h-8908
h-8908-4

Szabó György
I. évf.

Szabó György
Szász Antal
tanár jelölt

Kolozsvár 904/5 évben.
Prefect ült 57 szám. a.

Analitika geometria

előadja:

Dr. Vályi Gyula

Kolozsvár
1901.

...dja: Roth Ágoston.

...a 24 ft.

V-22-5

1912-4

~~8068-4~~

Az analytika geometria fogalma és módszere.

A térben a három legegyszerűbb geometriai alakzat a pont, egyenes és a sík. Ezt a három alakzatot geometriai elemeknek nevezzük. A geometriai elemek tulajdonságainak tanulmányozásánál két módszer használatos. Az első az analytikai módszer, a mely számokkal, a második a synthetikai vagy projectiv módszer, a mely szerkesztéssel oldja meg a felmerülő kérdéseket. Amaz az analytika, ez pedig a synthetica vagy projectiv geometria módszere. Utóbbit a helyzet geometriájának is nevezzük (geometria situs), ha különös súlyt fektetünk arra, hogy számokra ne hivatkozzunk.

Mi tárgyalásainkban az analytikai módszert fogjuk használni. Az analyt. geometria azon alapszik, hogy az elemek helyzetének meghatározására számokat használunk, melyeket coordinátáknak nevezünk. Minden egyes elem határozott coordinata értékeket nyer, a melyek csakis egy elemet határoznak meg s fordítva minden coordinata értékcsoportnak megfelel egyetlen egy elem. Tudjuk pl. egy pont tel-

jisen meg van határozva, ha minden coordinátáját ismerjük, vagy ha elegendő adatunk van, hogy azokat kiszámíthassuk. Sokszor annyi feltételünk van egy elemre nézve, hogy azok végtelen sok elemet határoznak meg. Ilyenkor az összes feltételeket kielégítő elemek geometriai helyét adtuk. Az ily geometriai hely analytikailag azzal nyer kifejezést, hogy az elem coordinátái több egyenletet elégítenek ki. Ezen egyenletekből egyetlen egy egyenletet alkotunk, melynek azután a geom. hely összes elemei eleget tesznek és fordítva.

Valahányszor analytikailag oldunk meg egy geometriai kérdést, ezt három lépésben tesszük meg:

1.) A felvetett geometriai kérdést az analysis nyelvére fordítjuk át, analytikai formába öltjük, a mely lehet egyenlet vagy egyenlőtlenség;

2.) a nyert analytikai kifejezést átalakítjuk tiszta algebrai eszközökkel.

3.) s az így nyert analytikai eredménynek kiolvassuk geometriai értelmét, vagyis az analytikai eredményt átfordítjuk a geometriai nyelvére.

A második lépésénél vagyis az analytikai tárgyalásnál kisebb-nagyobb fokokat különböztetünk meg, ahhoz képest, hogy mily terjedelemben vesszük igénybe az analysis eszközeit. Mi itt csak az algebrai egyenleteket és pedig az első és második fokú algebrai egyenleteket vesszük igénybe.

Az elemi geometriai alakzatok.

Ha vizsgáljuk a három geom. elem = pont, egyenes és sík kölcsönös viszonyát, észrevesszük, hogy egyik faj egy eleme végtelen sokat tartalmaz a másik fajból. Egy egyenesen végtelen sok pont, egy síkon végtelen sok egyenes fekszik; egy ponton végtelen sok egyenes, végtelen sok sík megy át, egy egyenesen át végtelen sok sík megy. Ezt a viszonyt, mely szerint egyik faj elemei a másik faj egy elemén fekszenek vagy annak egy elemén mennek át, nevezzük <u>összetartozási viszonynak</u>. Ilyen három van: pont és egyenes, pont és sík, egyenes és sík között, a mennyiben t. i. lényegileg ugyanaz a viszony létezik pl. e pont és a rajta átmenő egyenes, valamint az egyenes és a rajta fekvő pont között.

Két különböző faju elem ily viszonya azzal is kifejezhető, hogy a két elemet birtokos viszonyba hozzuk és mondjuk: egyenes pontjai (pont egyenesei), sík pontjai (pont síkjai), sík egyenesei (egyenes síkjai). Az elemi geometria csak a három első viszonyt használja [egyenes pontjai; sík pontjai, sík egyenesei], mi itt a másik hármat is tekintetbe vesszük, mint pont egyeneseit, pont síkjai, egyenes síkjai.

Tekintsük így a három geom. elem összetartozási viszonyát, áttérhetünk az elemi geometriai alakzatokra, melyek ezen három geom. elem combinatiójából keletkeznek.

Ezen elemi geometriai alakzatok három fokot mutatnak fel.

I. Az első foku alapalakzatok: a pontsor, siksor és a sugársor

1, Az egyenesen fekvő pontok összeségét pontsornak nevezzük. Az egyenes a pontsor hordozója vagy tartója, a pontok a pontsor elemei.

2, az egyenesen átmenő síkok összeségét siksornak nevezzük. Az egyenes a siksor tengelye, a síkok az elemei.

3, a sík egy tetszőleges pontján át végtelen sok egyenest vagyis sugarat húzhatunk a síkban; ezsugarak sugársort alkotnak; az a pont, melyen a sugársor minden sugara átmegy, a sugársor középpontja vagy tartója, a sugarak az elemek.

Az elsőben a változó elem a pont, a másodikban a sík, a harmadikban az egyenes.

Ezen három elsőfoku alapalakzat közös vonása, hogy mindegyikben csak egyféle elem van jelen végtelen nagy számmal, pontsorban végtelen sok pont stb. Továbbá mindháromnak egy coordinatav szükséges és elegendő a változó elem teljes meghatározására. E miatt egy dimensiós elsőfokú alapalakzatoknak is nevezzük őket.

II. Másodfokú geom. alapalakzatok: a síkrendszer és a pontrendszer.

1, Vegyünk tekintetbe egy síkot, mint a benne fekvő pontok és egyenesek összeségét. Minden pontja egy sugársor centruma, minden egyenese egy pontsor tartója. Ebben a síkban tehát végtelen sok elsőfoku alakzat van: vég-

telen sok pontsor és végtelen sok sugársor. Ha mint pontok és sugarak összeségét tekintjük, síkrendszernek nevezzük, ha csak a pontokra vagyunk tekintettel, pontsiknak, ha csak a sugarakra = sugársiknak.

2., Vegyünk fel a térben egy pontot; ezen át végtelen sok egyenest és síkot lehet lekteteni. Minden egyenes, mely e ponton átmegy, egy síksor tengelye, minden síkban, mely e ponton át megy, egy sugársor fekszik, melynek centruma a pont. Tehát a pont végtelen sok sugársornak és síksornak hordozója. Tehát ebben az alakzatban is végtelen sok elsőfoku alakzat van. Ha tekintettel vagyunk úgy a rajta átmenő egyenesekre, mint síkokra = neve pontbeli rendszer, vagy röviden pontrendszer, ha csak az egyenesekre, akkor sugárpont, ha csak a síkokra, akkor síkpont. Erről a pontbeli rendszerről úgy szerzünk áttekinthető geometria képet, hogy a pont körül gömböt irunk, melynek felületét a rendszer egy egyenese két diametralisan szembenfekvő pontban, egy síkja nagy főkörben metsz. A gömbfelület pontjai és főkörei teljesen jellemzik helyzetüzeket az alakzat elemeit.

A síkbeli és pontbeli rendszer közös vonásai, hogy mindegyikben kétféle elem van végtelen nagy számmal, abban pont és egyenes, ebben egyenes és sik; továbbá mindkettőnél a változó elem (pont, egyenes, sik) meghatározásaira két coordinata szükséges. Ezért két dimenziós másodfokú alakzatoknak is nevezzük.

III. Harmadfokú alakzat a tér, mint pontok, egyenesek

és síkok összessége. Bemne a változó elem meghatározására három coordináta szükséges, azért három dimenziós térnek nevezzük.

A fenti sorrendben fogjuk most tanulmányozni a geom. alakzatokat.

Egy dimenziós alakzatok. A pontsor.

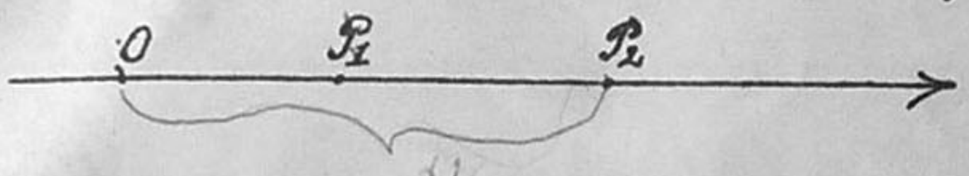
Legelső feladatunk a pontsor egy tetszőleges pontjának helyzetét a pontsorban meghatározni. Az említettek igazolásául látni fogjuk, hogy erre elegendő egy coordinata. Többmódszerünk van.

Az első abban áll, hogy felveszünk a pontsor tartóján, az egyenesen egy tetszőleges kezdő

pontot, O, és megállapodunk abban, hogy ebből kiindulva, melyik a positiv haladási irány, jelölje azt a nyíl iránya, továbbá felveszük az OE hosszegységet, hogy azzal az egyenes egy tetszőleges vonaldarabjának hosszúságát megmérve, azt számmal fejezhessük ki. Ha P a meghatározandó pont, az OP vector iránya vagy megegyezik a positiv iránnyal, vagy azzal ellenkező. Mindenesetre létezik egy x. reális szám, mely az OE hosszegységre vonatkozólag teljesen jellemzi az OP vectort, tehát a melynek abszolut értéke $|x| = \frac{OP}{OE}$, előjele pedig + vagy –, a szerint, a mint OP vector positiv vagy negativ irányu. Ezt az x számot

nevezzük a P pont coordinatájának és írjuk $OP=x$. Ha a P pont az egyenesen positiv irányban végighalad, coordinátája nő $(-\infty)$-től $(+\infty)$-ig.

Ha két pontot veszünk fel a pontsorban, P_1 és P_2, akkor a P_1P_2 vector positiv vagy negativ irányú, a szerint, a



mint az egyenesen positiv értelemben haladva, először találjuk a P_1 illetőleg P_2 pontot, azután a P_2 illetőleg P_1 pontot, a miből látható, hogy, ha P_1 coordinátája x_1, P_2 coordinátája x_2, az x_2-x_1 különbség teljesen jellemzi a P_1P_2 vectort úgy nagyságra, mint irányra nézve. Mert ha P_1 és P_2 az O ugyanazon oldalán fekszik, tehát x_1 és x_2 mindkettő positiv, vagy mindkettő negativ, akkor az (x_2-x_1) abszolut értéke (vagyis P_1P_2 hossza) annyi mint a nagyobbik szám abs. értéke minus a kisebbik szám abs. értéke, előjele pedig az első esetben positiv, ha $|x_2|>|x_1|$, negativ, ha $|x_2|<|x_1|$, a mi teljesen egyezik a P_1P_2 vectorirány definitiójával, ha pedig P_1 és P_2 az O különböző oldalán fekszik, (x_2-x_1) abszolut értéke annyi, mint $|x_1|+|x_2|$, jele pedig egyezik a kivonandó jelével vagyis $+$, ha $x_2\geq 0$, $-$, ha $x_2<0$, de akkor $x_1<0$, a mi teljesen egyezik a vectorirány ~~analogiájával~~ definitiójával. Tehát $P_1P_2=x_2-x_1$.

Világos, hogy $P_2P_1=x_1-x_2$, tehát $P_1P_2+P_2P_1=0$, vagyis $P_2P_1=-P_1P_2$. Vegyünk most három pontot a pontsorban, P_1, P_2, P_3, coordinatáik x_1, x_2, x_3, akkor az előbbiek szerint

$$\begin{array}{l|l} \mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3 = x_3 - x_2 & x_1 \\ \mathfrak{P}_3\mathfrak{P}_1 = x_1 - x_3 & x_2 \\ \mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2 = x_2 - x_1 & x_3 \end{array}$$

tehát $\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3 + \mathfrak{P}_3\mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2 = 0$ de ugyancsak 0 összeget kapunk, ha az elsőt x_1, a másodikat x_2, a harmadikat x_3-al szorozzuk és összeadjuk, mert ekkor a jobboldalon minden kétlős szorzat kétszer fordul elő ellentett jellel, és miután $x_1 = O\mathfrak{P}_1$, $x_2 = O\mathfrak{P}_2$, $x_3 = O\mathfrak{P}_3$, áll az egyenlet:

$$O\mathfrak{P}_1 . \mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3 + O\mathfrak{P}_2 . \mathfrak{P}_3\mathfrak{P}_1 + O\mathfrak{P}_3 . \mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2 = 0$$

vagyha a tetszőleges $O, \mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3$ négy pontot megfelelőleg A, B, C, D-vel jelöljük, úgy az ezek által meghatározott 6 vector közt ez a relatio áll:

$$B\mathfrak{l} . D\mathfrak{k} + \mathfrak{l}A . \mathfrak{k}B + AB . D\mathfrak{l} = 0$$

~~és (-1)-el átszorozva:~~

$$B\mathfrak{l} . AD + \mathfrak{l}A . B\mathfrak{k} + AB . \mathfrak{l}\mathfrak{k} = 0$$

Hogy a relatiót jolban megtarthassuk, állapodjunk meg abban, hogy az egyenesen positiv haladás közben következő sorrendben találjuk a pontokat: $A, B, \mathfrak{l}, \mathfrak{k}$, és most úgy irjuk fel egyenletünket, hogy csak positiv irányu vectorok az

A	B	C	D

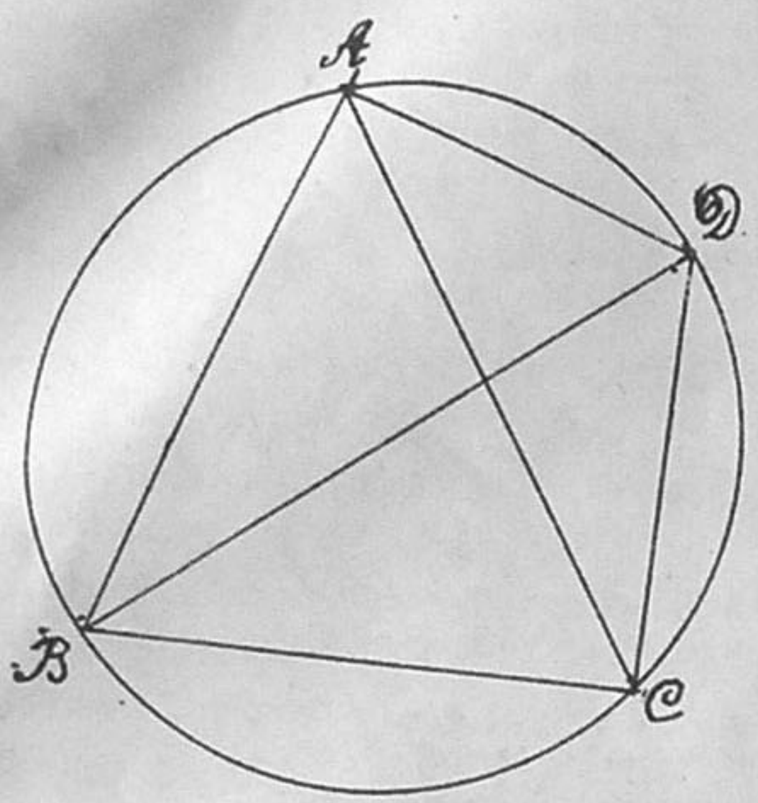
repeljenek benne, tehát esetén a $\mathfrak{l}A$ vector helyett irunk $(-AC)\mathfrak{l}$ akkor

$$AB . C\mathfrak{k} + A\mathfrak{k} . B\mathfrak{l} = A\mathfrak{l} . B\mathfrak{k}$$

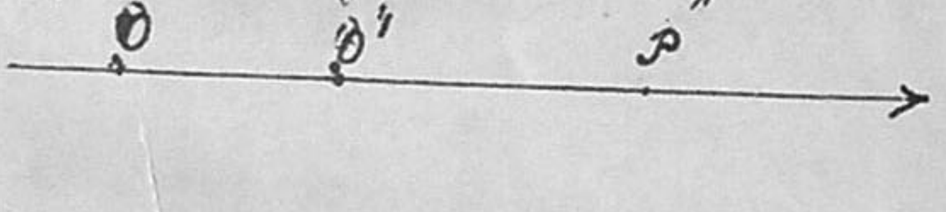
Az $A\mathfrak{k}$ külső, a $B\mathfrak{l}$ belső, az AB és $C\mathfrak{k}$ szélső, az $A\mathfrak{l}$ és $B\mathfrak{k}$ pedig átlói vectoroknak is nevezetnek, úgy hogy a tétel igy is kifejezhető: a szélső vectorok szorzata, meg a belső és külső

vector szorzata annyi mint az átlói vectorok szorzata.

Ez a tétel emlékeztet a Ptolemaeus tételére, mely szerint a körbe irt négyszögben a szembenfekvő oldalak szorzatainak összege egyenlő az átlók szorzataival. Lényeg a mi tételünk nem egyéb, mint a Ptolemaeus tételének határesete, midőn a kör sugara végtelenbe növekedik.



Lokszor szükséges a coordinatarendszert megváltoztatni azáltal, hogy új kezdőpontot veszünk fel. Kérdés, hogyan változik azáltal a pont coordinátája? Legyen O a régi, O' az új kezdőpont. P pont régi coordinátája x, új coordinátája x'.



Az O, O', P pontok között ez az összefüggés

$$OO' + O'P + PO = 0$$

vagyha $OO' = a$, $a + x' - x = 0$

tehát $x = a + x'$, $x' = x - a$

Ez az összefüggés a régi és az új coordináta között. a, az új kezdőpont coordinatája a régi rendszerben ellentétje a régi kezdőpont új coordinatájának, mert $OO' = -O'O$.

Az eddigiekben tehát láttuk, hogy a ponthoz a változó pont coordinatáját az által vehetjük hozzárendelt, hogy megadjuk a kezdőpontot, hosszúságegységet és a positiv haladási irányt. Az utóbbi két adat egybe is foglalható, ha megad-

jük az egységpontot, vagyis azt a pontját a pontsornak, mely-
nek távola a kezdőponttól a hosszegység. O E ugyhogy az OE
vector iránya pozitiv. Ezzel

megoldjuk az OE hosszegységet.
Ekkor nyilvánvaló $\frac{OP}{OE} = x$ a P pont coordinátája, mely +, ha E és
P az O egyoldalán, és −, ha különböző oldalán fekszenek. A coor-
dináta ezen definitiója segélyével könnyü azt a feladatot is
tárgyalni, hogy miként változik a coordináta, ha változik az
egységpont. Legyen az uj egységpont E', akkor az uj coordináta

$$x' = \frac{OP}{OE'} = \frac{OP}{OE} \cdot \frac{OE}{OE'} \text{ , de } \frac{OP}{OE} = x, \text{ és ha } \frac{OE'}{OE} = \varepsilon \text{ , akkor}$$

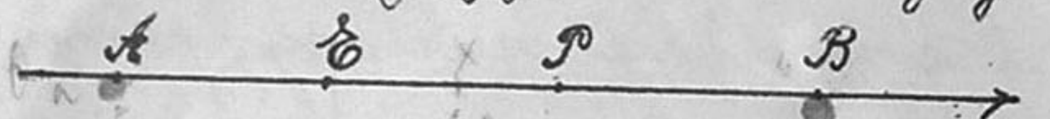
$$x' = \frac{1}{\varepsilon} \cdot x \quad \text{azaz} \quad x = \varepsilon x'$$

Tehát az egységpont változásával úgy változik a coordináta,
hogy megszorzódik egy constanssal, mely annyi mint a régi és
uj hosszegység viszonyszáma $\frac{OE}{OE'} = \frac{1}{\varepsilon}$. Ha az uj egységpont a
O pont ellenkező oldalán fekszik ejannyira O-tól, mint a ré-
gi egységpont, akkor $\frac{OE}{OE'} = -1$ lévén $x' = -x$.

Ez az első módszer a pontsorban a pont helyének
meghatározására, nevezetik távolsági coordináta mód-
szerének.

Egy másik módszer a változó pont helyének meghatá-
rozására a következő. Felveszünk az egyenesen két fix pontot,
A és B; A első, B második alappont és megadjuk jellel e-
gyütt a változó P pontnak A és B alappontoktól mért tá-
volsági viszonyait $\frac{AP}{PB} = \lambda$. Ezt az egyszerü viszonyszámot ne-
vezzük a P pont coordinátájának. Győződjünk meg, hogy ez

a viszonyszám tényleg coordináta jellegel bír. Az első megkövetelt tulajdonság, hogy t.i. minden P pontnak a pontsorban csakis egy λ viszonyszám feleljen meg, azonnal belátható, hogy meg van, mert ha P-t megadom, az $\frac{AP}{PB}$ arány jól meghatározott értékkel bír. Mielőtt a fordítottról is meggyőződnénk, hogy t.i. minden előtt λ arányszámhoz egyetlen egy P pontja tartozik a pontsornak, lássuk előbb, hogy miképen változik λ értéke és jegye, ha P végighalad a pontsorban. Látható, hogy



az AB vonaldarabon fekvő P pontokra nézve $\lambda > 0$, mert AP és PB egyező irányú. Az AB vonaldarabon kívül fekvő P pontokra nézve $\lambda < 0$, mert AP és PB ellentett irányú vectorok. A mi λ nagyságát illeti, ha E az AB vonaldarab felező pontja, látható, hogy A-ban $\lambda = 0$, AE darabon $\lambda < 1$, E-ben $\lambda = 1$, EB darabon $\lambda > 1$, B-ben $\lim \lambda = \infty$. A előtt $|\lambda| < 1$, B után $|\lambda| > 1$ és jegye mindkét esetben negatív.

$\lambda > 0$ olvasandó: λ pozitív

Most győződjünk meg arról, hogy λ minden értékéhez csakis egy pontja tartozik a pontsorban. E végett vegyük segítségül a régi távolsági coordinátákat. A kezdőpont legyen O és erre vonatkozólag A coordinátája a, B coordinátája b, P ponté x, akkor $\frac{AP}{PB} = \lambda$ definitio értelmében $\frac{x-a}{b-x} = \lambda$, tehát $x - a = \lambda b - \lambda x$ és ebből

$$x(1+\lambda) = a + b\lambda, \qquad x = \frac{a + b\lambda}{1+\lambda}$$

$x - a = \lambda(b - x)$

és így, ha $\lambda = t$ megadjuk, x, tehát maga P is egyértékűleg meg van határozva; tehát λ tényleg coordinata jellegű. Csak egy kivétel látszik, mikor t.i. $\lambda = -1$, mert ekkor $x = \infty$, azaz P

végtelenben van. Hogy ezt ne kelljen kivételnek tekintenünk, az egyenesről való képzetünket kiegészitjük azzal, hogy az egyenesnek végtelen távoli pontot is tulajdonitunk s pedig csak egyet; noha két irányban lehet az egyenesen végtelenbe menni; ezt pedig azért, hogy érvényben maradjon az a tétel, miszerint egy adott λ-hoz csak egy pont tartozik a pontsorban. A végtelen távoli ponthoz tartozó $\lambda = -1$ és fordítva. Igy most egész általánosan mondhatjuk, hogy a pontsor minden pontjához egyetlen egy λ érték, s forditva minden λ értékhez egyetlen egy pontja tartozik a pontsornak.

A fenti felfogás révén az egyenes igy jelenik meg előttünk, mint egy zárt vonal, melyen ha pl: A-ból kiindulva bizonyos irányban állandóan tovább haladunk, az ellenkező oldalon ismét visszaérkezünk A-hoz. Ha pl. az AB irányban haladunk, λ következőleg változik: A-nál $\lambda = 0$, innen a pozitiv számok során keresztül nő mignem B-nél $\lambda = +\infty$; B után λ mindjárt átcsap $(-\infty)$ be s (algebrailag) folyton nő a negativ számok során át, mignem a végtelen távoli pontban $\lambda = -1$. Innen λ tovább nő (algebrailag) miközben P az ellenkező oldalon közeledik A felé a negativ valódi törtek során át, mig végre A-ban $\lambda = 0$.

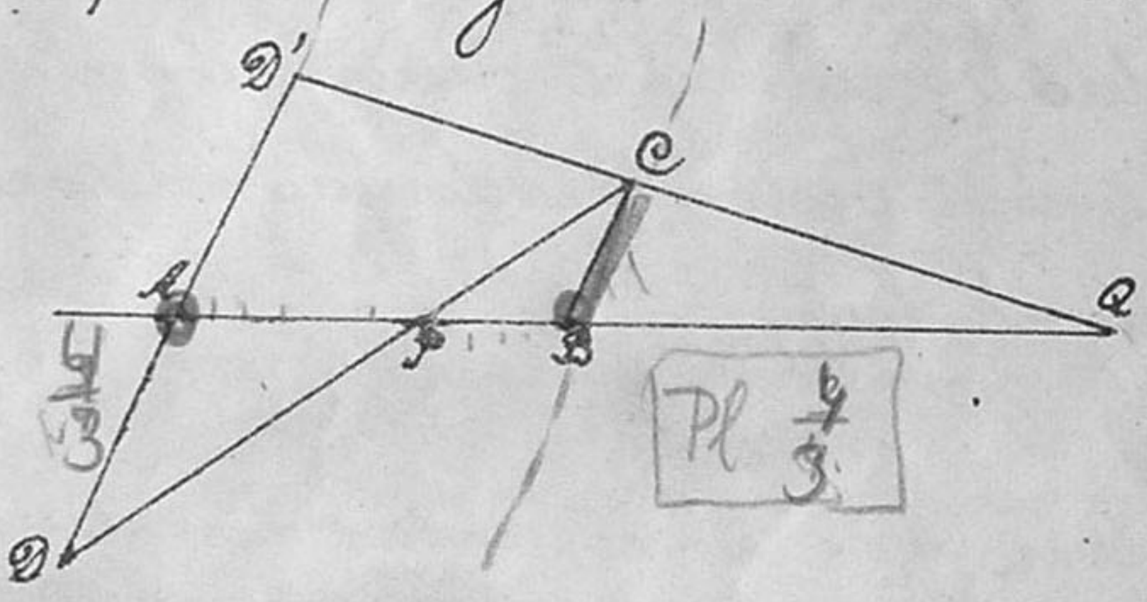
Hogy a P pont végtelenbe való távolodásával λ tényleg (-1)-hez közeledik, másképp is beláthatjuk. Ha ugyanis az $AP + PB + BA = 0$ egyenletet PB-vel osztjuk és a $\frac{BA}{PB}$ hányadost a jobboldalra vive $-\frac{BA}{PB}$ helyett $\frac{BA}{BP}$ irunk, kapjuk, hogy $\frac{}{}$

$$\lambda = -1 + \frac{BA}{BP}$$

Mivel BA véges, BP pedig P távolodásával folyton nő, a határban tehát $\frac{BA}{BP} = 0$, következik, hogy a határban $\lambda = -1$ és pedig ha P a B-től A felé megy a végtelenbe, $\frac{BA}{BP}$ állandóan pozitív lévén, A felülről közeledik (-1)-hez, az ellenkező esetben alulról.

Másfelől világos, hogy $\lim \frac{AP}{BP} = +1$

Most lássuk, miképp lehet az adott λ-hoz tartozó pontot a pontsorban felkeresni. Következőleg járunk el. A két alappontón keresztül tetszőleges irányban két párhuzamost



fektetünk. A B-hez tartozó párhuzamosra tetszőleges irányban ráméréjük B-től az egységet BC-t. Ha most $\lambda > 0$ akkor az A-hoz tartozó párhuzamosra ellenkező irányban mérjük fel a λ hosszat A-tól kezdve D-ig, ha $\lambda < 0$, egyező irányban A-tól D'-ig. Az első esetben a pontsor tartójának és CD-nek metszéspontja P, a második esetben a pontsor tartójának és CD'-nek metszéspontja Q a keresett pont. Mert az első esetben az APD és BPC hasonló háromszögekből $\frac{AP}{PB} = \frac{AD}{BC} = \frac{\lambda}{1} = \lambda$ és ez pozitív, mert P az A és B között fekszik. A második esetben is $\frac{AQ}{QB} = \frac{AD'}{BC} = \frac{\lambda}{1} = \lambda$ és negatív, mert Q az AB darabon kívül fekszik. Az olyan két pontot, mint a milyen P és Q, melyekhez tartozó egyszerű arányszámok A és B-re vonatkozólag ellentétesen egyenlők, harmonikus pontoknak nevezük

A és B pontokra nézve. Ha adva a két alappont és egyik harmonicus, az előbbi szerkesztés megfordításával egyszerűen nyerjük a második harmonicust.

Erre a harmonicus viszonyra nézve tegyünk néhány megjegyzést. Miután a P és Q harmonicus pontok egyszerű arányszámai ellentéteseen egyenlők, a viszonyt jellemző egyenlet:

$$\frac{AP}{PB} + \frac{AQ}{QB} = 0$$

Ebből indulunk ki a harmonicus pontok néhány tulajdonságainak felismerésére. Vigyük át a második tagot a jobboldalra, vegyük mindkét oldal reciprokját, azután ismét nullra reducáljuk az egyenletet és a vectorok irányát változtassuk ellenkezőre, akkor kapjuk, hogy

$$\frac{BP}{PA} + \frac{BQ}{QA} = 0$$

Tehát ha P és Q harmonicus A és B-re, akkor harmonicus B és A-ra is, azaz a harmonicus viszonyt kifejező alapegyenletben szabad a két alappontot felcserélni.

Ha az alapegyenletet előbb AQ-val osztjuk, majd PB-vel szorozzuk s az így nyert egyenletben az AP és QB vector irányát ellenkezőre fordítjuk, akkor kapjuk, hogy

$$\frac{PA}{AQ} + \frac{PB}{BQ} = 0$$

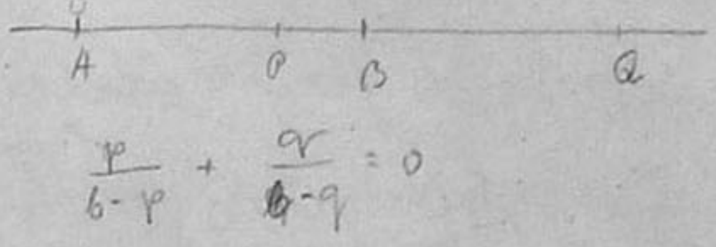
ez az egyenlet pedig azt fejezi ki, hogy ha P és Q az A és B alappontokra nézve harmonicusok, akkor fordítva A és B is a P és Q alappontokra nézve harmonicusok.

Tó lesz a harmonicus viszony kifejezésére más alakokat is megismerni. A definiáló alapegyenletből adódnak ezek, ha más még más coordinata rendszereket vezetünk

Bátkay

be a pontthelyek meghatározására.

Az első alak adódik, ha a távolsági coordinatarendszer kezdőpontjául az A pontot vesszük. Legyenek a B, P és Q pontoknak A-ra vonatkozó coordinátái b, p és q, akkor ezekkel fejezve ki a $\frac{AP}{PB} + \frac{AQ}{QB} = 0$ egyenletben szereplő vectorokat, kapjuk, hogy



$$\frac{p}{b-p} + \frac{q}{b-q} = 0$$

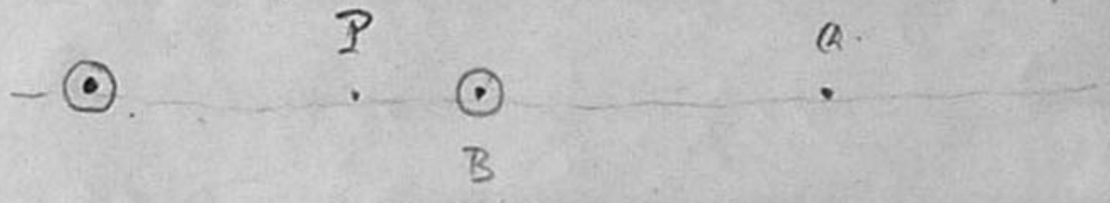
vagyis $\frac{b-p}{p} + \frac{b-q}{q} = 0$ s ha végrehajtjuk az osztást $\frac{b}{p} - 1 + \frac{b}{q} - 1$

$b(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}) - \frac{1}{b}$

$\frac{1}{b} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$

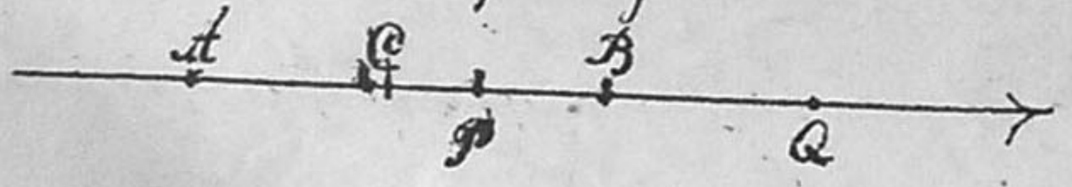
$$\frac{2}{b} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$

tehát $$\boxed{\frac{1}{b} = \frac{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}}{2}}$$



Ha tehát A a coordináták kezdőpontja, akkor a B alappont coordinátájának reciprokja számtani közepe arányosa a két harmonicus pont coordináta reciprokjainak. Ilyenkor azt mondjuk, hogy B harmonicus közepe arányos P és Q között.

Most metrikai relatiót kapunk, ha a távolsági coordinátáknak kezdőpontjául az A B távolság felezőpontját a C-t választjuk. Legyenek az A, B, P, Q pontoknak erre vonatkozó coordinátái $-r$, r, p_1, q_1, akkor ezekkel fejezve ki alapegyenletünk vectorait, kapjuk, hogy



$$\frac{p_1 + r}{r - p_1} + \frac{q_1 + r}{r - q_1} = 0$$

vagyis $$(r + p_1)(r - q_1) + (r + q_1)(r - p_1) = 0$$

ebből $$2r^2 - 2p_1 q_1 = 0$$

$$r_1 q_1 = r^2$$

Ez az relatió áll fenn a C felezőponttól számított coordinátáknak között, s ez mutatja, hogy r_1 és q_1 egyenlő jelü, azaz P és Q az E-nek mindig ugyanarra az oldalaira esnek.

Ha e két harmonicus pont egyike B felé közeledik, a másik is B felé közeledik s abba egyszerre esnek bele; továbbá, ha egyik pont C-hez közeledik, a másik végtelenbe megy, úgyhogy az alappontii távolsáig felező pontjának megfelelő harmonicus pont az egyenes végtelen távoli pontja.

Ezek az egyszerü arányszámokra vonatkozó relatiók.

A pontsorban változó pont helyét tehát kétfele coordinatával határoztuk meg: távolsági coordinatával és egyszerü-arányszám coordinatával. Utóbbinak határozott előnye van az előbbi felett, mert független a positiv iránytól és a hosszegységtől, mivel a $\lambda = \frac{AP}{PB}$ hányadosban a positiv irány elenkezőre való változtatásával a felső és alsó vector is ellenkezőre változik, tehát a hányados jele marad, uj hosszegység bevezetésével pedig a felső és alsó ugyanazzal az $\frac{1}{k}$ constans factorral szorzódik, mely a hányados értékén nem változtat.

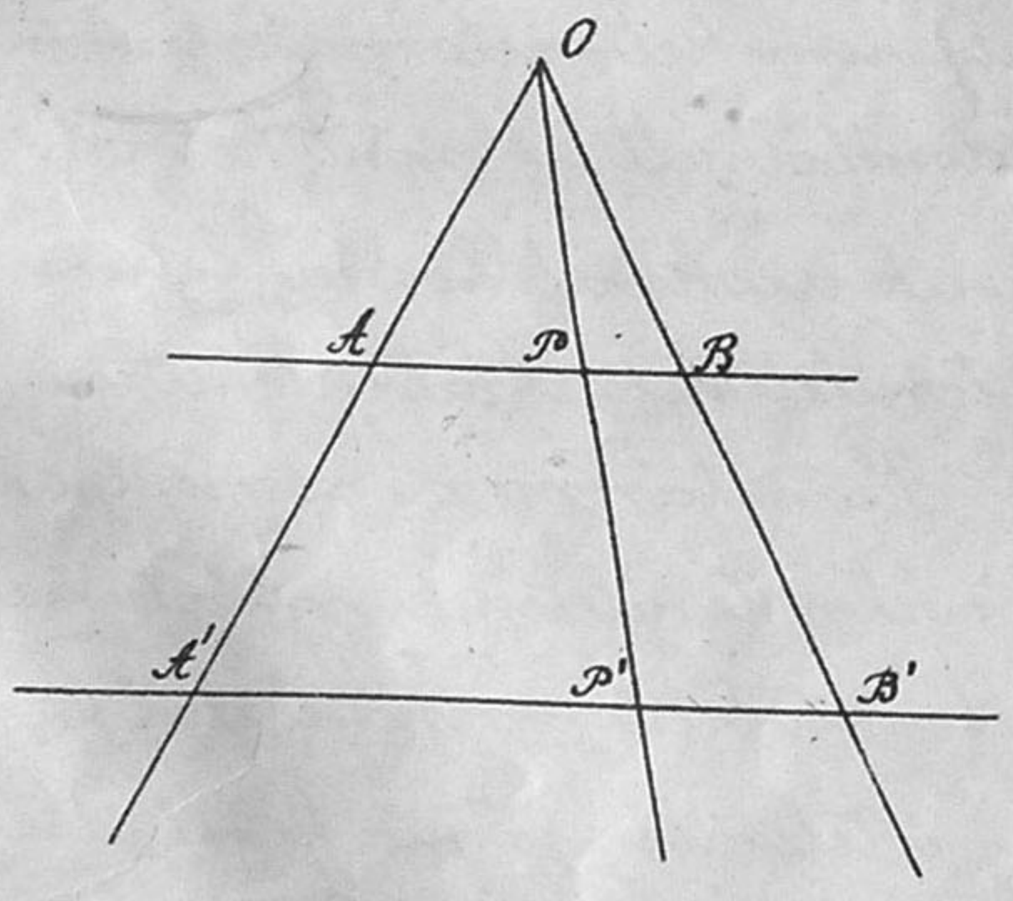
A projiciálás. Kettős arányszám.

Sokszor előfordul, hogy egyszerre több pontsorfő tekintetbe vizor-yos megállapitott viszony szerint, melynek olyajain a-

után egyik pontsorról átmehetünk a másikra.

Ezt az átmenetelt nevezzük projiciálásnak és ez abban áll, hogy két egyenes síkjában fekvő centrumból az egyik egyenes pontjait projiciáljuk a másik egyenesre sugarakkal. A két pontsornak ugyanazon a sugáron fekvő pontjai megfelelő pontok. A projiciálás centrális vagy parallel, a szerint a mint a centrum végesben vagy végtelenben van. Vizsgoljuk meg azokat a projiciálási eseteket, melyekben a projiciáló és projiciált ponteorban a megfelelő pontok egyszerű aránnyszáma ugyanaz, tehát a projiciálás által nem változik, és, a melyekben változik, mennyiben változik?

A legelső ilyen eset az, midőn centrálisan projiciálunk egy egyenesről vele parallel egyenesre. Az egyszerű aránnyszám nem változik. Mert ha A, B alappontok megfelelő pontjai A', B' alappontok, P megfelelője P' akkor utóbbiak coordinatái nagyságra és jegyre nézve teljesen megegyeznek, mivel a keletkező három szögek hasonlóságából kifolyólag $\frac{AP}{PB} = \frac{A'P'}{P'B'}$

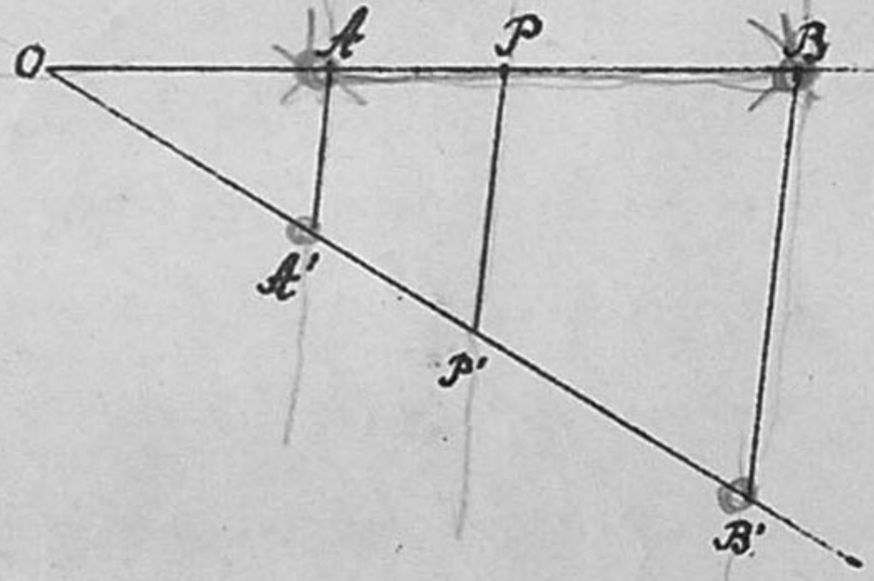


A másik ilyen eset az, midőn parallel projiciálunk egy egyenesről nem parallel egyenesre, az így keletkezett két pontsorban is ugyanaz a megfelelő pontok egyszerű aránnyszáma-coordinatája. Mert ha a két egyenes metszőpontja O, akkor a

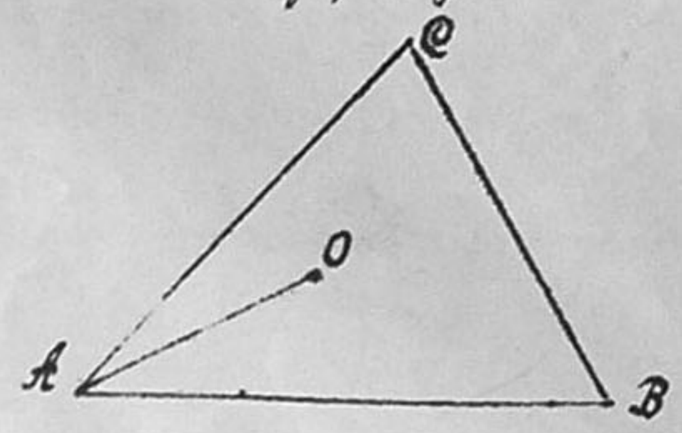
keletkező háromszögek hasonlóságából kifolyólag $\frac{AP}{PB} = \frac{A'P'}{P'B'}$

Mindkét esetben a két arányszám jegye is azért egyező, mert ha P az A és B közé esik, P' is A' és B' közé esik, ha kivüle, akkor A' is A'B'-en kivül esik.

Egy harmadik projiciálási eset, melynél azonban a megfelelő pontok egyszerü arányszám—coordinatái megváltoznak, az, midőn centrálisan projiciálunk egy egyenesről tetszőleges a síkban fekvő más egyenesre, mely azzal nem párhuzamos. Hogy a coordináta megváltozását megállapithassuk



jó lesz az egyszerü arányszámnak egy másik, a régivel egyenértékü kifejezését megismerni, mely nem két vectornak, hanem két háromszög területének hányadosából áll. A mint két vectornál különbséget teszünk nemcsak azoknak hossza, hanem iránya között is, úgy a háromszög területének is tulajdonithatunk a nagyságon kivül irányt is. Ha a háromszög szögpontjai

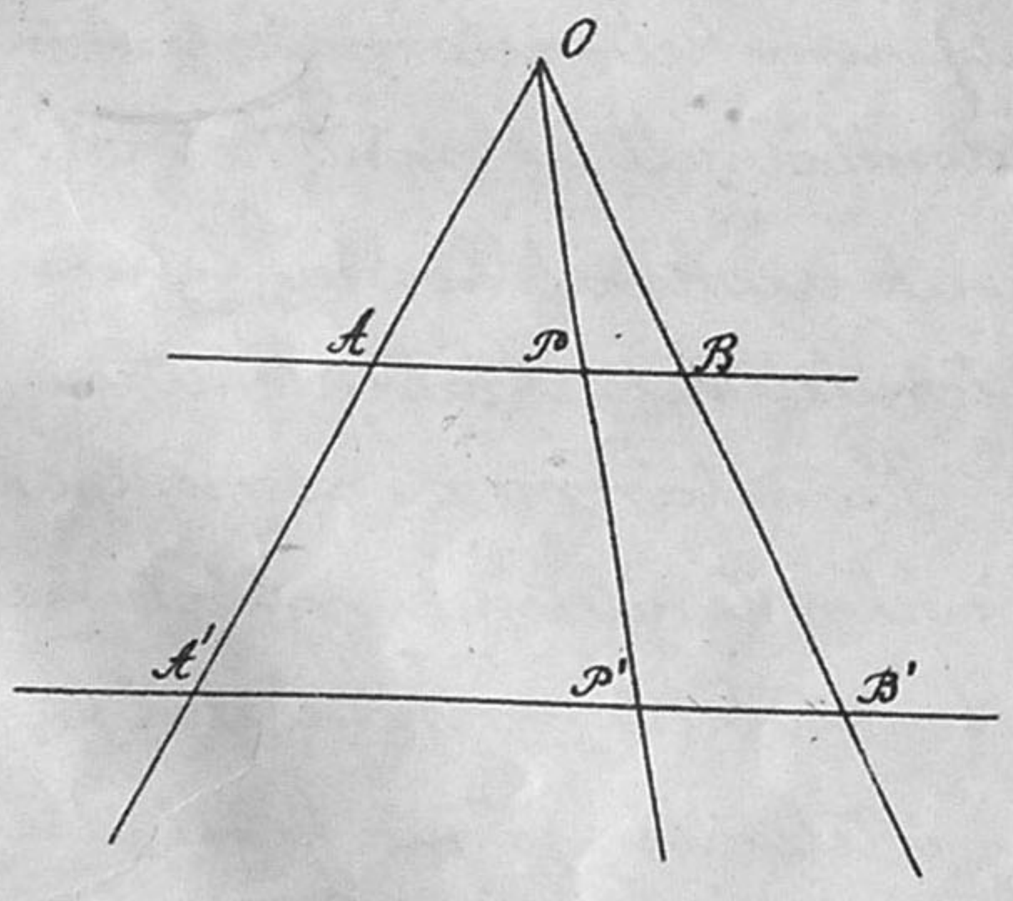


A B és C, akkor területének symboluma: ABC. A három betü sorrendje attól függ hogy mily értelemben járjuk körül a háromszög területét. Positiv körüljárási irány az, melyben haladva, a háromszög belsejének O pontjából annak kerületén mozgó ponthoz huzott vector az óramutató járásával ellenkező irányban forog O körül, az ellentettje a negativ irány. Már most a három szögpont

után egyik pontsorról átmehetünk a másikra.

Ezt az átmenetelt nevezzük projiciálásnak és ez abban áll, hogy két egyenes síkjában fekvő centrumból az egyik egyenes pontjait projiciáljuk a másik egyenesre sugarakkal. A két pontsornak ugyanazon a sugáron fekvő pontjai megfelelő pontok. A projiciálás centrális vagy parallel, a szerint a mint a centrum végesben vagy végtelenben van. Vizsgoljuk meg azokat a projiciálási eseteket, melyekben a projiciáló és projiciált ponteorban a megfelelő pontok egyszerű aránnyszáma ugyanaz, tehát a projiciálás által nem változik, és, a melyekben változik, mennyiben változik?

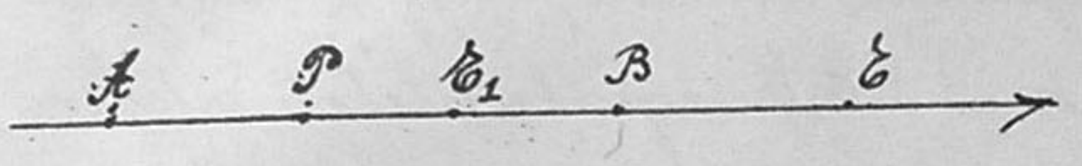
A legelső ilyen eset az, midőn centrálisan projiciálunk egy egyenesről vele parallel egyenesre. Az egyszerű aránnyszám nem változik. Mert ha A, B alappontok megfelelő pontjai A', B' alappontok, P megfelelője P' akkor utóbbiak coordinatái nagyságra és jegyre nézve teljesen megegyeznek, mivel a keletkező három szögek hasonlóságából kifolyólag $\frac{AP}{PB} = \frac{A'P'}{P'B'}$



A másik ilyen eset az, midőn parallel projiciálunk egy egyenesről nem parallel egyenesre, az így keletkezett két pontsorban is ugyanaz a megfelelő pontok egyszerű aránnyszáma-coordinatája. Mert ha a két egyenes metszőpontja O, akkor a

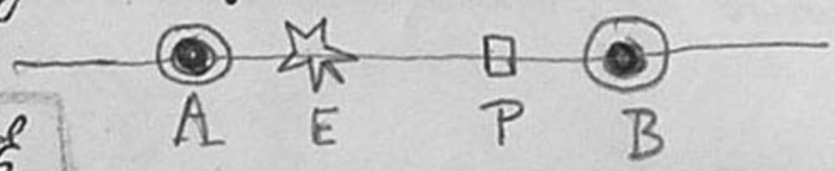
Sorend 1.) A rét alapvonal
2.) A vízszint
3.) A harmadik alapvonal

tású pont helyének meghatározására egy harmadik módszert vezessünk be. Evégett következőleg járunk el. Felveszünk az egyenesen 3 fix pontot A, B és E; A első, B második alappont, E egységpont (utóbbi elnevezés oka mindjárt kitűnik). Már



(A, B, PE)

most a P pont coordinátáinak valasztjuk az (ABPE) kettős viszonyt, jelöljük k-val



$$k = (ABPE) = \frac{AP}{PB} : \frac{AE}{EB}$$

Mutassuk ki, hogy ez ténylég coordinátajellegű, azután vizsgáljuk, mikép változik értéke a P változásával. Az összefüggésből belátható, hogy minden adott P ponthoz egyetlen szakasz k értéke tartozik. Hogy a fordítottról is meggyőződjünk, tegyük fel, hogy egy tetszés szerint felvett O kezdőpontra és hosszegységre vonatkozó távolsági coordinátái A, B, P és E pontoknak megfelelőleg a, b, x és e, akkor

$$k = \frac{x-a}{b-x} : \frac{e-a}{b-e} \qquad \text{s ha } \frac{e-a}{b-e} = \varepsilon, \text{ a mely constans}$$

ebből $\varepsilon . k = \frac{x-a}{b-x}$ tehát $\boxed{x = \frac{a+b\varepsilon k}{1+\varepsilon k}}$

a miből látható, hogy minden határozott k-hoz egy jól meghatározott x érték, tehát P pont tartozik. K tehát ténylég coordináta jellegű. A-ban $k=0$, E-ben $k=1$, B-ben $k=\infty$. Tehát E azért egységpont, mert benne $k=1$. A k jegyét illetőleg látható, hogy ha P olyan helyzeti viszonyban van A és B-hez, mint E, akkor $k>0$, és ha P és E helyzeti viszonya A és B-re vonatkozólag ellenkező, $k<0$. Vagy más szóval, ha a végtelen hosszú egyenest két részben képzeljük, egyik A B véges darab, a többi a második

hányadosokra redukálva $\frac{AP0}{AP_20} = \frac{P0}{P_20}$, mert közös csúcs az A pont; a $\frac{P_2B_20}{PB0}$ redukálása végett közös alapegyenesre kell hozni a közös 0 csúcscsal szembenfekvő oldalakat, azáltal, hogy a hányadoshoz írjuk szorzónak és osztónak a PB_20 segédterületet, akkor

$$\frac{P_2B_20}{PB0} = \frac{P_2B_20}{PB_20} \cdot \frac{PB_20}{PB0} = \frac{P_20}{P0} \cdot \frac{B_20}{B0},$$

mert ezen hányadosokban szereplő háromszögeknek megfelelőleg közös alapegyenesük és közös csúcsok van. És most

$$\frac{\lambda}{\lambda_2} = \frac{P0}{P_20} : \frac{P_20}{P0} : \frac{B_20}{B0} = \frac{B_20}{B0} \neq 1$$

azaz a két arányszám hányadosa a változó ponttól független és az egységtől különböző constans mennyiség, mely csupán a változatlanoknak felvett B_1 B_2 és 0 pontoktól függ. úgyhogy $\lambda = \frac{B_20}{B0}\lambda_2$

Most vegyünk fel az eredeti pontsorban még egy negyedik Q pontot, megfeleltetve Q_1; erre is áll, hogy arányszáma koordinátáik közti viszony $\nu = \frac{B_20}{B0}\nu_1$

tehát $\frac{\lambda}{\nu} = \frac{\lambda_1}{\nu_1}$ és beírva az értékeket kapjuk ezt a fontos relatiót

$$\frac{AP}{PB} : \frac{AQ}{QB} = \frac{A_1P_1}{P_1B_1} : \frac{A_1Q_1}{Q_1B_1}$$

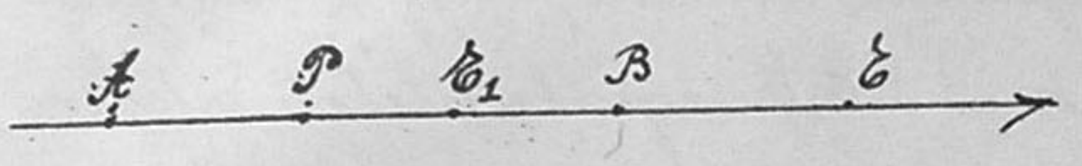
Az egyenlet baloldalán álló kifejezés a pontsorban felvett A és B alappontok és a benne változó P és Q pontok által meghatározott 4 vectornak oly függvénye, mely bármilynemű centrális projectióban nem változik, mert a jobboldali kifejezés a megfelelő vectorok nyugalmi függvénye. Ezt a nevezetes függvényt nevezzük a 4 pont kettős arányszámának és jelöljük (ABPQ). Tehát 4 pont kettős viszonya a projectióban nem változik

$$(ABPQ) = (A_1B_1P_1Q_1)$$

Ez a nevezetes körülmény arra vezet, hogy a pontsorban vál-

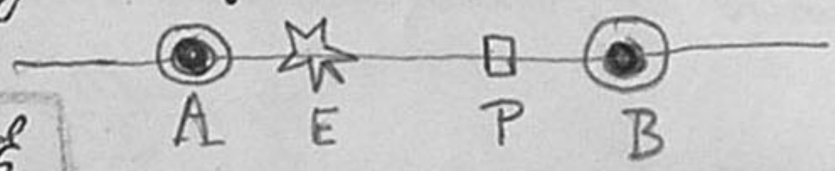
Sorend 1.) A rét alapvonal
2.) A vízszint
3.) A harmadik alapvonal

tású pont helyének meghatározására egy harmadik módszert vezessünk be. Evégett következőleg járunk el. Felveszünk az egyenesen 3 fix pontot A, B és E; A első, B második alappont, E egységpont (utóbbi elnevezés oka mindjárt kitűnik). Már



(A, B, PE)

most a P pont coordinátáinak valasztjuk az (ABPE) kettős viszonyt, jelöljük k-val



$$k = (ABPE) = \frac{AP}{PB} : \frac{AE}{EB}$$

Mutassuk ki, hogy ez ténylég coordinátajellegű, azután vizsgáljuk, mikép változik értéke a P változásával. Az összefüggésből belátható, hogy minden adott P ponthoz egyetlen szakasz k értéke tartozik. Hogy a fordítottról is meggyőződjünk, tegyük fel, hogy egy tetszés szerint felvett O kezdőpontra és hosszegységre vonatkozó távolsági coordinátái A, B, P és E pontoknak megfelelőleg a, b, x és e, akkor

$$k = \frac{x-a}{b-x} : \frac{e-a}{b-e} \qquad \text{s ha } \frac{e-a}{b-e} = \varepsilon, \text{ a mely constans}$$

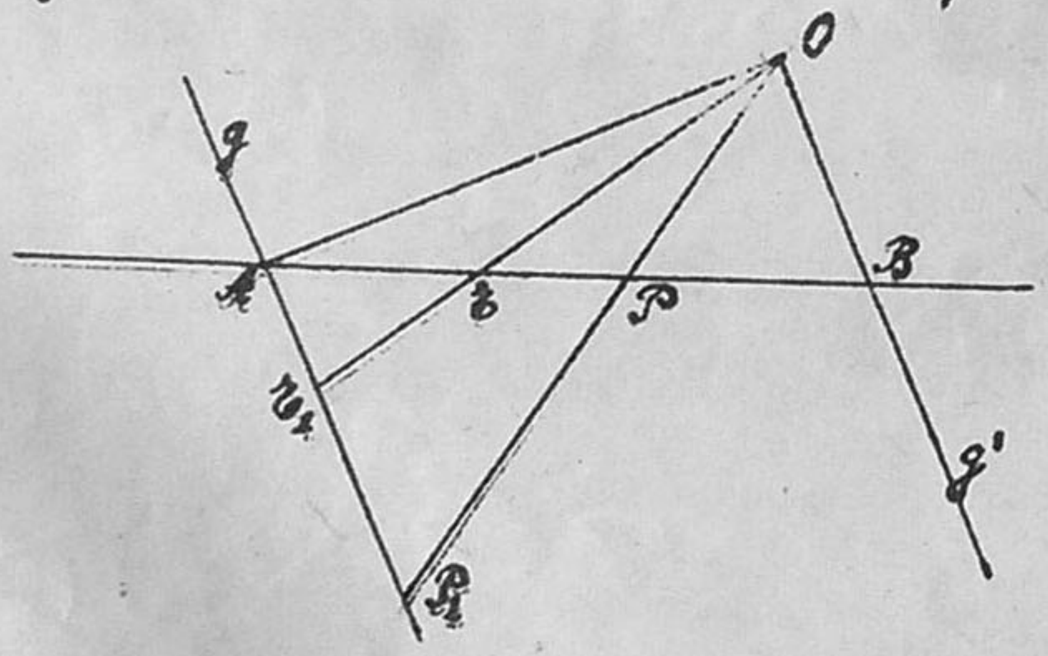
ebből $\varepsilon . k = \frac{x-a}{b-x}$ tehát $\boxed{x = \frac{a+b\varepsilon k}{1+\varepsilon k}}$

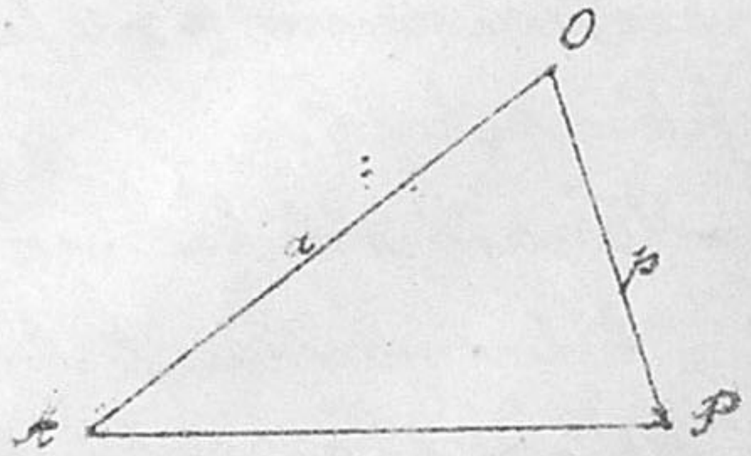
a miből látható, hogy minden határozott k-hoz egy jól meghatározott x érték, tehát P pont tartozik. K tehát ténylég coordináta jellegű. A-ban $k=0$, E-ben $k=1$, B-ben $k=\infty$. Tehát E azért egységpont, mert benne $k=1$. A k jegyét illetőleg látható, hogy ha P olyan helyzeti viszonyban van A és B-hez, mint E, akkor $k>0$, és ha P és E helyzeti viszonya A és B-re vonatkozólag ellenkező, $k<0$. Vagy más szóval, ha a végtelen hosszú egyenest két részben képzeljük, egyik A B véges darab, a többi a második

rész, akkor, ha P és E egyszerre van vagy azonos a részen $k > 0$, ha P és E egyszerre különböző egyenesrészen fekszik, $k < 0$.

Még jobban tájékozódhatnak a k változásairól, ha még egy 4-ik fix pontot veszünk fel és pedig E harmonicusát A és B-re nézve: E_1, mely minden más részein fekszik az egyenesnek, s a melyre nézve a harmonicus viszony definitiója értelmében $k = -1$. Már most mondhatjuk, hogy A-nál $k = 0$, innen fogy, E_1-ben $k = -1$, innen tovább fogy az összes negatív számok során át, B-ben $k = -\infty$, ennek után $+\infty$-ben és a pozitív számok során át tovább fogy, E-nél $k = +1$, innen a pozitív valódi törtek során át fogy míg A-ban ismét 0.

Így adott k coordinátájú P pontot az A, B alappontu és E egységpontu pontsorban következőleg határozzuk meg szerkesztésül. Az A és B ponton át tetszőleges irányban meghúzzuk a g és g' parabeleket. g'-ön felveszünk tetszésszerint az O pontot és ebből projiciáljuk g-re az A B E pontokat. A a projectiójával önmagával esik, B projectója a g egyenes végtelen távoli pontja, E-é pedig E_1. A g egyenes pozitiv irányának azt tekintjük, melyben az A-tól pozitiv irányban B-be haladó pont projectiója a g egyenesen A-tól halad. Most szerkesszük meg a g egyenesen azt a P_1 pontot, melynek távolsági coordinatája A kezdőpontra és AE_1 egységre nézve k, tehát $k = \frac{AP_1}{AE_1}$. P_1-nek O centruma





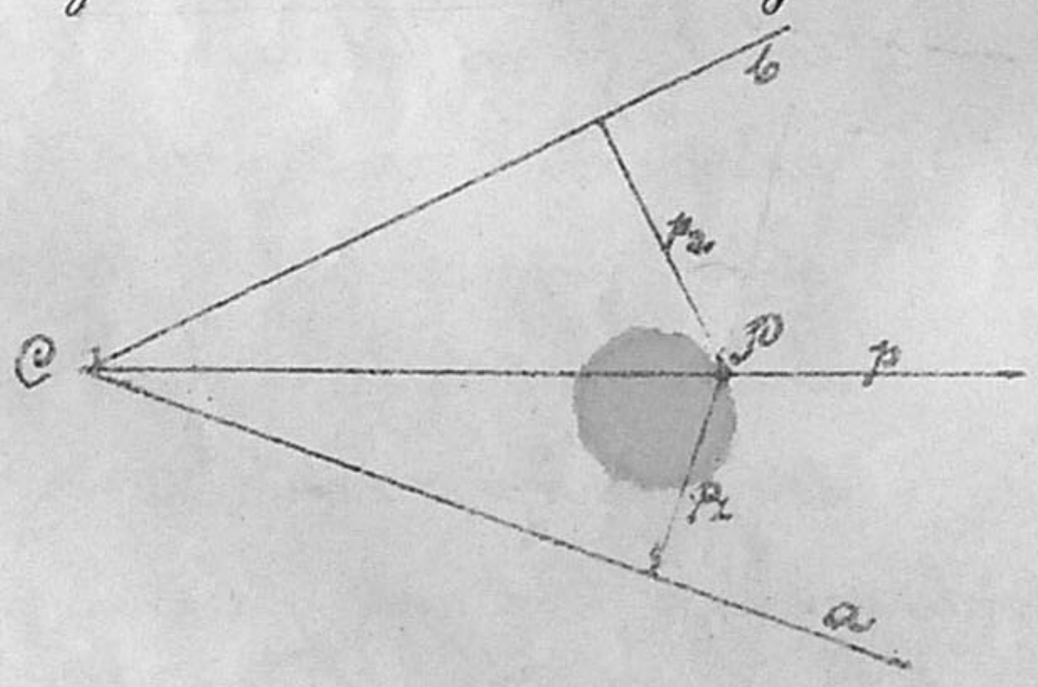
Akkor $C\Delta P = \frac{1}{2} ap \sin(ap)$

és pedig nemcsak nagyságra, hanem jegyre nézve is. Mert ha $C\Delta P > 0$, akkor (ap) pozitív hegyes vagy tompa szög. Az első esetben tehát az egyenlet jobboldala szintén pozitív, lévén $\sin(ap) > 0$, a másodikban szintén negatív, lévén $\sin(ap) < 0$.

Alkalmazva ezt a fenti sugársorból kimetszett $C\Delta P$ és CPB háromszögekre $C\Delta P = \frac{1}{2} ap \cdot \sin(ap)$ és $CPB = \frac{1}{2} pb \sin(pb)$. És minthogy ΔABC egyenlőszárú háromszögben $a = b$, tehát $\frac{1}{2} ap = \frac{1}{2} bp$, kapjuk, hogy

$$\lambda = \frac{\sin(ap)}{\sin(pb)}$$

Ez a λ, a változó p sugár egyszerű arainpscaimcoordinátája, ki van fejezve a változó sugár és a két alapsugár által bezárt szögek sinusainak hányadosával. Ezt a λ-t másképp is értelmezhetjük. Vegyünk fel ugyanis a változó p sugáron egy P pontot akárhol, s ebből bocsássunk merőlegest a két alapsugárra, hosszuk legyen p_1 és p_2. Akkor



$$p_1 = CP \sin(ap)$$

$$p_2 = CP \sin(pb)$$

Ha most megállapodunk abban, hogy az a és b alapsugaraitól bezárt, közben levő p sugárra illetőleg P pontra nézve ez a két normális távolság egyező jelű, azonkívül ellenkező jelű, akkor nyilvánvaló, hogy $\lambda = \frac{\sin(ap)}{\sin(pb)} = \frac{p_1}{p_2}$

A harmonicus viszonyt itt is úgy definiáljuk, mint a pontsornál. Ehát 4 sugár p, q, a és b harmonicus viszonyban vannak, ha p és q-nak a és b-re vonatkozó egyszerű arányszámaik ellentétesen egyenlők, azaz ha

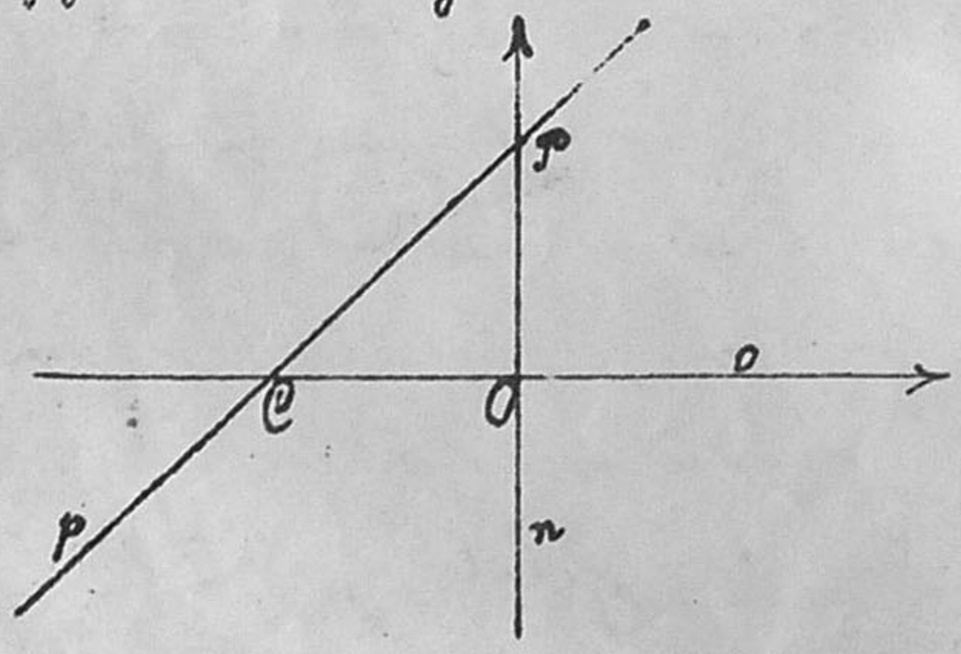
$$\frac{\sin(ap)}{\sin(pb)} + \frac{\sin(aq)}{\sin(qb)} = 0$$

A változó sugár meghatározása az előbb ismertetett két esetben úgy történt, hogy átvágtuk a sugársort egy célszerűen választott egyenessel, melyen a sugársor elemei pontsort hoztak létre. Az első esetben ezen pontsorban változó pont távolsági koordinátája volt a változó sugár coordinátája, kifejezve azt a változó és fix sugár szögének tangensével; a második esetben a pontsorban változó pont egyszerű arányszámcoordinátája volt a változó sugár coordinátája, kifejezvén azt a változó és az alapsugarak által bezárt szögek sinusainak hányadosával.

A harmadik általános módszer az lesz, midőn a sugársort, melyben felvesszünk egy a és b alapsugarat és egy e egységsugarat, egy tetszőleges egyenessel metszük, és a keletkező pontsorban az a és b által létrehozott A és B pontokat alap, az e-nek megfelelő E pontot egységpontnak tekintjük; a változó p sugár coordinátája lesz ekkor a megfelelő P pont kettős arányszáma: $k = \frac{AP}{PB} : \frac{AE}{EB}$

tekintik, akkor ugyanezen irányú forgásszögek $\alpha+2\pi$, $\alpha+4\pi$,..... $\alpha+2k\pi$,..... A legkisebb negatív forgás, mely O-t p-be hozza, $=(2\pi-\alpha)=\alpha-2\pi$, a többi $\alpha-4\pi$, $\alpha-6\pi$,..... $\alpha-2k\pi$,.... . Tehát az (op) szöghez tartozó összes mérőszámok $(\alpha+2k\pi)$ alakban foglalhatnak, a hol $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$. Ebből látható, hogy az (op) szög mérőszámai nem tekinthető coordinatáinak, mert egy adott helyzetü p-hez végtelen sok ilyen coordináta tartozik. Ezért coordináta gyanánt ezen mérőszámok egy trigonometriai függvényét vesszük, és pedig olyant, mely nemcsak az egyenes egyik, hanem ellentett irányu szárához tartozó összes mérőszámokhoz egy értéket szolgáltat. Ilyen tulajdonságu a trigonometriai tangens, mert $tg\,\alpha = tg(\alpha+2k\pi) = tg(\alpha+(2k+1)\pi)$ épigy a ctg. Ezt a tangenst nevezzük iránytangensnek és ez tökéletesen jellemzi a változó sugár helyzetét és coordinatas jellegü, mert minden sugárhoz csak egy iránytg. tartozik.

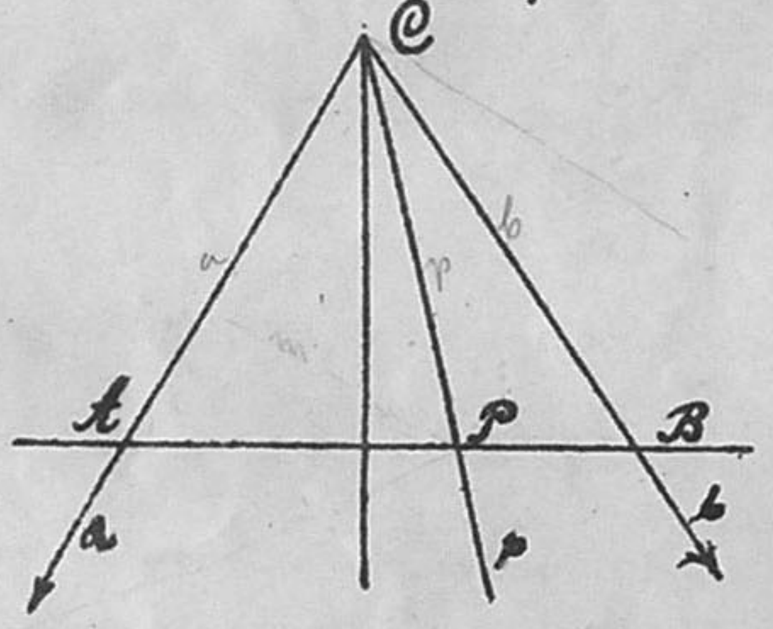
Ik fordítva is, ha adva $x = tg\,\alpha = tg\,(op)$, meg tudjuk szerkeszteni a p sugarat, melynek ez a coordinátája. E végett az O egyenesen a sugársor centrumától kezdve rakjuk fel a hosszegységet CO-t. O-ban merőlegest emelünk, melynek positiv iránya megegyezik az C körüli positiv forgási iránnyal. Ezen megszerkesztjük azt a S pontot, melynek O-tól kezdve távolsági coordinátája a CO hosszegységre vonatkozólag x, akkor $CS \equiv p$ a keresett sugár.



gár, mert erre nézve $tg(op) = \frac{OS}{CO} = \frac{x}{1} = x$

Itt tehát úgy járunk el, hogy metszettük a sugársort egy n egyenessel, a centrumtól egységnyi távolban merőlegesen az O alapsugárra; a kimetszett pontsorban változó S pont távolsági coordinátája egyenlő a sugársorban változó megfelelő sugár iránytangensével.

A mérőeszköz működése a változó sugár meghatározására a következő. Egy a sugarat első, egy b sugarat második alapsugárnak véve, szabott irányúnyal, a kettőnek szögét felezzük és a felező egyenesére bárhol állítunk egy merőlegest, mely a sugársorból kimetsz egy pontsort. Ebben az a és b metszéseiből szár-



mazó A és B pontokat alappontoknak véve, a változó p sugár által kimetszett változó S pont ezen alappontokra vonatkozó egyszerű arányszáma $\lambda = \frac{AS}{SB}$ teljesen jellemzi a változó sugár helyzetét, annak alapján, hogy a pontsor minden pontjának megfelel a sugársor egy sugara és megfordítva a sugársor minden sugarának megfelel a pontsor egy pontja. Ezt az λ arányszámot függetlenné fogjuk tenni a kimetszett pontsortól, kifejezvén azt a változó p sugár és az alapsugarak által bezárt szöggel, illetőleg azoknak szinuszával. Tudjuk ugyanis, hogy $\lambda = \frac{AS}{SB} = \frac{CA \sin ACS}{CSB}$. Ha most CA pozitív mérőszáma a,

CS " " p

$(x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2 = 0,$

projectiója az eredeti egyenesen: P a keresett pont. Mert a B_1 pont a végtelenben lévén,

$$(ABPE) = (A B_1 P_1 E_1) = \frac{AP_1}{AE_1} = k.$$

A pontsorban változó pont helyének meghatározására tehát három módszerünk van: a távolsági coordináta, egyszerű arányszám coord. és a kettős arányszám coordinatái. Könnyen kimutatható, hogy a harmadik a legáltalánosabb, mert prok a két első csak speciális esetei. A definitió szerint

$$\text{ugyanis} \qquad k = \frac{AP}{PB} : \frac{AE}{EB}, \qquad \lambda = \frac{AP}{PB}, \qquad x = \frac{OP}{OE}$$

Ha k-ban feltesszük, hogy E felezi AB-t, akkor $\frac{AE}{EB} = 1$, k átmegy λ-ba. Ha pedig a másodiktk adjuppont B az egyenes végtelen távoli pontját, akkor k átmegy x-be, mert

$$k = \frac{AP}{PB} : \frac{AE}{EB} = \frac{AP}{AE} \cdot \frac{EB}{PB} \quad \text{De} \lim_{B \to \infty} \frac{EB}{PB} = 1, \text{ és így a határ-}$$

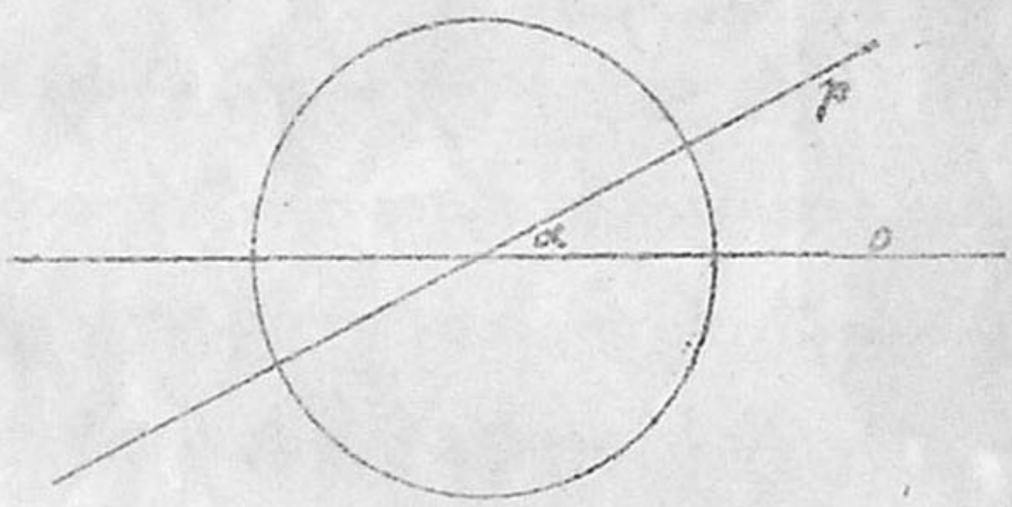
ban $k = \frac{AP}{AE} = x$, a mennyiben a távolsági coordináta kezdőpontja A, a hosszegység AE.

Megjegyzendő, hogy mindig az illető geometriai kérdés dönti el, hogy melyik coordináta szükséges. A távolsági coordináta akkor elégséges, ha vonaldarabok nagyságát kell ismételten kitejezni. Ha pl. P_1 és P_2 távolsági coordinátái x_1 és x_2, akkor $P_1 P_2$ vector értéke $x_2 - x_1$. A többinél ez nem fejezhető ki olyan egyszerűen. Oly kérdéseknél, melyeknek megoldása közben egyik pontról vele paraméteres pontsorra kell átmenni, az egyszerű arányszám coordináta célszerű, tetszőleges átmenési esetén a kettős arányszám coordinátát használjuk.

A szögsúrsor.

Második egy dimenziós alakzatnak tárgyaljuk a szögsúrsort, melyet a sík egy pontján átmenő egyenesei alkotnak. A legelső feladat itt is meghatározni a szögsúrban (sor) változó elem (a szög) helyzetét. Erre is több módszerünk van.

Az első módszer abban áll, hogy a szögsúrsor egy tetszőleges p elemét kiválasztjuk kiadó elemnek és helyhatározó számokat egyszerűen azt a szöget



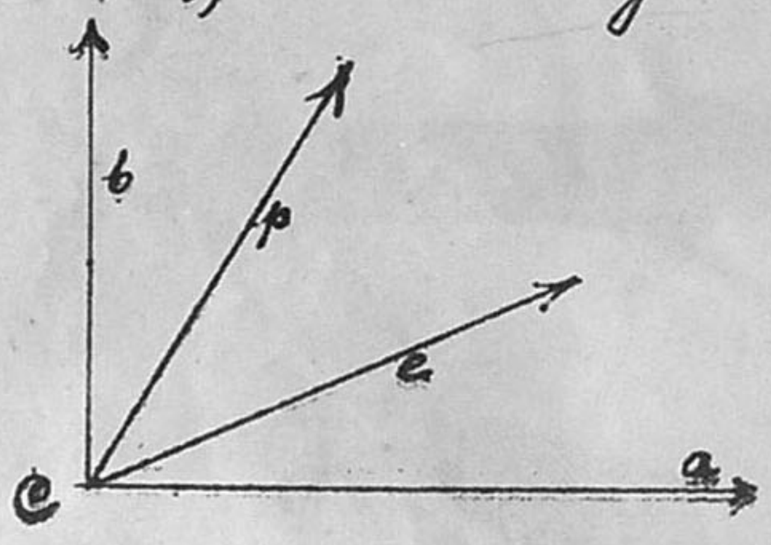
vesszük (egységsugarú körívvel mérve), melyet bezár a választófelem a kiadó 0 elemmel. Ez a szög 0-nak p-be való forgatásából származik, a mely forgatás ellentétirányban történhetik, az óramutató járásával ellenkező azzal pozitív, és az óramutató járásával egyező, azzal negatív irányban, amiszerint megfelelőleg a keletkezett szög pozitív illetőleg negatív. Annyi végtelen sok forgatással lehet 0-t a p-be hozni. Mindazokat számokat, melyeknek a jegyzi által meghatározott irányzattal és értéke által meghatározott nagysággal definiált forgatás által 0 a p-be hozható, nevezzük a p szögének. Ennek alapján könnyű számon tartani az összes mérőszámokat, melyek ugyanahhoz a p elemhez tartoznak. Mert ha a pozitiv forgatásból származó legkisebb szög α, mely tehát 0 és 2π között

De a hármasokban szereplő egyszerű arányszámok kifejezhetők síkmetszetek hármyadolószögével, úgyhogy

$$k = \frac{\sin(ap)}{\sin(pb)} : \frac{\sin(ae)}{\sin(eb)} = (abpe)$$

ha t.i. (abpe)-vel jelöljük 4 sugárnak ez utóbbi egyenlettel definiált kettős arányszámát.

Ez a harmadik módszer egyszersmind általánositása a két előbbinek. Könnyen meg is jelölhetjük a feltételeket, melyek mellett a kettős arányszám átmegy az egyszerűbe, illetőleg az iránytangensbe. Ha ugyanis e felezi (ab) szöget, tehát $\sin(ae) = \sin(eb)$, akkor hármyadosuk 1, és $k = \frac{\sin(ap)}{\sin(pb)}$. Ha pedig exen-



kivül a $\perp$ b, és pedig úgy, hogy a positiv irányulás szerint forgathatő 90° alatt b-be, akkor azonkivül hogy $\sin(ae) : \sin(eb) = 1$, még $\sin(pb) = \cos(ap)$, tehát $k = \frac{\sin(ap)}{\cos(ap)} =$ tg (ap) nem egyéb, mint a p sugár iránytangense.

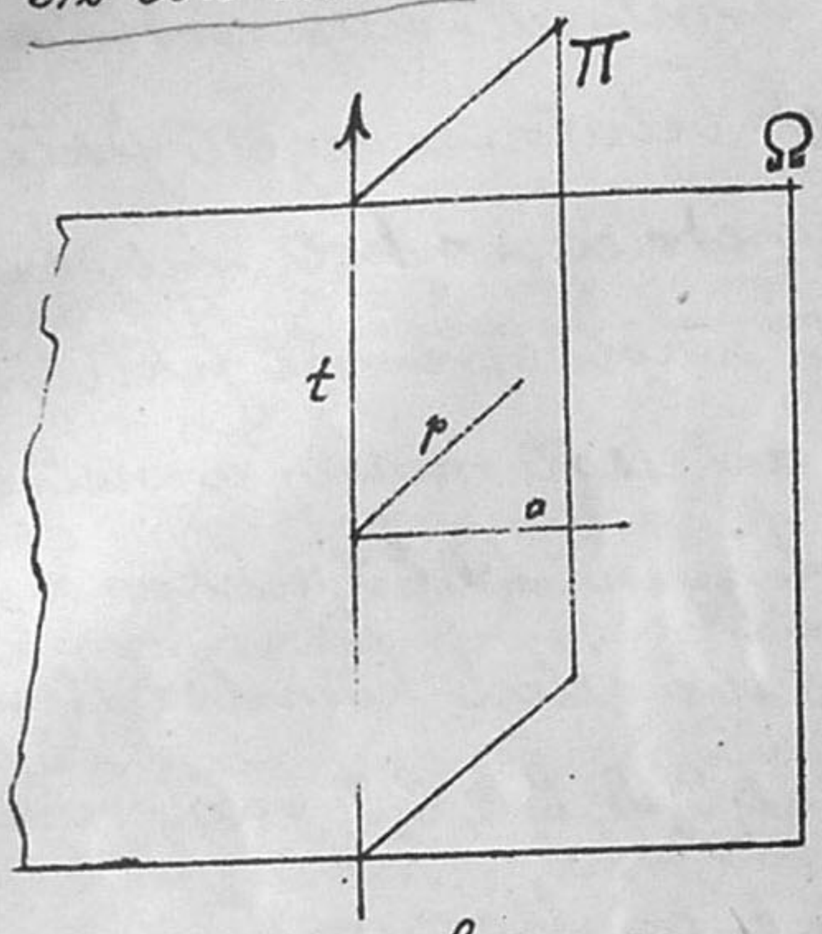
Ezért ha a következőkben kettős arányszámmal dolgozunk, az ezzel nyert eredmények érvényesek maradnak a Löbi coordinatarendszerekben is.

Síksor.

A síksornál is a legelső feladat a változó sik elem helyének meghatározása. Erre is három mód-

szerünk van.

Az első szerint a síksor tengelyére merőleges síkkal metszvén a síksort, ezen síkban fekvő sugársort nyerünk, melynek kezdő" sugaráúl véve az Ω kezdősíknak a metszősíkkal való metszővonalát,: a változó Π sík által kimetszett p sugár irányfangense lesz a változó Π sík



coordinátája. Ez pedig annyi mint az (ΩΠ) szög tangense, a pozitiv forgási iránynál a c forgástengely irányában nézve.

$$x = tg(\Omega\Pi)$$

A második módszernél felveszünk két alapsíkot: A és B, melyek a tengelyre merőleges síkot a és b-ben metszik. A kimetszett sugársorban változó p sugár egyszerü arányszáma a megfelelő síkelem coordinátája

$$k = \frac{\sin(ap)}{\sin(pb)} = \frac{\sin(A\Pi)}{\sin(\Pi B)}$$

A harmadik módszernél felveszünk két alapsíkot, A B, és az egységsíkot E és ezeket helyettesitjük a tengelyre merőleges sík által kimetszett a, b, és e sugarakkal; ha a változó Π síkot kimetszett sugár p, akkor Π coordinátája

$$k = \frac{\sin(A\Pi)}{\sin(\Pi B)} : \frac{\sin(AE)}{\sin(EB)} = \frac{\sin(ap)}{\sin(pb)} : \frac{\sin(ae)}{\sin(eb)}$$

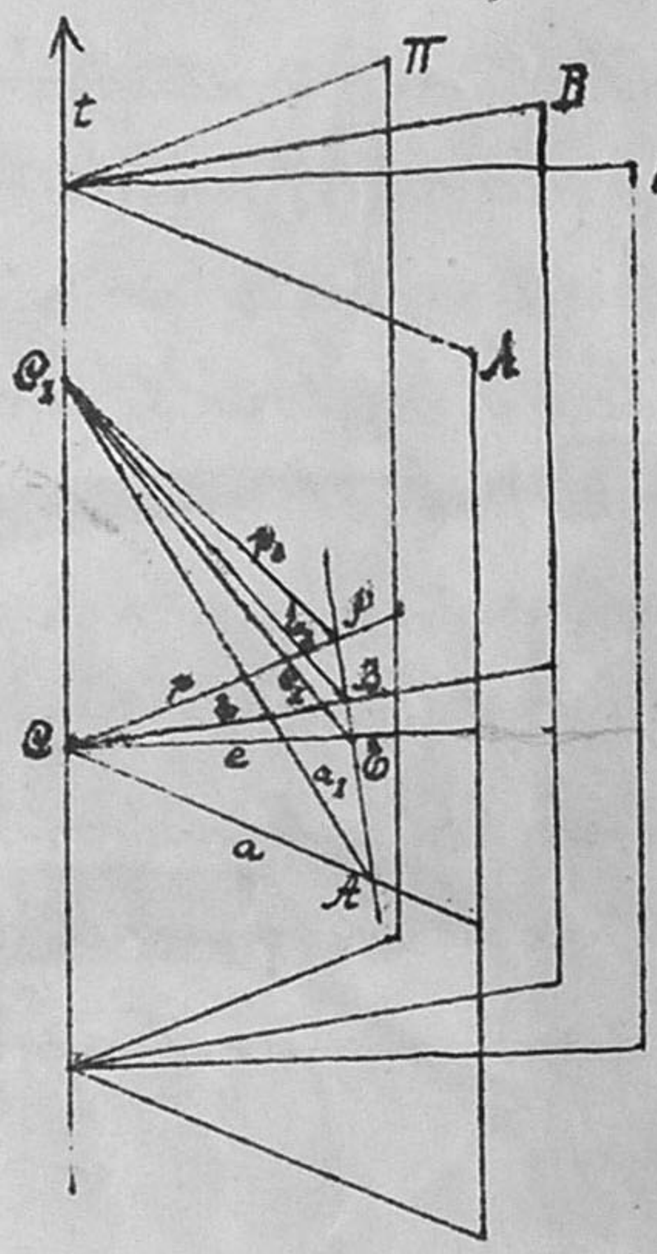
tehát $$k = (AB\Pi E) = (abpe)$$

Sőt nem is szükséges a metsző síkot a tengelyre merőlegesen fektetni, akármily irányu sik által kimetszett sugársorban ugyanaz a kettős arányszám. Ennek belátása végett fektessünk előbb a tengely C_1 pontján át arra merőleges síkot, mely kimetszi az a, b, c, p sugársort; a másik síkot C_1-en át fektetjük, hogy az elsőt messe; a metszővonal legyen AB & P, akkor a második sik által kimetszett sugársor C_1A; C_1B; C_1C; C_1P; vagy röviden $a_1, b_1, c_1 p_1$. Már most

$$(abpc) = (ABPC)$$

$$(a_1 b_1 p_1 c_1) = (ABPC)$$

Tehát $(a\,b\,p\,c) = (a_1 b_1 p_1 c_1) = k$



Tehát mikor kettős arányszámmal határoznak meg a vátozó sík helyét, közömbös, hogy milyen metsző síkot használunk. Ezzel egyszersmind ki van mutatva, hogy ha tetszőleges egyenessel metszünk a síksort, a kimetszett 4 pont kettős arányszáma mindig ugyanaz.

Ennek a harmadik módszernek az az nagy előnye, hogy egy a háromféle egy dimenziós alakzat oly vonatkozásba jő egymással, hogy a megfelelő elemek kettős arányszámcoordinátája ugyanaz, akár egyenessel, akár síkkal metszük a síksort.

A kettős arányszám nevezetesebb tulajdonságai.

Az eddigiekben megismertük, mily fontos szerepe van a kettős ar. számnak a változó elemek meghatározásainál. Ezért célszerű lesz részletesebben megismerkedni annak néhány fontosabb tulajdonságával és neveig, mivel 4 sik, vagy 4 sugár kettős ar. száma mindig helyettesíthető a megfelelő pontok kettős arányszámaival, elég tehát négy pont kettős ar. számával foglalkozni. Ezne vizsgálatoknál nem annyira mint coordinátát, hanem mint 4 pont által meghatározott 4 vector függvényét fogjuk tekinteni a kettős ar. számot, a miért is egyöntetűség kedvéért A, B, C, D betűkkel jelöljük a pontokat. A definitio szerint

A B C D

$$k = (ABCD) = \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB} = \frac{AC.BD}{AD.BC.} = K.$$

Ez utóbbi hányadost fogjuk excentrikus a 4 pont kettős arányszámainak nevezni, mert egyszerűbben definiálható. Ugyanis a felső: az első és harmadik, valamint a második és negyedik pontból alkotott vectorok szorzata, az alsó: az első és negyedik, meg a második és harmadik pont által meghatározott vectorok szorzata; vagy röviden: a felső az átlós vectorok szorzata, az alsó a külső és belső vector szorzata.

Tehát $$(ABCD) = \frac{AC.BD}{AD.BC} = k$$

Vizsgáljuk most mikép változik a k értéke, ha (ABCD)-ben a négy pont symbolumát minden lehető módon permutáljuk. Négy elemből összesen 24 permutatió lehetséges.

Alkalmazva az (AB) és (CD) cserét $(BADC) = \frac{BD.AC}{BC.AD} = k$

" az (AC) és (BD) cserét $(CDAB) = \frac{CA.DB}{CB.DA} = k$

mert mind a négy vector jegyet változtat

alkalmazva az (AD) és (BC) cserét $(DCBA) = \frac{DB.CA}{DA.CB} = k$

mert itt is mind a négy vector jegyet változtat.

Tehát $(ABCD) = (BADC) = (CDAB) = (DCBA) = k$.

Említsük meg, hogy ha két-két pontot egyszerre cseréljünk fel, k-ban ennek értéke nem változik, a mint látjuk, bármelyik pont első helyre hozható az ilyen permutatióval.

Más értéket kapunk, ha (ABCD)-ben felcseréljük a két utolsó elemet: $(ABDC) = \frac{AD.BC}{AC.BD} = \frac{1}{k}$. ha most ebben is a két-két elemet cseréljük fel egyszerre, mindig ugyanezt az értéket kapjuk így hogy

$$(ABDC) = (BADC) = (CDBA) = (DCAB) = \frac{1}{k}$$

a két első permutatio mutatja, hogy k átmegy a reciprokba, ha csak a két utolsó, vagy csak a két első elemet cseréljük fel egymással. (ABCD)-ben.

Egy újabb permutatió csoportot kapunk, ha kiindulunk a következő egyenletből

Lásd 10 oldal!

$BC.AD + CA.BD + AB.CD = 0$ és ezt osztjuk $BC.AD$-vel, lesz

$$1 - \frac{AC.BD}{AD.BC} - \frac{AB.CD}{AD.CB} = 0$$

vagyis $1-(ABCD)-(ACBD)=0$ de $(ABCD)=k$,
úgyhogy $(ACBD)=1-k$ és elvégezve a kettős cserét

$$(ACBD)=(BDAC)=(CADB)=(DBCA)=1-k$$

Az első és utólsó permutatió mutatja, hogy ha $(ABCD)$-ben felcseréljük csupán a két belső vagy csak a két külső elemet, k átmegy $(1-k)$-ba.

Három újabb permutatió csoportot kapunk, ha az előbbi három csoportban kifejezett tételeket ismételten alkalmazzuk a két utóbbi csoportra. Így $(ABDC)$-ben felcserélve a két belső elemet $\frac{1}{k}$ átmegy $1-\frac{1}{k}=\frac{k-1}{k}$-ba, tehát

$$(ADBC)=(BCAD)=(CBDA)=(DACB)=\frac{k-1}{k}$$

ha pedig $(ACBD)$-ben felcseréljük a két utólsó elemet, $1-k$ átmegy $\frac{1}{1-k}$-ba $(ACDB)=(BDCA)=(CABD)=(DBAC)=\frac{1}{1-k}$

és a harmadik csoportot kapjuk, ha a $\frac{k-1}{k}$ csoport $(ADBC)$ permutatiójában felcseréljük a két utólsó elemet, minek folytán $\frac{k-1}{k}$ átmegy reciprokjába

$$(ADCB)=(BCDA)=(CBAD)=(DACB)=\frac{k}{k-1}$$

Négy pont kettős aránymszáma tehát a szimbolumok permutatiójával összesen 6, általában különböző értéket vehet fel.

De a kettős aránymszámnak bizonyos speciális értékei mellett ez a 6 érték kevesebbre reducálódik. Ezekhez a speciális k értékekhez eljutunk, ha két-két értéket egyenlettel kapcsolunk össze s ebből k értékét meghatározzuk.

Legyen legelőször $k=\frac{1}{k}$, azaz $k^2=1$ Ebből $k=\pm 1$
Lássuk, hov $k=1$, milyen értékek adódnak a pontok per-

mutálásával?

$$k = \frac{1}{k} = 1;\ 1-k = \frac{k-1}{k} = 0;\ \text{és}\ \frac{1}{1-k} = \frac{k}{k-1} = \infty$$

Tehát $k = 1$, esetén a kettős arányszám csak 3 különböző értéket vehet fel, ezek $1, 0, \infty$. Hogy mi ennek geometriai értelme, könnyen kiolvasható a $k = \frac{AC.BD}{AD.BC}$ egyenletből. Ha $k=0$, akkor vagy C összeesik A-val, vagy D a B-vel. Ha $k=\infty$, ugyanez a feltétel, mert ekkor a nevező valamelyik vectora tűnik el. Tehát $k=0$ és $k=\infty$ esetén vagy az első és harmadik, vagy a második és negyedik pont esik össze. Ha pedig $k=1$, akkor a $k = \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB}$ egyenletből látható, hogy C összeesik D-vel. A k ezen 3 speciális értékének tehát az a geometriai jelentése, hogy a 4 pont közül kettő összeesik

Három már nem eshetik össze, mert akkor $k = \frac{0}{0}$ határozatlan alakot ölt.

Vizsgáljuk az összes lehető értékeket, ha $k = -1$. Ekkor $k = \frac{1}{k} = -1$; $1-k = \frac{k-1}{k} = 2$; $\frac{1}{1-k} = \frac{k}{k-1} = \frac{1}{2}$

Tehát a 4 pont összes permutatioi csak 3 különböző kettős arányszámértéket szolgáltatnak: $-1, 2, \frac{1}{2}$, a minek geometriai jelentése szintén igen egyszerű. Ha $k=-1$, a negy pont harmonicus, és pedig az 1 és 2. pont az egyik párt, a 3 és 4 pont a másik párt alkotják, mert ekkor

$$k = -1 = \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB} = (ABCD),\ \text{ha pedig}\ \frac{k-1}{k} = \frac{1}{k}$$

vagyis $k = 2 = \frac{AB}{BC} : \frac{AD}{DC} = (ACBD)$ akkor a harmonicus viszonyban az 1 és 3, a 2 és 4 pont tartozik össze, ugyanilyen az összetartozás, ha $k = 1-k$ vagyis $k = \frac{1}{2}$

$$k = \frac{1}{2} = \frac{AD}{DC} : \frac{AB}{BC} = (ACDB),$$

vagyis $1-(ABCD)-(ACBD)=0$ de $(ABCD)=k$,
úgyhogy $(ACBD)=1-k$ és elvégezve a kettős cserét

$$(ACBD)=(BDAC)=(CADB)=(DBCA)=1-k$$

Az első és utólsó permutatió mutatja, hogy ha $(ABCD)$-ben felcseréljük csupán a két belső vagy csak a két külső elemet, k átmegy $(1-k)$-ba.

Három újabb permutatió csoportot kapunk, ha az előbbi három csoportban kifejezett tételeket ismételten alkalmazzuk a két utóbbi csoportra. Így $(ABDC)$-ben felcserélve a két belső elemet $\frac{1}{k}$ átmegy $1-\frac{1}{k}=\frac{k-1}{k}$-ba, tehát

$$(ADBC)=(BCAD)=(CBDA)=(DACB)=\frac{k-1}{k}$$

ha pedig $(ACBD)$-ben felcseréljük a két utólsó elemet, $1-k$ átmegy $\frac{1}{1-k}$-ba $(ACDB)=(BDCA)=(CABD)=(DBAC)=\frac{1}{1-k}$

és a harmadik csoportot kapjuk, ha a $\frac{k-1}{k}$ csoport $(ADBC)$ permutatiójában felcseréljük a két utólsó elemet, minek folytán $\frac{k-1}{k}$ átmegy reciprokjába

$$(ADCB)=(BCDA)=(CBAD)=(DACB)=\frac{k}{k-1}$$

Négy pont kettős aránymszáma tehát a szimbolumok permutatiójával összesen 6, általában különböző értéket vehet fel.

De a kettős aránymszámnak bizonyos speciális értékei mellett ez a 6 érték kevesebbre reducálódik. Ezekhez a speciális k értékekhez eljutunk, ha két-két értéket egyenlettel kapcsolunk össze s ebből k értékét meghatározzuk.

Legyen legelőször $k=\frac{1}{k}$, azaz $k^2=1$ Ebből $k=\pm 1$
Lássuk, hov $k=1$, milyen értékek adódnak a pontok per-

tételre: Az $(ABCD) = \frac{AC.BD}{AD.BC}$ kettős arányszámban a harmadik pont helyett egy más C_1 pontot vegyünk, és a nyert

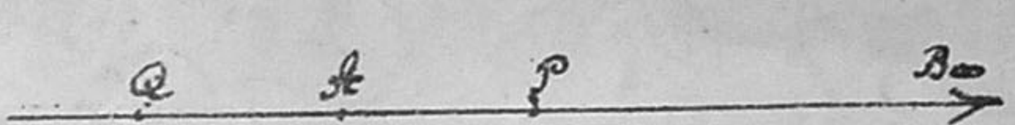
$$(ABC_1D) = \frac{AC_1.BD}{AD.BC_1}$$

k arányszámmal osszuk el az elsőt, akkor a hányadosból elesik a D pont $\frac{(ABCD)}{(ABC_1D)} = \frac{AC.BC_1}{AC_1.BC} = (ABCC_1)$

Ha tehát két arányszámban a harmadik helyen álló pontok különböznek, akkor hányadosukban ez a két pont a 3 és 4 ik helyre kerül. Ebből az egyenletből következik, hogy ha akármily coordinátarendszerben két pont P és Q ellentéteven egyenlő coordinátával bir, akkor ezek a rendszer két alappontjára nézve harmonicusok. Mert ha $(ABPE) = k$

$(ABQE) = -k$, akkor hányadosuk $(ABPQ) = -1$

a mi azt mondja, hogy P és Q harmonicus A és B-re nézve. Ez a tétel áll minden coordinatarendszerre, mert a többiek csak speciális esetei a kettős arányszámcoordináta rendszernek. Ha pl. távolsági coordináta rendszerben, a hol B végtelenben van és A a kezdőpont, P coordinátája A-ra nézve x, Q-é $-x$, azaz P és Q



az A két oldalán attól egyenlő távolban vannak, akkor ez a két pont harmonicus a kezdőpontra és a végtelen távoli pontra nézve.

A második egyenlethez jutunk, ha olyan két arányszámnak alkalmazzuk meg a hányadosát, melyekben az első pontok különböznek. A különböző pontokat 3ik helyre hozva

Bathory J.

$$\frac{(ABCD)}{(A_1BCD)} = \frac{(CDAB)}{(CDA_1B)} = (CDAA_1) = (AA_1CD)$$

azaz $\frac{(ABCD)}{(A_1BCD)} = (AA_1CD)$

a mely egyenlet kifejezi a második szükségtes tételt.

Coordináta transformatiók.

Láttuk az előbbiekben, miképp változik 4 pont kettős arányszáma, ha a 4 pont symbolumát felcseréljük. Vizsgáljuk most a kettős arányszámot ismét mint coordinatát, mint egy változó P pont coordinátáját $k = (ABPE)$ és nézzük, mi értelme van a permutálásra nyert tételeknek. Ha P pontot helyén hagyjuk és a másik három pont symbolumát minden lehető módon permutáljuk összesen 6 féleképpen, ennek a permutálásnak az a jelentése, hogy a 3 fix pont közül minden egyes esetben más két pontot tekintünk alappontoknak, mást egységpontnak vagyis P pontot más-más coordináta rendszerre vonatkoztatjuk. Ezen 6 féle coordináta transformatió következtében az ismert tételek értelmében következőleg változik P coordinátája. Ha

$(ABPE) = k$, akkor $(BAPE) = \frac{1}{k}$; $(BEPA) = \frac{1}{1-k}$; $(EBPA) = 1-k$

$(EAPB) = \frac{k-1}{k}$; $(AEPB) = \frac{k}{k-1}$

Tehát az uj coordináta a réginek elsőfoku rationalis függvénye

A legáltalánosabb coordinatatransformatió a következő feladatban áll. Válasszunk a pontsorban egy coordinátarendszert A, B alappontokkal és E egységponttal, melyben P pont coordinátája

k; egy másik coordinátarendszer coordinátapontjai legyenek A_1 B_1 és E_1, coordinátáik a régi rendszerben a_1, b_1 illetőleg e_1. P coordinátája az új rendszerben k'. Állapítsuk meg az összefüggést P régi és új coordinátája között. A mondottaknak analytikai kifejezései $(ABA_1E) = a_1$, $(ABB_1E) = b_1$, $(ABE_1E) = e_1$, $(ABPE) = k$, $(A_1B_1PE_1) = k'$.

Az összefüggést k és k' között úgy fogjuk megtalálni, hogy $(ABPE)$-be lépésről-lépésre vezetjük be az új A_1, B_1, E_1 coordinátapontokat, és pedig az előbbi szakasz végén levezetett két tétel segélyével. E_1 bevezetése végett E helyett, alkossuk meg az

$$(ABPE) = k$$

és $(ABE_1E) = e_1$ coordinátáik hányadosát

ez $(ABPE_1) = \frac{k}{e_1}$ (1)

Ha pl. E_1 harmonikusa E-nek A és B-re nézve, azaz $e_1 = -1$, akkor

$$(ABPE_1) = -k$$

Tehát P coordinátája átmegy az ellenkezőjébe, ha egységpontúl a régi egységpont harmonikusát választjuk. Felcserélve (1)-ben A és E_1-et $(E_1BPA) = 1 - \frac{k}{e_1} = \frac{e_1 - k}{e_1}$

ez állván bármely P-re, válaszszuk P egységpontúl A_1-et, akkor a kettőnek hányadosa

$$(E_1BA_1A) = \frac{e_1 - a_1}{e_1}$$

$$(E_1BPA_1) = \frac{e_1 - k}{e_1 - a_1}$$

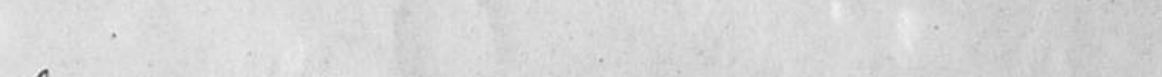
és felcserélve E_1-et A_1-el $(A_1BPE_1) = 1 - \frac{e_1 - k}{e_1 - a_1} = \frac{k - a_1}{e_1 - a_1}$

Ha az utóbbi egyenletben A_1 szerepét felcseréljük B_1-évei, adódik per analogiam $(B_1BPE_1) = \frac{k - b_1}{e_1 - b_1}$ és a kettő hányadosával kifejezve.

$$(A_1 B_1 P E_1) = \frac{k-a_1}{k-b_1} : \frac{e_1-a_1}{e_1-b_1} = k' \text{ vagyis}$$

$$k' = \frac{k-a_1}{k-b_1} : \frac{e_1-a_1}{e_1-b_1}$$

Tehát az uj coordináta a réginek lineáris tört függvénye. Ez az egyenlet képviseli a legáltalánosabb coordinatatranszformatiót Te adhatunk ennek transformatió egyenletnek más értelmezést is. Ha ugyanis egy pontsorban választunk egy (A B E) coordináta-rendszert, s felveszünk tetszészerinti P pontot A_1, B_1, E_1 és P_1, akkor ezeknek kettős arányszámát a mi egyenletünk szolgáltatja, ha ismerjük külön mindegyiknek kettős arányszám-coordinatoját. Könnyü belátni, hogy ez a formula ugyanaz, mint a mely a távolsági coordinátarendszerben négy pont kettős arányszámát szolgáltatta. Láttuk ugyanis, hogy ha O kezdőpontra vonatkozólag A B P és E coordinátái a, b, x és e, akkor



kettős arányszámuk

$$k = \frac{x-a}{b-x} : \frac{e-a}{b-e} = \frac{x-a}{x-b} : \frac{e-a}{e-b}$$

a mi formailag egyezik a mi transformatió egyenletünkkel, csakhogy itt a 4 pontnak távolsági coordinátái szerepelnek.

A legáltalánosabb coordinata transformatióra nézve elég megjegyezni annyit, hogy az uj coordináta a réginek lineáris tört függvénye, mert ha megadjuk ezt a tört függvényt

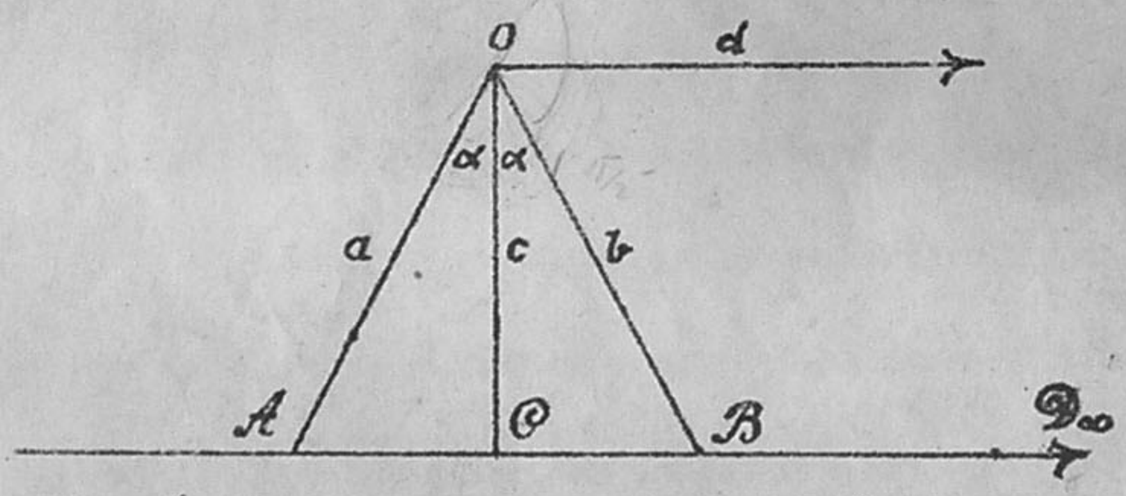
$$k' = \frac{\alpha k + \beta}{\gamma k + \delta}$$

a hol k a régi, k' az uj coordináta, $\alpha \beta \gamma \delta$ jól meghatározott állandók, akkor ebből könnyen megh meghatározhatjuk az $A_1 B_1 E_1$ uj alap- illetőleg egység- pontoknak régi coordinátáit. Mert láttuk [24 oldal]

hogy A_1-re nézve $k'=0$, tehát $k=-\frac{\beta}{\alpha}$ vagyis az a pont a régi rendszerben, melynek coordinátája $-\frac{\beta}{\alpha}$, képezi az uj rendszer első alappontját. B_1-ben $k'=\infty$, azaz $\gamma k + \delta = 0$, tehát $k=-\frac{\delta}{\gamma}$ az uj rendszer második alappontjának coordinátája a régi rendszerben. Végre E_1-ben $k'=1$, ebből adódik $k=\frac{\delta-\beta}{\alpha-\gamma}$ mint az uj egységpont coordinátája a régi rendszerben.

Miután mindannyi tételek, melyek állanak 4 pont kettős arányszámára, érvényesek 4 sugár vagy 4 sik kettős arányszámára, ezzel egyszersmind mind a három egy dimensiós alakzatra nézve elvégeztük a coordinátatransformatió feladatát.

Legyen itt még szó 4 sugár harmonicus viszonyairól egy speciális esetéről, a mely adódik, ha egy centrumból projiciálunk egy oly harmonicus pontnégyest, melynél egyik pont a végtelenben van, tehát felezi a másik pontpár közét. A projectio O centrumát a felező C pontban emelt merőlegesen választjuk. A projiciáló a, b, c, d sugarak szintén harmonicus viszonyt alkotnak és pedig a c sugár felezi az (ab) szöget, $d \perp c$, tehát d felezi (ab) kiegészitő szögét, mert ha $ab=2\alpha$ akkor külső szögük $\pi-2\alpha$ és $(db)=\pi-2\alpha-\frac{\pi}{2}+\alpha=\frac{\pi}{2}-\alpha$. Tehát mondhatjuk, hogy valahányszor egy sugársor 4 sugara olyan, hogy kettő közülök a másik kettőnek szögeit felezi, akkor a 4 sugár harmonicus; és fordítva ha 4 harmonicus sugár közül kettő merőleges egymásra, akkor ezek a másik kettőnek szögeit felezik.



A projectiv vonatkozás fogalma; projectiv sorok.

Vegyünk fel két tetszőleges elsőfoku alakzatot pl. két pontsort, két sugársort, vagy egy pont- és egy sugársort. Mindkettőben a változó elem meghatározására válasszunk egy coordináta rendszert. Az első alakzatban a változó elem coordinátája legyen k_1, a másodikban k_2 és tegyük fel, hogy a két alakzat olyan viszonyban van egymással, melyből kifolyólag a két coordináta elemet tesz egy $f(k_1 k_2)=0$ algebrai egyenletnek mely k_1-ben n_2-ed, k_2-ben n_1-ed fokú. Ez a vonatkozás tehát abban áll, hogy az első alakzat egy szabott k_1 coordinátaju elemehez ezen egyenlet értelmében n_2 általában különböző elem tartozik a második alakzatban; és a második alakzat egy szabott k_2 coordinátaju elemehez n_1 általában különböző elem tartozik az első alakzatban. Mert a fenti algebrai egyenletnek k_2-ben n_2, illetőleg k_1-ben n_1 gyöke van, természetesen tekintetbe véve a képzetes gyököket illetőleg elemeket is. Valahányszor ilyen vonatkozás áll fenn két elsőfokú alakzat elemei között, azt mondjuk, hogy correspondentiában vannak egymással. Foglalkozzunk ezen correspondentia legegyszerűbb esetével, midőn t. i. $n_1 = n_2 = 1$. vagyis az egyik alakzat egy elemehez egy jól meghatározott elem tartozik a második alakzatban. Ezen viszonyt feltüntető legalábbacsabb algebrai egyenlet

$$axk_1k_2 + b_1k_1 + b_2k_2 + c = 0$$ bilineáris egyenlet.

a hol a, b_1, b_2 és c állandó coefficiensek. A correspondentia ezen legegyszerűbb esetét projectivitásának, vagy projectiv vonatkozásának nevezzük. Hogy szabatosabban fogalmazhassuk a projectivitás fogalmát, lássuk előbb ezen vonatkozásnak egy jellemző tulajdonságát. Azt a két elemet a két alakzatban, melynek k_1 és k_2 coordinátája kielégíti a projectivitás egyenletét, megfelelő elemeknek nevezzük. Ha az első alakzat egy bizonyos elemének coordinátája k_1, akkor a megfelelő elem coordinátája.

$$\text{I.} \qquad k_2 = -\frac{b_1k_1 + c}{ak_1 + b_2}$$

$k_1 = -\frac{b_2k_2 + c}{ak_2 + b_1} = -\frac{b_2}{a} + \frac{ac - b_1b_2}{a(ak_2 + b_1)} = \frac{b_2(ak_2 + b_1)}{a(ak_2 + b_1)}$

Ebből az egyenletből látható, hogy ha felveszünk az első alakzatban 4 pontot $[A_1\ B_1\ C_1\ D_1]$ melyeknek k_1 coordinátája a_1, b_1, c_1, d_1 és a megfelelő 4 pont k_2 coordinátája ezen formulából kiszámítva $a_2\ b_2\ c_2\ d_2$, akkor ezen 4 megfelelő pont kettős arányszáma egyaránt. Hogy ezt könnyebben belátthassuk, transformáljuk az első alakzatbeli k_1 coordinátáját, és pedig az uj k_1' coordináta legyen $k_1' = -\frac{b_1k_1 + c}{ak_1 + b_2}$. Az uj rendszerben tehát a megfelelő elemek coordinátái egyenlők, $k_1' = k_2$, a miből azonnal látszik, hogy 4-4 megfelelő elem kettős arányszáma egyaránt. Mert ha a megfelelő 4 elem közöl coordinátái $a_1'\ b_1'\ c_1'\ d_1'$, a kettős arányszám mindkét sorban:

$$\frac{c_1' - a_1'}{b_1' - c_1'} : \frac{d_1' - a_1'}{b_1' - d_1'}$$

Ezek után mondhatjuk, hogy két sor projectiv, ha egy elemnek az egyikben egy elem felel meg a másikban és 4 megfelelő elem

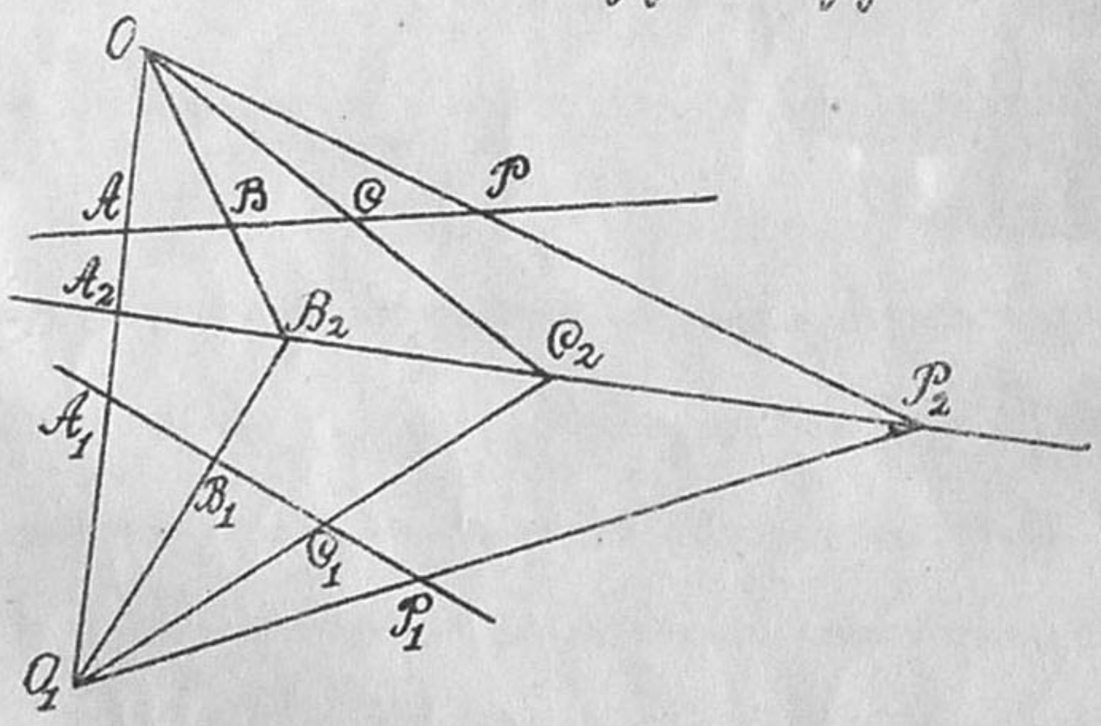
kettős arányszáma ugyanaz.

Kérdés, hogy lehet két projektiv sor megfelelő elemeit felkeresni.[2] Már az I-egyenletből látható, hogy ha 3-3 megfelelő elemet tetszés szerint kijelölünk, már a többi meg van határozva, vagyis ha megadjuk, hogy

k_1'-nek megfelel k_2'
k_1''-nek " k_2''
k_1'''-nek " k_2'''

akkor az I alatti lineáris tört függvény coefficienseit ezen adatokból meghatározhatók, és így minden ujabb k_1-hez a megfelelő k_2 számitással meghatározható.

Ez beigazolást nyer a szerkesztés által is pl. két pontsor esetén. Mert ha az egyik egyenesen felveszünk 3 pontot A, B, C és ezeknek megfelelői gyanánt a másikon 3 tetszésszerinti A_1, B_1 C_1 pontot, akkor ezzel az első egyenes tetszésszerinti P pontjának megfelelő P_2 pont helyzete a másodikon egyenesen teljesen meg van határozva. A szerkesztés következőleg történik. A A_1 egyenesen felveszünk két pontot O és O_1; O-ból projiciáljuk az első, O_1-ből a második pontsort. OB és O_1B_1 valamint OC és O_1C_1 sugarak metszőpontjain B_2 illetve C_2-n át egyenest fektetünk, mely OP sugarat P_2-ben metszi; O_1P_2 és a második egyenes metszése P_1 a P pont megfelelője. Mert axiomatikus alapján, hogy 4 sugár által kimetszett 4 pont kettős



arányszámai ugyanazok bármely egyenes esetén, következik, hogy

~~tetszőleges~~ $(ABCP) = (A_2 B_2 C_2 P_2) = (A_1 B_1 C_1 P_1)$

~~metszett A_1 által~~ $(ABCP) = (A_1 B_2 C_2 P_2)$

tehát a szerkesztett két sor tényleg projectiv. Ez a szerkesztés mutatja egyszersmind a projectiv elnevezés okát, a mennyiben a projicitálással hoztuk a két pontsort egymással a kívánt viszonatkozásba.

Meg kell azonban jegyeznünk, hogy az

$$ak_1k_2 + b_1k_1 + b_2k_2 + c = 0$$

egyenlet csak abban az esetben értelmez a definitiónak megfelelő igazi projectivitást, ha a consolansokból alkotott következő különbség $ac - b_1b_2 \neq 0$ azaz nem nulla. Mert ha $ac - b_1b_2 = 0$ és még $a \neq 0$, akkor következő alakban irván az egyenletet

$$\left(k_1 + \frac{b_2}{a}\right)\left(k_2 + \frac{b_1}{a}\right) + \frac{ac - b_1b_2}{a^2} = 0$$

látható, hogy akkor a projectivitást a következő egyenlet képviselné

$$\left(k_2 + \frac{b_2}{a}\right)\left(k_2 + \frac{b_1}{a}\right) = 0$$

De ha k_1 változó, akkor szükségképen a második factor nulla, azaz $k_2 = -\frac{b_1}{a}$, bármily értéket adjunk k_1-nek; de ez azt mondja, hogy ilyenkor az első sor minden elemének ugyanaz az elem felel meg a másodikban, a melynek coordinátája t.i. $-\frac{b_1}{a}$. Ha pedig k_2 változó, akkor az első factor tűnik el, a miből $k_1 = -\frac{b_2}{a}$ vagyis a második sor minden eleméhez ugyanaz az ox elem tartoznék az első sorban t. i. az, melyre nézve $k_1 = -\frac{b_2}{a}$. Ez a vonatkozás azonban nem felel meg a fent definiált projectivitásnak, tehát szükséges, hogy $ac - b_1b_2 \neq 0$ legyen.

Az $ac - b_1b_2 = 0$ esetén mutatkozó vonatkozást degenerált

projectivitásnak nevezzük. Itt feltettük, hogy $a \neq 0$; de könnyű megyyőződni, hogy $a = 0$ esetén sem valódi a projectivitás. Mert, ha

$$ac - b_1 b_2 = 0$$

és még

$$a = 0$$

akkor vagy $a=0, b_1=0$ | vagy $a=0, b_2=0$ | egyenletrendszer teljesül. De akkor az első esetben k_1, a második esetben k_2 bármyozmék az egyenletből, tehát nem is volna semmiféle viszonyozás a két alakzat között. Tehát a projectivitáshoz szükséges, hogy $ac - b_1 b_2 \neq 0$ legyen.

Közös tartóval bíró projectiv sorok. Kettős pontok.

A projectiv viszonynak egy különös esete az, midőn a két projectiv sor közös tartóval bir.

Tárgyaljuk különösebben azt az esetet, a mikor két projectiv pontsor bir közös tartóval. Tehát egy egyenes egyszer mint az első, másszor mint a második pontsorhoz tartozó jő tekintetbe. Célszerű mindkét sor számára ugyanazt az (A B C) koordinátarendszert választani. Ez a három coordinátapont egyik sorhoz sem tartozik, csupán mint az egyenes három pontja jő tekintetbe. Legyen továbbá a P pont coordinátája, mikor az az első pontsorhoz tartozik, k_2, és k_2, mikor a második pontsorhoz számítjuk, hol pedig egyikhez sem számítjuk, coordinátája k legyen.

A kérdés, mellyel most foglalkozunk, abban áll, megvizsgálni vajon van e két ugyanazon tartón fekvő projectiv pontsoron oly pont, melyet ha az egyik vagy másik pontsorhoz tartozónak tekintünk, megfelelő pontjával összeesik. Az ilyen pontokat kettős pontoknak fogjuk nevezni.

Tegyük fel, hogy van ilyen pont, coordinátája legyen k, akkor ha $k_1 = k$, szükségképen $k_2 = k$, tehát $k_1 = k_2 = k$, minek folytán a projectivitás egyenlete átmegy a következő quadratikus egyenletbe

$$ak^2 + (b_1 + b_2)k + c = 0$$

melynek gyökei szolgáltatják a keresett kettős pontoknak k coordinátáit. Ezekre nézve négy eset lehetséges:

I. Az egyenlet discriminansa negativ: $4ac - (b_1 + b_2)^2 < 0$

akkor két reális gyöke van az egyenletnek, tehát a projectiv viszonynak van két valós kettős pontja.

II. $4ac - (b_1 + b_2)^2 > 0$, akkor az egyenletnek két conjugált complex gyöke, tehát a projectiv viszonynak két conjugált complex kettős pontja van.

III. $4ac - (b_1 + b_2)^2 = 0$, de a coefficiensek nem mind nullák, akkor az egyenletnek egy kettős gyöke van, tehát a projectiv viszonynak van egy reális kettős pontja.

IV. $4ac - (b_1 + b_2)^2 = 0$ és e mellett $a = c = b_1 + b_2 = 0$, akkor az egyenlet identitás, bármily k értéke kettős pontot szolgáltat, vagyis az egyenes minden pontja kettős pont, minden pont összeesik társával, a két sor identikus. Mert ha $b_1 + b_2 = 0$, tehát $b_2 = -b_1$, a projectivitás egyenletéből következik, hogy akkor $k_1 = k_2$. De tudjuk az algebrai elméletéből, hogy mihelyt

egy quadratikus egyenletnek 3 gyöke van, már az egyenlet ide-
lítás. És így mondhatjuk, hogy mihelyt, közös egyenesen fekvő két
projektiv pontsorban 3 kettős pontot kimutattunk, már valá-
mennyi pont kettős pont. Igazi projektiv viszonynak, tehát leg
feljebb két kettős pontja van.

Involució. Involuciós pontsor.

Képzeljünk egy egyenesen két projektiv pontsort. Az egyc-
nes egy tetszőszerinti k coordinátájú pontja, midőn azt az
első sorhoz számítjuk, legyen P_1 megfelelője P_2; midőn pedig a

P_1 P_2
Q_1

második sorhoz számítjuk,
legyen az Q_1, és kérdezzük
mikor fog ennek társa Q_2 a P_2-vel összeesni? Midőn a pontot
az első sorhoz számítjuk, $k_1 = k$, s akkor P_2 coordinátája

$$k_2 = -\frac{b_2 k + c}{ak + b_2}$$

Mikor pedig a második sorhoz számítjuk, $k_2 = k$, s akkor Q_2
coordinátája $k_1 = -\frac{b_2 k + c}{ak + b_2}$

P_2 és Q_2 tehát összeesik, ha $k_2 = k_2$; azaz

$$\frac{b_2 k + c}{ak + b_2} - \frac{b_2 k + c}{ak + b_2} = 0$$ a miből rendezés u-
tán k számára a következő egyenlet adódik

$$(b_1 - b_2)(ak^2 + (b_1 + b_2)k + c_1) = 0$$

1) Ez az egyenlet kétféleképen teljesül; ha $b_1 \neq b_2$, akkor
$ak^2 + (b_2 + b_2)k + c = 0$, ez pedig a kettős pontokat szolgáltató e-
gyenlet, ekkor tehát egy kettős pont bír azzal a tulajdonsággal,

hogy mint az egyik vagy másik pontsorhoz tartozónak megfelelő pontjai egybeesnek, a mi különben a kettős pont fogalmából is kitünik.

2. ha $b_1 = b_2 = b$, akkor minden k értéke eleget tesz a kivánt egyenletnek, tehát a közös tartóval bíró két projectiv pontsor olyan helyzetü, hogy bármely pontnak, mint az egyik vagy másik pontsorhoz tartozónak megfelelő pontjai egybeesnek. Ilyenkor azt mondjuk, hogy a két pontsor involuziós helyzetü, a projectivitásnak ezt a különös esetét magát involucziónak nevezzük. Az involució egyenlete adódik a projectivitás egyenletéből, ha abban $b_1 = b_2 = b$, az egyenlet tehát

$$a k_1 k_2 + b(k_1 + k_2) + c = 0$$

mely, a mint látható, k_1-ben és k_2-ben symmetricus és mindkettőben elsőfoku. Tehát az involució analytikai kifejezése egy bilinearis symmetrikus egyenlet. Világos, hogy ha két projectiv pontsor involuziós helyzetü, már nem is szükséges többé a két pontsort megkülönböztetni, a helyett beszélhetünk egy involuziós pontsorról, mely az involucióval egybekötött pontpárok rendszeréből áll. Természetes, hogy az involució egyenlete bármilyen coordinátarendszerben érvényes. Midőn tehát hozzáfogunk az involució tanulmányozásához, czélszerü bevezetni egyszerü távolsági coordinátarendszert választani, melyben a coordináta a régi jelölés szerint x, tehát $k_1 = x_1$, $k_2 = x_2$, úgyhogy az involució egyenlete

$$a x_1 x_2 + b(x_1 + x_2) + c = 0 \qquad (I)$$

Kérdezzük először, hogy van e az involuziós pontsornak oly

pontja, mely társával összeesik? Ha $x_1 = x_2 = x$, akkor

$$ax^2 + 2bx + c = 0$$

Ezen quadratikus egyenlet gyökei szolgáltatják az involuczió kettős pontjait, melyeknek jellege és száma a discriminánstól függ.

I. Ha $ac - b^2 < 0$, két reális kettős pontja van az involuczionak.

II. ha $ac - b^2 > 0$, a két kettőspont conjugált complex

III. ha $ac - b^2 = 0$, egy kettős pontja van az involuczionak

Itt ki van zárva a II esetnek azon alesete, midőn a coefficienssek mind mulják, mert akkor nem is volna involuczió. Ezen három esetnek megfelelőleg nevezzük az involuczió hyperbolicus, illetőleg ellipticus, illetőleg parabolicus involuczionak, mely elnevezések okát később fogjuk látni.

Hogy a pontpárok tulajdonságait az egyes involuczió fajok esetén jobban felismerhessük, czélszerü lesz az (I.) alatti egyenletet a coordinaták tranoformálásával egyszerübb alakra hozni. Itt két esetet kell megkülönböztetnünk:

I. $a \neq 0$, akkor az egyenlet ily alakra hozható

$$\left(x_1 + \frac{b}{a}\right)\left(x_2 + \frac{b}{a}\right) + \frac{ac - b^2}{a^2} = 0$$

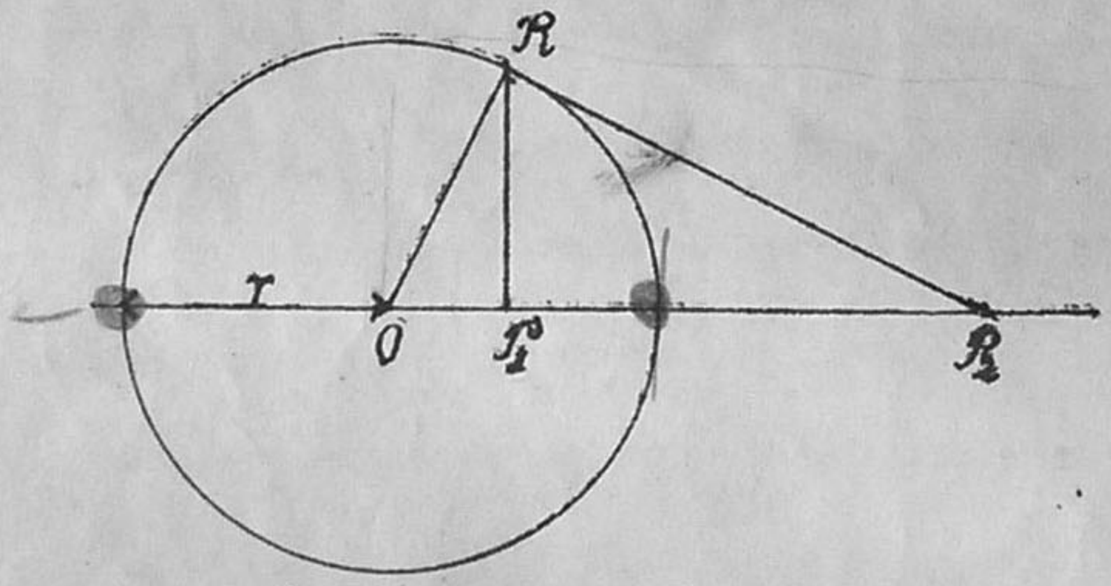
Már most következőleg tranoformálunk: az uj coordinátaskat x_1' és x_2'-el jelölve, legyen $x_1 + \frac{b}{a} = x_1'$ és $x_2 + \frac{b}{a} = x_2'$, tehát az uj távolsági coordinátarendszer origoja ott van, a hol $x_1' = x_2' = 0$, azaz a hol $x_1 = x_2 = -\frac{b}{a}$. A tranoformált egyenlet

$$x_1' x_2' = \frac{b^2 - ac}{a^2}$$

És most vegyük az involuczió fajokat rendre.

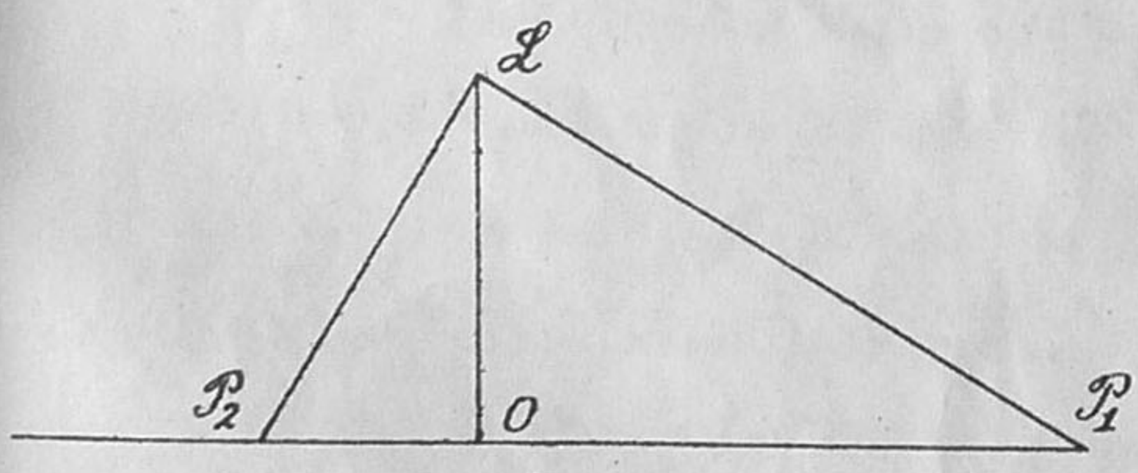
1, hyperbolicus involuczió esetén $\frac{b^2 - ac}{a^2} > 0$, tehát ha

$\frac{b^2-ac}{a^2} = r^2$, az egyenlet $x_1' x_2' = r^2$; ez az egyenlet emlékeztet a harmonicus viszony egy transformált analytikai kifejezésére [17. 18 old]. Ha ugyanis a távolsági coordinátarendszer origója (É) az egyik pontpár AB távolát felezi és AÉ = r, akkor az erre nézve harmonicus pontpár p és q coordinátáira áll, hogy $pq = -r^2$. Itt is ugyanez a viszony áll fenn az involuczió két társpontja között; a harmonicus viszony két fix pontja a coordinátarendszer origójától jobbra és balra fekszik, attól r távolságban, mely $r = \left(\frac{b^2-ac}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}$. Mondhatjuk tehát, hogy hyperbolicus involuczió esetén a pontpárok a sor két fix pontjához harmonicusok, vagyis a hyperbolicus involuczió nem egyéb, mint két fix ponthoz harmonicus fekvésü pontpárok rendszere. Ez a két fix pont a hyperbolicus involuczió kettöspontjait képezi, mert tényleg ha $x_1' = r$, akkor $x_2' = r$, és ha $x_1 = -r$, $x_2' = -r$. Ezen tétel alapján egyszerüen megszerkeszthetjük az involuczió összetartozó pontjait. A feltevés szerint felvett O centrumból a fenti r sugárral kört irunk. Ha P_1, melynek P_2 társa keresztetik, a körön belül van, akkor abban merőlegest emelve az egyenesre, míg a kört metszi R-ben, ezen metszéspontban a körhöz érintöt húzunk, mely az egyenest a keresett P_2 társpontban metszi. Ha a pont a körön kivül fekszik pl. P_2, akkor P_1 társának felkeresése végett a forditott szerkesztést végezzük: P_2-ből érintöt



húzunk a körhöz, az R érintési pontból az egyenesre bocsátott merőleges talppontja a keresett P_1 társpont. Mert ORP_2 derékszögü háromszögből következik, hogy OR befogójának négyzete $r^2 = OP_1 . OP_2 = x_1' . x_2'$, tehát P_1 és P_2 megfelelő pontok. A kör belsejében fekvő pont társa a körön kivül van és forditva; minél jobban közeledik a pont a kör kerületéhez, társa is mindjobban közeledik hozzá és a kör kerületén a kettő összeesik, a kerületnek ezen két pontja tehát az involuczió kettős pontjai. A kör centrumának társa a végtelen távoli pont. Ezt a körcentrumot nevezzük a hyperbolicus involuczió centrumának. Ettől egyenlő távolságban fekszenek a kettőspontok.

2. Az elliptikus involuczió csak abban különbözik az előbbitől, hogy itt $\frac{b^2 - ac}{a^2} < 0$, tehát $x_1' x_2' = -r^2$. A megfelelő pontok mindig ellenkező oldalain fekszenek az origónak, mert coordinátáik ellentett jelüek és igy egyik pont sem esik össze a társaival, a kettős pontok képzetesek. Ha a coordinaták absolut értékét vesszük, akkor $|x_1'| |x_2'| = r^2$. Ezeket tudva, könnyü az elliptikus involuczió bármely pontpárját megszerkeszteni. O-ban emelt merőlegesre rámérve az r távolságot L-ig, a tetszésszerint felvett P_1 pontot L-el összekötő egyenesre L-ben merőlegest emelve, ez az egyenest az keresett P_2 társpontban metszi. P_1 és P_2 megfelelő pontok, mert azonkivül, hogy az origo ellenkező oldalain fekszenek, coordinátáikra áll, hogy $|OP_2| . |OP_1| = |x_1'| . |x_2'| = r^2$



Itt is a O pont társa a végtelen távoli pont. O az elliptikus involuczió centruma.

3., A parabolicus involucziónál $ac-b^2=0$, tehát $x_1'x_2'=0$ a parabolicus involuczió egyenlete. Ebből kitünik, hogy minden a 0-on kivül fekvő pontnak társa 0; a parabolicus involuczió tehát nem igazi projectiv viszony, mert minden pontnak ugyanaz a pont felel meg. 0 maga magának társa, tehát az involuczió kettős pontja.

II. A második eset, melyet az involuczios pontpárok vizsgálatánál tekintetbe kell venni, az, midön $a=0$. Ekkor szükségképen $b\neq 0$, tehát szabad vele osztani, és az involuczió egyenlete lesz

$$x_1+x_2+\frac{c}{b}=0$$

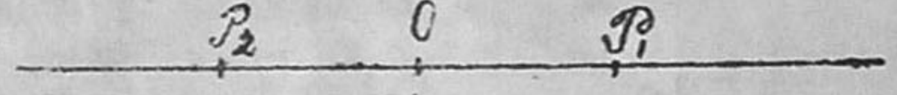
vagy

$$x_2+\frac{c}{2b}+x_2+\frac{c}{2b}=0$$

és végezve a következő transformatiót,: $x_1+\frac{c}{2b}=x_1'$ és $x_2+\frac{c}{2b}=x_2'$, miáltal az uj coordinátarendszerek közös origója oda jön, a hol $x_1=x_2=-\frac{c}{2b}$, egyenletünk következő egyszerü alakot nyer

$$x_1'+x_2'=0$$

Tehát az involuczió megfelelő pontjai az origo két oldalán attól egyenlő távolságban fekszenek. Ez nyilvánvalóan hyperbolikus involuczió, melynek kettős pontjai 0 és a végtelen távoli pont.



Mert ha $x_1'=0$, akkor $x_2'=0$

és ha $x_1'=\infty$, akkor $x_2'=\infty$

Ez az a két fix pont, melyekre nézve az involuczió pontpárjai harmonicusok.

Involuczios sugársor.

Két egy síkban fekvő projectiv sugársor közös C centrummal

is bírhat, ilyenkor ezen C centrumsugársor elemei egyszer mint az egyik, másszor mint a másik sorhoz tartozók jönnek tekintetbe. Ez a vonatkozás pedig fennáll, ha a két sugársor megfelelő elemeinek coordinatái k_1 és k_2 eleget tesznek a projectivitás általános egyenletének

$$a k_1 k_2 + b_1 k_1 + b_2 k_2 + c = 0$$

Az első kérdés, mely itt is felmerül, az, vajjon van-e a sugársorban oly elem, mely megfelelőjével egybeesik. Ugyanazon eljárással, mint a pontsornál, kapjuk, hogy ezen sugarak coordinatái eleget tesznek a következő quadratikus egyenletnek

$$a k^2 + (b_2 + b_2) k + c = 0$$

és a szerint, a mint ezen egyenlet discriminansa positiv, negativ vagy nulla, a nélkül, hogy a coefficienseknek eltűnésének, lesz a pontsornak két reális, két képzetes, illetőleg egy összeeső kettős sugara; ha pedig a coefficienseknek is eltűnnek, valamennyi sugár kettős sugár, a két sugársor identikus. Ez bekövetkezik, ha 3 reális kettős sugára van a sornak.

Egy ilyen sugársor szintén hozható oly helyzetbe, melynél bármely sugárnak, mint az egyik vagy másik sugársorhoz tartozónak megfelelő sugarai egybeesnek, ha t. i. ezen involutiónak feltételeztt sugársor megfelelő pontjainak coordinatái k_1 és k_2 eleget tesznek az involutio általános egyenletének

$$a k_1 k_2 + b(k_1 + k_2) + c = 0$$

Itt is ugyanazon az esetek jönnek tekintetbe, mint az involutiós pontsornál. Kettős sugarak tehát az olyan sugarak, melyek involutiós társaikkal összeesnek, és a szerint, a mint két reális, két képzetes vagy egy reális kettős sugárra van az involutiónak, nevez-

zük a sugársort hyperbolikus, elliptikus illetöleg parabolikus involuciós sugársornak. A kettös pontok egyenlete itt is

$$ak^2 + 2bk + c = 0$$

De itt már olyan kérdések is merülnek fel, milyeneket a pontsornál nem láttunk. Nevezetesen kérdezzük, van e a sugársornak olyan involuciós sugárpárja, melynek két sugara egymásra merőleges? Célszerü lesz itt irányfaragenseket használni. Ha tehát $k_1 = tg\varphi_1$, $k_2 = tg\varphi_2$ az involució egyenlete $a.tg\varphi_1.tg\varphi_2 + b(tg\varphi_1 + tg\varphi_2) + c = 0$ a hol a szögeket egy 0 kezdösugártól számitjuk. Tegyük fel, hogy a midön $\varphi_2 = \varphi$, a társsugár erre merőleges azaz $\varphi_2 = \varphi + \frac{\pi}{2}$. Tehát a merőleges társsugarak coordinátái $tg\varphi$ és $tg(\varphi + \frac{\pi}{2}) = -cotg\varphi = -\frac{1}{tg\varphi}$ és behelyettesitve ezen coordinátákat, kapjuk φ számára a következö egyenletet

$$-a + b(tg\varphi - \frac{1}{tg\varphi}) + c = 0$$

vagyis $\frac{tg^2\varphi - 1}{tg\varphi} = \frac{a-c}{b}$ és áttérve a reciprok értékekre

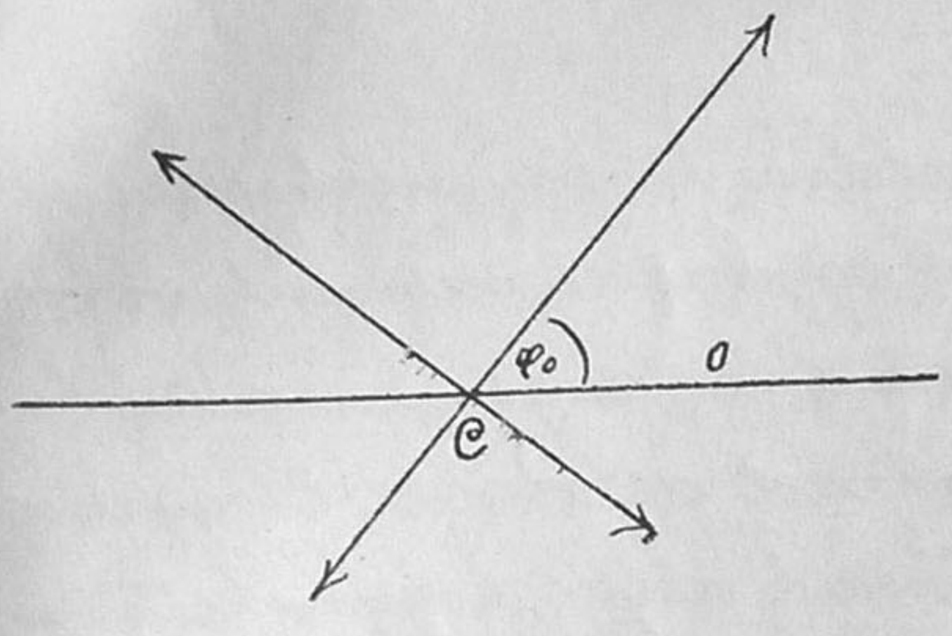
mejd (-2)-vel szorozva $\frac{2tg\varphi}{1-tg^2\varphi} = \frac{2b}{c-a}$ és mivel $tg2\varphi = \frac{2tg\varphi}{1-tg^2\varphi}$

$$tg2\varphi = \frac{2b}{c-a} \qquad \text{I.}$$

Ezen egyenlet szolgáltatja azon φ értékeket, melyekhez tartozó sugarak társaikra merőlegesek. Ilyen φ szög végtelen sok van; ha egyik, mely 0 és π között fekszik, φ_0, akkor az összes ezen $\frac{2b}{c-a}$ tangenshez tartozó φ értékek a $2\varphi = 2\varphi_0 + k\pi$ formulából adódnak, tehát

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{k\pi}{2}$$

Lássuk, hány lényegesen különböző sugarat szolgáltat ez a formula? 0 kezdösugárhoz φ_0 szög alatt húzzuk meg az első sugarat, mely adódik, ha $k=0$. Ha $k=1$, $\varphi = \varphi_0 + \frac{\pi}{2}$, tehát a második ilyen



sugár az elsőre merőleges; ha $k=2$, $\varphi = \varphi_0 + \pi$, ez adja az első sugár meghosszabbitását ellentett irányban; ha $k=3$, $\varphi = \varphi_0 + \frac{3\pi}{2}$, ez a második sugár meghosszabbitása ellentett irányban. A többi k értékeknek megfelelő sugarak ezekkel sorban összeesnek. Tehát csak egy sugara van az involuciós sugársornak, melynek tárva reá merőleges. Ezt a két egymásra merőleges társsugarat nevezzük a sugár-involució tengelyeinek.

Csak egy kivételt kell figyelembe vennünk, midőn t.i. az I egyenletben szereplő tört $\frac{0}{0}$ határozatlan alakot ölt. Ez bekövetkezik, ha $b=0$ és $a=c$, de akkor az involuczió egyenlete:

$$tg\,\varphi_1 \cdot tg\,\varphi_2 + 1 = 0$$

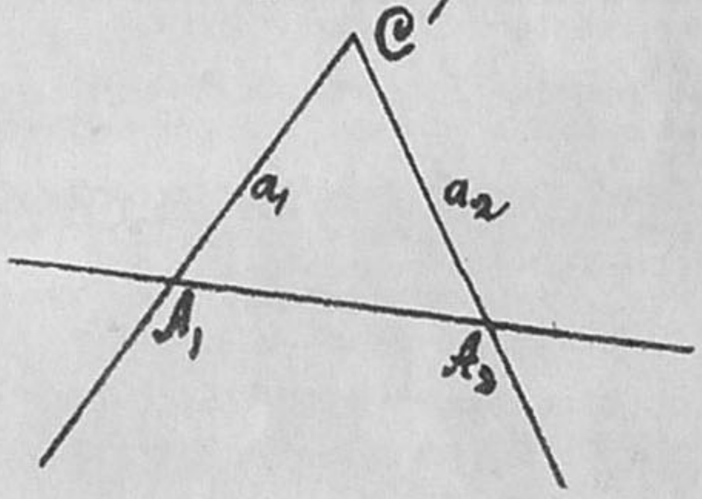
azaz $$tg\,\varphi_2 = -\frac{1}{tg\,\varphi_1}$$

a miből következik hogy $$\varphi_2 = \varphi_2 + \frac{\pi}{2}$$

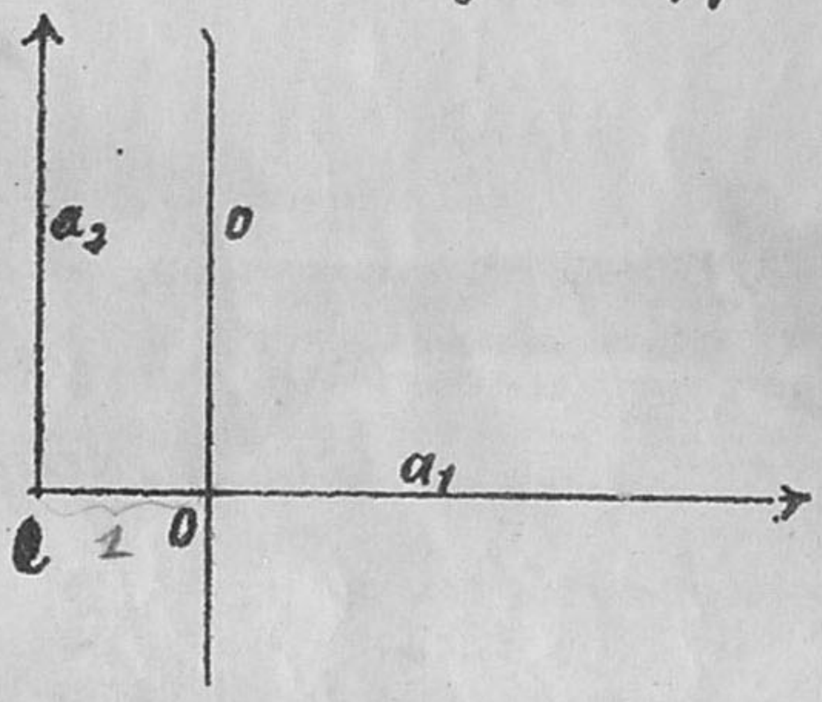
Vagyis ebben az esetben minden sugár a társára merőleges. Az involucziónak ezt a különös esetét circuláris involucziónak nevezzük. Ez tehát a sik egy pontjából kiinduló és egymásra merőleges sugarak rendszeréből áll. Minden más esetben a $\frac{2b}{c-a}$ tört határozott értékkel birván, az involucziónak csak egy merőleges sugárpárja van.

Az involuczió is projectiv természetű, vagyis projiciálással nem változik. Más szóval, ha egy involutorikus pontsort egy C centrumból projiciálunk, a projicioló sugarak involutorikus sugársort alkotnak, melyben az $A_1 A_2$ involuciós pontpár projicioló sugarai

involuciós sugárpárt alkotnak. És fordítva, ha egy involuciós sugársort egy a centrumon át nem menő egyenessel metszünk, involutorikus pontsor keletkezik, melyben az a_1-a_2 sugárpár által kimetszett A_2-A_2 pontok involuciós pontpárt alkotnak. Hogy ez így van, következik abból, hogy a kettős arányszáma a projectióban nem változik, minek folytán ha a pontsorban A_2 és A_2 involuciós társpontok egymással felcserélhetők, a megfelelő sugarak is felcserélhetők, tehát azok is involuciós társsugarak.



Ezt tudva, egyszerűbb alakra hozhatjuk a sugár involució egyenletét. Messük ugyanis az involuciós sugársort az egyik tengelyre, a_1-re merőleges o egyenessel a C centrumtól CO egységnyi távolságban. A kimetszett involuciós pontsorban O és a végtelen távoli pont egy pontpárt alkotnak, tehát O az involució centruma, és így ezt véve az A_1, A_2 megfelelő pontkoordinátáik kezdőpontjának, áll, hogy $x_1 x_2 = \text{const.}$



De tudjuk a pont és sugársor összefüggéséből, hogy ilyenkor a O-tól számított távolsági pontkoordinátái a megfelelő sugarak O-tól számított iránytangensei vel egyenlők, azaz $x_1 = \operatorname{tg} \varphi_1$ és $x_2 = \operatorname{tg} \varphi_2$, vagyhogy a sugárinvolució egyenlete következő egyszerű alakot ölt

$$\operatorname{tg} \varphi_1 \cdot \operatorname{tg} \varphi_2 = \text{const.}$$

Ebből az egyenletből épúgy vonhatunk következtetést az involució

* Mert így a sugár involúciót pontsor involúcióra vonatkozó tételek vissza L. 53-54 oldal

jellegére, mint fennebb az involuciós pontsor esetén. Ha tehát a Const. > 0, akkor két kettős sugara van az involuciós sugársornak, az involució hyperbolicus. Ha Const. < 0, nincs kettős sugara, az involució elliptikus és ha Const. = 0, az involució parabolikus. Mivel a circuláris involucionál $tg\,\varphi_1 \cdot tg\,\varphi_2 = -1$, azért a circuláris involució elliptikus, a mi már onnan is kiviláglik, hogy minden sugár a társára merőleges, tehát összecső sugárpár nincsen.

Az involució adatai.

Egy involució teljesen meg van határozva, ha ismeretes két involuciós elempárjai. Az involució egyenletében

$$ak_1k_2 + b(k_1 + k_2) + c = 0 \qquad (1.)$$

ugyanis 3 állandó szerepel, melyeknek meghatározására elég tudnunk, hogy az α_1 coordinátának társa α_2

a β_1 " " β_2

mert akkor $a\alpha_1\alpha_2 + b(\alpha_1 + \alpha_2) + c = 0 \qquad (2.)$

$$a\beta_1\beta_2 + b(\beta_1 + \beta_2) + c = 0 \qquad (3.)$$

egyenletekkel együtt 3 egyenletünk van, melyek a, b és c-ben lineárisok és homogének. Tehát hogy a, b és c meghatározható legyen, a rendszer determinánsának el kell tünnie,

$$\mathfrak{D} = \begin{vmatrix} k_1k_2 & k_1 + k_2 & 1 \\ \alpha_1\alpha_2 & \alpha_1 + \alpha_2 & 1 \\ \beta_1\beta_2 & \beta_1 + \beta_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Ha ezt az egyenletet rendezzük az k_1 és k_2-ben lineáris lévén

EGYETEMI KÖNYVTÁR BOLYAI TUD. EGYETEM

egy tetszésszerint megadott k_1-hez a megfelelő k_2 involuciós társa egyértékűleg meg van határozva. És ha egy ily módon meghatározott elempárt (1)-be behelyettesítünk, az így nyert egyenletrendszerből a, b és c kiszámítható és azzal az involució is teljesen meg van határozva.

Az előbbiek szerint tehát $\alpha_1\alpha_2$, $\beta_1\beta_2$, $\gamma_1\gamma_2$ involuciós párokat alkotnak, ha eleget tesznek a következő egyenletnek

$$\begin{vmatrix} \alpha_1\alpha_2 & \alpha_1+\alpha_2 & 1 \\ \beta_1\beta_2 & \beta_1+\beta_2 & 1 \\ \gamma_1\gamma_2 & \gamma_1+\gamma_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Az involució paraméteres analytikai kifejezése.

Célszerű lesz az involuciónak egy más analytikai kifejezésével is megismerkednünk, melyekkel elempárokat szolgáltató függvények parameteres combinatiójából nyerünk.

Minden quadratikus egyenlet egy elempárt szolgáltat, ha annak gyökeit egy- egy elem (pont vagy sugár) coordinátaiképp fogjuk fel. Ekkor ha szabott coefficienesekkel felirunk egy négyzetes egyenletet

$$a_0k^2 + a_1k + a_2 = 0$$

akkor ezzel egy elempárt határoztunk meg. Egy más elempárt szolgáltat a $b_0k^2 + b_1k + b_2 = 0$ egyenlet. Már most a második egyenlet λ-szorosát adjuk az előhöz, lesz

$$a_0k^2 + a_1k + a_2 + \lambda(b_0k^2 + b_1k + b_2) = 0 \qquad \text{I.}$$

Ez a negyzetes egyenlet λ minden értékéhez a fenti értelemben egy elempárt szolgáltat, és ha λ felveszen minden értéket $-\infty$ és $+\infty$ között, akkor ezen parameteres egyenlet gyökpárjai, felfogva mint elempárok coordinátai, az elempárok egy egész rendszerét szolgáltatják pl. pontpárok rendszerét. Nyilvánvaló, hogy ebben a rendszerben a két alapegyenletből adódó két elempár is bennfoglaltatik. Mert ha $\lambda = 0$, kapjuk az első egyenletet, ha λ-val való keresztülosztás után $\lambda = \infty$, kapjuk a második egyenletet.

És most győződjünk meg arról, hogy ezen parameteres egyenlettel definiált elempárrendszer involutorikus, vagyis hogy bármelyik pár elemeinek coordinátái eleget tesznek az involuciós egyenletének. Rendezve az egyenletet k hatványai szerint,

$$(a_0 + \lambda b_0) k^2 + (a_1 + \lambda b_1) k + a_2 + \lambda b_2 = 0$$

Ha ennek gyökei k_1 és k_2, akkor

$$k_1 + k_2 = -\frac{a_1 + \lambda b_1}{a_0 + \lambda b_0}$$

$$k_1 k_2 = \frac{a_2 + \lambda b_2}{a_0 + \lambda b_0}$$

0-ra reducálva mindkét egyenletet,

$$a_0 (k_1 + k_2) + a_1 + \lambda [b_0 (k_1 + k_2) + b_1] = 0$$

$$a_0 k_1 k_2 - a_2 + \lambda (b_0 k_1 k_2 - b_2) = 0$$

Ez a két egyenlet köti össze az elempárrendszer egy elempárjának coordinatáit, mindkettő λ nulladik és első hatványaiban lineáris és homogén, tehát determinánsa szükségképpen nulla

$$\begin{vmatrix} a_0 (k_1 + k_2) + a_1 & b_0 (k_1 + k_2) + b_1 \\ a_0 k_1 k_2 - a_2 & b_0 k_1 k_2 - b_2 \end{vmatrix} = 0$$

és ha a kijelölt operatiókat végrehajtjuk, kapunk egy egyenletet,* melyben

* Ezen egyenlet:

$$(a_1 b_0 - a_0 b_1) K_1 K_2 + (a_2 b_0 - a_0 b_2)(K_1 + K_2) + (a_2 b_1 - a_1 b_2) = 0$$

tehát $a = -\begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}$ $b = -\begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ $c = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$

van egy $k_1 k_2$-vel, egy $(k_1 + k_2)$-vel szorzott tag és egy constans tag, szóval kapjuk az involuciò egyenletét, melynek eleget tesz a k_1, k_2 coordinátapair.

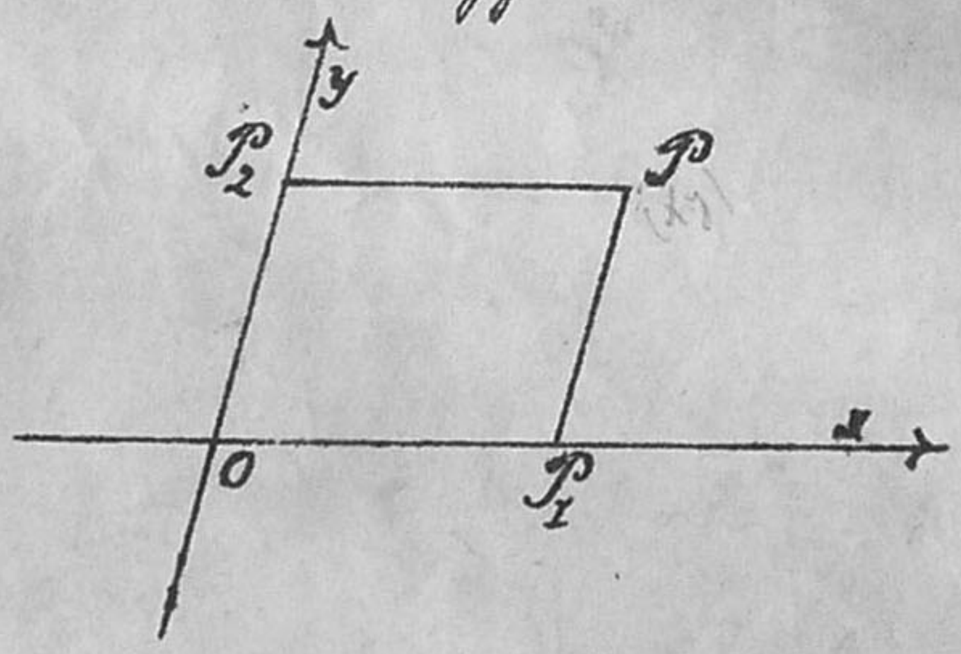
Tehát a mennyiben két négyzetes egyenlet parameteres összetevéséből származó négyzetes egyenlet gyökpair rendszerével értelmezett elempár rendszer involutorikus sort alkot, amnyiban az I. alatti egyenlet szintén az involuciò analytikai kifejezése.

Az eddig tárgyaltakat ismételhetjük a harmadik elsöfoku alapalakzat, a siksor esetén is. Itt is beszélhetünk projectiv, közös tengelylyel biró projectiv és involuciós siksorokról, sikpárokról.

Két dimensiós alakzatok. A sik.

Vegyük tekintetbe a sikot, mint a benne fekvö pontoknak és egyeneknek összességét és kérdezzük elöször, mikép lehet a változó elem, pont vagy egyenes helyzetét a sikban meghatározni.

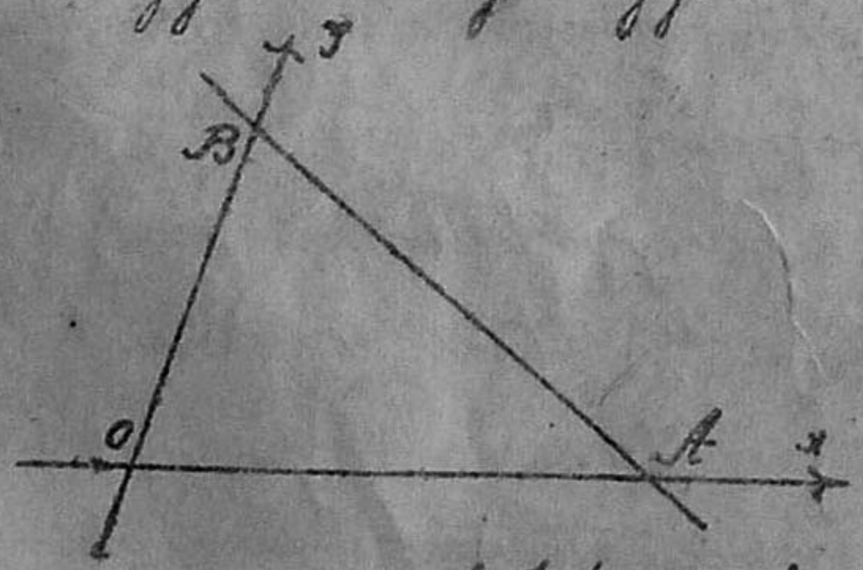
A legegyszerübb eljárás a következö. Felveszünk két egymást O-ban metszö egyenest és O-ból kiindulva, mindkettön megállapitjuk



a positiv haladási irányt. Ezen szabott helyü és irányu egyeneseket nevezzük a coordinátarendszer tengelyeinek, az elsö az x tengely, melynek positiv hegyes vagy tompa szög alatt forgatható O körül a masodik vagyis y tengelybe. Ezekhez még felvesszük a hosszegységet. A sik egy

tetszőleges P pontjának helyzetét ebben a rendszerben következőleg határozzuk meg. P pontot a tengelyekkel párhuzamosan projiciáljuk magukra a tengelyekre; az x tengelyű projectió legyen P_1, az y tengelyű projectió P_2. Ha ismerjük ezen két pont helyzetét a tengelyeken, a P helyzete is teljesen meg van határozva. A P_1 és P_2 meghatározására az ismeretes távolsági coordinatarendszert használjuk, kezdőpontnak véve a tengelyek közös O pontját. Ha P_1 coordinátája x, P_2 coordinátája y, úgy x a P pont első, y a második coordinátája és a P pontot egyszerűen (x, y) pontnak nevezzük. Világos, hogy minden síkbeli P ponthoz egy (x, y) értékpár tartozik és fordítva, ha megadjuk az (x, y) értékpárt, ennek egyetlen egy pont felel meg a síkban, t. i. az, a melyben az x és y coordinátákkal meghatározott P_1 és P_2 pontokon át a tengelyekkel párhuzamos húzott egyenesek egymást metszik. Az x tengely pontjainak második, az y tengely pontjainak első coordinátája nulla. Az origo mindkét coordinátája nulla. A coordinátarendszer tengelyei a végtelen kiterjedésű síkot 4 quadransra osztják, az elsőben $x > 0$, $y > 0$, a másodikban $x < 0$, $y > 0$, a harmadikban $x < 0$, $y < 0$, a negyedikben $x > 0$, $y < 0$.

Egy tetszőleges egyenes a coordinátarendszer tengelyeit metszi két pontban, A-ban az x, B-ben az y tengelyt; a metszőpontok a, illetőleg b coordinátái teljesen meghatározzák az egyenes helyzetét, ezek tehát az egyenes coordinátái. Itt természetesen nem vesszük tekintetbe a kezdőpontot átmenő egyeneseket, melyekre nézve $a = b = 0$, ezeknél más meghatározási módot fogunk

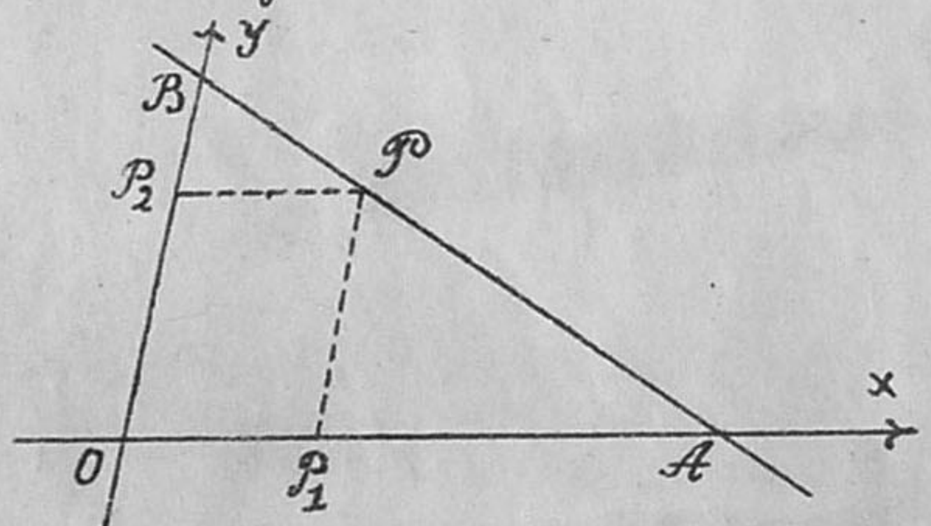


alkalmazni.

A felvett coordinátarendszerben így minden pont megkapja a maga (x, y), minden egyenes a maiga $\underline{a}$ és $\underline{b}$ coordinátáit.

A pont és egyenes összetartozásának feltétele.

Kérdés, mi a pont és egyenes összetartozásának vagyis annak a feltétele, hogy a pont az egyenesen fekküdjék, illetőleg az egyenes a ponton menjen keresztül. Ennek megállapitásánál az egyenesnek oly tulajdonságát fogjuk tekintetbe venni, melyet könnyü analitikailag kifejezni. Az AB egyenesen felveszünk egy P pontot, melynek coordinátái (x, y). Kérdés, mi az összefüggés $x, y, \underline{a}$ és $\underline{b}$ között?



Miután A, B és P egy egyenesen fekszenek,

$$BP + PA + AB = 0$$

osztva BA-val

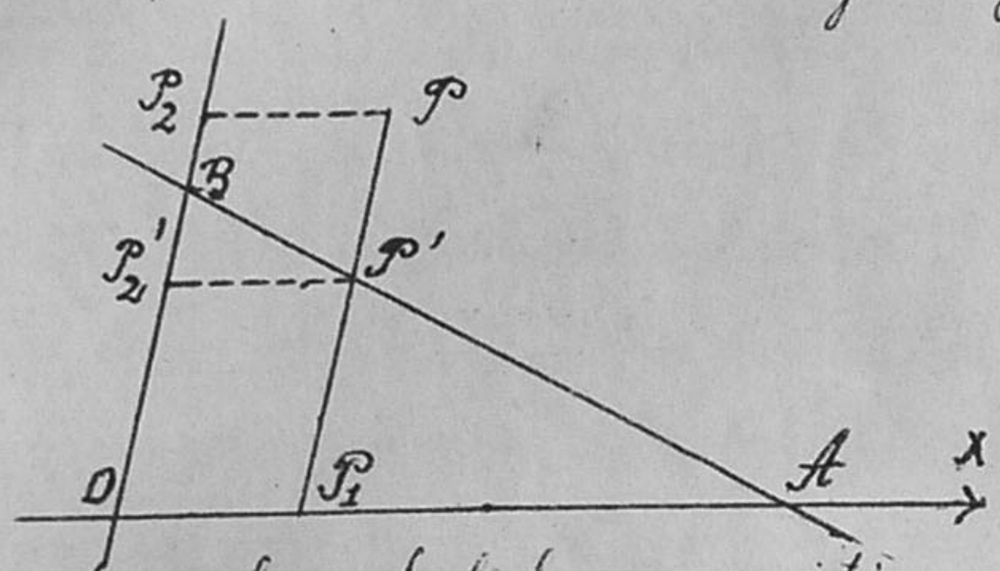
$$\frac{BP}{BA} + \frac{PA}{BA} - 1 = 0$$

és miután az A, B, P pontoknak egyszerü arányszámai az x és y tengelyre vett parallel projectióban nem változnak, irható $\frac{BP}{BA} = \frac{OP_1}{OA} = \frac{x}{a}$ és $\frac{PA}{BA} = \frac{AP}{AB} = \frac{OP_2}{OB} = \frac{y}{b}$ tehát az összefüggés az egyenesen fekvő pontnak és magának az egyenesnek coordinátái között, a következő egyenlet

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0 \qquad \text{I.}$$

Ezt a bizonyitást megfoldjuk ámnak kimutatásával, hogy mihelyt az egyenes és a pont nem tartozik össze az $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1$ függvény nem lehet nulla. Mert vegyünk fel az AB egyenesen kivül egy P pon-

tot, ezen át húzzunk az y tengelylyel parallelt, mely AB-t P'-ben met-



szi, az x tengelyt pedig P_1-ben.

P coordinátái legyenek x, y

P' " " x', y'

akkor nyilvánvaló, hogy $x' = x$, azonban $y' \neq y$, mert $OP_2' \neq OP_2$ úgyhogy

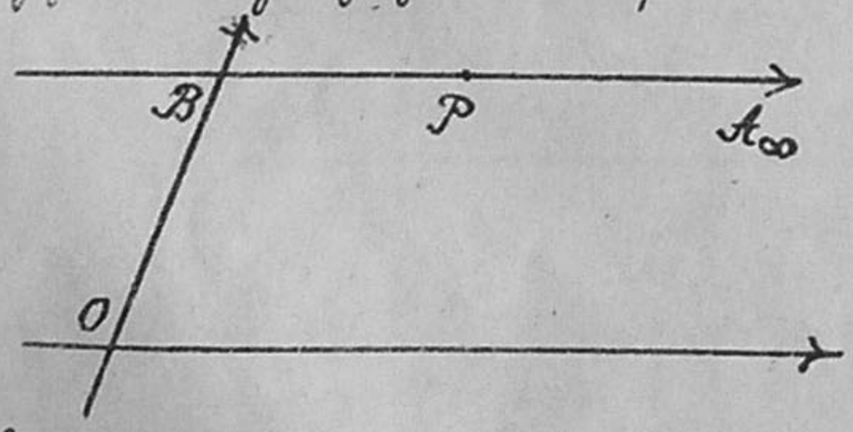
$y' = y + h$, a hol h egy positiv vagy negativ szám.

Mivelán az (x', y') pont az egyenesen van, áll, hogy $\frac{x'}{a} + \frac{y'}{b} - 1 = 0$;

azaz $\frac{x}{a} + \frac{y+h}{b} - 1 = 0$ a miből következik,

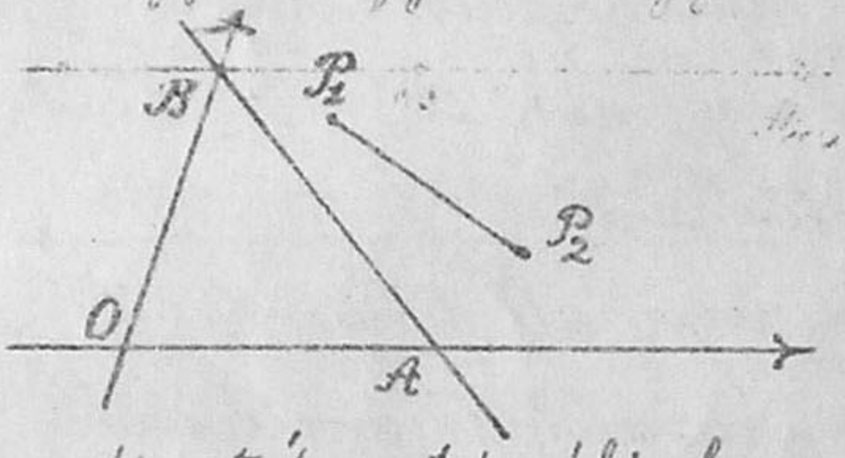
hogy $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = -\frac{h}{b} \neq 0$, mert $h \neq 0$.

Tehát mihelyt az (x,y) pont nem fekszik az a, b egyenesen az $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1$ függvény nem lehet 0. Ebből azután következik a fordított tétel is, hogy ha az x, y és a, b coordinatáknak ez a függvénye nulla, akkor az (x,y) pont és az a, b egyenes összetartozik, különben nem. Itt ugyan hallgatólag feltettük, hogy az egyenes nem parallel egyik tengelylyel sem, mert különben nem létezik az a vector egyenlet, melyből kiindultunk lévén akkor A vagy B végtelenben, de könnyü kimutatni a tétel helyességét arra az esetre is, ha az egyenes parallel egyik tengelylyel. Ha pl. az x tengelylyel parallel, akkor A pont a végtelenbe jut és ha most felveszünk az egyenesen egy P pontot, ennek második coordinatája $y = b$, azaz $\frac{y}{b} - 1 = 0$. De ez nem egyéb, mint a régi egyenlet, ha abban a mostani esetnek megfelőleg $a = \infty$, tehát $\frac{x}{a} = 0$.



Az összetartozás feltétele tehát mindenkor az I alatti egyenlet. Ha a bal oldalon álló függvény nem nulla, a pont és egyenes ne-

tartoznak össze, a pont ax egyenesnek valamely oldalaán van és könyvyen belátható, hogy az egyenes ugyanazon oldalaán levő P pontokra nézve a függvény állandóan ugyanazt ax előjelt viseli. Mert tegyük fel, hogy az egyenes ugyanazon oldalaán van két pontunk P_1 és P_2.



Ha összekötjük őket egy egyenessel, és axen egyik pontot a másikba mozgatjuk, akkor a coordináták folytonos változása következtében a függvény, mint a coordináták racionális függvénye szintén folytonosan változik.

Ha most feltesszük, hogy P_1 és P_2-ben a függvény ellentett jegyű, akkor ax egyik pontnak ezen útja alatt a függvénynek át kellene menni a 0 értéken is, a mi lehetetlen, mert a P_1P_2 vonaldarab nem metszi ax egyenest, már pedig csak egy ily metszéspontban lehet a függvény nulla. A függvény tehát ax egyenes egyik oldalaán positiv, a másikon negativ, és miután $x=0$, $y=0$ mellett azax 0-ban negativ, t.i -1, következik, hogy az egyenes origoi oldalaán a függvény negativ, a másik oldalon positiv.

Egyöntetűbb alakot nyer ax összetartozási egyenlet, ha az egyenes coordinatái gyanánt a vejiek negativ reciprokjait vezetjük be tehát

első coordináta gyanánt $-\frac{1}{a} = u$

második " " $-\frac{1}{b} = v$

és a behelyettesítés után (-1)-el átszorzunk, akkor az összetartozás feltétele

$$ux + vy + 1 = 0$$

és világos, hogy ez az uj függvény ax egyenes origoi oldalaán positiv, a másodikon negativ.

A pont meghatározására szolgáló x, y coordinátáikat első alkalma-

zója után Descartes féle pont coordinátáknak, az egyenes meghatározására szolgáló u, v coordinátákat Plücker féle vonalcoordinátáknak nevezzük, közös néven mindkettőt parallel coordinátáknak.

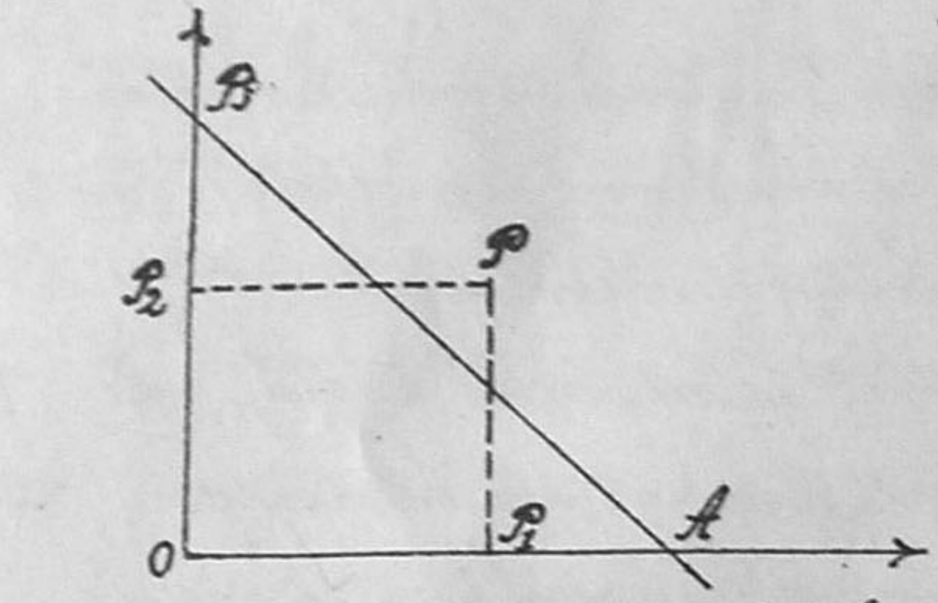
Tehát a sík minden pontjához tartozik két coordináta x_1 és y_1, és egy $x_1u + y_1v + 1$ függvény, melynek segélyével meg tudjuk állapítani, hogy a sík egyenesei milyen viszonyban vannak a ponthoz. A melyre u, v egyenes-coordinátákra nézve ez a függvény 0, azok az egyenesek átmennek az $(x_1\ y_1)$ ponton. Ha a függvény positiv, az egyenes ugyanazon oldalán van a 0 és az $(x_1\ y_1)$ pont, ha negativ, az egyenes elválasztja a két pontot.

Minden síkbeli egyeneshez tartozik két vonalcoordináta $u_1 v_1$ és egy $x u_1 + y v_1 + 1$ függvény, mely meghatározza az (x, y) pont viszonyát az egyeneshez képest; mert ha a függvény 0, a pont rajta van az egyenesen, ha positiv, a pont a 0 ponttal az egyenes ugyanazon oldalán van, ha negativ, a két pont el van választva az egyenes által.

Ezekből kiviláglik az összetartozási függvény fontossága.

Orthogonális és polárcoordinátáik.

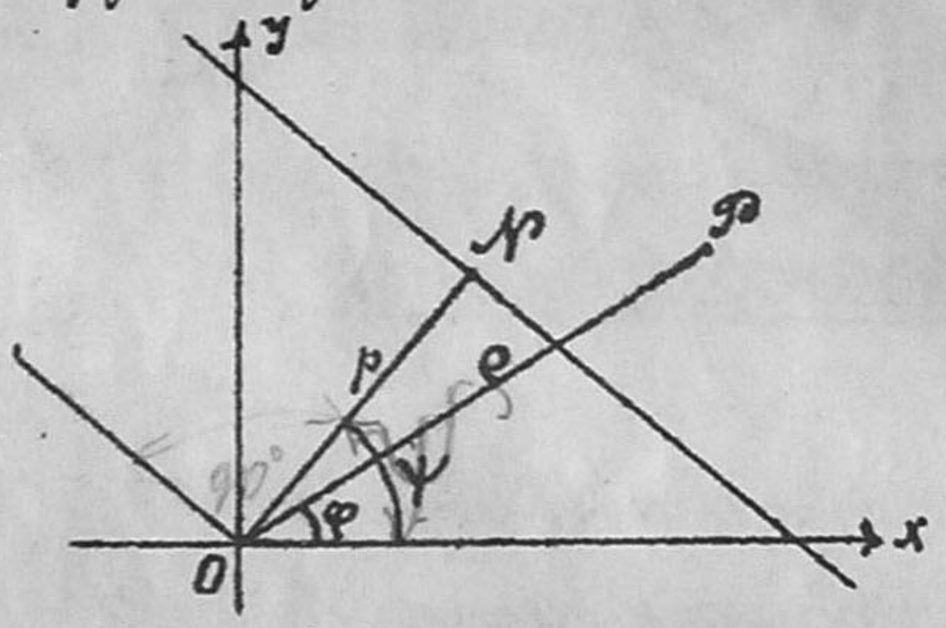
Ha a síkbeli coordinatarendszer tengelyei hegyes vagy tompaszöget zárnak be, a rendszert ferdeszögünek nevezzük. De általánosan használatos a derékszögü vagy orthogonális rendszer, melyben a tengelyek derékszöget képeznek egymással. Orthogonális rendszerben más értelmezést is adhatunk a pont coordinatái-



nak. Mert világos, hogy $PP_1 = y$, $PP_2 = x$, vagyis a pont első coordinatája x annyi mint az y tengelytől való távolsága, második coordinatája y annyi mint az x tengelytől való távolsága; ha még a távolság jegyét illetőleg hozzátesszük, hogy azon az oldalán a tengelynek, mely felé a másik tengely mutat, a távolság positiv, a másik oldalon negativ jegyű.

Ha az egyenes által lemetszett vectorok számértékei a és b, akkor az egyenes coordinatái $u = -\frac{1}{a}$ és $v = -\frac{1}{b}$, a miből látható, hogy ha az első coordinata 0, az egyenes parallel az x tengelylyel, mert ekkor $a = \infty$; ha a második coordináta 0, az egyenes parallel az y tengelylyel, hasonló okból.

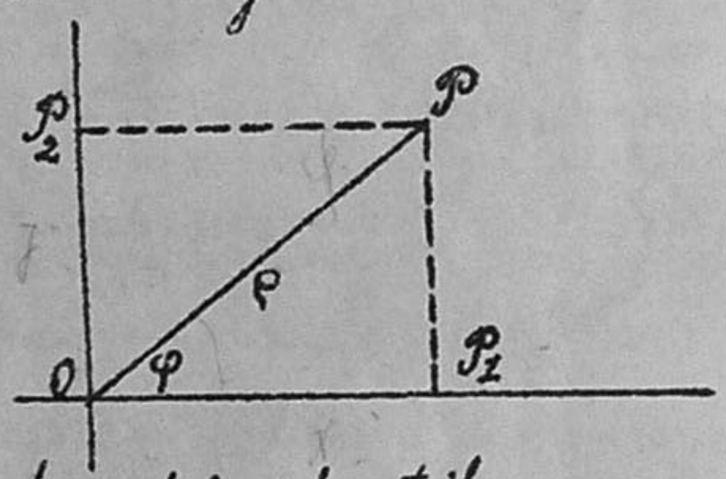
Az orthogonális rendszerrel kapcsolatban bevezethetünk egy más helyhatározó rendszert, a polárcoordinátarendszert. Felveszünk egy orthogonális rendszert és a pont meghatározására felhasználjuk



annak abszolut távolságát az 0 kezdőponttól, positiv mérőszáma legyen ϱ, valamint ezt a φ szöget, mely alatt az x tengely positiv forgással a pont távolsági vectorába forgatható. ϱ a pont radius vectora, φ az irányszöge (amplitudo.) Közös néven ϱ és φ a pont polárcoordinátái, utóbbira azt a kikötést tesszük, hogy $0 \leqq \varphi < 2\pi$ vagyis φ a legkisebb azon positiv forgások között, melyekkel az x tengely a P pont radius vectorába hozható. ϱ és φ teljesen meghatá-

rozzák a pont helyzetét.

Az egyenes polárcoordinatái az O pontnak ax egyenestől való abszolut távolsága $ON = p$ és az a legkisebb φ szög, mely alatt az x tengely positiv irányban az ON távolsági vectorba forgatható, utóbbira tehát az a megszoritás áll, hogy $0 \leqq \varphi < 2\pi$. Magának az egyenesnek nyilvánvalóan más a hajlásszöge, t.i. $\varphi + \frac{\pi}{2}$ mert nem egyéb, mint az O-ból húzott parallel egyenes hajlásszöge. A polárcoordinatáknak az az előnyük a regiek felett, hogy itt a coordinatarendszer kezdőpontján átmenő egyenesek is meghatározhatók, a mennyiben ezekre nézve $p = 0$, a φ hajlásszög meg teljesen meghatározza az egyenes helyzetét.



Az orthogonális és polárcoordinatáik összefüggését illetőleg látható, hogy pont ezeten

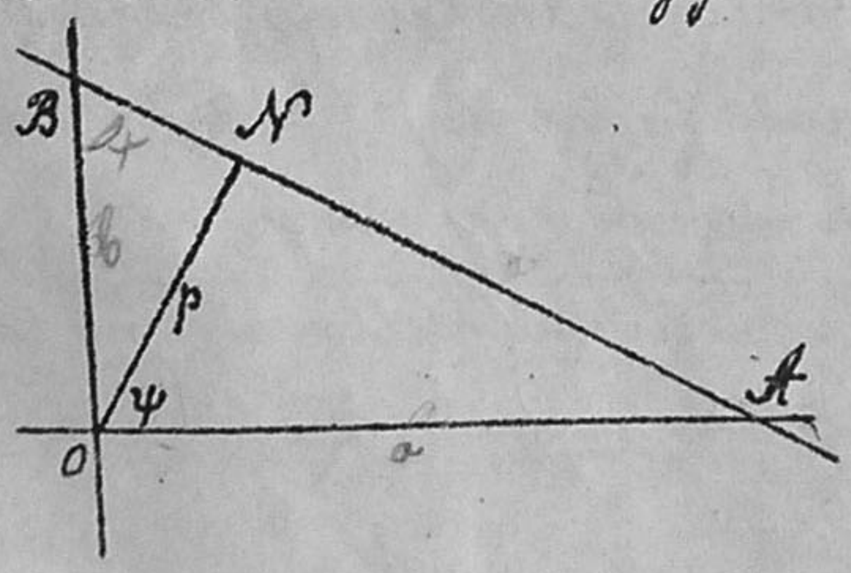
$$x = \rho \cos \varphi$$

$$y = \rho \sin \varphi$$

és pedig identikusan, mert a cos φ és sin φ ép úgy változtatja jegyét az egyes quadransokban, mint x illetőleg y. Forditva a polárcoordinatakat ki tudjuk fejezni Descartes féle coordinatákkal, mert négyzetre emelve a fenti egyenleteket és összeadva $\rho^2 = x^2 + y^2$ azaz

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Az utóbbi két adat egyszerre véve, teljesen meghatározza a φ szöget. Egyenes esetén az ONA és ONB derékszögü háromszögekből következik, hogy $p = a.\cos\varphi$ illetőleg $p = b.\sin\varphi$ tehát



$$\left.\begin{array}{l} \frac{x}{a} = \cos\varphi \\ \frac{y}{b} = \sin\varphi \end{array}\right| \quad \left.\begin{array}{l} -pu = \cos\psi \\ -pv = \sin\psi \end{array}\right\} 1.$$

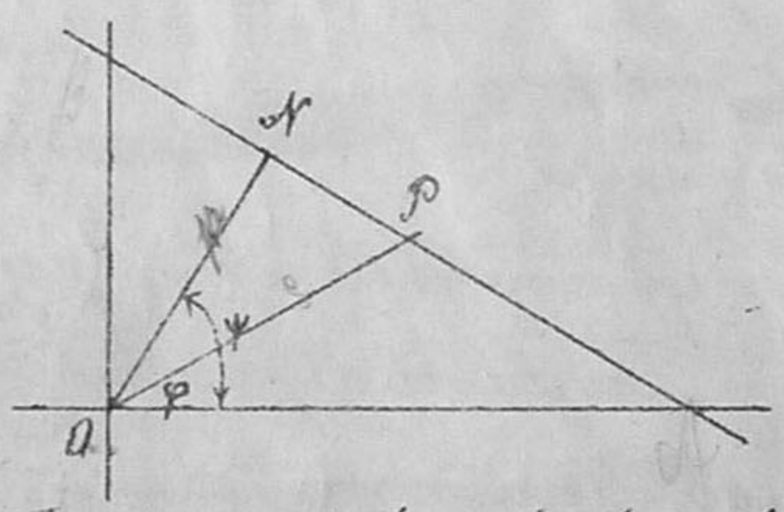
vagyis a Plücker féle coordináták $u = -\frac{\cos\psi}{p}$, $v = -\frac{\sin\psi}{p}$ I.

Fordítva ha az (1) alatti egyenleteket négyzetre emelve összeadjuk, $p^2(u^2+v^2)=1$, tehát $p = \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}$ a mit betéve (1)-be,

$$\cos\psi = \frac{-u}{\sqrt{u^2+v^2}} \quad , \quad -\sin\psi = \frac{-v}{\sqrt{u^2+v^2}} \qquad \text{II.}$$

Az I. egyenletek kifejezik a Plücker féle coordinatakat polárcoordinatakkal, a II egyenletek az utóbbiakat kifejezik a Plücker félékkel.

Lássuk, mi az egyenes és pont összetartozásának feltétele polárcoordináták esetén? Legyenek a pont polárkoordinatái (ϱ, φ), az egyenesé $(p|\psi)$. Oly egyenletet kell keresni ezen coordináták között, mely következése annak, hogy a pont az egyenesen van. Az ONP derékszögü háromszögből következik, hogy



$$p = \varrho\cos(\psi-\varphi)$$

és pedig akármily fekvésü a P az N-hez képest, mert hisz $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$

C-ra reducálva az egyenlet, kapjuk az összetartozás egyenletét

$$\varrho\cos(\psi-\varphi) - p = 0$$

vagy kifejtve a cosinust és polárkoordinatáik helyett bevezetve a pont Descartes féle coordinatáit, a baloldali függvény

$$\varrho\cos\psi\cos\varphi + \varrho\sin\psi\sin\varphi - p = x\cos\psi + y\sin\psi - p = 0$$

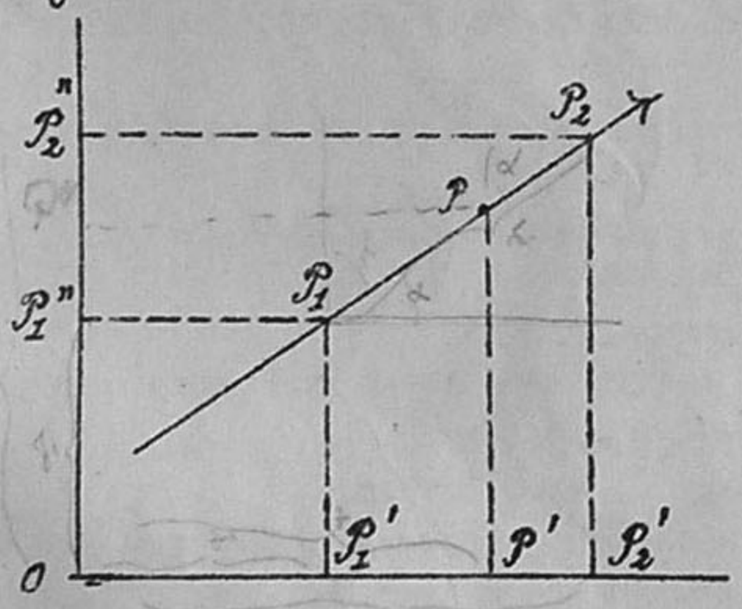
Ez utóbbi az összetartozási függvény, mely ha nulla, a pont az egyenesen fekszik, ha negativ, a pont az egyenes origoi oldalain van, ha positiv, az ellenkező oldalon.

Egyszerűbb geometriai feladatok pontok és egyenesek között.

A következőkben tárgyalni fogjuk az egyszerűbb geometriai feladatokat, melyek két pont, két egyenes, pont és egyenes kölcsönös helyzetére vonatkoznak. Ezen tárgyalások folyamán megtanuljuk, hogy a geometriai fogalmaknak mi az analytikai aequivalense.

Tárgyaljuk legelőször két pont viszonyát derékszögü coordinátarendszer segélyével.

Legyen a két pont P_1 és P_2, coordinátáik $x_1\ y_1$ illetőleg $x_2\ y_2$ és kérdezzük, mi a két pont távolsága r és ezen távolsági vector P_1P_2 iránya, vagyis az az α szög, melyet bezár az x tengely és a P_1P_2 vector iránya.



Ha a megfelelő projectiók P_1', P_2' és $P_1''P_2''$

akkor egyfelől

$$P_1'P_2' = x_2 - x_1$$ másfelől

$$P_1'P_2' = r\cos\alpha$$

tehát $x_2 - x_1 = r\cos\alpha$ hasonlóképen

$$P_1''P_2'' = y_2 - y_1 = r\sin\alpha$$ négyzetre

emelve és összeadva $r^2 = (x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2$, ebből

$$r = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \qquad (1)$$

és helyettesitve r $^{\text{d}}$ értéket

$$(2)\quad \begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{x_2-x_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}} \\ \sin\alpha = \dfrac{y_2-y_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}} \end{cases}$$

(1) szolgáltatja a két pont távolságát, (2) a P_1P_2 vector irányát.

A P_1 és P_2 pontok egy pontsort határoznak meg. Legyen ebben a változó P pontnak a P_1, P_2 alappontokra vonatkozó egyszerű aránya száma $\lambda = \frac{P_1P}{PP_2}$ Kérdés, mikeji lehet ezen λ arányszámmal megadott P pont x, y coordinátáit a P_1P_2 pontok coordinatáival meghatározni? Miután az egyszerű arányszám parallel projectióban nem változik, következőleg $\lambda = \frac{P_2'P'}{P'P_2'} = \frac{x-x_1}{x_2-x}$

$x_2\lambda - x\lambda - x + x_1$

$x(\lambda+1) = x_1 + \lambda x_2$

$x = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$

tehát

$$x = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$$

épúgy $\lambda = \frac{P_1''P''}{P''P_2''} = \frac{y-y_1}{y_2-y}$ miből $y = \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$

Itt tehát kifejeztük a pontsor változó pontjának Descartes féle coordinatáit mint a távolsági coordináta λ függvényét.

Ha P épen felezi a P_1P_2 távolt, $\lambda = 1$, tehát $x = \frac{x_1+x_2}{2}$, $y = \frac{y_1+y_2}{2}$. Ha tehát egy pont coordinatái két más pont megfelelő coordinatáinak számtani közeparányosai, akkor ez a pont felezi a két pont távolságát.

Lehetséges lesz a P_1P_2 által meghatározott pontsor változó pontjának P coordinatáit sikbeli coordinatákkal is kifejezni. Láttuk a P_1P_2 vector végpontjainak coordinatáira nézve, hogy

$$x_2 - x_1 = r\cos\alpha \qquad y_2 - y_1 = r\sin\alpha$$

Ha most változó pontnak veszszük a P_2 pontot, tehát ennek r távolságát az állandó P_1 ponttól változtatjuk, miközben α állandó, akkor a P_1 től P_1P_2 irányban számított félegyenes változó pontjának P coordinatái

$$x = x_1 + r\cos\alpha, \qquad y = y_1 + r\sin\alpha$$

A másik félegyenesre nézve az irányszög $\alpha + \pi$, tehát az ezen változó pont coordinatái

$$x = x_1 - r\cos\alpha \quad , \qquad y = y_1 - r\sin\alpha$$

vagy ha megállapodunk abban, hogy az α irányra nézve $r > 0$, az $\alpha+\pi$ irányra nézve $r < 0$, akkor az egész egyenesre nézve

$$x = x_1 + r\cos\alpha \, , \qquad y = y_1 + r\sin\alpha$$

Hogy megállapithassuk a feltételt arra nézve, mikor feksznek 3 pont $P_1 P_2 P_3$, melyeknek coordinatái $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, $x_3 y_3$, egy egyenesen, úgy járunk el, hogy feltesszük, miszerint ez a három pont rajta van az u, v coordinatáju egyenesen, akkor a mint tudjuk

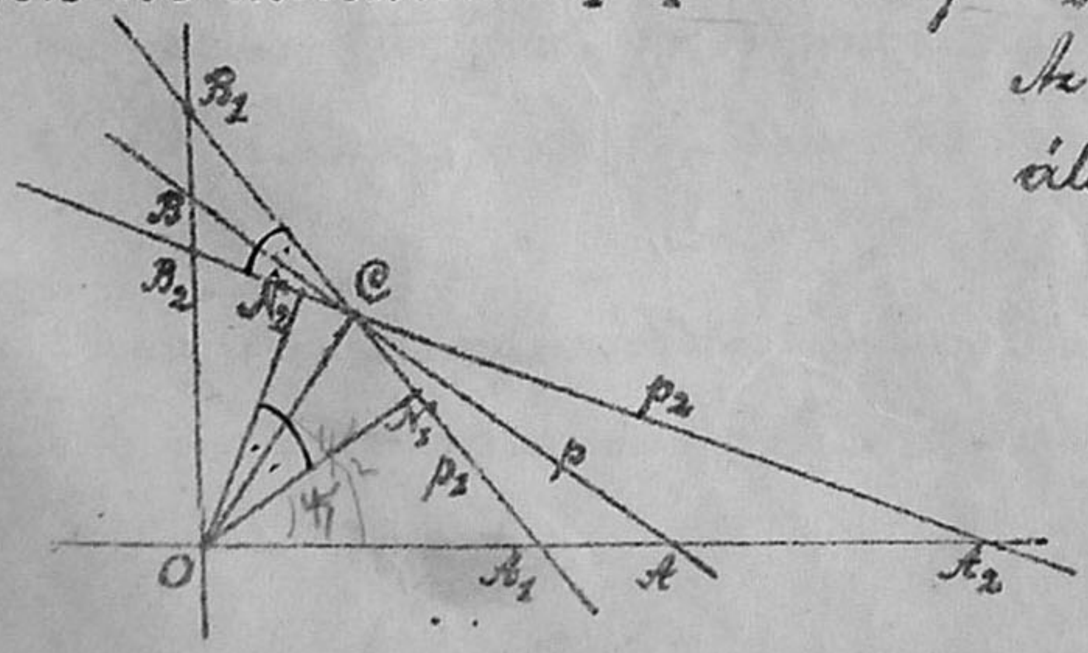
$$\begin{aligned} x_1 u + y_1 v + 1 &= 0 \\ x_2 u + y_2 v + 1 &= 0 \\ x_3 u + y_3 v + 1 &= 0 \end{aligned}$$

Ez a három egyenlet, mely u-ban, v-ben és 1-ben lineáris és homogén, csak igy állhat fenn egyszerre, ha a rendszer determinansa

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Ha ez az egyenlet a 3 pont coordinatái között teljesül, a 3 pont egy egyenesen feksznek.

Lássuk most a hasonló kérdéseket két síkbeli egyenes esetén. Legyen a két egyenes p_1 és p_2, Plücker (ezentúl egyszerüen Plr.) féle coordinatáik $u_1 v_1$ illetőleg $u_2 v_2$.



Az első kérdés, mekkora a két egyenes által bezárt szög?

Ha az O ből az egyenesekre bocsátott ON_1, ON_2 normálisok hajlásszögei az x tengelyhez ψ_1, ille-

löleg ψ_2 és megállapodunk abban, hogy a két egyenes pozitiv iránya megegyezik azon forgás irányával, mely az x tengelyt a megfelelő normálisokba hozza, akkor a két egyenes szöge w, megegyezik a normálisok szögével, tehát $(\psi_1 - \psi_2)$ vagy ha úgy tetszik $(\psi_2 - \psi_1)$, mert itt csak a szög absolut nagyságára jö tekintetbe. Te láttuk, hogy

$$\cos\psi_1 = \frac{-u_1}{\sqrt{u_1^2+v_1^2}} \quad , \quad \sin\psi_1 = \frac{-v_1}{\sqrt{u_1^2+v_1^2}}$$

$$\cos\psi_2 = \frac{-u_2}{\sqrt{u_2^2+v_2^2}} \quad , \quad \sin\psi_2 = \frac{-v_2}{\sqrt{u_2^2+v_2^2}}$$

tehát $$\cos w = \cos(\psi_2-\psi_1) = \cos\psi_2\cos\psi_1 + \sin\psi_2\sin\psi_1 = \frac{u_1u_2+v_1v_2}{\sqrt{u_1^2+v_1^2}\sqrt{u_2^2+v_2^2}}$$

$$\sin w = \sin(\psi_2-\psi_1) = \cos\psi_1\sin\psi_2 - \cos\psi_2\sin\psi_1 = \frac{u_1v_2-u_2v_1}{\sqrt{u_1^2+v_1^2}\sqrt{u_2^2+v_2^2}}$$

$$\text{vagy} \quad \operatorname{tg} w = \frac{u_1v_2-u_2v_1}{u_1u_2+v_1v_2}$$

Ha a két egyenes párhuzamos w vagy 0, vagy π, mindkét esetben $\operatorname{tg} w = 0$, tehát ha a két egyenes párhuzamos, akkor

$$u_1v_2 - u_2v_1 = 0$$

vagyis a Plr. féle coordináták determinansa eltünik és forditva ha ez a determinans 0, a két egyenes párhuzamos, mert akkor szögük 0, vagy π.

Ha a két egyenes merőleges egymáora $w = \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{tg} w = \infty$, tehát

$$u_1u_2 + v_1v_2 = 0$$

ha két egyenes merőleges egymáora, ~~ha~~ a megfelelő Plr. coordináták szorzatainak összege 0. Es forditva, ha ez nulla, a két egyenes merőleges egymáora, mert $w = \frac{\pi}{2}$.

A két egyenes metszi egymást egy C pontban, mely egy sikbeli sugársor centrumának tekinthető. Ebben a sugársorban le-

gyen p_1 az első, p_2 a második alapsugár és OC az egységsugár. A változó p sugár kettős arányszáma ezekre nézve legyen k. Kérdés, mikép lehet ezzel a változó sugár Ik. coordinatáit u v-t meghatározni. Tudjuk, hogy ha egy sugársort egyenessel metszünk, a megfelelő elem kettős arányszáma ugyanaz. Metsző egyenes gyanánt használjuk az x és y tengelyt, p_1, p_2, p egyeneseek metsző-pontjai az x tengelyhyel legyenek megfelelőleg A_1, A_2, A coordinatáik a_1, a_2, a, akkor $OA_1 = a_1 = -\frac{1}{u_1}$, $OA_2 = a_2 = -\frac{1}{u_2}$,

$OA = a = -\frac{1}{u}$. A tétel értelmében

$$k' = (A_1 A_2 A O) = \frac{A_2 A}{A A_2} : \frac{A_2 O}{O A_2} = \frac{a - a_1}{a_2 - a} : \frac{-a_1}{a_2}$$

$$= \frac{1 - \frac{a}{a_1}}{1 - \frac{a}{a_2}} = \frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{a_2}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{a_1}}, \text{ tehát}$$

$$k' = \frac{u_1 - u}{u_2 - u}, \text{ a miből}$$

$$k) \quad u_2 - u k' = u_1 - u$$
$$(1 - k') u = u_1 - u_2 k'$$
$$u = \frac{u_1 - k' u_2}{1 - k'}$$

$$u = \frac{u_1 - k' u_2}{1 - k'}$$
$$v = \frac{v_1 - k' v_2}{1 - k'}$$

} hasonló eljárással az y tengelyre

nérve adódik, hogy

Ez az eredmény emlékeztet a pontsor hasonló kérdéseénél nyert formulákra, csakhogy ott λ, itt $-k'$ szerepel. Hogy a formai egyezés teljes legyen, transformáljuk a sugársor coordinatarendszerét annyiban, hogy új egységpont gyanánt a réginek harmonicusát vesszük, akkor k' ötszöröse $-k' = k$-ba és lesz

$$u = \frac{u_1 + k u_2}{1 + k}$$

$$v = \frac{v_1 + k v_2}{1 + k}$$

Ily módon vígy a pont-, mint a sugársorbeli coordinátákat

át tudjuk számitani sikbeli coordinatákká.

A két egyenes Plr. coordinatáival a C metszöpont x, y coordinatáit is egyszerüen meg tudjuk határozni. Mert a C pont mindkét egyenesen rajta fekszik $u_1 x + v_1 y + 1 = 0$

$u_2 x + v_2 y + 1 = 0$

Ez a két egyenlet x, y és 1-ben lineáris és homogén, tehát

$$x : y : 1 = (v_1 - v_2) : (u_2 - u_1) : (u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

Ebből $x = \frac{v_1 - v_2}{u_1 v_2 - u_2 v_1}$ $y = \frac{u_2 - u_1}{u_1 v_2 - u_2 v_1}$ 11/10.

Ezek a metszöpont coordinatái. Ha a két egyenes parallel, a nevező eltünik, tehát x és y végtelenné válik, a metszöpont végtelenben van: Két parallel egyenesnek tehát közös végtelen távoli pontja van.

Mi a feltétele annak, hogy három sugár p_1, p_2, p_3 ugyanazon a C ponton menjen át, melynek coordinatái (x, y). Ahhoz a C pont mindhárom egyenesen rajta fekszik, kell, hogy ezek coordinatái u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3 eleget tegyenek a következö egyenleteknek:

$u_1 x + v_1 y + 1 = 0$

$u_2 x + v_2 y + 1 = 0$

$u_3 x + v_3 y + 1 = 0$

Ez a három egyenlet, amely x, y és 1-ben lineáris és homogén, csak úgy teljesülhet, ha a rendszer determinansa 0,

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & 1 \\ u_3 & v_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

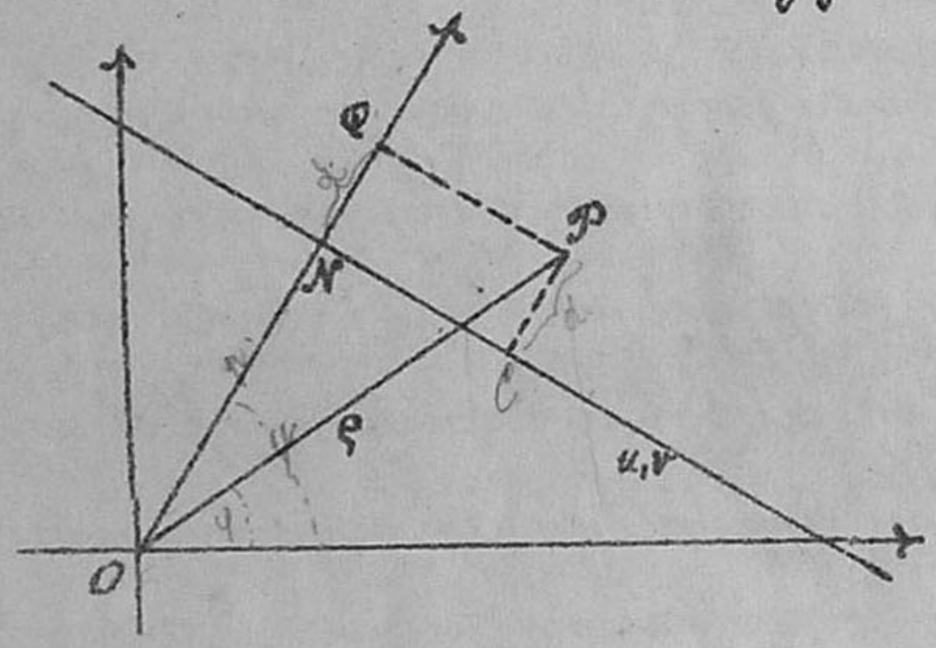
Ez az egyenlet a 3 egyenes Plr. féle coordinatái között fejezi ki azt a feltételt, hogy a 3 egyenes ugyanazon a ponton menjen keresztül.

Fordítva is áll, ha ez a determinans nulla, a 3 egyenes metszi egymást egy pontban.

XI/13 Végre tárgyaljunk a pont és egyenes kölcsönös viszonyára vonatkozólag egy egyszerű feladatot.

Adva a síkban egy pont és egy egyenes; coordinatáik x, y illetőleg u, v. Kérdés mekkora a pont és az egyenes normális távolsága d.

A normális távolságnak jegyet is adunk. Ennek megállapítása végett bocsássunk O-ból az egyenesre merőlegest, ON, melynek positiv iránya az ON irány. Azután P-ből húzzunk párhuzamost az egyenesekkel, mely a normálist Q-ban metszi. Az NQ távolság nagyságára megegyezik a P normális távolságával az egyenestől. Ezt az NQ-t positivnak vesszük, ha iránya megegyezik az ON irányával, különben negativ. Tehát az egyenesnek az O-val egyoldalain fekvő P pontokra nézve NQ negativ, az O-tól elfordult oldalain positiv. Miután O, N és Q egy egyenesen fekszik,



$$ON + NQ + QO = 0$$

$$NQ = OQ - ON$$

Tehát meg kell határozni OQ és ON-t polárcoordinatáikkal, a kettő különbsége adja NQ kifejezését.

$$OQ = \rho\cos(\varphi - \psi)$$

$$ON = p$$

tehát $NQ = \rho\cos(\varphi-\psi) - p = \rho\cos\varphi\cos\psi + \rho\sin\varphi\sin\psi - p$

vagyis $NQ = x\cos\psi + y\sin\psi - p.$ x)

x) Ez utóbbi egyenlet állítja, hogy a pont polár coordinatáira teljesül egyenlet D. Ille coordinátáit negatívba : azaz $\rho\cos\varphi = x$ és $\rho\sin\varphi = y$.

ez az ismeretes összetartozási függvény a pont és egyenes között, melyben a pontnak Descartes (ezentúl röviden Dts.) féle coordinatái, az egyenesnek polaircoordinatái szerepelnek. Bevezetve az egyenes Plr. féle coordinatáit, miután

$$\cos\varphi = \frac{-u}{\sqrt{u^2+v^2}}\,,\quad \sin\varphi = \frac{-v}{\sqrt{u^2+v^2}}\,,\quad p = \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}$$

lesz $$NQ = \frac{-ux-vy-1}{\sqrt{u^2+v^2}}$$

vagyis $$d = QN = \frac{ux+vy+1}{\sqrt{u^2+v^2}}$$

Az előbbiek alapján belátható, hogy ez a formula positiv jegyjegyel veszi azon pontok normális távolságát az egyenestől, melyek az egyenes origoi oldalán vannak, negativ jegyjegyel azokét, melyek az 0-tól elfordult oldalon vannak. Ez különben abból a körülményből is következik, hogy ezen formula felsőjében a pont és az egyenes összetartozási függvénye áll, melyre nézve az jegyviszony függését a pont helyzetétől ugyanilyennek találtuk volt, a tört alsója egy positiv mennyiség. (Amint ilyen, mind befolyása a jegyre nézve.)

Homogén coordinatáik.

Az eddig használt pont és vonalcoordinatáknak két lényeges hiányuk van, az mennyiben használatuk csak akkor van megengedve, ha az pont nincs a végtelenben, illetőleg az egyenes nem megy át a nullaponton; az első esetben ugyanis nem tudjuk, hogy a pont mily irányban ment a végtelenbe, a második esetben nem tudjuk, hogy mily szög alatt hajlik az egyenes a tengelyekhez. Mind-

két eset akkor következik be, ha az illető coordináták végtelen nagyok. A polárcoordinátáknál nincs meg ez a hiányosság. Mert ha egy pont polárcoordinatái (ϱ, φ), akkor a pont végtelenbe távozásával csak ϱ válik végtelenné, φ azonban véges maradván, megmutatja, hogy milyen irányban távozott a pont a végtelenbe. Ha az egyenes polárcoordinatái (p, φ), akkor, ha az egyenes átmegy a nullaponton, akkor p eltűnik, ψ megmaradván teljesen meghatározza az egyenes helyzetét.

Hogy a Descartes féle pontcoordináták és a Plücker féle vonalcoordináták fent említett hiányosságán segítsünk, vegyjük figyelembe a pont- és vonalcoordinatáknak összefüggését a megfelelő polárcoordinatákkal; e szerint

$$x = \varrho \cos \varphi \qquad -pu = \cos \psi$$

$$y = \varrho \sin \varphi \qquad -pv = \sin \psi$$

Ezekből osztás által kapjuk, hogy

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \varphi, \qquad \frac{v}{u} = \operatorname{tg} \psi = \frac{v}{u}$$

Tehát jóllehet a mikor a pont végtelenbe megy, x és y végtelenbe nő, hányadosuk véges marad és annyi mint a pont irányfangense és jóllehet akkor, midőn az egyenes átmegy épen a O ponton, u és v végtelenné válik, hányadosuk szintén véges marad és megadja az egyenes normalisának irányfangensét. Tehát csak módot kell találnunk arra nézve, hogy ezen hányadosok limesét meg tudjuk határozni. Ezt úgy érjük el, hogy ezen két coordinata helyett három homogén coordinatát vezetünk be úgy, hogy mindig két-két hom. coordináta hányadosa fog coordinata jellegű lenni.

A három homogén pontcoordinata legyen x, y, z. Ezekkel következőleg definiáljuk a pont coordinatáit:

Az 1. és 3-ik hom. coord. hányadosa $\frac{x}{z}$ az elöő Ptk.féle pontcoordinata
a 2. és 3-ik " " " " $\frac{y}{z}$ a második " " "
A 2. és 1. hom. coord. hányadosa $\frac{y}{x}$ adjá a pont irányfangensét.
Eltekintve attól az esettöl, midön mindhárom hom. coord. nulla, minden más esetben ezen 3 coordinatáival teljesen meg van határozva a pont helyzete.

Ipen mivel két-két hom. coord. hányadosa szerepel pontcoord. gyanánt, szabad a három homog. coordinatát ugyanazzal az számmal osztani, hányadosuk ezáltal nem változik. Ezáltal el lehet érni, hogy egy mulltól különböző hom. coord. helyébe 1 lépjen.

Ha a pont a végesben van, x szükségképpen 0-tól különböző, úgy hogy azzal osztva, kapjuk a végesben fekvő pont homog. coordinatáit. $\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1$

Tehát végesben fekvő pont két első hom. coordinatája egyezik a megfelelő Ptk.-féle coordinatákkal, harmadik hom. coord. 1

Ha $x=0$, a pont a végtelenben van, mert $\frac{x}{z} = \infty$ és $\frac{y}{z} = \infty$, azonban $\frac{y}{x}$ vegés és pedig x arányos cosinus φ-vel
y " sinus φ-vel
az arányossági factorral osztva mindhárom hom. coordinatáit, kapjuk, hogy a végtelen távoli pont hom. coordinatái

$\cos\varphi, \sin\varphi, 0$

$x = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$; $y = \left(\frac{x}{\cos\varphi}\right)\sin\varphi$
$x = \left(\frac{y}{\sin\varphi}\right)\cos\varphi$
$\frac{x}{\cos\varphi} = \frac{y}{\sin\varphi}$ helyére:

Te általában 3 oly szám, melynek az a tulajdonsága, hogy az 1 és 3 valamint 2. és 3 elik szám hányadosa adja a Ptk. féle coordinatáikat, szolgálhat homog. coord. gyanánt. Igy pl. leírván $x = \varrho\cos\varphi$, $y = \varrho\sin\varphi$, homog. coord. gyanánt vehetök $\cos\varphi, \sin\varphi, \frac{1}{\varrho}$
Ennek speciális esete az előbbi, a hol $\varrho = \infty$.

Mindhárom hom. coordinata nem lehet 0. Lássuk mi a jelentése annak ha egy vagy két coordinata 0.

I. Ha az 1. homog coord. 0, az 1 Pts. féle coord 0, a pont az y tengelyen van.

ha a 2. hom. coord. 0, a 2. Pts. féle coord 0, a pont az x tengelyen van;
ha a 3. hom. coord. 0, mindkét Pts. coord. ∞, a pont végtelenben van

II. Ha az 1 hom. coord. $\neq 0$, de a 2. és 3. $= 0$, akkor a pont a definitio értelmében az x tengely végtelen távoli pontja X, és mivel a nulltól különböző 1. hom. coordinatával mindhárnat elosztathatjuk, kapjuk, hogy az x tengely végtelen távoli pontjának hom. coordinatai $= 1, 0, 0$;

ha a 2. homog. coord. $\neq 0$, de 1. és 3. nulla, akkor a pont az y tengely végtelen távoli pontja Y, és mivel a 2. coordinatával oszthatunk, kapjuk az Y pont hom. coord gyanánt: 0, 1, 0;

ha csak a 3. hom. coord. $\neq 0$, akkor mindkét Pts. coord $= 0$, a pont az origóban van, úgyhogy az origo hom. coordinatai: 0, 0, 1.

Az egyenes meghatározására is hom. coordinatákat vezethetünk be, ezek legyenek u, v, w, külön-külön nem bírnak értelemmel, csak kettő-kettő hányadosa szerepel vonalcoord. gyanánt és pedig:

az 1. és 3. hom. coord. hányadosa $\frac{u}{w}$ adja az Ptsféle 1 coordinatát U-t
az 2. és 3. " " " $\frac{v}{w}$ " " " " 2. " V-t
az 2. és 1. " " " $\frac{v}{u}$ " az egyenes normálisainak irány tangensét.

Itt is szabad egy nulltól különböző coordinatával valamennyit osztani, miáltal az illető hom. coord. 1-gyé tehető. Ha az egyenes

nem megy át a 0 ponton, akkor $w \neq 0$, tehát szabad vele osztani, és így kapjuk a végesben fekvő és 0-n át nem menő egyenes hom. coord. oly-anként $\frac{u}{w}$, $\frac{v}{w}$, 1

Ha $w = 0$, akkor $u = v = \infty$, az egyenes átmegy a nullaponton, de $\frac{v}{u} = tg\,\varphi$ véges és megadja az egyenes irányát. Mivel ekkor u arányos $\cos\varphi$-vel, v arányos $\sin\varphi$-vel, az arányossági factorral mindhárom coordinatát osztva, lesznek az 0 ponton átmenő egyenes hom. coordinatái

$$\cos\varphi\,,\ \sin\varphi\,,\ 0$$

A definitio szerint az egyenes által a tengelyekből lemetszett vonal-darabok coordinatái $a = \frac{-1}{u} = -\frac{w}{u}$

$$b = -\frac{1}{v} = -\frac{w}{v}$$

Most lássuk, mi a jelentése annak, hogy a hom. coord. egyike, majd kettő-kettő nulla

I. Ha $u = 0$, akkor $a = \infty$, az egyenes parallel az x tengelylyel

ha $v = 0$, " $b = \infty$, " " " " y "

ha $w = 0$, " $a = b = 0$, " " a 0 ponton megy át

II. Ha $u \neq 0$, de $v = w = 0$, akkor $a = 0$, és $tg\,\psi = 0$, a normális az x tengelybe esik, tehát az egyenes maga az y tengely. És mivel u-val szabad osztani, kapjuk, hogy az y tengely hom. coordinatái : 1, 0, 0; ha $v \neq 0$, de $u = w = 0$, akkor $b = 0$, $tg\,\psi = \infty$, a normális az y tengelybe esik, tehát az egyenes maga az x tengely; és osztva v-vel, kapjuk az x tengely homogén coordinatáit : 0, 1, 0;

ha $w \neq 0$, de $u = v = 0$, akkor $a = \infty$, $b = \infty$, az egyenes mindkét tengelyt végtelenben metszi, tehát az egyenes a sík végtelen távoli egyenese és ennek hom. coordinatái 0, 0, 1. A mint az egyenesnek egy végtelen távoli pontot, úgy a síknak csak egy végtelen távoli egyenest tulajdonítunk.

Párhuzamos egyeneseknek közös végtelen távoli pontjuk van, párhuzamos síkoknak közös végtelen távoli egyenesük van.

Az összetartozási és távolsági egyenlet homogén coordinatákkal.

Néhány már előbb tárgyalt feladatnak homogén coordinatákkal való tárgyalásából meg fogunk győződni arról, hogy a homogén coordinaták körében a feladatok megoldhatóságára nézve a síkbeli elemek kölcsönös helyzetét nem szükséges korlátoznunk, mint a hogy azt a Π_x. és Π_r. féle coordinatáknál tettük.

Vegyük először az összetartozási feltételt pont és egyenes közt. Π_x. és Π_r. féle coordinatákban ez a feltétel a következő egyenlet

$$\Pi x + \Psi y + 1 = 0$$

Ezek helyett bevezetve hom. coordinatákat

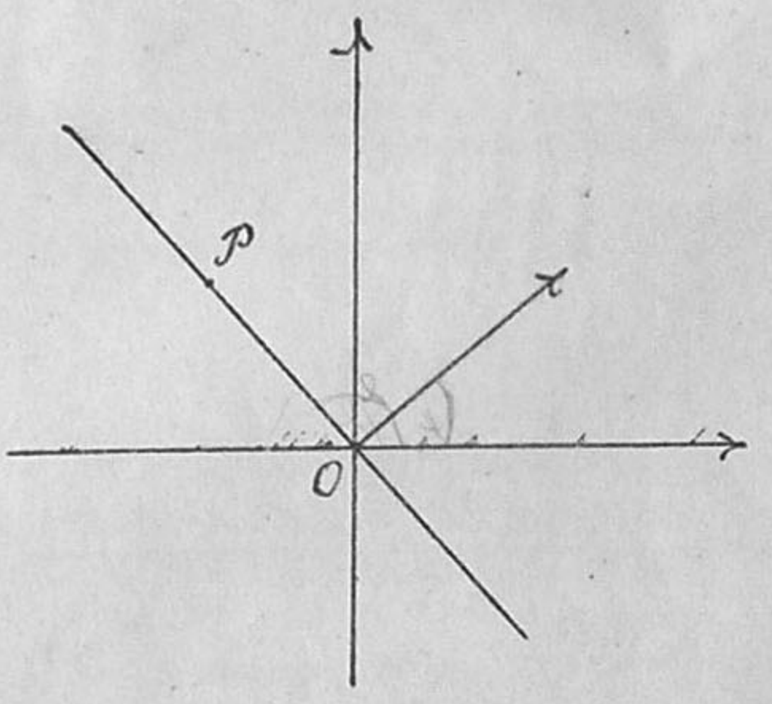
$$\frac{u}{w}\frac{x}{z} + \frac{v}{w}\frac{y}{z} + 1 = 0$$

vagy

$$ux + vy + wz = 0 \qquad \text{I.}$$

Tehát a pont és egyenes összetartozásának feltétele az, hogy a megfelelő hom. coord. szorzatainak összege eltűnjék. Midőn ezt az egyenletet a fentiből levezettük, fel volt tételezve, hogy w és $z \neq 0$, azaz sem a pont nem feküszik a végtelenben, sem az egyenes nem megy át a 0 ponton. De ki fogjuk mutatni, hogy ebben a két kivételes esetben is érvényes a tétel.

Tegyük fel, hogy az egyenes a coordinatarendszer kezdőpontján megy keresztül; akkor coordinatái $\cos\varphi$, $\sin\varphi$, 0, és P egy végpontban



fekvő pontja az egyenesnek. Kimutatjuk, hogy az összetartozást ugyanaz az egyenlet fejezi ki. Miután P az egyenesen fekszik, radius vectorának iránya merőleges az egyenes normalisának irányára, azaz

$\varphi - \psi = \pm \frac{\pi}{2}$, tehát $\cos(\varphi - \psi) = 0$ vagyis

$\cos\varphi \cos\psi + \sin\varphi \sin\psi = 0$

Tudjuk, hogy $\cos\varphi$ arányos az 1. hom. pontcoordinatával

$\sin\varphi$ " a 2. " "

$\cos\psi$ " az 1 hom. vonalcoordinatával

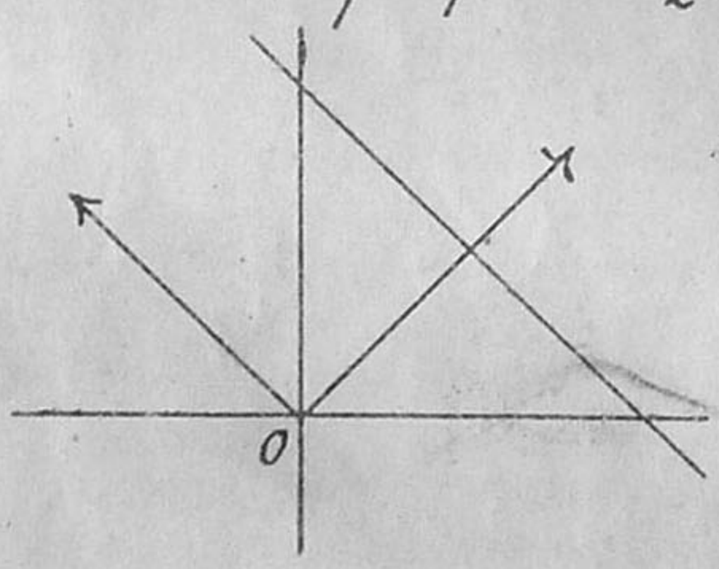
$\sin\psi$ " a 2. " "

s mivel az egyenlet ezekben az arányossági factorokban homogén, elhagyhatók, és az egyenlet $xu + vy = 0$

de ez nem egyéb, mint az I egyenlet, ha abban $w = 0$

Most tegyük fel, hogy az egyenes végtelenben van (nem megy át 0-n) és a pont ennek végtelen távoli pontja, tehát pont és egyenes összetartozik.

Ekkor is $\varphi - \psi = \pm \frac{\pi}{2}$, tehát



$\cos\varphi \cos\psi + \sin\varphi \sin\psi = 0$

De ebben az esetben $\cos\varphi = x$, $\sin\varphi = y$

$\cos\varphi$ arányos u-val, $\sin\varphi$ arányos v-vel, úgyhogy az összetartozási egyenlet

$$ux + vy = 0$$

ez pedig az I egyenlet, ha abban $z = 0$.

A pont és egyenes normális távolsága

$$d = \frac{Ux + Vy + 1}{\sqrt{U^2 + V^2}}$$

és helyettesítve a Dts. és Ptr. féle coordinatoíkat homogén coordinatoíkkal

$$d = \frac{\frac{u}{w}\cdot\frac{x}{z} + \frac{v}{w}\cdot\frac{y}{z} + 1}{\sqrt{\left(\frac{u}{w}\right)^2 + \left(\frac{v}{w}\right)^2}}$$ szorozva felsöt és alsót z és w-vel

$$d = \frac{ux + vy + wz}{z\sqrt{u^2 + v^2}}$$ az (x, y, z) pontnak az (u, v, w) egyenestől

való normális távolsága. Ez a $d = \infty$, ha vagy $z = 0$, vagy u és v egyszerre null, tehát ha vagy a pont vagy az egyenes végtelenben van. Hogy ezekben az esetekben is érvényes marad az utóbbi formula, épúgy kimutatható, mint a fenti esetekben.

Két egyenes párhuzamosságának egyenlete

$$u_1 v_2 - u_2 v_1 = 0$$

és merőlegességének egyenlete

$$u_1 u_2 + v_1 v_2 = 0$$

a kivételes esetekben nem szenved semmiféle változást, épen csak a kivételes esetnek megfelelö coordinatoík lépnek fel benne.

Algebrai görbék.

Egy pont vagy egyenes akkor határozott, ha minden coordinatáját ismerjük, vagy ha elegendö feltételünk van, hogy azokat meghatározhassuk. Ez sokszor csak annyi feltételünk van, hogy azoknak nemcsak egy, hanem végtelen sok pont vagy egyenes felel meg. Ezeket a feltételeket, melyeknek analytikai kifejezése egy-egy egyenlet, mindig egyegyé vonhatjuk össze. Mindazok a pontok vagy egyenesek, melyeknek coordinatái egy ilyen feltételi egyenletnek eleget tesznek, geomet-

riai helyet alkotnak. Lássunk néhány példát ilyen geometriai helyekre.

Egy pontra azt a kirovást teszszük, hogy rajta legyen az $(u_1\ v_1\ w_1)$ egyenesen, azzal összetartozási viszonyban legyen. Ezen pont coordinatái eleget tenni tartoznak a következő egyenletnek.

$$u_1 x + v_1 y + w_1 z = 0$$

Ezzel a pont még nincsen meghatározva, mert ennek az egyenletnek végtelen sok megoldása van x, y és z-ben. Mindazok a pontok, melyeknek x, y, z coordinatái eleget tesznek az egyenletnek, rajta vannak az $(u_1\ v_1\ w_1)$ egyenesen. Ez az egyenlet tehát az egyenes egyenlete (homogén pontcoordinatákban). A geometriai hely itt az egyenes.

Egy (x, y) pontra azt a kirovást teszszük, hogy egy fix (a,b) ponttól r távolságban legyen. Itt azért használunk Dts. féle coordinatákat, mert a pont végében van. Annak kifejezője, hogy a két pont távolsága r legyen, a következő egyenlet:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2 = 0$$

ennek is végtelen sok megoldása van x és y-ban; mindazok a pontok, melyeknek coordinatái kielégitik ezt az egyenletet, egy körön fekszenek, ez tehát a kör egyenlete. Ésszerint a kör mindazon pontok geometriai helye, melyek egy fix ponttól adott távolságra vannak.

Ez a két példa pontcoordinatok számára szolgáltat geometriai helyeket. Most egyenesek számára keressünk geom. helyet.

Egy egyenes azt a kirovást vigyük, hogy egy adott $(x_1\ y_1\ z_1)$ ponton menjen át. Ezen egyenes u, v, w coordinatái eleget tesznek a következő összetartozási egyenletnek:

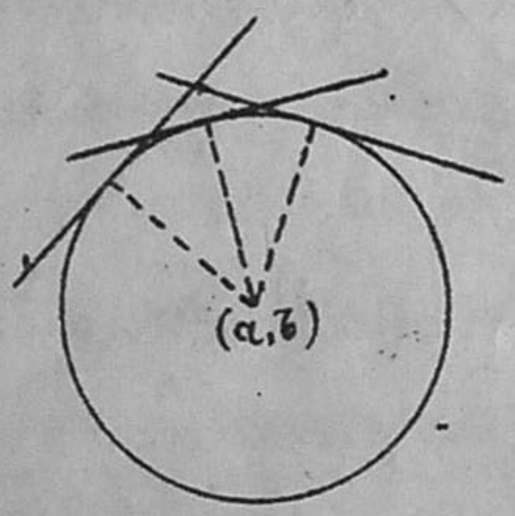
$$x_1 u + y_1 v + z_1 w = 0$$

Ennek végtelen sok egyenes tesz eleget, melyek mind átmennek az (x_1, y_1, z_2) ponton, ez tehát az $(x_1\ y_1\ z_1)$ pont egyenlete.

Így egyenes azt a kivonást viselje, hogy egy fix (a, b) ponttól állandó r távolságban legyen. Ha az egyenes coordinatái u, v, w, a pontéi $(a, b, 1)$ akkor áll, hogy

$$\frac{au + bv + w}{\sqrt{u^2 + v^2}} = \pm r$$

vagyis $(au + bv + w)^2 - r^2(u^2 + v^2) = 0$

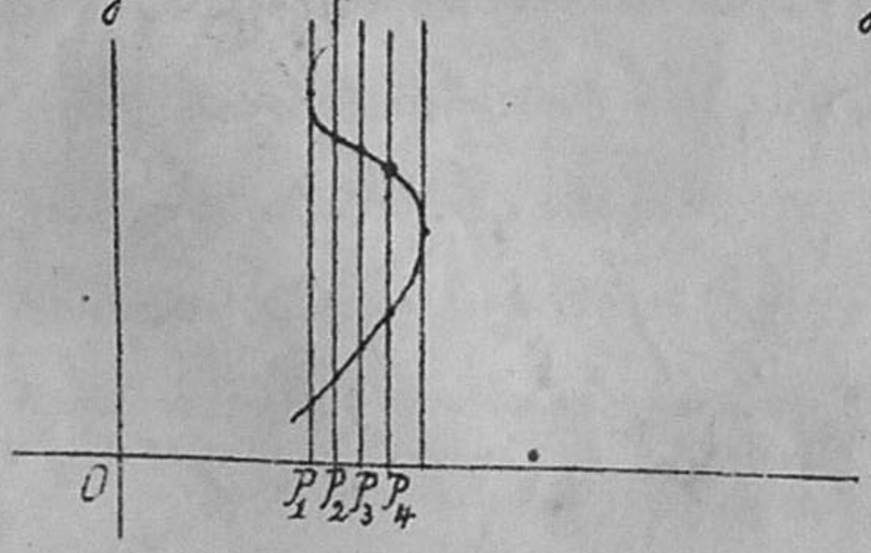


Mindazok az egyenesek, melyeknek coord. kielégítik ezt az egyenletet egy kört burkolnak, egy körnek az érintői. Ez az egyenlet tehát szintén a körnek az egyenlete, de vonalcoordinatákkal. Az első esetben a kör pont mozgása itt egyenes mozgása által keletkezett.

Ez a néhány példa mutatja, hogy minden egyenlet, mely egy pont vagy egyenes coordinatai között fennáll, az összes síkbeli pontok illetőleg egyeneseknek közül bizonyosakat kiválaszt és könnyü meggyőződni, hogy ezek a pontoknak illetőleg egyeneseknek folytonos sorozatát alkotják. Mert tegyük fel, hogy egy pont Dts. féle coordinatai között fennáll a következő egyenlet:

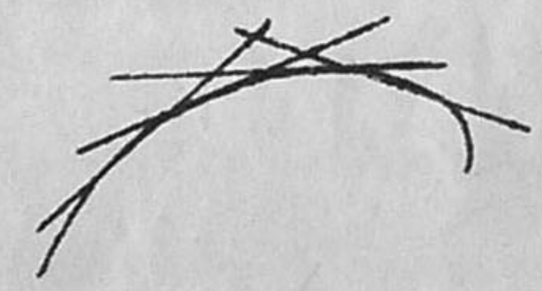
$$f(x, y) = 0$$

melynek baloldala az x és y folytonos függvénye. Minden szabott x értékhez egy vagy több y érték tartozik, vagyis ha ezen szabott x-nek megfelelő P_2 pontjában az x tengelynek, arra merőlegest emelünk, ezen egy vagy több pont fekszik, az egyenletet kielégitő



y coordinatával. Ha az első x-hez végtelen közel fekvő x értéknek megfelelő normalist P_2-ben emeljük, az ezen fekvő pontok az előbbiekhez megfelelően szintén végtelen közel lesznek stb. ha ezen normális talppontja az x tengelyen végighalad, a rajta fekvő pontok folytonosan sorakoznak egymáshoz és egy síkbeli görbét alkotnak.

Éppenígy, ha $F(u,v)=0$ egy egyenes két coordinatája közötti fennálló egyenlet, melynek baloldala az u,v folytonos függvénye, akkor a folytonosan változó u-hoz tartozó v coordináta szintén folytonosan változik, a hozzájuk tartozó egyenesek folytonosan sorakoznak egymáshoz és egy síkbeli görbét burkolnak.



Tehát akár pont-, akár vonalcoordináták között legyen adva egy egyenlet, az mindig görbét értelmez, mely az első esetben pontnak, a második esetben egyenesnek mozgása által keletkezett. A görbéket az értelmező egyenletek szerint osztályozzuk. Mi itt csak olyan görbékkel foglalkozunk, melyeknek analytikai kifejezése egy algebrai egyenlet, vagy legalább olyan egyenlet, mely kellő transformatió után algebraivá tehető. Ezek az úgynevezett algebrai görbék. Az algebrai görbéket kétfele szempontból vizsgálhatjuk: vagy mint mozgó pontnak vagy mint mozgó egyenesnek származékát. Ha a görbét mint mozgó pontnak származékát tekintjük, akkor egyenletének, mint a mozgó pont x,y coordinatai között fennálló $f(x,y)=0$ egyenletnek fokszámát, az algebrai görbe <u>rendszámának</u> nevezzük. Ha pedig mint mozgó egyenes származékát tekintjük a görbét, akkor a mozgó egyenes u,v coordinatai között fennálló $F(u,v)=0$ egyenletének fokszámát az algb. görbe <u>osztályszámának</u> nevezzük.

Egy pont mozgásából származó n-ed rendü algebrai görbe egyenlete ily alakú

$$\sum_{\substack{i,k=0 \\ i+k \leqq n}}^{n} c_{ik} x^i y^k = 0$$

Lássuk, mi a rendszámnak geometriai jelentése? Ki fogjuk mutatni, hogy egy n-ed rendü algebrai görbe a sik egy tetszöleges egyenesétől n pontban metszetik, ha tekintetbe veszszük a képzetes és többszörös pontokat is. Mert tegyük fel, hogy P_1 és P_2 két tetszöleges pontja a siknak, coordinatáik $x_1 y_1$ és $x_2 y_2$ és kérdezzük, hogy az ezek által meghatározott pontsorból hány pont tartozik a görbéhez, vagyis a P_1 és P_2-n átmenő egyenes hány pontban metszi a görbét? Ha λ a pontsorban változó pont egyszerü aránnyszáma, akkor annak x, y coordinatái, a mint láttuk

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} \quad , \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}$$

Ezeket a coordinatákat behelyettesitve az egyenletbe, kapjuk λ ismeretlen számára a következő egyenletet:

$$\sum c_{ik} \left(\frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}\right)^i \left(\frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}\right)^k = 0$$

hogy az ismeretlen ne szerepeljen tört alsóban, szorozzuk keresztül az egyenletet $(1+\lambda)^n$ hatványnyal, akkor

$$\sum c_{ik} (x_1 + \lambda x_2)^i (y_1 + \lambda y_2)^k (1+\lambda)^{n-i-k} = 0$$

a hol $i+k \leqq n$ lévén, $n-i-k \geq 0$. Ha elvégezzük a $\sum$ megett a szorzást λ fokszáma $i+k+n-i-k = n$, az egyenlet tehát λ-ban n-ed foku algebrai egyenlet, melynek n gyöke azt mutatja, hogy a pontsorból n pont tartozik a görbéhez, vagyis a felvett egyenes n pontban metszi a görbét, minden k-szoros gyök helyett k egyszerü gyököt számitva és a képzetes gyököket is tekintetbe véve.

Az egyenes mozgásából származó m-ed osztályu algb. görbe egyenlete ily alaku $\sum_{i,k=0}^{m} c_{ik} u^i v^k = 0$

$$i + h \leqq m$$

A származtató egyenesek, melyeknek coord. ezen egyenletet kielégitik, a görbének érintői. Itt is egyszerü geometriai jelentése van a görbe osztályszámának, a mennyiben t. i. kimutatható, hogy a sik egy tetszőleges pontjából m érintő" húzható a görbéhez. Legyen ugyanis a ponton átmenő" sugársor két alapsugara $u_1 v_1$; $u_2 v_2$ coordinatákkal biró, akkor a k egyszerü aránnyszámmal biró változó sugár coordinatoái $u = \frac{u_1 + k u_2}{1+k}$, $v = \frac{v_1 + k v_2}{1+k}$

Ezeket betéve egyenletünkbe kapjuk k számára a következő egyenletet $\sum_0^m c_{ik} \left(\frac{u_1 + k u_2}{1+k}\right)^i \left(\frac{v_1 + k v_2}{1+k}\right)^k = 0$

vagy $(1+k)^m$ el szorozva

$$\sum_0^m c_{ik} (u_1 + k u_2)^i (v_1 + k v_2)^k (1+k)^{m-i-k} = 0$$

de rendezve, ez az egyenlet k-ban m-edfoku, tehát m sugár van a sugársorban, mely érintoi a görbéhez, vagyis a sik egy pontjából m érintő" húzható az m-ed osztályu görbéhez.

Elsőrendü vonal pl. az egyenes, mint pont származéka, mert a pontcoordinatákban elsőfoku az egyenlete, egy tetszőszerinti egyenes 1 pontban metszi. A kör másodrendü görbe, mert egyenlete a pontcoordinatákban másodfoku, másodosztályu, mert egyenlete a vonalcoordinatákban másodfoku; egy egyenes két pontban metszi a kört, egy pontból két érintő" húzható a körhöz.

Ha homog. coordinatákat akarunk használni, egyszerüen az 1. Pls. pontcoordinator helyébe $\frac{x}{z}$, a 2 ik helyébe $\frac{y}{z}$-t irunk, akkor az n-edrendü görbe egyenlete.

$$\sum c_{ik} \left(\frac{x}{z}\right)^i \left(\frac{y}{z}\right)^k = 0$$

vagy
$$\sum c_{ik} x^i y^k z^{n-i-k} = 0$$

ez pedig xyz- ben homogén, mert mindegyik tagjában az exponensek összege n. A homogén coordinatáknak tehát két előnyük van: először formuláik kivétel nélkül érvényesek, másodszor a görbe egyenlete bennök homogén. Ha végesben dolgozunk, $z=1$ tehető, miáltal a IIo. féle coordinátákhoz térünk át.

Ugyanigy írható fel az m edosztályu görbe egyenlete hom. vonalcoordinatákban

$$\sum c_{ik} u^i v^k w^{m-i-k} = 0$$

Az analytikus geometria feladata az algebrai görbéket ezen két szempontból tárgyalni, egyszer midőn pont, másszor midőn egyenes mozgása által keletkeznek. Mi itt csak első és másodrendü és osztályu görbékkel fogunk foglalkozni.

Elsőrendü vonal. Az egyenes.

Elsőrendü vonal oly vonal, melynek egyenlete pontcoordinatákban elsőfoku:

$$a_1 x + a_2 y + a_3 z = 0$$

a hol legalább egy coefficiens nem nulla. Ennek az elsőfoku hom. egyenletnek egyszerü geometriai jelentése van, ez ugyanis mindazon pontokat szolgáltatja, melyek összetartozási viszonyban vannak az a_1, a_2, a_3 coordinatáju egyenessel, ez tehát az a_1, a_2, a_3 coordinatáju egyenes egyenlete. Ebből látható, hogy az egyetlen elsőrendü vonal az

egyenes. Minden egyeneshez tartozik három coordinata és egy hom. elsőfokú egyenlet, s fordítva ha megadunk egy hom. elsőfokú egyenletet, ehhez egy egyenes tartozik, melynek coordinatái a megfelelő ponteoordinaták coefficiensei.

Az összes egyenesek közül három tünik ki mint legegyszerübb és ezeket nyerjük, ha az egyenlet két-két coefficienset nullá tesszük. Ha $a_1 \neq 0$, de $a_2 = a_3 = 0$, akkor az egyenlet $a_1 x = 0$ csak úgy teljesül, ha $x = 0$, bármilyen értéket is adunk y és z-nek. De ezek a pontok mind az y tengelyen fekszenek. Az y tengely egyenlete $x = 0$.

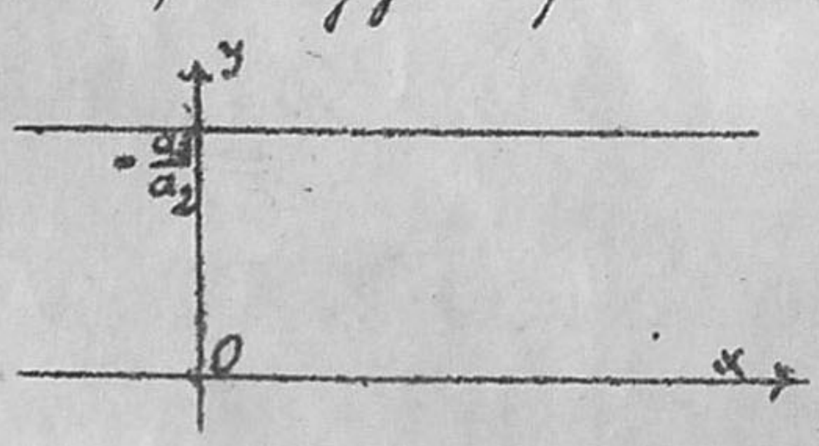
ha $a_2 \neq 0$, de $a_1 = a_3 = 0$, akkor $y = 0$, bármilyen x és z-re nézve. Ezek a pontok az x tengelyen fekszenek. Az x tengely egyenlet $y = 0$

ha $a_3 \neq 0$, de $a_1 = a_2 = 0$, akkor $z = 0$, ezek a pontok mind a végtelenben vannak; tehát a végtelen távoli egyenes egyenlete $z = 0$

Ezt a három egyenest a rendszer alapegyeneseinek nevezzük, mert egyenleteink a legegyszerübb.

Ha csak egy coefficiens tünik el, és pedig:

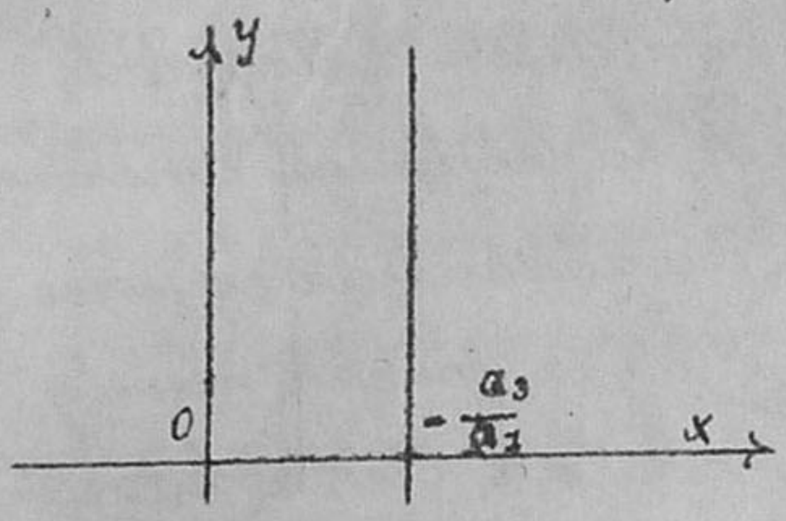
1. $a_2 = 0$, akkor $a_2 y + a_3 z = 0$ egyenletből $\frac{y}{z} = -\frac{a_3}{a_2}$, a mi egyfelől azt mondja, hogy ekkor az egyenes pontjainak második coordinatája állandó lévén, az egyenes parallel az x tengelylyel, másfelől, hogy az $y = a_3$, $z = -a_2$ pont rajta fekszik az egyenesen, de első coordinatája 0 lévén, rajta fekszik az y tengelyen is, ez tehát az a pont, a hol az x tengelylyel parallel egyenes az y tengelyt



metszi és a lemetszett darab $b = -\frac{a_3}{a_2}$.

2. $a_3 = 0$, akkor $a_1 x + a_2 y = 0$ egyenletből $\frac{x}{y} = -\frac{a_2}{a_1}$, az egyenes párhuzamos az y tengelylyel, $x = a_3$, $y = -a_1$, az a pont, hol az egyenes az x tengelyt

metszi, tehát az x hengelyről lemetszett darab $\alpha = -\frac{a_3}{a_1}$



3., $a_3 = 0$, akkor $a_1 x + a_2 y = 0$ egyenletből

$\frac{y}{x} = -\frac{a_1}{a_2} = \operatorname{tg}\alpha$ az egyenes irányszöge

vagy a mi ugyanaz, a végtelen távoli pont coordinatáinak hányadosa. E' miután az egyenes normálisának irányszögére nézve áll, hogy $\operatorname{tg}\psi \operatorname{tg}\alpha + 1 = 0$, azaz $\operatorname{tg}\psi = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$, következik, hogy $\operatorname{tg}\psi = \frac{a_2}{a_1}$

Ha tehát legalább két coefficiens nullától különböző, egyszerüen választhatunk három pontot, melyek bizton rajta vannak az egyenesen; az egyik az x hengelylyel való metszéspont, coordinatái $x = a_3, z = -a_1$, a második az y hengelylyel való metszéspont, coordinatái $y = a_3$, $x = -a_2$, a harmadik az egyenes végtelen távoli pontja, irányszöge $-\frac{a_1}{a_2}$.

Ezt a három pontot másképp is megkaláltuk volna, tudva, hogy az egyenes hom. coordinatái a_1, a_2, a_3.

Az egyenesek polárcoordinatáit ennek alapján azonnal felirhatjuk:

$$\cos\varphi = \frac{-a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}, \qquad \sin\varphi = \frac{-a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}$$

$$p = \frac{a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}$$

de miután p egy abszolut hosszuságot jelent, a négyzetgyök jegyét mindig a_3 jegyével egyenlőnek kell választani, hogy hányadosuk pozitiv legyen.

Ezen egyenes függvény egyszersmind kész formulát szolgáltat arra nézve, hogy a sik közönséges x, y, z pontja mily távolságban van az egyenestől. Mert az egyenes coordinatái a_3, a_2, a_3 lévén

$$d = \frac{a_1 x + a_2 y + a_3 z}{z\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}$$

tehát az egyenes függvény $a_1 x + a_2 y + a_3 z = \alpha . z \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

Megjegyzendő, hogy az egyenes egyenlete nem tökéletesen határozott, mert az egyenlet geometriai értelme nem változik, ha tetszőleges constanssal keresztül szorozzuk. Célszerűen választott szorzókkal az egyenes egyenletének néhány speciális alakját vezethetjük le, melyek némely vizsgálatoknál célszerűbbek mint az általános alak. Ezek a következők:

I. Feltéve, hogy az egyenesnek csak végesben fekvő részeit vizsgáljuk, $z = 1$ tehető, s most a constans taggal keresztül osztva

$$-\frac{a_1}{a_3} x - \frac{a_2}{a_3} y - 1 = 0$$

de $-\frac{a_1}{a_3} = \frac{1}{a}$, $-\frac{a_2}{a_3} = \frac{1}{b}$ tehát az egyenes egyenlete

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0$$ Plücker-féle alak.

a hol a az x tengelyről, b az y tengelyről lemetszett darab. Ez az alak csak akkor használható, ha $a_3 \neq 0$, vagyis az egyenes nem megy át az O ponton, mert csak ekkor szabad a_3-al osztani. Ez az egyenes egyenletének Plücker féle alakja.

II. Ha keresztül osztjuk az általános egyenletet $(-\sqrt{a_1^2 + a_2^2})$ kifejezéssel, akkor x coefficiense lesz $\cos\psi$, y coefficiense $\sin\psi$, a constans tag a normális hosszúságának negatívja $-p$, tehát az egyenlet

$$\cos\psi . x + \sin\psi . y - p = 0$$

Ez az egyenlet Hesse féle alakja. Ez az egyenlet csak egy egyenesre nem érvényes, t.i. a végtelen távoli egyenesre, mert ha $\sqrt{a_1^2 + a_2^2} = 0$, azaz $a_1 = 0$ és $a_2 = 0$, nem szabad osztani. Ennek az alaknak különös fontosságot ad az, hogy segítségével egyszerűen felírható a normális távolság formulája. Mert a $d = \frac{a_1 x + a_2 y + a_3 z}{z\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}$ formulában $z = 1$, $\sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \sqrt{\sin^2\psi + \cos^2\psi} = 1$, tehát

$$d = \cos\varphi . x + \sin\varphi . y - p$$

Vagyis ha a Hesse féle egyenlet függvényébe behelyettesítjük egy pont coordinatáit, kapjuk annak az egyenestől való normalis távolságát.

Itt is $z = 1$, tehát csak végeszben dolgozhatunk.

III. Az egyenes egyenletének egy régibb alakját nyerjük, ha feltesszük, hogy $z = 1$ és kiszámítjuk y-t, mint x függvényét

$$y = -\frac{a_1}{a_2}x - \frac{a_3}{a_2}$$

Itt $-\frac{a_1}{a_2} = \operatorname{tg}\alpha$ az egyenes hajlásszögének tangense, $-\frac{a_3}{a_2} = b$ az y tengelyről lemetszett darab, úgyhogy az egyenes egyenlete

$$y = \operatorname{tg}\alpha . x + b$$

Ez az alak is csak akkor használható, ha $a_2 \neq 0$, vagyis az egyenes nem párhuzamos az y tengelylyel

Ezen speciális egyenletek használatánál az egyenesek egy bizonyos csoportja mindig ki van zárva, ezért ha a sik összes egyeneseit akarjuk jellemezni, legczélszerűbb a homogén coordináták általános egyenletét használni.

Az egyenesre vonatkozó néhány feladat.

Előbb lássuk, mikép lehet az egyenest bizonyos adatokból meghatározni.

Állítsuk fel azon egyenes egyenletét, mely két adott (x_1, y_1, z_1) és $(x_2\ y_2\ z_2)$ ponton megy át. Tegyük fel, hogy az egyenes egyenlete

$$a_1 x + a_2 y + a_3 z = 0$$

mivel átmegy az

$x_1\ y_1\ z_1$ ponton $\quad a_1 x_1 + a_2 y_1 + a_3 z_1 = 0$ " " "

$x_2\ y_2\ z_2$ ponton $\quad a x_2 + a_2 y_2 + a_3 z_2 = 0$

ennek a három homog. lineáris egyenletnek egyszerre kell teljesülnie a_1, a_2 és a_3-ban, tehát a determinánsának el kell tünnie

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0$$

Ha ezt az egyenletet rendezzük x, y és z szerint, kapjuk a keresett egyenes egyenletét. Ha pl. koordinátáikkat akarnánk dolgozni, $z - z_1 - z_2 = 1$ teendő, és akkor az egyenlet

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}$$

Ennek az egyenletnek más alakot is adhatunk, ha a 2-ik sor elemeit kivonjuk az első sor, a 3-dik sor elemeit a 2-ik sor megfelelő elemeiből, akkor a determináns értéke nem változván

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & 0 \\ x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & 0 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

vagy kifejtve $\quad (x - x_2)(y_1 - y_2) - (y - y_1)(x_1 - x_2) = 0$

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_2}{x_2 - x_1}$$

Ez azon egyenes egyenlete, mely átmegy az $(x_1\ y_1\ z_1)$ és $(x_2\ y_2\ z_2)$ ponton.

Határozzuk meg az egyenest, ha adva egy pontja és az iránya. Ez esetben az előbbi feladat, a mennyiben egyik pont, melynek koordinátái (x_2, y_2, z_2) a végesben van, a másik a végtelen távoli pont, melynek koordinátái $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, 0 hol a meghatározandó egyenes irányszöge α.

Ezen egyenes egyenlete tehát

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & 0 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix} = 0$$

azaz $$\sin\alpha(x-x_1) - \cos\alpha(y-y_1) = 0$$

$$y - y_1 = \operatorname{tg}\alpha\,(x-x_1)$$

ez azon egyenes egyenlete, mely átmegy az $(x_1\ y_1)$ ponton és iránytangense: $\operatorname{tg}\alpha$. Csak az y tengely iránya nem határozható, mert erre nézve $\cos\alpha = 0$, s az osztást ezzel nem szabad végezni.

Most áttérünk 2, 3, 4 egyenessel kapcsolatos geometriai feladatok tárgyalására.

Legyen adva két egyenes, az elsőnek egyenlete

$$a_1 x + a_2 y + a_3 = 0 \qquad \text{a másodiké}$$

$$b_1 x + b_2 y + b_3 = 0$$

Minden pont, melynek coord. kielégítik az első egyenletet, az első egyenesen fekszik, a melynek coord. kielégítik a 2ik egyenletet, a második egyenesen fekszik. Kérdés, van-e olyan pont, mely egyszerre fekszik mindkét egyenesen? vagyis van-e a két egyenesnek metszőpontja? Ha ennek a pontnak coordinatái x, y, z, ezek mellett egyszerre kell teljesülnie mindkét egyenletnek, de akkor ezen két homog. lin. egyenletből

$$x : y : z = (a_2 b_3 - a_3 b_2) : (a_3 b_1 - a_1 b_3) : (a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

Ha a harmadik coordinata nem nulla, ezzel osztva kapjuk a végben fekvő metszéspont IIs. coordinatáit

$$\frac{x}{z} = \frac{a_2 b_3 - a_3 b_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \qquad \frac{y}{z} = \frac{a_3 b_1 - a_1 b_3}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

ha ellenben a harmadik coord. nulla, akkor a metszéspont végtelenben

van, és

$$\frac{y}{x} = \frac{a_3 b_1 - a_1 b_3}{a_2 b_3 - a_3 b_2} = tg\,\varphi$$

a két párhuzamos egyenes közös normálisának irányhajlásszöge.

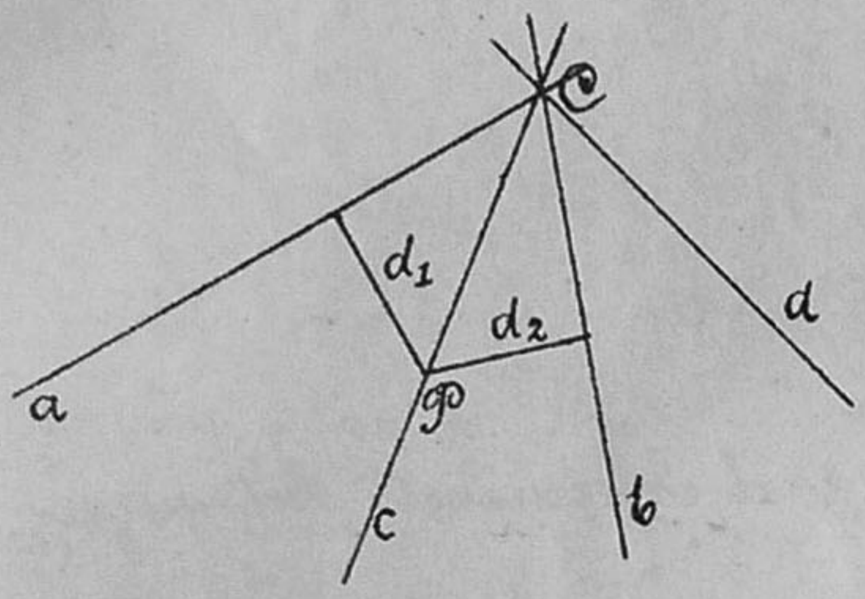
Ha mindhárom coordinata nulla, vagyis mindkettőjüknek 2 fokú determinánsa nulla, akkor, a mint tudjuk, a két egyenlet megfelelő coefficiensei egyenlők, a két egyenes identikus.

Legyen adva két egyenes a és b, egyenleteik

$$a \equiv a_1 x + a_2 y + a_3 z = 0$$

$$b \equiv b_1 x + b_2 y + b_3 z = 0$$

feltesszük, hogy a két egyenes különböző, tehát nem mindegyik másodfokú determinánsa nulla; a két egyenes metszőpontja C. Alkossuk meg a két egyenes függvényéből lineáris összetétellel a következő függvényt: $a - \lambda b$ és kérdezzük, mi a geometriai jelentése az $a - \lambda b = 0$ egyenletnek. Ez az egyenlet is elsőfokú az x, y és z-ben, tehát szintén egyenest értelmez. Ennek is pontja a C pont, mert a C pont coordinatai mellett a és b külön-külön nulla, tehát parameteres különbségük is. Az $a - \lambda b = 0$ egyenlet tehát bármily λ érték mellett olyan egyenest szolgáltat, mely átmegy az a és b egyenesek C metszőpontján vagyis ez az egyenlet a C centrumu sugársor egyenlete. Ha $\lambda = 0$, kapjuk az a egyenest, ha $\lambda = \infty$, kapjuk a b egyenest; Haftehát két egyenes függvényét parameteresen összekapcsoljuk, és a parametert változónak tekintjük, kapjuk azon sugársort, melynek centruma a két egyenes metszőpontja. Lássuk, mi a λ parameternek geometriai jelentése. Tekintsük λ-t pillanatra állandónak, és legyen c az $a - \lambda b = 0$ egyenletnek tartozó egyenese a sugársornak. A c egyenesen fekvő P pont



coordinatoái legyenek $x_0, y_0, 1$, akkor ezeket betéve az $\underline{a}$ függvénybe, ez az $a = d_1\sqrt{a_1^2+a_2^2}$, ha d_1 a P pont távolsága az $\underline{a}$ egyenestől és betéve a $\underline{b}$ függvénybe ez a $b = d_2\sqrt{b_1^2+b_2^2}$, ha d_2 a pont távolsága b-től. Ső mivel a P pont rajta van

a c egyenesen $\quad a - \lambda b \equiv d_1\sqrt{a_1^2+a_2^2} - \lambda d_2\sqrt{b_1^2+b_2^2} = 0$

ebből $\quad \lambda = \dfrac{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}{\sqrt{b_1^2+b_2^2}} \cdot \dfrac{d_1}{d_2}$

De láttuk, hogy $\dfrac{d_1}{d_2} = \dfrac{\sin(ac)}{\sin(cb)}$, tehát $\lambda = \dfrac{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}{\sqrt{b_1^2+b_2^2}} \cdot \dfrac{\sin(ac)}{\sin(cb)}$. A μ parameterhez tartozó d egyenesre nézve $\mu = \dfrac{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}{\sqrt{b_1^2+b_2^2}} \cdot \dfrac{\sin(ad)}{\sin(db)}$

tehát $\dfrac{\lambda}{\mu} = \dfrac{\sin(ac)}{\sin(cb)} : \dfrac{\sin(ad)}{\sin(db)} = (abcd)$

Tehát az a és b sugarak által meghatározott sugársor két c és d egyeneséhez tartozó λ illetőleg μ parameterek hányadosa annyi, mint a H sugár kettős aránysszáma, az a és b egyeneseket alapsugaraknak véve, a melyekhez tartozó parameterek 0 illetőleg ∞. A $\lambda = 1$ értékhez tartozó $a - b = 0$ egyenlet egyenesét ezen sugársor egységsugarának nevezzük. Ha ezt az e egységsugarat veszszük d helyett, akkor

$$\lambda = (a\,b\,c\,e)$$

Ha tehát egy $a - \lambda b = 0$ egyenlettel értelmezett sugársorban a $\lambda = 0$, és $\lambda = \infty$ parameternek megfelelő egyeneseket alapsugaraknak, a $\lambda = 1$-nek megfelelő egyenest egységsugárnak veszszük, akkor bármelyik más λ parameter annyi mint az ehhez tartozó sugárnak ezen alapsugarakra vonatkozó kettős aránysszáma. Ez a λ parameter geo-

metriai jelentése.

Ebből a tételből következik, hogy az

$$a - \lambda b = 0$$

és az $a + \lambda b = 0$

illesztés paraméterekhez tartozó egyenletekkel értelmezett két sugár harmonicus az a, b alapsugarakra nézve.

A b paraméter egy más egyszerű jelentését nyerjük, ha felírjuk az a és b egyenletek Hesse féle alakját

$$a \equiv \cos\varphi_1 x + \sin\varphi_1 y - p_1 = 0$$

$$b \equiv \cos\varphi_2 x + \sin\varphi_2 y - p_2 = 0$$

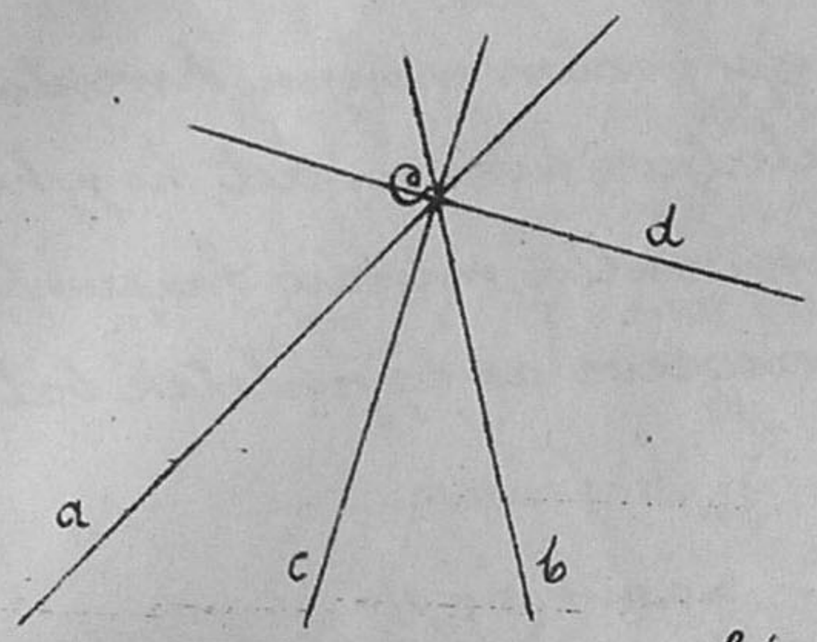
Ha ezekből alkotjuk az $a - \lambda b$ paraméteres kifejezést, lévén $\sqrt{\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2} = 1$ $\sqrt{\sin^2\varphi_2 + \cos^2\varphi_2} = 1$, kapjuk, hogy

$$\lambda = \frac{\sin(ac)}{\sin(cb)}$$

tehát λ-a hozzátartozó c sugár egyszerű arányszáma a, b-re nézve, ha a és b egyenletek Hesse féle alakját vesszük. Az a, b sugarak az egész síkot 4 quadransra osztják; ezek között az pozitív, melyben a O. pont is fekszik, mert az ezen átmenő c sugár pontjaira nézve d_1 és d_2 pozitív. A csúcstérben mindkettő negatív, tehát hányadosuk szintén pozitív, a szomszédos két térrészben d_1 és d_2 ellentett jelű, itt λ negatív.

A Hesse féle egyenletek esetén λ ezen utóbbi értelmezésének egyszerű geometriai jelentése van a két egyenes függvény összegének és különbségének. Mert a $d \equiv a - b = 0$ egyenesre nézve $\lambda = 1$, tehát

$1 = \frac{\sin(ac)}{\sin(cb)} = \frac{d_1}{d_2}$ ebből $d_1 = d_2$, vagyis c felezi az a, b egyenesek pozitív szögterét. A $d \equiv a + b = 0$ egyenesre nézve $\lambda = -1$, tehát $d_1 = -d_2$, vagyis a d egyenes felezi a két egyenes mellékszögterét, és mivelhogy c, d, arányszámai illesztésben egyenlők, ez a két szögfelező harmonicus a felezett



szög a, b száraira nézve. Ez a négy harmonicus egyenes $a=0$, $b=0$, $a-b=0$, $a+b=0$. Ezzel analytikai bebizonyitását nyerhtük annak tételnek, hogy a két szögfelező harmonicus a felezett szög száraira nézve. Könnyen kimutatható az is, hogy ez a két harmonicus szögfelező merőleges egymásra. Láttuk, hogy az $u_1 v_1$ és $u_2 v_2$ coordinatáju egyenesek merőlegesek egymásra, ha $u_1 u_2 + v_1 v_2 = 0$. A mi esetünkben az $a-b=0$ illetőleg $a+b=0$ egyenlet coefficienesei a két harmonicus szögfelező coordinatái, vagyis

$$u_1 = \cos\varphi_2 - \cos\varphi_2 , \quad u_2 = \cos\varphi_2 + \cos\varphi_2$$
$$v_1 = \sin\varphi_2 - \sin\varphi_2 , \quad v_2 = \sin\varphi_2 + \sin\varphi_2$$

tehát $u_1 u_2 + v_1 v_2 = \cos^2\varphi_1 - \cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2 - \sin^2\varphi_1 = 0$

Vizsgáljuk most három $a, b,$ és c egyenes viszonyát. Függvényeik legyenek a, b, c, egyenletük

$$a \equiv a_1 x + a_2 y + a_3 z = 0$$
$$b \equiv b_1 x + b_2 y + b_3 z = 0$$
$$c \equiv c_1 x + c_2 y + c_3 z = 0$$

Az első kérdés, hogy mikor metszi egymást a három egyenes egy pontban? Hogy a három egyenesnek egy közös x, y, z pontja legyen, arra szükséges, hogy a fenti három hom. lineáris egyenlet egyszerre teljesüljön, vagyis hogy a három egyenes homogén coordinatáiból (az egyenletrendszer coefficienseiből) alkotott determinans eltünjék:

Tehát az $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$ egyenlet fejezi ki

a feltételt arra nézve, hogy a három egyenes egy ponton menjen keresztül. Ezt a feltételt azonban másképp is fogalmazhatjuk, tudván azt, hogy ha ezen hom. lin. egyenletrendszer determinánsa nulla, mindig kapunk olyan λ, μ, ν szorzókat, melyek szerint összegezve az egyenletek baloldalait, identicuson nullát kapunk

$$\lambda a + \mu b + \nu c \equiv 0$$

ez az identitás, mely fennáll x, y, z bármily értékei mellett, tehát azoktól független, kifejezi a feltételt arra nézve, hogy a három egyenes egy ponton menjen keresztül. Sőt még egyszerűbben kiolvasható a tétel, ha egyik függvényt, melynek szorzója ebben az identitásban nem nulla, előállítjuk a másik kettő kapcsolataképen, pl. ha $\nu \neq 0$,

$$c = -\frac{\lambda}{\nu} a - \frac{\mu}{\nu} b$$

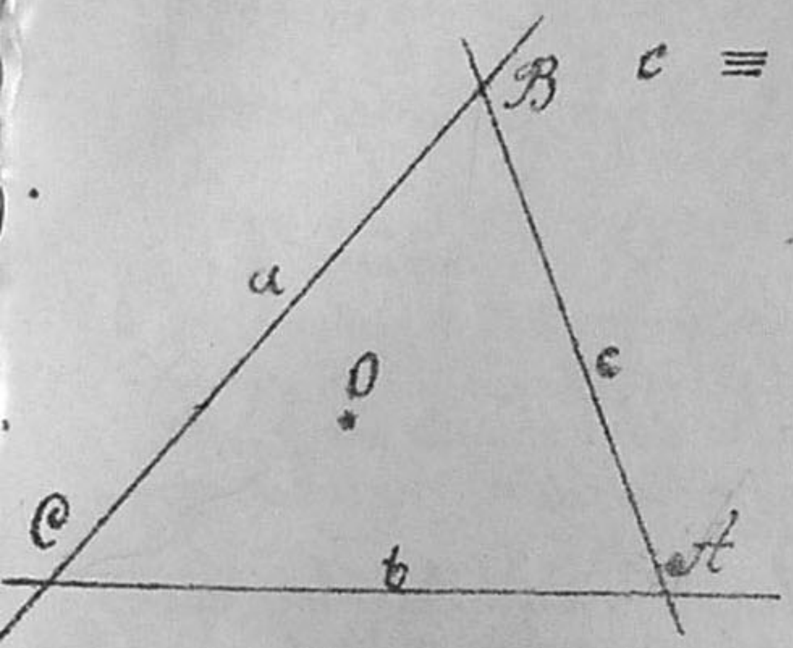
De a fentiek szerint ez azt jelenti, hogy a c egyenes átmegy az a és b egyenesek metszőpontján.

Tehát a tétel az, hogy ha három egyenes egy ponton megy keresztül, akkor homogen coordinatáik determinánsa nulla, vagy léteznek olyan multiplicatorok, melyek szerint összeadva a három egyenes függvényét identikusan nullát kapunk és fordítva, ha három egyenes hom. coord. determinánsa eltünik, akkor a három egyenes egy ponton megy keresztül.

A háromszög.

Ha a coordinaták determinánsa nem nulla, a három egyenes nem metszi egymást egy pontban, hanem háromszöget alkot. Három egyenes tehát akkor fejez háromszöget, ha hom. coordinatáik determinánsa nullától különböző. Legyen három ilyen a, b, c egyenes Hesse féle egyenlete

$$a \equiv \cos\psi_1 x + \sin\psi_1 y - p_1 = 0$$
$$b \equiv \cos\psi_2 x + \sin\psi_2 y - p_2 = 0$$
$$c \equiv \cos\psi_3 x + \sin\psi_3 y - p_3 = 0$$



és válasszuk a coord. rendszer kezdőpontját úgy, hogy a háromszögön belül legyen, vagyis hogy a háromszög belseje mindhárom egyenesnek positiv quadransaiban legyen. Ilyen felvétel mellett tanulmányozzuk most a háromszöggel kapcsolatos nevezetesebb pontok és egyenesek tulajdonságait.

A szögfelező egyenesek.

Legyenek a háromszög szögpontjai A, B, C, a szemközt fekvő oldalak a, b, c, egyenletük a fenti három egyenlet, akkor két egyenes szögfelező egyeneseiről mondottak alapján a háromszög belső szög felezőinek egyenletei $b-c=0$, $c-a=0$, $a-b=0$, külső szög felezőinek egyenletei $b+c=0$, $c+a=0$, $a+b=0$

Ez a hat szögfelező egyenlete.

Ha a belső szögfelezők függvényeit összeadjuk, identikusan nullát kapunk

$$(b-c)+(c-a)+(a-b)=0$$

a mi azt mondja, hogy a belső szögfelezők egy pontban metszik egymást (Itt t.i. $\lambda=\mu=\nu=1$). Legyen ez a pont, mely a háromszög belsejében fekszik: O, akkor a szögfelező tulajdonságából következik, hogy ez mindhárom oldaltól egyenlő normális távolságban van, hogy tehát O a háromszög oldalait belülről érintő kör centruma. (Lásd az összefoglaló ábrát).

Egy belső és két külső szögfelező függvényét $\lambda=1, \mu=1, \nu=-1$ multiplicatorok szerint összeadva, kapjuk, hogy

$$(b-c)+(c+a)-(a+b) \equiv 0$$
$$(c-a)+(b+c)-(a+b) \equiv 0$$
$$(a-b)+(b+c)-(c+a) \equiv 0$$

Ez a három identitás azt fejezi ki, hogy egy belső szögfelező és a szemben fekvő oldalhoz tartozó két külső szögfelező egy pontban metszik egymást, összesen három pontban, E_1, E_2, E_3-ban, melyek megfelelőleg az A, B, C csúcspontokból kiinduló belső szögfelezőkön fekszenek és pedig az ezen csúcspontokból kiinduló oldalak külső szögterében, és a szögfelezők tulajdonságából kifolyólag a három oldaltól egyenlő távolságban vannak. Ezek tehát a háromszög oldalait kívülről érintő körök centrumai. És miután a megfelelő belső és külső szögfelezők merőlegesek egymásra, világos, hogy a külső szögfelezők E_1, E_2, E_3 csúcspontokkal egy háromszöget alkotnak, melynek magasságpontja a belülről érintő kör E centruma.

A szögfelezőkre vonatkozó néhány tantételt kapunk, ha kiindulunk a három oldal-függvény összegéből, illetőleg az ezzel értelmezett egyenesből

$$a+b+c=0 \qquad \text{I.}$$

Ennek az egyenesnek három pontját egyszerre meg tudjuk jelölni. Mert az utóbbi egyenlet háromféleképen teljesülhet és pedig

ha $a=0$, és $b+c=0$

vagy ha $b=0$, és $a+c=0$

végre ha $c=0$, és $a+b=0$

Az a pont, mely az első módon elégíti ki az I egyenletet, nem egyéb, mint az a oldalnak a b és c oldalak külső szögfelezőjével való met-

szépontja A_1; a melyik a második módon elégíti ki I-et, a $\underline{a}$ oldalnak az a és c külső szögfelezőjével való metszéspontja B_1, a harmadik a c az $\underline{a}$ oldalnak és b külső szögfelezőjével való metszéspontja C_1. Mindhárom pont coordinatái kielégítik az I egyenletet, tehát mindhárom pont rajta van ezen az egyenesen. Kapjuk tehát azt a tételt, hogy a háromszög oldalainak a szembenfekvő csúcspontokon átmenő külső szögfelezőkkel való metszéspontjai egy egyenesen fekszenek, melynek egyenlete

$$a+b+c=0$$

Még három ilyen egyenese van a háromszögnek, egyenletei

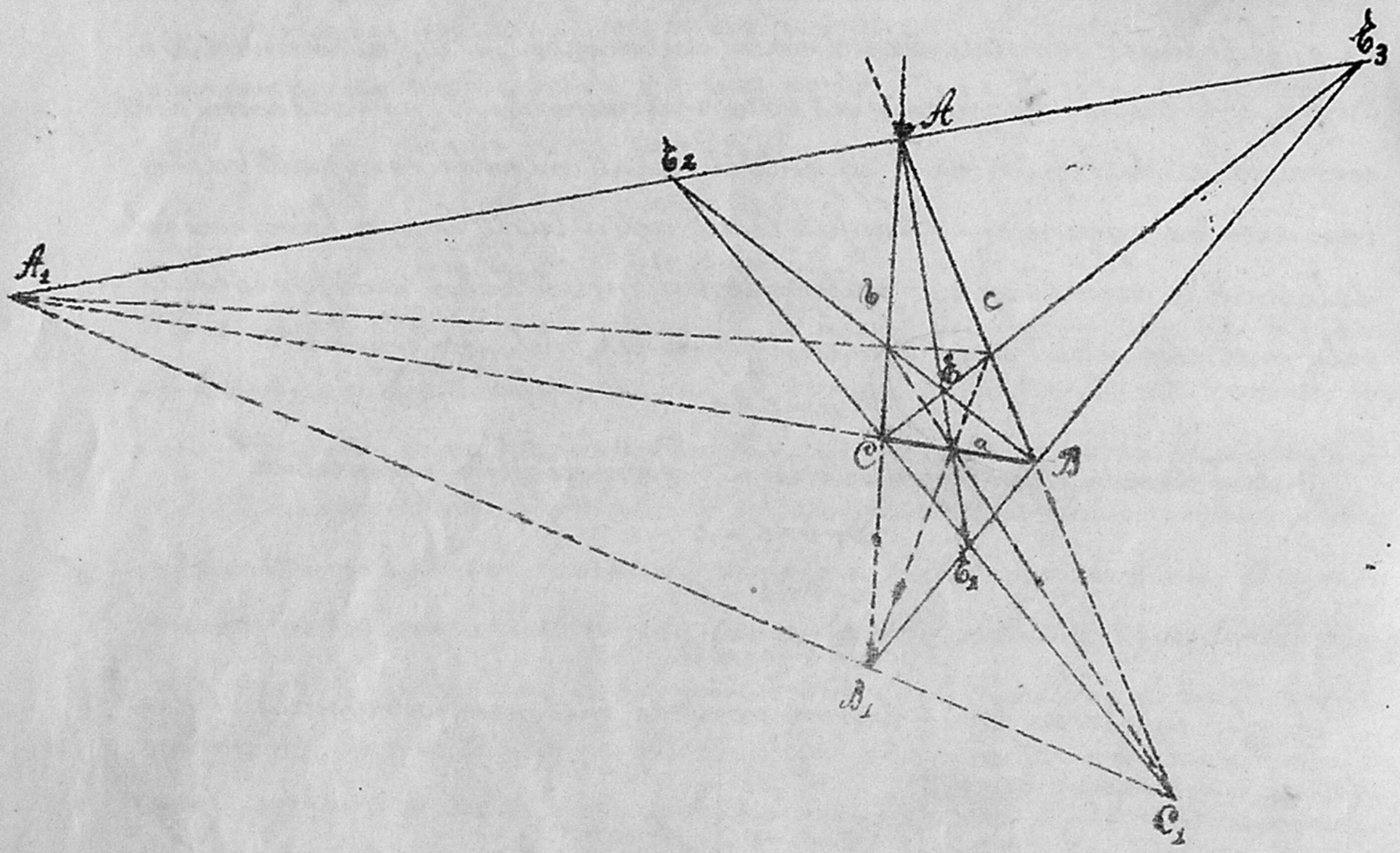
$$-a+b+c=0$$

$$a-b+c=0$$

$$a+b-c=0$$

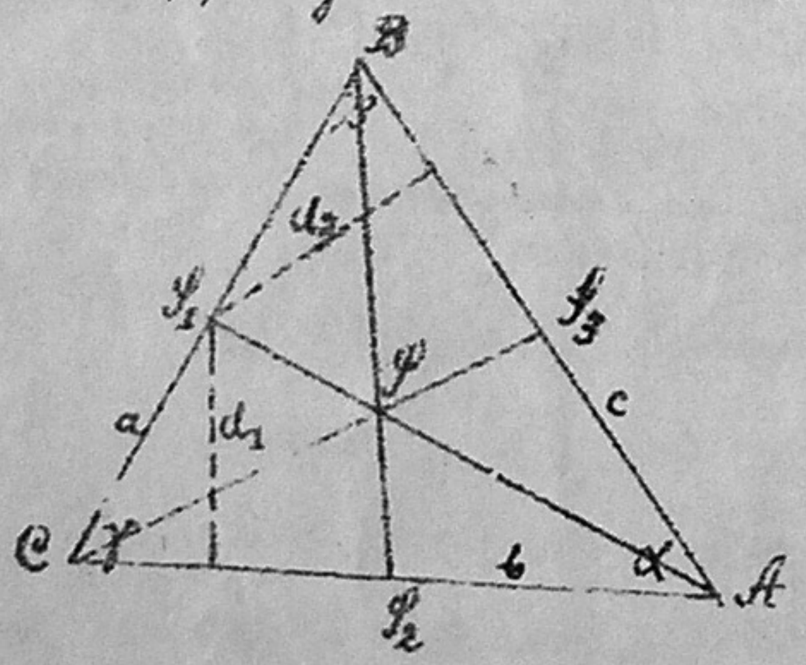
Az első egyenesen fekvő három pont az, melynek coordinatái kielégítik az $-a=0$ vagyis $a=0$, $\left|\begin{array}{l} b=0 \\ b+c=0, \end{array}\right.$ $\left|\begin{array}{l} c=0 \\ c-a=0, \end{array}\right.$ $\left|\begin{array}{l} b-a=0 \end{array}\right.$

egyenletrendszereket, vagyis az $\underline{a}$ oldalnak és az A csúcson átmenő külső, a b oldalnak és a B ponton átmenő belső, végre a c oldalnak és a C ponton átmenő belső szögfelezővel való metszéspontjai. Hasonló három-három pont fekszik a második két egyenesen. A tétel tehát az, hogy két belső és a hozzájuk nem tartozó külső szögfelezők a háromszög megfelelőleg szemben fekvő oldalaival való 3 metszéspontja egy egyenesen fekszik. Mindezeket a pontokat és egyeneseket feltüntető következő ábra;



Súlypont, magasságpont és a körülírt kör centruma.

Vegyük az előbbi háromszöget. A csúcsokat a szembenfekvő oldalak közepipontjaival összekötő egyeneseket a háromszög középvonalainak nevezzük. Ki fogjuk mutatni, hogy a három középvonal egy pontban metszi egymást, a melyet a háromszög súlypontjának nevezünk.

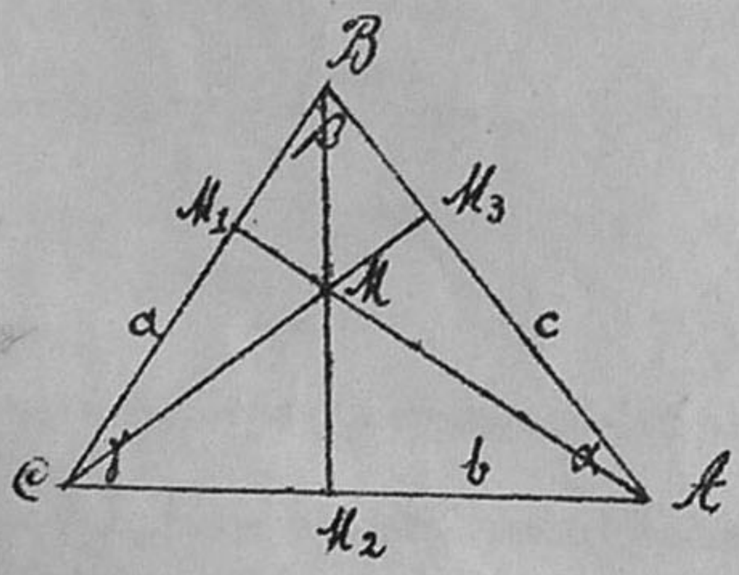


Vegyük az A csúcsot az a oldal t_1 felező pontjával összekötő középvonalat. Ez az A

csúcson átmenő sugársor egy sugara, és így egyenlete ezen sugársor ismeretes b és c sugaraihoz tartozó b és c függvényekből parameteresen összeteheto, A S_1 egyenlete tehát $b - \lambda c = 0$, a hol λ az AS_1 sugár egyszerű arányszáma b és c-re nézve és kifejezhető pl. az S_1 pontból a b- és c oldalakra bocsátott merőlegesek d_1 és d_2 hányadosával. De $d_1 = CS_1 . \sin\gamma$, $d_2 = BS_1 . \sin\beta$, tehát $\lambda = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}$ és így az AS_1 középvonal egyenlete $\sin\beta . b - \sin\gamma . c = 0$ hasonló módon kapjuk, hogy a BS_2 középv. " $\sin\gamma . c - \sin\alpha . a = 0$, és a CS_3 " " $\sin\alpha . a - \sin\beta . b = 0$,

ennek a három függvénynek az összege pedig identikusan nulla, a három középvonal tehát egy S pontban metszi egymást; ez a háromszög súlypontja.

Ki fogjuk mutatni, hogy a háromszög magasságvonalai, vagyis a csúcsokból a szembenfekvő oldalakra bocsátott merőlegesek egy pontban, a háromszög magasságpontjában metszik egymást.



Az AM_2 magasságvonal átmenvén b és c metszőpontjain, egyenlete

$$b - \lambda c = 0$$

a hol λ az AM_2 egyszerű arányszáma a b és c sugarakra vonatkozólag és annyi mint az ezen két sugárral képezett szögek sinusainak hányadosa. De a b-vel képezett szög $M_2 A C \sphericalangle = \frac{\pi}{2} - \gamma$, és c-vel képezett szög $M_2 A B \sphericalangle = \frac{\pi}{2} - \beta$, tehát

$$\lambda = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)} = \frac{\cos\gamma}{\cos\beta}$$ és így -

az AM_1 magasságvonal egyenlete $\cos\beta . b - \cos\gamma . c = 0$

hasonlóképen a BM_2 " " $\cos\gamma . c - \cos\alpha . a = 0$

és a CM_3 " " $\cos\alpha . a - \cos\beta . b = 0$

De a három baloldali függvény összege identikusan nulla, és így a 3 magasságvonal az M magasságpontban metszi egymást.

Végre határozzuk meg azt a pontot, mely a három csúcsponttól egyenlő távol van, vagyis a körülírt kör centrumát. Ki fogjuk mutatni, hogy ez nem egyéb, mint a háromszög oldalaira a felezőpontokban emelt merőlegesek metszőpontja.

A három oldal függvénye helyett most a csúcspontok coordinátáit használjuk. Legyenek az A, B, C csúcspontok coordinatai megfelelőleg (x_1, y_1), (x_2, y_2), $(x_3\ y_3)$, a keresett pont coordinatai (x, y), akkor

ennek a B-től való távolsága $r_2^2 = (x-x_2)^2 + (y-y_2)^2$

és " C-től " " $r_3^2 = (x-x_3)^2 + (y-y_3)^2$, ennek

a kettőnek egyenlőnek kell lennie

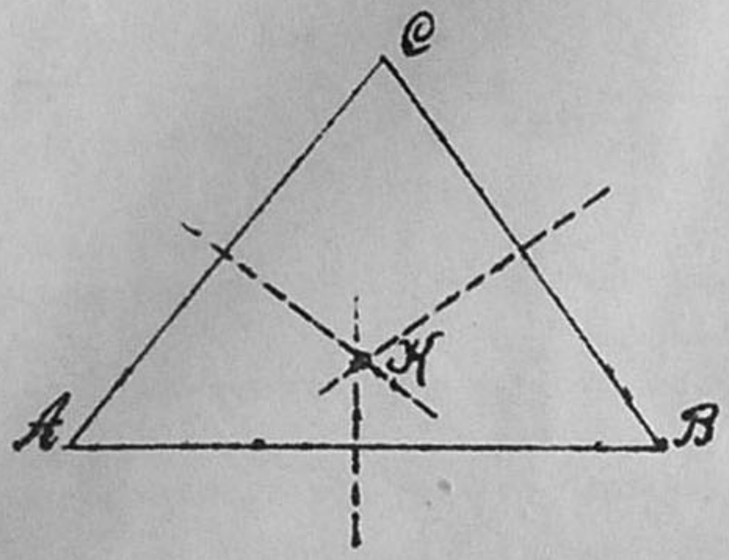
$$(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 = (x-x_3)^2 + (y-y_3)^2$$

vagy rendezve és 0-ra redukálva

$$2x(x_3-x_2) + 2y(y_3-y_2) + x_2^2 + y_2^2 - x_3^2 - y_3^2 = 0 \qquad I.'$$

Ez lineáris egyenlettel értelmezett egyenes mindama pontok geometriai helye, melyek a B és C csúcsoktól egyenlő távol vannak. Azonnal belátható, hogy ez az egyenes a BC oldalra annak felezőpontjában merőleges. Mert a B és C pontokon átmenő egyenes egyenlete

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{vagyis}$$



$(y_2-y_3)x-(x_2-x_3)y+x_2y_3-x_3y_2=0$ II.

tehát az I'és II egyenletből x és y coefficienseiből alkotott szorzatok összege, vagyis a két egyenes megfelelő coordinatáinak szorzatainak összege nulla

$2(x_3-x_2)(y_2-y_3)-2(y_2-y_3)(x_3-x_2)=0$, a mi azt mondja, hogy a két egyenes merőleges egymásra. Tehát végeben metszik egymást és a metszéspont rajta lévén az L egyenesen, B és C-től egyenlő távol van. Kaptuk tehát, hogy mindazon pontok geometriai helye, melyek eleget tesznek az I'egyenletnek, vagyis B és C-től egyenlő távol vannak, egy a BC oldalra annak felezőpontjában merőleges egyenesben fekszenek. A C és A csúcsoktól egyenlő távol fekvő pontok geometriai helyet számára analog módon adódik a

$$2x(x_1-x_3)+2y(y_1-y_3)+x_3^2+y_3^2-x_1^2-y_1^2=0 \qquad \text{II'}$$

egyenlettel értelmezett egyenes, mely a CA oldalra annak felezőpontjában merőleges. És az A meg B csúcsoktól egyenlő távol levő pontok geom. helye azon egyenes, melynek egyenlete

$$2x(x_2-x_1)+2y(y_2-y_1)+x_1^2+y_1^2-x_2^2-y_2^2=0 \qquad \text{III'}$$

és a mely az AB oldalra annak felezőpontjában merőleges. A három I', II', III' egyenlet baloldalait összegezve identikusan nullát kapunk, tehát a három merőleges egyenes egy pontban, a körülírt kör centrumában metszi egymást. —

A teljes négyoldal.

Vizsgáljuk négy egyenes viszonyát a síkban. Az egyeneseket végtelen kiterjedésüeknek gondoljuk és máskülönben is semmiféle megszoritásokat nem teszünk azoknak fekvésére, a miért is a négy egyenes egyenletét homogén coordinatákban irjuk fel:

$$a \equiv a_1 x + a_2 y + a_3 z = 0$$
$$b \equiv b_1 x + b_2 y + b_3 z = 0$$
$$c \equiv c_1 x + c_2 y + c_3 z = 0$$
$$d \equiv d_2 x + d_2 y + d_3 z = 0$$

Lapán csak azt kötjük ki, hogy 3-3 egyenes ne menjen át egy ponton, vagy más szóval; bármely három egyenes alkosson háromszöget, a minek feltétele az, hogy az illető három-három egyenes coordinatáinak determinansa nulltól különböző legyen.

Mielőtt ezen 4 egyenes geometriai viszonyát vizsgálnók, előbb mutassuk ki azt az algebrai tételt, hogy mindig léteznek 4 a nulltól különböző $\lambda, \mu, \nu, \varrho$ factor, melyek szerint összeadva a 4 egyenes függvényét identikuson nullat kapunk

$$\lambda a + \mu b + \nu c + \varrho d \equiv 0$$

Hogy ez az összeg identikuson nulla legyen, azt követeli, hogy belőle külön az x, külön az y és z factora kiessék, azaz eltünjék, tehát hogy ez utóbbi identitás álljon, ahhoz szükséges, hogy

$$a_1 \lambda + b_1 \mu + c_1 \nu + d_1 \varrho = 0$$
$$a_2 \lambda + b_2 \mu + c_2 \nu + d_2 \varrho = 0$$

$$a_3\lambda + b_3\mu + c_3\nu + d_3\varrho = 0$$

három hom. lineáris egyenlet λ, μ, ν és ϱ-ban egyszerre teljesüljön. Ezekből pedig ki tudjuk számítani, mivel arányosak a $\lambda, \mu, \nu, \varrho$ ismeretlenek; ugyanis arányosak egy negyediknek oda képzelt sor elemeihez tartozó aldeterminánsokkal, a melyek a feltétel szerint mulltól különbözők. Tegyük fel, hogy λ, μ, ν és ϱ-t meghatároztuk ebből az egyenletrendszerből, és legyen $\lambda a = \alpha$, $\mu b = \beta$, $\nu c = \gamma$, $\varrho d = \delta$ minthán az egyenes egyenlete nem változik, ha azt egy constanssal megszorozzuk, nyilvánvaló, hogy a négy egyenes egyenlete így is írható

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0, \quad \delta = 0$$

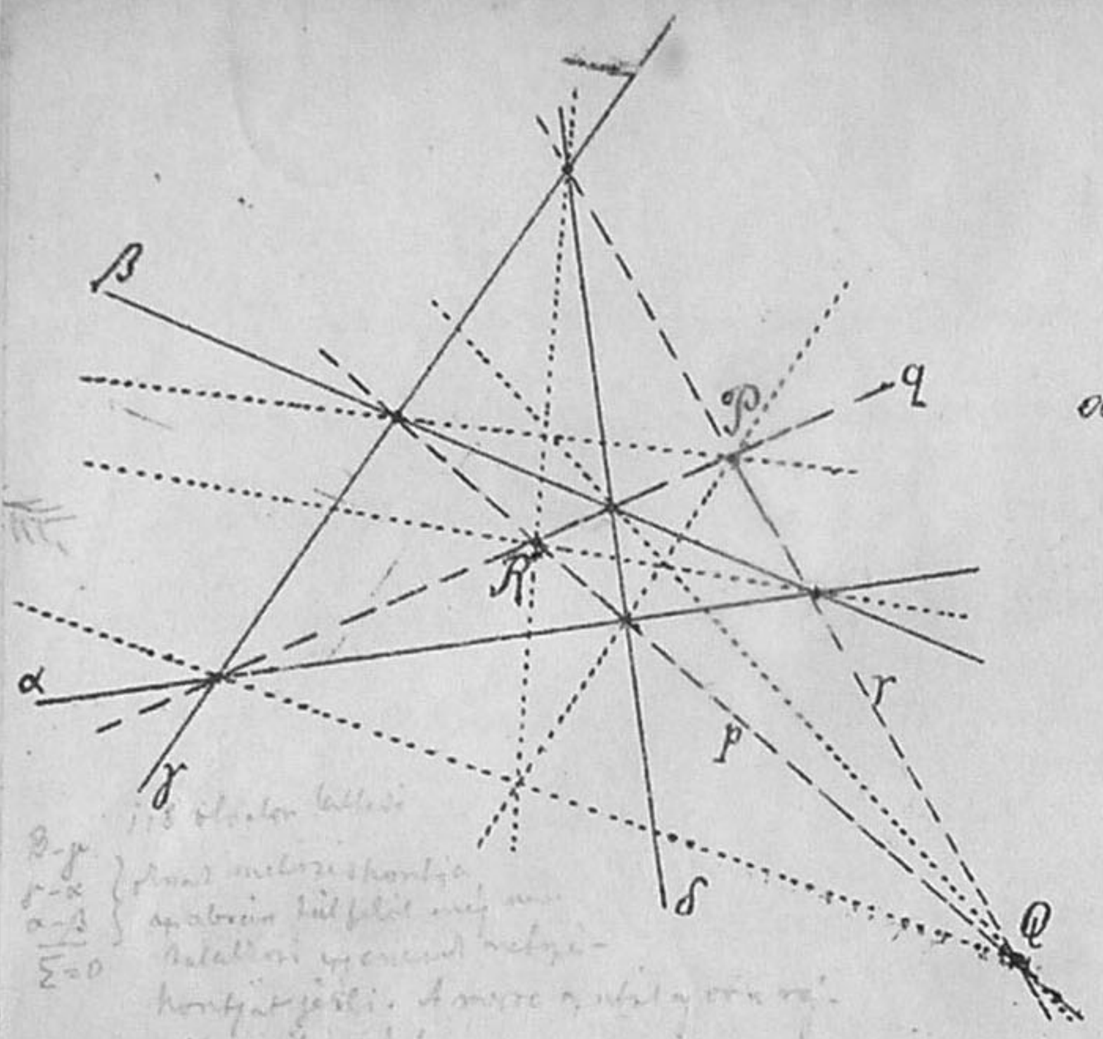
az identitás pedig

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta \equiv 0$$

tehát a négy egyenes függvény összege identikusan nulla. Ezen előzetes algebrai átalakítás után tekintsük most az α β, γ, δ egyeneket adottnak. Négy ilyen egyenes <u>teljes négyoldalt</u> alkot az egyeneseket egész kiterjedésükben véve. Két-két egyenes egy pontban metszi egymást, ilyen összesen $\binom{4}{2} = 6$ van; ezek a teljes négyoldal szögpontjai; két szögpontot szembenfekvőnek nevezünk, ha nem fekszenek ugyanazon az egyenesen. Ilyen szembenfekvő szögpontpár három van, a zárjelbe tett egyenesekkel jelölve a szögpontot, ez a három szögpontpár

$$(\beta, \gamma) \text{ és } (\alpha, \delta); \quad (\gamma\alpha) \text{ és } (\beta\delta); \quad (\alpha\beta) \text{ és } (\gamma\delta).$$

Egy szögpontpáron átmenő egyenes a teljes négyoldal átlója. Ilyen három van, a felirt szögpontpároknak megfelelőleg p, q, és r. (a rajzban szakadozott vonallal látható). Állítsuk fel a három átló egyenletét. A p átló átmegy a β és γ metszéspontján, valamint az α és δ metszéspontján. Tehát egyenlete paraméteresen összeteheto egyfelől β és γ-ból, másfelől α és δ-ból, ilyenformán



$$\beta + \lambda\gamma = 0$$

és $\alpha + \mu\delta = 0$

de miután $\alpha+\beta+\gamma+\delta \equiv 0$

látható, hogy $\lambda = \mu = 1$. Ő miután az ő többi identitás értelmében mihelyt $\beta+\gamma = 0$ már $\alpha+\delta = 0$, és mihelyt $\alpha+\delta = 0$, már $\beta+\gamma$ is nulla, látható, hogy ilyen átló csak egy van, p, és ennek egyenlete egyfelől $\beta+\gamma = 0$, másfelől $\alpha+\delta = 0$ a két egyenlet ugyanazt mondja, tehát akármelyik magára is a p egyenletének tekinthető. Hasonlókép adódik, hogy a q átló egyenlete akár $\gamma+\alpha = 0$, akár $\beta+\delta = 0$ és az r átló egyenlete akár $\alpha+\beta = 0$, akár $\gamma+\delta = 0$

A három átló háromszöget alkot, melynek p, q, r-el szembenfekvő szögpontjai P, Q, R. Ez az átlós háromszög. A teljes négyoldal mindegyik szögpontja az átlós háromszög két szögpontjával már össze van kötve. Ha a harmadikkal is összekötjük azokat, (a rajzban pontozott egyenesek), akkor elértük, hogy a 6 szögpont mindegyikén keresztül 4 egyenes megy: a teljes négyoldal két egyenese, egy átló és egy ilyen pontozott egyenes az átlós háromszög harmadik szögpontjához. Pl. az (α,β) szögpontból kiindul α, β, r és egy egyenes R felé. Ez utóbbinak vezessük le az egyenletét. Ez az egyenes átmegy α és β metszőpontján, tehát függvénye paraméteresen összeteheto

~~α és β-ból~~

átmegy p és q metszéspontján tehát függvénye összeteheto $\beta+\gamma$ és $\gamma+\alpha$ függvényekből. Nyilvánvaló, hogy $\alpha-\beta$ ezen egyenes függvénye, mert ez egyfelől tartalmazza α és β-t, másfelől $(\beta+\gamma)$ és $(\gamma+\alpha)$-t, a mennyiben

ezeknek különbsége. Az (α,β) szögpontból R felé induló egyenes egyenlete tehát $\alpha-\beta=0$. Ilyen egyenes összesen 6 van, a hat szögpontnak megfelelőleg, egyenleteik analog módon vezethetők le.

Most ki fogjuk mutatni, hogy a 6 szögpont bármelyikén átmenő 4 egyenes harmonicus viszonyt alkot. Vegyük fel pl. az (α,β) szögpontot. Az ezen átmenő két oldal egyenlete $\alpha=0$

$\beta=0$

az átló egyenlete $\alpha+\beta=0$

az R-be induló egyenes " $\alpha-\beta=0$

Látható, hogy a két utóbbi egyenes függvénye a két előbbiből van összetéve parametereven, az egyiknél a parameter +1, a másiknál -1, tehát a két utóbbi egyenes harmonicus a két elsőre nézve, a 4 egyenes harmonicus viszonyt alkot.

A 6 szögponton kívül az átlók metszéspontjai P, Q, R is azzal a tulajdonsággal bírnak, hogy a rajtuk átmenő 4-4 egyenes harmonicus viszonyt alkot. Pl. R-ből kiindul a p és q átló, valamint az (α,β) és (γ,δ)-hoz egy-egy pontozott egyenes. A két utóbbi egyenes egyenlete

$\alpha-\beta=0$

és $\gamma-\delta=0$

A kettő különbsége $\alpha+\delta-\beta-\gamma = 2(\alpha+\delta)=0$

a kettő összege $\alpha+\gamma-\beta-\delta = 2(\alpha+\gamma)=0$

ha t.i. tekintetbe vesszük, hogy $\alpha+\delta=-\beta-\gamma$ és $\alpha+\gamma=-\beta-\delta$. Ámde $\alpha+\delta=0$ a p átló egyenlete, $\alpha+\gamma=0$ a q átló egyenlete. Ez a kettő tehát parametereven össze van téve az $(\alpha-\beta)$ és $(\gamma-\delta)$ függvényekből, az egyiknél a parameter +1, a másiknál -1, tehát p és q harmonicus az R ponton átmenő másik két egyenesre, ugyanez áll a P és Q pontokon át-

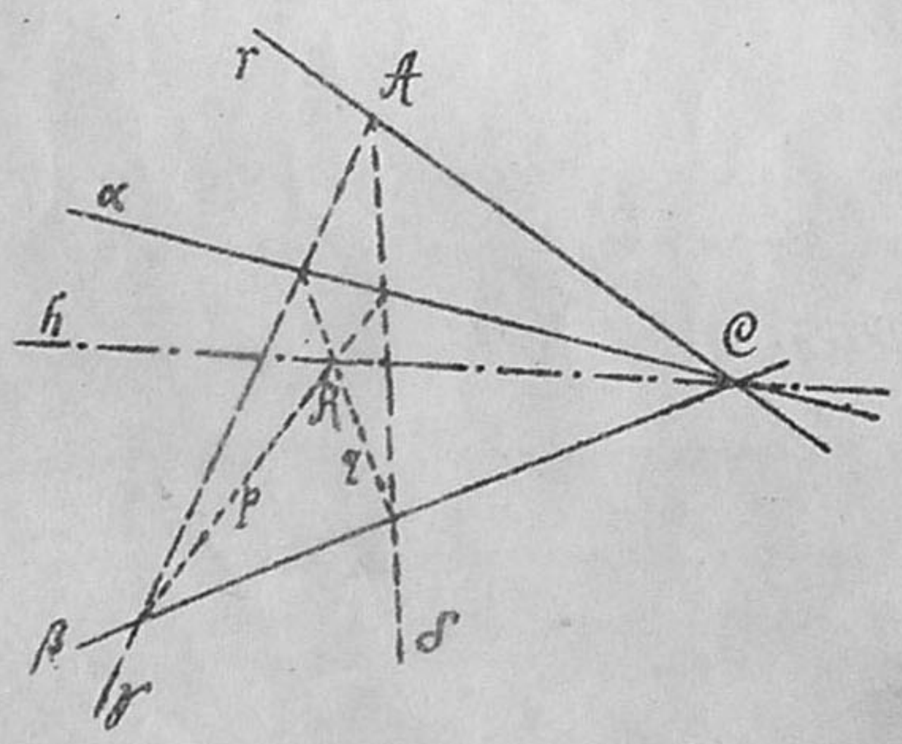
menő 4-4 egyenesre. A teljes négyoldalban tehát 9 olyan pont van, melyen áthalad 4-4 harmonicus egyenes.

Könnyü arról is meggyőződni, hogy a 6 pontozott egyenes közül 3-3 egy pontban metszi egymást, összesen tehát 4 pontban. Felírjuk egymás alá az egy ponton átmenő egyenesek függvényeit, a miből azonnal látható lesz, hogy összegük identikusan nulla. Ez a 4 függvénycsoport

$\beta-\gamma$	$\alpha-\beta$	$\alpha-\gamma$	$\beta-\gamma$
$\gamma-\alpha$	$\beta-\delta$	$\gamma-\delta$	$\gamma-\delta$
$\underline{\alpha-\beta}$	$\underline{\delta-\alpha}$	$\underline{\delta-\alpha}$	$\underline{\delta-\beta}$
$\Sigma\equiv 0$	$\Sigma\equiv 0$	$\Sigma\equiv 0$	$\Sigma\equiv 0$

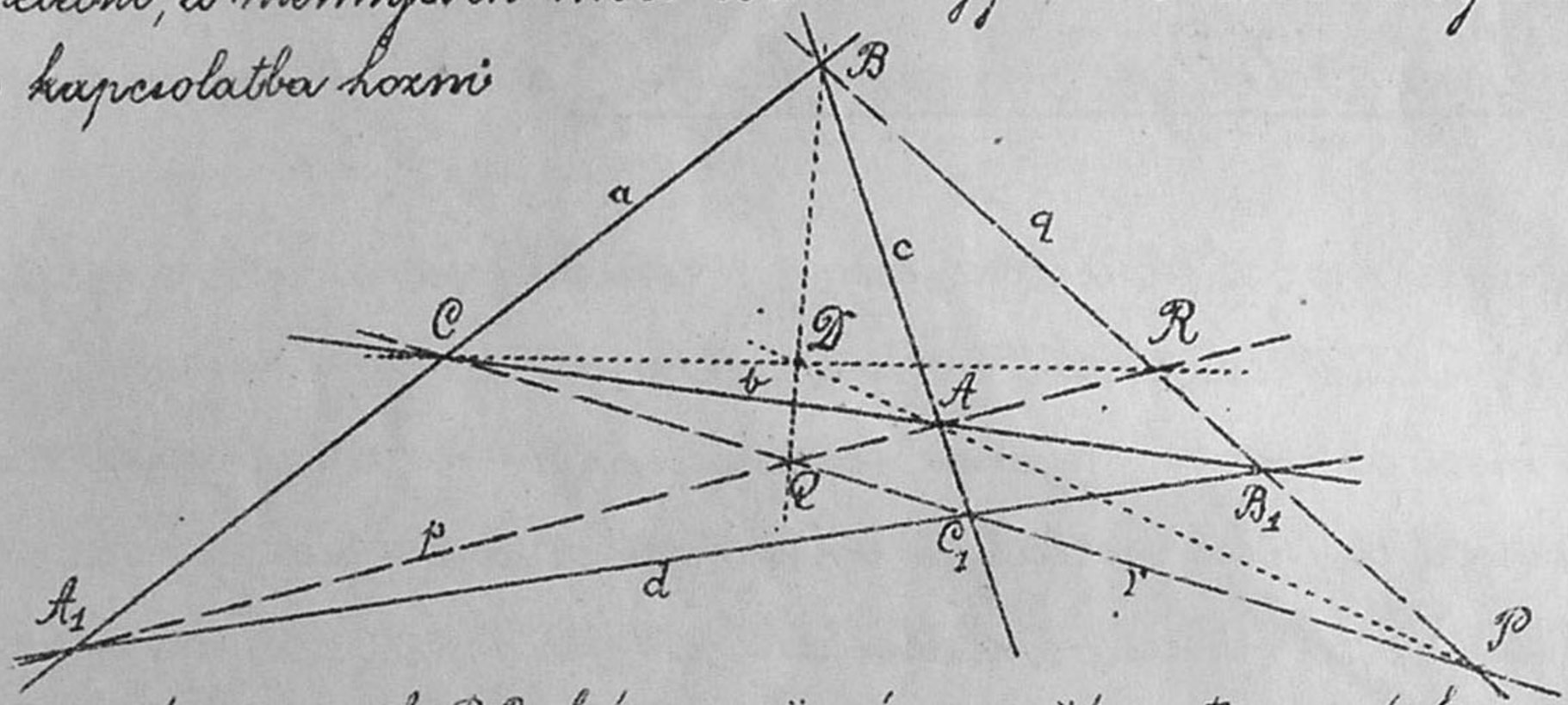
Összefoglalva a teljes négyoldalról mondottakat, látjuk, hogy annak van 4 egyenese, 6 szögpontja, 3 átlója, 3 átlósszögpontja, a szögpontokat az átlósszögpontokkal összekötő 6 egyenese és ezeknek 4 metszéspontja, tehát van összesen 13 egyenese és 13 pontja.

Annak alapján, hogy a teljes négyoldal egy szögpontján átmenő 4 egyenes harmonicus, könnyü módszerünk van arra, hogy három egy ponton átmenő egyenleshez a negyedik harmonikust csupán vonalzó segélyével megszerkesszük. Legyen adva a három egyenes, mely átmegy a C ponton; azt a kettőt, mely a harmonicus viszonyban egy párt fog alkotni, jelölje α és β; a harmadik legyen r. A szerkesztés a következő: r-nek egy tetszőleges A pontjából két tetszőleges γ és δ egyenest húzunk; az $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ teljes négyoldalban r egyik átlója lévén, a másik két p és q átló R metszéspontját a C ponttal összekötő h



egyenes nyilvánvalóan x- nek harmonikus társa α, β -ra nézve. –

Jó lesz a teljes négyoldalra vonatkozó néhány tételt más alakban ismételni, a mennyiben most azokat egy adott háromszög oldalaival fogjuk kapcsolatba hozni



Legyen adva egy A, B, C háromszög és messük ezt egy d transversalissal, vagyis egy oly egyenessel, mely egyik szöggyenton se megy keresztül. Az a, b, c oldalakkal való metszéspontok legyenek megfelelőleg A_1, B_1, C_1. Az így keletkező képződményt teljes négyoldalnak tekintve és alkalmazva erre a teljes négyoldalról ismeretes tételeinket, kapjuk a háromszögre vonatkozólag a következő tételt:

Ha egy háromszög oldalait egy transversalissal metszük és a keletkező" $[A_1, B_1, C_1]$ metszéspontokat a háromszög szembenfekvő" $[A, B, C]$ szögpontjaival összeköttjük, majd az így keletkező $[AA_1, BB_1, CC_1]$ átlók három $[P, Q, R]$ metszéspontját szintén összeköttjük a háromszög szembenfekvő" szögpontjaival, akkor

egyfelől ezen utóbbi három egyenes egy pontban (D) metszi egymást, másfelől a háromszög csúcspontjain átmenő 4-4 egyenes harmonikus viszonyt alkot.

Az itt tárgyalt alakzat nem a <u>teljes</u> négy oldal összes egyeneseivel és pontjaival, ezeket kapjuk, ha d szerepét rendre felcserélgjük a, b

és c szerepével.

Első osztályu vonal. A pont.

Láttuk, hogy a mozgó pontnak legegyszerübb származéka, s egyszersmind az egyedüli elsőrendü vonal: az egyenes.

Áttérünk most a mozgó egyenes legegyszerübb származékára az első osztályu vonalra. Első osztályu vonal egy olyan egyenes-származék, melynek egyenlete vonalcoordinatákban elsőfokú. Ha a változó egyenes hom. coordinatái u, v, w, akkor az első osztályu vonal teljes egyenlete

$$A_1 u + A_2 v + A_3 w = 0$$

Ennek az egyenletnek egyszerü geometriai jelentése van. Ha ugyanis megszerkesztjük azt a pontot, melynek hom. coordinatái A_1, A_2, A_3, akkor ez az egyenlet azt mondja, hogy a változó sugár összetartozási viszonyban van ezzel a ponttal. Tehát mindazok az egyenesek, melyeknek coordinatái kielégitik ezt az egyenletet, átmennek az $(A_1\ A_2\ A_3)$ ponton, vagyis meghatározzák ezt a pontot, ez az egyenlet tehát az $A_1\ A_2\ A_3$ coordinatáju <u>pont egyenlete.</u> E szerint az egyedüli első osztályu származék a pont. Minden ponthoz tartozik három coordinata és egy elsőfoku egyenlet, melynek coefficienseci a pont coordinatái. És fordítva, ha adva vonalcoordináták között egy elsőfokú függvény, akkor ez egy ponthoz tartozik, melynek coordinatái a változók coefficienseci.

Az összes pontok közül három válik ki különösen, melyeknek egyenletei az általánosból adódnak, ha abban két-két coefficiens

nulla.

1, Ha $A_1 \neq 0$, $A_2 = A_3 = 0$, akkor $A_1 u = 0$ csak úgy teljesülhet, ha $u=0$, bármilyen v és w mellett. Ezen egyenletnek pedig eleget tesznek az x tengelyjyel parallel összes egyenesek, melyek valamerrnyien átmennek az x tengely végtelen távoli pontján. Tehát $u=0$ az x tengely ∞ távoli pontjának X-nek egyenlete.

2, ha $A_2 \neq 0$, $A_1 = A_3 = 0$, az egyenlet $v=0$, ennek eleget tesznek a y tengelyjyel parallel összes egyenesek. Tehát $v=0$ az y tengely végtelen távoli Y pontjának egyenlete.

3, ha $A_3 \neq 0$, $A_1 = A_2 = 0$, az egyenlet $w=0$, ennek pedig eleget tesznek a 0 ponton átmenő egyenesek, $w=0$ tehát a 0 pont egyenlete.

Ezt a három pontot: az x és y tengely végtelen távoli pontját, meg a coordinatarendszer kezdőpontját nevezzük a coordinatarendszer alappontjainak. Akkal belátható, hogy ezek a rendszer alapegyenesei, vagyis az x, y tengely meg a végtelen távoli egyenes által alkotott háromszög szögpontjai.

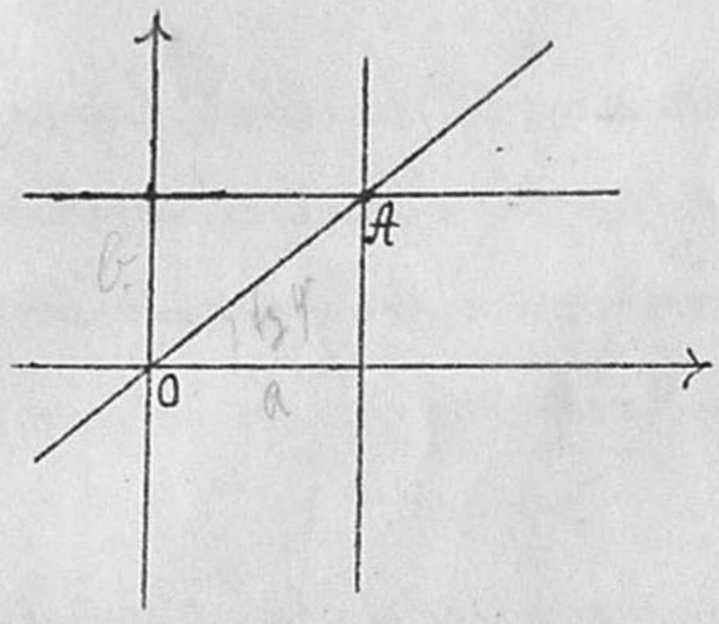
Ha a pont egyenletében legalább két coefficiens nem nulla, akkal kijelölhetünk három egyenest, melyek biztosan átmennek a ponton. Ezeknek coordinatái:

$$\left.\begin{array}{lllll} 1, & u=0, & v=A_3, & w=-A_2 \\ 2, & v=0, & u=-A_3, & w=A_1 \\ 3, & w=0, & v=A_2, & u=-A_1 \end{array}\right\}$$

Ha az (A_1, A_2, A_3) pontot A-val jelöljük, akkor

1) az első egyenes, $u=0$ lévén, átmegy az A ponton és parallel az x tengelyjyel. Az y tengelyről lemetszett darab tehát annyi mint A pont második Plr. coordinatájának negativ reciprokja $b = \frac{A_2}{A_3}$

$$\frac{v}{w} = -\frac{A_2}{A_3} = -\frac{1}{b}$$



2, a második egyenes átmegy az A ponton és párallel az y tengelylyel, az x tengelyről lemetszett darab tehát annyi mint A pont első Plr. coordinatajának negatív reciproka $a = \frac{A_1}{A_3}$

3, a harmadik ~~pont~~ egyenes átmegy 0 és A pontokon, tehát iránytangense $tg\,\psi = \frac{A_2}{A_1}$

A mint az egyenesnek, úgy a pontnak egyenlete is módosítható alakúvá, ha azt célszerű constansal átszorozzuk.

Így ha a pont végesben van, tehát $A_3 \neq 0$, szabad ezzel osztani, és akkor

u-szorzója $\frac{A_1}{A_3} = A_1'$ a pont első Plr. féle coord.,

v " $\frac{A_2}{A_3} = A_2'$ a pont 2-ik " " "

w szorzója 1, tehát a Plr. féle egyenlete

$$A_1'u + A_2'v + w = 0$$

mely a végtelen távoli pont kivételével minden pontra alkalmazható.

A pont egyenletének baloldalán álló lineáris függvény, úgy mint az egyenes függvénye, kifejezhető bizonyos normális távolságokkal. Ha ugyanis az (u, v, w) egyenesnek az (A_1, A_2, A_3) ponttól való távolsága d, akkor $d = \frac{A_1u + A_2v + A_3w}{A_3\sqrt{u^2+v^2}}$ lévén, következik, hogy

a függvény $A_1u + A_2v + A_3w = d \cdot A_3\sqrt{u^2+v^2}$

Legyen adva két pont A és B, egyenleteik

$$A \equiv A_1u + A_2v + A_3w = 0$$

$$B \equiv B_1u + B_2v + B_3w = 0$$

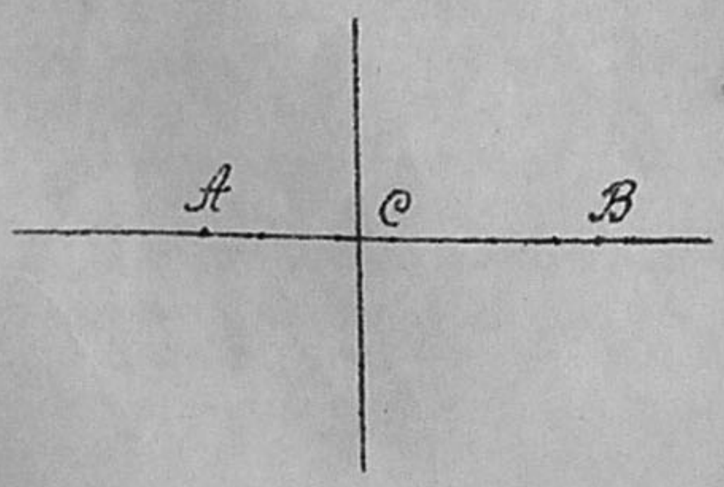
Minden egyenes, mely eleget tesz az első egyenletnek, átmegy az A

ponton, minden egyenes, mely eleget tesz a második egyenletnek, átmegy a B ponton. Az az egyenes, mely mindkét egyenletet egyszerre kielégíti, átmegy az A és B pontokon, ez az (AB) egyenes s a fenti két homogén lineáris egyenletből ezen egyenes coordinatáinak viszonya

$$u : v : w = (A_2B_3 - A_3B_2) : (A_3B_1 - A_1B_3) : (A_1B_2 - A_2B_1)$$

Ha nem mindhárom determinans egyszerre nulla, akkor az (AB) egyenes Pl. coordinatái $\frac{u}{w}$, $\frac{v}{w}$ innen egyszerűen kiadódnak, ha pedig mindhárom coordinata egyszerre nulla, a két ponthüggvény csak egy constans szorzóban különbözvén egymástól, a két pont összeesik.

Most ép úgy mint az egyenesnél, alkossuk meg a két ponthüggvény paraméteres kapcsolatát $A + \lambda B$, és kérdezzük, mi az $A + \lambda B = 0$ egyenlet geometriai jelentése? Ez az egyenlet u, v, w-ben lineáris lévén, szintén pontot értelmez, melynek egyenesei közt ott van az (AB) egyenes is, mert az (AB) egyenes coordinatái mellett A és B külön-külön nulla, tehát paraméteres különbségök is az. Az $A + \lambda B = 0$ egyenlet tehát bármily λ érték mellett olyan pontot szolgáltat, mely rajta van az (AB) egyenesen, vagyis ez az egyenlet azon pontsor egyenlete, melynek tartója az (AB) egyenes. Ha λ felveszen minden értéket $-\infty$ és $+\infty$ közötti, kapjuk a pontsor összes pontjait. Ha $\lambda = 0$, kapjuk az A, ha $\lambda = \infty$, kapjuk a B pontot. Lássuk, mi a λ paraméter geometriai jelentése? Tekintsük λ-t pillanatra állandónak és legyen C az $A + \lambda B = 0$ egyenlethez tartozó pontja a pontsornak. Ennek egyenesei közül vegyük azt, mely merőleges AB-re és melynek coordinatái $u_0\ v_0\ w_0$. Ha ezeket beteszszük A-ba, akkor ez az $A = d_1 d_3 \sqrt{u_0^2 + v_0^2}$, ha d_1 az A pont távola



a merőlegestől és betéve $u_0\, v_0\, w_0$-at B-be, ez a $\mathfrak{B} = d_2 B_3 \sqrt{u_0^2 + v_0^2}$, ha d_2 a B pont távola a normálistól. És miután a normalis átmegy a pontsorhoz tartozó C ponton, azért

$$A + \lambda B = d_1 A_3 \sqrt{u_0^2 + v_0^2} + \lambda d_2 B_3 \sqrt{u_0^2 + v_0^2} = 0$$

tehát $$\lambda = -\frac{A_3}{B_3} \cdot \frac{d_1}{d_2}$$

De ejen mivel az u_0, v_0, w_0 egyenes normális az (AB) egyenesre, azért $|d_1| = |AC|$ és $|d_2| = |BC|$, és nyilvánvaló hogy $-\frac{d_1}{d_2} = \frac{AC}{CB}$, mert ha C az A és B között fekszik, egyszerű arányszáma pozitiv, de akkor d_1 és d_2 ellentett jegyű lévén, negativ hányadosuk szintén pozitiv; ha C az AB közön kivül fekszik, egyszerű arányszáma negativ, de akkor d_1 és d_2 egyező jegyü lévén, negáliv hányadosuk szintén negativ. Ügyhogy

$$\lambda = \frac{A_3}{B_3} \cdot \frac{AC}{CB}$$

Ha D a μ parameterhez tartozó pontja a pontsornak, akkor analogokoskodás utaín

$$\mu = \frac{A_3}{B_3} \cdot \frac{AD}{DB}$$

a kettő hányadosa

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB} = (ABCD)$$

Ha tehát két pont egyenletét parameteresen összekapcsoljuk és az $A + \lambda B = 0$ egyenlettel értelmezett pontsorban e két pontot alappontoknak tekintjük, akkor a pontsor C és D pontjaihoz tartozó parameterek $\frac{\lambda}{\mu}$ hányadosa annyi mint ezen két pont kettős arányszáma A és B-re nézve. Ha a $\mu = 1$ parameterhez tartozó E pont egységpont, akkor

$$\lambda = (ABCE)$$

vagyis λ nem egyéb, mint a $\lambda = 0$, $\lambda = \infty$ és $\lambda = 1$ parameterhez tartozó pontok által meghatározott coordinatarendszerben a változó λ parameternek megfelelő pont kettős arányszáma.

Még egyszerübb jelentést kap a λ, ha Plr. féle coordinatákban irjuk fel a két pont egyenletét, vagyis $A_3 = B_3 = 1$, mert ekkor $\frac{A_3}{B_3} = 1$ lévén,

$\lambda = \frac{AC}{CB}$, tehát annyi szint a megfelelő C pont egyszerű arányszáma az A, B alappontokra nézve.

Ha λ-nak két ellentétesen egyenlő értéket adunk, akkor kányadosuk $-1 = (ABCD)$ lévén, a C és D ellentétes parameterekhez tartozó két pont harmonicus A és B-re nézve. Vagy másszóval: az $A=0$, $B=0$, $A+\lambda B=0$ és $A-\lambda B=0$ egyenletekkel értelmezett négy pont harmonicus viszonyt alkot.

Vizsgáljuk most három pont kölcsönös helyzetét és az ebből felmerülő kérdéseket. A három pont legyen A, B, C egyenletei

$$A \equiv A_1 u + A_2 v + A_3 w = 0$$

$$B \equiv B_1 u + B_2 v + B_3 w = 0$$

$$C \equiv C_1 u + C_2 v + C_3 w = 0$$

Kérdés, mi a feltétele annak, hogy a három pont egy egyenesen feküdjék? Ha van ilyen egyenes, ennek u, v, w coordinatái egyszerre kielégítik az három homogén lineáris egyenletet, de akkor determinansuk szükségképen nulla

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} = 0$$

Ha tehát három pont egy egyenesen fekszik, akkor homogén coordinataik determinansa eltűnik. És fordítva, ha három pont hom. coordinatáinak determinansa eltűnik, a 3 pont egy egyenesen fekszik. Ezt a feltételt nyilvánvalóan úgy is kifejezhetjük, hogy ha léteznek három multiplikator λ, μ, ν, melyek szerint összeadva az három pont függvényét, identikusan nullát kapunk.

$\lambda A + \mu B + \nu C \equiv 0$

akkor a három pont egy egyenesen fekszik. Ekkor vagyanis egyik nulltől különböző paraméterrel pl ν-el osztva

$$C = -\frac{\lambda}{\nu} A - \frac{\mu}{\nu} B$$

vagyis C paraméteresen kifejezhető az A és B-vel, tehát a C pont rajta fekszik az (AB) egyenesen, illetőleg pontja az AB pontsornak.

Ceva és Menelaos tétele.

Írjuk fel az előbbi három pont Plr. féle egyenletét, melyet egyszerüen nyerünk a már felirt három egyenletből, ha abban $A_3 = B_3 = C_3 = 1$ és A_1 B_1 illetőleg C_1 a pontok első, A_2, B_2 illetőleg C_2 a pontok második Plr. féle coordinatáinak tekintetnek. Tehát

$$A \equiv A_1 u + A_2 v + w = 0$$

$$B \equiv B_1 u + B_2 v + w = 0$$

$$C \equiv C_1 u + C_2 v + w = 0$$

és tegyük fel, hogy a pontok hom. coordinatáinak determinansa nem nulla, tehát a három pont háromszöget alkot

Ki fogjuk mutatni, hogy ha

$$S \equiv S_1' u + S_2' v + S_3' w$$

a sik egy tetszőleges pontja, ennek függvénye mindig paraméterezve összetehető a három adott pont függvényéből, azaz léteznek olyan λ, μ, ν szorzók, miszerint

$$S \equiv \lambda A + \mu B + \nu C$$

vagy a mi ugyanaz

$$\mathfrak{P}_1' = A_1\lambda + B_1\mu + C_1\nu$$
$$\mathfrak{P}_2' = A_2\lambda + B_2\mu + C_2\nu$$
$$\mathfrak{P}_3' = \lambda + \mu + \nu$$

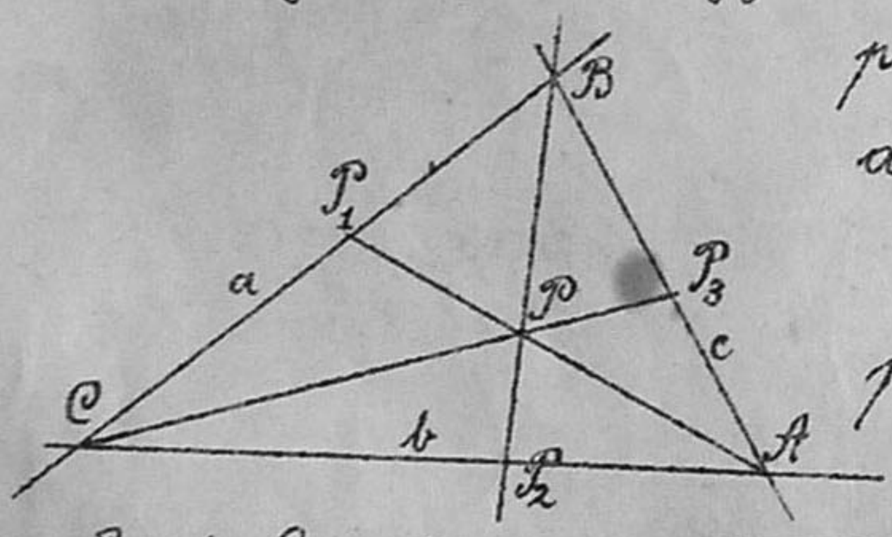
Miután ezen utóbbi rendszer determinánsa a feltétel értelmében nem nulla, abból λ, μ és ν számára határozott véges értékeket nyerünk, úgy hogy fényleg létezik a fent irt identitás

$$\mathfrak{P} \equiv \lambda A + \mu B \text{ és } \nu C$$

Már most vigyük át rendre a jobboldali mindegyik tagot a bal oldalra kivonandónak, s az így keletkezett identitások bal illetőleg jobboldalaival értelmezett függvényeket jelöljük $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2$ és $\mathfrak{P}_3$-al, tehát

$$\mathfrak{P}_1 \equiv \mathfrak{P} - \lambda A \equiv \mu B + \nu C$$
$$\mathfrak{P}_2 \equiv \mathfrak{P} - \mu B \equiv \lambda A + \nu C \qquad \text{I.}$$
$$\mathfrak{P}_3 \equiv \mathfrak{P} - \nu C \equiv \lambda A + \mu B$$

Az első identitásból látható, hogy a $\mathfrak{P}_1$ pont rajta fekszik egyfelől a $(\mathfrak{P}A)$ másfelől a (BC) egyenesen, ez tehát a $(\mathfrak{P}A)$ és (BC) egyenesek metszőpontja, vagyis a $\mathfrak{P}$ pont A centrumu projectiója az a oldalra;



a második identitás alapján $\mathfrak{P}_2$ pont a $\mathfrak{P}$ pont B centrumu projectiója b oldalra;

és a harmadik identitás szerint $\mathfrak{P}_3$ pont a $\mathfrak{P}$-nek C centrumu projectiója a C-vel szembenfekvő c oldalra.

Ezen három lineáris függvény segélyével most két nevezetes tételt fogunk levezetni.

A $\mathfrak{P}_1$ pont egyenletét nyerjük, ha az első identitás második vagy harmadik tagját mint $\mathfrak{P}_1$ függvényét nullá tesszük; ha a harmadik tagot tesszük nullá és azután μ-vel keresztül szorzunk, adódik $\mathfrak{P}_1$

egyenletéül

$$B + \frac{\nu}{\mu} C = 0$$

a miből következik, hogy P_1 pont egyszerű aránnyszáma B és C-re nézve $\frac{\nu}{\mu}$

$$\frac{\nu}{\mu} = \frac{BP_1}{P_1 C}$$

a P_2 pont hasonló módon átalakított $C + \frac{\lambda}{\nu} A = 0$ egyenletéből adódik

$$\frac{\lambda}{\nu} = \frac{CP_2}{P_2 A}$$

P_2 egyszerű aránnyszáma C és A-ra nézve

és a P_3 pont $A + \frac{\mu}{\lambda} B = 0$ egyenletéből P_3 pont egyszerű aránnyszáma A és B-re nézve

$$\frac{\mu}{\lambda} = \frac{AP_3}{P_3 B}$$

Ha ezt a három aránnyszámot összeszorozzuk, 1-et kapunk, és így jutunk ahhoz az nevezetes tételhez, mely szerint

$$\frac{BP_1}{P_1 C} \cdot \frac{CP_2}{P_2 A} \cdot \frac{AP_3}{P_3 B} = 1$$

vagy szóval: ha a sík egy tetszőleges P pontját a háromszög szögpontjaiból az szembenfekvő oldalakra projiciáljuk és ezen projectióknak az illető oldalakon egyszerű aránnyszámát veszszük a szögpontokra vonatkozólag - bizonyos jól meghatározott sorrendben —, akkor ezen három aránnyszám szorzata 1. Ez a Ceva tétele.

De az I alatti identitásokból P_1, P_2 és P_3 egyenlete így is irható

$P - \lambda A = 0$; $P - \mu B = 0$; illetőleg $P - \nu C = 0$. Ezen P azonban P egyenlete szintén $Pr.$ coordinatáikban legyen felirva, ezek három egyenletet elosztjuk P-ben a ν coefficienseével, t.i. $P_3 = \lambda + \mu + \nu$ coefficienssel, úgyhogy a három pont egyenlete:

$$\frac{P}{\lambda+\mu+\nu} - \frac{\lambda}{\lambda+\mu+\nu} A = 0 \; ; \; \frac{P}{\lambda+\mu+\nu} - \frac{\mu}{\lambda+\mu+\nu} B = 0 ; \; \frac{P}{\lambda+\mu+\nu} - \frac{\nu}{\lambda+\mu+\nu} C = 0$$

Ha most a projiciáló sugarakon veszszük a három pont egyszerű aránnyszámát, akkor az első egyenletből P_1 aránnyszáma $\frac{\lambda}{\lambda+\mu+\nu} = \frac{PP_1}{P_1 A}$

a második egyenletből P_2 aránnyszáma $-\frac{\mu}{\lambda+\mu+\nu} = \frac{PP_2}{P_2 B}$

a harmadik egyenletből P_3 $-\frac{\nu}{\lambda+\mu+\nu} = \frac{PP_3}{P_3 C}$

a három egyenletet összegezve kapunk egy második nevezetes relatiót,

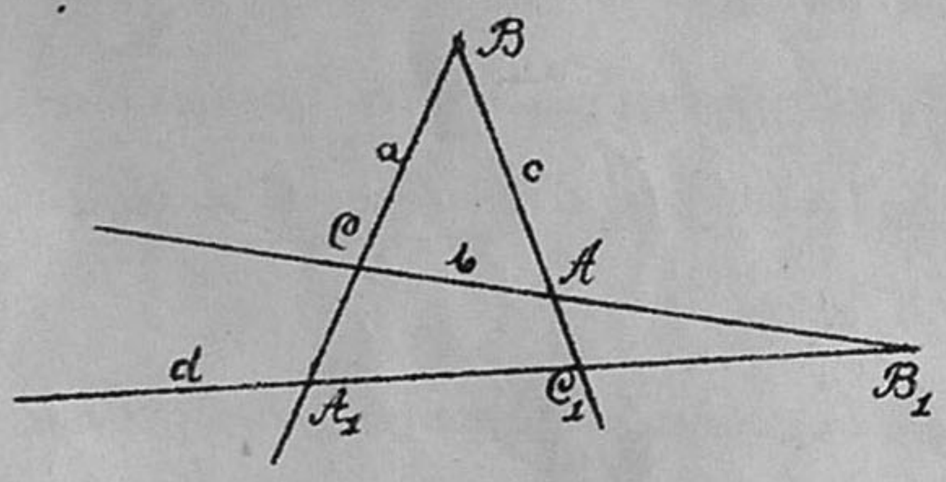
mely szerint $$\frac{PP_2}{P_1A} + \frac{PP_2}{P_2B} + \frac{PP_3}{P_3C} = -1$$

vagy a felsőkben a vectorokat ellenkezőre fordítva

$$\frac{P_2P}{P_2A} + \frac{P_2P}{P_2B} + \frac{P_3P}{P_3C} = 1$$

Szóval: ha a sík egy tetszőleges pontját a háromszög oszlopontjaiból a szembenfekvő oldalakra projiciáljuk és ezen projectiókhoz az illető sugarakon egyszerű aránymszámát veszszük a projiciált pontra és egy egy szögpontra vonatkozólag, - bizonyos jól meghatározott sorrendben - akkor ezen három egyszerű aránymszám összege 1.

A Céva tételénél is régibb a Menelaos tétele, mely megállapitja az ABC háromszög oldalainak egy d transversalissal való metszéséből keletkező A_1, B_1, C_1 pontok egyszerű aránymszámai közti összefüggést. Úgy fogunk eljárni, hogy felállitjuk ezen három pont egyenletét, melyekből azonnal kiolvasható a tétel. Legyenek a d transversalis coordinatai u_0, v_0, w_0. Az A_1 pont a (BC) egyenesen fekvén $A_1 = B + \lambda C$; λ-t az a körülmény határozza meg, hogy A_1 rajta



feksik a d egyenesen is. Ha tehát A, B és C értéke a d egyenes u_0, v_0, w_0 coordinatai mellett A_0, B_0, C_0, akkor $B_0 + \lambda C_0 = 0$ lévén, $\lambda = -\frac{B_0}{C_0}$

úgyhogy az A_1 pont egyenlete $A_1 \equiv B - \frac{B_0}{C_0} C = 0$

ejenigy a B_1 " " $B_1 \equiv C - \frac{C_0}{A_0} A = 0$

és a C_1 " " $C_1 \equiv A - \frac{A_0}{B_0} B = 0$

Ebből pedig következik, hogy A_1 pont egyszerű aránymszáma

B és C-re nézve $\frac{BA_1}{A_1C} = -\frac{B_0}{C_0}$ a B_1 pont aránymszáma

C és A-ra nézve $\frac{CB_1}{B_1A} = -\frac{C_0}{A_0}$ és a C_1 pont aránymszáma

A és B-re nézve $\quad \frac{AC_1}{C_1B} = -\frac{A_0}{B_0}$

Összeszorozva a három arányszámot, kapjuk Menelaos tételét, mely szerint

$$\frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_2}{B_2A} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} = -1$$

tehát a transzverzális által kimetszett három pontnak a háromszög oldalain azoknak szögpontjaira vett egyszerű arányszámai összeszorozva (-1)-et adnak.

Ezekből a tételekből néhány következtetését vonhatunk. Ha Ceva tételét előbb egy P, majd egy Q pontokra alkalmazzuk, akkor egyikből

$$\frac{BP_1}{P_1C} \cdot \frac{CP_2}{P_2A} \cdot \frac{AP_3}{P_3B} = 1$$

másikból $\quad \frac{BQ_1}{Q_1C} \cdot \frac{CQ_2}{Q_2A} \cdot \frac{AQ_3}{Q_3B} = 1$

ha az első szorzatot a másodikkal osztjuk, kapjuk, hogy

$$(BCP_1Q_1)(CAP_2Q_2)(ABP_3Q_3) = 1$$

Ha tehát két tetszőleges pontot a háromszög szögpontjaiból a szembenfekvő oldalakra projiciálunk, az oldalakon keletkező 4-4 pont kettős arányszámainak szorzata 1.

Ha Menelaos tételét először az $A_1B_1C_1$, azután az $A_2B_2C_2$ transzversalisra alkalmazzuk és a két szorzatot egymással osztjuk, akkor

$$(BCA_1A_2)(CAB_1B_2)(ABC_1C_2) = 1$$

vagyis ha egy háromszöget két transzversalissal metszünk, az oldalakon fellépő 4-4 pont kettős arányszámainak szorzata 1.

Ez a Ceva és Menelaos tételének fordítottja is áll. Az első szerint: ha egy háromszög oldalain egy-egy olyan pontot választunk, melyek egyszerű arányszámainak szorzata 1, akkor ezen pontokat a szembenfekvő szögpontokkal összekötő egyenesek egy ponton mennek át. Ugyanis legyen P_1, P_2, P_3 ez a három pont és α, β, γ egyszerű arányszámaik szorzata

$\alpha.\beta.\gamma = 1$. Akkor mindig megadhatunk három olyan λ, μ, ν számot, miszerint $\alpha = \frac{\nu}{\mu}$, $\beta = \frac{\lambda}{\nu}$, de akkor az utóbbi egyenlet értelmében $\gamma = \frac{\mu}{\lambda}$ és most jelvételeinél fogva a három pont egyenlete

$$\mathfrak{P}_1 \equiv B + \frac{\nu}{\mu} C = 0$$
$$\mathfrak{P}_2 \equiv C + \frac{\lambda}{\nu} A = 0 \qquad \text{II.}$$
$$\mathfrak{P}_3 \equiv A + \frac{\mu}{\lambda} B = 0$$

vagy a törteket elemjéztetve, lesz

$\mathfrak{P}_1$ egyenlete $\mu B + \nu C = 0$
$\mathfrak{P}_2$ " $\nu C + \lambda A = 0$ II.
$\mathfrak{P}_3$ " $\lambda A + \mu B = 0$

Rakjuk most össze a következő pontfüggvényt

$$\mathfrak{P} \equiv \lambda A + \mu B + \nu C \qquad \text{II.'}$$

Ki fogjuk mutatni, hogy ez a $\mathfrak{P}$ pont épen a $(\mathfrak{P}_1 A)$, $(\mathfrak{P}_2 B)$ és $(\mathfrak{P}_3 C)$ metszéspontja. Az utóbbi identitás értelmében ugyanis

$$\mathfrak{P} - \lambda A \equiv \mu B + \nu C$$
$$\mathfrak{P} - \mu B \equiv \lambda A + \nu C$$
$$\mathfrak{P} - \nu C \equiv \lambda A + \mu B$$

Az első identitás értelmében a $\mathfrak{P}_1$ pont függvénye $\mu B + \nu C$ paramétereven kifejezhető a $\mathfrak{P}$ és A pontok függvényeivel, vagyis a $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}, A$ pontok egy egyenesen feküsznek; épenigy az második identitás értelmében a $\mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}, B$ pontok, és a harmadik értelmében a $\mathfrak{P}_3, \mathfrak{P}, C$ pontok fekösznek egy egyenesen; tehát a $(\mathfrak{P}_1 A)$, $(\mathfrak{P}_2 B)$ és $(\mathfrak{P}_3 C)$ egyenesek tényleg egy pontban, a $\mathfrak{P}$ pontban metszik egymást.

A Menelaos tételének megfordítottja: ha egy háromszög oldalain egy-egy olyan pontot választunk, hogy a három pontnak az egyikében vett szögpontokra mint alappontokra vonatkozó egyszerű arányszá-

mainak szorzata -1, akkor a három pont egy egyenesen fekszik. Legyen ugyanis az a, b, c oldalakon fekvő három pont A_1, B_1, C_1, egyszerű arányszámaik szorzata $\alpha.\beta.\gamma = -1$, akkor mindig meghatározhatunk három λ, μ, ν mennyiséget úgy, hogy $\alpha = -\frac{\nu}{\mu}$, $\beta = -\frac{\lambda}{\nu}$ legyen, de akkor $\gamma = -\frac{\mu}{\lambda}$, és most a három pont egyenlete így írható

$$\mathfrak{B} - \frac{\nu}{\mu}\mathfrak{C} = 0$$

$$\mathfrak{C} - \frac{\lambda}{\nu}\mathfrak{A} = 0$$

$$\mathfrak{A} - \frac{\mu}{\lambda}\mathfrak{B} = 0$$

és a

$$\Sigma \equiv 0$$

tehát a három pont egy egyenesen fekszik.

A háromszög nevezetesebb pontjainak egyenletei.

A Ceva tételénél láttuk, hogy valahányszor a sík egy tetszőleges $\mathfrak{P}$ pontját a háromszög szögpontjaiból a szembenfekvő oldalakra projiciáljuk, és meghatározzuk ezen három $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3$ projectió függvényeit úgy, hogy mindenikben az $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ és $\mathfrak{C}$ szögponti függvények szorzói ugyanazok legyenek

$$\mathfrak{P}_1 \equiv \mu\mathfrak{B} + \nu\mathfrak{C}$$

$$\mathfrak{P}_2 \equiv \nu\mathfrak{C} + \lambda\mathfrak{A}$$

$$\mathfrak{P}_3 \equiv \lambda\mathfrak{A} + \mu\mathfrak{B}$$

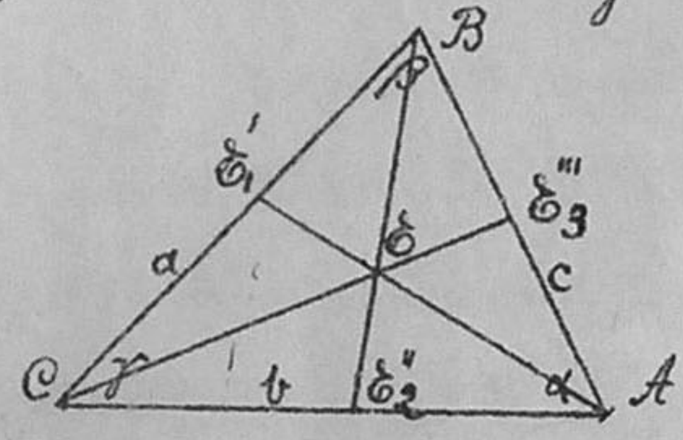
akkor a projiciált pont függvényében $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ és $\mathfrak{C}$-nek ugyanazok lesznek a szorzói

$$\mathfrak{P} \equiv \lambda\mathfrak{A} + \mu\mathfrak{B} + \nu\mathfrak{C}$$

Ezen tétel segélyével könnyű lesz a háromszög nevezetesebb pontjainak függvényét felkeresni.

Legyük a beirható kör $\mathfrak{C}$ centrumát, melyről már kimutattuk, hogy

a szögfelezők metszéspontja. Az oldalakon való projectiói, vagyis az szögfelezőknek az a, b és c oldalakkal való metszéspontjai legyenek $\mathcal{E}_1'$, $\mathcal{E}_2''$, $\mathcal{E}_3'''$, és határozzuk meg először $\mathcal{E}_1'$ egyenletét. Egy elemi tétel *



szerint $\frac{B\mathcal{E}_1'}{\mathcal{E}_1'C} = \frac{c}{b} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}$

ez pedig nemcsak abszolut értékre, hanem jegyre nézve is; $\frac{B\mathcal{E}_1'}{\mathcal{E}_1'C}$ ugyanis mindig pozitiv, de $\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}$ is, akár hegyes akár hompa az egyik szög. $\mathcal{E}_1'$-nek tehát egyszerü arányszáma B és C-re nézve $\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}$ levén, függvénye $B + \frac{\sin\gamma}{\sin\beta} C$ vagyis

$$\mathcal{E}_1' \equiv \sin\beta . B + \sin\gamma . C$$

ejen vagy adódik, hogy

$$\mathcal{E}_2'' \equiv \sin\gamma . C + \sin\alpha . A$$

$$\mathcal{E}_3''' \equiv \sin\alpha . A + \sin\beta . B$$

Mindegyik függvényben A, B és C-nek ugyanaz a szorzója, a miből következik, hogy az háromszögbe irható kör centrumának függvénye

$$\mathcal{E} \equiv \sin\alpha . A + \sin\beta . B + \sin\gamma . C$$

Ez onnan is látszik, hogy itt $\mathcal{E}$ függvénye parametereken van összetéve A és $\mathcal{E}_1'$, B és $\mathcal{E}_2''$, C és $\mathcal{E}_3'''$ függvényével. A $\mathcal{E}$ pont egyenlete pedig

$$\mathcal{E} \equiv \sin\alpha . A + \sin\beta . B + \sin\gamma . C = 0$$

Ebből mindjárt kiadódnak az $\mathcal{E}$ pont homogen coordinatoi, mert ha behelyettesitjük A, B és C kifejezését, a szorzója $\mathcal{E}$ első, b szorzója a második és c szorzója a harmadik hom. coordinatája. Épen ebben áll ezen módszer nagy előnye, hogy itt egy kifejezés szolgáltatja egyszerre a pont függvényét és coordinatáit, mig ha coordinatáival akarnuk volna meghatározni a pontot, három kifejezést kellett volna felállitani.

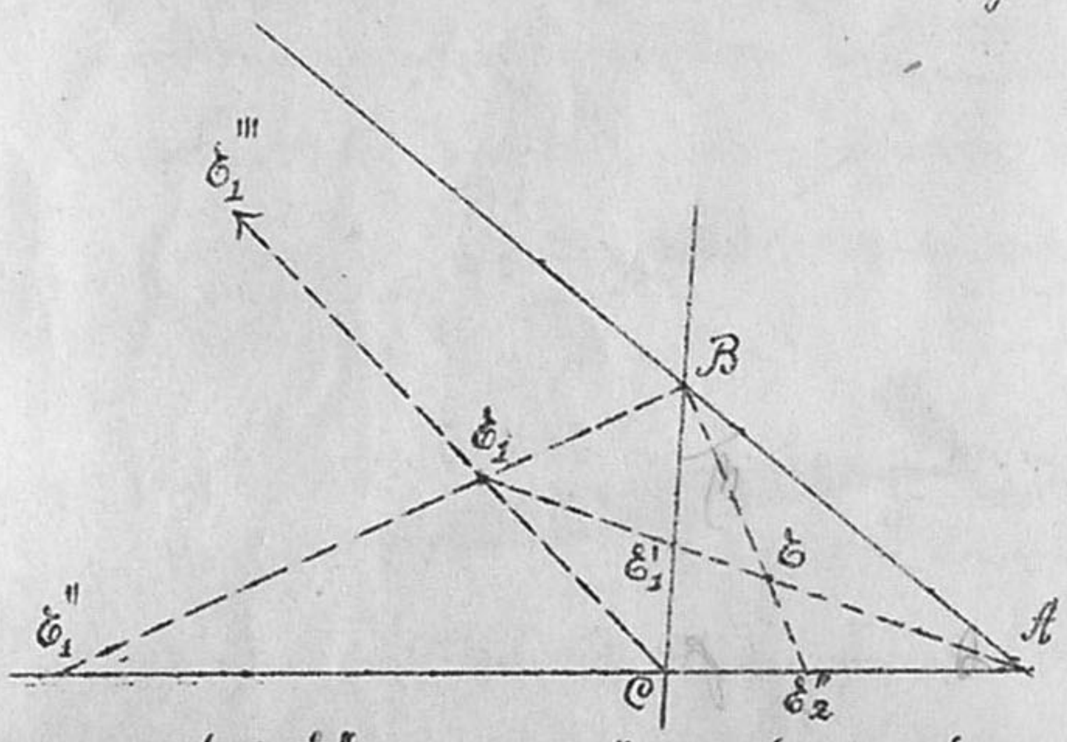
---

* $\frac{t(B\mathcal{E}_1'A)}{t(\mathcal{E}_1'CA)} = \frac{B\mathcal{E}_1' \cdot \frac{a}{2}}{\mathcal{E}_1'C \cdot \frac{b}{2}} = \frac{\mathcal{E}_1 \sqrt{A.C} \sin\frac{\alpha}{2}}{t_1 \sqrt{A.b} \sin\frac{\alpha}{2}}$

Lehet $\frac{B\mathcal{E}_1'}{\mathcal{E}_1'C} = \frac{c}{b}$ vagy a szinus tétel szerint $\frac{c}{b} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}$

Hasonlóképpen lehet meghatározni a kívülről érintő körök centrumainak egyenletét. Legyenek ezen centrumok, a mint A, B és C szögfelezőjén fekszenek: $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \mathfrak{E}_3$; Az $\mathfrak{E}_1$ centrummak szögpontú projectivi a szembenfekvő oldalakra $\mathfrak{E}_1', \mathfrak{E}_1'', \mathfrak{E}_1'''$; Már tudjuk, hogy $\mathfrak{E}_1' \equiv \sin\beta . B + \sin\gamma . C$ (1)

$\mathfrak{E}_1''$ függvény meghatározása végett ismernünk kell $\mathfrak{E}_1''$ egyszerű arányszámát C és A-ra vonatkozólag. Mivelhogy a B két szögfelezője merőleges egymásra $B\mathfrak{E}_1'' \perp B\mathfrak{E}_2''$, egy ismeretes tétel értelmében $\mathfrak{E}_1''$ harmonikus társa $\mathfrak{E}_2''$-nek C és A-ra vonatkozólag, vagyis $\mathfrak{E}_1''$ egyszerű arányszáma CA-ra nézve ellentettje $\mathfrak{E}_2''$ egyszerű arányszámának. De tudjuk, hogy $\mathfrak{E}_2'' = \sin\gamma . C + \sin\alpha . A$ vagyis $\mathfrak{E}_2''$ egyszerű arányszáma $\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$, tehát $\mathfrak{E}_1''$ egyszerű arányszáma $-\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$, úgyhogy $\mathfrak{E}_1''$ függvénye



$$\mathfrak{E}_1'' \equiv \sin\gamma . C - \sin\alpha . A \qquad (2.)$$

ejenyog

$$\mathfrak{E}_1'' \equiv -\sin\alpha . A + \sin\beta . B \qquad (3.)$$

Mindhárom függvénynek A, B és C szorzója ugyanaz, tehát az $\mathfrak{E}_1$ centrum függvénye

$$\mathfrak{E}_1 \equiv -\sin\alpha . A + \sin\beta . B + \sin\gamma . C$$

nullá téve kapjuk $\mathfrak{E}_1$ egyenletét. Hasonló eljárással kapjuk $\mathfrak{E}_2$ és $\mathfrak{E}_3$ függvényét

$$\mathfrak{E}_2 \equiv \sin\alpha . A - \sin\beta . B + \sin\gamma . C$$

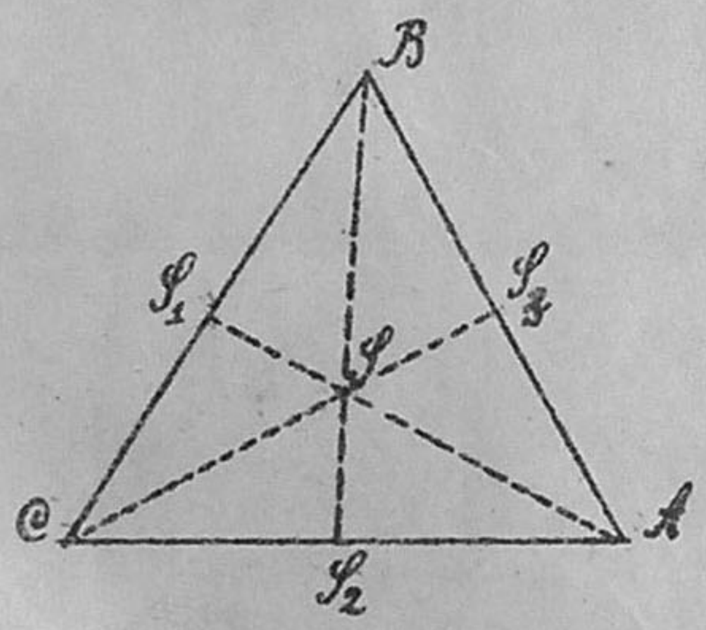
$$\mathfrak{E}_3 \equiv \sin\alpha . A + \sin\beta . B - \sin\gamma . C$$

Ezzel meghatároztuk a belülről, és a kívülről érintő körök centrumainak függvényét. Ez a H pont olyan viszonyban van egymáshoz, mint egy háromszög három szögpontja és a magasságpontja. Ugyanis a szögfelezők egy szögpontból kiindulva merőlegesek egymásra

$\mathfrak{E}\,\mathfrak{E}_1 \perp \mathfrak{E}_2\,\mathfrak{E}_3$, $\mathfrak{E}\,\mathfrak{E}_2 \perp \mathfrak{E}_1\,\mathfrak{E}_3$, $\mathfrak{E}\,\mathfrak{E}_3 \perp \mathfrak{E}_1\,\mathfrak{E}_2$

ez a három állitás azt mondja, hogy az $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \mathfrak{E}_3$ háromszögben $\mathfrak{E}$ magasságpont.

11/21. Határozzuk meg a súlypont függvényét. Az oldalak felező pontjai legyenek S_1, S_2, S_3; ezen mert felezőpontok, mindegyiknek egyszerü arányszáma 1, tehát $S_1 \equiv B+C$



$S_2 \equiv C+A$

$S_3 \equiv A+B$ és igy az S súlypont függvénye

$S \equiv A+B+C$

Ebből a kifejezésből kiolvashatjuk, hogy S milyen arány szerint osztja a szög és felezőpontok távolát A S_1-et stb. Meg kell határoznunk S egyszerü arányszámát A és S_1, B és S_2, C és S_3-ra nézve.

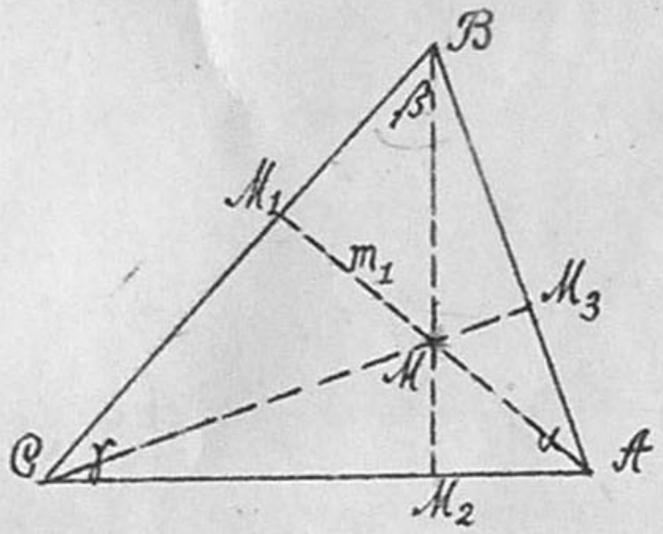
A függvénye A, S_1 függvénye $B+C$; az elsőben az szorzója 1, de a másodikban 2, hogy tehát S_1 függvénye is Str. fele alakban legyen irva, osztani kell azt 2-vel, és igy

$$S \equiv A + 2\,\frac{B+C}{2}$$

tehát S egyszerü arányszáma A és S_1-re nézve 2, $\frac{AS}{SS_1} = 2$, azaz $AS = 2.SS_1$, ezenigy $BS = 2.SS_2$ és $CS = 2\,SS_3$

Tehát a súlypontnak bármely szögponttól való távolsága kétszer akkora, mint a szembenfekvő felezőponttól való távolsága.

Az M magasságpont függvényének meghatározása végett keressük előbb M_1, M_2, M_3 projectióinak függvényeit, illetőleg azoknak



egyszerű arányszámait.

Miután $BM_1 = m_1 \operatorname{ctg}\beta$ és $M_1C = m_1 \operatorname{ctg}\gamma$, (hogy M_1) következik egyszerű arányszáma B és C-re nézve: $\frac{BM_1}{M_1C} = \frac{\operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\beta}$ és pedig jegyre nézve is. Mert ha β és γ hegyes, mindkét oldal positiv, ha egyik szög tompa, mindkét oldal negativ. M_1 függvénye tehát $B + \frac{\operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\beta} C$ vagyis

$$M_1 \equiv \operatorname{tg}\beta . B + \operatorname{tg}\gamma . C$$

ejtén így adódik

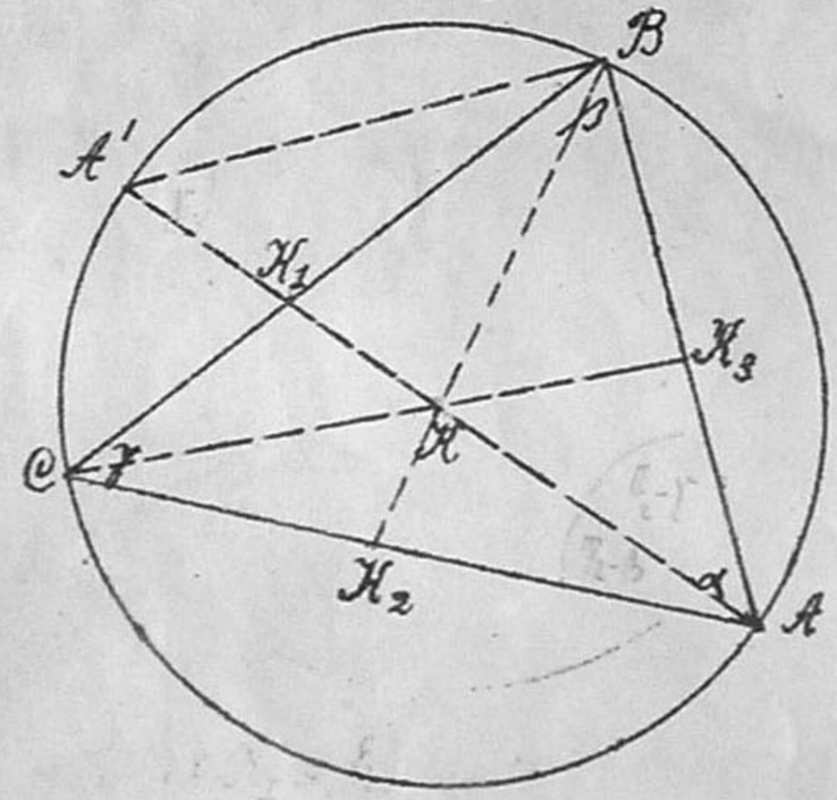
$$M_2 \equiv \operatorname{tg}\gamma . C + \operatorname{tg}\alpha . A$$

$$M_3 \equiv \operatorname{tg}\alpha . A + \operatorname{tg}\beta . B$$

Miután mindhárom függvényben A, B és C szorzója ugyanaz, következik, hogy az M magasságpont függvénye

$$M \equiv \operatorname{tg}\alpha . A + \operatorname{tg}\beta . B + \operatorname{tg}\gamma . C$$

Határozzuk meg a körülírt kör K centrumának függvényét. Az oldalakon való projectioi legyenek K_1, K_2 és K_3, ezeknek határozzuk meg egyszerű arányszámait a szögpontokra nézve, illetőleg azoknak függvényeit. Ha A-K_3-nek metszéspontja a körrel A', akkor $BA'A \measuredangle = \gamma$, tehát az $A'AB$ derékszögű háromszögben $A'AB \measuredangle = \frac{\pi}{2} - \gamma$ és $A'AC \measuredangle = \frac{\pi}{2} - \beta$, és



ha még $AK_1 = k_1$, mint absolut hosszuság, akkor

$$\left|\frac{BK_1}{k_1}\right| = \left|\frac{\cos\gamma}{\sin\beta}\right|$$

$$\left|\frac{K_1C}{K_3}\right| = \left|\frac{\cos\beta}{\sin\gamma}\right|$$

tehát $\frac{BK_1}{K_1C} = \frac{\sin\gamma.\cos\gamma}{\sin\beta.\cos\beta} = \frac{2.\sin\gamma.\cos\gamma}{2.\sin\beta\cos\beta} = \frac{\sin 2\gamma}{\sin 2\beta}$

Ez a K_1 egyszerű aránnyszámot és pedig jegyygyel együtt. Mert ha β és γ hegyes, K_1 a B és C között fekszik, $\frac{\sin 2\gamma}{\sin 2\beta} > 0$, ha β és γ egyike tompa, K_1 a BC-n kívül fekszik, ugyanekkor $\frac{\sin 2\gamma}{\sin 2\beta} < 0$ E szerint K_1 függvénye

$$K_1 \equiv \sin 2\beta . B + \sin 2\gamma . C$$

$$K_2 \equiv \sin 2\gamma . C + \sin 2\alpha . A$$

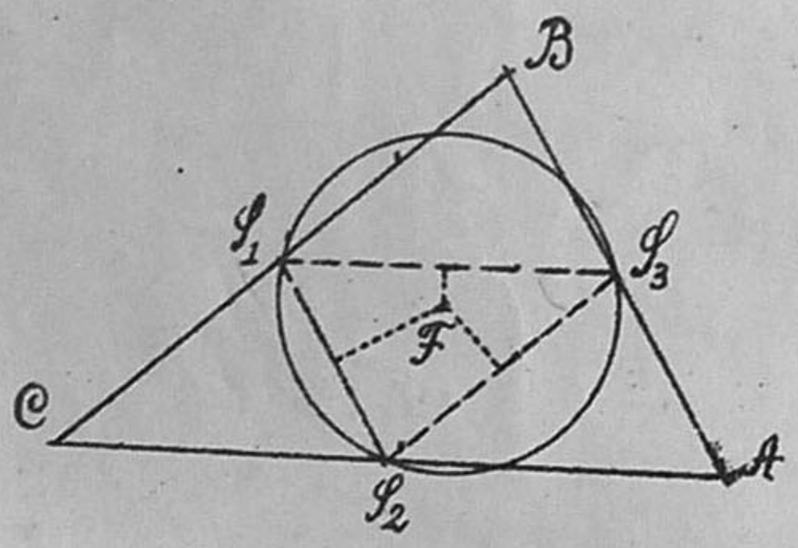
$$K_3 \equiv \sin 2\alpha . A + \sin 2\beta . B$$

a miből látható, hogy K függvénye

$$K \equiv \sin 2\alpha . A + \sin 2\beta . B + \sin 2\gamma . C$$

nullátéve, kapjuk a körülírt kör centrumának egyenletét.

A háromszögnek egy szintén nevezetes pontja az oldalak felezőpontjai S_1, S_2, S_3 körül írt úgynevezett Feuerbach féle kör F centruma. Itt tehát az S_1, S_2, S_3 háromszög körül írt kör centrumát kell meghatározni. E végett ismernünk kell S_1, S_2 és S_3 Plücker féle függvényalakjait. Az előbbiek alapján $S_1 \equiv \frac{B+C}{2}$, $S_2 \equiv \frac{C+A}{2}$, $S_3 \equiv \frac{A+B}{2}$ a kívánt függvényalakok, és miután S_1, S_2, S_3 háromszögben ugyanazok a szögek, mint ABC-ben, a körülírt kör centrumának az előbb levezetett kifejezése alapján



$$F \equiv \sin 2\alpha \frac{B+C}{2} + \sin 2\beta \frac{C+A}{2} + \sin 2\gamma \frac{A+B}{2}$$

A szorzója itt $\frac{1}{2}(\sin 2\beta + \sin 2\gamma) = \sin(\beta+\gamma)\cos(\beta-\gamma) = \sin\alpha\cos(\beta-\gamma)$ * mert $\beta+\gamma = \pi-\alpha$. Ugyanígy kapjuk B és C szorzóját, amiekután a Feuerbach féle kör középpontjának függvénye

* $\sin(\beta+\gamma) = \sin\beta\cos\gamma + \cos\beta\sin\gamma$; $\cos(\beta-\gamma) = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma$

$\sin(\beta+\gamma)\cos(\beta-\gamma) = (\cos^2\gamma + \sin^2\gamma)\sin\beta\cos\beta + (\sin^2\beta + \cos^2\beta)\sin\gamma\cos\gamma$

$= \sin\beta\cos\beta + \sin\gamma\cos\gamma = \frac{1}{2}(\sin 2\beta + \sin 2\gamma)$

$$F \equiv \sin\alpha \cos(\beta-\gamma) A + \sin\beta \cos(\gamma-\alpha) B + \sin\gamma \cos(\alpha-\beta) . C$$

Az itt meghatározott pontok bármelyikének coordinatáit megkapjuk, ha függvényébe beteszszük A, B és C koefficienseit és rendezzük azt u, v, w szerint; ezeknek coefficienseit adják a pont homogén coordinatáit.

Most ki fogjuk mutatni, hogy ez a négy pont: a háromszög súlypontja S, magasságpontja M, a körülírt kör centruma K és a Feuerbach féle kör centruma F egy egyenesen fekszik és hogy harmonicus pontnégyest alkotnak, melyben S M az egyik, K F a másik pár. Egyszerűen kimutatjuk, hogy F és K függvénye paramétereszen kifejezhető S és M függvényével és pedig ellentett parameterekkel.

Szorozzuk meg S-et $\sin\alpha . \sin\beta . \sin\gamma$-val és M-et $\cos\alpha . \cos\beta . \cos\gamma$-val és adjuk össze, majd utóbbit vonjuk ki az előbbiből, akkor az első esetben

$$\sin\alpha . \sin\beta \sin\gamma \, S + \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma \, M =$$
$$= \sin\alpha (\cos\beta \cos\gamma + \sin\beta \sin\gamma) A + \ldots + \ldots$$
$$= \sin\alpha \cos(\beta-\gamma) A + \sin\beta \cos(\gamma-\alpha) B + \sin\gamma \cos(\alpha-\beta) C \equiv F$$

a második esetben

$$\sin\alpha . \sin\beta \sin\gamma \, S - \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma \, M =$$
$$= \sin\alpha (\sin\beta \sin\gamma - \cos\beta \cos\gamma) A + \ldots +$$
$$= -\sin\alpha \cos(\beta+\gamma) A + \ldots + \ldots$$
$$* \quad = \tfrac{1}{2} \sin 2\alpha . A + \tfrac{1}{2} \sin 2\beta . B + \tfrac{1}{2} \sin 2\gamma . C \equiv \frac{K}{2}$$

tehát F, és a $\frac{1}{2}$ factortól eltekintve K is parameteresen kifejezhető S és M-el, és miután a két parameter ellentétesen egyenlő, mondhatjuk, hogy S, M, F, K egy egyenesen fekszik, és K, F harmonicusak S és M-re nézve. De egyszerűen meghatározhatjuk K és F távolsági viszonyát S és M-re nézve. E végett meg kell határozni F egyszerű

* $\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha$

Bátkory

arányszámát S és M-re nézve. Miután F kifejezésében S és M nem szerepel Str. féle alakban, hogy ezt elérjük, osszuk át először F egyenletét S szorzójával, lesz

$$F \equiv S + \operatorname{cotg}\alpha . \operatorname{cotg}\beta . \operatorname{cotg}\gamma . M = 0$$

Hogy S-nek Str. féle alakot adjunk, osztani kell az egyenletet az S-ből w szorzójával, 3-al, tehát $\frac{S}{3} + \frac{\operatorname{cotg}\alpha . \operatorname{cotg}\beta . \operatorname{cotg}\gamma}{3} M = 0$

Most még M-et kell Str. féle alakra hozni. M-ben a w szorzója $tg\alpha + tg\beta + tg\gamma$, ha tehát a baloldal második tagját ezzel a kifejezéssel szorozzuk és osztjuk, lesz

$$\frac{S}{3} + \frac{tg\alpha + tg\beta + tg\gamma}{3 tg\alpha\, tg\beta\, tg\gamma} \cdot \frac{M}{tg\alpha + tg\beta + tg\gamma} = 0$$

Itt most $\frac{S}{3}$ a súlypont, $\frac{M}{tg\alpha + tg\beta + tg\gamma}$ a magasságpont Str. féle függvénye és így F egyszerű arányszáma S és M-re nézve $\frac{tg\alpha + tg\beta + tg\gamma}{3 tg\alpha . tg\beta . tg\gamma}$

De $\alpha + \beta = \pi - \gamma$ lévén $tg(\alpha + \beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha\, tg\beta} = -tg\gamma$

a miből $tg\alpha + tg\beta + tg\gamma = tg\alpha . tg\beta . tg\gamma$, tehát F egyszerű arányszáma $\frac{SF}{FM} = \frac{1}{3}$, $SF = \frac{1}{3} FM$. Ebből látható, hogy F az S és M között fekszik és pedig ha 4 részre osztjuk az SM távolt, akkor F az S felőli első osztópont. Miután K az Fnek harmonicus társa, azért $\frac{SK}{KM} = -\frac{1}{3}$ vagyis $\frac{KS}{KM} = \frac{1}{3}$, $KS = \frac{1}{3} KM$, ha tehát SM-et felezzük, s a. fél távolságot S-től kezdve az F-től eljordult oldalra felrakjuk, kapjuk a K pontot, F harmonicus társát. Mindezekből pedig látható, hogy F, a Feuerbach féle kör centruma felezi a körülírt kör centrumának és a magasságpontnak KM távolát. –

S K F M

A teljes négyszög.

Vegyünk fel a síkban négy pontot, A, B, C és D, egyenleteik legyenek

$$A \equiv A_1 u + A_2 v + A_3 w = 0$$
$$B \equiv B_1 u + B_2 v + B_3 w = 0$$
$$C \equiv C_1 u + C_2 v + C_3 w = 0$$
$$D \equiv D_1 u + D_2 v + D_3 w = 0$$

és tegyük fel, hogy 3-3 pont ne feküdjék egy egyenesen, tehát a rendszer minden harmadfokú determinánsa nulltól különböző legyen. Mielőtt megvizsgálnók ezen négy pont kölcsönös viszonyát, előbb mutassuk ki, hogy mindig lehet kapni négy olyan $\lambda, \mu, \nu, \varrho$ multiplikátort, melyek szerint összegezve a négy pont függvényét, identikusan nullát kapunk, azaz

$$\lambda A + \mu B + \nu C + \varrho D \equiv 0$$

Hogy ez az identitás fennálljon, ahhoz szükséges, hogy benne külön az u, v és w factora nulla legyen, azaz teljesüljön a következő három lineáris egyenlet λ, μ, ν és ϱ-ban

$$A_1\lambda + B_1\mu + C_1\nu + D_1\varrho = 0$$
$$A_2\lambda + B_2\mu + C_2\nu + D_2\varrho = 0$$
$$A_3\lambda + B_3\mu + C_3\nu + D_3\varrho = 0$$

Ebből a rendszerből meghatározható, hogy mivel arányosak az ismeretlenek t. i. arányosak egy negyediknek oda képzelt sor elemeivel határozó aldeterminánsokkal, melyek a feltétel értelmében nem nullák. Tegyük fel, hogy így meghatároztuk a λ, μ, ν és ϱ multiplikato-

rokat. És most alakilag úgy módositjuk a négy pont egyenletét, hogy megfelelőleg keresztül szorozzuk azokat λ, μ, ν és ϱ-val, jelölvén a szorzatos függvényeket $\lambda A = A$, $\mu B = B$, $\nu C = \Gamma$, $\varrho D = \Delta$, ezzel az algebrai átalakitással azt értük el, hogy most a négy pont egyenlete

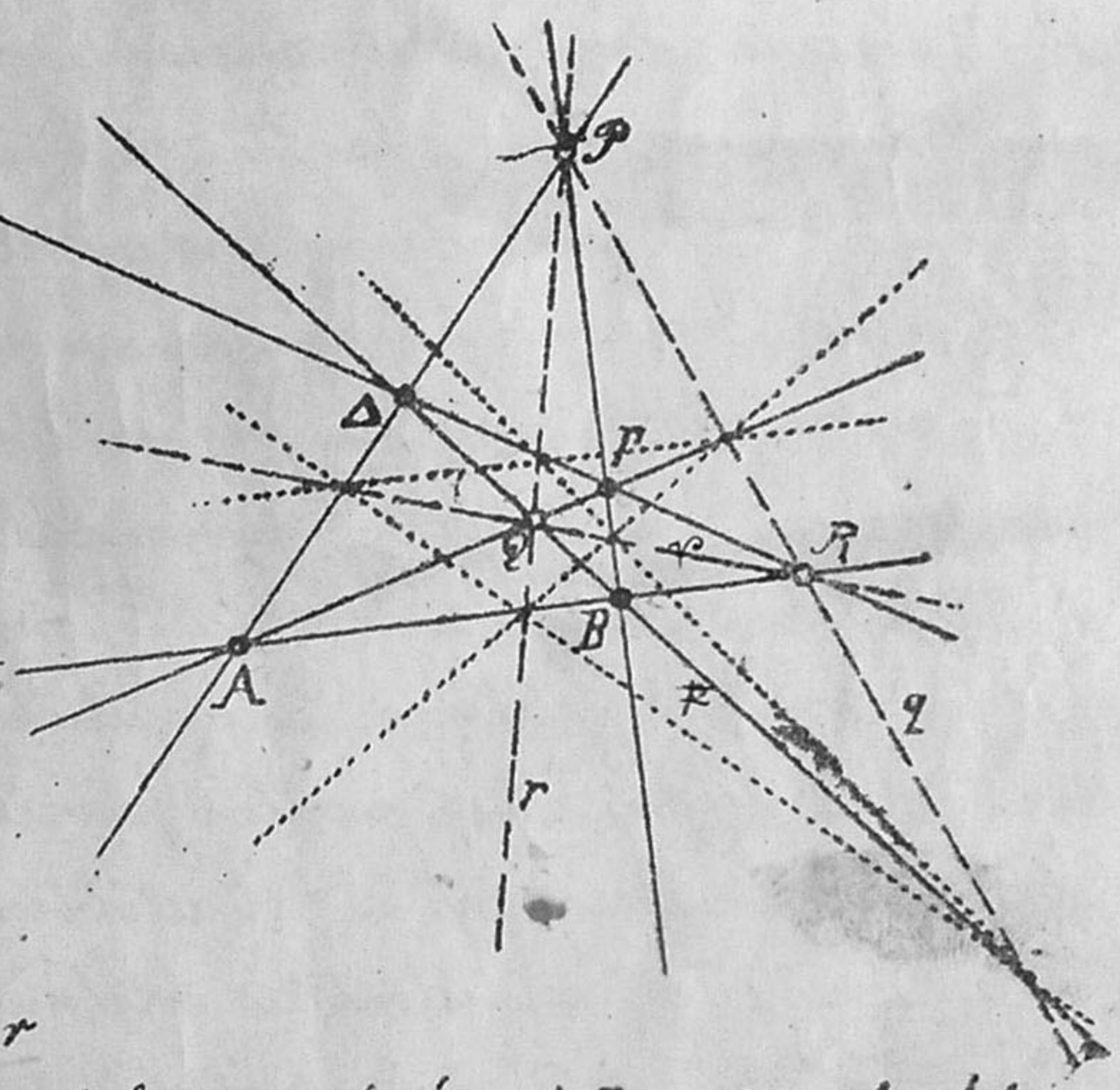
$$A = 0;\quad B = 0;\quad \Gamma = 0;\quad \Delta = 0$$

és

$$A + B + \Gamma + \Delta = 0$$

Azt az idomot, melyet négy ilyen pont felvételével nyerünk, teljes négyszögnek nevezzük. Vizsgáljuk meg ennek tulajdonságait.

A négy pontot összesen 6 egyenes köti össze, ezek a teljes négyszög oldalai. Két-két, nem egy ponton átmenő oldalt szembenfekvőnek mondunk. Ilyen oldalpár három van, $B\Gamma$, $A\Delta$; ΓA, $B\Delta$; és AB, $\Gamma\Delta$, melyek összesen három, megfelelőleg P, Q és R pontban metszik egymást, az úgynevezett átlóspontokban, melyek az átlós háromszöget alkotják, a P, Q, R pontokkal szembenfekvő p, q, r oldalakkal. Irjuk fel az átlóspontok egyenletét. A P pont rajta fekszik egyfelől a $(B.\Gamma)$, másfelől az (A, Δ) egyenesen, és ugyanazzal az okoskodással, mint a teljes négyoldalnál, adódik, hogy P pont egyenlete



akár $B + \Gamma = 0$, akár $A + \Delta = 0$

a Q ponté " $\Gamma + A = 0$, akár $B + \Delta = 0$

az R " " $A + B = 0$, " $\Gamma + \Delta = 0$

Az átlói háromszög oldalai metszik a teljes négyszög oldalait, minek folytán a teljes négyszög mindegyik oldalán négy-négy pont származik t.i. két szögpont, egy átlói pont, és a szembenfekvő átlóval való metszéspont (az ábrában: két vastagon pontozott, egy körözött és egy vékonyan pontozott.) Könnyen kimutatható, hogy 4-4 ilyen pont harmonicus. E vétett állítsuk fel az oldalak és átlók metszéséből származó negyedik pontok egyenletét. Az (A, B) oldal és az r átló metszéspontjának függvénye egyfelől A és B-ből

másfelől $(A+\Gamma)$ és $(B+\Gamma)$-ből, mint P és Q függvényéből van paraméteresen összetéve, ez a függvény nyilvánvalóan nem lehet más, mint $A-B$, vagyis annyi mint azon két szögpont függvényének különbsége, melyek az illető oldalt meghatározzák. Ugyanez áll a többi 5 ilyen pont függvényére. Már most vegyük az (A, B) egyenesen fekvő 4 pontot; ezeknek függvényei az előbbiek szerint A, B, $A+B$, és $A-B$; az két utóbbi pont függvénye tehát ellentett paraméterekkel van összetéve az A és B pont függvényéből, azok tehát harmonicusok az A, B pontokra. Ilyen harmonicus pontnégyes 6 van, a teljes négyszög 6 oldalának megfelelőleg. De az átlókon is találunk egy-egy harmonicus pontnégyest. Pl. a p átlón fekszik a Q és R átlós pont és két oldal-átló metszéspont, a két utóbbinak a függvénye $A-\Delta$ és $B-\Gamma$. És az $A+B+\Gamma+\Delta\equiv 0$ identitás értelmében ezen két függvény összege. $A+B-\Gamma-\Delta = 2(A+B)$ nem egyéb, mint R pont függvénye, és különbsége $A+\Gamma-\Delta-B = 2(A+\Gamma)$ nem egyéb, mint Q pont függvénye. Tehát az R és Q pontok függvényei ellentett paraméterekkel összetehetők a másik két pont függvényeiből, az R pont paramétere $+1$, a Q pontié -1; és így R és Q harmonicus a másik két pontra. A három

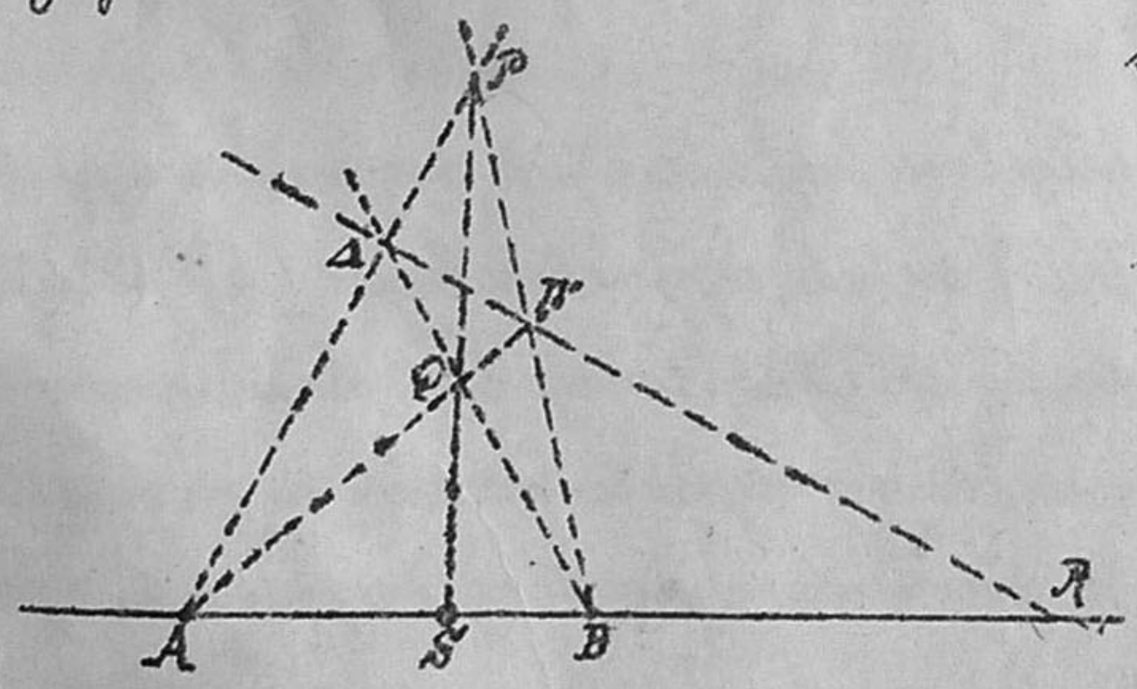
átló mindegyikén fekszik, tehát 4-4 harmonicus pont. A teljes négyszögben e szerint összesen 9 egyenesen fekszik 4-4 harmonicus pont.

Arról is meggyőződhetünk, hogy a 6 oldal- átló metszéspont közül 3-3 egy egyenesen fekszik. Felírjuk egymás alá ezen négy ponthármast, a miből látható lesz, hogy 3-3 pont függvényének összege identikusan nulla, hogy tehát megfelelőleg egy egyenesen fekszenek

$B-\Gamma$	$A-B$	$A-\Gamma$	$B-\Gamma$
$\Gamma-A$	$B-\Delta$	$\Gamma-\Delta$	$\Gamma-\Delta$
$A-B$	$\Delta-A$	$\Delta-A$	$\Delta-B$
$\Sigma\equiv 0$	$\Sigma\equiv 0$	$\Sigma\equiv 0$	$\Sigma\equiv 0$

(Ez a négy egyenes a rajzban pontozva van.) Ezzel a négy egyenessel záródik a teljes négyszög idoma. A teljes négyszögben van tehát 4 szögpont, 6 oldal, 3 átlói pont, 3 átló, az oldalak és átlók 6 metszéspontja, és ezek három által meghatározott 4 egyenes, összesen 13 pont és 13 egyenes.

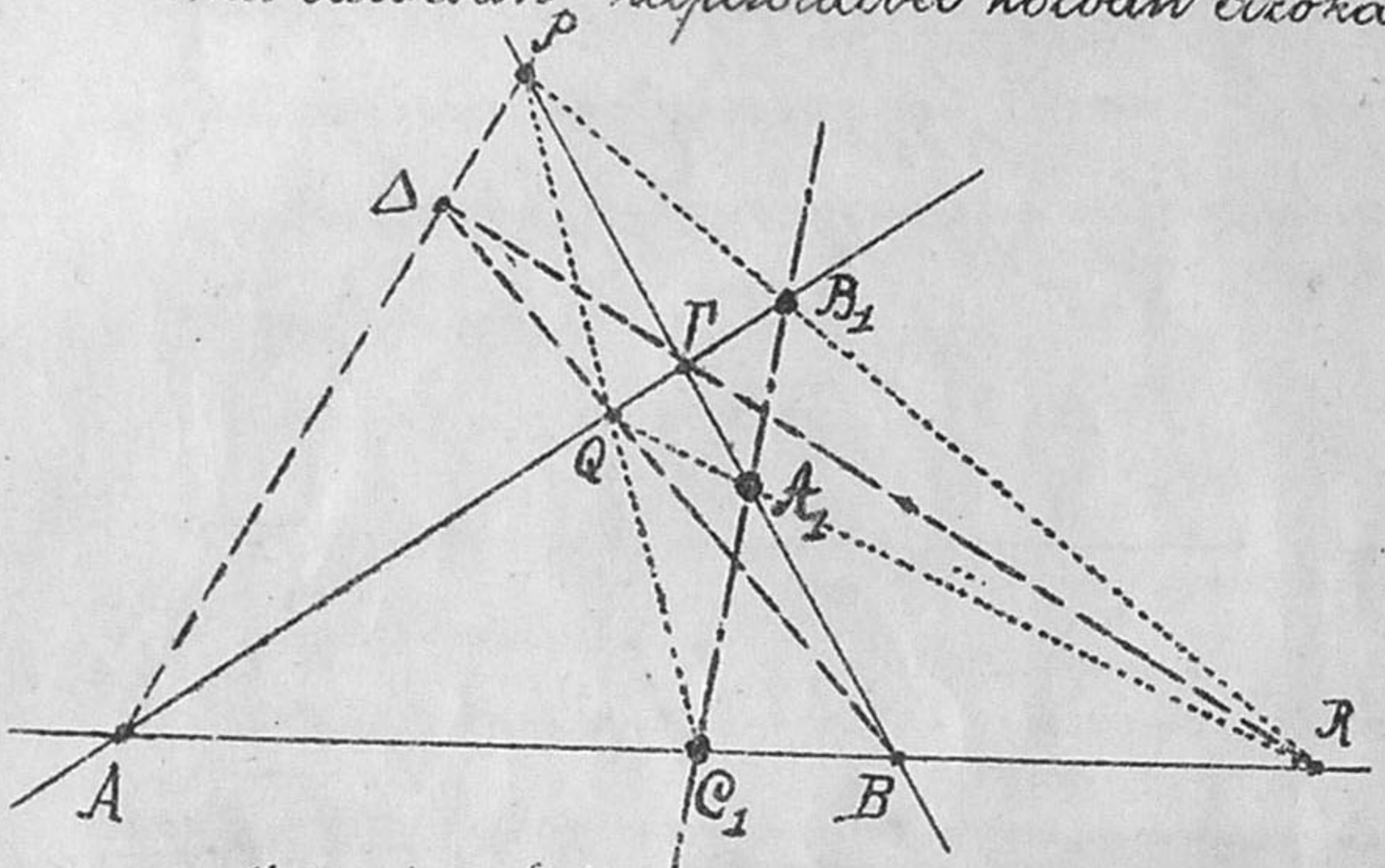
A teljes négyszögről való ismereteink alapján könnyen megszerkeszthetjük vonalzóval egy egyenesen felvett három ponthoz a negyedik harmonicust. Legyen az a két pont, mely az harmonicus viszonyban egy párt fog alkotni, A és B, a harmadik, melynek társát keressük, R. A szerkesztés a következő:



R-ből egy tetszőleges egyenest húzunk, mely az A és B-ből szintén tetszőleges szerint húzott két egyenest Δ és Γ-ben metszi; (ΔB) és (AΓ) metszéspontja Q az A és B-ből húzott két egyenes S metszéspontjával összekötve, az eredeti egyenest a keresett negyedik

harmonicában, S-ben metszi:

A teljes négyszögre vonatkozó tételek egy részét fogalmazzuk meg más alakban kapcsolatba hozván azokat egy háromszöggel. Legyen



vagyanis A, B, Γ egy háromszög 3 szögpontja. Vegyük ezekhez a sík egy tetszőleges Δ pontját és az így nyert A, B, Γ, Δ pontokhoz szerkesszük meg a teljes négyszöget, illetőleg annak átlói szögpontjait, P, Q, R-et, és ezek segélyével a háromszög mindegyik oldalán a két szögponthoz és egyik átlói ponthoz a negyedik harmonicust A_1, B_1, C_1. Akkor, a mint tudjuk, ez a 3 pont egy egyenesen fekszik, hisz függvényeik

$$\frac{B-\Gamma}{\Gamma-A}\,\frac{A-B}{}$$

tehát összegük $\Sigma \equiv 0$

A mondottakat a következő tételben foglalhatjuk össze: ha egy háromszög három szögpontját [A, B, Γ] a sík egy tetszőleges [Δ] pontjából a szembenfekvő oldalakra projiciáljuk [P, Q, R-be] és a háromszög oldalain ily módon fellépő 3-3 ponthoz meghatározzuk a negyedik harmonicust [A_1, B_1, C_1], akkor az a három pont egy egyenesen fekszik.

Ez a tétel különben directe következik még a Ceva tételéből és Menelaos tételének megfordításából is. Az első szerint, ha egy pontból

projiciálják a háromszög pontjait a szembenfekvő oldalakra, akkor ezen projectiónak a szögpontokra vonatkozó egyszerű arányszámaik $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ összeszorozva 1-et adnak: $\lambda_1 . \lambda_2 . \lambda_3 = 1$. Ha most mindegyik projectiónak az illető oldalon a harmonicus társait vesszük, akkor ezeknek ugyancsak az szögpontokra vonatkozó egyszerű arányszámaik $-\lambda_1, -\lambda_2, -\lambda_3$ és szorzatuk $\lambda_1 . \lambda_2 . \lambda_3 = -1$, de akkor a Menelaos tételének megfordítása értelmében ez a három pont egy egyenesen fekszik.

Ha összehasonlítjuk az teljes négyszöget a már előbb tárgyalt teljes négyoldallal, azt vesszük, hogy a két idom teljesen azonos; a mi a különbséget okozza, az csupán a fordított sorrend, a melyben a két idomot végigjártuk. A teljes négyoldalnál kiindultunk 4 oldalból, áttértünk ezeknek 6 metszéspontjára, két-két szembenfekvőt összekötő 3 átlóra, ezeknek 3 átlói pontjára, majd átmentünk a szögpontokat az átlói pontokkal összekötő 6 egyenesre, melyek egy-egy szögpontból kiindulva, az arokon még átmenő 3-3 egyenessel harmonicus sugárnégyeseket alkotnak, és bezárták az idomot az többi 6 egyenes által hármasával alkotott 4 metszéspontal. A teljes négyszögnél kiindultunk 4 pontból, ezeknek van 6 összekötő egyenesük, a 6 oldal, ezekről áttértünk a szembenfekvők által párosával alkotott 3 átlói szögpontra, az ezeket összekötő 3 átlóra, majd ezeknek az oldalakkal való 6 metszéspontjára, melyek mindegyike egy-egy oldalon feküdve, az azon még fekvő két szögponttal és egyik átlói ponttal harmonicus pontnégyest alkothatnak, végre bezárták az idomot ezen ntöbbi 6 pont által hármasával meghatározott 4 egyenessel. Tehát a két idom alkatrészei a mondott sorrendben:

a teljes négyoldalnál: | a teljes négyszögnél

4 egyenes, 6 pont, 3 egyenes | 4 pont, 6 egyenes, 3 pont
3 pont, 6 egyenes 4 pont | 3 egyenes, 6 pont, 4 egyenes.

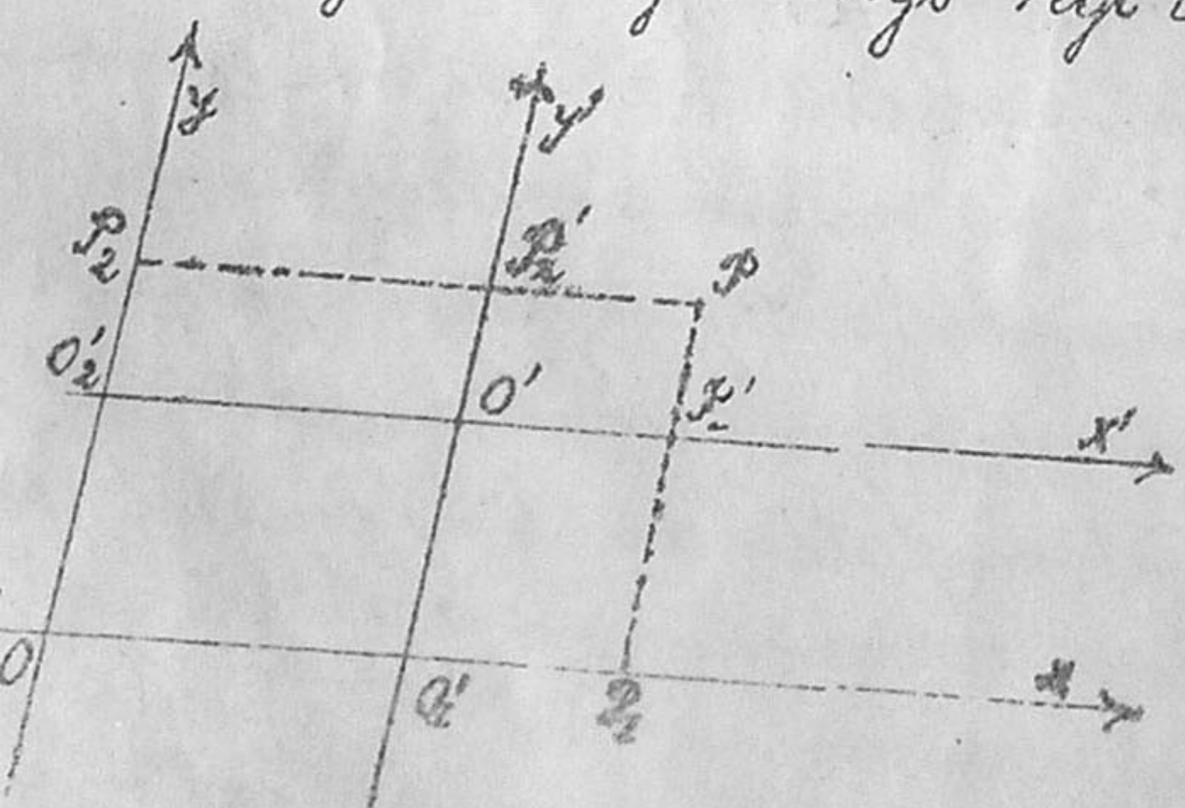
a miből látható, hogy az alkotóreszek mindkét idomnál ugyanazok, csak forditott sorrendben következnek egymásra. —

Ennyit a pontról, mint első osztályu geometriai alakzatról.

Pont és vonalcoordinaták transformatiója.

Mielőtt áttérnénk a magasabb rendü és osztályu görbék tárgyalására, ismerjük meg előbb a fontosabb coordinátatranszformatiókat, melyek a síkbeli pontokra és vonalakra vonatkoznak. Csupán az elemi transformatiókat fogjuk tárgyalni, melyekből az utáni összeteteto a legáltalánosabb coordinatatranszformatió. Ilyen elemi transformatió van három.

I. *A coordinatarendszer párhuzamos eltolásáu.* Ez a transformatió abban áll, hogy a tengelyek irányát megtartva, csak az origot helyzetét változtatjuk. Az uj O' origo régi coordinatai legyenek $a = OO_1'$ és $b = OO_2'$



Meg kell állapitani a síkbeli P pont régi x, y és uj x', y' coordinatai közötti összefüggést, nevezetesen mindig az a feladat, hogy a régi coordinatákat kifejezzük az ujakkal. Ha a P pont projicialó

sugarainak onetozése a régi tengelyekkel P_1 és P_2, az uj tengelyekkel P_1' és P_2' akkor $x' = O'P_1' = O_1'P_1$, $x = OP_1$ és $a = OO_1'$ lévén, ha ezeket az értékeket behelyetteitjük az $OO_1' + O_1'P_1 + P_1O = 0$ egyenletbe, kapjuk hogy

$$a + x' - x = 0$$

tehát $$x = x' + a$$

ejen igy adódik, hogy $$y = y' + b$$

† uj coord. x'; y'; z', ac előbbik alapján következik, hogy $x = x' + az'$; $y = y' + bz'$; $z = z'$ (1.) Igy változnak ebben a transformatióban a pontcoordinaták. ebből azonnal adódik a vonalcoordinaták transformatiója. Ha ugyanis az u, v, w coordinatáju egyenesen változó pont coordinatái x, y, és z, ⊙

Ha homogén coordinatákkal dolgozunk, és a P régi coordinatái, x, y és z †

⊙ akkor $$ux + vy + wz = 0$$

Az uj rendszerben az egyenesen változó pont coordinatái (1.) szerint módosulnak, tehát az uj rendszerben az egyenes egyenlete

$$u(x' + az') + v(y' + bz') + wz' = 0$$

vagyis $$ux' + vy' + (au + bv + w)z' = 0$$

de akkor x', y' és z' coefficienteci adják az egyenes transformált coordinatáit u', v' és w'-et, tehát a vonalcoordinaták transformatiójat a következő formulák adják

$$u' = u$$
$$v' = v \qquad (2.)$$
$$w' = au + bv + w$$

a hol a és b az uj origo régi coordinatái. Hogy az első és második vonalcoordinata a transformatióban nem változik, geometriailag is belátható, mert hisz ezeknek hányadosa adja az egyenes iránytangensét, a mely pedig a coordinatarendszer parallel eltolásaival nem változik. Az (1.) egyenletrendszer adja a régi pontcoordinatáik kifejezését az ujakkal, a (2.) egyenletrendszer kifejezi az uj vonalcoordinatákat a régiekkel. Igen érdekes kapcsolat (ezen) van két egyenletrendszer között, ha ugyanis mindkettőben a megfelelő coordinatákat ugyanúgy alakjuk, tehát

$$\left.\begin{aligned} x &= x' \,.\, + ax' \\ y &= .\, y' + bz' \\ z &= .\ .\ + z' \end{aligned}\right\} \text{(1.) és} \qquad \left.\begin{aligned} u' &= u \ .\ . \\ v' &= .\ v \ . \\ w' &= au + bv + w \end{aligned}\right\} \text{(2.)}$$

látható, hogy mindkettőnek determinánsa ugyanaz, csakhogy az elsőben sorokban, a másodikban oszlopokban állnak ugyanazok az elemek

$$\begin{vmatrix} 1, 0, a \\ 0, 1, b \\ 0, 0, 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, 0, 0 \\ 0, 1, 0 \\ a, b, 1 \end{vmatrix}$$

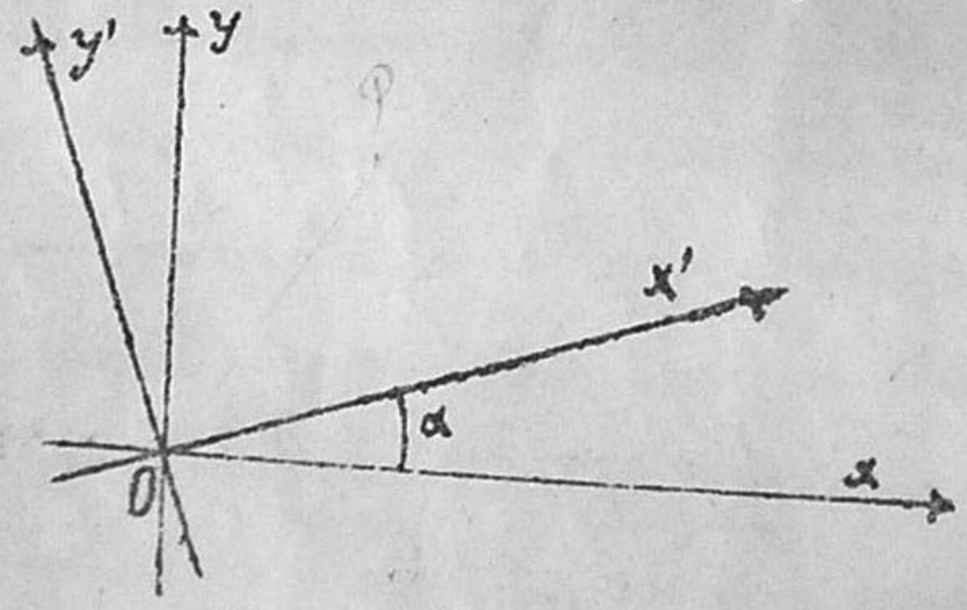
vagy másszóval, ugyanazok a coefficienesek, melyek az (1) rendszerben az első, második, harmadik sorban szerepelnek, azok a (2.) rendszerben az első, második illetőleg harmadik oszlopban szerepelnek.

Különben a (2.) rendszerből egyszerűen adódik a régi vonalcoordináták kifejezése az ujakkal t.i. $u = u'$

$$v = v'$$

$$w = w' - au' - bv'$$

II. <u>A coordinatarendszer kiforgatása</u> a második elemi transformatió; Ez abban áll, hogy egy derékszögü coordinatarendszert az O origo körül bizonyos α szög alatt kiforgatunk. Tehát az uj coordinatarendszer szintén derékszögü, ugyanazzal az origoval s a megfelelő tengelyek által bezárt szög a kiforgatási szöge α. Itt is meg kell állapitani a P pont régi és uj coordinatai közötti összefüggéseit. Célszerü polárcoordinat-ákat használni. Ha P pont régi coordinatai (ρ, φ), akkor az uj rendszerben P-nek ugyanaz a radius vectora, ρ, mig szöge φ' nyilvánvalóan



ilyen összefüggésben van a régivel: $\varphi = \alpha + \varphi'$; ha tehát áttérünk Descartes féle coordinatákra, akkor

$$x = \rho . \cos\varphi = \rho . \cos(\alpha + \varphi') = \rho \cos\alpha \cos\varphi' - \rho \sin\alpha \sin\varphi'$$

$$y = \rho . \sin\varphi = \rho \sin(\alpha + \varphi') = \rho \sin\alpha \cos\varphi' + \rho \cos\alpha \sin\varphi'$$

vagyis
$$\left.\begin{aligned} x &= \cos\alpha . x' - \sin\alpha . y' \\ y &= \sin\alpha . x' + \cos\alpha . y' \end{aligned}\right\} (3)$$

Ha homogen coordinatákkal dolgozunk, hozzá kell még venni a $z = z'$ egyenletet, és ezzel osztani az megfelelő oldalakat. Ezek a pont-coordinata transformatió egyenletei. Legyenek most az egyenes régi coordinatái u, v, w, a rajta mozgó pont régi coordinatái x, y, z, akkor

$$ux + vy + wz = 0$$

az egyenes egyenlete a régi rendszerben. A változó pont coordinatái az uj rendszerben (3) szerint módosulnak, tehát az egyenes egyenlete az uj rendszerben adódik, ha x, y és z értékét az uj coordinatáikkal helyettesitjük és az egyenletet x', y' és z' szerint rendezzük, tehát az uj egyenlet $(\cos\alpha . u + \sin\alpha . v) x' + (-\sin\alpha . u + \cos\alpha . v) y' + w z' = 0$

de akkor x', y' és z' coefficienseül adják az egyenes uj coordinatáit u', v', és w'-et, tehát a transformatió egyenletei

$$u' = \cos\alpha . u + \sin\alpha . v$$

$$v' = -\sin\alpha . u + \cos\alpha . v$$

$$w' = w$$

Itt is, ha mindkét egyenletrendszerben egymás alá irjuk a megfelelő coordinátákat,

$$\left.\begin{aligned} x &= \cos\alpha . x' - \sin\alpha . y' . \\ y &= \sin\alpha . x' + \cos\alpha . y' . \\ z &= \quad . \quad . \quad z' \end{aligned}\right\} (3.) \text{ és } \left.\begin{aligned} u' &= \cos\alpha . u + \sin\alpha . v \quad . \\ v' &= -\sin\alpha . u + \cos\alpha . v \quad . \\ w' &= \quad . \quad . \quad w \end{aligned}\right\} (4.)$$

látható, hogy ugyanazok a coefficienoek számszerint 9, onelyek az első rendszer soraiban szerepelnek, a második rendszerben az oszlopokat alkotják, tehát a két rendszer determinansa ugyanaz. Különben egyszerűen kifejezhetjük a (4.) rendszerből a régi vonalcoordinatákat az ujakkal; ugyanis a determinans $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = 1$ lévén, ha az első egyenletet szorozzuk $\cos\alpha$-val, a másodikat $(-\sin\alpha)$-val, és összeadjuk, adódik

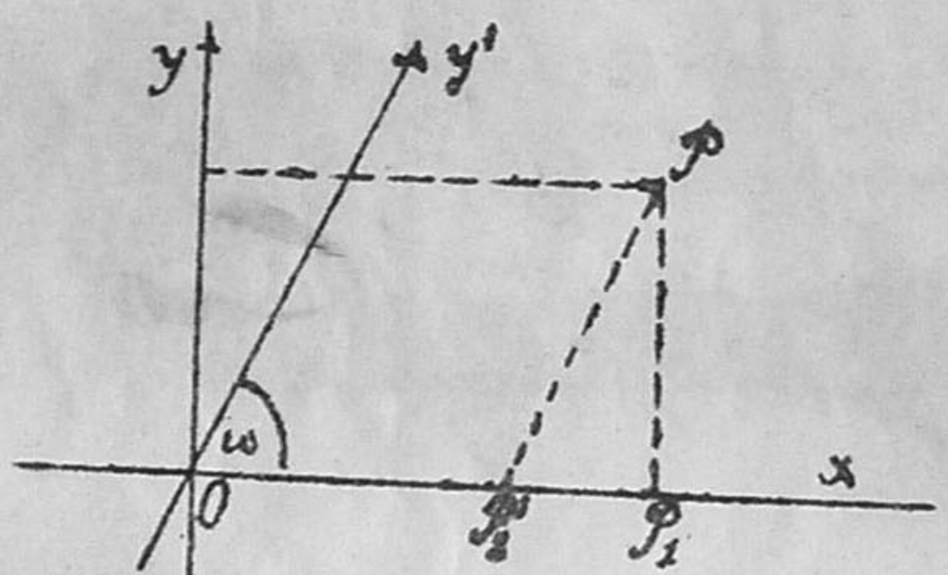
$$u = \cos\alpha . u' - \sin\alpha . v' ;$$

és szorozva az elsőt $\sin\alpha$, a másodikat $\cos\alpha$-val és összeadva, adódik

$$v = \sin\alpha . u' + \cos\alpha\, v' ,$$

végre $w =$ . . w' . .

III. A harmadik elemi transformationál egy derékszögü rendszerről, az origo és egyik pl. x tengely megtartásával áttérünk ferdeszögü coordinatarendszerre azáltal, hogy a másik pl. y tengelyt O körül forgatjuk, mig az x tengelyhyel w szöget zár be, ez lesz az uj y tengely y'. A P pont uj coordinatai onyilvánvalóan OP_2' és $P_1'P$ tehát



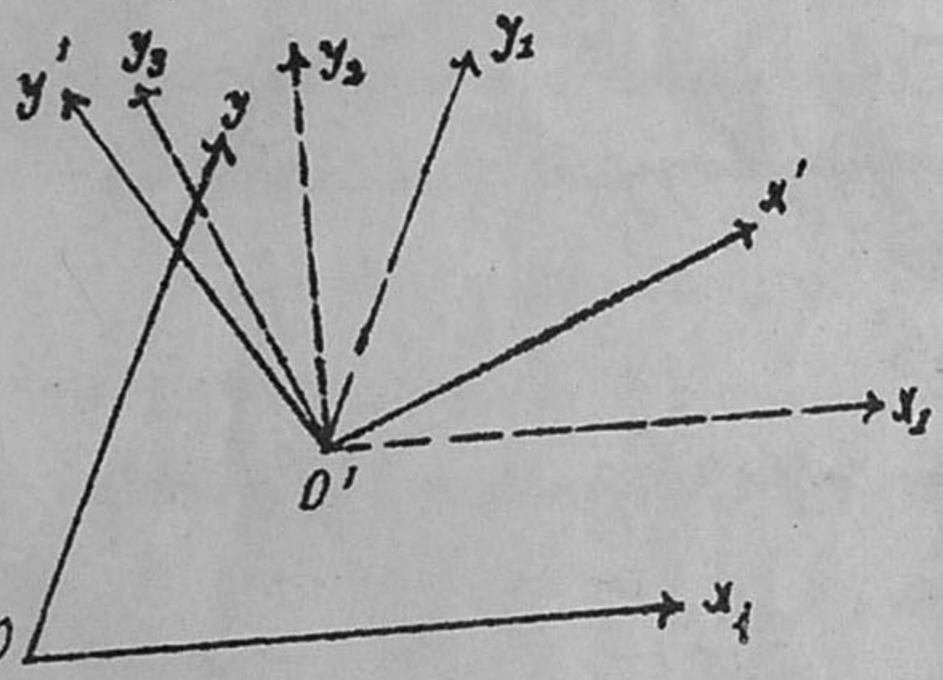
$$\left.\begin{aligned} x &= x' + y' \cos w \\ y &= \;\; . \;\; y' \sin w \\ z &= \;\; . \;\; \;\; . \;\; z' \end{aligned}\right\} (5.)$$

Igy transformálódik egy derékszögü rendszer ferdeszögü rendszerre. A vonalcoordinatak transformatió egyenleteit megkapjuk, úgy mint az előbbieknél, ha (5.)-ben az első egyenletet szorozzuk u-val, a másodikat v-vel, a harmadikat w-vel és összeadjuk, akkor x' szorzója u', y' szorzója v' és z' szorzója w', tehát

$$\left.\begin{aligned} u' &= u \\ v' &= \cos w . v \\ w' &= \;\; . \;\; \;\; . \;\; w \end{aligned}\right\} (6.)$$

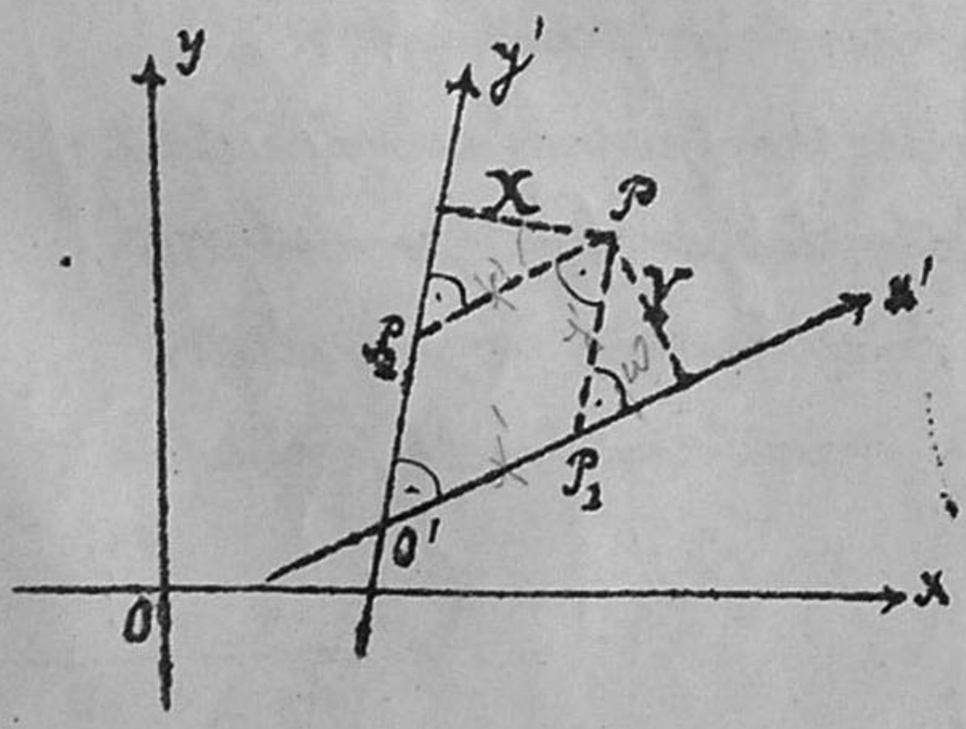
a vonalcoordináták transformatió egyenletei. Itt is ugyanaz a 9 coefficiens szerepel az (5.) és (6.) rendszerben, vagyis a két rendszer oleterminansa ugyanaz. ———

Ebből a három elemi transformatióból tehető össze a legáltalánosabb coordinatatransformatió, midőn egy (O, x, y) ferdeszögü rendszerről át kell menni egy tetszőleges másik (O', x', y') ferdeszögü rendszerre. Az átmenetel 3 lépésben történik. Először parallel eltolással átmegyünk az



(O', x_1, y_2) rendszerre, erről a O' körüli elforgatással az x_1 tengelyt x'-be hozva és y_2-et y_2-be, áttérünk az $(O'x', y_2)$ rendszerre, onnan erről a II elemi transformatió alkalmazásával az $(O'x'y_3)$ derékszögü rendszerre azáltal, hogy y_2-őt y_3-ba forgatjuk, mely utóbbi merőleges x'-re; és végre ugyanezzel a III. transformatió útján, az y_3-at y'-be forgatva, áttérünk a kivánt $(O'x'y')$ rendszerre. Az egész transformatió tehát 4 lépésben végezhető.

Egy igen gyakran előforduló transformatió abban áll, hogy egy derékszögü rendszerről átmegyünk egy ferdeszögü rendszerre, mely utóbbi rendszer tengelyeinek egyenlete a régi rendszerben:



az x' tengelyé $a_1 x + a_2 y + a_3 = 0$

az y' tengelyé $b_1 x + b_2 y + b_3 = 0$

Állapitsuk meg a P pont régi és uj coordinatai közötti összefüggést.

Ha a P pont normális távolsága

az y' tengelytől X, az x' tengelytől Y továbbá a két tengely hajlásszöge w, akkor lévén $O'P_1 = x'$ és $P_1P = y'$, következik, hogy

$$Y = y' \sin w$$

$$X = x' \sin w$$

De tudjuk a normális távolság kapcsolatából, hogy

$$X = \frac{b_1 x + b_2 y + b_3}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$$

$$Y = \frac{a_1 x + a_2 y + a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}$$

és a két tengely hajlásszögére nézve is tudjuk, hogy

$$\sin w = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$$

Ezeket az értékeket beteve a fenti két egyenletbe, kapjuk az uj coordinatáknak kifejezését a régiekkel

$$x' = \frac{X}{\sin w} = \frac{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}{a_1 b_2 - a_2 b_1}(b_1 x + b_2 y + b_3)$$

$$\text{és} \quad y' = \frac{Y}{\sin w} = \frac{\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}{a_1 b_2 - a_2 b_1}(a_1 x + a_2 y + a_3)$$

Ezekből az elemi transformatiókkal alkalmazott eljárásával egyszerüen megkapjuk az uj vonalcoordinatáikat is. Megjegyzendő, hogy a X és Y normális távolságok jegyét illetőleg meg kell még állapodnunk abban, hogy melyik quadransát az uj rendszernek tekintsük positivnak. Ha ezt megtettük, és ezen quadrans egy tetszőleges pontjának coordinatáit behelyettesitjük a két normális távolság kifejezésébe, positiv értéket kell kapnunk mindkettőnél, a mi ha nem következnek be, az illető kifejezést még (-1)-el kell szoroznunk, hogy azután összes formuláink helyesek legyenek.

Háromszögös vagy trimetricus coordinatarendszer.

Az eddig tanultakat arra fogjuk felhasználni, hogy a sikbeli a pont és egyenes helyzetének meghatározására uj, általánosabb coordinatarendszert vezessünk be. Ugy fogunk ehhez eljutni, hogy egy derékszögü rendszerre vonatkozó hom. coordinatáikat tranoformáljuk, és megvizsgáljuk ezen tranoformatio algebrai tulajdonságait, majd geometriai jelentését.

Legyen adva egy derékszögü coordinatarendszer s ebben egy pont hom. coordinatái x, y, z; vezessük be most uj coordinatáknak egyszerint a régieknek következő három lineáris függvényét

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 x + a_2 y + a_3 z \\ x_2 &= b_1 x + b_2 y + b_3 z \\ x_3 &= c_1 x + c_2 y + c_3 z \end{aligned} \qquad (1.a)$$

tehát a felvett pont uj coordinatái x_1, x_2, x_3. Vizsgáljuk meg ezen tranoformatió algebrai tulajdonságait. Nyilvánvaló, hogy az ily módon pontjához ezen (1a) egyenletek értelmében az uj coordinatáik egyértéküleg meg vannak határozva, vagyis az átmenet a régi coordinatákról az ujakra teljesen határozott. Hogy fordítva az uj coordinatákról átmehessünk a régiekre, fel kell tennünk, hogy az (1.a) rendszer, vagyis a tranoformatio determinansa nullától különböző, tehát, hogy

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

Ekkor ugyanis
$$\begin{aligned} \Delta x &= A_1 x_1 + B_1 x_2 + C_1 x_3 \\ \Delta y &= A_2 x_1 + B_2 x_2 + C_2 x_3 \\ \Delta z &= A_3 x_1 + B_3 x_2 + C_3 x_3 \end{aligned} \qquad (1b.)$$

a hol A_1, A_2 stb. a $a_1, a_2, \ldots$ stb elemekhez tartozó aldeterminansok. A régi coordináták homogén természetűek, vagyis ugyanazt a pontot szolgáltatják, ha valamennyit ugyanazzal a λ factorral szorozzuk; az (1a) rendszerből látható, hogy az új coordináták is homogén természetűek, mert ha x_1, x_2 és x_3 helyébe λx_1, λx_2 illetőleg λx_3-at írunk, a megfelelő régi coordináták helyébe lép λx, λy, λz, ezek pedig ugyanazt a pontot jelentik, tehát $\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3$ is, vagyis az új coordináták hom. természetűek.

A pontcoordináták mellett új vonalcoordinátákat[,] lineáris függvényét
$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3$$
[is definiálunk. Vegyük ugyanis az új pontcoordináták]
és kérdezzük, mi ennek geometriai jelentése, ha nullá tesszük. Behelyettesítve x_1, x_2 és x_3 értékét az (1a.) rendszerből, rendezés után egy x, y és z-ben lineáris függvényt kapunk, a mely nullá téve, egyenest jelent, melynek régi coordinátái u, v, w nem egyebek, mint x, y illetőleg z coefficienseri, tehát

$$\begin{aligned} u &= a_1 u_1 + b_1 u_2 + c_1 u_3 \\ v &= a_2 u_2 + b_2 u_2 + c_2 u_3 \\ w &= a_3 u_1 + b_3 u_2 + c_3 u_3 \end{aligned} \qquad (2a.)$$

Ezen egyenes új coordinatái gyanánt definiáljuk az ezen egyenletekben szereplő u_1, u_2, u_3 mennyiségeket. Tehát (2a) kifejezi az egyenes régi coordinatáit az ujakkal, és viszont

$$\begin{aligned} \Delta u_1 &= A_1 u + A_2 v + A_3 w \\ \Delta v_1 &= B_1 u + B_2 v + B_3 w \\ \Delta w_1 &= C_1 u + C_2 v + C_3 w \end{aligned} \qquad (2b.)$$

kifejezi az egyenes uj coordinatáit a régiekkel.

Látható, hogy az (1.a) és (2.a) rendszernek ugyanaz a determinansa, mert a mely 9 constans szerepel az (1.a) rendszer soraiban, ugyanazok szerepelnek a (2.a) oszlopaiban. Épenigy (1.b) és (2.b) rendszernek ugyanaz a determinansa. Tehát azon rendszernek, mely kifejezi az uj pontcoordinatákat a régiekkel, ugyanaz a determinansa, mint annak, a mely kifejezi a régi vonalcoordinatáit az ujakkal; és a régi pontcoordinatáit az ujakkal kifejező, valamint az uj vonalcoordinatákat a régiekkel kifejező rendszernek ugyanaz a determinansa. A viszonyt a régi és a transformált rendszer között kifejezi ez az identitás

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 \equiv ux + vy + wz$$

a miből látható, hogy az összetartozási viszony úgy a régi, mint az uj rendszerben ugyanaz és ebből továbbá következik, hogy – a mint már láttuk – az uj rendszerben is ugyanaz a geometriai jelentése van a coordinatáknak lineáris függvényének, mint a régiben, tehát az

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$$

egyenlet egyenest vagy pontot jelent, a szerint, a mint a pontcoordinaták változnak az egyenletnek megfelelőleg, vagy a vonalcoordinaták.

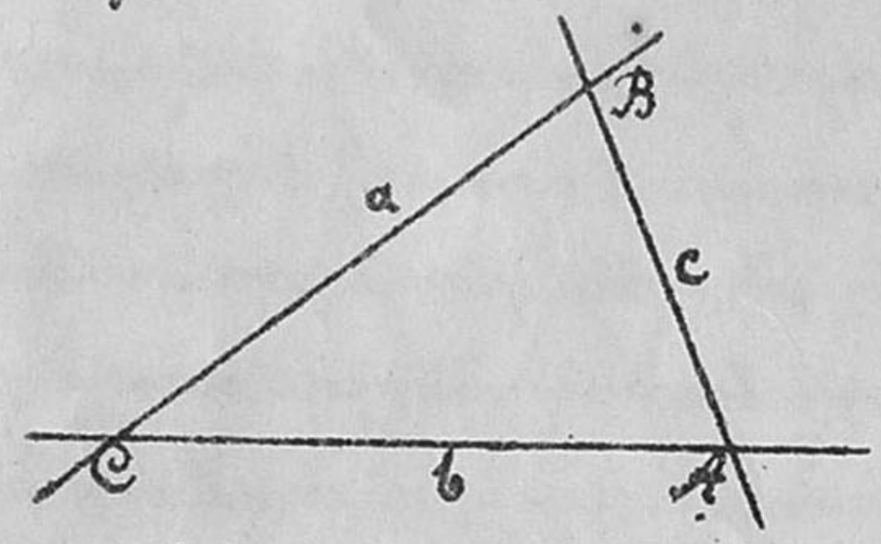
Ezek a transformatió algebrai tulajdonságai.

Most lássuk, mi az igy definiált uj coordinatáknak geometriai jelentése. Ett fog kitünni, hogy tulajdonképen miben áll az uj coordinatarendszer. Vizsgáljuk először a pontcoordinatáikat.

Az (1.a) egyenletek értelmében azok a pontok, melyeknek uj első coordinatája x_1 nulla, rajta fekszenek azon az egyenesen, melynek egyenlete a régi rendszerben $a \equiv a_1 x + a_2 y + a_3 z = 0$; a melyeknek uj második coordinatája, x_2, nulla, rajta vannak a

$b \equiv b_1x + b_2y + b_3z = 0$ egyenesen, és azok a pontok, melyeknek uj harmadik coordinatája; x_3, nulla, rajta vannak a

$c \equiv c_1x + c_2y + c_3z = 0$ egyenesen. Minthán ezen három egyenlet determinansa nulltól különböző, a három egyenes háromszöget alkot. Ennek három oldala a, b, c képezik az uj rendszer alapegyeneseit vagyis tengelyeit. A háromszögpont azzal van jellemezve, hogy két uj coordinatájuk nulla, és pedig: az A pont 2 és 3. coordinatája 0, az első nulltól különböző, tehát szabad vele mindhárom coordinatát osztani, úgy hogy az A szögpont uj coordinatái 1, 0, 0. Ez tehát az uj rendszer első alappontja. A B pont 1 és 3 coordinatája nulla, osztva mindhármat a nulltól különböző másodikkal kapjuk, hogy a B szögpont coordinatái 0, 1, 0; ez az uj rendszer második alappontja.



A C szögpont 1 és 2 coordinatája nulla, osztva mindhármat a nulltól különböző harmadikkal, kapjuk, hogy a C szögpont uj coordinatái 0, 0, 1, ez az uj rendszer harmadik alappontja.

Látjuk tehát, hogy a coordinatarendszer összefüggésben van egy háromszöggel. A háromszög egyik oldalán fekvő pont egyik coordinatája nulla, két oldalán vagyis egyik szögpontban fekvő pont két coordinatája nulla, ha pedig a pont nem fekszik a háromszögön, egyik coordinatája sem nulla. [159 oldal jobbjelek része ide tartozik.]

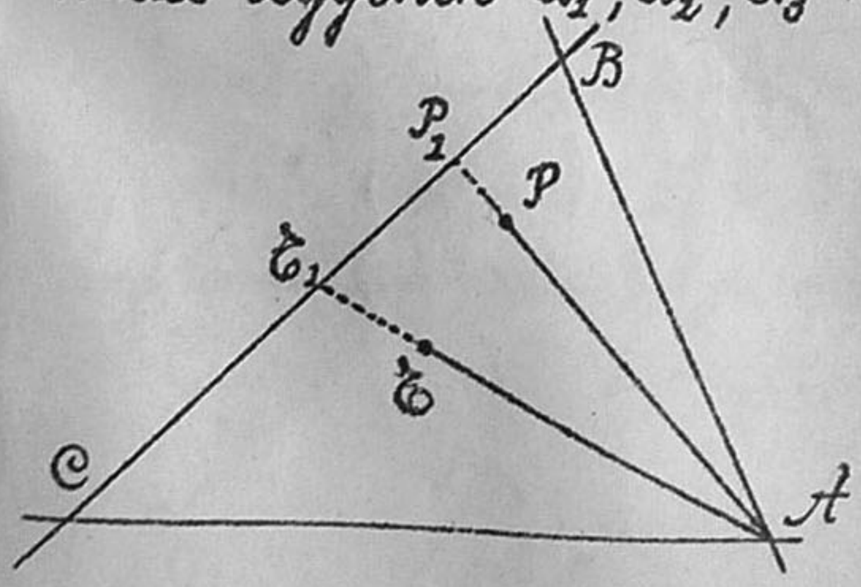
Itt helyén lesz megemlíteni, hogy az (1a) és (2a) egyenletrendszerekben szereplő coefficienseknek mi a geometriai jelentésök. Ik imént mondottakból világos, hogy a_1, a_2, a_3 az uj rendszer első alapegyenesének régi coordinatái.

ordinatáv.
b_1, b_2, b_3 a második és c_1, c_2, c_3 a harmadik alapegyenes régi co- nogely vég-
Továbbá az (1a.) egyenletből látszik, hogy az régi rendszerbeli x ta a_1, b_1, c_1;
lelen távoli pontjának vagyis az (1,0,0) pontnak uj coordinatái $x_3 = c_1$. Ha-
mert ha ezen egyenletekben $x=1, y=0, z=0$, akkor $x_1 = a_1, x_2 = b_1$ lelen távoli
szolóképen következik, hogy az régi rendszerbeli y tengely végte egy tet-
pontjának, vagyis az (0,1,0) pontnak uj coordinatái a_2, b_2, c_2, e c_3.
szöleges más egyenes végtelen távoli pontjának coordinatái a_3, b zlb. coeffi-

Épen igy kiolvashatjuk az (1b.) egyenletekből a A_1, B_2, C_2 coordina-
ciensek geometriai jelentését. Mert ezekből látható, hogy az uj A_1, A_2, A_3,
tarrendszer $A = (1,0,0)$ alappontjának régi coordinatái B_1, B_2, B_3 és
$B = (0,1,0)$ " " " D_1, C_2, C_3
$C = (0,0,1)$ " " " (

Ez a kétféle coeffiecsnek geometriai jelentése. ének

Ezek után áttérhetünk az uj coordinaták geometriai jelent - kettő
magyarázatára. Vegyük először a pontcoordinatákat és előbb kettő netriai je-
hányadosának, majd mindegyiknek külön is vizsgáljuk a geomt, mely-
lentését. E végett egyszer s mindenkorra felkeresünk azt a ponto zernek.
nek uj coordinatái 1, 1, 1, vagyis az egységpontját az uj rendsz $x_2 = 1$,
Ennek régi coordinatáit megkapjuk, ha az (1b.) egyenletekben coordi-
$x_2 = 1$ és $x_3 = 1$. Legyen ez a pont E. A meghatározandó P pont nontokkal
natái legyenek x_1', x_2', x_3' és kössük össze A pontot az E és P i: a coor-



Akkor A-ból négy egyenes indul k dinatarendszer két alapegyenes AB, továbbá AE és AP. Már látt
AC egyenes egyenlete $x_2 = 0$
AB " " $x_3 = 0$

2 AC és
ik, hogy

Az AP egyenes egyfelől átmegy az AC és AB oldalszakaszok közös A-n és így egyenlete ilyen alakú $x_2 + \lambda x_3 = 0$, a mely λ paramétert meghatározza az a körülmény, hogy AP másfelől átmegy a $P \equiv (x_1', x_2', x_3')$ ponton is, tehát $x_2' + \lambda x_3' = 0$, a miből $\lambda = -\frac{x_2'}{x_3'}$ úgyhogy AP egyenlete $x_2 - \frac{x_2'}{x_3'} x_3 = 0$. Az AE egyenes egyenlete, mivel átmegy az A ponton $x_2 + \mu x_3 = 0$, és mivel átmegy az $E \equiv (1,1,1)$ ponton is, azért $1 + \mu = 0$, tehát $\mu = -1$, úgyhogy az AE egyenes egyenlete $x_2 - x_3 = 0$. Tehát összefoglalva

AC egyenlete	$x_2 = 0$	Tudjuk, hogy ha két egyenes - itt AP és AE függvénye más két egyenes függvényéből paraméteres összetételü, akkor ezen paraméterek hányadosa nem más, mint az egy ponton keresztülmenő ezen négy egyenes kettős aránya; ebből adódik, hogy $\frac{x_2'}{x_3'} = (A, C B P E)$ vagyis a P pont új második és harmadik koordinátáinak hányadosa annyi mint a C, B, P, E pontokat az A pontból projiciáló 4 sugár kettős aránya, véve az AC és AB alapegyeneseket alapsugaraknak, az AE egyenest egységsugárnak. (Látható, hogy a fenti képletben - a hányzó első pontkoordinátának megfelelőleg - az új rendszer első alappontja áll elől mint projectio centrum, és a kettős viszonyban - a nevezőben levő 3-ik koordinátának megfelelőleg - a harmadik egységpont áll legelől, azután következik a többi.) Ennek analogiájára felirhatjuk a másik két koordinátahányados geometriai jelentését:
AB	" $x_3 = 0$	
AP	" $x_2 = \frac{x_2'}{x_3'} x_3 = 0$	
AE	" $x_2 - x_3 = 0$	

$$\frac{x_1'}{x_3'} = (B, C A P E)$$

és

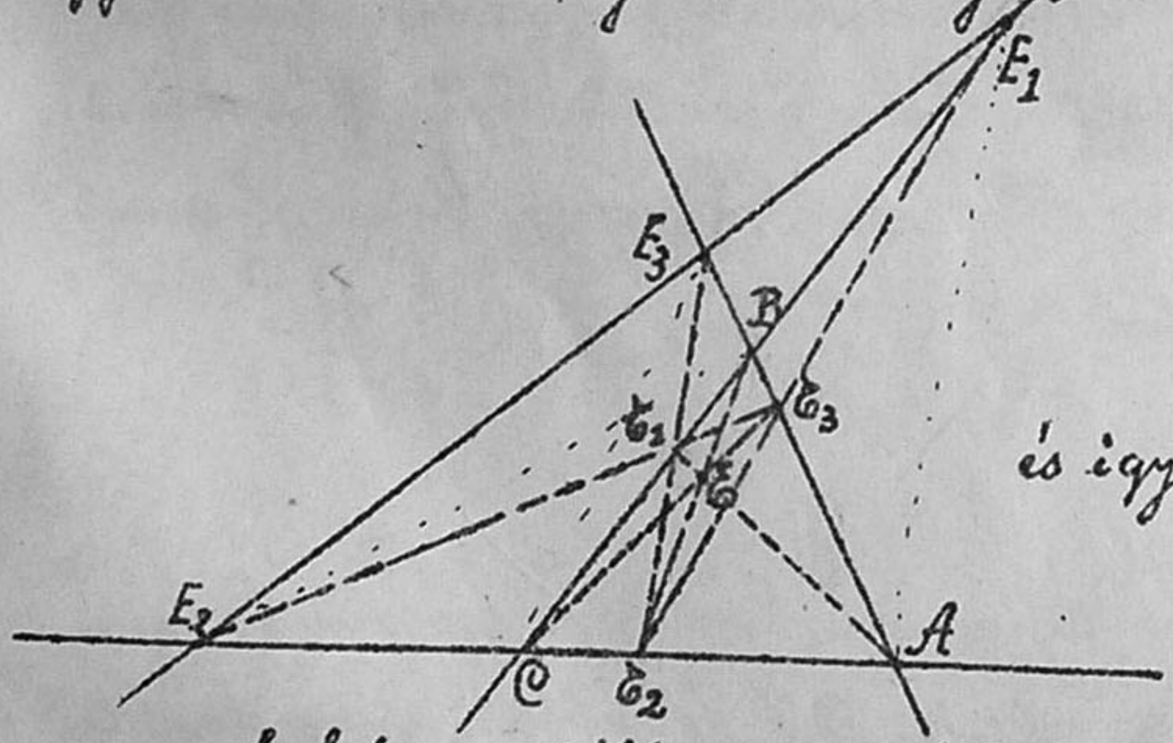
$$\frac{x_1'}{x_2'} = (C, B A P E)$$

vagyis azon 4 sugár kettős aránya, miként a B illetőleg C alappontból projiciáljuk a többi 4 pontot.

Különben helyettesithetjük 4 sugár kettős arányainak az első- harmonikusban az BC, a másodikban a CA, a harmadikban az AB alappárnes által kimetszett 4-4 pont kettős arányaival, úgyhogy ha a P és E pont szögponti projectiói a szembenfekvő oldalakra P_1, P_2, P_3 illetőleg E_1, E_2, E_3, akkor

$$\frac{x_2'}{x_3'} = (CB P_1 E_1) \; ; \quad \frac{x_1'}{x_3'} = (CA P_2 E_2) \text{ és } \frac{x_1'}{x_2'} = (BA P_3 E_3)$$

Hasonló jelentésök van az uj vonalkoordinatáknak. Hogy ezt belássuk, keressük fel azt az egyenest, melynek uj coordinatái $(1, 1, 1)$. E végett projiciáljuk a E egységpontot az alappontokból a szembenfekvő oldalakra E_1, E_2, E_3-ba. Az $(E_2 E_3)$ és (BC) egyenesek metszőpontja legyen E_1, az $(E_1 E_3)$ és (AC) metszéspontja E_2, és az $(E_1 E_2)$ meg (AB) metszéspontja legyen E_3. Egy ismeretes tétel értelmében E_1, E_2, E_3 megfelelőleg harmonicus társai E_1, E_2 illetőleg E_3-nak az illető oldalon levő alappontokra vonatkozólag és E_1, E_2, E_3 egy egyenesen fekszik. Ez a keresett egységegyenes. Ennek beigazolása végett állitsuk fel ezen egyenes egyenletét.



Már láttuk, hogy az

(AE) egyenes egyenlete $x_2 - x_3 = 0$

(BE) " " $x_3 - x_1 = 0$

(CE) " " $x_1 - x_2 = 0$

és igy

(AE_1)	"	" $x_2 + x_3 = 0$
(BE_2)	"	" $x_3 + x_1 = 0$
(CE_3)	"	" $x_1 + x_2 = 0$

E három utóbbi a megfelelőleg 4 ik harmonicus sugarak

Az E_1 pont az AE_1 és BC metszése lévén, kielégiti az $x_1 = 0$ és $x_2 + x_3 = 0$ egyenletét

az E_2 " a BE_2 és CA " " " az $x_2 = 0$ és $x_1 + x_3 = 0$ "

az E_3 " a CE_3 és AB " " " az $x_3 = 0$ és $x_1 + x_2 = 0$ "

* Teljes megoldásra vonatkozó tételek.

† az $(E_1 E_2 E_3)$ egyenes egyenlete $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, mert magában foglalja

Ebből világos hogy † az E_1, E_2, E_3 pontok egyenleteit. De ebből következik, hogy ezen egyenes coordinatái 1, 1, 1, mert ezek nem egyebek, mint az x_1, x_2 illetőleg x_3 szorzói. Tehát az egységpont ismeretével azonnal megkapjuk a kívánt E_1, E_2, E_3 egységegyenest. Kérdés már most, mi a jelentése annak, ha egyik vonalcoordináta nulla.

1, Ha $u_1 = 0$, akkor (2b) értelmében $A_1 u + A_2 v + A_3 w = 0$, ez pedig a régi rendszerben az új A alappont egyenlete, mert hisz ennek régi coordinátái A_1, A_2, A_3. Tehát az első alapponton átmenő egyenes új első coordinátája nulla.

2, Épen így ha $u_2 = 0$, az egyenes átmegy a B alapponton, a második alapponton átmenő egyenes második coordinátája nulla.

3, és ha $u_3 = 0$, az egyenes átmegy a C ponton, tehát a harmadik alapponton átmenő egyenes harmadik coordinátája nulla.

Most az összes egyenesek közül kiválnak azok, melyeknek két-két coordinátájuk nulla, tehát a melyek átmennek B és C, a C és A, az A és B alappontokon, ezek az alapegyenesek. Ha ezeket megfelelőleg a, b, c-vel jelöljük, akkor tehát a coordinatái 1, 0, 0

b " 0, 1, 0

c " 0, 0, 1

Látjuk, hogy az alapegyeneseknek ugyanazok a vonalcoordinátáik, mint az alappontoknak a pontcoordinátáik. Sőt tovább menve, ha felírunk a vonalcoordinátáik között egy lineáris egyenletet pl.

$$x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 = 0$$

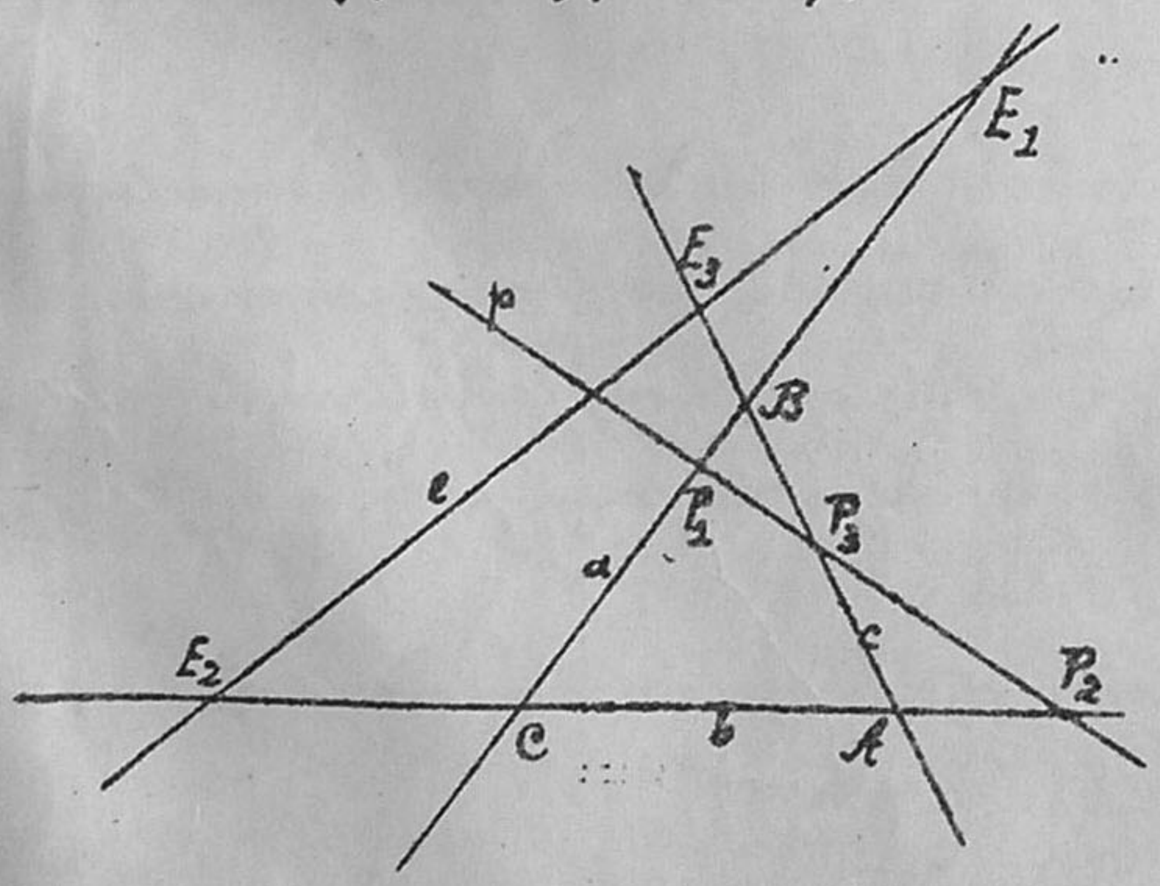
a hol $u_1\ u_2\ u_3$ változó vonalcoordináták, x_1, x_2, x_3 constansok, akkor ez az egyenlet pontot jelent, melynek coordinatái x_1, x_2, x_3. Ha az egyenletben két constans hiányzik, akkor egy-egy alappontot jelent az egyenlet

pl. ha $x_2 = x_3 = 0$, akkor $x_1 u_2 = 0$, azaz $u_1 = 0$ az első alappont egyenlete, a mint azt már láttuk. Ha csak egy constans hiányzik, az egyenlet oly pontot jelent, mely rajta van egyik alapegyenesen; pl. ha $x_2 = 0$, akkor $x_2 u_2 + x_3 u_3 = 0$ jelent egy az első alapegyenesen fekvő pontot. Ha pedig egyik constans sem hűnik el, akkor a teljes egyenlet egy általános fekvésű pontot jelent, mely egyik alapegyenesen sem fekszik.

[154 oldalra! Ha pontcoordinatáik között felírunk egy lineáris egyenletet

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$$

a hol u_1, u_2, u_3 constanok, akkor ez az egyenlet egyenest jelent, melynek coordinatái u_1, u_2, u_3. Ha két constans hiányzik, akkor az egyenlet egy-egy alapegyenest jelent, mert akkor az egyenlet $x_1 = 0$, illetőleg $x_2 = 0$, illetőleg $x_3 = 0$ alakot ölt. Ha csak egy constans hiányzik, akkor egy-egy alapponton átmenő egyenest jelent az egyenlet; ha pl $u_1 = 0$, akkor $u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$ vagyis $x_2 + \frac{u_3}{u_2} x_3 = 0$; ez az paraméteres egyenlet x_2 és x_3 között pedig nem jelent egyebet, mint az $x_2 = 0$ és $x_3 = 0$ egyenesek metszőpontján, vagyis az első alapponton átmenő egyenest. Ha egyik constans sem nulla, a teljes egyenlet általános fekvésű egyenest jelent, mely nem megy át egyik alapponton sem. –] .....



.. Áttérve most a vonalcoordinaták geometriai jelentésére, vegyük segítségül az imént megállapított egy-egyenegyenesü, mely az a, b, c alapegyenesket E_1, E_2, E_3 pontokban metszi, legyen ez e. A kérdéses p egyenes, melynek u_1', u_2', u_3' coordinatáit geometriailag inter-

pretálni akarjuk, messe az alapegyeneseket megfelelőleg a P_1, P_2, P_3 pontokban. Most vegyük az $\underline{a}$ egyenesen fekvő négy pontot: B, C, P_1, E_1 és ezeknek állítsuk fel egyenletüt. A fentiek szerint B pont egyenlete $u_2=0$

C " " $u_3=0$

A P_1 pont rajta lévén a B és C pontok egyenesén, egyenlete $u_2+\lambda u_3=0$, a λ parametert meghatározza az a körülmény, hogy a P_1 pont rajta van a p egyenesen is, tehát $u_2'+\lambda u_3'=0$, a miből $\lambda=-\frac{u_2'}{u_3'}$, úgyhogy P_1 pont egyenlete $u_2-\frac{u_2'}{u_3'}u_3=0$. Az E_1 pont $u_2+\mu u_3=0$ egyenletében a μ parameter kiadódik az $1+\mu=0$ egyenletből, miután E_1 rajta van az $(1,1,1)$ egységegyenesen is; igy tehát $\mu=-1$ lévén az E_1 pont egyenlete $u_2-u_3=0$. Összefoglalva a

B pont egyenlete $u_2=0$

C " " $u_3=0$

P_1 " " $u_2-\frac{u_2'}{u_3'}u_3=0$

E_1 " " $u_2-u_3=0$

tehát P_1 és E_1 függvénye parameteresen van összetéve B és C függvényéből, és igy a két parameter hányadosai nem egyéb, mint a négy pont kettős arányszáma $\frac{u_2'}{u_3'}=(BCP_1E_1)$

vagyis a p egyenes második és harmadik coordinatáinak hányadosa meghatározza azt a pontot (P_1), a hol az egyenes az $\underline{a}$ alapegyenest metszi. Ezt a kettős arányszámot úgy is jelölhetjük, hogy zárjelben elöl irjuk az $\underline{a}$ alapegyenest, azután azt a négy sugarat, mely abból a B, C, P_1, E_1 pontokat kimetszi, tehát $\frac{u_2'}{u_3'}=(a, c\,b\,p\,e)$

Ép'en igy adódik a másik két coordinatahányadosra nézve, hogy

$$\frac{u_1'}{u_3'}=(b, c\,a\,p\,e) \text{ és } \frac{u_2'}{u_1'}=(c, a\,b\,p\,e)$$

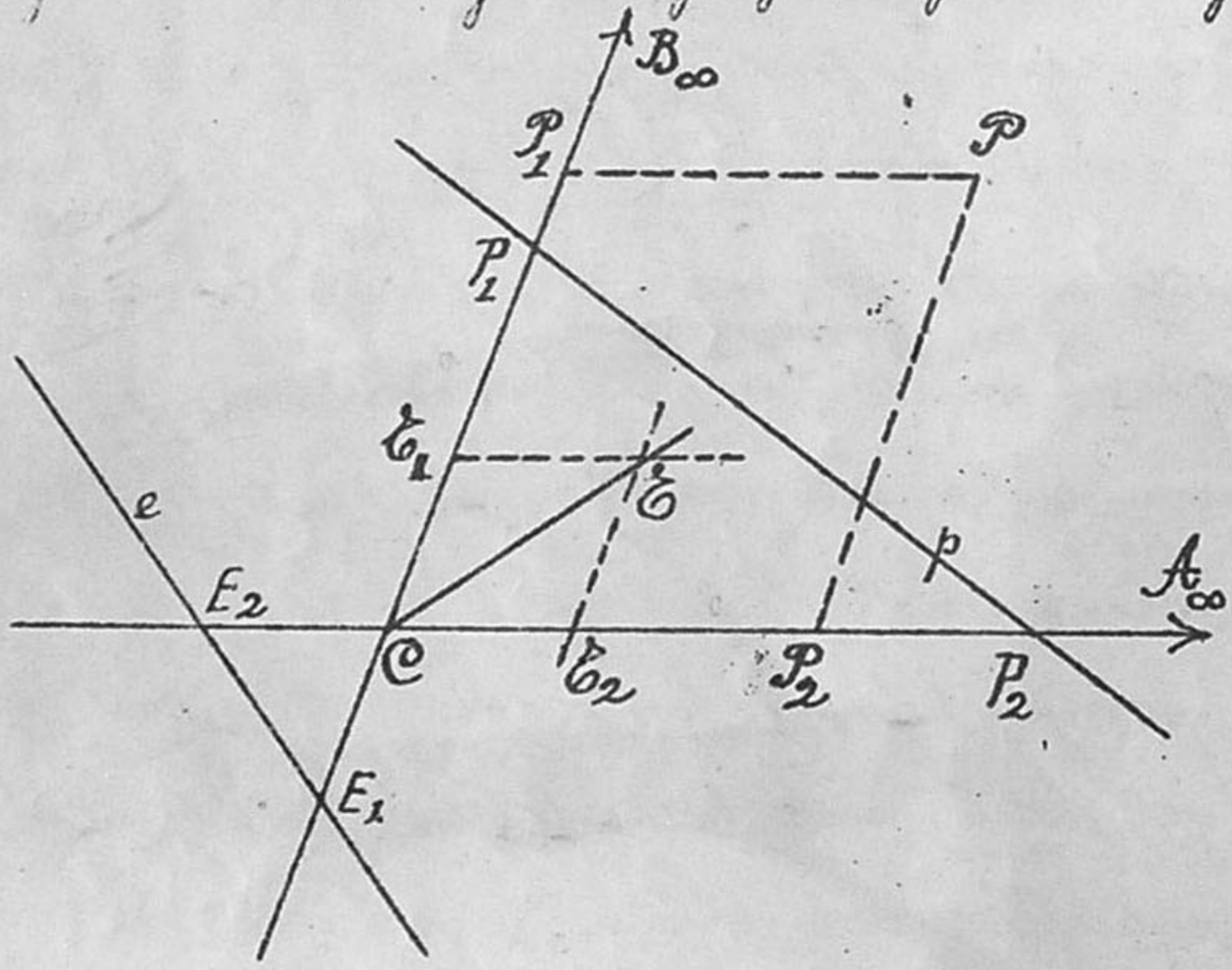
Bólyai

Hogy könnyebben emlékezetben tarthassuk, megjegyezzük, hogy a za rójelben lejelől áll a háromszögből hiányzó coordinatáinak megfelelő alapegyenes, pl. az első háromszögben a hiányzó x_1'-nek megfelel $\underline{a}$; azután következik az alsóban álló coordinatának megfelelő másodegyenes, a felvett példában az x_3'-nek megfelelő c s azután a többi). Észrevehetjük, hogy teljes analogia van a pont és vonalcoordinaták geometriai jelentése között; a milyen szerepe van ott az alappontoknak és az egységpontnak, ugyanolyan szerepe van itt a megfelelő alapegyeneseknek illetőleg egységegyenesnek.

Látjuk tehát, hogy a pont és egyenes meghatározására szolgáló ez az új coordinatarendszer egy háromszögből áll, melynek oldalai, mint ezen rendszer alapegyenesei azzal vannak jellemezve, hogy a rajtuk fekvő pontnak egy coordinatája nulla; a szögpontjai meg azzal vannak jellemezve, hogy egy szögponton átmenő egyenes egyik coordinatája nulla, egyik szögpontot sem tartalmazó egyenesnek egyik coordinatája sem nulla. A sik pontja három homogen coordinatát nyer ebben az rendszerben, melyek közül kettejének hányadosa négy pont kettős arányszámával van meghatározva, tehát projectióban nem változik; az egyenes szintén 3 hom. coordinatát nyer, melyek közül kettejének hányadosa egy-egy szögpontból kiinduló 4 sugár kettős arányszámával van meghatározva és így a projectióban nem változik. Ezeket a coordinatákat háromszöges vagy trimetricus coordinatáknak nevezzük, a rendszert magát háromszöges coordinatarendszernek; nevezzük projectiv coordinatáknak is, mert projectióban nem változnak. Ez a háromszöges coordinatarendszer a legáltalánosabb helyhatározó rendszer, úgyhogy ennek ismeretével most már mel-

MŰEGYETEM - KÖNYVTÁR - BUDAPEST

lehetjük a derékszögű coordinatarendszert, és ebben az általános rendszerben definiáljuk a pont és vonalcoordinatáikat. Ezt annál is inkább tehetjük, mivel, a mint könnyü kimutatni, a parallel coordinaták csak speciális háromszöges coordináták, úgyhogy a háromszöges rendszerben levezetett tételek érvényesek a parallel rendszerben is. Kimutatjuk, hogy ha a háromszöges rendszer két alapegyenese pl. Ca és CB végesben marad és egymást metszi, míg a harmadik AB végtelenbe távozik, a háromszöges coordinaták átmennek parallel coordinatákba, feltéve, hogy CE felezi a két véges tengely szögét. E végett keressük fel az egységegyenest.



Az E egységpontot B_∞ és A_∞-ből projiciáljuk E_2 illetőleg E_1-be. E-zeknek harmonicus társai az a és b egyenesen az alappontokra vonatkozólag E_2 és E_1. De mivel most az A és B alappontok végtelenben vannak, azért E_1 éppoly messze van a C-től mint $\mathfrak{E}_1$, és E_2 éppen annyira van C-től mint $\mathfrak{E}_2$. Az így nyert E_1, E_2 pontok meghatározzák az egységegyenest. Már most látluk, hogy a P pont első és harmadik coordinatájának hányadosa

$$\frac{x_1}{x_3} = (B, C A P \mathfrak{E})$$

Ezen négy sugár kettős aránymszáma nem változik, ha azokat egy egyenessel pl. Ca alapegyenessel metszük és áttérünk a metszéspontokra; a megfelelő metszéspontok C, A_∞, P_2 és $\mathfrak{E}_2$ lévén

$$\frac{x_2}{x_3} = (C A_\infty P_2 \mathfrak{E}_2) = \frac{C P_2}{C \mathfrak{E}_2}$$

ez pedig közönséges parallel coordinata, ha $\mathfrak{E}_2$ a b tengely egységpontja

* t. i.: C, B alappontokon nézve $\mathfrak{E}_2$ és E_2 pontok harmonikusak

ekkor tehát $\frac{x_1}{x_3} = x$, első tengelynek véve a b alapegyenest. Ilyen így $\frac{x_2}{x_3} = y$, a második tengelynek véve az a alapegyenest. A homogén coordinaták tehát átmennek közönséges Descartes féle coordinátákba. Megjegyzendő, hogy mivel C E₂ felezi a két tengely szögét, $C E_2 = \tilde{C} E_1$, vagyis az egység ugyanaz mindkét tengelyen.

Ugyanezen feltételek alatt átmennek a háromszögös vonalcoordinaták közönséges Plücker féle vonalcoordinátákba. Mert ha p egyenes az a, b, c alapegyeneseket metszi P_1, P_2, P_3 pontokban, akkor ez amint láttuk $\frac{u_1}{u_3} = (b, c, a, p, e)$ és ha a sugarakat az x tengelynek vett b alapegyenessel metszük A, C, P_2, E_2 pontokban, akkor a hármasviszony

$$(A C P_2 E_2) = \frac{A P_2}{P_2 C} : \frac{A E_2}{E_2 C} = \frac{A P_2}{A E_2} \times \frac{C E_2}{C P_2}$$

Ha most A a végtelenbe távozik, akkor $\frac{A \infty P_2}{A \infty E_2} = -1$, miután továbbá $C E_2 = 1$ és $C P_2 =$ a az x tengelyről lemetszett darab, következik, hogy a határban $\frac{u_1}{u_3} = -\frac{1}{a} = u$ nem egyéb, mint az egyenes első Plücker coordinátája, ebből adódik, hogy a határban

$$\frac{u_2}{u_3} = -\frac{1}{b} = v$$ a második Plücker coordinata

A háromszögös coordináták tehát a legáltalánosabbak, magukban foglalják a parallel coordinátákat.

Megjegyzendő különben, hogy az átmenet a derékszögű rendszerről a háromszögös rendszerre úgy is vihető keresztül, hogy egy tetszőleges adott háromszög kéjeire a rendszer alapját és egy tetszőleges pont az egységpontot. Azt akarjuk pl. hogy a háromszög oldalait az a 3 egyenes képezze, melyeknek egyenletei a régi rendszerben

$$a_1' x + a_2' y + a_3' z = 0$$

$$b_1' x + b_2' y + b_3' z = 0$$

$$c_1' x + c_2' y + c_3' z = 0$$

és az egységpont az a pont legyen, melynek régi coordinatái x_0, y_0, z_0. Hogy az átmenetelt az új x_1, x_2, x_3 coordinatákra ezen értelemben megkaphassuk, alaki módositásnak kell alávetnünk a három egyenes függvényét. E végett osszuk el az első egyenes függvényét ezen függvény értékével az egységpont régi coordinatái mellett

$$\frac{a_1'x + a_2'y + a_3'z}{a_1'x_0 + a_2'y_0 + a_3'z_0}$$

akkor ezáltal az első egyenes egyenlete nem változott, ez a hányados is ugyanazon egyenes függvénye, de már olyan, melynek értéke az egységpont coordinatái mellett: 1, ha tehát ezen módositott függvény coefficienseit röviden a_1, a_2, a_3-al jelöljük, tehát

$$a_1 = \frac{a_1'}{a_1'x_0 + a_2'y_0 + a_3'z_0}$$

$$a_2 = \frac{a_2'}{a_1'x_0 + a_2'y_0 + a_3'z_0}$$

$$a_3 = \frac{a_3'}{a_1'x_0 + a_2'y_0 + a_3'z_0}$$

akkor nyilvánvaló, hogy a felvett háromszögnek és egységpontnak megfelelő uj első háromszöges pontcoordinata

$$x_1 = a_1x + a_2y + a_3z$$

mert az előbbiek szerint ezen x_1 értéke az uj első alapegyenesen 0, az egységpontban 1, minden más pontban ezektől különböző. Ugyanigy osztva a második és harmadik egyenes függvényét megfelelőleg azoknak értékével az egységpont régi coordinatái mellett, és a módositott függvények coefficienseit röviden b_1, b_2, b_3 illetőleg c_1, c_2, c_3-al jelölve, kapjuk, hogy a felvett háromszögnek és egységpontnak megfelelő második illetőleg harmadik háromszöges pontcoordinatái

$$x_2 = b_1 x + b_2 y + b_3 z$$

$$x_3 = c_1 x + c_2 y + c_3 z$$

Épen így adódik ezen átmenetelnél a régi u, v, w-re az új u_1, u_2, u_3 vonalcoordinaták közötti összefüggés, mely szerint

$$u = a_1 u_1 + b_1 u_2 + c_1 u_3$$

$$v = a_2 u_1 + b_2 u_2 + c_2 u_3$$

$$w = a_3 u_1 + b_3 u_2 + c_3 u_3$$

A háromszögös coordinátáknak egyenként is adhatunk geometriai jelentést. Legyenek a sík egy tetszőleges P pontjának derékszögű coordinátái x, y, z, háromszögös coordinátái x_1, x_2, x_3, és

$$x_1 = a_1 x + a_2 y + a_3 z$$

$$x_2 = b_1 x + b_2 y + b_3 z$$

$$x_3 = c_1 x + c_2 y + c_3 z$$

akkor a P pont normális távolsága az első tengelytől

$$p_1 = \frac{a_1 x + a_2 y + a_3 z}{z\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} = \frac{x_1}{z\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}$$

tehát

$$x_1 = z\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\, p_1$$

ez áll minden pontra, tehát az egységpontra is, melynek régi coordinátái legyenek x_0, y_0, z_0, az első tengelytől való távola e_1, akkor

$$1 = z_0\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\cdot e_1$$

és megoldhatva a megfelelő oldalak hányadosát, kapjuk az első háromszögös coordináta önálló jelentését, mely szerint

$$x_1 = \frac{z}{z_0}\,\frac{p_1}{e_1}$$

tehát a P pont első coordinátája arányos a P és az E egységponti első tengelytől való távolságainak hányadosával. Épenígy adódik a többi coordináták jelentése, ha a P és $\frac{1}{3}$ pontnak a második és har-

2.

madik tengelytől való távolsága p_2, p_3, illetőleg e_2, e_3

$$x_2 = \frac{z}{z_0} \cdot \frac{p_2}{e_2}$$

$$x_3 = \frac{z}{z_0} \cdot \frac{p_3}{e_3}$$

vagyis ha a közös arányossági factor $\frac{z}{z_0} = \varsigma$, akkor

$$x_1 = \varsigma \frac{p_1}{e_1}, \quad x_2 = \varsigma \frac{p_2}{e_2}, \quad x_3 = \varsigma \frac{p_3}{e_3} \qquad \text{I.}$$

A ς arányossági factortól el is tekinthetünk, mert a háromszöges coordinatak homogének. A távolsági hányados positiv vagy negativ, a szerint, a mint P és E az illető tengely egy oldalán vagy ellenkező oldalán fekszik

Az I. alattinál is egyszerűbb geometriai jelentést nyernek a háromszöges coordinatak, ha speciálisan választjuk meg az egységpontot. Válaszszuk pl. úgy, hogy annak az tengelyektől való távolságai egyenlők legyenek, azaz $e_1 = e_2 = e_3$ legyen. Nyilvánvaló, hogy ilyen tulajdonságu a háromszögbe irható kör centruma; ha tehát az előbbi szakasz végén mutatott eljárással ezt vezetjük be egységpontnak, akkor ha $\frac{\varsigma}{e_1} = \varsigma'$

$$x_1 = \varsigma' p_1, \quad x_2 = \varsigma' p_2, \quad x_3 = \varsigma' p_3$$

vagyis abban az háromszöges rendszerben, melyben az egységpont a beirható kör centruma, a pont coordinatái arányosak a megfelelő tengelyektől való távolságokkal:

Hasonló geometriai jelentést adhatunk a háromszöges vonalcoordinatáknak u_1, u_2, u_3-nak. Láttuk nyilvánvaló, hogy

$$\Delta u_1 = A_1 u + A_2 v + A_3 w \quad \text{stb.}$$

a hol A_1, A_2, A_3 a rendszer első alappontjának A-nak régi coordinatái stb. és igy a változó egyenesnek ettől való normális távolsága

$$\pi_1 = \frac{A_1 u + A_2 v + A_3 w}{A_3 \sqrt{u^2 + v^2}} = \frac{\Delta u_2}{A_3 \sqrt{u^2 + v^2}}$$

ebből $$\mathfrak{D} u_1 = A_3 \sqrt{u^2+v^2}\,.\,\pi_1$$

Ez áll az egységegyenesre is, úgyhogy ha ennek régi coordinatáiv u_0, v_0, w_0 és az A-tól való távolsága ε_1, akkor

$$\mathfrak{D}_1 = A_3 \sqrt{u_0^2+v_0^2}\,.\,\varepsilon_1$$

a megfelelő oldalak hányadosát alkotva,

$$u_1 = \frac{\sqrt{u^2+v^2}}{\sqrt{u_0^2+v_0^2}} \cdot \frac{\pi_1}{\varepsilon_1}$$

. éppenígy $u_2 = \dfrac{\sqrt{u^2+v^2}}{\sqrt{u_0^2+v_0^2}} \cdot \dfrac{\pi_2}{\varepsilon_2}$

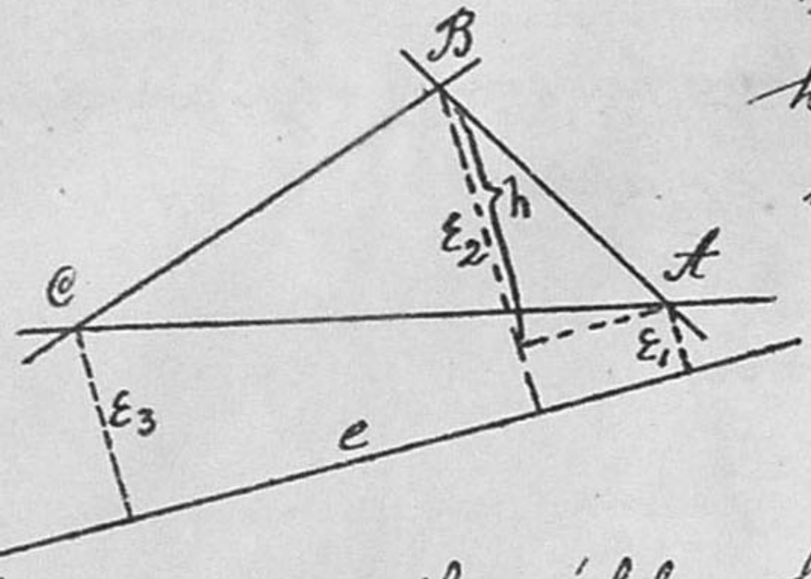
és $u_3 = \dfrac{\sqrt{u^2+v^2}}{\sqrt{u_0^2+v_0^2}} \cdot \dfrac{\pi_3}{\varepsilon_3}$

A közös factort, melyet különben el is hagyhatunk, σ-val jelölve, kapjuk a vonalcoordinaták jelentését, mely szerint

$$u_1 = \sigma \cdot \frac{\pi_1}{\varepsilon_1}\,,\quad u_2 = \sigma \cdot \frac{\pi_2}{\varepsilon_2}\,,\quad u_3 = \sigma \cdot \frac{\pi_3}{\varepsilon_3} \qquad \text{I.}$$

tehát ha veszszük az egyenesnek és egységegyenesnek rendre a három tengelytől való távolságát, akkor az egyenes coordinatái megfelelőleg arányosak az ugyanazon tengelytől vett távolságok hányadosaival. Az, hogy az egyenesnek melyik oldalait tekintjük positivnak a távolságot illetőleg, közömbös, mert ha másodszor az ellenkező oldalait tartanók positivnak, a coordinaták jegyei mind ellenkezőre változnának, a mi homogén coordinatáknál nem változtat az eredményen.

A II alatlinál is egyszerűbb jelentést nyernek a hom. vonal coordinaták, ha úgy választjuk az egységegyenest, hogy a hányadosok nevezői egyenlők legyenek. Ezt elérjük, ha az iménti egységegyenest önmagával párhuzamosan végtelenbe visszük. Ilyenkor $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 + h$, a hol $h \geq 0$, tehát $\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = 1 + \dfrac{h}{\varepsilon_1}$ és ha ε végtelenbe megy, a határban $\dfrac{h}{\varepsilon_1} = 0$, tehát $\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = 1$, ugyanígy $\dfrac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} = 1$. Ha most u_2 és u_3



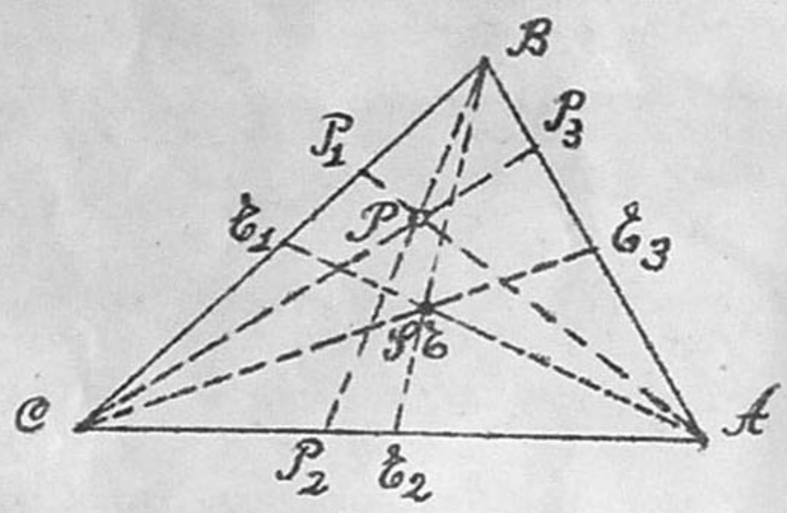
kifejezését $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1}$-el szorozzuk és mindhárom kifejezésben a közös $\frac{\sigma}{\varepsilon_1} = \sigma'$, akkor

$u_1 = \sigma' \pi_1$, $u_2 = \sigma' \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \cdot \pi_2$, és $u_3 = \sigma' \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \pi_3$

Tehát a határban $u_1 = \sigma' \pi_1$, $u_2 = \sigma' \pi_2$

$u_3 = \sigma' \pi_3$

Vagyis abban a rendszerben, melynek egységegyenese a sík végtelen távoli egyenese, egy tetszőleges egyenes coordinatái arányosak annak a megfelelő súlypontoktól vett normális távolságaival. Ebben a speciális rendszerben az $\underline{c}$ egységegyenesnek a tengelyekkel való E_1, E_2, E_3 metszéspontjai az illető tengelyek végtelen távoli pontjai, tehát az alappontokra vonatkozó harmonicusok társaik $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3$ felezik az alappontok távolát, és így az $\mathcal{E}$ egységpont nem egyéb mint a háromszög súlypontja I. A vonalcoordinátáknak tehát akkor van ez az egyszerű jelentésük, midőn a rendszer egységpontja a coordinátaháromszög súlypontja.



Ilyenkor a pontcoordinátáik még egyszerűbb jelentést nyernek. I. i.

$$\frac{x_2}{x_3} = (CB.P_1\,\mathcal{E}_1) = \frac{CP_1}{P_1B} : \frac{C\mathcal{E}_1}{\mathcal{E}_1 B}, \text{ de } \frac{C\mathcal{E}_1}{\mathcal{E}_1 B} = 1$$

mert $\mathcal{E}_1$ felezi CB távolt, és így $\frac{x_2}{x_3} = \frac{CP_1}{P_1 B}$ nem egyéb, mint a P pont $\underline{A}$ szögponti vetületének P_1-nek egyszerű arányozása a CB alappontokra vonatkozólag. Hogyanigy

$$\frac{x_1}{x_3} = \frac{CP_2}{P_2 A}$$

és

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{AP_3}{P_3 B}$$

Ebből következik a pontcoordináták egy érdekes fizikai jelentése. Helyezzünk el valamint a coordinata háromszög x_1 alappontjában egy x_1 nagy-

súgu tömeggel bíró testét, B-ben egy x_2 és C-ben egy x_3 tömegü testet és kérdezzük, hol van ezen három tömeg súlypontja.

A fizikából ismeretes az a tétel, hogy két anyagi pontnak az őket összekötő egyenesen fekvő súlypontjuktól mért távolságaik fordítva arányosak a tömegeikkel. Tehát fel kell keresni a BC oldalon azt a P_1 pontot, mint súlypontot, melyre nézve $\frac{x_2}{x_3} = \frac{CP_1}{P_1B}$

a CA egyenesen azt a P_2 pontot, melyre nézve $\frac{x_1}{x_3} = \frac{CP_2}{P_2A}$

és az AB " " " P_3 " " " $\frac{x_2}{x_1} = \frac{AP_3}{P_3B}$

akkor ezt a három pontot a szembenfekvő szögpontokkal összekötő egyenesek a keresett P súlypontban metszik egymást. De ez a P pont nem egyéb, mint az S súlyponttal, mint egységponttal bíró rendszerben x_1, x_2, x_3 coordinátákkal bíró pont. Mondhatjuk tehát, hogy egy olyan háromszöges rendszerben, melynek egységpontja a háromszög súlypontja, a P pont x_2, x_2, x_3 coordinatáit úgy foghatjuk fel, mint azokat a tömegeket, melyeket megfelelőleg az A, B, C szögpontokban el kell helyezni, hogy azoknak súlypontja a P pont legyen. Ez a speciális pontcoordináták fizikai jelentése. Möbius „Der barycentrische Calcul" cz. munkájában így értelmezte először a háromszöges pontcoordinatákat.

Itt még egy más geometriai jelentést adhatunk a pontcoordinatáknak abban az esetben, mikor a súlypont az egységpont. Már láttuk, hogy $x_1 = S\frac{P_1}{e_1}$. Ezt a hányadost így alakítjuk át, hogy felsőt és alsót megszorozzuk a BC oldal hosszát mérő szám felével, akkor nyilvánvaló, hogy az így átalakított felső nem egyéb, mint a BCP, az alsó a BCS háromszög területe (lásd előbbi rajzot), tehát

$$x_1 = \varrho \frac{BCP}{BCS}$$

hasonló átalakitás révén

adódik, hogy

$$x_2 = \varrho \frac{CAP}{CAP}$$

$$x_3 = \varrho \frac{ABP}{ABP}$$

és pedig jegyegyenlőség van a két oldalon, mert a felső és alsó háromszög körüljárási iránya egyező vagy ellenkező, a szerint, a mint P és P azt illető két háromszög alapjának ugyanazon vagy ellenkező oldalán van, igen de ugyanekkor a megfelelő coordinata is a definitio értelmében positiv illetőleg negativ. De minthogy egységpontnak a súlypontot vesszük, azért a három alsó háromszög területe egyenlő

$$BCS = CAS = ABS = \frac{1}{3} ABC$$

ha tehát ezt a közös nevezőt beolvasztjuk a ϱ arányossági factorba s a szorzatot ϱ'-el jelöljük, akkor kapjuk a pontcoordinatáik következő egyszerű geometriai jelentését

$$x_1 = \varrho' . BCP, \qquad x_2 = \varrho' . CAP, \qquad x_3 = \varrho' . ABP$$

vagyis a P pont x_1, x_2, x_3 coordinatái megfelelőleg arányosak (azt is mondhatnók, hogy egyenlők) azon három háromszög jegyzővel vett területével, mely háromszögek alapja a coordinata háromszög első, második illetőleg harmadik oldala, közös csúcsuk a P pont. A jegy a megállapitott értelemben veendő.

Az általános háromszöges pontcoordinatáknak tehát két speciális esetben nyernek egyszerűbb jelentést: midőn egységpontúl a beirható kör centrumát, illetőleg a coordinata háromszög súlypontját választjuk; ez utóbbi esetben még két külön jelentést is adhatunk a coordinatáknak, felfogván azokat mint bizonyos módon elhelyezendő tömegeket, illetőleg mint háromszögek területét.

Ezzel megismertük az általános háromszögös coordinatarendszer tulajdonságait. Ebben az uj rendszerben mindazok a tételek érvényben maradnak, melyek a derékszögü rendszerben számnak voltak az következ ménye, hogy egyenes egyenlete pontcoordinatáikban elsőfoku, pont egyenlete vonalcoordinatáikban elsőfoku. Igy pl. itt is áll, hogy három pont egy egyenesen van, ha coordinatáik determinansa nulla. Mert egyenes egyenlete itt is elsőfoku lévén pontcoordinatáikban

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$$

ha ezt egyszerre kielégitik három pont coordinatái

$$\begin{matrix} x_1' & x_2' & x_3' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' \\ x_1''' & x_2''' & x_3''' \end{matrix}$$

akkor három homogén lin. egyenletet nyerünk a_3, a_2, a_3-ban, mely csak úgy állhat, ha determinansuk nulla. Vagy ez mi ugyanazt mondja, ezen három pont függvénye

$$\begin{matrix} x_1' u_1 + x_2' u_2 + x_3' u_3 \\ x_1'' u_1 + x_2'' u_2 + x_3'' u_3 \\ x_1''' u_1 + x_2''' u_2 + x_3''' u_3 \end{matrix}$$

összekapcsolható parameteresen úgy, hogy a kapcsolat identikusa nulla legyen.

Továbbá három egyenes egy ponton megy keresztül, ha coordinatáik determinansa nulla, mert ha a pont egyenlete

$$A_1 u_1 + A_2 u_2 + A_3 u_3 = 0$$

ő ezt egyszerre kielégitik három egyenes coordinatái

$$\begin{matrix} u_1' & u_2' & u_3' \\ u_1'' & u_2'' & u_3'' \\ u_1''' & u_2''' & u_3''' \end{matrix}$$

akkor előttünk van három lin. egyenlet A_1, A_2, A_3 számára, melyek csak úgy állhatnak fenn egyszerre, ha coefficienseik determinansa nulla. Ebből következik, hogy ilyenkor mindig létezik 3 oly parameter, melyek szerint összeadva a három egyenes függvényét, identikusan nullat kapunk stb. Itt is ugyanazzal a jelentéssel bír két pont függvényének parameteres kapcsolata stb.

Megjegyzendő, hogy azt a coordinatarendszert, melyben a súlypont egyenlő pont, már használtuk a háromszög nevezetes pontjainak tanulmányozásánál, sakkogy nem neveztük volt meg. Midőn felírtuk a háromszög három szögpontjának függvényét

$$A \equiv A_1 u + A_2 v + A_3 w$$

$$B \equiv B_1 u + B_2 v + B_3 w$$

$$C \equiv C_1 u + C_2 v + C_3 w$$

kimutattuk, hogy minden pont függvénye P előállítható ilyen alakban

$$P \equiv \lambda A + \mu B + \nu C$$

Itt λ, μ, ν nem egyéb, mint a P pontnak az ezen háromszögre vonatkozó háromszögös coordinatái, és miután a súlypont függvénye

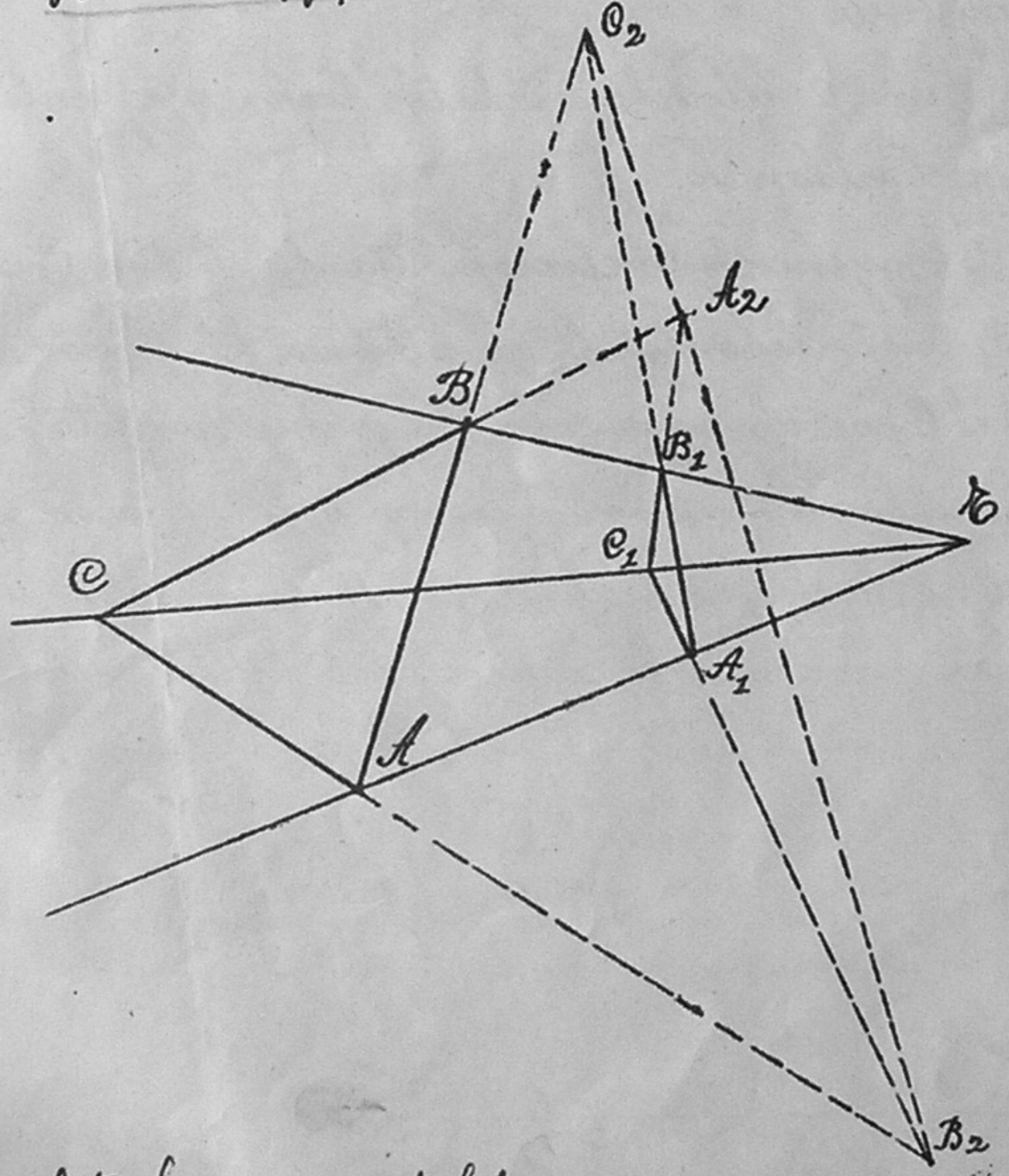
$S \equiv A + B + C$ volt, látható, hogy ebben a rendszerben a súlypont az egyenlő pont. Az ott nyert formulák tehát úgy tekinthetők, mint a súlyponttal, mint egyenlő ponttal bíró háromszögös coordinatarendszerben nyert formulák. A magasságpont függvénye pl. volt

$$M \equiv \operatorname{tg}\alpha . A + \operatorname{tg}\beta . B + \operatorname{tg}\gamma . C$$

mostani ismereteinkkel tehát mondhatjuk, hogy ha $\operatorname{tg}\alpha, \operatorname{tg}\beta, \operatorname{tg}\gamma$ nagyságu tömegeket helyezünk el a háromszög szögpontjaiban, akkor ezeknek súlypontja a magasságpont.

Perspectiv háromszögek. A dualitás elve.

Néhány feladatnak háromszöges rendszerben való tárgyalásából legjobban ki fog tűnni ezen háromszöges coordinaták nagy használhatósága. Vizsgáljuk pl. két perspectiv háromszög tulajdonságait. Perspectiveknek nevezünk két háromszöget, ha megfelelő szögpontjaik összekötő egyenesei egy ponton mennek keresztül. Legyen ABC és $A_1B_1C_1$ két perspectiv háromszög, az AA_1, BB_1, CC_1 megfelelő pontok összekötő egyeneseinek metszőpontja, vagyis a perspectiv centrum legyen C. Ezen idom tulajdonságainak megvizsgolása végett válasszuk az ABC háromszöget, coordinataháromszögnek, C pontot egységpontnak és ebben a rendszerben fejezzük ki analytikailag azt, hogy a két háromszög perspectiv; nem kell egyebet tenni, mint felírni ezen perspectiv helyzetü 6 pont egyenletét



A első alappont egyenlete $u_1 = 0$

B második " " $u_2 = 0$

C harmadik alappont egyenlete $u_3=0$

E egységpont " $u_1+u_2+u_3=0$

Az A_1 pont egy egyenesen van A és E-vel, függvénye ezekből levődik össze paramétereesen, s látható, hogy csakis u_1 paramétere fog megváltozni, úgyhogy az A_1 pont egyenlete

$\lambda u_1+u_2+u_3=0$ alakban irható B_1 rajta lévén

B és E egyenesén, egyenlete ily alakú

$u_1+\mu u_2+u_3=0$

végre C_1 rajta lévén a C és E egyenesén, függvényében csak u_3 paramétere változik, úgyhogy C_1 pont egyenlete

$u_1+u_2+\nu u_3=0$ alakban irható. Ezek az egyenletek analytikai kifejezései a perspectivitásnak.

Legyen most BC és B_1C_1 egyenesek metszéspontja A_2, CA és C_1A_1 metszéspontja B_2, AB és A_1B_1 metszéspontja C_2 és állitsuk fel először A_2 egyenletét. A_2 rajta lévén B és C pontok egyenesén, függvénye egyfelől u_2 és u_3-ból levődik össze paramétereesen, de rajta lévén B_1 és C_1 pontok egyenesén is, ezeknek függvényeit is tartalmazza paramétereesen; ebből a négy függvényből tehát olyan paraméterees kapcsolatot kell létesitni, melyből u_1 kiámyik, csak u_2 és u_3 szerepel; ilyent kapunk, ha a B_1 és C_1 függvényeinek különbségét alkotjuk, tehát

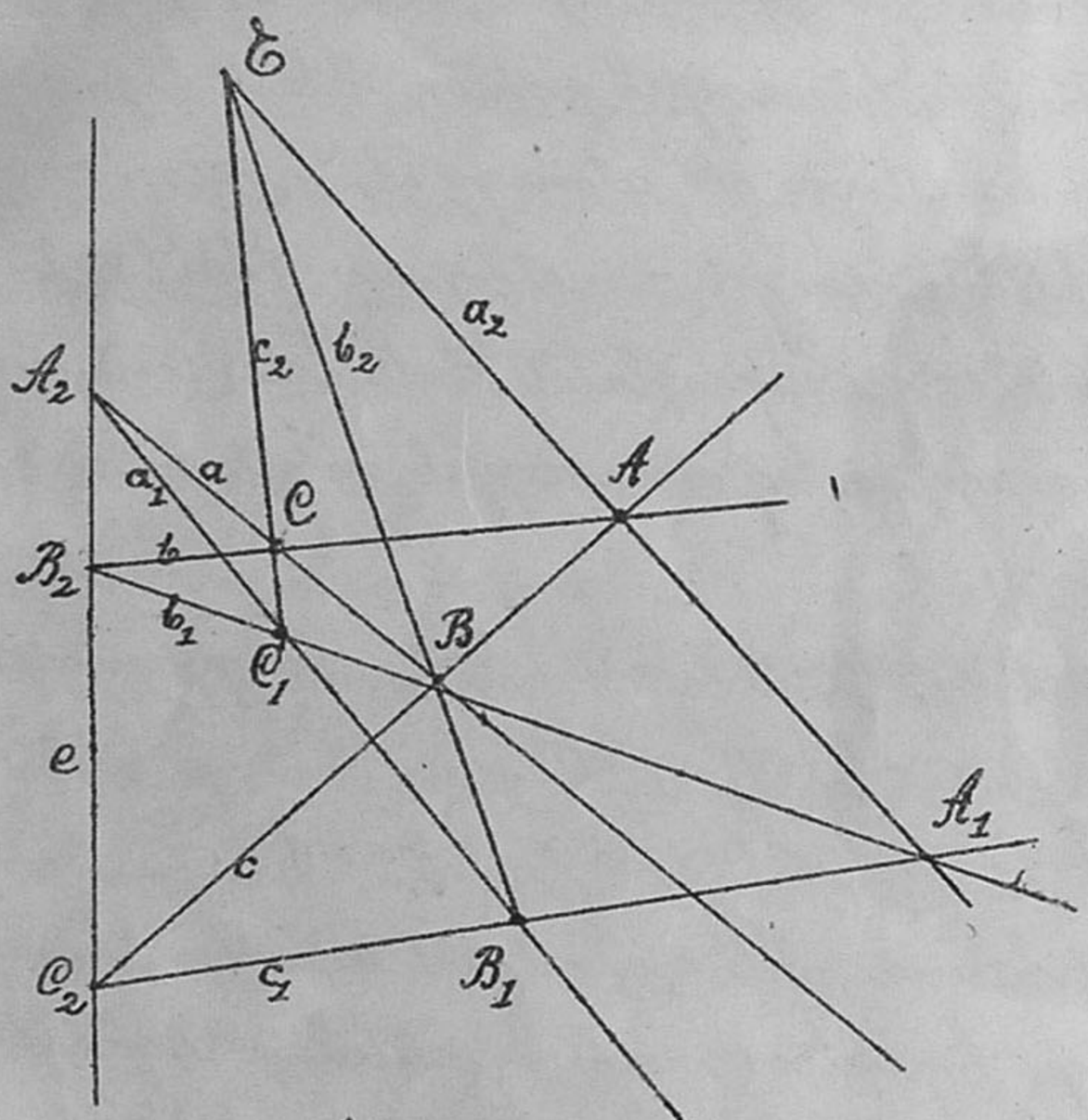
A_2 egyenlete $(\mu-1)u_2-(\nu-1)u_3=0$ Ugyanilyen okoskodással kapjuk, hogy B_2 " $(\nu-1)u_3-(\lambda-1)u_1=0$

és C_2 " $(\lambda-1)u_1-(\mu-1)u_2=0$

A három függvény összege identikusan nulla, a mi azt mondja: A_2, B_2, C_2 pontok egy egyenesen feksznek. Kapjuk tehát azt a tételt, hogy két perspectiv háromszög megfelelő oldalainak metszéspontjai egy egyenesen

fekszenek, melyet perspectiv tengelynek nevezünk. Ez a tétel Desargues-től ered.

Most járjunk el megfordítva. Tegyük fel, hogy két háromszög olyan fekvésü, hogy megfelelő oldalaik metszéspontjai egy egyenesen fekszenek, s vizsgáljuk, milyen tulajdonságú a két háromszög. Ezen két háromszög felvételénél úgy járunk el, hogy felveszünk egy e egyenest és ennek három pontjából A_2, B_2, C_2-ből egyegy egyenespárt húzunk: a a, a'; b, b'; és c, c'-et. Az a, b, c egyenesek meghatározzák a ABC, az a_1, b_1, c_1 egyenesek a A_1, B_1, C_1 háromszöget, e két háromszög megfelelő oldalainak metszéspontjai ugyanazon az e egyenesen fekszenek. Fejezzük ki ezt analytikailag. E végett ABC háromszöget coordinatahároműszögnek vesszük, melyben e az egységegyenes. Ebben a rendszerben



$\underline{a}$ egyenes egyenlete		$x_1 = 0$
b "	"	$x_2 = 0$
c "	"	$x_3 = 0$
e "	"	$x_1 + x_2 + x_3 = 0$

Az a_1 egyenes átmegy $\underline{a}$ és e metszőpontján, tehát függvénye paramétereken van összetéve a és e függvényéből, s a mint látható, az összeté-

telben csak x_1 paramétere lesz más, pl. λ, úgyhogy

a_1 egyenlete $\lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0$ hasonló módon kapjuk,

hogy b_1 " $x_1 + \mu x_2 + x_3 = 0$

c_1 " $x_1 + x_2 + \nu x_3 = 0$

Ez a mondottak analytikai kifejezése. Most kössük össze a megfelelő szögpontokat egy-egy vonallal, és pedig $A A_1 \equiv a_2$, $B B_1 \equiv b_2$ és $C C_1 \equiv c_2$ legyen. Állítsuk fel a_2 egyenletét. a_2 átmegy A ponton, tehát függvénye egyfelől b és c függvényéből van összetéve; de átmegy A_1-ponton is, tehát b_1 és c_1 függvényét is tartalmazza paramétereven. Ebből a 4 függvényből tehát olyan parameteres kapcsolatot kell létesíteni, mely csupán x_2 és x_3-at tartalmazza, ez pedig nem egyéb mint b_1 és c_1 függvényének különbsége, úgyhogy

a_2 egyenlete $(\mu-1)x_2 - (\nu-1)x_3 = 0$ ugyanígy

adódik, hogy b_2 " $(\nu-1)x_3 - (\lambda-1)x_1 = 0$

és c_2 " $(\lambda-1)x_1 - (\mu-1)x_2 = 0$

A három függvény összege identikusan nulla, a mi azt mondja, hogy a három egyenes a_2, b_2 és c_2 egy E ponton megy keresztül. Áll tehát Desargues tételének megfordítása is: ha két háromszög megfelelő oldalainak metszéspontjai egy egyenesen fekszenek, akkor a megfelelő szögpontokat összekötő egyenesek egy pontban metszik egymást, a két háromszög perspectiv.

Ennek a két tételnek analytikai szerkezete teljesen ugyanaz, csakhogy itt vonal, itt pontcoordináták szerepelnek. Az elsőben pont és egyenes ugyanazt a szerepet játsza, mint a másodikban egyenes és pont, tehát pont és egyenes a két tételben szerepet cserélnek. dualitás

Azt az elvet, mely a síkbeli tételeknél abban nyilvánul, hogy egy tételb

tartozik egy másik tétel olyan értelemben, hogy itt a pont és egyenes felcserélik az első tételben viselt szerepüket nevezzük, a dualitás elvének, az ilyen tételeket dualis tételeknek, a pontot és egyenest a sik dualis elemeinek mondjuk.. A dualitás elvét Poncelet és Gergon ismerték fel először Sixta geometriai módszerrel, analytikailag Plücker tárgyalta először derékszögü coordinatákkal. De legszebben és legegyszerübben fejezhető ki a dualitás a háromszöges coordinatarendszerben. Különben ilyen dualis tételekkel már az eddigiekben is találkoztunk; azok a tárgyalási módok, melyekkel a pont és egyenesen valamint azok származékain végig mentünk, teljesen ugyanazokat az analytikai operatiokat alkalmazták, csakhogy ott pont volt a származtató elem, a coordináták pontcoordináták, a származék egyenes, itt meg egyenes származtatta a pontot, a coordináták vonalcoordináták voltak; de a kijövő analytikai eredmény teljesen ugyanaz volt, csakhogy az elsőben a pontcoordináták, a másodikban a vonalcoordináták voltak a változók, tehát a kifejezett geometriai tételek dualisak voltak. Ilyen dualis tételeket szolgáltat pl. a teljes négyoldal és a teljes négyszög.

Tehát ha pontcoordináták között egy egyenletsorozatot ismerünk, ez mindig más tételt is bizonyit, csakhogy ugyanezeket az egyenleteket vonalcoordináták között kell felirni s most ebből a szempontból kifejezni az egyenletek geometriai értelmét.

Minden olyan síkbeli idomot, mely pontok és egyenesek összeségéből áll, mint pl. a teljes négyszög, négyoldal, valamint az imént tárgyalt két perspectiv háromszög idoma, configuratiónak nevezzünk. Könnyen belátható, hogy két perspectiv háromszög configuratiója

10 egyenesből és 10 pontból áll. A 10 pont: az A, B, C és A_1, B_1, C_1 szögpontok, E centrum (mint egységpont) és az A_2, B_2, C_2 mint az szembenfekvő oldalak metszéspontjai. A 10 egyenes az a, b, c és a_1, b_1, c_1 háromszögoldalak, az e egyenes (mint A_2, B_2, C_2 pontok egyenese) és az a_2, b_2, c_2 egyenesek, mint a megfelelő pontok összekötő egyenesei; minden pontból indul 3 egyenes, és minden egyenesen fekszik 3 pont. A 10-10 elemnek nem egyforma szerepe van, mert a pontok közül kiválik egy, mint perspectiv centrum, s az egyenesek közül egy, mint perspectiv tengely. De ezt a szerepet bármely pont, illetőleg bármely egyenes viselheti, úgyhogy ezt a 10 pontot és 10 egyenest összesen 10 félekképen foghatjuk fel mint két perspectiv háromszög configurátióját, mindannyiszor más-más perspectiv centrummal és tengelylyel. Vegyük pl. E pontot centrumnak és lássuk mi lesz akkor a két perspectiv háromszög és a tengely. Az A pontból kiindul 3 egyenes (lásd az előbbi rajzot) ezeken fekszenek a megfelelő szögpontok BC_2, CB_2 és EA_1 tehát a két háromszög B, C, E, és C_2, B_2, A_1, a tengely ezen két háromszög megfelelő oldalainak B_1, C_1, A_2 metszéspontjain megy keresztül, tehát a_1. Éppenígy találjuk, hogy, ha B a centrum, b_1 a tengely stb. vagyis összefoglalva az összes eseteket, ha

$E, A, B, C,$	A_1, B_1, C_1	A_2, B_2, C_2	a perspectiv centrum
akkor $e,$	$a_1, b_1, c_1,$	$a, b, c,$	a_2, b_2, c_2 a perspectiv tengely

A legáltalánosabb coordinatatransformatió.

A legáltalánosabb coordinatatransformatió: egy háromszöges coor-

dinatarendszerről egy más, adott háromszögü coordinatarendszerre való átmenetel. A régi rendszer szögpontjai legyenek A, B, C és E egységpont, alapegyenesei a, b, c és e az egységegyenes; az uj rendszer megfelelő alkatrészei legyenek A_1, B_1, C_1, E_1 illetőleg a_1, b_1, c_1, e_1. Egy P pont régi coordinatái x_1, x_2, x_3; uj coordinatái y_1, y_2, y_3. Az uj rendszer azzal van megadva, hogy megadjuk az a_1, b_1, c_1 tengelyek egyenleteit a régi rendszerben

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$$

$$b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 = 0$$

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 = 0$$

Hogy megtaláljuk az összefüggést a régi és uj coordinaták közöt, akkor ezeket az egyenleteket úgy kell módositani, hogy a tetszésre megadott E_1 pont legyen az uj rendszer egységpontja, melynek régi coordinatái x_1', x_2', x_3'. A mint egy helyen már láttuk, ezek kiszámítjuk, ha ezen függvény mindegyikét elosztjuk megfelelőleg annak értékével x_1', x_2', x_3' coordinaták mellett. Ha a módositott coefficienseket kettős indexxel jelöljük, akkor nyilvánvaló, hogy a P pont uj coordinatái

$$y_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3$$

$$y_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 \qquad \text{I.}$$

$$y_3 = a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3$$

mert az a_1 tengelyen $y_1 = 0$, a b_1 tengelyen $y_2 = 0$ a c_1 tengelyen $y_3 = 0$ és az E_1 pontban $y_1 = y_2 = y_3 = 1$. Ez az összefüggés a régi és uj pont coordinaták között. Ezzel már a vonalcoordinaták közötti összefüggés is meg van határozva. Mert ha egy vonal régi coordinatái u_1, u_2, u_3 uj coordinatái v_1, v_2, v_3, akkor

$$v_1 y_1 + v_2 y_2 + v_3 y_3 = 0$$

az egyenes egyenlete az uj rendszerben, ha az (y_1, y_2, y_3) pont az egye

nesen van. De behelyettesitve y_1, y_2 és y_3 fenti értékét, rendezés után egy x_1, x_2, x_3- ban hom. lineáris egyenletet kapunk, melyben x_1 szorzója u_1, x_2 szorzója u_2 és x_3 szorzója u_3, úgyhogy

$$\begin{aligned} u_1 &= a_{11} v_1 + a_{21} v_2 + a_{31} v_3 \\ u_2 &= a_{12} v_1 + a_{22} v_2 + a_{32} v_3 \qquad \text{II.} \\ u_3 &= a_{13} v_1 + a_{23} v_2 + a_{33} v_3 \end{aligned}$$

az az összefüggés a régi és uj vonalkoordináták között. Látható, hogy az I és II egyenletrendszerek determinansa ugyanaz, mert ugyanaz a 9 szorzóhoz szerepel mindkettőben, a melyek ott sorokban, azok itt oszlopokban állanak.

Ezzel minden coordinatatranszformatiót egyszerre végeztünk el, mert a többi coordinatarendszerek a háromszöges rendszernek csak specziális esetei.

Ezentúl a pont coordinatáit bármilyen coordinatarendszerben x, y, z- vel jelöljük, az egyenes coordinatáit u, v, w- vel; ha több van, indexekkel különböztetjük meg őket.

Az eddigiekkel kapcsolatban még két tételt említünk meg. Vegyünk két egyenest, coordinatáik legyenek u_1, v_1, w_1 illetőleg u_2, v_2, w_2; egyenleteink

$$u_1 x + v_1 y + w_1 z = 0$$

$$u_2 x + v_2 y + w_2 z = 0$$

Ha a két egyenes függvényét paraméteresen kapcsoljuk össze, ez a kapcsolat nulla téve oly egyenest jelent, mely átmegy a két egyenes metszéspontján. Szorozzuk a második egyenletet λ- val és adjuk az elsőhöz, akkor x, y és z szerinti rendezve azt

$$(u_1 + \lambda u_2) x + (v_1 + \lambda v_2) y + (w_1 + \lambda w_2) z = 0$$

a két egyenes által meghatározott sugársor változó sugarának egyen-

Másodrendű és osztályu görbék.

A kör.

A pont és egyenes után a síkban a legegyszerübb kajzödmény a kör. A kört pont és egyenes mozgása által származtathatjuk. Ha egy pont úgy mozog a síkban, hogy állandóan ugyanabban a távolságban van egy fix ponttól, akkor az egymásutáni következö ponthelyek kört alkotnak; tehát a kör azon pontok geometriai helye, melyek egy állandó ponttól egyenlö távolságban vannak. A fix pont a kör centruma, ez állandó távolság a kör sugara. És ha egy egyenes úgy mozog a síkban, hogy egy adott ponttól való távolsága állandó marad, akkor a mozgó egyenes kört burkol, melynek tehát minden helyzetében érintöje. A kör egyenletét ezen két származási módnak megfelelöleg felirhatjuk pont és vonalcoordináták között, csak azt kell analytikailag kifejezni, hogy a pont illetöleg egyenes állandó távolságban van a fix ponttól. Az elsönél derékszögü és pedig Pl. féle coordinatákat használhatunk, mert a származtató pont végesben marad, de vonalcoordinaták egyenesen célszerü homogén coordinatáikat használni, mivel nincs kizárva, hogy némely egyenes az oullpontan enegy keresztül.

Ha (ab) a centrum coordinatái, r az állandó távolság és (x,y) a változó pont, akkor

$$(x-a)^2+(y-b)^2-r^2=0 \qquad \text{I.}$$

a kör egyenlete pontcoordinatákban, s ha (u,v,w) a változó egyenes coordinatái, akkor

$$(au+bv+w)^2-r^2(u^2+v^2)=0 \qquad \text{II.}$$

lete. Ennek coordinatáit u, v, w-vel jelölve, nyilvánvaló, hogy

$$u = u_1 + \lambda u_2$$

$$v = v_1 + \lambda v_2$$

$$w = w_1 + \lambda w_2$$

Ha tehát két egyenes megfelelő coordinatáit paraméteresen összük össze, kapjuk azon egyenes coordinatáit, melynek függvénye a két egyenes függvényének ugyanezen parameterrel való kapcsolata. Ha $\lambda = 0$, kapjuk az első egyenest, mint a sugársort első alapegyenesét, ha λ-val való osztás után $\lambda = \infty$, kapjuk a második egyenest mint a sugársor második alapegyenesét s ha $\lambda = 1$, kapjuk az egységegyenest. A λ parameter nem egyéb, mint a sugársor változó elemének ezen három coordinata-egyenesre vonatkozó kettős arányszáma.

Épenigy, ha adva két pont x_1, y_1, z_1

és x_2, y_2, z_2

és ezeknek egyenletét egy λ parameter szerint összeadjuk, akkor ez az egyenlet a két pont által meghatározott egyenes azon pontjának egyenlete, melynek kettős arányszáma a pontsorban λ és ha ennek coordinatái x, y, z akkor

$$x = x_1 + \lambda x_2$$

$$y = y_1 + \lambda y_2$$

$$z = z_1 + \lambda z_2$$

Tehát ha két egyenest ismerünk coordinatáival, akkor ezekkel fel tudjuk írni a sugársor összes egyeneseinek coordinatáit, s ha két pontot ismerünk coordinatáival, fel tudjuk írni ezekkel a hozzájuk tartozó pontsor összes pontjainak coordinatáit.

körön kívül vonul el, $K<0$, ha $d<r$, vagyis ha az egyenes két pont ban metszi a kört s $K=0$, ha $d=r$, vagyis ha a merőleges távol talppontja a körön van, az egyenes érintő egyenes. Tehát

külső egyenesre nézve		$K>0$
metsző "	"	$K<0$
érintő "	"	$K=0$

Ily módon a k és K függvény segélyével a pont és egyenes viszonyát a körhöz el tudjuk dönteni.

Különben más és más coordinatarendszerben ugyanaz a kör más-más alaku egyenletet nyer, mely adódik az I, illetőleg II alattiból, ha azokba a transformált coordinatákat irjuk be. Igy pl. ha a centrum az x tengelyen van, $b=0$ s az I egyenlet

$$(x-a)^2+y^2-r^2=0$$

Ha a centrum épen r távolságra van az y tengelytől, tehát (a kör) azt többit érinti, akkor az egyenlet $(x-r)^2+y^2-r^2=0$ vagyis

$$x^2-2rx+y^2=0$$

Végül legegyszerübb az egyenlet, ha a coordinatarendszer origoját a kör centrumába hozzuk, ekkor

$$x^2+y^2-r^2=0$$

ez a kör centralis egyenlete. Vonalcoordinatákban a kör centralis egyenlete $w^2-r^2(u^2+v^2)=0$

A kör egyenlete pontcoordinatákban másodfoku. Kérdés, mikor értelmez egy adott másodfoku egyenlet kört? Az általános másodfoku egyenlet normális alakja Dts. coordinatákban

$$a_{11}x^2+2a_{12}x.y+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0 \quad \text{III.}$$

Ez az egyenlet akkor értelmez kört, ha ugyanolyan tulajdonságokkal

a kör egyenlete vonalcoordinatákban (lásd 89 oldal). A mely pont coordinatái kielégítik az I egyenletet, az a körön fekszik, s a mely egyenes coordinatái kielégítik a II egyenletet, az a körnek érintője. Mindkét egyenlet másodfokú, tehát a kör másodrendű és másodosztályu görbe. A következőkben az I alatti függvényt k-val, a II alattit K-val jelöljük.

Ez a két függvény nemcsak arra szolgál, hogy a kör pontjait és érintőit fel tudjuk ismerni, hanem arra is, hogy a sik bármely pontjának és egyenesének viszonyát a körhöz meg tudjuk állapitani. Nyilvánvaló, hogy

$$k + r^2 \equiv (x-a)^2 + (y-b)^2$$

a hol r a kör sugara, x, y egy tetszőleges pont coordinatái. Ha ennek távolsága a, b centrumtól R, akkor

$$R^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2$$

tehát a kettő különbségéből következik, hogy

$$k = R^2 - r^2$$

Ha tehát (x, y) pont a körön kivül fekszik, azaz $R > r$, akkor $k > 0$

ha " " " " belül " azaz $R < r$ " $k < 0$

ha " " " " rajta van " $R = r$ " $k = 0$

Vagy más szóval: külső pontra nézve a kör függvénye positiv, belsőre nézve negativ és a kör pontjára nézve a függvény eltünik.

A K függvényre nézve nyilvánvaló, hogy

$$K + r^2(u^2+v^2) \equiv (au + bv + w)^2$$

s ha a sik egy tetszőleges (u, v, w) egyenesének távola (a, b)-től d, akkor

$$d^2(u^2+v^2) = (au + bv + w)^2$$

s a kettő különbségéből következik, hogy

$$K = (d^2 - r^2)(u^2+v^2)$$

Ebből látszik, hogy $K > 0$, ha $d > r$, vagyis ha az egyenes egészen a

bír, mint a kör I alatti egyenlete. Ez utóbbi speciális egyenlet általá-
nosabb alakot nyer, ha egy állandóval keresztül szorozzuk, miáltal
az egyenlet geometriai értelme nem változik. Ha ezt megfeszszük és azu-
tán x, y, hatványai szerint rendezzük, két specializálás mutatkozik
1, az x^2 és y^2 coefficiense ugyanaz 2, az x, y-os tag hiányzik. Emlékez-
ve a III alatti általános egyenlet csak akkor értelmes kört, ha

$$a_{11} = a_{22}$$

és $$a_{12} = 0$$

Kimutatjuk, hogy ha az általános másodfokú függvényben ez a
két tulajdonság megvan, akkor egyenlete kört jelent. Ugyanis a_{11} és
$a_{22} \neq 0$ lévén, és egymáshozképest egyenlő, szabad a_{11}-el osztani, úgyhogy
az egyenlet

$$x^2 + y^2 + 2\frac{a_{13}}{a_{11}}x + 2\frac{a_{23}}{a_{11}}y + \frac{a_{33}}{a_{11}} = 0$$

vagyis $$\left(x + \frac{a_{13}}{a_{11}}\right)^2 + \left(y + \frac{a_{23}}{a_{11}}\right)^2 - \frac{a_{13}^2 + a_{23}^2 - a_{11}a_{33}}{a_{11}^2} = 0$$

Ez teljesen olyan alakú, mint a kör I. alatti egyenlete, ez tehát
a kör egyenlete. Ezen kör centrumának coordinatái

$$a = -\frac{a_{13}}{a_{11}}, \qquad b = -\frac{a_{23}}{a_{11}}$$

és sugarának négyzete $$r^2 = \frac{a_{13}^2 + a_{23}^2 - a_{11}a_{33}}{a_{11}^2}$$

A sugár kiszámításánál tehát nem kapunk mindig reális ered-
ményt, hanem csak akkor, ha $r^2 > 0$, vagyis $a_{11}^2 > 0$ lévén: ha

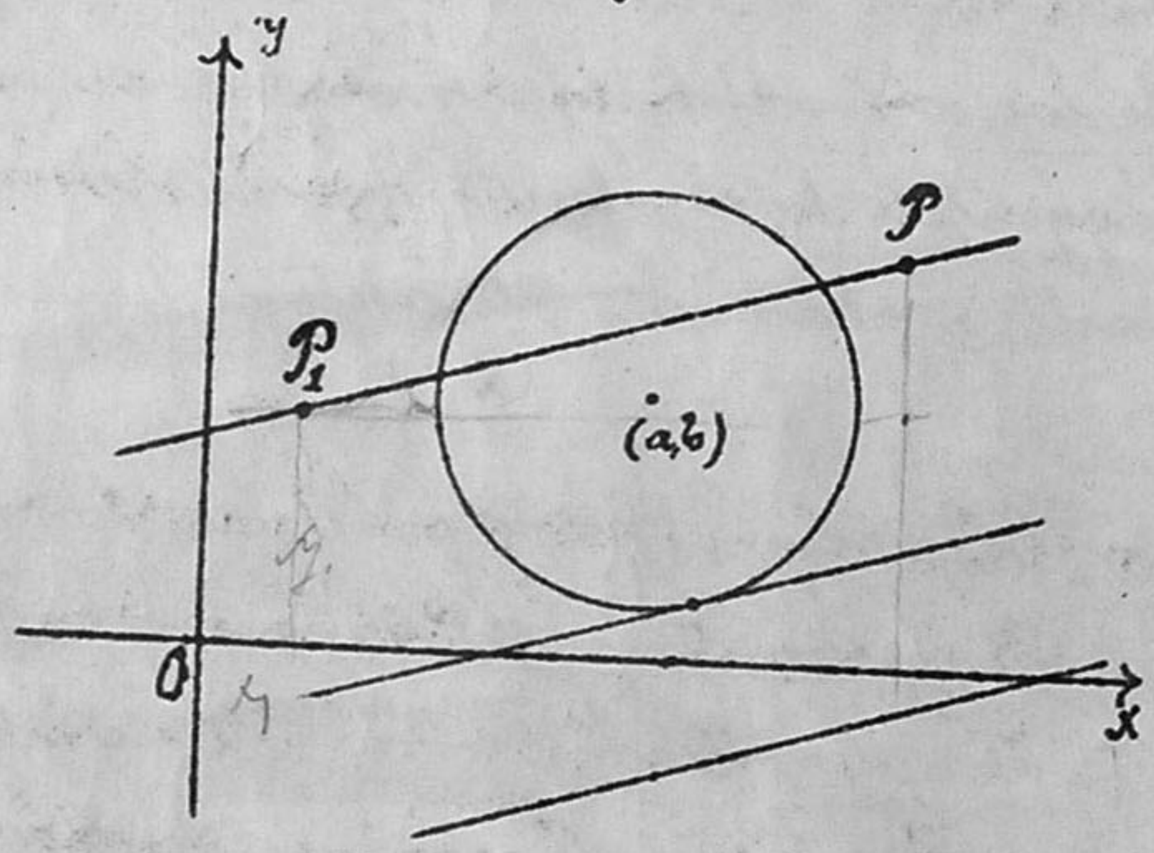
$$a_{13}^2 + a_{23}^2 - a_{11}a_{33} > 0$$

ha ez a különbség nulla, akkor $r = 0$, a kör ponttá összezsugorodik
össze, ha pedig negativ, a sugár képzetes, a kör is. Tehát a reális
coefficiensekkel bíró négyzetes függvény, mely kielégíti a kör egyenle-

tének fenti két tulajdonságát, reális kört jelent, ha ez utóbbi különbség pozitiv, pontkört, ha a különbség nulla, és képzetes kört jelent, ha a különbség negativ.

A kör potentiája.

Vizsgáljuk most a kör viszonyát a sik pontjaihoz és egyeneseihez. Legyen derékszögü coordinatarendszerben a kör függvénye $k \equiv (x-a)^2+(y-b)^2-r^2$; a sik egy tetszőleges P_1 pontjának coordinatái (x_1, y_1) s ezen át huzzunk az x tengelyhez α szög alatt hajlólag egy egyenest. Feladatunk, ezen egyenesnek a körrel való metszéspontjait meghatározni. E végett távolsági coordinata-rendszert választunk az egyenesen P_1 kezdőponttal. Ha a változó P pontnak ettől való távolsága ρ, a mely $\rho > 0$, ha PP_1 vector hajlásszöge az x tengelyhez α, és $\rho < 0$, ha PP_1 hajlásszöge $\alpha+\pi$, akkor ezen P pont Descartes-féle coordinatái



$$x = x_1+\rho\cos\alpha$$
$$y = y_1+\rho\sin\alpha \qquad (1.)$$

s ha ρ változik $-\infty$ és $+\infty$ között, kapjuk az egyenes összes pontjainak coordinatáit. Ezek közül, feladatunkhoz szerfelett ki kell választani azokat, melyek a körön fekszenek. Az ekkhez tartozó ρ-t meghatározza az a quadratikus egyenlet, melyet kapunk, ha a kör egyenletében x és y helyébe az (1.) alatti értékeket helyettesitjük, ez tehát

$$(x_1 - a + \rho\cos\alpha)^2 + (y_1 - b + \rho\sin\alpha)^2 - r^2 = 0$$

vagy rendezve ρ hatványai szerint

$$\rho^2 + 2[\cos\alpha(x_1 - a) + \sin\alpha(y_1 - b)]\rho + [(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 - r^2] = 0$$

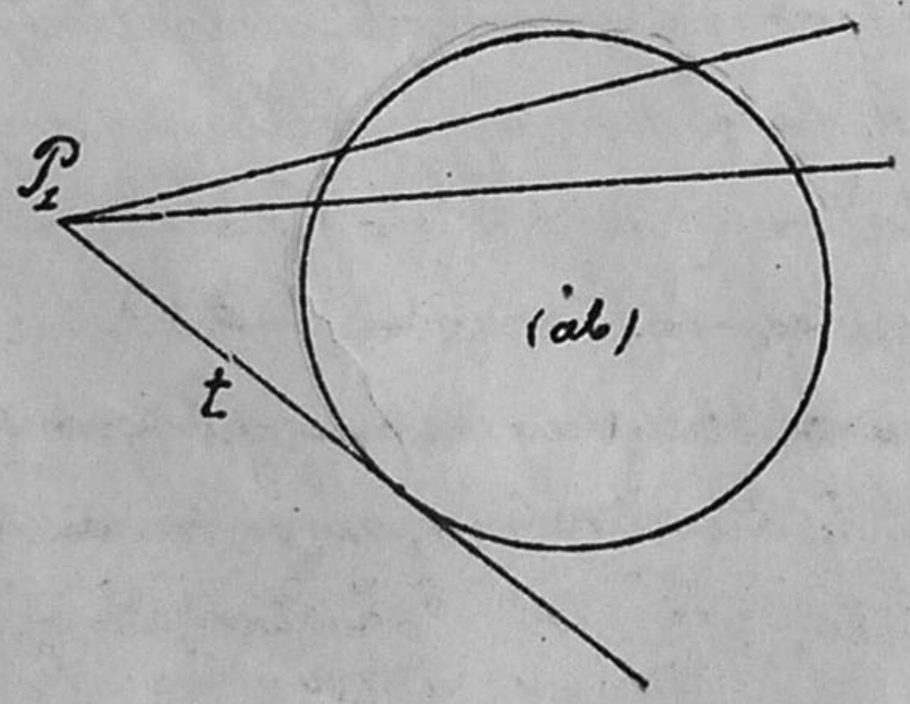
de az utólsó szögletes zárjeles kifejezés nem egyéb, mint k értéke, a P_1 pont $(x_1\, y_1)$ coordinatái mellett; úgyhogy ha ezt $k^{(1)}$-el jelöljük, az egyenlet

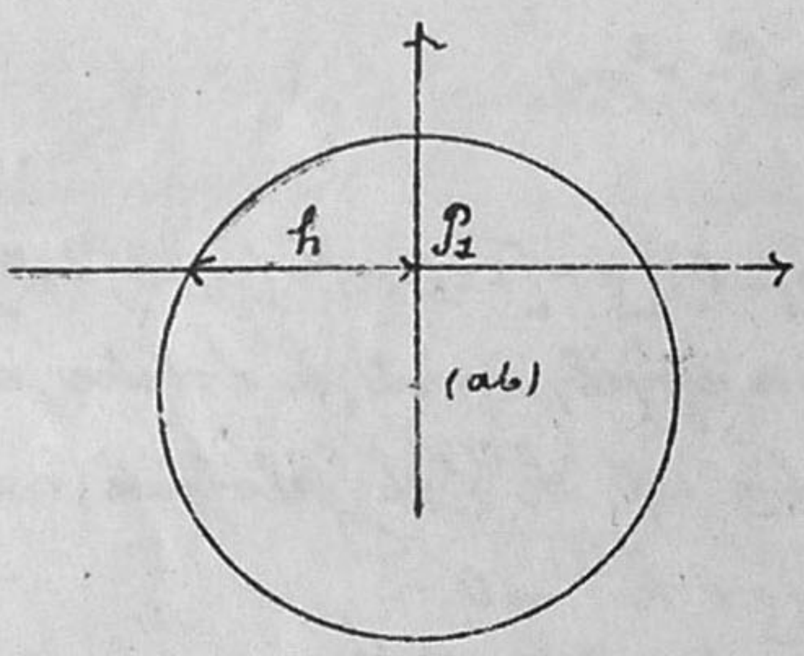
$$\rho^2 + 2[\cos\alpha(x_1 - a) + \sin\alpha(y_1 - b)]\rho + k^{(1)} = 0$$

Ezen ρ-ban quadratikus egyenletnek lehet két reális, egy kettös reális vagy két különböző képzetes gyöke, s ebben lejlik a felvett egyenes két reális pontban metszi a kört, vagy két összecsö pontban metszi, azaz érinti, vagy egyáltalában nem metszi. Fontos itt az, hogy ρ^2 coefficiense 1, és hogy a constans tag $k^{(1)}$ nem tartalmazza az α szöget, úgyhogy ha a két gyök ρ' és ρ'', ezek szorzata egyenlö lévén a constans taggal

$$\rho' \cdot \rho'' = k^{(1)}$$

azt a nevezetes tételt kapjuk, hogy bármilyen irányban húzunk a kör sikjában fekvö $P_1(x_1, y_1)$ ponton át egyeneket, a körből kimetszett két pont P_1-töl vett távolságainak szorzata állandó. Ezt az állandó szorzatot nevezzük a kör potentiájának a P_1 pontra vonatkozólag s ez annyi mint a kör függvénye, ha abban x, y helyébe a P_1 pont x_1, y_1 coordinatáit helyettesitjük, tehát $k^{(1)}$. Külsö pont esetén $k^{(1)} > 0$, azaz ρ' és ρ'' egyenlö jelü, más szóval a kimetszett két pont P_1-nek ugyanazon az oldalán fekszik. Ha P_1 belsö pont (második ábra.) $k^{(1)} < 0$ lévén, ρ' és ρ'' ellentett jelü, a kimetszett két pont P_1 ellenkezö oldalán





fekszik. A körön fekvő pontra nézve a potentia nulla.

A potentiának más jelentést is adhatunk és pedig külső és belső pontra nézve különbözőt. Ha ugyanis P_1 külső pont, a belőle a körhöz húzott érintő érintési pontjára nézve $\rho' = \rho'' = t$, tehát a potentia $k^{(1)} = t^2$. Külső pontra vonatkozólag tehát a kör potentiája annyi mint a pontból a körhöz húzott érintő hosszának a négyzete. Ha P_1 belső pont a rajta átmenő húrok között van egy legrövidebb, amely merőleges a P_1 ponton átmenő körsugarra; ha ennek félhosszra h, akkor a potentia $k^{(1)} = -h^2$. Tehát belső pontra vonatkozólag a kör potentiája annyi mint a ponton átmenő legrövidebb húr felének negativ négyzete.

Most úgy fogjuk vizsgálni a kör viszonyát a pontsorhoz, hogy megadjuk utóbbinak két pontját $P_1(x_1\, y_1)$ és $P_2(x_2, y_2)$, s kérdezzük, milyen pontokban metszi a kört ezen két pont egyenese. Ha a pontsorban változó pont egyszerű arányszáma P_1 és P_2-re nézve λ, akkor coordinatai

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}$$
$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} \qquad (2)$$

A metszőpontokhoz tartozó λ egyszerű arányszámokat szolgáltatja az a négyzetes egyenlet, melyet nyerünk, ha a kör egyenletében (x, y) (2) alatti értékeit behelyettesítjük, ez tehát

$$[x_1 - a + \lambda(x_2 - a)]^2 + [y_1 - b + \lambda(y_2 - b)]^2 - r^2(1+\lambda)^2 = 0$$

Ha rendezzük λ hatványai szerint, a szabad tag nem egyéb, mint k értéke a P_1 coordinatai mellett, tehát $k^{(1)}$; λ^2 szorzója annyi mint k

értéke a P_2 coordinatái mellett, tehát $k^{(2)}$; és ha a látszamaradó kifejezésében $(x_1-a)(x_2-a)+(y_1-b)(y_2-b)-r^2=k^{(1,2)}$ akkor az egyenlet

$$k^{(1)}+2\lambda k^{(1,2)}+\lambda^2 k^{(2)}=0 \qquad \text{I.}$$

Ez szolgáltatja a körből kimetszett két pont egyszerű arányszámát a P_1 és P_2 fix pontokra vonatkozólag; itt is ugyanazok az esetek jönnek tekintetbe, mint a pont és szög által meghatározott egyenesnél.

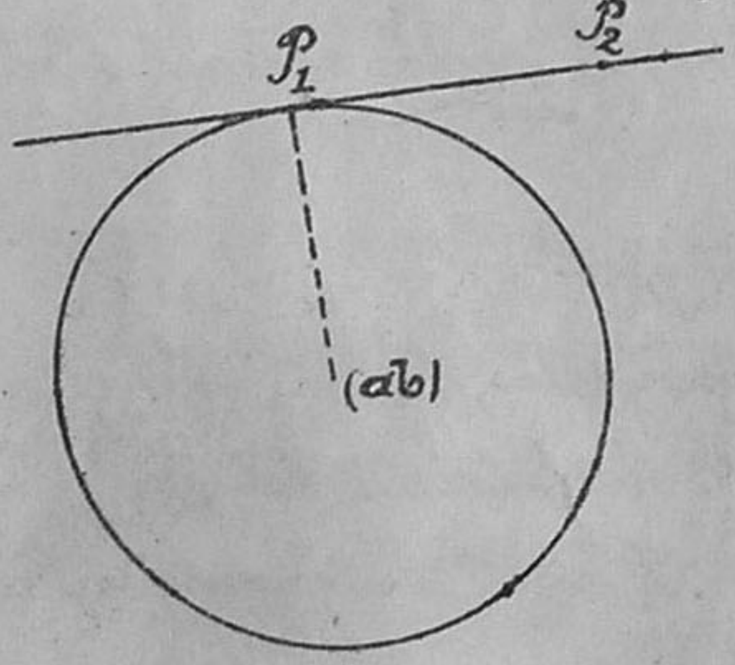
Az I egyenlet áll bármilyen P_1 és P_2 pontokra; ha tehát P_1 rajta fekszik a körön, P_2 egy más tetszőleges pontja a síknak, akkor $k^{(1)}=0$ lévén, a kimetszett pontok egyszerű arányszámai a következő egyenletből adódnak

$$2\lambda k^{(1,2)}+\lambda^2 k^{(2)}=0 \qquad \text{I'}$$

ennek egyik gyöke $\lambda=0$, a mi természetes, mert P_1 maga az egyik kimetszett pont. Ha I' egyenletet λ-val osztjuk, kapjuk a másik kimetszett pont számára a következő lineáris egyenletet

$$2k^{(12)}+\lambda k^{(2)}=0 \qquad \text{I''}$$

Ha most P_2 pontot ezenfelül úgy választjuk, hogy $k^{(12)}=0$ legyen, akkor a második ometszőpontra nézve is $\lambda=0$, ekkor tehát a két metszőpont összeesik, és az P_1P_2 egyenes érintője a körnek a P_1 pontban.



Ha tehát a P_2 pontot úgy választjuk, hogy (x_2, y_2) coordinatái eleget tegyenek a

$$k^{(12)}=(x_1-a)(x_2-a)+(y_1-b)(y_2-b)-r^2=0$$

lineáris egyenletnek, ezzel P_2 helyzete még nincsen meghatározva, most bár-

mely pontja lehet a P_2 pontban a körhöz húzott érintő egyenesek. Emiatt fogva ha P_2-öt változónak tekintjük ezen az érintőn s coordinatái (x,y) akkor <u>a P_2 ponthoz tartozó érintő egyenlete</u>:

$$(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)-r^2=0 \qquad \text{VI.}$$

Hogy az érintő ténylég átmegy a P_1 ponton, kitünik onnan, hogy $x=x_1$ és $y=y_1$ mellett teljesül az egyenlet: $(x_1-a)^2+(y_1-b)^2-r^2=0$, mert feltételünk szerint P_1 a körön van. Másfelöl ez az érintő merőleges a P_1 ponthoz tartozó körsugárra, mert utóbbinak az egyenlete, mivel átmegy az (ab) centrumon és P_1-en

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ a & b & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{array}{lll} x-a & y-b & 0 \\ x_1-a & y_1-b & 0 \\ a & b & 1 \end{array} \qquad (x-a)(y_1-b)-(y-b)(x_1-a)$$

$$(y_1-b)x-(x_1-a)y+x_1b-y_1a=0$$

vagy rendezve $(y_1-b)x-(x_1-a)y+x_1b-y_1a=0$ VII.

egymás mellé állitva a VI és VII egyenleteket, látható, hogy a megfelelő coefficiensek szorzatainak összege nulla, tehát az érintő merőleges az érintési ponthoz tartozó körsugárra.

Polus és Polaris.

Tegyük fel, hogy P_1 nem fekszik a körön, P_2 pedig eleget tesz a következő egyenletnek

$$k^{(12)} \equiv (x_1-a)(x_2-a)+(y_1-b)(y_2-b)-r^2=0 \qquad \text{VIII.}$$

akkor az V alatti egyenlet λ-ban tiszta négyzetes, két gyöke ellentétes egyenlő, a mi azt mondja, hogy a körből kimetszett két pont harmonicus P_1-re és P_2-re. De akkor fordítva is P_1 és P_2 harmonicus a két

metszőpontra nézve, mert a harmonicus viszony kölcsönös. Két ilyen pontot, mint P_1 és P_2, melyek harmonicusok az egyenesük által a körből kimetszett két pontra, a körre nézve conjugált pontoknak nevezzük, s a conjugáltság feltétele a fenti egyenlet. Ha most egyik pontot pl. P_1-et állandónak tekintjük, P_2-t pedig úgy változtatjuk, hogy x_2 y_2 coordinatái eleget tegyenek a conjugáltság egyenletének, akkor kapjuk P_1 összes conjugáltjait; ha a változó P_2 pont coordinatáit x, y-nal jelöljük, nyilvánvaló, hogy P_1 conjugált pontjainak geometriai helye az

$$(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)-r^2=0 \qquad \text{IX.}$$

lin. egyenlettel értelmezett egyenes vonal. Ezt az egyenest nevezzük a P_1 pont polárisának a körre vonatkozólag, P_1 a pólus.

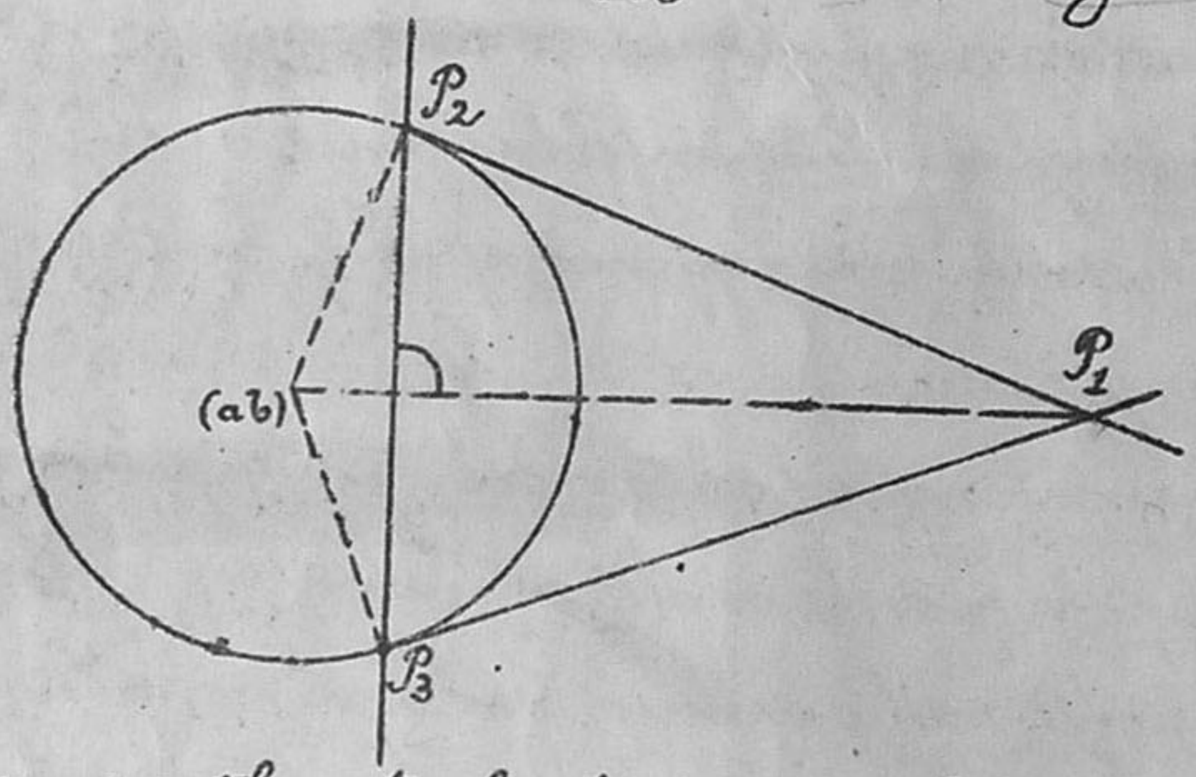
Ha tehát P_1 pontból a körhöz meghúzzuk az összes szelőket, s mindegyiken a két metszésponthoz és P_1-hez felkeresnük a 4-ik harmonicust, ezek a 4-ik harm. társak egy egyenesen, a P_1 pont polárisán vannak.

A sík minden pontjához mint pólushoz tartozik egy egyenes, mely annak a körre vonatkozólag polárisa; s a sík minden egyeneséhez mint polárishoz tartozik egy pont, mely annak a körre vonatkozólag pólusa. Ha külső a pólus, akkor a negyedik harmonicus belső pont lévén, a poláris metsző egyenes; ha a pólus belső pont, az összes szelőkön fekvő harmonicus társai külső pontok lévén, a poláris külső egyenes. A körön fekvő pólus polárisa nem egyéb, mint azzal a ponthoz tartozó érintő, mert hiszen ha P_2 a körön van, akkor VII szerint az conjugáltság egyenlete egyezik a P_1 ponthoz tartozó érintő egyenletével. Különben is az érintő egyenlete alakilag teljesen egyezik az conjugáltság egyenletével, csakhogy itt P_2 nem szükségképpen a körön

fekvő pont, lehet a sík bármely pontjára.

a VIII egyenlet értelmében a conjugáltság két pont között kölcsönös, amiből következik, hogy ha P_1 és P_2 conjugált pontok, és mindegyikhez mint polushoz megszerkesztjük a polárist, akkor P_2 polárisa átmegy P_1-en és P_2 polárisa átmegy P_1-en. Ez a polárreciprocitás tétele, mely Poncelettől ered, ez vezette a dualitás elvére.

A külső pont polárisa metszi a kört két pontban. Legyen P_1 a polus, P_2 és P_3 az két metszéspont. A polárreciprocitás tételénél fogva P_2 és P_3 közös conjugáltja a P_1 polus. Másfelől tudjuk, hogy a körön fekvő pont összes conjugáltjai az ebben húzott érintőn vannak, tehát P_1 rajta van egyfelől P_2, másfelől P_3 érintőjén, s így a két érintő metszéspontja. Külső pont polárisa tehát oly két pontban metszi a kört, amelyekhez tartozó érintők metszéspontja a polus maga, és így mondhatjuk, hogy külső pont polárisa nem egyéb, mint az

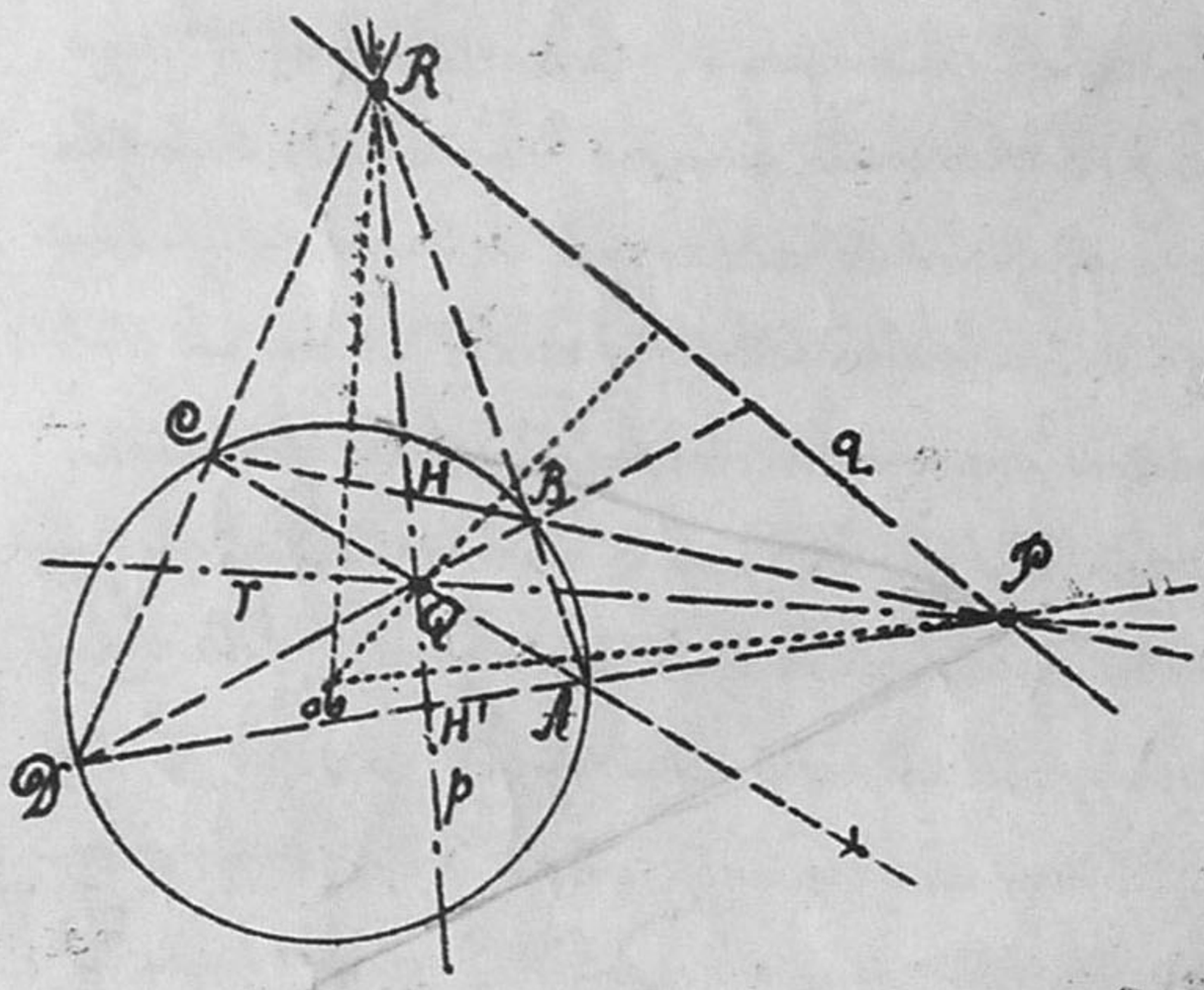


ezen ponthoz tartozó érintő húr.

Lássuk miként lehet adott pontnak adott körre vonatkozó polárisát tisztán vonalzó segélyével megszerkeszteni. P pontból két szelőt húzunk a körhöz, PBC és PtD, ezeken felkeresvén a két negyedik harmonicust H és H', a melyek meghatározzák a keresett p polárist. A negyedik harmonicusok meghatározásánál úgy járunk el, hogy a kimetszett A B C D pontokat teljes négyszöggé egészítjük ki, meghatározván annak átlós háromszögét (P, Q, R)-et. A P-vel szem-

benfekvő p átló a P-ből húzott két szelőn kimetszi a keresett H és H' negyedik harmonicusokat, tehát maga p a keresett polaris. Könnyen belátható, hogy az átlós háromszög R szögpontjának polarisa a szembenfekvő r átló, és Q szögpontjának polarisa a szembenfekvő q átló. Mert R-ből indul két szelő, melyeken a negyedik harmonicusokat r épen r metszi ki, és a Q-n átmenő két szelőn (t.i. C1 és DB) a q metszi ki a negyedik harmonicusokat (lásd a teljes négyoldal tulajdonságait). Ha tehát a kör tetszőleges H pontját teljes négyoldalnak tekintjük, ennek átlói háromszöge olyan tulajdonságu, hogy szögpontjainak a körre vonatkozó polarisai megfelelőleg a szembenfekvő átlók, vagy másszóval bármelyik szög pontjának polarisa a másik kettőn megy keresztül, a szögpontok tehát a kört illetőleg párosával kapcsoltak. Az ilyen háromszöget polárháromszögnek nevezzük. Nyilvánvaló, hogy a polárháromszög szögpontjai közül kettő a körön kivül, egy azon belül fekszik, és igy oldalai közül kettő a kört valós, egy pedig képzetes pontpárban metszi. Vegyünk a polárháromszög bármelyik szögpontját is vegyük tekintetbe, a másik két szögpont az ezzel szemben polárisán fekvő két tetszőleges conjugált pontpár. Ha tehát a polárháromszög első szögpontja a körön kivül van, igy ennek polarisa a kört két valós pontban metszi és igy az ezen fekvő két conjugált pólus közül az egyik a körön kivül, a másik azon belül van. Ha pedig az első szögpont a körön belül van, igy polárisa a kiposzeletet nem metszi valós pontokban, miért is az ezen polárison fekvő bármely két conjugált polus, mint a polárháromszög másik két szögpontja, a körön kivül van.

A polárisról is áll, mint annakelőtte az érintőről, hogy a polaris



merőleges a polust a centrummal összekötő egyenesre (lásd első rajzot); mert a poláris egyenlete I.

$$(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)-r^2=0$$

és a P_1 polushoz tartozó körsugár egyenlete

$$(y_1-b)x-(x_1-a)y+x_1b-y_1a=0$$

a miből látható, hogy a megfelelő coefficiensek szorzatainak összege nulla, tehát a két egyenes merőleges egymásra. Ebből következik, hogy a polárháromszög magasságpontjainak metszéspontja a kör centruma. (második ábra pontozott vonalai), mert a P, Q, R szögpontokból a háromszög oldalaira mint megfelelő polarisokra bocsátott merőlegesek mind átmennek a kör centrumán.

Ha megszerkesztettük külső pont polárisát, ennek a körrel való metszéspontjai szolgáltatják a polusból húzott érintők érintési pontjait.

Hogy a polus és poláris közötti metrikus viszonyokat jobban felhüntethessük, vegyük a körnek centralis egyenletét

$$k \equiv x^2+y^2-r^2=0$$

akkor a conjugáltság egyenlete

$$k_{(2)} \equiv x_1x_2+y_1y_2-r^2=0$$

s ha P_1 fix, P_2 változó és coordinatái x, y, akkor P_2 polarisának egyenlete

$$x_1x+y_1y-r^2=0$$

de ebben a három constans $x_1, y_2, -r^2$ nem egyéb, mint a poláris homogén coordinatái, úgyhogy ha Pr. fele coordinatáit u_2, v_2-vel jelöljük, akkor

$$u_1 = -\frac{x_1}{r^2}$$

$$v_1 = -\frac{y_1}{r^2} \qquad \text{I.}$$

Ez az összefüggés a polus és poláris coordinatái között, ha a kör centruma az origoban van. Ennek alapján bármely pont polarisának, Pr. coordinatait ismerjük, ha megoldjuk a polus coordinatáit és fordítva. A kapcsolatot polus és poláris között még jobban jellemezhetjük, ha polárcoordinatákat használunk. Legyenek P_1 coordinatái (ϱ, ψ) a poláris coordinatái (p, ψ) akkor tudjuk, hogy

$$x_1 = \varrho \cos\varphi, \qquad y_1 = \varrho \sin\varphi$$

$$-p u_1 = \cos\psi, \qquad -p v_1 = \sin\psi$$

és betéve ezeket a relatiókat, az I alatti kifejezésekbe kapjuk, hogy

$$\frac{\cos\psi}{p} = \frac{\varrho\cos\varphi}{r^2}$$

$$\frac{\sin\psi}{p} = \frac{\varrho\sin\varphi}{r^2} \qquad (1.)$$

négyzetre emelve és összeadva $\quad \frac{1}{p^2} = \frac{\varrho^2}{r^4}$

vagyis $\quad \varrho^2 p^2 = r^4$ és miután ϱ, p és r positiv, négyzetgyököt vonva adódik az a fontos relatio

$$\varrho \cdot p = r^2 \qquad \text{II.}$$

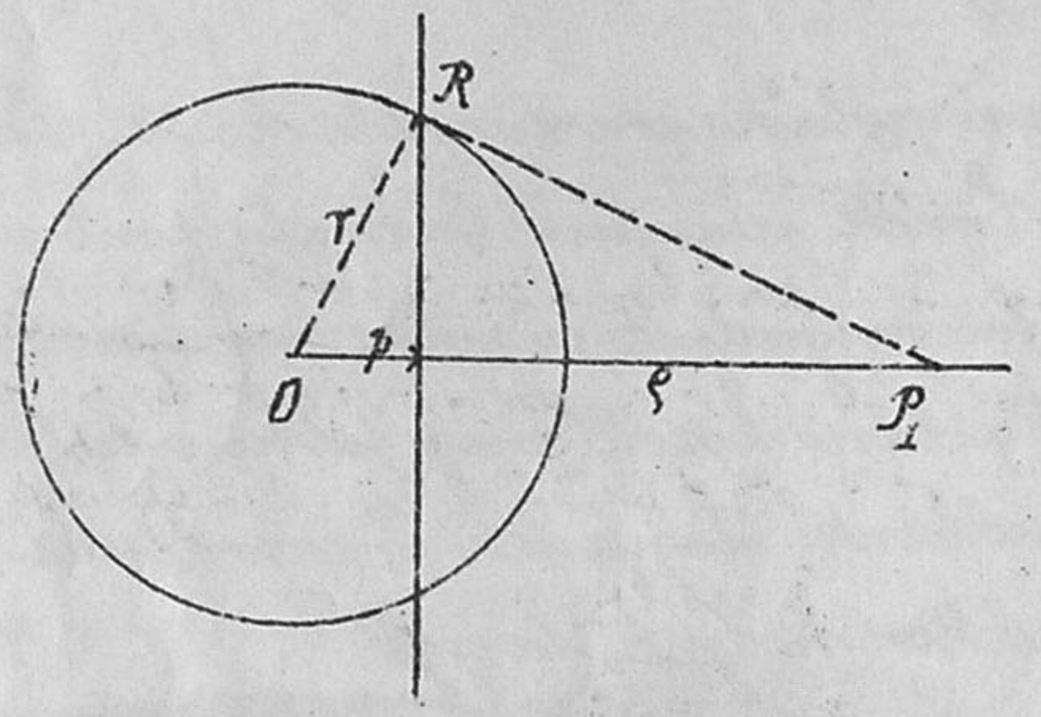
e szerint a kör sugara geometriai közeparányos a polus és polárainak a kör centrumától számított távolságai között. A második fontos relatiót kapjuk, ha az (1) alatti relatiókat p-vel szorozzuk és tekintetbe vesszük a II relatiót, kapjuk, hogy

$$\cos\psi = \cos\varphi$$

$$\sin\psi = \sin\varphi$$

a mi azt mondja, hogy $\varphi = \psi$ XII.

Tehát a kör centrumát a polusral összekötő egyenes iránya egyezik a polário normálisának irányával, a mit különben már láttunk.



A rajzból mindezek azonnal kiolvashatók, lévén OP_1R derékszögű háromszög, melynek egyik befogója r, átfogója ρ, és ennek oda alatt fekvő része p, tehát $\rho p = r^2$. Ha $\rho > r$, azután-végképen $p < r$, azaz külső pont polárisa metsző egyenes. Ha $\rho < r$, akkor $p > r$, tehát belső pont polarisa külső egyenes; ha $\rho = r$, $p = r$, körön fekvő pont polarisa érintő az illető pontban; ha $\rho = 0$, $p = \infty$, tehát a kör centrumának polarisa a végtelen távoli egyenes, s ha $\rho = \infty$, akkor $p = 0$, azaz a végtelen távoli pont polárisa átmegy a kör centrumán és merőleges a végtelen távoli pont irányát megadó egyenesre. A $P_1\infty$-ből húzott szelők párhuzamosak és a negyedik harmonicusok felezik a metszőpontok távolát. Tegyük tehát azt a tételt, hogy a párhuzamos körhúrok felezőpontjai egy egyenesen, a párhuzamos húrok irányában fekvő végtelen távoli pont polárisán fekszenek. Ezt a polarist nevezzük a kör átmérő-

A ∞ távoli pontnak mint polusnak polarisai párhuzamos

jének.

A polus és poláris coordinatái közötti összefüggés még egyszerűbb alakot nyer, ha 1-nek vesszük a kör sugarát, tehát a kör egyenlete

$$x^2+y^2-1=0$$

ekkor az I alatti relatiók átmennek a következőkbe

$$x_1 = -u_1$$

$$y_1 = -v_1$$

vagyis a polus és poláris megfelelő coordinatái ellentétesen egyenlők. Sőt a jegykülönbségét is elmondhatjuk, ha megengedjük, hogy a kör képzetes lehessen, tehát egyenlete $x^2+y^2+1=0$ legyen, vagyis $r^2=-1$

ekkor

$$x_1 = u_1$$

$$y_1 = v_1$$

Ha tehát két tetszőleges számot egyszer pont, másszor vonalcoordinatáknak tekintünk, akkor ez a pont és egyenes: polus és poláris a képzetes egységsugaru körre nézve.

A polárreciprocitás segélyével bebizonyítást nyer a dualitás elve. Ugyanis abból, hogy a sík minden pontjához tartozik egy egyenes mint polaris, és minden egyeneshez egy pont mint polus, következik, hogy minden pont és egyenesekből álló síkidomhoz tartozik egy másik idom, mely úgy keletkezik, hogy az első idom minden pontjában felveszünk egy kört és erre nézve az összes pontoknak megszerkesztjük polarisait, az összes egyeneseknek polusait. Legyenek az első idom pontjai $ABC\ldots$, egyenesei $a,b,c\ldots$, a pontok polárisai $a_1,b_1,c_1\ldots$, egyenesek polusai $A_1B_1C_1$, akkor ez a második idom ép annyi pontból és egyenesből áll, mint az első és nyilvánvaló, hogy azok a pontok és egyenesek, melyek az első idomban összetartozási viszonyban vannak, a másodikban szintén

összetartozó egyeneseket és pontokat szolgáltatnak, vagyis ha A rajta van az a egyenesen, akkor A_1 rajta van a_1-en. Ebből következik, hogy ha az első idomban bizonyos számú pont egy egyenesen van, a másodikban a megfelelő egyenesek egy ponton mennek keresztül és fordítva. Ez a két idom tehát duális, mert pont és egyenes bennök szerepet cserélnek. Két ilyen duális idomot polárreciprok idomnak nevezünk. Poncelet így a kör segélyével mondta ki a dualitás elvét, hogy ettől függetlenül később tárgyalandó geometriánkat.

A képzetes kör bevezetésével még világosabb beigazolást nyer a dualitás, mert itt azután a két idom megfelelő elemeinek koordinatái egyenlők lesznek. Ezért metrikus számításoknál rendesen a képzetes kört használjuk.

Két kör viszonya.

Potentia vonal; hasonlósági pontok.

Két kör kölcsönös helyzetét vizsgálva, két kérdés merül fel: 1.) vannak-e a köröknek közös pontjaik? 2.) vannak-e közös érintőik?

Legyen az első kör centruma (a_1, b_1), sugara r_1, a második kör megfelelő adatai (a_2, b_2), r_2, s a két kör függvénye

$$k_1 \equiv (x-a_1)^2+(y-b_1)^2-r_1^2$$

$$k_2 \equiv (x-a_2)^2+(y-b_2)^2-r_2^2$$

vagy kifejtve a négyzeteket és $a_1^2+b_1^2-r_1^2=c_1$; $a_2^2+b_2^2-r_2^2=c_2$ írva

$$k_1 \equiv x^2+y^2-2a_1x-2b_1y+c_1$$

$$k_2 \equiv x^2+y^2-2a_2x-2b_2y+c_2$$

c_1 és c_2 nem egyéb, mint k_1 illetőleg k_2 értéke, ha $x=y=0$, tehát c_1

az origo potentiája az első körre nézve, c_2 az origo potentiája a második körre nézve. Ha $c_2 > 0$, az origo az első körre nézve külső pont, ha $c_2 < 0$, akkor belső pont; az első esetben c_1 jelenti az origobol a körhöz húzott érintő hosszának négyzetét, a második esetben az origon átmenő legrövidebb húr felének négyzetét negativ jellel. Ugyanigy c_2.

A két kör közös pontjainak coordinatái egyszerre elégitik ki a két egyenletet, tehát azoknak bármely algebrai következését is; a két függvény különbségét alkotva

$$k_1 - k_2 \equiv 2(a_2 - a_1)x + 2(b_2 - b_1)y + c_1 - c_2 = 0$$ potenciavonal.

egy olyan egyenlet, melyet kielégitenek a közös pontok. Ez pedig egyenest értelmez s igy kapjuk, hogy a két kör közös pontjai a $k_1 - k_2 = 0$ egyenesen fekszenek. Ez fordítva is áll, hogy azok a pontok, melyek kielégitik a $k_1 = 0$ és $k_1 - k_2 = 0$ egyenleteket, vagyis az első kör és ezen egyenes metszőpontjai rajta vannak a második körön is, és igy a két kör metszőpontjainak felkeresése vissza van vezetve egyik kör és ezen $k_1 - k_2 = 0$ egyenes metszőpontjainak felkeresésére. Ezt a feladatot már tárgyaltuk és tudjuk, hogy vagy két reális és különböző, vagy két képzetes, vagy egy kettős reális metszőpontja van a kör és egyenesnek; ehhez képest már előre mondhatjuk, hogy két körnek, vagy két reális és különböző, vagy két képzetes, vagy egy kettős reális metszőpontja van. Hogy a három eset melyikével van dolgunk, következőleg döntjük el. Vegyük pl. az első kör vonalcoordinatás függvényét

$$K_1 \equiv (a_1 u + b_1 v + w)^2 - r_1^2(u^2 + v^2)$$

és a mi $k_1 - k_2 = 0$ segédegyenesünk coordinatait: $2(a_2 - a_1)$, $2(b_2 - b_1)$ és $(c_1 - c_2)$ behelyettesitjük megfelelőleg u, v, w helyébe. Ha a nyert függvényérték positiv, az egyenes külső egyenes, nem metszi

a kört, a két kör sem egymást; ha a függvényérték nulla, az egyenes érinti a kört, a két körnek tehát egy kettős reális metszéspontjuk van, onalyben érintkeznek; s ha negatiu a függvényérték, az egyenes belső egyenes, a két kör tehát két reális és különböző közös ponttal bir. Tehát a szerint, a mint

$$K_1[2(a_2-a_1), 2(b_2-b_1), c_1-c_2] \gtreqless 0$$

van a két körnek két képzetes, illetőleg egy kettős reális, illetőleg két különböző reális metszéspontja.

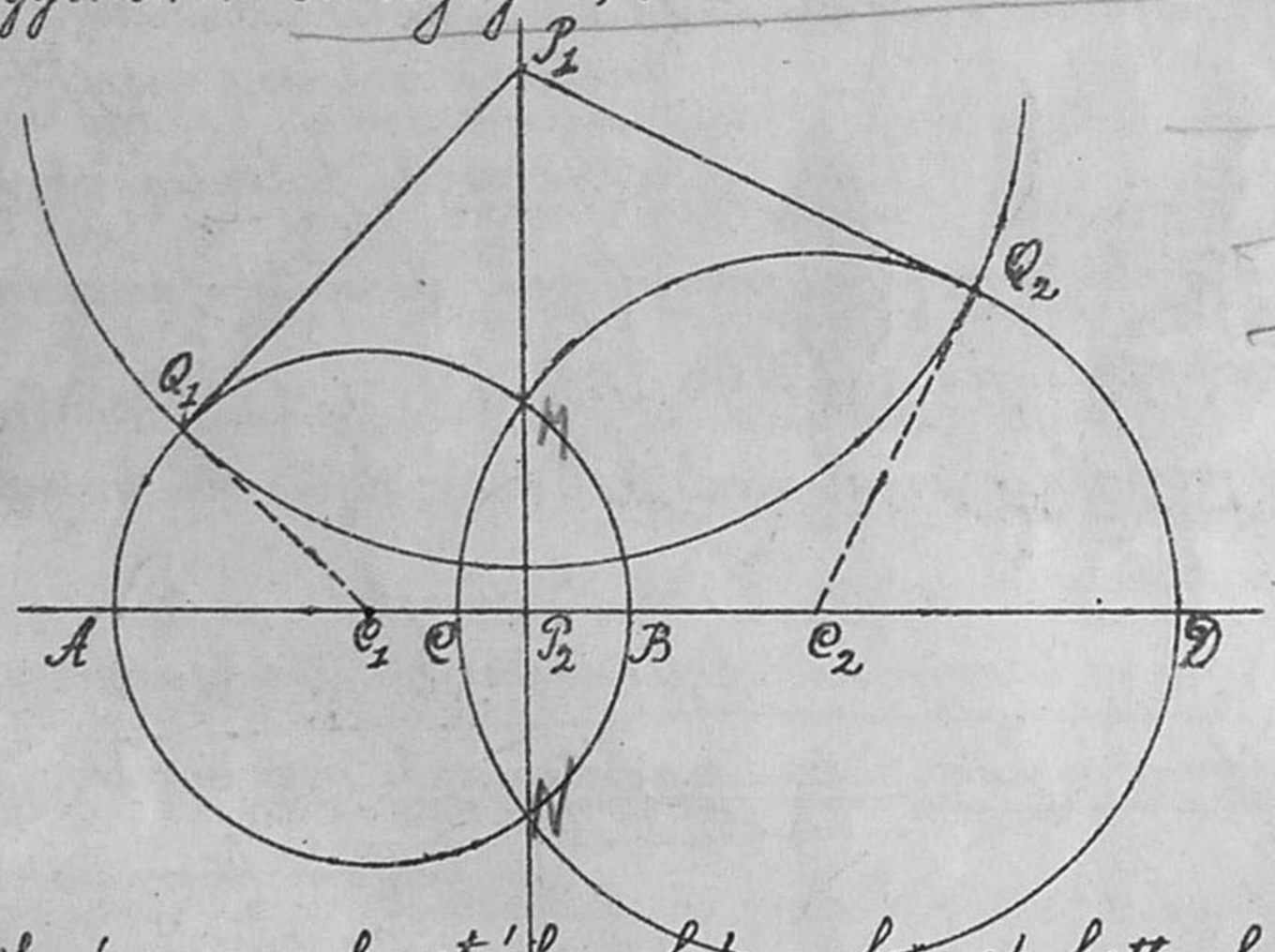
Az itt használt segédegyeneseknek fontos geometriai tulajdonságai vannak. Mintán ugyanis ezen egyenes pontjai kielégitik a $k_1-k_2=0$ egyenletet, nyilvánvaló, hogy ha $P_2(x_1 y_1)$ ezen egyenes egy tetszésszerinti pontja, ennek coordinatái mellett $k_1^{(1)} = k_2^{(1)}$. De $k_1^{(1)}$ a P_1 pont potentiája az első körre nézve, $k_2^{(1)}$ a második körre nézve, és igy adódik ezen egyenesnek jellemző tulajdonsága, hogy bármely pontjának a két körre vonatkozó potentiái egymásával egyenlők. Ezt az egyenest nevezzük a két kör potentia vonalának. A potentia geometriai jelentéséből világos, hogy a potentia vonal egy külső pontjából egyenlő hosszú érintők húzhatók a két körhöz, egy belső pontján átmenő két legrövidebb körhúr pedig egyenlő egymással (a rajzban: $P_2Q_1 = P_2Q_2$ illetőleg $MP_2N = QP_2T$). Ez is világos, hogy ha a P_2 külső pontból $P_2Q_1 = P_2Q_2$ sugárral kört irunk, ez mindkét kört derékszög alatt metszi. Tehát úgy is mondhatjuk, hogy a potentia vonal azon külső pontok geometriai helye, melyekből mint centrumokból a két kört derékszög alatt metsző köröket lehet irni.

Akár metszi egymást a két kör, akár nem, a potentia vonal mindig reális és vonalzó meg körző segélyével mindig megszerkeszthető. Ha metszi egymást a két kör, a metszéspontokat összekötő egyenes a potentia vonal. Hogy megkaphassuk a pot. vonalat érintkezés és nem

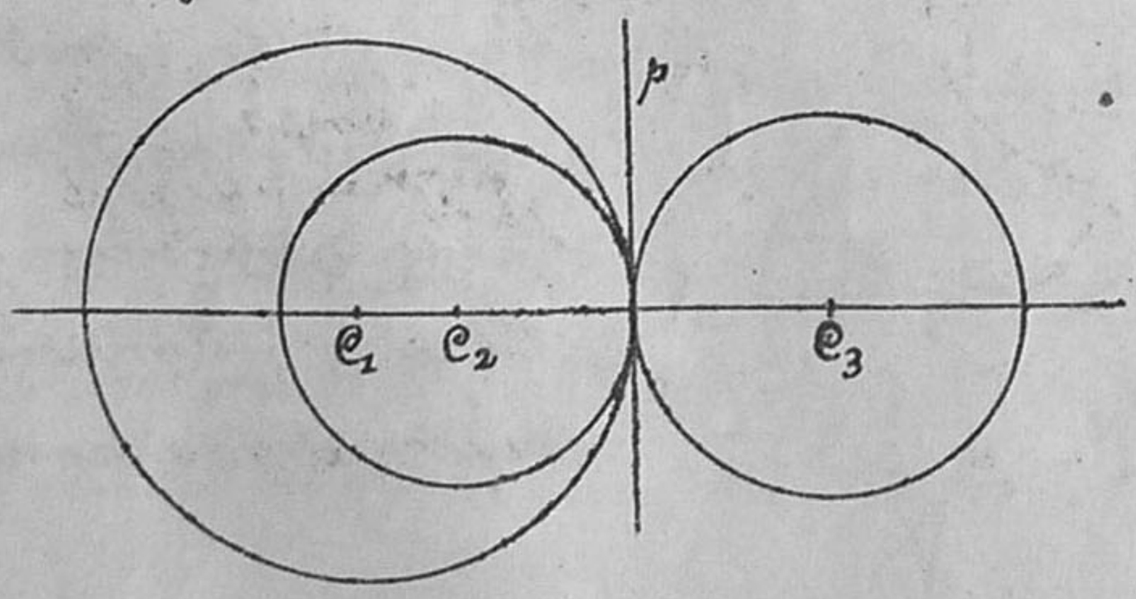
metszés esetén, figyelembe kell vennünk a potentia vonalnak egy tulajdonságát, mely szerint a potentia vonal merőleges a két kör centrumát összekötő vagyis centrális egyenesre. Utóbbiak a potentia vonal egyenlete

$2(a_2-a_1)x+2(b_2-b_1)y+c_1-c_2=0$; a centrális egyenes egyenlete $\begin{vmatrix} x, y, 1 \\ a_1, b_1, 1 \\ a_2, b_2, 1 \end{vmatrix} = (b_1-b_2)x+(a_2-a_1)y+a_1b_2-a_2b_1=0$

a miből látható, hogy x és y coefficiensei megfelelőleg összeszorozva és összeadva nullát adnak, tehát a két egyenes merőleges egymásra, úgyhogy ha ismerjük a potentia vonal egy pontját, azzal maga a vonal már meg van határozva, mert a pontból csak merőlegest kell bocsátani a centrális egyenesre. Emélfogva, ha a két kör érintkezik (akár kívülről, akár belülről), az érintkezési pontban a centrális egyenesre emelt merőleges, vagyis a közös érintő a két kör potentia vonala.



Ha nem metszi egymást a két kör, még a következő segédtétel szükséges a szerkesztéshez: ~~három körnek kettenként vett~~ potentia vonalai egy pontban metszik egymást. Legyen ugyanis a három kör függvénye k_1, k_2, k_3, akkor a 2 és 3 kör potentia vonalának függvénye

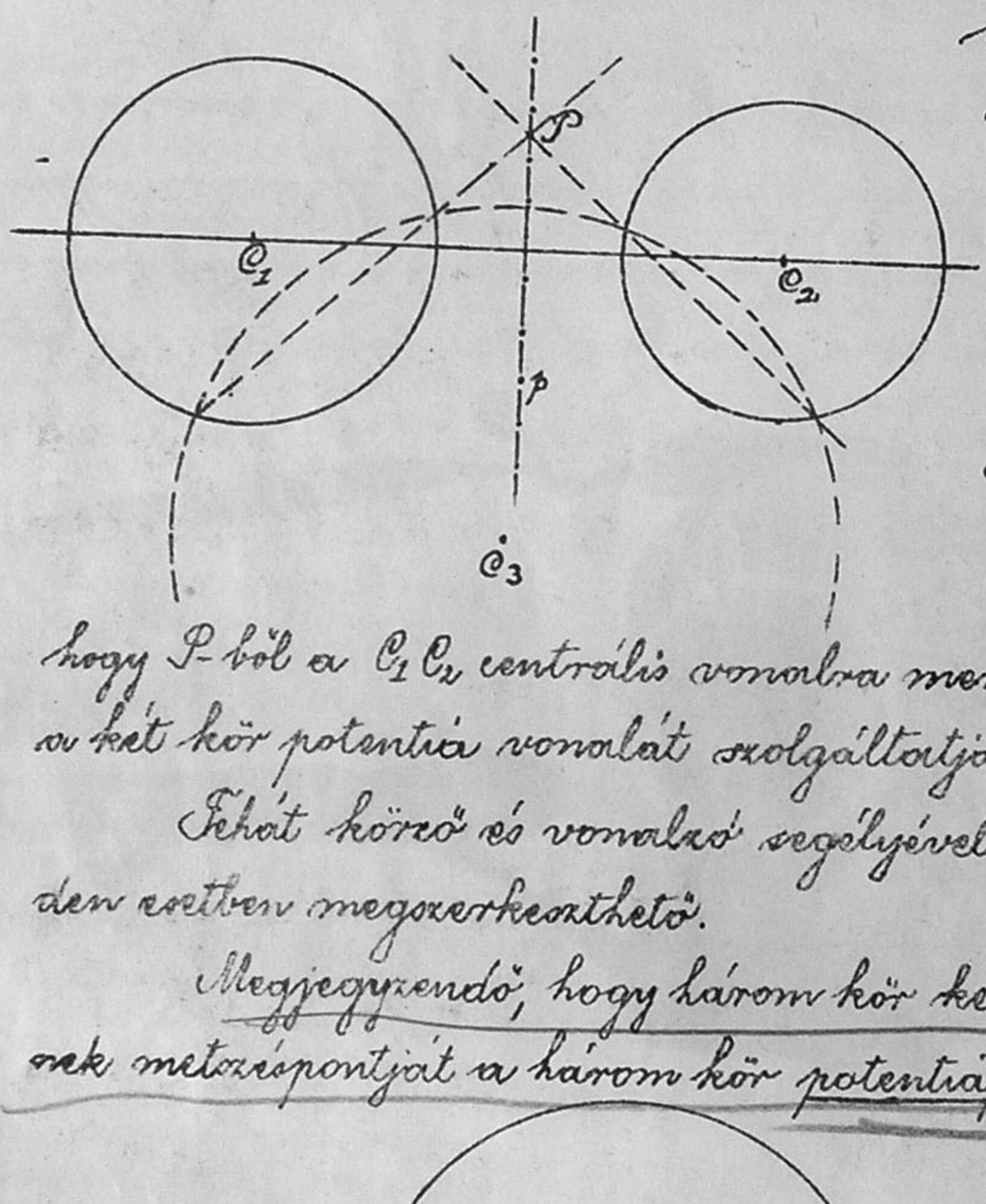


..... $k_2 - k_3$

a 3 és 1 kör potentia vonalának függvénye $k_3 - k_1$

és az 1 és 2 " " " " $k_1 - k_2$

a három függvény összege identikusan nullát ad, tehát a három potentia vonal egy ponton megy keresztül. Ha most adva két egymást nem metsző kör (C_1) és (C_2), rajzolunk egy harmadikat (C_3), mely mindkettőt metszi, úgyhogy a segédkörnek az adottakhoz tartozó két potentia vonala azonnal meghúzható legyen; e két potentia vonal P metszéspontján megy keresztül a keresett potentia vonal is, úgy-



hogy P-ből a $C_1 C_2$ centrális vonalra merőlegest bocsátva, ez a merőleges az két kör potentia vonalát szolgáltatja (p).

Tehát körző és vonalzó segélyével két kör potentia vonala minden esetben megszerkeszthető.

Megjegyzendő, hogy három kör kettenként vett potentiaegyenesei-nek metszéspontját a három kör potentiapontjának nevezzük. Ennek a három körre vonatkozó potentiája ugyanaz, úgyhogy ha a potentia pont külső pont mind-három körre nézve, ebből a közös érintőhossz-zal kört írva, az mind-

három kört derékszög alatt metszi, ha pedig belső pont, akkor a rajta átmenő három legrövidebb húr egyenlő hosszú.

Az, hogy két körnek két metszéspontja van, látszólag ellentmondást tartalmaz az algebra azon ismeretes tételével szemben, hogy egy n-ed és egy m-edfokú algebrai egyenletnek n.m közös gyöke, azaz egy n-ed és egy m-edrendű algebrai görbének n.m. metszéspontja van. Ezerint két körnek, mint másodrendű görbéknek 4 metszésponttal kell bírnia. Az eltérés az általános tételtől onnan ered, hogy a két kör függvényét Pl. féle coordinatákban használtuk és így nem vettük tekintetbe a végtelen távoli pontokat. Ha homogén coordináták bevezetésével ezeket is számba veszszük, tényleg azt fogjuk találni, hogy két körnek négy metszéspontja van. Ugyanis homogén coordinatákban a két kör függvénye

$$k_1 \equiv x^2+y^2-2a_1xz-2b_1yz+c_1z^2$$

$$k_2 \equiv x^2+y^2-2a_2xz-2b_2yz+c_2z^2$$

és a kettő különbségét zárjeles alakban nullá téve

$$z\left[2(a_2-a_1)x+2(b_2-b_1)y+(c_1-c_2)\right]=0$$

kapjuk a feltételi egyenletet a kimetszett pontokra nézve. A zárjeles kifejezés nullá téve, szolgáltatja a már ismeretes két metszéspontot. De az egyenlet akkor is teljesül, ha $z=0$, azaz $x^2+y^2=0$, ez a két egyenlet is szolgáltat két metszéspontot, melyek végtelenben vannak, mivel harmadik coordinatájuk $z=0$, de x és y számára véges értéket kapunk; ha pl. $x=1$, akkor $y=\pm i$, emélfogva a két végtelen távoli metszéspont $(1,i,0)$ és $(1,-i,0)$

Így tehát két körnek négy metszéspontja van, kettő végesben és kettő végtelenben, utóbbiak képzetesek. De a két végtelen távoli pont minden körön rajta van, mert minden körre nézve áll, hogyha $z=0$,

akkor $x^2+y^2=0$. Ennélfogva a sík összes véges köreit úgy foghatjuk fel, mint ezen két végtelen távoli képzetes ponton átmenő síkgörbéket. Ezt a két pontot végtelen távoli képzetes körpontoknak nevezzük.

A másik kérdés, mely két kör viszonyából felmerül, az, hogy lehet-e közös érintője van a két körnek? Mivel itt egyenesekről van szó, célszerű a két kör függvényét vonalkoordinátáikban felírni.

$$K_1 \equiv (a_1u+b_1v+w)^2 - r_1^2(u^2+v^2)$$

$$K_2 \equiv (a_2u+b_2v+w)^2 - r_2^2(u^2+v^2)$$

Legyen rövidség kedvéért $a_1u+b_1v+w=C_1$ és $a_2u+b_2v+w=C_2$ tehát

$$K_1 \equiv C_1^2 - r_1^2(u^2+v^2)$$

$$K_2 \equiv C_2^2 - r_2^2(u^2+v^2)$$

Nyilvánvaló, hogy $C_1=0$ nem egyéb, mint az első kör centrumának Ilr. féle egyenlete, $C_2=0$ a második kör centrumának egyenlete.

Minden egyenes, mely koordinátáival nullá teszi az első függvényt, érinti az első kört, s a mely nullá teszi a második függvényt, érinti a második kört. A két kör közös érintőjé tehát egyszerre nullá teszi mindkét függvényt s így azoknak minden algebrai következményeit. Szorozzuk meg K_1-et r_2^2-el, K_2-t r_1^2-el és alkossuk meg a kettő különbségét, akkor nyilvánvaló, hogy a közös érintő kielégíti a következő egyenletet

$$r_2^2K_1 - r_1^2K_2 \equiv r_2^2C_1^2 - r_1^2C_2^2 = 0 \qquad (1.)$$

és fordítva ha valamely egyenes koordinátái mellett $K_1=0$ és $r_2^2K_1 - r_1^2K_2=0$ akkor ezek kielégítik a $K_2=0$ egyenletet is, vagy más szóval: az első körhöz húzott azon érintők, melyek kielégítik az (1) egyenletet, érintik a második kört is, ezek tehát a két kör közös

érintői. De (1.) így is írható

$$(r_2 C_1 + r_1 C_2)(r_2 C_1 - r_1 C_2) = 0$$

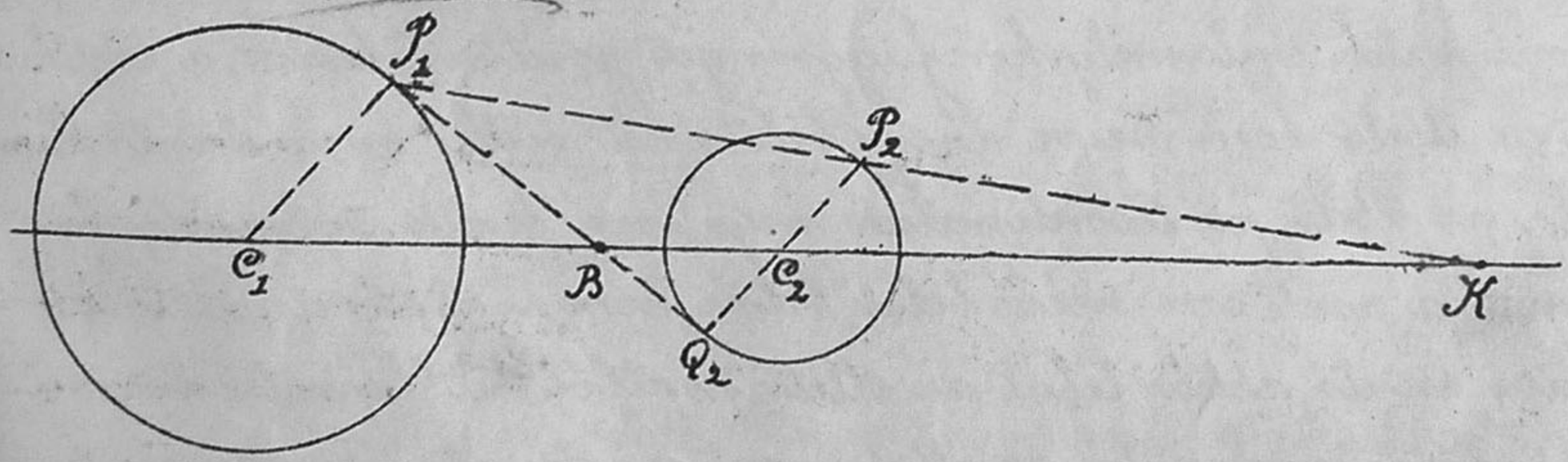
Egyik és másik factor is nullá téve pontot jelent, úgyhogy ebből a két pontból érintőket húzva akár az első, akár a második körhöz, ezek a második kört is érintni fogják, ezek tehát a keresett közös érintők. Az utóbbi két pontfüggvénynek fontos geometriai jelentése van. Az

$$r_2 C_1 + r_1 C_2 = 0$$

egyenlet olyan pontot jelent, mely rajta van a C_1 és C_2 pont összekötő egyenesén, a mivel C_1 és C_2 Ltr. féle függvényei szerepelnek, azért ennek a pontnak egyszerű arányszáma C_1 és C_2-re nézve $\frac{r_1}{r_2}$, ez pedig positiv, tehát ez a pont a két centrum között fekszik. Az

$$r_2 C_1 - r_1 C_2 = 0$$

egyenlet olyan pontot jelent, mely szintén rajta van a centrális egyenesen, de egyszerű arányszáma $-\frac{r_1}{r_2}$ negativ lévén, a két centrumon kívül fekszik és harmonicus társa az elsőnek a két centrumot illetőleg. Ez a két harmonicus pont az, melyből a közös érintők húzhatók. Az elsőt, mely C_1 és C_2 között fekszik nevezzük belhasonlósági pontnak jele B, a harmonicus társa, mely $C_1 C_2$-n kívül fekszik, külhasonlósági pont, jele K. Ezt a két hasonlósági pontot következőleg szer-



kesztjük. C_1-ből egy tetszésszerinti körsugarat húzunk pl. $C_1 P_1$. Ha C_2-

ből ezzel egyirányban párhuzamos sugarat húzunk, C_2P_2, akkor az ezeknek végpontjait összekötő egyenes P_1P_2 a két kör centralis egyenesét a K külhasonlósági pontban metszi, ha pedig C_2-ből a C_1P_1 gyel ellenkező irányban párhuzamos sugarat húzunk, C_2Q_2, az ezeknek végpontjait összekötő P_1Q_2 egyenes a centralis egyenesből kimetszi a B belhasonlósági pontot. Ugyanis $C_1P_1K \sim C_2P_2K$ Δ lévén, K egyszerű arányszáma C_1 és C_2-re nézve $\frac{C_1K}{KC_2} = -\frac{r_1}{r_2}$, és $C_1P_1B \sim C_2QB$ Δ lévén, B egyszerű arányszáma $\frac{C_1B}{BC_2} = +\frac{r_1}{r_2}$, tehát tényleg K külhasonlósági, B belhasonlósági pont. A belhasonlósági pont egyenlete

$$r_2C_1 + r_1C_2 \equiv (r_2a_1 + r_1a_2)u + (r_2b_1 + r_1b_2)v + (r_1 + r_2)w = 0$$

a külhasonlósági pont egyenlete

$$r_2C_1 - r_1C_2 \equiv (r_2a_1 - r_1a_2)u + (r_2b_1 - r_1b_2)v + (r_2 - r_2)w = 0$$

Ebből látható, hogy

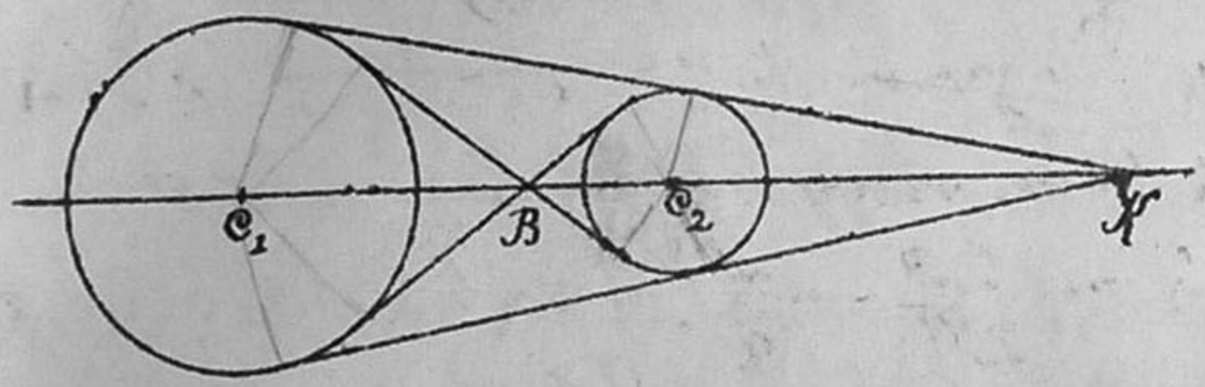
B pont Pls. coordinatái $\frac{r_2a_1 + r_1a_2}{r_1 + r_2}$, $\frac{r_2b_1 + r_1b_2}{r_1 + r_2}$

K pont Pls. coordinatái $\frac{r_2a_1 - r_1a_2}{r_2 - r_1}$, $\frac{r_2b_1 - r_1b_2}{r_2 - r_1}$

Ismervén B és K pont coordinatáit, könnyen eldönthetjük, hogy mikor reálisak, mikor képzetesek a közös érintők. Mert ha valamelyik pont coordinatái valamely kör függvényét positivvá teszik, a pont külső pont az illető körre nézve és így belőle két reális közös érintő húzható; ha az illető ponteoordinatáik negativvá teszik valamely kör függvényét, a pont erre nézve belső, belőle nem húzható az illető körhöz reális érintő, ekkor tehát az illető pontból két képzetes közös érintő húzható; s végre ha az illető pont coordinatái valamelyik kör függvényét nullá teszik, nullá teszik a másikat is, a két kör

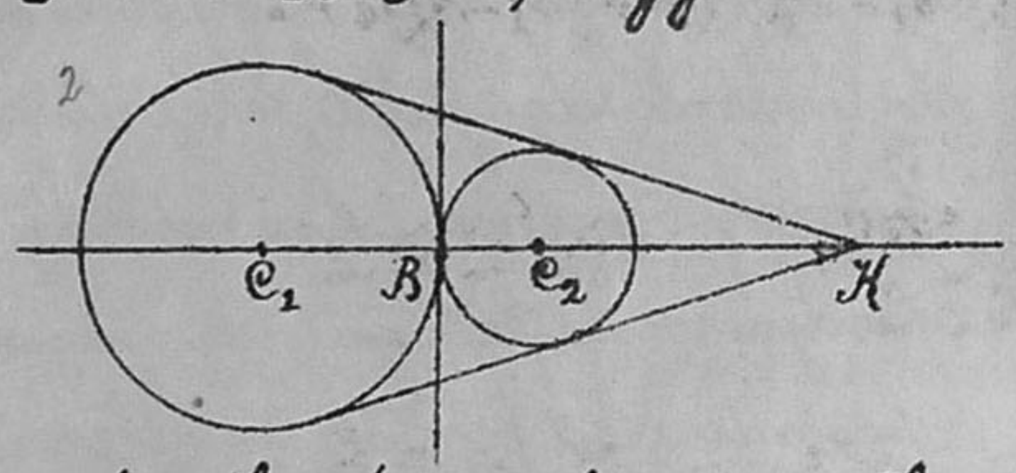
közös érintkezési pontjában egy kettős reális érintő húzható. Összesen
kell tehát 5 esetet kell megkülönböztetnünk; B és K coordinátáit röviden
B, illetőleg K-val jelölve,

1, Ha $K_1(B) > 0$, vagyis a két kör nem metszi egymást, úgy az K



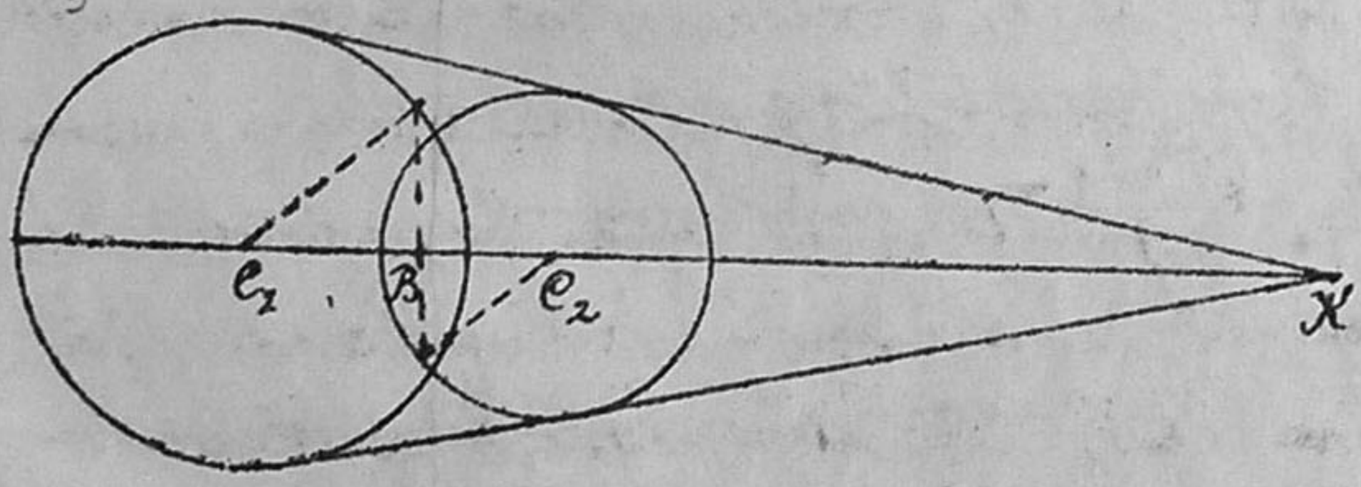
mint a B mindkét kör-
re nézve külső pont, te-
hát K reális érintő hú-
zható. Az érintési pon-
tokat megkapjuk, ha az illető pontnak, melyből az érintőket húzzuk,
megszerkesztjük polárisát, mely az illető kört az érintési pontokban metszi.

2, Ha $K_1(B) = 0$, vagyis a két kör kívülről érintkezik, B az érint-



kezési pont, K mindkettőnek külső pontja, két reális érintő közös
sé válik, tehát 3 reális közös é-
rintő létezik. A két összeső érin-
tő az érintkezési pontban merőleges a centrális vonalra.

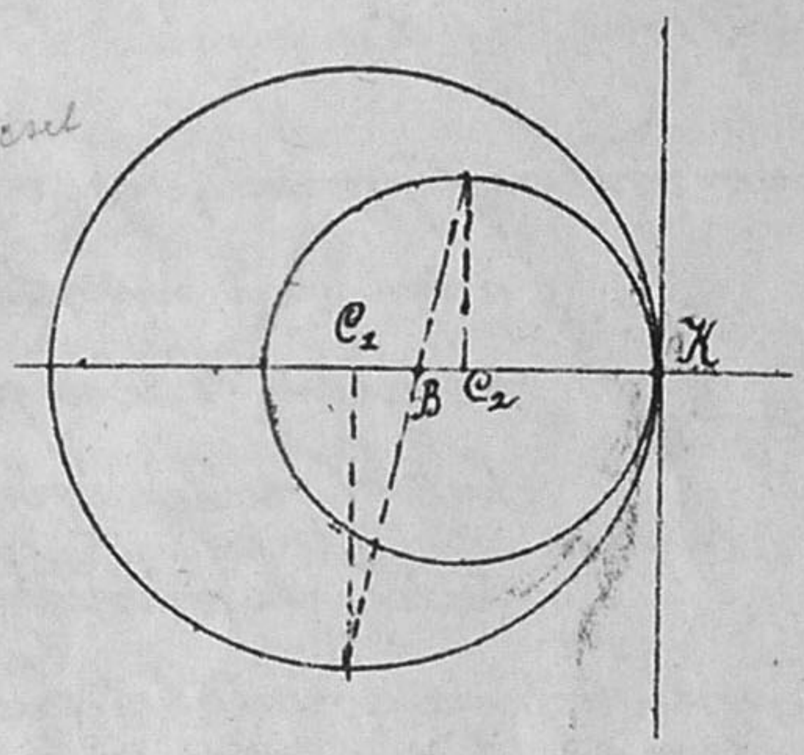
3, $K_1(B) < 0$ és $K_1(K) > 0$ vagyis a két kör metszi egymást; ek-
kor B mindkét körnek



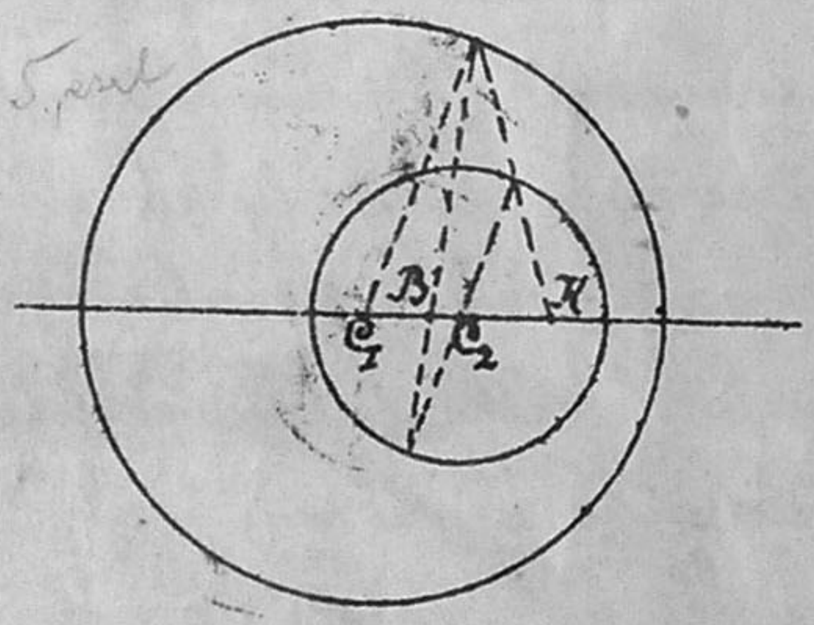
belső pontja, K külső pont-
ja, tehát két érintő képe-
zetes, kettő reális.

4, $K_1(B) < 0$ és $K_1(K) = 0$, a két kör belülről érintkezik, a kül
hatványvonal pontban, B belső pont, K az érintkezési pont, tehát van
két képzetes és egy reális kettős érintő. —

4. eset



5. pont



5. $K_1(K) < 0$, vagyis egyik kör a másikon egészen belül van, ekkor minden két hasonlósági pont belső pont, mind a négy érintő képzetes

---

Vegyünk fel három kört

(a_1, b_1), r_1

(a_2, b_2), r_2

(a_3, b_3), r_3

centrumaik C_1, C_2, C_3. Akármelyik két körhöz tartozik egy bel és egy külhasonlósági pont, tehát három körnek összesen 6 hasonlósági pontja van. Vizsgáljuk meg ezen hasonlósági pontok rendszerét.

Az 1. és 2. kör belhasonlósági pontjának B_{12}-nek egyenlete

$$r_2 C_1 + r_1 C_2 = 0$$

ezt módosítjuk annyiban, hogy keresztül osztjuk $r_1 r_2$-vel,

$$\frac{C_1}{r_1} + \frac{C_2}{r_2} = 0 \quad \text{úgyhogy}$$

$\frac{C_1}{r_1} + \frac{C_2}{r_2}$ lesz a B_{12} pont függvénye. Hasonlóképen módosítjuk a többi hasonlósági pont függvényét, úgyhogy ha a pont symbolumával azonosítjuk a függvényt is jelöljük, lesz a b hasonlósági pont függvénye

563
465

Bathory

$$B_{23} \equiv \frac{C_2}{r_2} + \frac{C_3}{r_3}$$
$$B_{31} \equiv \frac{C_3}{r_3} + \frac{C_1}{r_1}$$
$$B_{12} \equiv \frac{C_1}{r_1} + \frac{C_2}{r_2}$$
$$K_{23} \equiv \frac{C_2}{r_2} - \frac{C_3}{r_3}$$
$$K_{31} \equiv \frac{C_3}{r_3} - \frac{C_1}{r_1}$$
$$K_{12} \equiv \frac{C_1}{r_1} - \frac{C_2}{r_2}$$

Ismmal látható hogy a három külhasonlósági pont egy egyenesen fekszik, mert $K_{23} + K_{31} + K_{12} \equiv 0$

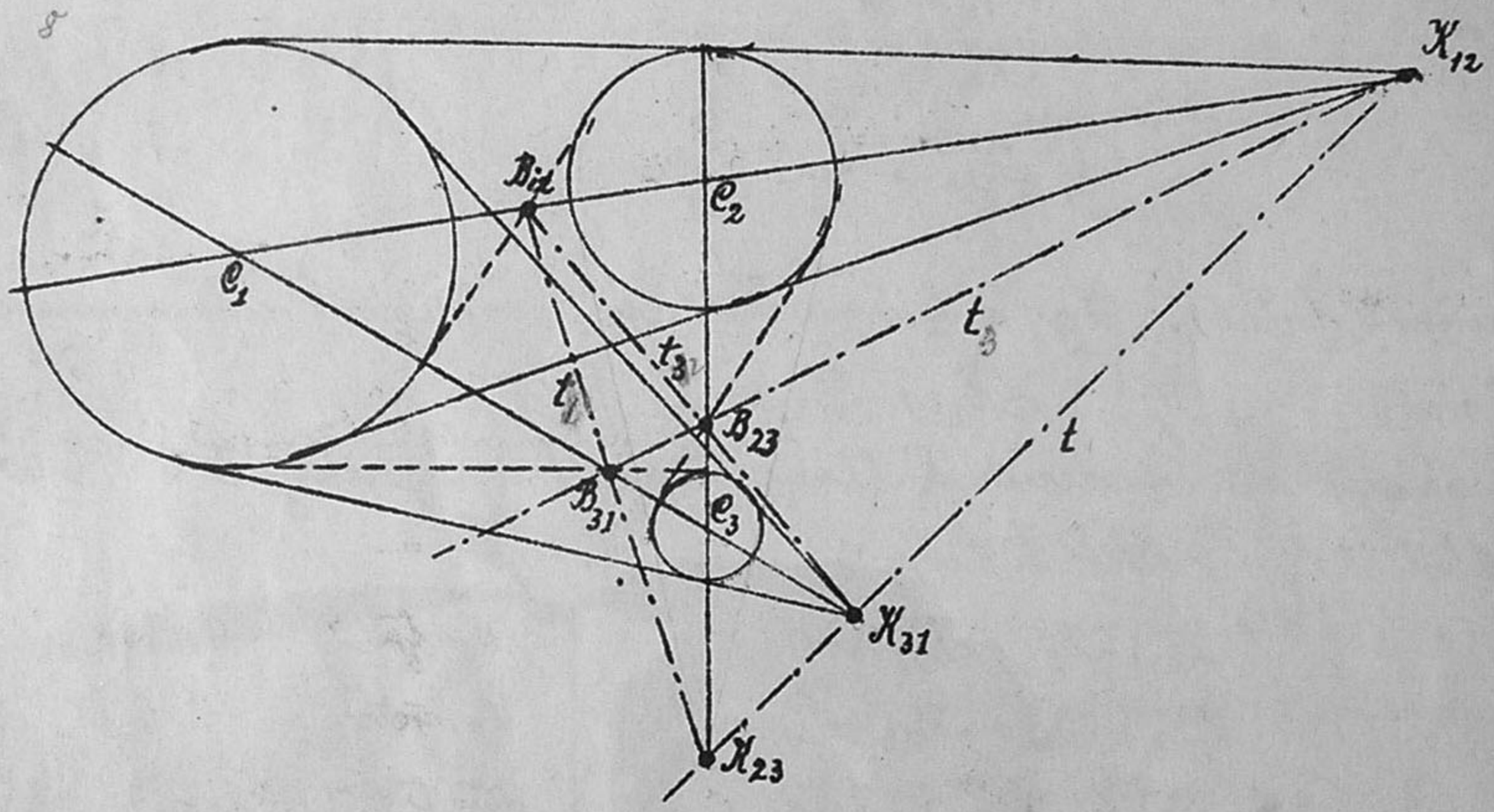
ezt az egyenest nevezzük külhasonlósági tengelynek, jele t. De a fenti relatiókból még következik, hogy

$$B_{23} - B_{31} + K_{12} \equiv 0 \quad | \quad t_3$$
$$B_{31} - B_{12} + K_{23} \equiv 0 \quad | \quad t_1$$
$$B_{12} - B_{23} + K_{31} \equiv 0 \quad | \quad t_2$$

tehát bármely két belhasonlósági pont és a harmadik indexpárral bíró külhasonlósági pont szintén egy egyenesen fekszenek, ezt a három egyenest belhasonlósági tengelyeknek nevezzük, és jelöljük megfelelőleg t_3, t_1, t_2-al. A belhasonlósági tengely ezt az indexet viseli, mely a rajta fekvő külhasonlósági pont mellett nem fordul elő. Ha a külhasonlósági pontokat (+1) a belhasonlósági pontokat (-1) jellemző számmal látjuk el, mondhatjuk, hogy – 3 kör esetén – három hasonlósági pont egy egyenesen fekszik, ha jellemző számaik szorzata (+1).

A négy hasonlósági tengely t, t_1, t_2, t_3 teljes négyoldalt alkot, melynek szögpontjai a 6 hasonlósági pont. Tekintsük fel ezen teljes négyoldal átlóit. t és t_1 metszéspontja K_{23}, vagy röviden $tt_1 \equiv K_{23}$ és $t_2 t_3 \equiv B_{23}$ tehát az első átló $K_{23}\, B_{23}$, de ez nem egyéb, mint az 2 és 3 kör centralis

vonala C_2C_3, s így kapjuk, hogy az első átló C_2C_3. Továbbá $tt_2 \equiv K_{31}$ és $t_3t_1 \equiv B_{31}$, de $K_{31}B_{31} = C_3C_1$, vagyis a második átló C_3C_1. Végre $tt_3 \equiv K_{12}$ és $t_1t_2 \equiv B_{12}$, de $K_{12}B_{12} = C_1C_2$ " " harmadik " C_1C_2



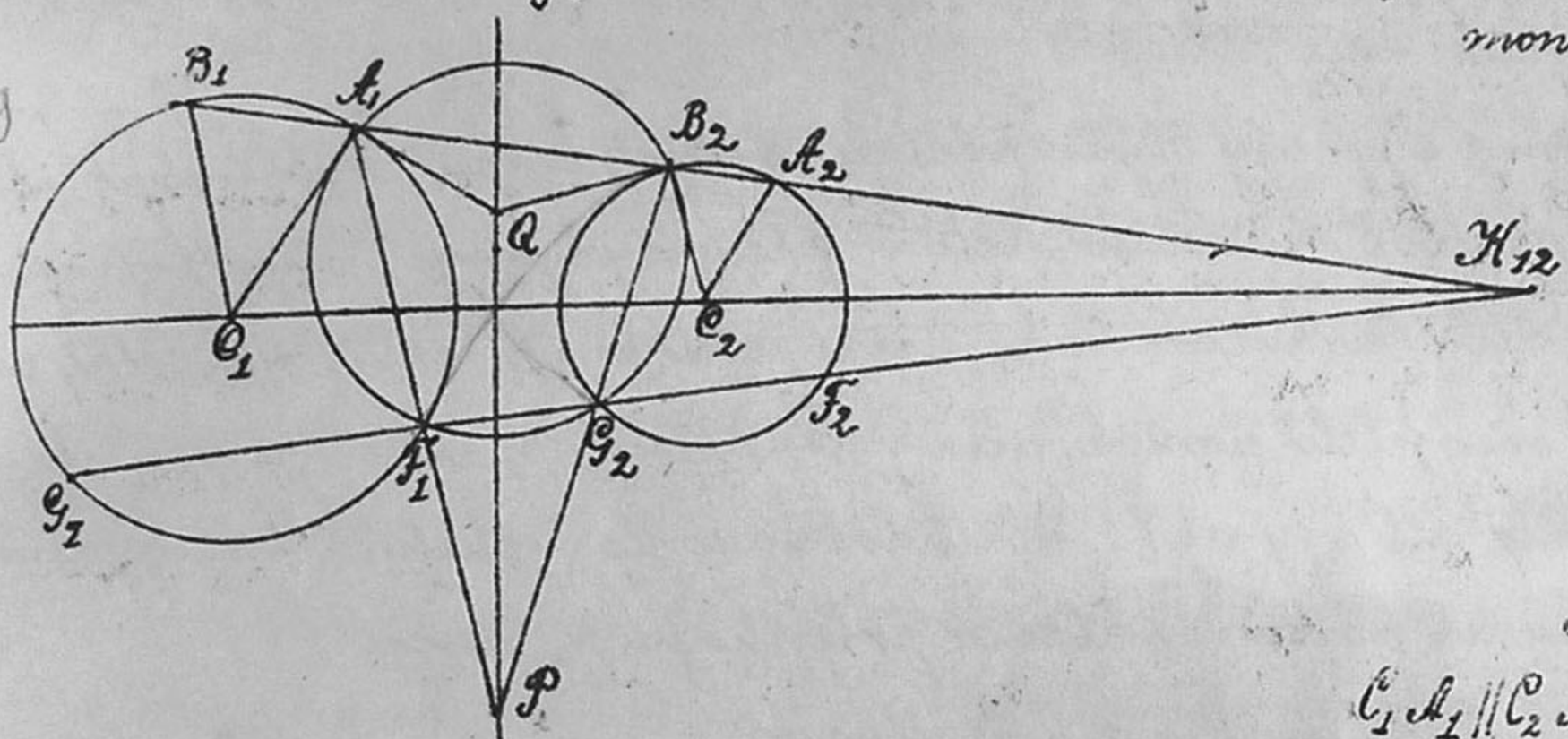
Látjuk tehát, hogy három kör hasonlósági tengelyei egy teljes négyoldalt alkotnak, melynek szögpontjai a hasonlósági pontok, átlói a centrális vonalak, átlói szögpontjai a kör-centrumok.

Összefoglalva az eddigieket láttuk, hogy két körnek van egy potentia vonala és két hasonlósági pontja; három körnek van egy potentia pontja, melyben a három potentia vonal egymást metszi, és van 6 hasonlósági pontja, melyek háromszával négy tengelyen vannak elhelyezve. —

Lássunk még néhány érdekes kapcsolatot a hasonlósági pontok és potentiavonalak között. Ezen vizsgálatok révén megokolást fog nyerni a „hasonlósági pont" elnevezés.

Vegyünk két kört, centrumaik C_1, C_2. Ha tetszőlegesen, de egyirányban párhuzamos két sugarat húzunk C_1, C_2-ből, akkor az A_1, A_2 végpontokat

összekötő egyenes a C_1C_2 centrális egyenest a K_{12} külhasonlósági pontban metszi. Ez az A_1A_2 egyenes azonban a kört még egy-egy pontban, mondjuk B_2 és B_1 ben metszi. Az ezekhez tartozó sugarak szintén párhuzamosak azaz $C_1B_1 \parallel C_2B_2$ Mert lévén $C_1A_1 \parallel C_2A_2$ lévén, az $A_1B_1C_1$ és $A_2B_2C_2$ egyenlőszárú háromszögekben $B_1A_1C_1 \sphericalangle = B_2A_2C_2 \sphericalangle$, tehát $B_1 \sphericalangle = B_2 \sphericalangle$, vagyis $C_1B_1 \parallel C_2B_2$. A párhuzamos sugarak végpontjait megfelelő pontoknak nevezzük, ilyenek tehát A_1, A_2 és B_1, B_2. Legyen az A_1, A_2, B_1, B_2 pontoknak a K_{12} külhasonlósági ponttól számított távolságuk megfelelőleg $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$, akkor a (B_1, C_1, K_{12}) és $(B_2C_2K_{12})$ meg az $(A_1C_1K_{12})$ és $(A_2C_2K_{12})$ háromszögpárok hasonlóságából következik, hogy



$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{r_1}{r_2} \qquad (1)$$

vagyis két kör megfelelő pontjainak a külhasonlósági ponttól számított távolságai úgy aránylanak egymáshoz, mint a két kör sugarai. Ebből következik bármely két megfelelő pontra nézve, hogy

$$\alpha_1 = \alpha_2 \frac{r_1}{r_2}$$

vagyis ha a második kör pontjainak a külhasonlósági ponttól vett távolságait rendre megszorozzuk ugyanazzal az $\frac{r_1}{r_2}$ állandóval, kapjuk az első kör összes megfelelő pontjainak a K_{12}-től vett távolságait. Ez pedig nem mond mást, mint, hogy a két kör hasonló és hasonlósági centrum, vagyis hasonlósági pont. Innen ered a

„hasonlósági pont" elnevezés. Nyilvánvaló, hogy a B_{12} belhasonlósági-
vontra nézve éppenigy hasonló és hasonlófekvésü a két kör, csakhogy itt
az állandó szorzó $-\frac{r_1}{r_2}$.

A két körnek egy-egy olyan pontját, melyek együtt valamelyik pl.
külhasonlósági pontból kiinduló szelőn fekvüdve olyanok, hogy a hozzájuk
tartozó sugarak nem párhuzamosak, invers pontoknak nevezzük. Tehát a
mig $A_1 A_2$, $B_1 B_2$ megfelelő pontok, addig $A_1 B_2$ és $A_2 B_1$ invers pontok. Az
invers pontokra is áll egy az (1) alattihoz hasonló relatio. Ha ugyanis
K_{12}-nek a második körre vonatkozó potentiája p_2, akkor

$$\alpha_2 \beta_2 = p_2 = \text{állandó}$$

másfelől $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{r_1}{r_2} = \text{állandó}$ összeszorozva a meg-
felelő oldalakat, kapjuk, hogy

$$\alpha_1 \beta_2 = \alpha_2 \beta_1 = \frac{r_1}{r_2} p_2 = \text{Const.}$$

Tehát invers pontoknak bármely hasonlósági ponttól számított távol-
ságainak szorzata állandó (t.i. külhasonlósági pont esetén $\frac{r_1}{r_2} p_2$, bel-
hasonlósági pont esetén $-\frac{r_1}{r_2} p_2$). Ha tehát a K_{12}-ből egy más tetszőle-
ges szelőt húzunk, s ezen veszünk két invers pontot pl. F_1, F_2, melyek-
hez tartozó távolsági vectorok φ_1 illetőleg χ_2, akkor erre is áll, hogy

$$\varphi_1 \chi_2 = \frac{r_1}{r_2} p_2$$

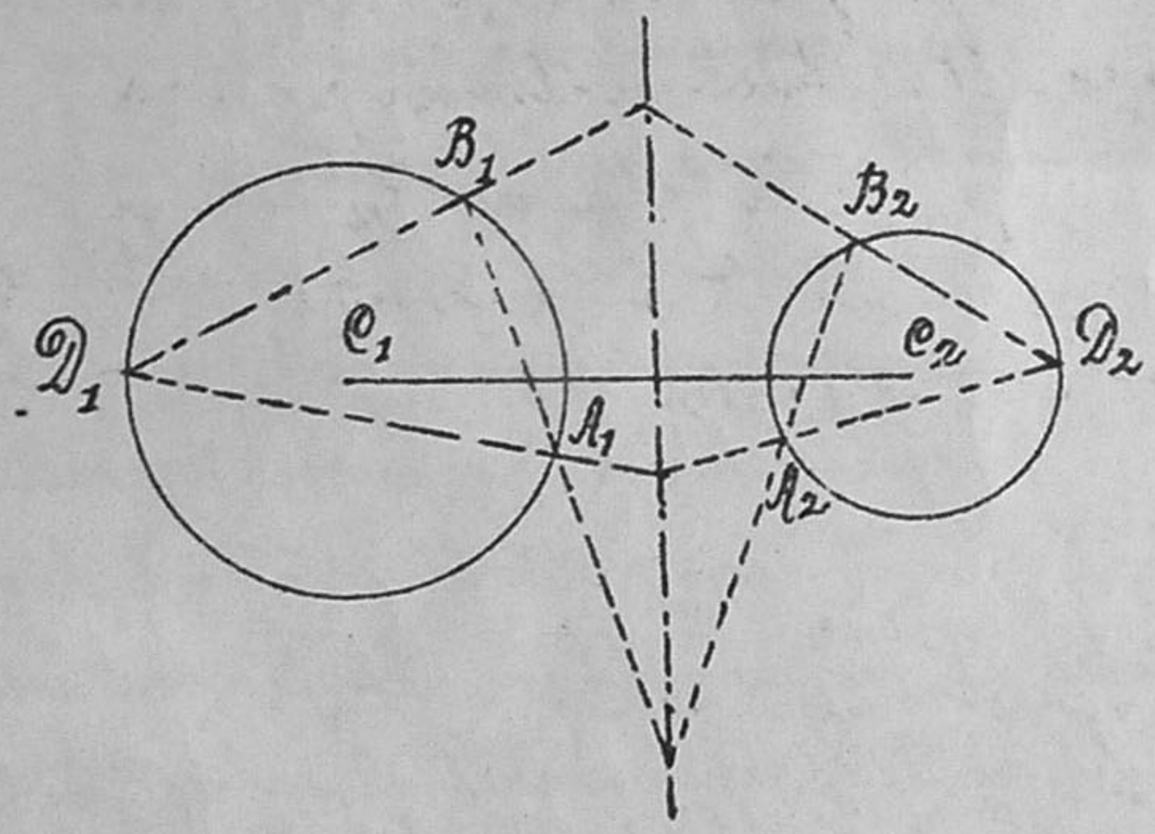
tehát $\alpha_1 \beta_2 = \varphi_1 \chi_2 = \text{Const.}$

Ebből pedig a potentia tétel megfordításával következik, hogy az
$A_1 B_2 F_2, F_1$ pontok egy körön fekszenek (lásd fenti ábrát), melynek a K_{12}-
re vonatkozó potentiája $\frac{r_1}{r_2} p_2$*. Ennek a harmadik körnek az elsővel
való potentiavonala $A_1 F_1$, a másodikkal való potentiavonala $B_2 F_2$
s egy ismeretes tétel alapján ez a két potentiavonal a két adott kör po-
tentiavonalán metszi egymást P_2-ben. Kapjuk tehát azt a nevezetes tételt

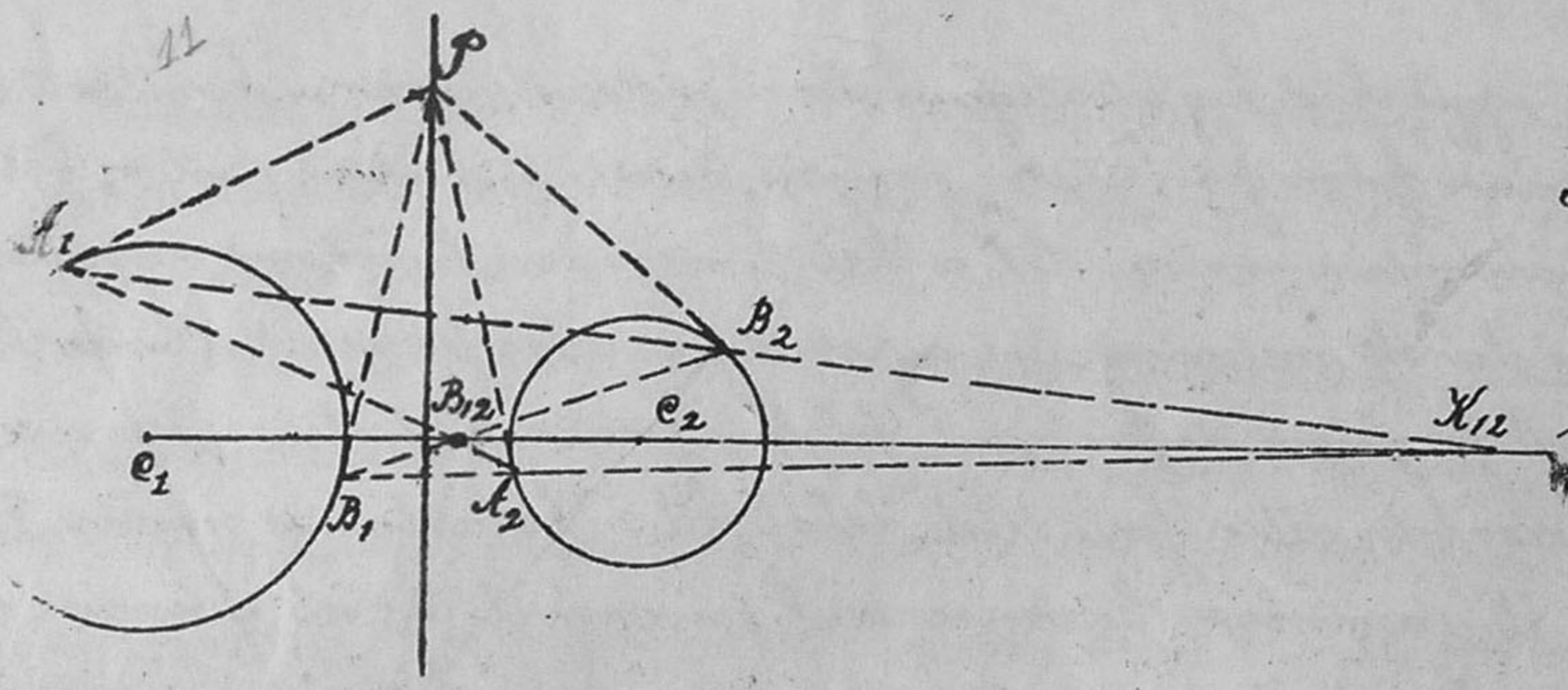
* Egy pontra vonatkozó egyenlő potenciájú pont párok egy magyarázon körön fekszenek.

Lovy ha az egyik kört egy tetszőleges szelővel metszük, akkor a kimetszett pontoknak a másik körön fekvő invers pontjait összekötő húr az elsőt a két kör potentiávonalán metszi. Ezt a két húrt invers húroknak nevezzük. Tehát invers húrok metszéspontjai a potentiávonalon fekszenek. Ha az $A_1 F_1$ húrt A_2 körül forgatjuk, miközben F_1 folyton közeledik A_1-hez, a mozgás minden fázisában áll a fenti tétel, tehát áll a határban is, midőn F_1 összeesik A_1-el s az invers G_2 összeesik A_1 inverzével B_2-vel, a midőn feléti az invers húrok átmennek érintőkbe. E szerint két invers ponthoz tartozó érintők a két kör potentiávonalán metszik egymást. (Q.). Ezen tételek alapján könnyen megszerkeszthetjük a hasonlósági pontok ismeretével a két kör potentiávonalát s fordítva a potentiávonal ismeretével a hasonlósági pontokat. Az első feladat meg van oldva, ha az első körön felveszünk tetszésszerinti három pontot A_1, B_1, D_1 és felkeressük ezeknek inverzeit a második körön: $A_2 B_2 D_2$. Az így nyert két perspektivikus háromszög megfelelő oldalainak metszéspontjai a keresett potentiavonalon fekszenek.

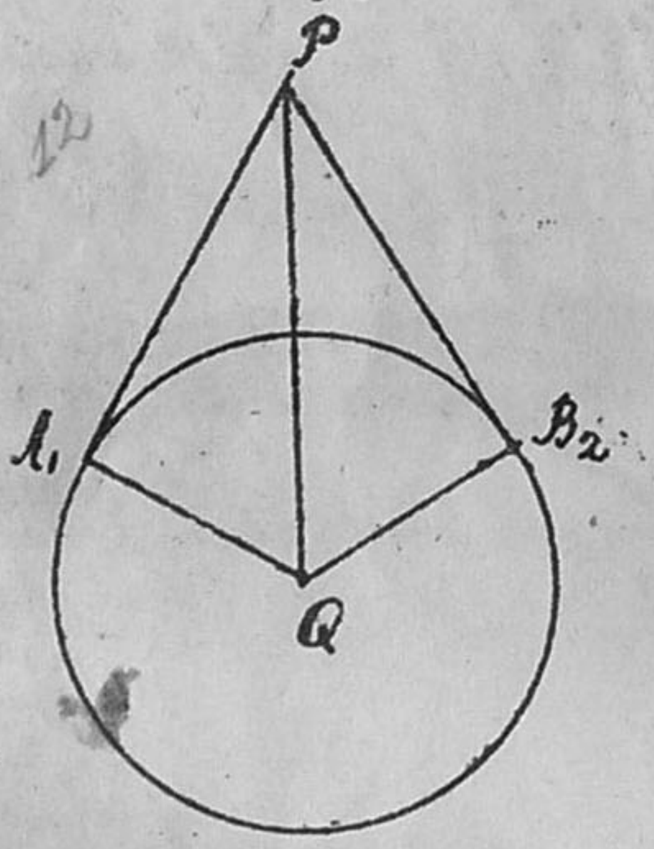
10.



Ha pedig adva van a potentiavonal, a hasonlósági pontokat megkapjuk, ha meghúzva a centrális vonalat, a potentiávonal egy tetszőleges P pontjából meghúzzuk a két körhöz az összes érintőket s a nem ugyan-



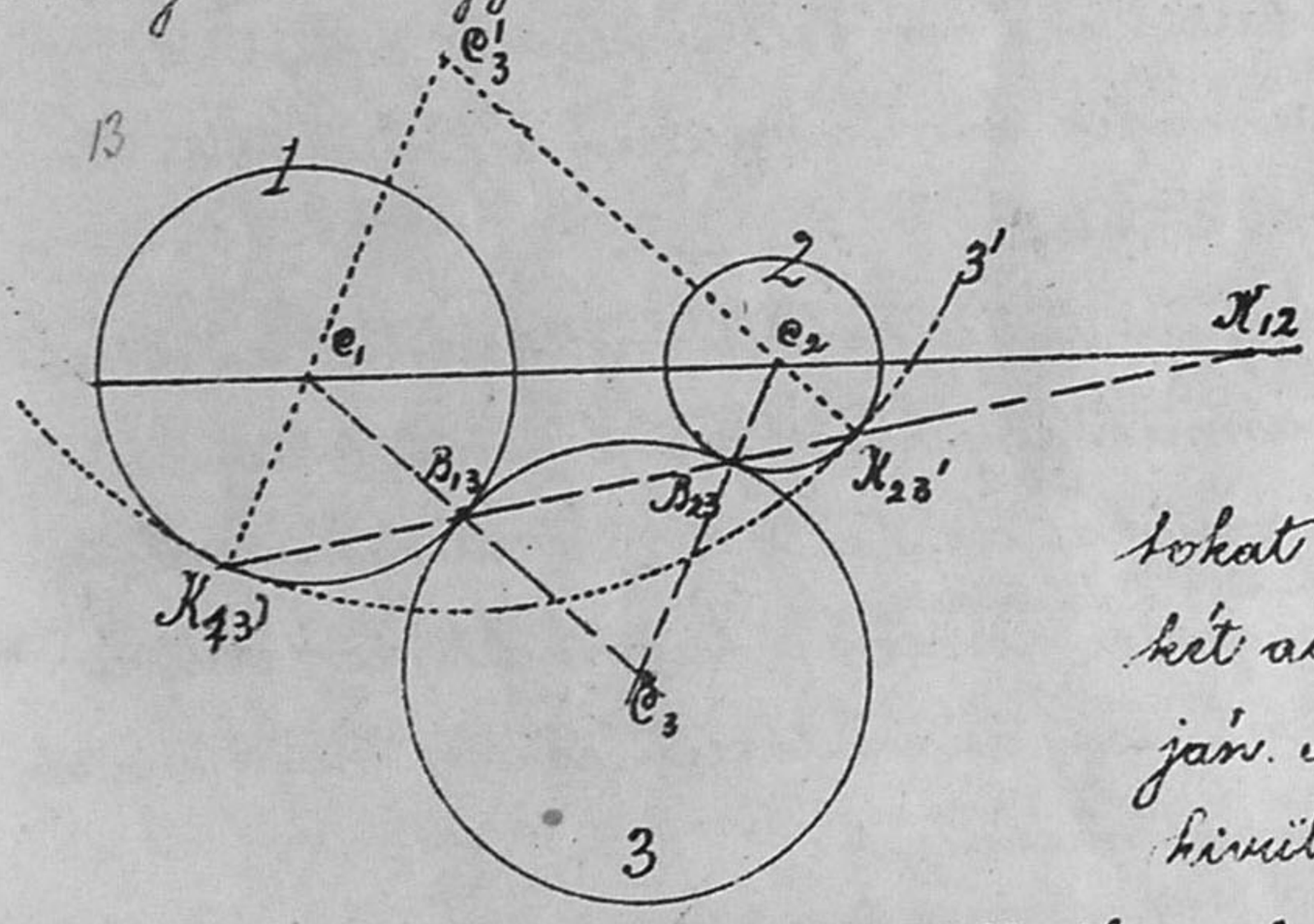
azon a körön fekvő érintési pontokat minden lehető módon, telát összeven négy egyenessel összekapcsolunk. Két egyenes t.i. $A_1 A_2$ és $B_1 B_2$ metszi a kerületet a B_{12} hasonlósági pontban, a másik kettő t.i. $A_1 B_2$ és $A_2 B_1$ metszik egymást a X_{12} külső hasonlósági pontban. Ugyanis P pont a potenciavonalon fekszik és így a belőle húzott négy érintő egyenlő hosszú: $PA_1 = PA_2 = PB_1 = PB_2$. De ha egy



pontból (P) két egyenlő hosszú vonaldarabot húzunk (PA_1 és PB_2), ezek végpontjaiban a vonalakra merőlegeseket állítunk, akkor ezek egy Q pontban metszik egymást, mely a keletkező $A_1 P Q$ és $B_2 P Q$ derékszögű háromszögek egybevágóságából kifolyólag egyenlő távol van a két vonaltól, és így a Q-ból ezen közös távollal irt kör mindkét egyenest érinti az A_1 illetőleg B_2 végpontokban. Tehát a mi esetünkben is létezik egy kör, mely a PA_2 és PB_2 egyeneseket és így a C_1 és C_2 kört is az A_1 illetőleg B_2 pontban belülről egyszerre érinti. De akkor A_1 az első és ezen uj kör, B_2 a második és ezen uj kör külső hasonlósági pontja s így összekötő egyenesükön rajta van az első és második kör külső hasonlósági pontja is. De ez rajta van másfelől a centrális vonalon is

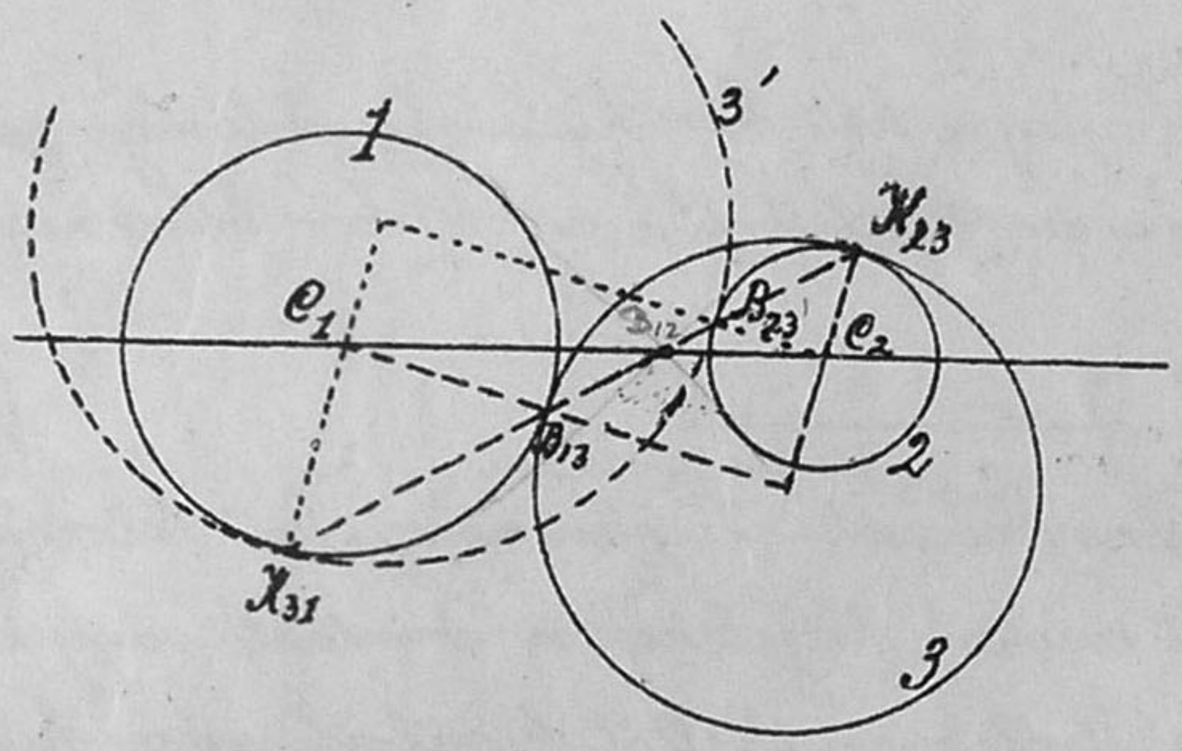
úgy hogy a szerkesztett K_{12} ténylég a két kör külső hasonlósági pontja. Hogyanúgy bizonyítható, hogy a szerkesztett B_{12} a két kör belső hasonlósági pontja. —

Vizsgáljuk három kör érintkezését. Legyen adva két tetszőleges kör. Egy harmadik kör a két adottat kétféleképen érintheti: vagy egyféle módon, tehát mindkettőt belülről, mindkettőt kívülről, vagy különböző módon, tehát az egyiket belülről, a másikat kívülről. Kérdés, milyen viszony van az egyes esetekben az érintkezési pontok között.



Visszaemlékezve 3 kör hasonlósági pontjainak kölcsönös helyzetére, látható, hogy egyforma érintkezés esetén az érintkezési pontokat összekötő egyenes átmegy a két adott kör külhasonlósági pontjain. Mert ha a 3 kör az 1 és 2 kat kívülről érinti, akkor az érintkezési pontok B_{13} és B_{23} az 1 és 3 illetőleg a 2 és 3 körök belhasonlósági pontjai, de akkor egyenesükön rajta van az 1 és 2 kör külhasonlósági pontja K_{12}; ha pedig a harmadik kör – a rajzban a pontozott 3' kör – belülről érintkezik az 1 és 2 körrel, akkor az érintkezési pontok $K_{13'}$ és $K_{23'}$ az 1 és 3' illetőleg a 2 és 3' körök külhasonlósági pontjai, de akkor összekötő egyenesükön, a három kör külhasonlósági tengelyén rajta van az 1 és 2 kör külhasonlósági pontja K_{12} is.

Különböző módon történő érintkezés esetén, midőn a harmadik kör



az egyik kört kívülről a másodikat belülről érinti, nyilvánvaló, hogy az érintkezési pontokat összekötő egyenes átmegy a két adott kör belhasonlósági pontján. Mert ha a 3 kör az 1 kört kívülről, a 2 kort belülről érinti, akkor az első érintkezési pont B_{13} belhasonlósági, a második K_{23} pedig külhasonlósági pont, ezek egyenesén tehát rajta van az 1 és 2 kör belhasonlósági pontja B_{12}. Ugyanígy van a dolog, ha a harmadik kör – a rajzban a pontozott 3' – az 1 kört belülről, a 2 kört kívülről érinti.

Ha tekintetbe veszszük, hogy mind a kétféle érintkezésnél az érintkezési pontok egyfelől, rajta vannak egy hasonlósági pontból kiinduló szelőn, s hogy az érintkezési pontokat az 1 és 2 körök centrumaival összekötő sugarak nem párhuzamosak, hanem a harmadik kör centrumában metszik egymást, szóval, hogy az érintkezési pontok inverz pontok, az eddig mondottakat így is fogalmazhatjuk:

A midőn két adott kört egy harmadik egyformán érint, az érintkezési pontok inverz pontok a két kör külhasonlósági pontjára nézve;

a midőn két kört egy harmadik különböző módon érint, az érintkezési pontok inverz pontok a két kör belhasonlósági pontjára nézve.

Ennek alapján két adott körhöz az összes egyformán érintő köröket megkapjuk, ha a két kör külhas. pontjából meghúzzuk az összes szelőket és minden egyes szelő által kimetszett inverz pontpárokat egy-egy érintkezési pontpárnak tekintve, ezeknek a két kör centrumaival való

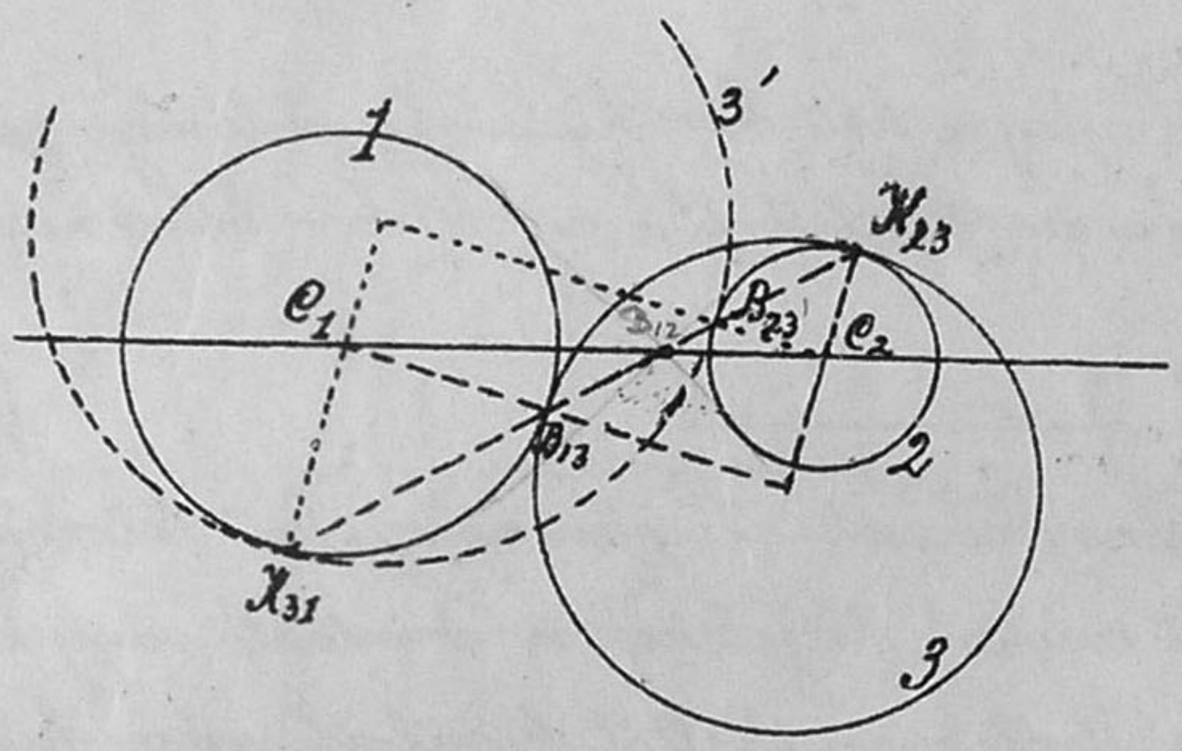
összekötő sugarait metszéshez hozzuk; ezek a metszéspontok szolgáltatják az egyformán érintő körök centrumait. Ilyen tehát végtelen sok van, mert a külhas. pontból végtelen sok szelő húzható és mindegyik szelő két kört szolgáltat, a mint azt az első ábra mutatja. Ha a belhasonlósági pontból húzzuk az összes szelőket, kapjuk ugyanigy az összes, különböző módon érintő köröket. Minden szelő két ilyen kört szolgáltat, a mint azt a második ábra mutatja.

Ha a már megállapított jelöléssel élve a külhasonlósági pontokat (+1) és a belhasonlósági pontokat (-1) jellemző számmal látjuk el, közösen ε-val jelölve a jellemző számot, akkor nyilvánvaló, hogy egyformán érintkezés esetén a két jellemző szám szorzata $\varepsilon_{13} \cdot \varepsilon_{23} = +1$, különböző módon történő érintkezés esetén $\varepsilon_{13} \cdot \varepsilon_{23} = -1$.

Vizsgáljuk most négy kör érintkezését. Az 1 és 2 kör tetszésszerinti, a 3 és 4 kör egyszerre érintse ezeket, és pedig ha a 3 kör egyformán érinti 1 és 2-t, a 4 kör is egyformán érintse ezeket, ha pedig 3 különböző módon érinti 1 és 2-t, 4 is különböző módon érintse ezeket. Vagyis ha 1 és 3-ra nézve az érintkezést jellemző szám ε_{13} (a mely +1 vagy -1), 1 és 4-re nézve ε_{14}, épen igy a 2 körre nézve az érintkezési számok ε_{23} és ε_{24}, akkor annak a feltétele, hogy 3 és 4 egyformán érintse 1 és 2-t, az, hogy $\varepsilon_{13} \cdot \varepsilon_{23}$ és $\varepsilon_{14} \cdot \varepsilon_{24}$ egyenlő jegyű legyen, tehát, hogy

$$\varepsilon_{13} \cdot \varepsilon_{23} \cdot \varepsilon_{14} \cdot \varepsilon_{24} = +1 \text{ legyen}$$

De ebből a factorok más csoportositásával következik, hogy akkor $\varepsilon_{13} \cdot \varepsilon_{14}$ és $\varepsilon_{23} \cdot \varepsilon_{24}$ is egyenlő jegyű, mert hisz ezeknek szorzata is +1. Ha tehát a 3 és 4 kör egyformán érinti az 1 és 2-őt, akkor fordítva 1 és 2 is egyformán érinti 3 és 4-et. Ilyen 4 körnek az érintkezését vizsgáljuk. Vegyük pl. azt az esetet, midőn 3 és 4 mindkettő kivülről érinti



az egyik kört kívülről a másodikat belülről érinti, nyilvánvaló, hogy az érintkezési pontokat összekötő egyenes átmegy a két adott kör belhasonlósági pontján. Mert ha a 3 kör az 1 kört kívülről, a 2 kort belülről érinti, akkor az első érintkezési pont B_{13} belhasonlósági, a második K_{23} pedig külhasonlósági pont, ezek egyenesén tehát rajta van az 1 és 2 kör belhasonlósági pontja B_{12}. Ugyanígy van a dolog, ha a harmadik kör – a rajzban a pontozott 3' – az 1 kört belülről, a 2 kört kívülről érinti.

Ha tekintetbe veszszük, hogy mind a kétféle érintkezésnél az érintkezési pontok egyfelől, rajta vannak egy hasonlósági pontból kiinduló szelőn, s hogy az érintkezési pontokat az 1 és 2 körök centrumaival összekötő sugarak nem párhuzamosak, hanem a harmadik kör centrumában metszik egymást, szóval, hogy az érintkezési pontok inverz pontok, az eddig mondottakat így is fogalmazhatjuk:

A midőn két adott kört egy harmadik egyformán érint, az érintkezési pontok inverz pontok a két kör külhasonlósági pontjára nézve;

a midőn két kört egy harmadik különböző módon érint, az érintkezési pontok inverz pontok a két kör belhasonlósági pontjára nézve.

Ennek alapján két adott körhöz az összes egyformán érintő köröket megkapjuk, ha a két kör külhas. pontjából meghúzzuk az összes szelőket és minden egyes szelő által kimetszett inverz pontpárokat egy-egy érintkezési pontpárnak tekintve, ezeknek a két kör centrumaival való

és K_{34} rajta van az 1 és 2 potentia vonalán p_{12}-ön. (lásd az első rajzot). Ugyanez áll akkorra is, ha a 3 és 4 kör az 1 és 2 köröket belülről érinti. Mondhatjuk tehát, hogy ha két kör (3 és 4) két más kört (1 és 2) egyszerre kívülről vagy egyszerre belülről érint, akkor a két körpár bármelyikének külhasonlósági pontja rajta van a másik körpár potentiávonalán.

Ha úgy a 3 mint a 4 kör különböző módon érinti az 1 és 2 kört (a második rajzban pl. a 3 kör az 1 kört belülről, a 2 kört kívülről, a 4 kör az 1 kört kívülről a 2 kört belülről érinti), akkor nyilvánvaló, hogy a két körpár bármelyikének belhasonlósági pontja van rajta a másik körpár potentiávonalán. A mi felvételünknél a B_{12} belhasonlósági pont rajta van p_{34}-en, és B_{34} rajta van p_{12}-n.

Összefoglalva tehát mondhatjuk, hogy ha két kör más két kört úgy érint, hogy az érintkezések jellemző számainak szorzata +1, akkor a két körpár bármelyikének egyik hasonlósági pontja rajta van a másik körpár potentiávonalán.

Ezek alapján már most könnyen megfejthető

Apollonius feladata,

mely abban áll, hogy három adott körhöz szerkesszük meg az összes közösen érintő köröket.

E végett vizsgáljuk meg először 5 kör érintkezését abban az esetben, midőn kettő közülök a másik hármat közösen érinti pl. a 3 és 4 kör egyszerre érinti az 1, 2, 3 köröket és pedig úgy, hogy a midőn

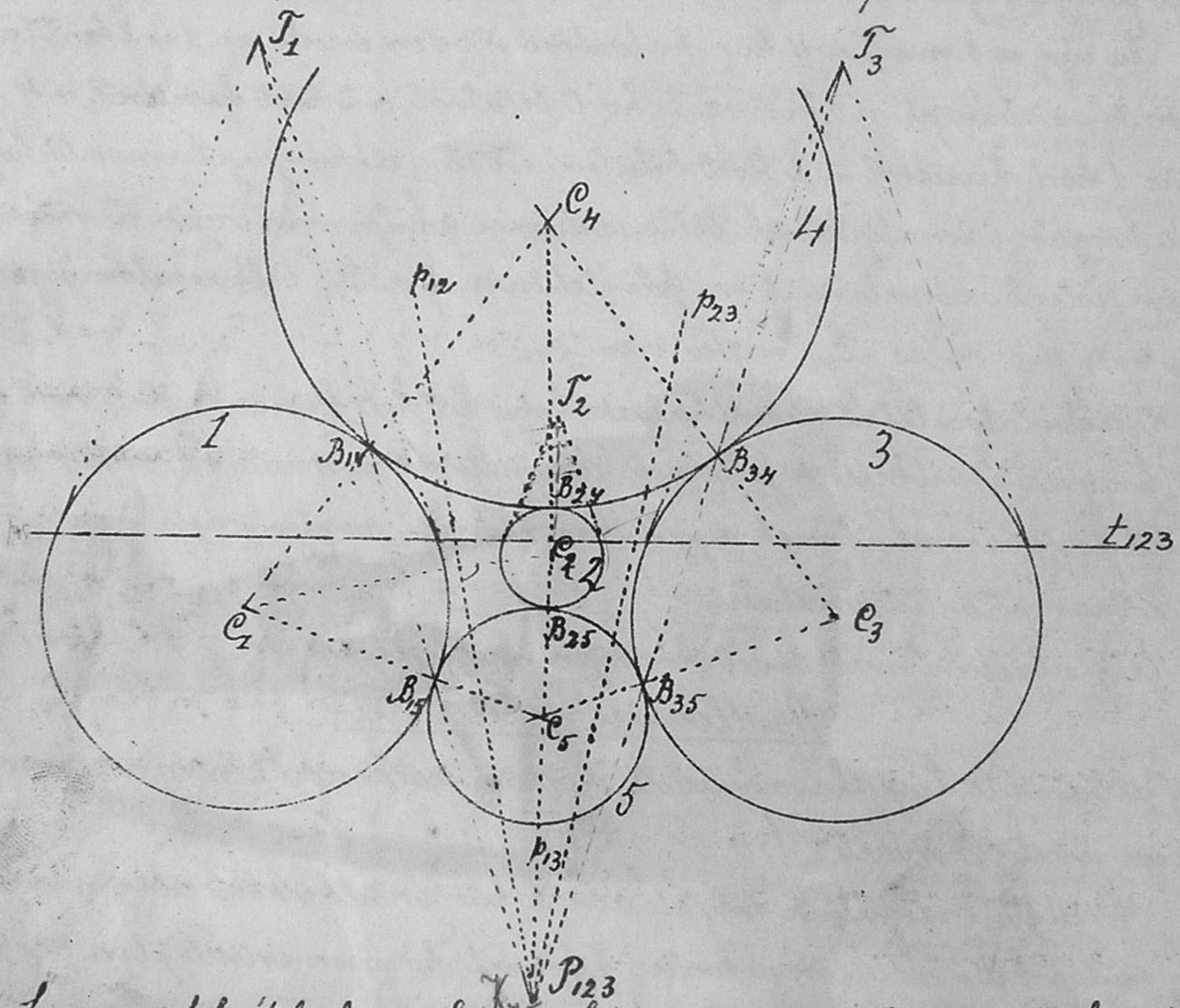
4 és 5 érinti 2 és 3-at

4 és 5 " 3 és 1-et

4 és 5 " 1 és 2-t

mindhárom körnégyesnél az érintkezést jellemző számok szorzata +1

legyen, úgy a mint azt az előbbi vizsgálatnál feltételeztük. Ennek vizsgálat folyamán szabályt fogunk találni arra nézve, mikép lehet három adott körhöz akt a másik két közösen érintő kört megszerkeszteni, a miből azután ki fog tünni, hogy három adott körhöz összesen 8 közösen érintő kör létezik, természetesen számba véve a képzetes köröket is.



Legyen a felvétel olyan, hogy a három adottnak tekintendő kör 1, 2 és 3 egymáson kivül van, a másik kettő 4 és 5 mindhármat kivülről érinti. Az érintkezés tulajdonságai kiadódnak, ha a fentebb említett három körnégyes mindegyikére alkalmazzuk az előbb tárgyalt tantételt, midőn 2 kör-más két kört egyszerre érint. A 4 és 5 körnek a 2 és 3 körrel

való érintkezéséből világos, hogy egyfelől

K_{23} rajta van p_{45}-ön

másfelől K_{45} " " p_{23}-on

A 4 és 5-nek a 3 és 1 körrel való érintkezéséből világos, hogy

K_{31} rajta van p_{45}-ön

K_{45} " " p_{31}-en

végre 4 és 5 nek 1 és 2-vel való érintkezéséből következik, hogy

K_{12} rajta van p_{45}-ön

K_{45} " " p_{12}-ön

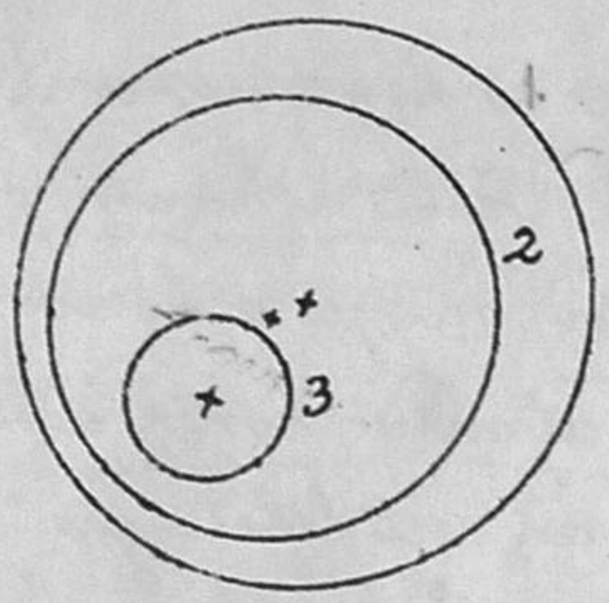
Ez a három körülmény azt mondja, hogy egyfelől K_{23}, K_{31}, és K_{12} rajta van a p_{45} potentia vonalon. De tudjuk, hogy K_{23}, K_{31}, K_{12} az 1,2,3 körök külhasonlósági tengelyén t_{123}-on vannak, tehát a két közösen érintő kör potentia vonala azonos a három adott kör külhasonlósági tengelyével $p_{45} \equiv t_{123}$.

Másfelől az is látható ezen három állitából, hogy p_{23}, p_{31}, p_{12} potentia vonalak átmennek a K_{45} külhasonlósági ponton. De tudjuk, hogy az 1,2,3 körök potentiavonalai a három kör potentia pontjában P_{123}-ban metszik egymást, tehát a két közösen érintő kör külhasonlósági pontja azonos a három adott kör potentiapontjával, $K_{45} \equiv P_{123}$.

Ezeket tudva könnyen megtalálhatjuk a szóbanforgó szerkezetet arra nézve, miképen kell a három adott 1,2,3 körökhöz a két közösen érintő 4 és 5 kört megszerkeszteni. Arra törekszünk, hogy úgy a 4, mint az 5 körnek három-három pontját megtaláljuk, ezek teljesen meghatározzák a két kört. Ilyen pontokul vesszük a 3-3 érintkezési pontot. Legyenek a 4 körnek az 1,2,3 körökkel való érintkezési pontjai B_{14}, B_{24}, B_{34}; az 5 körnek érintkezési pontjai B_{15}, B_{25}, B_{35}. Úgy járunk el, hogy meghatá-

rozzuk az $B_{14}B_{15}$, $B_{24}B_{25}$ és $B_{34}B_{35}$ egyeneseket, melyek rendre a három adott körből kimetszik ~~kimetszik~~ az érintkezési pontokat. Miután B_{14} és B_{15} inverz pontok a K_{45}-re nézve, azért a $B_{14}B_{15}$ egyenes átmegy $K_{45} \equiv I_{123}$ ponton. Ezt a pontot meg tudjuk szerkeszteni. Hogy a $B_{14}B_{15}$ egyenesnek még egy pontját megkapjuk, vegyük tekintetbe, hogy a B_{14} és B_{15} inverz pontok érintői a p_{45}-potentia vonalon metszik egymást, a mely arános t_{123}-ol. Ez a metszéspont polusa a $B_{14}B_{15}$ egyenesnek, tehát fordítva is t_{123} polusa rajta van a $B_{14}B_{15}$ egyenesen. Ezt a T_1 polust meg tudjuk szerkeszteni, mert hisz t_{123} ismeretes.

A I_{123} és T_1 meghatározzák azt az egyenest, mely az 1 körből kimetszi a B_{14} és B_{15} érintési pontokat. Ha ejen igy megszerkesztjük a t_{125}-nak a 2 és 3 körre vonatkozó T_2 és T_3 polusait, ezek a közös I_{123} potentia ponttal összekötve kimetszik a 2 körből a B_{24} és B_{25} illetőleg a B_{34} és B_{35} érintési pontokat. A B_{14}, B_{24} B_{34} pontokat a megfelelő körök centrumaival összekötő egyenesek a keresett 4 kör C_4 centrumában metszik egymást, míg a B_{15}, B_{25}, B_{35} pontokat a megfelelő körök centrumaival összekötő egyenesek a keresett 5 kör C_5 centrumában metszik egymást. Ez más érintkezés is lehetséges, midőn két kör nem mind körülről érinti a három adottat. Ezek felkeresésénél a három adott kör külhasonlósági tengelyét felváltja a három belhasonlósági tengely, mindegyik szolgáltat 2 érintő kört, tehát a 4 hasonlósági tengelynek megfelelőleg három adott körhöz összesen 8 közösen érintő kör létezik. Ez tekintettel arra, hogy itt egyeneseknek az adott körökkel való metszéspontjai adják az egyes érintő körök érintési pontjait, ezek az metszéspontok pedig nem mindig reálisok, látható, hogy a 8 érintő kör között képzetesek is lehetnek. Ha pl. az 1 körön belül



van a 2 kör és ezen belül a 3 kör, akkor egyáltalában nem létezik közösen érintő kör, akkor tehát mind a 3 érintő kör képzetes.—

Körsor

Eddig véges számú körök kölcsönös viszonyát vizsgáltuk. Most áttérünk végtelen sok körök rendszerére s az ilyen körrendszerek tulajdonságainak vizsgálatára.

Legyen adva két kör, pontkoordinatás függvényeik

$$k_1 \equiv x^2+y^2-2a_1x-2b_1y+c_1$$

$$k_2 \equiv x^2+y^2-2a_2x-2b_2y+c_2$$

Kapcsoljuk össze ezt a két függvényt egy λ paraméterrel, és kérdezzük, mi a

$$k_1+\lambda k_2=0 \qquad \text{I.}$$

egyenlet geometriai jelentése. Látható, hogy ez egy másodfokú egyenlet, melyben x^2 és y^2 szorzója ugyanaz, t. i. $(1+\lambda)$ és az $x.y$-os tag hiányzik. Tehát a paraméteres egyenlet tehát kört értelmez λ-nak minden értéke mellett, s ha λ felvesszen minden értéket $-\infty$ és $+\infty$ között, kapjuk a köröknek egyszerűen végtelen sokaságát; azért egyszerűen végtelen ez a sokaság, mert csak egy paraméter szerepel a rendszer egyenletében. A köröknek ilyen rendszerét körsornak nevezzük. Foglalkozzunk a körsor nevezetesebb tulajdonságaival. Az I. egyenletből látható, hogy az alapul vett k_1 és k_2 körök metszéspontjai a körsor bármelyik tagján

vajia vannak, ennek hiszen ha egyszerre $k_1=0$ és $k_2=0$, akkor λ bármely értéke mellett $k_1+\lambda k_2=0$ egyenlet is teljesül. Tehát a körsor összes tagjai átmennek a két alapkör metszéspontjain, vagyis a körsor nem egyéb, mint két adott kör metszéspontjain átmenő körök összesége

De két kör kölcsönös helyzetei illetőleg három eset lehetséges:

1, a két kör két reális és különböző pontban metszi egymást; ilyenkor azt mondjuk, hogy a körsornak két reális bázispontja van A és B, melyeken átmennek a sor összes tagjai.

2, A két kör érintkezik, tehát a sor összes köreinek ez a közös érintkezési pontjuk, egy reális kettős bázispontjuk van.

3, a két kör se nem metszi egymást, se nem érintkezik, a körsornak két képzetes bázispontja van.

Tehát a két adott kör kölcsönös helyzetéhez képest a körsor reális, két reális báziponttal, vagy reális egy reális érintkezési báziponttal, vagy pedig képzetes, két képzetes báziponttal.

Nyilvánvaló, hogy a sor két tetszőleges tagja

$$k_1+\lambda k_2=0$$

és $$k_1+\mu k_2=0$$

csak ott metszik egymást, a hol k_1 és k_2. Mert hiszen ha ez a két egyenlet egyszerre teljesül, akkor eltűnik a kettő különbsége is

$$(\lambda-\mu)k_2=0$$

a mi csak úgy lehetséges, ha $k_2=0$, de akkor k_1 is 0, tehát a két kör metszéspontja megegyezik k_1 és k_2 metszéspontjaival

Kérdés, mi ezen körsor centrumainak geometriai helye?

Tudjuk, hogy az $$x^2+y^2-2ax-2by+c=0$$

normális köregyenletben az x coefficiensének negativ felé a kör centrumának

első Pts. coordinataja, $\underline{a}$, és az y coefficiensének negativ fele a centrum másodlik Pts. féle coordinataja $\underline{b}$. Ha tehát ilyen alakra hozzuk a körsor paraméteres egyenletét, elosztván azt x^2 és y^2 közös factorával $(1+\lambda)$-val, akkor ezen

$$\frac{k_1+\lambda k_2}{1+\lambda} \equiv x^2+y^2 - 2\frac{a_1+\lambda a_2}{1+\lambda}x - 2\frac{b_1+\lambda b_2}{1+\lambda}y + \frac{c_1+\lambda c_2}{1+\lambda} = 0$$

egyenletből a λ paraméterhez tartozó körtag centrumának coordinatái

$$\frac{a_1+\lambda a_2}{1+\lambda}\ ,\quad \frac{b_1+\lambda b_2}{1+\lambda}$$

s ha λ változó, kapjuk a sor összes tagjainak centrumait; de az ezen két coordinatával biró pont nem egyéb, mint az (a_1, b_1) és (a_2, b_2) pontok által meghatározott pontsorban a λ egyszerü arányszám szerint változó pont, tehát a körsor összes tagjainak centrumai a két alapkör centrális egyenesén vannak és a λ parameter nem egyéb, mint a megfelelő kör centrumának a két alapkör centrumára vonatkozó egyszerü arányszáma.

A körsor általános tagját másképp is jellemezhetjük. Ha ugyanis P a λ szabott parameterhez tartozó sortag egy pontja, melynek coordinatai (x', y'), akkor ezek melletti $k_1'+\lambda k_2'=0$, a miből $\lambda = -\frac{k_1'}{k_2'}$ és ugyanez a hányados, a λ parameteres körtag mindegyik pontjára nézve. Ámde k_1' nem egyéb, mint a P pont potentiája a k_1 körre nézve, k_2' a P pont potentiája a k_2 körre nézve, a miből világos, hogy: ha egy pont úgy mozog, hogy két körre vonatkozó potentiáinak negativ hányadosa állandó marad, akkor a pont egy kört ir le, mely ezen két adott kör által meghatározott körsor egy tagja, ezen körtag parameterére nézve az állandó hányados.–

Van a körsornak egy speciális fagja, mely a $\lambda = -1$ paraméterhez tartozik, t.i. $k_1 - k_2 = 0$, ez nem egyéb, mint a két alapkör potentiavonala, s így tekinthető, mint egy degenerált fagja a körsornak, melynek centruma a végtelenben van. Azonnal belátható, hogy a körsor bármely két fagjának potentiavonala ugyanaz, mint a két alapkör $k_1 - k_2 = 0$ potentiavonala, mert hisz ezen tetszészerinti két körnek ugyanazok a metszéspontjai mint a k_1 és k_2 köröké, a potentiavonal pedig reális körsor esetén, ezen két metszéspont összekötő egyenese.

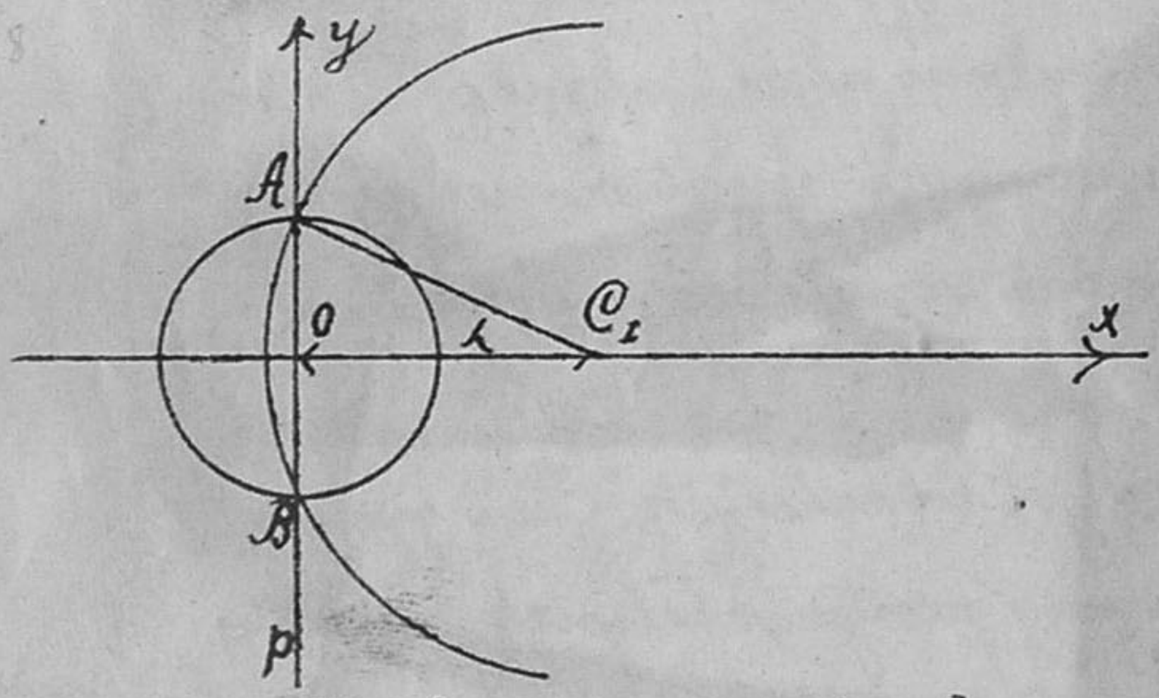
Tanulmányozzuk már most a reális körsor tulajdonságait, midőn annak két különböző bázispontja van, A és B. A coordinatarendszer y tengelyéül válaszszuk az AB egyenest, az x tengely az AB távolság O felezőpontjában erre merőleges. Írjuk fel ebben a speciális rendszerben a körsor egyenletét. Ezt megkapjuk, ha tetszőlegesen kiragadunk két kört, melyeknek függvénye a lehető legegyszerűbb, és ezt a két függvényt paraméterrel kapcsoljuk össze. Az egyik kör gyanánt veszszük azt, melynek centruma O, tehát sugara $OA = OB = r$, ennek egyenlete

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0$$

a másik kör gyanánt veszszük a potentia vonalat, mely ebben a speciális rendszerben az y tengely, melynek egyenlete tehát

$$x = 0$$

s paraméter gyanánt $(-2\lambda) - t$, úgyhogy a körsor egyenlete a mi speci-



ciális rendszerünkben.

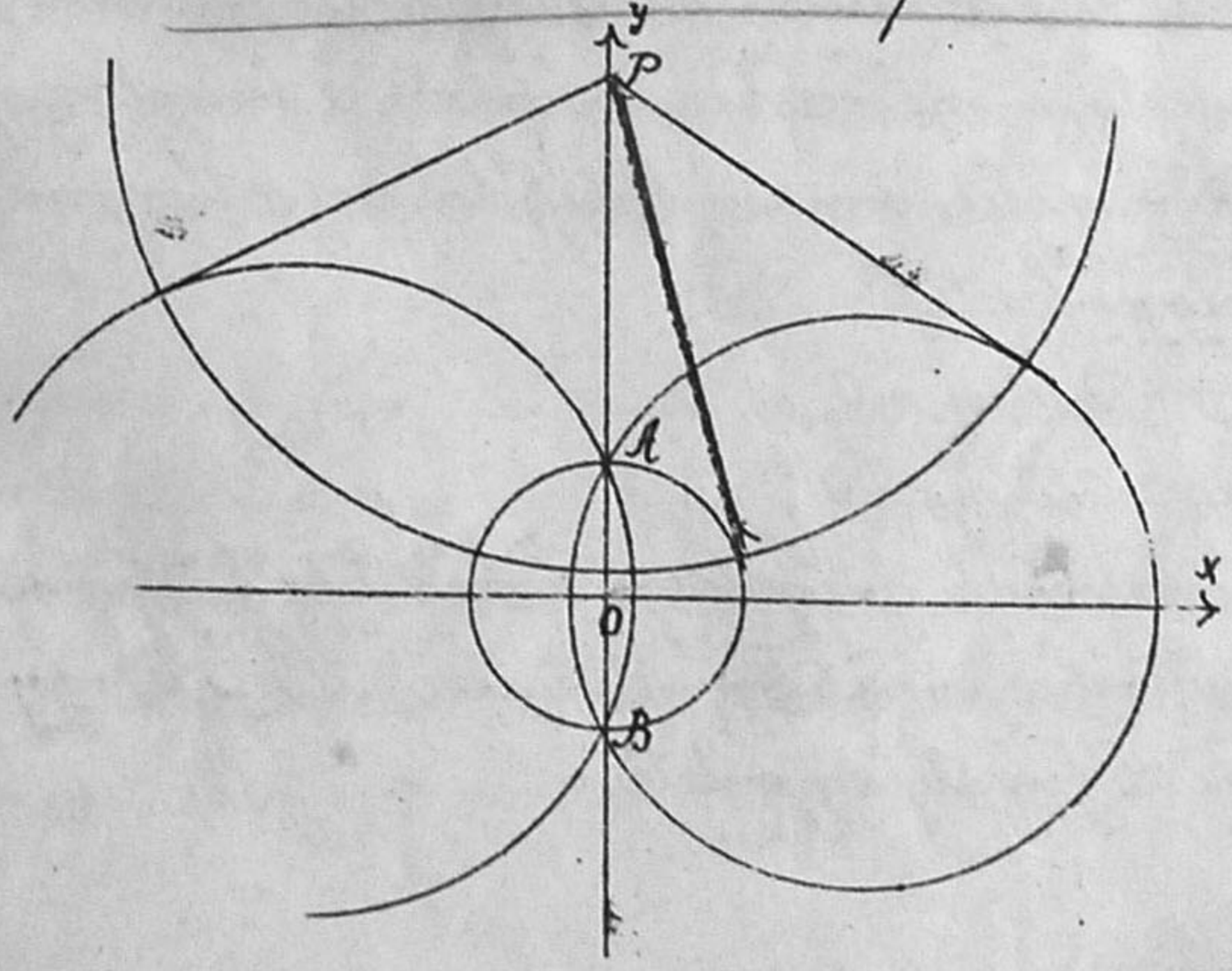
$$x^2+y^2-r^2-2\lambda x=0 \qquad (1.)$$

vagy zárjeles alakban

$$(x-\lambda)^2+y^2-(\lambda^2+r^2)=0 \qquad I.$$

Az (1.) egyenletből látható, hogy a körsor általános tagjának λ-féle centrum coordinatái $(\lambda, 0)$ vagyis a körsor általános tagjának centruma az x tengelyen fekszik, az origótól λ távolságban, sugara pedig az I egyenlet értelmében $\sqrt{\lambda^2+r^2}$, tehát azon derékszögű háromszög átfogója (lásd előbbi rajzban) az OAC_1 derékszögű háromszöget) melynek egyik befogója λ, a centrum távola O-tól, másik befogója $OA=OB=r$ bázispont távolság. E szerint a körsorhoz tartozó kört nyerünk, ha az x tengely bármely pontjából az A,B bázispontokon át kört irunk. A körök tehát mind reálisak, a legkevesebb kör az, melynek paramétere $\lambda_1=0$, ennek centruma az O origo, sugara a bázispontoknak ettől való távolsága r, a kör sugara annál nagyobb, minnél messzebb fekszik centruma az O origotól.

Az összes köröknek közös potentia vonala az y tengely, ha tehát ezen felveszünk egy tetszőleges P pontot, ennek a körsor összes köreire vonatkozó potentiája ugyanaz, vagyis ebből a P pontból az összes körökhez egyenlő hosszú érintőt húzhatók



melylyel a P-ből kört irva, ez a sor összes köreit derékszög alatt metszi. Állítsuk fel ezen derékszögvágó kör egyenletét. Legyen P-nek távolsága az 0-tól μ, tehát coordinatái $(0,\mu)$, ez lesz a kör centruma; a kör sugara nem egyéb, mint a $(0,\mu)$ centrum potentiójának négyzetgyöke, vagyis $\sqrt{\mu^2-r^2}$; tehát a $P(0,\mu)$ centrumu orthogonális kör egyenlete

$$x^2+(y-\mu)^2-(\mu^2-r^2)=0$$

vagyis

$$x^2+y^2+r^2-2\mu y = 0 \qquad \text{II.}$$

Ha a μ parametert változónak tekintjük, ez az egyenlet szintén körsort értelmez, melynek minden egyes tagja az első körsor összes tagjait derékszög alatt vágja. Tegyük tehát azt a tételt, hogy ha veszünk egy körsort, melynek két reális bázispontja van, akkor létezik egy második körsor, melynek minden egyes köre az első sor összes köreit derékszög alatt metszi. Az ilyen két körsort conjugáltnak nevezzük. Tehát két conjugált körsor egyenletei

$$x^2+y^2-r^2-2\lambda x = 0$$

és $$x^2+y^2+r^2-2\mu y = 0$$

az első körsor centrumai fekszenek az x tengelyen, a másodikéi az y tengelyen, vagyis a centralis vonalak merőlegesek egymásra, s az első sorra nézve az y tengely, a másodikra nézve az x tengely a potentiávonal. Az utóbbi kiviláglik onnan, hogy, ha az orthogonális sorból veszünk két tetszőleges kört

$$x^2+y^2+r^2-2\mu_1 y = 0$$

$$x^2+y^2+r^2-2\mu_2 y = 0$$

akkor a kettő potentiávonalának függvénye a két kör függvényeinek különbsége lévén, a potentiai vonal egyenlete lesz $2(\mu_2-\mu_1)y=0$ vagyis $y=0$ ez pedig az x tengely egyenlete.

A conjugált körsor egy másik jellemző tulajdonsága az, hogy vannak benne ponthörök, s hogy nem az összes körei reálisak. Ha ugyanis vesszük a conjugált sor zárjeles egyenletét

$$x^2+(y-\mu)^2-(\mu^2-r^2)=0$$

látható, hogy μ-nek két speciális értéke mellett, t.i.

$$\mu = r$$

és $\mu = -r$ mellett az orthogonális kör sugara 0, tehát az első körsor két reális bázispontja A és B a conjugált sorhoz tartoznak mint ponthörök. Ezekre nézve tehát a sugár négyzete $\mu^2-r^2=0$; reális, nulltól különböző sugárral bíró köröket kapunk, ha $\mu^2-r^2>0$, azaz $\mu^2>r^2$, szóval olyan centrumokra nézve, melyek az AB szakasznak ellB darabján kívül feksznek. Ha $\mu^2<r^2$, a körök képzetesek.

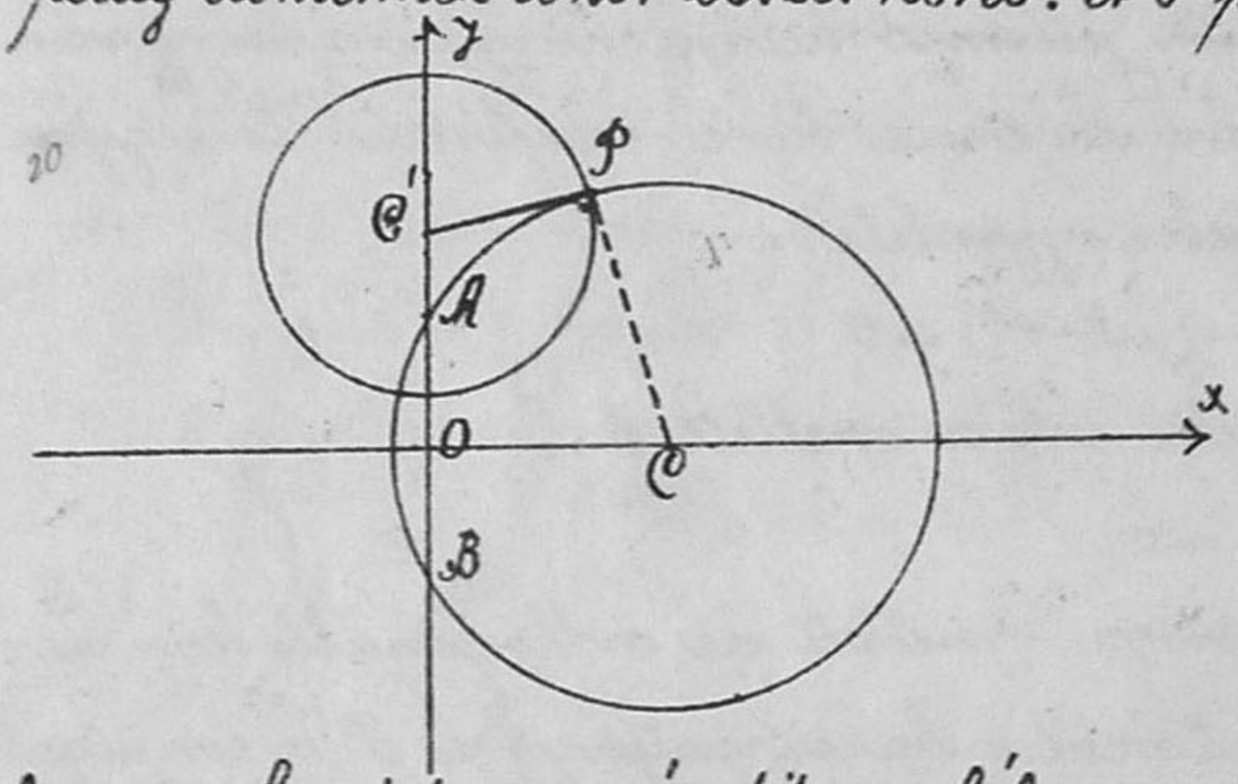
Tehát az első körsort jellemzi, hogy van két reális bázispontja és összes körei reálisak, míg a conjugált sornak van két reális ponthöre és vannak képzetes körei is.

Ha megadjuk a síknak egy tetszőleges P pontját, ezen át mindkét sorból egy, de csakis egy kör fektethető. Tiszta ha $P(x', y')$ az a pont, akkor az λ paramétert csak egyféleképen lehet úgy megválasztani, hogy az első körsor ezen coordinaták mellett vett

$$k_1' + \lambda k_2' = 0$$

egyenlete teljesüljön, mert ez az egyenlet λ-ban lineáris. Csak akkor határozatlan a λ értéke, ha k_1' és k_2' egyszerre eltünik, de ez akkor történik, ha a P pont a sor valamelyik bázispontja. Mondhatjuk tehát, hogy az első sor két bázispontját kivéve a sík minden más pontján át csak egy köre fektethető az első körsornak, a bázispontokon

pedig átmennek a sor összes körei. A P ponton átmenő kör C centruma rajta van egyfelől az x tengelyen, másfelől az AP, vagy BP húr felező pontjában az x-re emelt merőlegesen, s így axonnal megszerkeszthető az első körsor azon tagja mely átmegy a P ponton. Ehhez megkapjuk a második sorból az orthogonálisan vágó kört, mely szintén a P ponton megy át, ha az előbbi körhez annak P pontjában érintőt húzunk s azt metszéséhez hozzuk az y tengelyhez, a C' metszéspont a P ponton átmenő orthogonális kör centruma.



Az ilyen conjugált körsoroknak fontos szerepléük van a fizikában. Ha pl. egy végtelen kiterjedésü fémlapot gondolunk, amely képviseli az imént használt (x,y) síkot, és ha A-nál bevezetjük, B-nél elvezetjük az elektromosságot, az elektromosság azokon a körökön áramlik, melyek az első körsorhoz tartoznak, míg a conjugált körsor körein az elektromos potentiál állandó. –

A conjugált körsoroknak egy speciális faja adódik, ha a két reális bázispont A és B végtelen közel van egymáshoz, vagyis $r=0$, akkor a két conjugált körsor egyenletei

$$x^2+y^2-2\lambda x=0$$

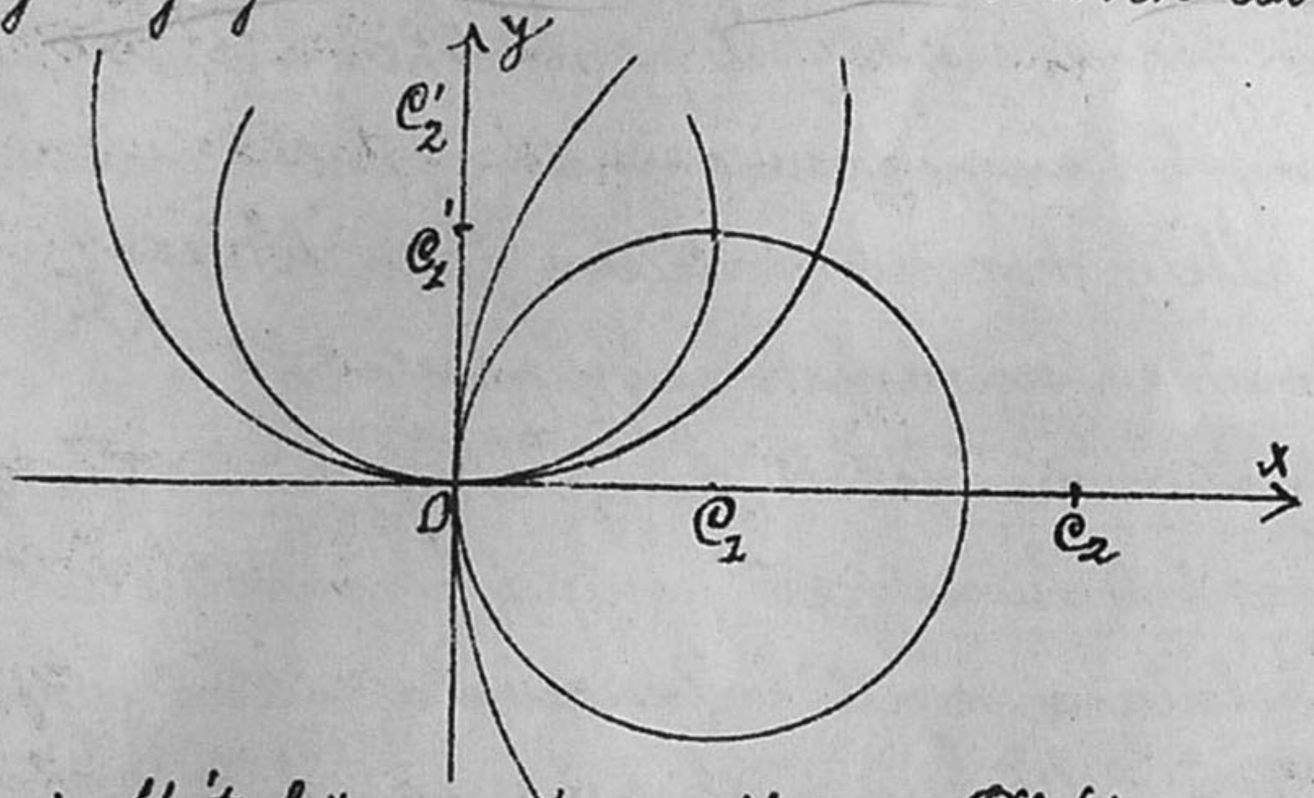
és $$x^2+y^2-2\mu y=0$$

vagy zárjeles alakban

$$(x-\lambda)^2+y^2-\lambda^2=0$$

és $$x^2+(y-\mu)^2-\mu^2=0$$

Az első sor centrumai az x tengelyen vannak és az origotól való távolságaik adják a megfelelő sugarakat, tehát az első sor körei az O origóban közös érintkezési ponttal bírnak, valamennyien itt érintik az y tengelyt; a conjugált sor áll azon körökből, melyeknek centrumai az y tengelyen vannak és érintik közösen az x tengelyt. Mindkét sor csupa reális körökből áll, de van mindegyiknek egy pontköre t.i. az elsőben a sugár $\lambda^2 = 0$, ha $\lambda = 0$ és a másodikban $\mu^2 = 0$, ha $\mu = 0$, tehát az origo, a közös érintkezési pont mindkét körsornak pontköre. Tehát egy reális bázisponttal bíró körsornak conjugáltja vele teljesen azonos természetű.



Egy nevezetes tulajdonsága van azon körsornak, melyben két reális pontkör is van. Legyen a két pontkör $A_1(a_1, b_1)$ és $A_2(a_2, b_2)$ akkor egyenleteik $(x-a_1)^2+(y-b_1)^2=0$

és $(x-a_2)^2+(y-b_2)^2=0$

mert mindkettőnek sugara 0. Ha ezeket egy λ parameterrel összekapcsoljuk, kapjuk a körsor egyenletét

$$(x-a_1)^2+(y-b_1)^2+\lambda[(x-a_2)^2+(y-b_2)^2]=0$$

melyben λ egy $-\infty$ és $+\infty$ között változó parameter. Ha most λ-nak egy szabott értéket adunk és az ehhez tartozó körön felveszünk egy P pontot, akkor az A pontkör függvénye ezen P pont coordinatai mellett nem egyéb, mint P távolsága az első pontkörtől: s_1, és az A_2 pontkör függvénye, P coordinatai mellett annyi mint P távolsága

az A_2 ponthörtől: ϱ_2, úgyhogy

$$\varrho_1 + \lambda \varrho_2 = 0$$

a miből

$$\frac{\varrho_1}{\varrho_2} = \lambda = \text{constans}$$

és ugyanez a hányados értéke a λ parameteres kör bármely pontjára nézve. Mondhatjuk tehát, hogy két reális ponthörrel bíró körsor egy tetszőleges körének pontjai olyan fekvésüek a két ponthörhöz képest, hogy az azoktól számított távolságok hányadosa minden pontra nézve ugyanaz, és annyi mint az illető kör parametere, ha a körsor függvénye a két ponthör függvényének parameteres kapcsolata.

Most kimutatjuk azt a nevezetes tételt, hogy ha egy körsort egyenessel metszünk, az egyes körökből kimetszett pontpárok involuciót alkotnak. Ennek könnyebb belátása végett válasszuk a metsző egyenest x tengelynek, s erre akárhol állítsuk merőlegesen az y tengelyt. Ebben a coordinatarendszerben legyenek a körsor két körének egyenlete

$$k_1 \equiv x^2 + y^2 - 2a_1 x - 2b_1 y + c_1 = 0$$

$$k_2 \equiv x^2 + y^2 - 2a_2 x - 2b_2 y + c_2 = 0$$

tehát magának a körsornak az egyenlete

$$k_1 + \lambda k_2 = 0$$

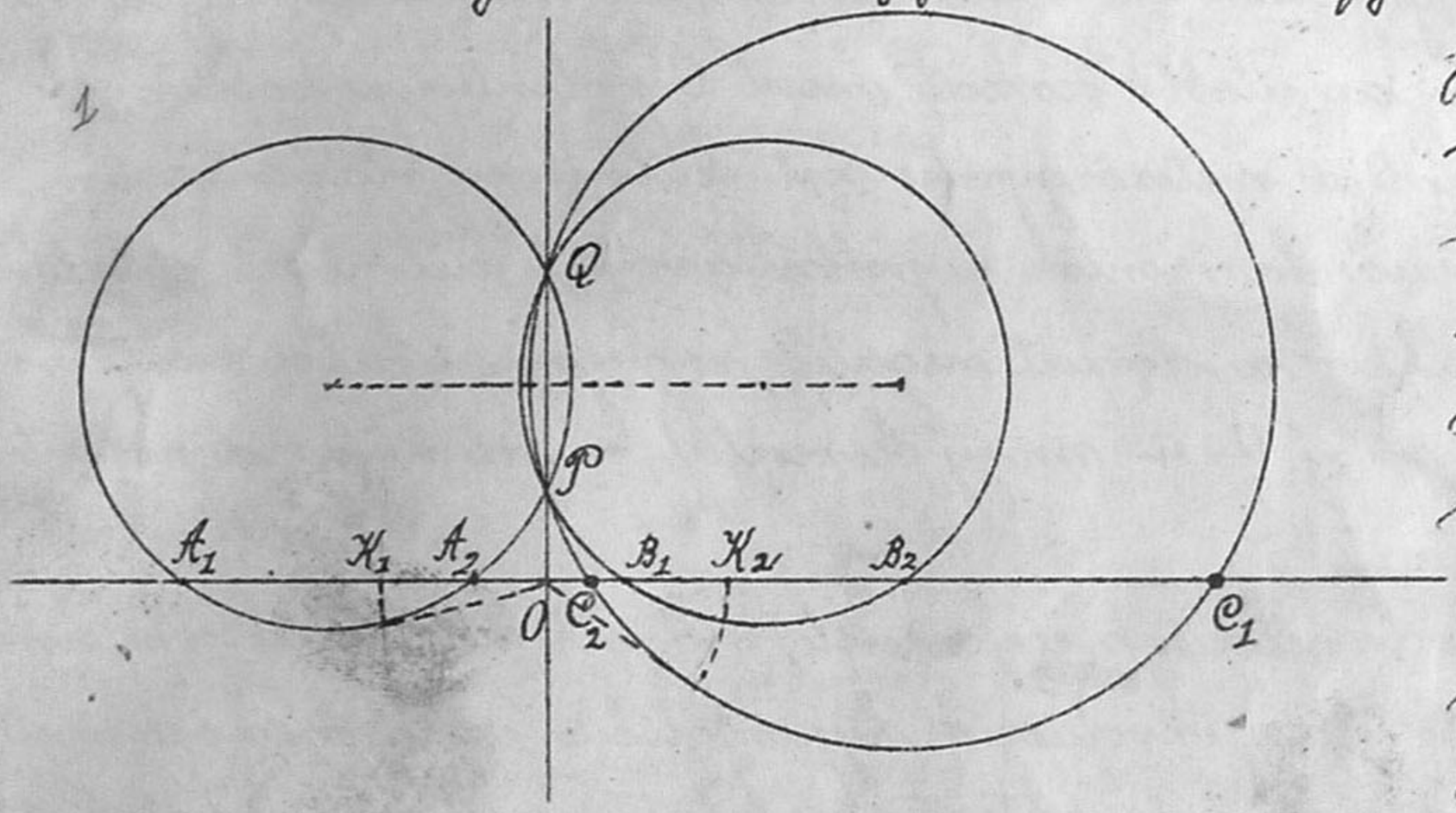
a metsző x tengely egyenlete $y=0$ úgyhogy a körsor egyenletében $y=0$ téve, a mert

$$x^2 - 2a_1 x + c_1 + \lambda \left[x^2 - 2a_2 x + c_2 \right] = 0$$

négyzetes egyenlet szolgáltatja a λ parameteres körből kimetszett pontpár coordinatáit az x tengelyen. Ha λ-t változó parameternek tekintjük, akkor a pontpárok ezen rendszere involuciót alkot, mert láttuk, hogy két négyzetes függvény parameteres kapcsolata, a milyen az utóbbi egyenlet, involuciót ábrázol.

(Lásd az involuciós parameteres analytikai kifejezését)

Ezt tudva, az involucióról való ismereteinket kiegészíthetjük azzal, hogy két pontpárral adott involucióban egy tetszőleges pontnak involutorikus társát szerkesztéssel is felkeressük. Láttuk, hogy ha egy egyenesen felveszünk két tetszésszerinti pontpárt A_1A_2 és B_1B_2, akkor ezek teljesen meghatároznak egy involuciót, úgyhogy egy tetszésszerinti felvett C_1 ponthoz annak C_2 társa teljesen egyértelműleg meg van határozva. Megszerkesztése végett úgy járunk el, hogy az egyenesen kívül felveszünk akárhol egy



P pontot, s megrajzoljuk az A_1A_2P és B_1B_2P köröket. Ez a két kör P-n kívül még egy Q pontban is metszi egymást, s ez a P és Q oly körsor két bázispontjának tekinthető, melyből a mi egyenesünk többek között az A_1A_2 és B_1B_2 involutorikus pontpárokat is kimetszi. Emiatt fogva a C_1-hez tartozó involutorikus C_2 társpontot a körsor azon körre metszi ki, mely átmegy a C_1, P és Q pontokon. Ily módon körsor segélyével akárhány involutorikus pontpárt tudunk szerkeszteni. Sőt meghatározhatjuk ezen involució centrumát is. Ez nem egyéb, mint a PQ egyenes metszéspontja az involució egyenesével, tehát O. Ugyanis O a körsor potentiávonalán lévén ennek potentiája bármely körre ugyanaz, tehát

$$OA_1 . OA_2 = OB_1 . OB_2 = OC_1 . OC_2$$

de ez épen jellemzi O-t, mint az involuczió centrumát.

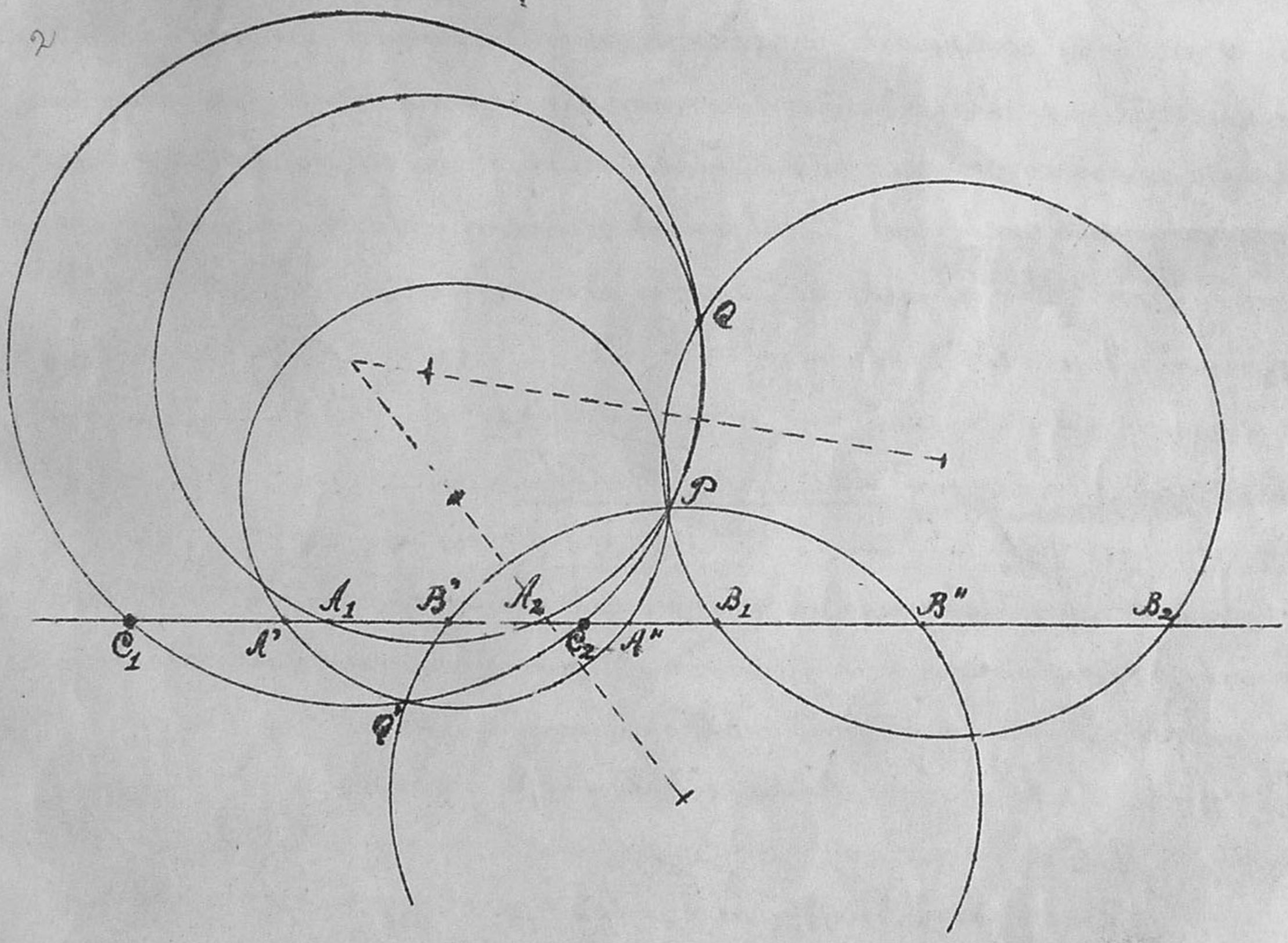
Azt is könnyen eldönthetjük, hogy az involuczió melyik fajával van dolgunk. Mert nyilvánvaló, hogy ha P és Q a metszőegyenes ugyanazon az oldalán van, vagyis ha két megfelelő metszéspont a potentiávonal ugyanazon az oldalán van, az involuczió hyperbolikus, mivel akkor az utóbbi szorzat, mint O potentiája, positiv; elliptikus, ha a P és Q a metszőegyenes két különböző oldalán van, tehát az involuczios társpontok a potentiávonal különböző oldalán vannak, mivel akkor az szorzat negativ, és végre parabolikus, ha az egyenes P-n vagy Q-n megy keresztül, mivel akkor a potentia nulla.

Ha oly körsort metszünk egyenessel, melynek két reális ponthöre van, akkor a köthező involuczió hyperbolikus, mert hisz ekkor a körök egyike sem metszi a potentiávonalat, úgyhogy bármely két megfelelő metszéspont a potentiávonal ugyanazon oldalára esik.

A hyperbolikus involuczió kettőspontjait megkapjuk, ha a O centrumból húzható közös érintőhosszat az egyenesen O-tól jobbra és balra felrakjuk, a végpontok adják a két kettőspontot; mert ha ezek bármelyikéhez a fenti szerkesztésel felkeresnük a társpontot, a segédkör érinteni fogja abban a pontban az egyenest, a társpont tehát vele összeesik.

A fenti szerkesztést felhasználhatjuk azon feladat megoldására, hogy ha egy egyenesen két involuczios pontsor van, keresnük fel azt a pontpart, mely egyszerre tartozik mindkét involucziohoz. Legyen adva az egyik involuczió az $A_1 A_2$ és $B_1 B_2$ két pontpárral, a másik

az $A'A''$ és $B'B''$ pontpárokkal. Feladatunk meghatározni azt a C_1C_2 pontpárt, mely mindkét involucióhoz tartozik. E végett felveszünk egy P pontot az egyenesen kívül; az első involucióhoz tartozó pontpárokat kapunk, ha a (Pa_1a_2) és (PB_1B_2) körök P és Q metszéspontjain át köröket irunk, melyek az egyenesből az első involucióhoz tartozó pontpárokat metszenek ki, ugyanigy nyerünk az második involucióhoz tartozó pontpárokat, ha a $(Pa'a'')$ és $(PB'B'')$ köröknek P és Q' metszéspontjain át fekfetünk köröket

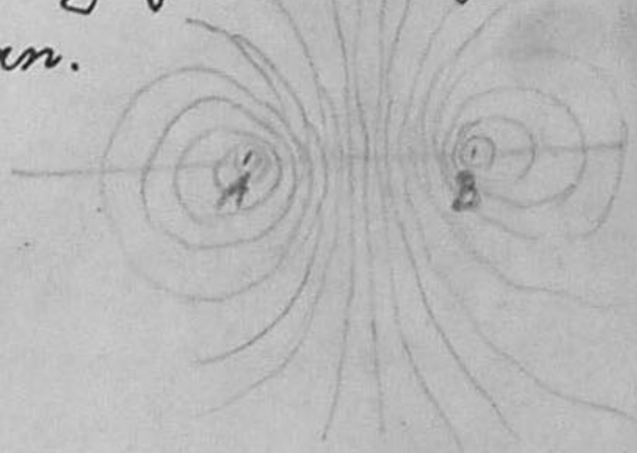


Könnyü belátni, hogy a PQQ' kör onetszi ki az egyenesből a keresett C_1C_2 pontpárt. Ilyen tehát csak egy van, mert három ponton

át csak egy kör fektethető.

Az előbbiekben egyszerű módszert nyertünk arra, hogy két reális pontkörrel bíró körsorban akárhány kört megrajzoljunk. Nyilvánvaló ugyanis, hogy ha az ilyen körsort a két reális A és B pontkörön átfektetett AB egyenessel metszük, a keletkező involucióban A és B kettőspontok, és miután a sor bármely köre által kimetszett pontpár az involució kettőspontjaihoz harmonikus fekvésű, nem kell egyebet tenni, mint felkeresni az AB-hez harmonicus fekvésű összes pontpárokat, s az egyes pontpárok távolsága mint átmérő fölé kört írni, ha ezt tesszük az A és B-hez harmonicus fekvésű összes pontpárokra, kapjuk a körsor összes köreit. Ezen körsorban egyik körpár sem fogja egymást metszeni. Ezzel most teljesen tiszta fogalmat nyertünk olyan körsorról, melynek két reális pontköre van.

2 reális pontkörrel (A,B) bíró
körök alakja:



Körhálózat.

Vegyünk most három kört és nézzük, mi a geometriai jelentése annak, ha a három kör függvényét parameteresen összekapcsoljuk. Legyen a három pontkoordinatás függvény:

$$\left.\begin{aligned} k_1 &\equiv x^2 + y^2 - 2a_1x - 2b_1y + c_1 \\ k_2 &\equiv x^2 + y^2 - 2a_2x - 2b_2y + c_2 \\ k_3 &\equiv x^2 + y^2 - 2a_3x - 2b_3y + c_3 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Ezt a három függvényt kapcsoljuk össze következőleg

$$k_1 + \lambda k_2 + \mu k_3 = 0 \qquad \text{I.}$$

Ebben az egyenletben x^2 és y^2 szorzója ugyanaz, t. i. $(1+\lambda+\mu)$, az xy-os

hay λ bármely, tehát ez az egyenlet is kört jelent λ és μ minden értéke mellett, de ez az egyenlet, miután benne két változó paraméter szerepel, a köröknek kétszeresen végtelen nagy sokaságát adja. Az ilyen körrendszert körhálózatnak (vagy körszövetnek) nevezzünk. Alkossunk magunknak geometriai fogalmat erről a körhálózatról. Mindenekelőtt nyilvánvaló, hogy az I alatti paraméteres egyenlet csakis akkor fog igazi körhálózatot, vagyis a köröknek kétszeresen végtelen nagy sokaságát szolgáltatni, ha a három kör bármelyike nem tartozik a másik kettő által meghatározott körsorhoz; Mert ha pl.

$$k_3 \equiv \lambda_1 k_1 + \lambda_2 k_2$$ volna, akkor az I. alatti egyenlet lenne $$k_1 + \lambda k_2 + \mu(\lambda_1 k_1 + \lambda_2 k_2) \equiv (1+\mu\lambda_1)k_1 + (\lambda+\mu\lambda_2)k_2 = 0$$

vagyis ha k_2 factorával keresztül osztunk és $\frac{\lambda+\mu\lambda_2}{1+\mu\lambda_1} = \nu$, az egyenlet lesz $$k_1 + \nu k_2 = 0$$

ez pedig körsort jelent. Tehát a három körre azt az megszorítást kell tennünk, hogy egyik se tartozzék a másik kettő által meghatározott körsorhoz, különben az I egyenlet nem körhálózatot, hanem körsort értelmez. Ezt lesz ezt a feltételt analytikailag is kifejezni. Az (1.) alatti három egyenlet mindegyike homogen és lineáris a következő négy mennyiségben

$$x^2+y^2, \quad -2x, \quad -2y, \quad 1$$

Ez a három egyenlet tehát csak akkor lesz egymástól független, vagyis az I alatti egyenlet csak akkor fog igazi körhálózatot adni, ha a rendszer mátrixának

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & b_1 & c_1 \\ 1 & a_2 & b_2 & c_2 \\ 1 & a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

harmadfoku aldeterminansai nem mind nullák. Ez a fenti feltétel analytikai kifejezése. Ha ezen csonka mátrix valamennyi harmad foku aldeterminansa nulla, az I egyenlet körvel forg érintőleges, mert akkor létezik a három körfüggvény között egy ilyen identitás

$$\lambda_1 k_1 + \lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_3 = 0$$

Ha teljesül a három körre tett feltétel, akkor az három kör három potenciósorának egymástól különböző lesz, tehát mutatnak egymást egy pontban az három kör potenciópontjában, P-ben. Ennek az három kör koré vonatkozó potenciója nyilvánvaló, vagyis ha (x,y) a P pont koordinátái, akkor $k_1^0 = k_2^0 = k_3^0 = p$ az közös potenciója. De ki fogjuk mutatni, hogy a P pontnak a körhálózat bármely tagjára nézve ugyanaz a p a potenciója. Ezért a potenciós nem egyéb, mint a kör függvényének értéke az illető pont koordinátái mellett, feltéve, hogy x^2 és y^2 együtthatója 1. Hogy az körhálózat egy általános tagjának $k_1 + \mu k_2 + \mu k_3$ függvényében x^2 és y^2 együtthatója 1 legyen, szorozzuk ezt $\frac{1}{1+\mu}$-vel, amivel együtthatója x^2 és y^2 közös értékét (egyenlő) adja, úgyhogy ugyanezen kör függvénye

$$\frac{k_1 + \lambda k_2 + \mu k_3}{1+\lambda+\mu}$$ lesz.

Ha most állam kiválasztjuk az P pont x_0, y_0 koordinátáit, k_1, k_2, k_3 közös kiválasztva $k_1 = p$ és így a P pontnak ezen általános körre vonatkozó potenciója

$$p = \frac{1+\lambda+\mu}{1+\lambda+\mu} = p$$

Tehát P-nek a körhálózat összes tagjára vonatkozó potenciója ugyanaz. Ez most három eset lehetséges.

1) Ha $p > 0$, a körhálózat összes tagjára nézve közös pont

belőle az összes körökhez egyenlő hosszú érintők húzhatók, úgyhogy ha ezzel a közös érintőhosszal S-ből kört írunk, ez a hálózat összes köreit derékszög alatt vágja.

2.) Ha $p=0$, S pont rajta van a hálózat összes körein, ekkor tehát a körhálózat áll a S ponton átmenő körök rendszeréből.

3.) Ha $p<0$, S valamennyi körnek belső pontja, a rajta átmenő legrövidebb körhúrok egyenlő hosszúak.

Ennek a három esetnek részletes tárgyalása végett válaszszuk a coordinatarendszer origójául magát a S potentiapontot, az egymásra merőleges tengelyek iránya különben tetszőleges lehet. Kívánható, hogy ebben a speciális coordinatarendszerben így írható a hálózat egy általános körének az egyenlete

$$x^2+y^2-2\lambda x-2\mu y+p=0$$

mert ezen négyzetes egyenletben egyfelől benn van a két változó parameter, másfelől a coordinatarendszer nullapontjában, vagyis S pontban a függvény értéke p. Ez tehát a hálózat egyenlete vagy zárjeles alakban írva az egyenletet

$$(x-\lambda)^2+(y-\mu)^2-(\lambda^2+\mu^2-p)=0 \qquad \text{II.}$$

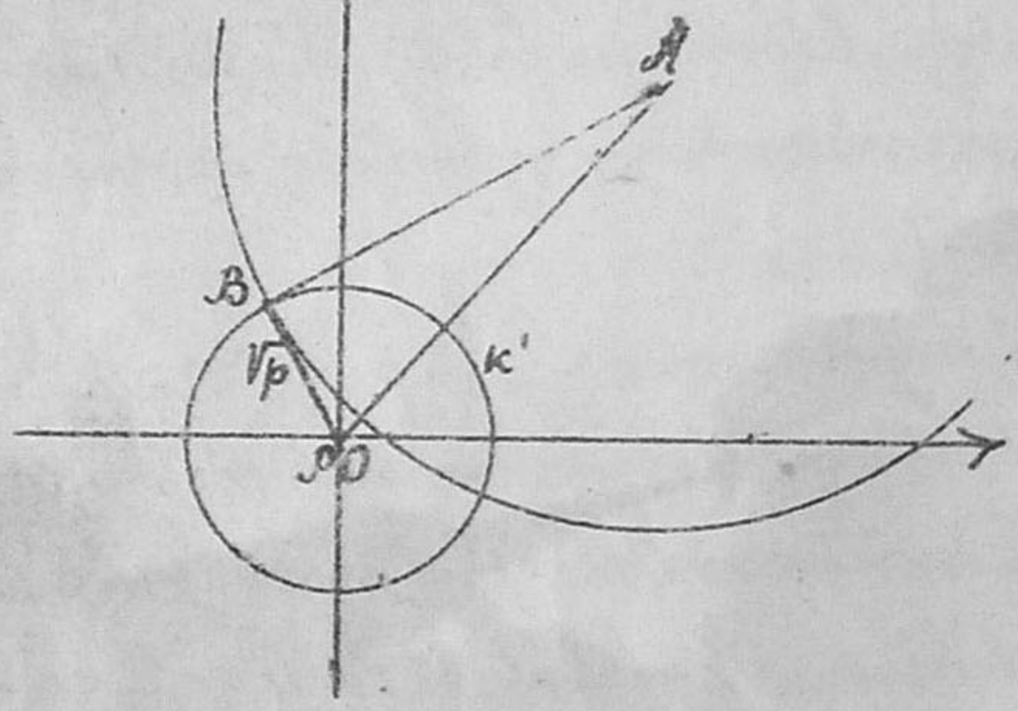
Ebből már most könnyebben kiolvashatjuk a körhálózat geometriai sajátságait a fenti három esetben.

1.) Ha $p>0$, látható, hogy háromféle kör szerepel a hálózatban, reális kör, pontkör és képzetes kör, és pedig

α.) ha $\lambda^2+\mu^2>p$, a hálózat illető köre reális, mert ekkor a II. egyenletben a kör sugarának a négyzete $\lambda^2+\mu^2-p>0$; λ és μ jelenti a reális kör centrumának coordinatáit.

β.) ha $\lambda^2+\mu^2=p$, a hálózat illető köre pontkör, mivel ekkor II.-ben a kör sugara 0.

γ_3 ha $\lambda^2+\mu^2 < p$, a hálózat illető köre képzetes, mert az sugara képzetes. Ezen három féle körök rendszere geometriailag egyszerűen áttekinthető, ha figyelembe vesszük a ponthalmazokat. A β_3 alatt szerint mindama λ és μ paramétereket, melyek eleget tesznek az $\lambda^2+\mu^2=p$ feltételnek, ponthalmazok koordinátáit adják. Nyilvánvaló ebből, hogy a hálózat ponthalmazainak geometriai helye az $x^2+y^2-px=0$ egyenlettel értelmezett kör, melynek sugara $\sqrt{p}$, centruma a P origo. Legyen ez a k' kör. Már most mindama λ és μ paraméterek, melyek az β_1 alatt



3

említett körök megfelelőleg elegett tesznek, az $\lambda^2+\mu^2>p$ feltételnek, reális köröket szolgáltatnak, amelyeknek sugara $k=\sqrt{\lambda^2+\mu^2-p}$. Vagyis más szóval: a k' körön kívüli összes pontok a hálózat reális köreinek képezik centrumait és egy itt felvett $A(\lambda,\mu)$ centrumhoz tartozó kör megkapjuk, ha A-ból érintőt húzunk az k' körhöz és annak hosszával kört írunk. $\overline{AB}$ lényeg az keresett kör sugara, mert az AOB derékszögű háromszögből $\overline{AB}^2=\overline{AO}^2-\overline{OB}^2=\lambda^2+\mu^2-p$. Ha ezt ismételjük a k' körön kívüli összes pontokra, kapjuk a hálózat összes reális köreit. Mindazon λ és μ paraméterek, melyekre nézve $\lambda^2+\mu^2<p$, a γ_3 eset értelmében képzetes köröket szolgáltatnak, vagyis a k' körön belüli centrumokhoz képzetes körök tartoznak.

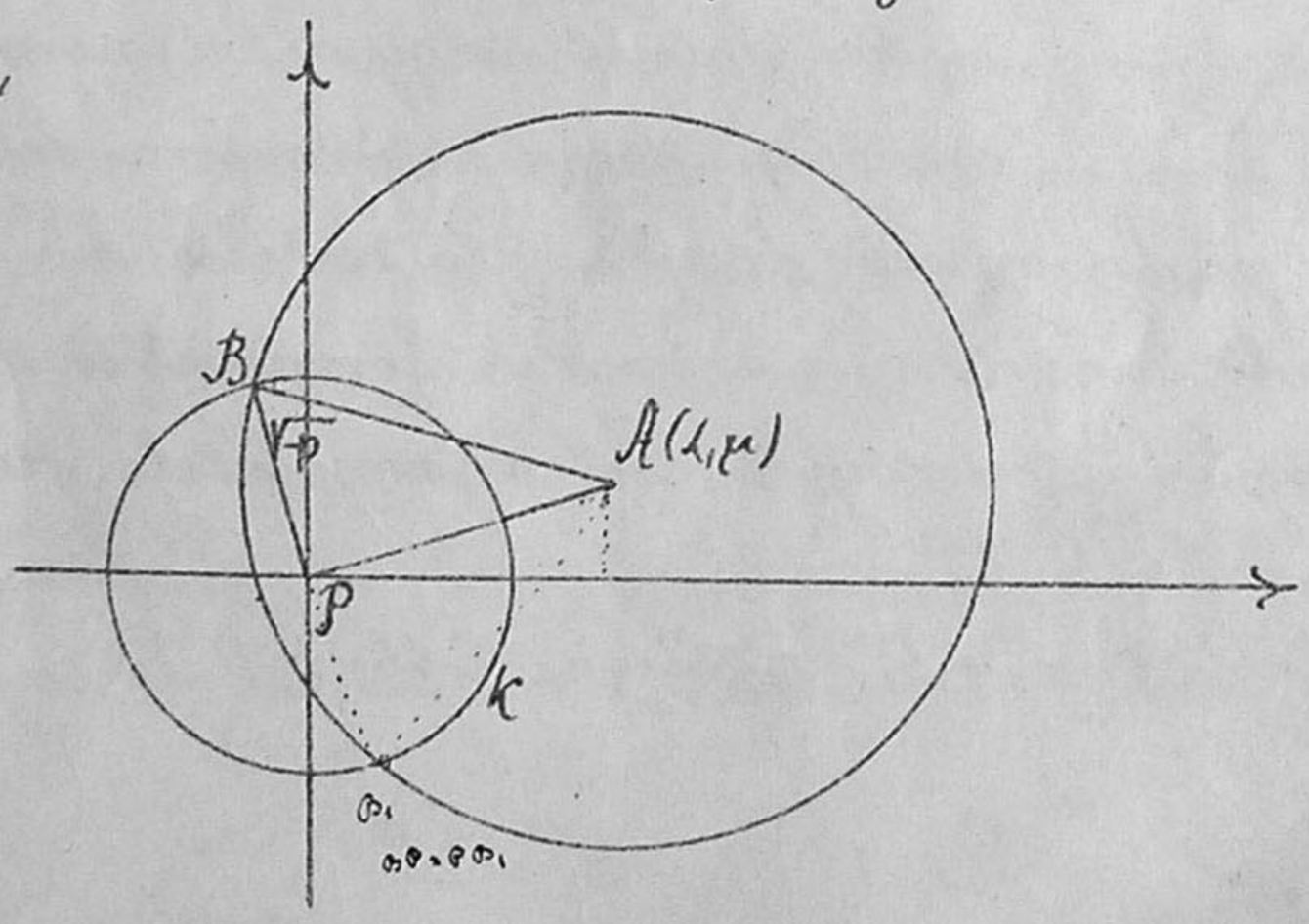
Egy most világos képet nyerünk a körhálózatról abban az

esetben, midőn a potentiápont valamennyi körnek külső pontja, azaz $p>0$. Az egész hálózatot meghatározza a k' kör, mint a rendszer pontköreinek geometriai helye, minden pont a k' körön kívül egy reális kör centruma, minden pont a körön belül egy képzetes kör centruma.

2., Ha $p=0$, a II egyenletből azonnal látható, hogy csak kétféle kör szerepel a hálózatban reális és pont-kör, és pedig ha $\lambda^2+\mu^2>0$, a kör reális ha $\lambda^2+\mu^2=0$ a kör pontkör a harmadik eset nem lehetséges, mert $\lambda^2+\mu^2$ nem lehet negatív. Ebben az esetben tehát egy pontkörre van a hálózatnak, ez maga a P pont miután $\lambda^2+\mu^2=0$ csak úgy teljesül, ha külön $\lambda=0$ és $\mu=0$. Ezen kívül minden pont egy reális kör centruma, melyek átmennek valamennyien ezen a pontkörön.

3., Ha $p<0$, a II egyenletből kifolyólag csupa reális körök alkotják a hálózatot, mert λ és μ bármilyen értéke mellett reális-körsugarat kapunk t. i. $\sqrt{\lambda^2+\mu^2-p}$. Erről a hálózatfajról is egyszerű geometriai képet alkothatunk magunknak. Vegyük ugyanis a hálózat körei közül azt, melynek sugara a legkisebb. A $\sqrt{\lambda^2+\mu^2-p}$ legkisebb értéke nyilvánvalóan $\lambda=0$ és $\mu=0$ mellett adódik, tehát a keresett kör a P centrum, $\sqrt{-p}$ sugarú kör. Legyen ez a k kör. Ennek segélyével a sík egy tetszőleges A(λ,μ) pontjához mint centrumhoz tartozó kört úgy kapjuk meg, hogy A pontot összekötve

4

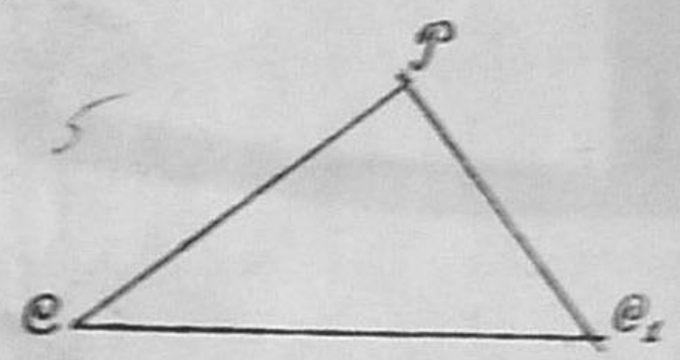


a S origoval, erre S-ben merőlegest emelünk. A merőlegesnek az A körrel való B metszéspontján át A-ból kört írunk. Az ASB derékszögű háromszögből ugyanis következik, hogy a szerkesztett kör sugara

$$AB = \sqrt{AS^2 + BS^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - p}$$

Ha ezt a szerkesztést az sík összes pontjaira mint centrumokra ismételjük, kapjuk a körhálózat összes körét, a melyek tehát mind átmennek az O ponton. És ezeknek az O ponton átmenő legrövidebb húrja ugyanakkora, mint az l. i. a k kör átmérője.

Tételezzük fel most valami analytikai módszert keresve, melynek által általános coordinatarendszer mellett el tudjuk dönteni, hogy a k sugarú fajt melyikéhez tartozik a körhálózat és hogy minemű az f potentiál. E végett állítsuk fel az összes köröket derékszög alatt metsző kör egyenletét. Ha ez megvan, ezen kör sugarának négyzete adja az f potentiált, míg a fajt illetőleg az első, második, illetőleg harmadik fajjal van dolgunk, a szerint a mint ezen kör sugara reális, 0, illetőleg képzetes. Állapítsuk meg először annak a feltételét, hogy két C és C_1 centrumu kör mikor metsszi egymást derékszög alatt. Ha az



S metszéspont S (az egyik), a derékszögű érintési feltétele, hogy S-ben a két érintő vagy a két normális merőleges legyen egymásra, tehát hogy CSC_1 Δ derékszögű háromszög legyen. Ha az első kör centrumának koordinatái a, b, sugara r, a második kör adatai a_1, b_1 r_1, akkor ezen derékszögű háromszögből Pythagoras tétele szerint következik, hogy

$$(a_1 - a)^2 + (b_1 - b)^2 - r^2 - r_1^2 = 0$$

vagyis

$$a^2 + b^2 - r^2 + a_1^2 + b_1^2 - r_1^2 - 2aa_1 - 2bb_1 = 0$$

De ismeretes jelölés szerint $a^2+b^2-r^2=c$, $a_1^2+b_1^2-r_1^2=c_1$, úgyhogy a derékszögű metszés feltétele a következő egyenlet.

$$c+c_1-2aa_1-2bb_1=0$$

Ezt tudva, könnyü lesz meghatározni azon kör egyenletét, mely a hálózat három alapkörét s igy valamennyi körét derékszög alatt metszi. Legyen az keresett kör centruma (ab), sugara r és egyenlete

$$x^2+y^2-2ax-2by+c=0$$

Mivel az a kör az első derékszög alatt metszi, áll, hogy

$$c_1-2aa_1-2bb_1+c=0$$

mivel a második és harmadikat is derékszög alatt metszi, áll továbbá hogy

$$c_2-2aa_2-2bb_2+c=0$$

$$c_3-2aa_3-2bb_3+c=0$$

Ez a négy egyenlet, mely $1, -2a, -2b$ és c-ben lineáris és homogén, csak úgy állhat egyszerre, ha a rendszer determinansa eltünik, azaz ha

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ c_1 & a_1 & b_1 & 1 \\ c_2 & a_2 & b_2 & 1 \\ c_3 & a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Ha ezt a determinanst az első sor elemei szerint kifejtjük, kapunk egy egyenletet, melyet kielégit az orthogonális kör minden pontja, a mely kiköt az orthogonális kör egyenlete. Legyen ez az egyenlet rövidített coefficiens jelölésével

$$a_{11}(x^2+y^2)+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$$

a hol az a_{11} az (x^2+y^2) elem aldeterminansa stb.. Már most tudjuk, hogy ez a kör reális, ponthkör illetőleg képzetes, a szerint a mint

$$a_{13}^2 + a_{23}^2 - a_{11}\,a_{33} \gtreqless 0 \qquad \text{I.}$$

s ehhez képest első, második illetőleg harmadik faju körhálózattal van dolgunk. Miután továbbá a potentia $p = r^2$, az egyenletből pedig

$$r^2 = \frac{a_{13}^2 + a_{23}^2 - a_{11}\,a_{33}}{a_{11}^2} \qquad \text{II.}$$

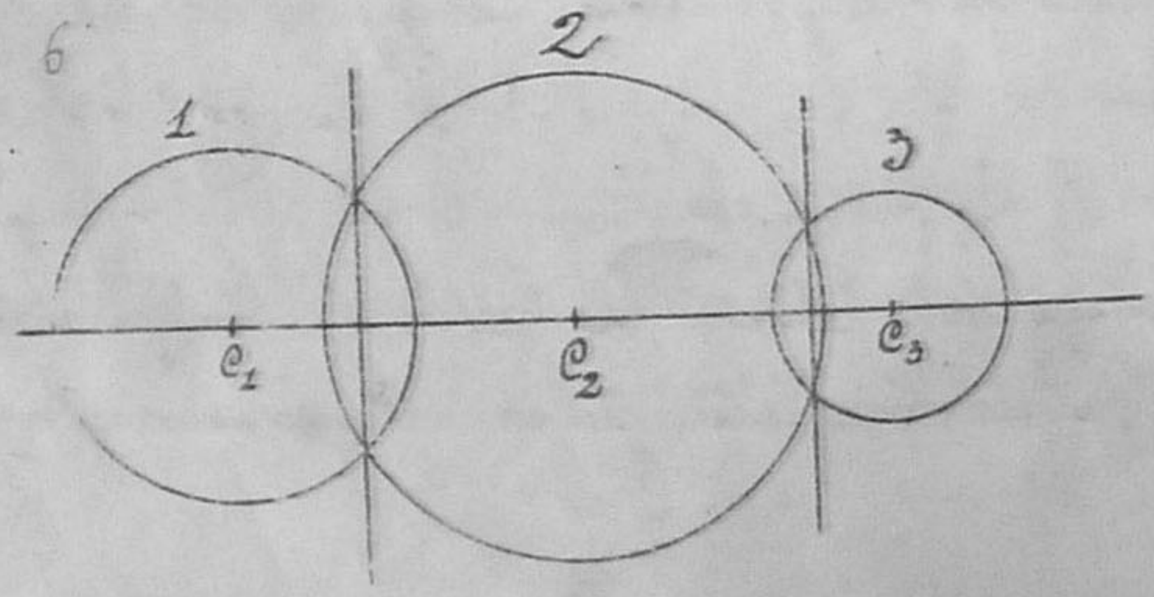
ezzel a potentia is meg van határozva. Ha tehát adva van három kör egyenlete, megszerkesztjük a fenti negyedfoku determinánsnak egyenletét, melynek coefficienseinek kifejtésével az orthogonális kör egyenletét, melynek coefficienseiből alkotott I alatti kifejezés dönt a három kör által meghatározott hálózat fajára nézve. Az orthogonális kör centruma nem egyéb mint a potentiapont, s ennek coordinatái a kör egyenletéből

$$\frac{a_{13}}{a_{11}} \quad \text{és} \quad \frac{a_{23}}{a_{11}}$$

Előjöhet az az eset, hogy az orthogonális kör egyenessé fajul. Ez akkor következik be, ha x^2+y^2 szorzója eltünik, vagyis ha a determinánsban az (x^2+y^2) elem aldeterminánsa

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Ez pedig azt jelenti, hogy akkor a három centrum egy egyenesen fekszik. A három potentiavonal merőleges erre a centralis egyenesre s vagy a potentiapont a végtelenbe jutó, a centrális egyenes pedig az orthogonális kör. Ekkor a körhálózat azon körök rendszeréből áll, me-



lyek extrem egyenest derékszög alatt metszik. Ha tehát a centrális egyenes mindegyik pontjából végtelen sok kört irunk, ezen kétszeresen végtelen sok kör adkolja a körhálózatot

Ilyenformán tiszta képet nyertünk a körhálózatok különböző fajairól.

Vegyünk most négy kört

$$k_1 \equiv x^2+y^2-2a_1x-2b_1y+c_1=0$$
$$k_2 \equiv x^2+y^2-2a_2x-2b_2y+c_2=0$$
$$k_3 \equiv x^2+y^2-2a_3x-2b_3y+c_3=0$$
$$k_4 \equiv x^2+y^2-2a_4x-2b_4y+c_4=0$$

és vizsgáljuk, mi annak geometriai jelentése, ha ezen négy kör függvényét parameteresen összekapcsoljuk, vagyis mi az

$$\lambda_1 k_1+\lambda_2 k_2+\lambda_3 k_3+\lambda_4 k_4=0 \qquad \text{III.}$$

egyenlet geometriai jelentése. Ez az egyenlet is kört jelent, mert x^2 és y^2 szorzója azonos, t.i $(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4)$ és az xy-os tag hiányzik. Miután egyik parameterrel kereztül lehet osztani, az egyenletben tulajdonképpen csak három változó parameter szerepel, amiknek megfelelőleg ez az egyenlet a köröknek háromszorosan végtelen nagy sokaságát értelmezi. Ki fogjuk mutatni, hogy ez nem a körökből kivalogatott sokaságot, hanem a sik köreinek összességét jelenti. Vagyis ha veszszük a sik egy tetszőleges körét

$$k=x^2+y^2-2ax-2by+c$$

mindig meg lehet határozni az $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ és λ_4 parametereket úgy, hogy $k \equiv \lambda_1 k_1+\lambda_2 k_2+\lambda_3 k_3+\lambda_4 k_4$ legyen, vagyis kimutatjuk, hogy ez a tetszésszerint felvett k kör az III egyenlettel értelmezett körök összességéhez hozzátartozik. Nyilvánvaló, hogy

ezen λ-k eleget tenni tartoznak a következő 4 egyenletnek, hol K Kör a

4 Kör paraméteres Koppen- $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1$

bisa által Kellékként $a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 + a_3\lambda_3 + a_4\lambda_4 = a$

$b_1\lambda_1 + b_2\lambda_2 + b_3\lambda_3 + b_4\lambda_4 = b$

$c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 + c_3\lambda_3 + c_4\lambda_4 = c$

Ezen egyenletekből meghatározhatjuk $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ és λ_4, ha a rendszer determinansa nulltól különböző.

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & b_1 & c_1 \\ 1 & a_2 & b_2 & c_2 \\ 1 & a_3 & b_3 & c_3 \\ 1 & a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix} \neq 0$$

Tehát állításunk feltételébe megy-

Ez tehát annak a feltétele, hogy a III alatti egyenlet a sík köreinek összességét értelmezze. Ha ez a determinans eltünik, léteznek olyan szorzók, miszerint az

$$\lambda_1 k_1 + \lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_3 + \lambda_4 k_4 \equiv 0$$

identitás teljesüljön, de ez azt jelenti, hogy akkor a negyedik kör hozzátartozik a másik három által meghatározott körhálózathoz. Ha tehát a négy kör coefficienseiből alkotott determinans nulla, a III alatti egyenlet körhálózatot értelmez. –

A másodrendü görbék elmélete.

Valamely görbe másodrendü, ha egyenlete pontcoordinatákban másodfoku. Ha általános coordinatarendszerben* a pontcoordinaták x, y, z, akkor a legáltalánosabb másodfoku egyenlet homogén alakja

* Trimetrikus

$$f(x,y,z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy = 0$$

a hol $\quad a_{23} = a_{32}\,, \quad a_{31} = a_{13}\,, \quad a_{12} = a_{21}$

Ez tehát az általános másodrendű görbe homogén egyenlete.

A következő vizsgálatokban nagy szerepet fognak játszani ezen másodfoku függvénynek az egyes változók szerint vett parciális deriváltjai: Ha mindegyikben eltekintünk a közösen fellépő 2 factortól, akkor az x, y és z szerinti félderiváltak megfelelőleg

$$f_1(x,y,z) = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z$$
$$f_2(x,y,z) = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z$$
$$f_3(x,y,z) = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z$$

Ezeknek idetermináns át

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = A$$

mely a coefficiensek tulajdonságai alapján symmetrikus, nevezzük ezen másodrendű görbe determinánsának.

Könnyen belátható, hogy ha az x szerinti deriváltat x-el, az y szerintit y-al és az z szerinti deriváltat z-vel szorozzuk, ezen szorzatok összege kiadja magát a függvényt, azaz

$$x f_1(x,y,z) + y f_2(x,y,z) + z f_3(x,y,z) = f(x,y,z)$$

Egy másik tulajdonsága ezen deriváltaknak az, hogyha ezekben x, y, z helyett egy tetszőleszerinti pontnak (x_2, y_2, z_2) coordinatáit írjuk be, s szorzókul az imént látott módon alkalmazzuk egy másik pont x_2, y_2, z_2 coordinatáit, ezen szorzatok összege a két pont coordinatáiban symmetrikus, azaz nem változtatja értékét, ha a két pont coordinatai szerepet cserélnek, Ugyanis

$$x_2 f_1(x_1,y_1,z_1) + y_2 f_2(x_1,y_1,z_1) + z_2 f_3(x_1,y_1,z_1) \equiv a_{11}x_1x_2 + a_{22}y_1y_2 +$$
$$+ a_{33}z_1z_2 + a_{23}(y_1z_2+y_2z_1) + a_{31}(x_1z_2+x_2z_1) + a_{12}(x_1y_2+x_2y_1)$$
$$\equiv x_1 f_1(x_2,y_2,z_2) + y_1 f_2(x_2,y_2,z_2) + z_1 f_3(x_2,y_2,z_2)$$

A baloldali összeget röviden $f^{(12)}$ a jobboldalit $f^{(2,1)}$ jelölve, irhatjuk hogy

$$f^{(12)} \equiv f^{(21)}$$

Ezt az összeget, melyben ugyanazokat az coordinatákat alkalmazzuk szorzókul, a melyeket a deriváltakba helyettesitettünk, egyenlő felső indexekkel jelölve, nyilvánvaló, hogy

$$f^{(11)} \equiv x_1 f_1(x_1,y_1,z_1) + y_2 f_2(x_1,y_1,z_1) + z_1 f_3(x_1,y_1,z_1) = f(x_1,y_2,z_1)$$

vagyis annyi mint az $f(x,y,z)$ függvény értéke, ha abban az első pont coordinatáit helyettesitjük. Ugyanigy

$$f^{(22)} = f(x_2,y_2,z_2)$$

Ezeknek előrebocsátása után hozzáfoghatunk az másodrendü görbék tulajdonságainak tárgyalásához.

Vizsgáljuk először az pontsor arizonyitó az görbékez (görbe alatt itt egyszerüen másodrendü görbét értve). Legyen a pontsornak két pontja $P_1(x_1,y_1,z_1)$ és $P_2(x_2,y_2,z_2)$ akkor az benne változó pont x,y,z coordinatái igy fejezhetők ki

$$x = x_1 + \lambda x_2$$
$$y = y_1 + \lambda y_2$$
$$z = z_1 + \lambda z_2$$

az hol λ jelenti a változó pont egyszerü arányszámcoordinatáját a P_1 és P_2 alappontokra vonatkozólag. Hogy a pontsornak a görbékez tartozó pontjait megkapjuk, be kell helyettesiteni az görbe egyenletébe x,y és z erre kifejezéseit, s az nyert egyenletből λ értékeit oneghatározni. Ezen λ értékek fogjáik adni az görbén fekvő pontok egyszerü

arányosoínorit. A behelyettesítésre felhasználjuk a görbe $\mathfrak{L}_2$ pontjának fenti alakját, amely szerint

$$f(x,y,z) = x f_1(x,y,z) + y f_2(x,y,z) + z f_3(x,y,z)$$

A helyettesítés folytán lesz

$$f_1(x_1+\lambda x_2, y_1+\lambda y_2, z_1+\lambda z_2) = a_{11}(x_1+\lambda x_2) + a_{12}(y_1+\lambda y_2) + a_{13}(z_1+\lambda z_2) = f_1^{(1)} + \lambda f_1^{(2)}$$

a hol $f_1^{(1)}$ az x szerinti félderivált értéke a $\mathfrak{L}_1$ pont coordinatái mellett. Hasonló jelentése van $f_1^{(2)}$-nek. Tehát

$$\begin{aligned} f_1(x_1+\lambda x_2, y_1+\lambda y_2, z_1+\lambda z_2) &= f_1^{(1)} + \lambda f_1^{(2)} \\ \text{éppígy} \quad f_2(x_1+\lambda x_2, y_1+\lambda y_2, z_1+\lambda z_2) &= f_2^{(1)} + \lambda f_2^{(2)} \\ \text{és} \quad f_3(x_1+\lambda x_2, y_2+\lambda y_2, z_1+\lambda z_2) &= f_3^{(1)} + \lambda f_3^{(2)} \end{aligned} \qquad \left| \begin{array}{l} \cdot x_1+\lambda x_2 \\ : y_1+\lambda y_2 \\ \cdot z_1+\lambda z_2 \end{array} \right.$$

Elvégezve az $(x_1+\lambda x_2)$ stb.-vel való megfelelő szorzást, s az összeget a hatványai szerint rendezve, kapjuk λ számára a következő alakú egyenletet

$$f^{(11)} + 2\lambda f^{(12)} + \lambda^2 f^{(22)} = 0 \qquad \text{I.}$$

Ebből pedig adódik λ számára vagy két reális és különböző, vagy két összeső, vagy két képzetes érték, miheti képest az felvett egyenes két pontban metszi, érinti, illetőleg nem metszi a görbét. Ebből az I egyenletből vonjunk néhány további következtetést. Tegyük fel, hogy $\mathfrak{L}_1$ a görbe pontja, azaz

$$f^{(11)} = f(x_1, y_1, z_1) = 0$$

akkor a megjelölés egyenletből a szabad tag kiesik, az egyenlet egyik gyöke lesz $\lambda = 0$, azaz az egyenes, egyszer $\mathfrak{L}_1$-ben metszi a görbét, az onnét metszéspont coordinatája adódik az λ többi faktor elhagyása utáni fennmaradó lineáris egyenletből. Most az második azaz $\mathfrak{L}_2$ pontot kösse ehhez az feltételhez, hogy $\mathfrak{L}_2$-gyel együtt elegat tegyen a következő egyenletnek $f^{(22)} = 0$

Ha ilyen az P_2 pont, az I. négyzetes egyenletből kiesik a λ-ás tag is s marad a $\lambda^2 f^{(22)} = 0$ hiszta négyzetes egyenlet, amelynek gyöke $\lambda = 0$. Ekkor tehát a másodlik metszéspont összeesik az elsővel P_1-ben, vagyis az egyenes érinti a görbét a P_1 pontban. Az $f^{(12)} = 0$ egyenlettel az P_2 még nincsen egészen meghatározva, mert lehet az $f^{(12)} = 0$ egyenes bármely pontja. Ha tehát P_2 ezen az egyenesen változik és ennek jelölésére koordinátái x, y, z látható, hogy az P_1 ponthoz tartozó érintő egyenlete

$$x f_1^{(1)} + y f_2^{(1)} + z f_3^{(1)} = 0$$

Ez az érintő mint egyenes csak akkor határozott, ha a három együttható: $f_1^{(1)}, f_2^{(1)}, f_3^{(1)}$ nem valamennyi 0. Hogy tehát a görbe P_1 pontjában határozott érintője legyen a görbének, ahhoz szükséges, hogy a P_1 koordinátái mellett vett földerivváltak közül legalább egy nulltól különböző legyen. Ellenben határozatlan lesz az érintő az P_1 pontban, ha

$$f_1^{(1)} = f_2^{(1)} = f_3^{(1)} = 0$$

Az ilyen pontot a görbe singuláris pontjának nevezzük. Kérdés van-e a görbének ilyen singuláris pontja? Ha van, akkor ennek koordinátái ki kell elégítsék a következő három lineáris és homogén egyenletet:

$$\begin{aligned} f_1 &\equiv a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0 \\ f_2 &\equiv a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0 \\ f_3 &\equiv a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = 0 \end{aligned}$$

Ezen egyenletrendszernek azonban csak akkor van nulltól különböző megoldása, ha determinánsa eltűnik. Ez a determináns pedig a görbe determinánsa. Látható, hogy a másodrendű görbék két főcsoportra oszlanak, a szerint a mint determinánsuk nulltól különböző vagy nulla.

1.) Ha $A \neq 0$, akkor nincsen singuláris pont, a görbének mindenütt határozott érintője van. A görbe igazi másodrendű görbe.

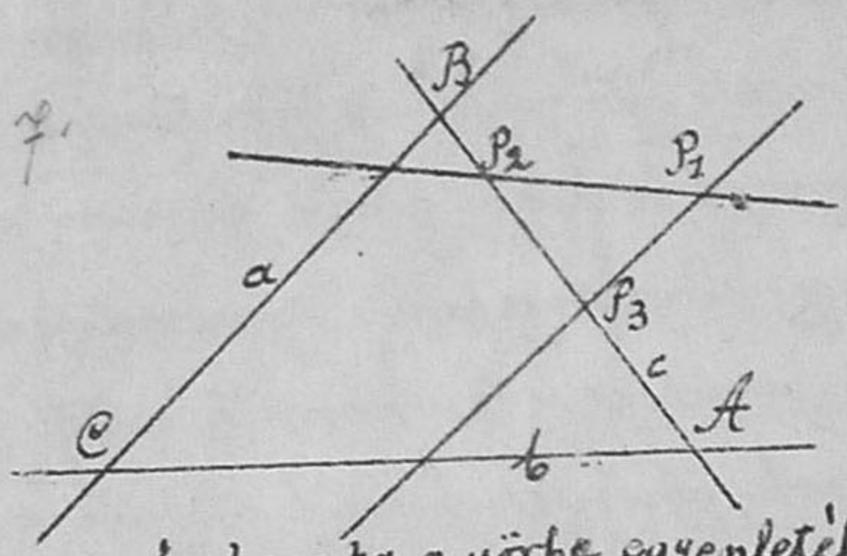
2.) Ha $A = 0$, akkor azonnak a görbének singuláris pontjai, s akkor a mint látni fogjuk a görbe nem igazi másodrendű görbe, hanem szétesik egyenesek rendszerére. Ugyanis A egy harmadfoku symmetrieus determinans lévén, ha $A = 0$, a homogén rendszer természete attól függ, hogy milyenek az aldeterminansok, melyek közül abban az esetben-elég tekintetbe venni a főátló irányában eső aldeterminansokat, A_{11}, A_{22}, A_{33}. Tehát a következő alesetek jönnek tekintetbe.

a.) A_{11}, A_{22}, A_{33} közül legalább egy nem nulla, pl. $A_{33} \neq 0$; ekkor a harmadik egyenlet függ, a máiak ketlöből azonban meghatározható az ismeretlenek viszonya. Ekkor tehát egy singuláris pont létezik. Ki fogjuk mutatni, hogy ilyenkor a görbe szétesik két egyenesre. Ugyanis legyen S_1 a singuláris pont, coordinatái x_1, y_2, z_1, akkor ezek egyszerre nullá teszik az f_1, f_2 és f_3 földeriváltakat s igy magát a függvényt, vagyis S_1 rajta van a görbén. Legyen most S_2 a görbe egy máiik pontja és kérdezzük, vannak-e még oly $(S_1 S_2)$ egyenesnek a görbén fekvő pontjai. Erre a kérdésre megfelel az

$$f^{(11)} + 2\lambda f^{(12)} + \lambda^2 f^{(22)} = 0$$

egyenlet, melyben a mostani esetben az összes coefficienseck nulla értékűek, tehát az egyenlet identitás, vagyis a $(S_1 S_2)$ egyenes minden pontja s igy maga az egyenes is a görbéhez tartozik. Tagyis ha a S_1 singuláris pontot összekötjük a görbe egy pontjával, ez az összekötő egyenes egészen a görbéhez tartozik. Most azt fogjuk kimutatni, hogy ilyen egyenes a mostani feltételek mellett csak kettő létezik. Ha ugyanis $A = 0$ és $A_{33} \neq 0$; akkor a S singuláris pont

coordinatáinak viszonya $x : y : z = A_{31} : A_{32} : A_{33}$



s mivel $A_{33} \neq 0$, z is $\neq 0$, azaz a P_2 pont nem esik a coordinátaháromszög c oldalára, hanem azon kívül van. Maga a c oldal azon pontokban metszi a görbét, melyeknek harmadik coordinátája

úgyhogy ha a görbe egyenletében $z=0$

$z=0$ a hátramaradó

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0$$

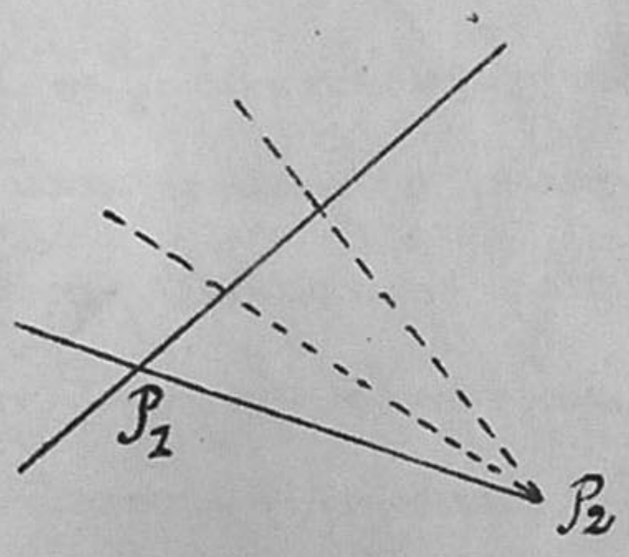
egyenlet szolgáltatja a c oldalon fekvő görbepontok x és y coordinátáit. Ezen négyzetes egyenlet discriminansa

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = A_{33} \neq 0$$

tehát két különböző P_2 és P_3 görbepont fekszik a c oldalon és az előbbi tétel alapján a (P_1P_2) és (P_1P_2) egyenesek a görbéhez tartoznak. Több egyenes nincs, úgyhogy a másodrendű görbe ebből a két egyenesből áll, melyek egymást a P_1 singularis pontban metszik. Ha pedig $A_{33} < 0$ a c oldalon fekvő két pont reális és különböző, tehát a görbe két reális egyenesből áll, ha pedig $A_{33} > 0$, P_2 és P_3 képzetes, a görbe két képzetes egyenesből áll, melyek egymást a P_2 reális singularis pontban metszik. Ekkor tehát a görbének csak egy reális pontja van.

β) Ha valamennyi másodfokú aldeterminans eltűnik, azaz $A_{11} = A_{22} = A_{33} = 0$, de a coefficienseknek nem mind nullák, akkor csak egy független egyenletünk van a singularis pont három coordinátája számára. Ekkor tehát végtelen sok singularis pontja van a görbének, melyek együttesen az ezen független egyenlettel értelmezett egyenest alkotják. Kimutatjuk, hogy ebben az esetben maga ez a singularis

egyenes képezi a másodrendű görbét, ha azt kétszer számítjuk. Ugyanis legyen P_1 az singularis egyenes egy pontja és képzeljük fel, hogy volna a görbének ezen az egyenesen kívül is pontja pl. P_2; akkor az előbbi eset első követi kezése alapján a P_1P_2 egyenes hozzátartoznék a görbéhez, s pedig a singularis egyenesnek bármely pontja legyen is P_1, vagyis a P_2 pontot a singularis egyenes összes pontjaival összekötő egyeneseknek a görbéhez tartozniuk, tehát a sík összes pontjai a görbéhez tartoznának, a mi azonban csak abban az esetben lehetséges, ha



f maguk a coefficienek is mind nullák

Látjuk tehát, hogy csak akkor van igazi másodrendű görbénk, ha determinansa nem null; ha a determinans null, de nem mindegyik átlói aldeterminans null, akkor a görbe az egyetlen reális singularis pontján átmenő két egyenesből áll; ha valahenyi átlói aldeterminans 0, de nem mindegy coefficiens 0, akkor a görbe egy reális singularis egyenesből áll. mely kétszer számit s ha az elemek is mind nullák, az egyenlet identikusan nulla, tehát síkot jelent.

Láttuk, hogy az $P_1(x_1, y_1, z_1)$ és $P_2(x_2, y_2, z_2)$ pontok által meghatározott pontsorból azok a pontok tartoznak a görbéhez, melyeknek egyszerű arányszáma λ eleget tesz ennek a négyzetes egyenletnek

$$f^{(11)} + 2\lambda f^{(12)} + \lambda^2 f^{(22)} = 0 \qquad (1)$$

Ha P_1 a görbének pontja, P_2 pedig úgy változik, hogy $f^{(12)} = 0$ legyen, kaptuk az érintő egyenletét

$$x f_1^{(1)} + y f_2^{(1)} + z f_3^{(1)} = 0$$

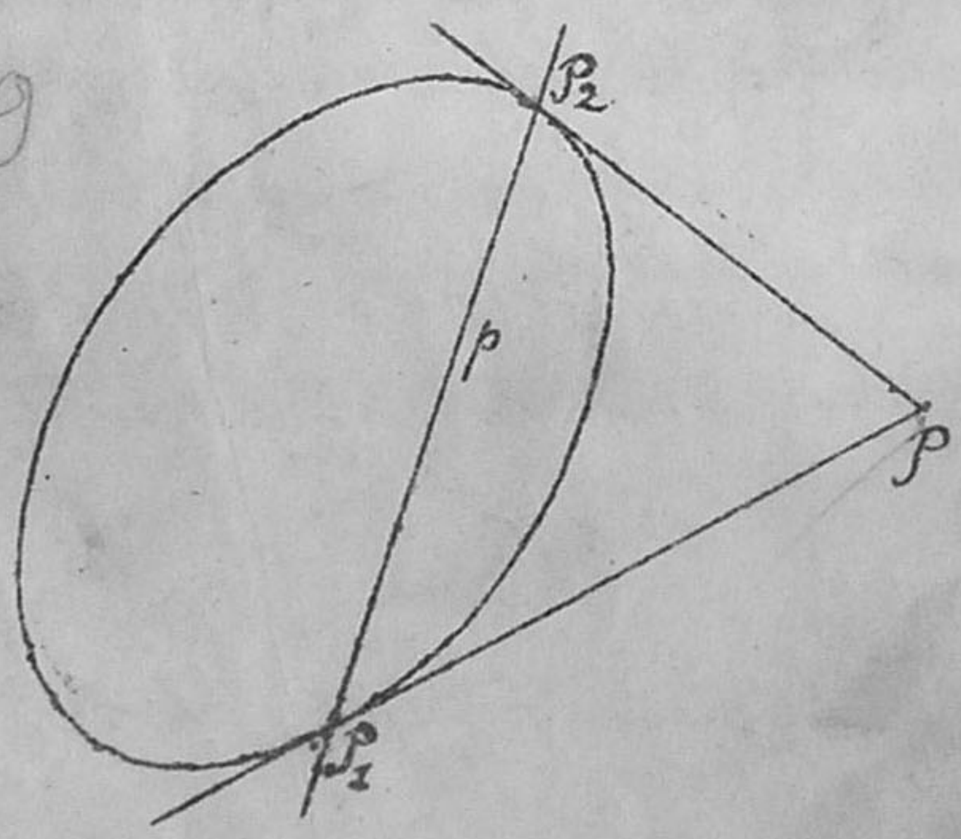
érintő egyenlete

Most tegyük fel, hogy P_1 a sík egy tetszőleges pontja és kérdezzük,

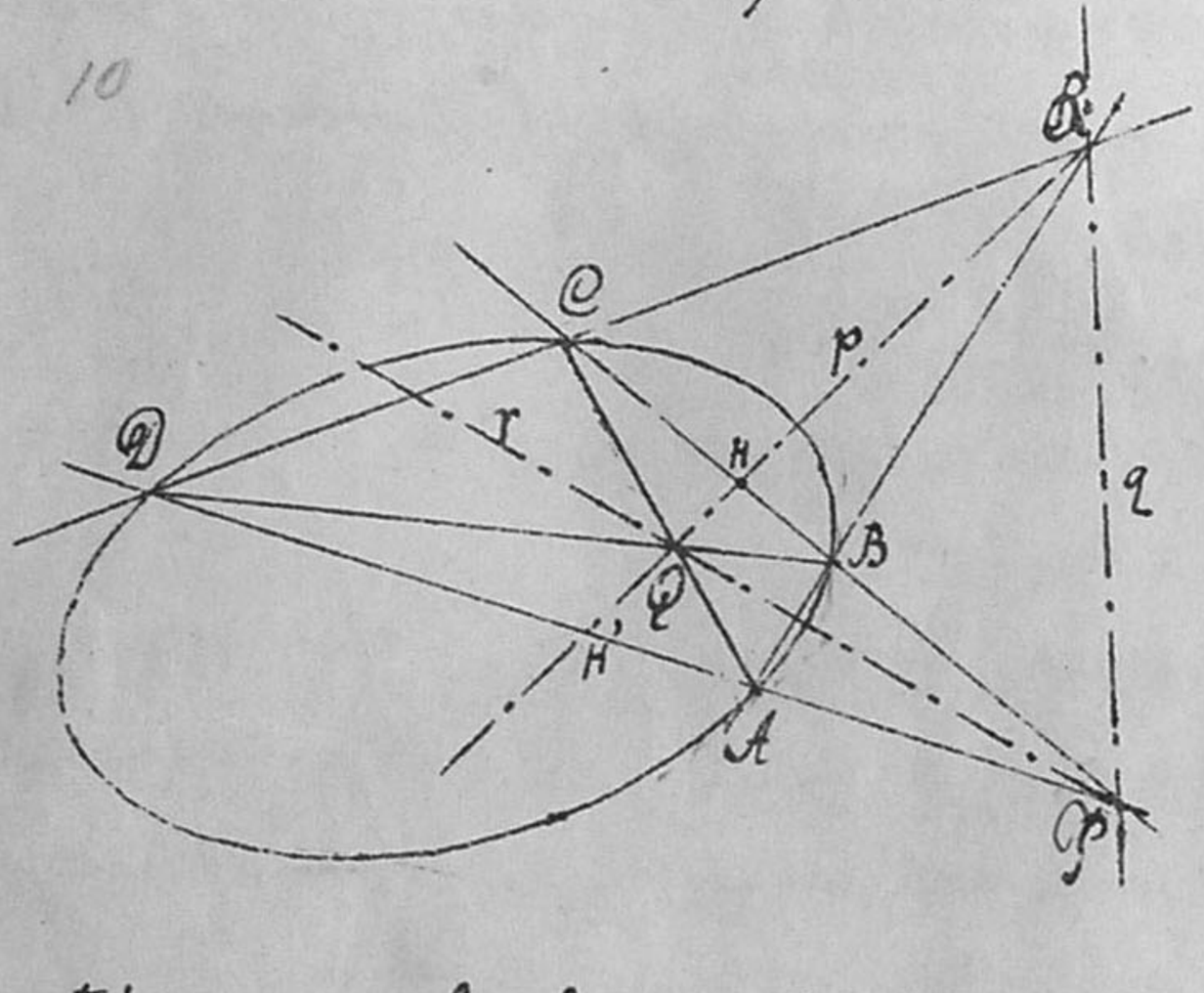
oni a geometriai jelentése annak, ha P_1 és P_2 eleget tesz azeni $f^{(12)}=0$ egyenletnek? Ekkor az (1) egyenlet λ-ban bíztra négyzetes, a két gyök ellentétesen egyenlő, vagyis a P_1P_2 egyenes által kimetszett két pont harmonicus fekvésü P_1 és P_2-hez képest, de akkor fordítva is P_1 és P_2 harmonicus fekvésü a két kimetszett pontra nézve. Ilyenkor azt mondjuk, hogy P_1 és P_2 a másodrendü görbét illetőleg coniugált pontok, azaz P_2 a P_1 coniugáltja (és fordítva). De nyilvánvaló, hogy P_1-nek végtelen sok coniugáltja van a görbét illetőleg s ezeknek geometriai helye egy egyenes, melynek egyenletét nyerjük, ha $f^{(12)}=0$-ban a P_2 pontot változónak tekintjük tehát

$$x f_1^{(1)} + y f_2^{(1)} + z f_3^{(1)} = 0$$

Ezt az egyenest, melynek egyenlete formailag egyezik az érintő egyenletével, nevezzük a P_1 pont polárisának az görbére vonatkozólag, P_1 a pólus. Miután ez az egyenlet a két coniugált pont coordinatáit symmetrikusan tartalmazza, itt is áll a polárreciprocitás tétele, mely szerint ha P_2 és P_2 coniugált pontok, akkor P_1 polárisa átmegy P_2-ön és P_2 polárisa átmegy P_1-en. Ha P_1 a görbén van, akkor polárisának egyenlete egyezik az érintő egyenletével, vagyis a görbén fekvő pont polárisa az ezen ponthoz tartozó érintő. Ebből épúgy mint a körnél következik, hogy az polárisa által a görbéből kimetszett két ponthoz húzott érintők a pólusban metszik egymást, úgy hogy a pólusból mint adott pontból húzandó érintők érintési pontjait megkapjuk, ha megszerkesztjük



a polárist; ez kimetszi a két érintési pontot. Ez a körülmény egyszerre mind azt is mondja, hogy az igazi másodrendű görbe egyszersmind másodosztályu. A polárris megszerkesztése épenúgy történik, mint a kör esetén. Tegyük pl. egy ellipsist. A P pontból két szelőt húzunk a görbéhez s a kimetszett két ponthoz B és C-hez megszerkesztjük a P harmonicus társait H-tal ez egyik és A D-hez H'-et a másik szelőn. H H' a P polárisa. Könnyen belátható, hogy ha a két szelő által kimetszett négy pontot, A B C D-et teljes négyszögnek tekintjük, s megszerkesztjük ennek átlói háromszögét P Q R-et, ennek szögpontjai a szembenfekvő oldalakkal polus és polárris viszonyban vannak, azaz P polárisa p, Q-é q, és R-é r. Tehát P Q R polárháromszög. De még egy érdekes körülmény tűnik itt szembe. Tegyük ugyanis adottaknak az A B C D pontokban húzott a, b, c, d érintőket. Miután egy egyenes polusa nem egyéb, mint az egyenes pontjaihoz tartozó polárisok metszéspontja, azért, mivel P rajta van a B C egyenesen, ez utóbbinak polusa rajta kell legyen a P polárisán p-n. De B C polusa a B és C pontokban húzott érintők metszéspontja, s így kapjuk, hogy bc metszéspontja a p polárison van. Hasonlóképen következik, hogy a, d érintők metszéspontja szintén a p polarison van vagyis p az (a, b, c, d) teljes négyoldalnak egyik átlója. Hasonlóképen belátható, hogy ezen teljes négyoldal másik két átlója q és r, tehát



átlósháromszöge PQR. Mondhatjuk tehát, hogy a másodrendű görbe tetszészerinti négy pontjait teljes négyszögnek, az ezen pontokhoz tartozó négy érintőt teljes négyoldalnak tekintve ezeknek átlói háromszöge ugyanaz és mindig polárháromszög a kúpszeletre vonatkozólag.

Látjuk tehát, hogy minden síkbeli pontnak van határozott polárisa a másodrendű görbére vonatkozólag. Kérdés, vajjon fordítva is van-e minden egyenesnek mint polárisnak határozott pólusa?

Erre megfelel a poláris egyenlete

$$x f_1^{(1)} + y f_2^{(1)} + z f_3^{(1)} = 0$$

melyben a consolanok szolgáltatják a poláris u_1, v_1, w_1 coordinatáit, tehát

$$u_1 = a_{11} x_1 + a_{12} y_1 + a_{13} z_1$$

$$v_1 = a_{21} x_1 + a_{22} y_1 + a_{23} z_1$$

$$w_1 = a_{31} x_1 + a_{32} y_1 + a_{33} z_1$$

Ha tehát a pólus három coordinatája x_1, y_1, z_1 adva van, ezek az egyenletek szolgáltatják a hozzátartozó poláris u_1, v_1, w_1 coordinatáit. Fordítva is, ha advák a poláris u_1, v_1, w_1 coordinatái, akkor igazi másodrendű görbe esetén, melynek determinansa nem nulla, ezekből az egyenletekből kiadódnak a hozzátartozó pólus x_1, y_1, z_1 coordinatái:

$$\Delta x_1 = A_{11} u_1 + A_{21} v_1 + A_{31} w_1$$

$$\Delta y_1 = A_{12} u_1 + A_{22} v_1 + A_{32} w_1 \qquad (1.)$$

$$\Delta z_1 = A_{13} u_1 + A_{23} v_1 + A_{33} w_1$$

a hol a consolanok symmetricus aldeterminansok. Ha $\Delta \neq 0$, ezzel keresztül osztva kapjuk a pólus coordinatáit.

Kérdés, mikor van a pólus a polarisán? Akkor ha kielégítik a poláris egyenletét, azaz ha

Borbory

$$x_1 f_1^{(1)} + y_1 f_2^{(1)} + z_1 f_3^{(1)} = f(x_1, y_1, z_1) = 0$$

tehát ha a pólus a görbén rajta van, a mikor is, a mint láttuk, a poláris az ezen ponthoz tartozó érintő. Mondhatjuk tehát, hogy csakis a görbén fekvő pont fekszik rajta a poláriszán, mint ezen ponthoz tartozó érintőn.

Ezek szerint a feltétele annak, hogy valamely egyenes érintse a görbét, az, hogy polusával összetartozási viszonyban legyen, vagyis ha az egyenes három coordinatája u_1, v_1, w_1, a polusei x_1, y_1, z_1.

$$\text{legyen } u_1 x_1 + v_1 y_1 + w_1 z_1 = 0 \qquad (2.)$$

Ezt a feltételt más alakban is írhatjuk. Szorozva az (1.) alatti egyenleteket megfelelőleg u_1, v_1, w_1-el, és összeadva kapjuk, hogy

$$A(u_1 x_1 + v_1 y_1 + w_1 z_1) = A_{11} u_1^2 + A_{22} v_1^2 + A_{33} w_1^2 + 2A_{23} v_1 w_1 + 2A_{31} w_1 u_1 + 2A_{12} u_1 v_1$$

Ha tehát - igazi másodrendű görbe esetén - a (2) egyenlet teljesül, akkor az utóbbi egyenlet baloldala eltünvén, a jobboldalnak is el kell tünnie. És fordítva, ha a jobboldali kifejezés eltünik, akkor az u_1, v_1, w_1 coordinatáju egyenes érintemi fogja az $f(x\,y\,z) = 0$ görbét. Ha tehát az egyenes változik, a változó u, v, w coordinatáival folytonosan nullá teszi a jobboldali kifejezést, akkor ez az egyenes-burkolni fogja a görbét, vagyis más szóval, annak a görbének, melynek pontcoordinatás egyenlete

$$f(x,y,z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy = 0$$

a vonalcoordinatás egyenlete

$$F(u,v,w) = A_{11}u^2 + A_{22}v^2 + A_{33}w^2 + 2A_{23}vw + 2A_{31}wu + 2A_{12}uv = 0$$

a hol a constansok a pontcoordinatás függvény constansaiból alkotott

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

symmetricus determinans megfelelő elemeihez tartozó aldeterminansok.

Látható ezekből, hogy egy igazi másodrendű görbe egyszersmind másodosztályu is.

Ha tehát egy másodrendü görbének akármilyen coordinatarendszerben megkaptuk ponteoordinatás egyenletét, azonnal fel tudjuk irni a vonalcoordinatás egyenletét is. Vegyük most a dolgot forditott sorrendben. Tegyük fel, hogy adva van egy vonalcoordinatákban másodfoku egyenlet

$$F(u,v,w) = A_{11}u^2 + A_{22}v^2 + A_{33}w^2 + 2A_{23}vw + 2A_{31}wu + 2A_{12}uv = 0$$

a hol $A_{23} = A_{32}$, $A_{31} = A_{13}$, $A_{12} = A_{21}$.

és vizsgáljuk ezen egyenlet geométriai jelentését is sajátságait. Ha egy egyenes úgy változik, hogy coordinatai folyton kielégitik ezt az egyenletet, akkor ez az egyenes görbét fog burkolni. Ez az egyenlet tehát görbét jelent és pedig másodosztályu görbét, mert a változók a második hatványon szerepelnek

Hasonlitsuk össze ezt a görbét egy síkjabeli sugársorral. A sugársor hét fix sugara legyen

p_1, coordinatai u_1, v_1, w_1

és p_2, " u_2, v_2, w_2

melyeknek metszéspontja a sugársor centruma. A változó sugár coordinatai

$$u = u_1 + \lambda u_2$$

$$v = v_1 + \lambda v_2$$

$$w = w_1 + \lambda w_2$$

Ha $\lambda = 0$, kapjuk p_1 első, ha $\lambda = \infty$, kapjuk p_2 második alapsugarát, s ha $\lambda = 1$, kapjuk az egységsugarat és λ jelenti ebben a coordinatarendszerben a változó sugár kettős arányszámát. Ezen sugársorból a görbékez tartozó sugarak kettős arányszámát a következő-a fen-

ehhez analog módon levezethető, - négyzetes egyenlet szolgáltatja

$$F^{(11)} + 2\lambda F^{(12)} + \lambda^2 F^{(22)} = 0$$

a hol az állandóknak ugyanaz a jelentésök, mint a ponteoordinatás függvényeseén. Ezen egyenletnek két gyöke van, tehát két sugár érinti a görbét vagyis a másodosztályu görbéhez egy pontból két érinthető húzható.

Most tegyük fel, hogy p_1 érinti a görbét, azaz $F^{(11)} = 0$, akkor egyik gyök 0, vagyis az egyik érintő sugár összecsik p_1-el, a másikat szolgáltatja ói λ közös factor elhagyása után hátramaradó lineáris egyenlet. Ha még hozzá a második alapegyenes olyan, hogy $F^{(12)} = 0$, akkor mindkét gyök 0 lévén, a második érintő sugár is összecsik a p_1 sugárral, vagyis ekkor $p_1 p_2$ metszéspontjából csak egy érintő húzható a görbéhez, a mi azt mondja, hogy ekkor a sugársor centruma a görben van, azaz érintési pont. Ha p_2 úgy változik, hogy u, v, w coordinatái eleget tesznek az

$$u F_1^{(1)} + v F_2^{(1)} + w F_3^{(1)} = 0$$

egyenletnek, akkor ez a sugár mindig át fog menni a p_1 sugár érintési pontján. Ez tehát a p_1 érintő érintési pontjának az egyenlete. Az érintési pont csak akkor határozott, ha az egyenlet coefficiensei nem valamennyien nullák, ellenben az érintési pont határozatlan, vagyis az érintő singularis érintő, ha az egyenlet coefficiensei egyszerre eltünnek. Állapitsuk meg ennek analytikai ismertető jeleit.

A singularis érintő homogén coordinatái kielégitik az következő homogen lineáris egyenletrendszert

$$F_1 = A_{11} u + A_{12} v + A_{13} w = 0$$
$$F_2 = A_{21} u + A_{22} v + A_{23} w = 0$$

$$\mathfrak{F}_3 = A_{31}u + A_{32}v + A_{33}w = 0$$

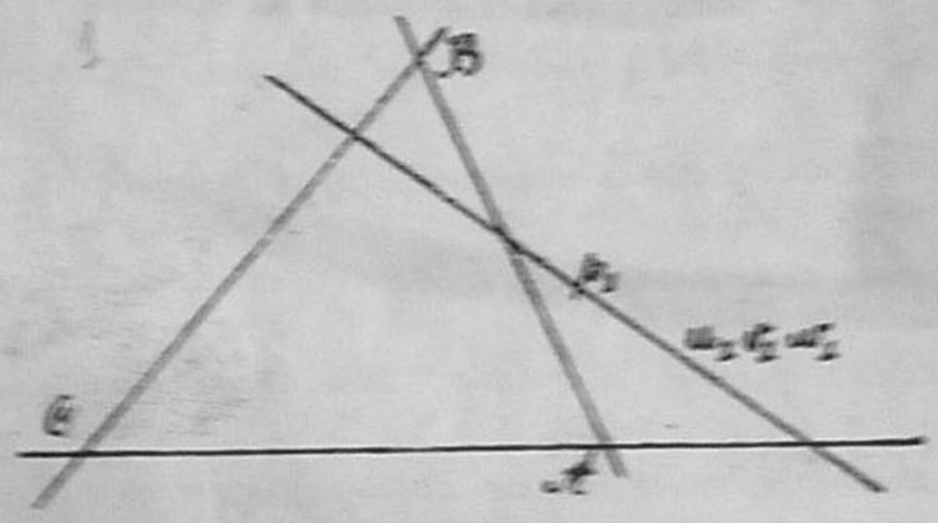
s miután a coordináták nullaértékei nem bírnak geometriai jelentéssel, nyilvánvaló, hogy singularis érintő csak akkor léteznek, ha a másodosztályu görbe determinansa 0. Ez a determinans nem egyéb, mint az eredeti A determinans adjungáltja A. Tehát a következő esetek közt kell megkülönböztetni:

1, $A \gtrless 0$, nincsen singularis érintő, minden érintőnek határozott érintési pontja van.

2, $A=0$, de átlói determinansai A_{11}, A_{22}, A_{33} nem mind nullák. Ekkor meg tudjuk határozni, mivel arányosak az ismeretlenek, akkor tehát létezik egy singularis érintő. Ki fogjuk mutatni, hogy ilyenkor a másodosztályu görbe szétesik két ponton átmenő egyenes összegére. E végett tegyük fel pl. hogy $A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$, akkor

$$u : v : w = A_{31} : A_{32} : A_{33}$$

tehát $w \neq 0$, vagyis a singuláris érintő p_1 nem megy át a coordinata-

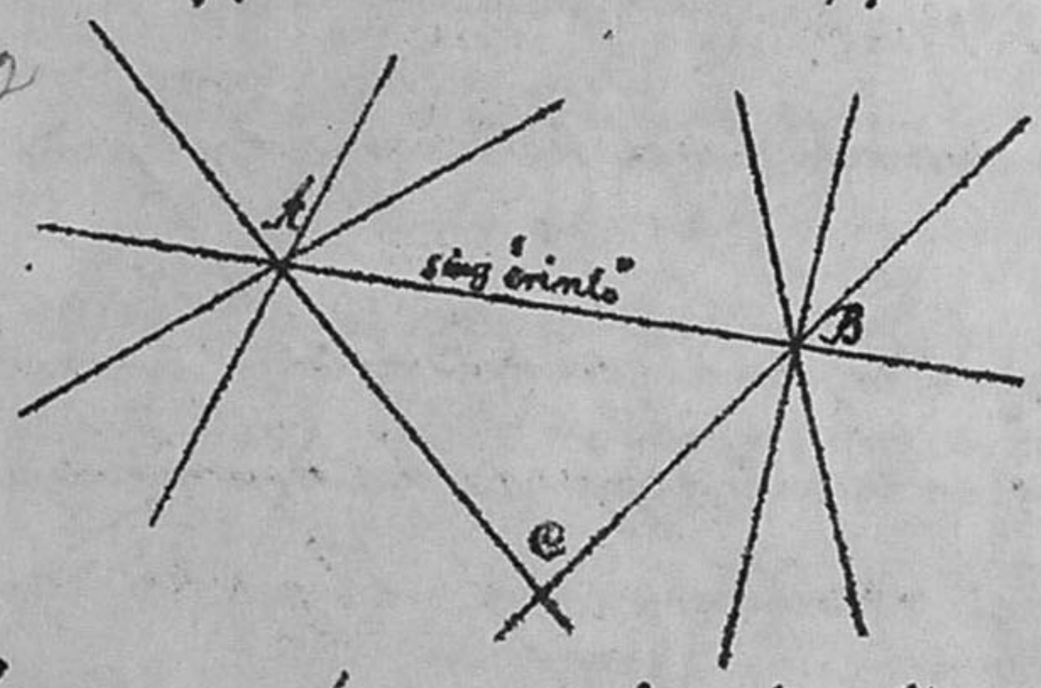


háromszög harmadik alappontján, legyenek annak coordinatái $u_1 v_1 w_1$. A görbe egy tetszésszerinti más érintője legyen p_2, coordinatái $u_2 v_2 w_2$ és kérdezzük, hogy a két egyenes metszéspontján át hány érintő megy a görbéhez? Erre megfelel az $\mathfrak{F}^{(n)} + \lambda_1 \mathfrak{F}^{(n)} + \lambda_2 \mathfrak{F}^{(n)} = 0$ egyenlet, mely ebben az esetben identitás, mert coefficiensei nullák, tehát a két egyenes által meghatározott sugársor minden egyenese hozzátartozik a görbéhez. Mondhatjuk tehát, minden sugársor, melynek tartóruma a singuláris érintőnek egy más érintőtől való metsze-

pontja. hozzátartozik a görbéhez. Most keressük fel az $F=0$ egyenletet kielégítő, vagyis a görbéhez tartozó összes egyenesek közül azokat, melyek ejtsen a C alapponton smennek keresztül. Az egyenletben $w=0$ írva, adódik u és v számára

$$A_{11}u^2+2A_{12}uv+A_{22}v^2=0$$

A miután ezen egyenlet discriminansa $A_{33}\neq 0$, két különböző egyenes megy keresztül a C alapponton, de akkor ezen két egyenesnek, a singularis érintővel való A és B metszéspontja két olyan sugársor centruma, melyek mindkettőn a görbéhez tartoznak. Több érintője nincs a görbének, mivelhogy ebben az esetben a görbe tényleg két különböző centrumu sugársora esik szét. Természetesen algebrailag szólva, vagyis a két sugársor reális illetőleg kejxetes lesz, ha A és B, azaz a C alapponton át menő két egyenes reális vagy kejxetes, s ez attól függ, hogy $A_{33}\gtrless 0$.



3 Ha nemcsak $A=0$, de az összes aldeterminansok is mind eltűnnek, de a coefficienek nem mind nullák, akkor csak egy független egyenletünk van a singularis érintő számára, ekkor tehát a görbe az ezen egyenlettel meghatározott singuláris sugársorból áll. Több érintő egyenese nincsen a görbének, mert ha volna még egy egyenesen a sugársoron kívül, mely szintén a görbéhez tartozanék, akkor ennek a sugársor összes egyeneseivel mint singularis egyenesekkel való metszéspontjai mindmegannyi a görbéhez tartozó sugársorok centrumait alkotnák; de ezzel a sik összes egyenesei ki volnának merítve, azaz a sik összes egyenesei a görbéhez tartoznának, a mi csak akkor lehetséges,

EGYETEM... BOLYAI TUD. ...

ha a görbe egyenlete identitás, azaz minden coefficiense nulla. A harmadik esetben tehát a görbe egy ponton átmenő egyenesek összességéből áll, melyek mindegyike kétszer számít.

Tegyük fel, hogy egyszerű másodosztályu görbénk van. Láttuk, hogy két tetszésszerinti $p_1(u_1, v_1, w_1)$ és $p_2(u_2, v_2, w_2)$ egyenes metszéspontjából a görbéhez húzható érintő egyszerű arányszámcoordinatáját λ-t ezen két egyenesre vonatkozólag megadja a következő négyzetes egyenlet

$$f^{(22)} + 2\lambda f^{(12)} + \lambda^2 f^{(22)} = 0$$

Lássuk most, mi a geometriai jelentése annak, ha a két sugár olyan viszonyban van, hogy $f^{(12)} = 0$

Ekkor az egyenlet λ-ban tiszta négyzetes, tehát a két érintő harmonicus a p_1 és p_2-hez, de akkor fordítva is ez a két egyenes harmonicus a metszéspontjukból a görbéhez húzható két érintőre nézve. Ilyen két egyenest a görbét illetőleg conjugáltnak nevezünk és $f^{(12)} = 0$ a conjugáltság feltétele. Ha p_1 egyenes fix, ennek a görbét illetőleg végtelen sok conjugáltja van; ha t. i. a p_2 egyenest változónak tekintjük, de úgy, hogy u, v, w coordinatái olyek legyenek, a conjugáltság egyenletének

$$u f_1^{(1)} + v f_2^{(1)} + w f_3^{(1)} = 0$$

akkor ezek az egyenesek mind conjugáltjai a p_1 egyenesnek. De ez az egyenlet pontot ábrázol, amelyen átmennek p_1 összes conjugáltjai. Ezt a pontot nevezzük a p_1 egyenes polusának, p_1 a poláris és ez az előbbi egyenlet a polus egyenlete. Ha p_1 érinti a görbét, a polus egyenlete egyezik az érintési pont egyenletével, tehát érintő egyenes polusa az érintési pont. Ha $u_1 v_1 w_1$ a poláris, $x_1 y_1 z_1$ a polus coordinatái, akkor a polus egyenletéből következik, hogy

$$x_1 = A_{11} u_1 + A_{21} v_1 + A_{31} w_1$$

$$y_1 = A_{21} u_1 + A_{22} v_1 + A_{32} w_1$$
$$z_1 = A_{31} u_1 + A_{23} v_1 + A_{33} w_1$$

és fordítva, ha a görbe igazi másodrendű görbe, azaz determinánsa

nem nulla,

$$\left.\begin{aligned} A u_1 &= A_{11} x_1 + A_{12} y_1 + A_{13} z_1 \\ A v_1 &= A_{21} x_1 + A_{22} y_1 + A_{23} z_1 \\ A w_1 &= A_{31} x_1 + A_{32} y_1 + A_{33} z_1 \end{aligned}\right\} \quad (A)$$

Ezen relatiók alapján tudjuk kifejezni a poláris coordinatáival a polusnak, illetőleg a polus coordinatáival a polarisnak coordinatáit.

A feltétele annak, hogy egy pont, melynek coordinatái x_1, y_1, z_1, rajta legyen a görbén, az, hogy polárisával összetartozási viszonyban legyen, azaz, ha a poláris coordinatái u_1, v_1, w_1, legyen

$$u_1 x_1 + v_1 y_1 + w_1 z_1 = 0 \quad (B)$$

De ezt az egyenletet másképp is irhatjuk. Szorozva vegyjeink ez (A) alatti egyenleteket rendre x_1, y_1, z_1-gyel és összeadva, lesz

$$A(u_1 x_1 + v_1 y_1 + w_1 z_1) = A_{11} x_1^2 + A_{22} y_1^2 + A_{33} z_1^2 + 2A_{23} y_1 z_1 + 2A_{31} z_1 x_1 + 2A_{12} x_1 y_1$$

minthogy igazi másodrendű görbe esetén $A \neq 0$, azért ha teljesül a (B) alatti feltétel, az utóbbi egyenlet jobboldala is eltünik. Ha tehát az x_1, y_1, z_1 pont úgy változik, hogy x, y, z coordinatái kielégitsék ez

$$A_{11} x^2 + A_{22} y^2 + A_{33} z^2 + 2A_{23} yz + 2A_{31} zx + 2A_{12} xy = 0 \quad (C)$$

egyenletet, akkor a pont leirja azt a görbét, melynek vonalcoordinatáira

egyenlete

$$F(u, v, w) = 0$$

ez tehát a görbe pontcoordinatás egyenlete. Ha tehát egy másodosztályu görbe determinansa nem 0, akkor a görbe vonalcoordinatás egyenletéről át tudunk menni annak pontcoordinatás egyenletéhez, melyben a coefficiensek nem egyebek, mint az eredeti egyenlet coefficienseiből alkotott determinans megfelelő elemeihez tartozó aldeterminansok. Ezzel

ki van mutatva, hogy egy igazi másodosztályu görbe egyszeresmind másodrendü görbe. Most csak azt kell még kimutatni, hogy a kétfele eredmény teljes összhangban van egymásával. Látni fogjuk, hogy a C alatti ponteoordinatás egyenlet csak egy multtól különböző constans factorban különbözik az eredeti $f(x,y,z)=0$ ponteoordinatás egyenlettől, tehát hogy a két egyenlet azonos. Ismeretes az algebrából, hogy a

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

harmadrendü determinans adjungáltja

$$A = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}$$

és

$$A = \Delta^2$$

a mi azt mondja, hogy ha $\Delta \neq 0$, akkor A is különbözik nulltól, azaz egy igazi másodrendü görbe egyszeresmind igazi másodosztályu görbe. Továbbá az adjungált determinans bármely aldeterminansa

$$A_{ik} = A a_{ik}$$

ebből világos, hogy az (C) alatti egyenletben közös factorként elesik A, a hátramaradó coefficiensek pedig ugyanazok, mint az eredeti $f(x,y,z)=0$ egyenletben; tehát a két egyenlet azonos.

Csak akkor van eltérés a kétfele szempontból felfogott görbék között, ha degenerálódnak, mert ekkor a másodrendü görbe két egyenesre, a másodosztályu pedig két pontra esik szét.

A kúpszeletek fajai.

Az igazi másodrendü és osztályu görbéket kúpszeleteknek nevezzük. A kúpszelet elnevezés a régi görögöktől származik, a kik a forgáskúp síkmetszéseit gyakran fogták fel azokat.

Törekedjünk arra, hogy jól választott coordinatarendszer mellett egyszerübb alakra hozzuk a kúpszeletek egyenletét. E végett benső viszonyt kell létesiteni a görbe és a coordinatarendszer között az által pl. hogy a coordinatarendszer egy vagy két alappontját rajta választjuk a görbén, vagy hogy két alappontot conjugált viszonyba hozzunk. Lássuk mi ezen emlitett benső vonatkozásoknak a feltétele.

A alappont a görbén van, ha 1,0,0 coordinatai kielégitik a görbe egyenletét, azaz ha $f(1,0,0)=0$

vagyis ha $(a_{11}x^2)=0$ tehát $a_{11}=0$

Ezerint A alappont a görbén van, ha ennek egyenletében $a_{11}=0$

épenigy B " " " " " " $a_{22}=0$

és C " " " " " " $a_{33}=0$

Tehát a coordinatarendszer három alappontja a görbén van, ha a görbe egyenletéből ez a három conatans kiámlik. Ebben a coordinatarendszerben tehát a kúpszelet egyenlete

$$1.2a_{23}yz+2a_{31}zx+2a_{12}xy=0$$

Ez egyik egyszerübb alak. Egy másikat kapunk, ha két-két alap

pontok a kúpszeletre vonatkozólag coniugáltjainak vesszünk. Lássuk mi a feltétele annak, hogy két alappont coniugált legyen? Az A alappont coordinatai (1,0,0) a B alappontéi (0,1,0) a coniugáltsáig feltétele pedig $f^{(2)}=0$, azaz $x_1 f_1^{(2)} + y_1 f_2^{(2)} + z_1 f_3^{(2)} = 0$

Ha 1 pont A, és 2 pont B, akkor

$f_3^{12} = a_{12}$ lehát hogy A és B coniugált legyen

akkor szükséges hogy $a_{12}=0$ legyen. Ezenkívül A és C coniugáltsági — $a_{13}=0$ és B meg C coniugáltságának feltétele $a_{23}=0$

Ha tehát bármely két alappont a kúpszeletet illetőleg coniugáltjainak ha a kúpszelet egy tetszőleges polárháromszögét választjuk a coordinatáháromszögnek, akkor ebben a kúpszelet egyenlete a következő egyszerű alakot ölti

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 = 0$$

Így szintén egyszerű alakot nyerünk, ha a coordinatáháromszög két oldalául kúpszelet két érintőjét, harmadik oldalul az érintőhurt választjuk. Legyen pl. CA és CB a két érintő, AB az érintési húr. Mivel az érintő minden pontja coniugáltja az érintési pontnak és C mindkét érintőn rajta van, tehát mivel

C és A coniugált, szükségképen $a_{13}=0$

" " C és B " " " $a_{23}=0$

" " A és B mint érintési pont pontja a görbének, azért szükségképen $a_{11}=a_{22}=0$, úgyhogy a kúpszelet egyenlete ebben a speciális rendszerben

$$a_{33}z^2 + 2a_{12}xy = 0$$

ez a három legegyszerűbb alakja a kúpszelet egyenletének.

Törekedjünk most arra, hogy a kúpszeletek alakjáról magunknak fogalmat szerezzünk. A kúpszelet egyenletét ebben az alakban írjuk

$$f(x,y,z) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 = 0$$

az utolsó tagot szabad tagnak is nevezzük, mert ha $z=1$. fele coordinátákra térünk át, $z=1$.

A kúpszeletek alakjára nézve az a döntő, hogy vannak-e végtelen távoli pontjai? A hajlásszögű irányítószögekkel bíró végtelen távoli pont koordinátái

$$\cos\alpha,\ \sin\alpha,\ 0$$

vagy ezekkel arányos számok. Ez a pont a görbén van, ha coordinátái kielégítik a kúpszelet egyenletét, tehát ha

$$a_{11}\cos^2\alpha + 2a_{12}\cos\alpha\sin\alpha + a_{22}\sin^2\alpha = 0$$

vagy osztva $\cos^2\alpha$-val, kapjuk a végtelen távoli pont irányszögeinek szinusára a következő négyzetes egyenletet

$$a_{22}\operatorname{tg}^2\alpha + 2a_{12}\operatorname{tg}\alpha + a_{11} = 0$$

A megoldások száma és minősége a diszkriminánstól függ. A diszkriminans $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = A_{33}$. Tehát

1. Ha $A_{33} > 0$ az egyenletnek két conjugált complex gyöke lévén, a kúpszeletnek sincsen végtelen távoli pontja, összes pontjai végesek. A kúpszeletnek ezt a fajtát nevezni fogjuk ellipsisnek.

2. Ha $A_{33} = 0$, egy kettős reális gyök adódik, a görbének egy végtelen távoli pontja van, melyben azt a végtelen távoli egyenes érinti. Ezt a kúpszeletfajt parabolának nevezzük.

3. $A_{33} < 0$, akkor a két gyök reális és különböző, a kúpszeletnek két különböző irányban végtelen távoli pontja. A két végtelen távoli ponttal bíró kúpszeletet nevezzük hyperbolának.

Kettőnél több végtelen távoli pontja nem lehet egy kúpszeletnek,

mert egy negyedik számbajövő eset volna az, midőn ez a négyzetes egyenlet identitás, azaz $a_{11} = a_{22} = a_{12}$, de akkor a görbe egyenletében nem szerepelne négyzetes tag, a görbe nem volna igazi másodrendű görbe illetőleg kúpszelet.

Tehát háromféle kúpszeletet különböztetünk meg; ellipszist hyperbolát és parabolát. Definiáljuk az, hogy ellipszisre nézve a végtelen távoli egyenes külső egyenes, parabolára nézve érintő és hyperbolára nézve metsző egyenes.

Hogy a kúpszeletek tulajdonságait és alakját könnyebben tanulmányozhassuk, célszerű coordinatarendszert fogunk bevezetni. E végett ismerkedjünk meg először a centrum fogalmával.

Ha veszszük a $(\cos\alpha, \sin\alpha, 0)$ végtelen távoli pontot, az ebből a kúpszelethez húzott szelők párhuzamosak és harmonicus társai felezik e szelőhöz húzott párhuzamos húrokat. De ezek a felezőpontok mind rajta vannak a végtelen távoli pont polárisán, mint a végtelen távoli pont conjugáltjainak geometriai helyén. Tehát a párhuzamos húrok felezőpontjai egy egyenesen, a párhuzamos húrok irányában fekvő végtelen távoli pont polárisán fekszenek. Az ilyen egyenest átmérőnek nevezzük.

Ennek egyenletét kapjuk, ha a poláris $f^{(1)} = 0$ egyenletében 1 pontnak veszszük a $(\cos\alpha, \sin\alpha, 0)$ végtelen távoli pontot, a 2 pont meg változó, tehát az egyenlet

$$\cos\alpha f_1 + \sin\alpha f_2 = 0$$

Ha α változó, a megfelelő átmérők mind egy ponton mennek keresztül, mert hisz ezek az átmérők mind a végtelen távoli egyenes pontjainak polárisai és így a polárreciprocitás tételénél fogva átmennek a végtelen távoli egyenes polusán, tehát egy fix ponton, me-

lyet a kujiszelet centrumának nevezünk. Nyilvánvaló, hogy a centrum coordinatai eleget tesznek a következő két egyenletnek

$$f_1 \equiv a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0$$
$$f_2 \equiv a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0$$

ebből a centrum coordinatáinak aránya

$$x : y : z = A_{31} : A_{32} : A_{33}$$

Tehát két eset lehetséges

1, $A_{33} \gtrless 0$, a centrum végesben fekszik, Dls. coordinatai $\frac{A_{31}}{A_{33}}$ és $\frac{A_{32}}{A_{33}}$ Miután pedig az ellipsis és hyperbola esetén teljesül az a feltétel, hogy $A_{33} \gtrless 0$, látjuk, hogy az ellipsis és hyperbolának centruma végesben van, azért ezt a két kujpszeletet centrális kujpszeleteknek is nevezzük.

2, $A_{33} = 0$, a centrum végtelenben van, coordinatai $A_{31}, A_{32}, 0$ vagyezekkel arányos számok. Miután pedig parabola esetén $A_{33} = 0$, mondhatjuk, hogy a parabola centruma végtelenben van, és pedig nem egyéb, mint a parabola végtelen távoli pontja. Mert hisz ez utóbbiban a végtelen távoli egyenes érinti az parabolát, ez tehát a végtelen távoli egyenes polusa, azaz centruma.

Centrális kujpszeletek.

Foglalkozzunk először a centrális kujpszeletekkel, tehát ellipsissel és hyperbolával. Hogy a görbe egyenletét minél egyszerűbb alakban nyerjük, transformálni fogjuk a coordinatarendszert. A transformatió első lépése az lesz, hogy a tengelyek párhuzamos eltolásával uj origo gyanánt bevezetjük a kujpszelet centrumát. Ennek

Pts. coordinátái $\frac{A_{31}}{A_{33}}$, $\frac{A_{32}}{A_{33}}$, ha tehát az új homogén coordinatáik x', y', z', akkor a transformatió egyenletei

$$\begin{aligned} x &= x' + \frac{A_{31}}{A_{33}} z' \\ y &= y' + \frac{A_{32}}{A_{33}} z' \qquad (1.) \\ z &= z' \end{aligned}$$

Hajtsuk végre a kúpszelet egyenletén ezt a transformatiót. Láttuk általánosan, hogy az $x = x_1 + \lambda x_2$

$$y = y_1 + \lambda y_2$$
$$z = z_1 + \lambda z_2$$

transformatio hatására a következő, az uj egyenlet lesz

$$f \equiv f^{(11)} + 2\lambda f^{(12)} + \lambda^2 f^{(22)} = 0$$

A mostani esetben x_1, y_1, z_1 szerepét felveszi $x', y', 0$; λ helyébe jő $x_2 y_2 z_2$ helyébe $\frac{A_{31}}{A_{33}}, \frac{A_{32}}{A_{33}}, 1$. Tehát a mi esetünkben

$$f^{(11)} = f(x', y', 0) = a_{11} x'^2 + 2 a_{12} x' y' + a_{22} y'^2$$
$$f^{(12)} = x_1 f_1^{(2)} + y_1 f_2^{(2)} + z_1 f_3^{(2)}$$

Ebben irmindó $x_1 = x'$ stb. de a 2 pont itt a kúpszelet centruma lévén $f_1^{(2)} = f_2^{(2)} = 0$, mivel $z_1 = 0$, lesz $f^{(12)} = 0$. Végre ugyanilyen okokból

$$f^{(22)} = x_2 f_1^{(2)} + y_2 f_2^{(2)} + z_2 f_3^{(2)} = f_3^{(2)} = a_{31} \frac{A_{31}}{A_{33}} + a_{32} \frac{A_{32}}{A_{33}} + a_{33}$$
$$= \frac{a_{31} A_{31} + a_{32} A_{32} + a_{33} A_{33}}{A_{33}} = \frac{A}{A_{33}}$$

Tehát az (1) értelmében tranoformált egyenlet

$$a_{11} x'^2 + 2 a_{12} x' y' + a_{22} y'^2 + \frac{A}{A_{33}} z'^2 = 0$$

Ez egyenletből tehát kiámyzik az x'-es és y'-es tag, a négyzetes tagok után marad, jő a constans tag. Ez természetes is, mert ki a coordinata rendszer origoja most a kúpszelet centruma lévén, a gö

be pontjai erre nézve szimmetrikusan fekszenek az átmérőkön, tehát a tengelyeken is, mert a parallel eltolt tengelyek most átmérők lesznek, emiélfogva a transformált egyenlet akkor is teljesül, ha valamely görbe pont koordinatai helyett a negativokat teszszük, a mi csak úgy lehetséges, ha csak x'-es és y'-es tag az egyenletből hiányzik.

Most következik a tranoformatió második lépése, a tengelyek elforgatása derékszögü rendszerbe. Hogy ezélszerü derékszögü rendszert nyerjünk, előbb foglalkoznunk kell a kapcsolt átmérőkkel illetőleg a kupiszelet tengelyeivel.

Ha az α irányu párhuzamos húrok végtelen távoli pontjának coordinatai $(\cos\alpha, \sin\alpha, 0)$ akkor ezen pont polárisá rá nézve vagyis az α irányu párhuzamos húrokat felező átmérőnek egyenlete az 268 oldal szerint

$$\cos\alpha(a_{11}x' + a_{21}y') + \sin\alpha(a_{12}x' + a_{22}y') = 0$$

Legyenek most ezen átmérő végtelen távoli pontjának coordinatai $(\cos\beta, \sin\beta, 0)$, akkor

$$\cos\alpha(a_{11}\cos\beta + a_{21}\sin\beta) + \sin\alpha(a_{12}\cos\beta + a_{22}\sin\beta) = 0$$

ez osztva $\cos\alpha\cos\beta$-val, lesz

$$a_{22}\,\mathrm{tg}\alpha.\,\mathrm{tg}\beta + a_{12}(\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta) + a_{11} = 0$$

[$a x_1 x_2 + b(x_1 + x_1) + c = 0$

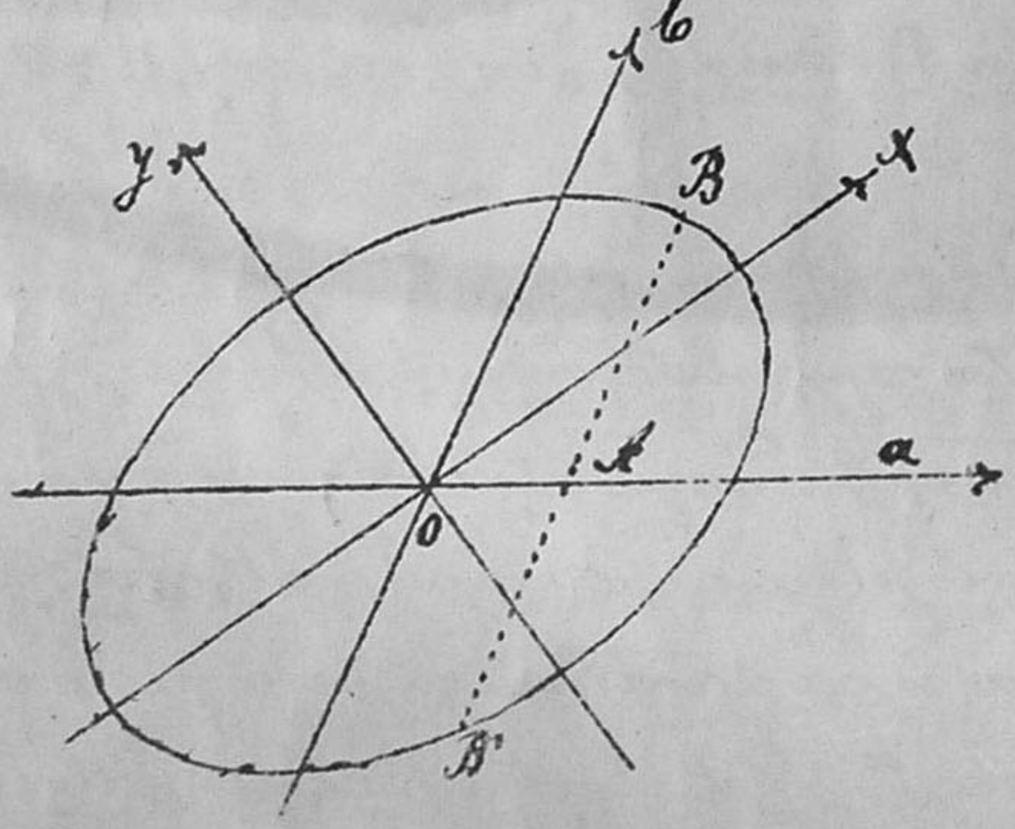
ez az involuzió ismeretes egyenlete, mely t. i. $\mathrm{tg}\alpha$ és $\mathrm{tg}\beta$-ban szimmetrikus, tehát szabad ezen α és β irányu átmérők szerepét felcserélni, azaz ha a β irányu átmérő felezi az α irányu átmérővel párhuzamos húrokat, akkor fordítva is az α irányu átmérő felezi a β irányu átmérővel parallel húrokat. Két ilyen átmérőt, melyek mindegyike a másikkal parallel húrokat felezi, conjugált vagy kapcsolt átmérőknek nevezzük. A conjugált átmérőpárok tehát involuziót.

alkotnak. Az involuzió kettös sugarainak egyenlete adódik az involuzió egyenletéből, ha ebben $tg\alpha = tg\beta$, ez tehát

$$a_{22} tg^2\alpha + 2a_{12} tg\alpha + a_{11} = 0$$

ez pedig, a mint láttuk, azt a két irányt határozza meg, melyen a görbe végtelen távoli pontjai vannak, vagyis az involuzió kettös sugarai a görbe végtelen távoli pontjai felé mutatnak. Centrális kúpszelet esetén ez a két kettösugár reális vagy képzetes, a szerint, a mint ezen négyzetes egyenlet diszkriminánsa $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \lessgtr 0$, tehát csak a hyperbola esetén vannak a conjugált átmérőpárokból alkotott involuzionak kettös sugarai, s ezek a hyperbola asymptotái; ellipsisnél nincsenek kettös sugarak, azaz a kettös sugarak képzetesek. Itt látjuk tehát a hyperbolikus és elliptikus involuziós elnevezés okát.

Látható, hogy ha egy conjugált átmérőpárt vezetünk be coordinatatengelyekül (pl. a, b), akkor az erre transformált egyenletből kiolvasni fog az (xy)-os tag, me... akkor minden x értékhez (2) kö... egyenlő és ellentétes y értékek (B és B') fog tartozni és fordítva, a m... megkivánja, hogy az egyenlet x és y ban tiszta négyzetes legy... vagyis xy-os tag nem fog szere... pelni. Már most két olyan co... jugált átmérőt fogunk bevezetni tengelyek gyanánt, melyek egymásra merőlegesek. Ilyen conjugált átmérőpár minden...



létezik s pedig csak egy, mert láttuk, hogy minden sugárinvolucióban van egy merőleges sugárpár, melyet a sugár involuciói kettősjeinek nevezünk. Az elnevezését itt is megtartjuk. Tehát a kúpszelet kettősjei azon az két átmérő, melyek mindegyike a reá merőleges húrokat felezi, a melyek tehát maguk is merőlegesek egymásra. Ezeket vesszük be coordinatatengelyeknek. Hogy az transformált egyenletben eljussunk, vizsgáljuk előbb egy általános négyzetes függvény változását forgatással járó transformatió esetén. Ha a forgatási szög φ, és az uj coordinatáik x'', y'', akkor a transformatio egyenletei

$$x' = \cos\varphi\, x'' - \sin\varphi\, y''$$
$$y' = \sin\varphi\, x'' + \cos\varphi\, y''$$

Miután tehát ezen transformationál a coordinatakör sugara nem változik, csak az együtthatós részek uj coefficienseit kell meghatároznom. Az ezek a_{11}'', a_{12}'', a_{22}'' akkor ugyancsak kifejezhetők, hogy

$$a_{11}'' = a_{11}\cos^2\varphi + 2a_{12}\sin\varphi\cos\varphi + a_{22}\sin^2\varphi$$
$$a_{12}'' = -a_{11}\cos\varphi\sin\varphi + a_{12}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + a_{22}\sin\varphi\cos\varphi$$
$$a_{22}'' = a_{11}\sin^2\varphi - 2a_{12}\sin\varphi\cos\varphi + a_{22}\cos^2\varphi$$

Ezek a transformált függvény coefficiensei. Ezen utóbbi relatiókból adódik a forgatással járó transformatio egy nevezetes tulajdonsága. Látható ugyanis, hogy az coefficienseknek következő két relatiónális szám függvénye $a_{11}+a_{22} = a_{11}''+a_{22}''$ és $a_{11}a_{22}-a_{12}^2$ a transformatio folytán nem változtatja értékét, bármilyen szög alatt történjék az forgatás, mert

$$a_{11}+a_{22} = a_{11}''+a_{22}'' \quad \text{és} \quad a_{11}a_{22}-a_{12}^2 = a_{11}''a_{22}''-a_{12}''^2$$

Ezek tehát a forgatásra nézve a coefficienseknek invariáns relatiói. A forgatás ezen nevezetes tulajdonságát számtalan kormyik közül az

centrális kúpszeletek legutóbb nyert egyenletét a tengelyekből álló coordinatarendszerre transformálni. Miután az xy-os tag kiesik, legyen x''^2 és y''^2 coefficiensre megfelelőleg λ_1 és λ_2, akkor a transformált alak

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + \frac{\Delta}{\Delta_{33}} z''^2 = 0$$

A hol λ_1 és λ_2 azon körülmény alapjain határozhatók meg, hogy

$$\lambda_1 + \lambda_2 = a_{11} + a_{22}$$

$$\lambda_1 \lambda_2 - \lambda_{12}^2 = a_{11}a_{12} - a_{12}^2 \quad \text{de } \lambda_{12} = 0$$

$$\lambda_1 . \lambda_2 = a_{11} a_{22} - a_{12}^2$$

tehát gyökeit képezik a következő négyzetes egyenletnek

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$$

Ebből
$$\lambda = \frac{a_{11}+a_{22}}{2} \pm \sqrt{\frac{(a_{11}+a_{22})^2}{4} - a_{11}a_{22} + a_{12}^2}$$

$$= \frac{a_{11}+a_{22} \pm \sqrt{(a_{11}-a_{22})^2 + 4a_{12}^2}}{2}$$

Tehát λ_1 és λ_2 mindig reális, mert a gyökjel alatt két positiv mennyiség összege áll. Előfordul az az eset, hogy λ_1 és λ_2 egyenlő, akkor ti. ha

$$a_{11} = a_{22}$$

és $\quad a_{12} = 0$

tehát kör esetén. Tehát körnek függvényét forgatásával transformálva a transformált egyenletben is egyenlők maradnak x^2 és y^2 coefficiensei. Azonkívül itt a tengelyek iránya határozatlan, mert a kör centrumán átmenő minden húr lehet tengely, miután conjugáltja reá merőleges. Ez azzal árulja el magát, hogy kör esetén a conjugált átmérő párokból alkotott involuczió circularis, miután az involuczió egyenletében

$$a_{12} \operatorname{tg}\alpha . \operatorname{tg}\beta + a_{12}(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\delta) + a_{11} = 0$$

$a_{12} = 0$, a mi ejtem jellemzi a circularis involuczió.

Megállapítottuk tehát a centrális kúpszeletek egyenletének normal alakját egy olyan derékszögű coordinata rendszerben, melynek origója

a kúpszelet centruma, tengelyei a kúpszelet tengelyei. Hogy teljes legyen az átmenet a régi rendszerről az ujra, az origonak régi

$$\xi = \frac{A_{31}}{A_{33}} \quad , \quad \eta = \frac{A_{32}}{A_{33}}$$

coordinatáin kivül meg kell még állapitanunk a forgatási szögét φ-t. Nyilvánvaló, hogy a φ irányu húrok felezőpontjainak geometriai helye egy reájuk merőleges egyenes, tehát egyik tengely, amelynek egyenlete a régi rendszerben

$$\cos\varphi f_2 + \sin\varphi f_2 = 0$$

vagy helyettesitve

$$\cos\varphi(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z) + \sin\varphi(a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z) = 0$$

rendezve

$$(a_{11}\cos\varphi + a_{12}\sin\varphi)x + (a_{21}\cos\varphi + a_{22}\sin\varphi)y + (a_{31}\cos\varphi + a_{32}\sin\varphi)z = 0$$

Ez tehát oly egyenes, melynek normálisa φ hajlásszöggel bir, de akkor első coefficiense arányos $\cos\varphi$-vel, a második arányos $\sin\varphi$-vel, vagyis kell létezzék olyan λ factornak, miszerint

$$\begin{aligned} a_{11}\cos\varphi + a_{12}\sin\varphi &= \lambda\cos\varphi \\ a_{21}\cos\varphi + a_{22}\sin\varphi &= \lambda\sin\varphi \end{aligned} \qquad (2.)$$

0-ra reducálva a két egyenlet igy irható

$$\begin{aligned} (a_{11}-\lambda)\cos\varphi + a_{12}\sin\varphi &= 0 \\ a_{21}\cos\varphi + (a_{22}-\lambda)\sin\varphi &= 0 \end{aligned}$$

Ez a két egyenlet $\cos\varphi$ és $\sin\varphi$-ben lineáris és homogén, s mivel egyszerre mindkettő nem lehet 0, mert hisz $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$, a rendszer csak igy állhat, ha oletarminansa

$$\Delta \left| \begin{matrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{matrix} \right| = 0$$

Laplace féle egyenlet

vagy kifejtve

$$\lambda^2 - (a_{11}+a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$$

ez pedig a fenti négyzetes egyenlet, mely a transformált egyenlet két coefficiensét szolgáltatja. A λ a irányossági factor tehát egyik

egyiszámmal egyezik, s hogy melyikkel, az kitűnik, ha az (2) alatti első egyenlet $\cos\varphi$-vel, a másodikat $\sin\varphi$-vel szorozzuk és összegezzünk, akkor adódik, hogy

$$\lambda = a_{11}\cos^2\varphi + 2a_{12}\cos\varphi\sin\varphi + a_{22}\sin^2\varphi = a_{11}''$$

Tehát annyi mint x''^2 coefficiense azaz λ_1, úgyhogy betéve λ_1 értéket, adódik φ számára a következő két transcendens egyenlet

$$(a_{11}-\lambda_1)\cos\varphi + a_{12}\sin\varphi = 0$$

$$a_{21}\cos\varphi + (a_{22}-\lambda_1)\sin\varphi = 0$$

az elsőből $\quad \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}}$

a másodikból $\quad = \dfrac{a_{21}}{\lambda_1 - a_{22}}$

Ezzel a forgatás szöge is meg van határozva, s így az átmenet a két coordinatarendszer között is.

Állapítsuk meg most külön az ellipsis és külön a hyperbola normálegyenletét s ennek alapján alkossunk fogalmat magunknak azoknak alakjáról.

Ellipsis

Ellipsis esetén $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$ és miután ez a különbség annyi mint $\lambda_1\lambda_2$ következik, hogy egy λ_1 = egy λ_2 vagyis az ellipsis egyenletében x^2 és y^2 coefficiense egyenlő jelű. Látható tehát, hogy két esetet kell megkülönböztetnünk, a szerint, a mint a harmadik coefficiens egyenlő előjelű λ_1-el és λ_2-vel, avagy nem.

1. Ha λ_1, λ_2 és $\dfrac{\Delta}{\lambda_{33}}$ egyenlő előjelű, az egyenlet nem értelmez valós ellipsist, mert valós pont mindhárom coordinatája valós és nullától különböző s miután mindhárom coordinata a négyzeten szerepel, az ellipsis függvénye állandóan ugyanazt az előjelt viseli, tehát valós

pontban nem tűnhetik el. Ekkor tehát az ellipsis képzetes.

2. Ha λ_1 és λ_2 előjele különbözik $\frac{\Delta}{\Delta_{33}}$ előjelétől, az ellipsis reális.

Ezen két eset analytikai criteriumát is megállapithatjuk könnyen. Mert $a_{11}a_{22} > a_{12}^2$ azaz positiv, tehát a_{11} és a_{22} egyenlő előjelü, másfelöl $\lambda_1 + \lambda_2 = a_{11} + a_{22}$, a miből világos, hogy $\lambda_1, \lambda_2, a_{11}$ és a_{22} ellipsis esetén egyenlő előjelü; és miután $\Delta_{33} > 0$, a harmadik sor jegye Δ-tól függ, úgyhogy ha

$a_{11}.\Delta > 0$, az ellipsis képzetes

ha $a_{11}\Delta < 0$ az ellipsis reális.

Reális ellipsis egyenletét úgy módositjuk, hogy a szabad tag ellentettjével keresztül osztjuk azt a Πs. coordinatákra térve át, röviden

$$-\frac{\Delta}{\Delta_{33}\lambda_1} = a^2 \quad \text{és} \quad -\frac{\Delta}{\Delta_{33}\lambda_2} = b^2 \quad \text{irunk,}$$

úgyhogy az ellipsis normál egyenlete

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

A két λ gyök közül azt vesszük λ_1-nek, melynek absolut értéke a nagyobbik, úgyhogy az ellipsis normálegyenletében $a^2 > b^2$ s ugyanezt a λ_1-et kell azután $\operatorname{tg}\varphi$ kifejezésében is szerepeltetni.

Hyperbola.

Hyperbola esetén $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$, tehát λ_1 és λ_2 ellentett jegyü, a hyperbola mindig reális. Itt a két λ gyök közül azt szoktuk λ_1-nek venni, mely Δ-val egyenlő jegyü, azután az egyenletet úgy módositjuk, hogy a constans ellentettjével keresztül osztunk, úgyhogy a hyperbola normálegyenlete

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

a hol

$$a^2 = -\frac{\Delta}{\Delta_{33}\lambda_1} > 0$$

$$b^2 = -\frac{\Delta}{\Delta_{33}\lambda_2} > 0$$

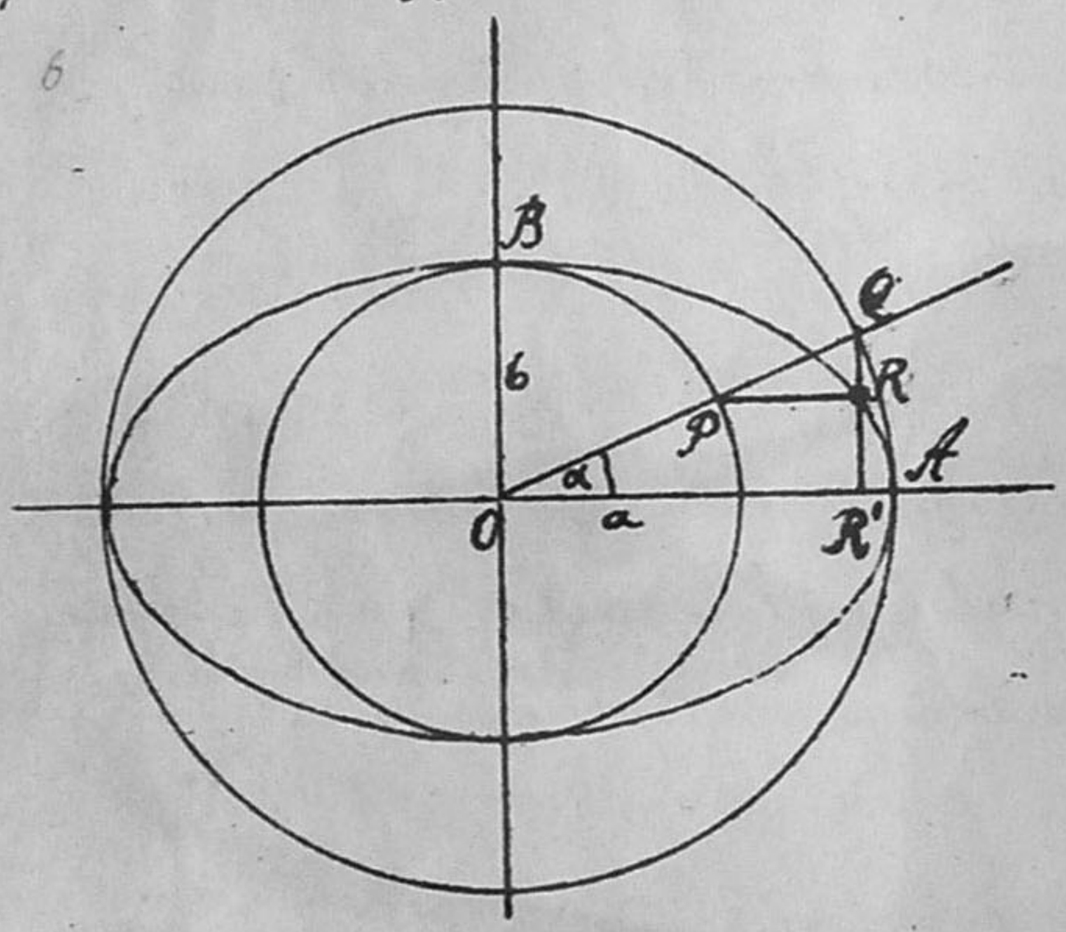
Ezen egyenletek alapján megszerkeszthetjük az ellipsis és hyperbola alakját. Mert a mi az ellipsist illeti, nyilvánvaló, hogy ha x és y úgy van választva, hogy

$$\frac{x}{a} = \cos\alpha \,, \qquad \frac{y}{b} = \sin\alpha$$

akkor az egyenlet teljesül, mert $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$. Ha tehát

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos\alpha \\ y &= b\sin\alpha \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

és α változó parameter, minden α értékhez egy (x,y) pont tartozik, mely pontja az ellipsisnek. Az (1) alatti két egyenlet tehát az ellipsis parameteres egyenletei. Ezek alapján most következőleg szerkesztjük az ellipsis tetszésszerinti számú pontját.



A derékszögű coordinatarendszer O origójából először $a = OA$ majd $b = OB$ sugárral kört írunk. A tetszőleges α szög alatt O-ból húzott egyenes a belső kört P, a külsőt Q pontban metszi. P-ből párhuzamost vonva az x, Q-ból az y tengelylyel, e két párhuzamos R-ben metszi egymást; R az ellipsis pontja. Mert Q és R x coordinátája egyenlő lévén, az OR'Q derékszögű háromszögből következik, hogy $x = a\cos\alpha$, míg R y coordinátája annyi mint P y coordinátája, tehát $y = b\sin\alpha$, vagyis R ténylég pontja az ellipsisnek. A szerkesztést más meg más α szögre ismételve, akárhány pontját szerkeszthetjük az ellipsisnek. Az ellipsis parameteres előállításából (de az eredeti egyenletből is) kiolvasható az a és b constansok geometriai jelentése.

Mert ha $\alpha = 0$, $x = a$, $y = 0$, ha $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $x = 0$, $y = b$ vagyis $\underline{a}$ az x tengelyből lemetszett darab mérőszáma, b az y tengelyből lemetszett darab, azaz a fél kistengely hosszának mérőszáma. Röviden azt szokták mondani, hogy $\underline{a}$ a nagy, $\underline{b}$ a kis tengely.

A hyperbola egyenlete $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ teljesül, ha

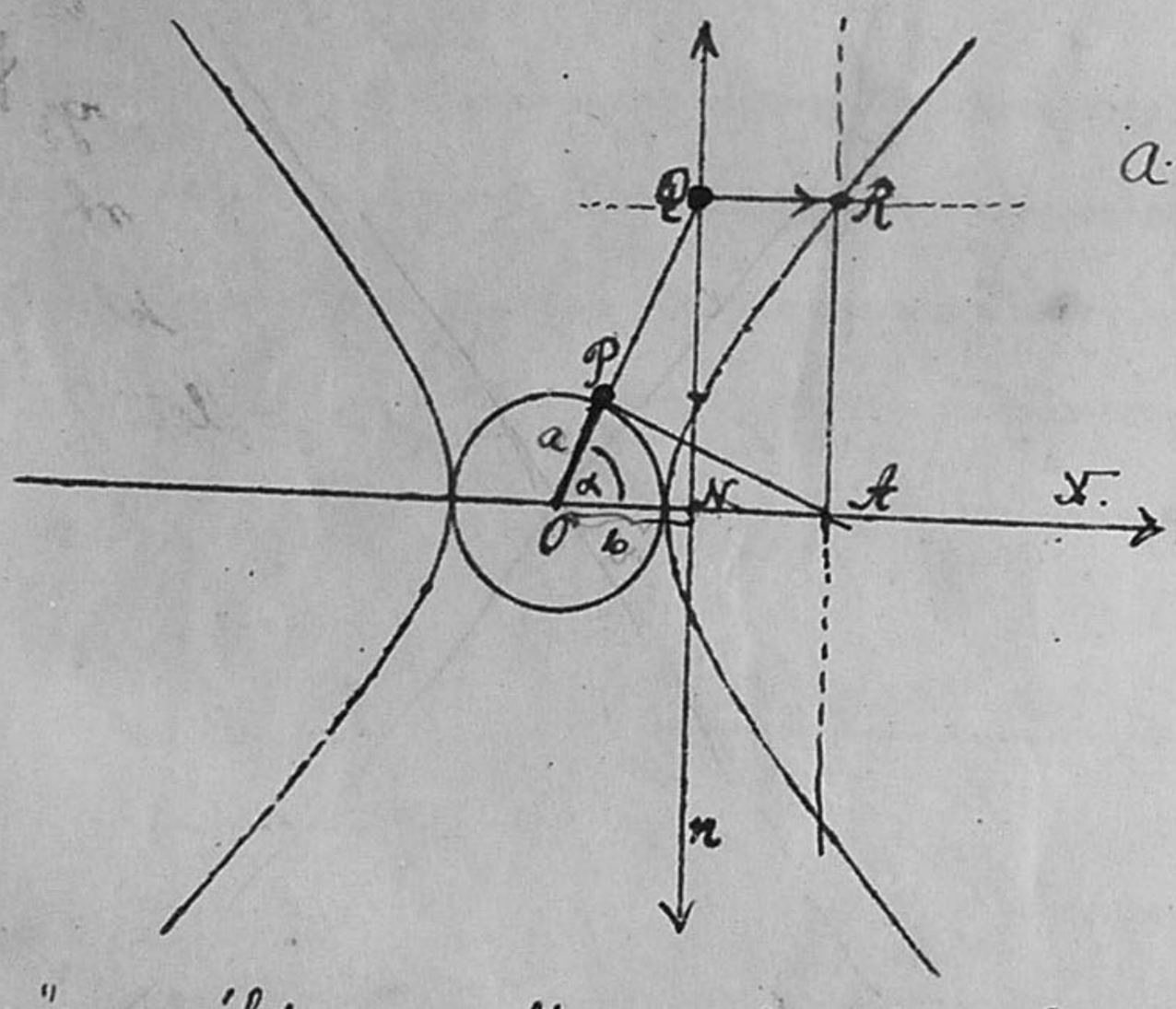
$$\frac{x}{a} = \sec\alpha \quad , \quad \frac{y}{b} = \operatorname{tg}\alpha ,$$

mert $\sec^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha - 1 = 0$, tehát a hyperbola paraméteregyenlete

$$x = a\sec\alpha$$

$$y = b\operatorname{tg}\alpha$$

a hol α változó paraméter. Ennek alapján következőleg szerkesztjük meg a hyperbola pontjait. O-ból a-val kört írunk és O-ból $\underline{b}$ távolságra az x tengelyre merőlegest emelünk (n). Az O-ból α szög alatt kihúzott egyenes a kört P, a normálist Q-ban metszi. A P-hez húzott érintőnek az x tengelylyel való A metszéspontjában erre merőlegest emelve, ez a Q-ban az



„x" normálisra emelt merőlegest az hyperbola R pontjában metszi. Mert R-nek x koordinátája annyi mint OA, s az OA P derékszögű háromszögből $x = a\sec\alpha$; R-nek y koordinátája megegyezik a Q-éval, ez pedig a QNO háromszögből $y = b\operatorname{tg}\alpha$. Tehát R tényleg pontja a hyperbolának. A szöget változtatva akárhány pontot tudunk szerkeszteni.

Tudjuk, hogy hyperbolánál van két reális asszymptota, melyek a görbe végtelen távoli pontjai felé mutatnak. Azt is láttuk, hogy a poláris kimetszi a polusból a görbéhez húzott érintők érintési pontjait s mivel a centrum polárisa a végtelen távoli egyenes, mely a hyperbolát két pontban metszi, nyilvánvaló, hogy a hyperbola asszymptotái a végtelen távoli pontokhoz tartozó érintői. A két asszymptota egyenletét kapjuk, ha a hyperbola függvényét $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - z^2$ szorzatalakban írjuk, tehát egyenlete

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) - z^2 = 0$$

Ha $z=0$, akkor vagy $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$

vagy $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$

ez a két asszymptota egyenlete, s ha ezek bármelyikét combináljuk a görbe egyenletével, kijő, hogy $z^2=0$, vagyis az asszymptota a végtelen távoli pontban érinti a hyperbolát, mert a pont mint metszéspont kétszer számit. Ezen egyenletekből pedig látható, hogy a két asszymptota irányfangense $\frac{b}{a}$, illetőleg $-\frac{b}{a}$, tehát szymmetrikusan fekszenek a tengelyekhez.

A parabola.

Egy általános másodfoku egyenlet

$$f(x,y,z) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2$$

parabolát ábrázol, ha $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$, azaz ha $a_{11} \cdot a_{22} = a_{12}^2$

A parabola egyenletében tehát a_{11} és a_{22} egyenlő jegyü és feltehetjük, hogy mindkettő positiv különben (-1)-el való átszorzással ezt el lehetne érni. Ha ekkor $\sqrt{a_{11}}\sqrt{a_{22}} = a_{12}$ úgy véve a gyökök jegyét, hogy a két oldalon jegyegyenlőség legyen, ezt a jegyet pedig beolvasztva képezjük

Bákony

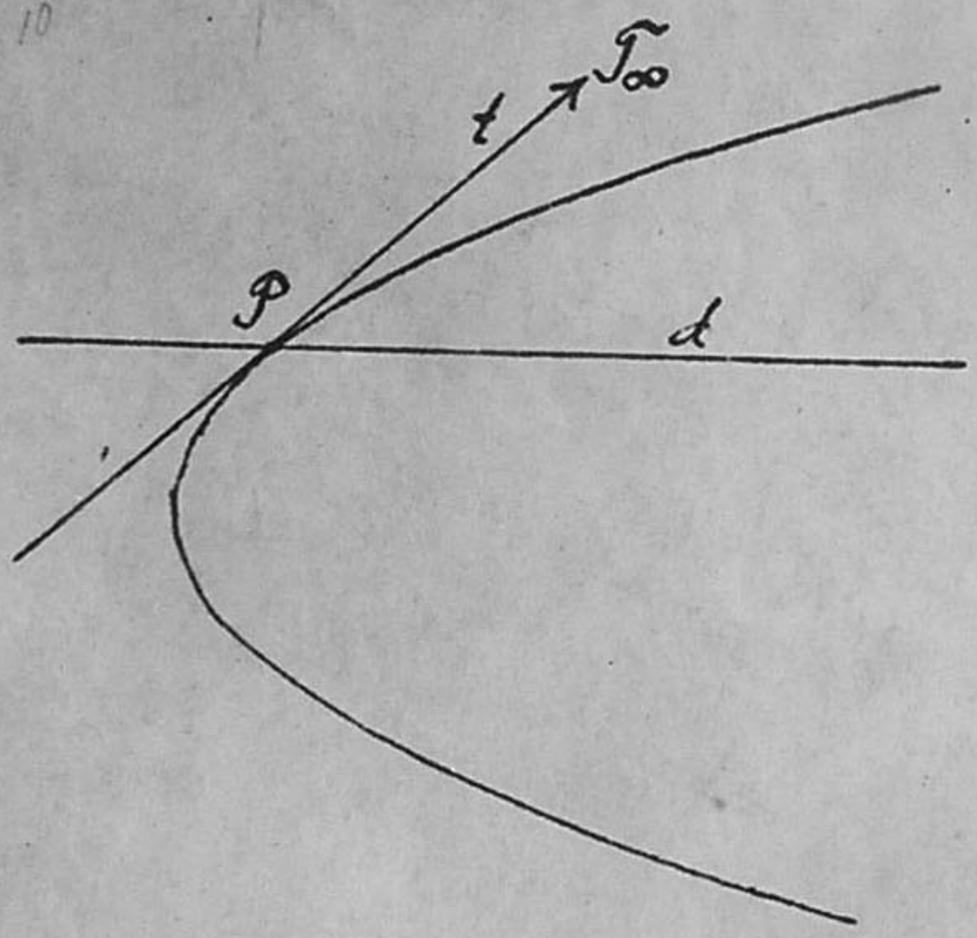
a négyzetgyökbe. Látható most, hogy a parabola egyenletében a három első tag teljes négyzetet ad, t.i. $(\sqrt{a_{11}}x+\sqrt{a_{22}}y)^2$, úgyhogy a többiekből $(2z)$-t közös tényezőnek kivéve, a parabola egyenlete így írható

$$(\sqrt{a_{11}}x+\sqrt{a_{22}}y)^2+2z(a_{13}x+a_{23}y+\frac{a_{33}}{2}z)=0$$

vagyha
$$\sqrt{a_{11}}x+\sqrt{a_{22}}y=d$$
$$z=z$$
$$a_{13}x+a_{23}y+\frac{a_{33}}{2}z=t$$

akkor az egyenlet $d^2+2zt=0$

Ebből az egyenletből kiolvashatjuk, hogy milyen viszonyban van a parabola a $d=0$ és $t=0$ egyenesekhez. Mert componálva a $d=0$ egyenletet a parabola ezen egyenletével, kijő, hogy vagy $z=0$, vagy $t=0$; tehát a $d=0$ egyenes két pontban metszi a parabolát, a végtelen távoli pontban és egy véges pontban, t.i. d és t egyenesek metszéspontjában P-ben. Mivel $z=0$ esetén $d^2=0$, a d egyenes ~~érinti~~ a végtelen távoli egyenes érintési pontjában metszi a parabolát, úgy annyi ha $t=0$, $d^2=0$, tehát a t egyenes P-ben érinti a parabolát, mert a metszéspont kétszer számít. Nyilvánvaló ebből, hogy a t egyenes végtelen távoli pontjára T_∞-re nézve d poláris, és így d felezi a t-vel párhuzamos húrokat, mint a T_∞-ből húzott szelőknek a görbétől kimetszett darabjait. Szóval d átmérője a parabolának, és t ezen átmérő véges metszéspontjához tartozó érintő. Ha ez a két egyenes merőleges volna egymásra, megvolna a czélszerű de-



rekszögü coordinatarendszer, melyben egyszerübb alakban ki lehetne fejezni a parabola egyenletét. De egy parameter bevezetésével ez is sikerülni fog. Identicus átalakitással ugyanis igy irható a parabola egyenlete

$$(\sqrt{a_{11}}\,x+\sqrt{a_{22}}\,y+\lambda z)^2-2\sqrt{a_{11}}\lambda xz-2\sqrt{a_{22}}\,yz-\lambda^2z^2+2a_{13}xz+2a_{23}yz+a_{33}z^2=$$

$$=\underbrace{(\sqrt{a_{11}}\,x+\sqrt{a_{22}}\,y+\lambda z)^2}_{d'}-2z\underbrace{\left[(\sqrt{a_{11}}\lambda-a_{13})x+(\sqrt{a_{22}}\lambda-a_{23})y+\left(\frac{\lambda^2-a_{33}}{2}\right)z\right]}_{t'}=0 \qquad \text{I.}$$

vagy röviden $\qquad d'^2-2zt'=0$

a hol $d'=0$ átmérőt jelent, és pedig a λ parameter minden értéke mellett, $t'=0$ pedig az átmérő által kimetszett ponthoz tartozó érintő. A λ parametert most úgy kell megválasztani, hogy d' és a hozzátartozó t' egymásra merőleges legyen, vagyis ki kell választani az összes átmérők közül azt, mely a reá merőleges húrokat felezi, ez lesz a parabola tengelye. Ennek metszéspontja a görbével a parabola csúcsa, az ebben húzott érintő csúcsérintő s ez lesz az y tengely. d' és t' merőlegesek egymásra, ha a megfelelő coefficiensek szorzatainak összege 0, tehát ha

$$\sqrt{a_{11}}(\lambda\sqrt{a_{11}}-a_{13})+\sqrt{a_{22}}(\lambda\sqrt{a_{22}}-a_{23})=0$$

vagyis

$$\lambda(a_{11}+a_{22})-\sqrt{a_{11}}\,a_{13}-\sqrt{a_{22}}\,a_{23}=0$$

ebből

$$\lambda=\frac{\sqrt{a_{11}}\,a_{13}+\sqrt{a_{22}}\,a_{23}}{a_{11}+a_{22}}$$

tehát egy jól meghatározott λ érték adódik, mert $a_{11}+a_{22}$ nem lehet 0, mivel egyenlő előjelüek összege. Behelyettesitve λ ezen értékét, lesz

$$\sqrt{a_{11}}\,\lambda-a_{13}=\frac{a_{11}a_{13}+a_{12}a_{23}}{a_{11}+a_{22}}-a_{13}=\frac{a_{12}a_{23}-a_{22}a_{13}}{a_{11}+a_{22}}=\frac{A_{31}}{a_{11}+a_{22}}$$

Továbbá

$$\sqrt{a_{22}}\,\lambda-a_{23}=\frac{A_{32}}{a_{11}+a_{22}}$$

$$\lambda^2-a_{33}=\frac{a_{11}a_{13}^2+2a_{12}a_{13}a_{23}+a_{22}a_{23}^2}{(a_{11}+a_{22})^2}-a_{33}$$

$$=\frac{a_{11}(a_{13}^2-a_{11}a_{33})+2a_{12}(a_{13}a_{23}-a_{12}a_{33})+a_{22}(a_{23}^2-a_{22}a_{33})}{(a_{11}+a_{22})^2}$$

de a zárjeles kifejezések könnyen felismerhető" aldeterminansok, úgyhogy

$$\lambda^2 - a_{33} = -\frac{a_{11}A_{22} - 2a_{12}A_{12} + a_{22}A_{11}}{(a_{11}+a_{22})^2}$$

ezzel meghatároztuk az I. egyenlet összes coefficienseit úgy, hogy az x-tengely $d'=0$ a parabola tengelye, $t'=0$ a csúcsérintője. Érdekes vezessük be új coordinatatengelyek gyanánt. Tehát az új x tengely egyenlete a régi rendszerben

$$\sqrt{a_{11}}\,x + \sqrt{a_{22}}\,y + \frac{\sqrt{a_{11}}\,a_{13} + \sqrt{a_{22}}\,a_{23}}{a_{11}+a_{22}} = 0$$

az új y tengely egyenlete

$$A_{31}x + A_{32}y - \frac{a_{11}A_{22} - 2a_{12}A_{12} + a_{22}A_{11}}{2(a_{11}+a_{22})} = 0$$

Ha most az új coordinaták x' és y', akkor x' jelenti a pont normális távolságát az y' tengelytől, y' jelent normális távolságot az x' tengelytől, tehát a transformatio egyenletei

$$y' = \frac{\sqrt{a_{11}}\,x + \sqrt{a_{22}}\,y + \lambda}{\sqrt{a_{11}+a_{22}}} \qquad \sqrt{a_{11}}\,x + \sqrt{a_{22}}\,y + \lambda = y'\sqrt{a_{11}+a_{22}}$$

$$x' = \frac{A_{31}x + A_{32}y - \mu}{\sqrt{A_{31}^2 + A_{32}^2}} \qquad A_{31}x + A_{32}y - \mu = x'\sqrt{A_{31}^2 + A_{32}^2}$$

Ezek alapján helyettesítve az I. egyenletekben, lesz

$$(a_{11}+a_{22})y'^2 - 2\frac{1}{a_{11}+a_{22}}\sqrt{A_{31}^2 + A_{32}^2}\,x' = 0$$

és osztva y'^2 coefficiensével, kapjuk a parabola egyenletét abban a rendszerben, melynek tengelyei a parabola tengelye és csúcsérintője;

$$y'^2 - 2\frac{\sqrt{A_{31}^2 + A_{32}^2}}{(a_{11}+a_{22})^2}x' = 0$$

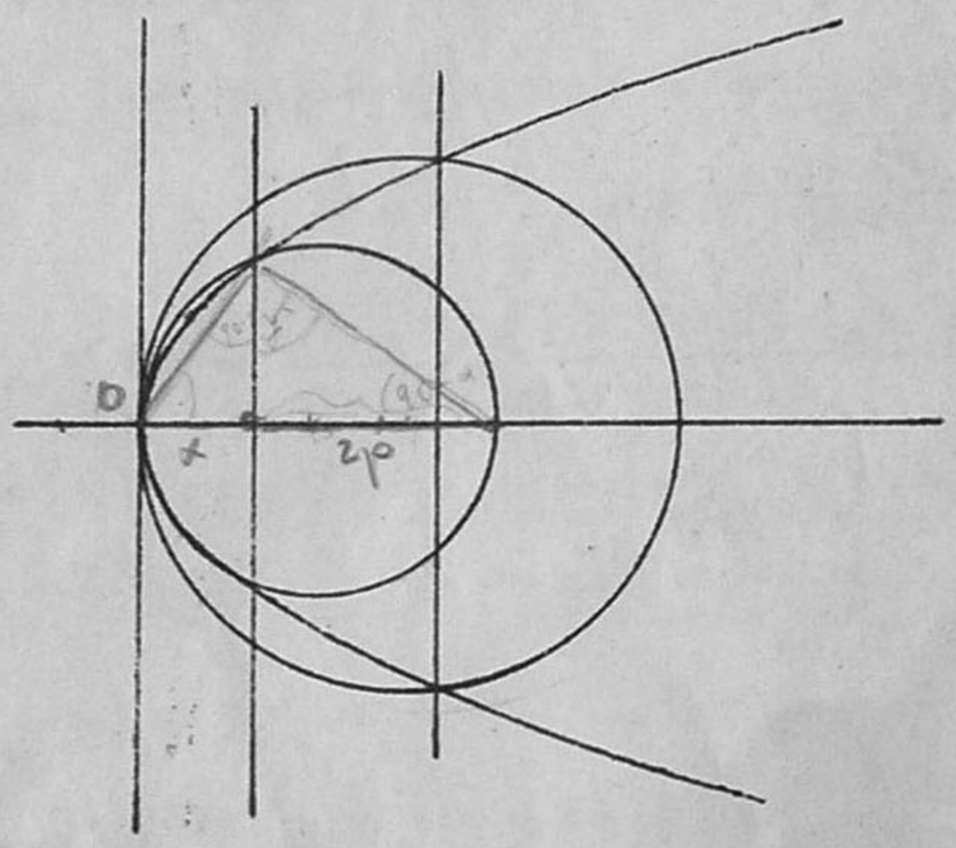
Ha rövidség kedvéért $\frac{\sqrt{A_{31}^2 + A_{32}^2}}{(a_{11}+a_{22})^2} = p$, a parabola úgy nevezett paramétere, akkor az egyenlet legegyszerűbb alakja

$$y'^2 - 2px' = 0$$

Minden parabola egyenlete erre az alakra hozható. A viszony az új és régi

rendszer között határozottá válik az által, hogy ki tudjuk jelölni a régi rendszerben az uj x és y tengelyt és a parametert.

(Ezen egyenlet alapján egyszerüen meg tudjuk szerkeszteni a parabolát. Vegyünk fel egy derékszögü coordinatarendszert, melyben a parabola egyenlete $y^2 = 2px$. Látható, hogy csakis positiv x értékekhez tartoznak reális parabolapontok, tehát a parabola az y tengely jobboldalán helyezkedik el, symmetricusan az x tengelyhez, s egy adott x-hez tartozó y geometriai középarányos x és 2p között. Tehát x-et meg kell toldani 2p-vel, s e fölé, mint átmérő fölé kört irni, mely az x-hez emelt merőlegest a keresett parabola pontban metszi. Az egyenletből látható, hogy az origoból az (xy) parabolaponthoz induló egyenes iránytangense $tg\alpha = \frac{y}{x} = \frac{2p}{y}$, tehát $\lim_{x=\infty} tg\alpha = 0$ vagyis a mint y nő, ez a vector minadjobban közeledik az x tengelyhez s a határban vele összeesik. —



Megismertük tehát a kúpszeletek három fajának normál egyenletét s ezek alapján azoknak alakját.

A pontcoordinatás egyenletből megkapjuk a vonalcoordinatás normalegyenletet, ha a pontcoordinatás függvény determinansának adjungalt determinansát megalkotjuk, s ennek elemeit megfelelőleg kapcsoljuk u, v, w-vel. A pontcoordinatás egyenletek voltak

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z^2 = 0$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - z^2 = 0$$ hyperbola

$$y^2 - 2px = 0$$ parabola

Az ellipsis determinansa

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$, adjungáltja $$\begin{vmatrix} -\frac{1}{b^2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a^2b^2} \end{vmatrix}$$

tehát az ellipsis vonalkoordinatás normálegyenlete

$$-\frac{1}{b^2}u^2 - \frac{1}{a^2}v^2 + \frac{w^2}{a^2b^2} = 0$$

vagy $(-a^2b^2)$-al átszorozva $a^2u^2 + b^2v^2 - w^2 = 0$

Ebből adódik a hyperbola vonalkoordinatás egyenlete, ha b^2 helyett $(-b^2)$-et írunk, tehát

$$a^2u^2 - b^2v^2 - w^2 = 0$$

a parabola determinansa

$$\begin{vmatrix} 0, & 0, & -p \\ 0 & 1 & 0 \\ -p & 0 & 0 \end{vmatrix}$$, adjungáltja $$\begin{vmatrix} 0 & 0 & p \\ 0 & -p^2 & 0 \\ p & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

tehát a parabola vonalkoordinatás egyenlete

$$-p^2v^2 + 2puw = 0$$

vagyis $$pv^2 - 2uw = 0$$

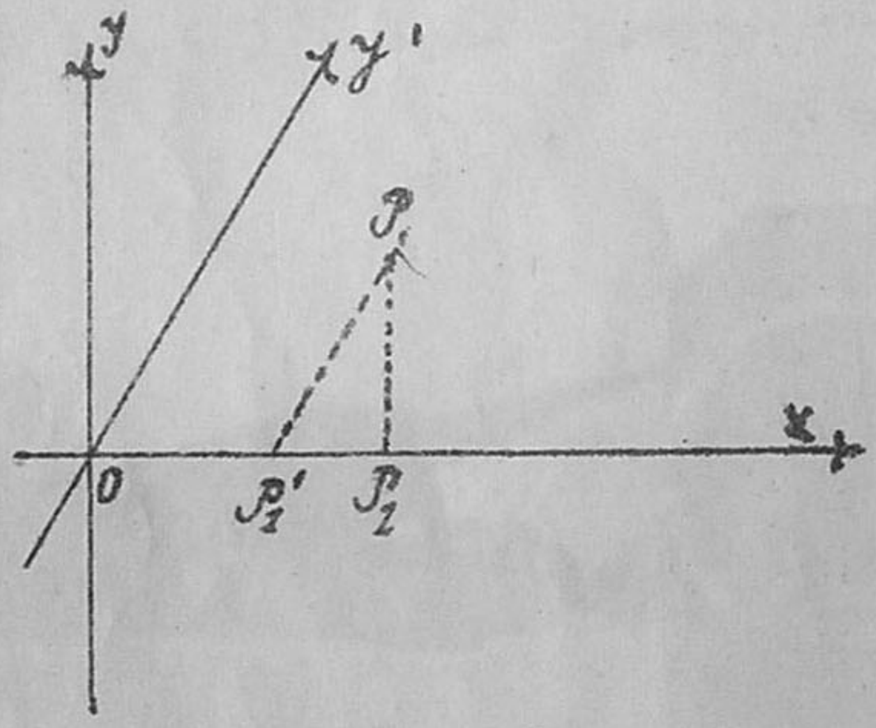
A kúpszeletek egyenlete ferdeszögű rendszerben.

Lássuk, miként alakulnak a kúpszeletek normál egyenletei, ha derékszögű rendszerről két conjugált átmérő által alkotott ferdeszögű coordinatarendszerre térünk át. A két conjugált átmérőhöz hozzávesszük még a sík végtelen távoli egyenesét, ez a három egyenes nyilvánvalóan polárháromszöget alkot.

De már láttuk, hogy a kúpszeletnek egy polárháromszögre vonatkozó egyenletében csak a négyzetes tagok fordulnak elő. Hogy tehát megállapítsuk a transformált coefficienseket, felkeressük ezen átmenetelnél a coefficienseknek invariáns tulajdonságu függvényét. A ferdeszögü rendszerről derékszögüre való átmenetelnél az $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2$ függvény coefficienseinek invariáns tulajdonságú függvényei voltak

$$a_{11}+a_{22} \quad \text{és} \quad a_{11}a_{22}-a_{12}^2$$

Keressük fel a hasonló függvényeket a derékszögüről ferdeszögü rendszerre való átmenetelnél. Elég csak az y tengely irányát megváltoztatni, úgyhogy x és y' lesznek az uj rendszer tengelyei. Láttuk, hogy ha w a két tengely hajlásszöge, az uj x'y' és a régi xy coordinaták összefüggése a következő



$$x = x' + y'\cos w$$

$$y = y'\sin w$$

úgyhogy a fenti négyzetes függvény alakja az uj rendszerben

$$a_{11}(x'+y'\cos w)^2 + 2a_{12}(x'+y'\cos w)y'\sin w + a_{22}y'^2\sin^2 w$$

vagy rendezve $$a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}y'^2$$

a hol

$$a'_{11} = a_{11}$$

$$a'_{12} = a_{11}\cos w + a_{12}\sin w$$

$$a'_{22} = a_{11}\cos^2 w + 2a_{12}\cos w\sin w + a_{22}\sin^2 w$$

Igy fejezhetők ki a ferdeszögü rendszerre vonatkozó coefficiensek a derékszögü rendszerre vonatkozó coefficiensekkel. Ezen relatiokból azonnal kiadódnak az invariáns függvények. Mert szorozva az első egyenletet 1-el, a másodikat $(-2\cos w)$-val, a harmadikat 1-gyel és összeadva, lesz

$$a'_{11} - 2a'_{12}\cos\omega + a'_{22} = a_{11}\sin^2\omega + a_{22}\sin^2\omega$$

és osztva $\sin^2\omega$-val $\quad \dfrac{a'_{11} - 2a'_{12}\cos\omega + a'_{22}}{\sin^2\omega} = a_{11} + a_{22}$ I.

Ez épen a derékszögü rendszerre vonatkozó invariáns függvény, kifejezve a ferdeszögü rendszerben. A második invariánst nyerjük, ha az első és harmadik transformált coefficiens szorzatából levonjuk a másodiknak a négyzetét, lesz

$$a'_{11}\,a'_{22} - a'^2_{12} = a_{11}a_{22}\sin^2\omega - a^2_{12}\sin^2\omega$$

a miből

$$\frac{a'_{11}a'_{22} - a'^2_{12}}{\sin^2\omega} = a_{11}a_{22} - a^2_{12} \qquad \text{II.}$$

Ez pedig a derékszögü rendszerre vonatkozó második invariáns függvény, kifejezve a ferdeszögü rendszerre vonatkozó coefficiensekkel.

Ezen invariáns függvények segélyével most meghatározhatjuk a kúpszeletek transformált egyenleteiben is a coefficienseket.

Vegyük először az ellipsist, normál egyenlete $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$

Ha egy conjugált átmérőpárra transformálunk, ujból csak négyzetes tagok fognak szerepelni, tehát az uj egyenlet ilyen alakú lesz

$$\frac{x'^2}{a'^2} + \frac{y'^2}{b'^2} - 1 = 0$$

Ha a két conjugált tengely ω szöget zár be, akkor az I. és II. egyenletek alapján

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{\frac{1}{a'^2} + \frac{1}{b'^2}}{\sin^2\omega}$$

és

$$\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{b^2} = \frac{1}{a'^2}\,\frac{1}{b'^2}\,\frac{1}{\sin^2\omega}$$

A második egyenletben a reciprok értékekre téve át, kapjuk, hogy

$$a^2b^2 = a'^2b'^2\sin^2\omega$$

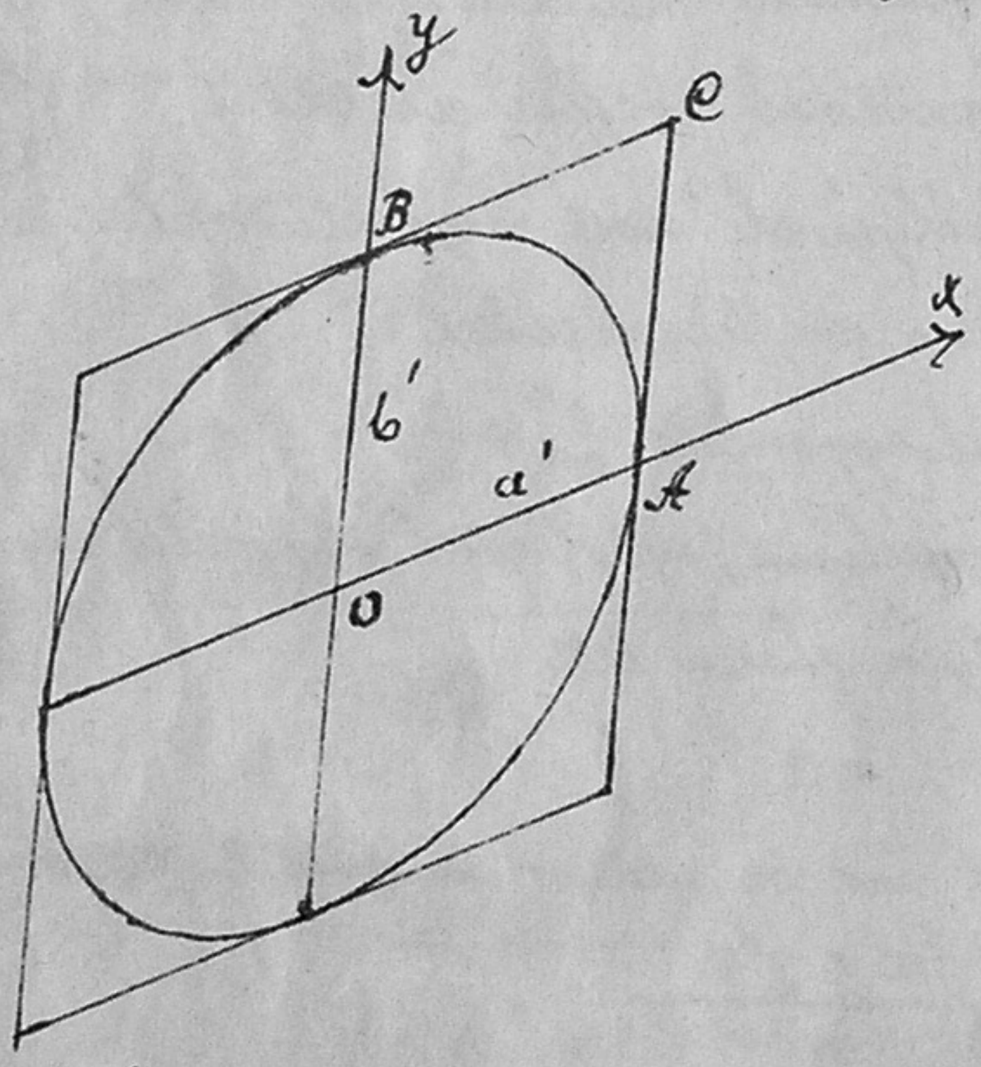
és ebből $\quad \underline{ab = a'b'\sin\omega} \qquad (1).$

A második egyenlet szerint $\quad \dfrac{a^2+b^2}{a^2b^2} = \dfrac{a'^2+b'^2}{a'^2b'^2\sin^2\omega}$

és miután az alsók egyenlők, következik, hogy

$$\underline{a^2+b^2=a'^2+b'^2} \qquad (2).$$

Ennek a két egyenletnek egyszerü geometriai jelentése van. Mert ha kérdezzük, hol metszi az x' és y' tengely az ellipsist, felelet, hogy az $x'=\pm a'$ illetőleg az $y'=\pm b'$ pontokban, tehát $\underline{a'}$ az x' tengelyként szereplő "átmérő" felének hossza, b' az y' tengelyként szereplő conjugált átmérő" felének hossza, s a (2) egyenlet azt mondja, hogy bármely két conjugált átmérő" felhosszának a négyzeteiből alkotott összeg állandó és annyi mint a kis és nagy tengely fél-hosszának négyzeteiből alkotott összeg. Az (1). egyenlet pedig azt mondja, hogy az a', b' oldalakkal biró $AOBC$ parallelogramma területe állandó, t.i. annyi mint az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ oldalakkal biró derékszögü négyszög területe. De ha $AOBC$ területe bármily conjugált átmérőpárra állandó, akkor ennek négyszerese is állandó. De a CA oldal érinti A-ban, a CB oldal B-ben az ellipsist, úgyhogy kimondhatjuk a következő tételt:



13

<u>az ellipsis bármely conjugált átmérőpárjának végpontjaihoz tartozó érintő" parallelogramma területe állandó, s annyi mint a kis és nagy tengelyj végpontjaiban érintő derékszögü négyszög területe.</u>

A fenti relatiók alapján kifejezhetjük az uj coefficienseket a régiekkel, mert

$$a'^2+b'^2=a^2+b^2$$

és

$$a'^2b'^2=\frac{a^2b^2}{\sin^2\omega}$$

lévén

a'^2 és b'^2 a következő" négyzetes egyenletnek képezik gyökeit:

$$z^2-(a^2+b^2)z+\frac{a^2b^2}{\sin^2\omega}=0$$

ebből

$$z=\frac{a^2+b^2}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^2-\frac{a^2b^2}{\sin^2\omega}}$$

Az eredeti egyenletben $a^2>b^2$ volt, tehát itt is a nagyobbik gyök lesz a'^2, a kisebbik b'^2. De nem mindig kapunk reális gyököket, csak akkor, ha olyan az ω hajlásszög, hogy a gyökjel alatti mennyiség pozitív. Van tehát ellipsis esetén olyan minimális szög, melynél kisebbet két conjugált átmérő nem alkothat egymással. Ez adódik az

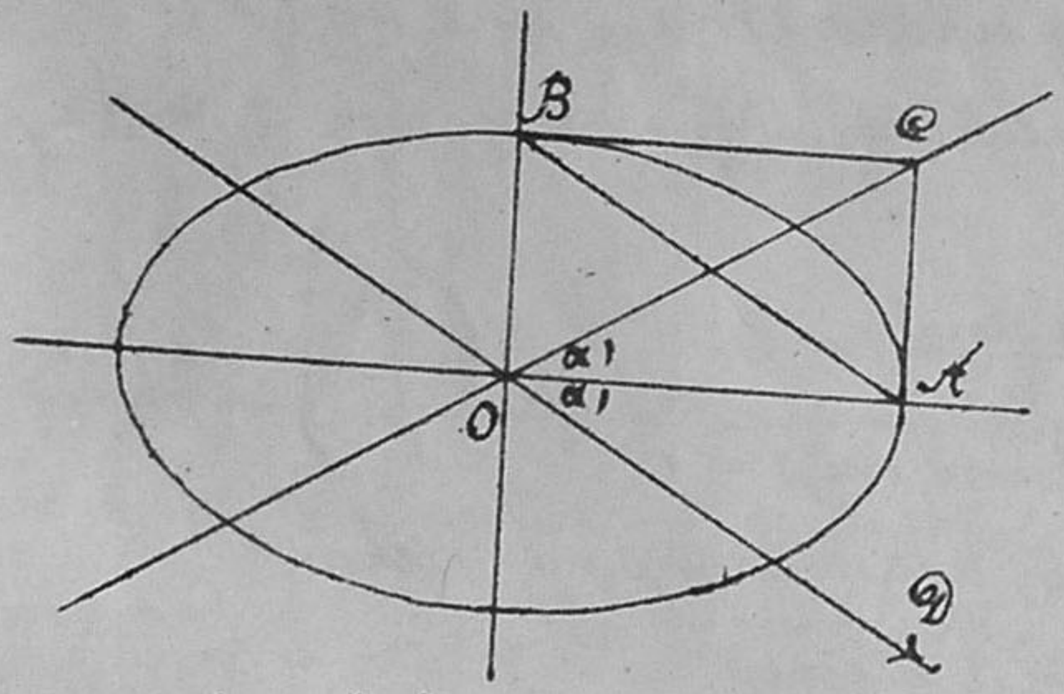
$$\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^2=\frac{a^2b^2}{\sin^2\omega}$$

egyenletből, ebből

$$\frac{a^2+b^2}{2}=\frac{ab}{\sin\omega}$$

tehát $\sin\omega=\frac{2ab}{a^2+b^2}$ ezen legkisebb hajlásszög sinusa. Reális ellipsisnél tehát $\sin\omega\geq\frac{2ab}{a^2+b^2}$

A minimális hajlásszöggel bíró conjugált átmérőpárok egyszerűen felkereshetjük a következő szerkesztéssel. Az ellipsis tengelyeit coordinatatengelyeknek véve, azoknak A és B végpontjaiban merőlegeseket állítunk a tengelyekre, melyek egymást C-ben metszik. OC felezi az AB húrt, tehát a vele párhuzamos összes húrokat, úgyhogy az AB-vel párhuzamos OD átmérő conjugáltja az OC átmérőnek. Mindkettő ugyanazon α szög alatt hajlik



az x tengelyhez, azaz $\alpha=2\alpha'$. Kimutatjuk, hogy ez az a két conjugált átmérő, melyeknek hajlásszöge a legkisebb, azaz hogy $\sin 2\alpha=\frac{2ab}{a^2+b^2}$. Az OAC derék-szögű háromszögből ugyanis

$$\cos\alpha'=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \sin\alpha'=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

tehát $2\sin\alpha'\cos\alpha'=\sin 2\alpha=\frac{2ab}{a^2+b^2}$, tehát az állítás helyes.

Lássuk, milyen alakot nyer az ellipsis egyenlete, ha ezen conjugált átmérőpárt választjuk coordinatatengelyekül. Akkor a mi

négyzetes egyenletünk két gyöke egyenlő, s pedig

$$a'^2 = b'^2 = \frac{a^2+b^2}{2},$$ tehát az ellipsis egyenlete

$$\frac{x'^2}{a'^2} + \frac{y'^2}{b'^2} - 1 = 0$$

vagyis $$x'^2 + y'^2 - \left(\frac{a'^2+b'^2}{2}\right) = 0$$

Ilyen a kör egyenlete is, olyan derékszögű coordinatarendszerben, melynek origója a kör centruma. Tehát ellipsisnél létezik olyan fordeszögű coordinatarendszer, melyben az ellipsis egyenlete egyezik a kör egyenletével.

Hátra van még, hogy kiszámítsuk az ω hajlásszöggel biró conjugált átmérők hajlásszögét a régi coordinatarendszer x tengelyéhez. Legyen az új x tengely egyenlete szolgáló átmérő hajlásszöge a régi x tengelyhez α, az új y tengely egyenlete szolgáló conjugált átmérőé β; miután a két irány conjugált, áll egész általánosan, hogy

Poláris egyenlet 271 old

$$a_{11}\cos\alpha\cos\beta + a_{12}(\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta) + a_{22}\sin\alpha\sin\beta = 0$$

Jelen esetben, mikor az ellipsis egyenlete $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, lesz $a_{11} = \frac{1}{a^2}$, $a_{12} = 0$, $a_{22} = \frac{1}{b^2}$, tehát

$$\frac{\cos\alpha\cos\beta}{a^2} + \frac{\sin\alpha\sin\beta}{b^2} = 0$$

a mi így is írható $b^2\cos\alpha\cos\beta + a^2\sin\alpha\sin\beta = 0$ 1.

Másfelől ha ω a két átmérő hajlásszöge, akkor $\omega = \beta - \alpha$, tehát

$$\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \cos\omega$$ 2

Szorozzuk 2-t a^2-al s vonjuk le belőle 1-et, lesz

$$(a^2-b^2)\cos\alpha\cos\beta = a^2\cos\omega$$

és ha szorozzuk 2-t b^2-al, és levonjuk 1-ből, lesz

$$(a^2-b^2)\sin\alpha\sin\beta = -b^2\cos\omega$$

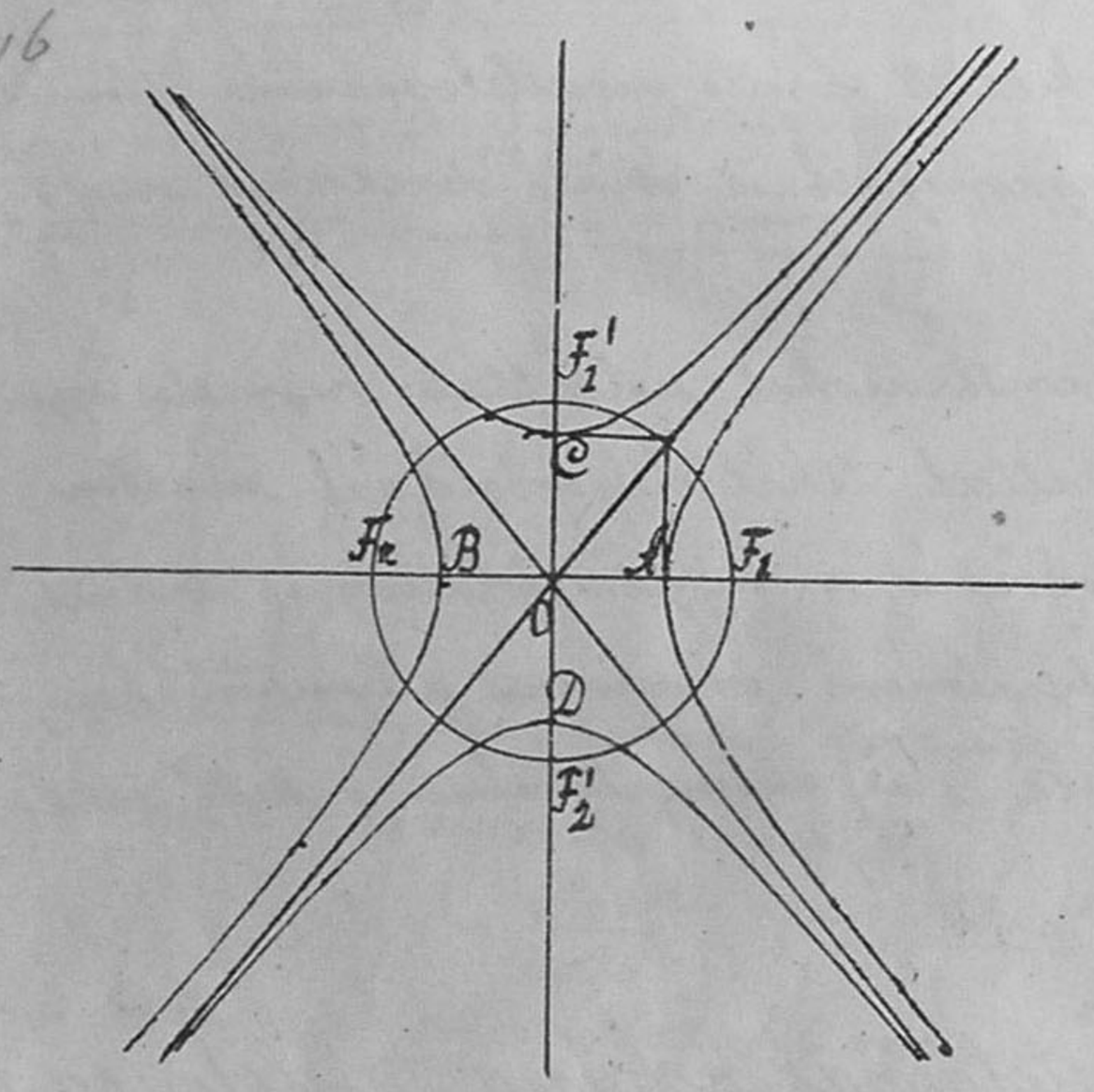
E két egyenlet megfelelő oldalainak differenciáját alkotva lesz

$$(a^2-b^2)\cos(\alpha+\beta) = (a^2+b^2)\cos\omega$$

a miből $$\cos(\alpha+\beta) = \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\cos\omega$$

Ezzel meg van határozva $\alpha + \beta$, s mivel $\beta - \alpha = w$, külön az α és β is meg van határozva.

Ezek az eredmények kiterjeszthetők a hyperbolára is, csak némely tétel módosúl. A normál egyenlet csak abban különbözik az ellipsisétől, hogy b^2 helyébe lép $-b^2$, tehát $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$. A két asszymptota $\frac{b}{a}$ illetőleg $-\frac{b}{a}$ iránytangensekkel bír, s az általuk alkotott szögtérben vonul el az egész görbe, symmetrice az x tengelyhez. Csak az x tengely metsz bele a görbébe, és a nem egyébb, mint a két hyperbolaágas távolsága az origotól. A b constansnak ezen hyperbolánál nincs geometriai jelentése, de ha fellépjen a



tetbe vesszük a

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

hyperbolát is, mely az asszymptotáknak az y tengely által bezárt szög szögterében vonul el, ezt metszi az y tengely, s a kimetszett két csúcspont távola az origotól b. Ez a két hyperbola tehát egyszerre geometriai jelentését ad úgy az a mint a b constansnak. Ezután hyperbolánál a conjugált átmérőpárok hyperbolicus involuciót alkotnak, melynek kettős sugarai az asszymptoták, azért bármely conjugált átmérőpár egyik átmérője belevág az első, második átmérője a második hyperbolába. Ha tehát egy conjugált átmérőpárra transformáljuk a hyperbolákat, és az elsőnek új egyenlete

$$\frac{x'^2}{a'^2} - \frac{y'^2}{b'^2} - 1 = 0$$

akkor a másodiké $-\frac{x'^2}{a'^2}+\frac{y'^2}{b'^2}-1=0$

a hol a' az uj x, b' az uj y tengelyről kimetszett darab hossza. Itt is fellép két invariáns, az első $a^2-b^2=a'^2-b'^2$, a második adódik, az $a^2b^2=a'^2b'^2\sin^2\omega$ egyenletből, ha b^2 helyébe $-b^2$ lép, tehát szintén $a^2b^2=a'^2b'^2\sin^2\omega$, a miből

$$ab=a'b'\sin\omega$$

Ennek pedig geometriai jelentése az, hogy bármely két conjugált átmérő végpontjaiban a két hyperbolához szerkesztett érintő parallelogramma területe állandó s annyi mint a tengelyek végpontjaiban érintő derékszögü négyszög területe.

Az a'^2 és $-b^2$ transformáló constansokat szolgáltató négyzetes egyenlet minden ω-hoz reális értékeket szolgáltat, tehát hyperboláknál nincsen minimális hajlásszöggel biró conjugált átmérőpár, a mi geometriailag is evidens, mert hisz minél közelebb esik valamely átmérő valamelyik asszymptotához, conjugáltja is annál közelebb jut hozzá s az asszymptotában a kettő össze esik.

A hyperbola asszymptotáinak nehány tulajdonsága.

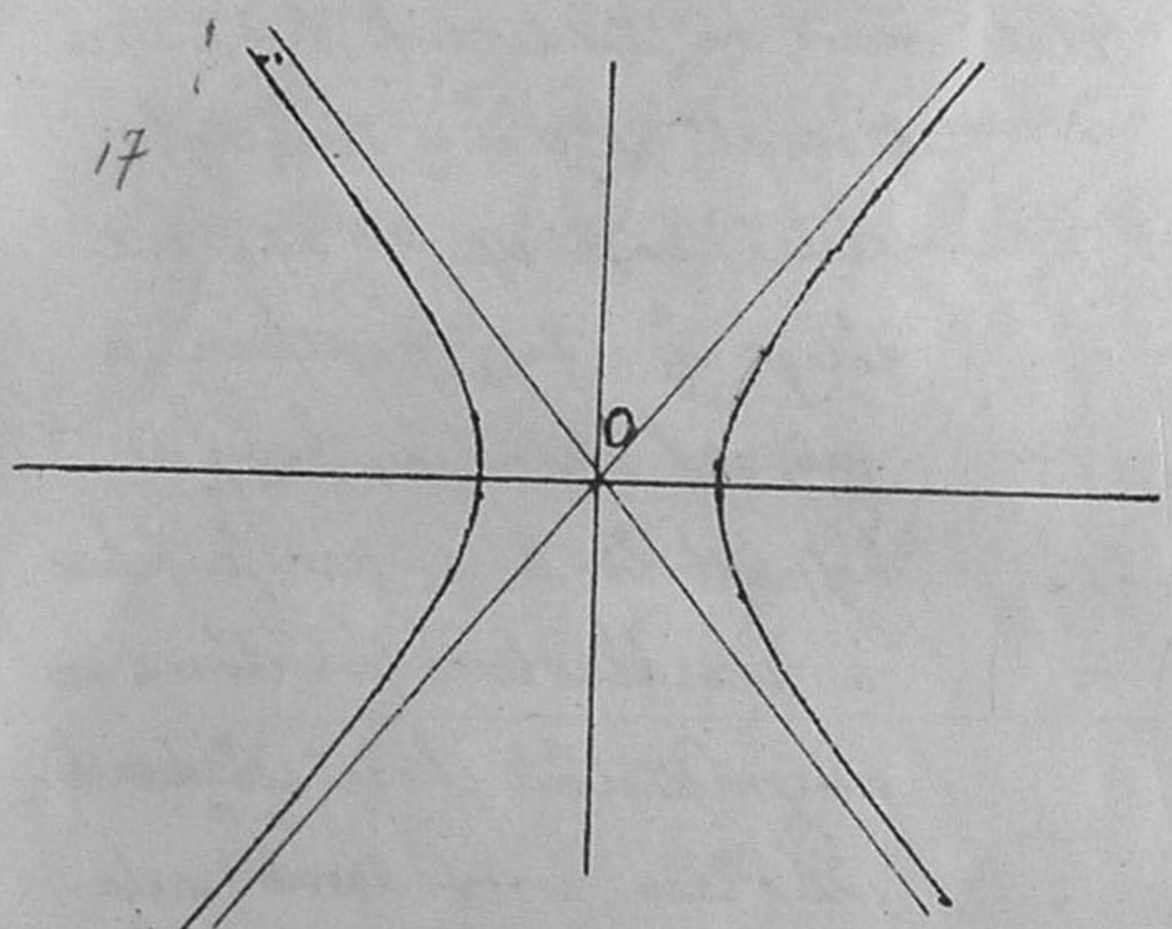
A hyperbola egyenletét egy olyan ferdeszögü coordinatarendszerre fogjuk transformálni azaz transformálni, melynek tengelyei a hyperbola asszymptotái. A kiadodó egyszerü egyenletből három érdekes tételt fogunk kiolvasni a hyperbola asszymptotáit illetőleg. A hyp. normál egyenlete $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$ vagy szorzatalakban $(bx+ay)(bx-ay)=a^2b^2$

Ez a két lineáris factor nem egyébb, mint a két asszymptota függvényei, tehát az uj coordinatatengelyek régi rendszerbeli egyenletei

$$bx+ay=0$$

és $$bx-ay=0$$

Je az általános coordinatatransformationál láttuk, hogy ha az uj' x tengely egyenlete $x' = a_1 x + a_2 y + a_3 = 0$, az uj' y tengely egyenlete $y' = b_1 x + b_2 y + b_3 = 0$, akkor a transformatio egyenletei a következők



$$x' = \frac{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}{a_1 b_2 - a_2 b_1}(b_1 x + b_2 y + b_3)$$

$$y' = \frac{\sqrt{b_1^2+b_2^2}}{a_1 b_2 - b_1 a_2}(a_1 x + a_2 y + a_3)$$

A mi esetünkben $a_1 = b$, $a_2 = a$ $a_3 = 0$, $b_1 = b$, $b_2 = -a$, $b_3 = 0$, tehát

$$x' = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2ab}(bx - ay)$$

$$y' = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2ab}(bx + ay)$$

Ha ezen egyenletek alapján a fenti szorzatalakos egyenletben elvégezzük a helyettesítést, lesz a transformált egyenlet:

$$x'y' = \frac{a^2+b^2}{4a^2b^2}a^2b^2 = \frac{a^2+b^2}{4}$$

vagy szokás szerint a kettős szorzatot véve és $\frac{a^2+b^2}{2} = c^2$ irva, lesz

$$\underline{2xy - c^2 z^2 = 0}$$

a hyperbola homogén egyenlete, ha coordinatatengelyeiül az asszymptotákat vesszük. Ebből az egyenletből néhány következtetést vonhatunk az asszymptotákat illetőleg.

I. Legyen $P_1(x_1, y_1)$ a hyperbola pontja, s állitsuk fel az érintő egyenletét ebben a pontban. Az általános

$$x f_1^{(1)} + y f_2^{(1)} + z f_3^{(1)} = 0$$

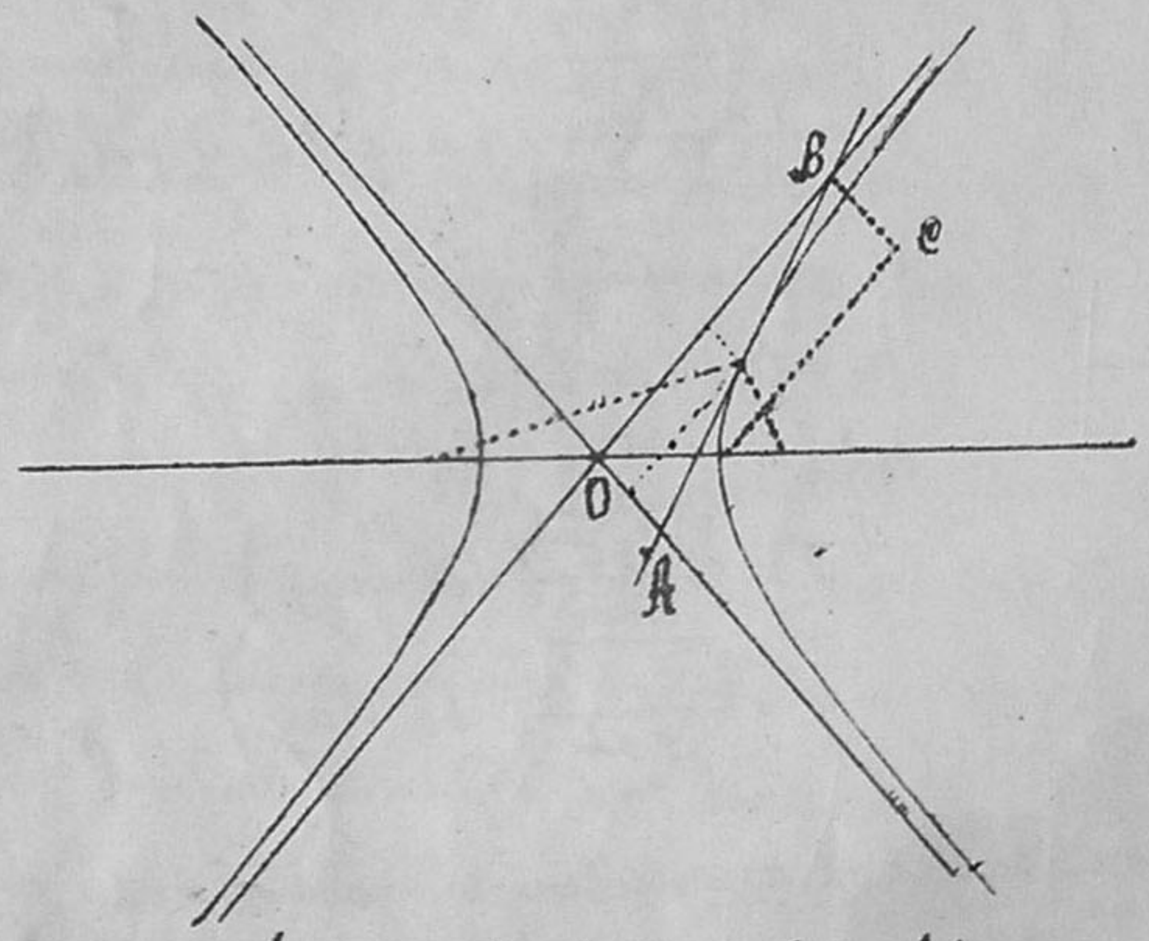
érintő egyenletben a mostani esetben $f_1 = y$, $f_2 = x$, $f_3 = -c^2 z$, tehát a keresett egyenlet, ha ismét Dls. coordinatákra térünk át,

$$y_1 x + x_1 y - c^2 = 0$$

de (x_1, y_1) a hyperbola pontja lévén, $2x_1y_1 = c^2$, tehát betéve c^2 ezen átalakítás, és ezzel az egyenletet $2x_1y_2$-el, adódik az érintő egyenletéül

$$\frac{x}{2x_1} + \frac{y}{2y_1} - 1 = 0$$

Ebből közvetlenül kiolvasható az első tétel, mert ha kérdezzük, hol metszi az érintő az x és y tengelyt, feleletül, hogy az $x = 2x_1$ illetőleg $y = 2y_1$ pontban, a mi azt mondja, hogy a hyperbola x_1y_1 pontja felezi a hozzátartozó érintőnek az assymptoták közé eső darabját. Ezen érintődarab, valamint a lemetszett két assymptotadarab által alkotott OAB háromszög kerületének kétszerese $2OAB = 4x_1y_2$ sinω, ha ω a két assymptota hajlásszöge. De $2x_1y_2 = c^2$, tehát $2OAB = 2c^2$ sinω állandó, azaz független az érintési pont coordinatáitól. Mondhatjuk tehát, hogy a hyperbola bármely érintője oly háromszöget alkot a két assymptotával, melynek kerülete állandó.

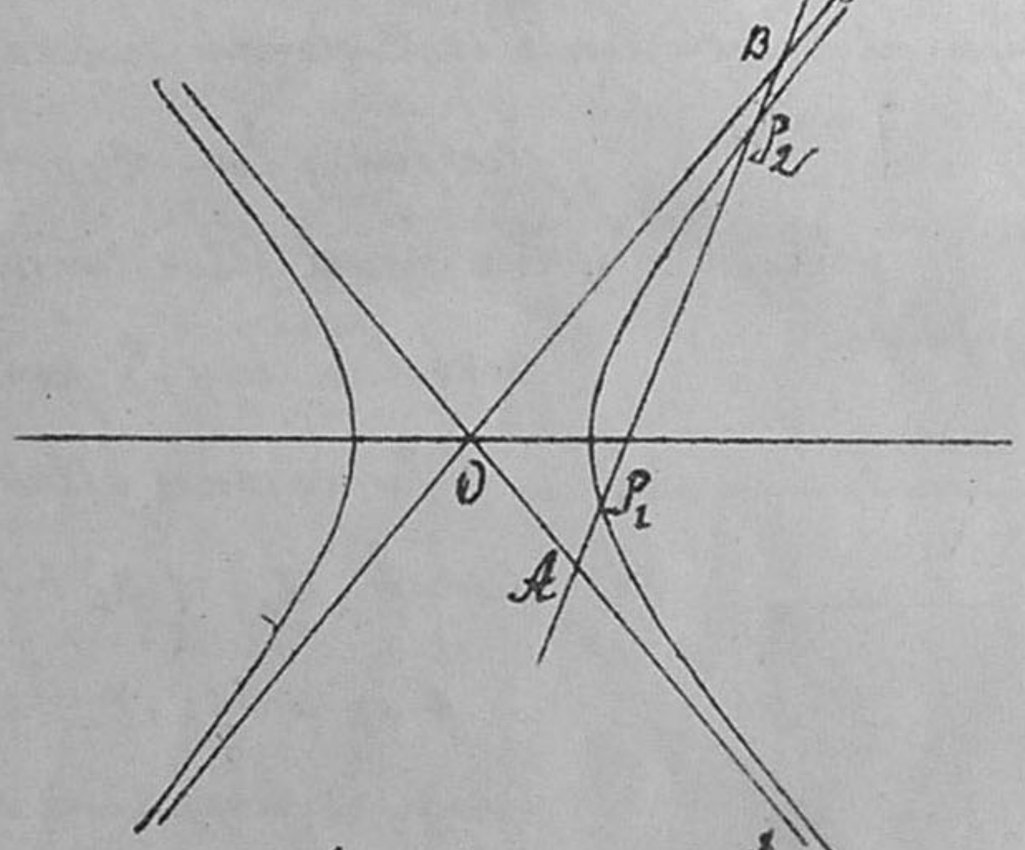


II. Legyen $P_1(x_1, y_1)$ és $P_2(x_2, y_2)$ a hyperbola két pontja, tehát $2x_1y_1 = c^2$, és $2x_2y_2 = c^2$, akkor az őket összekötő egyenesen változó pont coordinatái

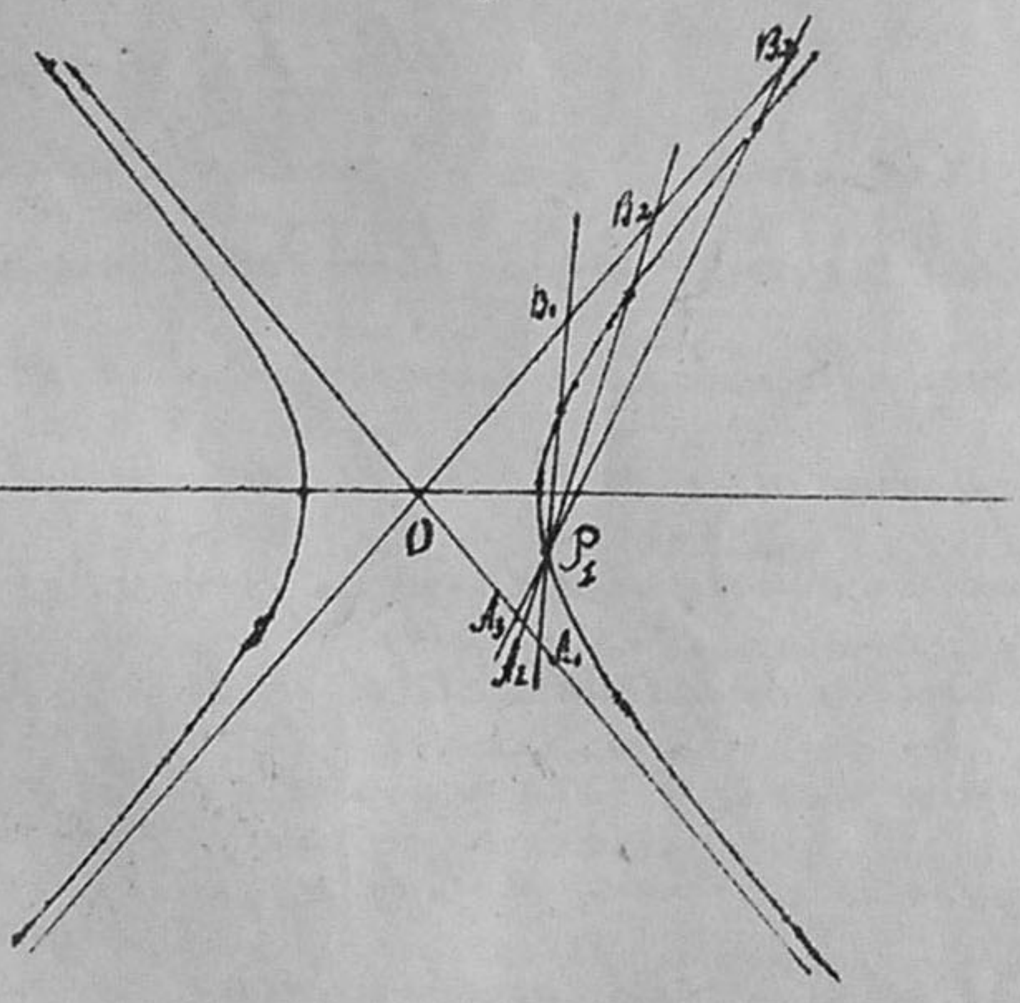
$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}$$

a hol λ a változó pont egyszerű aránycoordinatája P_1 és P_2-re nézve. $\lambda\,(P_1P_2)$ egyenes az x tengelyt olyan pontban metszi, melynek egyszerű arányszáma coordinatája az $y = 0$ egyenletből $\lambda_1 = \frac{-y_1}{y_2}$, az y tengelyből kimetszett pont egyszerű arányszáma az $x = 0$ egyenletből $\lambda_2 = -\frac{x_1}{x_2}$. De miután P_1 és P_2 a hyperbolán fekszenek, $x_1y_1 = x_2y_2$ azaz $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}$, tehát

$\lambda_1 = \frac{1}{\lambda_2}$. Ha az x tengelyből kimetszett pont A, az y tengelyből kimetszett pont B, akkor ez utóbbi egyenlet így is írható: $\frac{P_1A}{AP_2} = \frac{BP_2}{P_2B}$. Az egyenlet mindkét oldalához 1-et adva, lesz $\frac{P_1A}{AP_2} + 1 = \frac{P_1A + AP_2}{AP_2} = \frac{P_1P_2}{AP_2}$, ép így $\frac{BP_2}{P_1B} + 1 = \frac{P_1P_2}{P_1B}$ tehát $\frac{P_1P_2}{AP_2} = \frac{P_1P_2}{P_1B}$, s mivel a felsők egyenlők, az alsók is azok, tehát áll a következő vektoregyenlet $AP_2 = P_2B$. E szerint a hyperbola kék pontján átmenő egyenes oly kék pontban metszi az asszymptotákat, hogy az egyik metszéspont távola az egyik hyperbolapont-tól akkora, mint a második metszéspont távola a másik hyperbolaponttól. Ezen tétel alapján, ha adva a hyperbola kék asszymptotája és egy pontja, megszerkeszthetjük a hyperbolát. Ha ugyanis az adott P_2 ponton keresztül tetszésszerinti számú egyenest húzunk, és ezeknek a P_1 pont és egyik asszymptota között fekvő darabjait felraknánk a másik asszymptotától kezdve azon szögtér felé, melyben a P_1 pont van, csupa hyperbolapontokat nyerünk.



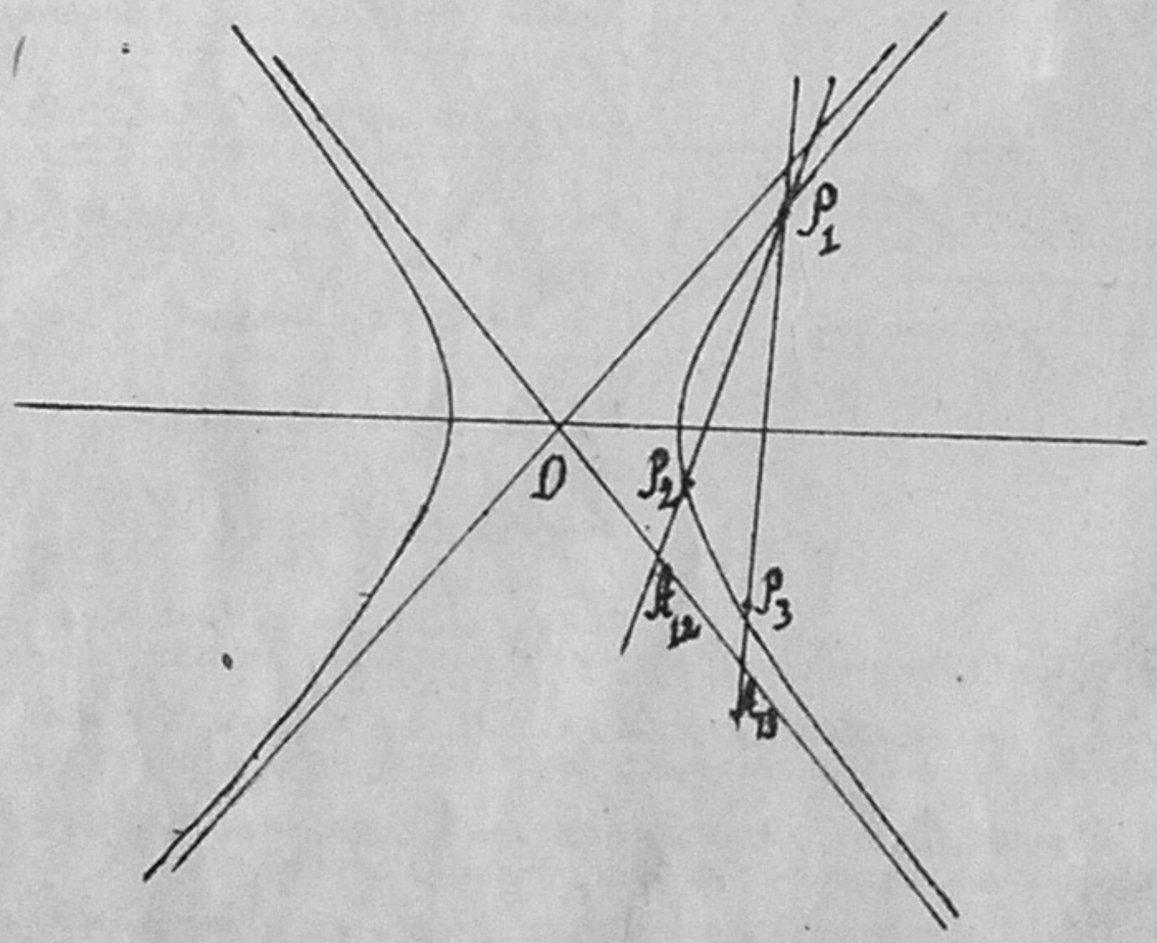
III. Egy harmadik idetartozó tételt nyerünk, ha kérdezzük, mekkora darabot vet le az x asszymptotából a P_1P_2 egyenes, vagyis mekkora a belőle kimetszett pont x koordi-



natája ? Betéve a változó pont x coordinatájának kifejezésébe a kimetszett pont $\lambda_1 = \frac{-y_1}{y_2}$ arányszámát, lesz a keresett $x = \frac{x_1 - \frac{y_1}{y_2} x_2}{1 - \frac{y_1}{y_2}} = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{y_2 - y_1}$

de miután $x_1 y_2 = x_2 y_2$, azaz $x_1 y_1 - x_2 y_2 = 0$, ezt az utóbbi tört felsőjéhez adva, lesz $x = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_2 y_2 - x_1 y_1}{y_2 - y_1} = \frac{(y_2 - y_1)(x_1 + x_2)}{y_2 - y_1} = x_1 + x_2$

Ha tehát a $(P_2 P_2)$ egyenestől az x assymptotából kimetszett darab hosszát a_{12}-vel jelöljük, lesz $a_{12} = x_1 + x_2$



Ha most felveszünk a hyperbolán egy P_3 pontot, akkor a $P_1 P_2$ egyenes által kimetszett darab $a_{13} = x_1 + x_3$, tehát

$$a_{12} - a_{13} = x_2 - x_3$$

vagyis független a P_1 ponttól, csupán a P_2 és P_3 pontoktól függ. Ez a tétel tehát azt mondja, hogy ha felveszünk a hyperbolán két fix pontot, P_2 és P_3, akkor ezeket a hyperbolán változó P_1 ponttal összekötő két egyenes olyan darabokat metsz le az x assymptotából, melyeknek különbsége állandó s annyi mint a P_2 és P_3 pont x coordinatainak különbsége. Vagy pedig: a P_2 és P_3 fix hyperbolapontokat a P_1 változó hyperbolapontból projiciálva az x assymptotára, a projectiók különbsége állandó. Ezen tétel alapján szintén megszerkeszthetjük a hyperbolát, ha adva egy assymptotája és három pontja. Ha ugyanis $P_1 P_2$ és P_3 az a három hyperbolapont s a $P_2 P_2$ egyenes A-ban, a $P_2 P_3$ egyenes B-ben metszi az adott assymptotát, akkor az AB vonaldarabot végig csúsztatva az assymptotán, s tetszésszerinti számú helyzetében meghúzva az AP_1 és BP_2

sugarakat, ezeknek metszései egy-egy hyperbolapontot fog szolgáltatni.

A <u>Parabola</u> normál egyenletét is transformálhatjuk egy olyan ferde szögü rendszerre, melynek x tengelye a parabola egy tetszőleges átmérője, y tengelye az ezen átmérő végpontjához tartozó érintő. Az egész rendszer tulajdonképen egy polárháromszögnek tekinthető, melynek egyik oldala ez az átmérő, másik két oldala az ennek végpontjához tartozó két érintő, melyek közül az egyik végtelenben van. Minden végtelen távolú pont csak egy van, t.i. az x' tengely irányában, azért a transformált egyenletből is hiányozni fog az x'^2-os tag, s a parabola egyenlete ismét ezt az alakot ölti

$$y'^2 - 2p'x' = 0$$

melyben 2p' hasonlóképen határozható meg, mint a derékszögü rendszerre való transformationál.

A kúpszelet focusa.

Áttérünk a kúpszeletek más nevezetes tulajdonságainak vizsgálatára. Ezek a tulajdonságok a conjugált pontok és conjugált egyenesek definitiójan alapulnak. Tudjuk, hogy két pont conjugált, ha egyiknek polárisa átmegy a másikon, s két egyenes conjugált, ha az egyiknek polusa rajta van a másikon.

Vegyünk fel a kúpszelet síkjában egy tetszőleges egyenest, és vizsgáljuk meg, hogy milyen rendszerü alkotnak az ezen egyenesen fekvő conjugált pontpárok. Ennek eldöntése végett válasszuk magát az egyenest x tengelynek, rea merőlegesen akárhol az y tengelyt; mivel semmi különös vonatkozás nincs az egyenes és a kúpszelet között, azért ebben a coordinatarendszerben a kúpszelet egyenlete általános alakú

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{20}yz + 2a_{31}zx + a_{33}z^2 = 0$$

Legyen most P_1 és P_2 az egyenesen fekvő s a kúpszeletre nézve conjugált pontpár; P_1 coordinatái, mivel az x tengelyen fekszenek, $x_1, 0, 1$, P_2 coordinatái $x_2, 0, 1$; a conjugáltság feltétele $f^{(12)} = 0$, tehát az

$$x_1(a_{11}x_2 + a_{13}) + (a_{31}x_2 + a_{33}) = 0$$

vagyis $$a_{11}x_1x_2 + a_{13}(x_1 + x_2) + a_{33} = 0$$ egyenlet fejezi ki azt, hogy P_1 és P_2 conjugáltak. De ez egy bilineáris, x_1 és x_2-ben symmetrikus egyenlet, tehát involuciót értelmez. Kapjuk tehát az a tételt, hogy a kúpszelet síkjában felvett egyenesen a conjugált pontpárok involuciót alkotnak, melynek kettős pontjai az

$$a_{11}x^2 + 2a_{13}x + a_{33} = f(x, 0, 1) = 0$$

egyenletből adódnak. Az involuciós kettős pontjai tehát az egyenes általa a kúpszeletből kimetszett pontok. Ha tehát az egyenes külső egyenes, a mi akkor van, ha ezen egyszeres egyenlet gyökei képzetesek, akkor az involuciós ellipsises, ha metsző egyenes, vagyis a két gyök reális és különböző, az involuciós hyperbolicus, s ha érintő egyenes, vagyis a két gyök egyenlő, az involuciós parabolicus.

Hasonló tételt lehet kimondani a kúpszelet síkjában fekvő sugársorra nézve. Legyen a sugársor centruma O, s ezen át menő két merőleges sugarat válasszunk coordinatatengelyeknek, akkor ebben a rendszerben a kúpszelet vonalcoordinatás egyenlete általános alakú

$$F(u, v, w) = A_{11}u^2 + 2A_{12}uv + A_{22}v^2 + 2A_{23}vw + 2A_{31}wu + A_{33}w^2 = 0$$

Mondjuk, mint rendszert alkotnak az ezen sugársorhoz tartozó conjugált sugárpárok. Ha p_1 és p_2 két conjugált sugár, akkor minden λ-hoz tartozó átmenőt a coordinatarendszer origójában, coordinatáik megfelelően $(u_1, v_1, 0)$ és $(u_2, v_2, 0)$ és az $F^{(12)} = 0$ vagyis az

$$u_1(A_{11}u_2 + A_{12}v_2) + v_1(A_{21}u_2 + A_{22}v_2) = 0$$

egyenlet fejezi ki, hogy p_1 és p_2 konjugált. De ez így is írható

$$A_{11}u_1u_2 + A_{12}(u_1v_2 + u_2v_1) + A_{22}v_1v_2 = 0$$

és mivel a homogén vonalkoordináták jelentése szerint $\frac{u_2}{v_2} = -tg\alpha_1$ $\frac{u_2}{v_2} = -tg\alpha_2$ az egyenlet így is írható

$$A_{11}tg\alpha_1 tg\alpha_2 - A_{12}(tg\alpha_1 + tg\alpha_2) + A_{22} = 0$$

de ez bilineáris és symmetrikus a $tg\alpha_1$ és $tg\alpha_2$-ben, tehát involuciót jelent. Az involuciós kettős sugarait adja az

$$A_{11}u^2 + 2A_{12}uv + A_{22}v^2 = F(u,v,0) = 0$$

egyenlet, vagyis a kettős sugarak az 0-ból húzható érintők.

Mondhatjuk tehát, hogy a képszelet síkjában felvett sugársorban a képszeletre nézve konjugált sugárpárok involuciót alkotnak, melynek kettős sugarai a sugársor centrumából húzható érintők, s így a szerint, a mint a sugársor centruma külső, belső vagy a görbén fekvő pont, lesz az involuciós hyperbolikus, elliptikus, illetőleg parabolikus. Ennek analytikai ismertető jeleit is megállapíthatjuk, úgyanis a kettős sugarak egyenlete $A_{11}tg^2\alpha - 2A_{12}tg\alpha + A_{22} = 0$

melynek discriminansa $A_{11}A_{22} - A_{12}^2 = A_{33} = a_{33}A$

De a_{33} nem egyéb, mint az $f(x,y,z)$ értéke az origo coordinatái mellett, azaz $a_{33} = f(001)$, tehát a discriminans $f(001).A$. Ez dönti el az involuciós fajját. Ha $f(001)A < 0$, az involuciós hyperbolikus,

" $f(001)A > 0$, " " elliptikus,

$f(001).A = 0$, " " parabolikus.

Nyilvánvaló továbbá, hogyha A_1, A_2 egy conjugált pontpár és A az A_1A_2 egyenes polusa, ez a három pont A_1, A_2, A_3 polárháromszöget alkot, melynek tehát minden szög pontja a szembenfekvő oldal polusa.

Mert először is A_1 és A_2 conjugáltak, de ép így A és A_1, meg A és A_2, a miből következik, hogy AA_1 polusa A_2 és AA_2 polusa A_1, tehát AA_1A_2 polárháromszög. Képenigy ha a_1 és a_2 egy conjugált sugárpár s ezekhez vesszük O metszéspontjuknak a polárisát, ez a három egyenes $(a, a_1$ polárháromszöget képez; mert először is a_1 és a_2 conjugáltak, de ép így a és a_1 meg a és a_2, tehát a_1 polárisa az a és a_2 metszéspontjának, a_2 polárisa az a és a_1 metszéspontjának, vagyis $(a\,a_1\,a_2)$ polárháromszög. Ha $a_1\,a_2$ az O centrumos involucziobam épen a derékszögü sugárpár, vagyis a tengelypár, akkor az $a\,a_1\,a_2$ polárháromszög derékszögü. A sik minden O pontjához létezik egy, de csakis egy ilyen derékszögü polárháromszög. Csak egy kivétel van, midön t.i. az O centrumos involucziо circularis, mert akkor a conjugált sugárpárok valamennyien derékszöget alkotván, valamennyi polárháromszög O-ban derékszögü. Lássuk, hány ilyen O pontja van a siknak. Tudjuk, hogy a sugárinvolucziо circularis, ha az involucziо centrumára, mint „kezdőpontra vonatkozó egyenletében a szélső coefficiensek egyenlők, a középső coefficiens pedig eltünik, tehát ha $A_{11} = A_{22}$ és $A_{12} = 0$. Tehát nem kell egyebet tenni, mint párhuzamos eltolással uj origóra térni át úgy, hogy erre nézve a circuláris involucziо utóbbi feltételei teljesüljenek. Tegyük fel, hogy a régi rendszerben az uj origonak, mint a circularis involucziо centrumának coordinatái ξ, η, akkor a pontcoordináták transformatio egyenletei

$$\begin{aligned} x &= x' + \xi z' \\ y &= y' + \eta z' \\ z &= z' \end{aligned}$$

a vonalcoordináták transformatio egyenletei

$$\left.\begin{aligned} u' &= u \\ v' &= v \\ w' &= \xi u + \eta v + w \end{aligned}\right\} \text{ de mi a régi coordinátákat akarjuk kifejezni az } \left\{\begin{aligned} u &= u' \\ v &= v' \\ w &= w' - \xi u' - \eta v' \end{aligned}\right.$$

Ezt a transformációt kell most végrehajtani mindhárom kúpszeletfajnál, hogy megkapjuk mindegyikre nézve a circuláris involuczió centrumait.

I. Ellipsis vonalkoordinátás normal egyenlete, vonatkoztatva az ellipsis centrumára mint kezdőpontra

$$a^2u^2 + b^2v^2 - w^2 = 0$$

Alkalmazva a transformációt

$$a^2u'^2 + b^2v'^2 - (w' - \xi u' - \eta v')^2 = 0$$

S mivel a feltételünk szerint (ξ, η) a circuláris involuczio centruma, kell, hogy ebben az egyenletben u'^2 és v'^2 coefficiensei egyenlők legyenek, $u'v'$ coefficiensei pedig eltünjék; így kapjuk ξ és η számára a következő egyenletekkel

$$a^2 - \xi^2 = b^2 - \eta^2 \qquad (1.$$

$$\text{és } 2\xi\eta = 0 \text{ vagyis } \xi\eta = 0 \qquad (2.$$

Tehát vagy ξ, vagy $\eta = 0$.

1.) ha $\eta = 0$, akkor (1.-ből $\xi = \pm\sqrt{a^2 - b^2}$

s mindkét ξ érték reális, mert $a^2 > b^2$;

2.) ha $\xi = 0$, akkor (1.-ből $\eta = \pm\sqrt{b^2 - a^2}$ tehát mindkét η érték képzetes.

Tehát ellipsisnél négy olyan pont létezik, melyekhez mint centrumokhoz circularis involuczio tartozik, kettő reális és az ellipsis nagytengelyén fekszik, a centrumtól jobbra és balra $\sqrt{a^2 - b^2}$ távolságban, a másik kettő képzetes és a kis tengelyen fekszik a centrumtól fel és lefelé $\sqrt{b^2 - a^2}$ képzetes távolságban. Ezek az úgynevezett focusok vagy gyujtópontok. Tehát focusnak nevezünk olyan pontot, melyhez mint centrumhoz circularis involuczió tartozik. Ez a definitio mindhárom kúpszeletfajra fajra szól.

A focusok olyan pontok, melyekhez mint centrumokhoz circularis involutio tartozik.

Ellipsisnek tehát két reális és két képzetes focusa van.

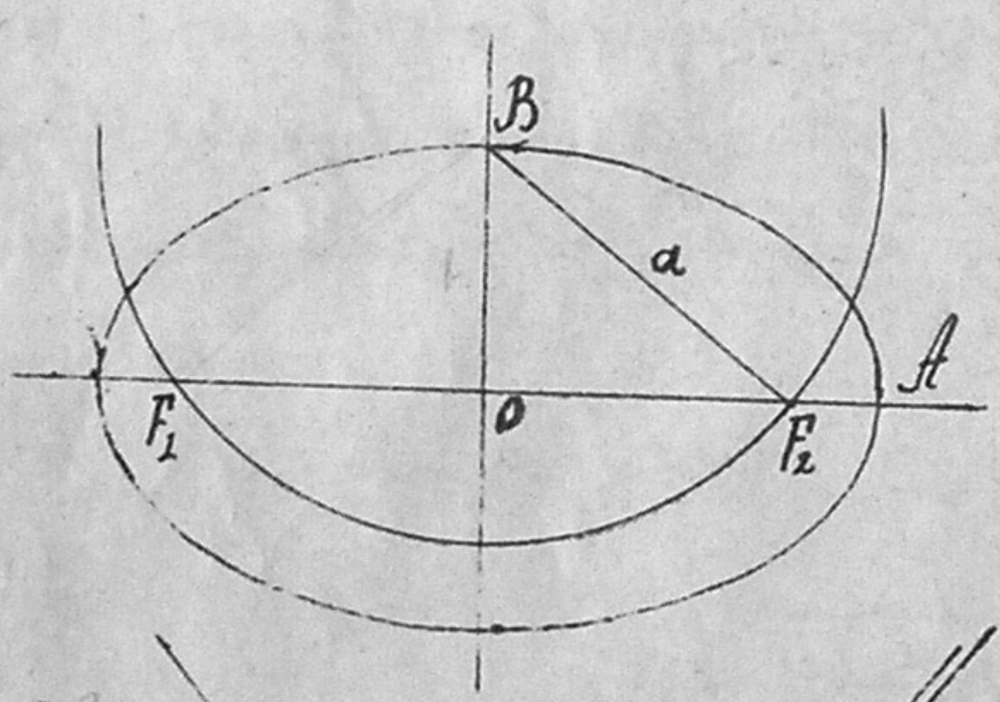
Hyperbolánál szintén két reális és két képzetes focus létezik, és pedig

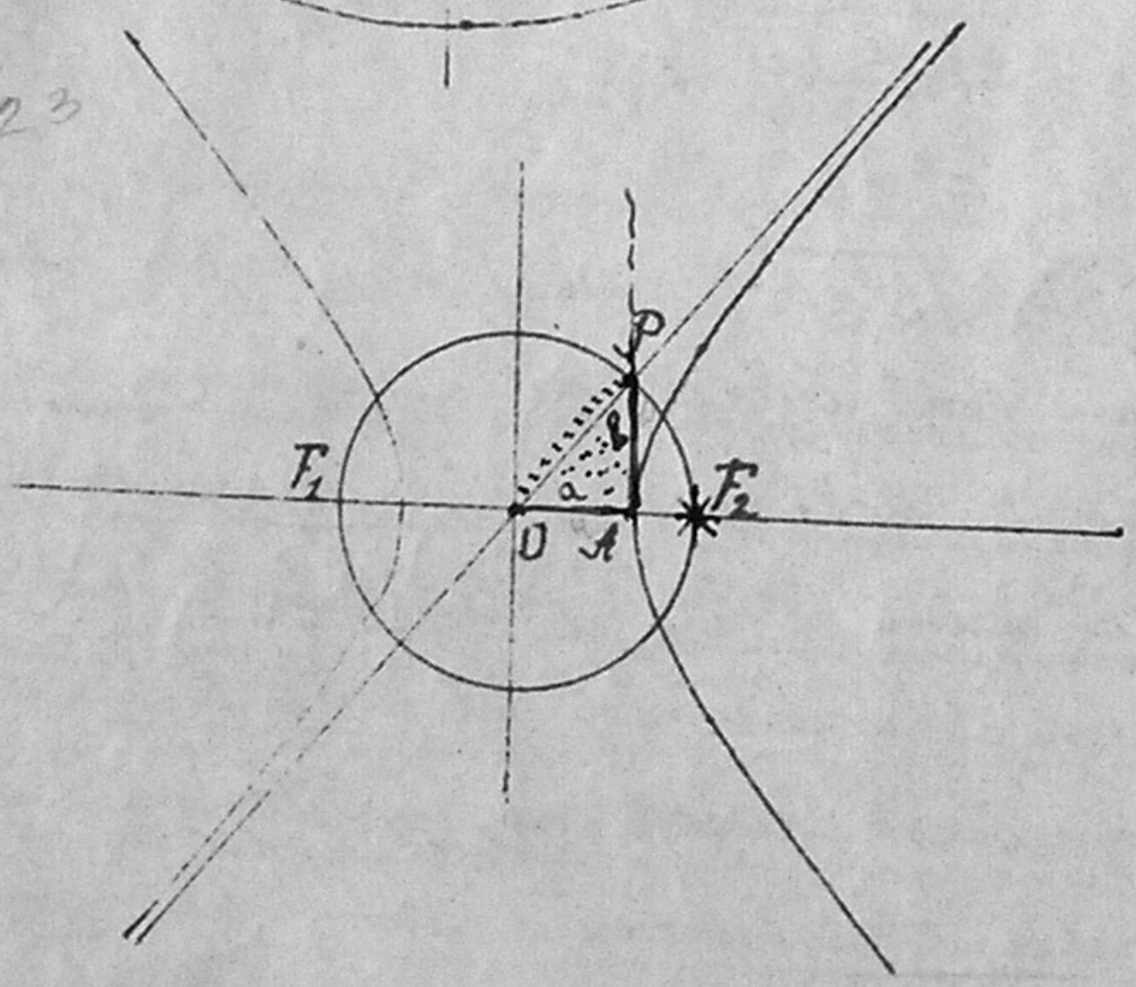
ha $\eta = 0$, akkor $\xi = \pm\sqrt{a^2+b^2}$

" $\xi = 0$, " $\eta = \pm\sqrt{-a^2-b^2}$

A két első reális és a hyperbola főtengelyén fekszik a centrumtól jobbra és balra $\sqrt{a^2+b^2}$ távolságban, a másik kettő képzetes és a mellék-tengelyen fekszik. – Az ellipsis focusait megkapjuk, ha a kis tengely egyik végpontjából pl. B-ből a félnagytengellyel mint sugárral kört írunk, mely kimetszi a nagytengelyből az F_1 és F_2 reális focusokat. Az OBF_2 derékszögű háromszögből ugyanis következik, hogy

$$OF_2 = \sqrt{a^2-b^2} = OF_1$$





A hyperbola focusainak megszerkesztése végett a nagy tengely A végpontjában arra emelt merőlegesre ráméríjük A-tól a b távolságot P-ig, az O-ból OP-vel írt kör kimetszi a két focust F_1 és F_2-t. Ugyanis OAP derékszögű háromszögből $OP = OF_1 = OF_2 = \sqrt{a^2+b^2}$. Minthogy centrális képzeletnél a focusok belső" pontok, mert a circuláris involucrio elliptikus involucrio, az elliptikus

involuczio centruma pedig belső pont.

A parabola normál egyenlete $pv^2 - 2uw = 0$, s ha végrehajtjuk ugyanazt a transformatiót, mint az ellipsis és hyperbolánál, lesz a transformált egyenlet

$$pv'^2 - 2u'(w' - \xi u' - \eta v') = 0$$

egy oly rendszerben, melynek origója (ξ, η). Hogy tehát az uj origo circuláris involuczio centruma legyen, teljesülnie kell a következő két egyenletnek.

$$p = 2\xi, \qquad \eta = 0$$

A parabolának tehát egy reális focusa van, mely az x tengelyen vagyis a parabola tengelyén a csúcstól számitva annak belseje felé $\frac{p}{2}$ távolságra van. A parameter tehát nem egyéb, mint ezen focustávolság kétszerese, ez a parameter geometriai jelentése.

Kúpszeletek focális tulajdonságai.

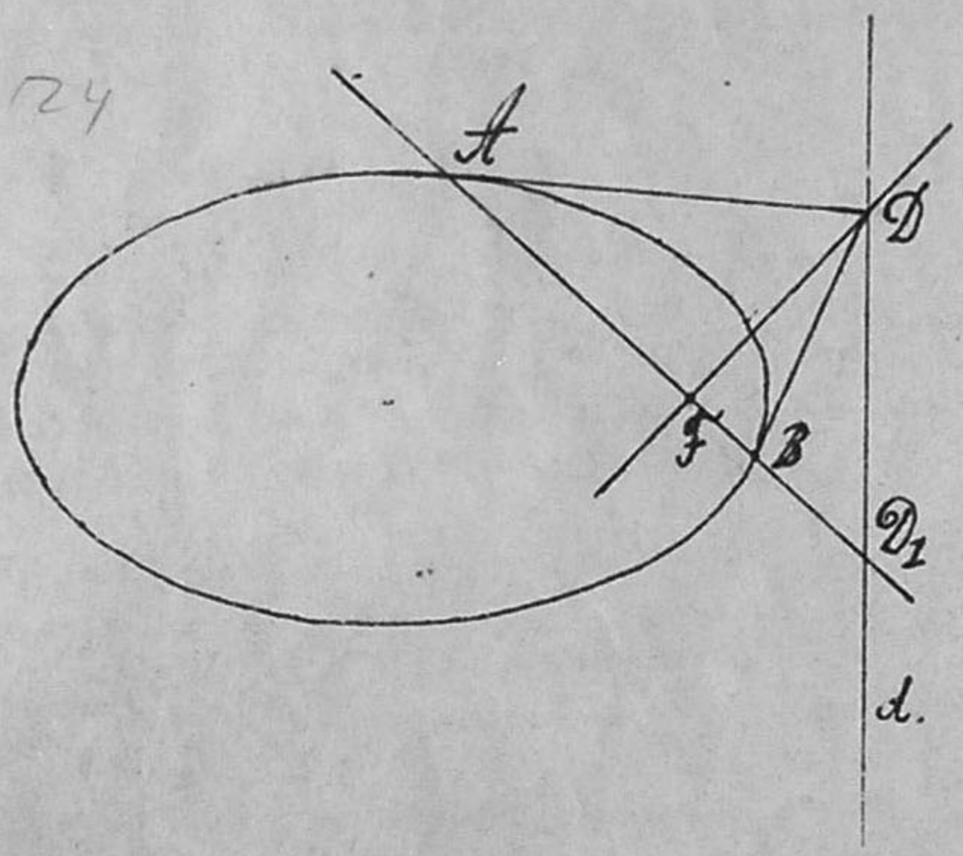
A focusoknak mindhárom kúpszeletfajt illetőleg nehány nevezetes tulajdonságát fogjuk megismerni. Az ezekre vonatkozó tételek két csoportra oszthatók, az elsőben szögekre, a másodikban vonaldarabokra vonatkozó viszonyok jönnek szóba.

Tárgyaljuk először a szögekre vonatkozó viszonyokat.

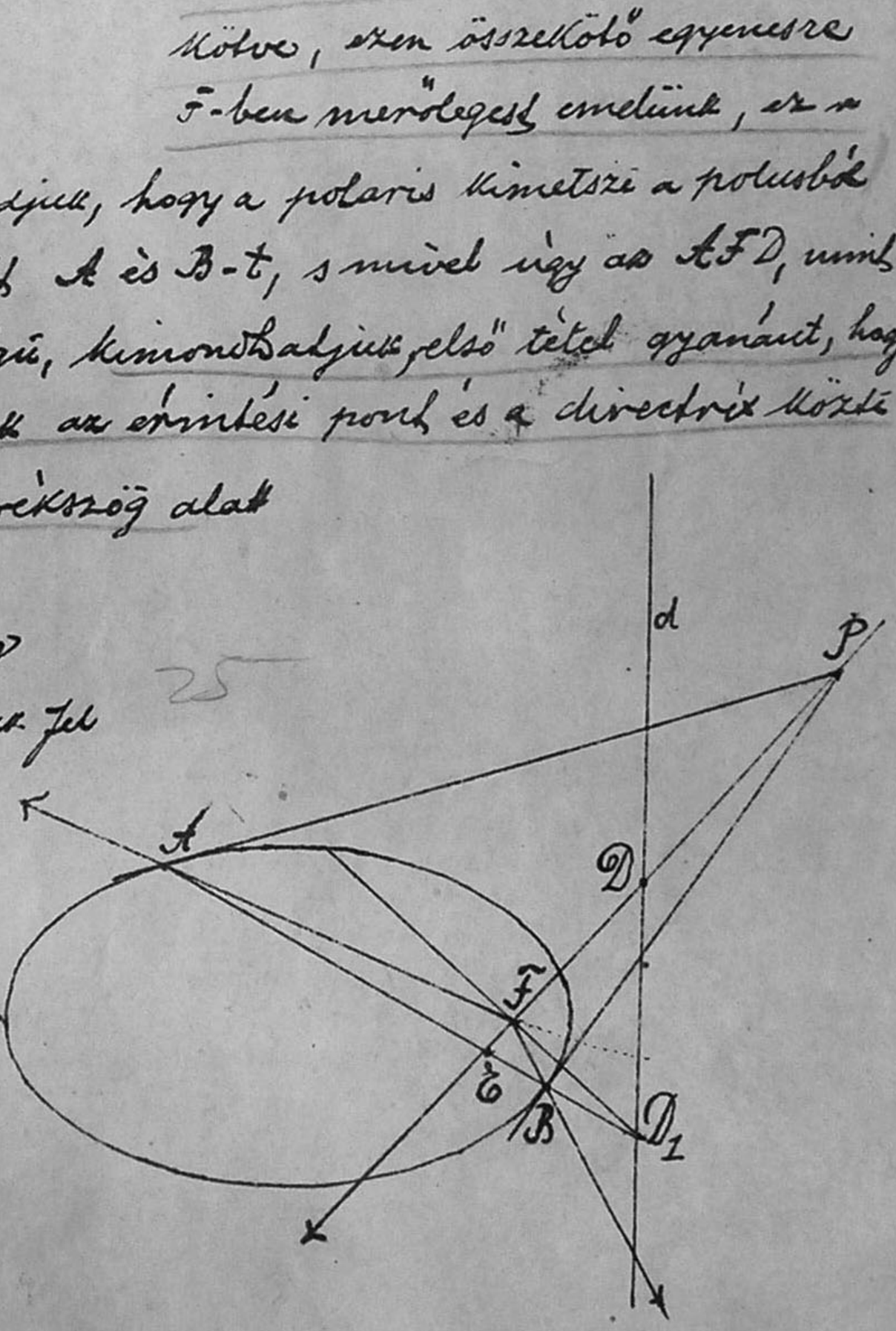
Minden focushoz tartozik egy egyenes, mely annak a kúpszeletre illetőleg polárisa; ezt az egyenest directrixnek nevezzük. Legyen F a kúpszelet focusa, d a megfelelő directrix, akkor a következő hárompontelet lehet kimondani.

1. Mintán F-hez mint centrumhoz circuláris involuczio tartozik, azon

ha rajta keresztül két egymásra merőleges egyenest húzunk, ezek a kúpszeletre nézve conjugáltak. Ehhez a két conjugált egyeneshez vive még a d directrixet, ez a három egyenes egy derékszögű polárháromszöget alkot, melynek szögpontjai FDD_1; ebből nyilvánvaló, hogy a d egyenes bármely D pontjának polárisát nyerjük, ha azt F-el összekötve, ezen összekötő egyenesre F-ben merőlegest emelünk, ez a merőleges a D pont polárisa. De tudjuk, hogy a polaris kimetszi a polusból húzható érintők érintési pontjait A és B-t, s mivel így az AFD, mint a BFD háromszög F-nél derékszögű, kimondhatjuk első tétel gyanánt, hogy a kúpszelet bármely érintőjének az érintési pont és a directrix közti darabja a megfelelő focusból derékszög alatt látszik.



2.) A második tételhez következőleg jutunk el. Az FD egyenesen vegyünk fel akárhol egy P külső pontot, s ebből húzzuk meg az érintőket, melyek a kúpszeletet (pl. ellipsist) A és B-ben érintik. Nyilvánvaló, hogy az AB egyenes mind P polárisa átmegy az FDP egyenes polusán D_1-en,



Tehát az AB egyenes egy a D_1-ből húzott szelő, s így a D_1 polárisa FD kimetszi ebből a D_1 harmonicus törsát C-t, vagyis $ABCD_1$ négy harmonicus pont, és így FA, FB, FC, FD_1 négy harmonikus sugár. De ebben a harmonicus viszonyban az FC és FD_1 összetartozó sugarak merőlegesek egymásra és így felezik a másik kettőnek a szögeit, vagyis

$$\sphericalangle AFC = CFB$$

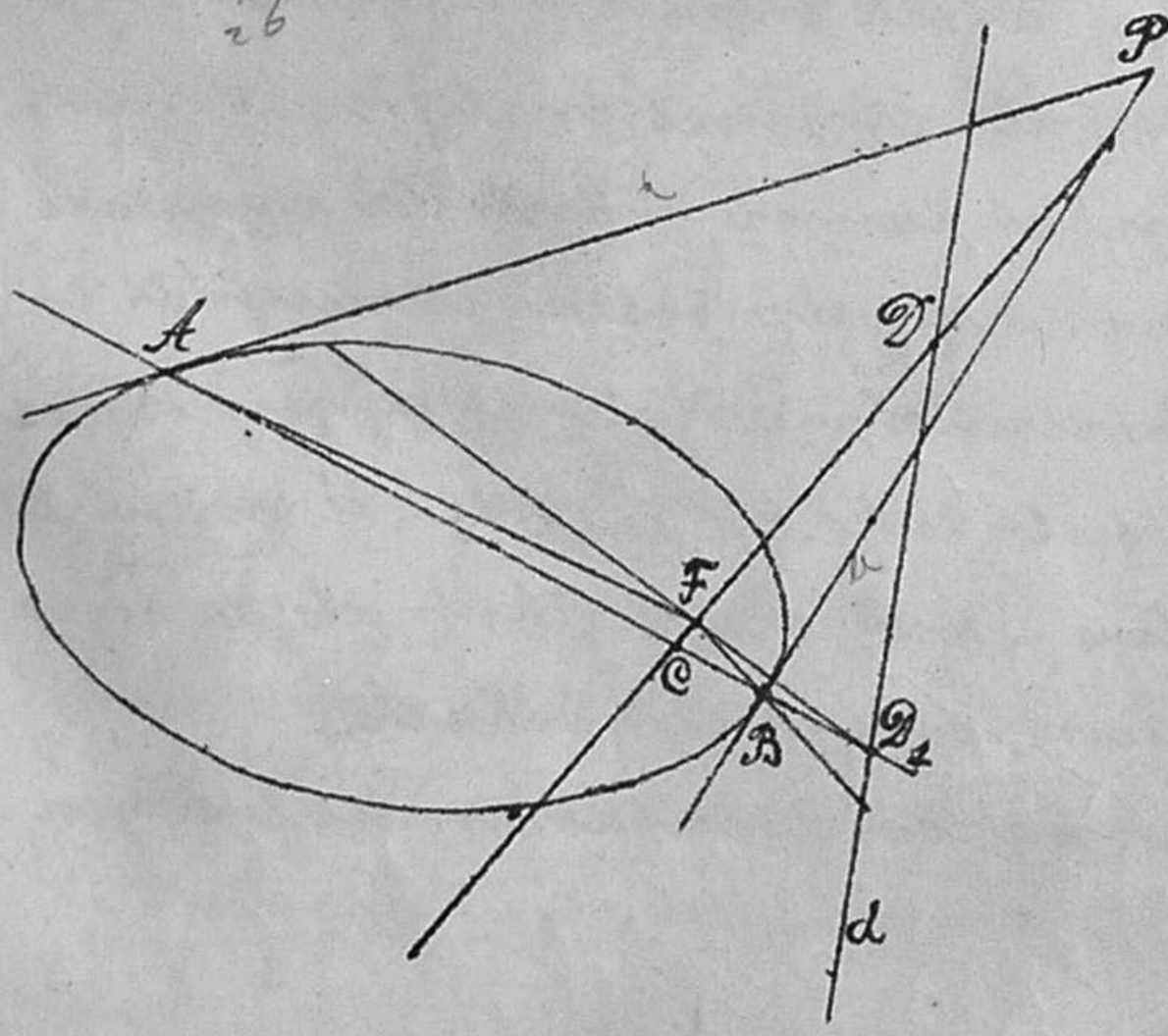
Hajoink tehát azt a tételt, hogy ha a sík egy tetszőleges külső pontjából P-ből érintőket húzunk a kupszelethez, akkor a P pontot a fokussal összekötő egyenes felezi a fokust az érintési pontokkal összekötő egyenesek által alkotott szöget.

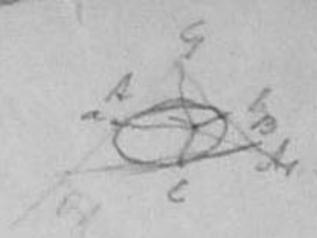
3. A harmadik tételhez eljutunk az előbbinek ismételt alkalmazásával abban az esetben, midőn a kupszeletnek három érintőjét vesszük tekintetbe. Legyen a kupszelet három érintője a, b és c, érintési pontjaik A, B, C, metszési pontjaik A_1, B_1, C_1. A C_1 pontból induló két érintőre áll, hogy

$$\sphericalangle C_1FB = \tfrac{1}{2} AFB \sphericalangle$$

az A_1-ből induló két érintőre

$$\sphericalangle BFA_1 = \tfrac{1}{2} BFC \sphericalangle$$





$BFG = \frac{1}{2} AFB$

$AFA_1 = \frac{1}{2} BFC$

$AFG = \frac{1}{2} AFC$

a megfelelő oldalakat ~~összeadva~~ lemma, kapjuk, hogy

$$C_1FA_1 = \frac{1}{2} AFC,$$

mely utóbbi szög állandó, hogyha az a és b érintőt fixnek gondoljuk; ez az egyenlet tehát azt a tételt fejezi ki, hogy a kupszelet két fix érintője egy harmadikból a fotozó érintőből oly darabokat metsz le (C_1A_1), melyek a focusból állandó szög alatt látszanak.

Ennél a három tételnél, melyek mindhárom faju kupszeletre érvényesek, csak egy focus van felhasználva. Most olyan tételekre térünk át, melyekben két focus szerepel. E végett előbb a két focus viszonyára nézve lássunk néhány tételt. A focus olyan pont, melyen átmenő coniugált egyenesek merőlegesek egymásra (fejezzük ki analytikailag azt a viszonyt, mely két coniugált és egymásra merőleges egyenes között lé-tezik). Nyilvánvaló, hogy a sik minden egyeneséhez tartozik egy olyan coniugált egyenes, mely reá merőleges, hiszen nem kell egyebet tenni, mint az egyenes polusából, melyen átmennek az összes coniugált egyenesek, merőlegest bocsátani a felvett egyenesre, ez egyenesek, merőlegest bocsátani a felvett egyenesre, ez lesz a merőleges coniugált társ. +( ), a miből majd ki fog adódni, hogy milyen rendszert alkotnak az ilyen coniugált és egymásra merőleges egyenesek.

Vegyük az ellipsis vonalcoordinátás normál egyenletét:

$$F(u, v, w) = a^2u^2 + b^2v^2 - w^2 = 0$$

A coniugáltság feltétele $F(12) = 0$. De $F_1 = a^2u$, $F_2 = b^2v$, $F_3 = -w$ és igy az $(u_1\ v_1\ w_1)$ és $(u_2\ v_2\ w_2)$ egyenesek coniugáltak, ha

$$a^2u_1u_2 + b^2v_1v_2 - w_1w_2 = 0$$

és a két egyenes merőleges, ha

$$u_1u_2 + v_1v_2 = 0$$

Vagyha Pl.r. coordinatákat vezetünk be, akkor a coniugáltsság s merőlegessés felsétele a következő két egyenlet

$$a^2u_1u_2 + b^2v_1v_2 = 1$$

$$u_1u_2 + v_1v_2 = 0$$

A második egyenletet b^2-al szoroxva és az elsőből levonva, lesz

$$(a^2 - b^2)u_1u_2 = 1$$

De ha α_1 és α_2 az első illetőleg második egyenes által az x tengelyből lemetszett darabok, akkor a vonalcoordinaták értelmezése szerint $u_1 = -\frac{1}{\alpha_1}$, $u_2 = -\frac{1}{\alpha_2}$ és igy az egyenlet

$$\alpha_1\alpha_2 = a^2 - b^2 = \text{constans.}$$

Tehát két coniugált és egymásra merőleges egyenes ugy metszi az x tengelyt (az ellipsis nagy tengelyét), hogy a lemetszett darabok szorzata állandó. De ez épen az involutio jellemző tulajdonsága, ugy hogy kimondhatjuk a következő tételt: Az ellipsis síkjában a coniugált és egymásra merőleges egyenes párok ugy

metszik a nagy tengelyt, hogy a kimetszett pontpárok involutiót alkotnak, melynek centruma az ellipsis centruma. Ezen involutio kettős pontjainak távola a centrumtól adódik a fenti egyenletből, ha abban $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, mert akkor $\alpha = \pm\sqrt{a^2-b^2}$.

Tehát ezen involutio kettős pontjai az ellipsis fo-

cusai.

Ha elimináljuk a két feltételi egyenletből $u_1 u_2$-öt lesz

$$(b^2-a^2)\, v_1 v_2 = 1$$

vagy ha az ny tengelyből lemetszett szelesek mérőszáma β_1 illetőleg β_2, és $v_1 = -\frac{1}{\beta_2}$, $v_2 = -\frac{1}{\beta_2}$ irunk, lesz

$$\beta_1 \beta_2 = b^2 - a^2$$

Tehát az y tengelyről vagyis az ellipsis kis tengelyéről lemetszett pontpárok is involutiót alkotnak, melyszonban ellipsikus, mivel nincsenek reális kettős pontjai. -

Tehát összefoglalva: az ellipsis sikjában a conjugált és egymásra merőleges egyenespárok a nagy tengelyt hyperbolicus, a kis tengelyt elliptikus involutióban metszik, amannak kettős pontjai az ellipsis reális, emennek kettős pontjai az ellipsis képzetes focusai.

Hyperbolánál a fenti két egyenlet következőleg módosul:

$$\alpha_1 \alpha_2 = a^2 + b^2$$

$$\beta_1 \beta_2 = -a^2 - b^2$$

tehát hyperbolánál a síkjában fekvő conj. és egymásra merőleges egyenespárok az első tengelyt hyperbolicus, a második tengelyt elliptikus involutioban metszik, mely elsőnek kettős pontjai a hyperbola focusai.

A parabola vonalcoordinátás normál egyenlete

$$p v^2 - 2 u w = 0$$

s mivel itt $F_1 = -w$, $F_2 = pv$, $F_3 = -u$, következőleg fejezhetjük ki azt, hogy az $u_1 v_1 w_1$ és $u_2 v_2 w_2$ coniugálsak és egymásra merőlegesek

$$p v_1 v_2 - u_2 w_2 - u_2 w_1 = 0$$

$$v_1 v_2 + u_2 u_2 = 0$$

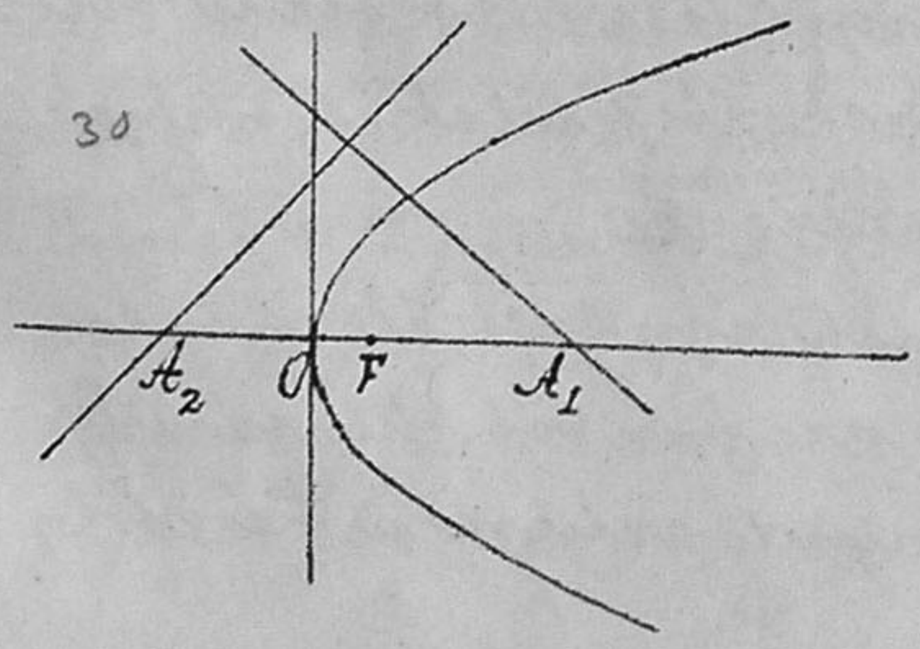
Eliminálva $v_1 v_2$-őt, lesz a Plc. alakban

$$p u_1 u_2 + u_1 + u_2 = 0$$

De $u_1 = -\frac{1}{\alpha_1}$, $u_2 = -\frac{1}{\alpha_2}$, tehát

$$\alpha_1 + \alpha_2 - p = 0$$

a mi így is irható $\alpha_1 - \frac{p}{2} + \alpha_2 - \frac{p}{2} = 0$



Ez az egyenlet kapcsolja az első tengelyből kimetszett pontokat. De ha az első egyenes által kimetszett pont A_1, akkor lévén $\alpha_1 - \frac{p}{2} = FA_1$ és $\alpha_2 - \frac{p}{2} = FA_2$, a

fenti egyenlet azt mondja, hogy

$$FA_1 + FA_2 = 0 \quad \text{azaz} \quad FA_1 = A_2F$$

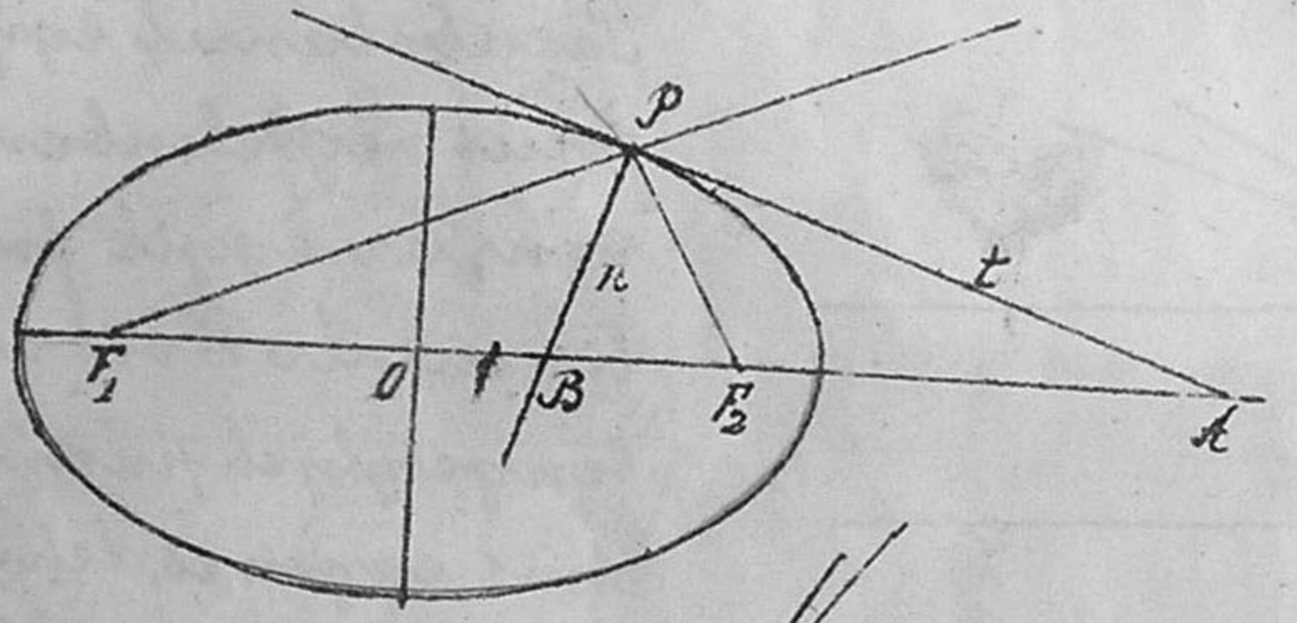
tehát a kimetszett pontok a focus két oldalán attól egyenlő távolságban helyezkednek el. Ilyen pontpárok is involutiot alkotnak, s pedig azt a speciális fajút, melynél egyik kettős pont végtelenben van, a másik a parabola focusa tehát felezi a pontpárok közti távolt. Látható, hogy ez a tétel úgy tekinthető, mint az előbbi két tétel határesete azon feltétellel, hogy egyik focus, mint az involutio kettős pontja, végtelenbe távozik. Ezért szoktuk a parabolát két-focussal is felruházni, mondván, hogy ez olyan kuposzelet, melynek egyik focusa végtelenben van. Ilyen értelemben egész általánosan mindhárom kuposzeletfajra kimondhatjuk azt a tételt, hogy a kuposzelet síkjában a coniugált és egymásra merőleges egyenespárok olyan pontokban metszik az elsőrendűt, melyek harmónicus fekvésűek a kuposzelet focusaihoz.

Ezek alapján most könnyű lesz megérteni bizonyos szögegyenlőségekre vonatkozó tételeket, melyekben mindkét focusnak van szerepe.

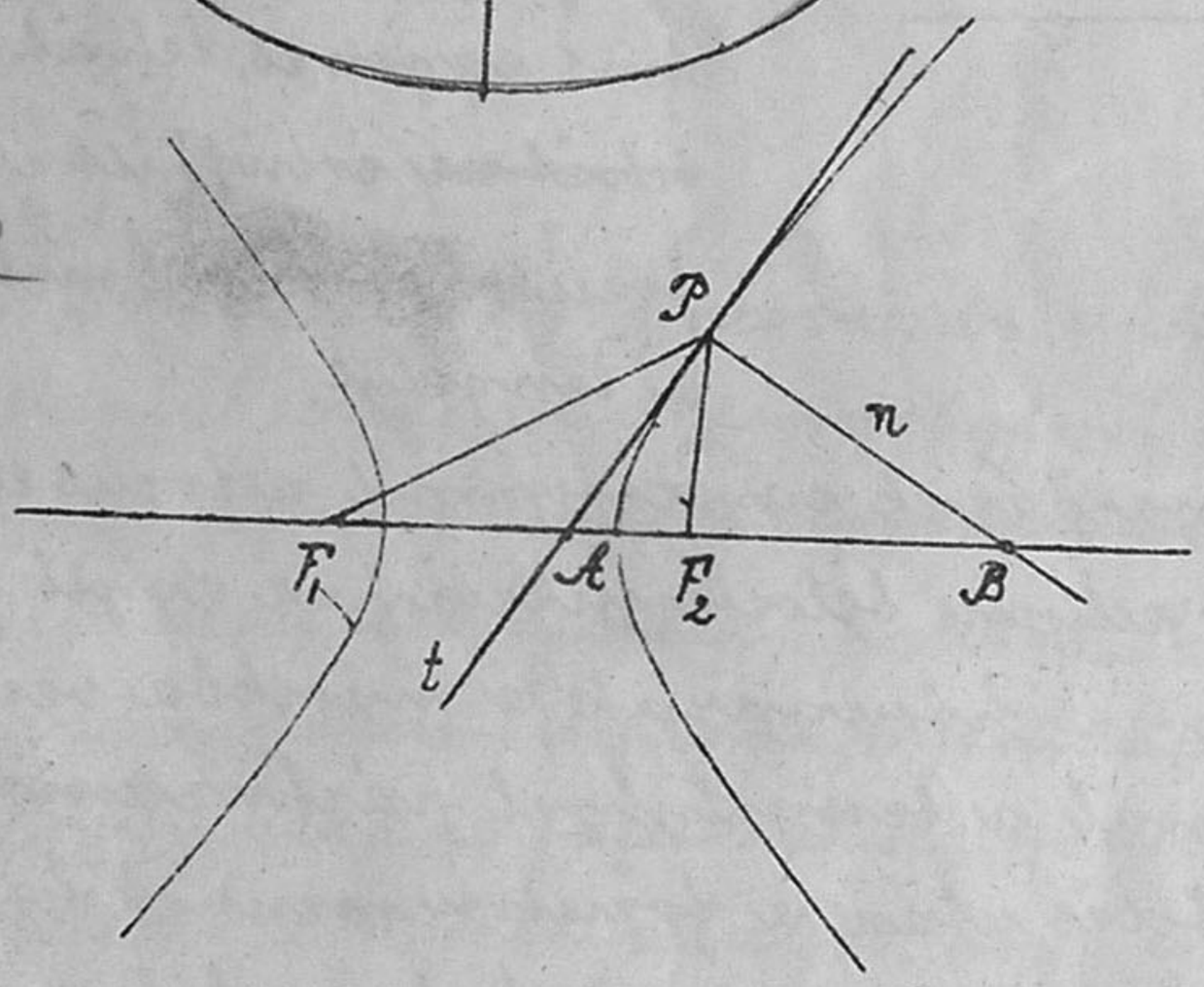
Vegyünk fel a kuposzeleten egy tetszésszerinti P pontot, s ehhez húzzuk meg az érintőt. Miután P, mint érintési pont egyszersmind pólusa a érintő-

nek, azért a t-hez csatlakozó és rá merőleges egyenes nem egyébb, mint t normálisa n. Ha t metszéspontja az első tengelyjel A, az n normálisé B, akkor az előbbi általános tétel értelmében A és B harmónicus F_1 és F_2-hez, mint focusokhoz, de akkor a PA és PB sugarak is harmonicusak a PF_1 és PF_2 focussugarakhoz, s mivel $PH \perp PB$, azért a $PH = t$ érintő felezi a focussugarak egyik szögét, a $PB = n$ normális a mellékszöget. Kapjuk tehát azt a nevezetes tételt, hogy a kupszelet érintője felezi az érintési ponthoz húzott focussugarak szögét. Ennek alapján pontosan megszerkeszthetjük mindhárom kupszelet fajnál az érintőt. A különbség ebben a tekintetben az ellipsis és hyperbola közt az, hogy ellipsisnél a normális a két focus között, az érintő azo-

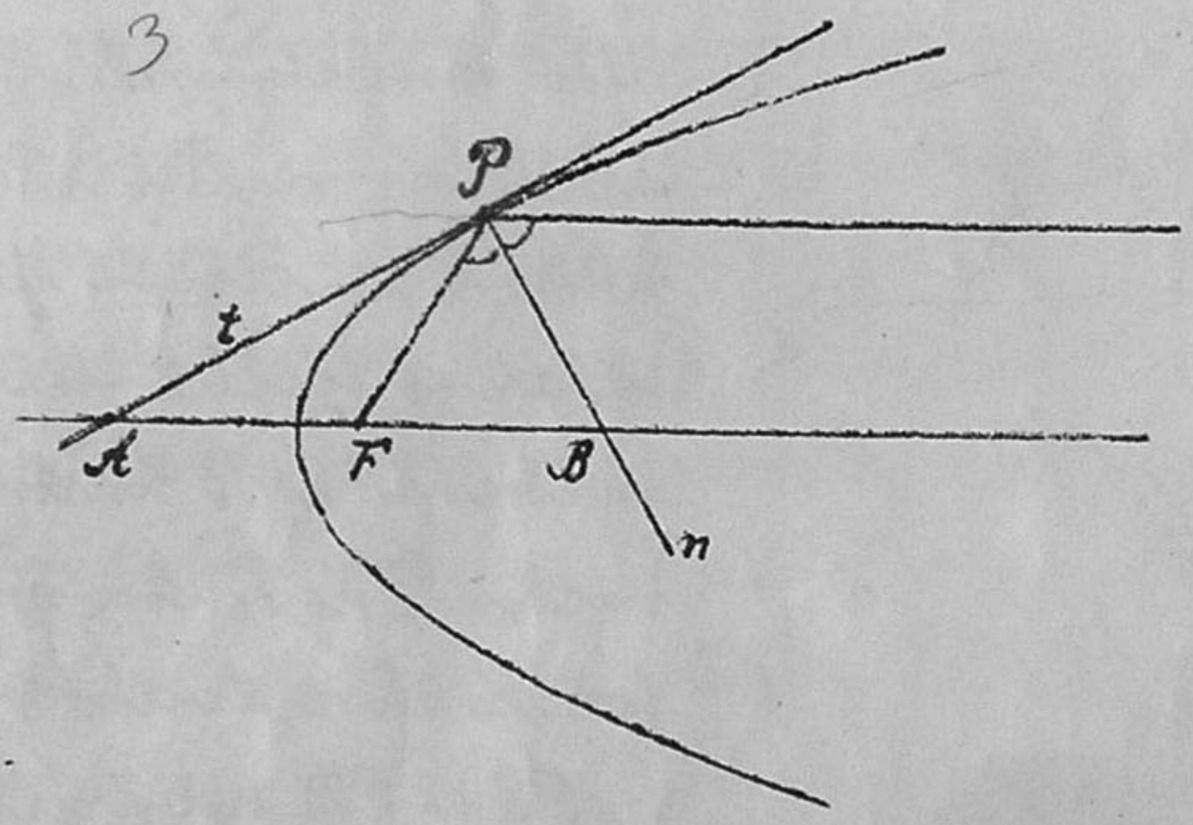
1



2



kon kívül metszi az első tengelyt, míg hyperbolánál fordítva a normális metszi a tengelyt a focuson kívül van kívül az érintő belül.

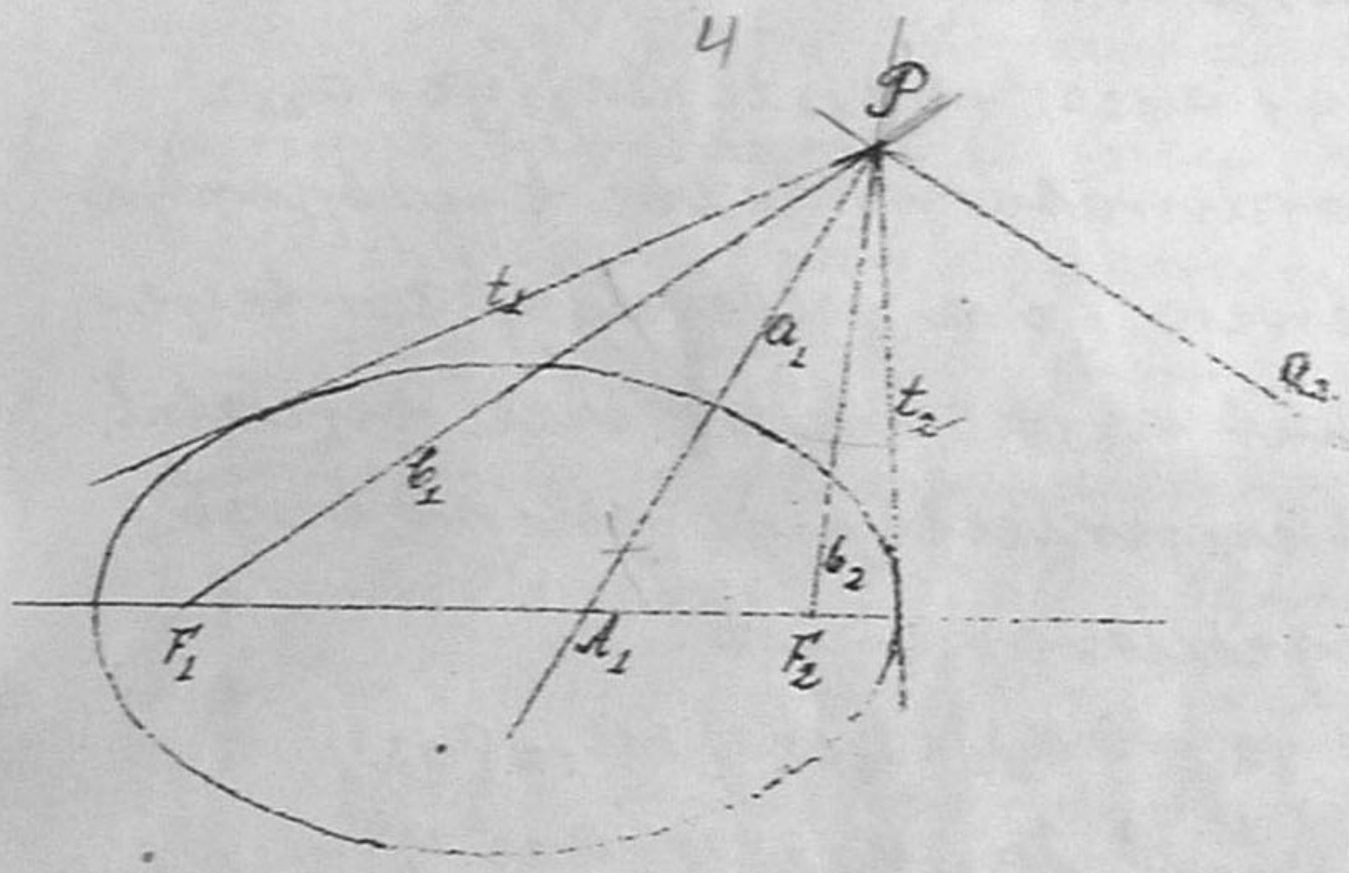


Parabolánál egyik focus végtelenben lévén, az egyik focális sugár P-ből az x tengelylyel párhuzamos egyenes, tehát az ~~tehát az~~ érintő itt is a focuson kívül metszi a tengelyt.

Ezek a tételek magyarázzák egyszersmind a focus elnevezését. Mert ha az ellipsis belseje tükröző, az egyik fócusból kiinduló fény- és hősugarak a másikba verednek vissza. Parabolánál a tengelylyel párhuzamos sugarak visszaverődés után a focuson mennek keresztül. Hyperbolánál pedig az egyik focusból jövő sugarak úgy verednek vissza, mintha a másikból jönnének.-

Egy másik ilyen szögegyenlőségre vonatkozó tételhez következőleg jutunk: vegyünk fel a kupszeleten (pl: ellipszisen) kívül egy tetszésszerinti P pontot s ebből húzzunk meg az t_1 és t_2 érintőket. A P ponton „átmenő" coniugált sugárpárok involutióit alkot-

4



nak és harmonicus fekvésűek a két érintőhöz képest. Ezen sugárpárok között olyanok vannak az $a_1 a_2$ szögfelező sugarak is, melyek tehát merőlegesek egymásra; de akkor egy előbbi tétel értelmében a nagytengelylyel való A_1, A_2 metszéspontjaik harmonicus fekvésűek az F_1 és F_2 fókuszokhoz. Ha most ezt a négy pontot P-ből projiciáljuk, négy harmonicus sugarat nyerünk, de ezek közül $PA_1 \perp PA_2$ és így ezek a fókuszokhoz induló sugarak szögeit is felezik, a miből világos, hogy a $(t_1 b_1)$ szög egyenlő az $(t_2 b_2)$ szöggel. Kapjuk tehát azt a tételt, hogy ha az kúpszeletsen kívül fekvő pontból meghúzzuk a két érintőt és a fokális sugarakat, akkor az egyik érintő ugyanakkora szöget zár be az első fokális sugárral, mint amekkorát a másik érintő bezár a második fokális sugárral.

Ezek a szögekre vonatkozó tételek.

Most lássunk bizonyos vonaldarabokra vonatkozó tételeket

azoknak viszonyára vonatkozó tételeket.

Legyen a kupszelet pontkoordinátás egyenlete

$$f(x,y,z) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2$$

Feltesszük, hogy a koordinátarendszer kezdőpontja O nem pontja a görbének. Ez a feltétel akkor teljesül, ha $a_{33} \neq 0$; ha tehát $a_{33} \neq 0$, akkor ezzel keresztül szorozva a kupszelet egyenletét és a fellépő tagokat teljes négyzetté egészítve ki, lesz

$$a_{33} f(x,y,z) = a_{11}a_{33}x^2 + 2a_{12}a_{33}xy + a_{22}a_{33}y^2 +$$
$$+ (a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z)^2 - a_{13}^2 x^2 - 2a_{31}a_{32}xy - a_{23}^2 y^2$$

de a coefficiensek könnyen felismerhető aldeterminánsok, úgyhogy

$$a_{33} f(x,y,z) = \text{[illegible]} = A_{22}x^2 - 2A_{12}xy + A_{11}y^2 + f_3^2 = 0$$

Itt az utolsó tag nem egyébb, mint a kezdőpont polarisának függvénye, mert a kezdőpont koordinátái 001, tehát polárisra $0.f_1 + 0f_2 + 1.f_3 = f_3$. Ilyen alakra ~~transformált~~ hozható a görbe egyenlete, ha O nem pontja a görbének. Most vezessük be annak a feltételét, hogy O focus legyen. Ez akkor van, ha $A_{11} = A_{22}$ és $A_{12} = 0$, a mikor is a görbe egyenlete

$$A_{11}(x^2 + y^2) + f_3^2 = 0$$

De ennek az egyenletnek, melynek eleget tesz a kúpszelet minden pontja, egyszerű geometriai jelentése van. Mert (x^2+y^2) nem egyébb, mint ezen focussal, mint origóval bíró rendszerben a változó görbe-

pontnak a focustól való távolságának a mértékszáma, azaz $x^2+y^2=\varrho^2$, továbbá, ha $\underline{d}$ a változó görbepont távolsága a focus polárisától, azaz a directrixtől, melynek egyenlete $f_3=0$, akkor

$$\frac{a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z}{\sqrt{a_{31}^2+a_{32}^2}}=d \text{ lévén, } \quad f_3^2=(a_{31}^2+a_{32}^2)d^2$$

úgyhogy a görbe egyenlete

$$A_{11}\varrho^2+(a_{31}^2+a_{32}^2)d^2=0 \quad \text{, ahol szükségképen } A_{11}<0$$

miből $$\frac{\varrho^2}{d^2}=-\frac{a_{31}^2+a_{32}^2}{A_{11}}=\varepsilon^2=\text{constans}$$

All tehát a tétel, hogy a kúpszelet bármely pontjára nézve a focustól és a directrixtől vett távolságok hányadosa állandó. Határozzuk meg ezen ε constáns értékét az egyes kúpszeletfajok esetén. Keressük azt-va a kúpszelet utóbbi egyenletét A_{11}-el és a directrix Hesse féle függvényét véve lesz

$$x^2+y^2-\varepsilon^2(\cos\varphi\, x+\sin\varphi\, y-p)^2=0$$

rendezve az egyenletet x, y hatványai szerint x^2 szorzója $a_{11}=1-\varepsilon^2\cos^2\varphi$, y^2 szorzója $a_{22}=1-\varepsilon^2\sin^2\varphi$ és xy szorzója $a_{12}=-\varepsilon^2\cos\varphi\sin\varphi$, tehát a kúpszelet faját meghatározó kifejezés

$$a_{11}a_{22}-a_{12}^2=1-\varepsilon^2$$

Ha tehát $1-\varepsilon^2>0$, azaz $\varepsilon<1$, a kúpszelet ellipsis;
ha $1-\varepsilon^2<0$, azaz $\varepsilon>1$, a " hyperbola,
s ha $1-\varepsilon^2=0$, " $\varepsilon=1$, a " parabola

Mondhatjuk tehát, hogy a kúpszelet minden pontjára nézve a focustól és a directrixtől vett távolsá-

egyk hármadvona állandó, és pedig az ellipsis pontjai közelebb vannak a focushoz, mint a directrixhez, a hyperbola pontjai közelebb vannak a directrixhez, mint a focushoz, míg a parabola pontjai egyenlő távolságban vannak a focustól és a directrixtől. Ebből a szempontból a kör az ellipsishez tartozik, mert focusa a centrumban lévén, directrixe meg a végtelen távoli egyenes, a hármadros $\varepsilon = 0$, tehát kisebb, mint egy. Az ellipsis annál jobban közeledik a körhöz, minnél kisebb ε. Ezt az ε-t nevezzük a kúpszelet excentricitásának. Ilyen ε számértékét az egyes kúpszelet fajok esetén a kúpszelet adataival kifejezzük, elég azt egy pontra nézve meghatározni.

Ellipsis egyenlete $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, a focus coord. $\sqrt{a^2 - b^2}$, 0, 1, tehát a directrixnek mint polárisnak egyenlete

$$\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a^2} x - 1 = 0, \quad \text{a miből} \quad x = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}},$$

ha t.i. a deriváltakban $x = 1$. Ilyen távolságra van a directrix az origótól. Ha most épen a nagy tengely A végpontját választjuk a meghatározására, erre nézve

$$\delta^0 = a - \sqrt{a^2 - b^2} \qquad \text{és} \qquad d = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} - a$$

$$= \sqrt{a^2 - b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}} - 1\right) \qquad = a\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}} - 1\right)$$

tehát $\frac{\delta}{d} \frac{e}{d} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \varepsilon$; vagyha $\sqrt{a^2 - b^2} = e$, akkor $\varepsilon = \frac{e}{a}$

ez az excentricitás értéke ellipsisnél. Hyperbolánál b^2 helyébe $-b^2$ jö, tehát $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$.

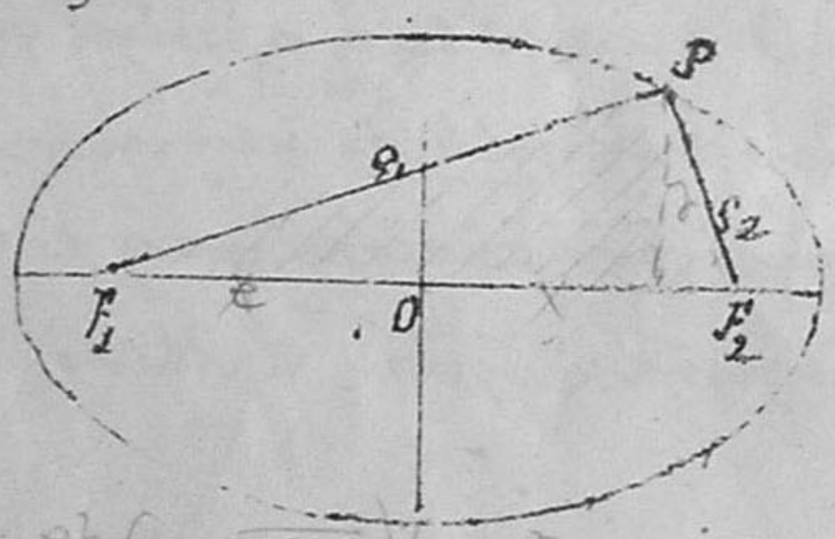
$$\delta_1 = a - \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$\delta^2 = a + \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$\delta_1 + \delta^2 = 2a$$

Ezek után kimondjuk, hogy ellipsisnél háromelp görbe pontra nézve a fokusoktól vett távolságok összege, hyperbolánál ezen távolságok különbsége állandó.

Legyen az eredeti coordináta rendszerben, melynek kezdőpontja az ellipsis centruma, az ellipsis egyenlete $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$. Ha $P(x,y)$ a görbe egy tetszőleges pontja, F_1 és F_2 a két fokusa, akkor $\overline{PF_1}^2 = \varrho_1^2 = (x+\sqrt{a^2-b^2})^2 + y^2$,



de az ellipsis egyenletéből $y^2 = b^2 \frac{a^2-x^2}{a^2}$, ezt beírva és a hatványozást elvégezve lesz

$$\varrho_1^2 = x^2 - 2\sqrt{a^2-b^2}\,x + a^2 - b^2 + b^2\frac{a^2-x^2}{a^2}$$

$$= \frac{a^2-b^2}{a^2}x^2 - 2\sqrt{a^2-b^2}\,x + a^2$$

$$= \left(a - \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}x\right)^2$$

s mivel $\varrho_1 > 0$, ezen négyzetreemelt gyöknek épen positiv értékét kell venni, tehát magát az alapmennyiséget, lévén $a > \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}x$, és igy minthán $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} = \varepsilon$, lesz $\varrho_1 = a - \varepsilon x$, épenigy $\varrho_2 = a + \varepsilon x$, tehát $\varrho_1 + \varrho_2 = 2a = \text{constans}$.

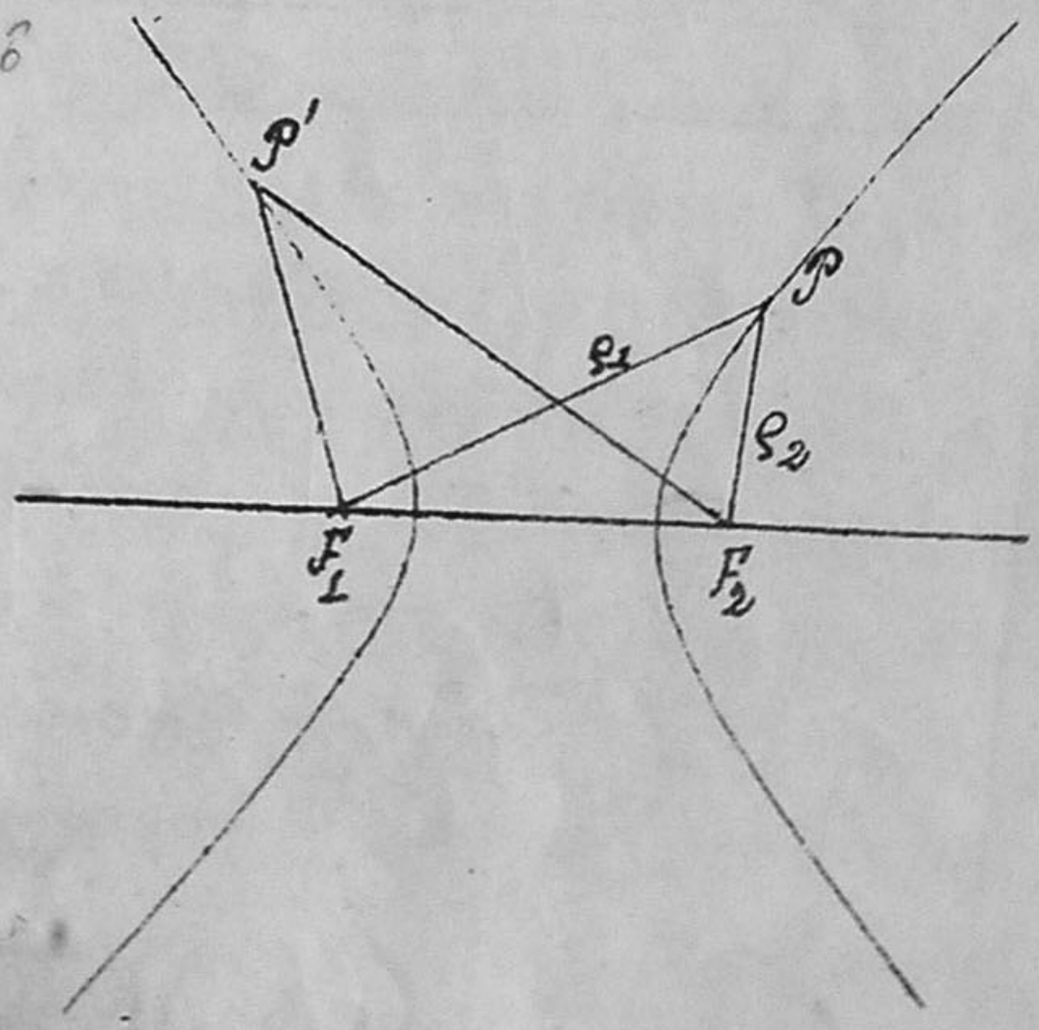
Ezzel a szóval ellipsis esetén be van bizonyítva.

Hyperbolánál $\varrho_1^2 = (x-\sqrt{a^2+b^2})^2 + y^2 = x^2 - 2\sqrt{a^2+b^2}\,x + a^2 + b^2 + y^2$, s mivel a hyperbola egyenletéből $y^2 = b^2\frac{x^2-a^2}{a^2}$, lesz $\varrho_2^2 = \frac{a^2+b^2}{a^2}x^2 - 2\sqrt{a^2+b^2}\,x + a^2 = \left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}x - a\right)^2$

épen igy adódik

$$\varrho_2^2 = \left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}x + a\right)^2$$

A négyzetgyökvonásnál ügyelni kell arra, hogy ϱ_1 és ϱ_2



számára pozitiv értéke-
ket vegyünk. E végett tud-
ni kell, hogy a számjeles a-
lapmennyiségben melyik
tag abszolut értéke nagyobb.
Minthogy $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} = \varepsilon > 1$, és hyper-
bolánál $|x| \geq a$, azért $|\varepsilon x| > a$,
tehát az x-es tag abszolut ér-
téke nagyobb és igy ennek
jegye határozza meg a négy-
zetgyök előjelét. Látható, hogy
két esetet kell megkülönböztetni;

1.) ha $x > 0$, tehát a hyperbola pozitiv ágára nézve $\varrho_2 = \varepsilon x - a$

" $x < 0$, " " negátiv " " $\varrho_1 = -\varepsilon x + a$

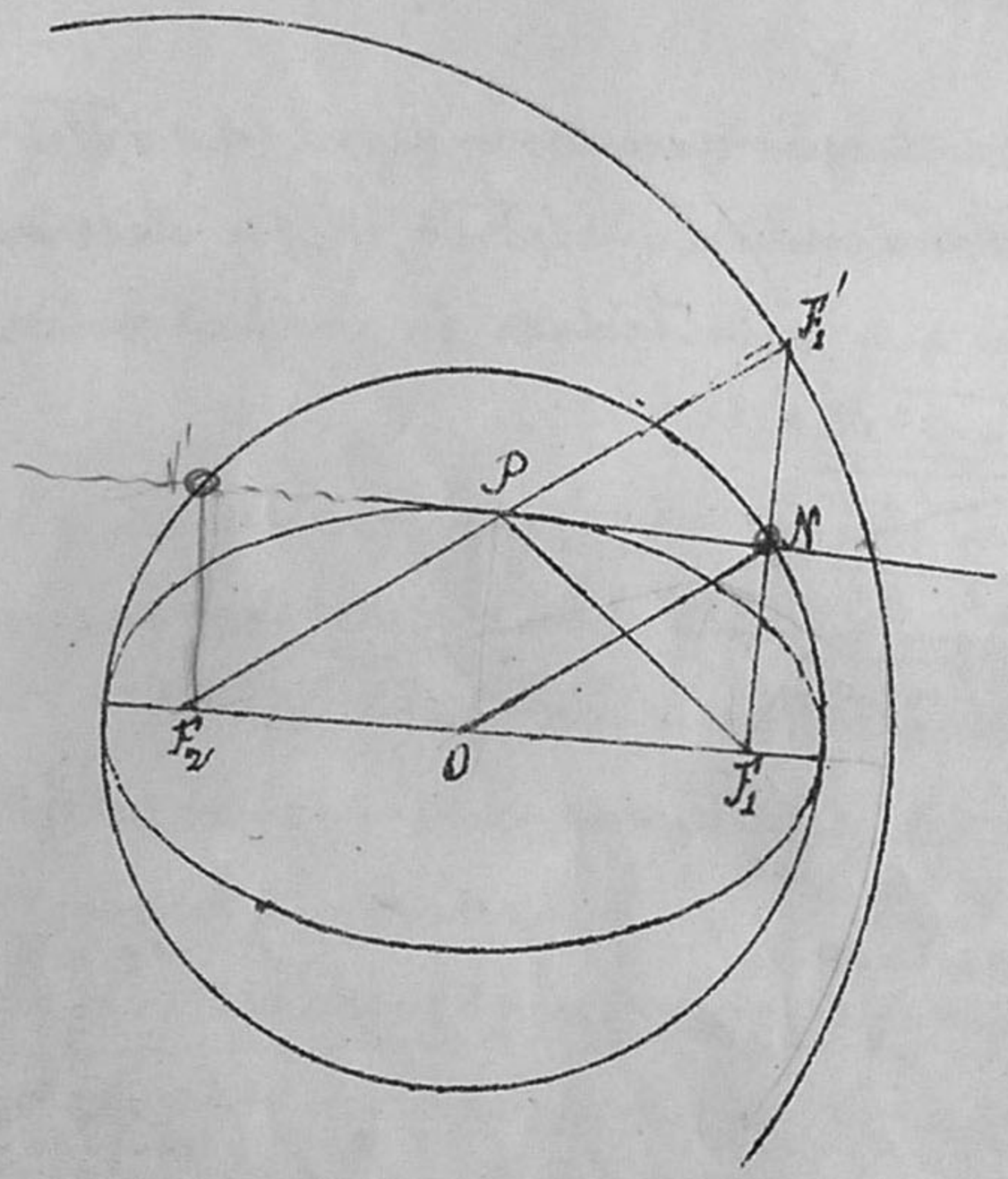
$\varrho_2 = \varepsilon x + a$

$\varrho_2 = -\varepsilon x - a$

Mint a négy kifejezés pozitiv. És most az első esetben
$\varrho_2 - \varrho_2 = 2a$, a második esetben $\varrho_2 - \varrho_2 = 2a$, tehát
a foculstól vett távolságok különbsége állandó. Ezen
két tétel alapján egyszerüen megszerkeszthetjük mind-
két centrális kúpszeletet.

Ebből a tételből nehány geometriai következte-
tést vonhatunk az ellipszisre és a hyperbolára nézve.

Legyen az ellipsis egy pontja P, focusai F_1 és F_2,
akkor $F_1P + F_2P = 2a$. Most nyujtsuk meg F_1P-t s mér-



jük rá P-től PF_2-t F_1'-ig, akkor a P-hez tartozó érintő merőleges az $F_1'F_1$-re, s N-ben felezi azt, vagy hogy F_1' az F_1 tükörképe az érintőre nézve. S mivel $F_2P + PF_1' = F_2P + PF_1 = 2a$, áll az a tétel, hogy az egyik focus bármely érintőre vonatkozó tükörképének távola a másik fokustól állandó s annyi mint az ellipsis nagy tengelye. Tehát az egyik focus tükörképeinek geometriai helye a másik focusból $2a$ sugárral írott kör. Mivel továbbá O felezi F_1F_2-t, és $ON \parallel F_2F_1'$, azért

$$ON = \tfrac{1}{2} F_2F_1' = a$$

és ez áll minden N pontra, úgy hogy áll a tétel: az ellipsis focusából az érintőkre bocsátott merőlegesek talppontjainak geometriai helye egy O centrumu, a sugárú kör.

Még egy nevezetes relációt fogunk levezetni az érintőknek a két fokustól való távolságára nézve. Ha az érintő homogén koordinátái u, v, w, melyek eleget tesznek az ellipsis vonalkoordinátás egyenletének

$$a^2u^2 + b^2v^2 - w^2 = 0$$

akkor, lévén az első focus homogen coordinatái $\sqrt{a^2-b^2}$, 0, 1, a második focus coordinátái $-\sqrt{a^2-b^2}$, 0, 1, lesz az első fokusnak távolsága az érintőtől

$$d_1 = \frac{\sqrt{a^2-b^2}\,u + w}{\sqrt{u^2+v^2}}$$

épen igy $$d_2 = \frac{-\sqrt{a^2-b^2}\,u + w}{\sqrt{u^2+v^2}}$$

összeszorozva $$d_1 d_2 = \frac{w^2-(a^2-b^2)u^2}{u^2+v^2}$$

és miután a görbe egyenletéből

$$w^2 - a^2u^2 = b^2v^2$$

lesz $$d_1 d_2 = \frac{b^2(u^2+v^2)}{u^2+v^2} = b^2$$ tehát

$$d_1 d_2 = b^2 = \text{állandó}$$

Vagyis ellipsisnél a két focusnak bármely érintőtől való távolságainak szorzata állandó, s pedig egy positiv állandó, a mi azt mondja, hogy ellipsisnél mindkét focus az érintő ugyanazon oldalán van; hyperbolánál

$$d_1 d_2 = -b^2$$

tehát itt is negyzetre az ellenkező áll, azaz hogy az állandó negatív lévén az érintő a két focus között vonul el.

Lássuk az érintő és focus közti viszonyt parabola esetén. A parabola vonalcoordinátás egyenlete

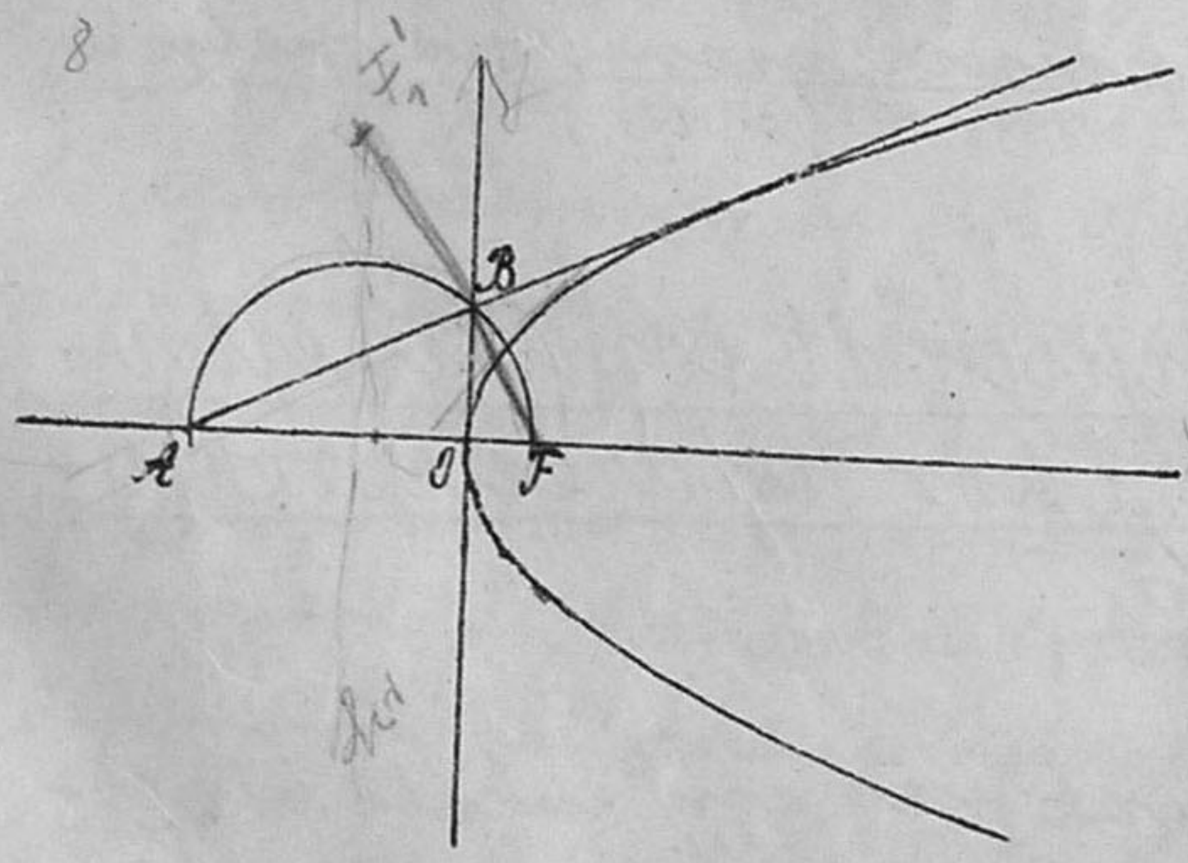
$$pw^2 - 2uw = 0$$

feltéve, hogy a parabola tengelye az x tengely, a csúcs érintő az y tengely. Ha általánk közönséges Plr. coordinátákra, és $w=1$, $u=-\frac{1}{2}$, $v=-\frac{1}{\beta}$, akkor az egyenlet

$$\beta^2 + \frac{p}{2}\alpha = 0$$

Ez az összefüggés az érintő által a két tengelyről lemetszett darabok között.

Ebből látható, hogy α mindig negatív, vagyis a parabola valamennyi érintője a negatív felén metszi az x tengelyt, az y tengelyről lemetszett β darab pedig geometriai középarányos az x tengelyről lemetszett darab meg a fenntávolság között. Ha tehát a negatív x tengelyen felveszünk egy tetszésszerinti A pontot, s ennek a focustól való távola, mint átmérő fölé kört irunk, ez a csucsérintőt oly B pontban metszi, mely A-val összekötve a parabola egy érintőjét adja. Ilmtán az ABF háromszög B-nél derékszögü, mondhatjuk, hogy a parabola focusából az érintőkre bocsátott merőlegesek talppontjainak geometriai helye a parabola csucsérintője. Ha továbbá az F focus tükörképe az AB érintőre



nézve F_x', ennek x coordinátája $-OF$, tehát állandó, vagyis a focus érintői tükörképeinek geometriai helye egy az x tengelyre merőleges egyenes, melyről azonnal kiderül, hogy a parabola directrixe, azaz F polárisa. Ugyanis, ha F polarisának szokásos meghatározása végett az F-en átmenő egyik szelő gyanánt vesszük a parabola tengelyét, akkor egyik kimetszett pont végtelenben lévén, a conjugált pont O felezi az F és conjugáltja közti távolt. A fenti merőleges x tengelyü talppontja tehát a directrix egyik pontja; ha másik szelő gyanánt az F-en át az x tengelyre merőleges egyenest vesszük, ezen a két kimetszett pont F-től egyenlő távol lévén, F conjugáltja az egyenes végtelen távoli pontja, de az egyik a mi egyenesünk végtelen távoli pontjával, vagyis ez az egyenes tényleg a directrix. Tehát a focus érintői-tükörképeinek geometriai helye a directrix. —

A focus, mint conjugált complex érintők metszéspontja. A kör polárreciprok ideoma.

Szólanunk kell a focusnak még egy, inkább algebrai természetü tulajdonságáról. Lássuk, hogyha a focus a coordináta rendszer kezdőpontja, a kup-

szelet egyenlete

$$x^2 + y^2 - \varepsilon^2 d^2 = 0$$

a hol d a directrix függvénye, ε az excentricitás. Ha az első két tag összegés két lineáris complex factorra bontjuk, az egyenlet így is irható

$$(x + yi)(x - yi) - \varepsilon^2 d^2 = 0$$

Ebből látható, hogy az $x + yi = 0$ képzetes egyenes érinti a kúpszeletet, s pedig a directrixszel való képzetes metszéspontjában, mert ha combináljuk az $x + yi = 0$ egyenletét a kúpszelet egyenletével, kijö, hogy $d^2 = 0$. Ugyan igy az $x - yi = 0$ képzetes egyenes is érinti a görbét, szintén a directrixszel való képzetes metszéspontjában, mert ha $x - yi = 0$, akkor $d^2 = 0$. Ez a két érintő conjugált complex és mindkettő átmegy a kúpszelet focusán, mint a coordinata rendszer origiójáu, mert $(x = 0, y = 0)$ mindkét érintőn rajta van. De másfelöl világos, hogy az első érintő átmegy az $(1, i, 0)$ coordinátákkal biró K_1, a második pedig az $(1, -i, 0)$ coordinátákkal biró K_2 végtelen távoli képzetes körponton. Ha tehát a kúpszelet focusát összekötjük a végtelen távoli képzetes körpontokkal, kapjuk a focusból kiinduló érintőket. Ilyen tehát ellipsis és hyperbola esetén négy van t. i.

$$F_1 K_1, F_1 K_2, F_2 K_1, F_2 K_2$$

De fordítva is áll, hogy a végtelen távoli képzetes

körpontokból négy képzetes érintő megy a kúpszeletthez, melyek két conjugáls complex egyenespárt alkotnak, s ezeknek metszéspontjai a kúpszelet realis focusai. Parabolánál a végtelen távoli egyenes is érintő, ezen kivül tehát K_1 és K_2-ből csak egy-egy érintő húzható, melyek conjugáls complexek és realis metszéspontjaik a parabola focusai. A kör olyan kúpszelet, melynek focusa összeesik a kör centrumában. Minthogy a sik összes körei átmennek a végtelen távoli képzetes körpontokon, azért K_1 és K_2-ben egy-egy kettős érintő húzható a körhöz, s ezek realis metszéspontja a kör kettős focusa vagyis centruma.

Ezzel a focusnak egy olyan jellemző tulajdonságát nyertük, mely kiterjeszthető a magasabb rendü görbékre, itt is úgy definiáljuk a focust, hogy ez a K_1 és K_2 pontokból húzható conjugált complex érintők metszéspontja. Ugyhogy ha kijelölünk egy pontot azzal a kikötéssel, hogy az a kúpszelet focusa legyen, ezzel voltaképen két érintőjét adtuk meg a kúpszeletnek. —

— · —

Jó lesz a focusnak még egy nevezetes tulajdonságát megemlíteni: Láttuk, hogyha a kúpszelet focusát választjuk a coordinatarendszer kezdőpontjának, az erre vonatkozó vonalcoordinátás egyenletben

$$A_{11} = A_{22} \quad \text{és} \quad A_{12} = 0$$

a kúpszelet ezen speciális vonalcoordinátás egyenlete tehát ugyanazon tulajdonságokkal bir, mint a kör általános pontcoordinátás egyenlete. Ebből azonnal kitünik a fogusnak egy nevezetes tulajdonsága. Lássuk a polárreciprokitásnál, hogy az (x, y) pontnak az $x^2+y^2+1=0$ kúpszelet egy-segsugarú körre vonatkozó polárisának, u, v coordinátái $u = x$, $v = y$.

Ha most (x, y) az $f(x, y) = 0$ görbén végighalad, akkor az $x^2+y^2+1=0$ körre vonatkozó polárisa burkolni fogja a $f(u, v) = 0$ görbét, s viszont ha az (u, v) egyenes burkolja az eredeti görbét, melynek ~~pont~~ vonal coordinátás egyenlete $F(u, v) = 0$, akkor polusa bejárja az $F(x, y) = 0$ görbét. Két ilyen görbét, mint $f(x, y)$ és $f(u, v)$ illetőleg $F(u, v)$ és $F(x, y)$, melyek bármelyikének pontjai s a másiknak érintői polus és poláris viszonyában vannak a kúpszelet egy sugaru körre nézve, polárreciprok görbéknek nevezünk

Alkalmazzuk a mondottakat a kúpszeletre. Keressünk a síkban egy kört, melynek pontcoordinátás egyenlete

$$x^2+y^2-2ax-2by+c = 0$$

Ha (x, y) pont bejárja azt a kört, akkor az $x^2+y^2+1=0$ körre vonatkozó (u, v) polarisa burkolja az

$$u^2 + v^2 - 2au + 2bv + c = 0$$

görbét ez pedig egy kúpszelet, melynek focusa a coordinátarendszer kezdőpontja. áll tehát a tétel, hogy a kör polárreciprok idoma a képzetes egy sugarú körre nézve egy olyan kúpszelet, melynek focusa a coordinátarendszer kezdőpontjában van. De fordítva is áll a tétel, hogy egy tetszőleges kúpszeletnek, melynek focusa az origoban van, polárreciprok görbéje egy kör.

Ha a realis egységsugarú kört, $x^2+y^2-1=0$, veszszük a polarreciprocitás alapjául, a pont és polárisának coordinátái között ez az összefüggés:

$u = -x$, $v = -y$, a miből világos, hogy az erre vonatkozó polárreciprok idom csak abban különbözik az $x^2+y^2+1=0$ körre vonatkozó idomtól, hogy a kettő az origóra nézve symmetricus idom.

Csak az a kérdés, hogy a kör ezen polárreciprok idoma melyik kúpszeletfajhoz tartozik. Ezt eldönti a coordináta rendszer kezdőpontjának mint $x^2+y^2+1=0$ kör centrumának viszonya a körhöz. Tudjuk ugyanis, hogy csupán a polarrecip. alapjául szolgáló kör centrumán átmenő egyeneseknek a polusa van végtelenben. Ha tehát az adott kör érintői közül vannak olyanok, melyek átmennek a coordinátarendszer kezdőpontján, ezeknek polusai, mint a reciprok kúp-

szelet pontjai végtelenbe jutnak. Nyilvánvaló tehát, hogy ha O a felvett körre nézve külső pont, belőle két érintő indulván a körhöz, a pol-rec. kúpszeletnek két végtelen távoli pontja lesz, a kúpszelet hyperbola; ha O a kö-rön fekszik, csak egy érintő megyén át O-n, csak egy pont jut a végtelenbe, a kúpszelet parabola, s ha O belső pont, a kör egy érintője se megyén át O-n, tehát a rec.ips. kúp-szeletnek nincsen végtelen távoli pontja, a kúpszelet ellipsis. Mindháromesetben a kúpszelet olyan, melynek focusa a coordinátarendszer origójában van.–

A kúpszelet meghatározó adatai.

Foglalkozzunk azzal a kérdéssel, hogy hány feltétel határozza meg a kúpszeleset. A kúpszelet e-gyenletében hat constans szerepel a pontcoordinatás egyenletben $a_{11}\ a_{22}\ a_{33}\ a_{23}\ a_{31}\ a_{12}$, a vonalco-ordinátásban $A_{11}\ A_{22}\ A_{33}\ A_{23}\ A_{31}\ A_{12}$, de homo-gén módon, úgy hogy egyik constanssal kereszttül osztva, öt lényeges constans szerepel mindkét egyenlet-ben. Ha ezeket ismerjük, ~~ha ezeket ismerjük~~ ha-tározott kúpszeletteel van dolgunk. Tehát öt adat ha-tározza meg a kúpszeletet, vagyis a síkban ötszörö-sen végtelen sok kúpszelet létezik. Adatnak nevezünk egy a kúpszelet meghatározására szolgáló oly kijelö-

lést, mely egyenlettel van adva. Ha egy kijelölés több egyenlettel van adva, annyi adatnak számít, a hány az egyenlet. Ha pl: azt mondjuk, hogy a kúpszelet legyen kör, ez a kijelentés két egyenletet ad

$$a_{11} = a_{22} \quad \text{és} \quad a_{12} = 0$$

ez tehát már két adat. A kúpszelet meghatározásához öt adat szükséges, azaz 5 egyenlet, melyek segélyével meghatározzuk az öt constánst. Az adatokat osztályozzuk azon egyenlet természete szerint, mely az adatot meghatározza. Ha az egyenlet transcendens, az adat transcendens, ha az egyenlet algebrai, az adatot is algebrainak nevezzük. Itt csak algebrai adatokkal fogunk foglalkozni. Az algebrai adatokat osztályozzuk az őket kifejező egyenletek fokszáma szerint. Elsőfoku egyenlet lineáris, négyzetes egyenlet másodfoku adatot szolgáltat, stb, tehát az adat foka az adatot kifejező egyenlet fokszáma. De a fokszámra lényeges befolyással van az a körülmény, hogy pontokból vagy vonalakból akarjuk-e szerkeszteni a görbét, úgy hogy egy és ugyanazon adat más fokszámmal birhat, ha pontokból szerkesztjük a görbét, mint mikor vonalakból szerkesztjük azt. Ha pl. pontokból akarjuk szerkeszteni a kúpszeletet, akkor egy adott (x_1, y_1, z_1) pontja a görbének lineáris adat, mert ezzel a coefficiensek

Kalhos

számára a következő lineáris egyenletünk van

$$a_{11}x_1^2+a_{22}y_1^2+a_{33}x_1^2+2a_{23}y_1z_1+2a_{31}z_1x_1+2a_{12}x_1y_1 = 0$$

Míg ha egy vonalat adunk (u_1, v_1, w_1), azzal a kikötéssel, hogy ez érintse a görbét, akkor ez másodfoku adat, mert az adott érintő coordinatái eleget tesznek a görbe vonalcoordinátás egyenletének

$$A_{11}u_1^2+A_{22}v_1^2+A_{33}w_1^2+2A_{23}v_1w_1+2A_{31}w_1u_1+2A_{12}u_1v_1 = 0$$

ez pedig a keresett constánsokban másodfoku, lévén $A_{11} = a_{22}a_{33}-a_{23}^2$ stb. Tehát ha pontokból akarjuk szerkeszteni a kúpszeletet, s megadjuk annak egy pontját, ez lineáris adat. Ha pedig vonalakból akarjuk a kúpszeletet szerkeszteni, a pont másodfoku, az érintő lineáris adat, mert akkor a pont coordinatái eleget tesznek egy a A constansokban másodfoku, az érintő coordinátái egy a A constánsokban lineáris egyenletnek.

Lássunk mármost a praxisban gyakrabban előforduló feltételt, keresve, hogy hány adathoz vezetnek azok.

Adva az $x_1y_1z_1$ pont és az $u_1v_1w_1$ egyenes, melyek polus és polaris viszonyban vannak a kúpszeletes illetőleg. Hány adat ez? Az $x_1y_1z_1$ pont polarisának egyenlete

$$xf_1^{(1)}+yf_2^{(1)}+zf_3^{(1)} = 0$$

melyben a constánsok a polaris coordinátait adják s így kell, hogy

$$\frac{f_1^{(1)}}{u_1} = \frac{f_2^{(1)}}{v_1} = \frac{f_3^{(1)}}{w_1} = \lambda \text{ legyen}$$

Tehát azt, hogy $u_1 v_1 w_1$ polárisa az $x_1 y_1 z_1$ pontnak, kifejezi a következő két egyenlet

$\frac{F_1^{(1)}}{u_1} = \frac{F_2^{(1)}}{v_1}$ és $\frac{F_1^{(1)}}{u_1} = \frac{F_3^{(1)}}{w_1}$, ez pedig két lineáris egyenlet, ha pontokból akarjuk szerkeszteni a görbét. Tehát, ha adva egy pont és egy egyenes, mint polus és polárisa, akkor ez a pontokból szerkesztendő képzeletre nézve két lineáris adat. De látni fogjuk, hogy ez a vonalakból szerkesztendő görbére nézve is két lineáris adatot képvisel. Mert ha a vonalcoordinátás egyenlet $F(u, v, w) = 0$, akkor az $(u_1 v_1 w_1)$ egyenes ~~polárisának~~ polusának egyenlete $u F_1^{(1)} + v F_2^{(1)} + w F_3^{(1)} = 0$, a hol a constánsok a polus három coordinátáját adják, s mivel ezek $x_1 y_1 z_1$, kell hogy

$\frac{F_1^{(1)}}{x_1} = \frac{F_2^{(1)}}{y_1} = \frac{F_3^{(1)}}{z_1}$ legyen ez pedig a vonalcoordinátás egyenlet constánsai számára két lineáris egyenlet t. i. $\frac{F_1^{(1)}}{x_1} = \frac{F_2^{(1)}}{y_1}$ és $\frac{F_1^{(1)}}{x_1} = \frac{F_3^{(1)}}{z_1}$. Miután az érintő és az érintési pont szintén polaris és polus viszonyban vannak, nyilvánvaló, hogy ha megadjuk a kúpszeletnek egy pontját s a hozzátartozó érintőt, ez két lineáris adat. Ez geometriailag is evidens. Mert midőn egy pontot s a hozzátartozó érintőt adjuk, tulajdonképp a görbe két végtelen közel fekvő pontját adtuk, ez pedig a pontokból szerkesztendő kúpszeletre nézve két lineáris adat; ha pedig vonalakból akarjuk szerkeszteni a kúpszeletet, a fenti adatot úgy tekinthetjük, mintha a görbe két végtelen közeli érintőjét adtuk volna, két érintő pedig a vonalakból szerkesztendő kúpszeletre nézve két lineáris adat.

Miután a kúpszelet centruma és a végtelen távoli egyenes szintén polus és polaris viszonyban vannak, nyilvánvaló, hogy ha megadjuk a kúpszelet centrumát ez két lineáris adat. – Ha kiszabjuk, hogy a megszerkesztendő kúpszelet parabola legyen, ezzel azt követtük ki, hogy legyen $a_{11} a_{22} - a_{12}^2 = A_{33} = 0$, ez tehát négyzetes adat, ha pontokból, és lineáris adat, ha vonalakból akarjuk szerkeszteni a parabolát. Ennek is egyszerű geometriai oka van. Mert ha azt akarjuk, hogy a görbe parabola legyen ezzel tulajdonképpen azt követtük ki, hogy érintse a végtelen távoli egyenest, tehát megadtuk a görbének egy érintőjét, ez pedig négyzetes illetőleg lineáris adat. Ha megadjuk a görbének egy F focusát, ezzel kifejeztük, hogy $A_{11} = A_{22}$ és $A_{12} = 0$. ez két adat, s pedig vonalcoordinátás egyenlet számára lineáris, pontcoordinátás egyenlet számára négyzetes adat. Ennek szintén megvan a geom. oka. Mert

ha azt akarjuk, hogy F focus legyen, ezzel azt szabtuk meg, hogy FK_1 és FK_2 érintője legyen a görbének. Tehát megadtunk két érintőt, ez pedig két lineáris adat vonalkoordinátás, két négyzetes adat pontkoordinátás egyenlet számára.

Az adat fokát azért kell ismerni, mert ettől függ, hogy bizonyos kellő számú adat hány képzeletet határoz meg. A lehető esetek a következők:

1.) Adva van a képzelet 5 pontja. Ezzel a pontkoordinátás egyenlet coefficiensei számára 5 egyenletünk van, melyekből a coefficiensek egyértékűleg meghatározhatók. Tehát 5 pont csak egy képzeletet határoz meg.

2.) Adva van 4 pont és egy érintő. A négy pont ad 4 lineáris egyenletet, az egy érintő egy négyzetes egyenletet. A 4 lineáris egyenletből 4 constans meghatározható, a másik kettő hármasodosának számára egy négyzetes egyenletünk van, melyből két értékes kapunk, s ezek kombinálva a már meghatározott 4 constanssal, két képzeletet adnak. Tehát 4 pont és 1 érintő 2 képzeletet ad.

3.) Adva van 3 pont és 2 érintő. A 3 pont 3 lineáris, a 2 érintő 2 négyzetes egyenletet ad, tehát 4 képzeletet kapunk.

4.) Adva 2 pont és 3 érintő. Ha vonalakból szerkesztjük a görbét, a 2 pont 2 négyzetes, a 3 érintő 3 lineáris egyenletet ad, tehát 4 képzeletet kapunk.-

5.) 1 pont és 4 érintő nyilvánvalóan 2 kúpszeletet határoz meg.

6.) Végre 5 érintő vonalkoordinátákban 5 lineáris egyenletet ad, tehát 5 érintő 1 kúpszeletet határoz meg.

Ezen 6 feltétel közül az első és hatodikkal fogunk foglalkozni. Öt pont illetőleg öt érintő teljesen meghatároz egy kúpszeletet, ugyhogy hat pont illetőleg hat érintő között már bizonyos kapcsolat áll fenn, mely kapcsolatnak kifejezője egy tétel. Ezt a kapcsolatot más-más alakban kifejezve, más-más tételhez jutunk. Mielőtt ezen tételek levezetéséhez fognánk előre kell bocsátanunk néhány segédtételt.

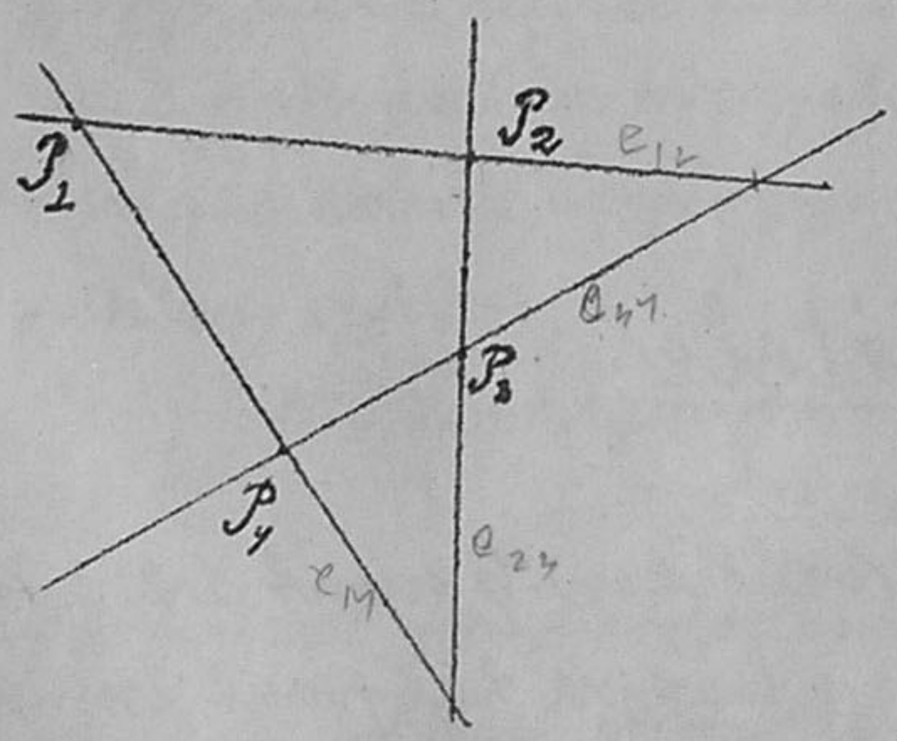
Tegyük fel, hogy 4 lineáris adatunk van pontkoordinátás egyenlet számára. Ez nem elég egy kúpszelet meghatározására, végtelen sok kúpszelet van, mely ezt a 4 alakot kielégiti. Kérdés, hogy lehet ezeket a kúpszeleteket mind egy egyenletben kifejezni illetőleg összefoglalnunk. Képzeljük a 4 lineáris adatot kifejező 4 egyenletet felírva. Az 4 linearis homogén egyenlet 6 ismeretlen constans között. Ezekből képzeljük pl. kiszámítva az a_{11} a_{12} a_{33} a_{12} constánsokat, kettő a. i. a_{13} és a_{23} határozatlan marad s ezekkel van kifejezve az első négy constans. Beírva ezt a 4 értéket a kúpszelet egyenletébe, a két ismeretlen constans között egy homogén linearis egyenletünk van, de mivel homogén, egyik constánssal keresztül

oszthatunk, marad egy paraméter első fokon, s így a kúpszelet egyenlete a következő alakban jelenik meg

$$f + \lambda g = 0$$

a hol f és g független a λ paramétertől. Az összes kúpszeletek, melyek azt a 4 lineáris adatot kielégítik, ebben az alakban bennfoglaltatnak. Ez a kúpszeleteknek egyszeresen végtelen sokaságát jelenti, melyet kúpszeletsornak nevezünk. f és g szintén tagjai ezen kúpszeletsornak, és pedig a $\lambda = 0$, illetőleg $\lambda = \infty$ paraméterhez tartozó tagjai. Ha tehát veszünk két speciális kúpszeletet, melyek kielégítik a 4 lineáris adatot, azoknak paraméteres kapcsolata adja az összes kúpszeleteket, melyek a négy adatot kielégítik. Ilyen 4 lineáris adat pl. 4 pont P_1 P_2 P_3 P_4 azzal a kikötéssel, hogy a kúpszelet menjen át ezen a 4 ponton. Legyen a $P_1 P_2$ egyenes függvénye e_{12}, épenigy a $P_3 P_4$, $P_2 P_4$ és $P_2 P_3$ egyenes függvénye megfelelőleg e_{34}, e_{14}, és e_{23}, akkor

10



$$e_{12} \cdot e_{34} = 0$$

és $e_{14} \cdot e_{23} = 0$

egy-egy másodrendű görbe, mely átmegy a 4 ponton és így a kúpszelet egyenlete

$$e_{12} \cdot e_{34} + \lambda e_{14} \cdot e_{23} = 0$$

λ bármilyen értéke mellett

ez az egyenlet olyan kúpszeletet ad, mely átmegy a 4 ponton. Mert tényleg, ha rendre behelyettesítjük a 4 pont koordinátáit az egyenletbe mindegyik tagja, tehát a paraméteres kapcsolat is eltűnik. Így pl. a P_1 coordinátái mellett

$$p_{12} = 0 \quad \text{és} \quad p_{14} = 0$$

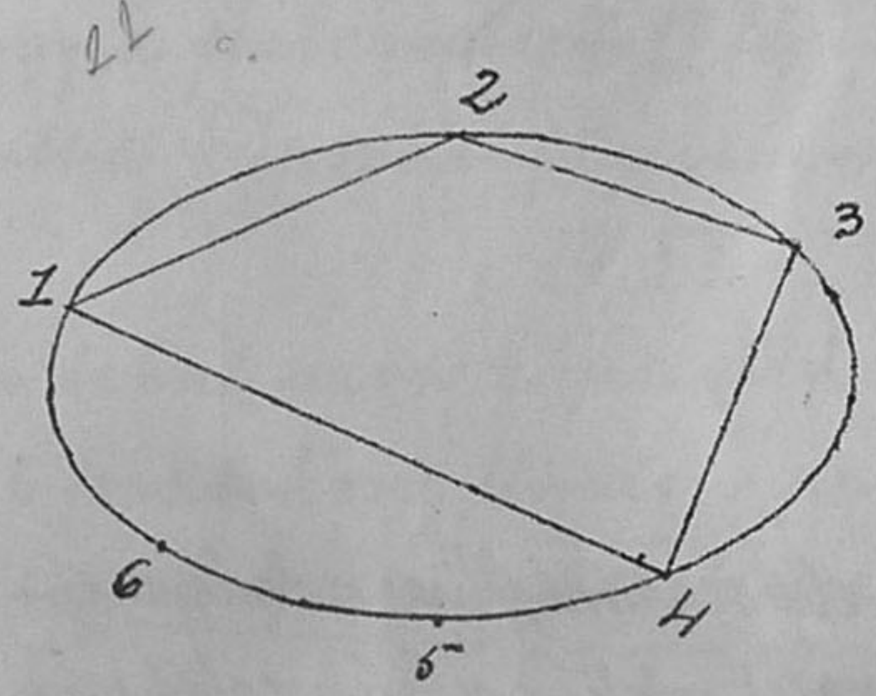
tehát az egész határoldal 0, s így P_1 a kúpszeleten van. Ha megadunk még egy ötödik pontot azzal a kikötéssel, hogy a kúpszelet ezen is átmenjen, akkor már egy határozott kúpszelettel van dolgunk, mert betéve az ötödik pont koordinátáit a kúpszelettor egyenletébe, ebből λ értéke meghatározható, s így a kúpszelettor egy határozott tagját kapjuk.

Ennek előrebocsátása után vegyük most rendre azokat a tételeket, melyek más-más formában kifejezik a kúpszelet(et) 6 pontja vagy 6 érintője közötti fennálló kapcsolatot. Először a 6 pont közötti kapcsolatot tárgyaljuk A alatt, azután a dual tételeket B alatt.

A.

Pappus tétele

Legyen adva a kúpszeleten 6 pont 1, 2, 3, 4, 5, 6. Fejezzük ki analytikailag, hogy a hat pont mind egy kúpszeleten van. Összekötve az 1, 2, 3, 4 pontokat egymás-



után egy-egy egyenessel és azon egyenesek Hesse féle függvényeit röviden $\overline{12}, \overline{23}, \overline{34}, \overline{41}$-el jelölve, nyilvánvaló, hogy $\overline{12}.\overline{34}$ és $\overline{14}.\overline{23}$ egy-egy olyan degenerált kúpszelet, mely átmegy ezen a 4 ponton, úgy-hogy ezen négy (4) ponthoz tartozó kúpszeletsor egyenlete így írható

$$\overline{12}.\overline{34} + \lambda \overline{14}.\overline{23} = 0 \qquad \text{I.}$$

Tegyük fel, hogy a mi kúpszeletünknek paramétere λ az a λ, tehát egyenlete ez az egyenlet, s vezessük be annak feltételét, hogy 5 és 6 is a kúpszeleten van. Mindkét pont koordinátái kielégítik az I. egyenletet; de ha 5 koordinátáit helyettesítjük az $\overline{12}$ Hesse féle függvénybe, kapjuk 5 normális távolságát az $\overline{12}$ egyenestől, legyen ez p_{12}, ugyanez áll a többi függvényértékekre, melyek mind az 5 pontnak a megfelelő egyenesektől való normális távolságát adják, úgyhogy annak feltétele, hogy 5 a kúpszeleten van, így írható

$$p_{12}p_{34} + \lambda p_{14}p_{23} = 0$$

a miből $$\lambda = -\frac{p_{12}p_{34}}{p_{34}p_{23}}$$

képenigy ha a 6 pont coordinátáit helyettesítjük az I egyenletbe, s a 6 pont normalis távolságát a megfelelő egyenesektől q betüvel jelöljük, lesz

$$\lambda = -\frac{q_{12}\,q_{34}}{q_{14}\,q_{23}}$$

ez a két érték egyenlő, vagyis

$$\frac{p_{12}\,p_{34}}{p_{14}\,p_{23}} = \frac{q_{12}\,q_{34}}{q_{14}\,q_{23}}$$

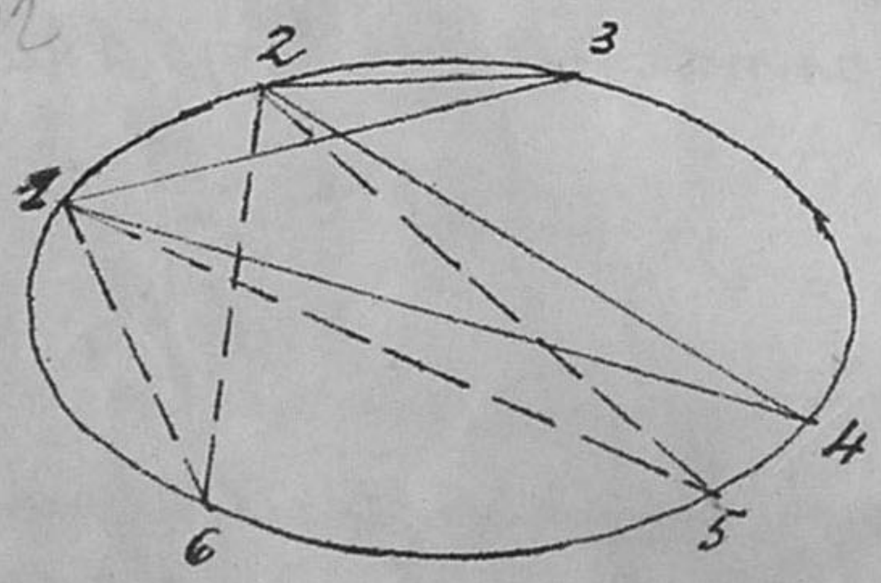
Ez a képlet fejezi ki Pappus tételét, mely szerint: ha a kúpszeleten felveszünk egy beírt négyszöget (1234), akkor a kúpszelet egy tetszésszerinti 5-ik pontjának a négyszög szembenfekvő oldalaitól való normális távolságainak szorzataiból alkotott háromszögek hasonlók, mert hisz ez a háromszög a tetszészerinti 6 pontra nézve is ugyanaz. Ez a tétel tehát kifejezi azt, hogy 5 és 6 egy kúpszeleten van.

Chasles tétele.

Fejezzük ki másképp, hogy 6 pont egy kúpszeleten van. A kúpszeletet úgy tekintjük, mint az 1, 2, 3, 4 pontokon átmenő kúpszeletsor egy tagját, mely kúpszeletsor egyenletét paraméteresen vakjuk össze az $\overline{14}.\overline{23}$ és $\overline{13}.\overline{24}$ függvényekből, tehát

$$\overline{14}.\overline{23} + \lambda\,\overline{13}.\overline{24} = 0$$

Legyen a mi kúpszeletünknek paramétere λ, s ezt a



k-t képzeljük beleolvasztva a második függvénybe úgy, hogy a paraméter (-1) legyen, ezzel természetesen nem változott a kúpszelet függvénye, s egyenlete lesz

$$\overline{14}.\overline{23} - \overline{13}.\overline{24} = 0$$

Ez tehát azon kúpszelet egyenlete, mely átmegy az 1, 2, 3, 4, 5, 6 pontokon. Minden pont, mely ezt az egyenletet kielégíti, pontja a kúpszeletnek. De ezt az egyenletet így is írhatjuk

$$\frac{\overline{13}}{\overline{14}} = \frac{\overline{23}}{\overline{24}} = \mu$$

$\frac{13}{14} - \mu = 0 \; ; \; 13 - \mu 14 = 0$

$\frac{23}{24} - \mu = 0 \; ; \; 23 - \mu 24 = 0$

a miből

$$\overline{13} - \mu\,\overline{14} = 0 \qquad 1.)$$

$$\overline{23} - \mu\,\overline{24} = 0 \qquad 2.)$$

De fordítva is áll, hogyha μ ezen két egyenletben ugyanaz a szám, akkor μ-t elimínálva a két egyenletből, az eredeti egyenletet kapjuk. Ez a két egyenlet tehát egyszerre ugyanazt fejezi ki, mint az eredeti, hogy 4.i. 1, 2, 3, 4 egy kúpszeleten van. Ha egy pont egyszerre kielégíti a két egyenletet, az rajta van a kúpszeleten. De ennek a két egyenletnek egyszerű geometriai jelentése van. Mindkettő „ugársort jelent, az elsőnek centruma 1, alapsugarai $\overline{13}$ és $\overline{14}$, a másodiknak centruma 2, alapsugarai $\overline{23}$ és $\overline{24}$. A változó sugár kettős arányszáma mindkettőben ugyanaz, tehát a két sugársor projectiv. De két megfelelő sugár metszéspontja kielégíti a két egyenletet egyszerre, tehát rajta van a kúpszeleten, és így mondhatjuk, hogy a kúpszelet két projectiv sugársor megfelelő sugarai metszéspontjainak geometriai helye. Legyen most μ_1 az 5

és μ_2 a 6-hoz tartozó kettős számszám (pozitív), akkor megalkotva $\frac{\mu_1}{\mu_2}$ hányadost, egyszer az 1.) azután a 2.) sugársorban, a kettő egyenlő egymással. De $\frac{\mu_1}{\mu_2}$ az 1.) sugársorban jeleni az $\overline{13}, \overline{14}, \overline{15}, \overline{16}$ sugarak kettős számszámát, vagyis közvetlen $\frac{\mu_1}{\mu_2} = (1, 3456)$ míg a ~~kettős~~ 2.) sugársorban $\frac{\mu_1}{\mu_2} = (2, 3456)$, tehát

$$(1, 3456) = (2, 3456)$$

Ez az Chasles féle tétel, mely szerint, ha a kúpszelet négy tetszésszerinti pontját annak két más pontjával összekötjük, a keletkező két sugárnégyes kettős számszáma ugyanaz. Ez a tétel azért igen fontos, mert a projektiv geometria ennek alapján csoportosítja a kúpszeleteket.

Carnot tétele.

Vegyünk fel a kúpszeleten hat pontot, s ezeket párosával kössük össze következőleg $\overline{12}, \overline{34}, \overline{56}$. Ez a három egyenes háromszöget alkot, melynek szögpontjai A, B, C. A Carnot tétele szerint ezen hat pontnak a három szögpontra vonatkozó bizonyos sorrendben vett egyszerű számszámainak szorzata 1. Ennek bebizonyítása végett válaszszuk (ABC)-t koordinátaháromszögnek s a súlypontját egységpontnak. Ebben a rendszerben legyen a kúpszelet egyenlete

$$f(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy = 0$$

Messük a kúpszeletet az $x = 0$ vagyis az alapegyenessel, a keresett pontok koordinátáit megkapjuk, ha az egyenlet-

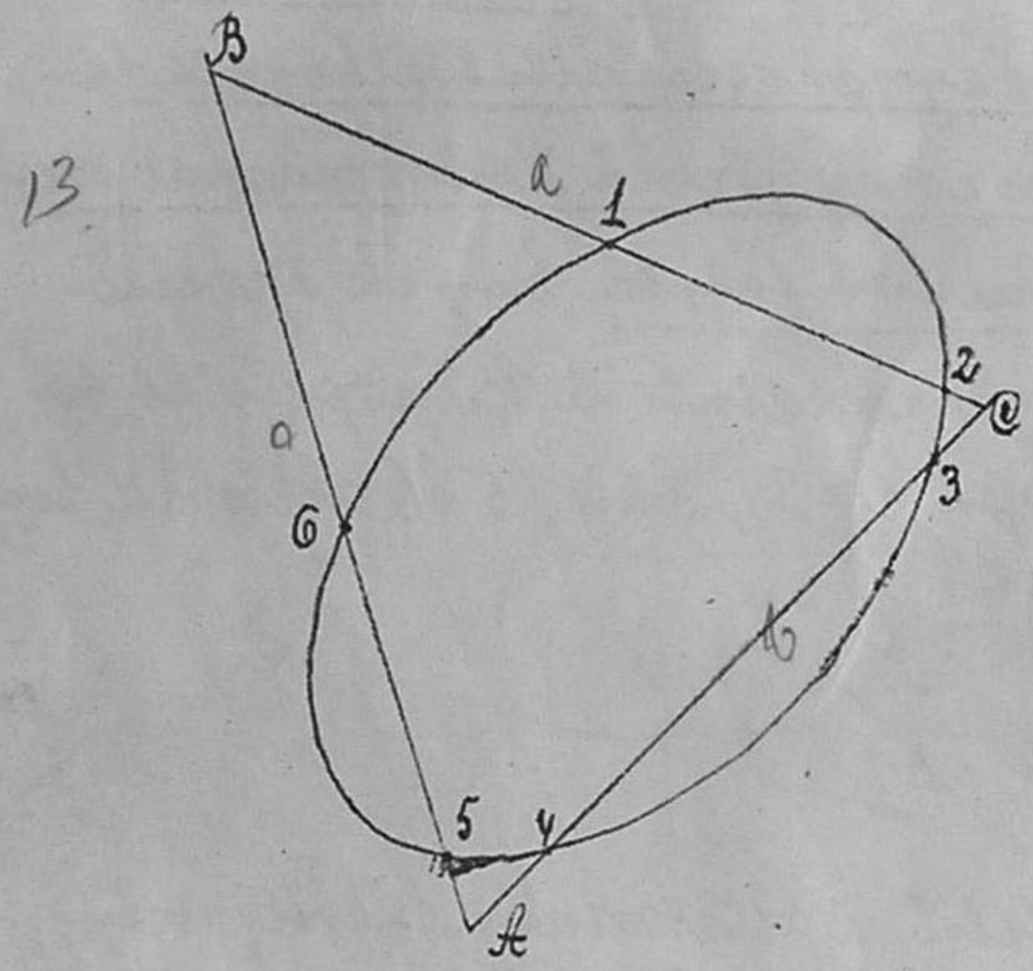
ben $x = 0$, marad

$$a_{22} y^2 + a_{33} z^2 + 2 a_{23} yz = 0$$ osztva $a_{33} y^2$-el lesz:

vagyis $$\frac{z^2}{y^2} + \frac{2 a_{23}}{a_{33}} \frac{z}{y} + \frac{a_{22}}{a_{33}} = 0$$

Ebből a kimetszett két pont $\frac{z}{y}$ coordinátahányadosa számára 2 értéket kapunk, s ezek jelentik a kimetszett pontoknak B és C alappontokra vonatkozó egyszerű arányszámait; s minthogy ezen két gyök szorzata az egyenlet szabadtagja, azaz $\frac{a_{22}}{a_{33}}$, következik, hogy

$$\frac{a_{22}}{a_{33}} = \frac{B1}{1C} \cdot \frac{B2}{2C} \quad 1)$$



Épen így ha az $y = 0$ alapegyenessel metszük a görbét, akkor az

$$a_{11} x^2 + 2 a_{13} xz + a_{33} z^2 = 0$$ osztva a_{11}

egyenletből a kimetszett 3 és 4 pont coordinátahányadosai számára adódik két érték, melyeknek szorzata $\frac{a_{33}}{a_{11}}$, tehát

$$\frac{a_{33}}{a_{11}} = \frac{C3}{3A} \cdot \frac{C4}{4A} \quad 2).$$

s végre a $z = 0$ harmadik alapegyenes által kimetszett 5 és 6 pont egyszerű arányszámaira nézve adódik az

$$a_{22} y^2 + 2 a_{12} xy + a_{11} x^2 = 0$$

egyenletből $$\frac{a_{11}}{a_{22}} = \frac{A5}{5B} \cdot \frac{A6}{6B} \quad 3)$$

összeszorozva az 1., 2. és 3. egyenletek megfelelő oldalait, kapjuk, hogy

$$\frac{B1}{1C}\cdot\frac{B2}{2C}\cdot\frac{C3}{3A}\cdot\frac{C4}{4A}\cdot\frac{A5}{5B}\cdot\frac{A6}{6B}=1$$

Tehát ha egy kúpszeletet három egyenessel metszünk, a kimetszett 6 pontnak a metsző egyenesek által alkotott háromszög szögpontjaira vonatkozó egyszerű arányszámai összeszorozva 1-et adnak. Ez a Carnot tétele. Ennek speciális esete az, midőn a három egyenes érinti a kúpszeletet, tehát 2-2 metszéspont összeesik, pl $1\equiv 2$, $3\equiv 4$, $5\equiv 6$, akkor áll, hogy

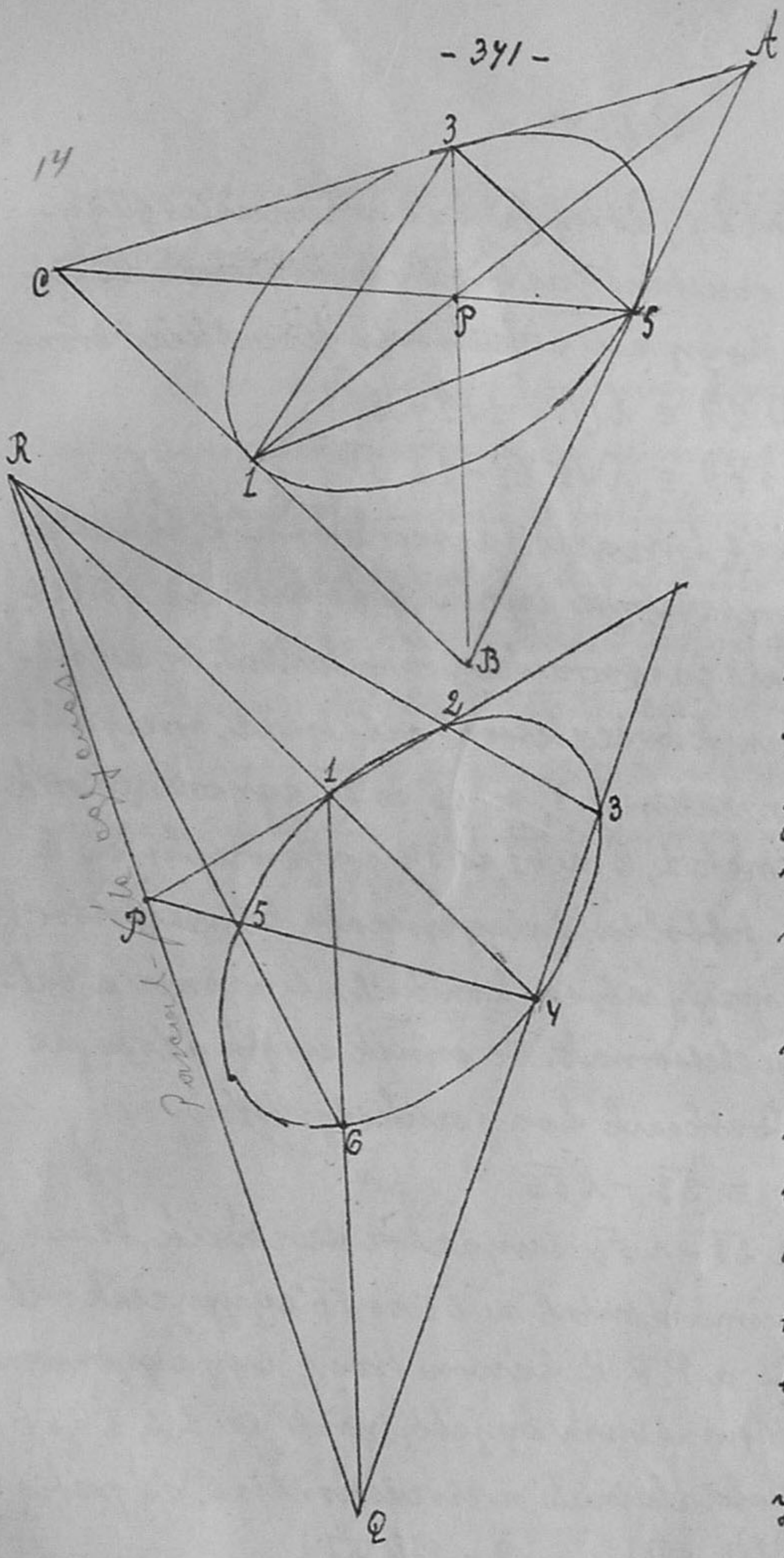
$$\left(\frac{B1}{1C}\right)^2\left(\frac{C3}{3A}\right)^2\left(\frac{A5}{5B}\right)^2=1$$

a miből

$$\frac{B1}{1C}\cdot\frac{C3}{3A}\cdot\frac{A5}{5B}=\pm 1$$

Hogy milyen a jegy arra megfelel a Menelaos tétele, melynek értelmében, ha 3 pont egyszerű arányszámainak szorzata -1, a három pont egy egyenesen fekszik; mivel pedig az 1, 3, 5 pontok nem fekszenek egy egyenesen, a szorzat szükségképen $+1$. De akkor a Ceva tételéből következik, hogy ha a 1.3.5 pontokat a háromszög szembefekvő szögpontjaival összekötjük, ezek az összekötő egyenesek egy pontban P-ben metszik egymást. Kapjuk tehát azt a tételt, hogy a kúpszeletekhez írt érintő háromszög és az érintési pontokból alkotott beírt háromszög perspectivek.

14



A Pascál féle tétel.

A negyedik nevezetes tétel, mely ugyancsak kifejezi, hogy 6 pont egy kúpszeleten van, a Pascal tétele. Tegyünk fel a kúpszeleten 6 pontot s tekintsük a kúpszeletet, mint egy tagját az 1, 2, 3, 4 pontokon átmenő kúpszeletsornak, melynek egyenlete így írható

$$\overline{12}.\overline{34} + \lambda\,\overline{14}.\overline{23} = 0$$

Képzeljük a mi kúpszeletünknek paramétereét behelyettesítve a második függvénybe úgy, hogy annak szorzója $+1$ legyen, akkor a kúpszeletes egyenlete így írható

$$\overline{12}.\overline{34} + \overline{14}.\overline{23} = 0$$

Ha pedig úgy tekintjük a kúpszeletet, mint a 45 61 pontokon átmenőt, akkor egyenlete így írható

$$\overline{45}.\overline{61} + \overline{14}.\overline{56} = 0$$

A két függvény tehát, mint egy és ugyanazon kúpszelet függvénye legfeljebb csak egy constans factorban ~~különbözik~~, különbözhetik egymástól, úgy hogy áll a ~~különbözés~~ következő identitás

$$\overline{12}.\overline{34} + \overline{14}.\overline{23} \equiv \lambda(\overline{45}.\overline{61} + \overline{14}.\overline{56})$$

vagyis

$$\overline{14}(\overline{23} - \lambda\overline{56}) \equiv \lambda\overline{45}.\overline{61} - \overline{12}.\overline{34}$$

A baloldali függvény két lineáris factorra bomlik, tehát a jobboldali függvény szintén másodrendű görbét, vagyis ennek is két lineáris factorra kell bomlania. De a jobboldali függvény egy olyan kúpszeletsort értelmez, mely átmegy a $\overline{45}$ és $\overline{12}$ egyeneseknek P, a $\overline{45}$ és $\overline{34}$ egyeneseknek 4, a $\overline{61}$ és $\overline{12}$ egyeneseknek 1, s a $\overline{61}$ és $\overline{34}$ egyeneseknek Q metszéspontján. Tehát a jobboldali degenerált kúpszeletsor az 1, 4, P, Q pontokon megy át, ezeken kell átmennie a baloldali degenerált kúpszeletsornak. De ennek egyik része az $\overline{14}$ egyenes, a miből következik, hogy szükségképpen

$$\overline{PQ} \equiv \overline{23} - \lambda\overline{56}$$

vagyis a $\overline{PQ}$ egyenes a $\overline{23} - \lambda\overline{56}$ sugársorhoz tartozik, tehát átmegy annak R centrumán, mint a $\overline{23}$ és $\overline{56}$ egyenesek metszéspontján, más szóval a P, Q, R három pont egy egyenesen fekszik. De az a három pont nem egyéb, mint az 1, 2, 3, 4, 5, 6 hatszög szembenfekvő oldalainak metszéspontjai, és pedig

$$R \equiv (\overline{23}, \overline{56}) \quad , \quad P \equiv (\overline{12}, \overline{54}) \quad , \quad Q \equiv (\overline{34}, \overline{61}).$$

Ez a Pascal tétele, mely szerint ha felveszünk egy kúpszeletben hat pontot, s ezeket bizonyos sorrendben kösszük össze, a keletkező hatszög szembenfekvő oldalainak ha-

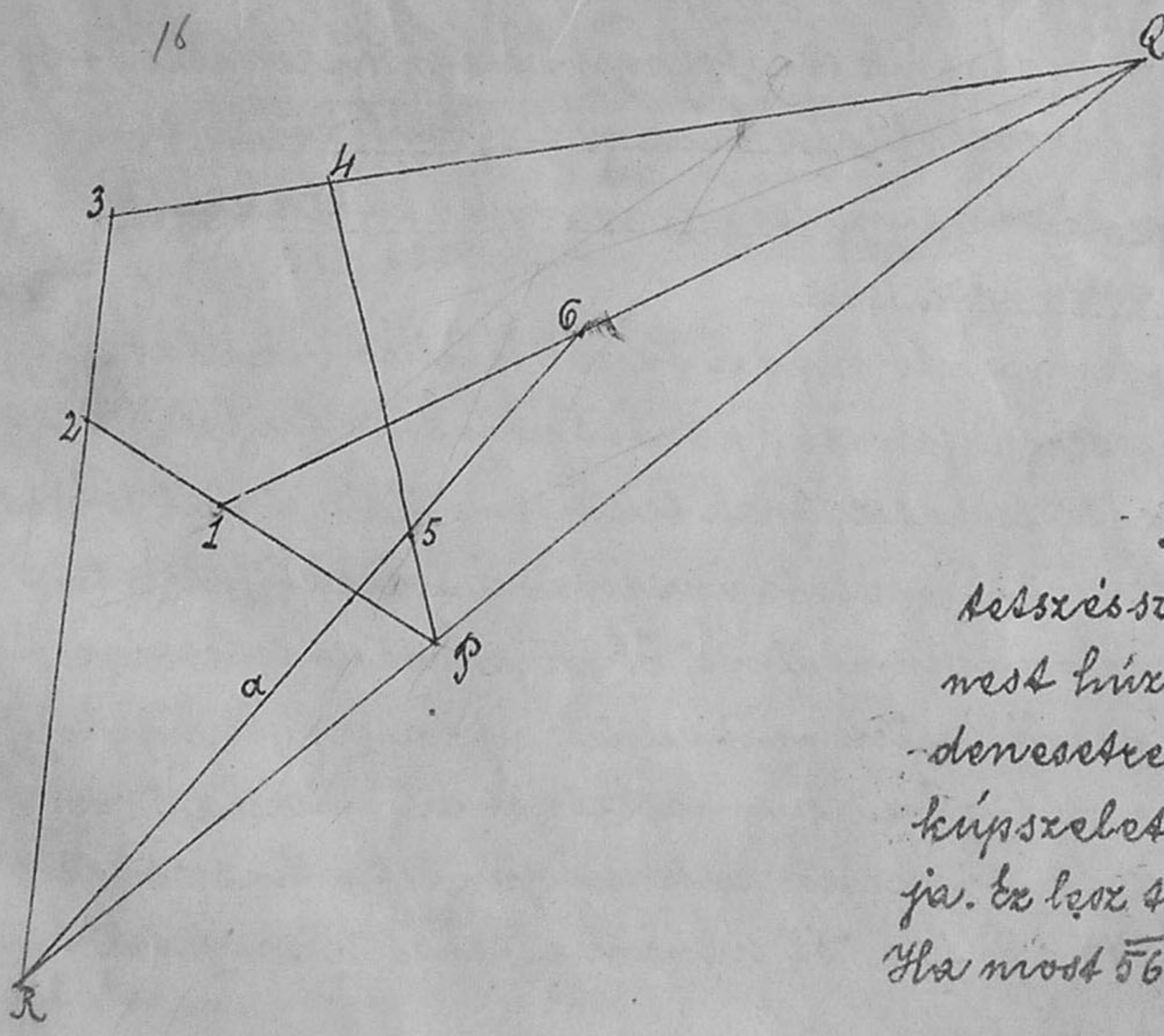
nem metszéspontja egy egyenesen fekszik, ez az ugynevezett Pascal féle egyenes

---

Ez a négy tétel tehát ugyanazt fejezi (ki), hogy 4. i. hat pont egy kúpszeleten van. Mind a négyet kitudjuk fejezni a hat pont koordinátáival, a miből nyilvánvaló, hogy ezen négy különbönböző egyenlet között kell lennie valami kapcsolatnak. Ezt a kapcsolatot Klumpadi fenő-mutatta ki.

313 * A négy tétel közül Pascál tétele legalkalmasabb arra, hogy 5 pontból a kúpszeletet, illetőleg annak akárhány uj pontját meg tudjuk szerkeszteni. Az eljárás a következő:

16



Legyen adva az 1, 2, 3, 4 5 pont, melyek közül 3-3 nem fekszik egy egyenesen, szerkesztendő egy hatodik pont.

Az 5 ponton át egy tetszés szerinti α egyenest húzunk, ezen mindenesetre fog feküdni a kúpszelet egy ujabb pontja. Ez lesz tehát az $\overline{56}$ egyenes. Ha most $\overline{56}$ és $\overline{23}$-nak R met-

$\overline{12}$ és $\overline{45}$-nek P metszéspontjával, ezen PR egyenesnek a $\overline{34}$ egyenessel való Q metszéspontját az 1 ponttal összekötő egyenes kimetszi az Q egyenesből a keresett 6 pontot. Az egész eljárásban a Pascal féle tételt alkalmaztuk. Ha az Q egyenest az 5 pont körül forgatjuk a rajtavaltozó 6 pont leirja a kúpszeletet. Érdekes utánanézni, hogy az Q egyenesnek az 5 pont körüli forgásánál az (RQ6) háromszögből mi változik és mi marad fix. Látható, hogy a mig R 6 forog az 5 pont körül, addig Q 6 forog az 1 pont körül, az R Q oldal pedig a fix P pont körül forog. Tehát a háromszög mindegyik oldala forog egy-egy fix pont körül, De a mellett az R szögpont mindig a fix $\overline{23}$ egyenesen, a Q szögpont mindig a fix $\overline{34}$ egyenesen mozog. Kondhatjuk tehát, hogy ha egy háromszög úgy változik, hogy három oldala három fix pont körül forog, két szögpontja két fix egyenesen mozog, akkor a harmadik szögpont leir egy kúpszeletet.—

Megjegyzendő még a Pascal tételére vonatkozólag, hogy a tételszésszerint felvett 6 pontot nem csak egyféleképen lehet Pascálfele hatszögnek tekinteni. Ha a 6 pont sorrendjét, melyben azokat egymásután párosával összekötjük, minden lehető módon permutáljuk, 6! permutatio lehetséges; de a cyclicus permutatiok nem adnak uj hatszöget, ugyhogy 6-6 sorrend mindig csak egy hatszöget ad, marad 5! sorrend, de ezek közül is kettő-kettő ugyanazt a hatszöget adja, pl 123456 és 165432 ugyanaz, tehát lényegesen kü-

lönböző határszög $\frac{5!}{2} = 60$ lehetséges. A kúpszeletnek hat pontját tehát 60 féleképpen lehet felfogni, mint Pascál határszöget, minek megfelelőleg 60 féle Pascal egyenes létezik.—

A duál tételek.

Az előbbi négy tétel dual tételeit nyerjük, ha megadjuk egy kúpszeletnek 6 érintőjét és keressük az ezek-közt fennálló kapcsolatot.

Ha a vonalakból szerkesztendő kúpszelet számára 4 lineáris adatunk van, ez még nem határozza meg teljesen a kúpszeletet, mert a kúpszeleteknek egyszerűen végtelen nagy sokasága kielégíti érintőivel ezt a 4 adatot. De ezeket a kúpszeleteket egyszerűen összefoglalhatjuk egy egyenletben. A 4 lineáris egyenletből képzeljük kiszámítva határozhatjuk 4 coefficienst, mint a másik kettő függvényét. Behelyettesítve ezeket a kúpszelet vonalcoordinátás függvényébe, ez a két coefficiensben lineáris és homogén lesz, osztva egyik coefficienssel, ilyen alakban adódik a kúpszelet egyenlete

$$F + \lambda G = 0$$

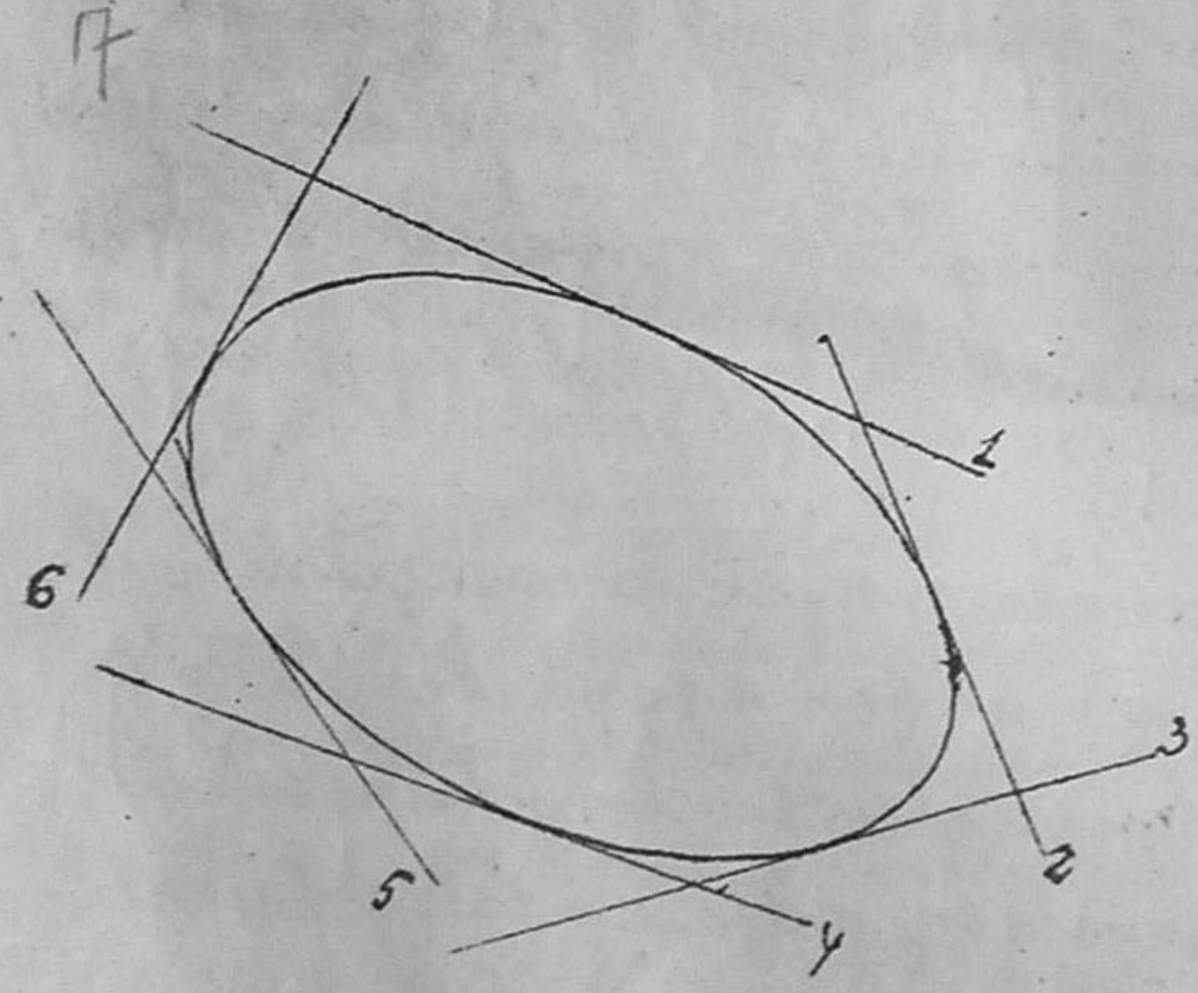
ez azon kúpszeletek egyenlete, melyek kiegészítik a 4 lineáris adatot. F és G az u, v, w-ben négyzetes és $F = 0$ a $\lambda = 0$, $G = 0$ a $\lambda = \infty$ paraméterhez tartozó kúpszeletet, ezeknek paraméteres kapcsolata adja az összes kúpszeleteket. Ha tehát 4 lineáris adatunk van egy kúpszelet szá-

mára, nyerjük az összes kielégítő összes kúpszeleteket, ha 2 speciális kúpszeletet paraméteresen kapcsolunk. Legyen adva pl. 4 egyenes, mint a kúpszelet 4 érintője; 1, 2, 3, 4. akkor az $\hat{12}$ metszéspont lineáris függvényét szorozva az $\hat{34}$ metszéspont lineáris függvényével, ez az $\hat{12}.\hat{34} = 0$ négyzetes egyenlet egy degenerált kúpszelet, melyet érint mind a négy egyenes; ilyen az $\hat{14}.\hat{23}$ degenerált kúpszelet is. Tehát a 4 egyenest érintő kúpszeletsor egyenlete

$$\hat{12}.\hat{34} + \lambda\,\hat{14}.\hat{23} = 0$$

Pappus tételének duálja.

Adva van a kúpszeletnek 6 érintője, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Fejezzük ki, hogy ezek egy kúpszelethez tartoznak. Ha úgy tekintjük a kúpszeletet, mint az 1, 2, 3, 4 érintőkhöz tartozót,



egyenlete így írható

$$\hat{12}.\hat{34} + \lambda\,\hat{14}.\hat{23} = 0$$

a hol λ éppen az a kúpszeletünkhöz tartozó paraméter. Megjegyzendő, hogy ama négy pont Plücker féle függvény alakja venendő. Minthogy 5 is érintő, azért $u_5\, v_5\, w_5$ koordinátái kielégítik az egyen-

lesz. De ha az 5 érintő távolsága az $\widehat{12}, \widehat{34}, \widehat{14}.\widehat{23}$ pontoktól megfelelőleg $p_{12}, p_{34}, p_{14}, p_{23}$, akkor az $\widehat{12}$ értéke az 5 koordinátái mellett annyi mint $p_{12}\sqrt{u_5^2+v_5^2}$, ugyanigy a többi pontfüggvény, áll tehát, hogy

$$(u_5^2+v_5^2)p_{12}\cdot p_{34}+\lambda(u_5^2+v_5^2)p_{14}\cdot p_{23}=0$$

a miből

$$-\lambda=\frac{p_{12}\cdot p_{34}}{p_{14}\cdot p_{23}}$$

Ha a 6 érintőnek a fenti 4 ponttól való normalis távolságai $q_{12}, q_{34}, q_{14}, q_{23}$, akkor épenigy

$$-\lambda=\frac{q_{12}\cdot q_{34}}{q_{14}\cdot q_{23}}$$

tehát

$$\frac{p_{12}\cdot p_{34}}{p_{14}\cdot p_{23}}=\frac{q_{12}\cdot q_{34}}{q_{14}\cdot q_{23}}$$

Ha tehát felveszünk a kúpszeleten egy körülírt négyszöget és megalkotjuk a kúpszeletnek egy tetszőlegesi 5-ik érintőjének normális távolságait a négyszög szögpontjaitól, akkor a szembefekvő szögpontoktól vett távolságok szorzatainak hányadosa állandóan ugyanaz, bármint vegyük felar 5-ik érintőt.

Chasles tételének duálja.

Tekintsük az 1, 2, 3, 4, 5, 6 érintőkkel megadott kúpszeletet ugy, mint az 1, 2, 3, 4 érintőkhöz tartozó kúpszeletsor egy tagját, amelynek egyenlete

$$\widehat{13}.\widehat{24}+\lambda\widehat{14}.\widehat{23}=0$$

A mi kúpszeletünk paraméterét képzeljük beleolvasztva a második függvénybe úgy, hogy ennek coefficiense (−1) legyen. Tehát a mi kúpszeletünk egyenlete legyen

$$\hat{13}.\hat{24} - \hat{14}.\hat{23} = 0$$

Minden egyenes, mely kielégíti ezt az egyenletet, érinti a kúpszeletet. De ez az egyenlet így is írható

$$\frac{\hat{13}}{\hat{14}} = \frac{\hat{23}}{\hat{24}} = \mu$$

vagyis

$$\hat{13} - \mu\hat{14} = 0$$
$$\hat{23} - \mu\hat{24} = 0$$

Ha μ a két egyenletben ugyanazt a paramétert jelenti, akkor a két egyenletet egyszerre kielégítő egyenes érintője a kúpszeletnek. De ez a két egyenlet egyszerű geometriai jelentéssel bír. Mindkettő pontsort jelent. Az elsőnek tartója az $(\hat{13}.\hat{14})$ egyenes, tehát az 1 érintő, a másodiknak tartója a 2 érintő, s mivel mindkettőben a megfelelő elemek μ coordinátája ugyanaz, a két pontsor projectiv. S mivel a megfelelő pontok összekötő egyenese érinti a kúpszeletet, mondhatjuk, hogy két projectiv pontsor megfelelő pontjainak összekötő egyenesei egy kúpszeletet burkolnak. Legyen most az 5 és 6 érintőhöz tartozó paraméter μ_5 illetőleg μ_6, akkor az első pontsorból következik, hogy

$$\frac{\mu_5}{\mu_6} = (1,3456)$$

vagyis azon 4 pont kettős arányszáma, melyet az 1 érintőből kimetsz a 3456 érintő. Épen így a második pontsorból

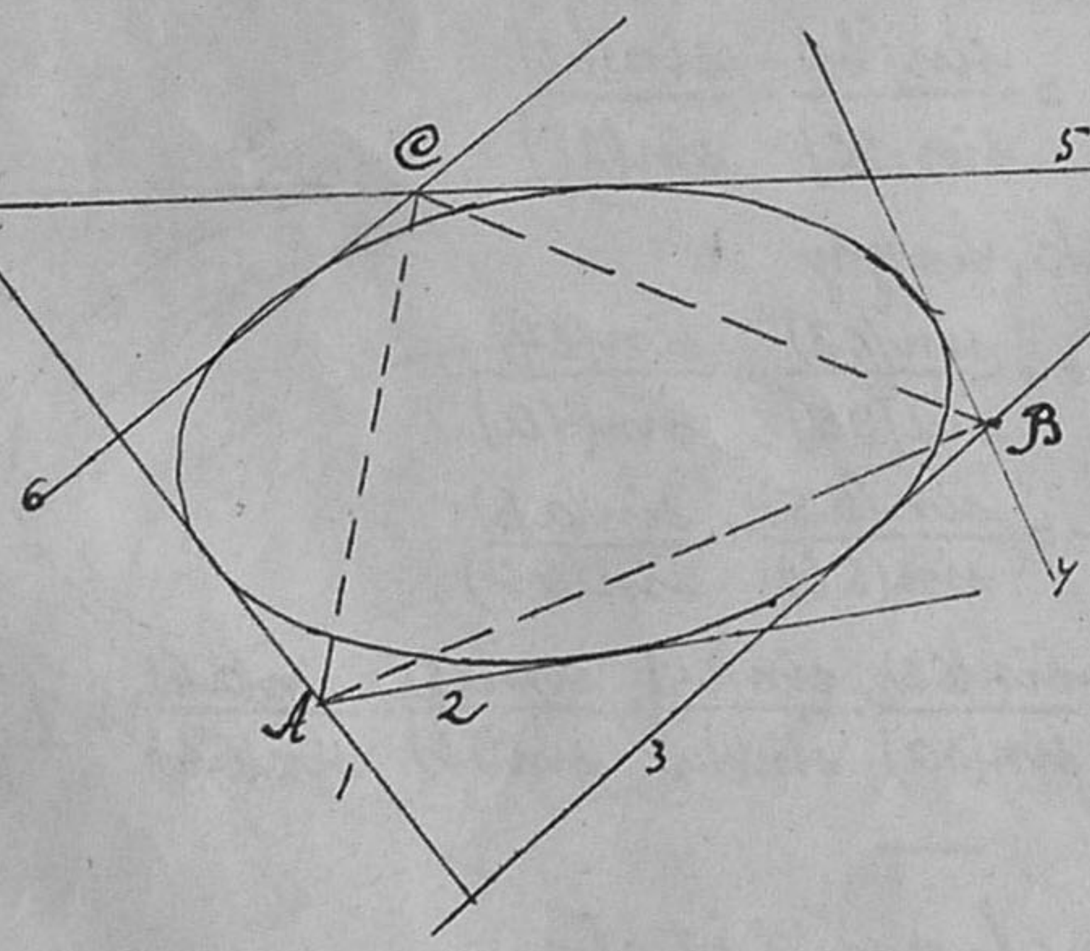
$$\frac{\mu_5}{\mu_6} = (2,3456)$$

tehát $(1,3456) = (2.3456)$

Ez a Chasles tételének analagonja, mely szerint ha a kúpszelet két érintőjét más négy érintővel metszük, akkor a keletkező 4-4 pont kettős arányszámai egyenlők. A projectiv geometria ezen tétel alapján tárgyalja a kúpszeleteket.

Carnot tételének analagonja.

Adva van a kúpszelet 6 érintője. Az $\hat{12}, \hat{34}, \hat{56}$ metszéspontok egy háromszöget alkotnak, melynek szögpontjai megfelelőleg A, B, C. Válásszuk ABC-t koordináta háromszögnek, s egységpontnak a háromszögbe irható kör centrumát. Tudjuk, hogy ilyen koordináta rendszerben egy P pont x koordinátája jelenti a pont normális távolságát az a oldaltól, így az y és z koordináta jelenti a P pont normális távolságát a b, illetőleg a c oldalsól. Az (u, v, w) egyenes egyenlete



$$e \equiv ux + vy + wz = 0$$

Ha az egyenes átmegy a A alappronton, $u = 0$, tehát

egyenlete
a miből

$$vy + wz = 0 \,,$$

$$\frac{w}{v} = -\frac{y}{z} = -\frac{\sin(bo)}{\sin(oc)}$$

szögpanily egyszerű szárámszám jelentése van a többi vonalkoordináta hármasoknak. Legyen most a mi rendszerünkben a 6 érintővel adott kúpszelet egyenlete

$$A_{11}u^2 + A_{22}v^2 + A_{33}w^2 + 2A_{23}vw + 2A_{31}wu + 2A_{12}uv = 0$$

Vegyük ezen kúpszelet érintői közül azokat, melyek átmennek a A ponton. Az egyenletben $u=0$ írva, kapjuk $\frac{w}{v}$ számára a következő négyzetes egyenletet

$$A_{33}\frac{w^2}{v^2} + 2A_{23}\frac{w}{v} + A_{22} = 0$$

Ebből $\frac{w}{v}$ számára két érték adódik s ezek jelentik az A ponton átmenő 1 és 2 érintők egyszerű szárámszámait b és c alapegyenesekre, s miután szorzatuk annyi mint az egyenlet szabadtagja $\frac{A_{22}}{A_{33}}$, következik hogy

$$\frac{A_{22}}{A_{33}} = \frac{\sin(b1)}{\sin(1c)} \cdot \frac{\sin(b2)}{\sin(2c)}$$

Analóg módon következik, hogy

$$\frac{A_{33}}{A_{11}} = \frac{\sin(c3)}{\sin(3a)} \cdot \frac{\sin(c4)}{\sin(4a)}$$

és

$$\frac{A_{11}}{A_{22}} = \frac{\sin(a5)}{\sin(5b)} \cdot \frac{\sin(a6)}{\sin(6b)}$$

Tehát $\frac{\sin(b1)}{\sin(1c)} \cdot \frac{\sin(b2)}{\sin(2c)} \cdot \frac{\sin(c3)}{\sin(3a)} \cdot \frac{\sin(c4)}{\sin(4a)} \cdot \frac{\sin(a5)}{\sin(5b)} \cdot \frac{\sin(a6)}{\sin(6b)} = 1$

Brianchon tétele.

Brianchonból ered Pascal tételének analogonja.

Legyen adva a kúpszelet 6 érintője által s tekintsük a kúpszeletet úgy, mint az 1, 2, 3, 4 érintőkhöz tartozó kúpszeletsor egyik tagját, melynek egyenlete

$$\hat{12}.\hat{34} + \lambda\hat{14}.\hat{23} = 0$$

A mi kúpszeletünk λ paraméterét olvasszuk bele a második függvénybe, úgy, hogy ennek szorzója 1 legyen, tehát az egyenlet

$$\hat{12}.\hat{34} + \hat{14}.\hat{23} = 0$$

Ha úgy tekintjük a kúpszeletet, mint a 4561 érintőkhöz tartozót, akkor egyenlete

$$\hat{45}.\hat{61} + \hat{14}.\hat{56} = 0$$

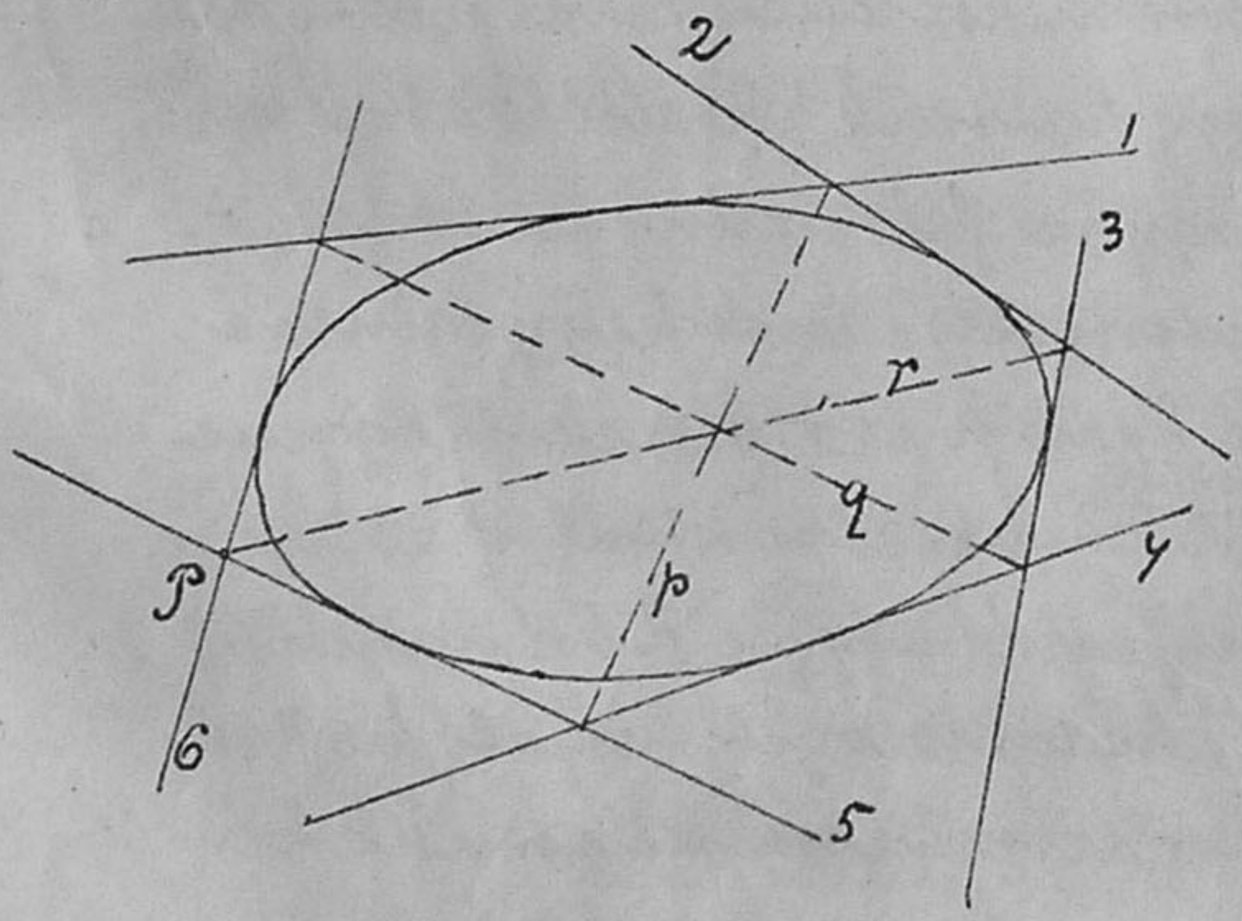
Ez a két függvény tehát, csak egy constans factorban különbözhetik egymástól, vagyis kell léteznie a következő identitásnak

$$\hat{12}\cdot\hat{34} + \hat{14}\cdot\hat{23} \equiv \lambda(\hat{45}.\hat{61} + \hat{14}.\hat{56})$$

a mi így is írható

$$\hat{14}(\hat{23} - \lambda\hat{56}) \equiv \lambda\hat{45}.\hat{61} * -\hat{12}.\hat{34}$$

19



A baloldali négyzetes függvény két lineáris pontsorból áll, tehát a jobboldali függvény is degenerált kúpszeletet ér. 1 pont 1 1 20

telenez, melyet érint a $(\hat{45}, \hat{12}) \equiv p$, $(\hat{45}, \hat{34}) \equiv 4$, $(\hat{61}, \hat{12}) \equiv 1$ és $(\hat{61}, \hat{34}) \equiv q$ érintő. Minthán tehát az $\hat{14}$ lineáris factor benfog-

haltatik a jobboldali függvényben, következik, hogy a másik lineáris faktor

$$p\hat{q} \equiv 2\hat{3} - 5\hat{6}$$

vagyis a $p\hat{q}$ metszéspont rajta van a $2\hat{3}$ és $5\hat{6}$ pontok összekötő egyenesén r-en, tehát pqr egy pontban metszik egymást. De pqr nem egyébb, mint az 123456 érintők által alkotott hatszög szembenfekvő szögpontjait összekötő három egyenes és pedig $p \equiv (\hat{12}, \hat{45})$, $q \equiv (\hat{61}, \hat{34})$, $r \equiv (\hat{23}, \hat{56})$.

Ez a Brianchon tétele, mely szerint, ha a kúpszelet hat érintőjét bizonyos sorrendben hatszögnek tekintjük, ezen hatszög szembenfekvő szögpontjainak összekötő egyenesei egy pontban metszik egymást. Hat egyenest 60 félekképen lehet felfogni mint egy hatszög oldalait és így a kúpszeletnek 60 Brianchon féle pontja adódik. Ez a Brianchon féle configuratio, dualisztikusan megfelel a Pascal féle configurationak.—

A Brianchon tétele legalkalmasabb arra, hogy megszerkesszük az 5 érintővel adott kúpszeletet. Tehát adva van az 12345 érintő, szerkesztendő egy hatodik. Az előbbi ábra szemléltetésével nyilvánvaló, hogyha felveszünk az ötödik érintőn egy pontot P, ebből mindenesetre indul egy érintő a kúpszeletnek, s ezt megkapjuk ha a p és r összekötő egyenesek metszéspontját q által összekötjük a 34 metszéspontnak, q abban a pontban metszi az 1 érintőt, melyen átmegy a P-ből induló 6 érintő. Szemügyre véve a (qr6) háromszöget, látható, ha P végighalad az 5 egyenesen, akkor ezen háromszög másik két

szögpontja és egy-egy fix egyenesen mozog t.i. a (qr) pont a p egyenesen, a (q6) pont az 1 érintőn. Továbbá az r oldal forog a $\widehat{23}$ pont körül, az q a $\widehat{34}$ körül, úgy mondhatjuk, hogy ha egy háromszög egy változik, hogy három szögpontja egy-egy fix egyenesen mozog, két oldal egy-egy fix pont körül forog, akkor a harmadik oldala egy kúpszeletet burkol.-

Két kúpszelet kölcsönös helyzete.

Közös pontok.

Tegyünk fel két kúpszeletet

$$f(x,y,z) = a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{23}yz+2a_{31}zx+2a_{12}xy = 0$$
$$g(x,y,z) = b_{11}x^2+b_{22}y^2+b_{33}z^2+2b_{23}yz+2b_{31}zx+2b_{12}xy = 0$$

Feltesszük, hogy mindkét kúpszelet igazi kúpszelet, ezen determinánsunk nem nulla. Határozzuk meg ezen kúpszeletek közös pontjait. Kétféle módszerünk van. Rendezzük mindkét egyenletet x hatványai szerint

$$f(x,y,z) = a_{11}x^2+2(a_{12}y+a_{13}z)x+a_{22}y^2+2a_{23}yz+a_{33}z^2 = 0$$
$$g(x,y,z) = b_{11}x^2+2(b_{12}y+b_{13}z)x+b_{22}y^2+2b_{23}yz+b_{33}z^2 = 0$$

Legyenek $x^2\ x^1\ x^0$ coefficienseik megfelelőleg A_0, A_1, A_2, illetőleg B_0, B_1, B_2. A két egyenletnek közös gyöke van, ha resultánsunk eltűnik, tehát ha

$$\begin{vmatrix} (10) & (20) \\ (20) & (21) \end{vmatrix} = (A_1B_0-A_0B_1)(A_1B_1-A_1B_0)-(A_1B_0-A_0B_1)^2 = 0$$

ez pedig y és x-ben negyedfokú egyenlet, tehát $\frac{y}{x}$ számára négy érték adódik, s ha ezeket beteszszük a két egyenletbe, ugyg közös x értéket kapunk, tehát a két kúpszeletnek négy közös pontja van, beleszámítva természetesen a képzetes eseteket is, melyek kettesével mindig conjugáltak.

A másik módszer a következő. Azok a pontok, melyek f és g-t egyszerre nullá teszik rajta vannak az $f+\lambda g = 0$ kúpszeleten is. Ha λ változó paraméter, ez az egyenlet olyan kúpszeletsort értelmez, mely átmegy az f és g kúpszeletnek 4 közös pontján, tehát ha kiragadunk ebből a sorból két esetszerűleges kúpszeletet

$$f+\lambda_1 g = 0 \quad \text{és} \quad f+\lambda_2 g = 0$$

ezek nyilvánvalóan a négy metszéspontot adják, mint f és g. Mert ha ez a két egyenlet egyszerre fennáll akkor a

$$(\lambda_1-\lambda_2) g = 0 \quad \text{és} \quad (\lambda_1-\lambda_2) f = 0$$

vagyis az eredeti egyenlet is teljesül. Most λ_1 és λ_2-őt úgy határozzuk meg, hogy ez a két kiragadott kúpszelet egy-egy egyenespárrá degenerálódjék, akkor ez a négy egyenes fogja szolgáltatni a 4 metszéspontot. De láttuk, hogy az $f+\lambda g = 0$ kúpszelet egyenesekké degenerálódik, ha determinánsa eltűnik

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}+\lambda b_{11} & a_{12}+\lambda b_{12} & a_{13}+\lambda b_{13} \\ a_{21}+\lambda b_{21} & a_{22}+\lambda b_{22} & a_{23}+\lambda b_{23} \\ a_{31}+\lambda b_{31} & a_{32}+\lambda b_{32} & a_{33}+\lambda b_{33} \end{vmatrix} = 0$$

Ha ezt a determinánst, mely λ-nak függvénye, kifejtjük

egy λ-ban harmadfoku egyenletet kapunk, melyben λ^3 coefficiense ax a harmadfoku determinans, mely adódik, ha ezen determinansnak összegezendőbe való felbontásánál mindegyik oszlopból a másodikat elemeket veszszük, tehát

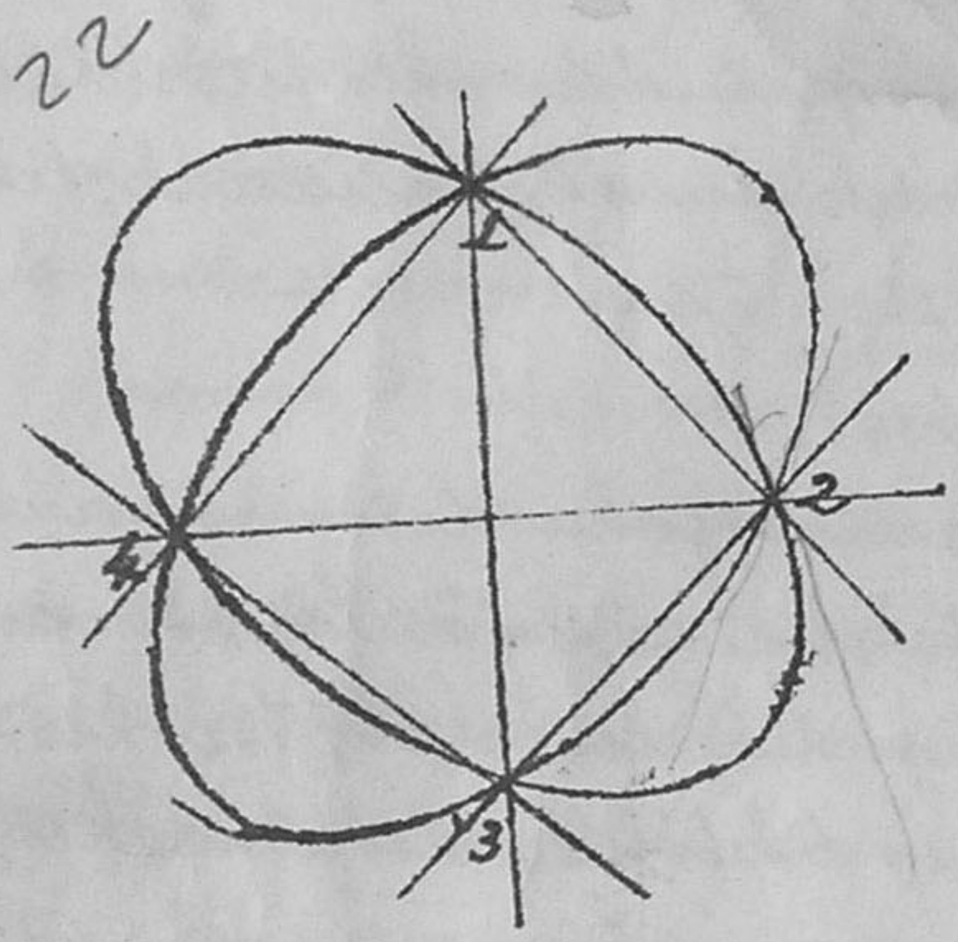
$$B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{31} & b_{33} \end{vmatrix}$$

A λ^2 coefficiense három harmadfoku determinans összege, $B_1 + B_2 + B_3$; a B_1 adódik, ha az első oszlopból veszszük az első, a 2-ik és 3-ikból a második elemeket, B_2-hez az 1. és 3-ikból a második, a másodikból az első elemeket, s B_3-hoz az 1-ső és 2-ik oszlopból veszszük a másodikat, a harmadikból az első elemeket. λ együtthatója szintén három harmadfoku determinans összege, $A_1 + A_2 + A_3$, melyek épugy adódnak, mint az előbbi három determinans, csakhogy az első és második elemek szerepet cserélnek, végre a szabadtag nem egyébb, mint az f kúpszelet determinánsa A_1, tehát az egyenlet

$$B\lambda^3 + (B_1 + B_2 + B_3)k^2 + (A_1 + A_2 + A_3)\lambda + A = 0$$

ebből az λ számára három értéke adódik λ_1 λ_2 és λ_3, tehát az $f + \lambda g = 0$ kipozeletsornak három degenerált tagja van. Ez a három egyenespár nem egyébb, mint a négy metszéspont által meghatározott teljes négyszög 6 oldala. Miután két egyenespár már teljesen meghatározza a 4 metszéspontot, elég a harmadfoku determinánsegyenletnek csak két gyökét meghatározni s az ezekhez tartozó két

egyenespárt.



lennek a második módszernek az az előnye, hogy (előnyei) segélyével felkeresheljük az összes lehetőségeket, s azoknak analytikai ismertető jeleit. Mielőtt ehhez hozzáfognánk, jó lesz néhány szót szólani a képzetes egyenesekről és pontokról.

Egy képzetes egyenes analytikai kifejezése oly pontes-ordinatás elsőfoku egyenlet, melynek coefficientsei képzetesek. Felbontva a függvényt reális és képzetes részére, a képzetes egyenes egyenlete ilyen alaku

$$e_1 + e_2 i = 0$$

a hol e_1 és e_2 külön-külön reális coefficiensekkel biró függvény. Mindig létezik egy, de csakis egy reális pont, mely ezen egyenletnek eleget tesz, t.i. az, mely mellett $e_1 = 0$ és $e_2 = 0$ egyenletek egyszerre teljesülnek. A két egyenlet lin. és homogén a pontecoordinatákban, és igy csak egy megoldás van. Igazi képzetes egyenesnél nem fordulhat elő az, hogy $e_1 = 0$ és $e_2 = 0$ függési viszonyban legyen, mert ha $e_2 = \lambda e_1$, akkor az eredeti egyenlet $e_1 + \lambda e_1 i = (1+\lambda i) e_1 = 0$ vagyis $e_1 = 0$, de ez már reális egyenes. Tehát igazi képzetes e-

egyenesnek csak egy reális pontja van. Ez a pont egyszersmind rajta van az $e_1 - e_2 i = 0$ coniugált egyenesen is, mert ennek nagyanya a képzetes és reális része. Tehát két coniugált complex egyenesnek egy reális metszéspontja van.

Összeszorozva ezen két coniugált egyenes függvényét

$$(e_1 + e_2 i)(e_1 - e_2 i) = e_1^2 + e_2^2 = 0$$

tehát egy reális négyzetes egyenlet adódik, s ez oly képzetet jelent, mely felbomlik két coniugált complex egyenesre.

Képzetes pont analytikai kifejezője oly pontcoordinátás első fokú egyenlet, melynek coefficienssei képzetesek, az egyenlet tehát ilyen alakú

$$P_1 + i P_2 = 0$$

a hol P_1 és P_2 reális coefficiensekkel bíró függvények. Nyilvánvaló, hogy létezik egyetlen egy reális egyenes, mely átmegy ezen a képzetes ponton, s ennek coordinatai adódnak a $P_1 = 0$ és $P_2 = 0$ két homogen lin. egyenletből. Ez a két egyenes igazi képzetes egyenes esetén független egymástól, mert különben, ha $P_2 = \lambda P_1$, az egyenes egyenlete

$$P_1 + \lambda i P_2 = (1 + \lambda i) P_2 = 0 \text{ azaz } P_2 = 0$$

tehát reális pont. Tehát igazi képzetes ponton keresztül csak egy reális egyenes halad. Ez nyilvánvalóan átmegy a $P_1 - P_2 i$ coniugált ponton is, mert ennek nagyanya a reális és képzetes része. A két coniugált függvény szorzata

$$(P_1 + i P_2)(P_1 - i P_2) = P_1^2 + P_2^2$$

reális négyzetes függvényt ad, mely tehát olyan képzetet ábrázol, mely két két

coniugált pontra. Ilyen két coniugált pont a két végtelen távoli képzetes körpont 1, i, 0, és 1, -i, 0, függvényeik

$$u + vi \quad \text{és} \quad u - vi$$

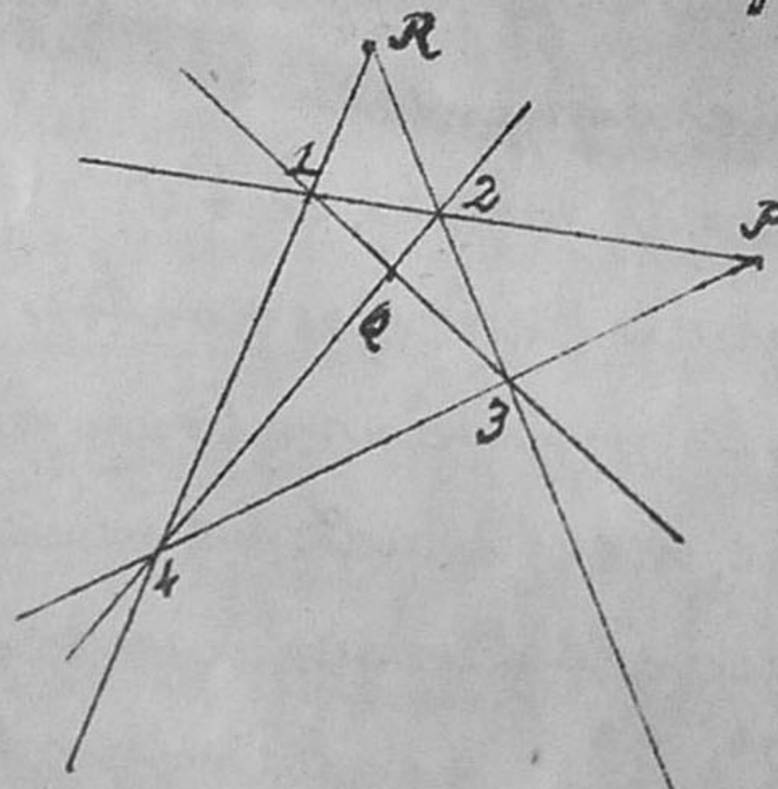
szorzatuk $u^2 + v^2 = 0$ tehát olyan kúpszeletet ír-selnünk, mely szétesik ezen a két pontra, vagyis ez a végtelen távoli képzetes körpontok egyenlete.

Összefoglalva: minden képzetes egyenesen van egy reális pont, s ezen keresztül megy a coniugált egyenes is; minden képzetes ponton keresztül megy egy reális egyenes, s ezen rajta van a coniugált pont is.

Ezek után áttérünk a két kúpszelet közös pontjaira vonatkozó összes lehető eseteket s azoknak analytikai ismertető jeleit. A négy metszéspont lehet: valamennyi reális, valamennyi képzetes, kettő reális, kettő képzetes, végre kettő, vagy három vagy mind a négy egy helyre is eshetik.

1.) Tegyük azt az esetet, midőn a négy metszéspont reális és különböző. Általán 3-3 nem fekszik egy egyenesen 4 metszéspont háromféleképen köthető össze két-két egyenessel vagyis, a mi ugyanazt mondja, a $D(\lambda) = 0$ egyenletnek három reális és különböző gyöke van: $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. –

23



2.) Ha a négy metszéspont 1, 2, 3, 4 valamennyi képzetes,

milyen lesz akkor $D(\lambda) = 0$ három gyöke? Tegyük fel, hogy 1 és 2 az egyik, 3 és 4 a másik conjugált pontpár és nézzük, milyenek lesznek az egyenespárok. Két conjugált complex pont összekötő egyenese reális, tehát (12) és (34) egyenesek reálisak s így függvényeik $f + \lambda g = 0$ alakú szorzásában λ reális, tehát $D(\lambda) = 0$ első gyöke λ_1 reális, (13) képzetes, mert az 1 képzetes ponton át csak egy reális egyenes megy, t.i. (12), a melyen kivül a többi tehát mind képzetes, s így (13) is. Minthogy 1 conjugáltja 2, 3 conjugáltja 4, nyilvánvaló, hogy (13) conjugáltja (24), s így a függvények ~~szorzata~~ szorzata reális négyzetes függvény, melyhez tartozó paraméter reális vagyis $D(\lambda) = 0$, másodiko gyöke λ_2 is reális. Épenigy (14) és (23) conjugált complex egyenespár, tehát λ_3 is reális. Ha tehát két képzelet négy reális vagy négy képzetes pontban metszi egymást, a $D(\lambda) = 0$ resolvens egyenlet három gyöke reális és különböző. –

3.) Milyen lesz a három λ érték, ha két metszéspont pl 1 és 2 reális, a másik kettő 3 és 4 képzetes. (~~Az (13)~~) Minthogy 3 és 4 conjugált, azért (12) és (34) reális egyenesek, λ_1 reális. Az (13) képzetes, mert a 3 ponton át csak egy reális egyenes halad, t.i (34), a többi, s így (13) is, képzetes. Épenigy (24) is képzetes, de (13) és (24) nem conjugáltak, mert két conjugált egyenesnek csak egy reális pontjuk van, t.i. a metszéspontjuk, ennek a kettőnek pedig két reális pontja van, t.i 1 és 2, így tehát (13) és (24) függvények szorzata képzetes

lévén, λ_2 képzetes. Ígyenigy (14) és (23) is képzetesek és nem-conjugáltak, tehát λ_3 is képzetes, s mivel (14) conjugáltja a (13)-nak, (23) conjugáltja a (24) nek következik, hogy λ_2 és λ_3 conjugáltak. Ha tehát a két kiposzelestnek két reális és két képzetes metszéspontja van, a $D(\lambda) = 0$ egyenletnek van egy reális és két conjugált complex gyöke.

Látjuk, hogy a λ_1 λ_2 λ_3 gyökökből még nem lehet biztosan következtetni a metszéspontok reális vagy képzetes voltára, epugy mint a negyedfoku egyenletnél a discriminans nem dönti el teljesen, hogy milyenek az egyenlet gyökei. Ezért pontosabb analytikai criteriumokhoz kell fordulnunk. Vegyük az előbbi három esetet rendre

1.) A négy metszéspont reális, a három egyenespár reális. Tudjuk, hogy egy négyzetes függvény reális egyenespárt ábrázol, ha determinánsa 0, és sátlói aldeterminánsai negativok, képzetes egyenespárt ábrázol, ha sátlói aldeterminánsai positivok (lásd 251 oldal). Nyilvánvaló, hogy ezen aldeterminánsok csak akkor lehetnek positivok vagy negativok, ha $D(\lambda)$ mind a három gyöke reális s így a következő criteriumokhoz jutunk:

I. Ha $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ reálisak és különbözők, és

2.) $D_{kk}(\lambda_k) < 0$ a négy metszéspont reális

$(k = 1, 2, 3)$ $(\lambda = 1, 2, 3)$

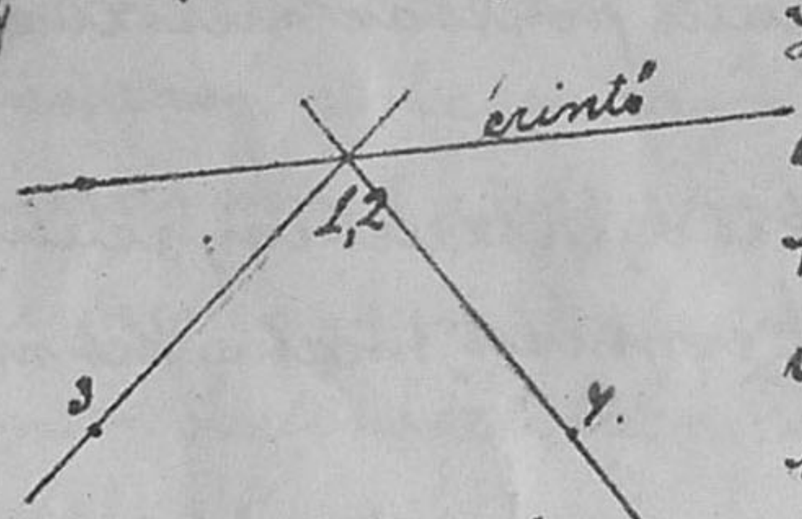
3.) $D_{kk}(\lambda_k) > 0$ a négy metszéspont képzetes

II. Ha λ_1 reális, λ_2 és λ_3 conjugált complex, van két reá-

lis és két képzetes metszéspont.

Itt térünk most arra az esetre, midőn a 4 metszéspont egy vagy több különböző módon egy helyre kerül, meg fogjuk állapitani az egyes esetek analytikai ismertető jeleit.

1.) Ha két metszéspont összeesik, a két kupszeletnek ott két végtelen közeli közös pontja van, tehát közös érintőjük, vagyis a két kupszelet abban a pontban érintkezik egymással, és pedig a mint mondani szokták: első rendben. Lássuk milyen természetűek lehetnek akkor az egyenespárok? s ennek megfelelőleg milyenek a $D(\lambda) = 0$ egyenlet gyökei.



Ha (12) összeesik, a 3 és 4 különböző, akkor (23) ≡ (13) és (24) ≡ (14), tehát két egyenespár összeesik, két gyök egyenlősödik $\lambda_2 = \lambda_2$, s mivel a harmadik egyenespár (12), (34) ezekből különbözik, azért λ_3 is különbözik λ_1-től. Ha tehát két metszéspont összeesik, a $D(\lambda) = 0$ egyenletnek két gyöke egyezik, a harmadik különböző. Lássuk hány eset lehetséges. Egy kétszeres gyök mindig reális, tehát két eset lehetséges:

2.) a két kupszelet egy pontban érintkezik, két reális pontban metszik egymást

3.) a két kupszelet egy pontban érintkezik, két képzetes pontban metszik egymást

Ha pedig 1 összeesik 2-vel, 3 összeesik 4-el, a két kupszelet két pontban első rendben metszik egymást. Állapitsuk meg

ennek a három esetnek analitikai ismertető jelei. Ha 1 és 2 összeesik, s azonkívül: 3 és 4 reális és különböző; az (13), (24) egyenespár reális egyenesekből áll, az általai determinánsok negatívok, ha 3 és 4 conjugált complex, az (13), (24) conjugált complex egyenespár, az aldeterminánsok positívek; s ha 3 és 4 összeesik, 13 és 24 összeesik, az aldeterminánsok eltűnnek. Tehát a III. eset következőleg oszlik fel:

III. $\lambda_1 = \lambda_2$, λ_3 ezektől különböző

1.) $\mathfrak{D}_{xx}(\lambda_1)$ mind negatívok, a nevezett két egyenespár két egyenesből áll, a két kúpszelet egy reális pontban érintkezik (s pedig elsőrendben), két reális pontban metszi egymást.

2.) $\mathfrak{D}_{xx}(\lambda_1)$ mind positívok, a két kúpszelet egy reális pontban érintkezik, de nem metszik egymást, mert a két metszéspont képzetes.

3.) $\mathfrak{D}_{xx}(\lambda_1) = 0$, a 3 és 4 pont összeesik, a két kúpszelet két helyen érintkezik. De itt két esetet kell megkülönböztetni.

a.) $\mathfrak{D}_{xx}(\lambda_3) < 0$, a két érintkezés reális, mert a két pont reális

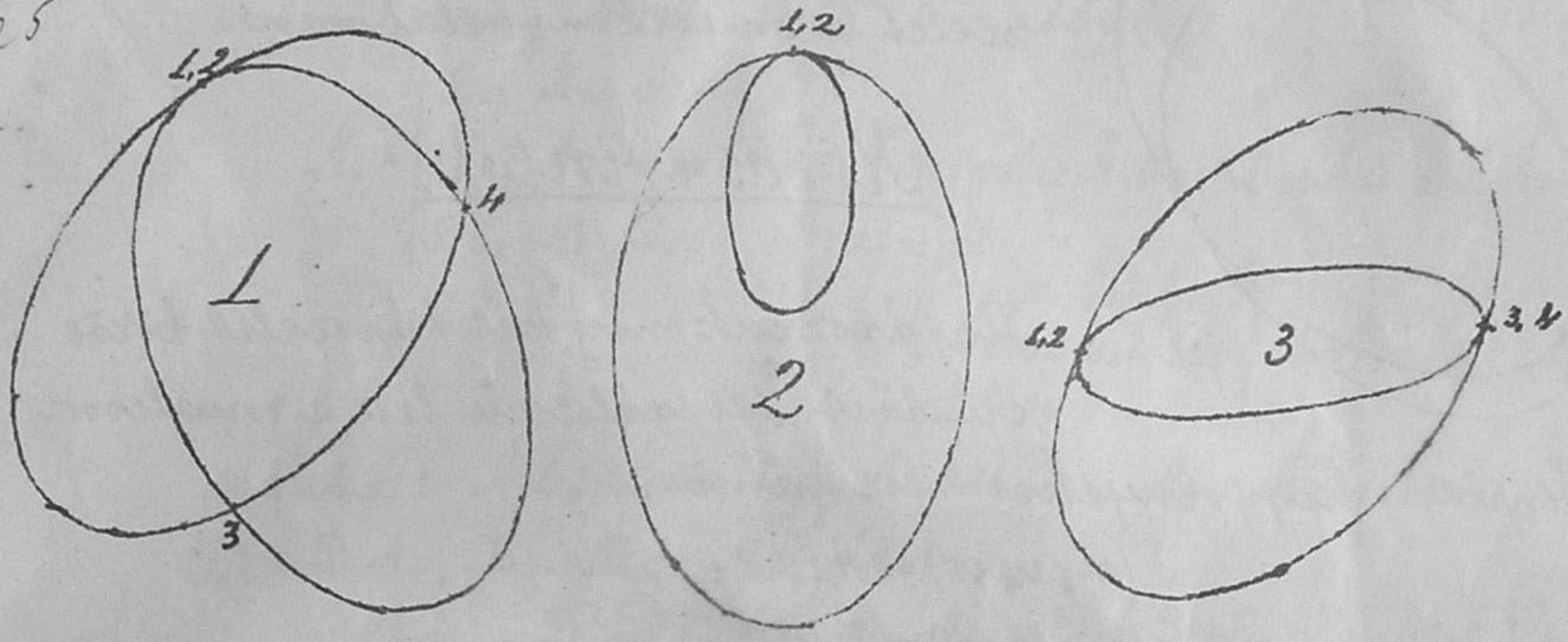
b.) $\mathfrak{D}_{xx}(\lambda_3) > 0$, " " " képzetes, " - " "conjugált

A következő lapon lévő ábrák feltüntetik a III alatti egyes érintkezési eseteket.

Két concentrikus kör egy tekinthető, mint két képzetes érintkezési ponttal bíró kúpszelet. –

Továbbmenve lehetséges, hogy a 4 metszéspont közül 3 vagy mind a négy összeesik. Ha 1, 2, 3 összeesik, 4 erek-

25

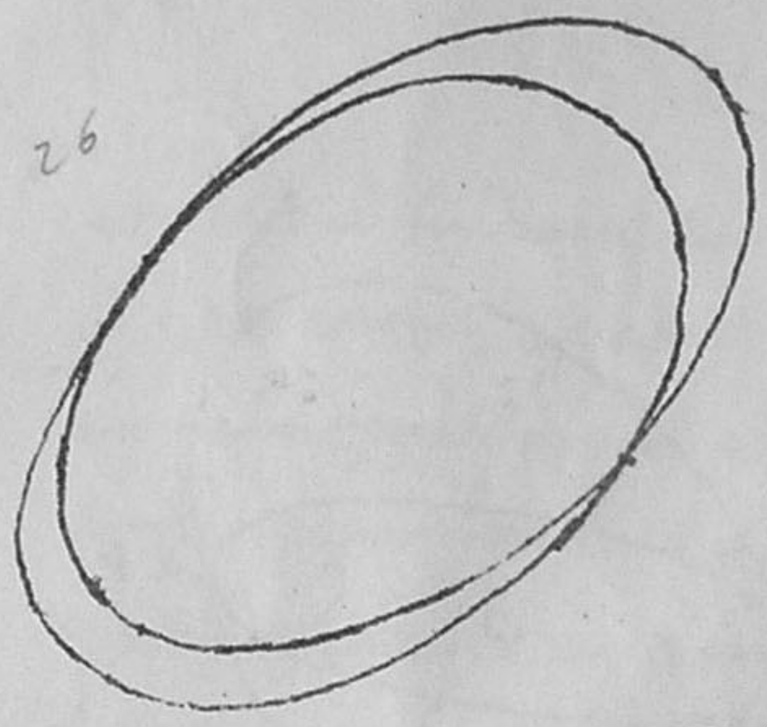


sől különböző, akkor az $\overline{12.34}$, $\overline{13,24}$, $\overline{14,23}$ egyenespárok n. egyenesek, a harmadfokú egyenlet három gyöke egyenlő. Ha még mind a négy pont egy helyre kerül, a három egyenespár egy egyenessé olvad össze. Ezt a két esetet az aldeterminánsok különböztetik meg, tehát a II-ik eset következőleg szerint fel:

II. $\quad \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3$

1.) de az összes aldeterminánsok nem mind nullák, akkor a két kúpszelet egy pontban másodrendű érintkezéssel bír, azaz oszkulál, egy pontban pedig metszik egymást (a mint azt a következő lapon lévő ábra mutatja)

2.) Az összes determinánsok mind eltűnnek, $D_{xx}(\Delta_x) = 0$, a két kúpszelet harmadrendű érintkezésben van. Az osculálásnál egy pontban egyszerre érinti és metszi egymást a két kúpszelet, harmadrendű érintkezésnél az egyik kúp-



szelet a másikon belül van

Közös érintők.

Határozzuk meg két kúpszelet közös érintőit. Ezt célszerű lesz a vonalkoordinátás függvényeket használni

$$F(u, v, w) = A_{11}u^2 + \dots\dots\dots$$
$$G(u, v, w) = B_{11}u^2 + \dots\dots\dots$$

A közös érintők kielégítik az $F + \mu G = 0$ paraméteres kapcsolatot is, ez pedig olyan kúpszeletsort értelmez, melynek négy közös érintője van. Ezen kúpszeletsorból kiragadunk két sugarat $F + \mu_1 G = 0$ és $F + \mu_2 G = 0$ s ezeknek μ_1 és μ_2 paramétereit meghatározzuk úgy, hogy a két kúpszelet két-két pontra essék szét. Ezen négy pont négy összekötő egyenesre adja a négy érintőt. Tudjuk, hogy a vonalakból szerkesztett kúpszelet szétesik két pontra, ha determinánsa eltűnik. Ha $F + \mu G = 0$ determinánsát rendezzük μ hatványai szerint a $D(\lambda)$-hoz egészen analóg harmadfokú egyenlet adódik

$$\Delta(\mu) = B\mu^3 + (B_1 + B_2 + B_3)\mu^2 + (A_1 + A_2 + A_3)\mu + A = 0$$

Ha ennek bármelyik két gyökét helyettesítjük a kúpszeletsor egyenletébe, két degenerált kúpszeletet kapunk, mely áll két pontpárból. De azonnal látni fogjuk, hogy $D(\lambda)$ és $\Delta(\mu)$ gyökei között egyszerű összefüggés áll fenn. Kijelentvalo u-

egyenlő, hogy $A = A_1^2$, $B = B^2$ továbbá

$$A_1 = \begin{vmatrix} B_{11} & A_{12} & A_{13} \\ B_{21} & A_{22} & A_{23} \\ B_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = B_{11} \cdot A \cdot a_{11} + B_{21} \cdot A \cdot a_{21} + B_{31} A \cdot a_{21} = A(B_{11} a_{11} + B_{21} a_{21} + B_{31} a_{31}) =$$

$$= A \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & b_{13} \\ a_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = A \cdot B_1$$

tehát $A_1 = A B_1$ éppenigy $A_2 = A \cdot B_2$, $A_3 = A \cdot B_3$ és $B_1 = B A_1$

$B_2 = B \cdot A_2$, $B_3 = B A_3$, tehát

$$\Delta(\mu) = B^2 \mu^3 + B(A_2 + A_2 + A_3)\mu^2 + A(B_2 + B_2 + B_3)\mu + A^2 =$$

$$= \frac{B^2 \mu^3}{A} \left[A + (A_1 + A_2 + A_3) \frac{A}{B\mu} + (B_2 + B_2 + B_3) \frac{A^2}{B^2 \mu^2} + B \frac{A^3}{B^3 \mu^3} \right]$$

a miből látható hogy

$$\Delta(\mu) \equiv \frac{B^2 \mu^3}{A} D\left(\frac{A}{B\mu}\right)$$

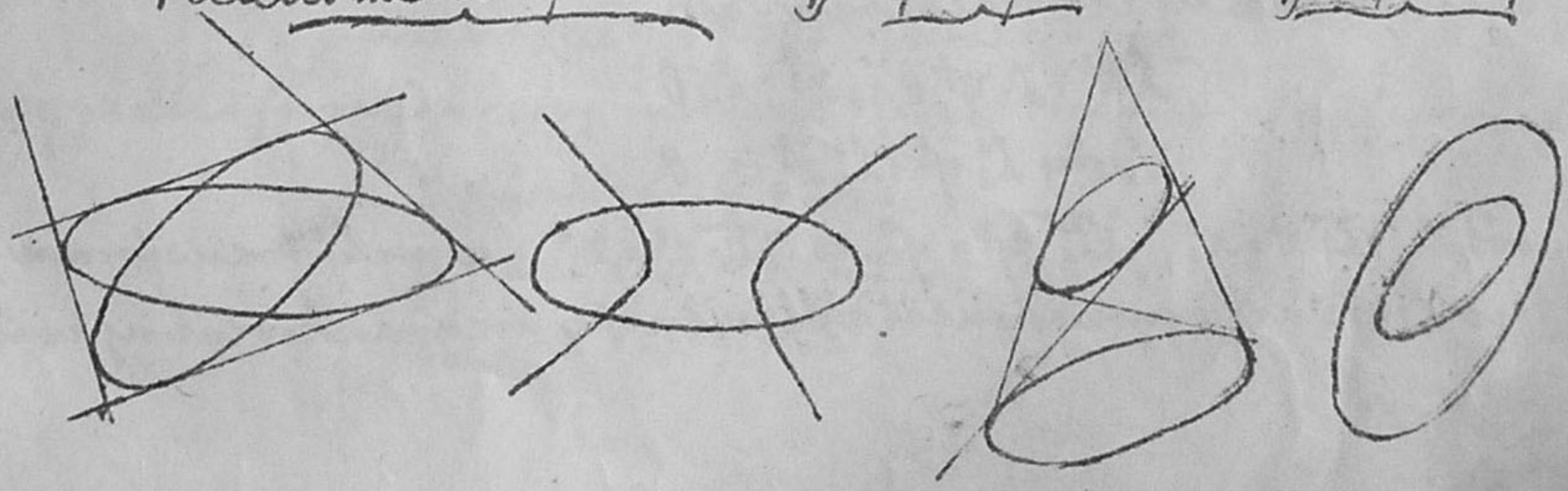
Tehát $\Delta(\mu) \neq 0$, a hol D, tehát akkor $\frac{A}{B\mu} = k_1, k_2, k_3$, s így kapjuk hogy $\Delta(\mu) = 0$ gyökei

$$\mu_1 = \frac{A}{B \cdot k_1}, \quad \mu_2 = \frac{A}{B \cdot k_2}, \quad \mu_3 = \frac{A}{B k_3}$$

Reális k-hez reális μ, képzetes k-hez képzetes μ tartozik. Tehát három k reális és különböző, a két kúpszelet metszéspontja vagy mind reális vagy mind képzetes, s ekkor a négy érintő is vagy reális vagy képzetes.

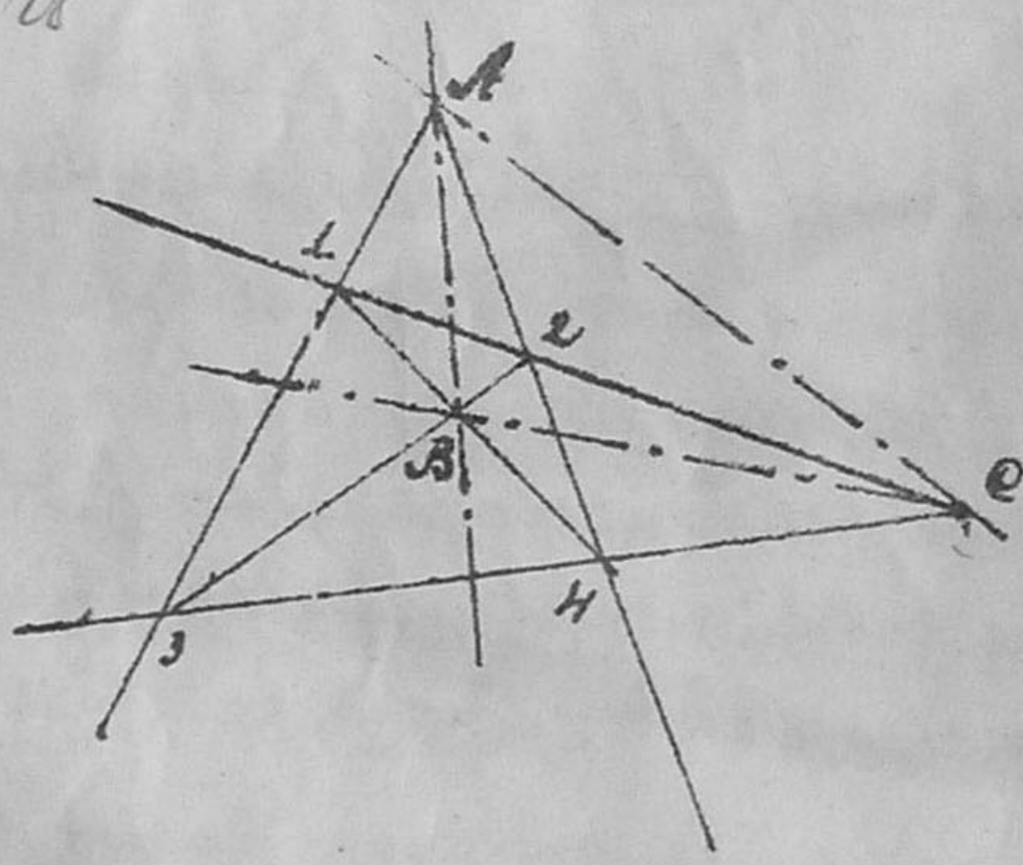
27

4 reális metszéspont négy képz. mpont négy képz. mtp.



Lehet, hogy négy reális metszéspontnak bíró kúpszeletnek 4 reális vagy 4 képzetes érintője van, és 4 képzetes m.ponttal bíró kúpszeletnek is lehet 4 reális vagy 4 képzetes érintője. Ha két k képzetes, egy reális, akkor két u is képzetes, egy reális, tehát két érintő reális, kettő képzetes. Ha több k egyenik, azaz 2, 3, vagy 4 metszéspont egy helyre kerül, az érintők száma is apad, 2, 3, illetőleg 4 érintő összeesik.

Most olyan számítási eljárást fogunk követni, melynek segítségével formulához jutunk a metszéspontok meghatározásához. Csak az általános esetet fogjuk tárgyalni, midőn a négy metszéspont különböző. Coordináta rendszer gyanánt kövessük a négy metszéspont által meghatározott teljes négyszög átlói háromszögét, a mely próbaháromszög mindkét kapcsolatot illetőleg. Tudjuk, hogy egy ilyen coordinatarendszerre vonatkozó egyenletben csak a négyzetes tagok szerepelnek, tehát a két kúpszelet egyenlete az új rendszerben lesz



$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 = 0$$
$$\lambda'_1 x^2 + \lambda'_2 y^2 + \lambda'_3 z^2 = 0$$

sőt $\sqrt{\lambda_1}\, x' = x''$, $\sqrt{\lambda_2}\, y' = y''$ és $\sqrt{\lambda_3}\, z' = z''$, a mely transformatio csak az egységpontot változtatja meg, akkor az új rend-

szerben a két egyenlet ilyen

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

Ebben az új rendszerben belépnek a képzetes-pontok, mert valós pontokkal nem sudjuk kielégiteni az utóbbi egyenletet, a végeredmény azonban realis alakban adja a pontokat, tehát a képzetes elemek minesenek befolyásával a végleges eredményre. Ha meghatároztuk a transformált coefficienseket, ebből a két egyenletből megsudjuk határozni x^2, y^2, z^2 viszonyát, s igy a négy metszéspont . coordinátáit. Tehát hajtsuk végre ezt a transformációt. Az uj coordinatarendszer nem mindig valós, de képzetes számokkal igyugy megy a számolás. Ha a négy metszéspont realis vagy képzetes, a háromszög realis, csak akkor képzetes, ha kettő realis, kettő képzetes.

Feladatunk tehát az

$$f(x, y, z) = a_{11} x^2 + \dots$$

$$\text{és} \quad g(x, y, z) = b_{11} x^2 + \dots$$

egyenleteket kifejezni ~~egy~~ az uj coordinatarendszerben. Az algebrai transformációk a négyzetes formák alapján fogjuk megejteni. Ismeretes a formák elméletéből, hogy ha az

$$a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + a_{33} z^2 + 2 a_{23} yz + \dots$$

négyzetes formára egy lineáris transformációt alkalmazunk

$$x = c_{11} x' + c_{12} y' + c_{13} z'$$

$$y = c_{21} x' + c_{22} y' + c_{23} z'$$

$$z = c_{31} x' + c_{32} y' + c_{33} z'$$

a forma új alakja lesz

$$a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 + a'_{33}z'^2 + 2a'_{23}y'z' + \dots$$

a hol

$$a'_{ik} = f(ik)$$

$$(i,k = 1,2,3)$$

$$f^{(ik)} = c_{1i}f_1^k + c_{2i}f_2^k + c_{3i}f_3^k$$

és $f_i^k = a_{i1}c_{k1} + a_{i2}c_{k2} + a_{i3}c_{k3}$

A vonalcoordinátáb egyidejüleg következőleg transzformálódnak

$$u' = c_{11}u + c_{21}v + c_{31}w$$

$$v' = c_{12}u + c_{22}v + c_{32}w$$

$$w' = c_{13}u + c_{23}v + c_{33}w$$

Kérdés, hogyan transzformálódik a vonalcoordinátás négyzetes forma

$$A_{11}u^2 + A_{22}v^2 + A_{23}w^2 + 2A_{23}vw + \dots =$$

Ahogy ezt eldöntsük, más alakot adunk a függvénynek, determináns alakot. A görbe xyz pontjaihoz tartozó érintő coordinátái legyenek u, v, w, akkor

$$u = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z$$

$$v = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z$$

$$w = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z$$

s mivel ez a pont és egyenes összetartozási viszonyban van, áll még, hogy

$$0 = ux + vy + wz$$

Ha a három első egyenletet is mélyre redukáljuk, lesz végül egy egyenletünk, mely x, y, z és (-1)-ben lineáris és homo-

gen, igazi megoldás tehát csak úgy lehetséges, ha a determináns eltűnik

$$\begin{vmatrix} a_{11}, a_{12}, a_{13}\, u \\ a_{21}, a_{22}, a_{23}\, v \\ a_{31}, a_{32}, a_{33}\, w \\ u, v, w, 0 \end{vmatrix} = 0$$

ez az F-től csak jegyben különbözik, mert ha egy simetrikus determinánst egy sor és oszlop változásával kibővítünk, akkor, ha az utolsó elem 0, az új determináns a réginek ellentettje. Ez tehát a vonalkoordinátás egyenlet determinánsalakja. Most szorozzuk ezt a determinánst a transzformátio determinánsával, miután ezt előbb negyedfokúvá kibővítettük; az elsőnek sorait a másodiknak oszlopaival componálva lesz

$$\begin{vmatrix} a_{11}\, a_{12}\, a_{13}\, u \\ a_{21}\, a_{22}\, a_{23}\, v \\ a_{31}\, a_{32}\, a_{33}\, w \\ u\quad v\quad w\, 0 \end{vmatrix} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} c_{11}\, c_{12}\, c_{13}\, 0 \\ c_{21}\, c_{22}\, c_{23}\, 0 \\ c_{31}\, c_{32}\, c_{33}\, 0 \\ 0\quad 0\quad 0\quad 1 \end{vmatrix}}_{C} = \begin{vmatrix} f_1^{(1)}\, f_1^{(2)}\, f_1^{(3)}\, u \\ f_2^{(1)}\, f_2^{(2)}\, f_2^{(3)}\, v \\ f_3^{(1)}\, f_3^{(2)}\, f_3^{(3)}\, w \\ u'\quad v'\quad w'\, 0 \end{vmatrix}$$

és még egyszer szorozva a substitutio determinánsával C-vel oszlopot oszloppal componálva lesz

$$\begin{vmatrix} a_{11}\, a_{12}\, a_{13}\, u \\ a_{21}\, a_{22}\, a_{23}\, v \\ a_{31}\, a_{32}\, a_{33}\, w \\ u\quad v\quad w\quad 0 \end{vmatrix} C^2 = \begin{vmatrix} f_1^{(1)}\, f_1^{(2)}\, f_1^{(3)}\, u \\ f_2^{(1)}\, f_2^{(2)}\, f_2^{(3)}\, v \\ f_3^{(1)}\, f_3^{(2)}\, f_3^{(3)}\, w \\ u'\quad v'\quad w'\quad 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_{11}\, c_{12}\, c_{13}\, 0 \\ c_{21}\, c_{22}\, c_{23}\, 0 \\ c_{31}\, c_{32}\, c_{33}\, 0 \\ 0\quad 0\quad 0\quad 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & u' \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} & v' \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} & w' \\ u' & v' & w' & 0 \end{vmatrix}$$

ez pedig a vonalkoordinátás forma uj alakja, ez tehát nem egyébb, mint a régi forma szorozva a substitutio determinánsának négyzetével. Most könnyü lesz a kisüzött transformatiót megejteni, vagyis kifejezni a

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 = f'$$
$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = g'$$

transformált függvények coefficienseit a régi coefficiensekkel s a transformatio determinánsának elemeivel kapcsolva a két függvényt állitsuk egy kúpszeletsorra

$$f' + \lambda g' = (\lambda_1 + \lambda) x'^2 + (\lambda_2 + \lambda) y'^2 + (\lambda_3 + \lambda) z'^2$$

ez tehát nem egyébb, mint az $f + \lambda g$ transformált alakja, de akkor az invariansok szerint ennek transformált alak determinánsa annyi, mint a régi $D(\lambda)$ determináns, szorozva c^6-al vagyis

$$D(\lambda) . c^2 = \begin{vmatrix} \lambda_1 + \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 + \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 + \lambda \end{vmatrix} = (\lambda_1 + \lambda)(\lambda_2 + \lambda)(\lambda_3 + \lambda)$$

ez az összefüggés a $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$, a substitutio determinánsa és az eredeti determináns coefficiensei között. Ebből unghatározható c^2 értéke, mert összehasonlitva az identitás két oldalát, látható, hogy $Bc^2 = 1$, a hol B a második kúpszelet deter-

mínusa, továbbá látjuk, hogy a jobb oldal eltűnik, ha $\lambda = -\lambda_1$ és $-\lambda_2$, $-\lambda_3$, tehát akkor eltűnik $D(\lambda)$ is, tehát $\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3$, a transzformált egyenlet három coefficiense nem egyébb, mint a $D(\lambda) = 0$ egyenlet három gyökének negatívjai. Ezzel meghatároztuk a transzformált egyenletek coefficienseit. Még csak az átmenetet kell meghatározni a régi és uj coordináta-rendszer között. Az $f + \lambda g = 0$ vonalcoordinátás egyenlete determinans alakban

$$H(\lambda, u, v, w) = \begin{vmatrix} a_{11}+\lambda b_{11} & a_{12}+\lambda b_{12} & a_{13}+\lambda b_{13} & u \\ a_{21}+\lambda b_{21} & a_{22}+\lambda b_{22} & a_{23}+\lambda b_{23} & v \\ a_{31}+\lambda b_{31} & a_{32}+\lambda b_{32} & a_{33}+\lambda b_{33} & w \\ u & v & w & 0 \end{vmatrix}$$

s ha megszorozva képzeljük $c^2 = \frac{1}{B}$-vel, a B-vel való átszorzás után

$$= B \begin{vmatrix} \lambda_1+\lambda & 0 & 0 & u^* \\ 0 & \lambda_2+\lambda & 0 & v^* \\ 0 & 0 & \lambda_3+\lambda & w^* \\ u^* & v^* & w^* & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -B\left[(\lambda_3+\lambda)(\lambda_3+\lambda)u^{*2} + (\lambda_3+\lambda)(\lambda_1+\lambda)v^{*2} + (\lambda_1+\lambda)(\lambda_2+\lambda)w^{*2}\right]$$

lesz az egyenlet identitás, λ bármely értéke mellett a két oldal egyezik. Legyen $\lambda = -\lambda_1$, akkor

$$H(-\lambda_2, u, v, w) = -B(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)u^{*2}$$

Osztva u^{*2} coefficiensével és négyzetgyökét vonva, kapjuk u^*-et mint u, v, w függvényét. De tudjuk másfelől, hogy u^* lineáris módon függ össze, melyben a három coefficiens c_{11}, c_{21}, c_{31}. Ha $\lambda = -\lambda_2$, akkor

$$\mathcal{H}(-\lambda_2, u, v, w) = -B(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_2) v^2$$

ebből adódik v', mint u, v, w függvénye, melyben a coefficiensek c_{32}, c_{22}, c_{31} és

$$\mathcal{H}(-\lambda_3, u, v, w) = -B(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3) w'^2$$

melyből w'-et mint u, v, w függvényét kiszámítva, a három coefficiens c_{31}, c_{32}, c_{33}. Ezzel meghatároztuk a transformatio coefficienseit s így az álmenetel a régi rendszerről az újra és viszont, egészen határozott. Az új egyenletek

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 = 0$$

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 0$$

kiszámítjuk a négy metszéspont coordinátáit az új rendszerben, s így a régi rendszerben is. Ily módon a négyszeres formák transformatio daraval kész formulát nyertünk a metszéspontok számára. Ezekkel most a közös érintőket is meg tudjuk határozni

Az osculáló kör

Két kupszelet első, második, vagy harmadrendü érintkezésben vagy helyzetben van a szerint, a mint ott a két kupszeletnek két három vagy négy pontja összeesik. Azt a kört, mely a kupszelettel másodrendü érintkezésben van simuló vagy osculáló körnek nevezzük. Ki fogjuk mutatni, hogy a kupszeletnek minden pontjában van határozott osculláló köre. E végett a kupszelet illető pontját választjuk coordinata origónak, az érintő-

jét x tengelynek, s reá merőlegesen y tengelyt. ~~Ezekben~~ Többen a rendszerben állitsuk fel az osculáló kör egyenletét. A kúpszelet egyenlete legyen $f(x,y,z)=0$, akkor az 001 origo polárisának egyenlete $0.f_1+0.f_2+1.f_3=f_3=0$ vagyis

$$a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=0$$

De az origó polárisa ezuttal maga az x tengely, melynek egyenletében x és z coefficiense hiányzó lévén, az egyenlet $y=0$, tehát $a_{31}=a_{33}=0$, s igy a mi rendszerünkben a kúpszelet egyenlete

$$f(x,y,z)\equiv a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{23}yz=0$$

Az osculáló kört azon körök közül kell kell keresni, melyek a kúpszelettel O-ban érintkeznek. Ezeknek centrumai az y tengelyen fekszenek, tehát ha egy ilyen érintökör sugara r, akkor centrumának coordinátái $(0,r)$ s az igy O-ban érintő kör egyenlete

$$x^2+(y-r)^2-r^2=0 \quad \text{vagyis homogénné téve}$$

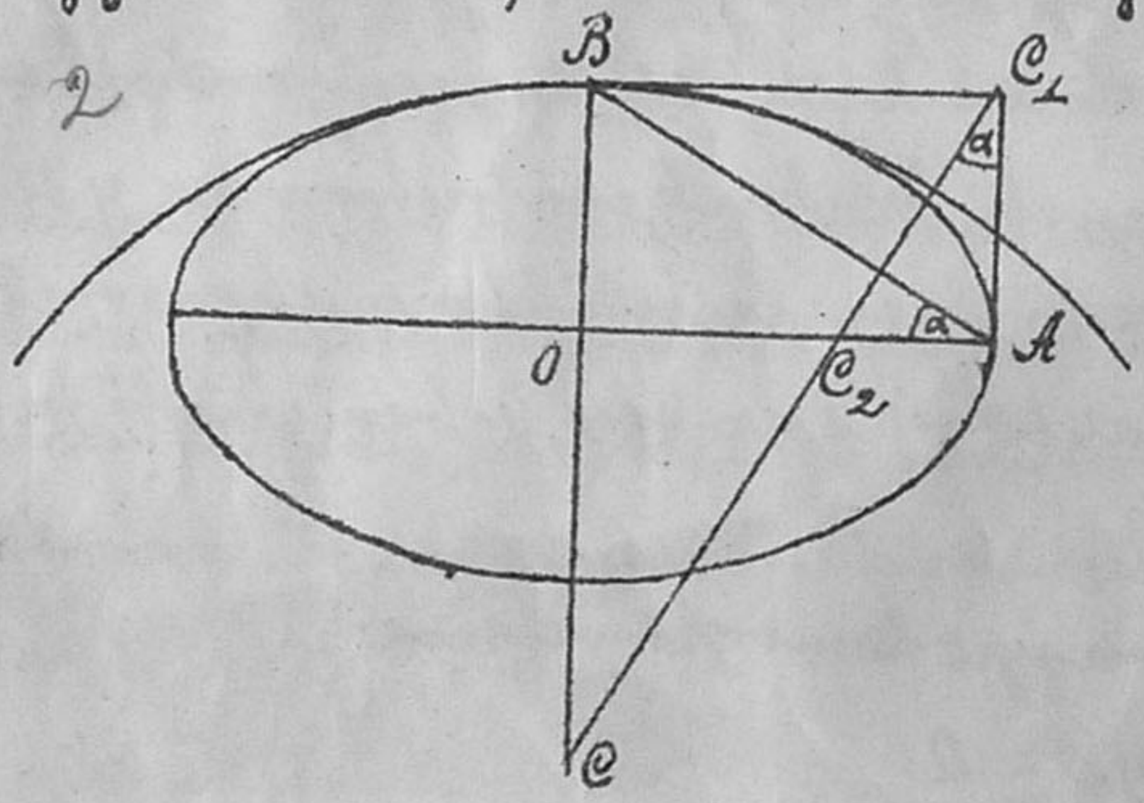
$$g(x,y,z)\equiv x^2+y^2-2ryz=0$$

Tehát f és g viszonyát kell vizsgálni. f és g parameteres kapcsolata oly kúpszelet, mely átmegy a kettőnek metszéspontjain. Ha meghatározzuk a parametert ugy, hogy a kúpszelet szétessék két egyenesre, akkor a feladat visszavan vive arra, hogy meghatározzunk két egyenest, melyek összesen két pontban metszik a kúpszeletet. Ez a parameter -re ugyanis

$$f-a_{11}g=y[2a_{12}x+(a_{22}-a_{11})y+2(a_{23}+a_{12}r)z]=0$$

ez a kúpszelet két egyenesből áll, az egyik az $y=0$, vagyis az x tengely a másik az $2a_{12}x+(a_{22}-a_{11})y+2(a_{23}+a_{12}r)z=0$ egyenes,

tövel, tehát OR épen érintője a kúpszeletnek O-ban. Nyilvánvaló, hogy ilyen sajátosságnak a tengelyek végpontjai, mert a tengelyek felezik a rájuk merőleges húrokat, s ezek épen a végpontjukban érintő körök által kimetszett húrok. Ellypsisnél tehát 4 ilyen pont van, hyperbolánál 2, parabolánál 1. Ezekben az osculaló kör a duplog természetéből kifolyólag négy összeeső pontal bir a kúpszelettel. Tehát a tengelyek végpontjaiban következőleg szerkesztjük az osculláló kört. Vegyük az ellipsist. Normál egyenlete $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$, s határozzuk meg a kistengely B végpontjában az osculláló kört. Az O origót B-be visszük, hogy B érintője legyen az x tengely. Ez a transformatio $x=x'$, $y=y'+b$, tehát a transformált egyenlet



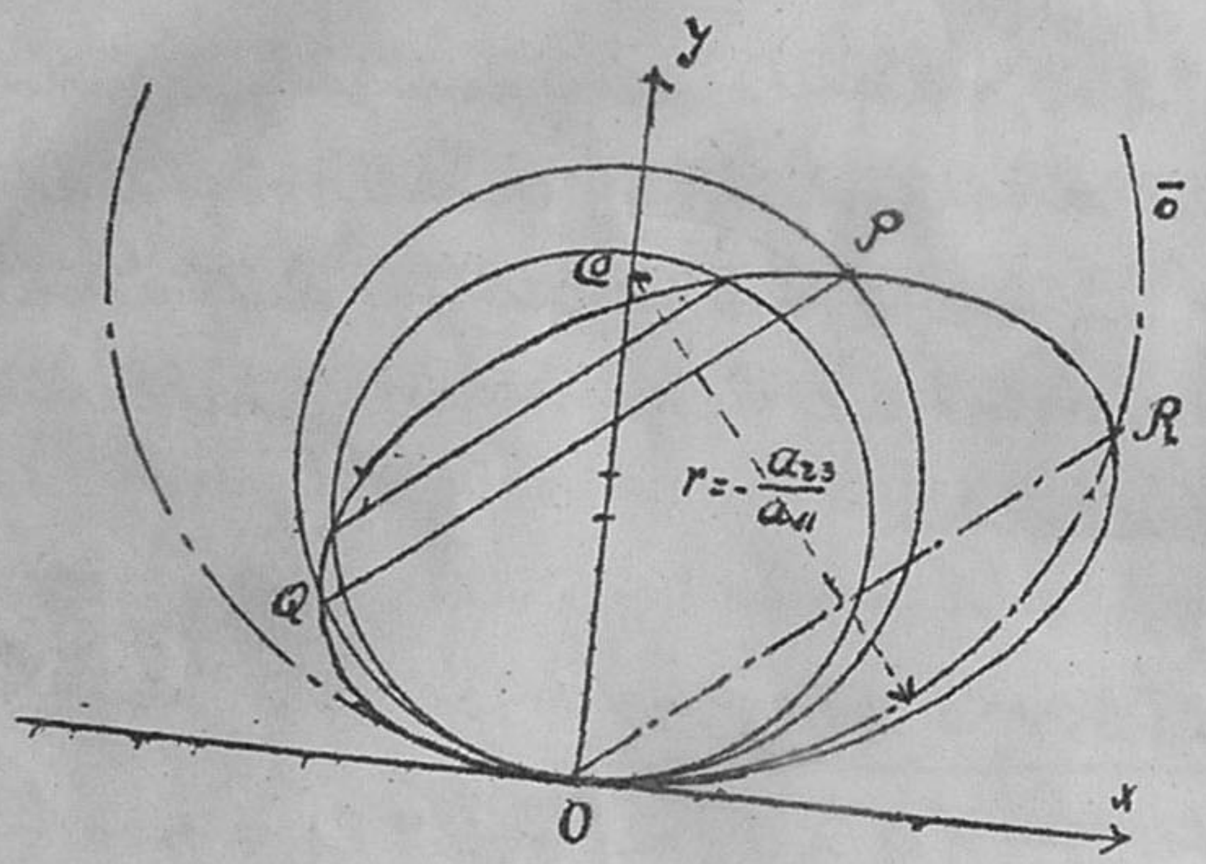
$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{(y'+b)^2}{b^2}-1=0 \quad \text{vagyis} \quad \frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}+\frac{2}{b}y'=0 \quad , \text{ itt } a_{11}=\frac{1}{a^2}\,,\ a_{22}=\frac{1}{b^2}$$

tehát $$r=-\frac{\frac{1}{b}}{\frac{1}{a^2}}=-\frac{a^2}{b}\,.$$

Tehát a centrum az y tengely negativ felén fekszik s következőleg szerkeszthető: A és B-ben érintőt szerkesztünk, melyek C_2-ben metszik egymást. C_2-öt úgy határozzuk meg, hogy AC_2C_2 4 = OHB 4 legyen. Akkor C_2C_2 kimetszi az y tengelyből az osculáló-kör C centrumát. Ugyanis AOB háromszögből $\operatorname{tg}\alpha=\frac{b}{a}$ .. és BCC_2 háromszögből $r=BC=\frac{a}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{a^2}{b}$. Hyperbolánál ha-

Ennek irányszámgensse $-\frac{2a_{12}}{a_{22}-a_{11}}$ független az r-től, tehát a kúpszeletet O-ban érintő körök olyan pontpárokban metszik a kúpszeletet, melyeknek összekötő egyenesei párhuzamosak egymással. Ha ezek közül éppen azt vesszük, mely átmegy az O ponton, akkor az ehhez tartozó Ō körnek az O-ban három közös pontja van a kúpszelettel, ez az egyenes átmegy az O ponton, ha harmadik coordinátája $a_{23}+a_{11}r=0$, vagyis ha $r=-\frac{a_{23}}{a_{11}}$. Ez az osculáló kör sugara s ez pozitiv vagy negativ, a szerint, a mint a körcentrumra az y tengely pozitiv vagy negativ felén fekszik. Ennek alapján megszerkeszthetjük az osculáló kört a kúpszeletnek egy tetszésszerinti O pontjában. O-ban meghúzzuk az érintőt s erre merőlegest állitunk. Aztán felveszünk a kúpszeleten egy P pontot, s megrajzoljuk az erre átmenő és O-ban érintő kört, mely még egy Q pontot metsz ki, O-n keresztül PQ-val párhuzamost húzva, ez kimetszi az osculáló kör által kimetszett R pontot. OR felezőjében emelt merőleges kimetszi az y tengelyből az osculáló kör C centrumát. Ez a szerkesztés csak akkor nem határozott, ha az érintő körök által kimetszett egyenesek parallelek az érin-

1



sonlakép történik a szerkesztés. Parabolánál a paraméter adja a csúcshoz tartozó csúcsérintő kör sugarát. Ugyanis a parabola normál egyenlete $y^2 - 2px = 0$

Az érintő kör egyenlete a csúcshoz $x^2 + y^2 - 2rx = 0$

A kettő különbségül adódik

$$x^2 - 2(r-p)x = 0$$

vagyis $$x[x - 2(r-p)] = 0$$

Tehát az egyik egyenes $x = 0$, vagyis az y tengely, a másik $x - 2(r-p) = 0$. Ha azt akarjuk, hogy ez az origón átmenjen, $r = p$ kell, hogy legyen, a mi igazolja állításunkat. Minden más ponthoz, mint a csúcspontokhoz, az általános módszerrel történik a szerkesztés.

Kúpszeletsor - sereg.

Kúpszeletsor egyenlete $f + \lambda g = 0$, a hol f és g pontkoordinátás kúpszeletfüggvények. Kúpszeletsereg egyenlete $F + \mu G = 0$, a hol F és G vonalkoordinátás kúpszeletfüggvények. A kúpszeletsor összes tagjai átmennek a két kúpszelet négy metszéspontján, a kúpszeletsereg összes tagjai érintik a két kúpszelet 4 fix érintőjét. Ezen kúpszeletsor és sereg esetén a következő tételek állanak. Ha a kúpszeletsort egyenessel metszik, a kimetszett pontpárok involúciót alkotnak, s ha a sík egy pontjából a kúpszeletsereghez érintőket húzunk, az érintőpárok, az érintőpárok involúciót alkotnak.

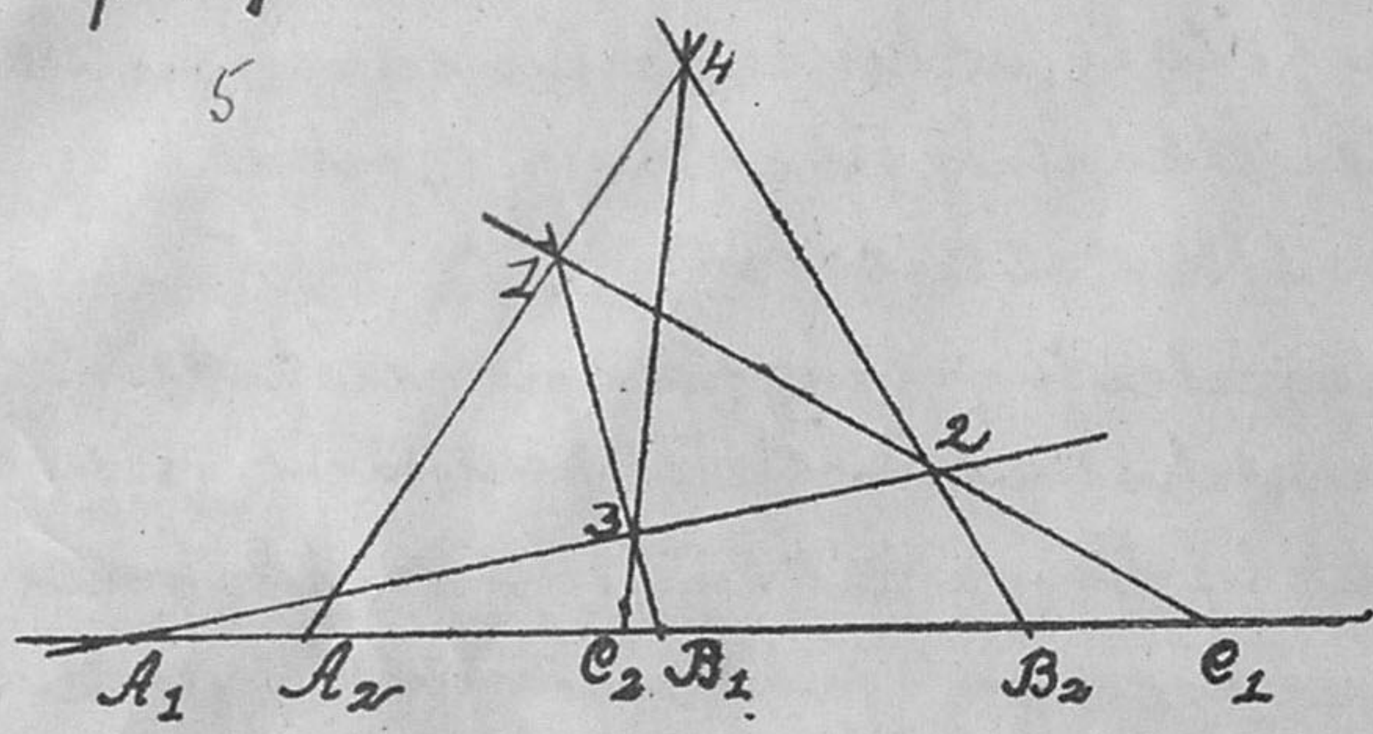
Bizonyítsuk ezt a két tételt. A metsző egyenest válasszunk egy derékszögű koordináta rendszer x tengelyének. Ha ebben a rendszerben a kúpszeletsor egyenlete $f + \lambda g = 0$, akkor az egyenessel való metszéspontok x koordinátáit kapjuk, ha ebben $y = 0$, tehát

$$a_{11}x^2 + 2a_{13}x + a_{33} + \lambda(b_{11}x^2 + 2b_{13}x + b_{33}) = 0$$

de láttuk, hogy két négyzetes függvény paraméteres kapcsolata involúciót létesítenek, tehát a kimetszett pontpárok involúciót alkotnak. Tegyük fel, hogy a két kúpszelet 4 valós pontban metszi egymást, akkor ezen 4 ponton átmenő kúpszeletek között van három degenerált, t.i. az (14), (23); (13), (24); és (12), (34) egyenespárokkal értelmezett három kúpszelet, melyek egy teljes négyszög oldalait képezik. Ezek is a kúpszeletsorhoz tartoznak, s így kapjuk azt a tételt, hogy egy teljes négyszög hat oldalát a sík egy tetszőleges egyenese involúcióban metszi, s involúciós pontpárok azok, melyek a szemben fekvő oldalak metszéséből származnak. Ilyen involúciós pontpár három van. Ezen tétel alapján síkban vonalzó segítségével kiszúrjuk egészítsük a két pontpárral adott involúciót, a mit eddig csak körzővel tettünk. Az egyenesen felveszünk két pontpárt A_1, A_2, B_1, B_2. Keressük fel az ezek által meghatározott involúcióban a C_1 pont társát C_2-öt. (Az ábra a tulajon látható!) C_1-ből egy tetszőleges egyenest húzunk, s ezen felveszünk két pontot 1 és 2. A 2 A_2 és 1 B_2 egyenesek 3, és az 1 A_2, 2 B_2 egyenesek 4 metszéspontját összekötő (34) egyenes kimetszi C_2 társát C_2-öt. Most tárgyalom $A_1 A_2$ a (23), (14); $B_1 B_2$

az (13), (24) és C_2 C_2 az (12), (34) szembenfekvő oldalaktól kimetszett pontjárak.

5



Ilyen igy ki lehet mutatni az analog tételt a kúpszeletsereg esetére. Legyen a sugársor centruma a derékszögü coordinátarendszer origója, s ebben a rendszerben a kúpszeletsor egyenlete $F + \mu G = 0$. Az origóból húzott érintők u, v coordinátái adódnak, ha ebben $w = 0$, tehát

$$A_{11} u^2 + 2 A_{12} u v + A_{22} v^2 + \mu (B_{11} u^2 + 2 B_{12} u v + B_{22} v^2) = 0$$

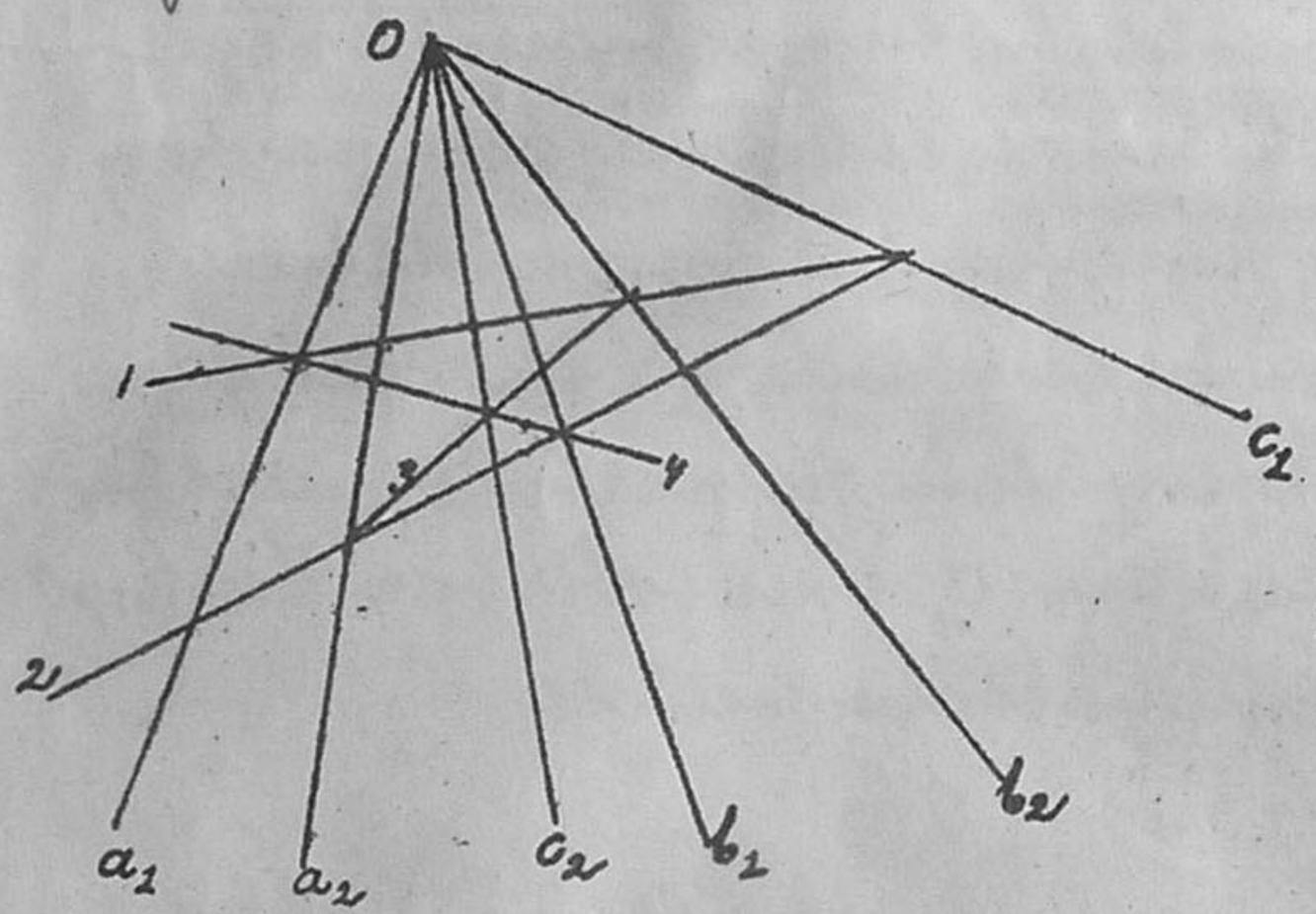
is beáive az iránytangensekat lesz

$$A_{11} tg^2\alpha - 2 A_{12} tg\alpha + A_{22} + \mu (B_{11} tg^2\alpha - 2 B_{12} tg\alpha + B_{22}) = 0$$

Ezen két négyzetes függvény parameteres kapcsolata pedig involucióról értelmez. Tegyük fel, hogy a két kúpszeletnek 4 reális érintője van, 1, 2, 3, 4; akkor a kúpszeletek között van három degenerált, t.i. az (12), (34); (13), (24) és (14), (23) pontpárok. Ha tehát a sik egy tetszőleges pontjától a kúpszeletsorhoz érintőket huzunk, ezek között ott van az O centrumot ezen 6 ponttal összekötő 3 egyenespár is. Áll tehát a tétel, hogy egy teljes négyoldal 6 szögpontját a sik egy tetszőleges pontjával összekötő hat egyenes involutiót alkot, melyben a szembenfekvő pontokat összekötő egyenesek involuciós párokat alkotnak. Ezen tétel alapján vonalzó segélyével ki tudjuk

egészíteni a két egyenespárral adott involuciót. Tehát adva van az a_1a_2, b_1b_2 involució; szerkesszük meg c_2 sugarát c_2-öt. c_1-en felveszünk egy pontot, s ebből két tetszőleges sugarat húzunk, 1 és 2. Az $1a_1$ és $2b_1$ összekötő egyenesek, 4-nek is az $(1b_2)$ meg $(2a_2)$ összekötő egyenesének, 3-nak (34) metszéspontját O-val összekötve, kapjuk c_1 involuciós párosát c_2-öt

6



Egyenoldalú hyperbola, confocális kúpszeletek.

A kúpszeletsoroknak és seregeknek még egy nevezetes fajáról kell megemlékezni, melyek arról vannak jellemezve, hogy mind egyforma természetű görbék alkotják.

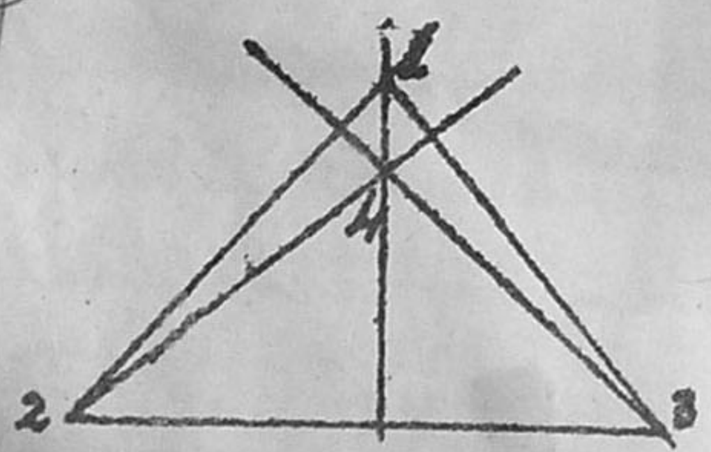
Láttuk, hogy a derékszögű coordinátarendszer transformatiojánál két invariáns függvénye van a coefficienseknek, $a_{11}a_{22}-a_{12}^2$ és $a_{11}+a_{22}$. Lássuk, mi a jelentése annak, ha $a_{11}+a_{22}=0$. Ez nyilvánvalóan hyperbolánál fordulhat elő, mert hyperboláéál $a_{11}a_{22}-a_{12}^2<0$, tehát előfordulhat, hogy $a_{11}a_{22}<0$ legyen, Mivel a normál egyenletre való átmenetnél ez az invariáns tulajdonság megmarad, azért, ha a hyperbola normál egyenlete $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$

lesz $\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} = 0$ vagyis $a^2 = b^2$. De az aszimptoták iránytangense $tg\alpha = \pm \frac{b}{a}$, ez most $tg\alpha = \pm 1$ vagyis az egyik aszimptota 45°-nyi, a másik (-45°)-nyi szöget zár be az x tengelyhez, tehát a két aszimptota merőleges egymásra. Az olyan hyperbolát, melynek aszimptotái merőlegesek egymásra, egyenoldalu hyperbolának nevezzük. Ennek tehát jellemző analytikai sajátsága, hogy $a_{11} + a_{22} = 0$. Nyilvánvaló, hogy ha két egyenoldalu hyperbolát paraméteresen kapcsolunk, a keletkező kipszeletsor minden tagja egyenoldalu hyperbola; mert ha az egyik kúpszeletben $a_{11} + a_{22} = 0$, a másodikban $b_{11} + b_{22} = 0$, akkor a λ paraméter bármily értéke mellett

$$a_{11} + a_{22} + \lambda(b_{11} + b_{22}) = 0$$

Ha a két egyenoldalu hyperbolának négy reális metszéspontja van, 1, 2, 3, 4, a degenerált kúpszeletnek is ahhoz a fajhoz tartozván, kell, hogy $(23) \perp (14)$, $(13) \perp (24)$ és $(12) \perp (34)$ legyen, tehát egyik melsőpont, pl 4 az 1, 2, 3 pontok által alkotott háromszög magasságpontja. Tehát két egyenoldalu hyperbola oly 4 pontban metszi egymást, melyek közül egyik a másik három által alkotott háromszög magasságpontja. Ebből tovább következik, hogy ha felveszünk az egyenoldalu hyperbolán három pontot, akkor az általuk alkotott háromszög magasságpontja ugyi-

7

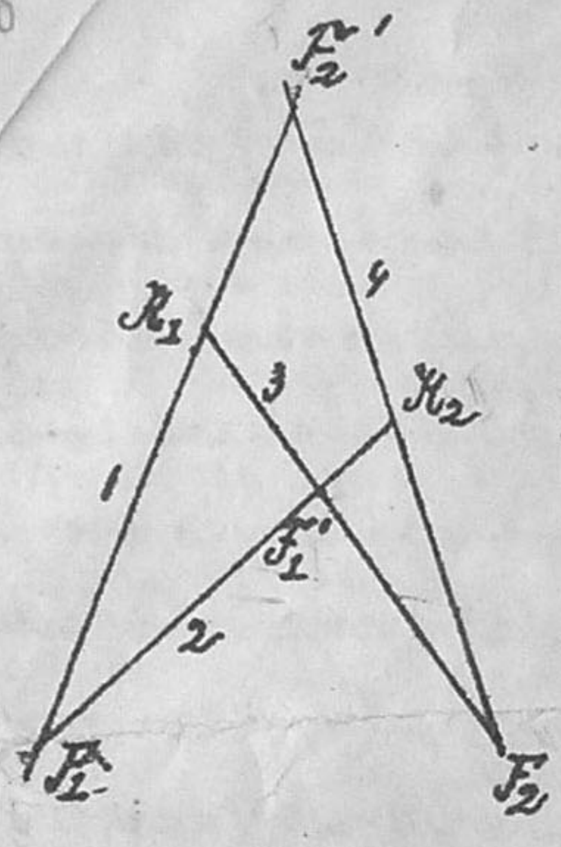


da van a hyperbolán. Ugyanis, ha segítségül veszünk egy másik egyenesoldalú hyperbolát, mely az 1, 2, 3 pontokon átmegy, ezen két hyperbola 4-ik metszéspontja és reális és magasságpontja az (123) háromszögnek, épen az iménti tétel értelmében. De 4 rajta van mindkét hyperbolán, tehát az elsőn is, úgy a tétel helyes. Az, hogy 3 ponton át egyenoldalú hyperbolát fektessünk, nem kíván lehetetlenséget, mert 3 pont három lineáris adat, $a_{11}+a_{22}=0$ egy lineáris adat, összesen csak 4 lineáris adat, tehát végtelen sok egyenoldalu hyperbola megy át a három ponton.

A kúpszeletseregnek egy speciális fajáť alkotják a confocális kúpszeletek. Confocalisnak nevezzünk két kúpszeletet, ha közös focussal bírnak. A focus definiálásából világos, hogy az F_1 és F_2 közös focusokkal bíró kúpszeletek összessége egy kúpszeletsereget, a mely érinti az

$$\frac{E_1K_1}{1}, \frac{E_2K_2}{1}, \frac{E_3K_3}{1}, \frac{E_4K_4}{1}$$ egyeneseket, a hol K_1 K_2 a végtelen távoli képzetes körpontok. Tehát két közös focussal bíró kúpszeletek négy közös érintővel bírnak. Minden kúpszeletsereghez tartozik három degenerált kúpszelet. Keressük fel ezeket a confocalis kúpszeletseregnél. Ha a fenti értékek megfelelőleg 1, 2, 3, 4, akkor a mint a mellélelt ábrából látható a kúpszeletsereg két közös képzetes focusa, a második az (13) és (24), metszéspontok K_1 és K_2, a két végtelen

(† az első degenerált kúpszelet az [(14), (23)]. metszéspontja F_1'; F_2'.)



sávoli képzetes körpont, a harmadik degenerált kúpszelet az (11) és (34). vagyis F_2 és F_2 metszéspontok, a két reális focus. Tehát csak a harmadik degenerált kúpszelet reális. Ezek alapján könnyű egy adott kúpszelettel confocális kúpszeletsereget felírni. Legyen az adott kúpszelet $F(u,v,w) = 0$. A vele confocális kúpszeletsereg meg van határozva, ha annak még egy tagját ismerjük. Ilyen a $K_1\ K_2$ pontpár, mely minden confocális kúpszeletsereghez hozzátartozik mint degenerált kúpszelet. Ennek analytikai előállítása, amint egy helyen láttuk $u^2 + v^2 = 0$

Tehát a $F(u,v,w)$-vel confocális kúpszeletsereg egyenlete

$$F(u,v,w) + \mu(u^2+v^2) = 0$$

Pl. az ellipsis normál egyenlete

$$F(u,v,w) = a^2u^2 + b^2v^2 - w^2$$

tehát a vele confoc. kúpszeletsereg egyenlete

$$a^2u^2 + b^2v^2 - w^2 + \mu(u^2+v^2) = 0$$

vagyis $$(a^2+\mu)u^2 + (b^2+\mu)v^2 - w^2 = 0$$

a pontkoordinátás egyenlet

$$\frac{x^2}{a^2+\mu} + \frac{y^2}{b^2+\mu} - 1 = 0$$

ebben μ a négyzetes szerepel (honn [illegible] elmyészteljük), tehát kúpszeletsereggel van dolgunk. Könnyen előállíthatjuk

hogy miféle görbék vannak ebben a seregben. Ha ugyanis $\mu^2 \leqq 0$, de kisebb b^2-nél vagyis ha

$+\infty > \mu > -b^2$ az illető kúp ellipsis, mert a két const. egyenlő jelű

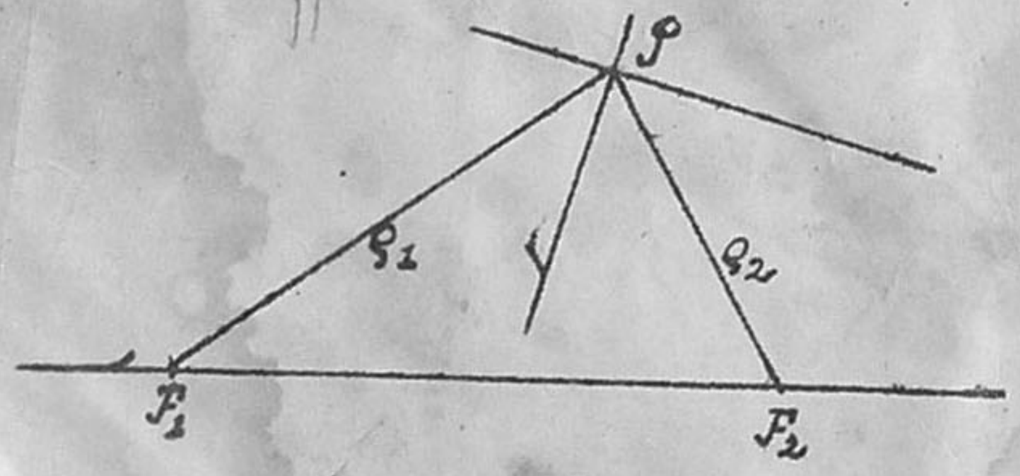
ha $-b^2 > \mu > -a^2$ " " " hyperbola, " " " " ellenkező "

" $\mu < -a^2$ a kés constáns negativ, a kúpszelet képzetes

Tehát az ellipsisről confocális kúpszeletseregben van ellipsis, hyperbola és képzetes kúpszelet. Ha $\mu = -b^2$ és $\mu = -a^2$ a pontkoordinátás egyenlet nem használható. De ha a vonalkoordinátás egyenletben $\mu = -b^2$, adódik a két reális focus egyenlete $(a^2 - b^2)u^2 - w^2 = 0$, s ha $\mu = -a^2$, adódik a két képzetes focus egyenlete

$$(b^2 - a^2)v^2 - w^2 = 0$$

Ha a két reális focus F_1 és F_2, nyilvánvaló, hogy a sík összes P pontján át ezen közös focusokkal bíró



regből még egy ellipsis és e
perbola, s pedig az az el
sis, melynek nagytengelye
$\rho_1 + \rho_2$ és az a hyperbola, mely
nek nagytengelye $\rho_2 - \rho_1$, ha
ρ_1 ρ_2 a P focustávolságai. A
P ponton átmenő ellipsis érintője felezi ρ_1 és ρ_2 külsőszögét,
normálisa a belső szögét, míg a hyperbola érintője felezi
a belső, normálisa a külső szöget, tehát P pontban az ellip-
sis és hyperbola derékszög alatt metszik egymást.

Ha az egyik focusa végtelenben van, kapjuk a confo-

h-2161