BIBLIOTECA
FACULTAȚII
DE

R-526-5

UNIVERSITATEA
„Reg. Ferdinand I", Cluj

SEMINARUL
DE
MATEMATICI

Nr. 6848

m.

No 1575

Függvénytan.

SEMINARUL DE MATEMATICI CLUJ

No 24

Dr Riesz Frigyes ekt.
előadása.

MATHEMAT. SEMINAR KOLOZSVÁR.

MATEMATIKAI INTÉZET KOLOZSVÁR EGYETEM

Kolozsvár.
1911-12. II.

R-526-5

A „függvénytan" kifejezés alatt szorosabb értelemben a **komplex változó** analitikus függvényeinek elméletét értjük. Ezen elmélet fejlődését nem akarom vázolni, sokkal jobb alkalmunk lesz a történeti áttekintésre, és az irodalmi utalásokra majd akkor, ha a tárgyban már tájékozódást szereztünk magunknak.

Komplex változó függvényeiről lesz szó. Szükséges alapismeret a komplex szám fogalmának ismerete és a komplex számokkal való alapműveletek. Ezt feltételezem. Azonban nekünk komplex számokkal nemcsak a négy alapműveletet kell majd végeznünk, hanem szükségesek lesznek a határátmenetek is. Ezért először komplex számok sorozatával foglalkozunk.

Komplex számok sorozata.

Legyen adva a komplex számoknak egy sorozata:

$$z_1, z_2, z_3, \ldots$$

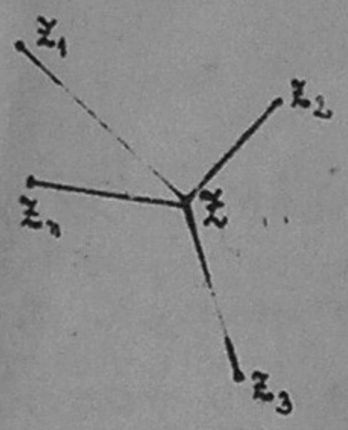
amely z komplex szám felé konvergál, amit így írunk:

$$z_n \longrightarrow z.$$

A definíció teljesen ugyanaz, mint valós számokból alkotott sorozatnál. Ez alatt értjük azt, hogy

$$|z - z_n| \to 0.$$

Tehát akkor mondjuk, hogy z_n sorozat z komplex szám felé konvergál, ha $|z - z_n|$ abszolut értékeinek a sorozata minden határon túl kisebbedik.



Geometriai ábrázolásban a $|z - z_1|$, $|z - z_2|$, ... abszolut értékek a feltrajzolt távolságokkal és akkor mondjuk, hogy z_n sorozatunk z felé konvergál, hogyha ezek a távolságok 0 felé tartanak.

A konvérgentiáta nézve talán a legtöbbet alkalmazott tétel a

Weierstrass-féle kiválasztási tétel.

Ez a következő: Megadom a komplex számoknak valamely sorozatát:

$$z_1, z_2, z_3, \ldots$$

Erről most nem tudom azt, hogy konvergál, csak annyit tudok, hogy mindezek a számok összességükben végesek maradnak, ami azt jelenti, hogy megadható egy bizonyos A szám úgy, hogy valamennyi

$$|z_n| \leq A ;$$

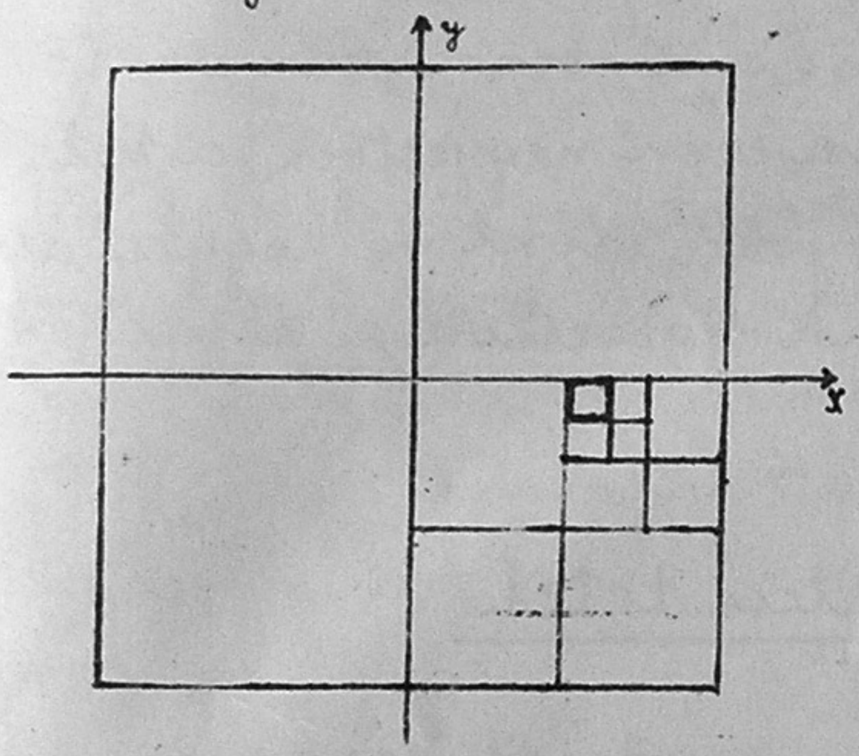
amikor is azt mondjuk, hogy a sorozat „korlátos", vagy hogy „határolt". Ennek a geometriai jelentése az, hogy mindezek a pontok egy véges tartományban vannak, ha pl. az origó körül A sugarú kört rajzolunk, akkor valamennyi szám képe ezen körön belül fekszik. Ezt teszi fel a Weierstrass-féle tétel a sorozatról. A tétel maga pedig így hangzik: Minden korlátos sorozatból ki lehet választani legalább egy konvergens sorozatot. – Szokás ezt Bolzano-Weier-

strass féle tételnek is nevezni.

Bizonyítás. A sorozatunk korlátos. Valamennyi

$$|z_n| < A.$$

Tehát az összes z_n pontok bentfekűsznek egy kör belsejében, de tágabbnak véve a tartományt, bennefekszenek egy négyzet belsejében, amelynek oldalai a valós és képzetes tengelyekkel párhuzamosak és tőlük A távolságra vannak. Most a következőképen okoskodunk: Négyzetünket középvonalaival négyfelé osztjuk, akkor legalább is az egyik részben közülük végtelen sok z_n pont van. Ezt ismét négy részre osztva, ezek



közül legalább az egyikben végtelen sok z_n pont van, ezt azután ugyanazt a meggondolást alkalmazom s.i.t. Ily módon előáll az egymásban foglalt négyzetek sorozata:

$$\square_1, \square_2, \square_3, \square_4, \ldots$$

Ezeknek van legalább egy közös pontjuk, amely valamennyi négyzetben tartalmaztatik. Több közös pont nem lehetséges. Ha pl. két közös pont volna, akkor ezeknek volna egy bizonyos távolságuk egymástól. A négyzetek közt pedig van olyan, amelynek az átlója kisebb, mint ennek a távolságnak a fele, vagyis a két pont nem lehet bent ebben a négyzetben. Tehát csak egy olyan pontja van a síknak, amely a sorozat valamennyi négyzetében bentfoglaltatik. Jelöljük ezt a pontot z^*-gal.

Járjunk el a kiválasztásánál a következőképen:

Az első négyzetben benn van a z_1, a másodikban $z_2, z_3, \ldots$ esetleg nincsen bent, de minthogy végtelen sok z_n van bent, ezek közül azt veszem, amely a legkisebb indexü, ezt jelölöm z''-vel, s.i.t. Tehát

$$z_1, z'', z''', \ldots, z^{(n)} \longrightarrow z^*$$

e sorozat z^* felé konvergál. Ugyanis a $z^{(n)}$ benne van az n.-edik négyzetben, de a z^* is bennevan ezen négyzetben, a kettő távolsága tehát nem lehet nagyobb, mint a négyzet átlója, mir pedig a négyzet átlóinak hosszúsága zérus felé tart.

Az általános konvergentia tétel.

A Weierstrass-féle kiválasztási tételt alkalmazzuk az u.n. általános konvergentia-tétel bizonyítására. Feljesen hasonló tétel már a valós változók analiziséből is ismeretes. - Meg lehet-e ismetni magán a sorozaton, annak belső tulajdonságából, hogy az konvergál? Legyen

$$z_1, z_2, z_3, \ldots$$

sorozat adva. Megmutatom, hogy <u>akkor és csak akkor konvergens a sorozat, ha bármily kicsinynek választom az ε-t, meg lehet határozni az n indexet úgy, hogy:</u>

$$|z_{n+k} - z_n| < \varepsilon$$

<u>minden positiv k-ra nézve</u>. Ez szükséges és elégséges feltétel.

Először szükséges, mert, hogy $z_1, z_2, \ldots$ sorozat konvergál, ez azt jelenti, hogy van egy olyan z érték, hogy

$$|z - z_n| \longrightarrow 0$$

Ebben az esetben meg lehet határozni az n-et úgy, hogy

$$|z - z_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

és

$$|z - z_{n+k}| < \frac{\varepsilon}{2},$$

tehát

$$|z_{n+k} - z_n| \leqq |z - z_n| + |z_{n+k} - z| < \varepsilon.$$

Tehát megmutattuk, hogy, ha a sor konvergál, akkor megválasztható n úgy, hogy ez az egyenlőtlenség fennálljon, tehát, hogy a feltétel szükséges. Kérdés, hogy a feltétel elegendő-e.

$z_1, z_2, \ldots$ sorozatra tudjuk, hogy teljesítve van feltételünk, hogy egy adott ε-hoz található olyan n, hogy bármely positiv k-ra

$$|z_{n+k} - z_n| < \varepsilon.$$

Látjuk, hogy ez a sorozat korlátos. Az n-nél nagyobb indexü z-ék bentfekszenek azon körön, amelyet z_n pont körül r sugárral rajzolunk. A sorozat tehát korlátos. A Weierstrass-féle tétel szerint pedig ebből következik, hogy kiválaszthatunk egy másik sorozatot, amely konvergál. Ha tehát nem is konvergál az egész sorozat, mégis ki lehet belőle egyet választani, amely konvergál. Legyen a kiválasztott sorozat:

$$z', z'', z''', \ldots \longrightarrow z^*$$

Ki kell mutatnunk, hogy az egész sorozatunk a z^* felé konvergál. Vegyünk egy bizonyos m indexet és vizsgáljuk meg, hogy mekkora a

$$z^* - z_n \quad \text{különbség.}$$

Minthogy

$$z^{(m)} - z_n \xrightarrow[m]{} z^* - z_n$$

Minthogy továbbá $z^{(m)}$ m-nek nagyobb értékeinél az eredeti sorozatban z_n után következik, vagyis z_{n+k}-val is jelölhető, azért

$$|z^* - z_n| = \lim_{m=\infty} |z^{(m)} - z_n| \leqq \varepsilon.$$

Ennélfogva az eredeti sorozat is z^* felé konvergál. Tehát feltételunk elegendő is.

Tartomány. Holomorf függvény.

Mielőtt definiálnók azt, hogy mit értünk egy tartományban holomorf függvény alatt, állapitsuk meg először a tartomány fogalmát. Tartományt képeznek az olyan komplex számok, amelyeknek a képei egy kör, ellipszis, vagy bármiuő sokszög belsejét alkotják. Azért lényeges ez a fogalom a függvénytanban, mert egy-egy helyen úgy vizsgáljuk a függvényt, hogy tekintetbe veszünk minden olyan helyet is, a-mely vele szomszédos. Követelünk továbbá hogy a tartomány bármely két helyét a tartományon belül futó úttal össze lehessen kötni. Eszerint tartománynak nevezzük a komplex számsik pontjainak oly halmazát, melynek 1) minden pontja körül lehet olyan kört rajzolni, hogy ezen körfelületnek minden pontja is beletartozzék a halmazba; 2) bármely két pontja összeköthető oly törtvonallal, melynek minden pontja a halmazhoz tartozik. (Könnyen átlátható, hogy a „törtvonal" megszoritás csak látszólagos; helyette pl. tetszés szerinti alakú „folytonos görbé"-t is alkalmazhatnánk.)

A komplex változó bizonyos tartományban egyértelmüen definiált olyan függvényeit, amely ek azon tartomány

minden helyén folytonos-ak és differenciálhatók, „holomorf" függvényeknek nevezzük. – A következőkben tehát ilyen függvényekkel foglalkozunk. Látni fogjuk, hogy ellentétben a valós változó függvénytanával, itt az egyszer való differenciálhatóságból úgyszólván minden egyéb következik.

A függvény folytonossága.

Mit értünk azalatt, hogy a függvény a tartomány egy helyén folytonos. – A tartomány ezen helye legyen z_0 s a függvény értéke ezen helyen $f(z_0)$. A függvényt a z_0 helyen folytonosnak mondjuk, ha minden minden olyan $z_1, z_2, \ldots$ sorozatra, amely olyan, hogy

$$z_n \longrightarrow z_0$$

egyszersmind

$$f(z_n) \longrightarrow f(z_0).$$

Ezzel teljesen egyértékű a következő: Az $f(z)$ függvényről azt mondjuk, hogy z_0 helyen folytonos, ha bármily kis ε-hoz meg lehet határozni egy h-t úgy, hogy, ha

$$|z - z_0| < h$$

akkor egyszersmind

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon.$$

Ez a két definició egyértékű.

Tegyük fel, hogy folytonos volna a függvény az első értelemben, ellenben nem volna az a második értelemben. Megmutatjuk, hogy ez nem lehetséges. Ekkor ugyanis volna egy bizonyos ε-unk, amelyhez nem lehet megadni a követelt h-t. Vagyis akárhogy választom ezen h számokat: $h_1, h_2, \ldots h_n$, amelyek

minden határon túl kisebbednek, egyik sem alkalmas ε-hoz. Hogy h_n sem alkalmas, ez azt jelenti, hogy választhatom z_n helyet úgy, hogy

$$|z_n - z_0| < h_n$$

és hogy ennek dacára

$$|f(z_n) - f(z_0)| \geqslant \varepsilon$$

Válasszunk minden h_n-hez ilyen z_n-et; akkor

$$z_n \longrightarrow z_0;$$

viszont

$$f(z_n) \text{ nem} \rightarrow f(z_0).$$

Tehát, ha a második értelemben nem folytonos a függvény, akkor az első értelemben sem az.

Ha pedig a második definició szerint folytonos a függvény, akkor az első szerint is az. Feltesszük, hogy a függvény a második értelemben folytonos, tehát bármily teicsiny ε-hoz meg lehet határozni a h-t úgy, hogy, ha

$$|z - z_0| < h$$

akkor

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon.$$

Ha most tehát a $z_1, z_2, \ldots$ sorozatra

$$z_n \rightarrow z_0,$$

akkor elég nagy n-ekre

$$|z_n - z_0| < h$$

és ennélfogva

$$|f(z_n) - f(z_0)| < \varepsilon;$$

vagyis

$$f(z_0) \longrightarrow f(z_0).$$

Tehát a két definició aequivalens.

A függvény differenciálhányadosa.

A komplex változós függvény differenciálhányadosánál is

két definiciót lehet használni. Az egyik szerint, ha van olyan $f'(z_0)$ érték, hogy, hacsak

$$z_n \longrightarrow z_0,$$

akkor egyszersmind

$$\frac{f(z_n) - f(z_0)}{z_n - z_0} \longrightarrow f'(z_0),$$

és ez az érték ugyanaz, akárhogy választom a z_0 felé konvergáló z_n sorozatot, akkor a függvény z_0 helyen differenciálható.

A második definició: Ha van egy olyan $f'(z_0)$ érték s ha minden ε-hoz található egy h úgy, hogy amint

$$|z - z_0| < h$$

akkor

$$\left| f'(z_0) - \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| < \varepsilon$$

akkor a függvény a z_0 helyen differenciálható.

A bizonyitása annak, hogy ez a két definició aequivalens olyan, mint a folytonosságnál volt.

A differenciálhatóság geom. jelentésére csak később fogunk rátérni.

A racionális függvény.

Előre megemlitek két olyan függvényt, amelyről evidens, hogy bármely tartományban olyan tulajdonsággal bir, mint aminőktől itt volt szó. Az egyik a konstans, a másik a z. Ezek bármely tartományban, tehát az egész síkban kielégitik feltevésünket. Mindenütt folytonosak és differenciálhatók s az egyik differenciálhányadosa $= 0$, a másiké $= 1$.

A komplex mennyiségek sorozatait szabad összeadni,

kivonni, szorozni és osztani is, hogyha az osztó nem 0. Ebből az következik, hogy a komplex változó holomorf függvényeinek összege, különbsége,.. folytonos és differenciálható, sőt hányadosuk is az, kivéve esetleg azon helyeket, ahol a nevezőben álló függvény értéke 0. Folytonosak és differenciálhatók tehát mindenütt a racionalis egész függvények; és véges számú hely kivételével folytonosak és differenciálhatók a racionális törtfüggvények is.

A differenciál és integrálszámitásból önök több olyan eljárást ismernek, melyek uj függvények definiálására vezetnek; pl. a végtelen sorok, végtelen szorzatok, az inverz függvény képezése, az integrálás. Mindezek alkalmasak a komplex változó uj és uj függvényeinek származtatására is.

A következőkben az integrálfogalom átvitelével foglalkozunk.

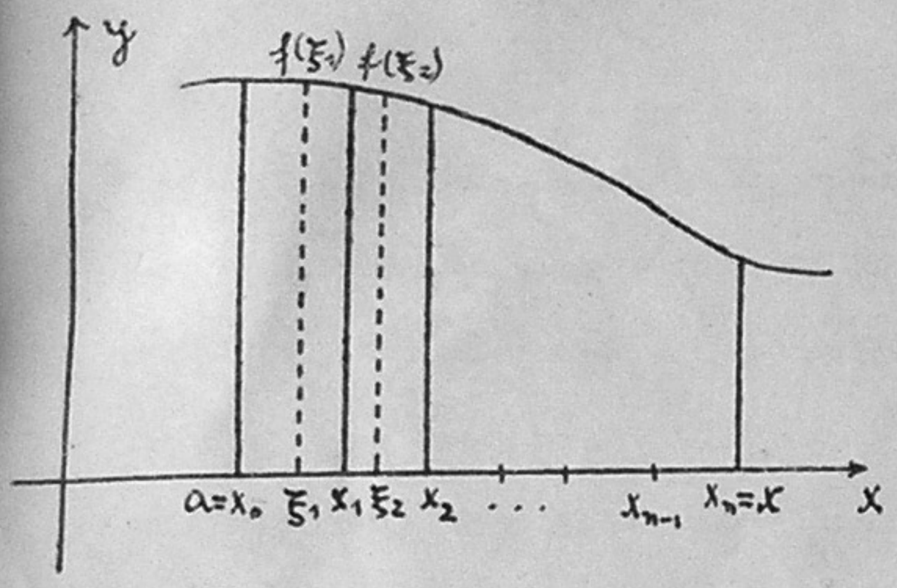
Az integrálról.

Van egy függvényünk és keressük azt a függvényt, amelynek differenciálhányadosa. Hogyan járunk el valós változó függvényeinél? Ezt csak röviden akarom összefoglalni a végből, hogy lássuk, hogy a komplex változó függvényeinél mily eljárást kell követnünk.

Ha van egy $f(x)$ függvényünk, amely bizonyos számközben, vagy az egész számegyenesen folytonos, akkor keresnünk kell egy olyan $F(x)$ függvényt, hogy

$$F'(x) = f(x).$$

Erre a célra a határozott integrált használjuk föl. Az $(a..x)$ intervallumot felosztjuk bizonyos részekre, amely részeken belül megjelölünk egy-egy $\xi_1, \xi_2, \ldots$ helyet. Akkor



$$F(x)=\int_a^x f(x)\,dx=\lim_{\max(x_{k+1}-x_k)\to 0}\sum(x_{k+1}-x_k)f(\xi_{k+1}).$$

Ezt neveztük az $f(x)$ függvény határozott integráljának.

$F(x)$-nek meg van az a tulajdonsága, hogy differenciálhányadosa egyenlő $f(x)$-szel.

Képezzük a különbségi hányadost:

$$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}=\frac{\int_{x_0}^{x_0+h}f(x)\,dx}{h}=f(x_0)+\frac{\int_{x_0}^{x_0+h}(f(x)-f(x_0))\,dx}{h}.$$

Minthogy $f(x)$ folytonos, azért az utolsó integrandus tetszés szerint kicsiny, hacsak h-t elég kicsinynek választjuk. De ha

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon,$$

akkor az utolsó tört is $<\varepsilon$. Ennélfogva a különbségi hányados tényleg $f(x_0)$-hoz tart. Bizonyításunkban lényegesen kihasználtuk a határozott integrálnak következő tulajdonságát:

$$\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx \qquad \text{vagy}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c f(x)\,dx+\int_c^a f(x)\,dx=0$$

Kérdés, sikerül-e komplex változó függvényeire az integrált úgy értelmeznünk, hogy ez a fontos tulajdonság megmaradjon. Később majd beszélnünk kell görbe vonalú integrálokról is. Mert míg a valós változós függvényeknél a-tól b-ig egyenes utunk van, addig a komplex változónál a-tól b-ig nagyon sokféle, egyenes, tört vagy görbevonalú úton juthatunk el.

Egyelőre értelmezzük a következő kifejezést:

$$\int_a^b f(z)\,dz$$

úgy hogy az ab egyenes vonalú úton integrálunk és pedig ugyanazt az eljárást alkalmazzuk, mint az előbb. Csakhogy most a $z_1 - z_0$ nem hosszúság, hanem komplex szám. Továbbképezve $z_2 - z_1, \ldots$ stb-t s megszorozva ezeket a



függvény valamely közbeeső értékével, ezeket összeadjuk, kapunk egy összeget, amely - hogyha a beosztások számát úgy szaporítjuk, hogy az egyes intervallumok hossza egyenletesen 0-hoz konvergáljon, ha tehát minden h-hoz megadható egy olyan n, hogy az n-edik beosztásnál és azon túl a darabok mind kisebbek, mint h —, egy határérték felé tart, amely független attól, hogy hogyan végeztük a beosztásokat.

Ezt nem kell külön bizonyítanunk, mert itt mindjárt visszamehetünk a valós változók függvényeire. Képezzük a következő összeget:

$$\sum (z_k - z_{k-1}) f(\zeta_k)$$

z_k helyett írhatunk $x_k + i y_k$-t és

z_{k-1} " " $x_{k-1} + i y_{k-1}$-et.

Úgyszintén $f(\zeta_k)$-t is fel lehet bontani valós és képzetes részre. Azután különválasztva a valós és képzetes részt, az egész összeget felbontjuk valós és képzetes részre, amely részek mindegyike két részből fog állni, de mind a négy összeg a valós változó egy-egy függvényének az integráljához vezet. Így azután a valós változóra ismeretes eredményekből következik az, hogy a komplex változóra is létezik a-tól b-ig az integrál.

Legyen $f(z)$ a komplex változónak egy bizonyos tartományban holomorf függvénye. Keressünk olyan $F(z)$ függvényt, melyre

$$F'(z) = f(z).$$

Megpróbálkozunk hasonló eljárással, mint valós változó függvényei-nél. Kiindulunk egy a pontból és képezzük az

$$F(z) = \int_a^z f(z)\,dz$$

függvényt. Két nehézségre bukkanunk. Az egyik az, hogy esetleg nem minden z köthető össze a-val egyetlen, a tartományon belül fekvő egyenes vonaldarabbal, a másik az $F'(z) = f(z)$ egyenlőség bebizonyítása. Az elsővel egyelőre nem törődünk; megelégszünk azzal, hogy $F(z)$-t a tartomány egy részében sikerült értelmezni. Ebben a részben meg akarjuk mutatni, hogy $F'(z) = f(z)$. Minden azon múlik, áll-e itt is, hogy

$$\frac{F(z_0+h) - F(z_0)}{h} = \frac{\int_{z_0}^{z_0+h} f(z)\,dz}{h}.$$

Tegyük fel, hogy ez helyes. Mivel $f(z)$ folytonos, minden ε-hoz meg lehet határozni úgy a h-t, hogy

$$|f(z_0+h) - f(z_0)| \leqq \varepsilon$$

s akkor írható, hogy a z_0, z_0+h egyenesen

$$f(z) = f(z_0) + \varepsilon(z),$$

ahol

$$|\varepsilon(z)| < \varepsilon.$$

Tehát

$$\frac{F(z_0+h) - F(z_0)}{h} = f(z_0) + \underbrace{\frac{\int_{z_0}^{z_0+h} \varepsilon(z)\,dz}{h}}_{\mathcal{H}}$$

ahol $\mathcal{H}$ a hiba függvény, mely

$$|\mathcal{H}| \leqq \varepsilon.$$

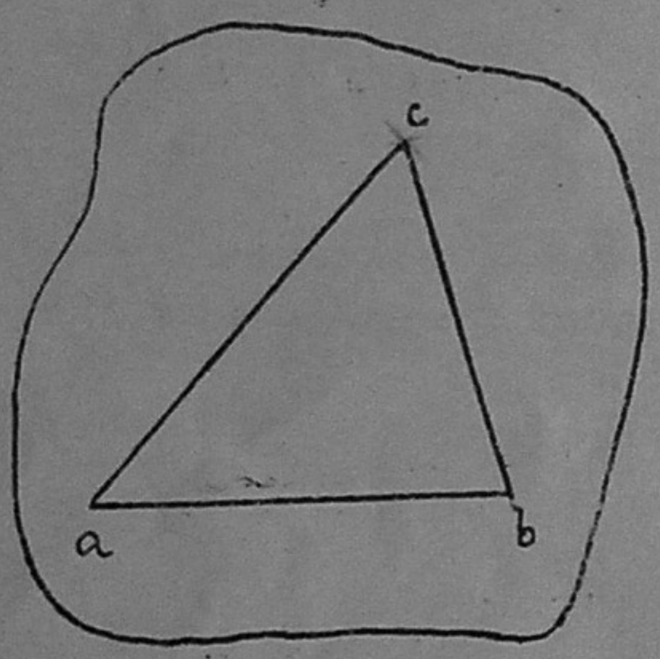
Tehát, ha a két integrálnak a különbségét egyenlőnek vehetem z_0 z_0+h úton vett integrállal, akkor f az F-nek differenciálhányadosa.

Goursat tétele

Tényleg sikerül megmutatnunk a következőt: Minden olyan háromszög mentén vett integrál, amely belsejével együtt egészen beleesik a holomorfitási tartományba, = 0. – Ez az u.n. Goursat-féle tétel. Kimutatjuk ezt először két speciális függvényre. Az első eset az, ha

$$f(z) = \text{konst.} = 1 .$$

Legyen adva egy tartomány, amelyben függvényünk holomorf s benne a, b c háromszög. Ezen esetben, mivel



$$\int_{\Delta} = \int_a^b + \int_b^c + \int_c^a = b - a + c - b + a - c = 0 ,$$

tehát a három integrál összege zérus.

A második speciális eset, ha

$$f(z) = z, \quad \text{akkor}$$

$$\int_{\Delta} = \int_a^b + \int_b^c + \int_c^a = \frac{1}{2}\left(b^2 - a^2 + c^2 - b^2 + a^2 - c^2\right) = 0 .$$

Tehát ekkor is a háromszög mentén vett integrál zérus.

Ezek után állítjuk, hogy –

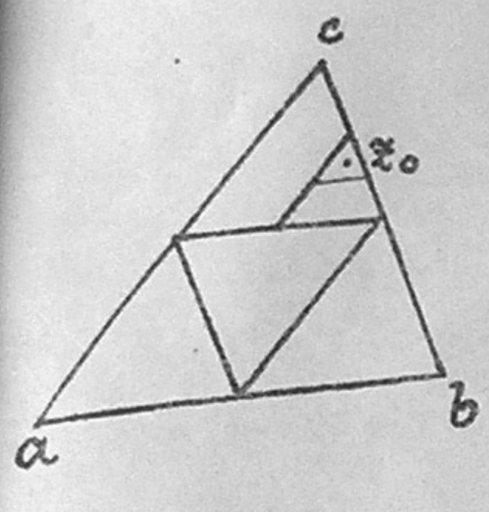
$$J = \int_{\Delta} f(z)\, dz = 0 .$$

Tegyük fel, hogy ez nem igaz.

Ez esetben a következőképpen járunk el: Felezzük a háromszög oldalait s a felező pontokat kössük össze. Ezáltal négy ilyen kis háromszög mentén beszélhetünk az $f(z)$ integráljáról.

Jelöljük ezen integrálokat:

$$J_1' + J_1'' + J_1''' + J_1'''' = J$$



,akkor

$$|\mathfrak{J}| \leqq |\mathfrak{J}_1'| + \cdots + |\mathfrak{J}_1^{(n)}|.$$

Ebből következik, hogy ezen négy abszolút érték közül legalább egy olyan van, amely legalább is akkora, mint $\frac{|\mathfrak{J}|}{4}$, jelölve ezt az integrált $\mathfrak{J}_1$-gyel:

$$|\mathfrak{J}_1| \geqq \frac{|\mathfrak{J}|}{4},$$

az ennek megfelelő Δ_1 háromszöggel folytatva ezt az eljárást, kapunk egy Δ_2 háromszöget s a neki megfelelő $\mathfrak{J}_2$ integrálról ismét áll, hogy

$$|\mathfrak{J}_2| \geqq \frac{|\mathfrak{J}_1|}{4} \quad \text{s. i. t.}$$

Így aztán kapjuk a $\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots$ háromszögsorozatnak megfelelő $\mathfrak{J}, \mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}_2, \mathfrak{J}_3, \ldots$ integrálokat; ezekről pedig tudjuk, hogy

$$|\mathfrak{J}_n| \geqq \frac{|\mathfrak{J}|}{4^n}. \tag{1}$$

Ezen háromszögek egy z_0 pont felé tartanak, amely benne van ezen háromszögek mindegyikében. z_0-ban van $f(z)$ függvénynek differenciálhányadosa, minthogy feltettük, hogy holomorf. Tehát, ha előre megadok egy kis ε számot, akkor rajzolhatok ezen z_0 pont körül egy kis kört úgy, hogy ezen belül

$$f'(z_0) - \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \varepsilon(z),$$

amely

$$|\varepsilon(z)| < \varepsilon.$$

Már most, ha ezen háromszögek közeledtek a z_0 ponthoz, akkor az n-edik lépéstől kezdve ezen háromszögek is benne vannak a z_0 körül ε sugárral rajzolható körben, tehát érvényes rájuk és kerületükre, hogy

$$|\varepsilon(z)| < \varepsilon.$$

De az előbbi egyenlőség így is írható:

$$f'(z_0)(z-z_0) - f(z) + f(z_0) = \varepsilon(z)(z-z_0).$$

Ezt végigintegrálva az n-edik háromszög mentén:

$$-J_n = \int_{\Delta_n} \varepsilon(z)(z-z_0)\,dz$$

Az integrálban az abszolút értékeket véve következik, hogy

$$J_n \leqq \varepsilon k_n^2 .$$

U.i. $|z-z_0|$ távolság kisebb, mint a Δ_n háromszög kerülete k_n, dz pedig a háromszög kerülete, az integrátió útja pedig $= k_n$. Mivel $k_n = \frac{k}{2^n}$, tehát

$$J_n \leqq \varepsilon k_n^2 = \varepsilon \frac{k^2}{4^n},$$

ennélfogva

$$\frac{|J|}{4^n} \leqq \frac{\varepsilon k^2}{4^n} \quad \text{vagy:}$$

$$|J| \leqq \varepsilon k^2 .$$

Az egyenlőtlenség érvényes minden ε-ra, ez pedig csak akkor lehetséges, ha

$$J = 0,$$

vagyis a háromszög mentén vett integrál 0. Ezzel be van bizonyítva a Goursat-féle tétel.

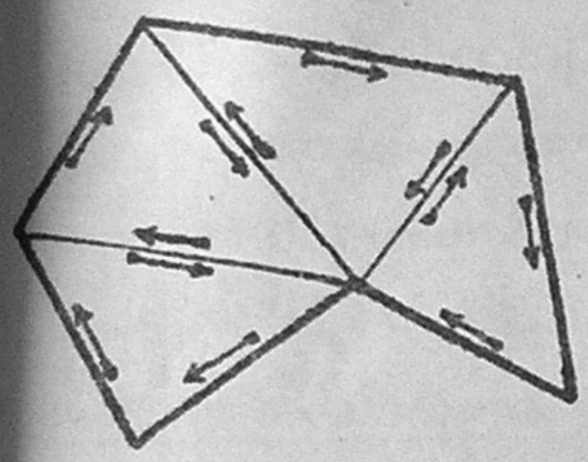
Menjünk most át a háromszög esetéről a sokszögekre. Megjelölünk több pontot: a, b, c, ... l, m; akkor bizonyos föltételek mellett:

$$\int_a^b + \cdots + \int_l^m + \int_m^a = 0 .$$

Tegyük föl, hogy az a, b, c, ... l, m pontok mind különbözők és hogy az a, b, c, ... l, m sokszög oldalai nem metszik egymást, ekkor a sokszöget egyszerű zárt sokszögnek mondjuk. Tételünk ekkor így hangzik: Ha valamely függvény egy egyszerű zárt sokszög kerületén és azon belül holomorf, akkor a függvény integrálja

ezen sokszög kerületén zérus.

Fölbontjuk a sokszöget háromszögekre s ahelyett, hogy a sokszög kerülete mentén integrálnánk, integrálunk az összes háromszögek mentén úgy, hogy azokat positiv (az óramutató forgásával egyező) értelemben futjuk be. Ezen háromszögek mentén vett integrálok összege zérus, mivel minden háromszögre külön-külön zérus. A sokszög belsejébe eső utak mentén vett integrálok az összeadásnál kiesvén marad a sokszög kerülete mentén positiv irányban vett integrál; ez tehát = 0. De akkor is áll a tételünk, ha a sokszögünk nem egyszerűen zárt, mert ilyenkor mindig felbontható több egyszerűen zárt sokszögre, csak bennefekődjék belsejével együtt a holomorfitási tartományban. Meggondolásunkban a sokszögek felbontását illetőleg a szemléletre támaszkodtunk; föltevéseink azonban elemi geometriai úton pontosan igazolhatók. Megjegyzendő egyébként, hogy a tétel későbbi alkalmazásaiban csak olyan utak fognak szerepelni, melyekre a felbonthatás evidens.



Tegyük fel, hogy az a tartomány, amelyben a függvényünket vizsgáljuk egyszerűen összefüggő, vagyis minden benne rajzolható egyszerűen zárt sokszögnek a belseje is benne van a tartományban. Ha már most meg van adva $f(z)$ ezen tartományban, kérdés, hogyan definiáljuk $F(z)$-et, melynek $f(z)$ diff. hányadosa. Legyen e tartományban z_0 és z pontunk, akkor

$$\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz = F(z)$$

integrálnak az értéke független attól, hogy z_0-tól milyen törtvonalat vezetünk z-ig; mert bármely két ilyen zárt törtvonalat alkot, amelynek mentén az integrál = 0.

*

Görbevonalu integrál. Cauchy tétele.

Az $f(z)$ függvény integrálja $=0$ minden olyan zárt és rektifikálható görbe mentén, a melyen és amelyen belül $f(z)$ holomorf. - Ez a Cauchy-féle integrál-tétel, amelyet be fogunk bizonyítani.

Mielőtt azonban ezt bebizonyítanók, a Weierstrass-féle kiválasztási elv felhasználásával bebizonyítjuk azt a fontos tételt, hogy <u>minden valamely zárt halmazon folytonos függvény egyenletesen folytonos.</u> Zárt halmaznak mondjuk az olyan korlátos halmazt, mely minden sűrűsödési helyét (vagyis minden belőle kiválasztható konvergens sorozat határpontját) tartalmazza.

Ha egy függvény z_0 helyen folytonos, ez azt jelenti, hogy ε-hoz meg lehet választani a h-t, hogy amint $|z-z_0|<h$, akkor $|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$, ha pedig egyenletesen folytonos a függvény, akkor minden ε-hoz meglehet adni ugy a h-t, hogyha csak

$$|z_1-z_2|<h \text{ , akkor}$$
$$|f(z_1-f(z_2)|<\varepsilon$$

vagyis, hogyha z_1, z_2 pontok távolsága elég kicsiny, akkor a megfelelő függvényértékek különbsége is kisebb egy tetszésszerinti kicsiny szám: ε.

Tegyük föl, hogy ez nem igaz. Van egy oly ε, amelyhez nem lehet megadni igy a h-t. Válaszuk h-t $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}$-nek, akkor vannak oly $z_1^{(n)}, z_2^{(n)}$ pontok, hogy daczára annak, hogy

$$|z_1^{(n)} - z_2^{(n)}| < \frac{1}{n} \text{ , mégis}$$
$$|f(z_1^{(n)}) - f(z_2^{(n)})| \geqq \varepsilon .$$

Minden n-hez megadható két-két ilyen pont. - Alkalmazzuk most a kiválaszási elvet. Egyelőre a második ponttal ne törődjünk. A $z_1^{(1)}, z_2^{(2)}, z_3^{(3)}, \cdots$ sorozat korlátos, tehát kiválasztható belőle egy ujabb sorozat:

$$z_{1,1}, z_{1,2}, z_{1,3}, \ldots \longrightarrow z^*$$

Ezek közül minden egyes pontnak a $\{z_2^{(n)}\}$ sorozatban egy-egy

$$z_{2,1}, z_{2,2}, z_{2,3}, \ldots$$

pont felel meg. Evidens, hogy az utóbbi sorozat is z^* felé konvergál, mert

$$|z_{1,n} - z_{2,n}| < \frac{1}{n},$$

tehát

$$z_{1,n} - z_{2,n} \to 0.$$

Mivel f folytonos függvény, $f(z_{1,n}) \longrightarrow f(z^*)$

$f(z_{2,n}) \longrightarrow f(z^*)$ és így

$$|f(z_{1,n}) - f(z_{2,n})| \to 0,$$

tehát

$$0 \geqq \varepsilon,$$

vagyis ellenmondáshoz jutottunk.

Tehát: minden zárt halmazon értelmezett folytonos függvény egyenletesen folytonos.

Ezt most alkalmazni fogjuk. Van egy $f(z)$ függvényünk s képezni akarjuk az integrálját egy C görbe mentén. A görbe parameteres egyenlete $z = z(t)$, ahol t parameter változik t_0-tól t^*-ig. A $(t_0 - t^*)$ intervallumot beosztjuk bizonyos számú részekre, ezeket jelöljék:

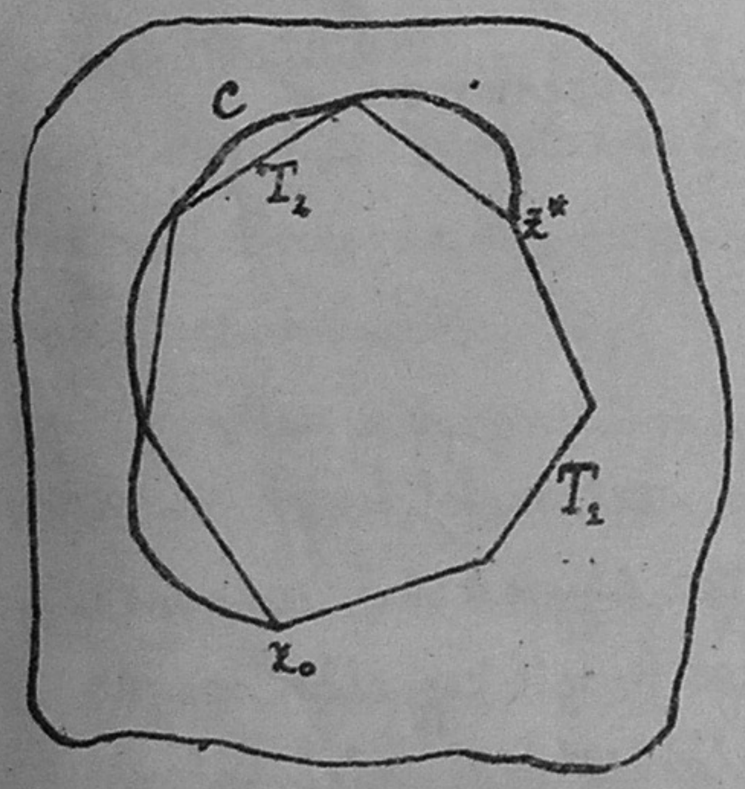
$$t_0, t_1, t_2, \ldots t_n = t^*,$$

a megfelelő z-ket:

$$z_0, z_1, z_2, \ldots z_n = z^*.$$

Iktassunk a $t_0, t_1, \ldots$ közé bizonyos $\tau_1, \tau_2, \ldots$ értékeket s ezeknek megfelelően $\xi_1, \xi_2, \ldots$ értékeket a z-k közé. Képezzük most már a következő kifejezést:

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(z_k - z_{k-1})$$



Rajzoljunk egy T_1 tört vonalat z_0 és z_n közt, amely és minden közte és C közt fekvő pont benfekszik a holomorfitási tartományban; megmutatjuk, hogy a fenti összeg a T_1 törtvonal mentén vett integrálhoz konvergál.

A $t_{1,1}, t_{2,1}, \ldots$ osztó értékeknek megfelelnek a görbén a $z_{1,1}, z_{2,1}, \ldots$ pontok. Hasonlítsuk össze most már summánkat az osztó pontokat összekötő húrokból álló T_2 törtvonal mentén vett integrállal. Erről tudjuk, hogy ez egyenlő a másik, T_1 törtvonal mentén vett integrállal, amelyet a beosztásoktól függetlenül vettünk föl.

$$\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}) - \int_{T_2} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \left[f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}) - \int_{z_{k-1}}^{z_k} f(z)\,dz \right],$$

ahol a $\int$ jel egyenes vonal mentén vett integrált jelent. Mivel pedig

$$z_k - z_{k-1} = \int_{z_{k-1}}^{z_k} dz, \quad \text{azért az előbbi összeg}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left[f(\zeta_k) \int_{z_{k-1}}^{z_k} dz - \int_{z_{k-1}}^{z_k} f(z)\,dz \right] \quad \text{vagy összevonva}$$

$$= \int_{T_2} \left[f(\zeta_k) - f(z) \right] dz = J.$$

Ha már most a t_0 t^* intervallumot oly sűrűn osztom fel, hogy az ívek közel legyen, hogy ott a függvényértékek különbsége kisebb egy előre megadott kicsiny ε számnál, — ezt megtehetem az előbbi tétel értelmében, — akkor az J integrandusa kisebb ε-nál. Ha feltesszük, hogy a görbe rektifikálható, vagyis az összes képezhető T_2 vonalak hosszának van véges felső határa, akkor minden ilyen törtvonal hossza M alatt marad, tehát összegünk a T_2 törtvonal mentén vett integráltól kevesebbel különbözik, mint εM. Eszerint megmutattuk, hogy, hacsak elég sűrű-

nek választjuk a beosztásokat, akkor összegünk tetszésszerinti kicsinnyel különbözik a T_2 törtvonal mentén, tehát az ezzel egyenlő, a T_1 vonal mentén vett integráltól is; tehát a beosztásnk minden határon alul való kisebbítésével az összeg a T_1 mentén vett integrál felé konvergál.

Ennélfogva két dolgot mutattunk meg: Először a Riemannhoz hasonló módon definiált komplex integrál létezik minden olyan rektifikálható görbe mentén; amelynek mentén a függvény holomorf és másrészt az integrál független az úttól, csupán a kezdő és végponttól függ; hacsak csupán oly görbék mentén integrálunk, amelyek közöt is holomorf a függvény.

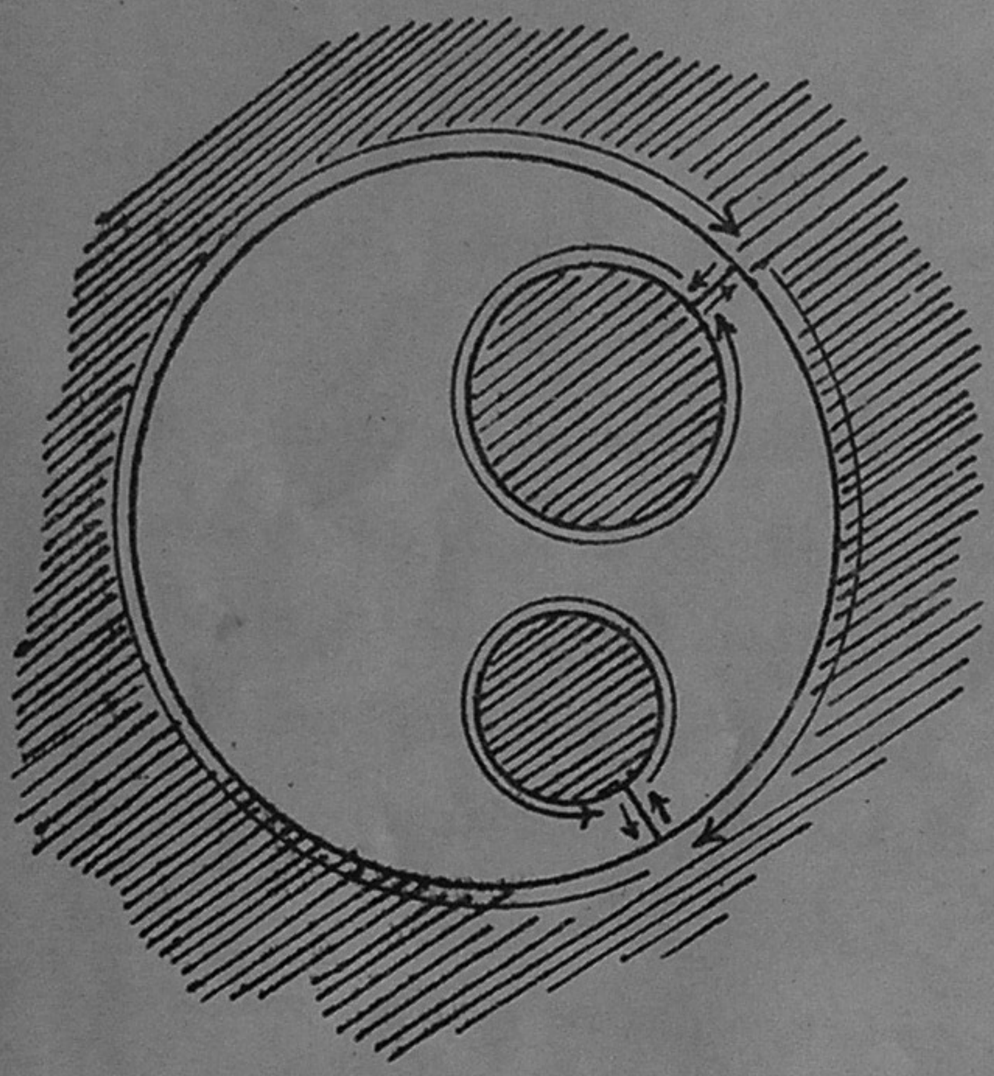
Speciálisan ha egy zárt görbe mentén integrálunk, amelyen és amelyen belül a függvényünk holomorf, akkor az integrál értéke = 0. Ez Cauchy tétele.

Cauchy és utánna a egész Goursatig még számosan a Cauchy-tételt csak bizonyos megszorítások esetén bizonyították be. Pl. ha föltesszük, hogy $\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$ az egész tartományban egyenletesen konvergál $f'(z)$ felé, v. azt, hogy $f'(z)$ is folytonos függvény, akkor a bizonyítás szinte triviális. Goursat érdeme az, hogy a Cauchy-tételnél minden fölösleges megszorítást eliminált.

Megjegyzendő még, hogy néha oly görbék mentén kell az integrált vizsgálni, amelyek mentén nem mindenütt holomorf a függvény. Az ilyen görbékre is áll a Cauchy-féle integrál tétel. Pl. egy görbén belül mindenütt holomorf a függvény, de magán a görbén nem, akkor, ha pl. a függvény a görbén még folytonos, ha már esetleg nem is differenciálható, akkor belül, ahol differenciálható, ott érvényes marad a tétel a területre is, mert ezt megközelíthetem tetszésszerinti pontossággal poligonokkal és a hiba megbecslésénél, amely a terület és a poligonok mentén vett integrál között fellép, tisztán a folytonosság szerepel. Egyébként, ha esetleg ilyen konkrét esettel lesz dolgunk, akkor azt külön meg fogjuk vizsgálni.

Kiegészítő megjegyzések az integrációhoz és Cauchy tételéhez.

Az első megjegyzés az, hogy a Riemann mintájára definiált integrál nemcsak holomorf, hanem minden folytonos függvénynek létezik. Az integrál létezése a folytonos függvények egyenletesen folytonos voltának és az általános konvergencia-kritériumoknak fölhasználásával könnyen bizonyítható.



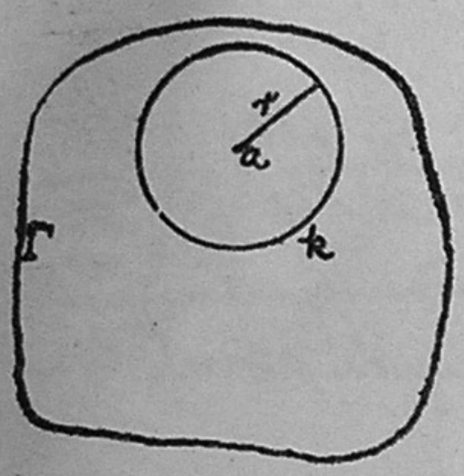
A második megjegyzésünk arra vonatkozik, hogy a Cauchy-féle integrál-tétel többszörösen összefüggő tartomány kerülete mentén vett integrálra is érvényes. Az ilyen tartomány u. i. metszésekkel egyszerűen összefüggővé tehető; az így keletkezett új tartomány kerülete mentén való integrációnál a metszések mentén vett integrálok elesnek és csupán az eredeti tartományt határoló görbék mentén vett integrálok maradnak meg; és pedig a belső határvonalak mentén az integráció ellenkező értelemben történik, mint a külső mentén (l. az ábrát.). Tehát, ha a függvény a tartományban és kerületén holomorf, akkor a külső görbe mentén pos., a belső görbék mentén pedig neg. értelemben integrálva az integrálok összege 0.

A harmadik megjegyzés: Legyen a függvény a tartomány belsejében és egész határán egyetlen „a" hely kivételével holomorf. Ezenkívül tudom azt, hogy a függvény abszolut értéke az egész tartomány

ban véges határ alatt marad

$$|f(z)| < M.$$

Azt állitom, hogy a Cauchy-féle integrál ezen esetben is 0.



Az a pontot körülveszem egy kis r sugarú körrel, az igy kapott kétszeresen összefüggő tartomány belsejében és határán a függvény holomorf, alkalmazható tehát rá a Cauchy-féle tétel:

$$\int_\Gamma = \int_k .$$

de

$$\left|\int_k\right| \leqq 2r\pi M, \text{ tehát}$$

$$\left|\int_\Gamma\right| \leqq 2r\pi M.$$

Mivel pedig r tetszés szerinti kicsinnyé tehető, tehát

$$\int_\Gamma = 0 .$$

Feltételünk igy általában teljesitve van, ha az a helyen a függvény folytonos.

A függvénynek Cauchy-féle integrál előállitása.

Állitsuk elő a függvény értékeit egy bizonyos a helyen. Irjunk az a pont köré egy Γ görbét, melyen és amelyen belül $f(z)$ holomorf. Képezzük a következő hányadost:

$$\varphi(z) = \frac{f(z) - f(a)}{z - a} .$$

A számláló holomorf függvény, mert $f(z)$-től csak egy állandó értékben különbözik, a nevező is holomorf. Ennélfogva a hányados is holomorf, esetleg a $z = a$ hely kivételével. Ezen a helyen a $\varphi(z)$ függvény mindenesetre folytonos. Tehát szabad alkalmazni a Cauchy-féle integrál-

tételt

$$\int_\Gamma \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\,dz = 0$$

Két részre bontva:

$$\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-a}\,dz = \int_\Gamma \frac{f(a)}{z-a}\,dz = f(a)\int_\Gamma \frac{dz}{z-a}$$

A Γ útat helyettesíthetem az „a" pont körül vett $+$ sugarú körrel. Ennélfogva:

$$\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-a}\,dz = f(a)\int_k \frac{dz}{z-a}\,.$$

Számítsuk ki az utóbbi integrált.

$$z = a + +(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

$$dz = +d\varphi(-\sin\varphi + i\cos\varphi),$$

tehát

$$\frac{dz}{z-a} = \frac{+d\varphi(-\sin\varphi+i\cos\varphi)}{+(\cos\varphi+i\sin\varphi)} = i\frac{\cos\varphi+i\sin\varphi}{\cos\varphi+i\sin\varphi}\,d\varphi = i\,d\varphi$$

Ezt behelyettesítve:

$$\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-a}\,dz = f(a)\,i\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi i\, f(a)\,.$$

Ebből következik, hogy

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-a}\,dz\,.$$

Ez a függvénynek Cauchy-féle integrálelőállítása. Ezen integrál segítségével, ha $f(z)$-ét a Γ görbe mentén ismerjük, úgy értékét minden belső helyen kiszámíthatjuk.

Látni fogjuk, hogy hasonló módon előállítható a függvény differenciálhányadosa, sőt a magasabbrendű differenciálhányadosok is.

Számítsuk ki először az első differenciálhányadost. Képez-

zük az $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ hányadost, amely, a függvényt úgy az „a", mint az „a+h" helyen Cauchy-féle integrállal előállítva,

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\left(\frac{1}{z-a-h} - \frac{1}{z-a}\right) f(z)\,dz}{h} =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)\,dz}{(z-a-h)(z-a)}}_{J(h)} = \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^2}}_{J(0)} + \underbrace{\frac{h}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)\,dz}{(z-a-h)(z-a)^2}}_{J'(h)}, \text{ röviden jelölve}$$

$$J(h) = J(0) + J'(h).$$

Megmutatjuk, hogy

$$\lim_{h \to 0} J'(h) = 0,$$

vagyis hogy

$$J(0) = \lim_{h \to 0} J(h).$$

Legyen $|f(z)|$ maximuma $= M$, a Γ görbe hossza $= l$ és a pont távolsága Γ-tól $= d$, akkor

$$|J'(h)| \leqq \frac{|h|}{2\pi} \frac{Ml}{(d-|h|)d^2}.$$

Tehát

$$\lim_{h \to 0} J'(h) = 0.$$

Ennélfogva $J(h)$ $J(0)$ felé tart és minthogy másrészt $J(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, azért

$$f'(a) = J(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^2}.$$

Jegyük föl, hogy meg van mutatva, hogy a függvénynek van n-ed rendü diff hányadosa az „a" helyen és hogy ezt előállítja a köv. integrál:

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}}.$$

Ez igazolva van $n=1$ esetre. Meg kell mutatni, hogy ha igaz egy bizonyos n-re, akkor igaz $n+1$-re is. A bizonyítás a következő:

$$\frac{f^{(n)}(a+h) - f^{(n)}(a)}{h} = \frac{n!}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\frac{1}{(z-a-h)^{n+1}} - \frac{1}{(z-a)^{n+1}}}{h} f(z) =$$

$$= \frac{(n+1)!}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+2}} - \frac{n!}{2\pi i}\int_\Gamma \left[\frac{n+1}{(z-a)^{n+2}} - \frac{\frac{1}{(z-a-h)^{n+1}} - \frac{1}{(z-a)^{n+1}}}{h}\right] f(z)\,dz.$$

Hasonló becsléssel megmutathatjuk, hogy a második integrál $\to 0$, ha csak $h \to 0$. Így tehát ténylég létezik az $(n+1)$-edik diff. hányados és azt az első integrál állítja elő.

Ebből következik, hogy abban, hogy egy függvény valamely tartományban folytonos és elsőrendűen differenciálható, mindenrendű diff. hányadosainak léte és folytonos volta is következik. Vagyis, ha $f(z)$ holomorf, léteznek és holomorfak az $f'(z), f''(z), \ldots$ függvények is.

A Morera-féle tétel.

A Morera-féle tétel nem egyéb, mint a Cauchy-féle tétel megfordítása. Morera-tétele szerint, ha valamely folytonos függvényre érvényes a Cauchy-féle tétel, akkor az a függvény holomorf. Azonban elégséges csak a Goursat-féle tételt, vagyis az integrálok eltűnését minden belsejével együtt a tartományban fekvő háromszög mentén föltenni s már akkor is megmutatható, hogy a függvény holomorf. Legyen

$$F(z) = \int_a^z f(z)\,dz\,,$$

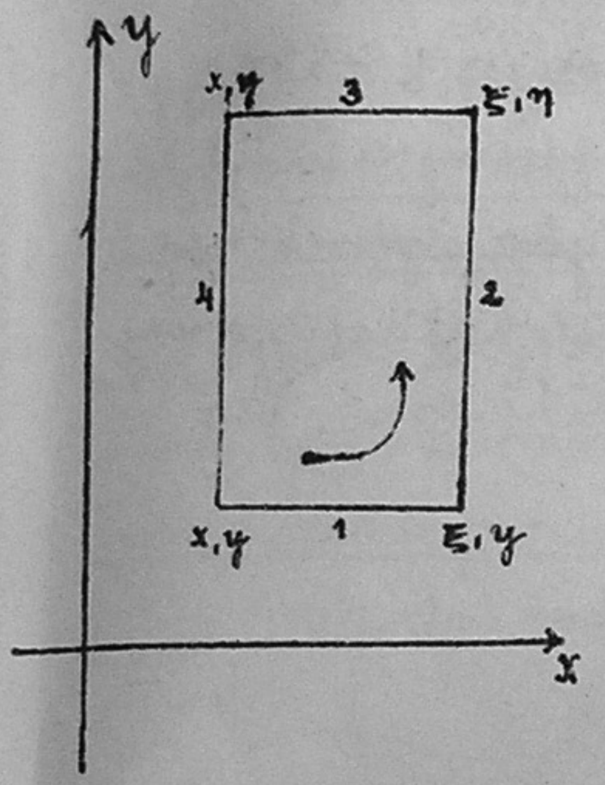
akkor az F integrálfüggvény föltevésünk folytán folytonos és differenciálható s diff. hányadosa f, tehát az F függvény holomorf. De ha a függvény holomorf, akkor az imént bebizonyított tétel szerint differenciálhányadosa is az., vagyis $f(z)$ is holomorf.

Morera tételében, ill. annak imént bebizonyított általánosításában a háromszögek helyébe más idomokat is tehetünk pl. azokat a téglalapokat, melyeknek oldalai a valós és képzetes tengelyekkel párhuzamosak. A bizonyítás lényegében nem változik.

Alkalmazzuk a tételt ezen utóbbi fogalmazásában az

$$f(z) = f(x+iy) = e^x(\cos y + i\sin y)$$

függvényre. A megrajzolt parallelogramma mentén a megjelölt irányban integrálva számítsuk ki egyenkint az integrálokat s látni fogjuk, hogy ezek összege = 0.



$$\int_1 = \int_1^{\xi} e^x(\cos y + i\sin y)\,dx = (\cos y + i\sin y)(e^{\xi} - e^x).$$

Azután

$$\int_2 = i\int_2^{\eta} e^{\xi}(\cos y + i\sin y)\,dy = e^{\xi}[(\cos\eta + i\sin\eta) - (\cos y + i\sin y)].$$

$$\int_3 = (\cos\eta + i\sin\eta)(e^x - e^{\xi})$$

$$\int_4 = e^x[(\cos y + i\sin y) - (\cos\eta + i\sin\eta)].$$

Ha ezeket összeadjuk, 0-t kapunk. Megmutattuk tehát azt, hogy bármely téglalap mentén ezen függvény integrálja 0, tehát Morera tétele szerint függvényünk a síkban mindenütt holomorf.*)

Weierstrass tétele holomorf függvények sorozatáról.

A Morera-tételnek második alkalmazása a következő: Legyen $f_1(z), f_2(z)\ldots$ egy bizonyos tartományban értelmezett holomorf függvények sorozata, amely egyenletesen konvergál egy $f(z)$ függvény felé; vagyis

$$|f(z) - f_n(z)| < \varepsilon_n$$

$$\varepsilon_n \to 0;$$

akkor bebizonyítjuk, hogy $f(z)$ is holomorf.

$$\int_{\Delta} f_n(z) = 0\ ,$$

mert f_n függvény holomorf az illető tartományban. Emiélfogva

*) Azt az értelmezett holomorf függvényt, mely $y = a - ta = e^x$, exponentialis függvénynek nevezzük és e^z-vel jelöljük.

$$\left|\int_\Delta f(z)\,dz\right| = \left|\int_\Delta [f(z) - f_n(z)]\,dz\right| \leq \varepsilon_n k, \quad \text{tehát}$$

$$\int_\Delta f(z)\,dz = 0 .$$

Vagyis, ha holomorf függvényeknek egy sorozata egy bizonyos határfüggvény felé egyenletesen konvergál, akkor ezen határfüggvényre is áll az, hogy az integrálja a holomorfitási tartományban egész egészen benne fekvő Δ mentén 0, tehát Morera tétele szerint ez a határfüggvény is holomorf.

Megmutatjuk még, hogy

$$\lim_{n\to\infty} f_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) .$$

hiszen

$$\frac{k!}{2\pi i}\int_\Delta \frac{f_n(z)\,dz}{(z-a)^{k+1}} = f_n^{(k)}(a).$$

De integrál-unk $n \to \infty$-re az $\int_\Delta \frac{f(z)dz}{(z-a)^{k+1}}$ integrál felé tart.-tével állításunkat bebizonyítottuk. A lényeges az, hogy itt kihasználjuk az egyenletesen konvergens sorozat azon tulajdonságát, hogy az tagonként integrálható. Kimondhatjuk, hogy, <u>ha holomorf függvények sorozata egy bizonyos tartományban egyenletesen konvergál, akkor a sorozat határfüggvénye ott holomorf, azonkívül a sorozatot szabad legalább a tartomány belsejében akárhányszor differenciálni.</u>

Az ezen fejezetben részletesen tárgyalt tétel Weierstrasstól ered. A függvénytani programmjához hiven a tételt hatványsorokra fogalmazta meg; hogy hogyan azt a következő fejezetben mondandók alapján mindenki rekonstruálhatja.

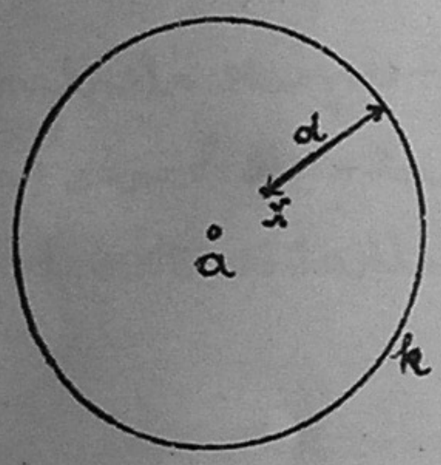
A részletek mellőzésével megjegyzem, hogy meggondolásunk általánosabb sorozatokra is kiterjeszthető; elég pl. föltenni, hogy az $f_n(z)$ függvények összességükben korlátosak, vagyis, hogy minden n-re és minden k-re

$$|f_n(z)| < M .$$

Hatványsor.

A függvénytan Cauchy és Riemann szerint való felépítésénél, amelyet követem, úgy jutunk a hatványsorokhoz, hogy megmutatjuk, hogy minden holomorf függvény a holomorfitási tartomány minden pontja körül hatványsorba fejthető. A függvénytan Weierstrass féle felépítésénél a hatványsor a kiindulási pont; ehhez az elmélethez úgy csatlakozunk, hogy azt mutatjuk majd meg, hogy, ha van egy bizonyos tartományban hatványsorunk, akkor az ott holomorf függvényt ad.

Az első meggondolást követve rajzolunk az „a" pont körül, mint középpont körül egy kört, mely belsejével együtt a holomorfitási tartományban fekszik. Legyen x egy tetszés-szerinti a körön belül fekvő pont. Akkor a függvény értéke ezen x helyen, mint tudjuk



$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_k \frac{f(z)}{z-x}\,dz.$$

Kifejezésünket a következőképpen alakítjuk át:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_k \frac{1}{z-a}\cdot\frac{1}{1-\frac{x-a}{z-a}}\,f(z)\,dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_k \frac{1}{z-a}\left[1+\frac{x-a}{z-a}+\cdots+\left(\frac{x-a}{z-a}\right)^{n-1}+\frac{\left(\frac{x-a}{z-a}\right)^n}{1-\frac{x-a}{z-a}}\right]f(z)\,dz.$$

Tagonkint integrálva

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + R_n.$$

R_n maradéktagot becsüljük meg:

$$|R_n| \leqq \frac{t^n M\, 2r\pi}{2\pi d} = \frac{t^n M r}{d}.$$

Ahol $\left|\frac{x-a}{z-a}\right| = t$ valódi tört, d az x pontnak a területől való távolsága, r a kör sugara és M a körben az $|f(z)|$ maximuma: $|f(x)| < M$

Ha n minden határon túl nő, akkor ez a maradéktag 0 felé konvergál.

Tehát minden holomorf függvény a Taylor-féle módon hatványsorba fejthető olyan kör belsejében, amely teljesen beleesik a holomorfitási tartományba. Bebolésünk egyszersmind azt is mutatja, hogy <u>minden olyan körben, mely területével együtt a tartomány belsejében fekszik, a megfelelő hatványsor egyenletesen konvergál.</u>

Legyen most viszont egy $(z-a)$ növekvő hatványai szerint haladó sor:

$$c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots$$

Először a konvergenciakör sugarának Cauchy-féle meghatározását fogom ismertetni, amelyet Hadamard újra-fölfedezett s azért Cauchy-Hadamard-féle tételnek is nevezik.

Vegyük a valós számoknak azon sorozatát, amelynek általános tagja $\sqrt[n]{|c_n|}$. Általában nem tudhatjuk, hogy ezen sorozatnak van-e határértéke, mert hiszen a végtelenbe is nőhet, meg oszcillálhat is. Azonban minden esetre létezik:

$$\lim_{n \to \infty} \sup \sqrt[n]{|c_n|} = L.$$

értem ezalatt a sorozat legnagyobb torlódási értékét. (Ha a sorozat korlátos, akkor L véges szám; ha nem, akkor $L = \infty$). A Cauchy-Hadamard-féle tétel azt állítja, hogy: <u>ha $r = \frac{1}{L}$ sugárral kört rajzolunk az a pont körül, akkor ezen belül a hatványsor konvergál, kívüle pedig divergál.</u> (A sornak a körön magán való viselkedéséről a tétel nem nyújt felvilágosítást.) Az $r = \frac{1}{L}$ sugarú kört a sor konvergentiakörének nevezzük.

Ha a sorozat nem korlátos, akkor $L = \infty$, s akkor $r = 0$, ezen esetben csak $z = a$-ra konvergál sorunk; minden más értékre divergál. Ekkor hatványsortól nem beszélhetünk. Mikor a sorozat korlátos, csak ekkor beszélhetünk hatványsortól s ekkor két eset lehetséges: L vagy egy nulltól különböző véges szám, vagy $L = 0$.

Az utóbbira példa gyanánt szolgál az

$1+(z-a)+\frac{(z-a)^2}{2^2}+\frac{(z-a)^3}{3^3}+\dots$ sor. Ennél

$$|c_n|^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{n}\longrightarrow 0\,;$$

tehát $$L=0\quad,\quad r=\infty\,;$$

a konvergenciakör sugara végtelen, vagyis a hatványsor minden z-re konvergál. Az ilyen, minden z-re konvergens sorok értelmezik az u.n. transzcendens egész függvényeket.

Ha L véges, akkor a $|z-a|=\frac{1}{L}$ körön belül a hatványsor konvergál, a körön kívül pedig divergál. Bizonyítsuk ezt be!

Jegyük föl, hogy z a körön kívül van, vagyis

$$|z-a|>r=\frac{1}{L}\,,$$

ami így is írható, hogy

$$|z-a|=\frac{1}{L-\varepsilon}\quad,\quad \varepsilon>0\,.$$

Viszont, ha z a körön belül fekszik, akkor, ε-t alkalmasan választva

$$|z-a|=\frac{\theta}{L+\varepsilon}\quad,\ \varepsilon>0\quad,\ \theta<1\,.$$

Vegyük először a belül fekvő pontot. Akkor

$$c_n|z-a|^n=\theta^n\left(\frac{|c_n|^{\frac{1}{n}}}{L+\varepsilon}\right)^n<\theta^n$$

majdnem minden n-re (vagyis legfőljebb véges számú tag kivételével. Ennélfogva a sor abszolut konvergens, mert majdnem minden tagja abszolut értékére nézve kisebb egy valódi tört illető hatványánál.

Viszont, ha z a körön kívül van, akkor végtelen sok van olyan a c_n-ek közt, amelyekre áll, hogy

$$|c_n|>(L-\varepsilon)^n\,,$$

ami az L definíciójából következik. Ennélfogva végtelen sok olyan van a sor tagjai közt, amelyekre

$$|c_n(z-a)^n|>1\,.$$

Ezen esetben tehát a hatványsor divergál.

ezzel bebizonyítottuk a Cauchy-Hadamard-féle tételt, melyet a következőképp fogalmazunk meg: A konvergenciakör sugara:

$$r = \frac{1}{\limsup_{n \to \infty} |c_n|^{\frac{1}{n}}}.$$

Könnyen belátható azt is, hogy sorunk minden r-nél kisebb sugarú körön belül egyenletesen konvergál. Mert ekkor

$$|z - a| < \frac{1}{L - \varepsilon}, \text{ de akkor}$$

$$\frac{1}{L - \varepsilon} = \frac{\Theta}{L - 2\varepsilon} \quad (\Theta \text{ valódi tört})$$

írható, ennélfogva

$$|z - a| < \frac{\Theta}{L - 2\varepsilon}$$

vagyis legfeljebb végesszámú tag kivételével és pedig minden z-re, amely a belső körön belül van, minden tag kisebb, mint Θ^n, vagyis a sor nemcsak konvergál, hanem egyenletesen konvergál ezen körön belül.

Megmutatjuk most, hogy a hatványsor összege a konvergencia kör belsejében holomorf függvényt értelmez. Legyen $\varrho < r$, akkor ezen ϱ sugarú körön belül és még a határán is, a hatványsor egyenletesen konvergál. A hatványsor minden részletösszege holomorf függvény; a ϱ sugarú körben a részletösszegek egyenletesen konvergálnak az $f(z)$ összeghez; tehát Weierstrass tétele szerint ezen körben a kapott $f(z)$ függvény is holomorf. Mivel pedig ϱ-t r-hez tetszésszerint közel választhatjuk, azért végre $f(z)$ az egész konv. kör belsejében holomorf.

Végül ugyancsak Weierstrass tétele alapján a hatványsor a konvergenciakör belsejében akárhányszor tagonkint differenciálható. (Ebből és a Cauchy-Hadamard-féle tételből könnyen következik még a tagonként való integrálhatóság is).

—

A Cauchy-féle szorzási tétel hatványsorokra.

Legyen két hatványsorunk.

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots$$

és

$$g(z) = d_0 + d_1(z-a) + d_2(z-a)^2 + \cdots$$

Legyen r a 2 konvergencia sugár közül a kisebbik. A $|z-a| = r$ kör belsejében az $f(z).g(z)$ függvény szintén holomorf, tehát hatványsorba fejthető.

$$f(z).g(z) = e_0 + e_1(z-a) + e_2(z-a)^2 + \cdots ,$$

ahol ezen e koefficienseket a c és d koefficiensekből ki lehet számítani. És pedig

$$e_k = c_0 d_k + c_1 d_{k-1} + \cdots + c_k d_0 .$$

Ezt könnyü belátni, mert hiszen az illető z helyeken mindakét hatványsor abszolút konvergens, abszolút konvergens sorokat pedig szabad egymással szorozni és a tagokat úgy rendezni, ahogy akarjuk. Ez a sorok elméletéből ismeretes.

Lássuk a kérdésnek ettől független független függvénytani tárgyalását. Határozzuk meg $f(z).g(z)$ együtthatóit. Az ismeretes Leibnitz-féle differenciálási szabály szerint

$$\left(f(z).g(z)\right)^{(k)} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} f(z)^{(j)} g(z)^{(k-j)} .$$

Mindezt most az „a" helyen kell venni. Akkor

$$k!\, e_k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} j!\, c_j (k-j)!\, d_{k-j} ,$$

tehát

$$e_k = \sum_{j=0}^{k} c_j d_{k-j} .$$

Így módon fejezhetők tehát ki az $f(z).g(z)$ koefficiensei.

—

Néhány holomorf függvény hatványsora..

Az $f(z) = f(x+iy) = e^x(\cos y + i\sin y)$

függvényről, melyet e^z-vel is jelöltünk, megmutattuk, hogy az egész síkban holomorf. Fejtsük ezt most hatványsorba a $z=0$ hely körül. Erre a célra meg kell határozni a diff. hányadosait. Először képezzük az első diff. hányadost. Minthogy a differenciálhányados léteziese már be van bizonyítva, elég, ha a különbségi hányadost valós h-kra képezzük. Ha h valós, akkor

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \frac{e^{x+h}-e^x}{h}(\cos y + i\sin y).$$

A kifejezés határértéke pedig =

$$f'(z) = e^x(\cos y + i\sin y) = f(z)$$

Ennélfogva minden k-ra

$$f^{(k)}(z) = f(z)$$

A 0 helyen

$$f^{(k)}(0) = f(0) = 1$$

ennélfogva

$$f(z) = e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$$

Az e^z jelölésnek van egy különös előnye, t.i. $\cos y + i\sin y$ számára egyszerűbb kifejezést kapunk:

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y$$

[Eljutottunk volna az e^z-hez úgyis, hogy felvetjük azt a kérdést: van-e olyan függvény, amely a differenciálhányadosával azonos?]

Mivel az e^z függvény mindenütt holomorf, azért a hatványsor az egész síkban konvergens. Ha a hatványsorból indultunk volna ki és a konv.-sugarat meg akarnók határozni, akkor vizsgálnunk kéne a következő sorozatot:

$$1,\ \left(\frac{1}{2!}\right)^{\frac{1}{2}},\ \dots,\ \left(\frac{1}{n!}\right)^{\frac{1}{n}},\ \dots$$

Kimutatható, hogy határértéke 0. Ugyanis, mivel a mértani közép $\leqq$ a számtani középnél, azért

$$\left(\frac{1}{n!}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{(n!)^{\frac{1}{n}}} \leqq \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}}{n} < \frac{1+\log n}{n} \to 0$$

(Alkalmazhattuk volna azt a szabályt is, hogy ha $a_n \to 0$, akkor egyszersmind $\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n} \to 0$. Itt $a_n = \frac{1}{n}$)

Vegyünk most még egy másik transzcendens egész függvényt a cosz-t és sin z-t. Legyen

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \quad \text{és} \quad \sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2}$$

akkor ebből fölírhatjuk a sin és cos hatványsorát és pedig

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots$$

Tehát az előbb felírt relációnk így is írható, hogy

$$\cos z + i \sin z = e^z$$

Az e^z, cosz, sinz az egész síkban értelmezett, mindenütt holomorf függvények. Az ilyen függvényeket <u>egész függvénynek</u> nevezzük. Egész függvények a polinomok is; megkülönböztetésül a többi egész függvényt <u>transzcendenseknek</u> mondjuk.

A nem egész függvények sorbafejtései közül legfontosabbak az $\frac{1}{1-z}$ sor előállításai. A 0 hely körül

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots ;$$

általában az $a \neq 1$ hely körül

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-a} + \frac{z-a}{(1-a)^2} + \frac{(z-a)^2}{(1-a)^3} + \dots .$$

Az $\frac{1}{1-z}$ függvénynek most említett és még egyéb sorbafejtései különösen azért fontosak, mert mint már a Taylor-féle

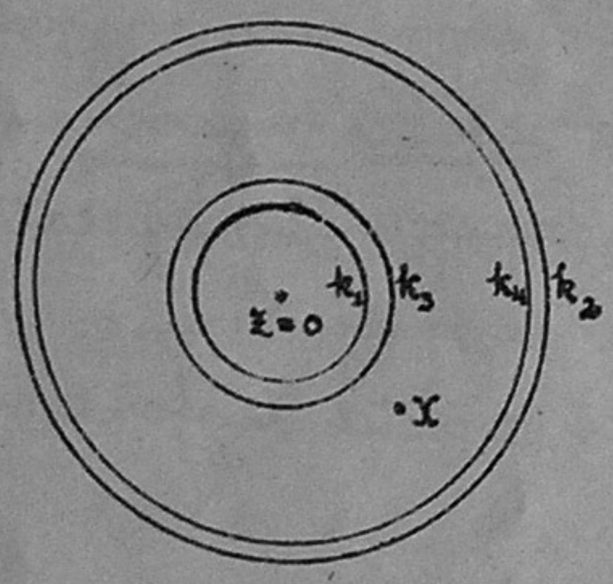
sor származtatásánál láttuk és még más esetekben is látni fogjuk, a Cauchy-féle integrálelőállítás segítségével a tetszés-szerinti holomorf függvények sorbafejtésére vonatkozó számos feladat az $\frac{1}{1-z}$ megfelelő kifejtésére vezethető vissza.

A Laurent-féle sor.

A függvénynek Laurent-féle sorbafejtésénél, amely sor pos. és neg. hatványok szerint halad, ismét a Cauchy-féle tételt alkalmazzuk.

Laurent-féle sorba fejthető a függvény, ha egy körgyűrű belsejében holomorf, amikor is a sorbafejtés ezen körgyűrű belsejében érvényes. A belső kör lehet esetleg bármily kicsiny, ha a függvény belül csak egy izolált pontban nem holomorf. A külső kör végtelen nagy is lehet.

A függvényről föltesszük, hogy holomorf egy körgyűrű belsejében, amelynek a középpontját egyszerűség kedvéért a $z=0$ pontba tehetjük a z-a új változó bevezetésével. Egy közbeeső x pontban előállíthatjuk a függvény értékét, a Cauchy-féle integrállal. Miután nem tettünk föl semmit a függvénynek, a k_1, k_2 körökön való viselkedéséről, célszerű lesz a gyűrűn belül két újabb k_3, k_4 kört választani mindenesetre úgy az x pont közéjük essék.



A függvény értéke az x pontban

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{k_4}\frac{f(z)}{z-x}\,dz - \frac{1}{2i\pi}\int_{k_3}\frac{f(z)}{z-x}\,dz = \frac{1}{2i\pi}\left(J_4 - J_3\right)$$

Számítsuk ki J_4-et. J_4-ben $\frac{1}{z-x}$ sorbafejthető a következőképen

$$J_4 = \frac{1}{2i\pi}\int_{k_4} \frac{f(z)}{z}\left(1 + \frac{x}{z} + \frac{x^2}{z^2} + \cdots\right) dx$$

t.i mivel z a k_4 körön változik és x belső pont, azért $\left|\frac{x}{z}\right|$ maximuma valódi tört, tehát a fölírt mértani sor a k_4 körön egyenletesen konvergens és azért tagonkint integrálható.

$$J_4 = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots ,$$

ahol

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{k_4} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\, dz .$$

Ugyanigy $J_3 = -\frac{1}{2i\pi}\int_{k_3} \frac{f(z)}{x}\left(1 + \frac{z}{x} + \frac{z^2}{x^2} + \cdots\right) dz .$

Itt z a k_3 körön változik, $|x| > |z|$, tehát $\frac{z}{x}$ szerint fejtünk sorba. S így

$$J_3 = \frac{a_{-1}}{x} + \frac{a_{-2}}{x^2} + \cdots ,$$

ahol

$$a_{-n} = \frac{1}{2i\pi}\int_{k_3} f(z)\, z^{n-1}\, dz$$

Azon függvényeink azonban, amelyek az a_n és a_{-n}-ben az integrál jele alatt állanak, tartományunknak a k_1 és k_2 közé eső gyűrűje egész belsejében holomorfok, ennélfogva az integrál értéke nem változik, hogyha más koncentrikus körön végezzük is az integrációt, bármily olyan k kör mentén, mely k_3 és k_4 közé esik. Ha még n pos. számot is, meg neg. számot is jelenthet, akkor egységes formulával írhatjuk, hogy

$$a_n = \frac{1}{2i\pi}\int_k f(z)\, z^{-n-1}\, dz$$

Végeredményképen pedig írhatjuk, hogy:

$$f(x) = \cdots + a_{-2}x^{-2} + a_{-1}x^{-1} + a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

amely sor <u>előállítja a függvényt az egész körgyűrű belsejében és pedig úgy, hogy egyenletesen konvergál minden, a</u>

körgyűrűs belsejébe eső tartományban. Ez a függvénynek az u.n. Laurent-féle sora:

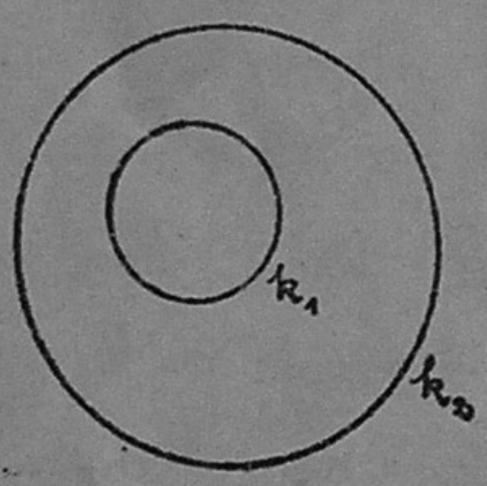
Tegyük föl, hogy k_1 kör egy pontba zsugorodik össze, akkor a középpont kivételével érvényes a formula a k_2 körben. Márészt, ha k_2 esetleg végtelen nagy, akkor formulánk előállítja a függvényt egy bizonyos k_1 körön kívüb az egész síkban.

Ha a függvény a k_1 kör egész belsejében is holomorf, akkor $f(z)z^{-n-1}$, $n=-1,-2,\dots$ stb mellett a k egész belsejében holomorf és Cauchy tétele szerint

$$a_{-n} = 0 \qquad (n = 1, 2, \dots)$$

Ekkor tehát a Laurent-sor Taylor-sorba megy át.

1. Megjegyzés. Ha felvesszünk egy bármily szabály szerint felírt neg. és pos. hatványok szerint haladó sort, ha a pos. hatványok szerint haladó résznek a konvergencia köre k_2, a neg. hatványok szerint haladónak pedig k_1 és a k_1 és k_2 közé eső részben mindkét sor konvergál, akkor a sorok összege az egész gyűrűben holomorf függvényt ad; föltéve természetesen, hogy k_2 a k_1-et magában foglalja. – Könnyű megmutatni, hogy az így értelmezett függvény Laurent-sora a két megadott sor összefoglalása.



2. Megjegyzés. Tekintsük az

$$\frac{A}{z-a} + \frac{B}{z-b} + \frac{C}{z-c}$$

rationalis függvényt; föltesszük, hogy a, b, c abszolút értékei különbözők. Rajzoljunk a O pont körül a három ponton át köröket. – Akkor, ha z a legkisebb körön belül fek-

szik, mindaháromtag z positiv hatványai szerint haladó hatványsorba fejthető. Tehát az első részben a következő sorfejtést kapjuk:

$$-\frac{A}{a}\left(1+\frac{z}{a}+\frac{z^2}{a^2}+\cdots\right)-\frac{B}{b}\left(1+\frac{z}{b}+\cdots\right)+\frac{C}{c}\left(1+\frac{z}{c}+\cdots\right)=$$
$$=-\left(\frac{A}{a}+\frac{B}{b}+\frac{C}{c}\right)+z\left(-\frac{A}{a^2}-\frac{B}{b^2}-\frac{C}{c^2}\right)+\cdots \text{ stb}$$

A II. részben az első tagból negativ hatványok szerint haladó sor lesz, a többi megmarad positiv egész hatványok szerint haladó sornak. A III-ban az első kettőből lesz neg. hatványok szerint haladó sor, végre a negyedikben, mindaháromkörön kívül csupa negativ hatványok szerint haladó sort kapunk. A I., II., IV. részekben tehát Laurent sort kapunk, melyből a IV.-ben a positiv hatványok is elmaradnak. (Ábrát l. lentebb.)

3. Megjegyzés. Appel egy az s_1, s_2, s_3 körívek által határolt háromszögben (és határán) holomorf függvényt a következőképen fejti racionális függvények szerint haladó sorba:

$$f(x)=\frac{1}{2i\pi}\int_{s_1+s_2+s_3}\frac{f(z)}{z-x}dz=\frac{1}{2i\pi}\left(J_1+J_2+J_3\right)$$

ha t. i. $J_1=\int_{s_1}\frac{f(z)}{z-x}dz$ stb.

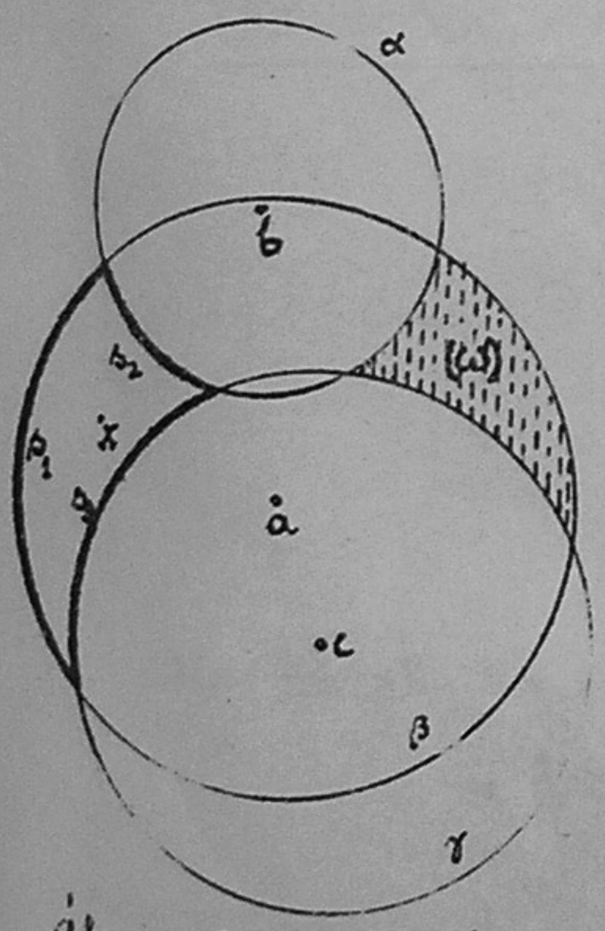
Az s_1 ív körének középpontja a lévén s mivel x ezen kör belsejében fekszik (l. az ábrát), tehát

$$J_1=c_0+c_1(x-a)+\cdots;$$

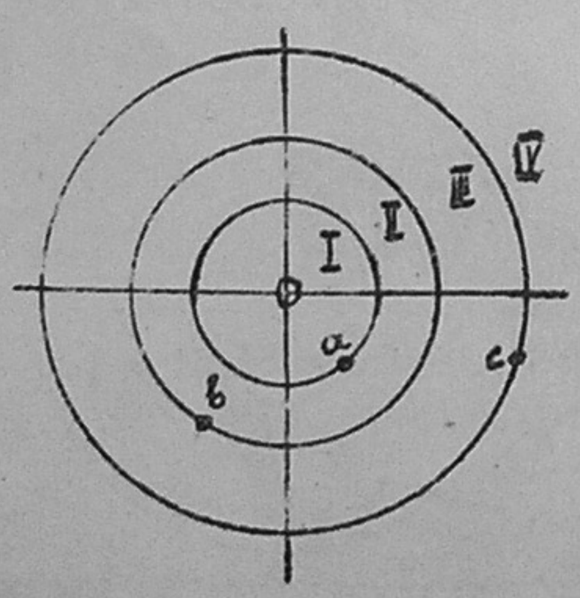
ellenben

$$J_2=d_0+d_1(x-a)^{-1}+\cdots,$$

negativ hatványok szerint haladó sort kapunk, mivel x ezen b centrumú körön kívül van.



ábra a 3. megjegyzéshez.



ábra a 2. megjegyzéshez.

Éppúgy $$\mathfrak{J}_3 = e_0 + e_1 (x-c)^{-1} + \cdots$$

ezen három sor összefoglalása $f(x)$-nek egy racionális függvények szerint haladó sorát szolgáltatja, amely konvergens az ívháromszög belsejében.

Ez a sor különösen Appel következő megjegyzése miatt érdekes: A sor a vonalkázott háromszögben is konvergál; de itt az értéke 0. Mert

$\mathfrak{J}_1$ konvergens az $\mathfrak{d}_1$ körön belül
$\mathfrak{J}_2$ " " $\mathfrak{d}_2$ " kívül
$\mathfrak{J}_3$ " " $\mathfrak{d}_3$ " kívül,

tehát mindahárom sor konvergens az (ω) háromszögben és itt is $\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)\,dz}{z-x}$ - et

állítja elő, de itt $\frac{f(x)}{z-x}$ holomorf (mert x kívül van), az integrálja $=0$.

Holomorf függvény sorbafejtése polinomok szerint.

Legyen a függvényünk értelmezve egy $\mathfrak{C}$ görbe határán és belsejében, akkor

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{C}} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}$$

a függvénynek Cauchy-féle előállítása szerint. De ez az integrál értelmezése szerint

$$= \lim \sum \frac{f(\zeta_k^{(n)})(\zeta_{k+1}^{(n)} - \zeta_k^{(n)})}{\zeta_k^{(n)} - z} = \lim R_n(z),$$

ahol a $\zeta_k^{(n)}$ - k bizonyos a $\mathfrak{C}$ görbén levő pontok. A limeszre való átmenettel abban áll, hogy ezen pontokat mind sűrűbben

helyezzük el. Tehát a Cauchy-féle integrál előállítás, ha visszamegyünk az integrál értelmezéséhez, a függvénynek racionális törtfüggvények végtelen sorozatával való előállítását is szolgáltatja. Sor alakban írva:

$$\lim R_n(z) = R_1(z) + [R_2(z) - R_1(z)] + [R_3(z) - R_2(z)] + \cdots$$

Ez a racionális függvények szerint haladó sorbafejtés pedig egyenletesen konvergál minden, a C-n belül fekvő tartományban. Magán a határon az egyes függvényeknek lehetnek végtelenségi helyei.

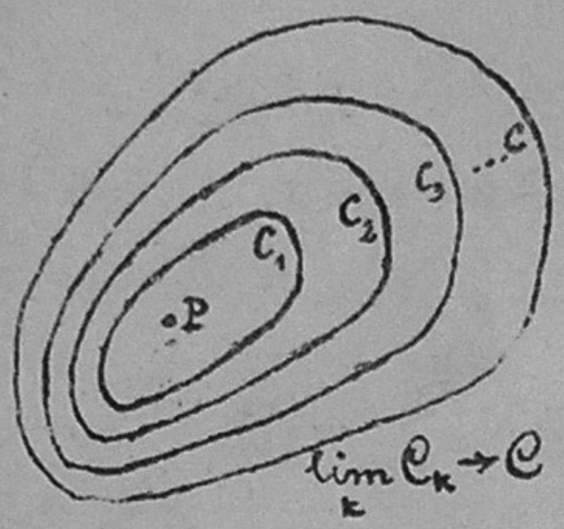
Ezt a Rungetól (Acta Math. VI) származó megjegyzést használjuk föl annak a megmutatására, hogy a tetszőleges szerint megadott egyszerűen megadott C görbe belsejében mindenütt holomorf függvény ezen tartományban polinomok szerint haladó sorba fejthető. A tetszőleges szerinti polinomsor eszerint sokkal általánosabb, mint a hatványsor, melynek konvergenciatartománya mindig köralakú.

Az idevágó irodalomból legfontosabbak Runge, Painlevé, Hilbert és Mittag-Leffler dolgozatai; összefoglaló monografiát írt nemrég Montel, „Leçons sur les séries de polynomes d'une variable complexe" címmel.

Tegyük föl egyelőre, hogy a C görbe konvex és hogy már találtunk a C görbére egy ilyen előállítást, hogy

$$f(z) = \lim_{n \to \infty} R_n(z),$$

ahol $R_n(z)$ rationalis függvény, amelynek a polusai a C görbén vannak. Tudjuk ezen függvénysorozatról azt, hogy az minden belső tartományban egyenletesen konvergál. Ezen belül fekvő görbék sorozata legyen $C_1, C_2, \ldots$, amelyek közül mindegyik benne van a következőben. Ez a görbesorozat legyen olyan, hogy



$$\lim_k C_k = C$$

Ilyeneket kaphatunk, pl, ha a C görbét egy belső P pontjából hasonlósági transzformatióval kisebbitve állitjuk elő a görbesorozatot.

Akkor bármilyen nagy k számhoz meg lehet úgy adni egy n-et, hogy egy bizonyos $C^{(k)}$ tartományban és határán

$$|f(z) - R_n(z)| < \frac{1}{k} .$$

Ugyanis $R_n(z)$, $\frac{A_k}{z-\zeta_k}$ alakú tagokból áll. $\frac{A_k}{z-\zeta_k}$ -t konvergens hatványsorba lehet fejteni egy oly körben, mely a ζ_k-n megy át és a $C^{(k)}$-t egészen magában foglalja. Tehát az összes ζ_k-kra vonatkozó ily hatványsorok konvergensek a $C^{(k)}$-ban. Ezeket a hatványsorokat egy tagnál elvágjuk, pl. ott, ahol a többi tagok elhagyásából keletkezett hiba $< \frac{1}{mk}$, ha t.i. R_n-ben m számú $\frac{A_k}{z-\zeta_k}$ alakú tag van, akkor e csonka hatványsorok összege a $C^{(k)}$-ban $m \cdot \frac{1}{mk} = \frac{1}{k}$-nál kisebb hibával szolgáltatja R_n-et. Ezen összeg, mely már polinom —, legyen P_k. Mivel pedig

$$|R_n(z) - P_k(z)| < \frac{1}{k} ,$$

a két hibát összegezve

$$|f(z) - P_k(z)| < \frac{2}{k} .$$

Tehát $f(z)$-t ezen $C^{(k)}$ görbén belül határozott polinommal megközelitettük úgy, hogy a hiba kisebb, mint $\frac{2}{k}$. Minden k indexhez van egy $C^{(k)}$ görbénk és polinomunk $P_k(z)$. Így kapunk egy $P_1(z), P_2(z), P_3(z), \dots$ sorozatot, mely sor alakban is irható:

$$P_1(z) + [P_2(z) - P_1(z)] + [P_3(z) - P_2(z)] + \cdots$$

Akár a sorozat, akár a sor minden $C^{(k)}$-n belül egyenletesen konvergál $f(z)$ felé. Tehát az egész sorozat $f(z)$ felé

konvergál valamennyi belső tartományon belül, mert mindig lehet oly nagy k-t találni, hogy $\mathfrak{C}_k$ a tartományt egészen magában foglalja.

Ezzel megmutattuk azt, hogy, ha van egy konvex időmunk és az az által határolt tartomány belsejében és magán a határon a függvényünk holomorf, akkor a függvényt polinomok szerint haladó sorba lehet fejteni úgy, hogy ez a sor minden belső tartományban egyenletesen konvergál a függvény felé.

Sőt elhagyható az a föltevés, hogy a függvény magán a görbén holomorf. De az sem lényeges, hogy a tartomány konvex. Ami az első föltevést illeti, azt úgy eliminálhatjuk, hogy már a racionális függvényekkel való megközelítésre is a $\mathfrak{C}$-t belülről mindjobban megközelítő görbéket alkalmazunk. Ezeken a függvény minden esetre holomorf, tehát érvényes a Cauchy féle integrálelőállítás. A második föltevést a racionális törtfüggvény polinomok szerint haladó sorbafejtésénél használtuk ki; a konvexitásra azért volt szükség, hogy hatványsorba fejthessünk. Azonban meg lehet mutatni, hogy létezik oly P_m polinomsorozat, hogy

$$\frac{1}{z-\zeta} = \lim_{m\to\infty} P_m(z),$$

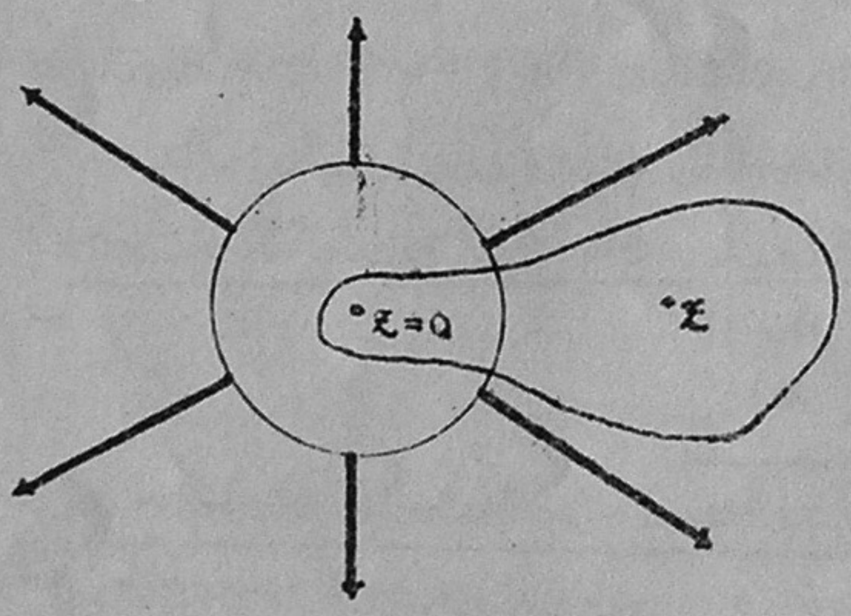
ahol $P_{(m)}(z)$ sorozat mindenütt az egész számsíkban konvergál $\frac{1}{z-\zeta}$ felé kivéve egyetlen egy tetszés szerint megadható vonalat, amely a ζ pontból a végtelenbe megy és minden olyan tartományban, amely ezen kizárt vonalat nem metszi vagy nem érinti, egyenletesen konvergál.

—

Mittag-Leffler tétele.

Ez tétel az $\frac{1}{z-\xi}$ imént említett sorfejtésére és a Cauchy-féle integráltra támaszkodik. Leglényegesebb része a következő: Legyen $f(x)$ függvény egy tartományban holomorf, induljunk ki ezen tartomány egy a pontjából s képezzük az u.n. csillagtartományt. Ezt a csillagtartományt úgy képezzük, hogy minden az a pontból kiinduló félegyenest csak addig vizsgálunk meg, míg a tartomány határát nem metszi. A meghúzott félegyenesek pontjainak összessége alkotja a csillagtartományt. Akkor ebben a csillagtartományban a függvényünk polinomok szerint haladó sorba fejthető, amely sor minden a csillagtartomány belsejében fekvő más tartományban egyenletesen konvergál.

Legyen pl. a függvényünk $\frac{1}{z^n-1}$. Ez értelmezve van az egész komplex számsíkban és mindenütt holomorf kivéve azon helyeket, ahol a nevező 0. Ezek a helyek az n-edik egységgyökök. Az egységkörön megjelölve ezen helyeket, a függvény holomorfitási tartománya az egész sík, kivéve az egységkörön lévő pontokat. Ha egyszerűség kedvéért, az a=0 pontra nézve képezzük a csillagtartományt, akkor kizárandók a tartományból azon egyenesek, amelyek a sugár meghosszabbítása irányában az egység pontokból a végtelenbe mennek. Ez egy egyszerű példája a csillagtartománynak.



(Egyébként nem lényeges, hogy a csillagtartományt épen egyenes vonalak kizárásával képeztük.)

A tételnek a Borel-féle bizonyítása a következő:

Tegyük föl, hogy az $\frac{1}{1-z}$ függvényt sikerült az $(1,+\infty)$ egyenes által határolt csillagtartományban polinomsorba fejtenünk:

$$\frac{1}{1-z} = \lim_{n\to\infty} P_n(z) = P_1(z) + [P_2(z) - P_1(z)] + \cdots$$

Vegyünk egy $f(z)$ függvényt. Tegyük föl, hogy $f(z)$ a $z=0$ pontban holomorf. A csillagtartományt a 0 pontból kiindulva alkotjuk meg. Tetszés szerinti a pont esete az itt tárgyalt esetre visszavezethető.

Fejtsük $f(z)$-t hatványsorba az a hely körül:

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots$$

Legyen

$$P_n(z) = a_0^{(n)} + a_1^{(n)} z + \cdots + a_{k_n}^{(n)} z^{k_n} .$$

Képezve a

$$Q_n(z) = c_0 a_0^{(n)} + c_1 a_1^{(n)} z + \cdots + c_{k_n} a_{k_n}^{(n)} z^{k_n}$$

kifejezést, Borel azt állítja, hogy

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} Q_n(z)$$

vagyis: az így definiált polinomok az $f(z)$ felé convergálnak a csillagtartományban és pedig egyenletesen a csillagtartomány belsejében.

Ennek bebizonyítása könnyen eszközölhető a Cauchy-féle tétel segedelmével. Rajzoljunk a csillagtartományon belül oly Γ görbét, amely a tekintetbe jövő z helyeket és a 0-t is körülveszi. Akkor Cauchy szerint

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{f(x)dx}{x-z} \;;$$

amely továbbá

$$= \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{f(x)}{x}\left(\lim_{n\to\infty} P_n\left(\frac{z}{x}\right)\right)dx .$$

Ez érvényes az előbbiek szerint minden olyan z helyen, mely nem esik a 0 és x pontokat összekötő egyenes x-en túl való meghosszabbításába. Ez pedig ki van zárva, mivel Γ-át, melyen az x integráció közben végigfut, úgy választottuk, hogy a csillagtartományon belül legyen; $\lim P_n(\frac{z}{x})$ tehát egyenletesen konvergens s a határátmenet fölcserélhető:

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\lim_{n\to\infty}\int_\Gamma \frac{f(x)\,P\left(\frac{z}{x}\right)}{x}dx =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[a_0^{(n)}\frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{f(x)dx}{x} + a_1^{(n)} z\,\frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{f(x)dx}{x^2} + \cdots + a_{k_n}^{(n)} z^{k_n}\frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{f(x)dx}{x^{k_n+1}}\right]$$

$$= \lim_n \left(a_0^{(n)}c_0 + a_1^{(n)}c_1 z + \cdots + a_{k_n}c_{k_n}z^{k_n}\right) = \lim_n Q_n(z) .$$

Hátra volna még megmutatni, hogy az $\frac{1}{1-z}$ tetszőleges $P_n(z)$ polinom sorozattal állítható elő. Ilyen $P_n(z)$ sorozatot szolgáltat az $f'(z) = [f(z)]^2$ differenciálegyenletnek a Cauchy-Lipschitz-féle közelítő eljárással való megoldása; $\frac{1}{1-z}$ ugyanis ezen diff. egyenletnek az $f(0) = 1$ kezdetifeltétellel meghatározott integrálja. A részletekre illetőleg l. Picard: Traité d'Analyse, 2. kötet.

Holomorf függvény 0 helyén.

Legyen $f(z)$ függvényünk olyan, hogy $f(a) = 0$, akkor a holomorfitási tartományban $\frac{f(z)}{z-a}$ is holomorf.

Fejtsük hatványsorba $f(z)$-t:

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots .$$

ahol

$$c_0 = f(a) = 0$$

és $(z-a)$-t kiemelve a visszamaradó sor szintén konvergens hatványsor ugyanazon tartományban, vagyis olyan holomorf függvényt ad:

$$f(z) = (z-a) f_1(z).$$

Lehetséges az is, hogy $f_1(a) = 0$, akkor

$$f_2(z) = \frac{f_1(z)}{z-a} = \frac{f(z)}{(z-a)^2}$$

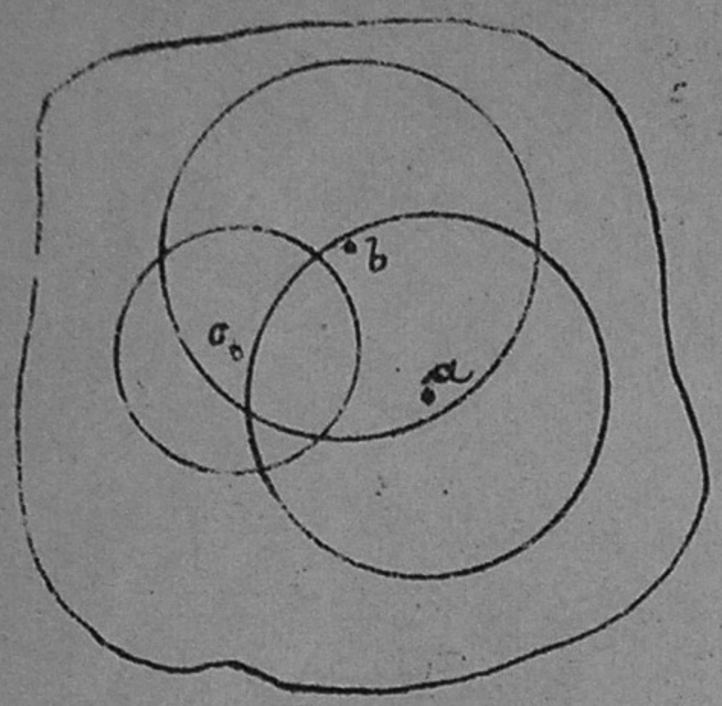
és akkor $f_2(z)$ is holomorf ott, ahol $f(z)$ holomorf. S.i.t. De mindenesetre el kell érnünk egy olyan $f_n(z)$-hez, amely az a helyen már nem tűnik el; akkor azt mondjuk, hogy a az $f(z)$ függvénynek n-edrendű 0 helye. Ha nem volna ilyen n, akkor minden együttható 0 volna s akkor a függvény identikusan 0 volna. – n-edrendű 0helynek nevezzük tehát az olyan a helyet, ahol $\frac{f(z)}{(z-a)^n}$ még az „a" helyen holomorf, de nem tűnik el.

Holomorf függvények 0 helyei izoláltak. Vagyis, ha találunk egy „a"0helyet, akkor ennek közelében több 0 hely nincs. Tudjuk már, hogy a n-edrendű 0 hely, akkor

$$f(z) = (z-a)^n f_n(z),$$

ahol $f_n(z)$ hol. függvény, de nem tűnik el a $z=a$ helyen. Akkor, minthogy a függvény folytonos, lehet ezen hely körül oly környezetet rajzolni, hogy $f_n(z)$ nagyancsak 0-tól különböző, tehát a szorzat is ezen környezeten belül csak az a helyen lehet 0-Ennélfogva az összes 0 helyek izoláltak.

Még egy, az imént csak érintett kérdést kell elintéznünk. Azt állítottuk (és ezt a tényt fel is használtuk), hogy ha egy függvénynek az a körül hatványsorba való fejtésénél minden együttható 0, úgy a függvény identikusan 0. Ez mindenesetre evidens a konvergentiakör belsejére nézve.



Ha azonban egy holomorf függvény egy kör belsejében 0, akkor az egész holomorfitási tartományban 0. Ugyanis a körön belül a függvény és összes deriváltjai zérusok, tehát akárhol veszünk egy új pontot e kör belsejében, e körül a függvényt újra hatványsorba lehet fejteni, amely sornak legalább akkora a konvergenciakörre, mint az a legnagyobb kör, melyet az illető tartományon belül rajzolhatunk. Legyen e pont b; akkor az e körül rajzolt körön belül a függvény újra=0, mert a b pont körüli sorbafejtés koefficiensei: a függvény és deriváltjainak értékei a b pontban zérusok. Ezt az eljárást ismételve, véges számú lépésben bármilyen c ponthoz eljutkatunk. a és c ugyanis összekötthetők egy teljesen a tartomány belsejében fekvő egyenes vagy törtvonallal; összuk ezt olyan részekre, melyek mindegyike kisebb, mint az út távolsága a tartomány határától. Meggondolásunkat arra az a ponthoz és az osztáspontokhoz tartozó konvergencia körökre alkalmazva, kapjuk, hogy $f(c) = 0$. Tehát $f(z)$ mindenütt = 0.

Ha egy függvényről tudjuk, hogy egy bizonyos tartományon belül holomorf és annak bizonyos helyein 0 s veszük az összes 0 helyeit, akkor azt állítom, hogy ha ennek a ponthalmaznak van a tartomány belsejébe eső sűrűsödési helye, akkor a függvény a tartományban mindenütt 0. Ez nem egyébb mint az előbb bebizonyított tételünk - valamivel más alakban. Mert a sűrűsödési hely léterése azt jelenti, hogy akármilyen kis kört rajzolunk azon bizonyos a* sűrűsödési hely körül, ezen

belül még mindig található oly pont, amelyben a függvényünk 0 értékkel bír. Abban a tartományban pedig, hol egy függvény hol, a függvény 0 helyei vagy szűnik meg, ha a függvény konstans: mindenütt 0. Tételünk tehát ez: Ha a függvény 0 helyeinek van egy, a holomorfitási tartományba eső sűrűsödési helye, akkor a függvény abban a tartományban identikusan 0. Ennek a függvénynek fontos korollariuma a következő: Ha az $f(z)$ és $g(z)$ függvények egy bizonyos tartományban holomorfok és $f(z) = g(z)$ egy a tartomány belsejében sűrűsödő ponthalmazon, akkor a két függvény identikus.

Singuláris helyek. Pólusok.

Ha egy függvényről tudjuk, hogy az egy bizonyos „a" pontot körülvevő tartományban holomorf kivéve esetleg magát az „a" pontot, melyről egyenlőre semmit sem tudunk föl, akkor 3 eset lehetséges:

1) A függvény az „a" hely környezetében korlátos. Ebben az esetben a Sokotsky- és Morera-féle tételek alkalmazásával könnyen látható, hogy $f(a) = [f(z)]_{z \to a}$ létezik és hogy az „a" pontban ilyen módon értelmezett függvény ott is holomorf. A szingularitás tehát csak látszólagos.

2) $A \cdot (z-a)^n f(z) = F(z)$ függvény korlátos az „a" hely környezetében és $F(a) = [F(z)]_{z \to a} \neq 0$. Ebben az esetben azt mondjuk, hogy „a" az $f(z)$ függvénynek n-edrendű polusa (vagy lényegtelen szingularitási helye)

3) Minden más esetben, a"-t lényeges szingu-

<u>lírisi helynek</u> mondjuk.

(Megjegyzendő, hogy a 2) és 3) alatt fölsorolt esetőségek még távolról sem meritik ki az összes lehetséges szingularitásokat; itt csak izolált szinguláris helyekről volt szó; t.i. olyanokról, amelyek körül a függvény mindenütt holomorf.)

Ha „a" n-edrendü pólus, akkor

$$(z-a)^n f(z) = F(z)$$

holomorf az „a" helyen és környezetében, ennélfogva Taylor-sorba is fejthető, és pedig

$$F(z) = C_0 + C_1(z-a) + \cdots, \quad \text{hol } C_0 \neq 0,$$

mert, ha $C_0 = 0$ volna, már $(z-a)^{n-1} f(z)$ is „a"-ban holomorf lenne, azaz csak (n-1) rendü polus lenne az „a".

Irjunk C_k helyett c_{k-n}-t és osszunk át $(z-a)^n$-nel, akkor

$$f(z) = c_{-n}(z-a)^{-n} + \cdots + c_{-1}(z-a)^{-1} + c_0 + c_1(z-a) + \cdots$$

Kapunk egy közönséges hatványsort s egy ezt megelőző részt, melyben negativ hatványok vannak. Ezt nevezzük <u>a polushoz tartozó főrésznek</u>. Erre is a jelentésére majd még visszatérünk.

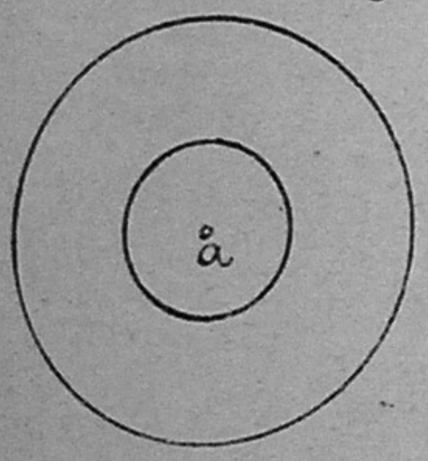
<u>Meromorf</u>nak mondjuk a függvényt egy bizonyos tartományban akkor, ha azon tartomány minden helye azon függvénynek vagy közönséges helye, vagy pólusa.

Megmutathatjuk ezt, hogy, <u>ha egy függvény egy tartományban meromorf, akkor ezen tartomány belsejébe eső minden nyabb tartományban legfeljebb végesszámu pólussal bir.</u>

Mert tegyük föl, hogy azon tartományba eső más tartományban végtelen sok pólusa volna, akkor ezeknek volna egy torlódási helye is, amely hely vagy közönséges hely

volna vagy polus és bármily közelében vannak a függvények pólusai. Ha közönséges hely volna, akkor rajzolható köréje egy olyan kör, amelyen belül a függvény mindenütt holomorf, tehát e körön belül nem lehetne pólus. Ha pedig pólus, akkor meg rajzolható köréje oly kör, amelyen belül azonkívül több pólus nincs. Tételünk tehát igaz.

Térjünk át a lényeges szinguláris helyek vizsgálatára. Ha az „a" pont izolált szinguláris hely (akár pólus, akár lényeges sz. h.), mindenesetre kijelölhető körülötte egy olyan kör, amelyen belül csak „a" a szing. hely és bármilyen kis sugárral is rajzolunk „a" körül még egy kört, a 2 kör által határolt körgyűrűben a függvény holomorf. Alkalmazhatjuk tehát a Laurent-féle sorfejtést; kapjuk, hogy



$$f(z) = \ldots + c_{-1}(z-a)^{-1} + c_0 + c_1(z-a) + \cdots ,$$

amely sorfejtésnek együtthatói nem függnek attól, hogy azon integrálokban, melyekkel a koefficienseket definiáltuk, az integráció körét a körgyűrűben hol választottuk.

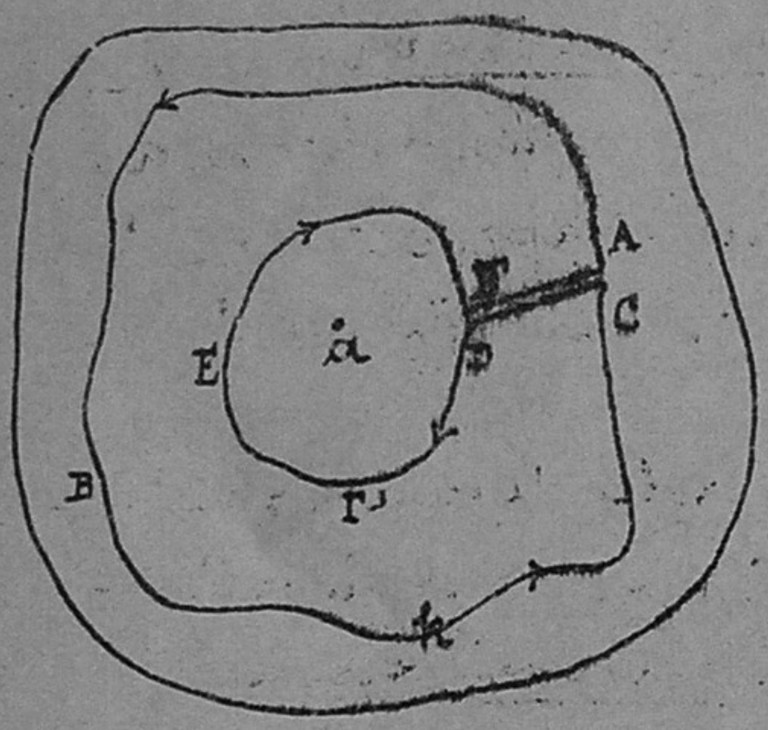
Mi különbség van most már pólus és lényeges szingularitás közt? <u>Pólusnál a neg. hatványok szerint haladó részre a sornak, ha n-edrendű a pólus, n tagig megy</u> és a többi együtthatója a neg. hatványoknak 0, <u>lényeges szingularitásnál végtelen sok neg. hatvány fordul elő.</u> Mindkét esetben – pólusnál és lényeges szingularitásnál – a positiv hatványok sora lehet véges vagy végtelen; a szing. hely természetére a neg. hatványok sora ad felvilágosítást. Ezért nevezzük a Laurent-sornak ezen részét a függvénynek <u>a „a" szing. ponthoz tartozó főrészét</u>

<u>részének</u>.

A főrészt sorbafejtés nélkül is értelmezhetjük. Legyen ugyanis

$$\left.\begin{matrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2i\pi}\int \frac{f(z)}{z-x}\,dz .$$

$f_1(x)$-et akkor jelentse ezen integrál, ha az integráció útja olyan, hogy „x" is „a" is azon belül fekszik, amilyen pl a k görbe, $f_2(x)$-et pedig akkor, ha az integráció útja kiválasztja az x és „a" pontokat. (Pl. a I görbe.) Ha az „a" hely közönséges hely lenne, akkor f_2-nél az integrandusz az egész I görbén belül és határán is holomorf, tehát $f_2(x)=0$ volna. Cauchy tétele szerint



$$f(x) = \int_{(ABCDEFA)} \frac{f(z)}{z-x}\,dz .$$

De $\int_{(CD)} + \int_{(FA)} = 0$; tehát

$$f(x) = \int_{(ABC)} + \int_{(DEF)} = \int_k - \int_l = f_1(x) - f_2(x).$$

($-\int$-t írtunk, mert ezen utóbbi integrálban a haladás iránya balfelől hagyja az „a" pontot, ellenkezőleg mint eredetileg volt.) - Ezek közül $f_1(x)$ az a helyen hol., $f_2(x)$ pedig szolgáltatja a függvény főrészét az a pontra nézve. Mert hiszen f_2 a függvénynek az a része, a mely pozitiv hatványok szerint fejthető sorba, f_2 pedig az, a mely a neg. hatványok szerint fejthető, amint azt a Laurent-féle sorfejtésnél is láttuk.

Vizsgáljuk most az $f(z)$ függvénynek a reciprocját:

$$\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$$

akkor ez a függvény is mindenütt hol., ahol $f(z)$ függvény holomorf és $\neq 0$.

Ha $f(a) = 0$ és pedig n-edrendűen 0, akkor

$$\varphi(z) = \frac{1}{(z-a)^n f_n(z)} ,$$

ahol $f_n(z)$ az „a" helyen már nem 0. $\varphi(z)$-nek $(z-a)$ n-ed-rendű pólusa.

Tehát <u>egy hol. függvény reciprocja oly helyen, ahol az eredeti függvényünk nem 0, szintén holomorf függvény, pólusai pedig az eredeti függvény 0 helyein vannak az ezekével egyező rendszámmal</u>. Ebből nyilvánvalóan az következik, hogy egy holomorf függvény reciproc értéke által definiált függvénynek csak poláris szingularitásai lehetnek.

<u>Ha $f(z)$ függvénynek az „a" hely lényeges szing. helye, akkor az „a" helyen bármily kis sugárral rajzolunk is kört ezen belül az $f(z)$ bármily komplex számértéket tetszés szerint megközelíti</u>. Ez azt jelenti, hogy akárhogy adom is meg az A komplex számot, az

$$f(z) = A$$

egyenlet tetszésszerinti megközelítéssel megoldható úgy, hogy az illető z a körön belül fekküdjék. Hol. függvény esetében erről nem is lehet szó, mert akkor $f(z)$ határozott érték felé konvergál. Jegyük föl, hogy ez egy az „a" lényeges szing. hely körül rajzolt körben egy bizonyos A értékre nem igaz, akkor $f(z)$ függvény e körön belül nem jut A tetszésszerinti közelébe, amit így írhatunk:

$$|f(z) - A| > m \neq 0$$

ezen esetben azonban

$$\varphi(z) = \frac{1}{f(z) - A}$$

az illető körben az „a" hely kivételével mindenütt hol, mert a nevezője nem 0; és az egész körben

$$|\varphi(z)| < \frac{1}{m},$$

ez azonban nem lehetséges. Mert ha egy függvény egy pont körül holomorf és annak egy bizonyos környezetében egy véges határ alatt marad, akkor azon pontban is holomorf. Megmutattuk tehát, hogy egy függvény valamely lényeges izolált szing. helye környezetében minden komplex számértéket tetszésszerinti közelébe jut. Ezt a tételt lényegesen méjítette Picard, aki 1879-ben megmutatta, hogy $f(z)$ az illető környezetben minden értéket tényleg fölvesz, legfeljebb egy érték kivételével. Picard tételére később visszatérünk.

Néhány határozott integrál kiszámítása. Residuum.

Ha a függvény „a" hely környezetében holomorf, akkor ezen hely körüb a függvény mindenesetre Laurent-sorba fejthető. Ezen sorban $a(z-a)^{-1}$ együtthatóját nevezzük az „a" helyhez tartozó „residuum"-nak. Ezt az együtthatót

$$\frac{1}{2i\pi}\int f(z)\,dz$$

integrál fejezi ki, hol az integrációt az „a" pont körüb zárt görbe mentén végezzük.

De beszélhetünk nemcsak egy határozott helyhez tartozó residuumról hanem bizonyos véges számú helyhez tartozó residuumról is. Értjük ezalatt az illető helyekhez tartozó residuumok összegét. Ha ezek a

helyük:

$$a_1, a_2, \ldots, a_n,$$

akkor ezeket egy görbével körülvéve, ennek mentén képezzük az integrált.

A residuum fogalmát célszerűen alkalmazhatjuk bizonyos határozott integrálok kiszámításánál, amint ezt most néhány példán látni fogjuk. Az első tárgyalandó példáknál a residuum explicite nem szerepel; ezekben az esetekben t. i. az illető görbéken belül a függvény mindenütt holomorf, vagyis a residuum 0; másszóval közvetlenül a Cauchy f. integráltételt alkalmazzuk.

1) A Fresnel-féle

$$\int_0^\infty \sin x^2\,dx \text{ és } \int_0^\infty \cos x^2\,dx$$

integrálok kiszámítása.

Residuumszámítás.

Számítsuk ki először az

$$J = \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$$

Laplace-féle integrált.

$$2J = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx \text{ , mert } e^{-x^2} \text{ páros függvény.}$$

Továbbá

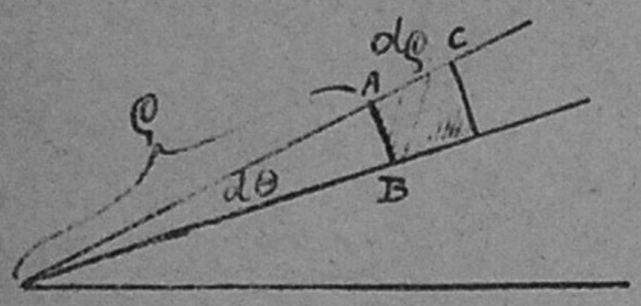
$$4J^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy.$$

Vezessünk be derékszögű koordináták helyett polárkoordiná-

tűket, akkor

$$4\mathfrak{J}^2 = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-\varrho^2}\varrho\, d\varrho\, d\vartheta .$$

Mert polárkoordinátákkal a felületelem kifejezése:



$$AB \cdot AC = \varrho\, d\vartheta \cdot d\varrho ,$$

a határok pedig úgy választandók, hogy a (ϱ, ϑ) pontok az egész síkot befödjék.

Integráljunk először ϑ szerint, akkor

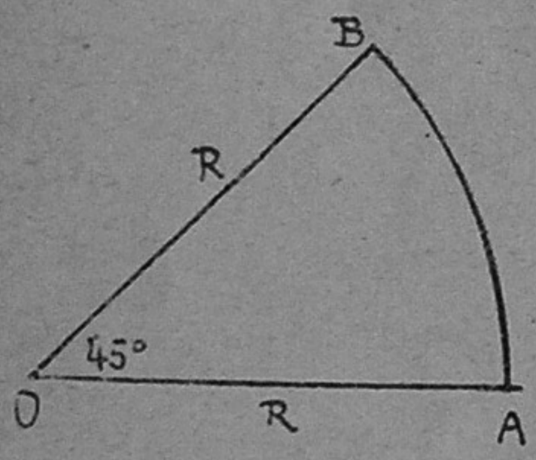
$$4\mathfrak{J}^2 = 2\pi \int_0^{\infty} e^{-\varrho^2}\varrho\, d\varrho ,$$ s ha $u = \varrho^2$, akkor, mivel $2\varrho\, d\varrho = du$, tehát

$$4\mathfrak{J}^2 = \pi \int_0^{\infty} e^{-u}\, du = \pi\left[-e^{-u}\right]_0^{\infty} = \pi ,$$

tehát

$$\mathfrak{J} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Erre támaszkodunk a Fresnel-féle integrálok kiszámításánál. Tegyük a következő integrált:



$$\int_S e^{-z^2}\, dz = 0,$$

ahol S a fölrajzolt R sugarú körcikk kerülete.

Mivel e^{-z^2} mindenütt holomorf függvény, ennélfogva integrálja bármily görbe mentén, tehát S mentén is, 0.

Ezt a következőképen is írhatjuk:

$$\int_0^B = \int_A^B + \int_0^A .$$

Mi történik, ha R a végtelenbe nő? Akkor

$$\lim \int_0^A = \frac{\sqrt{\pi}}{2} ,$$ mert z valós.

Az AB ív mentén vett integrál pedig a következőképp alakúb. Ha ugyanis

$$z = Re^{i\theta}$$

$$dz = Ri.e^{i\theta}d\theta,$$

mert az AB ív mentén R állandó; akkor

$$\mathfrak{J} = \int_A^B e^{-z^2}dz = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta}.R.i\,e^{i\theta}d\theta.$$

Az integrandusban mindenütt abszolút értéket véve

$$|\mathfrak{J}| \leqq R\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2\cos 2\theta}.d\theta = \frac{R}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2\sin\varphi}d\varphi;$$

$$(\varphi = \tfrac{\pi}{2} - 2\theta).$$

R minden határon túl nő, akkor $\mathfrak{J}$ 0 felé tart. Ugyanis $\frac{\sin\varphi}{\varphi}$, ha φ 0 és $\frac{\pi}{2}$ közt változik, a φ növekedésével fogy, minimumát tehát $\varphi = \frac{\pi}{2}$-nél éri el, ahol értéke $\frac{2}{\pi}$, tehát

$$\frac{\sin\varphi}{\varphi} \geqq \frac{2}{\pi} \quad \text{vagyis} \quad \sin\varphi \geqq \frac{2}{\pi}\varphi.$$

Ezt felhasználva a becslésre, ha a hatványkitevőt nagyobbítjuk, az integrandusz is nagyobbodik, tehát

$$|\mathfrak{J}| \leqq \frac{R}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2R^2}{\pi}\varphi}d\varphi = -\frac{R}{2}\cdot\frac{\pi}{2R^2}\left(e^{-R^2}-1\right) \leqq \frac{\pi}{4R},$$

ennélfogva $R \to \infty$-re $\mathfrak{J} \to 0$.

Tehát a két integrál t.i. $\int_0^A$ és $\int_A^B$ közül az egyik 0 felé tart, a másik $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ felé. Ennélfogva

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^B = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

másrészt

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^B = \int_0^\infty e^{i\left(-R^2+\frac{\pi}{4}\right)}dR = \int_0^\infty\left[\cos\left(\tfrac{\pi}{4}-x^2\right)+i\sin\left[\tfrac{\pi}{4}-x^2\right)\right]dx;$$

vagyis ezen utóbbi integrál $= \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

A valós és képzetes részeket összehasonlítva:

$$\int_0^\infty \left(\cos\tfrac{\pi}{4}\cos x^2 + \sin\tfrac{\pi}{4}\sin x^2\right)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

$$\int_0^\infty \left(\sin\tfrac{\pi}{4}\cos x^2 - \cos\tfrac{\pi}{4}\sin x^2\right)dx = 0;$$

$\frac{\sqrt{2}}{2}$-vel (t. i. $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$) osztva

$$\int_0^\infty \cos x^2\,dx + \int_0^\infty \sin x^2\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

$$\int_0^\infty \cos x^2\,dx - \int_0^\infty \sin x^2\,dx = 0$$

ebből

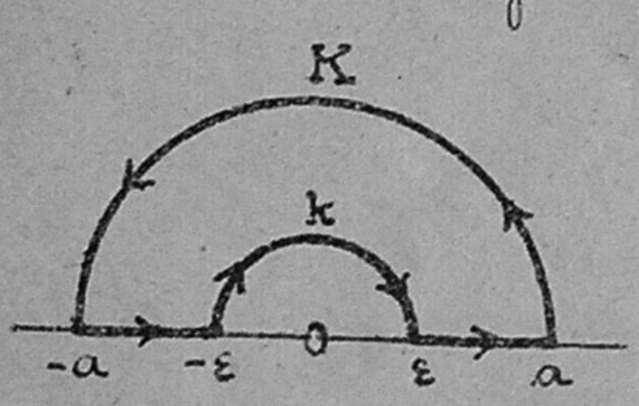
$$\left.\begin{aligned}\int_0^\infty \cos x^2\,dx &= \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{\pi}{2}}\\ \int_0^\infty \sin x^2\,dx &= \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{\pi}{2}}\end{aligned}\right\}$$

Ezek a Fresnel-féle integrálok értékei.

2) Kiszámítjuk a következő integrált:

$$J = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{a\to\infty}\int_0^a \frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0,\\ a\to\infty}}\int_\varepsilon^a \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

$\frac{\sin x}{x}$ a 0 helyen és minden más véges fekvő helyen folytonos. Visszavezethetjük ezt a komplex változó integráljára. Tekintsük a következő integrált:

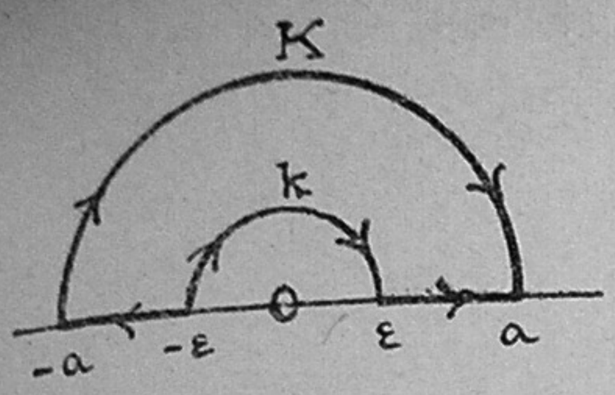


$$\int \frac{e^{iz}}{z}\,dz,$$

ahol az integráció útja ábránkon vastagon van jelölve. Minthogy $\frac{e^{iz}}{z}$ függvénynek a sík véges pontjai közül csak $z=0$-ban pólusa, tehát a függvény ezen zárt vonal belsejében és határán regulárisis, és így

$$\int \frac{e^{iz}}{z}\,dz = 0$$

Az integráció iránya az ábrában a nyíllal megjelölt irány.



Ha pedig az integráció irányát az egyes vonaldaraboko̊n így változtatjuk meg, akkor:

$$\int_{\varepsilon}^{a} - \int_{-\varepsilon}^{-a} + \int_{(k)} - \int_{(K)} = 0 .$$

$\int_{\varepsilon}^{a}$-ban és $\int_{-\varepsilon}^{-a}$-ban z valós, tehát a két integrál különbsége:

$$\int_{\varepsilon}^{a} \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x}\, dx = 2i \int_{\varepsilon}^{a} \frac{\sin x}{x}\, dx ,$$

tehát írhatjuk, hogy

$$2i \int_{\varepsilon}^{a} \frac{\sin x}{x}\, dx + \int_{k} \frac{e^{iz}}{z}\, dz - \int_{K} \frac{e^{iz}}{z}\, dz = 0 .$$

Mi történik e kifejezéssel, ha $\varepsilon \to 0$ és $a \to \infty$?

A második integrálban z helyébe $\varepsilon(\cos\varphi + i\sin\varphi)$-t bevezetve:

$$\int_{k} = i \int_{\pi}^{0} e^{i\varepsilon(\cos\varphi + i\sin\varphi)}\, d\varphi ,$$

mert a (k) mentén az ε állandó, tehát $dz = i\varepsilon e^{i\varphi} d\varphi$, φ pedig e kör mentén π és 0 között változik.

Ha ε minden határon túl kisebbedik, akkor az integrandusz egyenletesen konvergál 1 felé, az integrál maga tehát

$$i \int_{\pi}^{0} d\varphi = -i\pi \quad \text{felé.}$$

Tehát

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{k} = -i\pi$$

A K mentén vett integrál pedig, ha $a \to \infty$, 0 felé tart. Ui. z helyébe $a(\cos\varphi + i\sin\varphi)$-t bevezetve

$$\left| \int_{K} \right| = \left| i \int_{\pi}^{0} e^{ia\cos\varphi} \cdot e^{-a\sin\varphi}\, d\varphi \right| \leqq \int_{0}^{\pi} e^{-a\sin\varphi}\, d\varphi .$$

ezt az integrált felbontom két integrál összegére, az egyik 0-tól $\frac{\pi}{2}$-ig, a másik $\frac{\pi}{2}$-től π-ig veendő. A második integ-

túlban $\varphi = \pi - \psi$ -t írva s tekintetbe véve, hogy $d\varphi = -d\psi$, ez integrálból lesz $-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} e^{-a\sin\psi}\, d\psi = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{-a\sin\varphi}\, d\varphi$

Tehát $\int_{0}^{\pi} e^{-a\sin\varphi}\, d\varphi = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{-a\sin\varphi}\, d\varphi$, de ez

$$\leqq 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2a}{\pi}\varphi}\, d\varphi = \frac{\pi}{a}\left[e^{-\frac{2a}{\pi}\varphi}\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{a}\left[1 - e^{-a}\right] < \frac{\pi}{a}.$$

Ennek a határértéke pedig, ha a minden határon túl nő, 0.

Eredményül tehát a következőt kaptuk, hogy:

$$2i \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ a \to \infty}} \int_{\varepsilon}^{a} \frac{\sin x}{x}\, dx - i\pi = 0,$$

vagyis

$$J = \frac{\pi}{2}.$$

3, Az eddigi példákban a reziduumszámítás direkte nem volt meg, lássunk tehát oly példát, ahol a reziduumszámítást alkalmazzuk.

Legyen $$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)},$$

ahol $g(z)$ és $h(z)$ hol. függvények a $z = a$ hely környezetében és már a legegyszerűbb alakra legyenek hozva úgy, hogy közös osztójuk nincs. Ha „a" a h-nak 0 helye, a g-nek már nem az és az $f(z)$ függvénynek az illető helyen pólusa van. Tehát, ha n-edrendű nullhelyről van szó, akkor

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^n h_1(z)} = \frac{1}{(z-a)^n} \cdot \frac{g(z)}{h_1(z)},$$

ahol már $g(a) \neq 0$ és $h_1(a) \neq 0$. Az $\frac{1}{(z-a)^n}$ szorzójának az az a

$$\varphi(z) = \frac{g(z)}{h_1(z)}$$

függvénynek az „a" hely közönséges helye. Legyen a $\varphi(z)$ sorfejtése

$$\varphi(z) = c_0 + c_1(z-a) + \cdots$$

(mert $\varphi(z)$ az „a" körül holomorf.) Tehát

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-a)^n} = \frac{c_0}{(z-a)^n} + \frac{c_1}{(z-a)^{n-1}} + \cdots +$$

$$+ \frac{c_{n-1}}{z-a} + c_n + c_{n+1}(z-a) + \cdots ;$$

tehát az $f(z)$ függvény reziduuma az „a" helyen:

$$R(a) = c_{n-1} = \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \varphi(z) = \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[(z-a)^n f(z)\right].$$

Ha $n=1$, akkor

$$R(a) = \varphi(a) = \left[\frac{z-a}{\frac{1}{f(z)}}\right]_{z=a} ;$$

ahol $\frac{1}{f(z)}$ az a helyen holomorf és elsőrendű 0 helye van. Differenciálva e kifejezés számlálóját s nevezőjét L' Hospital szerint:

$$R(a) = \frac{1}{\left(\frac{1}{f(z)}\right)'_{z=a}}$$

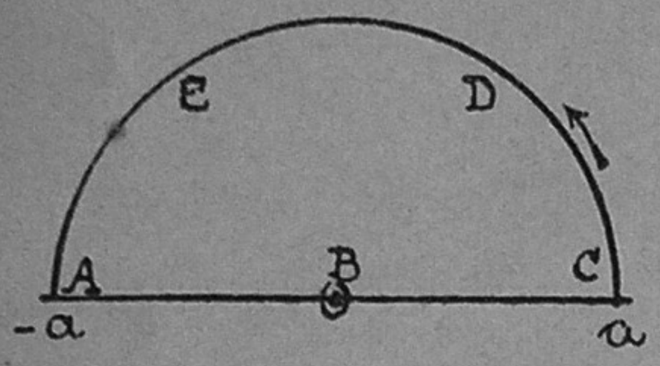
n-edrendű pólus esetében a L' Hospital szabályt n-szer kell alkalmazni.

Ezek előrebocsátása után foglalkozzunk a következő alakú integrálok kiszámításával:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx ,$$

hol $P(x)$ és $Q(x)$ is polinomok, $P(x)$ legalább kettővel alacsonyabb fokú, mint $Q(x)$ és $Q(x)$-nek nincs valós 0 helye, úgy hogy $\frac{P(x)}{Q(x)}$ valós x mellett folytonos; a végtelenben elég magasrendűen 0 és így az integrál a valós tengely mentén létezik. Legyen „a" oly pozitiv szám, hogy az 0-ból írt „a" sugarú kör az x tengely felett lévő összes pólusokat magában foglalja. — Akkor a félkörös terület határa (A, B, C, D E A) mentén vett integrál egyenlő a terület belsejébe residiumok összegével $\times 2\pi i$. Írhatjuk pedig, hogy

$$2i\pi\sum R = \int_{-a}^{+a} + \overset{\frown}{\int},$$



ahol $\overset{\frown}{\int}$ a félkör mentén a nyíl irányában veendő. Vegyük azon esetet, mikor $\frac{P}{Q}$-ban P kettővel alacsonyabb fokú, mint Q. A végtelenben $\left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right|$ egyenletesen közeledik tehát $\left|\frac{c}{z^2}\right|$ felé (c = konstans). A $\sum R$ jelenti az x tengely felett lévő összes pólusokhoz tartozó residuumok összegét. És van olyan M positiv véges szám, hogy bármily nagy kör mellett a kör mentén

$$\frac{P(z)}{Q(z)} < \frac{M}{a^2}.$$

Tehát $$\left|\overset{\frown}{\int}\frac{P(z)}{Q(z)}dz\right| \leqq \overset{\frown}{\int}\left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right||dz| < \frac{M}{a^2}\overset{\frown}{\int}|dz| = \frac{M}{a^2}a.\pi = \frac{M\pi}{a}.$$

és ha „a" végtelenbe nő, akkor $\lim \overset{\frown}{\int} = 0$, tehát

$$\lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{+a}\frac{P(z)}{Q(z)} = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(z)}{Q(z)}dz = 2i\pi\sum R$$

Tegyük fel, hogy $Q(x) = 0$ egyenlet gyökeit ki tudjuk számitani. Pl. vegyük a következőt:

$$P(x) = 1 \quad , \quad Q(x) = 1 + x^2$$

$(x^2+1) = (x+i)(x-i)$-nek az x tengely feletti egyetlen polusa $x = +i$. Az ehhez tartozó residuum:

$$\left(\frac{x-i}{x^2+1}\right)_{x=i} = \frac{1}{2i},$$

tehát $$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = 2\pi i\left(\frac{1}{2i}\right) = \pi$$

Is tényleg tudjuk azt, hogy

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \Big[\operatorname{arctg} x\Big]_{-\infty}^{+\infty} = \pi.$$

O helyek és pólusok szimmetrikus függvényei.
(Az algebra alapfeltétele.)

Legyen $f(z)$ valamely egy bizonyos $\mathfrak{C}$ görbén és azon belül meromorf függvény, magán a görbén pedig se O helyei, se pólusai ne legyenek. $f(z)$-nek a $\mathfrak{C}$ görbén belülfekvő O helyei legyenek

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m$$

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_m \quad \text{multiplicitással}$$

és a $\mathfrak{C}$ görbén belülfekvő pólusai:

$$b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$$

$$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_n \quad \text{multiplicitással,}$$

úgy, hogy ha az $\frac{f'(z)}{f(z)}$ függvényt tekintjük, ennek úgy az $a_1, a_2, \ldots a_m$, mint a $b_1, b_2, \ldots b_m$ helyek egyszeres pólusai. Legyen u.i. a egy O hely, melynek multiplicitása α, akkor

$$f(z) = (z-a)^{\alpha} f_1(z),$$

ahol már f_1 azon a helyen hol. és nem O. Akkor

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\alpha(z-a)^{\alpha-1} f_1(z) + (z-a)^{\alpha} f_1'(z)}{(z-\alpha)^{\alpha} f_1(z)} = \frac{\alpha}{z-a} + \frac{f_1'(z)}{f_1(z)}.$$

Itt összegünk második tagja egy az „a" helyen és e körül hol. függvény, amelynek sorfejtése negatív kitevőjü tagokat nem tartalmaz s így a reziduumra nincs befolyással. Tehát $\frac{f'(z)}{f(z)}$-nek elsőrendü pólusa van az „a" helyen s a hozzátartozó reziduum α.

Ami a pólusokat illeti, egy β multiplicitású b pólusnál

$$f(z) = \frac{f_2(z)}{(z-b)^{\beta}}, \quad \text{ahol} \quad f_2(b) \neq 0.$$

Az előbbihez hasonló módon eljárva

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-\beta}{z-b} + \frac{f_2'(z)}{f_2(z)}.$$

Itt az összeg második tagja megint hol. függvény a b helyen és e körül sorfejtése csak pos. egész hatványok szerint halad, tehát csak egyetlen egy neg. kitevőjű tag van; ennélfogva tényleg b hely az $\frac{f'(z)}{f(z)}$ függvénynek elsőrendű pólusa, a residuuma pedig $-\beta$. Továbbá az $f(z)$ függvénynek azon közönséges helyei, amelyek nem o helyek, azok $\frac{f'(z)}{f(z)}$-nek is közönséges helyei.

Jelentsen $F(z)$ egy tetszésszerinti a $\mathfrak{C}$ görbén és azon belül hol. függvényt és képezzük a következő integrált:

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathfrak{C}} F(z)\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz\,;$$

ez nem egyébb, mint az integranduszt $\mathfrak{C}$ görbén belülfekvő polusaihoz tartozó residuumainak összege:

$$= \sum \alpha_k F(\alpha_k) - \sum \beta_k F(b_k),$$

mert $F(z)$ egy „a" null-, vagy „b" pólushelyén az $f(z)$-nek, holomorf lévén, $F(z)\frac{f'(z)}{f(z)}$ sorfejtése ezen „a", ill. „b" hely körül igy kezdődik

$$\frac{\alpha \cdot F(a)}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + \cdots, \text{ ill.}$$

$$\frac{-\beta F(b)}{z-b} + d_0 + d_1(z-b) + \cdots,$$

tehát a residuumok: $\alpha F(a)$, ill. $-\beta F(b)$.

Különösen érdekesek azon esetek, amikor f is hol. az egész $\mathfrak{C}$-n belül. Akkor a görbén belül pólusai nincsenek, tehát

$$\int_{\mathfrak{C}} F(z)\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = 2i\pi \sum F(a)\,;$$

az összegezés az összes o helyekre terjesztendő ki; mindegyikre annyiszor, ahányszoros o hely.

A legegyszerűbb alkalmazás az, amikor $F(z) = 1$, ekkor

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathfrak{C}} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz =$$

az $f(z)$ 0 helyeinek a számával a $\mathfrak{C}$ görbén belül mindegyiket annyiszor számlálva, ahányszoros a hely.

Alkalmazzuk ezt annak a megmutatására, hogy egy n-edfokú racionális egész függvénynek pontosan n 0 helye van, ha az egyes 0 helyeket a maguk multiplicitásaival vesszük. Ez az algebra n.n. alaptétele, melyet Gauss bizonyított be először. $\mathfrak{C}$ görbe gyanánt most a kezdőponti körül R sugárral írt kört választjuk.

$$f(z) = z^n + \cdots ,$$

$$f'(z) = n z^{n-1} + \cdots .$$

Képezzük az

$$J = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathfrak{C}} \frac{n z^{n-1} + \cdots}{z^n + \cdots} dz$$

integrált. Elegendő nagy R mellett e kör az $f(z)$ függvény összes 0 helyeit tartalmazza, mert a 0 helyek száma véges. Meg kell mutatni, hogy elég nagy R-re az illető körön belül pontosan n 0 hely fekszik. Integrálunkat így is írhatjuk:

$$= \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathfrak{C}} \left[\frac{n}{z} + \varepsilon(z) \right] dz = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathfrak{C}} \frac{n}{z} dz + \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathfrak{C}} \varepsilon(z)\, dz = J_1 + J_2 .$$

Itt az $\varepsilon(z)$ függvény olyan, hogy

$$\lim_{z=\infty} z^2 . \varepsilon(z) = \text{véges szám.}$$

Van tehát oly M véges szám, hogy elég nagy R mellett a kör mentén

$$|\varepsilon(z)| < \frac{M}{R^2}$$

és így

$$|J_2| \leqq \frac{1}{2\pi} \int |\varepsilon(z)|\, |dz| < \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{M}{R^2} \int |dz| = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{M}{R^2} \cdot 2R\pi = \frac{M}{R}$$

és

$$\lim_{R \to \infty} J_2 = 0 .$$

J_1 nem függ a $\mathfrak{C}$ változtatásától, mert bármilyen a 0 pontot övező $\mathfrak{C}$ görbére nézve

$$\int_{\mathfrak{C}} \frac{dz}{z} = 2\pi i .$$

Tehát $$\mathfrak{J}_1 = n \text{, ennélfogva}$$
$$\underline{\mathfrak{J} = n},$$

azaz a 0 helyek száma tényleg n.

Az itt követett eljárás alkalmazható a gyökök szimmetrikus függvényeinek kiszámítására. Legyen ui.

$$F(z) = z^k,$$

akkor
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{C}} F(z)\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum a^k.$$

Megkapjuk tehát az „a" nullhelyek k-adik hatványainak összegét. A gyökök hatványösszegeivel pedig minden szimmetrikus függvény kifejezhető.

Az imént tárgyalt feladat, t.i. a gyökök számának meghatározása a $k=0$ exponensnek felel meg. Ha pl, $k=1$, akkor
$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathfrak{C}} z\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathfrak{C}} \frac{nz^n + c(n-1)z^{n-1}+\dots}{z^n + cz^{n-1}+\dots}\,dz.$$

Elvégezve az osztást kapjuk:
$$= \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathfrak{C}} \left(n - \frac{c}{z} + \varepsilon(z)\right)dz,$$

ahol, úgy, mint előbb
$$\lim_{z\to\infty} z^2\varepsilon(z) = \text{véges szám és } \lim \int_{\mathfrak{C}} \varepsilon(z)\,dz = 0, \text{ továbbá}$$
$$\int_{\mathfrak{C}} n\,dz = n\int_{\mathfrak{C}} dz = 0,$$

mert ez egy mindenütt hol. függvénynek (az 1-nek) zárt görbe mentén vett integrálja. Marad tehát
$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathfrak{C}} z\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum a = \frac{-\mathfrak{C}}{2i\pi}\int_{\mathfrak{C}} \frac{dz}{z} = -c.$$

A gyökök összege $\sum a$, mint máshonnan ismeretes, tényleg $-c$-vel egyenlő.

Még egy megjegyzés a gyökökre. Legyen egy tetszés szerinti $\mathfrak{C}$ görbénk és azon belül hol. függvényt jelentsen $f(z)$,

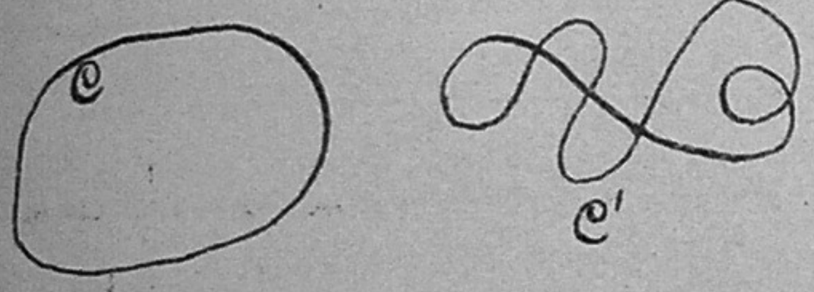
akkor $\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz$

megadja a görbén belülfekvő 0 helyek számát. Magától a $\mathcal{C}$ görbéről föltesszük, hogy azon nincs 0 helye. Substitutióval új változót vezessünk be. U.i. ha

$v = f(z)$, akkor $dv = f'(z)\,dz$; így integrálunk

$$= \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}'} \frac{dv}{v}$$

Az integrátió útja a v változóra nézve természetesen általában megváltozik. Geometriailag ábrázolva a z komplex változót, az egy komplex számsikban irja le $\mathcal{C}$ utat. Ha most bevezetünk egy másik komplex számsikot s abban ábrázoljuk a v-t úgy, hogy a v és z sik pontjai a $v = f(z)$ kapcsolatban lesznek egymással, akkor az új v változó általában egészen más $\mathcal{C}'$ görbét fut be, amely lehet többszörösen, csavarodott is. Ezen $\mathcal{C}'$ menten kell az új integrált képezni. Ha $\mathcal{C}'$ út a $v=0$ pontot m-szer kerüli meg pos. értelemben és n-szer neg. értelemben, akkor, mivel $\frac{1}{v}$-nek a $v=0$-hoz tartozó residuuma $= 1$, azért



$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}'} \frac{dv}{v'} = m - n$$

Ezen $(m-n)$ számmal egyenlő tehát az $f(z)$ függvény 0 helyeinek száma a $\mathcal{C}$-n belül.

Egy általános tétel a 0 helyekről és alkalmazásai. A Lagrange féle sorfejtés. Inverz függvény sorbafejtése.

Az eddigiekben követett gondolatmenet egy általánosabb jellegü tételhez is elvezet, melynek egyes már ki-

mondott eredményeink, pl. az algebra alaptétele is, alátendelhetők. Láttuk, hogy, ha $f(z)$ egy $\mathcal{C}$ görbe mentén és azon belül hol. és sehol a görbe mentén nem tünik el, akkor a $\mathcal{C}$ görbén belül fekvő 0 helyeinek számát az

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz$$

integrál szolgáltatja.

Ha egy $f(z)$ függvényről, amely a most említett föltételeknek eleget tesz, tudjuk, hogy mennyi a $\mathcal{C}$ görbén belül fekvő zérushelyeinek a száma, ebből bizonyos esetben következtethetünk $f(z)+g(z)$ függvényre is - és pedig, ha $g(z)$ is a $\mathcal{C}$-n és rajta holomorf függvény és olyan, hogy az egész $\mathcal{C}$ görbe mentén $|g(z)|<|f(z)|$, akkor $f(z)+g(z)$ függvénynek ugyanannyi 0 helye van a $\mathcal{C}$ görbén belül, mint $f(z)$-nek. Ezt a következőképp mutatjuk meg:

$$\Phi(z) = f(z)+g(z) = f(z)\left[1+\frac{g(z)}{f(z)}\right] = f(z)\,\varphi(z);$$

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}}\frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)}\,dz = \frac{1}{2i\pi}\int\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz + \frac{1}{2i\pi}\int\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\,dz,$$

mivel

$$\frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)} = \frac{f'(z)}{f(z)} + \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}.$$

Meg kell mutatni, hogy a második integrál 0. Mialatt z a $\mathcal{C}$ görbét leírja, azalatt

$$\left|\frac{g(z)}{f(z)}\right| < 1$$

s így a $\varphi(z) = 1+\frac{g(z)}{f(z)}$ függvény értékei az 1 pont körül egységnyi sugárral leírt körön belül maradnak, tehát a megfelelő $\mathcal{C}'$ görbe egyszer sem kerüli meg a 0 helyet. Az integrál = 0 s így a Φ-nek ugyanannyi 0 helye van, mint f-nek.

A most bebizonyított tételnek az $f(z)=z^n$ és $g(z)=a_{n-1}z^{n-1}+a_{n-2}z^{n-2}+\dots+a_0$ függvényekre és a 0 pont körül elég nagy sugárral rajzolt körre való alkalmazása adja az algebra alap-

tételét.

Egy másik fontos alkalmazása a következő. Legyen $f(z) = -c$, ahol c egy 0-tól különböző konstans, akkor ennek a konstansnak, mint függvénynek természetesen sehol sincs nullhelye. Vizsgáljuk a $-c + g(z)$ függvényt. Legyen

$$|g(z)| < |c|$$

egy $\mathcal{C}$ görbe mentén. Ezen esetben $-c + g(z)$-nek ugyanannyi 0 helye van, mint $-c$-nek a görbén belül, tehát $-c+g(z)$-nek sincsen a $\mathcal{C}$ görbén belül 0 helye. Ebből az következik, hogy $g(z) = c$ egyenletnek nincs megoldása, a $g(z)$ a c értéket sehol se veszi föl a $\mathcal{C}$-n belül. Ha tehát egy görbe mentén $|g(z)| < |c|$, akkor ugyanez áll e függvényre a görbe bármely belső pontjában is. – Minden egy görbén belül hol. függvény abszolút értéke a görbe belsejében $\leqq$ marad, mint a függvény abszolút értékének a maximuma magán a görbén; (pontosabban a $g(z) =$ konstans eset kivételével a $<$ érvényes; ennek bebizonyítására azonban más természetű meggondolás vezet.)

Az imént kimondott tételből következik, hogy a Weierstrass-féle tétel – amely szerint, ha a hol. függvények egy sorozata egy bizonyos tartomány belsejében és határán egyenletesen konvergál egy függvény felé, akkor ez a függvény is holomorf és hogy a sorozat tagjainak differenciálhányadosai a limes függvény megfelelő diff. hányadosai felé konvergálnak – feltételeiben igen egyszerűsíthető. Elégséges csak a határon való egyenletes konvergenciát feltennünk, mert az $f_n(z)$ egyenletesen konvergens függvénysorozat tagjaira vonatkozó $|f_{n+k}(z) - f_n(z)| < \varepsilon$ alakú feltétel a görbe belsejében is teljesül, miheltyt a görbén érvényes. (Hol. függvények

különbsége is hol. függvény.) A Weierstrass-féle tétel ezen egyszerűsítése Harnacktól ered. Harnacktétele tehát ez: Ha a hol. függvényeknek egy sorozata egy bizonyos $\mathfrak{C}$ görbe mentén egyenletesen konvergál, akkor az a $\mathfrak{C}$ görbétől határolt tartomány belsejében is egyenletesen konvergál és Weierstrass szerint a határfüggvény is holomorf stb.

Legyen $f(z;t)$ egy a z-ben holomorf, a t paraméterben folytonos függvény

t változásával a 0 helyek a „z" síkban folytonos módon változnak. Azaz, ha az $f(z;t_0)$ függvénynek pontosan m 0 helye van egy $\mathfrak{C}$ görbén belül, míg a görbén magán $\neq 0$, akkor ha t a t_0-tól elég kevéssel különbözik, az $f(z;t)$ függvénynek is ugyanazon görbén belül még mindig pontosan m 0 helye van. U.i.

$$f(z;t) = f(z;t_0) + [f(z;t) - f(z;t_0)].$$

A jobboldal első tagja m helyen tünik el, másutt mindenütt $\neq 0$ és ha t-ét elég kevéssel vesszük t_0-tól különbözőnek, akkor a $\frac{[\ ]}{f(z;t_0)}$ hányados tetszés szerinti kevéssel különbözik a zérustól; tehát mindenesetre

$$\left|\frac{[\ ]}{f(z;t_0)}\right| < 1.$$

Folytonosan változó parameter helyett vegyük a parameter diszkrét értékeihez tartozó függvényeket, azaz legyen adva egy $f_n(z)$ függvénysorozat, amely egyenletesen konvergál egy $\mathfrak{C}$ görbén s így belül is egy $f(z)$ függvény felé; $f(z)$-nek a $\mathfrak{C}$ görbén magán ne legyen 0 helye, de a belsejében pontosan m 0 helye legyen. Akkor, minthogy $f(z)$-nek a $\mathfrak{C}$ görbén nincs 0 helye, tehát $|f(z)|$-nek minimuma $\neq 0$ a görbe mentén. Legyen a minimum μ, tehát $|f(z)| > \mu$ a görbe mentén. Továbbá válasszunk n-et úgy, hogy:

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$$

az egész $\mathcal{C}$ görbe mentén. Ezen n-en túl tehát az

$$f_n(z) = f(z) + [f_n(z) - f(z)]$$

függvénysorozat egy tagja sem lehet null a görbe mentén. És az előbbihez hasonlóan következik, hogy a ε-n belül egy n-től kezdve az összes $f_n(z)$-nek épen annyi nullhelye van, mint $f(z)$-nek.

Tehát, <u>ha a hol. függvények egy sorozata egy $\mathcal{C}$ görbe mentén egyenletesen konvergál $f(z)$-hez és ennek nincs magán a görbén 0 helye, de a görbe belsejében m 0 helye van, akkor a sorozat valamely tagjától kezdve mát minden függvénynek ugyancsak m 0 helye van ezen görbe belsejében.</u> - A tételt meg is fordítkatjuk és pedig a következőképen: <u>ha az $f_n(z)$ sorozat végtelen sok tagjának van a görbe belsejében 0 helye, akkor $f(z)$-nek is van, a görbe belsejében vagy határán 0 helye.</u>

Mert ha $f_n(z)$ sorozat kérdéses tagjainak 0 helyei: $z_1, z_2, \ldots$, akkor ezen pontsorozat, mely a görbén belül fekszik, korlátos, tehát van legalább egy sűrűsödési helye s ez a sűrűsödési hely az $f(z)$-nek okvetlenül 0 helye.

Ezt egy példán világítjuk meg. Legyen:

$$f_n(z) = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n.$$

Bebizonyítjuk, hogy véges z-re egyenletesen

$$f_n(z) \to e^z.$$

Föltesszük, hogy ez már ismeretes a valós változó esetében, kiterjesztjük komplex változóra. Képezzük

$$e^z - f_n(z)$$

kifejezést. Az $f_n(z)$-t hatványsorbafejtve s az abs. értéket véve:

$$|e^z - f_n(z)| \leqq e^{|z|} - \left(1 + \frac{|z|}{n}\right)^n, \quad \left[\text{t.i.} \left|\sum_k \frac{z^k}{k!}\right| \leqq \sum_k \frac{|z|^k}{k!}\right]$$

mivel pedig $|z|$ valós változóra

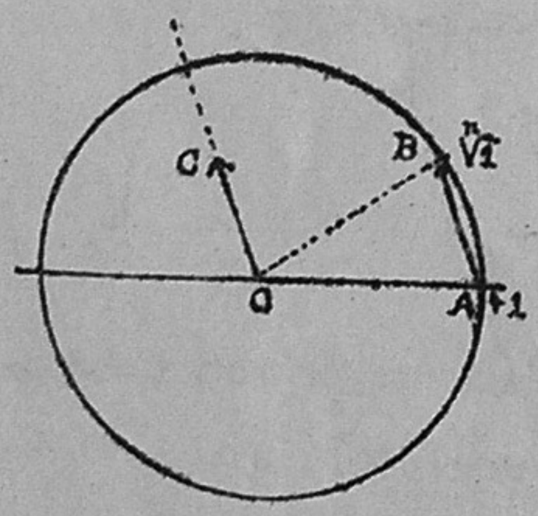
$$\left[e^{|z|} - \left(1 + \frac{|z|}{n}\right)^n\right] \to 0 \text{ , azért:}$$

$$f_n(z) \to e^z.$$

Ezen sorozatra alkalmazzuk általános meggondolásunkat. e^z sehol sem lehet 0. Mert, ha ez valahol egy „a" helyen 0 volna, akkor ezen hely körül kijelölhetnénk egy oly kicsiny kört, amelyen nem volna 0. Ezt választhatjuk $\mathfrak{C}$ görbének s akkor $f_n(z)$ sorozat elég nagy indexü tagjai szintén 0 hellyel birnának ezen körön belül. Vagyis n minden elegendő nagy értékére kellene, hogy $f_n(z) = 0$ legyen. Viszont azonban $f_n(z)$ egyetlen 0 helye $z = -n$. Tehát e^z-nek sem lehet végesben 0 helye.

Második alkalmazás: e^z-nek értéke $z = 0$ helyen $= 1$, mert minden n helyen $f_n(0) = 1$. Van-e még olyan hely, ahol $e^z = 1$, vagyis $e^z - 1$ függvénynek van-e más 0 helye, mint $z = 0$? Hogy van, ezt a következőképen látjuk be:

Megkeressük $f_n(z) - 1$ 0 helyeit; meg kell oldanunk az $\left(1 - \frac{z}{n}\right)^n = 1$ egyenletet. Ebből $1 - \frac{z}{n} = \sqrt[n]{1}$ s innen $z = -n\left(\sqrt[n]{1} - 1\right)$. Ha $\sqrt[n]{1} = 1$, akkor $z = 0$. Legyen $\sqrt[n]{1}$ egy más n-edik egységgyök, pl a $+1$-hez felülről a legközelebbi. Geometriailag nagyon könnyü ezt ábrázolni. $\sqrt[n]{1} - 1 = AB$ az az a C ponthoz tartozó komplex számmal. $n(\sqrt[n]{1} - 1)$ abszolút értéke az n oldalu szabályos sokszög kerülete az 1 sugaru körben. Az OC egyenesre fel kell vinni az egységsugaru körbe irt szabályos n szögkerületét, mely n nagyobbodásával a kör kerületéhez, 2π-hez közeledik. Minél nagyobb n, annál inkább közeledik az



n szög AB oldala, tehát OC is a függélyes irányhoz. Tehát a függélyes irányra felvisszük az egységsugarú kör kerületét. Az $n(\sqrt[n]{1}-1)$ pontok tehát a $2\pi i$ pont felé tartanak. Tehát $e^{2i\pi}$ is $=1$. Az összes n-ekkel és az összes n-edik egységgyökökkel képezett ponthalmaznak összes sűrűsödési helyei a $2ki\pi$ ($k=\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots$) pontok. A fönti két tétel szerint ennélfogva e^z-1-nek ezek és csak ezek a zéróhelyei.

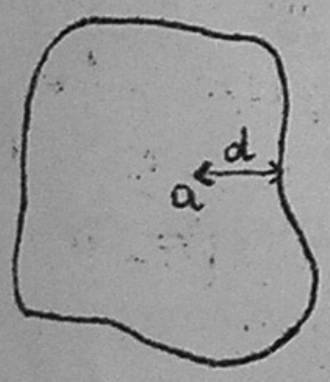
Az $\int \frac{f(z)}{f(z)}dz$ integrálnak a 0 pontokkal összefüggő sajátságait*) még két feladatra alkalmazzuk, egyik az u. n. Lagrange-féle sorfejtés, a másik az inverz függvény keresése megadott hol. függvényjek esetében

1, Lagrange sora. $f(z)$ legyen az „a" pont körül egy $\mathcal{C}$ görbe belsejében és határán hol. függvény. Adva van

$$F(z) = z - a - \alpha(f(z) = 0$$

egyenlet, keressük ennek z-ben azt a megoldását, amely a-hoz legközelebb van; (α egy adott szám). Általánosabban az ezen feladatot kielégítő $z=\zeta$ gyök egy tetszésszerinti holomorf $\Phi(\zeta)$ függvényét fejtsük sorba α hatványai szerint, ha α elég kicsiny. A speciálisabb feladat a $\Phi(\zeta)=\zeta$ esetnek felel meg.

A $\mathcal{C}$ tartományon belül z-a-nak egyetlen egy 0 helye van t. i. „a". Ha tehát a kerületen



$$\left|\frac{\alpha f(z)}{z-a}\right| < 1,$$

akkor a fejezet elején adott általános tétel értelmében $F(z)$ függvénynek a kerületen belül ugyanannyi 0 helye van, mint $(z-a)$-nak, vagyis egyetlenegy, amelyet ξ-val jelölünk. ($f(z)$ szerepét a $z-a$, a $g(z)$ szerepét $-\alpha f(z)$ játssza). Legyen α oly kicsiny szám, hogy $|\alpha| < \frac{d}{M}$, ha $f(z)$ függvénynek

*) illetőleg az $f(z)+g(z)$-re adott tételt

magán a görbén a maximuma M, az a pontnak a görbétől vett legkisebb távola d. Ekkor már előbbi $\left|\frac{\alpha f(z)}{z-a}\right| < 1$. egyenlőtlenségünk teljesül.

Ha most már van egy $\Phi(z)$ függvényünk, amely hol. ezen $\mathcal{C}$ tartományban és a határán, akkor

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}} \frac{\Phi(z)\,F'(z)}{F(z)}\,dz$$

integrál egyenlő a $\Phi(z)$ függvénynek az $F(z)$ $\mathcal{C}$-n belül lévő nullhelyein felvett értékeinek összegével. (Pólusról most nincs szó, mert $F(z)$ a $\mathcal{C}$-n belül hol.) Jelen esetben ez az integrál, mivel csak egy α pontja van F-nek $= \Phi(\zeta)$. Beírva F' és F helyettesítéseit:

$$= \frac{1}{2i\pi}\int \frac{\Phi(1-\alpha f')}{z-a-\alpha f}\,dz\,,$$ ezt sorbafejtve:

$$= \frac{1}{2i\pi}\int \frac{\Phi(1+\alpha f')}{z-a}\left(1+\alpha\frac{f}{z-a}+\alpha^2\frac{f^2}{(z-a)^2}+\cdots\right)dz\,.$$

Ez írható mert $\left|\frac{\alpha f}{z-a}\right| < 1$ miatt e sor egyenletesen konvergens ezen okból az integrálás tagonként is elvégezhető. Rendezzük ezt α hatványai szerint:

$$= \Phi(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \frac{1}{2i\pi}\int \frac{\Phi}{(z-a)^{n+1}}\left[f^n - (z-a)f^{n-1}f'\right]dz,$$

t.i. az első tagban $\frac{1}{2i\pi}\int\frac{\Phi(z)\,dz}{z-a} = \Phi(a)$ Cauchy tétele szerint. Mivel pedig

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{f^n}{(z-a)^n}\right) = \frac{(z-a)^n\, n f^{n-1} f' - n(z-a)^{n-1} f^n}{(z-a)^{2n}},$$

tehát integrálunk

$$= \Phi(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \frac{1}{2i\pi}\int \Phi \frac{d}{dz}\left[-\frac{f^n}{n(z-a)^n}\right]dz.$$

Most partialisan integrálhatunk. Ekkor

$$\int \Phi \frac{d}{dz}\left[-\frac{f^n}{(z-a)^n}\right]dz = -\int \frac{d}{dz}\left[\Phi\frac{f^n}{(z-a)^n}\right]dz + \int \Phi'\frac{f^n}{(z-a)^n}\,dz.$$

ill a jobboldal első tagja – zárt görbéről lévén szó – eltűnik. Tehát lesz:

$$\Phi(\zeta) = \Phi(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \frac{1}{2i\pi n} \int \Phi' \frac{f^n}{(z-a)^n} dz = \Phi(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \frac{[\Phi'(a) f^n(a)]^{(n-1)}}{n!},$$

mert

$$\frac{(n-1)!}{2i\pi} \int \frac{\Phi' f^n}{(z-a)^n} dz = \left[\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \Phi'(z) f^n(z) \right]_{z=a}.$$

Ezen sor értéke tehát $\Phi(\zeta)$-val egyenlő. Ez az u. n. Lagrange-féle sorfejtés. Ha $f(z) = 1$, akkor $\alpha = z - a$ és a sor a Taylor sorba megy át. A L. féle sorfejtés egyik alkalmazása az égi mechanikában szereplő $z - a - e \sin z = 0$ Kepler-féle egyenlet megoldása.

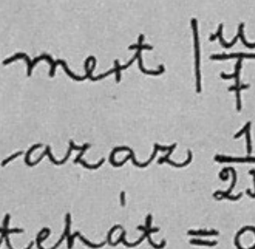
2, Foglalkozzunk most az inverz függvény sorbafejtésével. Kérdés, hogy $f(z)$ hol. függvény inverzfüggvénye létezik-e s hogyan található meg? Egyszerűség kedvéért föltesszem, hogy $f(z)$-t a 0 hely környezetében vizsgáljuk és pedig legyen $f(0) = 0$, mert, ha pl. $f(0) = c \neq 0$ lenne, akkor az $f^{(x)}(z) - c$ függvény megfordítására térnénk át; míg a tetszésszerinti a hely környezetében való inverzió a $z' = z - a$ substitucióval redukálható speciális esetünkre. Föltesszük, hogy $f'(0) \neq 0$; úgy hogy $z = 0$ az $f(z)$ függvénynek egyszeres 0 helye. Keressük az $f(z) = u$ egyenlet legkisebb megoldását.

Ki lehet jelölni a $z = 0$ pont körül elég kis görbét, amelyen belül és a görbén több 0 helye nincs, mert a hat. függvény helyei izoláltak. Legyen $|f(z)|$-nak a görbén felvett minimuma: m, tehát legyen a görbe mentén

$$|f| \geq m \neq 0,$$

u legyen továbbá oly kicsiny, hogy $|u| < m$, tehát $|u| < |f(z)|$, melynélfogva $f(z) - u$-nak egy előbbi tétel értelmében pontosan annyiadrendi 0 helye van az illető görbén belül,

mint $f(z)$-nek, azaz csak egy. Az $f(z)-u=0$ egyenlet gyökének keresése, azaz az $f(z)$ függvénynek e görbén belüli való megfordítása tehát egyértelműen történik. Így az u komplex változó síkjában a 0 pont körül m sugárral rajzolt körön belül választva az u-t, $f(z)-u=0$ -nak egy és csakis egy olyan megoldása van, amely k-n belül fekszik. Ezt a megoldást sorbafejtjük. Vegyük a következő integrált:



$$\frac{1}{2i\pi}\int_k \frac{z(f(z)-u)'}{f(z)-u}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_k \frac{z f'(z)}{f(z)-u}\,dz = \zeta(u).$$

Itt $(f(z)-u)' = f'(z)$, mert u állandó. Az integrál értéke egyenlő az $f(z)-u=0$ egyenletnek a k görbén belüli egyetlen ζ gyökével, melyet amennyiben u-val változik $\zeta(u)$-val jelölünk. $\zeta(u)$ mint függvény, egyszersmind az $f(z)$ függvény inverz függvénye. Evvel megint úgy járunk pl, mint előbb:

$$\zeta(u) = \frac{1}{2i\pi}\int_k \frac{z f'(z)}{f(z)}\left(1 + \frac{u}{f} + \frac{u^2}{f^2} + \cdots\right)dz,$$

mert $\left|\frac{u}{f}\right| < 1$. Ezt szabad tagonként integrálni. Az első tag, azaz $\frac{1}{2\pi i}\int_k \frac{z f'(z)}{f(z)}\,dz = f(z)$-nek a k görbén belülfekvő 0 helyével, tehát $=0$; míg általában u^n koefficiense partiális integrációval így írható:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_k \frac{z f' dz}{f^{n+1}} = -\frac{1}{2\pi i n}\int_k z\, d\left(\frac{1}{f^n}\right) = -\frac{1}{2i\pi n}\int_k d\left(\frac{z}{f^n}\right) + \frac{1}{2i\pi n}\int_k \frac{dz}{f^n} = \frac{1}{2i\pi n}\int_k \frac{dz}{f^n}.$$

Tehát sorfejtésünk ilyen alakú lesz:

$$\zeta(u) = a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3 + \cdots, \quad \text{ahol}$$

$$a_n = \frac{1}{2i\pi n}\int_k \frac{dz}{f^n}; \quad a_0 = 0.$$

Ez az integrál adja meg az inverz függvény sorfejtésének együtthatóit. Az integrál még az

$$\frac{1}{n!}\left[\frac{z^n}{[f(z)]^n}\right]^{(n-1)}_{z=0}$$

alakban is írható.

Az inverz függvénysora egyébként a Lagrange-féle sorfejtés specialis esetének is tekinthető: az ott szereplő mennyiségek helyére: a helyett 0, a helyett u, $f(z)$ helyett $\frac{z}{f(z)}$ és Φ helyett 1 teendő.

Tárgyaljuk példaképen e^z függvény inverzióját. Az e^z hol. függvényt így definiáltuk

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y).$$

Az inverz függvénye könnyen meghatározható ily módon:

$$e^x(\cos y + i\sin y) = \varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Innen

$$e^x = \varrho\ ;\ x = \log\varrho\ ;\ y = \varphi + 2k\pi\ ;\ x + iy = \log\varrho + i\varphi + 2k\pi i$$

e^x mindig $\neq 0$, tehát az e^z függvény a 0 kivételével minden értéket fölvesz egyszer és csakis egyszer oly sávban, amelyet két valós tengellyel párhuzamos és egymástól 2π távolságra lévő egyenes határol. A sávhoz hozzaszámitjuk az egyik pl. a felső oldalt, a másikat már nem. Milyen a függvény megforditása ezen sikban?

Az inverz függvény, mely tehát az $u = e^{\varphi(u)}$ egyenletet kielégiti, definiálva van az egész u sikban, kivéve az előbbiek szerint, az $u = 0$ pontot. Mivel $(e^z)_{z=0} = 1$, azért $1 - e^z$ függvény megforditását vesszük. Ez teljesiti az $(1-e^z)_{z=0} = 0$ és $(1-e^z)'_{z=0} \neq 0$ feltételeket. A következő egyenlet megoldásáról van tehát szó

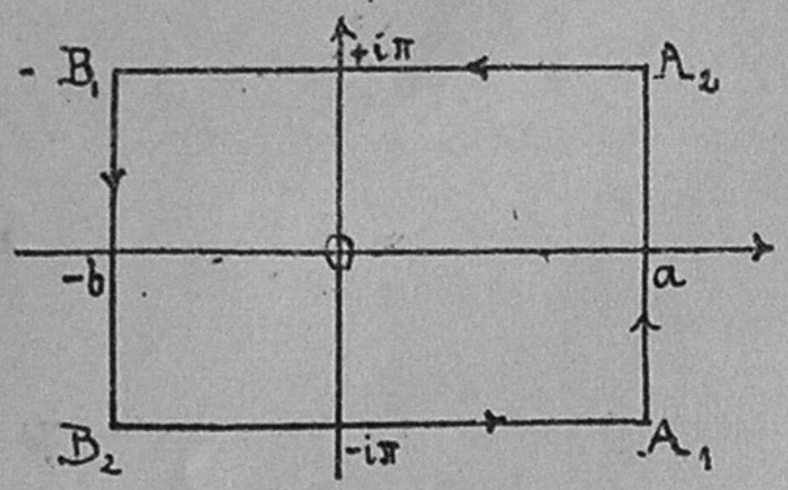
$$1 - u = 1 - e^z.$$

Ennek a megoldását keresve $1-u$ hatványai szerint haladó hatványsort kell kapnunk:

$$z = a_1(1-u) + a_2(1-u)^2 + \cdots, \text{ahol}$$

$$a_n = \frac{1}{2ni\pi}\int\frac{dx}{(1-e^z)^n}\ .$$

Ezt az integrált oly kör vagy vagy más zárt vonal mentén kellvennünk, amely körülzárja a 0 pontot és amelyen belül az $f(z)$-nek nincs több 0 helye a $z=0$ ponton kívül.



Célszerű lesz egy ilyen téglalap mentén venni az integrált. Ez eleget tesz a feltételeknek, mert a legközelebbi nullhelyek $\pm 2i\pi$. Azonban a téglalapot változtathatjuk úgy, hogy „a" és „-b" a végtelenbe menjenek. A $2i\pi$ periodus; tehát az integrandus értékei az A_2B_1 és B_2A_1 oldalak egymástól $2\pi i$-vel különböző pontjaiban vegyenek és így, tekintettel az ellentétes irányokra

$$\int_{A_2B_1} + \int_{B_2A_1} = 0 \quad , \text{úgy, hogy marad:}$$

$$\frac{1}{2\pi i\pi}\left[\int_{A_1}^{A_2} + \int_{B_1}^{B_2}\right] = \frac{1}{2\pi i\pi}\left(\mathfrak{J}(a) + \mathfrak{J}(-b)\right).$$

Az első integrálban, ha „a"-t minden határon túl növelem, akkor e^z-nek abszolut értéke e^a minden határon túl nő, tehát $|1-e^z|$ is minden határon túl nő, vagyis az $\mathfrak{J}(a)$-ban maga az integrandus 0 felé tart és pedig egyenletesen, ennélfogva maga az integrál is 0 felé tart:

$$\lim_{a\to\infty} \mathfrak{J}(a) = 0$$

$\mathfrak{J}(-b)$-ben viszont e^z-nek abszolut értéke e^{-b} s ez, ha b a végtelenbe nő, 0 felé tart, tehát az integrandus most egyenletesen 1 felé tart s így

$$\lim_{b\to\infty} \mathfrak{J}(-b) = -2i\pi \quad \text{u. i.} \int_{+i\pi}^{-i\pi} \to \int_{+i\pi}^{-i\pi} dz = -2i\pi,$$

ezekből kifolyólag

$$a_n = -\frac{1}{n}.$$

Tehát e^z függvény megfordítására nézve a $z=0$ hely környezetében a következő hatványsort kaptuk:

$$\varphi(u) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-u)^n}{n}$$

Ugyanúgy elvégezhetnénk a sorbafejtést minden más hely környezetében is, tiszta természetesen a 0 helyet.

Mi megfordítottuk e^z-t egy ilyen célra, ugyanúgy tehettük volna ezt más célra is. Tudjuk tehát minden célra más-más függvényt kapunk, vagyis a logarithmusnak, mint többértékű függvénynek más-más ágát

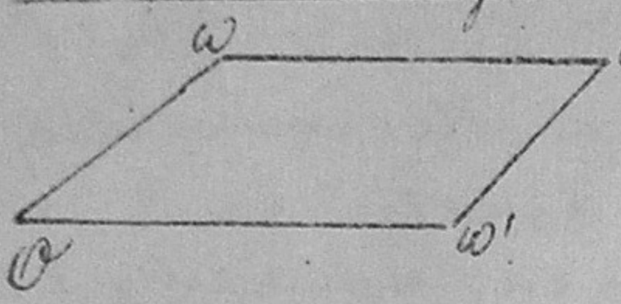
Valós változó esetében a logaritmus e többértékűségét nem sínik ki. Valós változó esetében pl. az arcsin függvénynél látható a többértékűség. A sinx periodusa valós, tehát a célok itt a képzetes tengellyel párhuzamosak. Az e^z megfordításának többértékűsége azért van elrejtve valós változó esetén, mert itt azon célok, amelyekben e^z egy értéket csak egyszer vesz fel, a valós tengellyel párhuzamosak s ezek közül csak egyetlen egy tartalmazhatja magában a valós tengelyt.

Hatványsorunk formális integrálásával tehozható a geometriai sorból is:

$$\sum_{n=0}(1-u)^n = \frac{1}{1-(1-u)} = \frac{1}{u} \quad \text{és} \quad \int \frac{du}{u} = \log u$$

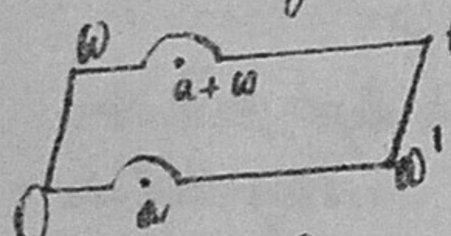
Ha így integrállal állítjuk elő a log. függvényt, akkor ennél a többértékűség úgy nyilvánul, hogy az integrál értéke függ attól, hogy integrálás közben megkerültük e a 0 pontot, hányszor és miky irányban. Ha m-szer kerüljük meg + és n-szer – értelemben a 0 pontot, akkor az integrálnak azon értéke, mely a 0 pontot körül nem futó úthoz tartozik, szaporodik $2(m-n)\pi i$ - vel.

A residuum számítást még az elliptikus függvények egy tulajdonságának a kimutatására használjuk fel. Ha egy függvényről tudjuk, hogy annak w és w' oly periodusai, hogy $\frac{w}{w'}$ nem valós s ha ennek a függvénynek más szingularitásai, mint pólusai a sik véges pontjai közt nincsenek, akkor az ilyen függvényt <u>elliptikus függvény</u>nek nevezzük. A felrajzolt parallelogrammot vagy annak bármely önmagával eltolt helyzetében <u>perio-</u>



<u>ω sparallelogrammnak</u> nevezzük. A periodusparallelogrammához határának csak a felét számítjuk, pl. az ω', ω+ω', ω vonalat, de egyik végpontját kivéve. – Erre is lehet alkalmazni a 0 helyek és pólusok megszámlálására vonatkozó tételünket. Az f(z) elliptikus függvénynek kell, hogy legyen a per. par.- ban pólusa, mertha a függvény egy per. par.- on belül véges maradna, periodicitása miatt az lenne az egész síkban. Egy mindenütt véges függvény azonban csak a konstans lehet. Mivel f(z)-vel együtt $\frac{f'}{f(z)}$ is elliptikus függvény, ennek pólusai pedig annak 0 helyei, azert az elliptikus függvénynek a per. par.- ban 0 hellyel is kell bírni. Ha minden pólust és minden 0 helyet a maga sokszorosságával számítunk, akkor bebizonyítható, hogy, <u>a függvénynek a periodusparallelogrammban ugyanannyi pólusa van, mint ahány 0 helye.</u>

Az $\int \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz$ integrált vegyük egy per. par. határa mentén. Ha a határon lenne 0 vagy pólushelye a függvénynek (pl. az a és akkor vele egyszerre az (a+ω) pontokban), akkor az integrációt úgy módosítjuk. Ekkor $\int \frac{f'}{f}\,dz$ ezen úton minden esetben megadja a 0 helyek számát, kivonva ebből a pólusok számát. De az 0-tól



az ω' ig és az ω+ω'-től ω- ig vett integrál terontják egymást, úgyszintén az ω-tól 0-ig s ω'-től ω+ω'-ig vett integrálok. Mert ezen utak mentén a függvény a megfelelő pontokban ugyanazon értéket veszi fel, az integrációi irányai pedig ellentétesek. Az integrál tehát = 0. Tehát egy per. par.- ban a 0 helyek száma egyenlő a pólusok számával. Az Liouville tétele.

Liouville egy másik tételét, mely szerint <u>a parallelogrammában fekvő 0 helyek összegének és a pólusok összegének különbsége periodus</u>, azaz = mω+nω', a

$$\frac{1}{}\int \frac{f'(z)}{f(z)}$$

integrációjával származtathatjuk. –

A végtelenben lévő pont.

Mit értsünk az alatt, hogy egy megadott $f(x)$ függvény, amely értelmezve van az egész síkban, vagy a síknak legalább egy körön kívül eső részében, azaz új kifejezéssel élve „a végtelen távoli pont környezetében" – hogyan viselkedik a végtelenben lévő pontban? – A z síkot leképezzük a z' síkra a $z' = \frac{1}{z}$ transzformációval. Bármily irányban megy is z a végtelenbe, a z' mindig a 0 felé tart. Az $f(z)$ függvény a $z' = \frac{1}{z}$ szubsztitucióval az $f\left(\frac{1}{z'}\right) = \varphi(z')$ függvénybe megy át, amely mindenesetre definiálva van a $z' = 0$ pont környezetében, kivéve magát a 0 pontot. Amily helye a $z' = 0$ a $\varphi(z)$ függvénynek, ugyanoly helynek nevezzük $z = \infty$-t az $f(z)$ függvényre nézve. $z = \infty$ közönséges helye $f(z)$-nek, ha $\varphi(z)$ kiegészíthető úgy, hogy a 0 közönséges helye legyen. Ha φ-nek a 0 hely lényeges szing. helye, akkor f-nek is $z = \infty$ lényeges szing. helye. Ha φ-nek a 0 hely n-ed rendű 0 pontja, akkor a végtelen az f-nek ugyancsak n-ed rendű 0 helye. Így pólus esetében. Mindez egyszerűen megállapodás. Láthatjuk, hogy hogyan függ össze a két függvénynek a sorfejtése. Ha f függvény egy bizonyos K körön kívül mindenütt hol., de magán a végtelenben lévő viselkedéséről csak annyit tudunk, hogy a környezetében hol., akkor egy rég bebizonyított tétel szerint Laurent-féle sorba lehet fejteni:

$$f(z) = \ldots + a_{-1} z^{-1} + a_0 + a_1 z + \ldots,$$

amely sorfejtés az egész síknak a K körön kívül eső részében érvényes.

Menjünk át φ-re, z helyébe $\frac{1}{z'}$-t írva:

$$\varphi(z') = \ldots + a_1 z'^{-1} + a_0 + a_{-1} z' + \ldots,$$ tehát:

a.) a végtelenben levő pont közönséges pont akkor, ha az $f(z)$ függvénynek egy elég nagy körön kívül érvényes Laurent-féle sorfejtése nem tartalmaz pozitiv hatványokat, mert ekkor $a_1 = a_2 = \ldots = 0$ miatt $z' = 0$ a $\varphi(z')$-nek közönséges helye.

b.) n-ed rendű pólus a végtelenben lévő hely akkor, ha $f(z)$ Laurent-féle sorfejtésében z^n együtthatója még nem 0, ellenben minden magasabb hatvány együtthatója már 0, azaz $a_{n+1} = a_{n+2} = \ldots = 0$. Ekkor u. i. $z' = 0$ a $\varphi(z')$-nek n-

-ed rendű pólusa és mint könnyen beláthatú, az $\frac{f(z)}{z^n}$ függvény-nek a ∞ már közönséges helye.

c.) Azonban a $z = \infty$ $f(z)$-nek n-edrendű 0 helye, ha a_{-n} még, $\neq 0$, de $a_{-n-1} = a_{-n-2} = \ldots = 0$, és ekkor a $z^n \cdot f(z)$ függvénynek a ∞ közönséges helye.

d.) Végre a végtelen távoli pont lényeges szing. hely akkor, ha az $f(z)$-nek a felírt Laurent-féle sora végtelen sok pozitiv hatványt tartalmaz, mert ugyanekkor $z' = 0$ a $\varphi(z')$-nek lényeges szing. helye.

A végtelenben lévő hely ilyen, a sík többi pontjával egyenjogú értelmezésének célszerűségét mutatják bizonyos tételek, amelyeket ily módon egyszerűbben és egyöntetűen lehet fogalmazni.

Említettünk olyan függvényeket, amelyek egy tartományban s olyanokat is amelyek az egész síkban hol.-ok. Kérdés, van-e olyan függvény, amely a végtelenben lévő hely bevezetésével is mindenütt hol? Vegyük a függvénynek Laurentsorát. Hogy a függvénynek minden végesben lévő hely közönséges helye, ez azt jelenti, hogy a negatio hatványok szerint haladó tagok hiányoznak. ($a_{-1} = a_{-2} = \ldots = 0$). Hogy a végtelenben lévő pont is közönséges hely, ez azt követeli, hogy a + hatványok szerint haladó tagok hiányozzanak, ($a_1 = a_2 = \ldots = 0$). Megmarad tehát a függvény előállítása gyanánt az „a_0". Oly függvény tehát, amely a teljes kiegészített komplex számsíkban mindenütt hol, konstans. Kiegészített komplex számsíkon értsük a számsíkot pontjai közé odaértve a végt. táv. pontot is.

Vannak-e oly függvényeket, melyek az egész síkban hol.-ok, csak a végtelenben van n-ed rendű pólusuk? Ehhez szükséges, hogy a Laurent-féle sorban $a_{-1} = \ldots = a$ és $a_{n+1} = a_{n+2} = \ldots = 0$; ez a függvény tehát az n-ed fokú racionális egész függvény-szerint minden az egész Komplex számsíkban konvergens hatványsor által értelmezett függvénynek, ha nem polinom, azaz minden u.n. transcendens egész függvénynek a ∞ lényeges szing. helye. A ∞ hely környezetében ennélfogva érvényesek a lényeges szing. hely környezetére felállított tételek (pl: A végt. hely, bármely környezetében - tehát pl. bármely körön

<u>kivül- a transcendens egész függvény értékkészlete az egész szám-sikban mindenütt sürü.</u>

Meromorfnak neveztünk egy függvényt egy tartományban, ha a tartományban csak közönséges helyei és pólusai vannak.- Van-e olyan függvény, amely az egész kiegészített síkban meromorf, úgyhogy mindenütt, a végtelenben is csak pólusos szingularitásai vannak? Az ily függvény pólusainak torlódási helye nem lehet. Mert a torlódási hely, sem közönséges hely sem pólus nem lehetne, mert ezek onmelyikének kis környezetében már nem birhat szingularitással a függvény. Ugyanezért a ∞ sem lehet torlódási hely, vagyis az összes többi pólusok egy elég nagy sugarú körön belül feküsznek. A mindenütt meromorf függvénynek tehát csak véges számú pólusa lehet. Bebizonyítjuk, hogy ez a függvény racionális. Legyen a végtelenben n-ed rendü pólusa, a végesben pedig b_1 b_2.... pontokban β_1 β_2... rendü pólusa. Képezzük a következő függvényt:

$$F(z) = \frac{(z-b_1)^{\beta_1}(z-b_2)^{\beta_2}\ldots\ldots f(z)}{z^n}$$

Ezen $F(z)$ függvénynünek egyébként sehol, csak a 0 helyen van legfeljebb n-ed rendü pólusa; (a rendszám l. i. még az $f(z)$-től is függ), ellenben minden más helyen, még a végtelenben levő helyen is ezen függvény hol. Tehát Laurent sorában csak a + hatványok szerint haladó tagok. Tudjuk pedig a 0 helyen legfeljebb n-ed rendü pólusa van, legfeljebb még a z^{-n}-et tartalmazhatja, de már $z^{-(n+1)}$-et nem tartalmazza, úgy hogy Laurent sorának ily alakja van:

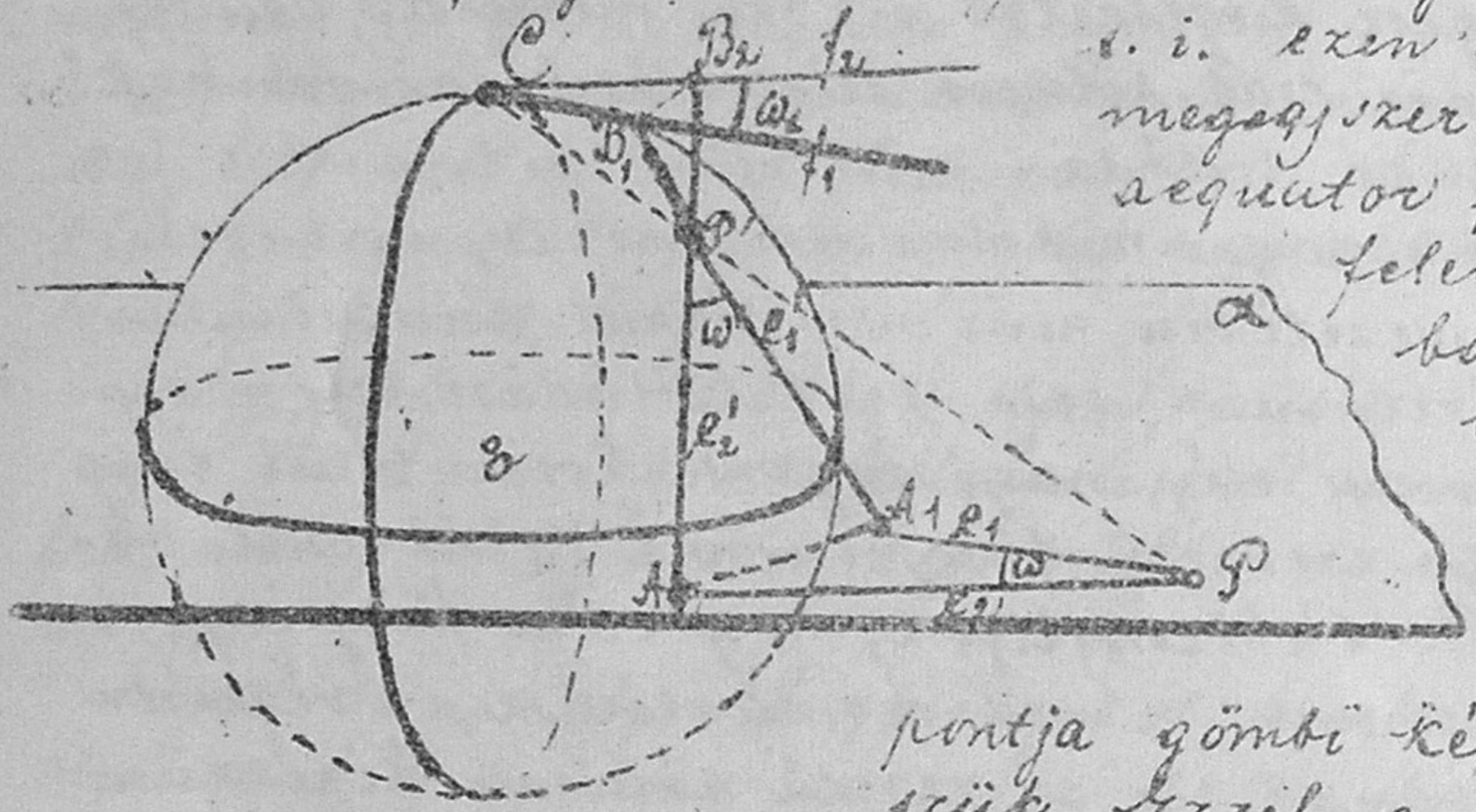
$$F(z) = c_0 + c_{-1}z^{-1} + \ldots + c_n z^{-n}, \quad \text{tehát}$$

$$f(z) = \frac{c_0 z^n + c_{-1} z^{n-1} + \ldots c_n}{(z-b_1)^{\beta_1}(z-b_2)^{\beta_2}\ldots\ldots}$$

Az $f(z)$ tehát racionális függvény. Vagyis: <u>ha egy függvény a teljes kiegészitett komplex számsikban meromorf, azaz közönséges helyeken kivül csak pólusai vannak, akkor ez a függvény racionális függvény.</u> A racionális függvényeket ez a tétel, kifejezésüktől függetlenül, kizárolag függvénytani sajátságaikkal jellemzi.

A végtelen hely tekintése nagyon szemléletessé teheti a

<u>sztereográfikus projekció</u> segítségével. Ez a projekció a komplex számnak a gömbön való ábrázolását szolgáltatja. Az „α" aequatoriális sík C pólusából projiciáljuk az α sík egy tetszés-szerinti P pontját a CP egyenessel a gömbre a P' pontba, ahol t. i. ezen egyenes a C-n kívül megegyszer metszi a gömböt. Az aequator pontjai önmaguknak felelnek meg. Ha P az α-ban a ∞-be távozik, bármely irányban is, P' a gömbön C-felé közeledik. Ezért az α sík végtelen távoli pontja gömbi képének a C pontot vesszük. Ezzel a sík és a gömb közti megfeleltetés kölcsönösen egyértelművé válik. A projekciónak nevezetes tulajdonságai vannak. Így pl. ha P egy kört ír le, P' is kört fut be a gömbön. Mi e projekciónak más tulajdonságát bizonyítjuk be, hogy t. i. a sík pontjainak a gömbön való egy. ábrázolása konformis, azaz, hogy két görbének C_1, C_2-nek az x síkban, melyek egymást a szög alatt metszik, egy-két C_1', C_2' görbe felel meg a gömbön, hogyha a $C_1'C_2'$ görbék szöge a gömbön ω', akkor $\omega = \omega'$-. Két görbe szögei alatt a metszőpontban húzott két érintőjük szögét értjük. – Elég tehát bebizonyítanunk, hogy ha $e_1\ e_2\ e_1'\ e_2'$ a megfelelő érintők, hogy: $\omega' = (e_1'\ e_2')\,4 = (e_1\ e_2)\,4 = \omega$, $e_1'\ e_2'$ egyszersmind a gömbnek is érintői.



Legyen tehát P'-n át a gömbhöz érintőleg húzott két egyenes $e_1'\ e_2'$; ezek metszéspontjai az α síkkal $A_1\ A_2$. Akkor $e_1 = PA_1$, $e_2 = PA_2$ és $\omega = (e_1\ e_2)\,4$, $\omega' = (e_1'\ e_2')\,4$. Az $e_1'\ e_2'$ egyenesek a C pont érintő síkját, mely tehát parallel α-val, metszik $B_1 B_2$ pontokban. Ekkor $CB_1 = f_1 \parallel e_1$; $CB_2 = f_2 \parallel e_2$ és $\omega = \omega_1 = (f_1\ f_2)\,4$. Továbbá $B_1C = B_1P'$ és $B_2C = B_2P'$, úgy hogy $CB_1B_2A \equiv PB_1B_2A$, tehát:

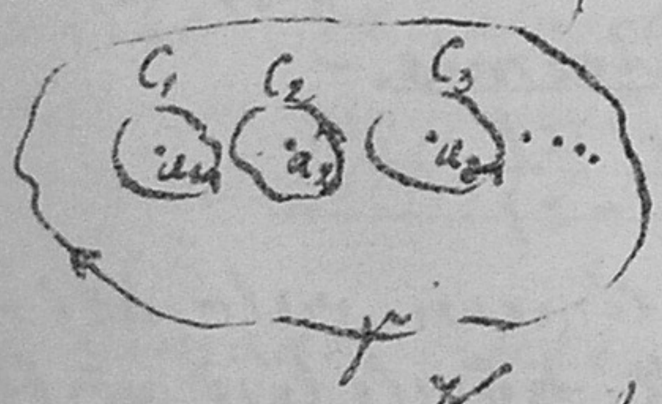
$$\underline{\omega' = \omega_1 = \omega} \qquad \text{q. e. d.}$$

pl st. pr. tehát egy szögtartó, vagyis konformis ábrázolás. Ennek a tételnek és általában a konformitásnak a jelentőségével a hol. függvényekre nézve legközelebb foglalkozunk.

Értelmezzük még a residuum fogalmát a ∞ helyre. Feltesszük, hogy a függvénynek a ∞ távoli pont izolált szing. helye. Egy véges „a" ponthoz tartozó residuumnak értelmezzük

(a) $\frac{1}{2i\pi}\int_C f(z)dz$ - t, ha a C görbe balfelől hagyja az a pontot és csak ezt tartalmazza, mint iz. szinguláritást. A végt. táv. ponthoz tartozó residuum alatt egy hasonlót értünk oly p görbe mentén, mely a végt. táv. pontot hagyja bal felől s a nélkül csak az ∞ szing. hely. A st. pr.-val az görbén való ábrázolásnál a C és p görbéknek megfelelő görbék semmiben sem térnek el egymástól, ugyenoly irányban veszik körül a megfelelő pontot, amint az könnyen belátható. Az előbbiekből következik, hogy a végt. táv. ponthoz tartozó residuum egyenlő a függvénynek egy, elegendő nagy sugarú körön kívül érvényes Laurent sorában z^{+1} koefficiensével.

Ha a függvénynek csupa iz. szing. helyei vannak: a_1, a_2 .... és a ∞, akkor az ezekhez tartozó residuumok összege = 0. Mert minden integrált a megjelölt irányban véve:



$$\int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} + \cdots + \int_{r} = 0$$

Konformis ábrázolás

Ha van egy $f(z)$ függvényünk, amely a helyen és annak környezetében hol., és ha $f'(a) \neq 0$, akkor kijelölhetünk a-nak olyan környezetet, amelyben a függvény egy pontban egyszer felvett értékét többször nem veszi fel, úgy hogy az „a" pontnak ezen környezetében a z különböző értékeihez w-nek más és más értéke tartozik, amelyek betöltik a komplex számsík egy bizonyos tartományát. – Így, ha z változó síkjában egy tartománynak kölcsönös egyértékű módon felel meg a w-

(z) vektorú síkjának kizonyos tartománya. <u>Az ilymódon az $f(z)$ függvénnyel létesített ábrázolás a két tartomány közt konformitás</u>nak nevezzük az az oka, hogy a függvény diff. hányadosának értéke független attól, hogy a képzésénél a ponthoz milyen irányból közeledünk. Azaz, ha z_1 és z_2 tetszésszerint tülönböző irányokból is közeledtek a z ponthoz:

$z_1 \quad z \quad z_2$

$$\lim_{z_1 \to z} \frac{f(z_1) - f(z)}{z_1 - z} = \lim_{z_2 \to z} \frac{f(z_2) - f(z)}{z_2 - z} = f'(z),$$

tehát:

$$\lim_{\substack{z_1 \to z \\ z_2 \to z}} \left(\frac{f(z_1) - f(z)}{z_1 - z} : \frac{f(z_2) - f(z)}{z_2 - z} \right) = 1$$

Ezt így is írhatjuk:

$$\lim_{\substack{z_1 \to z \\ z_2 \to z}} \left(\frac{z_1(z) - f(z)}{z_2(z) - f(z)} : \frac{z_1 - z}{z_2 - z} \right) = 1 \quad \text{s így is:}$$

$$\operatorname{arc}\left(\lim \frac{f(z_1) - f(z)}{f(z_2) - f(z)}\right) = \operatorname{arc}\left(\lim \frac{z_1 - z}{z_2 - z}\right)$$

Ha z_1 z_2 a z-hez két oly görbe mentén közelednek, melyek szöge z-ban φ, a $f(z_1)$ $f(z_2)$ megfelelő görbéinek szöge ψ, akkor:



$$\operatorname{arc}\left(\lim \frac{z_1 - z}{z_2 - z}\right) = \varphi; \quad \operatorname{arc}\left(\lim \frac{f(z_1) - f(z)}{f(z_2) - f(z)}\right) = \psi,$$

tehát $\varphi = \psi$, vagyis az ábrázolás <u>konformis</u>.-

Továbbá $$\lim \frac{|f(z_2) - f(z)|}{|f(z_2) - f(z)|} = \lim \frac{|z_1 - z|}{|z_2 - z|}$$

$|f(z_1) - f(z)|$, $|f(z_2) - f(z)|$, $|z_1 - z|$, $|z_2 - z|$ a z-hez való közelítésnél z_1, z_2, illetve $f(z_1)$ $f(z_2)$ említett közelítési görbéinek az z, illetőleg $f(z)$ pontok melletti ívelemeinek hosszát jelentik. Az síkbeli ívelemek viszonya tehát egyenlő az $f(z)$ síkbeli megfelelő ívelemek viszonyával s mivel $\varphi = \psi$, a megfelelő ívelemek szögei is egyenlők, azért a z és $f(z)$ síkok említett tartományai közti megfeleltetés úgy is jellemezhető, hogy az egyik síkban egy végtelen kis háromszögnek egy hozzá hasonló végtelen kis háromszög felel meg a másik síkban. Mindennek feltétele az, hogy $f'(z) \neq 0$.

Ha a z és $f(z)$ értékeket egy-egy görbén ábrázoljuk a említett módon, akkor az $f(z)$ függvény e két görbét bizo-

nyos tartományai közt is létesít konformis leképezést, mert a szt. pr. tulajdonságából folyólag, a „z" gömbnek a „x" sík, a „x" síknak az „f(z)" sík, az „f(z)" síknak az „f(z)" gömb, tehát a „z" gömb pontjainak is az „f(z)" gömb pontjai konformisan felelnek meg.

Az (x y) sík pontjaival az (u v) más sík pontjait két: u(x,y), v(x,y) függvény révén úgy hozzuk megfeleltetésbe, hogy az (x y) ponthoz az (U(x, y), V(x, y)) pont tartozzék és viszont. Felvethető most általában a kérdés, <u>milyeneknek kell lenniök az u, v függvényeknek, hogy, ez az ábrázolás konformis legyen</u>. Bebizonyítható, hogy ekkor U és V eleget tesznek a következő két parciális differencial egyenletrendszer egyikének:

1.) $\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}$ $\quad \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}$

2.) $\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial y}$ $\quad \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial x}$

Ezek az u. n. <u>Cauchy-Riemann-féle egyenletek.</u>

Az (x + iy) = z változó f(z) függvényét írjuk ily alakban:

$$f(z) = f(x + iy) = U(x,y) + i\,V(x,y)$$

(U és V valós függvények)

Ilyeneknek kell választanunk a két U(x y) és V(x y) általános kétváltozós függvényt, hogy:

$$\lim_{z' \to z} \frac{[U(x',y') + i\,V(x',y')] - [U(x,y) + i\,V(x,y)]}{z' - z}$$

diff. hányados értéke független legyen attól, hogy a z' = x' + iy' mint mily irányból közeledik a z = x + iy ponthoz? Mindenesetre szükséges, hogy egyszer a valós, egyszer pedig a képzetes tengellyel párhuzamos irányban végezve a határátmenetet, a 2 határérték létezzék és megegyezzék. Ezt formulába öltöztetve az 1.) alatti C. R. egyenleteket kapnók. A Riemann-féle elmélet az 1.) egyenletek alapján definiálja a z komplex változónak

$$f(z) = U(x,y) + i\,V(x,y)$$

függvényét. Megjegyzendő azonban, hogy az ilyen módon való kiindulásnál nem elég az U és V függvényekre az 1.) alatti feltételeket minden további megszorítás nélkül posztulálni. U.i. az 1.) egyenletek specializálás révén következnek az f(z)-nek

a minden irányban való differenciálása irányának függetlenségéből, de nem ekvivalensek vele; az $f'(z)$-nek az iránytól való független létezése az 1.) egyenletekből csak még valami további föltevés alapján következik; ilyen föltevés pl. az, hogy az 1.)-ben föllépő parc. diff. hányadosok folytonos függvények.

Hasonlóan annak a feltételeit, hogy $U(x,y)$- és $V(x,y)$ a $\bar{z} = x - iy$-nak, a z konjugáltjának legyen ilyen függvénye ($f(\bar{z})$), a 2.) egyenletek adják.

Ezekből látható, hogy az (x,y) síknak (u,v) síkra való konform leképezését egyedül a $z = x + iy$ változónak $f(z) = U + iV$ függvényei szolgáltatják, vagy $\bar{z}$ változónak $f(\bar{z}) = U - iV$ függvényei. A két konform ábrázolás közt az a különbség, hogy az elsőnél a szögek értelme, előjele sem változik meg, míg a másodiknál ellenkezőre fordul.

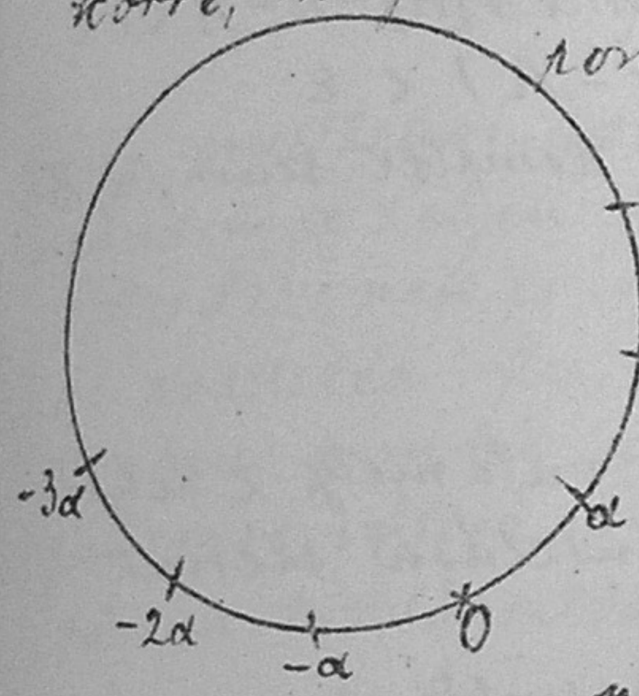
Többértékű függvények. Egyértékű függvény integrálfüggvénye.

Eddig javarészt az egyértékű függvény inverz függvénye és integrálfüggvénye voltak oly példák, melyek többértékű függvényekre vezettek bennünket. Mindkettőre egyszerre példa lehet a $\log z$ függvény, mint e^z inverz függvénye, ill. mint $\int \frac{dz}{z}$. Az integrálfüggvény többértékűsége abban nyilvánul, hogy az integrálandó függvény egy-egy szing. helyének megkerülésekor az integrál értéke egy additiv konstanssal változik meg, mivelynek értéke az integrandus azon pontbeli residuumának és $2\pi i$-nek szorzatával egyenlő. (Itt csak iz. szingularitásokra szorítkozunk.)

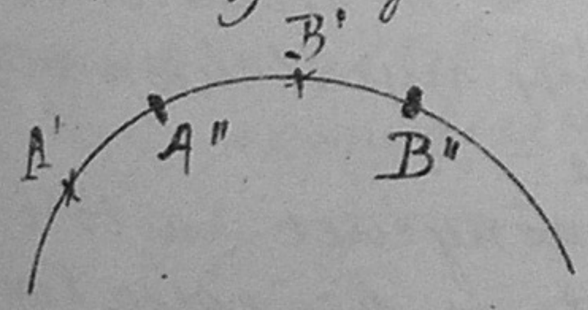
Mikor lesz egy egyértékű függvény integrálfüggvénye is egyértékű? Az előbbiek szerint akkor, ha az összes szing. pontjaihoz tartozó residuumok 0-al egyenlők, vagy ami ezzel egyenlő, ha az összes szing. pontjaihoz tartozó Laurent-féle sorfejtésében a -1-ik hatvány nem fordul elő. Annak bemutatására, hogy egy egyértékű függvény többértékűsége mily nagy mérvű lehet, szerkesztünk egy oly racionális függvényt, melynek integrálfüggvénye bármely z helyen az integrációs út kellő megválasztása mellett minden komplex értéknek tetszésszerinti közelébe juthat.

Ehhez egy aritmetikai segédtételre lesz szükség, mely Tchebychefftől ered. Bebizonyítjuk, hogy <u>ha α egy tetszésszerinti valós irracionális szám, bármily A és bármily kicsiny ε valós számokhoz található két oly p, q valós egész szám, hogy:</u>

$|p + q\alpha - A| < \varepsilon$ <u>bármily kicsiny ε-ra nézve.</u> - Egy oly körre, melynek kerülete az egységgel egyenlő, mérjük fel bizonyos



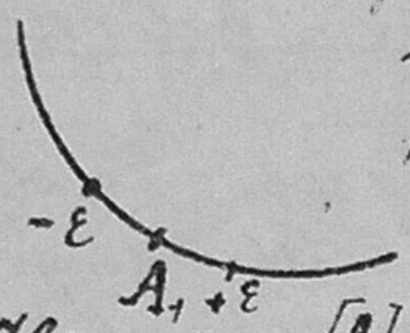
pontból kezdve jobbra-balra az α irr. számot 1, 2, 3... szor, úgyhogy a, 0, ±α, ±2α, ±3α, ... számoknak egy-egy pont felel meg a kör kerületén. E pontok közül bármely kettő - épen α irr. volta miatt - különbözik egymástól. Továbbá e pontok mindenütt sűrűn borítják be a kör kerületét. Mert ha volna a kör kerületén valahol egy véges nagyságú intervallum, melynek egy belső pontja sem tartozik e ponthalmazhoz, vegyük ez intervallumot a lehető legnagyobbnak, úgyhogy határpontjai (A, B) már a ponthalmazhoz tartoznak, vagy annak torlódási helyei. Ekkor $(A + \alpha, B + \alpha)$ pontok közti intervallum is hasonló tulajdonságokkal bír, mert ha ennek egy belső pontja a halmazhoz tartoznék, pl. X pont, akkor az (AB) intervallumban levő $(X - \alpha)$ pont is hozzátartoznék a halmazhoz, ami nem lehetséges. Hasonlóan következik, hogy az $(A + r\alpha, B + r\alpha)$ $(r = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \ldots)$ végtelen sok intervallum mindegyike is hasonló tulajdonsággal bír. A végtelen sok $(A + r\alpha, B + r\alpha)$ intervallum borítja a kör kerületét; mind egyenlő hosszú, viszont a kör véges hosszúságú; kell tehát, hogy legalább 2 intervallum pl. az $(A'B')$ és az $(A''B'')$ intervallumok egymást egészben vagy részben fedjék. $A' \equiv A''$ $B' \equiv B''$, mint láttuk, nem lehetséges, tehát kell, hogy pl. A'', - egy a halmazhoz tartozó pont vagy torlódási hely-



beme legyen az $(A'B')$ intervallumban, ami ellentmondás.

Az A tetszésszerinti valós számnak egész része legyen $[A]$, tört része A_1, úgyhogy $A = [A] + A_1$ $A_1 < 1$. (Feltehetjük, hogy A pozitiv). Az A-nak, vagy ami ugyanaz, az A_1-nek megfelelő pontot felkeressük az egységkerületü körön. Az előbbi

halmaz pontjai mindenütt sűrűn borítják a kör kerületét, van tehát pontja a halmaznak az $(A_1+\varepsilon,\ A_1-\varepsilon)$ intervallumon belül is. Ez legyen az $m\alpha$-nak megfelelő pont, melynek felmérése közben n-szer kerülünk meg a kör kerületét. (m és n ± egész számok). Tehát



$$A_1-\varepsilon < m\alpha - n < A_1+\varepsilon, \text{ azaz: } -\varepsilon < m\alpha + [A] - n - A < +\varepsilon$$

Ha $p = [A] - n$, $q = m$, akkor tényleg $|p + q\alpha - A| < \varepsilon$

Legyen a, b, c, d négy egymástól különböző komplex szám, α, β pedig valós irr. számok. Akkor az

$$\frac{\alpha}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{i\beta}{x-c} + \frac{i}{x-d}$$

rac. függvény integráljának egy J_1 értékétől valamely z helyen ezen integrálnak egy más értéke: J_2, az út választása szerint csak a következő értékben különbözhetik:

$$J_2 = J_1 + 2\pi i\,(m\alpha + n + i\,m'\beta + i\,n')$$

ahol m, n, m', n' ± egész számok. Az út J_2-nél mindig választható oly különbözőnek az J_1 útjától, hogy J_2 értéke egy tetszésszerinti A komplex érték tetszésszerinti közelébe jusson, vagy ami vele egyértelmű, hogy $m\alpha + n + i(m'\beta + n')$ az $\frac{A-J_1}{2i\pi}$ számot közelítse meg. Legyen:

$$\frac{A-J_1}{2i\pi} = M + Ni \quad (M \text{ és } N \text{ valós számok})$$

Az előbbiek szerint $(m\alpha + n)$-el az M, $(m'\beta + n')$-vel az N, $(m\alpha + n) + (m'\beta + n')i$-vel tehát $\frac{A-J_1}{2\pi i}$ közelíthető meg tetszésszerinti pontossággal az m, n, m', n' egész számok megfelelő választásával, s ha az J_1 integráció-utját úgy választjuk meg, hogy az „a" pontot még m-szer, a b-t n-szer stb. kerüljük meg az m, n stb előjele szerint, az így nyert úton vett integrál szolgáltatja az A-t megközelítő J_2-őt.

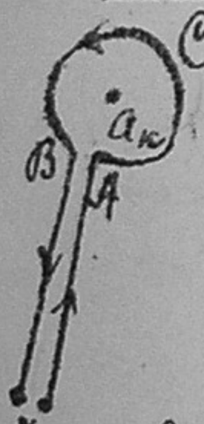
Látnivaló, hogyha a komplex változó függvényének, ha többértékű, az egy z ponthoz tartozó értékkészlete is az egész komplex számsíkon mindenütt sűrű tud lenni, nehézséget okoz a függvény értékváltozása felett <u>egyetlen komplex számsíkon</u> szerezni áttekintést. Erre szolgál az u. n. <u>Riemann-féle felület</u, melyen interpretálva a függvényt, egyértékűvé lesz. Erről később lesz szó. –

Kétértékű függvény integrálfüggvénye; elliptikus integrálok. Az elliptikus modulfüggvény.

Eddig egyértékű függvények integrálásával foglalkoztunk. Vizsgáljuk egy többértékű függvény integrálját. Legyen:

$$f(z) = \frac{P(z)}{\sqrt{R(z)}}$$

, ahol $P(z)$ és $R(z)$ polinomok. Legyenek továbbá az $R(z)$ függvény nullhelyei: $a_1, a_2 \ldots a_n$, mind egymástól különbözők. Mivel minden x helyen $f(z)$-nek két értéke van, minden út mentén $\int f(z)\,dz$-nek is két, jelben egymástól különböző értéke lesz. Az út kezdetén $f(z)$ valamelyik értékével indulunk ki és integrálás közben mindig azon függvényértéket vesszük, amely az előzőből folytonos változás útján származott. Egy zárt út megtevése után a kezdőpontba való visszaérkezéskor $f(z)$ a kezdeti értékkel tér vissza, ha az útközben $a_1, a_2 \ldots a_n$ pontok körül megtett összes megkerülések száma páros s az ellenkező jelű értékkel, ha e szám páratlan. A zárt út mentén képzett $\int f(z)\,dz$ könnyen kifejezhető az u. n. hurok utak mentén vett integrálokkal, röviden: <u>hurokintegrálokkal.</u> <u>Hurokútnak</u> nevezzük a kezdőpontból



kiinduló s valamely a_k pontot egyszeri megkerülése után oda visszatérő utat. Ez ily összegalakban is írható:

$$\int_{x_0}^{A} + \int_{ACB} + \int_{B}^{x_0} \qquad (ACB \text{ a kör mentén})$$

A kör mentén vett integrál nem függ, a kör nagyságától s ha ez végtelen kicsinnyé válik, az integrál értéke 0 felé tart. A harmadik tag: $\int_{B}^{x_0} = -\int_{x_0}^{B}$, de ebben már az integrandus az egyszeri megkerülés után ellenkező jelű, mint az első tagban, végeredményben tehát az első és harmadik tag egymással egyenlők. és ha $\int_{x_0}^{a_k} = A_k$, <u>a hurokintegrál értéke $2A_k$</u>. – Példánk arra, hogy <u>$f(z)$-nek minden zárt út mentén vett integrálja kifejezhető a hurokintegrálokkal ilymódon: $m_1 2A_1 + m_2 2A_2 + \ldots + m_n 2A_n$</u>, ahol $m_1 \ldots m_n$ ± egész számok, az ábrán levő C görbe mentén vett integrált veszszük. A C görbe az $a_1, a_2 \ldots a_n$ pontok

valamelyikének érintére nélkül való folytonos deformációval az $x_0 A B x_0 M N x_0$ zárt görbévé alakítható át. Tehát:

$$\int_C = \int_{x_0 A B x_0} + \int_{x_0 M N x_0}$$

Ha a hurokintegrálok képzésénél a kezdőpontból való kiindulás kor $f(z)$-nek pl. oly előjelű értékét használjuk, hogy: $\int_{x_0 A B x_0} = 2A_2$, akkor $\int_{x_0 M N x_0} = -2A_1$, mert ez utóbbinál x_0-ból $f(z)$-nek az a_2 pont megkerülése utáni, megváltozott, tehát a kezdetihez képest ellenkező jelű értékével indulunk ki. Tehát

$$\int_C f(z)\,dz = 2A_2 - 2A_1$$

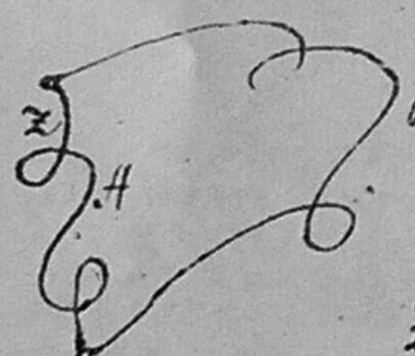
Kimutatható, hogyha a következő jelöléseket használjuk:
$2A_1 - 2A_2 = W_1$, $2A_2 - 2A_3 = W_2$, ... $2A_1 - 2A_n = W_{n-1}$, (ahol azonban másféle különbségeket pl. $2A_2 - 2A_x$-féléket is lehetne használni), akkor: <u>a zárt út mentén vett integrál értéke azon esetben, ha az összes megkerülések száma páros, így fejezhető ki:</u>

$$\frac{v_1 W_1 + v_2 W_2 + \ldots + v_{n-1} W_{n-1}}{}$$

(ahol $v_1 v_2 \ldots v_{n-1}$ ± egész számok), <u>páratlan számú megkerülésnél pedig így:</u>

$$\frac{2A_1 + v_1 W_1 + \ldots + v_{n-1} W_{n-1}}{}$$

($2A_1$ helyett természetesen $2A_2$, $2A_3$, stb is állhatna). A zárt utak mentén képzett integrálok segítségével a nem zárt utak mentén képzett integrálok felett is áttekintést nyerhetünk.



$\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$ értéke egy megszabott út $(z_0 A z)$ mentén legyen J. Miben különbözik ettől egy más $(z_0 B z)$ út mentén képzett értéke: J_1, ezen integrálnak? Ha a $(z_0 B z A z_0)$ zárt út alatt páros számú megkerülés történik, akkor $f(z)$ z_0-ból z-be akár A-n, akár B-n át ugyanolyan jelű értékkel érkezik, tehát

$$\int_{(z_0 B z A z_0)} = \int_{(z_0 B z)} + \int_{(z A z_0)} = J_1 - J = v_1 W_1 + v_2 W_2 + \ldots + v_{n-1} W_{n-1}$$

amint az előbbiekből következik. – Ha pedig a $(z_0 B z A z_0)$ út páratlan számú megkerülést tartalmaz, akkor $f(z)$ z_0-ból z-be A-n és B-n át különböző előjelű értékkel érkezik, tehát:

$$\int_{(z_0 B z A z_0)} = J_1 + J = 2A_1 + v_1 W_1 + v_2 W_2 + \ldots + v_{n-1} W_{n-1}$$

ismét az előbbiek alapján. Szóval <u>ha a z_0-tól z-ig vett integrálnak egy bizonyos út menténaz értéke J, akkor minden más út mentén való értéke e két típus valamelyikébe tartozik:</u>

$$J_1 = J + r_1 w_1 + r_2 w_2 + \ldots + r_{n-1} w_{n-1} \text{ , vagy:}$$

$$J_1 = -J + 2A_1 + r_1 w_1 + r_2 w_2 + \ldots + r_{n-1} w_{n-1}$$

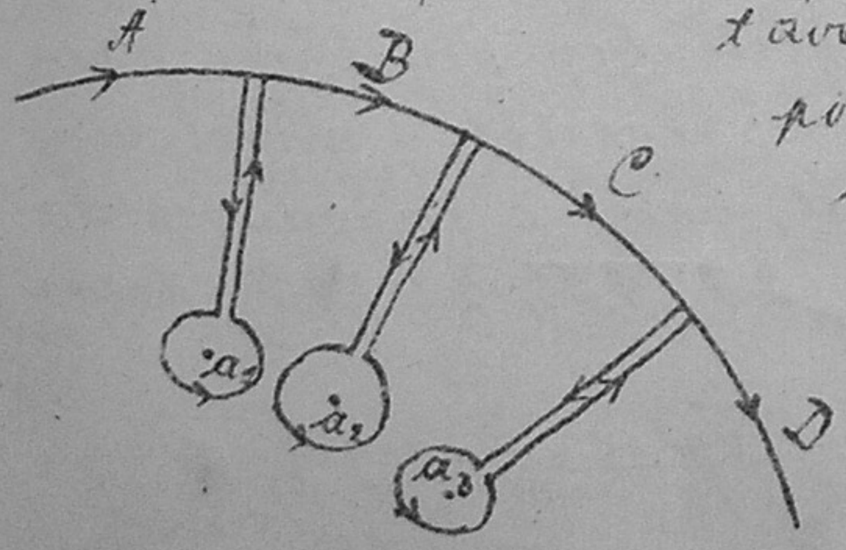
Ha az egyik típus jele J^*, akkor a másiké $2A_1 - J^*$.

Ez már tehát jellemző a kétértékű függvény integráljára, mert egyértékű függvény integrálja csak egy típust tüntet fel.. Az arc sin z azaz az $\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$ függvény egy ponthoz tartozó értékkészlete, mint is- meretes, tényleg két típusba tartozik. – Az $w_1 w_2 \ldots w_{n-1}$ számokat <u>periodusoknak</u> nevezzük. Látható, hogyha a nevező ($R(z)$) n fokú polinom, a periodusok száma legfeljebb n-1. Ez azonban még nem zárja ki azt, hogy az egymástól lényegesen különböző periodusok száma esetleg kevesebb is ne lehessen, t. i. hogy egyesek közülök kifejezhetők a többivel ilyen módon:

$$w_{n-1} = \varrho_1 w_1 + \varrho_2 w_2 + \ldots + \varrho_{n-2} w_{n-2} \text{ , ahol } \varrho_1 \varrho_2 \ldots$$

ϱ_{n-2} reális egész számok. Ekkor már w_{n-1}-et nem tekintjük a többitől lényegesen különböző periodusnak.

<u>Egy esetben biztosan alászáll az egymástól lényegesen különböző</u> periódusok száma, ha t. i. az $f(z) = \frac{P(z)}{\sqrt{R(z)}}$ <u>függvény olyan, hogy integrálja a végtelenben 0-vá válik, ha t. i. a nevező a ∞-ben **több**, mint eggyel magasabb rendűen lesz ∞, mint a számláló.</u> Ha pl. az $R(z)$ páros: $2p$ fokú, akkor a számláló fokszáma kisebb kell, hogy legyen, mint $\frac{2p}{2} - 1$, azaz legfeljebb $p-2$ lehet a $P(z)$ fokszáma. Ekkor veszünk egy mindinkább a ∞-be távozó $ABCD\ldots$ kört, kerületének egyes pontjait pedig hurokutakkal kötjük össze az $a_1 a_2 \ldots a_n$ pontokkal. Az ábrán látható zárt görbe mentén vett integrál = 0, ha a kör végtelen nagy sugarúvá válik, az $ABCD\ldots$ ívekre vonatkozó integrálok is 0-vá válnak. Marad tehát a $2A_1, 2A_2 \ldots 2A_n$ hurokintegrálok közt egy linedris reláció reális egész számokkal, mint koefficiensekkel, amely az $w_1 w_2 \ldots w_{n-1}$ periodusok közti oly line-



áris relációvá alakítható át, hogy közülök egy, pl. ω_{n-1} így fejezhető ki a többivel: $\omega_{n-1} = \varsigma_1\omega_1 + \varsigma_2\omega_2 + \ldots + \varsigma_{n-2}\omega_{n-2}$, ahol ς_1, $\varsigma_2 \ldots \varsigma_{n-2}$ reális egész számok.

Viszont kimutatható, hogy ezen esetben, <u>amikor a függvény integrálja a ∞-ben eltűnik, legalább két egymástól lényegileg különböző periodusnak kell léteznie.</u> Mert ha csak egy periodus volna: ω, akkor ha $u = \int_{z_0}^{z} f(z)dz$ integrálnak egy bizonyos út mentén való értéke $\mathfrak{I}$, minden más út mentén való értéke e két tipus egyikébe tartoznék: $\mathfrak{I} + k\omega$ vagy: $-\mathfrak{I} + 2A_1 + r\omega$, ahol k, r reális egész számok. - Legyen:

$$\int_{z_0}^{z} f(z)dz = u(z) \quad \text{és} \quad \Phi(z) = e^{\frac{2\pi i}{\omega}u(z)} + e^{\frac{2\pi i}{\omega}(2A_1 - u(z))}$$

Vizsgáljuk meg, mily változást szenved $\Phi(z)$ a z_0-tól z-ig vivő különböző integrációs utak szerint. Ha e változás az első tipus szerint történik, $u(z)$ helyébe $u(z) + k\omega$ lép s a $\Phi(z)$ kifejezésében szereplő két tag külön-külön, tehát $\Phi(z)$ maga sem változik. - Ha pedig a második tipus szerint $u(z)$ helyébe $-u(z) + 2A_1 + r\omega$ lép, akkor $\Phi(z)$-ben a jobboldali két tag egymással felcserélődik, más szóval $\Phi(z)$ a z változó egy utjánál sem változik meg: z-nek egyértékű függvénye, amely azonkívül az egész síkban s a ∞-ben is - mint $u(z)$ - véges marad, tehát egy ismeretes tétel szerint konstansnak kellene lennie, ami csak úgy lehetséges, ha $u(z)$ maga is konstans.

Szorítkozzunk ezentúl a következő u. n. <u>elliptikus integrálra</u>: $\int \frac{dz}{\sqrt{(z-a)(z-b)(z-c)(z-d)}}$, ahol a, b, c, d 4 egymástól különböző szám. Az előbbiek szerint, mivel ez az integrál a végtelenben reguláris, a periodusok száma $n-1$-nél, azaz 3-nál is kevesebb, s mivel vima pontosan: 2. Ha a hurokintegrálok $2A, 2B, 2C, 2D$; legyen pl: $\omega_1 = 2B - 2C$; $\omega_2 = 2B - 2D$.

<u>A két periodusnak viszonya nem lehet valós.</u> Éspedig: először is nem lehet valós racionális szám. Mert ha $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{c_1}{c_2}$ volna, ahol $c_1 c_2$ reális egész számok s amellett relativ prímszámok is, akkor léteznék oly ω komplex szám, hogy:

$$\omega_1 = c_1\omega \quad ; \quad \omega_2 = c_2\omega.$$ Mivel $c_1 c_2$ relativ

primek, azért, mint ismeretes, található két oly m, n, valós egész szám, hogy $c_1 m + c_2 n = 1$. Ekkor tehát $m c_1 \omega + n c_2 \omega = \omega$, azaz $m\omega_1 + n\omega_2 = \omega$ alapján ω is periodus lenne, mégpedig az egyetlen, amelynek ω_1 ω_2 csak egész számú többszörösei, ami nem lehetséges. –

De $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ valós irracionalis szám sem lehet. Változtassuk u.i. az egyik elágazási pontot pl. az a-t, aminek jeléül írjunk a helyett u-t. Az a pont bizonyos környezetében az:

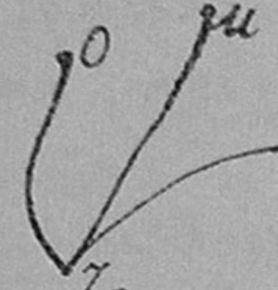
$$\int \frac{-dz}{\sqrt{(z-a)(z-b)(z-c)(z-d)}}$$

integrál u-nak hol. függvénye, tehát a hurokintegrálok és az $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ periodushányados is az. Mint láttuk, e periodushányados nem vehet fel semmi valós racionális értéket. Ebből aztán az is következik, hogy az $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \varphi(u)$ függvény semmi valós értéket sem vehet fel. Mert a hol. függvényeknek az a sajátságuk, hogy egy reguláris hely környezetében felveszik mindazon értékeket, melyek az ezen reguláris helyhez tartozó függvényérték elegendő kis környezetében fekszenek. – Ha a $\varphi(u)$ hol. függvény felvenne valós irr. értéket, akkor az ennek tetszőleges kis környezetében levő rac. értékeket is fel kellene vennie, ami ellentmondás. A rac. számok t.i. mindenütt sűrűn helyezkednek el a valós számok egyenesén.

Az $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ periodushányados mint u függvénye szolgáltatja az u.n. elliptikus modulfüggvényt, mely 3 szing. hely: b, c és d kivételével mindenütt hol. s amellett egész értékkészlete a számsíknak a valós tengely feletti részére szorítkozik, azaz csak oly értékeket vesz fel, melyek képzetes része + előjelű. Egyszerűség kedvéért (és a későbbi alkalmazásra való tekintettel is), b, c és d-t speciálisan 0, 1, és ∞-nek választjuk. A vizsgálandó integrál most: $\int \frac{-dx}{\sqrt{x(x-1)(x-u)}}$, ezen integrál két periodusának hányadosa: $v(u) = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ értelmezi az ell. mod. függvényt. Integrálunk látszólag abban különbözik az előbb tárgyalt általános esettől, hogy negyedfokú; ez a redukció a $d = \infty$ speciálizálás folyományа. Négy elágazási helye: 0, 1, u és ∞. A végt. távoli pont, mint elágazási pont megkerülése egyértelmű az összes véges elágazási helyek megkerülésével. Az általános s

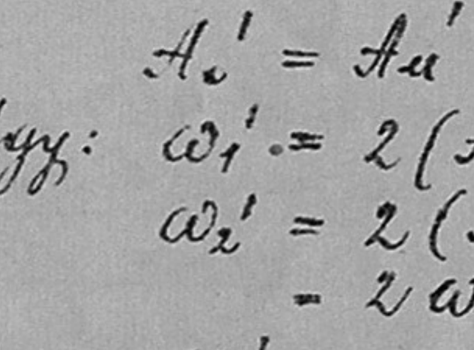
– 13. ív –

a mostani integrál lineáris transzformációval vihetők át egymásba. – A hurokintegrálokat az ábrán megjelölt viszonylagos helyzetű utak mentén képezzük. Az $A_0\ A_1\ A_u$ hurokintegrálokból képezett periodusok legyenek:



$$\omega_1 = 2A_u - 2A_0\ ;\quad \omega_2 = 2A_u - 2A_1$$

A periodusok viszonya, a $\nu(u) = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ függvény az integrál révén definiálva van mindenütt, kivéve a 0, 1 és ∞ pontokat, mert az u-nak ezektől különböző pontnak kell lennie. Vizsgáljuk, hogy, mily változást szenved a $\nu(u)$ függvény, miközben u megkerüli a 0, 1 és ∞ pontokat. – Ha u a 0 pontot kerüli meg, azaz a z_0-tól 0-ig terjedő útnak pl. jobb partja egyik pontjáról a 0 megkerülésével a szemközti balparti u' pontba ér az u a B u' úton, akkor $A_0\ A_1\ A_u$ $\omega_1\ \omega_2$ ezáltal megváltozott értékeit jelölje $A_0'\ A_1'\ A_u'\ \omega_1'\ \omega_2'$.



$A_1' = A_1$, mert az integrandus ugyanaz maradt, előjele nem változott. u'

$$A_u' = \int_{z_0} = \int_{z_0}^{u} + \int_{u}^{u'} = A_u - 2(A_0 - A_u) = 3A_u - 2A_0$$

Hasonlóan, mivel: $A_u' - A_0' = A_u - A_0$, tehát

$$A_0' = A_u' - A_u + A_0 = 2A_u - A_0$$

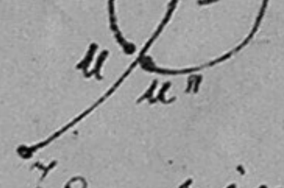
Így: $\omega_1' = 2(A_u' - A_0') = 2(A_u - A_0) = \omega_1$

$$\omega_2' = 2(A_u' - A_1') = 2(3A_u - 2A_0 - A_1) = \left[2(A_u - A_0) + (A_u - A_1)\right]2 =$$
$$= 2\omega_1 + \omega_2$$

$$\frac{\omega_1'}{\omega_2'} = \frac{\omega_1}{2\omega_1 + \omega_2}$$

ω_1 és ω_2 a 0 pont megkerülésével tehát oly linedris szubsztitucziót szenvednek, melynek determinánsa: $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$

Ha u az 1 pontot kerüli meg, az ábrán megjelölt irányban, akkor a megváltozást "-vel jelölve, hasonlóan kapható, hogy:



$$A_0'' = A_0\ ;\quad A_u'' = 3A_u - 2A_1\ ;\quad A_1'' = 2A_u - A_1\ ,$$

s innen: $\omega_1'' = \omega_1 + 2\omega_2\ ;\quad \omega_2'' = \omega_2$

$$\frac{\omega_1''}{\omega_2''} = \frac{\omega_1 + 2\omega_2}{\omega_2}$$

Ezen szubsztitucziós determinánsa is: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$. – Az ellenkező értelmű körüljárásoknál az inverz szubsztitucziók lépnek fel:

$$\omega_1 = \omega_1'\ ;\quad \omega_2 = -2\omega_1' + \omega_2'\ ,\ \text{illetőleg:}$$

$$\omega_1 = \omega_1'' - 2\omega_2''\,; \quad \omega_2 = \omega_2''$$

s a determinánsokra nézve ismét: $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1\,, \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

Az elágazási 0 és 1 pontoknak s a végt. táv. pontnak is minden gondolható megkerülése szétbontható a 0 és 1 pont körüli bizonyos számú s értelmű megkerülésekre, tehát az a legáltalánosabb megváltozás is, melyet ω_1 és ω_2 szenvedhet, kifejezhető oly lineáris szubsztitucióval, mely a fenti 4 összetételéből keletkezett s amelynek determinánsa tehát szintén az egységgel egyenlő.

Ezek után bebizonyítható, hogy az $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ hányados képzetes részének előjele a 0, 1 és ∞ elágazási pontoknak bármily megkerülése után sem változik, hanem mindig ugyanaz marad. $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ legáltalánosabb megváltozását is oly

$$\frac{a\omega_1 + b\omega_2}{c\omega_1 + d\omega_2}$$

lineáris szubsztitució képviseli, amelyben a, b, c, d valós számok és

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc = 1.$$

ω_1 ill. ω_2 konjugált komplex értékeit $\bar{\omega}_1$ ill. $\bar{\omega}_2$-al jelöljük. Az

$$\frac{a\omega_1 + b\omega_2}{c\omega_1 + d\omega_2}$$

tört képzetes része oly előjelű, mint a vele azonos:

$$\frac{a\omega_1 + b\omega_2}{c\omega_1 + d\omega_2} \cdot \frac{c\bar{\omega}_1 + d\bar{\omega}_2}{c\bar{\omega}_1 + d\bar{\omega}_2} = \frac{ac\,\omega_1\bar{\omega}_1 + bd\,\omega_2\bar{\omega}_2}{A} + \frac{ad\,\omega_1\bar{\omega}_2 + bc\,\omega_2\bar{\omega}_1}{A}.$$

kifejezésben az $(ad\,\omega_1\bar{\omega}_2 + bc\,\omega_2\bar{\omega}_1)$ képzetes részének előjele, minthogy az A nevező + és az $(ac\,\omega_1\bar{\omega}_1 + bd\,\omega_2\bar{\omega}_2)$ kifejezés reális. – $\omega_1\bar{\omega}_2$ és $\omega_2\bar{\omega}_1$ konj. komplex mennyiségek, tehát

$$\omega_1\bar{\omega}_2 = \alpha + i\beta\,; \quad \omega_2\bar{\omega}_1 = \alpha - i\beta,$$

$$ad\,\omega_1\bar{\omega}_2 + bc\,\omega_2\bar{\omega}_1 = \alpha(ad+bc) + i\beta(ad-bc).$$

A képzetes rész előjele egyenlő $\beta(ad-bc) = \beta$ előjelével. De az

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\omega_1\bar{\omega}_2}{\omega_2\bar{\omega}_2}$$

hányadosnál a képzetes rész szintén az $\omega_1\bar{\omega}_2 = \alpha + i\beta$ képzetes résznek, tehát a β-nak előjelével egyenlő jelű, amivel az állítást igazoltuk.

Az eddigiekből már következik, hogy a $v(u) = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ függvény képzetes részének előjele állandóan ugyanaz. Bármely két pontban x_1 és x_2-ben, ahol a függvény definiálva van, a $V(x)$ képzetes részének előjele ugyanaz. Ha a két pontban különböző előjelű képzetes résszel bírna a függvény, ez,

mivel a függvény képzetes részének előjele az elágazási pontok bármiféle megkerülése után sem változik meg, ugyanazon pontban, csak úgy lenne lehetséges, ha a függvény egy z_1-ből z_2-be vivő úton folytonos változás közben áthaladna a valós értékeken is. Ez azonban nem lehetséges, mert a függvény valós értéket, mint láttuk, egyáltalában nem vesz fel. Kimutatható még az is, hogy az állandó előjel +. Ez azonban a továbbiakra nem lényeges, mert ha az állandó előjel − volna, az elkövetkező alkalmazásokban csak $v(u)$ helyébe $-v(u)$-t kellene tenni.

A Picard és Landau-féle tételek.

Az ell. mod. függvényt két általános függvénytani tétel bebizonyítására használjuk fel.

A róla nevezett tételeket Picard először 1879-ben közölte. Az egész függvényekre vonatkozó speciális Picard-tétel szerint: ha

$$F(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

transzcendens egész függvény két egymástól különböző (a, b) értéket hagy ki, azaz ha az

$$F(z) = a \qquad F(z) = b \qquad (a \neq b)$$

egyenleteknek nincs gyöke, akkor az $F(z)$ függvény konstans, tehát $a_1 = a_2 = \dots = 0$.

Egy értéket kihagyó egész transzcendens függvény pl. az e^z függvény, mely sehol sem veszi fel a 0 értéket, csupán tetszőlegesen meg tudja közelíteni a végt. távoli pontba való bizonyos irányú közeledéssel. A tetszőleges (a) értéket pl. az $e^z + a$ egész transzcendens függvény hagyja ki. Más értéket ezek a függvények Picard-tét tétele szerint nem hagyhatnak ki.

Az általános Picard tétel nem egész függvényre, hanem tetszőleges analitikus függvényre vonatkozik egy iz. lényeges szing. helyét illetőleg. E tétel szerint egy iz. lényeges szing. hely körül bármily kis kört is rajzoljunk, ezen körön belül a függvény minden értéket felvesz, legfeljebb egynek a kivételével. E tételnek az előbbi speciális esete, mert a transzcendens egész függvény egyetlen lényeges szing. helye a ∞. E tételek kiegészítik és mélyítik az ismert Liouville-féle tételt, mely szerint egy lényeges szing. hely bármily kicsiny környezetében a függ-

vény minden komplex érték tetszésszerinti közelébe eljut.

Az egész transcendens függvényekre vonatkozó Picard-tételt bizonyítjuk be az ell. mod. függvény segítségével.

$F(z)$ legyen egy oly egész transcendens függvény, mely egy z értékénél sem veszi fel a 0 és 1 értékeket. Ez nem lényeges megszorítása annak, hogy két egymástól különböző a b értéket kihagyó egész transcendens függvény létezését kellene feltennünk. Mert ha $f(z)$ ilyen függvény, akkor az

$$F(z) = \frac{f(z) - a}{b - a}$$

a 0 és 1-et kihagyó egész transcendens függvény. U.i. $F(z) = 0$, $F(z) = 1$ egyenletek az $f(z) = a$, $f(z) = b$ egyenletekkel vonnák maguk után. Alkalmazzuk a $\nu(z)$ függvényt. Mivel $\nu(z)$-nek csak 0 és 1 a véges helyen levő szingularitási helyei, ezekkel pedig $F(z)$ egy z érték mellett sem veszi fel, azért a

$$\mathfrak{F}(z) = \nu(F(z))$$

függvénynek, a ν függvény bármely ágát tekintsük is, minden véges z érték reguláris helye. Az a függvény egyértékű, mert bármily zárt utat rajzol is z a maga síkjában, $F(z)$ síkjában ennek egy oly zárt út felel meg, mely nem tartalmazza magában a 0 és 1 pontokat, ép $F(z)$ említett tulajdonsága folytán, mert különben kellene lennie oly z-nek, mely mellett $F(z) = 0$, ill. $= 1$. Nem történik meg tehát a ν elágazási pontjainak megkerülése, $\mathfrak{F}(z)$ egyértékű s így egész transc. függvény, – amelynek képzetes része azonban az ell. mod. függvény tulajdonsága alapján mindig ugyanazon előjelű, – ami egész transc. függvénynél tehetetlen. – Ezen így is folytatható a gondolatmenet: Ha $\mathfrak{F}(z) = U + iV$, valós és képzetes részre szétbontva, akkor $\mathfrak{F}(z)$-vel együtt a

$$\mathfrak{H}(z) = e^{i\mathfrak{F}(z)} = e^{iU - V}$$

függvény is transc. egész függvény, melyre nézve, mivel $V > 0$ állandóan, $|\mathfrak{H}(z)| = e^{-V} < 1$. Liouville tétele szerint pedig egy oly függvény, mely állandóan abszolút értékére nézve egy véges határon alul marad, konstans, s ekkor természetesen $\mathfrak{H}(z)$-vel együtt $f(z)$ is konstans.

E tételbe beleértetődnek voltaképen az egész rac. függvények is, szóval minden egész függvény.

Picard vizsgálatait továbbvitte Landau: Ha a_0 és a_1 ad

va. vannak és $a_1 \neq 0$, akkor meghatározható egy olyan csakis $a_0\ a_1$-től függő $+R$ szám: $R = R(a_0, a_1)$, hogy minden függvény, melynek $z=0$ reguláris helyei s amelynek hatványsora $a_0 + a_1 z$-vel kezdődik: $F(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$, a $z=0$ pont körül írt R sugarú körben vagy felveszi a 0 és 1 értékek valamelyikét, vagy szing. helye van e körön belül. Más szóval $F(z)$ e körben vagy felveszi a 0 és 1 értékek valamelyikét, vagy $|z| = R$ mellett már nem konvergens a hatványsora (vagy is a szing. pont feltépésével egyértelmű.) Lényeges Landaunál, hogy R értéke csakis $a_0\ a_1$-től függ, tekintet nélkül $a_2\ a_3 \dots$-ra. Landau ezen tételétől Picard I. első tétele úgy következik, hogy az egész transz. függvényt el a szing. pont föltépése ki van zárva. – Itt is az ell. mód. függvényt vesszük segítségül. Legyen $F(z)$ egy oly függvény, melynek az adott $a_0 a_1$-el ($a_1 \neq 0$) kezdődő hatványsora

$$F(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots \qquad |z| < r \text{ mellett konvergens}$$

és ezen r sugarú körben állandóan $F(z) \neq 0$ és $F(z) \neq 1$. Tehát $F(0) = a_0 \neq 0$ és $F(0) = a_0 \neq 1$ is. A $r(z)$ függvény bármely ágának tehát $F(0) = a_0$ közönséges helye s az idetartozó hatv.sora legyen: $r(z) = c_0 + c_m (z-a_0)^m + c_{m+1}(z-a_0)^{m+1} + \dots$ Kimutatható lenne, hogy már $c_1 \neq 0$. De ennek ismerete nélkül tegyük fel, hogy: $c_1 = c_2 = \dots = c_{m-1} = 0$, tehát

$$G(z) = r(F(z)) = c_0 + c_m (a_1 z + a_2 z^2 + \dots)^m + c_{m+1}(a_1 z + a_2 z^2 + \dots)^{m+1} + \dots$$

$$= c_0 + c_m a_1^m z^m + \dots \quad \text{és}$$

$$H(z) = e^{iG(z)} = e^{c_0 i} + e^{c_0 i} c_m a_1^m i\, z^m + \dots$$

$G(z)$ és $H(z)$ függvények e hatványsorai szintén konvergensek $|z| < r$ tehát $|z| \leq \frac{r}{2}$ mellett is, és így *)

$$|e^{c_0 i} c_m a_1^m i| < \frac{1}{(\frac{r}{2})^m},$$ mert az r sugarú körben mindenütt, tehát az $\frac{r}{2}$ sugarú kör mentén is, mint tudjuk $|H(z)| < 1$. Az előbbi egyenlőtlenség így is írható:

$$r < \frac{2}{\sqrt[m]{|e^{c_0 i} c_m a_1^m|}},$$ c_0 és c_m csupán a_0-tól függenek; t. i. a speciális $r(z)$ függvénynek az a_0 körül való sorfejtésének együtthatói. –

*) A Cauchy-féle integrálelőállítás alapján, ha egy $f(z)$ függvény $a_0 + a_1 z + \dots$ hatv. sora egy ϱ sugarú körben és körön konvergens s a körön $|f(z)| < M$, akkor

$$a_m = \frac{1}{2\pi i} \int_{(\text{a kör mentén})} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{m+1}}\, d\zeta. \quad \text{Tehát: } |a_m| < \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{M}{\varrho^{m+1}}\, 2\varrho\pi = \frac{M}{\varrho^m}$$

Tehát bármely $F(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$ függvény csak az a_0 és a_1 megadása által már teljesen meghatározott:

$R(a_0 a_1) = \dfrac{2}{\sqrt[n]{|e^{c_0} c_n a_1^n|}}$ sugárnál kisebb sugarú körben kaphatja ki a 0 és 1 értékeket, feltéve, hogy ugyanott még konvergens a hatványsora; az $R(a_0 a_1)$ sugarú körben vagy felveszi egyiköket, vagy szing. ponttal bír.

Ezzel ki van mutatva egyszersmind egy olyan $\varphi = \varphi'(a_0 a_1)$ $(a \neq 0)$ szám létezése, melyre nézve minden olyan függvény, mely egy φ-nél nagyobb sugarú körben konvergens $a_0 + a_1 z$-vel kezdődő hatványsorral bír, e körben felveszi a 0 és 1 értékek valamelyikét, ellenben mindig található egy olyan függvény, melynek az $a_0 + a_1 z$-vel kezdődő hatványsora egy φ-nél kisebb sugarú körben konvergens és itt nem veszi fel sem a 0, sem az 1 értékeket.

Osszuk az összes + számokat két csoportba, aszerint, hogy van-e vagy nincs olyan függvény, amelynek hatv.sora az illető + számmal megjelölt hosszúságú sugárral bíró körön belül konvergens és ebben a 0, 1 értékeket kihagyja. Az első osztályba tartozó α_1 számnak valamennyien kisebbek minden második osztálybeli α_2 számnál, mert nem lehet, hogy az a megadható függvény, amely az α_1 sugarú körön belül konv. hatv.sorral bír és itt kihagyja a 0 és 1 értékeket és így ugyanazon tulajdonságokkal bír egy α_2 sugarú körön belül is, ha $\alpha_2 < \alpha_1$ és α_2 a második osztályba tartozik, - kivételt képezzen, mert az α_2 sugarú körön belül konv. minden hat.sor itt felveszi a 0 és 1 értékek valamelyikét. Az a két osztály tehát a Dedekind-féle szeletalkotás értelmében az említett $\varphi(a_0 a_1)$ számot definiálja. $\varphi(a_0 a_1)$ véges szám, mert Landau tétele alapján létezneknek a második osztályba tartozó véges számok is.

Landau tétele csak ezen $\varphi(a_0 a_1)$ szám existenciáját mutatja ki. Caratheodory határozta meg $\varphi(a_0 a_1)$ értékét:

$$\varphi(a_0 a_1) = \frac{2 \mathfrak{J}(r(a_0))}{|a_1| \cdot |r'(a_0)|},$$

ahol $r'(z)$ a $r(z)$ deriváltját jelenti, $\mathfrak{J}(r(a_0))$ pedig a $r(a_0)$ komplex szám képzetes részében az i koefficienset, mely +. Minden függvény tehát a $\varphi(a_0 a_1)$-nél nagyobb sugarú körben vagy konv. hatv.sorral bír és ugyanitt felveszi a 0 és 1 értékek valamelyikét, vagy pedig szing. pontja van e körön belül, feltéve, hogy a hatv.sor $a_0 + a_1 z$-vel kezdődik, - ellenben minden, a

$\varphi(a_0 a_1)$-nél kisebb számhoz található egy, az ily sugarú körön belül konv. és $a_0 + a_1 z$-vel kezdődő hatványsorral bíró függvény, mely e körön belül kihagyja a 0 és 1 értékeket.

Megjegyzendő, hogy e tételek rac. egész függvényekre is vonatkoznak s ekkor tisztán algebrai tételekké válnak, melyeknek mindazonáltal pusztán algebrai eszközökkel való bizonyítása még eddig nem sikerült.

Végtelen sorok analitikai folytatása.

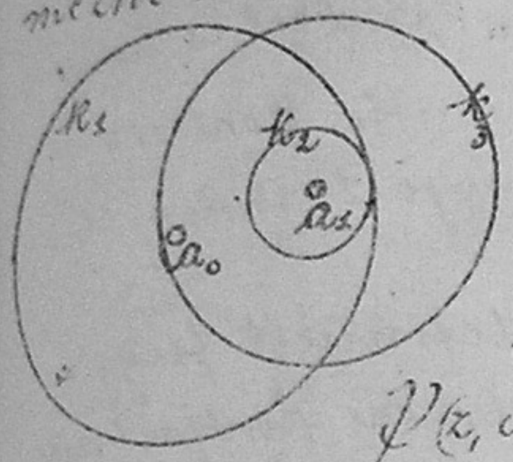
Analitikai függvény.

Eddig a komplex változó függvényét általában csak az u.n. holomorfitási tartományán belül, vagy egyes pontok környezetében vizsgáltuk. Gyakran egyes speciális függvények (pl. a $\Gamma(z)$ esetében) terjesztettük ki a függvény értelmezését azon tartományon túlra is, melyre a függvényt először értelmeztük, vagyis amint ezt a függvénytanban nevezni szokás, folytattuk a függvényt eredeti értelmezési tartományán túlra. Többé-kevésbé önkénytelenül megcselekedtük ezt akkor is, amikor a függvénynek bizonyos sor vagy integrál előállításait adtuk meg, melyek esetleg az eredeti értelmezési tartományon túl is konvergáltak. Ez után oly módszerekkel foglalkozunk, melyekkel a függvényt egész lefolyásában követhetjük, kilépve azon tartományból, melyben eredetileg volt. Az alapelv az, hogy ha két hol. függvény f_1 és f_2, melyek egyike egy C_1, másika egy C_2 tartományban van definiálva, ezen két tartomány közös területrészében azonos egymással, akkor bármelyiket követők a másik folytatásának tekintjük az előző definiálási tartományában, másszóval a két függvényt egy függvénynek tekintjük. A két függvény megegyezéséhez, mint tudjuk elégséges, ha egy C_1 ponthalmaz minden pontjában megegyeznek, melynek sűrűsödési helye szintén benne van a közös területben is – vagy ha a közös terület egy pontjában a két függvény és összes derivaltjaik értékei megegyeznek.



A függvénynek egymást kapcsolódó tartományokon át való folytatására célszerű, legalább is elméleti szempontból, az eljárás kanonizálása végett, a függvényt hatványsorral értel-

mezni és tartományokkal a konv. köröket választani. Egy hatvsort,

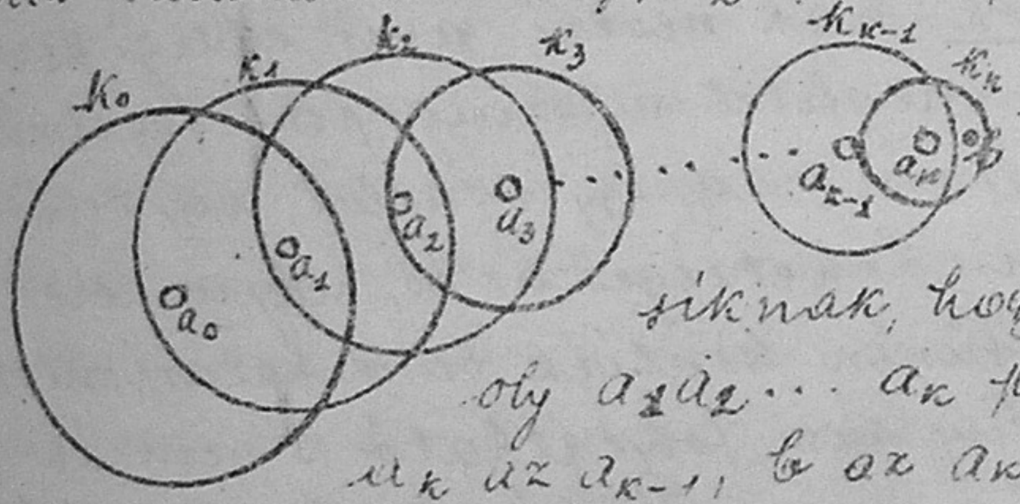


mely egy K_1 kör belsejében konv.,

$$c_0 + c_1(z-a_0) + c_2(z-a_0)^2 + \ldots = f(z, a_0)$$

itt egy hol. függvényt ($f(z)$) definiál. Ezen függvény és összes deriváltjainak értékei egy a K_1-en belül levő a_1 pontban legyenek $d_0, d_1, d_2 \ldots$, melyek a $f(z, a_0)$ sorból kiszámíthatók. A:

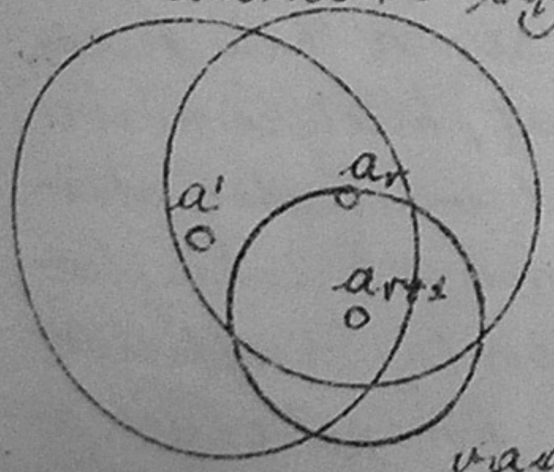
$d_0 + d_1(z-a_1) + d_2(z-a_1)^2 + \ldots = f(z, a_1)$ sor konv. legalább egy olyan körben, melynek centruma a_1 és a K_1-et belülről érinti. Megtehet azonban, hogy ezen sor egy nagyobb K_2-körben konvergens. A $f(z, a_1)$ által definiált hol. függvény a K_1 és K_2 körök közös részében azonos a $f(z, a_0)$ által definiált $f(z)$ függvénnyel, tehát az előbbiek szerint a $f(z, a_1)$ által definiált függvényt az $f(z)$ függvény folytatásának tekintjük a K_2 körnek K_1-en kívüli részében. – Az a_0 centrumú K_0 körből kilépve, ebben esetleg, ismét találhatunk olyan a_2 pontot, amely lehetővé teszi a függvénynek



egy K_2 kör területére való folytatását. Ezt az eljárást tovább folytatjuk. Ha b egy olyan pont, a mi-

siknak, hogy található az a_0 és b pontok közt oly $a_1 a_2 \ldots a_k$ pontsorozat, hogy a_1 az a_0, a_2 az a_1, ... a_k az a_{k-1}, b az a_k konv. körében legyen, akkor azt mondjuk, hogy a $P(z, a_0)$ sor által definiált $f(z)$ függvény a b pontba analitikusan folytatható s a függvény b pontbeli értékét és deriváltjait a $P(z, a_k)$ sor szolgáltatja. Ez a definíció szilárd alapot csak úgy nyer, ha kimutatjuk, hogy a b-ben nyert $f(z, b)$ hatványsor – bizonyos mértékig – független az $a_1 a_2 \ldots a_k$ pontsorozat választásától.

Kimutatjuk egyrészt, hogy két szomszédos pont a_r és a_{r+1} közé körbeiktatható egy új a' anélkül, hogy $P(z, b)$ megváltozna. – Ha



a_{r+1} benne van az a' konv. körében (és ez minden a_r-hez, ill. az a_{r+1}-hez elég közel eső a' pontra evidenter így van), akkor a $P(z, a_r)$ és $P(z, a')$ hatv.sorok, valamint deriváltjaik is az a_{r+1} helyen egyező értékeket szolgáltatnak, vagyis ugyanahhoz a $P(z, a_{r+1})$ hatv.sorhoz vezetnek.

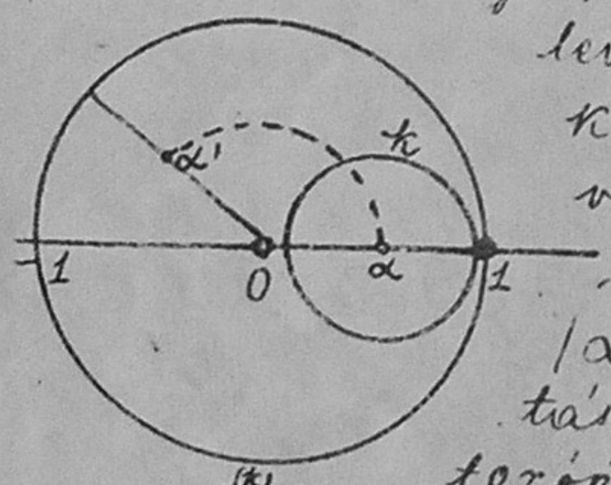
Viszont, ha a' elég közel van a_r-höz, akkor az a_r pont el is hagyható, mert az előbbiek szerint az $a_1 a_2 \dots a_{r-1} a', a_{r+1} \dots a_k$ pontsorozattal elért folytatás azonos az a_r közbeszúrásával nyert: $a_1 a_2 \dots a_{r-1}, a_r, a_{r+1} \dots a_k$ sorozathoz tartozó folytatással.

Az eredeti hatványsorral, mint függvényelemmel definiált függvényt így anal. folytatással értelmezzük a sík mindazon pontjaiban, ahová a folytatással eljuthatni és az ezen pontok körül való sorbafejtések, mint „függvényelemek" összesége definiálja a függvényt. Az így definiált függvényt: <u>analitikai függvénynek</u> nevezzük. Weierstrass nevéhez fűződik a függvénytan ilyen felépítése.

Az an. függvény ott van értelmezve, ahová a folytatás lehetséges. Megeshetik, hogy a sík egyes pontjaiba való folytatás lehetetlenné válik, bennük torlódási helye támad minden $a_1 a_2 \dots$ sorozatnak, melynek mentén feléjök a folytatás történik, azaz semmiképp se juthatnak be valamely sorozat egy tagja konv. körének a belsejébe. Weierstrass ezeket „<u>határpontok</u>"-nak nevezi, ami eddigi terminologiánkban bizonyos mértékben megfelel a szing. pont fogalmának. A határpontok lehetnek izoláltak, vagy egy vonalat, egy területet tölthetnek be mindenütt sűrűn. Lehetséges az is, hogy az eredeti halv. sor konv. körét mindenütt sűrűn borítják be a határpontok a kerületen. Ez esetben az an. függvény nem folytatható s nem értelmezhető a körön kívül egy pontba sem. - Példának hozzuk fel erre a következő halv. sorral értelmezett függvényt:

$$f(z) = z + z^2 + z^4 + z^8 + \dots + z^{2^n} + \dots = \sum z^{2^n}$$

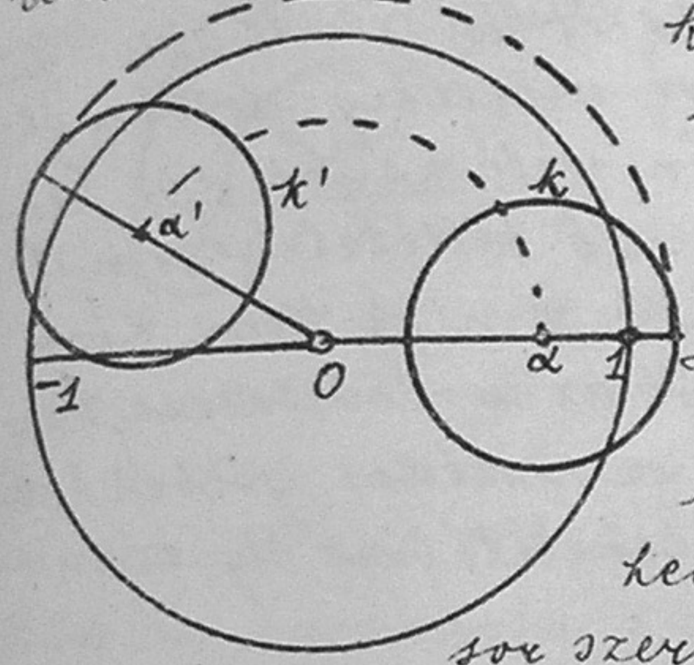
Világos, hogy ennek konv. köre a $z = 0$ **pont** körül egységsugárral írt kör. E körön kívül eső területre nem folytatható e függvény. A $z = +1$ pont határpontja e függvénynek, azaz, ha bármilyen a 0 és 1 közt levő α hely körül fejtjük sorba $f(z)$-t, e sor konv. köre: k a $+1$ ponton halad keresztül s nem ér tovább. Mert ha összehasonlítjuk az α hely és egy oly α' hely körüli sorbafejtéseket, melyre nézve $|\alpha'| = \alpha$, kitűnik, hogy az α' körül való sorbafejtés konv. köre nem lehet kisebb, mint az α-hoz tartozóé. U. i. az α'-höz tartozó sorbafejtés koefficiensei: $\frac{f^{(k)}(\alpha')}{k!}$ $k = (0, 1, 2 \dots)$ nem lehetnek nagyobbak az α pont hasonló $\frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}$-nál:



$$f(z) = \sum z^r \qquad (r = 1, 2, 4, 8 \dots),$$

$$\left|\frac{f^{(k)}(\alpha')}{k!}\right| = \left|\sum_r \binom{r}{k} \alpha'^{r-k}\right| \leqq \sum_r \binom{r}{k} \alpha^{r-k} = \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}$$

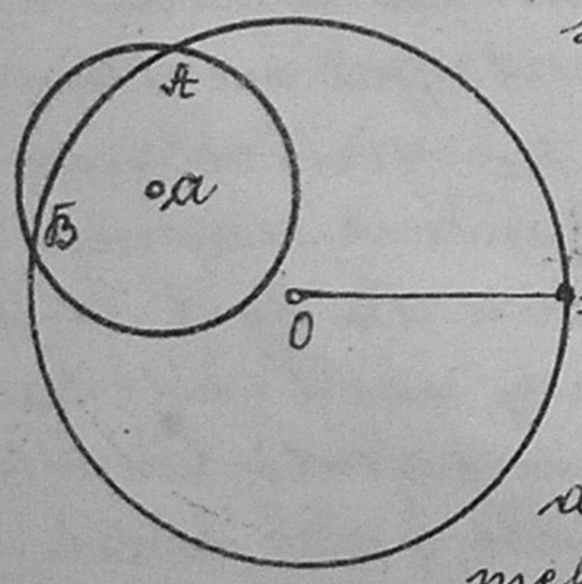
ahol r az $1, 2, 4 \ldots 2^n \ldots$ sorozaton halad végig. Ha tehát az α pont konv. köre (k) kinyúlnék egészen a H pontig, akkor minden α' ponté is legalább annyira kinyúlnék, tehát az eredeti halv. sor konv. körének sugara nem 1, hanem $OH > 1$ lenne, ami ellenmondás. A $+1$ pont tehát határpont. Ha az eredeti halv. sorból az első tagot, z-t elhagyjuk – ami a határpontok helyzetére befolyással nincs – a megmaradó halv. sor szerint:



$$z^2 + z^4 + z^8 + \ldots + z^{2^n} + \ldots = z^2 + (z^2)^2 + (z^2)^4 + (z^2)^8 + \ldots + (z^2)^{2^n} + \ldots$$

határpontok a $x^2 = 1$-nek megfelelő, azaz a $z = +1$, $z = -1$ pontok is. – Két tag elhagyásával a megmaradó:

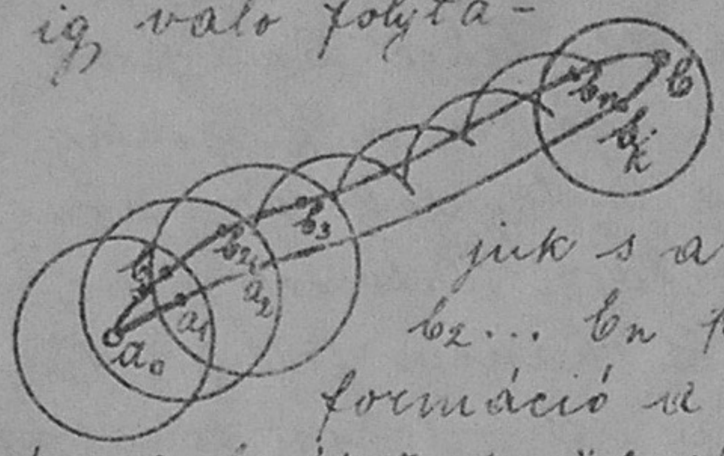
$$z^4 + (z^4)^2 + (z^4)^4 + \ldots + (z^4)^{2^n} + \ldots$$ halv. sor szerint határpontok a $z^4 = +1$-nek megfelelő, azaz a $z = +1$, $z = +i$, $z = -1$, $z = -i$ pontok. Ezen eljárás folytatása után látható, hogy az egységsugarú körön határpontok mindazon, ezen körbe írt szabályos 2^n-oldalú sokszögek csúcspontjai; melyeknek egy csúcsa a $+1$ pont, azaz az összes 2^n-dik egységgyökökkel megfelelő pontok. ($n = 1, 2, 3, \ldots$). Ezek a pontok mindenütt sűrűn borítják be a kör kerületét, ami kizárja azt, hogy a függvény egy belső a pontbeli sorbafejtésének konv. köre kinyúljék az egységsugarú körből, mert ekkor a függvény az AB ívén reguláris lenne, azaz itt határpontok nem lehetnének. = A $\sum z^{2^n}$ halv. sorral természetesen azonos tulajdonságúak a $\sum z^{3^n}$, $\sum z^{5^n}$ stb. hatványsorok is. Ilyen pl.



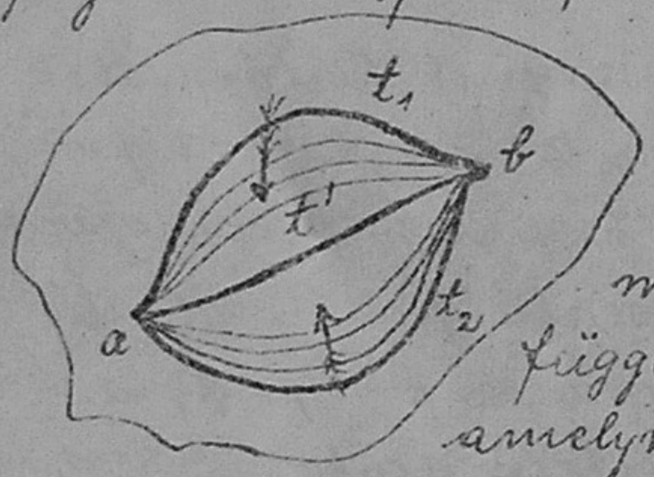
a $z^{1!} + z^{2!} + z^{3!} + \ldots + z^{n!} + \ldots$ halv. sor is, melynél, mint kimutatható, határpontok az összes n-dik egységgyökök pontjai ($n = 1, 2, 3, \ldots$), amelyek szinten mindenütt sűrűn borítják be az egységkört. Mindezen esetekben azt mondjuk, hogy a konverg. kör a függvény <u>természetes határa</u>.

Térjünk vissza arra az esetre, midőn a halv. sor a konv. kö-

rén túl folytatható. Az előbbiek szerint egy függvénynek a-tól b-ig való folytatása nem változik, ha azt a görbét, amelyen a és b közt a folytatáshoz felhasznált $a_1 a_2 \ldots a_n$ pontsorozat volt, bizonyos mértékig deformáljuk s a deformált görbe mentén választunk egy b_1, $b_2 \ldots b_n$ pontsorozatot. Erre elegendő feltétel, hogy a deformáció a köröknek az $a, a_1, \ldots a_n b$ pontok konv. körei által borított területén belül történjék. Ebből az is következik, hogy egy görbe mentén történő folytatás azonos a szomszédos görbékhez tartozó folytatással, mert ama körök közös területében ily szomszédos görbék mindig léteznek.



Ez kifejezhető a következő tétellel is. Két pont (a, b) közt egy egyeneren összefüggő területen belül minden oly út mentén való folytatás egyenlő, amely út e területen belül van, - feltéve, hogy valamennyi ilyen út mentén a folytatás lehetséges. Mert bármely két úthoz található egy t' paramétertől függő oly görbesor, melynek minden tagja benne van az egyszeresen összefüggő területben s átmegy az a, b pontokon, továbbá amelynek tagjai folytonosan mennek át egymásba s $t = t_1$-hez az első, $t = t_2$-höz a második, a t_1 és t_2 közt levő értékekhez pedig a görbesor többi tagjai tartoznak. Ha a t_1 és t_2 görbék mentén való folytatás különböző lenne, akkor a görbesornak t_1-el szomszédos s az ismét ezekkel szomszédos tagjai mentén való folytatás a t_1-hez tartozó folytatással, - a t_2 görbével szomszédos görbék folytatásai pedig a t_2-ével lennének egyenlők - az előbbi tétel szerint. Kellene tehát *) léteznie egy oly t' értéknek ($t_1 < t' < t_2$), hogy minden oly görbénél, mely, egy t'-nél kisebb t-hez tartozik, a folytatás a t_1 görbéével lenne egyenlő bármily közel is van t'-höz a t. Viszont a t'-nél nagyobb, hozzá közeli görbék folytatásai a t_1-étől különböznének, - tehát a t' két oldalán lévő szomszédos t értékekhez, egymáshoz bármily közel levő görbékhez különböző folytatás tartoznék, ami nem lehetséges.

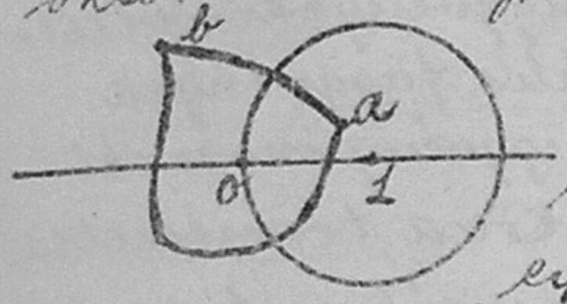


Lehetséges, hogy két út mentén a nyert folytatás nem egyenlő értékű. Ez akkor történhetik, ha az egyik út folytonos deformá-

*) Dedekind-féle szeletalkotás.

ciával nem vihető át egy a másikba, hogy a folytatás rajta mindig, lehetséges legyen, aminek egy vagy több közbeeső határpont az oka. - Pl. a log. függvénynek az 1 pont körüli sorbafejtése:

$$(z-1) - \frac{(z-1)^2}{2} + \frac{(z-1)^3}{3} - \dots$$



Ez a hatv. sor konv. az 1 centrumú és 0-n átmenő körön belül. Ha ezen belül egy a pontból egy külső b pontig akarunk folytatást eszközölni, akkor - mivel a 0 pont az egyedüli határpont - a 0-tól egy oldalra levő utak mentén való folytatások egyenlők, a 0-pont két oldalán levők azonban az említett módon nem vihetők át egymásba s az így nyert folytatások a b pontban $2\pi i$-ben, több megkerülés esetén általában $2k\pi i$-ben különböznek. Itt tehát a különböző utak szerint végt. sok értékkel lehet eljutni a b pontba. A $z^{\frac{1}{n}}$ függvénynél az utak szerint n értékkel stb. Az tehát, hogy az an. függvény különböző utak mentén való folytatásai különböző értékekkel érkezhetnek ugyanazon pontba, egyértelmű az an. függvény többértékűségével. Egyértékű függvénynél bármely folytatás ugyanazon értéket szolgáltatja. Kimutatjuk, hogy az an. függvény által ily módon egy pontban felvehető értékek összesége vagy véges számú, vagy pedig megszámlálható-an végt. sok tagból áll.*) A definicióból következik, hogy ezen értékhalmaz számossága legfeljebb akkora, mint azon véges számú pontból álló pontcsoportok halmazáé, amely $a_1 a_2 \dots a_k$-féle pontcsoportok révén a kívánt pontba való folytatás történhetik. Egy előbbi tétel szerint egy pontcsoport mentén való folytatás mindig helyettesíthető elegendő közeli pontok mentén való folytatással. x A sík azon pontjai, melyek koordinátái rac. számok, az egész síkot mindenütt sűrűn töltik be, tehát az említett pontcsoportok pontjai mindig helyettesíthetők ily rac. koordinátájú pontokkal s mivel a sík rac. koordinátájú pontjainak összesége megszámlálható sokaságot képez, egy halmazelméleti tétel szerint pedig egy megszámlálható sokaságból kiválasztható oly csoportok sokasága, melyek véges tagból állanak, ismét meg

*). Megszámlálható egy sokaság, ha tagjait lehet a természetes számsor számaival oly vonatkozásba hozni, hogy a sokaság minden tagja meg legyen jelölve egy számmal.

számlálható, azért az anal. függvény egy pontban való értékeinek összesége is véges vagy megszámlálható. E tétel Poincarétól ered.

Az an. folytatás eszerint egyértékű vagy többértékű éspedig véges számú vagy megszámlálhatóan végt. sok értékű függvényekre vezethet. Mindegyik lehetőségre már a tárgyalt speciális függvények közt találunk példát. Mindezeknél, az ell. mod. függvény inverzét és egy, az imént tárgyalt esetet (melynél az egységköre a természetes határ) kivéve, a függvény általában az egész számsíkon létezik; csupán egyes izolált határpontok lépnek fel. Lássunk már most eg. egyszerű és jol ismert eljárást olyan egyértékű függvény szerkesztésére, melynek határpontjai adva vannak. Az eljárás könnyen általánosítható többértékű függvények szerkesztésére.

Vizsgáljuk a következő sort:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{z-a_n},$$

ahol $a_1 \ldots a_n \ldots$ egymástól különböző komplex értékek, a c_n számok egyike sem $=0$ s a $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ sor konv. Megmutatjuk, hogy e sor minden olyan tartomány belsejében, melyben és a határán egy sincs az a_n pontok, vagy ezek torlódási pontjai közül egyenletesen konv. Egy ilyen tartomány minden belső pontja egy $+(d)$ számnál nagyobb távolságra van bármely a_n ponttól. Tehát ezen tartomány minden belső z pontjára nézve: $|z-a_n| > d \neq 0 \quad (n = 1, 2, \ldots)$

A vizsgált sor tagjai tehát abs. értékre nézve kisebbek a konv. $\frac{1}{d}\sum|c_n|$ sor megfelelő tagjainál; a vizsgált sor tehát egyenletesen konvergál. — Sorunk tehát minden olyan z_0 hely környezetében, mely nem tartozik az a_n-ek közé és nem is torlódási pontjuk, hol. függvényt értelmez, mely z_0 körül hatv. sorba fejthető. Mekkora a konv. sugár? Tegyük fol, hogy van az a_n pontok közt olyan, mely z_0-hoz közelebb fekszik, mint az összes többi a_n. A megfelelő $\frac{c}{z-a}$ tagot írjuk a sor elejére és képzeljük az x-ket és a-kat úgy átszámozva, hogy az illető a-ból a_1 legyen. (Ez csak az áttekinthető írásmód kedvéért történik). Azt állítom, hogy a konv. sugár $= |z_0 - a_1|$. — A sor tagjait osszuk be 3 részre. Az elsőbe az első tag egymaga, a másodikba a második, harmadik... p-dik tag együtt, a harmadikba a többi végt. sok tag tartozik, — ahol p-t úgy határozzuk meg, hogy p legyen már oly nagy szám, hogy:

$$|c_{p+1}| + |c_{p+2}| + |c_{p+3}| + \dots \leqq \frac{|c_1|}{2}$$

A második osztályba tartozó tagok $\frac{c_2}{z-a_2}, \dots, \frac{c_p}{z-a_p}$, $(z-z_0)$ hatványai szerint való sorbafejtésénél a konv. sugár $|z_0-a_2| \dots |z_0-a_p|$ mindegyikénél nem kisebb $|z_0-a_1|$-nél; - ezeket tehát mellőzük. - A

$\frac{c_1}{z-a_1} + \frac{c_{p+1}}{z-a_{p+1}} + \frac{c_{p+2}}{z-a_{p+2}} + \dots$ sor $(z-z_0)$ hatványai szerint való sorbafejtésénél $(z-z_0)^k$ koefficiense, ha általában: $a_n - z_0 = a_n'$

$$B_k = -\left(\frac{c_1}{a_1'^{(k+1)}} + \frac{c_{p+1}}{a_{p+1}'^{(k+1)}} + \frac{c_{p+2}}{a_{p+2}'^{(k+1)}} + \dots\right)$$

$$|B_k| = \left|\frac{1}{a_1'}\right|^{k+1} \cdot \left|\left(c_1 + c_{p+1}\left(\frac{a_1'}{a_{p+1}'}\right)^{k+1} + c_{p+2}\left(\frac{a_1'}{a_{p+2}'}\right)^{k+1} + \dots\right)\right| \geqq$$

$$\geqq \left|\frac{1}{a_1'}\right|^{k+1} \cdot \left||c_1| - \left(|c_{p+1}| \cdot \left|\frac{a_1'}{a_{p+1}'}\right|^{k+1} + |c_{p+2}| \cdot \left|\frac{a_1'}{a_{p+2}'}\right|^{k+1} + \dots\right)\right| >$$

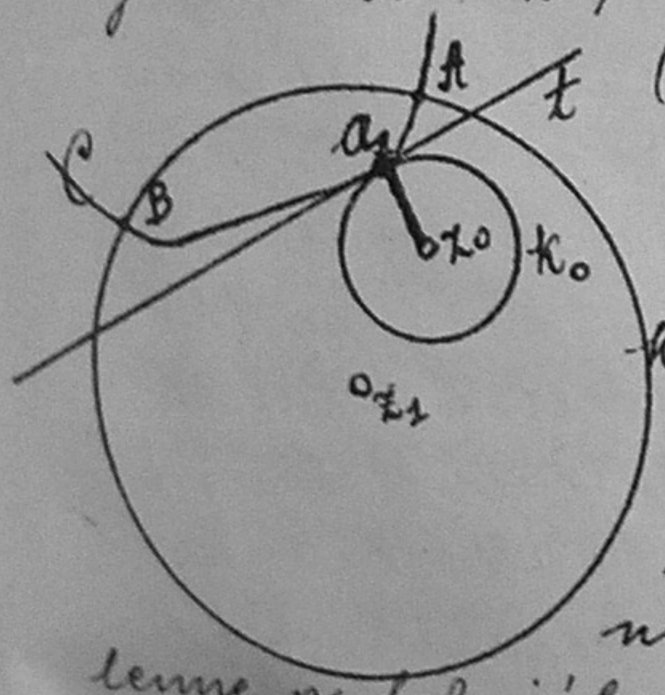
$$> \left|\frac{1}{a_1'}\right|^{k+1} \cdot \left||c_1| - (|c_{p+1}| + |c_{p+2}| + \dots)\right| >$$

$$> \left|\frac{1}{a_1'}\right|^{k+1} \cdot \left||c_1| - \frac{|c_1|}{2}\right| = \frac{|c_1|}{2} \cdot \left|\frac{1}{a_1'}\right|^{k+1}$$

Azaz:

$$|B_k|^{\frac{1}{k+1}} > \left|\frac{1}{a_1'}\right| \left|\frac{c_1}{2}\right|^{\frac{1}{k+1}}. \quad \text{Tehát: } \limsup |B_k|^{\frac{1}{k+1}} \geqq \frac{1}{a_1'}$$

és így a konv. sugár $\leqq a_1' = |a_1 - z_0|$. De kisebbtsem lehet a konv. sugár $|a_1 - z_0|$-nál, mert az $|a_1 - z_0|$ sugarú körben a halv. sor mindenütt konv. Föltéve tehát, hogy minden z_0 ponthoz az a_n pontok közt egy és csak egy legközelebbi van, úgy az a_n pontok a $\sum_n \frac{c_n}{z-a_n}$ sor által definiált függvény határpontjai, mert bármely z_0 pont körül való halv. sorbafejtés konv. köre csak a legközelebbi a_n pontig terjed. - Tegyük föl, hogy az a_n pontok egy (nem szükségképp zárt) C görbe vonalon vannak mindenütt tűrün elhelyezve, amely vonalnak minden pontjában határozott normálisa és görbületi sugara van. Ekkor a függvény a C vonalon keresztül nem folytatható, azaz egy a C-n kívüli z_1 pont körül való sorbafejtés k_1 konv. köre épen érinti a C görbét. Ennél nagyobb nem lehet, mertha a C görbe egy íve benne lenne a belsejében (A B), ez íven volna egy az a_n pontok közül pl. a_1. Ez a_1-ben húzzuk meg a görbe t érintőjét és normálisát. A normálison lehet egy a_1-hez oly közeli z_0 pontot ta-



lálni, hogy a z_0 centrumú $s\,|a_1 - z_0|$ sugarú k_0 kör ne érintse belülről a k_1 kört. A z_0 pont körül való sorbafejtés konv. köre egy z_0 centrumú és a k_1-et belülről érintő kör legalább, — holott az előbbiek szerint e konv. kör csak a z_0 ponthoz az összes a_n-ek közül legközelebb levő a_1-ponton átmenő k_0 kör, ami ellenmondás.

Ha a C görbe zárt görbe, akkor a $\sum \frac{c_n}{z - a_n}$ sor egy-egy hol. függvényt definiál a C görbén belül és kívül. Ezek azonban az előbbiek szerint egymás folytatásai nem lehetnek, a „belső" függvény a „külső" területre, a „külső" függvény viszont a belső területre nem folytatható.

Fel lehet helyezni az a_n pontokat úgy, hogy a sík egy vagy több véges nagy végt. nagyságú területrészét fedjék be mindenütt sűrűn. Történhetik ez pl. a rac. koordinátájú pontok révén, melyek az egész síkon megszámlálható sokaságot képeznek. Ekkor olyan függvényeket nyerünk, melyek e területrészekben nem léteznek. Az ell. mod. függvény inverz függvénye is pl. olyan függvény, melynek existenciatartománya a reális tengely fölötti félsík s amely ezen keresztül az alsó félsíkba nem folytatható.—

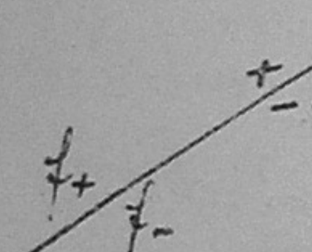
A többértékű analitikai függvény ágai.

A többért. an. függvény „ágai"-ról szokás beszélni. Szorítkozzunk előbb arra az esetre, amikor a függvénynek véges számú h hatványa van: $h_1, h_2 \ldots h_n$, amelyek izoláltak. Jelöljük ki ezeket a síkban. A síknak mindenesetre van olyan „a" pontja, hogyha ezt a $h_1 h_2 \ldots$ pontok mindegyikével összekötjük, de ezen egyeneseket csak a (h) pontokon túl húzzuk ki a ∞-be, akkor e félsugarak egyike sem tartalmaz az eredetin kívül még egy (h) pontot. Ezen $l_1 l_2 \ldots l_n$ metszetek által a

síkot, mely előbb a $h_1 h_2 \ldots h_n$ pontok kirekesztésével többszörösen összefüggővé vált, egyszeresen összefüggővé változtatjuk. A metszeteknek különben nem kell ép egyenes vonalaknak lenniök. Ha a függvényt oly úton folytatjuk, mely nem lépi át az $l_1 l_2 \ldots l_n$ metszeteket, a folytatás egyértékű, mert az

egyes zárt utak egy a_k határpontot sem fognak körül. Az így nyer folytatások összeségét az egész síkban az $l_1, l_2 \ldots l_n$ kizárásá val ilyen módon értelmezett egyértékű függvényt függvényágnak nevezzük. Ha folytatás közben valamelyik metszetet átlépjük s az átlépés után más értéket kapunk, mint volt az első ágé, akkor az átlépés után folytatva a függvényt az előbbi mó don a csillagtartomány (a metszetekkel szétmetszett sík) min den részébe a metszetek átlépése nélkül, kapjuk egy más ágát a függvénynek. Ilymódon az összes folytatásokhoz eljutunk és egyszersmind ezek összeségét, vagy ahogy ezt nevezik, az egész analitikai függvényt egyértékű függvényágakra választjuk szé Egy pontban a többértékű függvény értékeit a különböző ága szolgáltatják.

Egyes határpontoknál megesztetik az, hogy az átlépés után is az előbbi ágat kapjuk vissza. Ha egy ágnak egy a_k határ



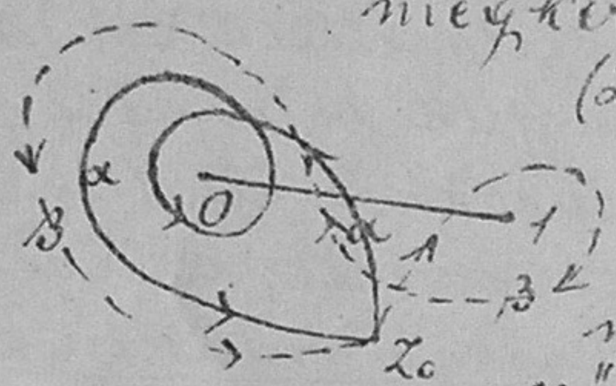
pontjához tartozó l metszet két oldala melletti ér tékeit *) f_+, f_- jelöli, akkor megeshetik, hogy f_+ nak a – part felé való folytatása f_--val, s ez utóbbinak is egyszersmind a + part felé való folytat. sa f_+-val egyezik. Ez esetben ez ágra nézve az l metszet nem lényeges, el is hagyható; a a_k határpont ekkor a függvénynek oly pólusa, vagy lényeges szing. helye, mely körü ez az ága egyértékű. Ha azonban az említett folytatások nem adnak egyező értékeket, akkor a a_k határpont a függvény „elágazási helye".

Megjegyzendő, hogy egy pont határpont-jellege esetleg nem független az úttól. Egyes függvényágakra nézve a folytatás esetleg csak ezen pontig, más ágakra nézve pedig e ponton túl is lehetséges, azaz a megkerülések száma szerint egy mástól különböző utak mentén e pont majd határpontnak bizonyul, majd nem.

Így lehetséges, hogy egy pont a függvény egy ágára nézve elágazási pont, azaz ezen ág a pont megkerülése után megváltozik, míg egy más ágra nézve megszűnik annak lenni, azaz ezen ág körülötte egyértékű marad.

*) A metszetek két oldalát „partját" ± jellel szokás megkülönböztet

Pl. az $\int \frac{dz}{\sqrt{z(z-1)(z-u)}}$ integrál két periodusának, mint u függvényének $\omega_1(u)$, $\omega_2(u)$, hányadosára, az ell. mod. függvényre nézve u 0 és 1 pontok elágazási pontok. Azok maradnak az egyik periódusra pl. $\omega_1(u)$-ra nézve is. Az akkor tárgyaltak szerint a 0-pont



megkerülésekor $\omega_1(u)$ nem változik $\omega_1'(u) = \omega_1(u)$ (L. pl. az α út). Az $\omega_1(u)$ ezen ágára nézve tehát a 0 pont nem elágazási pont. Ellenben, ha az 1 pont megkerülése után nyert ágát vesszük, az $\omega_1''(u)$-t,

$$\omega_1''(u) = \omega_1'(u) + 2\omega_2(u),$$

ez az úgy már megváltozik, amennyiben $\omega_1(u)$ helyébe $\omega_1'(u) = \omega_1(u)$, $\omega_2(u)$ helyébe $\omega_2'(u) = 2\omega_1(u) + \omega_2(u)$ lép, tehát a β út megtétele után az: $\omega_1(u) + 2(2\omega_1(u) + \omega_2(u) = 5\omega_1(u) + 2\omega_2(u)$, függvényághoz jutunk. –

Midőn a sikból metszetek segítségével az előbb említett módon megalkotjuk a csillagtartományt, melyben a függvény egyes ágai már egyértékűek, elegendő megtartani azon metszeteket, amelyek egy oly pontból indulnak ki, mely a függvény valamely ágánál elágazási pont gyanánt szerepel, a többiek mellőzhetők. *)

A Riemann-féle felület.

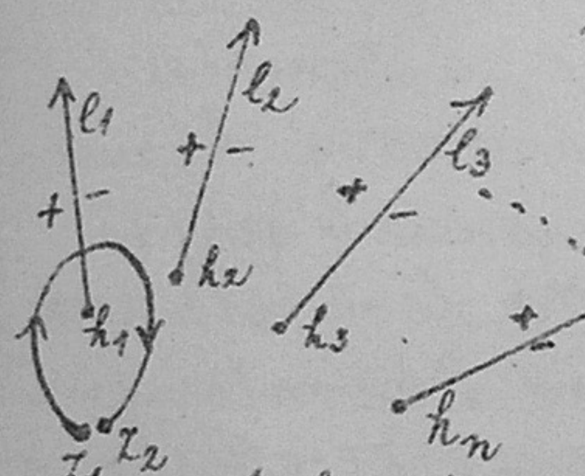
Egyértékű függvénynél a kompl. változó síkjának minden pontjához csak egy függvényérték tartozik, – a sík pontjai és a függvényértékek közti megfelelés kölcsönösen. Megszűnik ez a többértékű függvénynél. Mindamellett gonosz vonalú metszéseket alkalmazunk, valamint nem lényeges a végtelenben levő pontnak a csillag képezésénél játszott kitüntetett szerepe sem. Pl. az

$$\frac{1}{\sqrt{(z-a)(z-b)(z-c)(z-d)}}$$

függvénnyel fölmetszhetjük a síkot két, az a és b, ill. a c és d pontokat összekötő, egymással nem találkozó görbeivel. –

*) A függvényágak leképezésénél nem lényeges az, hogy egyenes vonalú metszéseket alkalmazunk, valamint nem lényeges a végtelenben levő pontnak a csillag képezésénél játszott kitüntetett szerepe sem. Pl. az

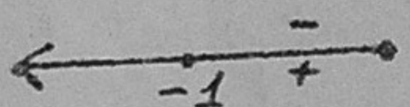
dolható egy oly két dimenziós sokaság, felület, melynek minden pontja valamely komplex számot képvisel, egy-egy ponthoz pedig az azon pontbeli függvényértékek közül mindig csak egy meghatározott tartozik (valamely függvényágból) és amelyen mégis a függvényt egész lefolyásában követhetjük. Erre szolgál a Riemann-féle felület. A többértékű függvénynél tehát a R. felület oly szerepet visz, mint egyértékű függvénynél a komplex változó síkja. Megszerkesztéséhez vegyünk pl. egy oly többértékű an. függvényt, melynek véges számú elágazási pontja van. Húzzuk meg az elágazási pontokból pl. a ∞-be menő metszeteket. ($h_1 \dots h_n$ elág. pontok, $l_1 \dots l_n$ metszetek.) A síkot képzeljük e meghúzott metszetek mentén felmetszve és annyi ily felmetszett síkot képzeljünk, ahány függvényág van. Minden síkhoz egy függvényág, f_n tartozik, amely rajta egyértékű. Ha egy z_1 pontból a függvény egy ágával f_1-el elindulunk s pl. az l_1 metszetet átlépve ugyanazon pontba visszatérünk, akkor oda egy más f_2 ág azon pontbeli értékével érkezünk vissza, azon f_2 ággal, amelybe az f_1 ág átmegy, ha az l_1 metszetet az előbbi irányban átlépjük. Ha ez az átlépés az l_1 metszetnek pl. + partjáról a − partjára történt, akkor a R. felület megszerkesztésében egy lépés lesz, hogy az f_1 ág síkjának l_1 metszetbeli + partját összeolvasztjuk az f_2 ág síkjának l_1 metszetbeli − partjával. Ezzel elérjük azt, hogy a R. felületen, melynek az említett módon összefűzött síkok egy részét alkotják, az $f_1$ághoz tartozó z_1 pontból kiindulva a megkerülés után a felületnek nem az előbbi z_1 pontjához, hanem egy más z_2 pontjához érkezünk vissza, ahhoz, amely a kiindulási pontnak az f_2 ágában felel meg, úgyhogy a felületnek különböző pontjaihoz bár azoknak ugyanazon komplex szám felel meg, különböző függvényágak értékei tartoznak, egy ponthoz szóval csak egy függvényérték. És ezt az eljárást folytatjuk. Általában, ha f_i ág az l_r metszet átlépésével az f_k ágba megy át metszetnek pl. balról jobbra való átlépésével, akkor az f_k



ág l_r metszetének bal partját az f_k ág l_r metszetének jobb partjával olvasztjuk össze.

Meglehet, hogy az összes ágak síkjainál az összes megfelelő partok összeolvasztását nem lehet 3 dimenziós térben végbevinni anélkül, hogy a R. felület egyes síkjai, „lapjai" egymáson át ne hatoljanak. Ez esetben két lap közös pontjait külön számítjuk, mint az egyik, és külön, mint a másik laphoz tartozókat.

A $\log z$ függvény R. felületét, mivel itt ∞ sok ágról van szó s 2 elágazási pontról: 0 és ∞, úgy szerkeszthetjük meg, hogy pl. a 0 ponttól a – számokon át vezetünk egy metszetet a ∞-be, a Komplex változó síkját végtelenszer egymás fölé és alá rakva képzeljük és ezen 2 irányban végtelen siksorozat minden síkjának pl. a + partját összekötjük pl. az alatta levő síknak a – partjával, miáltal egy csavarfelülethez hasonló felületet nyerünk. – A $\sqrt{z}$ R. felületének megszerkesztésénél, mivel itt az elágazási pontok ugyanazok, mint $\log(z)$-nél, hasonló metszetet csinálunk, a síkot kétszer vesszük s az egyiknek pl. + partját összekötjük a másiknak – partjával, ez utóbbinak + partját viszont az elsőnek – partjával.



A többértékű függvény R. felületét azonban nemcsak az oly metszetrendszerrel szerkeszthetjük meg, melynél a metszetek az elágazási pontokból a ∞-be futnak, hanem bármily oly metszetrendszerrel, amely az előbbiek szerint olyan, hogy az általa szétmetszett síkban, bármely függvényág egyértékű marad bármily út mentén is. Az összeolvasztások épúgy történnek, mint azt említettük. Az egy függvényhez ilymódon szerkesztett R. felületek folytonos deformációval egymásba átvihetők, lényeges különbség köztük nincs, mert a R. felületnél csak az összefüggések módja és rendszáma a lényeges.

<u>Az egyértékű függvény R. felülete</u> maga <u>a Komplex változó síkja vagy ezen sík egy része.</u>

Az előbbiek szerint megeshetik, hogy egy elágazási pont bizonyos függvényágakra megszűnik az lenni. A R. felület fel-

építésénél ezt is tekintetbe vesszük, amennyiben ezen elágazási pont metszetét csak oly függvényágak közt vesszük tekintetbe, amelyek közt e pont tényleg elágazási pont gyanánt szerepel.

Néha célszerűnek mutatkozik a R. felületben ugyanazon függvényág síkját többször venni, ha ugyanazon függvényágon belül is megkülönböztetéseket kell tenni pl. új változó bevezetésénél $f(z)$-ben, ha pl. $z^2 = u$. Ezek a függvényhez tartozó u. n. „mellék-Riemann-felületek."

A Cauchy-féle függvénytan kiterjesztése a Riemann-féle felületekre.

A többértékű an. függvényre nézve a R. felület ugyszólván ugyanazon szereppel bír, mint az egyértékű-an. függvénynél a komplex változó síkja. – Az előadásom első felében tárgyalt Cauchy-féle függvénytan alapvető fogalmai és alaptételei átvihetők, ill. kiterjeszthetők, természetesen mutatis mutandis, a többértékű függvény R. felületére.

Így pl. a Cauchy-féle integráltételek. Egy síkban folytonos vonal általában nem folytonos a R. felületen is, mert az egyes metszések szétszakíthatják. A R. felületen folytonos vonal pontjai e felületen következnek folytonosan egymásután. Hasonlóan egy síkban zárt vonal nem lesz általában zárt a R. felületen is, azaz olyan, hogy a R. felületen térjen vissza önmagába. Könnyen belátható, hogy ennek oly vonalnak kell lennie a síkon, amelynek mentén egy pontjából kiindulólag a függvény folytatása ugyanoda. való visszaérkezéskor értékváltozás nélkül tér vissza.

Ezek után körülbelül látható is már, hogy miképen kell átvinni a R. felületre a Cauchy-féle integráltételt: a többértékű függvény integrálja egy a R. felületen levő, oly zárt görbe mentén, melyen belül a függvénynek nincs szingularitása = 0, és ebből következőleg, hogy két, a R. felületen levő oly zárt görbe mentén vett integrál, melyek a felületen folytonos deformációval egy szing. pont érintése nélkül egymásba átvihetők, egymással egyenlő. – Igazolásul csupán a görbét az egyes függvényá-

gak szerint, vagyis a R. felület egyes lapjaihoz tartozó részekre kell felbontani és minden egyes részt a metszési vonal megfelelő darabjával zárttá tenni; az így nyert zárt görbékre külön-külön alkalmazható a Cauchy-tétel; végül összeadva, az adjungált utak kettőnként lerontják egymást.

A lényeges szing. pontot, a nullhelyet, pólust és ezek rendszámait illető definíciók és tételek közvetlenül alkalmazhatók a többértékű an. függvénynél minden nem elágazási helyre; az elágazási pontokba pedig célszerűen kiterjeszthetők. Ezekre úgy járunk el, hogy oly új változót vezetünk be, melyre nézve a függvény a megfelelő pont körül egyértékűvé válik. Ha egy függvényággal kiindulva mindig csak ezt az egy elágazási pontot kerüljük meg, oly függvényágakhoz jutunk, amelyek ezen egy pont bármily megkerülésénél csak egymás közt permutalódnak. Ha a függvényágak száma véges (n) azaz a pont ezekre nézve algebrai elágazási hely, akkor új u változót vezetünk be a köv. módon:

$$z - a = u^n,$$

ahol (a) az elágazási pont. $z = a$-nak $u = 0$ felel meg. A függvény, mint u-nak függvénye az $u = 0$ pont körül már egyértékű; mert:

$$\operatorname{Arg}(z-a) = n \operatorname{Arg} u$$

tehát z az a pont körül mindig n-szer akkora szöggel fordul meg, mint u a 0-körül és így mire u egy körülfordulást tesz, ez alatt már z n-szer kerülte meg az a pontot, tehát u-nak egy körülfordulásával z-ben már az eredeti függvényághoz térünk vissza, azaz $u = 0$ nem elágazási pont. Az $f(z) = f(a + u^n)$ függvény u-nak egyértékű függvénye $u = 0$ körül s itt az egyértékű függvényekre vonatkozó megállapítások állanak reá. Amily helye $u = 0$ az $f(a + u^n)$ függvénynek (nullhelye, pólusa, lényeges szing. helye), époly helynek nevezzük $z = a$-t az $f(z)$ függvényre, ill. annak említett n rágára nézve. Hasonlóan átvisszük a nullhely, pólus rendszámát is. Ezzel a $z = a$ elágazási hely körülötti sorbafejtést is megkapjuk. Az u-ra vonatkozó egyértékű függvény $u = 0$ körül u-nak + és − hatványai szerint haladó sorbafejthető:

$$\ldots + c_{-1} u^{-1} + c_0 + c_1 u + c_2 u^2 + \ldots,$$

ahonnan pl. a – kitevőjű tagok hiányoznak, ha u közönséges hely, stb. $u = (z-a)^{\frac{1}{n}}$, tehát a sorbafejtés:

$$\ldots\ldots + c_{-1}(z-a)^{-\frac{1}{n}} + c_0 + c_1(z-a)^{\frac{1}{n}} + c_2(z-a)^{\frac{2}{n}} + \ldots\ldots$$

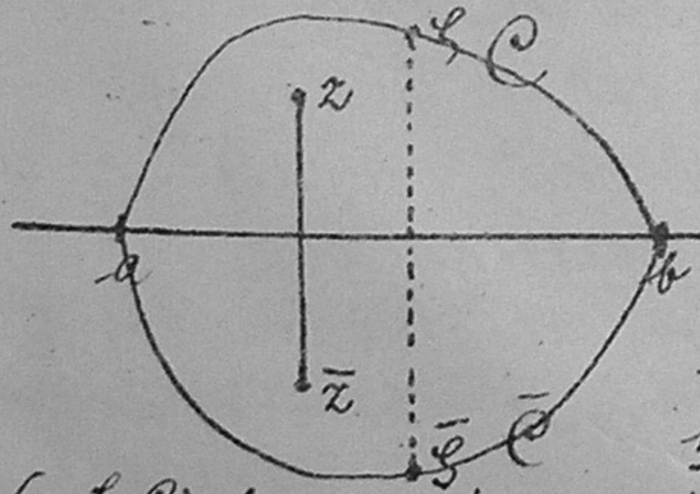
E sorból a függvényág értékeit $z=a$ körül úgy kapjuk, hogy $(z-a)^{\frac{1}{n}}$ különböző értékeit vesszük a gyök n értéke közül.

Az elágazási pontban a residuum szerepét a $(z-a)^{-1}$ együtthatója: $c_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int f(z)\,dz$ játssza; a nevezőbeli n onnan ered, hogy az integráció útja n-szer körbefordul az a pont körül. - Ha az „a" elágazási pontnál végt. a függvényágak száma ($n=\infty$), akkor új változó bevezetésével a függvény egyértékűvé tétele, uniformizálása, a következőleg történhetik: $z-a=e^u$, $u=\log(z-a)$.

Schwartz tétele.

Nem foglalkozunk eddig azzal a kérdéssel, hogy hogyan ismerhető meg konkrét függvények esetén az, hogy a függvény egy tartomány határán túl folytatható-e analitikailag, vagy nem. Eddigi megállapításunk: ha túlterjed az új konv. kör az eredetin, akkor van folytatas, - inkább csak theoretikus értékű. Schwartz tétele bizonyos feltételeket állapít meg, melyek mellett a függvény új tartományokba folytatható.

E tétel általánosabb formájában is visszavezethető a következőre: Ha a z változónak egy $f(z)$ függvénye egy olyan tartományban, melynek határa egyrészt a valós tengely egy ab darabja másrészt egy, pl. a felső félsíkban levő C görbe, belül mindenütt holomorf, a tartomány határán pedig folytonos és végül a valós ab vonalon valós, akkor e függvény a tartomány ab határán át folytatható mindazon $\bar{z}$ pontokba, melyek az ($a\,b\,C$) tartomány egy belső z pontjának a valós tengelyre vonatkozó tükörképei, - azaz a függvény létezik az ($a\,b\,C$) tartománynak a valós tengelyre vonatkozó tükörképében, az ($a\,b\,\bar{C}$) tartományban is. Továbbá: a konjugált komplex z értékekhez tartozó függvényértékek is konj. komplexek*): $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$.



A C görbe minden ζ pontjának a tükörképéhez a $\bar{C}$-on levő $\bar{\zeta}$ ponthoz rendeljük az $f(\zeta)$ függvényértéket a követ-

*) Az a számhoz konj. komplex számot $\bar{a}$-al jelöljük.

kező integrálban: $\frac{1}{2\pi i}\int_{(\bar{c}+c)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$. Ennek értéke egyenlő a következő 2 integrál

összegével: $\int_{(ab+c)} + \int_{(ab+\bar{c})}$, ahol:

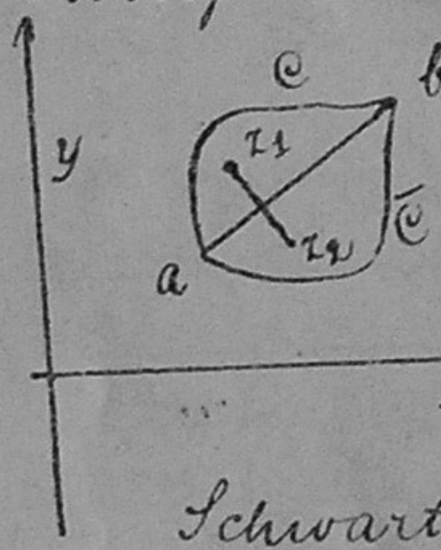
$\int_{(ab+c)} = \int_a^b + \int_{(c)}$, és $\int_{(\bar{c}+ab)} = \int_{(\bar{c})} + \int_b^a$

Cauchy tétele szerint az (ab+c) tartomány minden z pontjára nézve: $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(ab+c)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$, továbbá: $\frac{1}{2\pi i}\int_{(\bar{c}+ba)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = 0$,

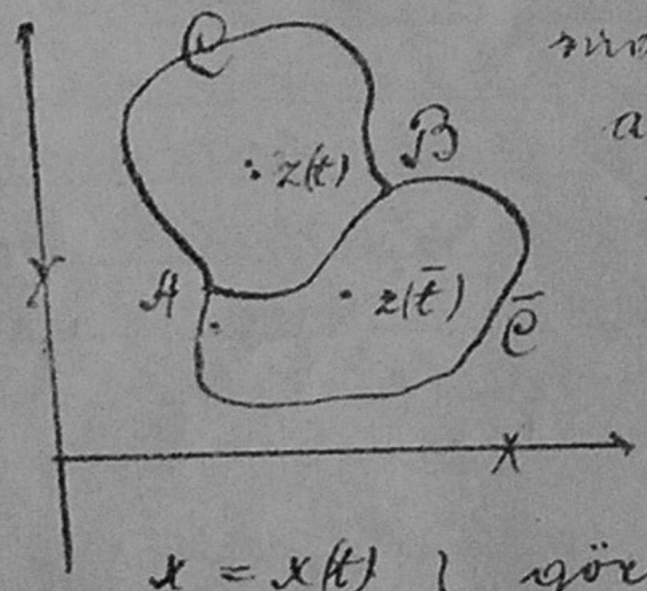
mert z az alsó tartományra nézve külső pont, tehát egyszersmind

$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(c+\bar{c})} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$.

Ezek szerint az ezen integrál által definiált hol. függvénye z-nek a $\bar{C}$ és C görbéktől határolt tartomány felső felében egyezik az f(z) hol. függvénnyel. A komplex változó függvényének természetéből folyólag tehát ugyanazon integrál előállítja f(z)-t a tartomány alsó felében is, és annint az integrálból következik, $f(\bar{z}) = f(z)$. - Schwartz tétele nagyon könnyen általánosítható. Kiterjeszthető először is olyan bárhol a síkban levő tartományokra is, melyeket részben egyenes határol, mert ezek az elsőkből alkalmas $z' = z + d$ lineáris transzformációval mindig leszármaztathatók. A függvény konj. kompl. értékei ekkor is az (ab) egyenes darabra vonatkozó tükörképekhez (z_1 és z_2) tartoznak.



Schwartz tétele általánosabb alakjában egy olyan (CAB) tartományra vonatkozik, melynél a határ egy része az AB pontok közt levő rész, röviden: az AB görbe an. görbe, azaz lehetséges oly

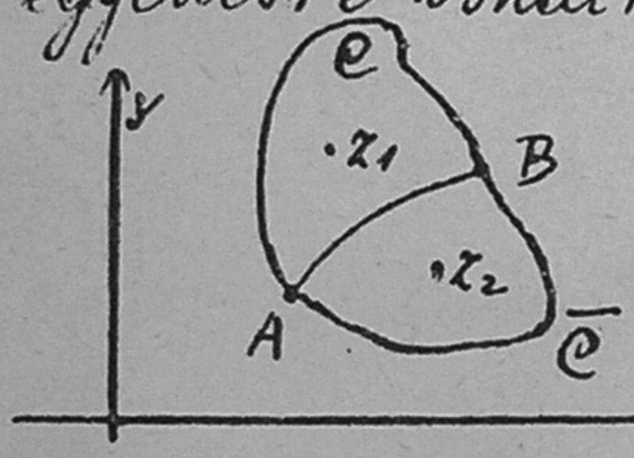


$x = x(t)$, $y = y(t)$ } parameteres előállítása, hol x(t) y(t) a t komp. változónak olyan anal. függvényei, hogyha t egy valós (ab) intervallumban változik, akkor állítják elő

$x = x(t)$, $y = y(t)$ } görbéjének A és B közt levő pontjait; továbbá a tartomány (AB) határgörbéje regulláris legyen, azaz az (ab) intervallumban egy t mellett sem, tehát a görbe egy pontjára nézve se legyen egyszerre: $x'(t) = 0$, $y'(t) = 0$,

azaz röviden: $|x'(t) + iy'(t)| = 0$

A $z(t) = x(t) + iy(t)$ an. függvény értékei az előbbiek szerint az (AB) görbét írják le, miközben t az (ab) intervallumban változik. Ha t konj. komplex értéke $\bar{t}$, akkor a $z(t)$ és $z(\bar{t})$ pontokat a z síkban tükörképeknek nevezzük az (AB) görbére nézve. Az (AB) görbe pontjai tehát önmaguknak tükörképei. Schwartz tételének első alakjánál az (AB) görbe maga az (ab) vonaldarab, a paraméteres előállítása pedig $x = t$, $y = 0$, tehát $z(\bar{t}) = \bar{z}$, $z(t) = z$, azaz ekkor a Schw. féle tükrözés azonos az egyenesre vonatkozó közönséges tükrözéssel. Az általánosabb



Schw. tétel szerint: <u>ha egy $f(z)$ függvény egy oly (ABC) tartomány belsejében hol. s a határán legalább folytonos, amely tartomány határgörbéjének egy része (AB) az előbb részletezett tulajdonságokkal bír s ha e függvény az (AB) görbe pontjaiban valós értékeket vesz fel, akkor a függvény az (AB) görbén át folytatható mindazon z_2 pontokba, melyek (ABC) tartomány egy belső z_1 pontjának felelnek meg a $z(t)$ függvénnyel való Schw.-féle tükrözés révén s a $z_1 z_2$ megfelelő pontokban a függvény konj. komplex értékeket vesz fel.</u>

Az $f(z) = f(z(t))$ függvény, mint t-nek an. függvénye az (ab) intervallumban valós értékeket vesz fel s mivel $f(z)$ (ABC)-ben hol., azért, ha az (ABC) tartomány z_1 pontjai pl. oly t értékeknek felelnek, melyek képzetes része +, $f(z(t))$-nek az (ab) intervallum felett elterülő bizonyos tartományában oly függvénye, amilyenre az első Schw.-féle tétel vonatkozott. Tehát e függvény t-nek a megfelelő konj. komplex értékeinél is létezik s ott maga is konj. komplex értéket vesz fel, ami igazolja az általánosabb Schw.-féle tételt az $f(z)$ függvényre, mert az előbbiek szerint t e két tartományának az (ABC) és $(AB\bar{C})$ tartományok t konj. komplex értékeinek pedig a $z_1 z_2$ pontpárok felelnek meg.

Megjegyzendő, hogy mivel nem szükségképen való dolog, hogy a $x(t)$ függvény minden olyan t értéknél van definiálva, ill. hol., amely t értékeknek megfelelő z pontok összesége betölti az (ABC) tartományt egészen, hanem csak az (AB) görbe bizonyos környezetére áll ez az (ABC) tartományban, azért a tétel igazolása is csak az (ABC) görbe ezen környezetére és ennek az (AB)-re vonatkozó Schw-féle tükörképére érvényes.

Kimutatható az is, hogy a tükörkép definiciója nem függ az (AB) görbének $x(t)$, $y(t)$ paraméteres előállításától, azaz bármilyen a feltételeknek megfelelő $x(t)$, $y(t)$ függvényeknél a tükörképek ugyanazok maradnak. –

Ha az (AB) görbe kör, vagy körív, akkor egyszerű jelentése van a körre vonatkozó Sch-féle tükrözésnek. A z_0 centrumú és r sugarú kör paraméteres előállítása ez lehet:

$$x = x_0 + r\cos t \qquad (z_0 = x_0 + y_0 i)$$
$$y = y_0 + r\sin t$$

$$x(t) = x(t) + i\,y(t) = (x_0 + i\,y_0) + r(\cos t + i\sin t) = z_0 + re^{it}$$

A tükörképek t-nek konj. komplex értékeihez tartoznak. Legyen

$t = t' + it''$ $\quad x(t) = z_0 + re^{it'-t''} = z_0 + re^{-t''}(\cos t' + i\sin t')$

$\bar{t} = t' - it''$ $\quad x(\bar{t}) = z_0 + re^{it'+t''} = z_0 + re^{t''}(\cos t' + i\sin t')$,

tehát: $\quad \operatorname{Arg}(x(t) - z_0) = \operatorname{Arg}(x(\bar{t}) - z_0) = t' + 2k\pi$

$$|x(t) - z_0| \cdot |x(\bar{t}) - z_0| = r^2$$

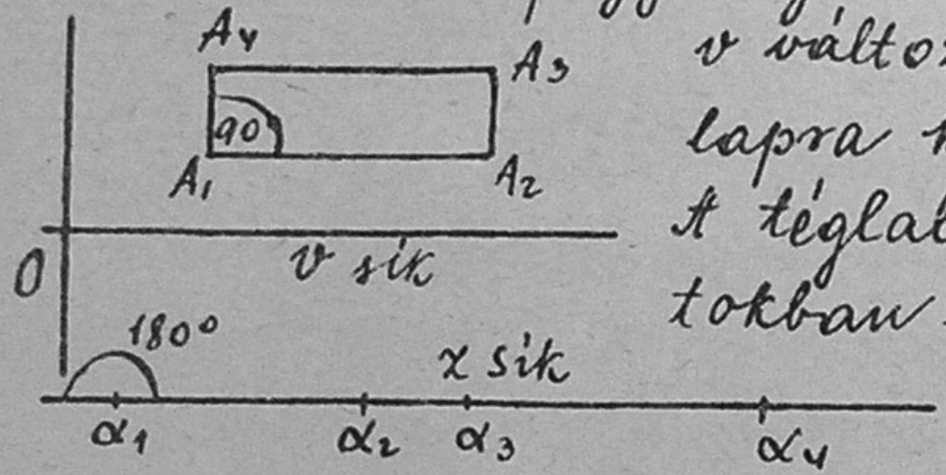
ami azt jelenti, hogy <u>a körre vonatkozó Schw-féle tükrözés azonos az e körre vonatkozó, reciprok rádiuszokkal való transzformációval.</u>

A valós tengely feletti félsik konformis leképezése egy téglalap területére.

A félsík egy tetszésszerinti poligon területére való konformis leképezésének problémájával egy kitüntetett esetben, – a téglalapra való leképezést illetőleg – foglalkozunk, a követett módra

szer azonban hasonló a probléma általános tárgyalásánál is.

A konformis lekepezés úgy történjék, hogy a felső félsíkot határoló valós tengelynek a téglalap kerülete feleljen meg s az ábrázolás még a kerületi pontokban is folytonos legyen. A leképezés természetesen van. függvény által történik: a „z" változó félsikját a v változó síkjában egy tetszésszerinti téglalapra képezzük le a $v = v(z)$ függvény által A téglalap csucsainak megfelelő $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ pontokban a konformitás megszünik, mert pl. A_1 szögpontnál lévő 90°-nyi szögnek a α_1 pontnál 180°-nyi szög felel meg. A $v(z)$ függvényt függvénytani tulajdonságaiból határozzuk meg existenciájának külön bizonyitása nélkül.



Mindenekelőtt belátható, hogy a téglalap pontos megadása lényeges. Mertha a leképezést egy bizonyos téglalapra, tehát a hozzátartozó $v(z)$ függvényt ismerjük, akkor ezen téglalapot a O pontból való hasonlósági trauszformációval, elforgatással és parallel eltolással a sik minden más hozzá hasonló téglalapjába át lehet vinni, anii egyértelmü azzal, hogy meghatározhatók oly (ab) komplex számok, hogyha z_1 az első, z_2 pedig a második téglalapnak az a pontja, amelybe a z_1 az említett három művelet révén kerül akkor

$$z_2 = a z_1 + b$$

legyen a két téglalap bármely $(z_1 z_2)$ pontpárjára nézve. Mivel ez a lineáris szubsztitució is egy konformis ábrázolás, azért a $v(z)$ függvény (az első oblongum) közvetitésével a másodikra való konform leképezést a

$$v_1(z) = a\, v(z) + b$$

függvény szolgáltatja. Az összes tekintetbe jövő téglalapoknál:

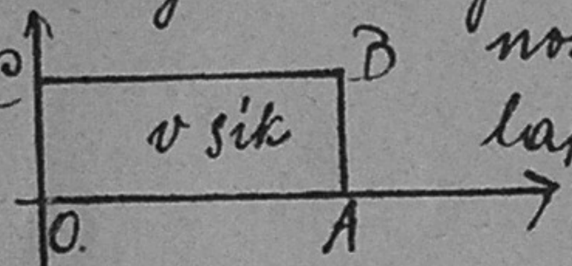
$$\left.\begin{aligned} v_1'(z) &= a\, v'(z) \\ v_1''(z) &= a\, v''(z) \end{aligned}\right\} ;$$

$$\frac{v_1''(z)}{v_1'(z)} = \frac{v''(z)}{v'(z)}$$

vagyis: a $\frac{v''(z)}{v'(z)}$ függvény ugyanaz, azaz független az (ab) konstansoktól. Ha t hát ahelyett, hogy azonnal magát a $v(z)$ függvényt keresnénk, megelégszü

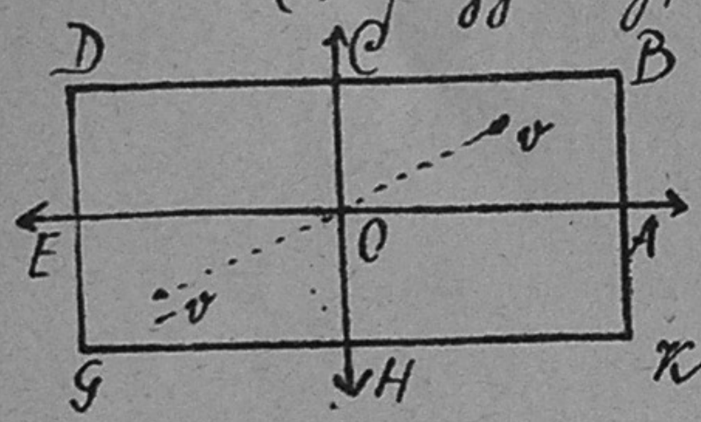
először a $\frac{v''(z)}{v'(z)}$ hányados kiszámításával, akkor a téglalap el-
helyezése fölött szabadon rendelkezünk és azt mindig olyan hely-
zetben képzeljük, mely a számításra előnyös. $\frac{v''(z)}{v'(z)}$ meghatáro-
zása után $v(z)$, tehát az (ab) konstansok meghatározása an-
nak alapján történik, hogy a v sík mely téglalapjára törté-
nik a leképezés.

Egyelőre tehát, amíg nem a $v(z)$ függvény, hanem csak a $\frac{v''(z)}{v'(z)}$
hányados meghatározását tekintjük feladatunknak, az általá-



nosság megsértése nélkül föltehetjük, hogy a tégla-
lap egyik csúcsa a $v=0$ pontba, 2 oldala pedig a
valós és képzetes tengelyekre esik. A $v=0$ pont-
ba mindig azt a csúcsot képzelhetjük beletéve, amelynek kör-
nyezetében a leképezést adó függvényt vizsgáljuk.

A $v(z)$ függvény inverz függvénye legyen $z(v)$. A $z(v)$ függvény



az OABC téglalapon belül hol. s az OA
oldalon lévő valós v értékekhez valós z
értékek (az x síkban a valós tengely bizo-
nyos darabja) felelnek meg. Schw. tétele
szerint tehát az alsó OAKH téglalapba
folytatható és ennek pontjaiban a konj. komplex értékeket veszi
fel. Ugyanez áll az OCDE téglalapra, mivel OC oldalon lévő
v értékekhez is valós z értékek tartoznak. Ekkor a tükrözés az
OC oldalra történik. Az OAKH és OCDE téglalapok bármelyiké-
ből hasonló módon az OEGH téglalaphoz lehet eljutni s itt a
függvény ismét oly értékeket vesz fel, mint az első téglalapban.
Szóval egy v és $-v$ pontban az O pont környezetében:

$$z(v) = z(-v)$$

Eszerint $z(v)$ a BDGK téglalapban egyértékű, hol., és páros
függvény; emiatt fogva az O körül v egész hatványai sze-
rint hat.v. sorba fejthető és a hat.v. sor csak páros kitevő-
jű hatványokat tartalmaz:

$$z = \alpha + b_1 v^2 + b_2 v^4 + \dots \qquad (b_1 \neq 0)$$

$z(0) = \alpha$; vagyis α a z számsíknak, ill. ezen számsíkban a valós tengelynek az a pontja, melynek a v síkban a 0 pont felel meg. A hatvsor megfordítása:

$$v = c_1 (z-\alpha)^{\frac{1}{2}} + c_2 (z-\alpha)^{\frac{3}{2}} + \dots, \text{ahol } c_1 = \sqrt{\frac{1}{b_1}} \neq 0$$

Differenciálva:

$$v' = \frac{1}{2} c_1 (z-\alpha)^{-\frac{1}{2}} + \frac{3}{2} c_2 (z-\alpha)^{\frac{1}{2}} + \dots$$

$$v'' = -\frac{1}{4} c_1 (z-\alpha)^{-\frac{3}{2}} + \frac{3}{4} c_2 (z-\alpha)^{-\frac{1}{2}} + \dots$$

és így: $$\frac{v''}{v'} = -\frac{1}{2}(z-\alpha)^{-1} + d_1 + d_2 (z-\alpha) + \dots$$

A $\frac{v''}{v'}$ függvénynek tehát a $z=\alpha$ pont elsőrendű pólusa. A residuum $-\frac{1}{2}$. Eszerint a téglalap 4 csúcsának megfelelő $z = \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ pontokban $\frac{v''}{v'}$-nek elsőrendű pólusa van s a residuum mindenütt $-\frac{1}{2}$. $\frac{v''}{v'}$ a z-nek minden más pontban (a ∞-ben is) hol. függvénye, mert $v(z)$ diff. hányadosa $v' \neq 0$ (a konformis leképezés miatt), tehát csak $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$-ben vannak szingularitásai, ezek elsőrendű pólusok, a residuum mindenütt $-\frac{1}{2}$ és így

$$\frac{v''(z)}{v'(z)} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-\alpha_1} + \frac{1}{z-\alpha_2} + \frac{1}{z-\alpha_3} + \frac{1}{z-\alpha_4}\right).$$

Ilyen módon $v(z)$ meghatározására egy diff. egyenletet nyertünk; ezt kell most integrálnunk. Mivel

$$\frac{d}{dz}(\log v') = \frac{v''}{v'},$$

azért: $$\log v' = -\frac{1}{2}\left[\log(z-\alpha_1) + \log(z-\alpha_2) + \log(z-\alpha_3) + \log(z-\alpha_4)\right] + C$$

$$v'(z) = \frac{C}{\sqrt{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)(z-\alpha_3)(z-\alpha_4)}},$$

tehát: $$v(z) = C \int_{z_0}^{z} \frac{dz}{\sqrt{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)(z-\alpha_3)(z-\alpha_4)}} + C_1.$$

A kifejezésben három határozatlan komplex konstans szerepel z_0, C, C_1

vegyis két határozatlan konstans.

Ezeket a konstansokat úgy választhatjuk, hogy a $v(z)$ függvény egy megadott derékszögű négyszögnek a félsíkra való leképezését szolgáltassa.

Ezt a feladatot, t.i. z_0, C, C_1 konstansok alkalmazásával, visszavezethetjük a következő speciális esetre: a megadott négyszög egyik csúcsa a kezdő pontban van, egyik oldala a valós tengelyre, másik oldala a képzetes tengelyre esik és pl. az utóbbi oldal hossza = 1. Az oldal hossza t.i. a $v(z)$ kifejezéséből úgy nyerhető, hogy az integrált a megfelelő $(\alpha_i \alpha_k)$ határok között vesszük és az abs. értékre térünk át. Ez a kifejezés, mint könnyen látható az $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ valós változóknak oly folytonos függvénye, amely 0 és ∞ közt minden értéket felvesz.- Megjegyzem, hogy ezen legutóbbi meggondolásra nincsen szükség, ha pl. derékszögű négyszög helyett háromszögre tárgyaljuk az analóg problémát, mert a háromszög alakját, illetőleg oldalainak viszonyát már a szögek megadásával előírjuk. Viszont a meggondolás sokkal nehezebbé válik, ha a megfelelő problémát tetszésszerinti sokszögekre akarjuk tárgyalni.

Az előbbi meggondolásokból még könnyen átlátható, hogy a $v(z)$ függvény inverz függvénye azaz $z(v)$ a téglalapon túl, az egész síkban tetszésszerint folytatható és minden negyedik tükrözés után reprodukálódik, vagyis oly kettősen periodusos függvényt értelmez, melynek egyik per. parallelogrammja $BKDD$ téglalap. Ilyen módon a konform ábrázolás problémája kapcsolatosan Schw. tételével általános eljárást szolgáltat speciális anal. függvények értelmezésére. Ha egy tetszésszerinti, egyenes vonalak vagy körívek által határolt poligont sikerül a félsíkon konformisan ábrázolni, az ezt szolgáltató függvény, illetőleg annak inverz függvénye Schw. tétele alapján a másik félsíkban, ill.

minden olyan poligonban folytatható, amely az előbbi poligonnak tükörképe valamelyik oldalára vonatkozólag. Ezt az eljárást tetszés szerint sokszor ismételhetjük. Az így nyerhető összes poligonok elhelyezésétől függ, hogy egyértékű, többértékű, az egyik síkban vagy csak annak egy részében értelmezett függvényekhez jutunk. Pl. a régebben tárgyalt elliptikus modull függvényre vezet egy bizonyos egy körív és két párhuzamos egyenes által határolt, tehát a ∞-be nyúló tartománynak a félsíkon való konformis ábrázolása.

A tükrözött poligonok elhelyezkedésének megvizsgálása összefügg bizonyos lineáris szubsztituciókból alkotott csoport tanúlmányozásával; ezek a lin. szubsztituciók t. i. a végzett tükrözések anal. kifejezései. Az előbb vázolt módon definiálható függvényeknek az a tulajdonságuk van, hogy a csoport bármely szubsztituciójának alkalmazásánál önmagukban mennek át. Az ilyf függvényeket automorf függvényeknek nevezik. Az automorf függbények elmélete a függvénytannak nagyon mélyre ható, az analizis, algebra, geometria, ha úgy tetszik, a számelmélet sok részével összefüggő fejezete. Részletekre nem térhetek ki, azok számára, akik ezzel az elmélettel foglalkozni kívánnak, ajánlhatom Fricke és Klein terjedelmes művét.

– Vége. –

M. Kir. Ferenc József-
Tudományegyetem
Matematikai Intézet
Könyvtára

Szakl. sz.: 60h

Cimtár:



Az ujabban divó fogalomalkotás a követ-
kező:

Ha a mat. objektumokat valamely halma-
zában az összeadás (+) és szorzás (·) definiálva
van (a kommutativitás, asszociativitás, disztri-
butivitás szemmel tartásával), akkor az illető
halmaz

1°) gyürünek mondjuk, ha összeadás tekintve
szorzás csupa elvégezhető. (Rövid neve az $a+x=b$
egyenlet megoldása.)

2°) integritási tartománynak mondjuk, ha
egységelem van és egyszerüsíthető (azaz olyan 1, amelyre $1 \cdot a = a$,
a 0 existenciája ($a-0=a$) követtük is) és
ha $ab = ab'$-ből következik $b = b'$. ($a \neq 0$)

3°) testnek mondjuk ha egységelem minden $a \neq 0$
-ra és b-re létezik x úgy hogy $ax = b$.

Bizonyítható, hogy minden integritási tar-
mány testté egészíthető ki (Quotientenkörper).

Más megállapításoknál 2°)-nél nem követelik
meg az egyszerüsíthetőséget, csak azt hogy szorzat
csak úgy lehessen $= 0$, ha valamely tényezője $= 0$.

ORSZ. ÁLLATTUD. EGYETEM
KÖNYVTÁR
BUDAPEST

Példa a Gauss-féle lemmára:

$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n$ polynom együtthatói

egészek egészszámok. Ha $f(x) = 0$ egyenlet minden racio-

nális gyöke egészszám. H. i: ha $x = \frac{p}{q}$ tényen gyök,

akkor $f(x)$ osztható $(x - \frac{p}{q})$-val, azaz $(qx - p)$-vel,

tehát $f(x) = (qx - p) f_1(x)$, ahol $f_1(x) = a_0 x^{n-1} + a_1 x^{n-2} + \dots$

együtthatói is racionálisak egészszámok. Lássuk az $a_0, a_1, \dots$ törtek

nevezője A_1, $a_k = \frac{A_k}{A}$ (A_k = egészszám)

$$A f(x) = (qx - p)(A_0 x^{n-1} + A_1 x^{n-2} + \dots)$$

Minthogy $(p, q) = 1$, azaz olyan közös többszörös nincs, amely

A-val osztható, azért $A_0, A_1, \dots$ mindegyike osztható

A-val, amit csak úgy lehet, hogy $A = 1$. Tehát:

$$f(x) = (qx - p)(A_0 x^{n-1} + A_1 x^{n-2} + \dots),$$

azaz (összehasonlítással egyenlőre)

$$1 = q A_0; \quad q = 1, \quad A_0 = 1$$

A tétel a következőre egyszerűsödik: $\frac{p}{q} = p$ tényleg egészszám.

Ebből folyik például, hogy ha $\sqrt[n]{a}$ egy olyan egész-

szám, mely nem n-edik hatványa egy másik egész-

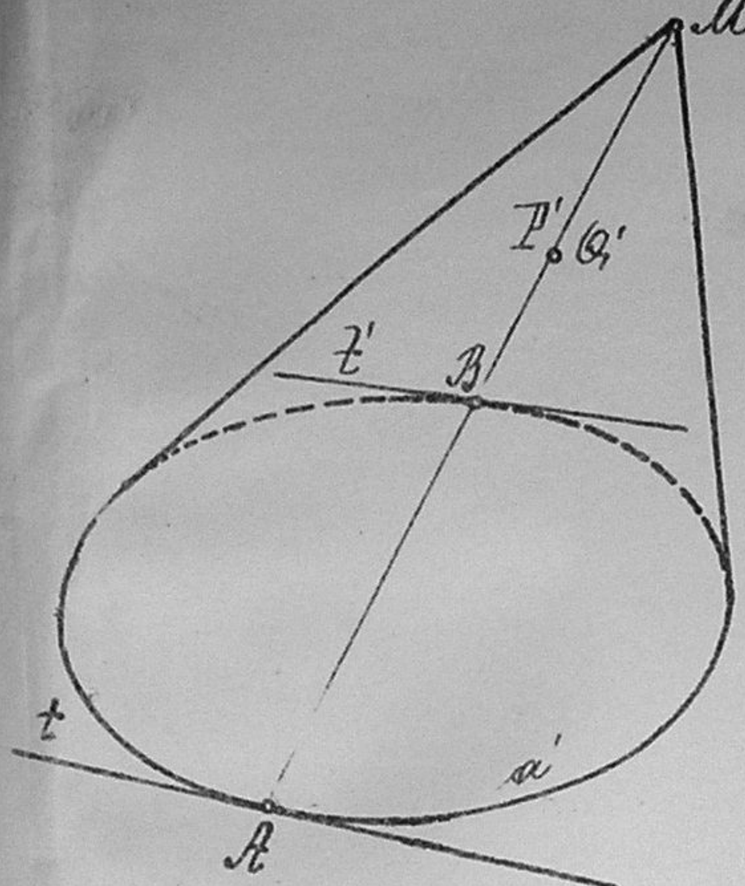
számnak, akkor $\sqrt[n]{a}$ = irracionális. Ellentétes-ért-

ben, ha $\sqrt[n]{a}$ racionális (de nem egész) volna — azaz

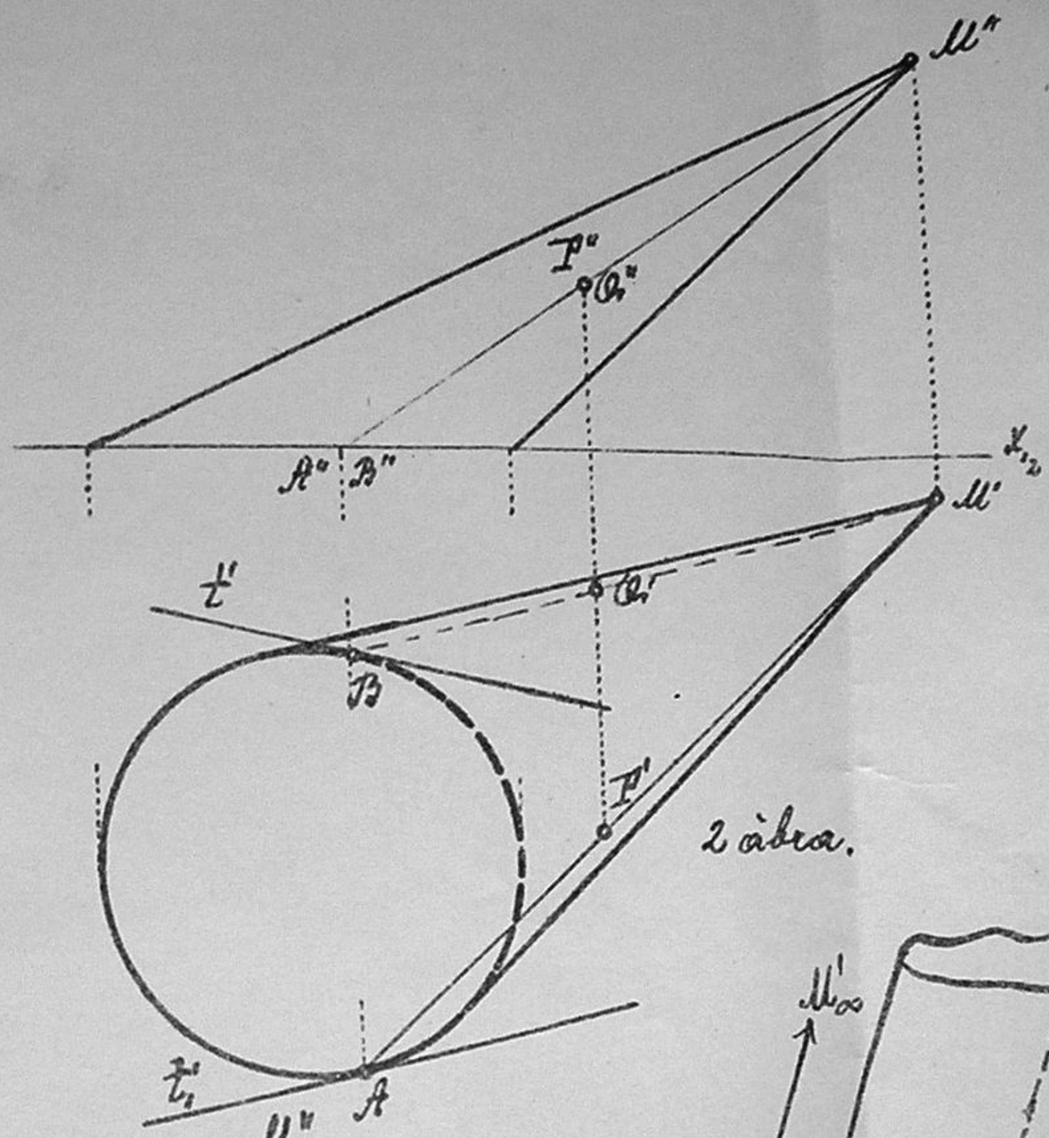
$x^n - a = 0$ egyenletnek volna racionális, nem egészszámú

megoldása, ami a fenntiek alapján lehetetlen.

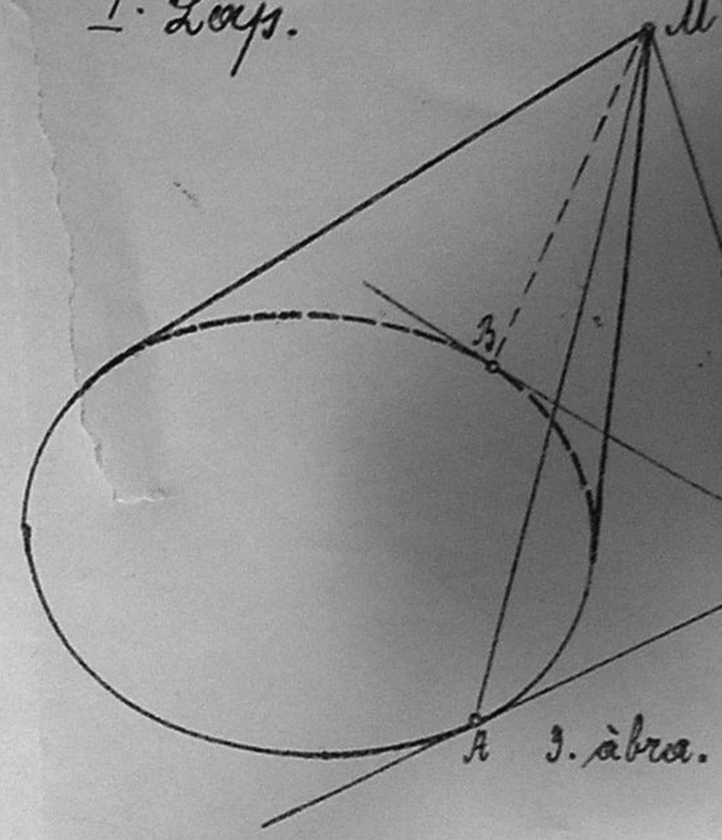
I. Lap.



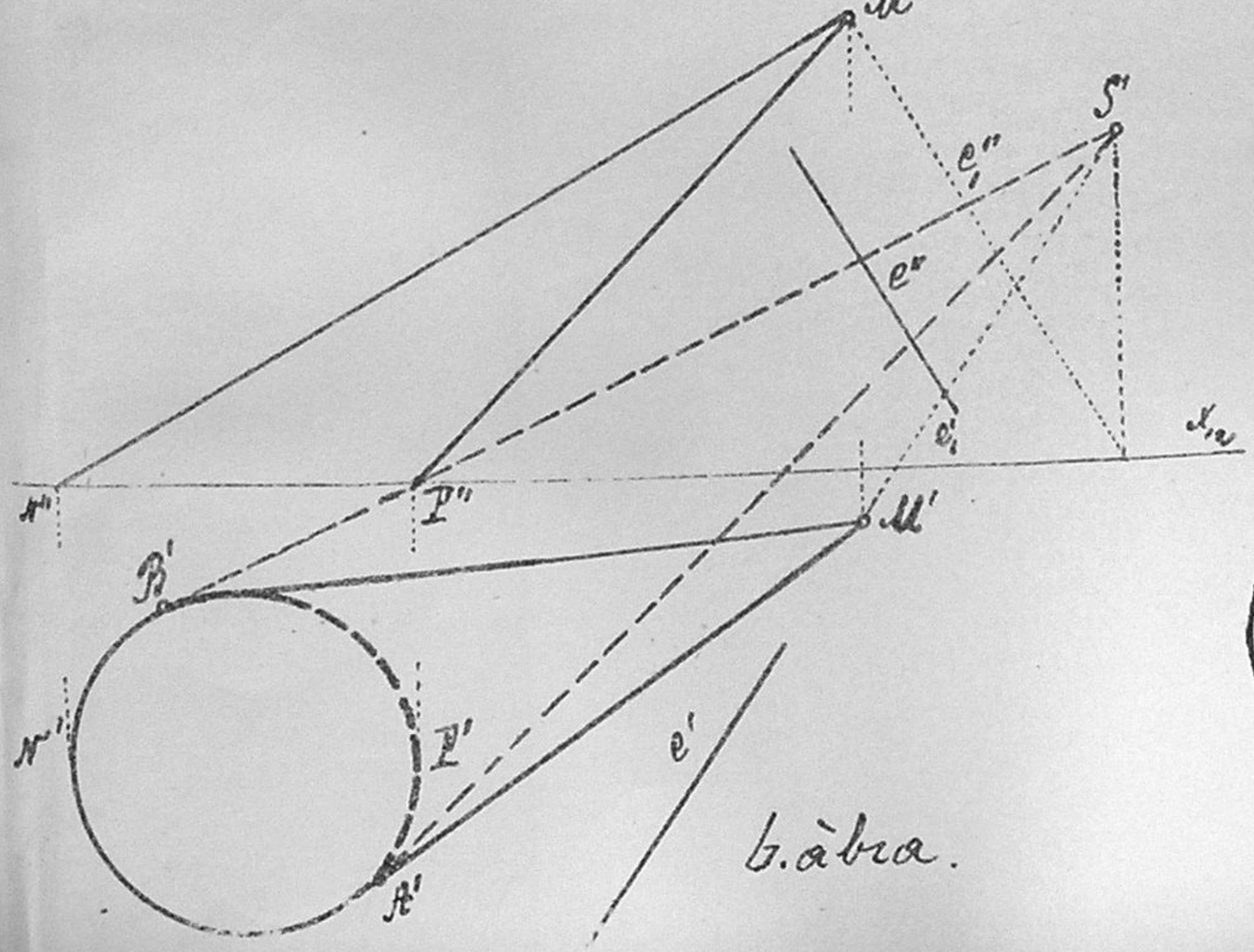
1 ábra.



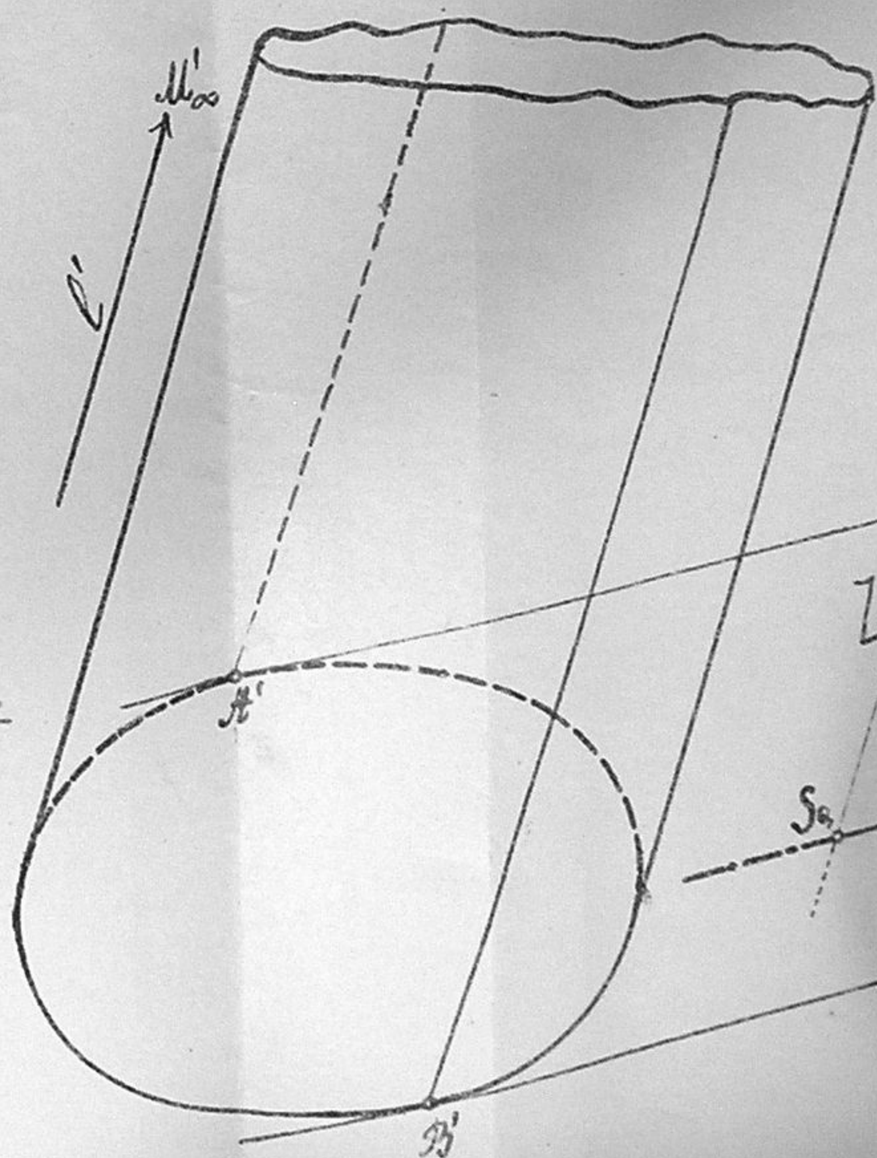
2 ábra.

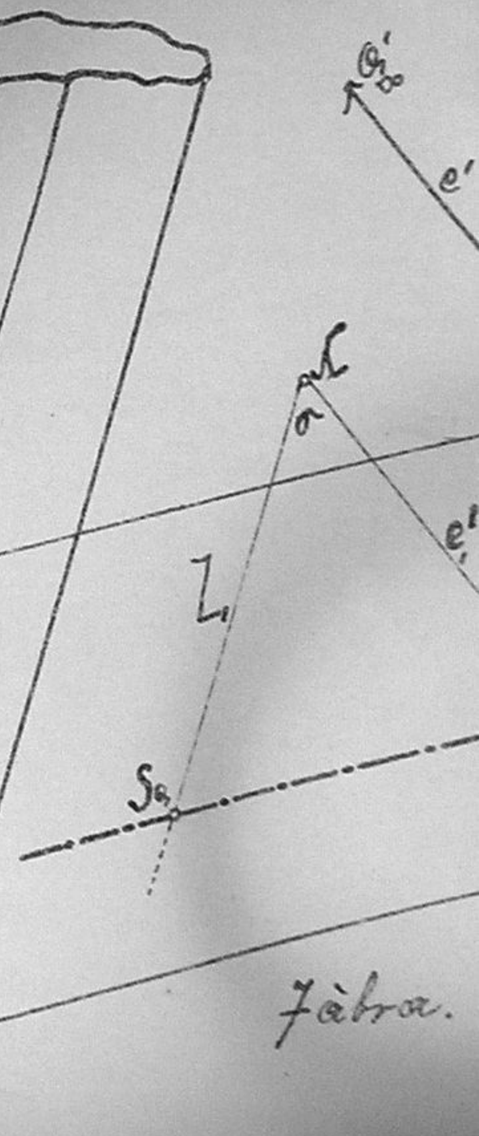


3. ábra.



6. ábra.

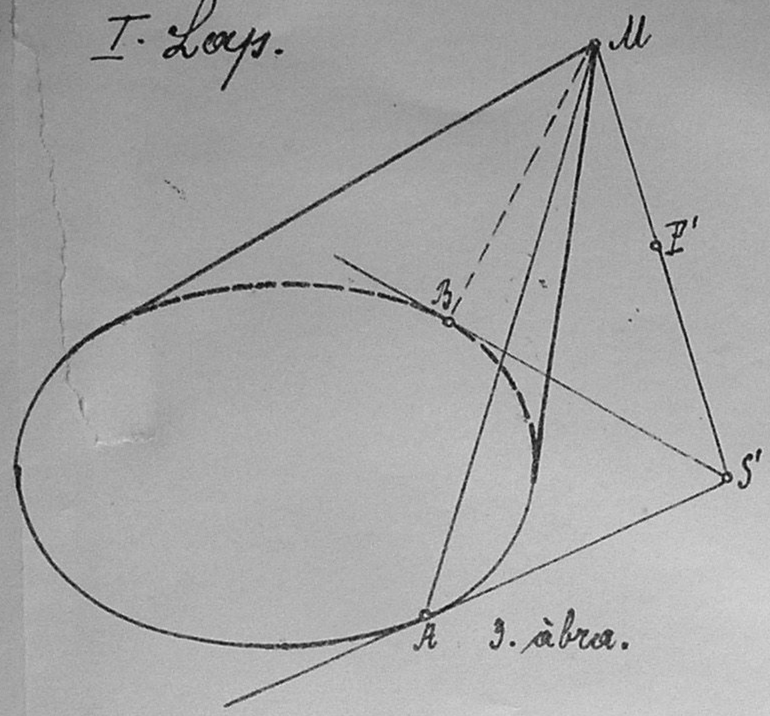




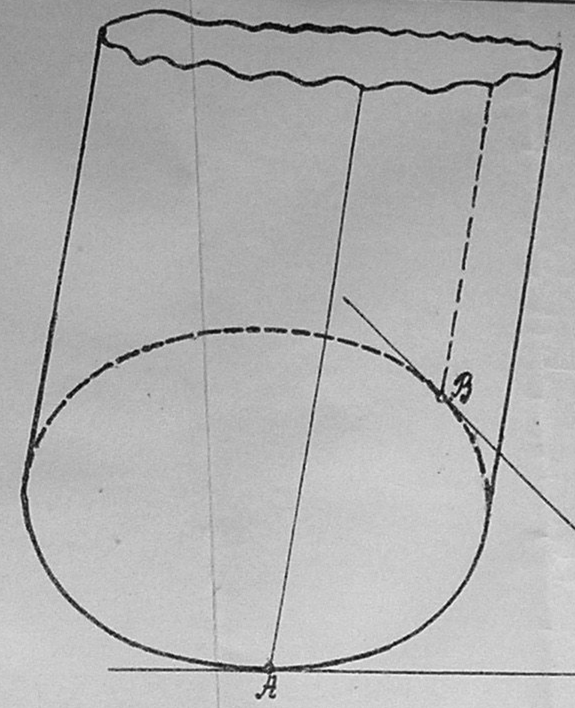
7 ábra.

I. Leys.

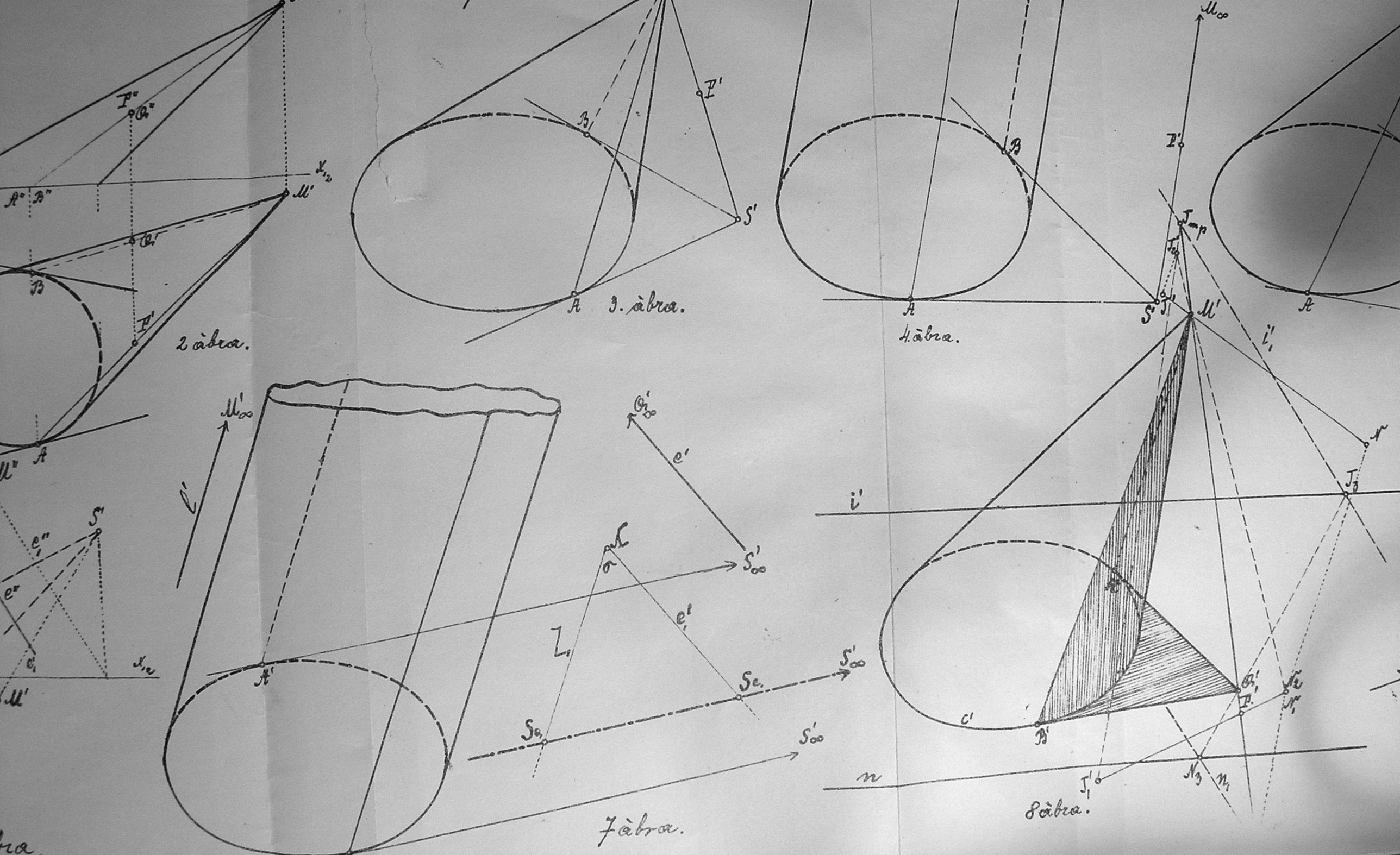
2. ábra.



3. ábra.



4. ábra.



8. ábra.

7. ábra.

ra.

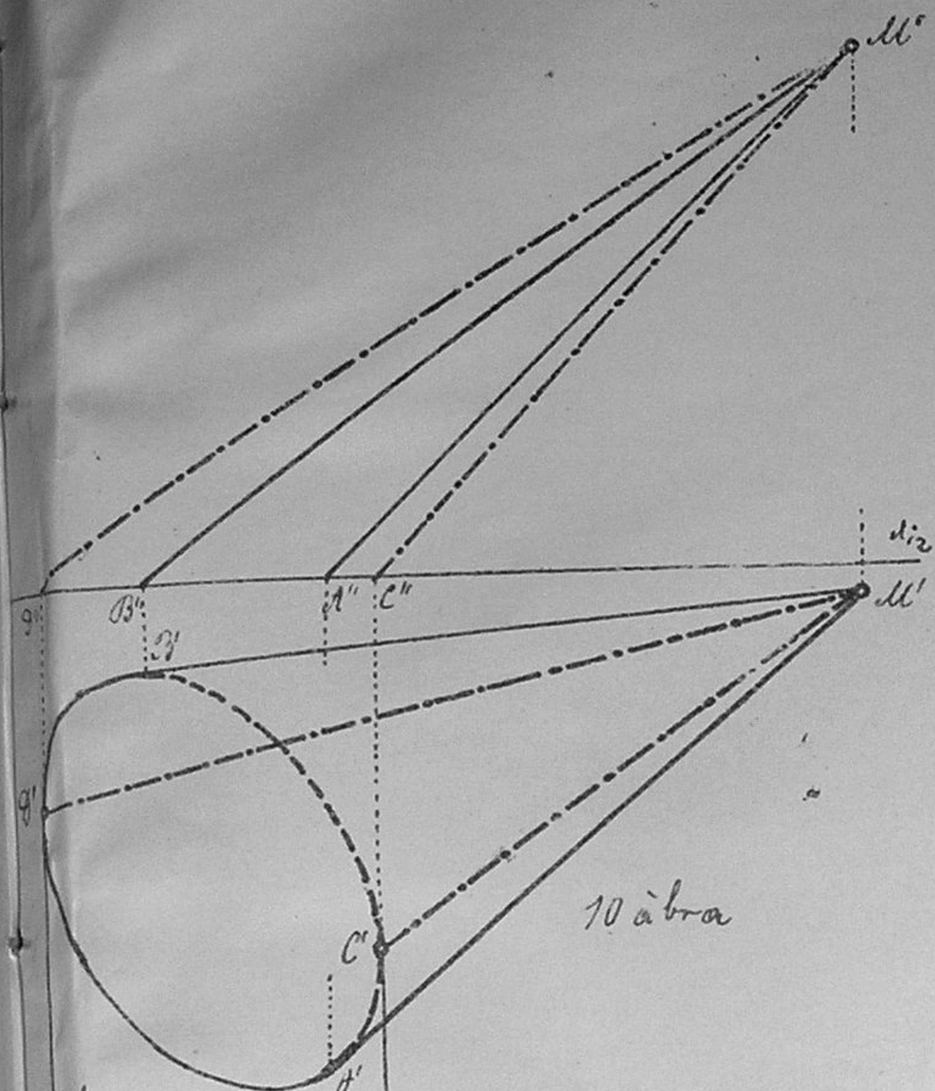
4. ábra.

5. ábra.

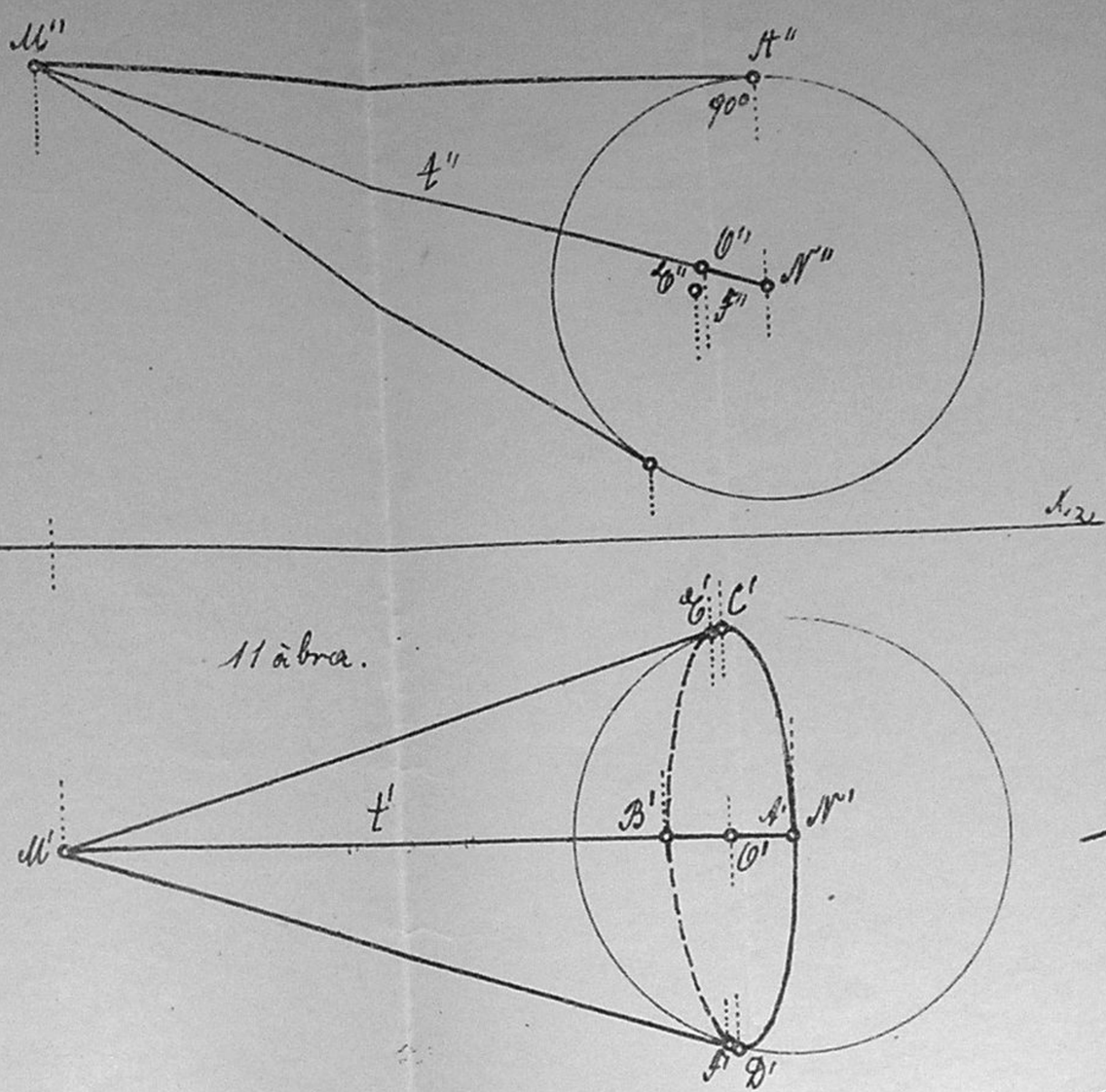
8. ábra.

12. ábra.

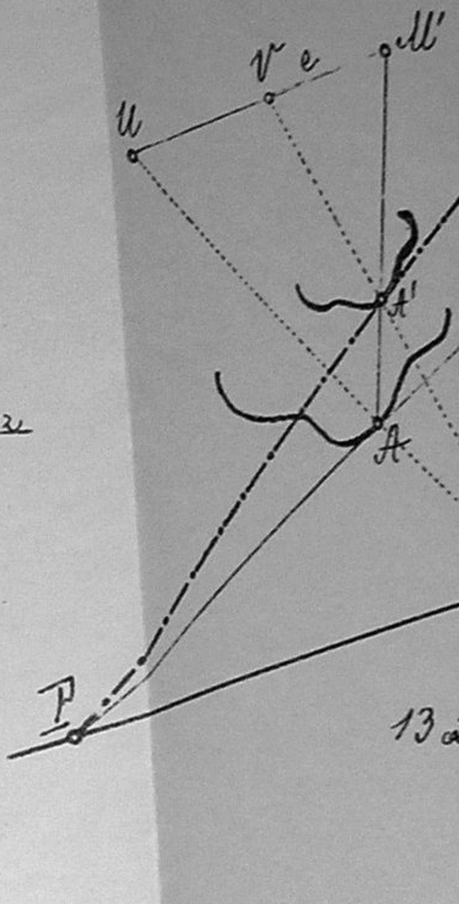
Langmaar Ottó



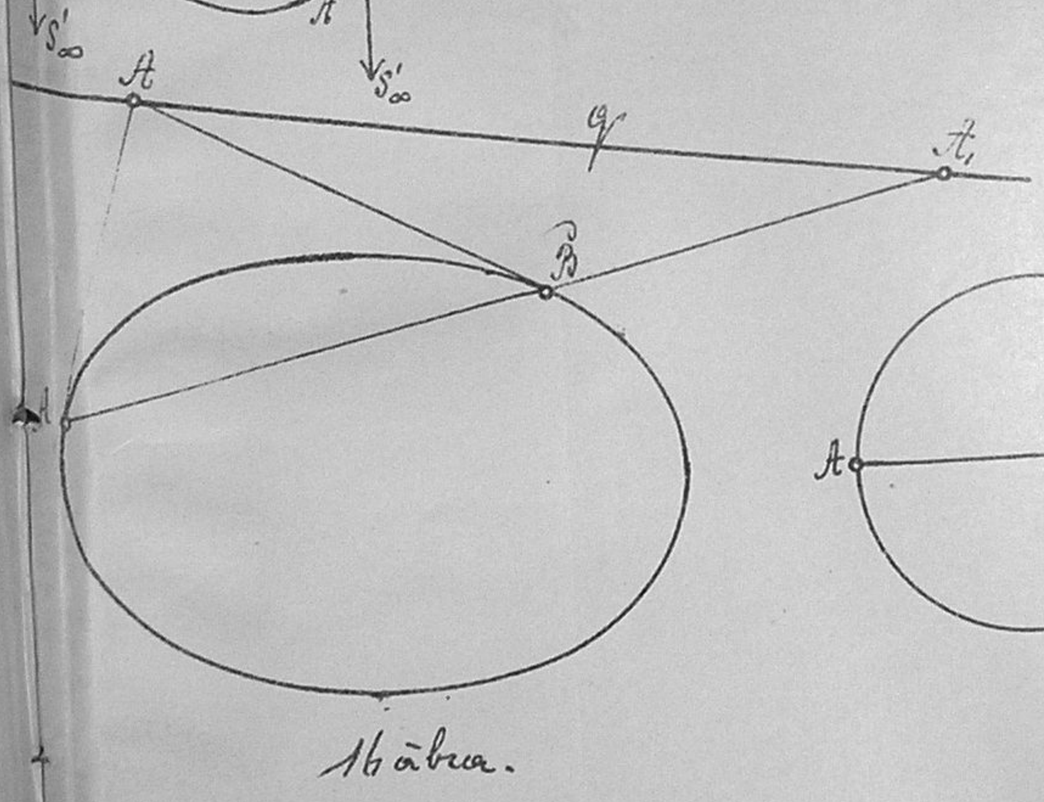
10 ábra



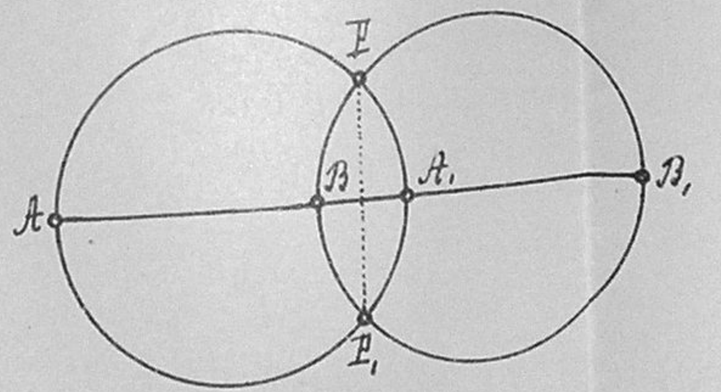
11 ábra.



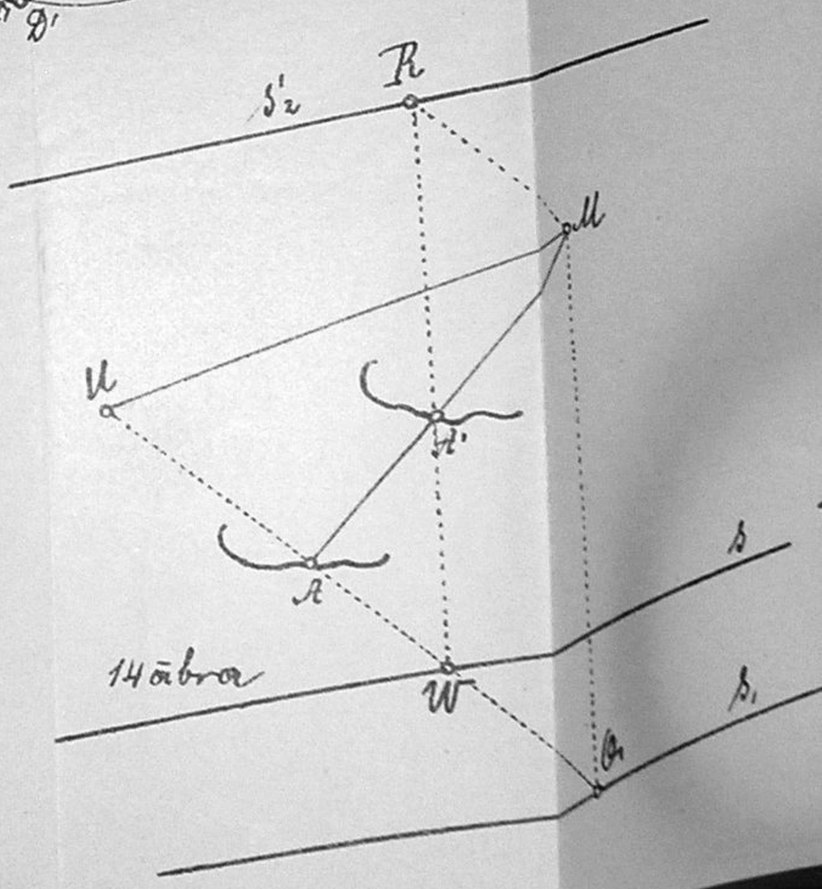
13 á



16 ábra.

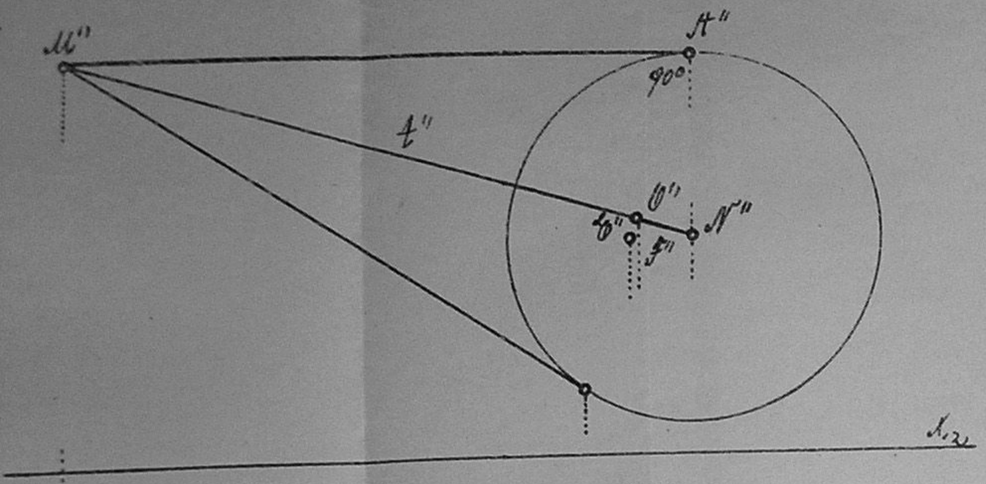


17 ábra.

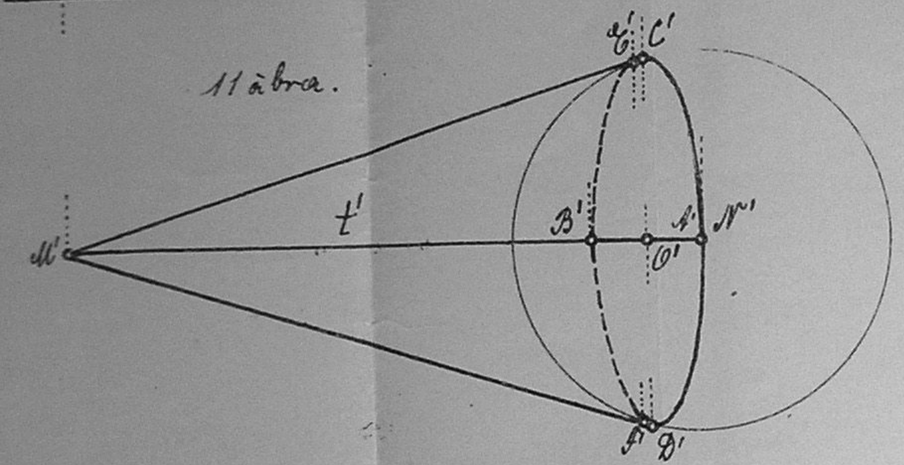


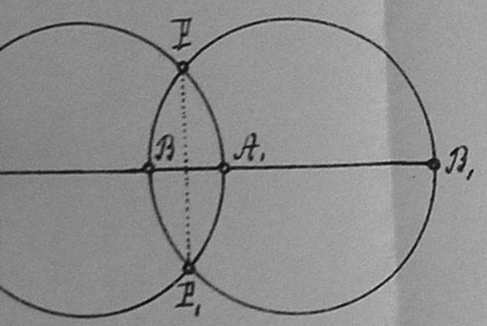
14 ábra

II. Lap.

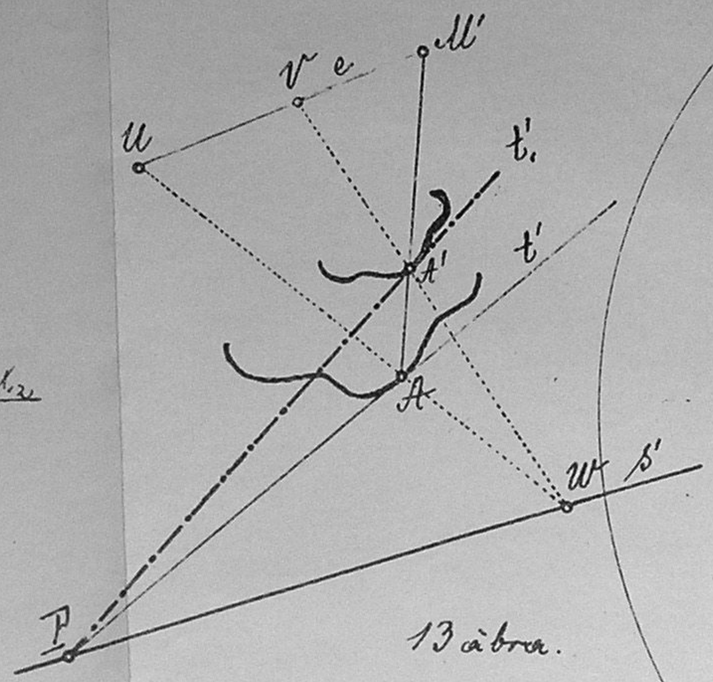


11 ábra.

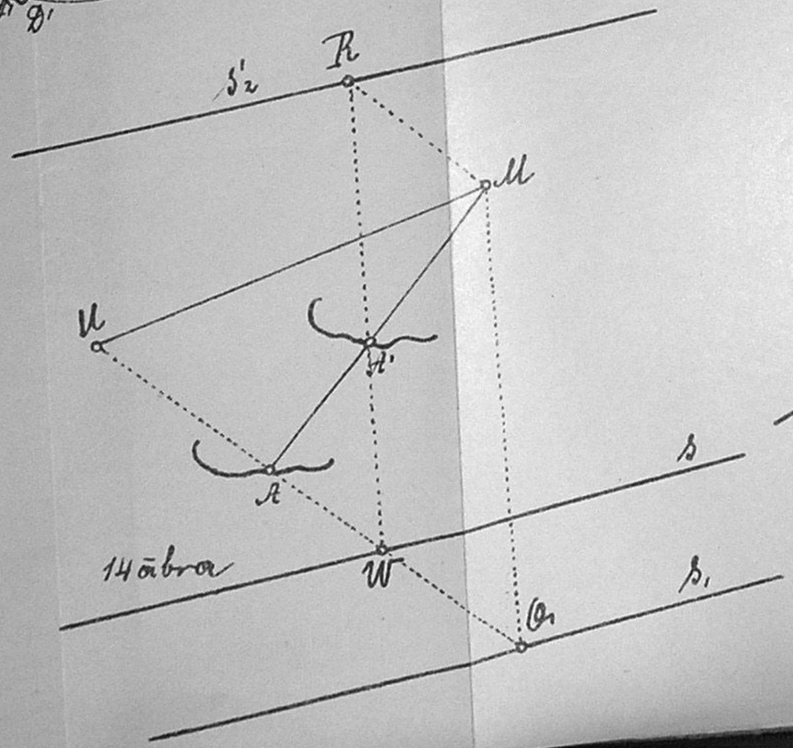




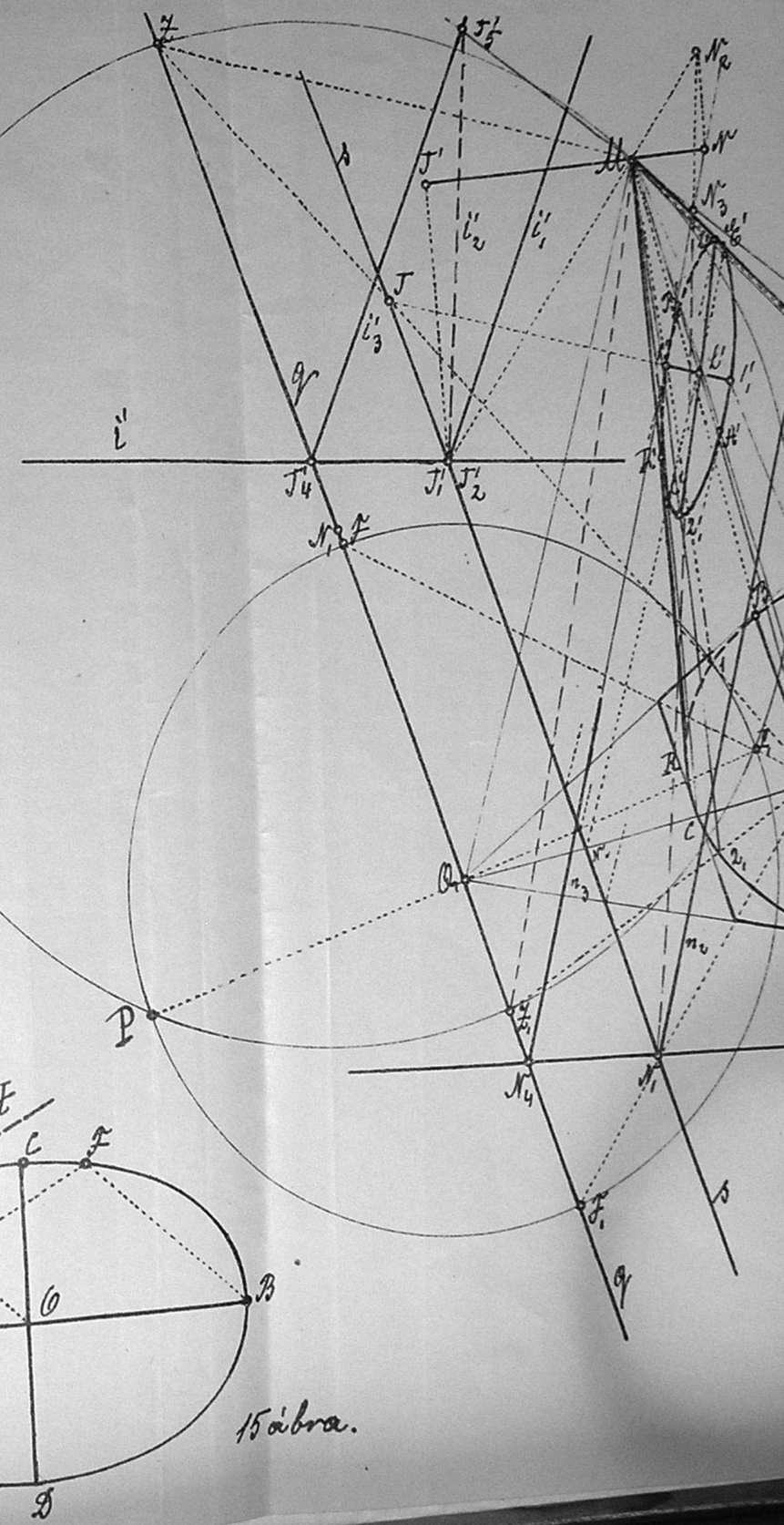
17 ábra.

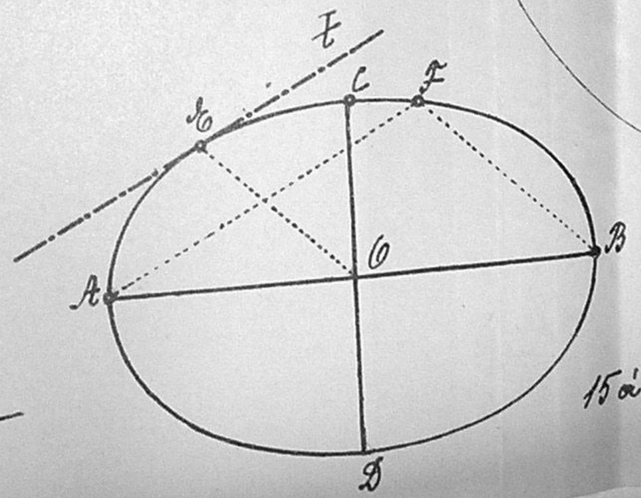


13 ábra.

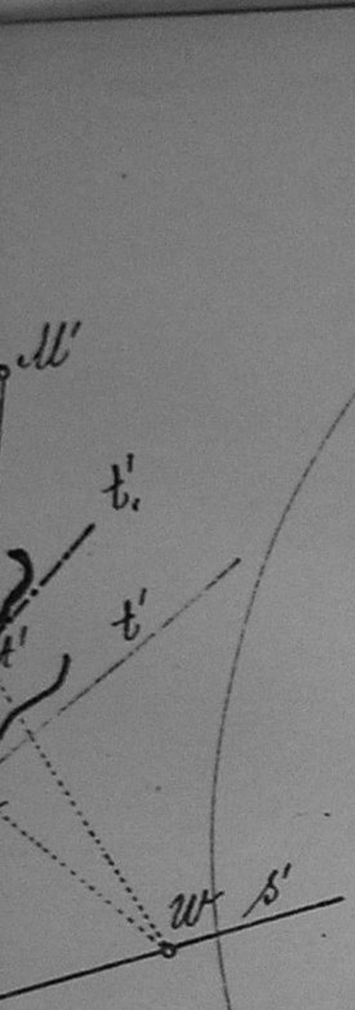


14 ábra

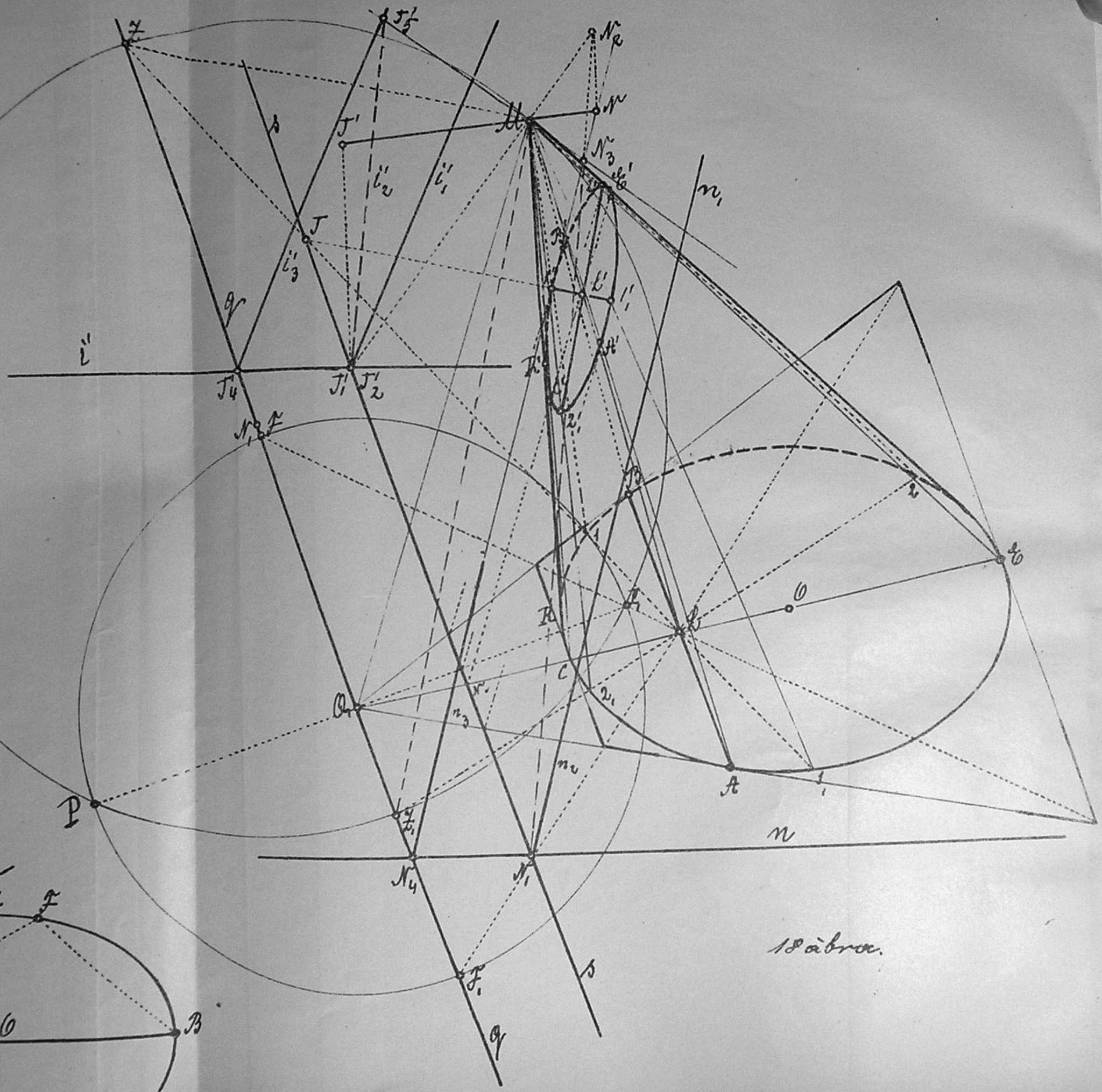




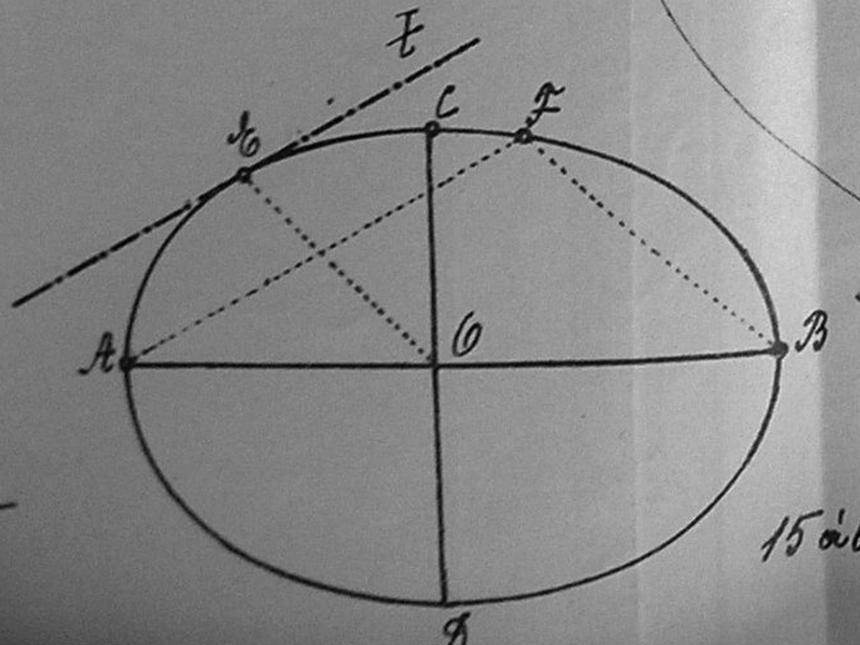
15 ábra.



3 ábra.

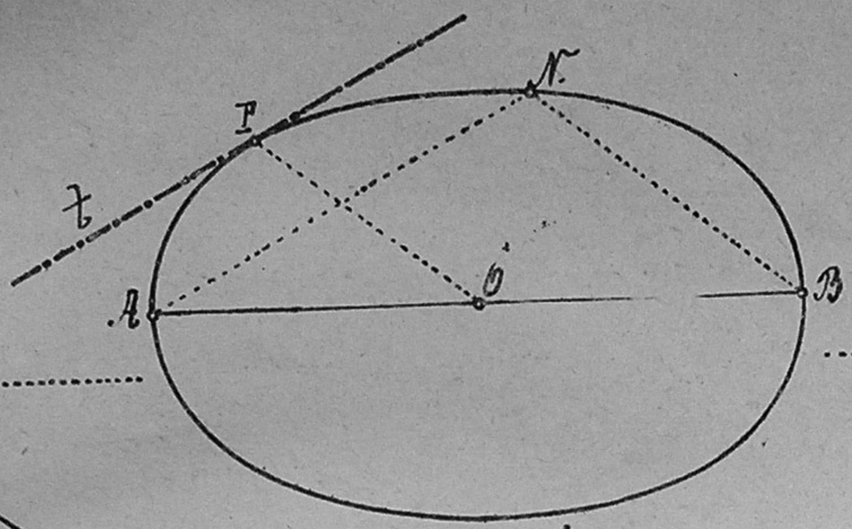


18 ábra.

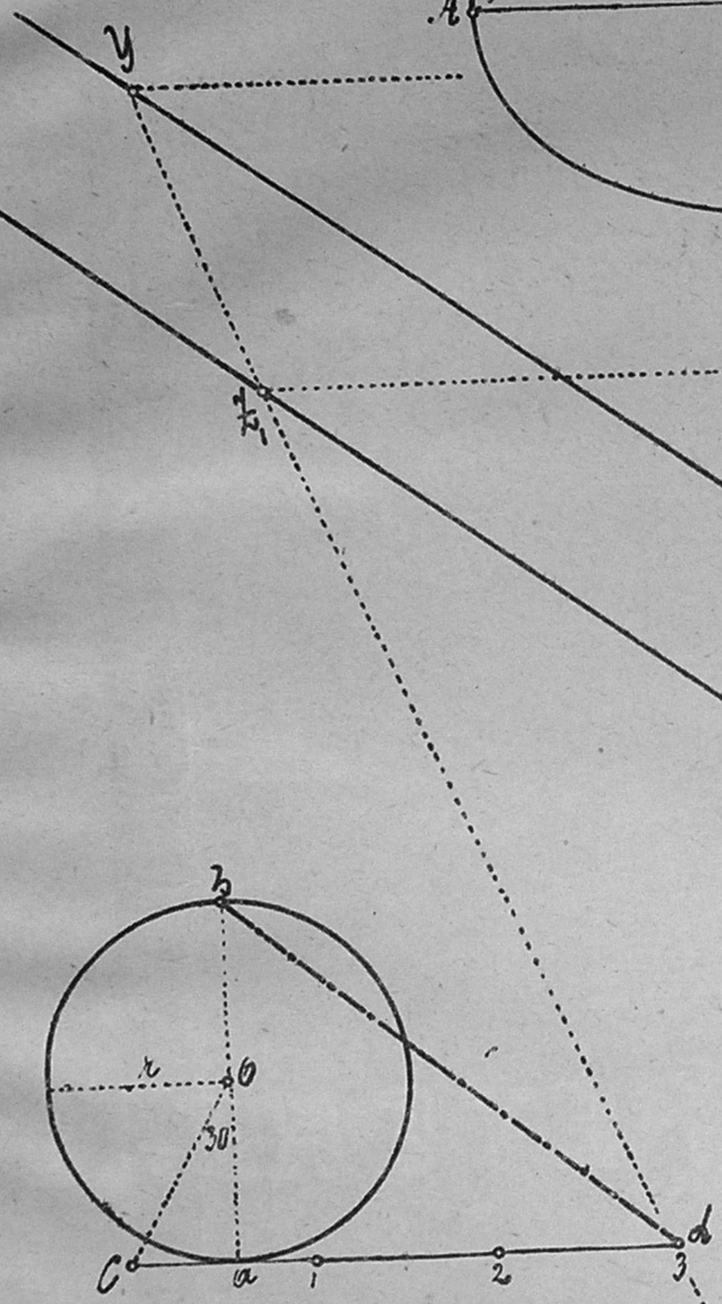


15 ábra.

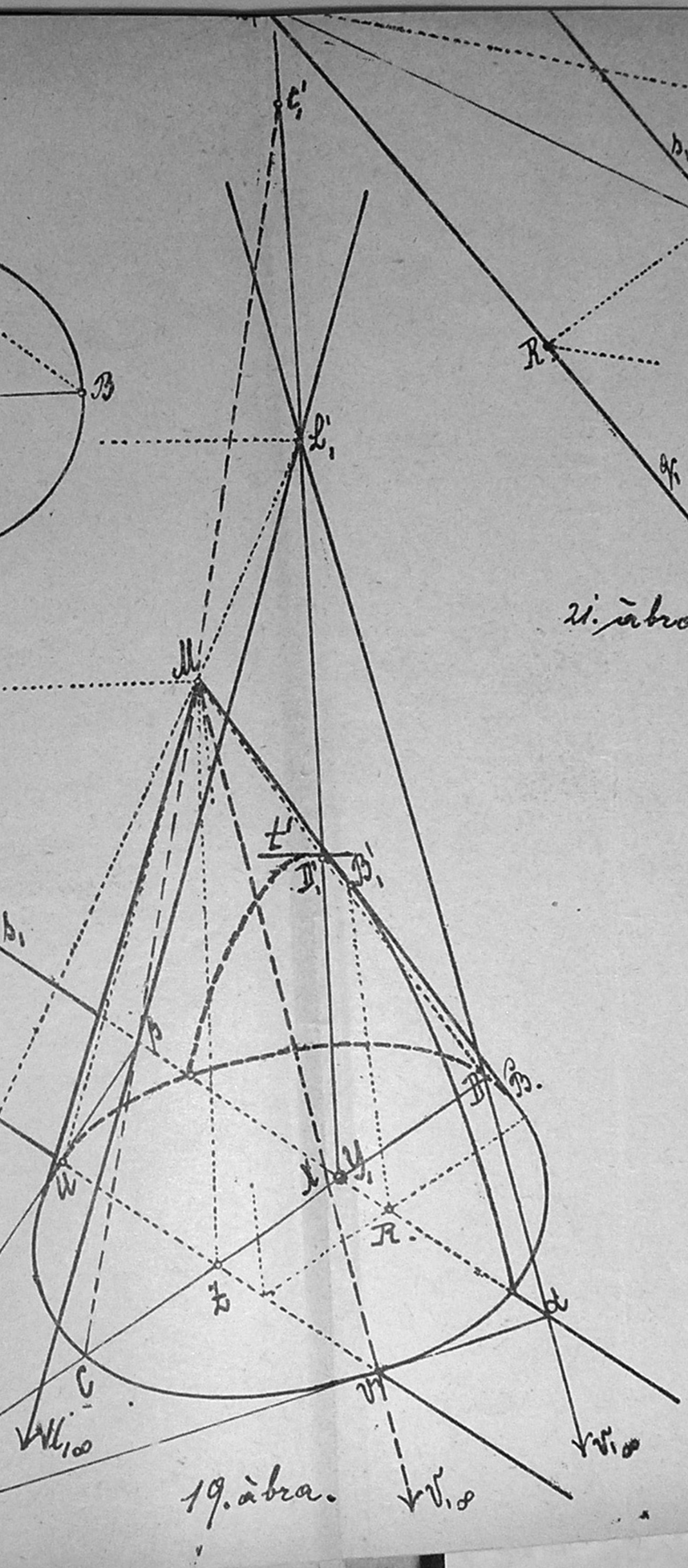
Szampuanitz



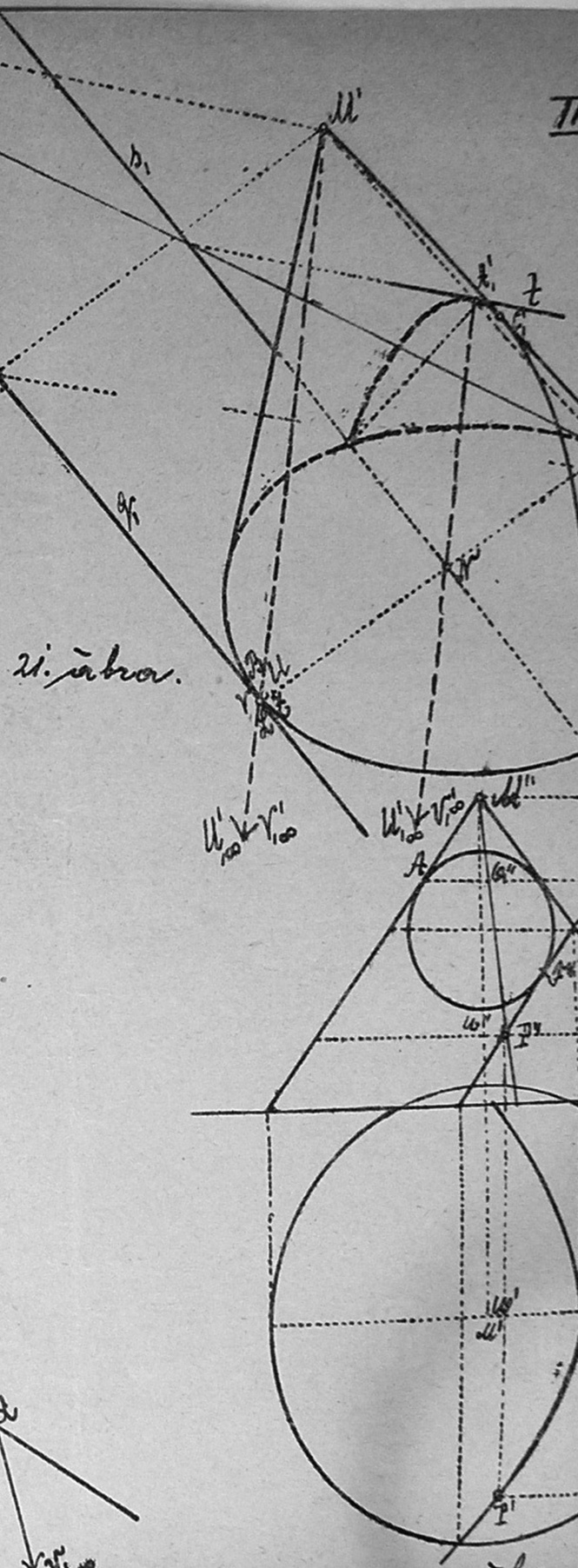
20. ábra.



27 ábra.

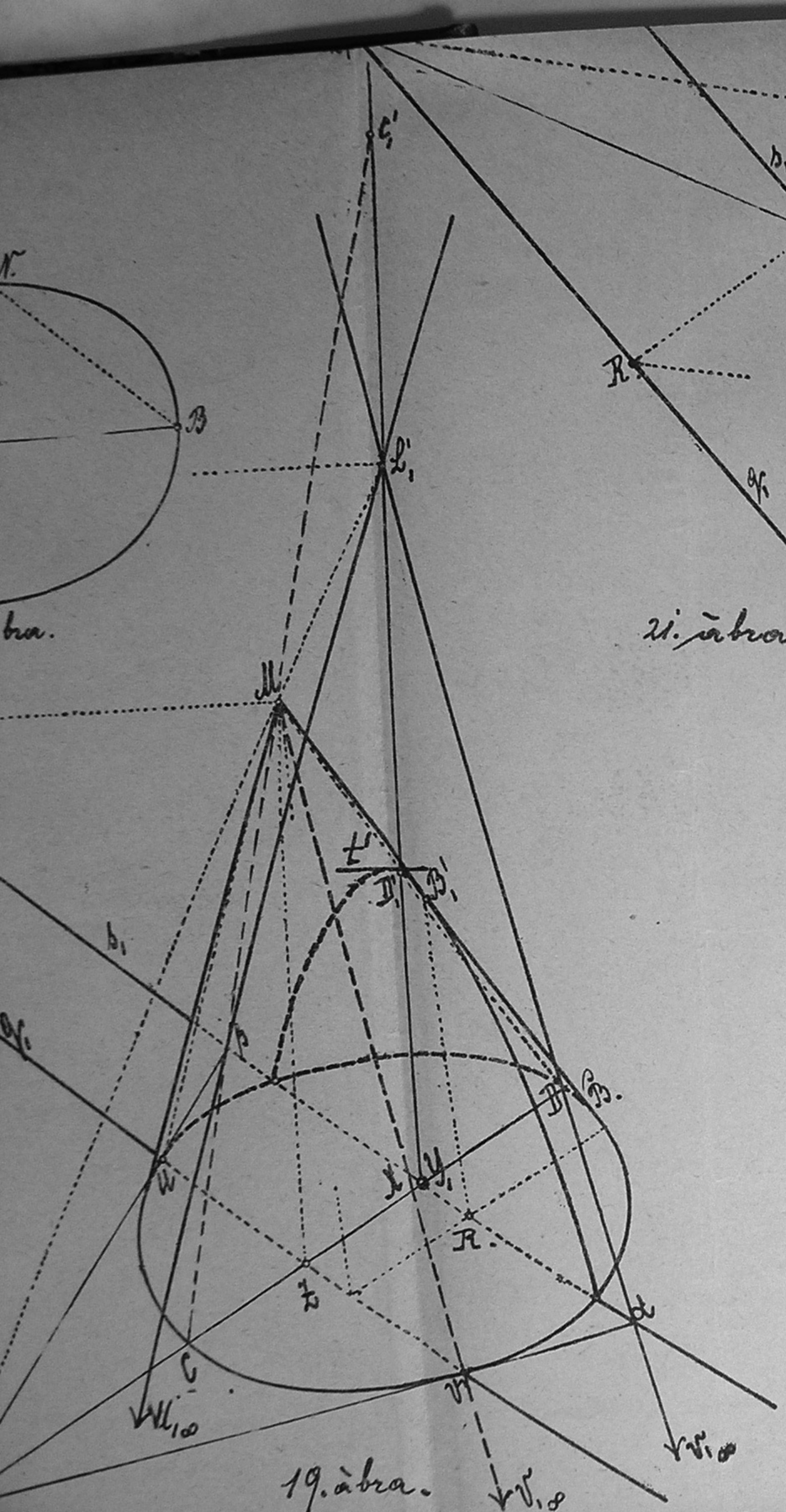


19. ábra.

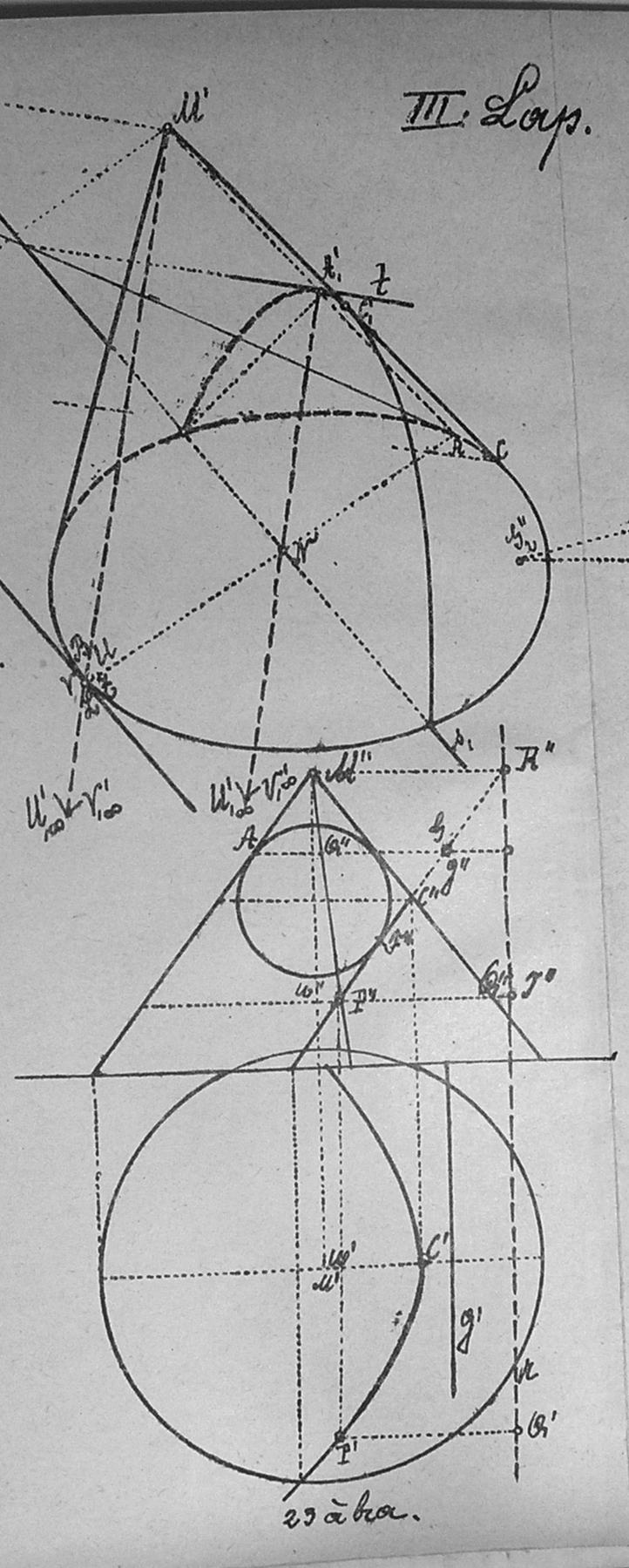


21. ábra.

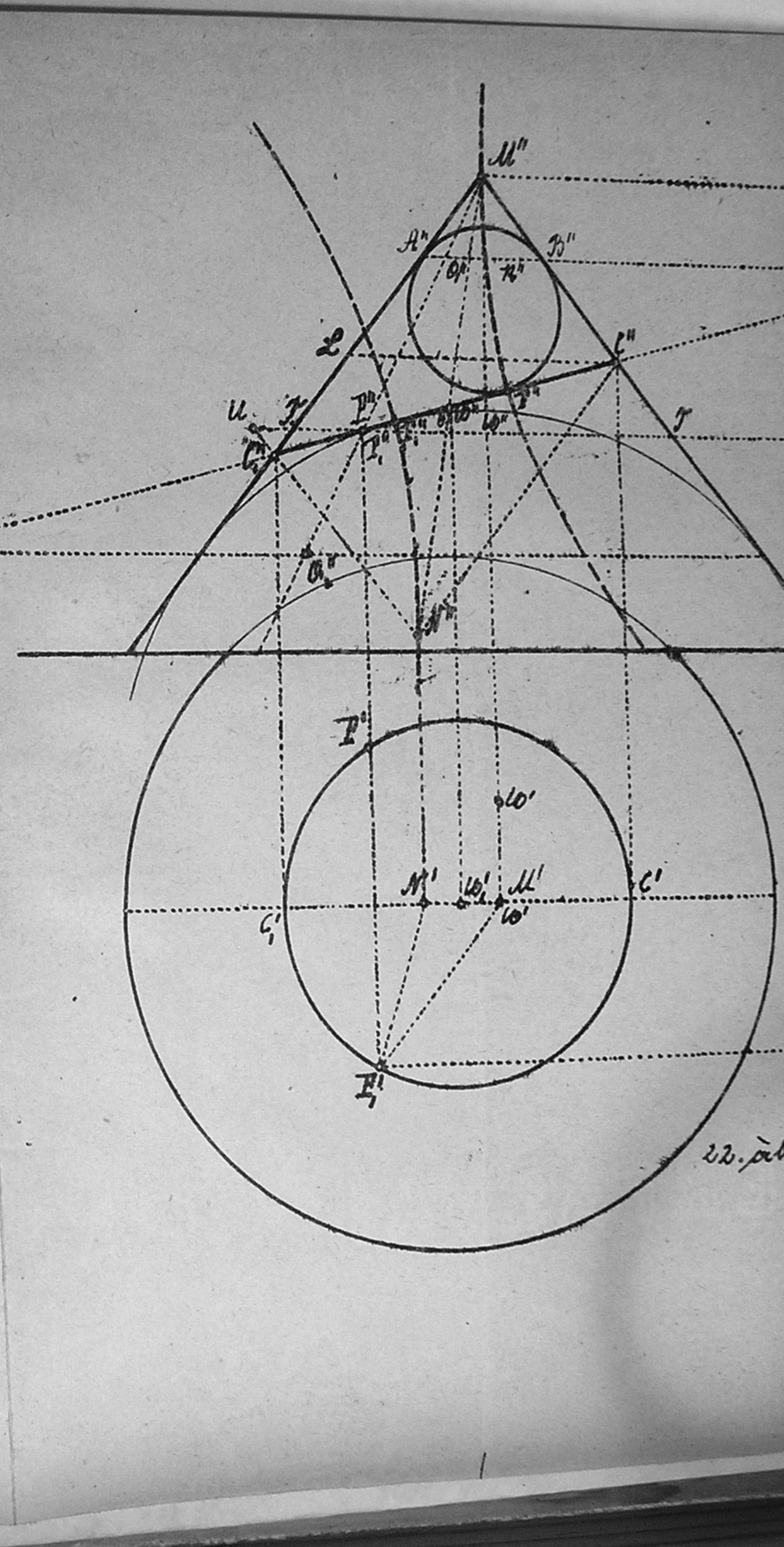
23 ábra.



19. ábra.

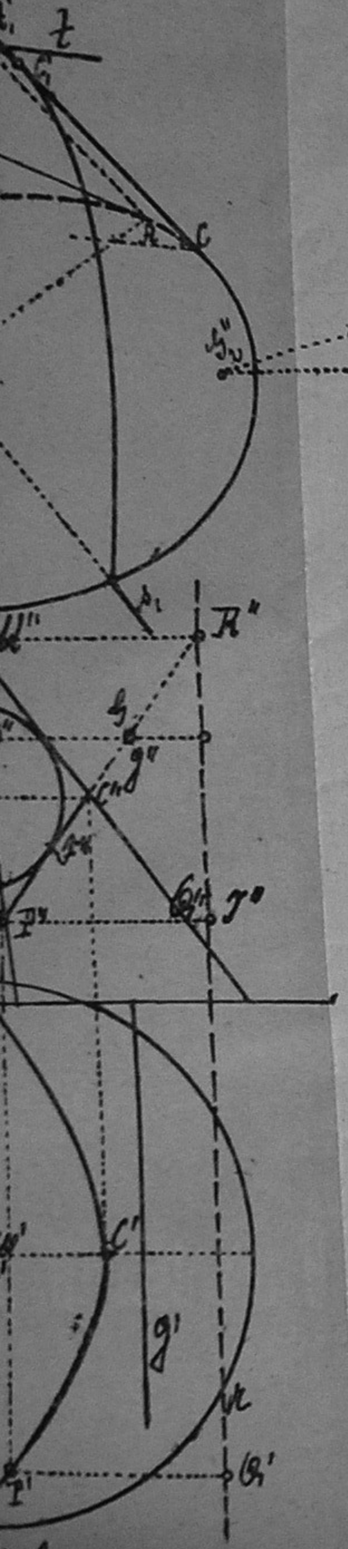


21. ábra.

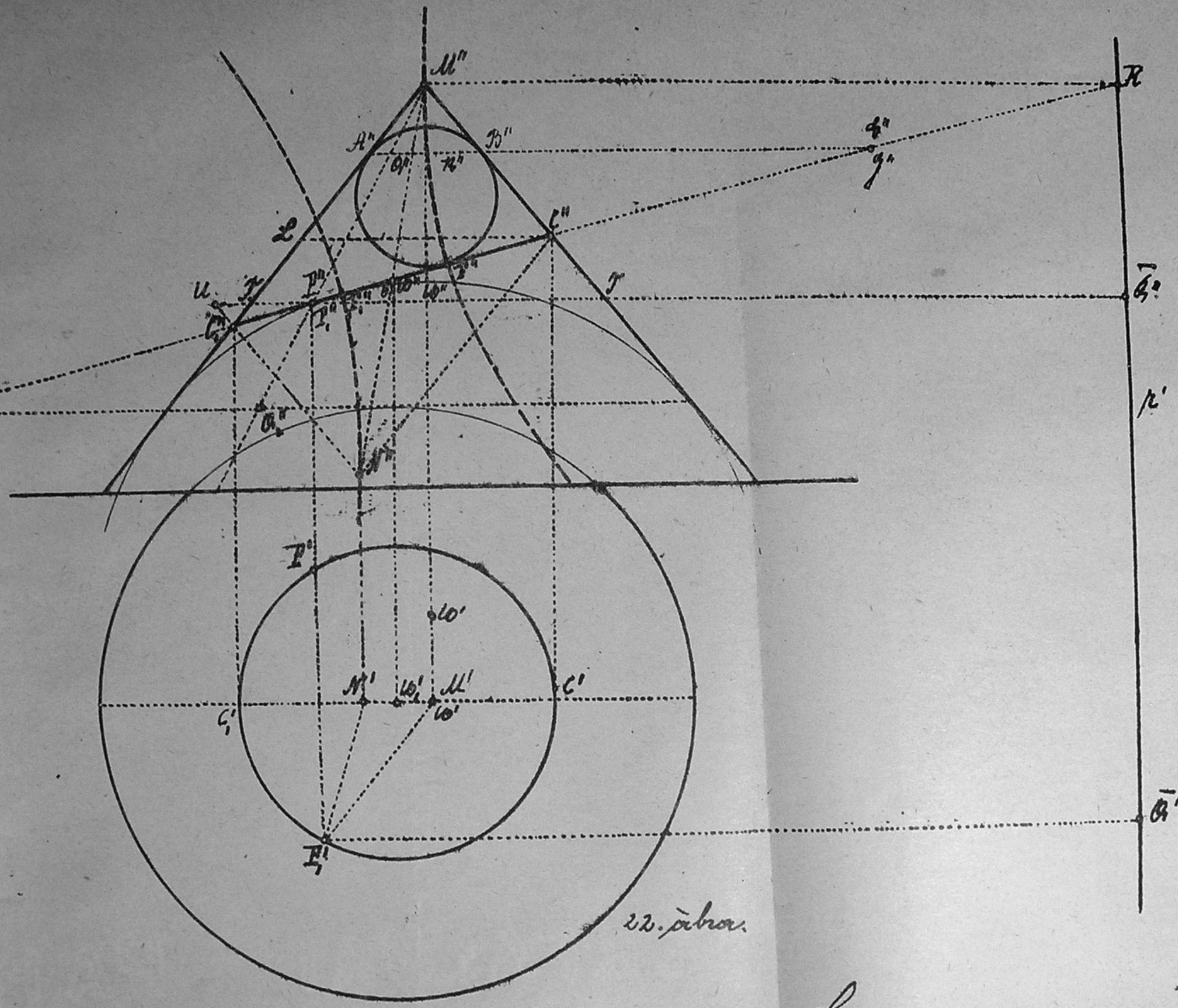


22. ábra.

III. Lap.

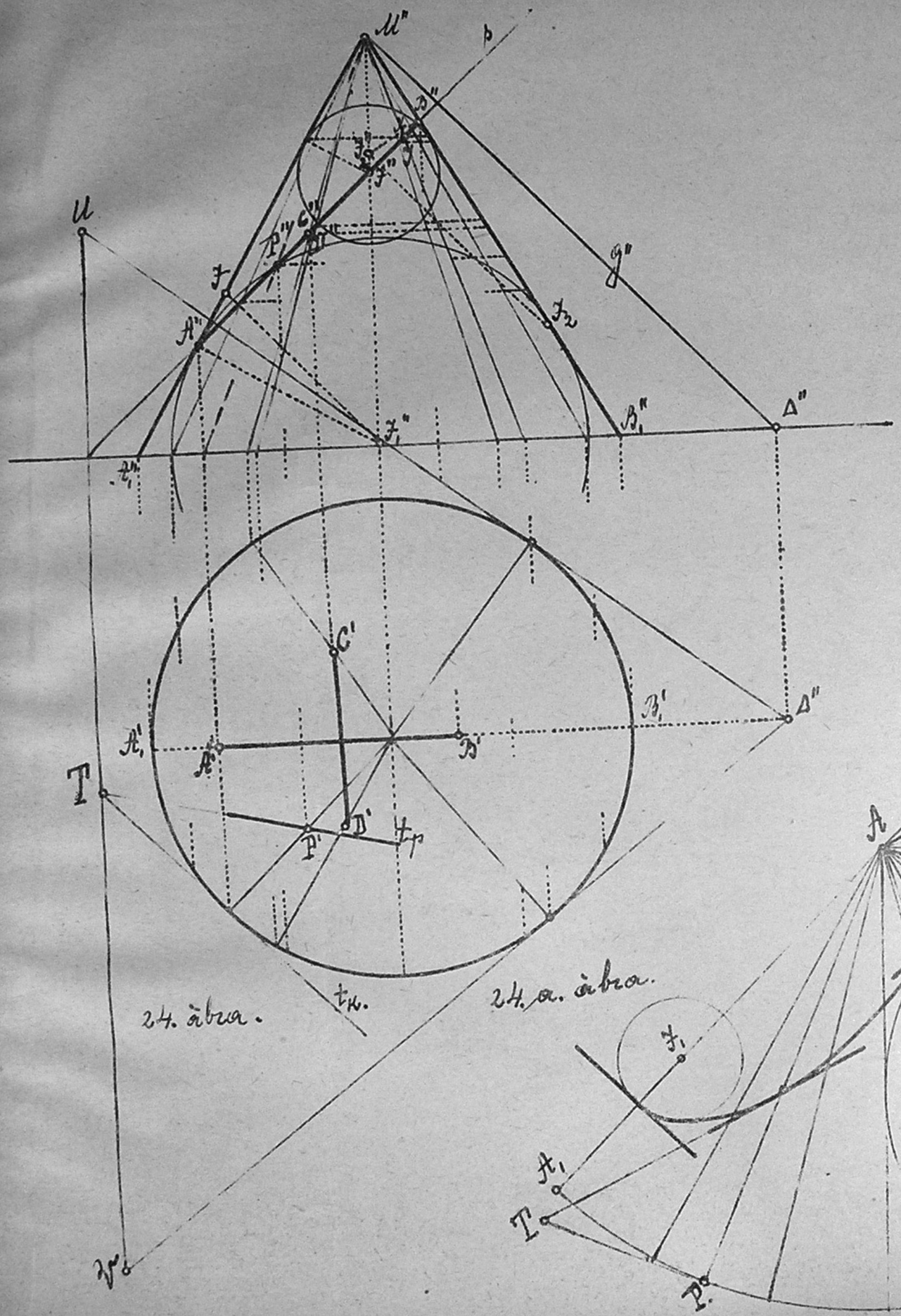


ábra.

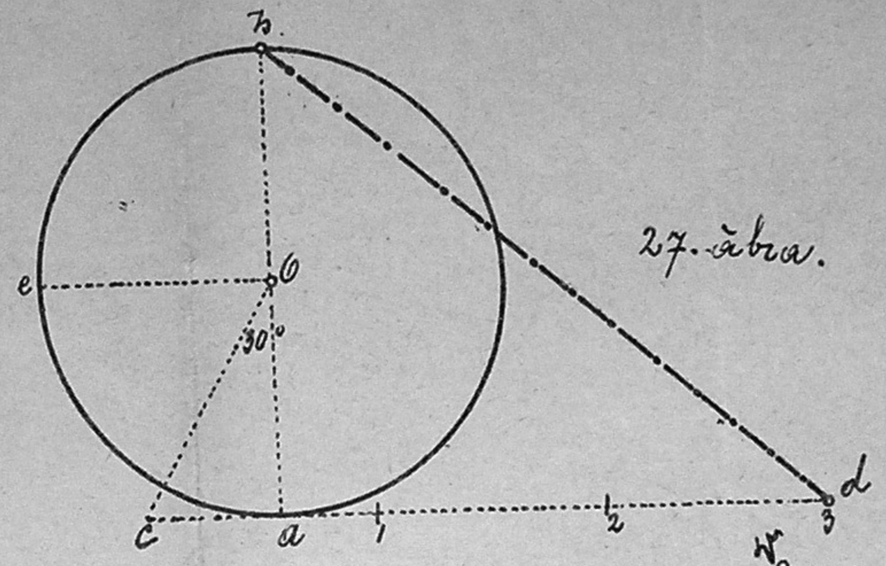


22. ábra.

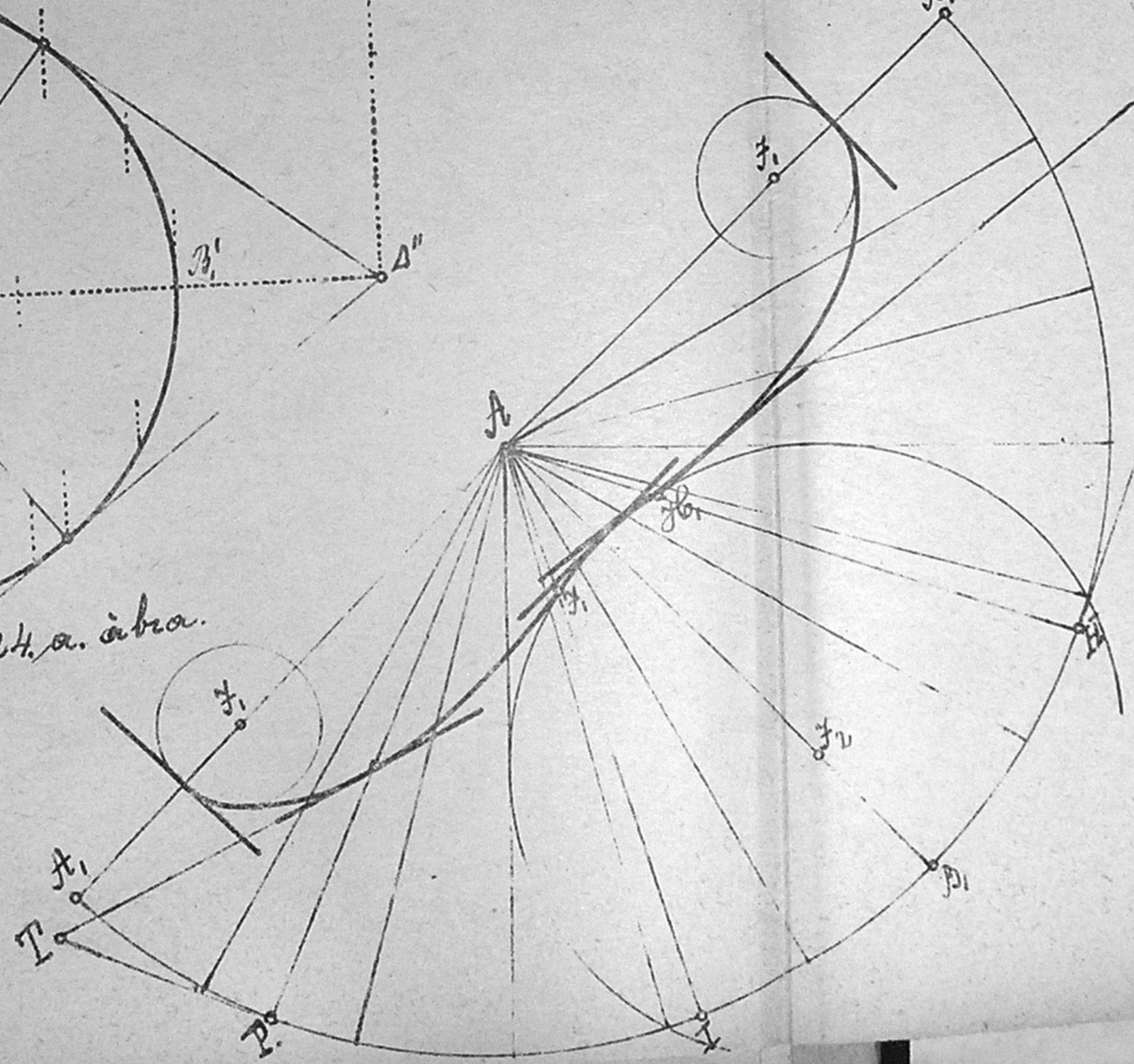
Hangyacsinálni!!!



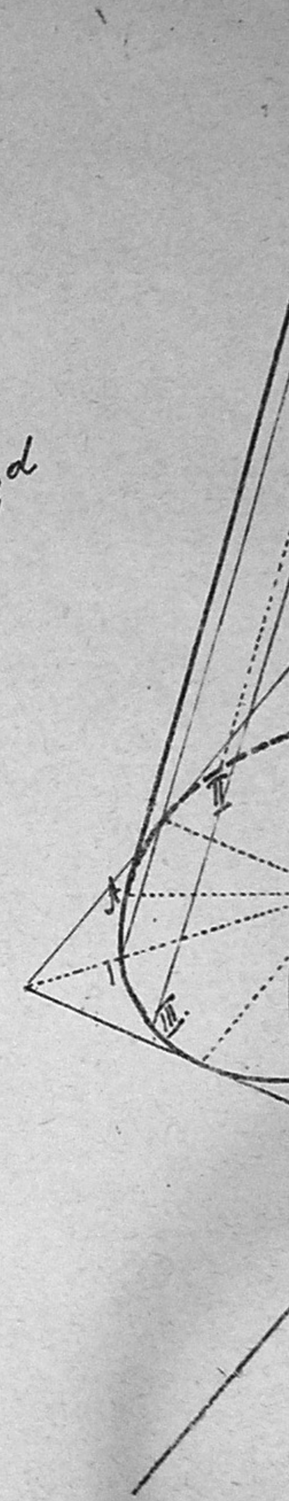
24. ábra.



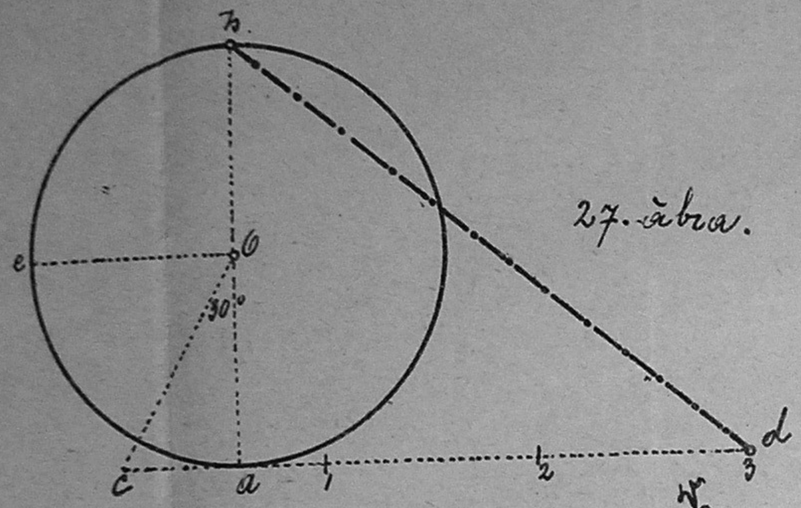
27. ábra.



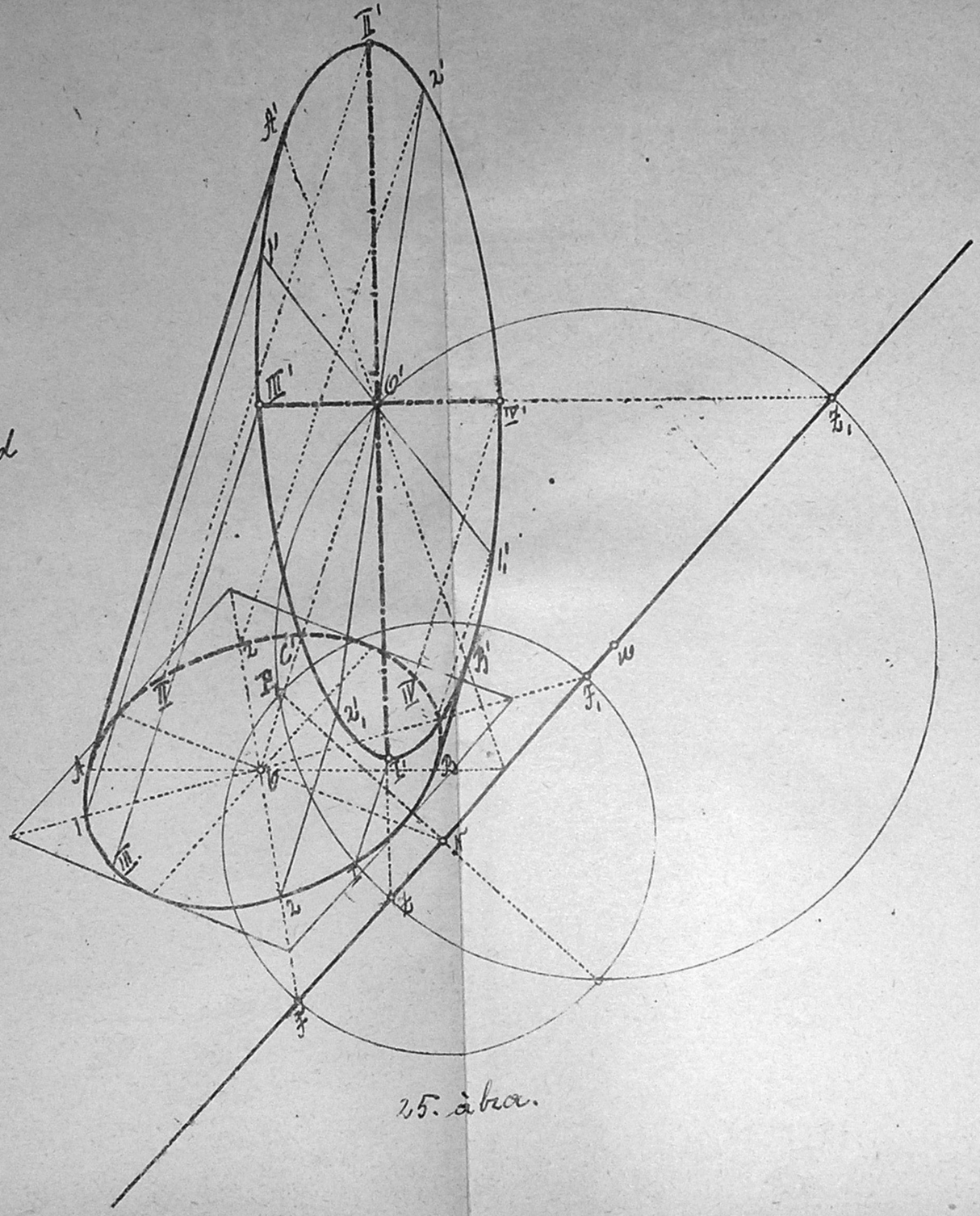
24. a. ábra.



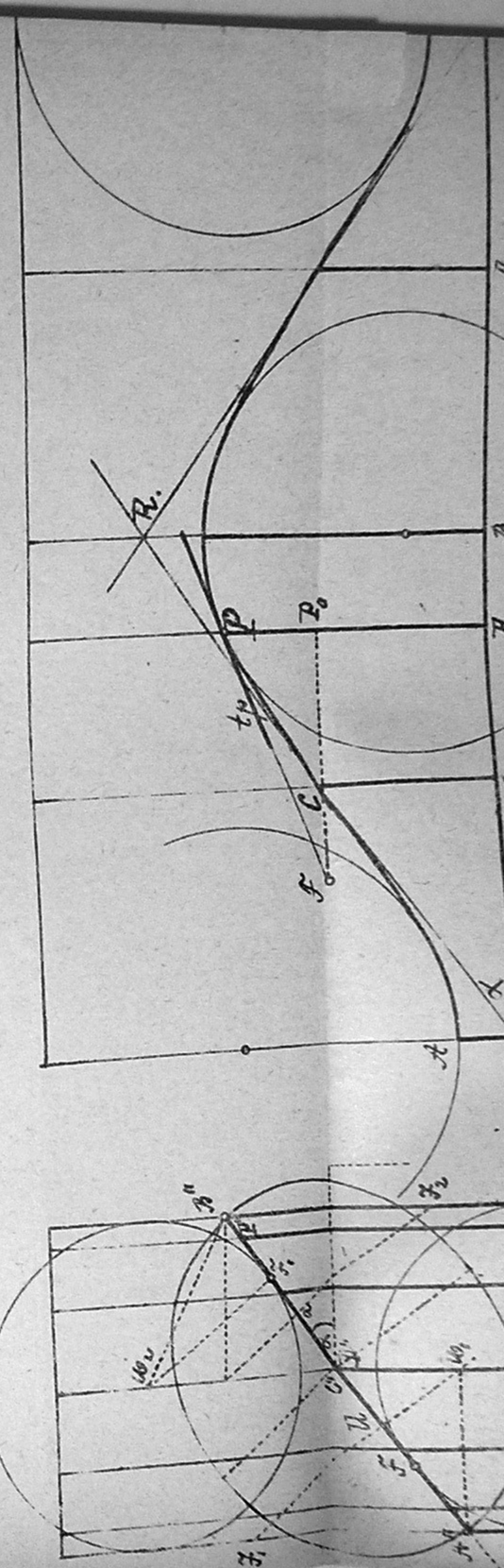
IV. Lap.

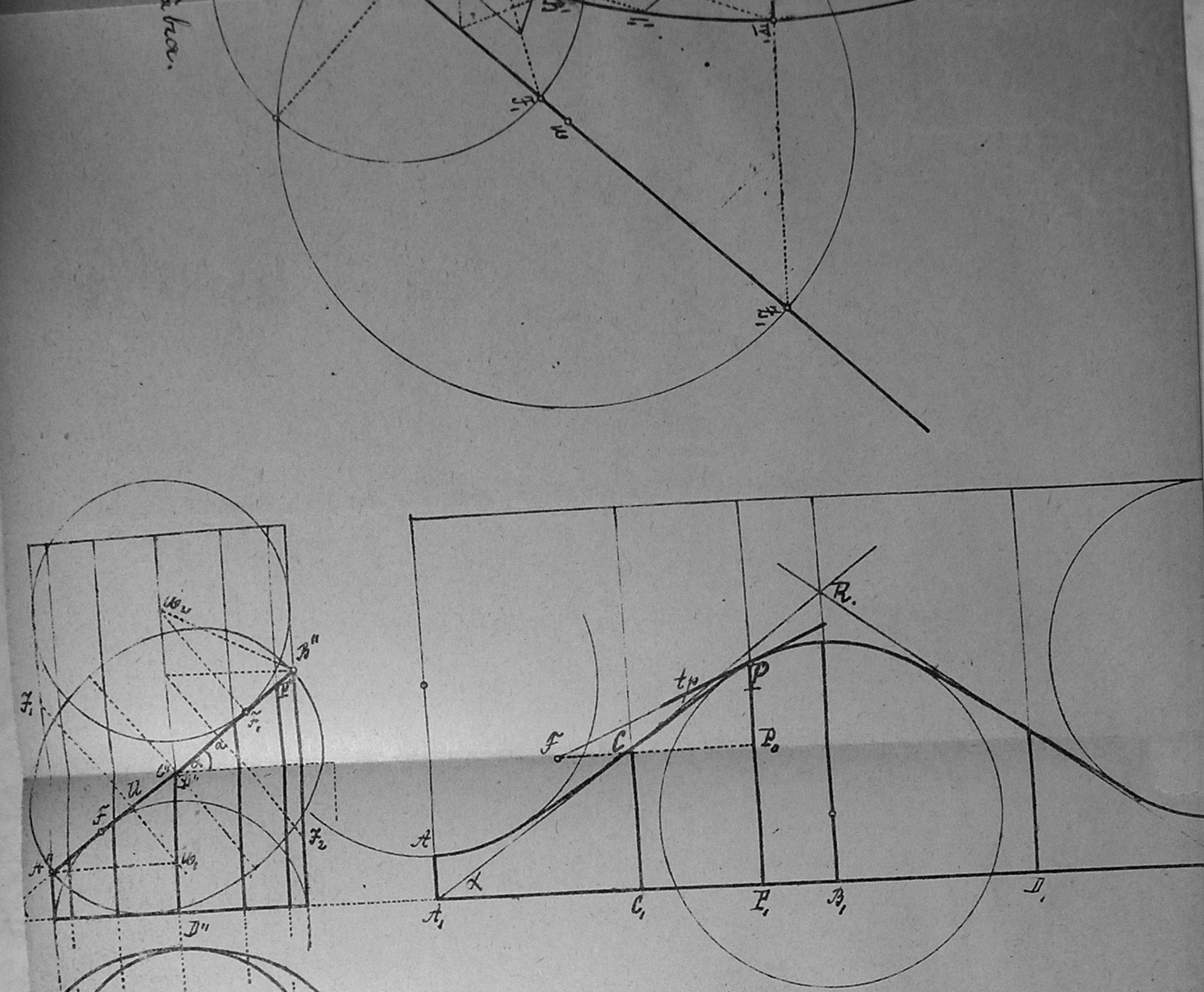


27. ábra.

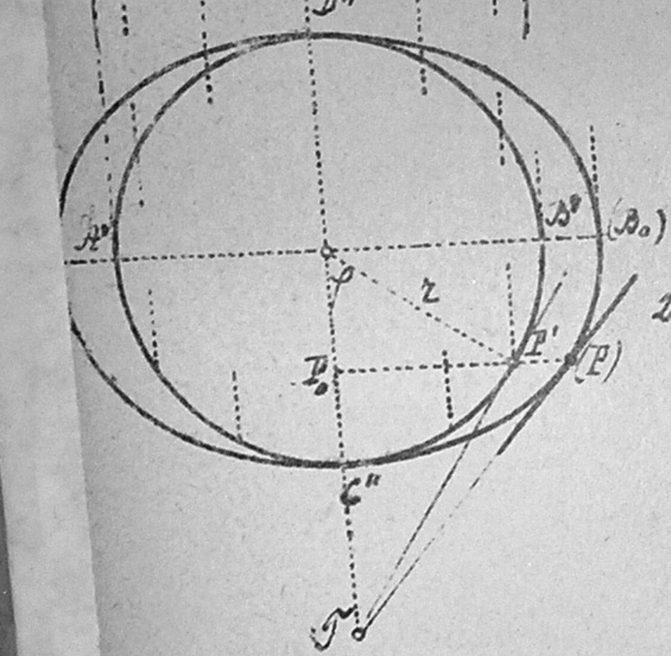


25. ábra.



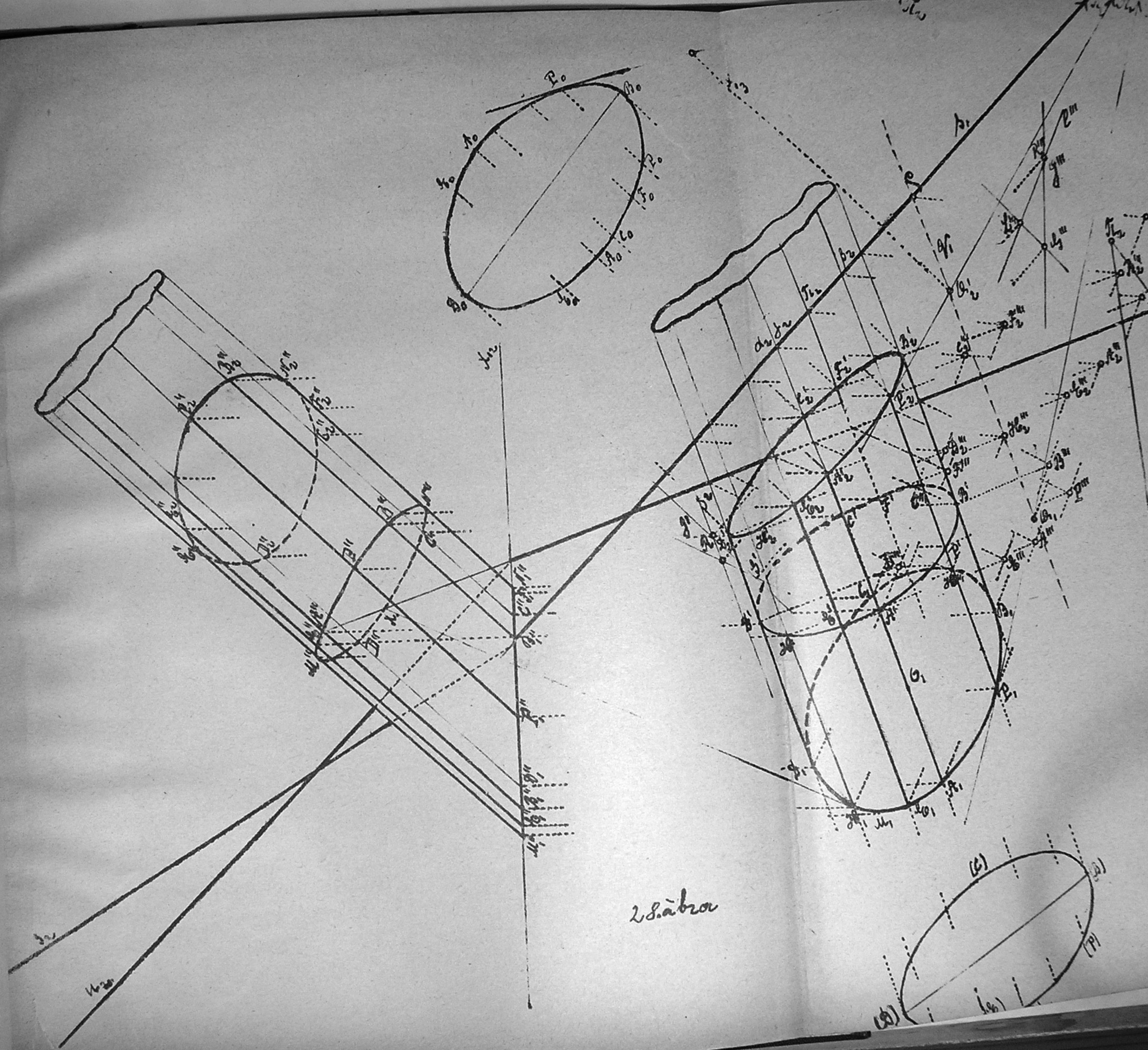


2b. ábra.



2b. ábra.

Kaufmann mil



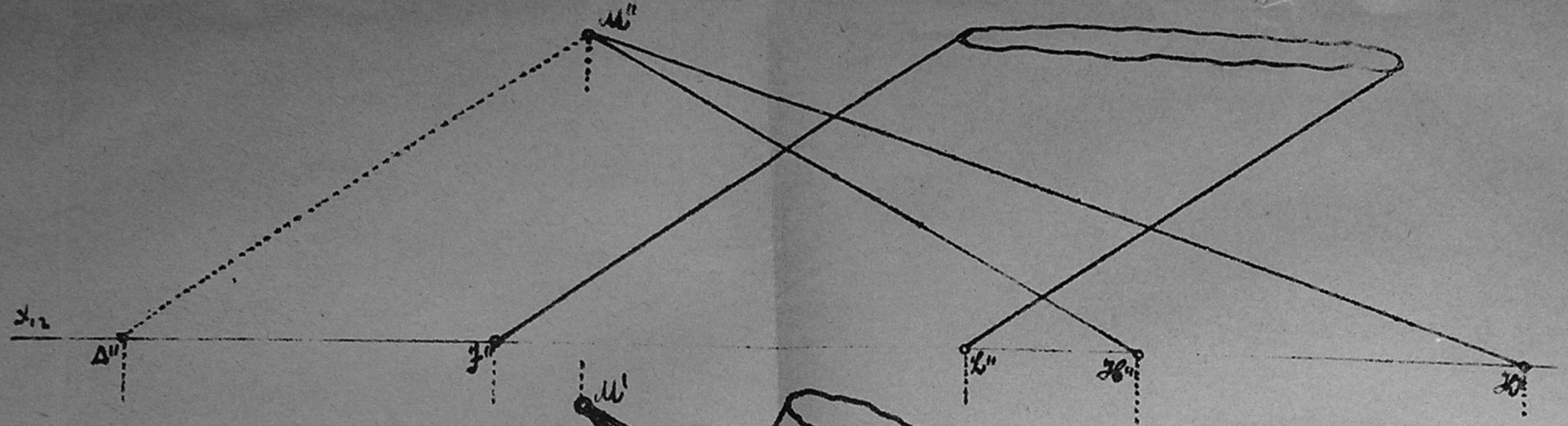
28.ábra

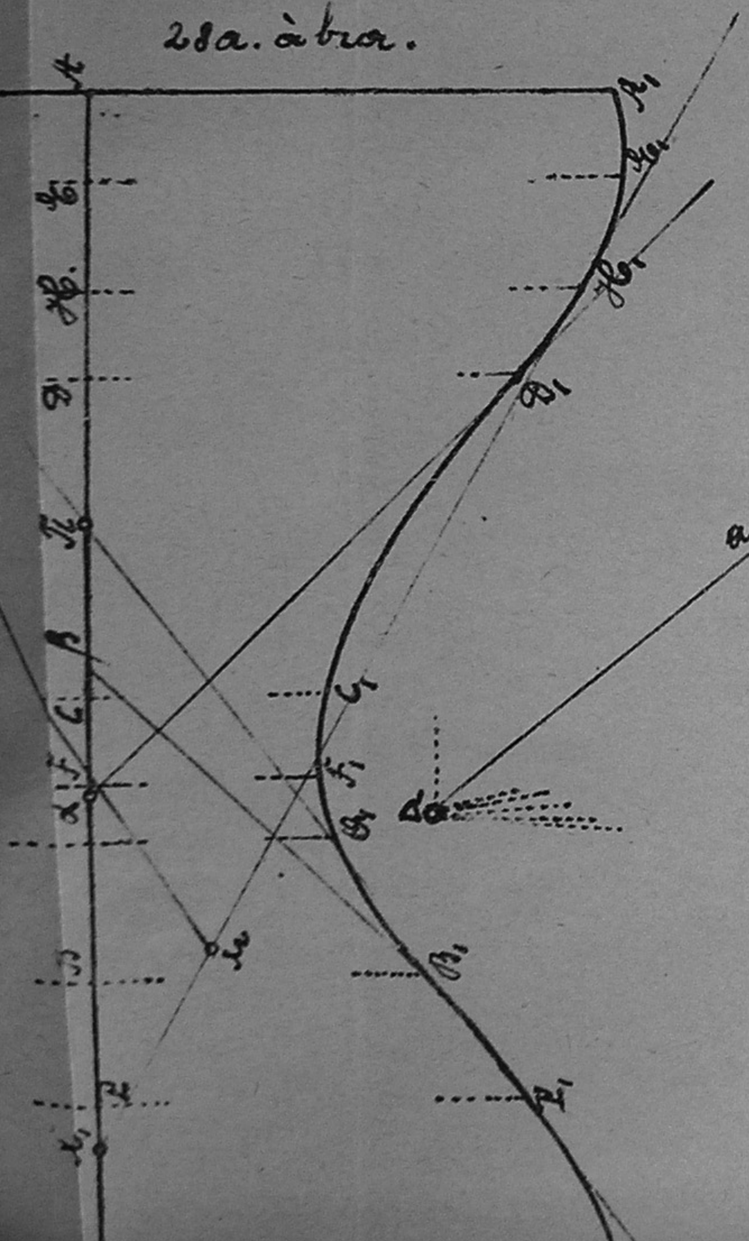
V. Lap.

28a. ábra.

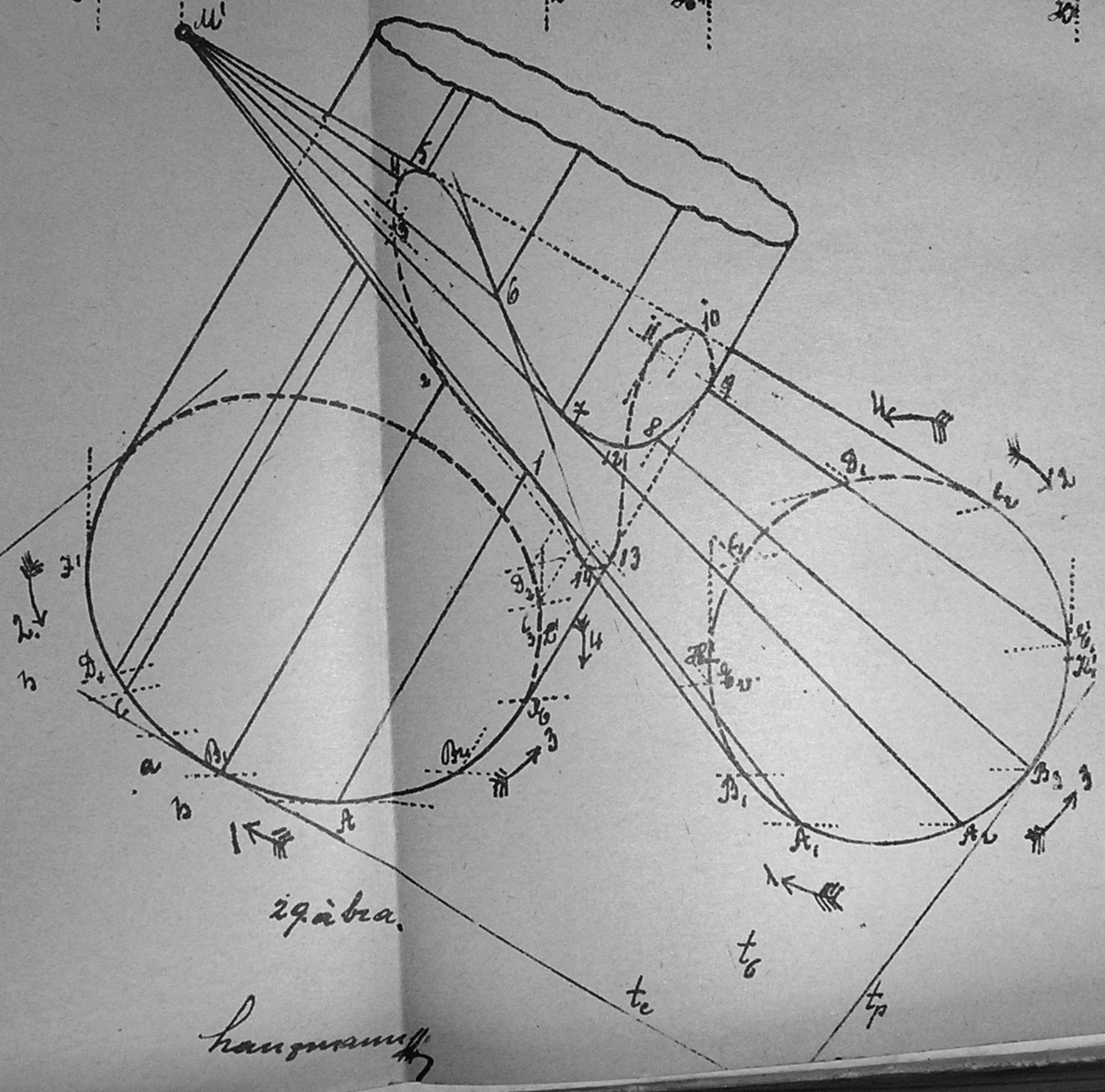
28. ábra

I. Lap.





28a. ábra.

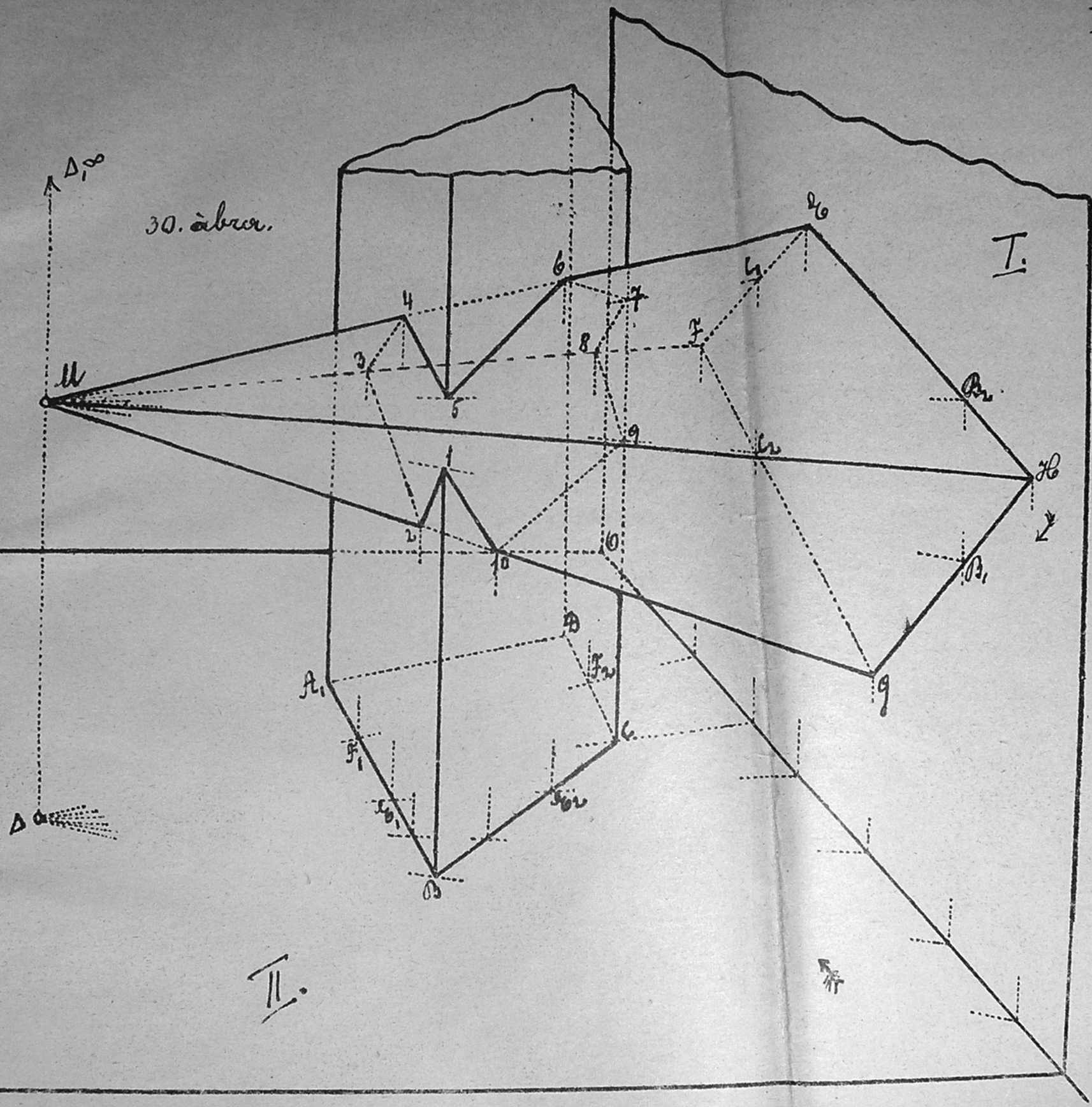


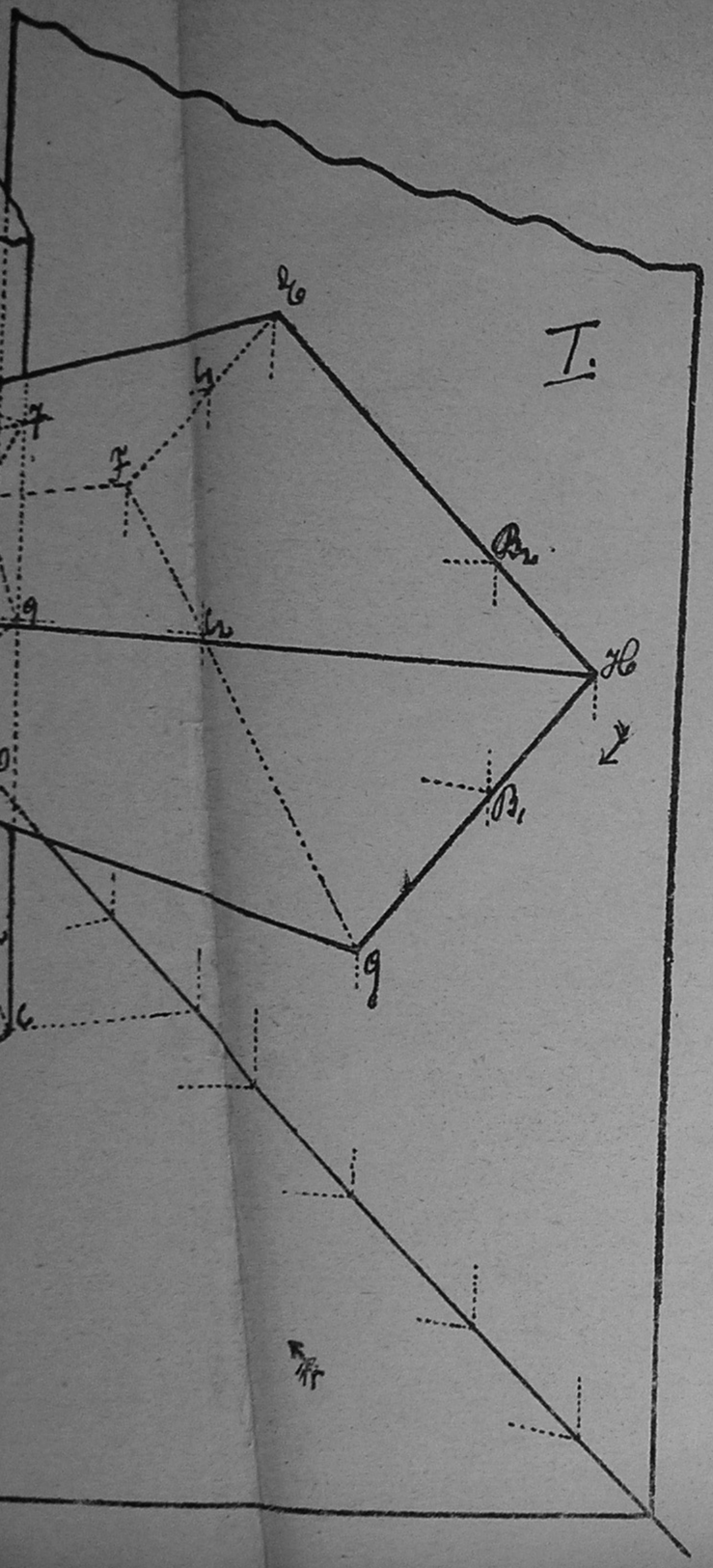
29. ábra.

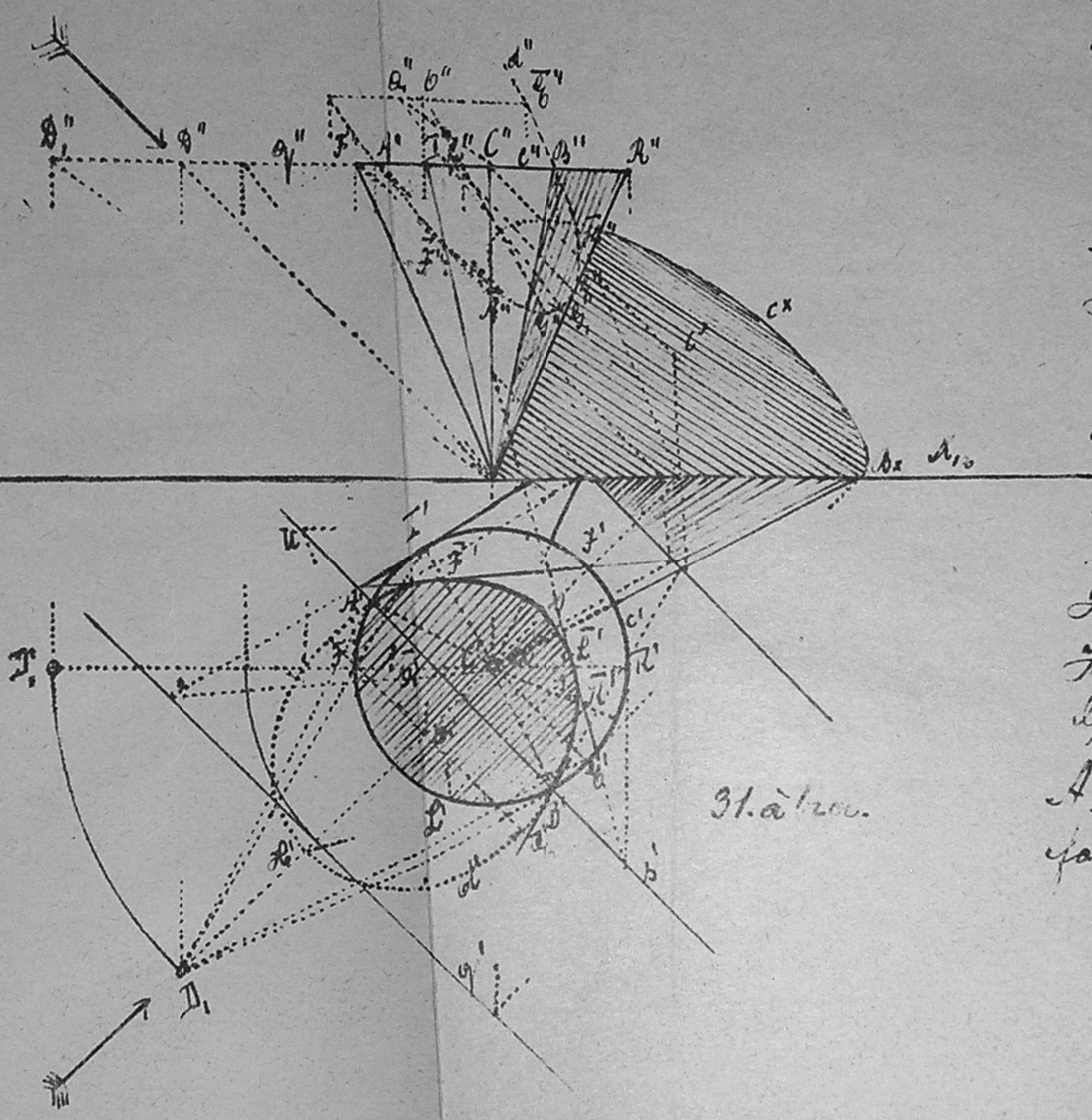
Hangyuanus

VI. Lap.

30. ábra.





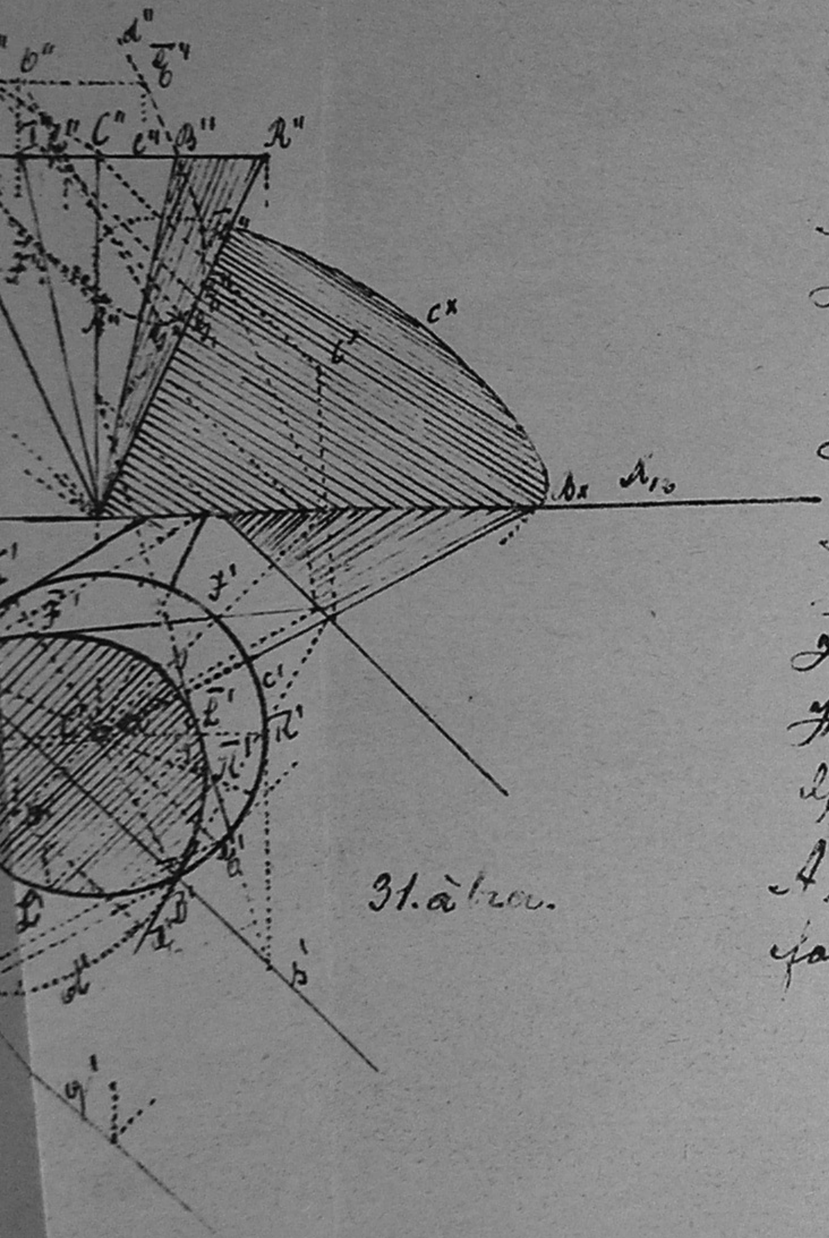


31. ábra.

Tartalom jeg

Bevezetés . . . . . .
Kifejthető felületen . . .
Érintősík fogalma . . . .
intősíkon szerkesztése kúp
Két kúp kölcsönös normalisáinak
A contour fogalma, kúpos
Kúpos síkmetszései, parab
metszés és körpárisági metszés.
Kúpfelület hálója . . . . .
A focális kúpszeletekről . .
Henger síkmetszései . . . . .
Henger fordemetszése a sík
Kúpon és hengeren áthat
ívala és hasáb áthatása
A metszési görbén különbö
szerkesztett speciális esetek

Kolozsvár 1909. decemb



31. ábra.

Tartalom jegyzék.

Bevezetés ..... 2. oldal
Kifejthető felületen ..... 3. oldal.
Érintősík fogalma ..... 4. oldal.
Érintősíkok szerkesztése kúpos hengerhez ... 4.5. oldal.
Két kúp közös normálisának szerkesztése 7. oldal.
A contour fogalma, kúp contourja 8. oldal.
Kúpon síkmetszései, parabola, hyperbola ellipsis-
metszés és tőrperemi metszés ..... 10—26. oldal.
Kúpfelület hálója ..... 26 oldal—32 oldal
A fociális kúpszeletekről ..... 32—34 oldal.
Hengermetszések ..... 35—40 oldal.
Henger fedőmetszése a lá[illegible] ..... 41—50 oldal.
Kúpon és hengeren áthatása ..... 50—57 oldal.
Gúla és hasáb áthatása ..... 57—58 oldal.
A nyílt térben különböző fajú [illegible] 58—69 oldal.
fangásnélkül vett s beoxtelt ármyelvűkat [illegible] 69—72 old.

Kolozsvár 1909. december 22én.

Baumann Ilk