $p\overline{g}$ $\kappa^2 w$-el jelöljük lesz:

$$\Delta J = kw + \kappa^2 w = \kappa(w + kw)$$

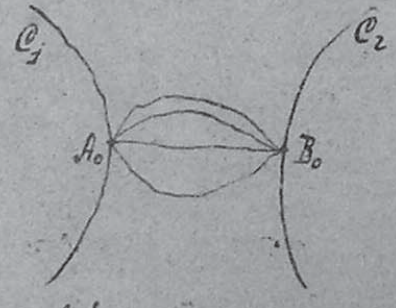
Tegyük fel most, $w \neq 0$, akkor $w + kw$, a κ-nak $1^{\text{sö}}$ fokú egész racionális kifejezése úgy hogy ha κ-t elégkicsinek választjuk áll, hogy:

$$sgn(w + kw) = sgn w.\ ;\ \text{azaz}: sgn \Delta J = sgn\, w.$$

Ezzel κ-ra nézve csak annak a feltételnek kell teljesülni, hogy abs. értékre legyen elégkicsi, de ugyis még lehet $\pm$; ámde ezáltal ΔJ előjele majd "+" majd "−" lesz (?!?); de extremum esetén ez ki van zárva, mert akkor elégkis variatio mellett ΔJ előjelének állandónak kell lenni vagy első szükséges feltétel az extremum bekövetkezhetésére hogy: $w = 0$ azaz:

$$w = \left[Fu + \frac{\partial F}{\partial p}(v - pu)\right]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} (v - pu)\left\{\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)\right\} dx = 0.$$

Most mindenekelőtt a határfeltételekre kell némi észrevételt tenni. Vizsgálatainkat tárgyaltuk olyan görbék képezik, melyek két adott $(x_0 y_0)$; $(x_1 y)$ ponton mennek keresztül. Most már lehetséges, hogy a variatiós problémája, a melyel foglalkozunk olyan, hogy ez a két pont mindig rögzítve marad, a feladatot azonban követő két pont is lehet módosítani:



Legyen adva két görbe: C_1 és C_2 s keressük ezen két görbének egymástól való távolságát vis más szóval, keressük azt a görbét, a melyik a C_1 és C_2 görbe vmely tetszőleges két pontját köti össze és a melynek ívhossza minimum a C_1 és C_2 görbéket összekapcsoló görbék közt.

Ha feladatunkat ilymódon fogalmazzuk, geometriailag e-

világos, hogy a keresett görbének minősége teljesen független attól hogy rögzített határokkal van e dolgunk, vagy pedig olyanféle határfeltételekkel, a hol a rég határpont még bizonyos tartományok közt szintén változik. Tegyük fel t. i. hogy ezen utóbbi általánosabb felfogásban sikerült egy extremum görbét találni, a mely görbe természetesen a C_1 határgörbének valmely A_0 és a C_2 határgörbének valmely B_0 pontjában fog végződni. Ez az így nyert görbe extremum lesz az összes görbék közt, melyek általában a C_1 és C_2 görbék közt fekvethetők, de ebből kifolyólag extremum lesz egyszersmind azon görbékre nézve is, a melyek A_0 és B_0 végpontokkal bírnak, azaz látjuk tehát, hogyha a görbe abban az általánosabb felfogásban, a hol a végpontok rá szorultak extremum, akkor extremum e a görbe rögzített határpontokra nézve is, azaz ha rögzített határpontokra nézve felkeressük az extremum görbét, mint ha az extremum görbét változó határpontokra nézve keressük; anélkül hogy a görbe természetére semmi befolyással sem bírhat az, hogy rögzített s változó határokkal van e dolgunk. Ez a körülmény, a melyet később analytikailag is igazolni fogunk, mindenesetre felfogását bennünket arra, hogy vizsgálatainknak ennek első stadiumában, a hol csak az illető extremum görbének a természetébe akarunk némi betekintést szerezni, azt az esetet számba mindenek előtt, a hol a határok rögzített pontok.

Ebben az esetben, a hol tehát a variatio csak akként történik, hogy az illető görbék mind az $(x_0 y_0)$ és $(x_1 y_1)$ rögzített pontokon mennek keresztül nyilvánvaló első sorban az, hogy vagy az $(x_0 y_0)$, mint $(x_1 y_1)$ pontban $\delta x = 0$ és $\delta y = 0$, mivel ezekben a pontokban nincs variatio, kell tehát, hogy ez:

$x = x_0$ és $y = y_0$ mellett $u = 0$ és $v = 0$
$x = x_1$ " $y = y_1$ " " $u = 0$ " $v = 0$ } ezeket azonban w kifejezésének első részre magától elesik és a $w = 0$ kifejezés feltét-

selünk a köv. egyenletre redukálódik:

$$\int_{x_0}^{x_1} (v - pu)\left\{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right\} = 0 \; ;$$ Ha az integral-jel alatt ez a függvénynek a szorzata áll, és pl. ha y-t mint x függvényét képzeljük kifejezve, akkor ugy az első, mint a második x-nek jól meghatározott függvénye: $v - pu = \varphi(x)$

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \psi(x) \; ,$$ ugy hogy a mi $w = 0$ feltételünk azt mondja hogy:

$$\int_{x_0}^{x_1} \varphi(x) \cdot \psi(x)\, dx = 0 \; .$$ Az „u" és „v" x-nek folytonos és deriválható, de különben egészen tetszőleges függvénye volt, emiatt van tehát $\varphi(x)$ is bizonyos folytonossági feltételektől eltekintve egészen tetszőleges függvénye x-nek. Ennek az itt felírt integralnak el kell tünnie, bárminémű is válasszuk meg x_0 és x_1 közt az $\varphi(x)$ függvényt. Ha tehát $[\varphi(x) = 0]$ (?!?) ugy választjuk meg, hogy $\varphi(x) = \psi(x)$ akkor is áll, hogy: $\int_{x_0}^{x_1} \psi(x)^2\, dx = 0$

Ha az int. jel alatt egy függvénynek a négyzete áll, ez tehát lényegesen „+"; ha feltesszük továbbá, hogy $x_1 > x_0$, akkor az szintén „+" mennyiségnek tekintendő. Gondoljuk meg már most, hogy az integr. egy összegnek a limese, a mely összeg a mi esetünkben csupa + tagokból áll és hogy csupa „+" tagokból álló összeg csak akkor lehet 0-val egyenlő, ha minden tagja = 0. Ez tudva mindjárt világos, hogy $\psi(x) = 0$, mert tehát, mint szükséges feltétel arra, hogy $w = 0$ legyen:

(L) $\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right) = 0$; Nézzük most mindenekelőtt, hogy miféle egyenlet ez.! Írjuk fel egyenletünket kissé részletesebben:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial p \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial p \partial y} \cdot \frac{dy}{dx} - \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = 0 \; ;$$ azt látjuk tehát, hogy ez az (L) egyenlet, a melynek szerencsésen kell megoldania az extremum-görbére nézve, egy másodrendü diff. egyenlet y-ra

Haar

nézve, mivel benne y-nak második deriváltja szerepel. Ezek után eredményeinket összefoglalva azt mondhatjuk, hogy az a függvény, a mely esetleg egy extremumot szolgáltat, eleget tartozik lenni ezen L második rendű diff. egyenletnek, vagy másképen kifejezve: ha egy állandó határ extremum görbe létezik, akkor azt szükségképen az L második rendű diff. egyenlet megoldásai között kell keresnünk. Az olyan görbét, vagy ha úgy tetszik, az olyan függvényt, a mely ez az L diff. egyenletet kielégíti, extremális görbének illetőleg függvénynek nevezzük, ha tehát röviden csak extremáról szólunk, akkor ezalatt az L egyenlet egy megoldását fogjuk mindig érteni, minden tekintet nélkül arra, hogy ez a megoldás tényleg extremum értéket szolgáltat-e vagy sem.—

Ezzel problémánkra nézve egy oly ponthoz jutottam el, a mely a közönséges max. és minimum számításánál megfelel annak, hogy ha az $y = f(x)$ függvénynek maximumát és minimumát keresnünk, akkor ezeket szükségképen az $f'(x) = 0$ egyenlet gyökei közt kell keresnünk csakhogy míg ott egy közönséges egyenletet nyertünk, addig itt egy diff. egyenlettel van dolgunk, a melynek megoldásai közt a valódi extremum szükségképen előfordul és most már további vizsgálatainknak arra fognak vonatkozni, hogy miképen lehet egy ilyen extremalisra nézve felismerni, hogy az tényleg extremum-e vagy sem.—

Mielőtt azonban ezen kérdéssel foglalkoznánk, még egy észrevételt kell tennünk a határfeltételekre nézve. Ezen speciális feltételek mellett, hogy extremumunk bizonyos rögzített határokra nézve, mint az extremum létezésének szükséges feltételét adódott az L egyenlet. Most tekintsünk el attól, hogy ezzel a speciális feltétellel van dol-

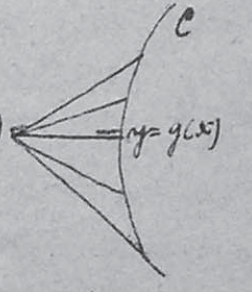
gank, és vegyük az első variációnak legáltalánosabb kifejezését, a melynek extremum esetén szükségképen el kell tűnnie:

$$\delta J = \left[F\delta x + \frac{\partial F}{\partial p}(\delta y - p\delta x) \right]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} (\delta y - p\delta x) \left\{ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right) \right\} dx = 0$$

Azt tudjuk, hogy extremumra nézve egy szükséges feltétel az L diff. egyenlet, bármilyen is legyen a variáció és a határ, emellett pedig a δJ kifejezésében szereplő integrálnak okvetlenül el kell tűnnie, úgy hogy akár milyenek is legyenek a határfeltételek, szükségképen kell, hogy

$$\left[F\delta x + \frac{\partial F}{\partial p}(\delta y - p\delta x) \right]_{x_0}^{x_1} = 0$$

legyen, a mely egyenlet, ha a görbének a természete már ismeretes, szolgáltatja az illető görbének a határait, ettől az egyenlettől fogva i. e. meglehet határozni x_0-t és x_1-et, minthogy azon pontokat, a melyek közt az extremum tényleg bekövetkezik. De rendesen nem ilyen általános módon vannak a határpontok adva, hogy x_1 i. e. az (x_0, y_0) és (x_1, y_1) pontok egy tetszőleges görbén változhatnak, hanem rendszerint úgy van a dolog, hogy az (x_0, y_0) pont rögzített és az (x_1, y_1) pont az $y = g(x)$ görbén változhatik és keresnünk kell azt a görbét, a melynek az ívhossza minimum minden azon görbék közt, a melyek az (x_0, y_0) pont és a C görbének valamely tetszőleges pontja közt fekhetnek. Ezen rendesen előjövő határfeltételek mellett nyilvánvaló, hogy



$$x = x_0 \text{ és } y = y_0 \text{ mellett } \delta x = 0 \text{ és } \delta y = 0$$

mivel az (x_0, y_0) pont nem variál, úgy hogy a mi arra a feltételt illeti, hogy az (x_1, y_1) pont az $y = g(x)$ görbén legyen, ennek az (x_1, y_1) pontnak a meghatározására végül szolgál a következő egyenlet:

$$\left[F\delta x + \frac{\partial F}{\partial p}(\delta y - p\delta x) \right]_{x = x_1} = 0$$

Legyen $x = x_1$ és $y = y_1$ mellett $\delta x = \delta_1$ és $\delta y = \delta y_1$, ekkor egyenletünk alakja lesz:

$$\left(F_1 \delta x_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial p_1}\right)_1 \delta y_1 - p_1 \delta x_1\right) = 0$$

azaz

$$\left(F - p \frac{\partial F}{\partial p_1}\right)_1 \delta x_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial p_1}\right)_1 \delta y_1 = 0$$

Vegyük most ehez az egyenlethez még az $y_1 = g(x_1)$ egyenletet, a mely azt mondja, hogy az $(x_1 y_1)$ pontnak ezen a görbén kell mozognia, ekkor nyilvánvaló, hogy nem csak az $(x_1 y_1)$ pont fekszik ezen a görbén, hanem egyszersmind az $(x_1 + \delta x_1,\ y_1 + \delta y_1)$ pont is, tehát áll a következő egyenlet:

$$y_1 + \delta y = g(x_1 + \delta x_1)$$

azaz

$$\delta y_1 = g(x_1 + \delta x_1) - g(x_1)$$

Alkalmazzuk ezen egyenlet jobb oldalára Taylor tételét, akkor az első variatio kifejezésével lévén dolgunk a magasabb rendű tagoktól eltekinthetünk és nyerjük, hogy

$$\delta y_1 = g'(x_1)\, \delta x_1$$

a mely egyenlet az előbb levezetett, jelű egyenlettel együtt teljesen meghatározza a δx_1, δy_1 variatiokat. Azt látjuk tehát, hogy ha az extremalis ismeretes, akkor a határfeltételeket igen egyszerű módon fel lehet állítani erre a kendesen előjövő esetre nézve, a mikor az $(x_0 y_0)$ pont rögzített és az $(x_1 y_1)$ pont egy görbén változik (ha azt a legáltalánosabb esetet vesszük, a midőn mind a két pont változik egy-egy görbe mentén, akkor a határfeltételek természetesen három egyenlet által lennének meghatározva, t. i. ekkor szerepelne az $(x_0 y_0)$ pontot hordozó görbe $y = L(x)$ egyenlete is. Ezeket a határfeltételekre vonatkozó, levezetett egyenleteket akképp is felfoghatjuk, hogy ezek egy bizonyos speciális összekötelet szolgáltatnak az extremum görbe és az adott $y = g(x)$ határgörbe között, és célszerű lesz mindjárt elejétől fogva erre a kapcsolatra egy terminust bevezetni; azt

fogjuk mondani, hogy ha a két feltételi egyenlet teljesül, hogy az extremális a határgörbéhez transzversalisan fekszik.

Célszerű lesz exakulán a mondottak illustrálására tárgyalni azt a példát, a melyet mindjárt tárgyalásunk elején paradigmaként felvettünk. Ebben a példában azt a görbét keressük, a melynek ívhossza két pont között a legrövidebb utat szolgáltatja, vagyis keressük az:

$$J = \int_{x_0}^{x_1} \frac{ds}{dx}\, dx = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+p^2}\, dx$$

integrál minimumát. Ha eredményeinket erre a példára alkalmazni akarjuk, akkor mindenekelőtt azt látjuk, hogy itt: $F(x, y, p) = \sqrt{1+p^2}$ .. Állítsuk fel exakulán az L egyenletet, a mely az extrémálistól szolgáltatja; Mivel F y-t nem tartalmazza, azért: $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$, úgy hogy az L egyenletet a következőleg írhatom:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right) = 0 \quad \text{azaz} \quad \frac{\partial F}{\partial p} = \text{const.}$$

nyertünk tehát az extremaliak számára egy első-rendü diff. egyenletet, a melyet még az F függvény értékének tekintetbe vételével a következőképp alakíthatunk át:

$$\frac{\partial F}{\partial p} = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} = \text{const}$$

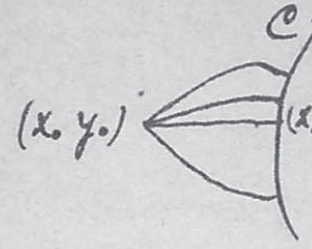
Könnyü belátni, hogy ha ez az egyenlet a p-re teljesül, akkor p maga is constans: $p = \frac{dy}{dx} = a$, a mely egyenlet integrálva adja az $y = ax + b$ egyenletet, nyerjük tehát azt a már geometriailag is evidens tényt, hogy ha a síkban két pont közt legrövidebb vonal egyállalában létezik, akkor ez a legrövidebb vonal csak is egyenes lehet.

Ha két rögzitett ponttal van dolgunk, akkor

ezzel a dolog el van intézve, ha tehát csak arról van szó, hogy két adott pont $(x_0\ y_0)$ és (x_1, y_1) között feláll-jusk a legrövidebb vonalat, akkor nem kell egyebet tennünk, mint a két ponton keresztül fektetni az

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_0 & y_0 \\ 1 & x_1 & y_1 \end{vmatrix} = 0$$

egyenlettel meghatározott egyenest, de hogy a határfeltételekre is példát lássunk, vegyük most azt az általánosabb esetet, a midőn adva van a síkban az $(x_0\ y_0)$ pont és a C görbe, és keresendő az a legrövidebb vonal, a mely az $(x_0\ y_0)$ pontot ezen $y = g(x)$ görbével összekapcsolja. Itt meg kell jegyeznünk, hogy ha az extremalis terünk már ismeretes, akkor a feladat tárgyalása már nem egyéb, mint közönséges maximum-minimum vizsgálat, mert ismeretes lévén, hogy az extremalis egyenes vonal, most már csak azt a pontot kell keresnünk a C görbén, a melynek távolsága az $(x_0\ y_0)$ ponttól a legkisebb. Az adódó eredményt már a geometria elemeiből tudjuk, t. i., hogy ez a legrövidebb távolság nem lesz egyéb, mint a görbe lesz húzott normalis, de azért a határfeltételekre való tekintettel mégis czélszerű lesz a vizsgálást elvégezni.



Helyettesítsük be az $y = g(x)$ egyenletbe az $(x_0\ y_0)$ coordinatáknak: $y_1 = g(x_1)$

$\delta y_1 = g(x_1 + \delta x_1) - g(x_1) = g'(x_1)\, d x_1$, a magasabb rendű tagoktól eltekintve. Írjuk fel továbbá a mi-

six egyenletet, a melyek általánosan a következőleg hangzók:

$$\varepsilon_1 \delta x_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial p_1}\right)_1 (\delta y_1 - p_1 \delta x_1) = 0$$

a megfelelő helyettesítésekkel elvégezve nyerjük, hogy

$$\sqrt{1+(p_1)^2}\,\delta x_1 + \frac{\partial h_1}{\sqrt{1+(p_1)^2}} (\delta y_1 - (p_1 \delta x_1) = 0 \qquad \text{azaz}$$

$$\sqrt{1+(p_1)^2}\,\delta x_1 + \frac{f(x_1)}{\sqrt{1+(p_1)^2}} (g'(x_1)\delta x_1 - (p_1 \delta x_1) = 0$$

$\delta x_1 \neq 0$ lévén szabad vele osztani s marad: $1+(p_1)^2 + (p_1) g'(x_1) - (p_1)^2) =$

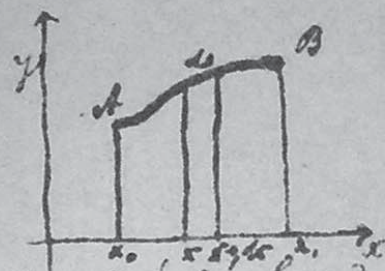
vagyis $\left(\frac{dy}{dx}\right)_1 g'(x_1) = -1$.

ez az egyenlet az, a mely az extremalisnak és határgörbének transversalis helyzetét ábrázolja, a mi esetünkben csak azt mondja, hogy az (x_1, y_1) pontban az extremalis és az adott határgörbe egymást derékszögű alakban metszik.

Most az elegendő feltételek vizsgálatára kellene áttérnünk, arra nézve, hogy az I integrál extremum legyen. De megjegyezve azt, hogy ezek a vizsgálatok nagyon komplikáltak, úgyannyira, hogy általános módszerek ez irányban nincsenek, sőt nem is léteznek, hanem a variatio számítás mai stadiumában meg kell elégednünk azzal hogy néhány egyszerű esetben sajátságos speciális módszerek alkalmazásával el tudjuk döntetni, hogy az illető extremalis tényleg extrenummá, maximummá vagy minimummá teszi az I integrált, ezen vizsgálatok megkezdése előtt még néhány tételemlegy és elvileg is fontos példát fogunk felemlíteni, a melyek a variatio számításánál követendő eljárásánál paradigmákul szolgálhatnak és a melyekkel az előadás egész folyamán szemmel tartani és tárgyalni fogunk.

I Lássuk először a <u>legkisebb forgási felület</u> példáját, a melyet már a Bernoulli maga is tárgyalt és a mely egyike a variatio számítás legkisebb és legegyszerűbb példáinak.

Legyen adva a síkban egy egyes és csúcsán kívül két pontja sincs és képzeljünk ezen két ponton át egy görbét felvéve és képzeljük, hogy ez a görbe az adott egyenes körül forog.



Ha görbénk ezen egyenes körül, mint tengely körül forog, akkor egy úgynevezett forgási felületet fog leírni, a mely forgási felületnek a területe nyilvánvalóan kétségtelenül a forgó görbének a minőségétől függ. Az a kérdés, hogy miként kell a görbét megválasztani, hogy a forgási felületnek a területe egy minimum legyen.

Nézzük mindenekelőtt, hogy miként kell egy tetszés szerinti forgási felületnek a területét meghatározni. Kerüljük körül szigorú analízis szerint röviden ezt a körülkerülést azáltal, hogy a forgási tengelynek az x tengelyt és legyen a forgó görbe egyenlete $y = f(x)$. Ezen görbének dx távolságra levő két végpontját pedig tekintsük egyenes vonalnak, ha tehát a görbe forog, akkor a dx ívelemen egy csonka kúr keletkezik, a melynek felülete:

$$2\pi \frac{y + y+dy}{2} ds = \pi (2y + dy) ds = 2\pi y ds + \pi dy ds.$$

Ha most végtelen sok ilyen $\pi dy ds$ alkotójú végtelen kis csonkának a felületét összegezzük, akkor $\pi y ds$ lesz egy végtelen kis csonkának a felülete. Most már csak azt kell egyedül tennünk, hogy a kifejezést integráljuk az A és B pontoknak megfelelő abszcisszák között, és megkapjuk forgási felületünk területét: $F = \int_{x_1}^{x_2} 2\pi y \frac{ds}{dx} dx = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y \sqrt{1+p^2}\, dx$ ez tehát az az integrál, a melyet minimummá kell tennünk. Példánkul az általánosság sértése nélkül egyszerűsítve azt látjuk, hogy most: $F(x, y, p) = y \cdot \sqrt{1-p^2}$, tehát független x-től, azaz a jelen esetben: $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$. Ezt a körülményt felhasználva először is az előzőleg analitikailag írhatjuk a területet akképp írhatjuk:

$$(L)\quad \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right) = 0$$

Vegyük továbbá az F függvény totális diff. quotiensét x szerint: $\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial y} p + \frac{\partial F}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dx}$

vagy tekintetbe véve az L egyenletet:

$$\frac{dF}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right) p + \frac{\partial F}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right) \cdot p$$

Egyenletünk mind két oldalát közvetlenül integráljuk x szerint és nyerjük, hogy: $F = \frac{\partial F}{\partial p} \cdot p + \text{const.}$

Észrevesszük, hogy példánkra nézve miképpen alakul ez az egyenlet: $y\sqrt{1+p^2} - y \cdot \frac{p^2}{\sqrt{1+p^2}} + a$; $\frac{y(1+p^2-p^2)}{\sqrt{1+p^2}} = a$

tehát $\frac{y}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = a$ amiből $\frac{dy}{dx} = \sqrt{\left(\frac{y}{a}\right)^2 - 1}$,

Itt még meg kell jegyeznünk, hogy ez az előbbi számítás arra a feltételre foglalja magában, hogy $a \neq 0$ $a = 0$ esete ugyan külön tárgyalást érdemelne, de mindjárt megjegyezzük hogy ez arra a triviális esetre vezet, a mikor a felület $= 0$.

Ezt az esetet kizárva diff. egyenletünkből a következőképpen járhatjuk: $\frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{y}{a}\right)^2 - 1}} = dx$, avagy $d\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{d\left(\frac{y}{a}\right)}{\sqrt{\left(\frac{y}{a}\right)^2 - 1}}$

Integráljuk mindkét egyenletünk mind két oldalát, ekkor nyerjük, hogy $\frac{x}{a} = \log\left(\frac{y}{a} + \sqrt{\left(\frac{y}{a}\right)^2 - 1}\right) + \frac{b}{a}$

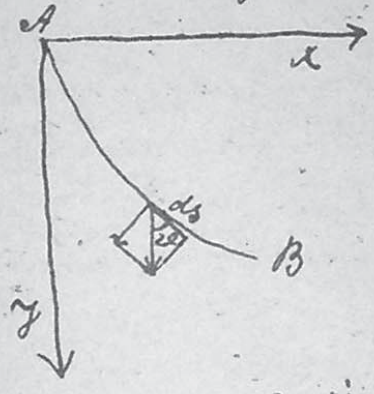
és így $\frac{x-b}{a} = \log\left(\frac{y}{a} + \sqrt{\left(\frac{y}{a}\right)^2 - 1}\right)$. Ez tehát az extremális egyenletünk implicit alakja, a melyben az a; b tetszőleges constansok az által határozhatók meg, hogy az extremális keresztül megy az A és B pontokon. Hogy ezen egyenletnek közönségesen használatos alakját kapjuk, vegyük mind két oldal reciprocus értékét:

$$e^{-\frac{x-b}{a}} = \frac{1}{\frac{y}{a} + \sqrt{\left(\frac{y}{a}\right)^2 - 1}} = \frac{y}{a} - \sqrt{\frac{y^2}{a^2} - 1}$$

és a nyert egyenletek adják az eredetileg; azigy nyert:
$y = a\left(e^{\frac{x-b}{a}} + e^{-\frac{x-b}{a}}\right)$ egyenlet adja az extremális keresett egyenletét. t. i. az úgynevezett <u>lánczgörbét</u> és tehnezi, a mely elnevezés onnan származik, hogy ha egy lánez alakú testek akkép függesztünk fel, hogy tisztán csak a nehézségi erő behatása alatt álljon, akkor a test egy ilyen egyenlettel értelmezett görbe alakját veszi fel.

A mi problémánkra nézve tehát azt az eredményt találtuk, hogy ha általában létezik olyan görbe, a mely minimális forgási felületet szolgáltat, úgy ez csak is a lánczgörbe lehet.-

II. Második példa gyanánt tárgyaljuk az úgynevezett brachystochrone feladatát, a mely a következőkben áll. Legyen adva a síkban két pont A és B és képzeljük, hogy egy egységnyi tömegű anyagi pont egy az A és B pontokat összekötő görbén kényszerlen mozogni és pedig csupán a nehézség erő befolyása alatt. Kérdés, minként kell választani a görbét, ha azt akarjuk, hogy a pont a lehető legrövidebb idő alatt jusson el A-ból B-be. Hogy ezt a régi problémát, a melyet más Bernoulli és Jámos is tárgyalták, megoldhassuk, minden előtt fogalmazzuk meg ezt a feladatot analytikailag. Képzeljük, hogy A és B között egyelőre tetszőleges $y = f(x)$ görbe van fektetve és számítsuk ki az idő, mely alatt a anyagi pont tisztán csak a nehézségi erő behatása alatt A-ból B-be jut. Legyen ds görbéjének egy ivelemé és képzeljük, hogy ez anyagi pont ezen mozog: ekkor a pontra ható nehézségi erő vertikálisan lefelé működik és a pontok is ily irányu mozgására készteti, ámde a görbe, a melyek mint fonalak is képzelhetjük, bizonyos ellen-



állási erők fejt ki vezet szemben a normális irá-
nyban, hogy a nehézségi erő egy normális és egy tangen-
ciális komponensre bomlik fel, a melyek közül az egyik a
említett ellenállási erejével szemben megsemmisül és így
a nehézségi erőnek csakis a tangenciális komponense
lép érvényesülhet mint anyagi pontunkat mozgató erő. Ez
tangenciális erő nagysága, mint könnyű kiszámítani,
egyébként, mint $g \cos\delta$, hol g a gravitációs állandó és annak
pontunk egységnyi tömegű lévén, egyszersmind pontunk
gyorsulásának nagysága is, amiből a mechanika alap-
elvei szerint a sebesség nagysága az illető helyen nem
más mint $\frac{ds}{dt}$ a gyorsulása pedig $\frac{d^2s}{dt^2}$, úgy hogy mozgásunk
vezérlő egyenlete: $\frac{d^2s}{dt^2} = g \cos\delta$ -- Most képzeljünk
a vonala rendszerünkbe akképp megválasztva, hogy az
origó legyen a coordinata rendszer origója, az y tengely
haladjon a gravitációs erő irányában vertikálisan
felé és az x tengely horizontálisan az y tengely
adala felé, a melynek oldalán a B pont van. Ebben a coordi-
rendszerben nyilvánvaló, hogy: $\cos\delta = \frac{dy}{ds}$, és
fenti diff. egyenletünket a következőleg írhatjuk

$$\frac{d^2s}{dt^2} = g\frac{dy}{ds} = g\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{ds} \quad -$$

Ha még a sebesség
ségát v-vel jelöljük, akkor $v = \frac{ds}{dt}$ lévén

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt},$$ úgy hogy diff. egyenletünk alakja ez:

$$\frac{dv}{dt} = g\frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{v}, \text{ azaz } v\frac{dv}{dt} = g\frac{dy}{dt}$$

vagy 2-vel szorozva:

$$\frac{d(v^2)}{dt} = 2g\frac{dy}{dt}, \text{ a miből integ-}$$

rálás által azt nyerjük, hogy:

$$v^2 = 2gy + c$$

A jelen esetben $v = 0$ lévén az egyenlet az elsőre
erő elvét szolgáltatja és mivel az anyagi pont a
vezérlő szerint csakis a nehézségi erő befolyása alatt áll,

$v^2 = 2gy + c^2$ az az egyenlet a mozgó pont pályáját teljesen meghatározza. Az egyenletben szereplő c constans mechanikai jelentésére nézve meg kell jegyeznünk, hogy ha $y=0$ $v^2 = 0$, c tehát nem egyéb, mint a mozgó pont $y=0$ pontjának a pont sebességének a négyzete; ha tehát a pont kezdeti sebességét α-val jelöljük $\alpha^2 = c$ és így az eleven erő elvét így írhatjuk: $v^2 = 2gy + \alpha^2$.

Meg is tehetjük még, hogy az az egyenlet még egy érdekes pályái törvényt is foglal magába, azt t.i, hogy a mozgó pont sebessége csak is y-tól függ, azaz, hogy ha egy pont a maga görbén mozog a pont kiindulási helyétől, a sebessége mindig ugyan azon horizontalitan mindig ugyan az.

Feladatul tűrlük ki magunk elé kiszámítani azt az időt, a mely alatt a mozgó pont az egész görbén végig fut. Ezen célra nézve nem kell egyebet tenni, mint venni a sebesség kifejezését: $v = \frac{ds}{dt}$; ebből $dt = \frac{ds}{v}$, mivel $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, hol x és y a görbének $y = f(x)$ egyenletével vannak egymással összekapcsolva, úgy hogy

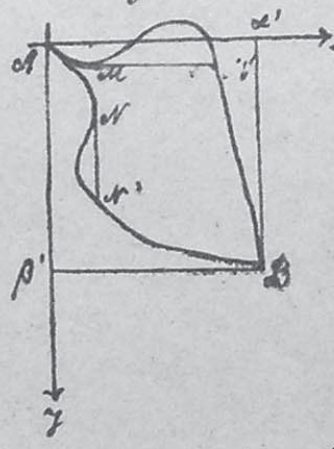
$$dt = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\sqrt{2gy + \alpha^2}},$$ vagy x-et független változónak véve: $dt = \frac{\sqrt{1 + p^2}}{\sqrt{2gy + \alpha^2}} dx$, a mely egyenlet integrálva, adja az időt:

$$t = \int \frac{\sqrt{1 + p^2}}{\sqrt{2gy + \alpha^2}} dx,$$

a határoknak oly állandó abban a feltevésben, hogy $x = 0$ mellett $t = 0$, vagy is, hogy az időt az A ponttól kiindulható mozgás kezdetétől számítjuk, elhagyhatók.

Az eset idő ezen kifejezéséből kiszámítható, hogy a brachystochrone feladata tényleg egy valódi szám-lási feladatra vezet, keresnünk kell t.i azt az $y = f(x)$ mellett t, vagyis a felírt integrál minimális értéket ad

fel. Mielőtt azonban ezen feladat tárgyalásához fognánk, előbb a négyzetgyökök előjeleire nézve kell tájékozódnunk. Térjünk vissza ezen czélból a $dt = \frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{\sqrt{2gy+\alpha^2}}$ kifejezésre. Itt dt mint a folyton növő mennyiség differentiálja mindig pozitiv, abból pedig, hogy görbénk brachystochrone, következik, hogy x és y csakis pozitiv növő mennyiségek lehetnek, mert, ha x vagy y fogynának, már lehetne rövidebb idő alatt eljutni A-ból B-be, mint ez az ut és igy a görbe a brachystochrone névnek épen nem felelne meg, ugy hogy a kifejezésünk valóoldala is a jobb oldalon a négyzetgyökök alatti kifejezések mindnyájan pozitivok lévén következik, hogy a négyzetgyökök ezek képen csakis a pozitiv előjeleik jöhetnek számba. Az a körülmény, hogy y mindig pozitiv, kizárja azt is, hogy a jobb oldal nevezője, vagy is, hogy $2gy+\alpha^2 = 0$ legyen, a mennyiben g pozitiv mennyiség lévén, ez csak is akkor következik, ha y negativvá válnék.



Ezek mindenféle nehézségek elhárítva, problemánkat, mint variatio-számitási feladatot a következőleg fogalmazhatjuk meg. Legyen a B pontnak abscissája x' és ordinátája y', akkor az idő, mely alatt a pont A-tól B-ig halad, lesz $t = \int_0^{x'} \frac{\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{2gy+\alpha^2}}\,dx$ de ez az integrál természetesen csak is akkor lesz minimummá az által, hogy y-t megfelelően választjuk meg. Az integrál jel alatti függvény: $F(x,y,p) = \frac{\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{2gy+\alpha^2}}$ a jelen esetben, mint látjuk x-től független, a mely körülmény épp ugy, mint előbb a legkisebb forgási felület példájánál magával hozza, hogy az extremalisokat értelmező L másodrendü diff. egyenlet egy elsőrendü diff. egyenlettel helyettesithető legyen, és igy nyerjük, hogy $F = p\frac{\partial F}{\partial p} + c$ azaz $\frac{\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{2gy+\alpha^2}} = \frac{p^2}{\sqrt{2gy+\alpha^2}\cdot\sqrt{1+p^2}} + c$; $1+p^2 = p^2 + c\sqrt{2gy+\alpha^2}\sqrt{1+p^2}$

$$1 = c^2(2gy+\alpha^2)(1+p^2);$$

az azon diff. egyenlet, a mely az extremalisokat szolgáltatja. Ki-zárt most mindenek előtt azt az esetet, a midőn a c állandó nullával egyenlő. Ha $c = 0$, akkor a jobboldali szorzat egyik, vagy másik tényezője végtelen nagy, minthogy $2gy + \alpha^2$ nem lehet végtelen nagy mert y-nak végtelenné válása esetén a mozgó-pontnak előbb a végtelenbe kellene távoznia, mielőtt B-be érkeznék, a mi semmi esetre sem volna azon út, a melyet brachystochronenak neveztünk, α-nak, tehát a kezdeti sebességnek a végtelenné válása esetén pedig a mozgó pont el-ban oly lökést kapna, a mely azt tüstént a végtelenbe ragadná, ugyhogy végtelen nagynak ezt sem tételezhetjük fel. Így formán végtelenné csak is p. v. vagyis $\frac{dy}{dx}$ válhat, ez azonban csak akkor következhetik be, ha a B pont az y tengely irányvonalába esnék, a mikor is a brachystochrona az y tengelyjel összecső AB egyenes volna, ha tehát ezt a triviális esetet tárgyalásunkból kizárjuk, akkor minden esetre feltételezhetjük, hogy $c \neq 0$. Legyen most már egyszerűség kedvéért $c^2 \cdot 2g = \frac{1}{2b}$ és $\frac{\alpha^2}{2g} = a$, hol b egy tetszőleges a pedig egy jó ismeretes állandó, a mely α-tól függ, akkor egyenletünket akképp irhatjuk: $1 = \frac{1}{2b}(y + a)\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]$ tehát a miből $\frac{2b - (y+a)}{y+a} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$, és $\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2b-(y+a)}{y+a}}$,

$dx = \sqrt{\frac{y+a}{2b-(y+a)}}$ és integrálva $x = \int \sqrt{\frac{y+a}{2b-(y+a)}}\, dy$. —

Hogy ezt az integrált minél egyszerűbb módon megoldhassuk célszerű lesz a következő trigonometricus substitutiót alkalmazni: $y + a = b(1 - \cos w)$, ekkor minden előtt $dy = b \sin w\, dw$ és $x = \int \sqrt{\frac{b(1-\cos w)}{2b - b + b\cos w}} \cdot b \sin w\, dw$

$= b \int \sqrt{\frac{1-\cos w}{1+\cos w}} \sin w\, dw = b \int (1 - \cos w)\, dw$, tehát $x = bw - b \sin w - h$ hol h tetszőleges állandó. Most már összefoglalva fel-irhatjuk az extremalis görbe egyenleteit:

$x-h=b(w-\sin w)$ és $y-a=b(1-\cos w)$, a melyek egyenletek, mint is mereles egy cyclois értelmezenek; arra az eredményre jutottunk tehát, hogy ha brachystochrone egy általában léterik, akkor ez nem lehet más, mint cyclois.

Mielőtt most annak vizsgálatára álmennénk, hogy vajjon az itt nyert extreumalisok szolgáltatnak-e tényleg extremumot, vagy nem, előbb még az eddig tárgyalt feladatoknak kétdimenzióban való általánosításával fogunk foglalkozni, a mennyiben ezen általánosabb feladatoknál az extremum vizsgálata ugyanazon segédeszközökkel történhetik, mint az eddig tárgyalt egyszerűbb esetekben. Hogy ezen általánosításaink természetére nézve tájékozódhassunk, felemlítjük II. és III. példánkat, a melyek általánosításaink minőségára éles világot vetnek.

II. Harmadik példánkat következőleg fogalmazhatjuk meg. Legyen adva egy felület: $f(x,y,z)=0$, vegyünk fel ezen a felületen az $(x_0\,y_0\,z_0)$ és (x_1,y_1,z_1) coordinatás pontokat és képzeljünk ezeken a pontokon keresztül oly görbéket fektetve, a melyeknek minden pontja a felületen fekszik. Egy ilyen görbe általánosan szólva térbeli görbe lén és paraméteresen a következőleg állítható elő: $x=\varphi(t)$; $y=\psi(t)$; $z=\chi(t)$, vagy ha előbbi felfogásunkhoz hiven a t paramétert x-el tesszük egyenlővé, akkor a görbe egyenletei lesznek: $y=\psi(x)$; $z=\chi(x)$. Mivel ez a görbe feltevésünk szerint teljesen a felületen fekszik, ezért $\psi(x)$ és $\chi(x)$ nem lehetnek egészen tetszőleges függvényei az x-nek, hanem kell, hogy identice kielégítsék a felület egyenletét, vagyis, hogy $f(x,\psi(x),\chi(x))=0$ legyen.

Most vessük fel azt a sit esetén már tárgyalt kérdést, hogy miként kell ezt a görbét fektetni a felület adott két pontja közé, hogy a görbe mentén mért ívhossz minimum legyen, vagyis, hogy a görbe két pontja közötti a legrövidebb utat szolgáltassa. Az olyan görbét, mely az itt feltüntetett tulajdonság-

gal bír, általánosan geodaetikus görbének, geodaetikus vonalnak pedig a legnagyobb körbíró geodaetikus görbe tulajdonságával, az a kérdés tehát most, hogy miként kell a felületen görbének megválasztani ugy, hogy az geodetikus görbe legyen. Vegyük ezen szélből az ivelem kifejezését: $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$, az ivhossz tehát az (x_0, y_0, z_0) és (x, y, z) pontok közötti nem lesz egyéb mint $s = \int_{x_0}^{x} \sqrt{1 + \psi'(x)^2 + \chi'(x)^2}\, dx$ és már most nem kell egyebet tenni, mint a ψ és χ függvényeket ugy választani, hogy az integrál minimum legyen, szem előtt tartva egy ujjal azt is, hogy ψ és χ az $f(x, \psi(x), \chi(x)) = 0$ relationak eleget tegyenek. Nyilvánvaló, hogy ez más variatio számitási feladat, mint az eddigiek voltak a mellett t. i. hogy itt az integrál jelalatt x-nek már két függvénye szerepel, feltünő még az is, hogy ezek a függvények nem tetszőlegesek, hanem közöttük egy identicus feltételi egyenlet áll fenn. Ettől kifolyolag a variatio számitási problemák azon typusa, a melyhez a geodaetikus görbe feladata is tartozik, a következőleg jellemezhető: extremummá teendő egy:

$$\int_{x_0}^{x} F\left(x, y, z, u, \ldots \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \frac{du}{dx} \ldots\right) dx$$

kifejezés de ugy, hogy mellette egy azonfelül kifejezés

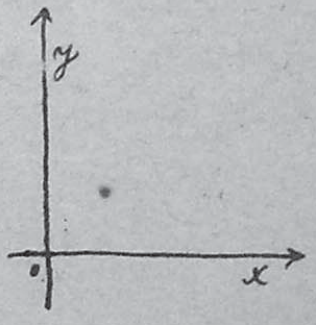
$$\left.\begin{aligned} f(x, y, z, u \ldots) &= 0 \\ g(x, y, z, u \ldots) &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \end{aligned}\right\}$$

identicus feltételi egyenletek is teljesüljenek, vagy is meghatározandók az $y, z, u \ldots$ függvények ugy, hogy a felirt integrál minimummá legyen és ezen feltételi egyenleteknek identice eleget tegyenek, ez variatio-számitási problemák ezen typusa a variatio-

<u>számítási problemák mellék feltételekkel</u> "nevet viselő" analog problemákkal találkoztunk már a max és minimum-számítás elméletében is.

Ezen mellék feltételes problemák közül kivánnak még bizonyos sajátságos problemák, a melyeknek typusát a feladatok során következő negyedik példa adja.

IV. Ezen negyedik példa tárgya a következő. Képzeljük, hogy egy tetszőleges hajlitható, de ki nem nyulható nehéz fonalunk van, a mely két pontjánál fogva függesztve és keressük ennek az aequilibrium (egyensulyi) helyzetét a mely helyre áll, ha a fonal tömeg centruma a lehető legmélyebben fekszik. Physikai okokból nyilván való, hogy ez az aequilibriumi helyzet egy verticalis síkban fog feküdni, úgy hogy mi mindjárt egy (x, y) síkban kezdhetjük a vizsgálatot. Mindenek előtt a tömeg centrum fogalmával kell tisztában lennünk. Legyen az (x,y) síkban egy olyan derékszögü coordinata rendszerben, a melynek x tengelye horizontalis irányú, y tengelye pedig verticálisan felfelé mutat, az anyagi pontoknak következő rendszere:



(x_1, y_1) tömege m_1,

(x_2, y_2) " m_2

- - - - - - - - -

- - - - - - - - -

(x_k, y_k) - - - - - m_k

az anyagi pontok ezen rendszerének tömeg centruma az a pont, a melynek coordinátái ξ és η a következő kifejezésekkel vannak értelmezve:

$$\xi = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \ldots + x_k m_k}{m_1 + m_2 + \ldots + m_k}$$

$$\eta = \frac{y_1 m_1 + y_2 m_2 + \ldots + y_k m_k}{m_1 + m_2 + \ldots + m_k}$$

Tudva most már, hogy a mi fonalunk nem n, hanem végtelen sok anyagi pont rendszere: fonalunk tömegcentrumának a coordinátai lesznek:

$$\xi = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} x_k m_k}{\sum_{k=1}^{\infty} m_k}$$

$$\eta = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} y_k m_k}{\sum_{k=1}^{\infty} m_k}$$

vagy mivel ezen végtelen sok anyagi pont rendszere a fonalban egy folytonos sokaságot alkot, azért ξ és η ezen kifejezéseit, mint Stieltjes-eket foghatjuk fel és úgy írhatjuk, hogy: $\xi = \frac{\int x\,dm}{\int dm}$ és $\eta = \frac{\int y\,dm}{\int dm}$ hol dm tömeg differenciál a görbének egy ds ív elemén. Ebben az esetben a: $\frac{dm}{ds} = \mu$ kifejezés adja a fonal sűrűségét, hol μ általánosan szólva függvénye x-nek és y-nak, mivel a sűrűség a vonal különböző pontjain más és más lehet és most már a tömeg differenciál kifejezhető, mint az ív elem és sűrűség szorzata, t. i.:

$dm = \mu ds$, úgy hogy a tömegcentrum coordinátái így írhatók: $\xi = \frac{\int x\mu ds}{\int \mu ds}$, $\eta = \frac{\int y\mu ds}{\int \mu ds}$.–

A mi problémánkban arról van szó, hogy mikor lesz a fonal aequilibrium helyzetben, vagyis más szóval, mikor fog a tömegcentrum lehető legmélyebb helyzetet elfoglalni: az ξ coordináták tehát nekünk tárgyalásunk folyamán nem is szerepelnek, hanem csakis a η coordinátával kell foglalkoznunk, ezt kell minimummá tenni, mivel a tömegcentrum mélyen fekvése csakis ettől a coordinátától függhet.–

Mi itt a feladatnak azzal az esetével fogunk csak foglalkozni, midőn a fonal homogén, tehát a midőn a sűrűség μ állandó, amikor is:

$$\eta = \frac{\int y\,ds}{\int ds} = \frac{\int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1+p_2}\,dx}{\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+p^2}\,dx};$$ ezt a kifejezést kell tehát minimummá tenni. – Nem vettünk azonban mindeddig egy körülményt, azt t. i. hogy a fonal ki nem nyújtható, vagyis más szóval, hogy a fonal hossza nem változik, tehát, hogy:

$\int ds = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+p^2}\,dx = S_0$, hol S egy állandó mennyiséget jelent, ha tehát most ezt a körülményt számba vesszük, akkor feladatunk a következő alakot ölti: minimummá kell tenni az: $J = \int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1+p^2}\,dx$ integrált úgy, hogy egy másik integrál: $\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+p^2}\,dx = J$ állandó értékkel bírjon.-

Kijelentendő, hogy itt a variatio számítási problemák egy új typusával van dolgunk, mely typusnál az integrál jel alatt álló egyetlen függvény úgy határozandó meg, hogy az integrált minimummá tegye, és hogy e mellett egy második integrál állandó értéket vegyen fel, tehát általánosan véve a dolgot: y itt meghatározandó úgy, hogy: $J = \int_{x_0}^{x_1} F(x,y,p)\,dx$ minimum legyen és hogy e mellett: $\int_{x_0}^{x_1} \Phi(x,y,p)\,dx = J$ állandó értékkel bírjon.- A variatio számítás problemáinak ezen typusához tartozó feladatokat is perimetrikus feladatoknak szokás nevezni, mivel a második integrál, melynek állandó értéket kell felvennie, rendesen egy perimeter, tehát egy ívhossz; – ilyetféle feladatokkal mindjárt a differentiális calculus felfedezése után kezdtek foglalkozni; így már a két Bernoulli is tárgyalt ilyen feladatokat.-

Mielőtt még III és IV példánk részletesebb tárgyalásába bocsátkoznánk, előbb vizsgáljuk kissé közelebbről azt az általánosabb esetet, melyben az integráljel alatti függvény több, mint egy függvényt tartalmaz:-

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F\left(x, y, z \ldots u, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx} \ldots \frac{du}{dx}\right) dx$$

és kérdezzük, miképpen kell az $y, z \ldots u$ függvényeket meghatározni, hogy ez az J integrál extremum legyen.- A követendő eljárás egészen typikus erre nézve, úgy, hogy teljesen elegendő x-nek csak két függvényét:

$$\left.\begin{aligned} y &= f(x) \\ z &= g(x) \end{aligned}\right\}$$

venni tekintetbe, a mikor az extremummá teendő integrál alakja:

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F\left(x, y, z \ldots \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}\right) dx$$

Az, hogy x-nek csak két függvényét vesszük számba, azzal az előnnyel is jár, hogy ezt a két függvényt, mint egy térbeli görbe elvállitását te-

kinthetjük, a miből egyuttal azt is látjuk, hogy ez az általánosabb probléma az előzőkben tárgyalt egyszerűbb problémától csakis attól különbözik, hogy az ottani síkbeli görbe helyét, most a térbeli görbe foglalja el.- A határfeltételekre nézve most is ugyanaz áll, mint az előbbi egyszerűbb feladatnál: az extremum mivoltsége itt is teljesen független a határfeltételek megválasztásától, úgy, hogy elejétől fogva kiköthetjük, hogy az extrémálisok az $(x_0\, y_0\, z_0)$ és $(x_1\, y_1\, z_1)$ pontokon menjenek keresztül.- (A legáltalánosabb határfeltétel a jelen esetben az volna, hogy a görbének két végpontja egy-egy felületen mozogjon, a miket aztán a feladat az volna, hogy fel kell keresni a legrövidebb vonalat, a mely a két felületet két tetszőleges pontjában egymással összekapcsolja, de könnyű belátni, hogy ez az általánosabb határfeltétel a feladatot lényegesen nem complicálja).-

Ezek után továbbmenve emlékezünk vissza arra a körülményre, hogy a síkbeli görbéknél x-nek variációja: δx is nyilvánvalóan $=0$ volt.- Ha most egyszer, mindenkorra a határfeltételeket akként választjuk meg, hogy a görbének két meghatározott ponton menjen keresztül, akkor ezen körülmény megszorítására nézve is feltehetjük, hogy $\delta x = 0$ és pedig identice, vagyis hogy x nem variál, megjegyzendő azonban, hogy δx megtartása elmélet tiszta tekintetben semmi nehézséget nem okoz és hogy mi inkább csak egyszerűség és kényelem szempontjából tesszük azt a kikötést.- Ha, már most: $\delta x = 0$ vesszük, akkor: $\frac{dy}{dx}$ variációja, mely általánosan a:

$$\delta \frac{dy}{dx} = \frac{d\,\delta y}{dx} - \frac{dy}{dx}\cdot\frac{d\,\delta x}{dx} = \frac{dx\,d\delta y - dy\,d\delta x}{dx^2}$$

képlet segítségével volt előállítva, lényegesen egyszerűbbül, és lesz: $\delta \frac{dy}{dx} = \frac{d\,\delta y}{dx} = \delta y'$ úgy hogy feltevésünk mellett, annál is egyszerűbbé lesznek eszméink, hogy nem kell p-t bevezetni, hanem az x szerint való deriváltakat egyszerűen vesszővel jelölhetjük: $\frac{dy}{dx} = y'$ $\frac{dz}{dx} = z'$ és variációik lesznek: $\delta \frac{dy}{dx} = \delta y'$ és $\delta \frac{dz}{dx} = \delta z'$.-

Térjünk át most egy előzetes megállapodások után a fenti δ integrál vizsgálatára és pedig állítsuk meg mindenek előtt az integrál első variációját.-

Az integrál jel alatti függvényben x a feltétel szerint nem variál, tehát a variált függvény: alakja lesz: $F(x, y+\delta y, z+\delta z, y'+\delta y', z'+\delta z')$ vagy Taylor tétele szerint kifejtve:

$$= F(x, y z, y', z') + \frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial z}\delta z + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y' + \frac{\partial F}{\partial z'}\delta z' + [\delta y, \delta z, \delta y' \delta z']$$

Itt a variációkra nézve ismét azt a megszorítást kell behoznunk, hogy: $\delta z, \delta y$ és $\delta y', \delta z'$ egyenlő rendűek, azaz, hogy, ha δy és δz végtelen kicsinyek, akkor $\delta y'$ és $\delta z'$ is végtelen kicsinyekké válnak. - Ezen korlátozás révén meglehet állapítani az J integrál teljes variációját, a melyből az első rendű tagokat megtartva, az első variációt nyerjük, úgy hogy az J integrál első variációja nyilvánvalóan lesz egyenlő, mint:

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1} \left\{ \frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial z}\delta z + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y' + \frac{\partial F}{\partial z'}\delta z' \right\} dx$$

Most is úgy, mint az egyszerűbb esetben, ezt az első variációt parciális integrálás alkalmazásával át fogjuk alakítani. - Végezzük mindenek előtt a következő integrált:

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y' dx = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{d\delta y}{dx} dx = \left[\frac{\partial F}{\partial y}\delta y\right]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y dx$$

mivel azonban határfeltételünk azt mondja, hogy a görbe átmegy az $(x_0 y_0 z_0)$ és (x, y, z) pontokon, kell, hogy ezekben a pontokban $\delta y = 0$ legyen, úgy hogy a jobb oldal első tagja kiesik. -

Hasonlóképpen át lehet alakítani a következő integrált:

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial F}{\partial z'}\delta z' dx = \left[\frac{\partial F}{\partial z'}\delta z\right]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dy}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right)\delta x dx \text{ , úgy hogy ezen}$$

átalakítások tekintetbe vételével az első variáció így írható:

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1} \left\{ \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dy}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]\delta y + \left[\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right)\right]\delta z \right\} dx$$

Most okoskodjunk így: Mivel csak szükséges feltételekről van szó arra nézve, hogy J integrálunk extremum legyen, megválaszthatjuk δy-t és δz-t speciális módra oly képen, hogy: $\left.\begin{aligned}\delta y &= \varkappa u \\ \delta z &= \varkappa v\end{aligned}\right\}$ legyen, hol $\varkappa$ elegendő kicsi állandó u és v pedig tetszőleges függvénye x-nek. - A variációknak ezen speciális megválasztásánál ismeretes okoskodásunk szerint a teljes variáció kifejezése-

ben a k első hatványával szorzott tagok összege, nem egyébb, mint δJ, mivel pedig k előjelének megváltozásával a teljesvariáció előjele is megváltozik, a mi extremumnvesetén ki van zárva, azért szükséges, hogy extrémum esetén a k első hatványával szorzott δJ null legyen, az első szükséges feltétel tehát az extremumra nézve: $\delta J = 0$ egyenlet.- Vegyük ezután tekintetbe, hogy δy és δz az x_0-tól x_1-ig terjedő intervallumon belül még egészen tetszőleges függvényei az x-nek.- Ezt tudva, vegyük görbénknek egy olyan variátiójat, a melynél a z coordinata egyáltalában nem változik, tehát a hol: $\delta z = 0$, ekkor a nullától legyenlő első variátió a következő kifejezésre redukálódik:-

$$\int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right] \delta y \, dx = 0$$

Most ismét a már egyszer alkalmazott következtetési módszer szerint a meg egészen tetszőleges δy-t így választhatjuk meg, hogy az itt felírt integrál eltűnésének szükséges következményeként egyszerűen: (1.) $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$ legyen, a mely egyenlettel egyelőre differentiálegyenletet nyertünk az extremálisok meghatározására.- Ha ezután görbénknek egy olyan variátiójat vesszük, melynél $\delta y = 0$, akkor nyerjük: $\delta J = 0$ kifejezéséből az: $\int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right)\right] \delta z \, dx = 0$

egyenletet, a mely δz eltérési megválasztásával az extremálisok meghatározására szolgáló második: (2.) $\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right) = 0$ differentiál egyenletbe megy át, úgy hogy ebben az esetben a két ismeretlenű függvény meghatározására két differentiál egyenletet nyertünk.- Hogy feladatunk teljesen elvégezve, még csak két másodrendű differentiálegyenlet megoldásánál előjövő négy tetszőleges állandó meghatározására nézve megjegyezzük, hogy ez az állandók az: $y_0 = f(x_0)$, $z_0 = g(x_0)$ és $y_1 = f(x_1)$, $z_1 = g(x_1)$ kifejezések által van meghatározva, és ezzel problémánkat csak általánosb esetben teljesen megoldottnak.

Tegyük még végre azt az észrevételt, hogy, ha az integrálfél alatt x-nek

nem két hanem három, négy, öt stb. tetszőleges függvénye állana, akkor ugyanúgy járással mint itt három, négy, öt etc. differentiál egyenletet nyernénk ezen függvénynek meghatározására.-

Térjünk át ezek után arra az előzőkben mellék feltételes problémának nevezett esetre, a midőn az integrál-jel alatt több függvény szerepel, a melyeket akképp kell meghatározni, hogy: 1. az integrál egy extremum legyen és 2. bizonyos feltételi relatiók teljesüljenek.- A mi mindenek előtt ezen relatió sereget illeti, meg kell jegyeznünk azt, hogy, ha a meghatározandó függvények száma n, akkor ezekre nézve legfeljebb $(n-1)$ relatiót szabad adni, mert, ha már pl. n relatió volna adva, akkor ez az n relatió az n függvényt teljesen meghatározná és így nem volna meg a lehetőség, hogy ezek a függvények még egy integrált extremummá tegyenek.-

Ezt tekintetbe véve foglalkozzunk először is azzal a legegyszerűbb esettel, a midőn két függvény y és z határozandók meg úgy, hogy: $J = \int_{x_0}^{x} F(x, y, z, y', z')\,dx$

integrált extremummá tegyük, és hogy a mellett, a: $\varphi(x, y z, ; y'z') = 0$ identikus relatiónak eleget tegyenek.- Itt, a következőképpen lesz célszerű okoskodni.- Ha x-nek azon y, z függvényeit veszem, melyek a kitűzött feladatnak megfelelnek, akkor ezen függvényeknek a behelyettesítésével a φ identice eltűnik, én tehát ia helyett, hogy az integráljel alatt az: $F(x\,y z\; y'z')$ függvényt venném, nyugodt lélekkel vehetem helyébe az: $F(x\,y z,\, y'z') + z\varphi(x\,yz\;y'z')$ összeget, a melynek a másodikk tagja úgy is identice null, vagyis foglalkozhatom azzal a feladattal, hogy az: $\bar{J} = \int_{x_0}^{x} (F + \lambda\varphi)\,dx$ integrált tegyem extremummá, mert ha egy x, y függvényrendszer az F integrált extremummá teszi, és a mellett a feltételi egyenletnek is eleget tesz, akkor nyilván valóan extremummá teszi az $\bar{J}$ integrált is.- Írjuk ezt az $\bar{J}$ integrált így:

$\bar{J} = \int_{x_0}^{x_1} \bar{F}(x, y, y', z z')\,dx$, akkor ennek első variátiója az előzők szerint lesz: $\delta J = \int_{x_0}^{x_1} \left\{ \left[\frac{\partial \bar{F}}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial y'}\right)\right]\delta y + \left[\frac{\partial \bar{F}}{\partial z} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial z'}\right)\right]\delta z \right\} dx$

Nem szabad azonban felednünk, hogy most a δy és δz nem tetszőleges függvényei

x-nek, hanem, hogy mint minden y és z függvény eleget tartoznak tenni a feltételi egyenletnek: $\varphi(x, y+\delta y, z+\delta z, y'+\delta y', z'+\delta z') = 0$, mely egyenlet, δy-t megadva, δz-re nézve egy differentiál egyenletet szolgáltat, vagyis nem szabad feledniünk, hogy ha pl. δy-t tetszőlegesen megválasztottuk, akkor δz értéke, már ezen egyenlet által megvan szabva és épen ezért a továbbiakra nézve nem okoskodhatunk úgy, mint az előbb tettük, a hol δy és δx $\underline{x}$ tetszőleges függvényei voltak, hanem más módszerhez kell folyamodnunk. Megkönnyíti most okoskodásunkat azon körülmény, hogy x-nek egy még teljesen tetszőleges z függvénye áll rendelkezésünkre, a melyet akkép fogunk megválasztani, hogy:

$$(1.)\quad \frac{\partial \bar{F}}{\partial z} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial z'}\right) = 0$$

legyen, a mikor aztán az első variátió kifejezése lesz:- $\delta \mathcal{J} = \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial \bar{F}}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \bar{F}}{\partial y'}\right] \delta y\, dx = 0$, a miből a már többször használt következtetés szerint nyerjük, hogy: $(2.)\ \frac{\partial \bar{F}}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \bar{F}}{\partial z'} = 0$

Ha még a nyert két egyenlethez hozzávesszük kormaulitknak a feltételi egyenletet: $(3.)\ \varphi(x, y\ z\ y'z') = 0$, akkor van 3 egyenletünk, a mely y-t z-t és x-et mint x függvényt teljesen meghatározzák és ezzel az extremálisok ebben az esetben is megvannak határozva. -

Nézzük ezek után azt az általánosb esetet, a midőn az s független változónak x, y, z függvényeit akkép kell meghatározni, hogy ezen 3 függvény az:

$$\mathcal{J} = \int_{s_0}^{s_1} F(s, x, y\ z\ x'\ y'\ z')\, ds$$

integrált extrémummá tegye és emellett a: $\varphi(s, x, y\ z, x'\ y'\ z') = 0$

$\psi(s, x, y, z, x', y', z') = 0$

identikus relátiókhoz eleget tegyen, hol a vesszők, mennyiségek most $\underline{s}$ szerint való deriváltakat jelentenek. - Legyen itt ismét: $\bar{F} = F + \lambda\varphi + \mu\psi$. és foglalkozzunk azzal a feladattal, hogy a $\varphi = 0$ és $\psi = 0$ relátiók figyelembevétele mellett, az: $\bar{\mathcal{J}} = \int_{s_0}^{s_1} \bar{F}\, ds$ - integrált extrémummá tegyük; ekkor: $\delta \bar{\mathcal{J}}$ ismét a: $\delta \bar{\mathcal{J}} = \int_{s_0}^{s_1} \left\{\left[\frac{\partial \bar{F}}{\partial x} - \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial x'}\right)\right]\delta x + \frac{\partial \bar{F}}{\partial y} - \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial y'}\right)\Big]\delta y + \frac{\partial \bar{F}}{\partial z} - \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial z'}\right)\delta z\right\} ds$

alakba irható, hol azonban δx-et, δy-t és:

δz-t úgy kell megválasztani, hogy a:

$$\left.\begin{aligned}\varphi(s, x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z, x'+\delta x', y'+\delta y', z'+\delta z') &= 0\\ \psi(s, x+\delta x, y+\delta y\ z+\delta z, x'+\delta x'\ y'+\delta y', z'+\delta z') &= 0\end{aligned}\right\}$$ egyenletek fennálljanak,

miből következik, hogy ezen 3 variáció közül egyet tetszőlegesen megadva, a másik kettő ezen egyenletek révén meghatározható. – Most azonban s-nek tetszőleges $\underline{\lambda}$ μ függvényeit úgy választhatjuk meg: hogy: 1.)

$$\left.\begin{aligned}1.)\ \frac{\partial \bar F}{\partial x} - \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right) &= 0\\ 2.)\ \frac{\partial \bar F}{\partial y} - \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) &= 0\end{aligned}\right\}$$

legyen, a mikor is az első variáció kifejezésére lesz: $\delta \bar J = \int_{s_0}^{s_1} \left[\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial \bar F}{\partial z'}\right)\right] \delta z\, ds = 0$

azaz ismételt következtetés szerint:

$$3.)\ \frac{\partial \bar F}{\partial z} - \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right) = 0,$$ a mely 3 egyenlet a:

4.) $\varphi(s\ x\ y\ z\ x'\ y'\ z') = 0$

5.) $\psi(s\ x\ y\ z\ x'\ y'\ z') = 0$

feltételekkel, – egyenletekkel együtt, teljesen meghatározza az $x\ y\ z$ extrémálisokat és a λ, μ factorokat. –

Miután a mellékfeltételes problémák ezen két esetéből kielégítő útmutatást szerezhettünk arra nézve, hogy miképp kelljen általánosabb esetekben is eljárnunk, térjünk most át $\underline{\text{III.}}$ példánkhoz, a melyen először láttuk a mellékfeltételes problémák sajátosságait t. i: a felület geodaetikus vonalainak a meghatározásához. – Legyen az adott felület egyenlete: $f(x, y, z) = 0$ legyen ezen a felületen két adott ponthelynek coordinátája: $(x_0\ y_0\ z_0)$, (x_1, y_1, z_1) és keressük azt a görbét, a mely a felületen mérve a legrövidebb utat adja ezen két pont közt. – Legyen a felület ív eleme: $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ ekkor feladatunkat a következőleg fogalmazhatjuk meg: határozzuk meg az $x\ y\ z$ coordinátákat, felfogva, mint az $\underline{s}$ ívhossznak: $x = \varphi(s)$, $y = \psi(s)$, $z = \chi(s)$ függvényeit olyképen, hogy: s-nek ezen függvényei: 1.) az $J = \int_{s_0}^{s_1} ds$ integrált minimummá tegyék és 2.) a felület: $f(x, y, z)$ egyenletének is identice eleget tegyenek. –

Megjegyzendő azonban, hogy: ezen problémánál még egy feltételi egyenletet is tekintetbe kell vennünk, t. i. az:

$1 = \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2$ vagyis : $x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$ egyenletet, a mely a mi esetünkben szinten teljesülni köteles, úgy, hogy most van 3 meghatározandó függvényünk és két feltételi egyenletünk, tehát ugyanannyi, mint a legutóbbi esetben volt.. Az integrál jel alatti függvény most a lehető legegyszerűbb, t. i : $\mathfrak{F} = 1$ és így: $\overline{F} = \lambda f(x\,y\,z) + \mu(x'^2 + y'^2 + z'^2)$. – Alkossuk meg ezen $\overline{F}$ függvény segélyével az extremálisok differenciál egyenleteit:

$$\lambda \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{ds}(\lambda \mu x') = 0 \quad \Big| \quad \frac{\lambda \partial f}{\partial x} - 2\mu x'' - 2\mu' x' = 0$$
$$\lambda \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{ds}(\lambda \mu y') = 0 \quad \Big| \quad \lambda \frac{\partial f}{\partial y} - 2\mu y'' - 2\mu' y' = 0$$
$$\lambda \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{ds}(\lambda \mu z') = 0 \quad \Big| \quad \lambda \frac{\partial f}{\partial z} - 2\mu z'' - 2\mu' z' = 0$$

} ez az előbbi 3 egyenlet differenciálva.

És végül szorozzuk meg egyenleteinket rendre $x'\,y'\,z'$-el és adjuk össze, ekkor nyerjük, hogy : $\lambda\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{ds} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{dz}{ds}\right) - 2\mu(x'x'' + y'y'' + z'z'') - 2\mu'(x'^2 + y'^2 + z'^2) = 0$

Amide itt λ factor nem egyébb, mint : $\frac{df}{ds} = 0$, mivel f maga is identice null, μ' coefficiense : $x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$ ennek differenciál quotiense : $2(x'x'' + y'y'' + z'z'') = 0$ pedig μ coefficienset adja, úgyhogy felirt egyenletünkből szükségképen következik, hogy : $\mu' = 0$ azaz μ constáns.. Ezt tekintetbe véve differenciál egyenleteink lényegesen egyszerűsülnek, t.i. a következő alakba irhatók: $\lambda \frac{\partial f}{\partial x} - 2\mu x'' = 0$; $\lambda \frac{\partial f}{\partial y} - 2\mu y'' = 0$; $\lambda \frac{\partial f}{\partial z} - 2\mu z'' = 0$

hol μ állandó, λ pedig $\underline{\underline{s}}$-nek még tetszőleges függvénye is lehet.– Hogy egyenleteinket még kissé más alakba irhassuk, legyen : $\frac{\lambda}{2\mu} = \nu$ ekkor nyerjük, hogy : $\frac{d^2x}{ds^2} = \nu\frac{\partial f}{\partial x}$; $\frac{d^2y}{ds^2} = \nu\frac{\partial f}{\partial y}$; $\frac{d^2z}{ds^2} = \nu\frac{\partial f}{\partial z}$, amely egyenletek a geodaeticus vonalak szokott előállitását szolgáltatják; azt látjuk tehát, hogy, ha letettük egy általában oly görbe a felületen, a mely két pontját a legrövidebb utat szolgáltatja, akkor ez a görbe valóban geodaeticus vonal lehet.

Alkalmazzuk most ezt az eredményt egy speciális felületre t.i. a gömbre.– A gömb egyenlete : $f = x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$. Ebben az egyenletben tehát a geodaetikus vonalakat értelmező egyenletek a következők lesznek:

$x'' = \nu 2x$, $y'' = \nu 2y$, $z'' = \nu 2z$, következőleg :

$yx''-xy''=0$, $zy''-yz''=0$, $xz''-zx''=0$.- Ezeket az egyenleteket most közvetlenül integrálhatjuk, a mennyiben pl. az első egyenlet baloldala ekképis írható: $\frac{d}{ds}(yx'-xy')=0$, úgy hogy az integrálás elvégzése után nyerjük: hogy: $yx'-xy'=m$; $zy'-yz'=k$; $xz'-zx'=l$.- Szorozzuk ezen egyrendre ezt a 3 egyenletet z, x és y-al, akkor összeadás után nyerjük: hogy: $lx+ly+mz=0$.- Ez az egyenlet a geodaetikus görbékre nézve a térbeli derékszögű coordinátákban egy síkot értelmez, mely keresztül megy a coord. rendszer kezdő pontján, azaz keresztül megy a görbe centrumán, a geodeticus vonalak tehát oly síkokkal metszetnek ki a gömbből, mely síkok a gömb centrumán keresztül mennek, tehát ezek a geodaeticus vonalak nem egyebek, mint a gömb legnagyobb körei.-

Az eddig tárgyalt esetekre visszavezethető még egy általánosítása a variatio számítás problémának.- Eddig t. i. az integrál jel alatt mindig bizonyos függvények és ezeknek első differentiál hányadosai állottak, képezhető azonban, hogy nemcsak az első, hanem második, 3^{ik} ... n-dik diff. hányadosok is szerepelnek az integrál jel alatt.- Ebben az esetben az extremalisok differentiál egyenleteit oly módon fel lehet állítni, és pedig a követendő eljárást a következő.- Rövidség kedvéért vegyük a legegyszerűbb esetet: tegyük extremummá az: $J=\int_{x_0}^{x_1} F(x\ y\ y'\ y''\ y^{(3)})\,dx$ integrált.- Ezt az esetet közvetlenül visszavezetni arra, midőn az integrál jel alatti függvény több függvénytől függ, melyek közt bizonyos feltételi egyenletek teljesülnek.- Legyen t. i.: $y'=z$, $z'=u=y''$, $u'=y^{(3)}$... akkor integralunk így írható: $J=\int_{x_0}^{x_1} F(x\ y\ z\ u\ u')\,dx$ a hol az y, z, u függvényeket közt fennállanak az: $z-y'=0$; $u-z'=0$ relatiók, van tehát az integrál jel alatt x-nek 3 ismeretlen függvénye, melyek közt két relatio áll fenn. Ez az eset azonban már ismeretes az előzőkből, ugy t. i.: $\bar F=F+\lambda(z-y')+\mu(u-z')$ és az extremálisok differentiál egyenletei a következők:

$$\frac{\partial \bar F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \bar F}{\partial y'}\right)=0\quad;\quad \frac{\partial \bar F}{\partial z}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \bar F}{\partial z'}\right)=0;\quad \frac{\partial \bar F}{\partial u}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \bar F}{\partial u'}\right)=0$$

azaz: $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}(-\lambda) = 0$ 1) $\frac{\partial F}{\partial z} + \lambda - \frac{d}{dx}(-\mu) = 0$, 2.) ; $\frac{\partial F}{\partial u} + \mu - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial u'}\right) = 0$ (3.
a mely egyenletek a két feltételi egyenlettel együtt az extrémálisokat teljesen meghatározzák. A λ és μ eliminálása a fenti egyenletekből így eszközölhető:
differentiáljuk a (3.) egyenletet x szerint: $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right) + \frac{d\mu}{dx} - \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial w}\right) = 0$
helyettesítsük bele: $\frac{d\mu}{dx}$ helyébe az értékét (1.) alatti egyenletből:
$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right) - \frac{\partial F}{\partial z} - \lambda - \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial w}\right) = 0$ és a nyert egyenletet még egyszer differentiáljuk x szerint:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right) - \frac{d\lambda}{dx} - \frac{d^3}{dx^3}\left(\frac{\partial F}{\partial w}\right) = 0 ;$$

$\frac{d\lambda}{dx}$ értéke az (1.) alatti egyenletből ismeretes, nyerjük tehát, hogy:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right) - \frac{d^3}{dx^3}\left(\frac{\partial F}{\partial w}\right) = 0$$

és tekintetbe véve, hogy: $z = y'$, $u = y''$ lesz:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right) - \frac{d^3}{dx^3}\left(\frac{\partial F}{\partial y^{(3)}}\right) = 0$$

ez a hatodrendű differentiálegyenlet szolgáltatja tehát az extrémálisokat.

Ez az egyszerű eset magasabbrendű differentiálok esetén, csak annyiban módosul, hogy az extrémálisok számára magasabbrendű diff. egyenleteket nyerünk, több függvény esetén pedig annyiban, hogy a diff. egyenletek száma lesz nagyobb.-

Hátra volna még ezek után az isoperimetrikus feladatok tárgyalása.- Ezen feladatok legegyszerűbb esetének a schemája volt a következő feladat: extremummá teendő az: $J = \int_{x_0}^{x_1} F(x\, y\, y')\, dx$ integrál és pedig úgy, hogy e mellett az: $J = \int_{x_0}^{x_1} G(x, y, y')\, dx$ integrál konstans értékű legyen.

Ezen feladat megoldásánál szorítkozunk most is, mint előbb a variatio számítás azon speciális esetére, mi dőre: $\delta x = 0$.- Arra nézve, most már, hogy fenti integrálunk extremum legyen, szükséges első sorban az, hogy: $\delta F = 0$ legyen és azonkívül az J integrálnak állandó értékkel kell bírnia. Bármilyen is variáljuk az y függvényt; és azonban nem mondható más, mint az, hogy: $\delta J = 0$ mellett $\Delta J = 0$.- De az J integrál teljes vár-

áltja a következő kifejezésekből van összerakva: $\Delta J = \delta J + \delta^2 J + \dots\dots$
hol az első kifejezés nem egyébb, mint egy dimenziójú tagok összege, vagyis
az első variáltó, a második kifejezés nem egyébb, mint a két dimenziójú tagok
összege, vagyis a második variáltó stb. ΔJ kifejezésében nyilvánvalóan
csak akkor lehet null, ha a δJ, $\delta^2 J$ stb. kifejezések mind eltünnek, kell
tehát, hogy: $\delta J = 0$, $\delta^2 J = 0 \dots\dots\dots$ legyen. Hogy ezeket a feltételeket
most minél egyszerübb módon fejezhessük ki célszerü lesz δy-t specializálva
úgy megválasztani, hogy $\delta y = \varepsilon v$ legyen, hol v tetszőleges függvénye x-nek,
ε pedig egy állandó, mely tetszőleges kicsinynek választható meg. - Ekkor:
δJ kifejezése: $\delta J = \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right] \delta y \, dx$ a következőleg írható:

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right] \varepsilon v \, dx \text{ azaz:}$$

$$\delta J = \varepsilon \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right] v \, dx$$ és ennek a kifejezésnek, vagy mivel $\varepsilon \neq 0$, a jobb oldali kifejezésnek el kell tünnie minden tetszőleges v-re nézve. Hogy kisérő áttekinthetőbb alakban nyerjük e feltételt, legyen: $\int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right] v \, dx = \varphi(x)$

Ha most ezt az egyenletet mindkét oldalon differentiáljuk x szerint,
és az így adódó egyenletből v-t kiküszöbítjük, nyerjük, hogy:

$$v = \frac{\varphi'(x)}{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)} \quad (1.)$$

$\varphi(x)$ értelmezéséből következik, hogy:
$\varphi(x_0) = 0$ és minthogy a feltétel szerint:
$\delta J = 0$ minden variációra nézve, ennélfogva egyszersmind $\varphi(x_1) = 0$
A φ függvényt tehát úgy kell berendezni, hogy tetszőleges v függvényre nézve $\varphi(x_0) = 0$ és $\varphi(x_1) = 0$ legyen, ha ezen (1) egyenlet áll fenn köztük. Nyilvánvaló továbbá, hogy, ha megfordítva φ-t alkalmas választjuk meg, hogy:
$\varphi(x_0) = 0$ és $\varphi(x_1) = 0$ akkor egyszersmind $\delta J = 0$ feltéve, hogy az (1) egyenlet kapcsolja a φ-t a v-vel össze, úgy hogy a $\varphi(x_0) = 0$ és $\varphi(x_1) = 0$ e-

egyenletek képezik a szükséges és elegendő feltételt arra nézve, hogy δJ eltűnjék; vegyük ezután az J integrálnak, melyet extrémummá kell tennünk, első variációját, mely a dolog természetéből kifolyólag nullával egyenlő:
$\delta J = \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) \right] \delta y \, dx = 0$ és helyettesítsünk bele δy-nak előbbi specialis értékét, ha az első egyenletet (1) tekintetbe vesszük: akkor:

$$\delta y = k v = k \frac{\varphi'(x)}{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)} \quad \text{tehát:}$$

$$\delta J = k \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)}{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)} \varphi'(x) \right] dx = 0$$

hol $\varphi_1(x)$ még egyébre egészen tetszőleges függvény, csak annyit kell, hogy $\varphi(x_0) = 0$, $\varphi(x_1) = 0$. A jobb oldalt most parciális integrálással át fogjuk alakítani:

$$\delta J = k \left[\frac{\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)}{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)} \varphi(x) \right]_{x_0}^{x_1} - k \int_{x_0}^{x_1} \varphi(x) \frac{d}{dx} \left[\frac{\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)}{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)} \right] dx = 0$$

Az első kifejezés eltűnik, mert $\varphi(x)$ úgy az alsó, mint felső határon nulla, következik tehát, hogy a jobb oldalon szereplő integrál maga is eltűnik. Amde a már többször alkalmazott eljárás szerint annak az integrálban szereplő még egyébként tetszőleges $\varphi(x)$ függvény megválasztható olyképp, hogy: $\frac{d}{dx}\left[\frac{\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)}{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)} \right] = 0$ legyen, a mely egyenlet integrálva

$$a: \frac{\partial F}{\partial y} - \left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\frac{d}{dx} - \mu\left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right] = 0, \text{ illetve a:}$$

$$\frac{\partial (F - \mu f)}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial (F - \mu f)}{\partial y'}\right) = 0$$ egyenlethez megy át, és az egyenlet szolgáltatja tehát az extrémálisoknak az extrémálisok differentiál egyenletét. – Mint látjuk az extremálisoknak a diff. egyenlete a variatio ordinatus legegyszerűbb problémának diff. egyenletétől csakis abban különbözik, hogy itt F helyett: $F - \mu f$ áll, hol:

$\mathcal{J}$a constans értékű integrál jelbalatti függvényt jelöli..

Alkalmazzuk ezután az itt elmondottakat a IV. problémánkra.- Ismét az integrál, melyet extrémummá kellett tenni volt: $J = \int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1+y'^2}\,dx$. a constans értékű integrált pedig szolgáltatta a következő kifejezés:

$$\mathcal{J} = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2}\,dx$$

Ez szerint az a függvény, a mely az extrémálisok differentiál egyenletében előfordúl, a következő lesz.

$(y-\mu)\sqrt{1+y'^2}$.- Az extrémálisok differentiál egyenlete tehát a következő alakúl:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[(y-\mu)\sqrt{1+y'^2}\right] - \frac{d}{dx}\left\{\frac{\partial}{\partial y'}(y-\mu)\sqrt{1+y'^2}\right\}$$

Nyilvánvaló, hogy itt y helyébe írhatunk mindenüvé $(y-\mu)$-t és ekkor azt látjuk, hogy differentiál egyenletünk teljesen identicus lesz azzal, a melyet az I. problémánál nyertünk, úgy, hogy eredményül azt kapjuk, hogy, ha extrémum-görbe általában létezik, akkor ez nem egyéb, mint egy:

$$y-\mu = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x-x_0}{2}} + e^{-\frac{x-x_0}{2}}\right)$$

transcendens egyenletnek értelmezett láncgörbe ilyen alakot vesz fel, tehát az a mélyes fonál, a mely két pont körül felfüggesztve aequilibriumi helyzetben van..

---

* * *

Áttekintettük már azokat a főbb problémákat, a melyekkel a variatio számításban foglalkozni szokás, legalább a mennyiben csak egyszerű integrálokról jönnek tekintetbe, felállítottuk azokat a szükséges feltételeket, melyek a közönséges maximum és minimum számítás problémáinál annak felelnek meg, hogy a függvény első deriváltjának el kell tűnnie és azt láttuk, hogy ezek a feltételek bizonyos extremálisoknak nevezett görbéket határoznak meg, a melyek közt az extrémum-görbének okvetlenül elő kell fordulnia, ha az egyáltalában létezik.- Térjünk át ezekután annak a vizsgálatára, hogy hogyan kell a már ismeretes extrémálisok közül a valóságos extremumot kikeresni.- Mivel, mint láttuk minden variatio számítási probléma visszavezethető arra az egyszerű feladatra, a melynél az integrál alatt csak egy függvény és annak első deriváltja szerepel, azért mi a következőkben csak ezt a feladatot fogjuk tárgyalni.-

Eljutottunk már az előzőkben addig, hogy az: $J = \int_{x_0}^{x_1} F(x\, y\, y')\, dx$ integrálhoz meghatároztuk az: $(L)\ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$ differenciálegyenletet, melynek megoldásai közt az extremum görbét keresni kell. Hogy most már vizsgálatainkban tovább haladhassunk, a dolog természetéből kifolyólag fel kell tételeznünk, hogy ezen L. differenciál egyenlet megoldásai ismeretesek: $y = \varphi(x\, \alpha\, \beta)$

Írjuk fel ezek után a teljes variátió kifejezését:

$$\Delta J = \int_{x_0}^{x_1} \{F(x, y+\delta y, y'+\delta y') - F(x\, y\, y')\, dx$$ és tekintetbe véve, hogy a rögzített határpontokban, a melyekkel mi most dolgozunk, a teljes variátió eltünik, fejtsük sorba a felirt kifejezést Taylor szerint:

$$\Delta J = \int_{x_0}^{x} \left\{ \frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y' + \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\delta y^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'}\delta y \delta y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\delta y'^2\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{3!}\left[\delta y, \delta y'\right]_3 \right\} dx = \delta J + \frac{1}{2!}\underbrace{\int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\delta y^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\delta y'^2\right] dx}_{\delta^2 J} + \frac{1}{3!}\int_{x_0}^{x_1} \left[\delta y\, \delta y'\right]_3 dx$$

A $\delta^2 J$ kifejezés, mely a két dimenzióju tagokat tartalmazza, az u. n. másodikvariátió, melynek vizsgálata további feladatunkat képezi – a 3^{ik} és magasabb rendű variátiók vizsgálata pedig az analysis mai álláspontján még nem oldható meg."

Már láttuk, hogy problémánknak szükséges feltételei, hogy $\delta J = 0$ legyen és hogy ΔJ állandó előjellel bírjon. Most először is azt akarjuk kimutatni, hogy ΔJ előjele bizonyosan meg van határozva, $\delta^2 J$ előjelével. Ennek kimutatására okoskodjunk a következőképen: Először egy tetszőleges δy-ra nézve magalkotva képezzük a ΔJ-t, úgy, a hogy az imént feltettük és aztán, vesszünk egy speciális variátiót oly formán, hogy x_1 helyett y átmenjen x-be, illetve $y + \kappa\delta y$-ba, hol κ egy egészen tetszőleges állandó. – Erre a variátióra nézve természetesen egy más teljes variátiót kapunk és pedig: $\Delta_1 J = \frac{1}{2!}\kappa^2\delta^2 J + \frac{1}{3!}\kappa^3 \int_{x_0}^{x} (\alpha\delta y + \alpha\delta y')_3\, dx$

Azt állítjuk most már, hogy $\Delta_1 J$ és $\delta^2 J$ előjele egy és ugyanaz. – A bizonyítást legczélszerűbb apagógice vezetni, azaz bebizonyítni, hogy lehetetlen

mészerint ennek a két kifejezésnek különböző előjele volna. - A κ-t, a mely megegyezen tetszőleges factor, akkép tudjuk megválasztani, hogy a jobb oldali kifejezésben az első tag előjele legyen mérvadó, az egész kifejezés előjelére nézve; ha t.i. $\underline{\kappa}$ elegendő kicsiny, akkor nyilvánvalóan okoskodás szerint, mint a mi-lyennel a maximum és minimum elméletében éltünk:

$\operatorname{Sgn}. \Delta_1 J = \operatorname{Sgn} \delta^2 J \kappa^2$, vagy mivel $\kappa^2 > 0$, $\operatorname{Sgn} \Delta_1 J = \operatorname{Sgn}. \delta^2 J$. te-hát lehetetlen az, hogy $\Delta_1 J$ is $\delta^2 J$ különböző előjelűek legyenek. - A mint áll ez $\Delta_1 J$-re nézve, úgy áll természetesen általánosan ΔJ-re nézve is, úgy hogy írhatjuk, : $\operatorname{Sgn} \Delta J = \operatorname{Sgn}. \delta^2 J$. - Ezeknek után már most a második variátió előjelére nézve kell megállapodáshoz jutnunk. Ha az extremalisok differentiál egyenleteit megoldva képezzük és ha az így nyert : $y = \psi(x \alpha \beta)$ értékeket a második variátió kifejezésébe behelyettesítjük, akkor egy jól meghatározott kifejezés lesz és mi most azzal a ne-héz feladattal állunk szemben, hogy megítéljük, hogy vajjon az előjövő határozott integrál bir-e állandó előjellel, vagy nem. - Ennek a feladatnak a megoldásánál mi Lagrange eljárását fogjuk követni, mely a következő okoskodáson alapszik. - A második variátióban szereplő 3 integrál kö-zül mindenek előtt a másodikat fogjuk figyelembe venni, tehát a követ-kezőt: $2 \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} \delta y \delta y' dx$ mivel: $2 \delta y \delta y' = 2 \delta y \frac{d \delta y}{dx} = \frac{d(\delta y^2)}{dx}$

azért a fenti integrálra célszerűnek mutatkozik a par-tiális integratió alkalmazása, mely szerint:

$$2 \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} \delta y \delta y' dx = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} (\delta y)^2 \right]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} (\delta y)^2 \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} \right] dx$$

Határfeltételeinknél fogva δy mindkét határon zérus és így az első kife-jezés elesik, úgy hogy a második variátió alakja lesz:

$$\delta^2 J = \frac{1}{2!} \int_{x_0}^{x_1} (F_1 \delta y'^2 + F_2 \delta y^2) dx \text{, a hol : } F_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}, \quad F_2 = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} \right)$$

Lagrange-nál az egyenletek most már abban állott, hogy azt a kifejezést, mely a 2^{ik} variátióban az integrál jel alatt szerepel, zérussal tette egyenlővé

sa elő", a mely szorzatnak egyik faktora legyen egy négyzet, a másik faktora pedig független a variációtól, úgy hogy ennek a második faktornak az előjelét meg lehessen határozni egyszerűen mindenkorra függetlenül a variációtól s ez által dönteni a második variáció előjelére nézve. Hogy a variációnak egy négyzetbe való szorulását elérje, a következőképen szokott eljárni. Legyen v egy tetszőleges folytonos függvény és képezzük a következő integrált:

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx}\left(v.(\delta y)^2\right) dx = \left[v.(\delta y)^2\right]_{x_0}^{x_1} = 0$$

Ha ezt az identicusan nullával egyenlő integrált a második variációhoz hozzá adjuk, ha:

$$2\delta^2 J = \int_{x_0}^{x_1} \left\{F_1 \delta y'' + F_2 \delta y' + \frac{d}{dx}\left(v.(\delta y)'\right)\right\} dx = \int_{x_0}^{x_1} \left\{F_1 \delta y'' + F_2 \delta y' + \frac{dv}{dx}\delta y' + v\delta y''\right\} dx$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} F_1\left[\delta y'' + \frac{2v}{F_1}\delta y \delta y' + \frac{F_2 + \frac{dv}{dx}}{F_1}\delta y^2\right] dx$$

Ez a kifejezés, mely az integrál jel alatt áll, már körülbelül úgy néz ki, mint egy teljes négyzet; és teljes négyzetté is lesz, ha: $\left(\frac{v}{F_1}\right)' = \frac{F_2 + \frac{dv}{dx}}{F_1}$ I.

Ez a feltétel teljesítendő, mivel v még egészen tetszőleges és hogy, ha ez a feltétel teljesül, akkor Lagrangenak tényleg sikerült elérnie azt, a mit akart, a mennyiben az integrál jel alatti kifejezés egyik faktora egy a variációtól független F_1 mennyiség, másik faktora pedig egy teljes négyzet: $2\delta^2 J = \int_{x_0}^{x_1} F_1\left(\delta y' + \frac{v}{F_1}\delta y\right)^2 dx$. Ebben az esetben tehát v-nek a meghatározására nézve a második variáció előjele meghatározza a második variáció előjelét; ha tehát F_1-nek állandó előjele van, akkor tudjuk, hogy a második variációnak is állandó előjele van és így extremummal van dolgunk, míg ellenkező esetben nincs extremum.

A mint látjuk, a dolog egészen azon fordul meg, hogy lehetséges-e v meghatározása az (I.) diff. egyenlettől, vagy pedig a mint rendesen kifejezni szokás, hogy meg van-e engedve a második variációnak ez a transformatio, azt kell tehát vizsgálnunk, hogy az (I.) diff. egyenlet az x_0 és x_1 intervallumban bír-e egyértelmű és folytonos megoldással; – ha bír, akkor a dolog el van intézve, ha nem bír, akkor ezen az úton nem sikerül a második variációnak előjelének a meghatározása. Hogy ezt a kérdést elintézhessük, célszerű lesz v-t, mint hányadost venni: $v = \frac{u}{\mu}$, hol u, egyértelmű, véges és folytonos

u pedig egyértékű, véges, folytonos és el nem tűnő függvénye az x-nek. Vezessük be v-nek ezt az értékét egyenletünkbe: $\frac{u_1^2}{u^2} = F_1\left(F_2 + \frac{u\frac{du}{dx} - u_1\frac{du}{dx}}{u^2}\right)$. Mivel u-t az $x_0 - x$ intervallumon belül el nem tűnőnek u^2 tételezzük fel, áthelyezésekkel, és így:

$$u_1^2 = u^2 F_1 F_2 + F_1(u\frac{du}{dx} - u_1\frac{du}{dx}),$$ azaz másképpen írva:

$$F_1 u\left(\frac{du}{dx} + F_2 u\right) - u_1\left(u_1 + \frac{du}{dx}F_1\right) = 0$$

Az u_1 és u függvény párt természetesen még bizonyos értelemben teljesen tetszőleges, választunk meg tehát u_1-t úgy, hogy $u_1 + \frac{du}{dx}F_1 = 0$ legyen, ekkor mivel $u \neq 0$, kell, hogy: $F_1\left(\frac{du}{dx} + F_2 u\right) = 0$ legyen, amiből levéve az imént felírt egyenletet, lesz:

$$F_1\left[\frac{d}{dx}\left(-F_1\frac{du}{dx}\right) + F_2 u\right] = 0.$$

Ha F_1 identice nulla volna, az $x_0 - x$ intervallumon belül, akkor a második parciális is identice nulla volna és akkor a harmadik variációt kellene vizsgálni, a mi legalább is időszerint lehetetlen, úgy hogy vizsgálatainknak csak akkor van értelme, ha $F_1 \neq 0$, a mikor is legutolsó egyenletünk a következőleg írható:

$$F_1 u - \frac{du}{dx}\cdot\frac{d.F_1}{dx} - \frac{d^2u}{dx^2}F_1 = 0 \quad (\overline{\text{II}}_1)$$

Arra az eredményre jutottunk tehát, hogy u ennek a másodrendű, homogén, lineáris diff. egyenletnek kielégítő, a mely diff.-egyenlet mint az $(\overline{\text{I}}_1)$ diff. egyenlet helyébe lép, a mennyiben a második variációnak a már említett transformációja nyilván, megvan engedve, ha ezen másodrendű homogén, lineáris diff. egyenletből u-nak egy olyan értéke, a mely az x_0 és x_1 határok közötti $\neq$ értékű, véges, folytonos és 0-tól különböző, míg ellenkező esetben a transformatio elvesztené értelmét.

A mi most ennek a másodrendű homogén, lineáris diff. egyenletnek az integrálját illeti, erre nézve a következőket kell megjegyezni. Az ilyen másodrendű homogén, lineáris diff. egyenlet általános integrálja két tetszőleges állandótól függ, és ezt az általános integrált nyerjük, ha két különös integrált ismerünk:

$u_1 = \psi_1(x)$, $u_2 = \psi_2(x)$, a hol $\frac{u_1}{u_2} \neq$ constans;

ezekből l. i. az általános integrál a következőleg adódik:

$u = c_1\psi_1(x) + c_2\psi_2(x)$, hol c_1 és c_2 két tetszőleges állandót jelent. – Így állván a dolog, a mi diff. egyenletünk általános integrálását is elvégzettnek lehet tekinteni, ha két ilyen partiális megoldás lehetséges, – Amde Jakobi kimutatta, hogy ennek a másodrendü diff. egyenletnek mindig megtudjuk találni két partiális integrálját, ha az ($\mathcal{L}$) diff. egyenlet megvan oldva, úgy hogy – mivel az ($\mathcal{L}$) diff. egyenlet, a másodikra való integrálás szolgálatakor már mindig megoldottnak tekinthető, azért Jakobi ezen tétel értelmében a másodrendü homogén, lineáris diff. egyenletünk általános integrálja kitüntethető. – A bizonyítás ez: Az ($\mathcal{L}$) diff. egyenlet így szólt:

($\mathcal{L}$) $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = G(x\,y\,y'\,y'') = 0$. – Ennek a diff. egyenletnek, mivel másodrendü, általános integrálja két tetszőleges állandótól fog függni, lesz tehát: $y = \psi(x\alpha\beta)$. Tegyük fel, hogy ez a kifejezés x-ben is az α β állandókban ismeretes. – Ha ekkor y-nak ezt az értéket G-be behelyettesítjük, akkor G identice eltünik. – Ebből következik természetesen, hogy G-nek partiális deriváltja α β szerint, tetszőleg szerint: $\frac{\partial G}{\partial \alpha} = 0$ és $\frac{\partial G}{\partial \beta} = 0$. – Számítsuk ki e két kifejezést: $\frac{\partial G}{\partial \alpha} = \frac{\partial G}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial G}{\partial y'}\cdot\frac{\partial y'}{\partial \alpha} + \frac{\partial G}{\partial y''}\cdot\frac{\partial y''}{\partial \alpha}$, hol: $\frac{\partial y'}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)$; $\frac{\partial y''}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) = \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)$, továbbá:

$\frac{\partial G}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]$, megjegyezve azt, hogy itt a 3-szoros diff. hányados-ban a differentiálás sorrendje nem cserélhető fel, mivel x és y nem függetlenek egymástól. – Alakítsuk át egy kissé e kifejezést: $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y'} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y'}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}$

tehát: $\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right] = \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y \partial y'} + \frac{\partial^3 F}{\partial y^2 \partial y'}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{\partial^3 F}{\partial y \partial y'^2}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'}\right)$ úgy, hogy:

$\frac{\partial G}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'}\right) = F_2$ Vegyük most G-nek partiális diff. hányadosait: y' szerint: $\frac{\partial G}{\partial y'} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} - \frac{\partial}{\partial y'}\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right] = \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y} - \frac{\partial}{\partial y'}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y'} + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}\right] =$

$= \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\right) - \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\right) = -\frac{dF_1}{dx}$ és végül

$\frac{\partial G}{\partial y''} = \frac{\partial^2 F}{\partial y'' \partial y} - \frac{\partial}{\partial y''}\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right] = -\frac{\partial}{\partial y''}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y'} + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}\right] =$

$= -\left\{\frac{\partial^3 F}{\partial y'' \partial x \partial y} + \frac{\partial^3 F}{\partial y'' \partial y \partial y'}\cdot y' + \frac{\partial^3 F}{\partial y'' \partial y'^2}\,y'' + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\right\} = -\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} = -F_1$

A többi tagok kiesnek, mivel F-ben: y'' már nem szerepel. – Helyettesítsük be kifejezéseket: $\frac{\partial G}{\partial x}$ egyenletébe, akkor lesz:

$\frac{\partial \eta}{\partial \alpha} = F_2 \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{d F_1}{dx} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right) - F_1 \cdot \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)$, mely kifejezés, mint mondottuk is-
dentice eltünik, ha η helyett y-t irunk.. Hasonlitsuk most össze a kifejezést a (II) ho-
mogén lineáris másodrendü lineáris differential egyenlettel, a két egyenlet csak
annyiban különbözik egymástól, hogy $\frac{\partial y}{\partial \alpha}$ helyett ott u áll, ügy, hogy azt mond-
hatjuk, hogy, ha $u = \frac{\partial y}{\partial \alpha}$, akkor a mi (II.) másodrendü homogén lineáris dif-
ferential egyenletünk identice teljesül akkor $\frac{\partial y}{\partial \alpha}$ annak a differential egyenlet-
nek egy megoldását képezi.. Ugyanazt a számitást, a mint α-ra nézve elvégez-
tük, elvégezhetjük a másik állandóra β-ra nézve is, tehát $\frac{\partial y}{\partial \beta}$ szintén egy megol-
dása az egyenletnek és épen ebben áll Jakobi tétele, a mely szerint t.i. ha az (L)
differential egyenletnek az általános integrálját, $y = \psi(x, \alpha \beta)$ - t felállitottuk,
akkor ennek a ψ-nek a két tetszőleges állandó szerint való parciális derivált-ja,
az (II) homogén lin. differential egyenletnek két specziális integrálját szolgál-
tatja.. Az a kérdés most még, hogy vajjon e két integrálnak hányadosa nem
állandó-e, mert, ha a hányados állandó, akkor csak egy integrálunk volna.
A két specziál integrál a következő: $\psi_1 = \frac{\partial y}{\partial \alpha} = \frac{\partial \psi}{\partial \alpha}$; $\psi_2 = \frac{\partial \psi}{\partial \beta}$
Kérdés lehet-e ezek hányadosa állandó; ha $\psi_2 : \psi_1$ állandó, akkor diff. quot.:
$\frac{\psi_1 \psi_2' - \psi_2 \psi_1'}{\psi_1^2} = 0$ és mivel a nevező nem identice végtelen, kell, hogy:
$\psi_1 \psi_2' - \psi_2 \psi_1' = 0$ legyen.. Vajjon lehetséges-e ez?
A felirt egyenlet más alakban:
$\frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \psi}{\partial \beta}\right) - \frac{\partial \psi}{\partial \beta} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \psi}{\partial \alpha}\right) = \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \psi'}{\partial \beta} - \frac{\partial \psi}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \psi'}{\partial \alpha}$.. Kajszerünk
most: $\frac{\partial \psi'}{\partial \psi}$-t megjegyezve, hogy itt ügy ψ'-t, mint ψ-t csakis mint az
α és β függvényeit fogjuk tekintem.. $\frac{d\psi'}{d\psi} = \frac{\frac{\partial \psi'}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial \psi'}{\partial \beta} d\beta}{\frac{\partial \psi}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial \psi}{\partial \beta} d\beta}$ ha
most a kérdéses kifejezés null volna, akkor ez a hányados független volna: $d\alpha$-
tól és $d\beta$-tól, t.i.: pl. ügy lehetni feltenni: $\frac{\frac{\partial \psi'}{\partial \alpha} \cdot d\alpha + \frac{\frac{\partial \psi'}{\partial \beta}}{\frac{\partial \psi'}{\partial \alpha}} d\beta}{\frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \cdot d\alpha + \frac{\frac{\partial \psi}{\partial \beta}}{\frac{\partial \psi}{\partial \alpha}} d\beta}$.. —
Ugyhogy hányadosunkat ügy le-
hetne feltenni, hogy: $\frac{d\psi'}{d\psi} = \text{függv.}(\alpha \beta)$,
a mi annyit jelentene, hogy: $d\psi = 0$ és $d\psi' = 0$ arra: $\psi = \text{const.}$ $\psi' = \text{const.}$
egymásnak következtetménye, tehát, hogy: $\psi' = \Phi(\psi)$ a függvény értel-

mérésesszerint.- Ámde: $\psi' = \frac{d\psi}{dx}$ és így lehetetlen, hogy $\psi(\alpha\beta x)$-nak a függvénye legyen, mert a feltűnt elsőrendű diff. egyenlet megoldásánál nem szerepelhet két tetszőleges állandó, hanem csak egy, ψ pedig két tetszőleges állandót tartalmaz. Ebből következtethető, hogy: $\frac{d\psi}{d\psi}$ nem lehet tiszta csak α-nak és β-nak a függvénye, tehát a keresztes kifejezés nem lehet null, ψ_2 és ψ_1 hányadosa nem lehet állandó s ennélfogva a (II.) másodrendű homogén lineáris diff. egyenletnek az általános integrálja így írható:

$u = C_1 \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\alpha} + C_2 \frac{\partial\psi}{\partial\beta}$. Ezzel az u meg van határozva, úgy hogy tényleg bebizonyult, hogy, ha az extrémalisok diff. egyenlete meg van integrálva, akkor tétovatlanul feltalálja imi a (II.) diff-egyenlet általános integrálját.-

Az a kérdés most már, hogy vajjon meglehet-e határozni a C_1 és C_2 állandókat úgy, hogy a velük előállított u az x_0 és x_1 intervallumon belül valós folytonos és $\neq 0$ legyen.. Ez természetesen esetről-esetre külön-külön döntendő el.- Minthogy külön vizsgálatot tegyünk annak megítélése, hogy a szokásos stabilitásmódszer élve - a transzformáció megvan-e engedve.- Ha ez a vizsgálat el van végezve, akkor már annyira vagyunk, hogy a második variációnak az alakját ismerjük, t.i.: miután bevezetve a $\delta^2 J$ kifejezésébe az u-t, mivel $u = C_1 \frac{\partial\psi}{\partial\alpha} + C_2 \frac{\partial\psi}{\partial\beta}$ és $u_1 = -F_1\left[C_1 \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}\right) + C_2 \frac{d}{dx}\left[\frac{\partial\psi}{\partial\beta}\right]\right]$

ezért: $v = -\frac{F_1}{F_2} \frac{\frac{\partial\psi'}{\partial\alpha} + \frac{C_2}{C_1} \cdot \frac{\partial\psi'}{\partial\beta}}{\frac{\partial\psi}{\partial\alpha} + \frac{C_2}{C_1}\frac{\partial\psi}{\partial\beta}}$. Itt láthatjuk, hogy v tényleg csak egy tetszőleges állandótól függ, t.i.: $\frac{C_2}{C_1}$-től, a miért úgy is kell lennie, mivel v egy elsőrendű diff. egyenletnek teszi eleget.-

Ha a transzformáció megvan engedve, akkor v kifejezésének az x_0 és x_1 intervallumon belül valósnak és folytonosnak kell lennie, úgy, hogy most már minden F_1-től függ, mely függvény a következő kifejezésből volt értelmezve: $F_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}$.. Tegyük fel, hogy (1) $F_1 \neq 0$ az x_0-x_1 intervallumban.- Ha $\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}$ és állandó, akkor F_1 stb. van lévén egy folytonos függvény négyzetével $\delta^2 J$ integrál jel alatti része pozitív, tehát egyszersmind

mind nagyra $\delta^2 J > 0$ s emiatt $\Delta J > 0$, úgy hogy integralunk egy minimum. Ha ellenkezőleg (2) $\overline{\eta} < 0$, akkor nyilvánvalóan $\delta^2 J < 0$, $\Delta J < 0$ és így integralunk egy max. lesz. — Tegyük tehát, hogy ha a transformatio meg van engedve, azaz hogy ha a v az x_0-x_1 intervallumon belül, mint való és folytonos függvény adódik ki, akkor az ujabb vizsgálat $\bar{\eta}$-nek az előjelére van visszavezetve, mert ennek előjele van-e x_0 és x_1 között. — Ha az előjel állandó, akkor van extremum - és pedig max. v. min. a szerint, a mint $\delta^2 J < 0$, vagy $\delta^2 J > 0$ ha pedig nem állandó az előjel, akkor követve módszerünket az ext. létezéséről nem lehet eldönteni.

Az itt előadott elméleti kriteriumot egyszerű módon alkalmazhatjuk azon példákra, a melyeket előadásaink elején felsoroltunk, úgymint a legkisebb forgási és a Bachystochrone esetére a mi azonban ezen kriterium általánositását illeti oly variatiós számitási problémákra, a melyeknél magasabbrendű differentialegyenletek teljesülnek, erre nézve az irodalomban sőt tettek ugyan kisérletek, de ezek positiv eredményre ezideig nem vezettek. — Egyáltalában mondhatjuk, hogy az általunk levezetett kriterium igen szük körü, majdnem olyannak tünik fel, mintha néhány specialis esetre, néhány példa számára volna kitalálva, és a legtöbb esetben vagy csak igen nehezen vagy pedig épen nem alkalmazható, úgyannyira, hogy az ujabb időben a második variatio vizsgálatát teljesen abba is hagyták, és arra törekedtek, hogy az első variatió vizsgálatával az extremalisok differential egyenletét megoldva másféle direct segédeszközökkel vizsgálják meg, hogy vajjon létezik e maximum vagy minimum. —

Az ilyféle vizsgálatoknak, eltekintve attól, hogy fontosak a variatio számitására nézve, még egy komolyabb czéljuk is van. Tegyük fel t. i. hogy adva van a közvetett variatio számitási problema. Extremummá

lecsó az:

$J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx$ - integrál, azaz meghatározandó y olyképen hogy az max. illetve minimum legyen. Teljes bizonysággal állíthatjuk, hogy ha egy ilyen $y = \varphi(x)$ extremum görbe létezik, akkor ennek a görbének az extremalisok közé elő kell fordulnia, tehát ennek a görbének a $G=0$ diff.-egyenletnek eleget kell tennie. Amire most már tudjuk, hogy egy ilyen diff. egyenlet megoldása általánosan szólva igen nehéz feladat, úgy hogy minden könnyebb szem görbe existentiáját kimutatni, a mely az adott határfeltételeknek eleget tesz és az int.-t extremummá teszi, mint az (L) diff. egyenletek az általános int.-t elvégezzük. Épen azért az olyan eljárás, mely közvetlenül egy extr. görbét szolgáltat az ilyen int-ra nézve, felfogható, mint egy olyan eljárás, melynek révén a $G=0$ diff. egyenlet egy integrálját nyerjük, úgy hogy ezzel új módszert nyertünk a diff. egyenletek megoldására.

Különösen fontos ez a felfogás, ha az egyszerű int.-tól átmegyünk a kettős integrálokra. Legyen pl. ez a kettős int.:

$\iint F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) dx\,dy$ az a kérdés, hogy vonatkoztatva bizonyos C zárt görbére, legyen-e $\frac{1}{2}$-t, mint x és y függvényt úgy megválasztani, hogy ez az integr. egy extremum legyen. Itt is tökéletesen úgy kell eljárnunk, mint az egyszerű esetben. Felállítjuk az első variatio kifejezését, ennek el kell tűnnie, és ebből kiadódik egy (L) egyenlet, a mely most természetesen a két független változó szerinti diff. - egy quotienseket tartalmazza, ez tehát egy parciális diff.-egyenlet lesz. Ha van extr. akkor ez egy felületet, szolgáltat, mely a C menten bizonyos határfeltételeknek tesz eleget. Amire itt is úgy van a tekintet, hogy az extr. meghatározása sokkal egyszerűbb, mint az (L) part. diff. egyenletnek bizonyos határfeltételek mellett való megintegrálása, úgy h. az extr. felület kiszámítása itt is az (L) part. diff. egyenlet integrálását kívánja meg a helyett, hogy



ebből az egyenletből az extremumra vonjunk következtetést.

Riemann doktori dissertatiójában szerepel egy ilyen kettős integrál, a melynek az a tulajdonsággal bir, hogy megfelel neki egy: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ diff. egyenlet oly formán, hogy ha a peremen integrál egy minimum, akkor ki van mutatva erre parciális diff. egyenlet oly megoldásainak az exis-tentiája, a melyek az erre C görbemenkénti határfeltételeket elégí-tik. Másnóvel Riemann ennek az extremumnak az existentiá-ját magától értetődő dolognak tévén jel is ezre alapítja a parciális diff. egyenletek megoldásainak az existentiáját is.

Ez a következtetés nyilván valóan következmény alkalmazható-nam csak akkor, ha a minimális felület existentiáját kimutatni sike-rült; és tényleg az újabb időben egész függetlenül ettől a diff. egyenlet-től sikerült kimutatni, hogy bizonyos feltételek mellett mindig lé-tezik egy extremum. Ez az eljárás határozottan a parciális diff. egyen-letekre nézve nagyon fontos, a mennyiben ezen egyenletek integrálá-ját közvetlenül szolgáltatja bizonyos feltételek mellett.

Végül még megemlítjük, hogy a legjobb, magyarországban egyetemi tan-könyv a Braunschweigban Vieweg-nál kiadott Kneser Adolf: „Lehrbuch der Variationsrechnung" – ja, melyet ezen bevezetés után tanulmányozhatunk. –

– Vége –

M. Kir. Ferenc József
Tudományegyetem
Geometriai Intézet
Könyvtára
Szakl. sz.: 360.
Címtár:

