AZ ÁLTALÁNOS ÉS NÉGY KÜLÖNÖS

PASCAL-HATSZÖG CONFIGURATIÓJA.

IRTA

DR. KLUG LIPÓT.

KOLOZSVÁR

AJTAI K. ALBERT KÖNYVNYOMDÁJA

1898.

Különlenyomat az Orvos-Természettud. Értesítő 1897. évi II—III füzetéből.

Előszó.

E sorok czélja teljes és könnyen áttekinthető képet nyújtani a PASCAL-hatszöggel kapcsolatos configuratiókról és így annak tanulmányozását előmozdítani, újabb kutatásokra serkenteni.

Tudomásom szerint az utolsó nagy értekezés tárgyunkról VERONESE-től származik e czimen: »Nuovi teoremi sull' hexagrammum mysticum«, Reale Accademia dei Lincei, anno CCXXIV. (1876—1877). Értekezése felöleli a különböző folyóiratokban, akadémiai értekezésekben és tankönyvekben e tárgyra vonatkozó tananyagot, de legnagyobb része egészen új vizsgálatokat tartalmaz. Azonban a tőle használt jelölés nem elég áttekinthető, úgy hogy művének tanulmányozása nem kis fáradsággal jár.

Jelen értekezésemben a syntheticus geometria kárára korán elhunyt SCHRÖTER tanárnak a »Theorie der Kegelschnitte« czímű művében használt jelölést alkalmaztam, de a kis-betűket nagybetűkkel cseréltem fel.

Ez a jelölés a configuratiót áttekinthetőbbé és azt is lehetővé teszi, hogy az itt előforduló nagyszámú pontot és egyenest tetszésünk szerint kezelhessük.

Értekezésem azonban új dolgokat is tartalmaz, melyek VERONESE értekezésében nincsenek meg.

Először is a VERONESE-től Y-nal jelölt négyoldalakat, de különösen az y-nal jelölt négyszögeket vizsgáltam meg részletesen kölcsönös helyzetükre nézve.

Egészen újaknak tekintendők azok az $_i[Vv]$ configuratiók, melyek a Veronese $[Vv]_i$ configuratióival (ő $[Zz]_i$-vel jelölte) bizonyos tekintetben *dualisan* állíthatók szembe.

Újak egyszersmind a tizenöt D háromszögről szóló vizsgálatok, mely D háromszögek a Veronese Δ háromszögeinek dualisan felelnek meg.

Az általános Pascal-hatszög képezte configuratiónak tárgyalását még kiegészítettem négy *különös* Pascal-*hatszög* helyzeti viszonyának megvizsgálásával. E hatszögeknél egyszer négy, kétszer négy, háromszor négy és egyszer három, végre háromszor négy és egyszer hat Pascal-*egyenes* és ugyanannyi Kirkman pont egy-egy egyenessé, illetve ponttá egyesül.

Úgy tudom, hogy e különös hatszögek felismerése és reájuk vonatkozó vizsgalataim is egészen újak.

Kolozsvárt, 1897 júl. 27-én.

A Szerző.

TARTALOMJEGYZÉK.

I. AZ ÁLTALÁNOS PASCAL-HATSZÖGRŐL.

Bevezetés.

A PASCAL-hatszöggel kapcsolatos configuratiókkal számos kiváló geometer foglalkozott e században. STEINER[1] volt az első, a ki ama hatvan PASCAL-*egyenes* helyzetét megvizsgálta, a melyeket a teljes PASCAL-hatszögből származó hatvan egyszerű PASCAL-hatszög nyújt, és azt találta, hogy: a teljes PASCAL-hatszög hatvan PASCAL-egyenese egymást hármasával husz pontban, az úgynevezett husz STEINER-*pontban* metszi.

PLÜCKER[2] kimutatta, hogy a husz STEINER-pont négyesével tizenöt egyenesen, úgynevezett STEINER-*egyenesen* fekszik.

A husz STEINER-pont és tizenöt STEINER-egyenes HESSE[3] szerint egy $(15_4, 20_3)$ configuratio, vagyis olyan configuratio, a melyet három, páronként ugyanegy középpontra perspectivás helyzetű háromszög a szögpontokat vetítő három sugárral és a három collineatiotengelylyel együtt képez.

HESSE,[4] GROSMAN[5], STAUDT[6] és BAUER[7] különböző úton bebi-

[1] Annales de Gergonne, T. XVIII, 1828. és »Systematische Entwickelung etc.« 311. lap.

[2] »Ueber ein neues Princip der Geometrie«. CRELLE 's Journal, Bd. V. P. 275.

[3] »Eine Bemerkung zum PASCAL'-schen Theorem«. CRELLE 's Journal, Bd. XLI. P. 269.

[4] »Ueber das geradlinige Sechseck auf dem Hyperboloid«. CRELLE 's Journal, Bd. XXIV, p. 40.

[5] »Ueber eine neue Eigenschaft der STEINER'schen Gegenpunkte«. CRELLE 's Journal, Bd. LVIII, p. 174.

[6] »Ueber die STEINER'schen Gegenpunkte etc.« CRELLE 's Journal, Bd. LXII, p. 142.

[7] »Ueber das PASCAL'sche Theorem«. Abhandl. der k. bayer. Akad. d. W. Bd. XI, 3. Abth. 1874.

zonyították, hogy a húsz Steiner-pont tíz pár *kapcsolt polus* arra a kúpszeletre vonatkozólag, a mely a Pascal-hatszög körül írható. E tíz pontpárt Hesse elnevezte Steiner-*ellenpontok*-nak.

Az eddigelé említett német geometerek vizsgálatait Kirkman, Cayley és Salmon angol tudósok újabb tételekkel egészítették ki, melyek olyanoknak tűntek fel, mintha az előbbiekből a *dualitas elve* szerint következnének. Kirkman ugyanis azt találta, hogy a hatvan Pascal-egyenes egymást a húsz Steiner-ponton kivűl még hatvan pontban, úgynevezett Kirknan-*pontban*, metszi. Cayley [1] kimutatta, hogy e hatvan Kirkman-pont hármasával húsz egyenesen, a húsz Cayley-*egyenesen*, fekszik; s végre Salmon [2] bebizonyította, hogy a húsz Cayley-*egyenes* négyesével tizenöt ponton megy keresztül, melyeket jelenleg Salmon-*pontoknak* neveznek. A húsz Cayley-egyenes és a tizenöt Salmon-pont egy $(20_3, 15_4)$ configuratio, mely dualis alakzata a $(15_4, 20_3)$ configuratiónak, s melyet három, páronként ugyanarra a collineatio-tengelyre perspectivás háromszög képez.

Ámde a Kirkman-pontok, Cayley-egyenesek és Salmon-pontok nem polaris-reciprocus alakzatai a Pascal-egyeneseknek, Steiner-pontoknak és Steiner-egyeneseknek a Pascal-hatszög körül írt kúpszeletre vonatkozólag, sem egy más kúpszeletre vonatkozólag, a mint azt Hesse [3] gondolta. Sőt kimutatható, hogy a Kirkman-pontok és Pascal-egyenesek még az általános reciprocus vonatkozás, a correlatio esetében sem lehetnek egymásnak megfelelők, mint Schröter [4] gyanítá; mert kimutatható, hogy négy, egymást egy pontban (Pascal-pontban) metsző Pascal-egyeneshez oly négy Kkirman-pont tartozik, a mely nem fekszik ugyanegy egyenesben.

A teljes Pascal-hatszögnek eddig említett tulajdonságai még mindig nem nyújtanak áttekinthető képet a Pascal-egyenesek és Kirkman-pontok kölcsönös helyzetéről, mert a configuratiónak csak igen kis részéről szerzünk tudomást, ha azt látjuk, hogy három

[1] »Sur quelques théoremes de la geometrie de position«. Crelle's Journal, Bd. XXXI. und XXXIV.

[2] Salmon-Fiedler, Analytische Geometrie der Ebene.

[3] »Ueber die Reciprocität der Pascal-Steiner'schen und Kirkman-Cayley-Salmon'schen Sätze etc.« Crelle's Journal, Bd. LXVIII, p. 193.

[4] Theorie der Kegelschnitte. 1876. 218. lap.

PASCAL-egyenes egy STEINER-ponton megy keresztűl, és három KIRKMAN-pont egy CAYLEY-egyenesen fekszik. Ámde BAUER [1] kimutatta, hogy »tíz PASCAL-egyenes és tíz hozzájuk tartozó KIRKMAN-pont egy DESARGUES-*configuratiót* (10_3, 10_3) képez, és hogy a hatvan PASCAL-egyenes és hatvan KIRKMAN-pont hat ily DESARGUES-configuratióra bomlik«. E hat DESARGUES-configuratio pedig következő módon csatlakozik a STEINER-pontokból és egyenesekből, valamint a CAYLEY-egyenesekből és SALMON-pontokból képezett HESSE-configuratiókhoz, a $H=(15_4, 20_3)$ és $H'=(20_3, 15_4)$-hez: »A H configuratio felbomlik hat teljes ötoldalra, melynek oldalai és szögpontjai STEINER-egyenesek és STEINER-pontok; hasonlókép a H' configuratio felbomlik hat teljes ötszögre, melynek szögpontjai és oldalai SALMON-pontok és CAYLEY-egyenesek. A PASCAL-egyenesekből és KIRKMAN-pontokból álló hat DESARGUES-configuratio mindenike amaz ötoldalak egyike körűl és amaz ötszögek egyikébe van beírva«.

VERONESE [2] végtelen sok oly configuratiót $[Vv]_i$ talált, mint a PASCAL-egyenesekből és KIRKMAN-pontokból álló, melyeknek mindenike hatvan v_i egyenest és hatvan V_i pontot tartalmaz. Mindezen configuratiókban a V_i-pontok hármasával a CAYLEY-egyeneseken fekszenek, és a v_i-egyenesek hármasával a STEINER-pontokon mennek keresztűl, s végre mindenike e $[Vv]_i$-configuratióknak hat DESARGUES-configuratióra bomlik.

A $[Vv]_i$-configuratiók azonban abban különböznek a PASCAL-egyenesek és KIRKMAN-pontok képezte configuratiótól, hogy az utóbbiakban a hatvan PASCAL-egyenes egymást négyesével negyvenöt pontban (G-vel jelölendő PASCAL-pontokban) metszik, holott a $[Vv]_i$-configuratiók v_i-egyenesei ezt nem teszik.

A végtelen sok $[Vv]_i$-configuratión kivűl van azonban még más végtelen sok, melyeket $_i[Vv]$-vel jelölök és melyeket tudtommal még eddig nem vizsgáltak. A $_i[Vv]$-configuratiók szintén hatvan $_iV$ pontból és hatvan $_iv$ egyenesből állanak, melyek hármasával a CAYLEY egyeneseken fekszenek, illetve a STEINER-pontokon mennek keresztűl, és ugyancsak mind hat DESARGUES-configuratióra bomlanak.

[1] Lásd a 103. old. 7. jegyzetét.

[2] Nuovi teoremi sull' Hexagrammum mysticum. Reale Accademia dei Lincei, vol. CCLXXIV. (1876—77.)

E configuratiók elsejének, t. i. ${}_0[Vv]$-nek az a tulajdonsága, hogy a Pascal-egyenesekből és Kirkman-pontokból álló configuratióval bizonyos tekintetben dualisan szemben állítható. Ugyanis a hatvan ${}_0V$-pont itt négyesével negyvenöt egyenesen, ${}_0g$ egyenesen, fekszik úgy, a mint a hatvan Pascal-egyenes egymást négyesével a negyvenöt G pontban metszi.

A negyvenöt ${}_0g$ egyenes tizenöt D háromszögnek oldala, melyeknek csak tizenöt szögpontjuk van úgy, a mint a negyvenöt G pont tizenöt Δ háromszögnek szögpontja, a melyeknek csak tizenöt oldaluk van; az utóbbiak egyszersmind a teljes Pascal-hatszögnek tizenöt oldala.

A tizenöt D háromszög a tizenöt Δ háromszöggel a Salmon-pontokra és a Steiner-egyenesekre, mint collineatio-középpontra és tengelyre, perspectivás; a megfelelő oldalpárok egymást negyvenöt Y pontban metszik, és a megfelelő szögpontpárok összekötő egyenesei negyvenöt y egyenest adnak.

Már Veronese észrevette, hogy a mondott Y pontok és y egyenesek a $[Vv]_i$-configuratiókkal szorosan összefüggnek, a mennyiben mindenik Y-ponton két egyenes megy keresztűl, a melyen két V_{2i} és két V_{2i+1} fekszik, és mindenik y egyenesen két oly pont van, a melyekben két v_{2i+1} és két v_{2i+2} egyenes egymást metszi.

Ugyanez mondható egyszersmind a ${}_i[Vv]$-configuratiók pontjairól és egyeneseiről is, t. i.: két ${}_{2i+1}V$ és két ${}_{2i+2}V$ pont mindig ugyanegy egyenesben fekszik egy Y ponttal, és két ${}_{2i}v$, valamint két ${}_{2i+1}v$ egyenes egy y egyenesen találkozik.

A következőkben szándékunk a Pascal-hatszöggel kapcsolatos configuratiónak itt tömören előadott tulajdonságait kimutatni és a nyert tételeket négy nevezetes *különös* Pascal-*hatszögre* alkalmazni.

Az utóbbi hatszögek szögpontjai a kúpszeleten egy-, két-, három- vagy négyfélekép képeznek involutiót. Látni fogjuk, hogy ezekhez az involutiókhoz tartozó involutio-tengelyek és középpontok mindig többszörös Pascal-egyenesek és Kirkman-pontok; továbbá, hogy azok a $[Vv]_j$, ${}_j[Vv]$ configuratiókban is többszörös egyenesek és pontok lesznek.

1. Pascal tétele.

1. Pascal műveiben[1] olvasható a következő tétel:

»Ha két, egy kör síkjában fekvő pontból M és S-ből szelőket húzunk a körhez, melyek azt a K, P, illetve a Q, V pontokban metszik, és ha az MV, SK egyeneseknek második metszőpontjai a körrel az O, N pontok, akkor a PQ, NO, MS egyenesek ugyanegy ponton mennek keresztül. A tétel akkor is igaz marad, ha a kört egy kúpszelettel helyettesítjük«. (5. ábra.)

Pascal-nak e híres tételét jelenleg a következőkép szokás kifejezni:

Egy kúpszeletbe írt hatszög szemben fekvő oldalai egymást három, ugyanegy egyenesen fekvő pontban metszik.

A kúpszeletbe írt hatszöget Pascal-*hatszögnek*, azt az egyenest, a melyben a hatszög szemben fekvő oldalai egymást metszik, Pascal-*egyenesnek* nevezik. Azokat a pontokat, melyben a kúpszeletbe írt hatszög szemben fekvő oldalai egymást metszik, Veronese-vel Pascal-*pontok*-nak fogjuk nevezni.

A tételt, melynek bizonyítása Pascal műveiben nem található, Steiner szerint legegyszerűbben bizonyíthatjuk be, ha a kúpszeletet két általános helyzetű projectiós sugársor képződményének tekintjük. Ha a kúpszeletbe írt hatszög szögpontjait ABCDEF betűkkel (2. ábra), az AB, DE; BC, EF; CD, FA; ED, AF; CD, EF egyenespárok metszőpontjait L, M, N, I, K_1-gyel jelöljük, akkor

$$C(EFDB) \barwedge A(EFDB)\text{-ből}$$
$$(EFK_1M) \barwedge (EIDL).$$

Minthogy az EF, ED egyeneseken fekvő projectiós pontsorok

$$EFK_1M\ .\ .\ .\ ,\ EIDL\ .\ .\ .$$

perspectivás helyzetűek, mert E-ben megfelelőleg közös pontjuk van, az FI, K_1D, ML egyenesek, vagy a mi ugyanazt fejezi ki, az FA, CD, ML egyenesek egymást egy pontban metszik. Minthogy azonban FA, CD a hatszögnek két szembe fekvő oldala, az M, L pontok pedig a BC, EF; AB, DE szemben fekvő oldalaknak metszőpontjai,

[1] Essai sur les coniques. — Oeuvres complètes. (1640.)

következik, hogy az ABCDEF hatszögnek szemben fekvő oldalai egymást egy egyenesen fekvő pontokban metszik.

A tétel meg is fordítható, t. i.: Ha egy hatszög szemben fekvő oldalainak metszőpontjai egy egyenesben fekszenek, akkor annak szögpontjai egy kúpszeletnek (vagy egy egyenespárnak) pontjai, mert közűlök négy szögpont a másik kettőből projectiós sugarakkal projiciálható.

Ugyanis az előbbi jelölést megtartva, ha

$$(EFK_1 M) \barwedge (EIDL),$$

akkor egyszersmind

$$C(EFDB) \barwedge A(EFDB).$$

2. Ha az ABCDEF teljes PASCAL-hatszög alább felsorolt oldalainak metszőpontjait következőkép jelöljük:

$$(BC, ED) = I_2, \quad (BC, AF) = I_1,$$
$$(AB, FE) = K_2, \quad (AB, CD) = K,$$

akkor látható, hogy az

$$I I_1 I_2, \quad K K_1 K_2$$

háromszögek perspectivásak, mert megfelelő oldalainak II_1, KK_1; $I_1 I_2$, $K_1 K_2$; $I_2 I$, $K_2 K$ metszőpontjai N, M, L, egy egyenesen fekszenek. Minthogy a meg nem felelő oldalaknak metszőpontjai az ABCDEF pontok, mondhatjuk: Ha két háromszög akkép van egymásra vonatkoztatva, hogy az egyik háromszög oldalainak a másik háromszögnek bizonyos oldalai felelnek meg és ha a meg nem felelő oldalak metszőpontjai egy kúpszeleten fekszenek, akkor a háromszögek perspectivásak, és így a megfelelő oldalaknak metszőpontjai egy egyenesen lesznek és fordítva:

Ha két háromszög perspectivás, akkor a meg nem felelő

oldalak metszőpontjai kúpszeleten fekszenek.	*szögpontokat összekötő egyenesek egy kúpszeletnek érintői.*

3. Hat általános helyzetű pont egy síkban hat szögpontja egy teljes hatszögnek, mely hatvan egyszerű hatszögre osztható fel. Ha ezen egyszerű hatszögek közül egynek szemben fekvő oldalai egymást egy egyenes pontjaiban metszik, akkor ama hatszögnek szögpontjai

egy kúpszeleten fekszenek és így a többi 59 egyszerű hatszögnek szemben fekvő oldalai egymást szintén egy-egy egyenesen metszik.

STEINER volt az első, a ki *a teljes* PASCAL-*hatszögből származó hatvan egyszerű* PASCAL-*hatszög* PASCAL-*egyenesei helyzeti viszonyának megállapítását tűzte ki vizsgálata tárgyáúl.*

2. A Steiner-ellenpontokról.

4. Jelöljük SCHRÖTER [1] szerint egy PASCAL-hatszögnek szögpontjait 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyekkel (1. ábra). Az 1 2 3 4 5 6 egyszerű hatszögnek szemben fekvő oldalai

$$12,\ 45;\quad 23,\ 56;\quad 34,\ 61$$

egymást egy PASCAL-egyenesben metszik, melyet mi p^{II}-vel, vagy 1 2 3 4 5 6-tal (tehát

$$p^{II} = 1\,2\,3\,4\,5\,6$$

-tal) jelölünk.

Ama 1 2 3 4 5 6 hatszögnek egymásra nem következő oldalai 1 2, 3 4, 5 6; és 2 3, 4 5, 6 1; valamint főátlói 1 4, 2 5, 3 6, három háromszögnek oldalait képezik, melyek ugyanegy collineatio-középpontra perspectivásak.

Ugyanis az

$$\begin{matrix} 12 & 34 & 56 \\ 45 & 61 & 23 \\ 36 & 25 & 14 \end{matrix}$$

háromszögek közűl a két első perspectivás, minthogy megfelelő oldalainak metszőpontjai a $p^{II} = 1\,2\,3\,4\,5\,6$ PASCAL-egyenesen fekszenek, és a megfelelő szögpontoknak összekötő egyenesei

$$\begin{aligned} \pi^{IV} &= (1\,2,\ 3\,4)\ (4\,5,\ 6\,1) \\ \pi^{V} &= (1\,2,\ 5\,6)\ (4\,5,\ 2\,3) \\ \pi^{VI} &= (3\,4,\ 5\,6)\ (6\,1,\ 2\,3) \end{aligned}$$

egymást a II collineatio-középpontban metszik.

Ámde

az 1 6 3 4 5 2 PASCAL-hatszög miatt (5 2, 3 6) pont a π^{IV} egyenesen fekszik,
az 1 2 3 6 5 4 » » (3 6, 1 4) pont a π^{V} » »
az 1 4 3 2 5 6 » » (1 4, 2 5) pont a π^{VI} » »

[1] L. a 104. oldalon id. m. 133. oldalát.

és így a harmadik háromszög a két első iránt szintén perspectivás. A származó két új collineatio-tengely $p^{III} = 1\,4\,3\,6\,5\,2$, $p^{I} = 1\,6\,3\,2\,5\,4$, a p^{II} collineatio-tengelyt egy P pontban metszi.

Megjegyezhető még, hogy az

12	45	36
56	23	14
34	61	52

háromszögek szintén perspectivásak, még pedig a P collineatio-középpontra; a collineatio-tengelyek a π^{IV}, π^{V}, π^{VI} egyenesek, és a szögpontokat projiciáló sugarak a p^{I}, p^{II}, p^{III} egyenesek.

E szerint mondhatjuk:

»Ha egy Pascal-hatszög szögpontjai 1, 2, 3, 4, 5, 6, akkor az

1 2 3 4 5 6
1 4 3 6 5 2
1 6 3 2 5 4

és az

1 2 3 6 5 4
1 6 3 4 5 2
1 4 3 2 5 6

egyszerű Pascal-hatszögeknek Pascal-egyenesei egy P, illetve egy Π pontban metszik egymást«.

E két P és Π pontot együttesen egy pár Steiner-*ellenpontnak* vagy egy Steiner-*ellenpontpárnak*, külön-külön pedig Steiner-*pontnak* nevezik.

Ha szemügyre vesszük az előbbi hat Pascal-hatszöget, azt látjuk, hogy a páratlan helyen álló szögpontok 1, 3, 5, mind a hat hatszögnél ugyanazok; ellenben a páros helyen levő szögpontok 2, 4, 6, az első csoportnál előrehaladólag, a másodiknál visszafelé haladólag vannak cyclicusan felcserélve. Ugyancsak ezeket a hatszögeket nyerjük akkor is még, ha a páros helyen levő szögpontokat hagyjuk változatlanúl, és a páratlan helyen levőket cseréljük fel előre- és visszafelé haladólag cyclicusan.

Minthogy hat elemből három elemet húszféleképp lehet kiválasztani: egy teljes Pascal-hatszögből tíz pár Steiner-ellenpont származtatható le, vagyis:

Egy teljes PASCAL-*hatszög hatvan* PASCAL-*egyenese egymást hármasával húsz* STEINER-*pontban metszi, mely tíz pár* STEINER-*ellenpontot képez.*

5. *Egy pár* STEINER-*ellenpont kapcsolt poluspár arra a kúpszeletre vonatkozólag, mely a* PASCAL-*hatszög körűl írható.*

E tételt HESSE[1] állította föl és egy stereometriai tétel segélyével bizonyította be.

Vegyünk fel három egyenest $g_1\, g_3\, g_5$-öt, melyek közűl egyik sem metszi a másik kettőt és legyen $h_2\, h_4\, h_6$ három egyenes, mely amazok mindenikét metszi. Jelöljük a g_i, h_j egyenesek metszőpontját $(g_i\, h_j)$-vel, a g_i, h_j-n keresztül menő síkot $[g_i\, h_j]$-vel.

A $(g_i\, h_j)$, $(g_k\, h_l)$ pontok összekötő egyenese és a $[g_i\, h_l]$, $[g_k\, h_j]$ síkok metszővonala ugyanegy egyenes, vagyis

$$(g_i\, h_j)\,(g_k\, h_l) \equiv [g_i\, h_l]\,[g_k\, h_j]$$

és a

$$(g_i\, h_j)\,(g_k\, h_l)\,(g_m\, h_n),\quad [g_i\, h_j]\,[g_k\, h_l]\,[g_m\, h_n]$$

sík és pont egymásnak polárissíkja, illetőleg polus a $g_1\, g_3\, g_5\, h_2\, h_4\, h_6$ egyeneseken keresztül menő φ másodrendű felületre nézve.

Ha

$$\begin{array}{ll}
(g_1\, h_4)\,(g_3\, h_6)\,(g_5\, h_2) \equiv \rho' & [g_1\, h_4]\,[g_3\, h_6]\,[g_5\, h_2] \equiv R' \\
(g_1\, h_6)\,(g_3\, h_2)\,(g_5\, h_4) \equiv \rho'' & [g_1\, h_6]\,[g_3\, h_2]\,[g_5\, h_4] \equiv R'' \\
(g_1\, h_2)\,(g_3\, h_4)\,(g_5\, h_6) \equiv \rho''' & [g_1\, h_2]\,[g_3\, h_4]\,[g_5\, h_6] \equiv R''' \\
(g_1\, h_6)\,(g_3\, h_4)\,(g_5\, h_2) \equiv \sigma' & [g_1\, h_6]\,[g_3\, h_4]\,[g_5\, h_2] \equiv S' \\
(g_1\, h_4)\,(g_3\, h_2)\,(g_5\, h_6) \equiv \sigma'' & [g_1\, h_4]\,[g_3\, h_2]\,[g_5\, h_6] \equiv S'' \\
(g_1\, h_2)\,(g_3\, h_6)\,(g_5\, h_4) \equiv \sigma''' & [g_1\, h_1]\,[g_3\, h_6]\,[g_5\, h_4] \equiv S'''
\end{array}$$

kimutatható, hogy az $R'\,R''\,R'''$ pontok a $\sigma'\,\sigma''\,\sigma'''$ síkok metszővonalában és hasonlókép az $S'\,S''\,S'''$ pontok a $\rho'\,\rho''\,\rho'''$ síkok metszővonalában fekszenek, a miből mivel R', ρ'; R'', ρ''; . . . polus és polussík következni fog, hogy az

$$s \equiv R'\,R''\,R''' \equiv \sigma'\,\sigma''\,\sigma''', \quad r \equiv S'\,S''\,S''' \equiv \rho'\,\rho''\,\rho'''$$

egyenesek reciprocus-polárisok a φ felületre nézve.

[1] Ueber das geradliniege Sechseck auf dem Hyperboloid. CRELLE 's Journal, Bd. XXIV, vagy SCHRÖTER: »Theorie der Oberflächen II. Ord.« 117. old.

Ugyanis

az R′ pont a $[g_1 h_4]$ $[g_3 h_6] = (g_1 h_6)$ $(g_3 h_4)$ egyenesen,
az R″ » a $[g_3 h_2]$ $[g_5 h_4] = (g_3 h_4)$ $(g_5 h_2)$ »
az R‴ » a $[g_5 h_6]$ $[g_1 h_2] = (g_5 h_2)$ $(g_1 h_6)$ »

fekszik, mely utóbbiakon és így az R′R″R‴ pontokon a σ' sík keresztűl megy. Hasonló egyszerű úton kimutatható, hogy σ'', σ''' sík is keresztűl megy az R′R″R‴ pontokon és a $\rho' \rho'' \rho'''$ sík az S′S″S‴ pontokon.

A $g_1 g_3 g_5 h_2 h_4 h_6$ sugarak a következő hat hatlapot határozzák meg:

$g_1 h_2 g_3 h_4 g_5 h_6$ $\quad$ $g_1 h_2 g_3 h_6 g_5 h_4$
$g_1 h_4 g_3 h_6 g_5 h_2$ $\quad$ $g_1 h_6 g_3 h_4 g_5 h_2$
$g_1 h_6 g_3 h_2 g_5 h_4$ $\quad$ $g_1 h_4 g_3 h_2 g_5 h_6$,

melyek közűl az első háromnak és az utóbbi háromnak szemben fekvő lapjai (mint $[g_1 h_2]$, $[h_4 g_5]$) egymást megfelelőleg a $\rho' \rho'' \rho'''$, illetve a $\sigma' \sigma'' \sigma'''$ síkokban metszik.

Ezek után kimondhatjuk a következő *segédtételt:*

»Három egyenes, mely egymást páronként nem metszi, és három egyenes, mely az előbbieket metszi, hat rajtuk keresztűl menő hatlapot határoz meg, melyek mindenikének az a tulajdonsága van, hogy a szemben fekvő lapjaik metszővonalai egy síkban fekszenek. E síkok közűl bármelyik három és a másik három egymást egy-egy egyenesben metszi, a mely egyenesek reciprocus-polárisok a hat felvett egyenesen keresztűl fektetett II. r. felületre nézve«.

Ha ezután a $g_1 g_3 g_5 h_2 h_4 h_6$ egyenesen keresztűl menő φ II. r. felületet, ama hat egyenest és a tőlük meghatározott hat hatlapot egy ε síkkal metszük, akkor ε-nak metszése φ-vel egy k kúpszelet; a $g_1 g_3$ . . . . egyenesekkel az 1 3 5 2 4 6 pont, mely k-n fekszik; a hat hatlap lapjaival, az

1 2 3 4 5 6 $\quad$ 1 2 3 6 5 4
1 4 3 6 5 2 $\quad$ 1 6 3 4 5 2
1 6 3 2 5 4 $\quad$ 1 4 3 2 5 6

Pascal-hatszögeknek oldala; azokkal a $\rho' \rho'' \rho''' \sigma' \sigma'' \sigma'''$ síkokkal, a melyekben a hatlapok szemben fekvő lapjai egymást metszik, ama Pascal-hatszögeknek r′ r″ r‴ s′ s″ s‴ Pascal-egyenese; végre azokkal az r, s egyenesekkel, a melyekben a $\rho' \rho'' \rho'''$ és $\sigma' \sigma'' \sigma'''$ síkok egymást metszik, az $r' r'' r'''$ és $s' s'' s'''$ PASCAL-egyeneseknek R és S metszőpontja, melyek egy STEINER-ellenpontpár. Minthogy az r, s egyenesek reciprocus-polárisok a φ felületre nézve, az R, S STEINER-ellenpontpár kapcsolt poluspár lesz a k kúpszeletre vonatkozólag.

6. A tételnek egy másik bebizonyítása STAUDT-tól[1] származik és a következő:

Ha két kúpszeletet collinearisan akarunk egymásra vonatkoztatni, akkor az egyik kúpszelet három pontjának megfelelő három pontot a másikon tetszés szerint vehetünk fel, s ez által az egyik kúpszelet minden pontjának egy határozott pont felel meg a másik kúpszeleten.[2]

Vonatkoztassuk az 1 2 3 4 5 6 PASCAL-hatszög körül írt kúpszeleletet önmagára az által, hogy az 1 3 5 pontjaihoz a 2 4 6 pontokat rendeljük. Tudvalevőleg megfelelő pontoknak érintői a collinearis vonatkozásban szintén megfelelők, valamint megfelelő egyeneseknek metszőpontjai is. Ebből pedig az következik, hogy annak az x egyenesnek, melyben az 1 3 5 pontok érintői az 1 3 5 háromszög 3 5 5 1 1 3 oldalait metszik, az az y egyenes fog megfelelni, melyben a 2 4 6 pont érintői a 2 4 6 háromszög 4 6 6 2 2 4 oldalait metszik. Ennélfogva az x és y megfelelő egyeneseknek képzetes metszőpontjai X, X_1, illetve Y, Y_1 szintén megfelelők.

Minthogy

$$135\, X X_1 \;\overline{\wedge}\; 246\, Y Y_1,$$

azért az

$$(14,\ 23),\ (36,\ 45),\ (16,\ 25),\ (X Y_1,\ X_1 Y)$$

pontok ugyanegy egyenesen fekszenek.[3] De az első három pont a $p^{I} = 163254$ PASCAL-egyenesen van; ennélfogva a p^{I} egyenes keresztűl megy a

$$P = (X Y_1,\ X_1 Y)$$

ponton.

Ha ellenben a k kúpszelet pontjait akkép vonatkoztatjuk egymásra, hogy az 1 3 5 pontoknak egyszer a 4 6 2, másszor a 6 2 4

[1] Über die STEINER'schen Gegenpunkte. CRELLE 's Journal, Bd. LXII.
[2] STAUDT: Geometrie der Lage §. 20. 149. oldal.
[3] KLUG: Projectiv geometria 102. oldal, 84. pont.

pontok felelnek meg, akkor az x, y egyenesek és az X, X_1; Y, Y_1 pontok változatlanok maradnak, tehát ismét

$$135\ X X_1 \barwedge 462\ Y Y_1$$
$$135\ X X_1 \barwedge 624\ Y Y_1$$

és a $p^{II} = 123456$, $p^{III} = 143652$ PASCAL-egyenesek szintén keresztül mennek a

$$P = (X Y_1,\ X_1 Y)$$

ponton.

Ha folytatólag a k kúpszelet pontjait akkép vonatkoztatjuk egymásra, hogy az 135 pontoknak a 264 vagy 642, végre a 426 pontok feleljenek meg, melyeknek sora a 246 pontokkal ellenkező értelműleg halad, akkor az x, y egyenesek még mindig megfelelők maradnak, de az X, X_1 pontoknak az Y_1, Y pontok feleljenek meg.

Ennélfogva

$$135\ X X_1 \barwedge 264\ Y_1 Y$$
$$135\ X X_1 \barwedge 642\ Y_1 Y$$
$$135\ X X_1 \barwedge 426\ Y_1 Y,$$

a miből, mint előbb, következik, hogy a

$$\pi^{VI} = 143256,\ \pi^{V} = 123654,\ \pi^{IV} = 163452$$

PASCAL-egyenesek a

$$\Pi = (X Y,\ X_1 Y_1)$$

ponton mennek keresztül.

Ámde a $p^I p^{II} p^{III}$ és $\pi^{VI} \pi^{V} \pi^{IV}$ PASCAL-egyenesek egymást a P, Π STEINER-ellenpontpárban metszik, mely mint a k kúpszeletbe írt $X X_1 Y Y_1$ képzetes négyszögnek átlóspontpárja, k-ra vonatkozólag kapcsolt poluspár.

A tétel még a következő segédtétel alapján is bebizonyítható:

Ha az

$$X X_1,\ Y Y_1,\ Z Z_1,\ U U_1$$

pontpárok kapcsolt polusok egy kúpszeletre nézve, akkor a

$$V = (X Y,\ Z U),\quad V_1 = (X_1 U_1,\ Y_1 Z_1)$$
$$W = (X U,\ Y Z),\quad W_1 = (X_1 Y_1,\ Z_1 U_1)$$

pontpárok egyidejüleg vagy kapcsolt polusok, vagy nem kapcsolt polusok a kúpszeletre nézve.

Ennek kimutatása pedig következőkép történik:

Ha x y z u v w egyenesek az X Y Z U V W pontoknak polárisai, akkor az x y v és a z u v egyenesek egy-egy pontban találkoznak, mivel az X Y V és Z U V pontok egy-egy egyenesen fekszenek.

De az x y z u egyenesek az X Y Z U pontokhoz kapcsolt polusokon $X_1\, Y_1\, Z_1\, U_1$-en mennek keresztűl és a szerint, a mint V_1, V kapcsolt poluspár, vagy nem az: a V_1 pont a v egyenesen fekszik, vagy nem fekszik rajta.

Az első esetben az

$$\begin{array}{cc|cc|} x & y & X_1 & Y_1 \\ u & z & U_1 & Z_1 \end{array}$$

háromszögek a V_1 collineatio-középpontra vonatkozólag perspectivásak, tehát a

$$W_1 = (X_1 Y_1,\ U_1 Z_1)$$

pont az

$$|\ (x\,u),\ (y\,z)\ |$$

egyenesen van. Ez az egyenes azonban az $|\,X U\,|$, $|\,Y Z\,|$ egyenesek polusán megy keresztűl s, mint ilyen, a

$$W = (X U,\ Y Z)$$

pontnak polárisa w; ennélfogva ebben az esetben a w egyenes keresztűl megy a W_1-en, és így a W, W_1 pontok kapcsolt polusok lesznek.

Visszatérve az 1 2 3 4 5 6 Pascal-hatszöghez, legyen

$$X = (1\,4,\ 2\,3),\quad Y = (2\,3,\ 5\,6),\quad Z = (4\,5,\ 1\,2),\quad U = (3\,6,\ 4\,5)$$
$$X_1 = (1\,2,\ 3\,4),\ Y_1 = (3\,6,\ 2\,5),\ Z_1 = (2\,5,\ 1\,4),\ U_1 = (3\,4,\ 5\,6),$$

tehát

$$X Y = 2\,3,\ X_1 U_1 = 3\,4,\ X U = p^{I},\ X_1 Y_1 = \pi^{IV}$$
$$U Z = 4\,5,\ Y_1 Z_1 = 2\,5,\ Y Z = p^{II},\ Z_1 U_1 = \pi^{VI}.$$

Minthogy

$$(X Y,\ U Z) = (2\,3,\ 4\,5),\ (X_1 U_1,\ Y_1 Z_1) = (3\,4,\ 2\,5)$$

kapcsolt poluspár, egyszersmind

$$(X U,\ Y Z) = (p^{I}\, p^{II}) = P,\ (X_1 Y_1,\ Z_1 U_1) = (\pi^{IV}\, \pi^{VI} = II$$

kapcsolt poluspár lesz.

A következőkben a STEINER-ellenpontpárokat P, Π; $A_1, \mathbf{A}_1$; A_2, $\mathbf{A}_2$; A_3, $\mathbf{A}_3$; B_1, $\mathbf{B}_1$; B_2, $\mathbf{B}_2$; B_3, $\mathbf{B}_3$; C_1, Γ_1; C_2, Γ_2; C_3, Γ_3 betűkkel fogjuk jelölni; továbbá azokat a PASCAL-egyeneseket, melyek egymást e STEINER-pontokban metszik, ugyanilyen kis-betűkkel jelöljük s megkülönböztetésül még ellátjuk felső mutatókkal. (Lásd az I. táblát).

3. A Kirkman-pontokról.

7. *A teljes* PASCAL-*hatszög hatvan* PASCAL-*egyenese egymást hármasával a húsz* STEINER-*ponton kivűl még hatvan úgynevezett* KIRKMAN-*pontban metszi.*

Egy teljes hatszög 1 2 3 4 5 6 oldalainak száma $\binom{6}{2} = 15$, t. i.

12, 13, 14, 15, 16, 23, 24, 25, 26, 34, 35, 36, 45, 46, 56.

Ha ezek közűl az oldalak közűl SCHRÖTER[1] szerint kiválasztunk oly hatot, a melyek egy egyszerű PASCAL-hatszöget képeznek, akkor a megmaradt kilencz oldalból csak három oly egyszerű hatszöget alkothatunk, a melyek a teljes PASCAL-hatszögben előfordulnak; ez utóbbiaknak PASCAL-egyenesei egymást egy Kirkman-pontban metszik.

Ha pl. a fentebbi tizenöt hatszögoldalból az

1 2 3 4 5 6

hatszög oldalait kiválasztjuk, akkor a megmaradt kilencz oldalból a következő hatszögek és csakis ezek, alkothatók:

1 3 5 2 6 4
3 5 1 4 2 6
5 1 3 6 4 2,

mint a teljes 1 2 3 4 5 6 hatszögnek egyszerű hatszögei.

Ha e hatszögek szemben fekvő oldalainak metszőpontjait következőkép jelöljük:

$$(13, 26) = L_3, \quad (35, 64) = M_3, \quad (52, 41) = N_3$$
$$(35, 42) = L_2, \quad (51, 26) = M_2, \quad (14, 63) = N_2$$
$$(13, 42) = L_1, \quad (51, 64) = M_1, \quad (36, 52) = N_1$$

akkor látható, hogy ama hatszögek PASCAL-egyenesei:

$$L_3 M_3 N_3, \quad L_2 M_2 N_2, \quad L_1 M_1 N_1.$$

[1] L. a 104. oldalon id. m. 217. oldalát.

Ámde az $M_1 M_2 M_3$, $N_1 N_2 N_3$ háromszögek oldalai közűl

$M_1 M_2$,	$N_1 N_2$	egymást az	(5 1, 6 3)	pontban,
$M_2 M_3$,	$N_2 N_3$	» »	(2 3, 1 4)	»
$M_3 M_1$,	$N_3 N_1$	» »	(6 4, 5 2)	»

metszik, melyek, az 1 5 2 3 6 4 Pascal-hatszög szemben fekvő oldalainak metszőpontjai lévén, egy egyenesen $b_2^{I} = 1\,5\,2\,3\,6\,4$-en feküsznek.

Az $M_1 M_2 M_3$, $N_1 N_2 N_3$ háromszögek tehát perspectivásak, s a megfelelő szögpontokat összekötő $M_3 N_3$, $M_2 N_2$, $M_1 N_1$ egyenesek, vagyis ama három Pascal-hatszög Pascal-egyenesei:

$$\beta_3^{II} = 1\ 3\ 5\ 2\ 6\ 4$$
$$\beta_2^{II} = 1\ 4\ 2\ 6\ 3\ 5$$
$$\beta_1^{I} = 1\ 3\ 6\ 4\ 2\ 5$$

egymást egy Kirkman-*pontban*, $P^{II} = (\beta_1^{II}\beta_2^{II}\beta_3^{II})$-ban metszik.

E Kirkman-pontról, melyben az 1 2 3 4 5 6 hatszöggel közös oldalt egyet sem tartalmazó 1 3 5 2 6 4, 3 5 1 4 2 6, 5 1 3 6 4 2 Pascal-hatszögek Pascal-egyenesei egymást metszik, azt mondjuk (Schröter szavait használva), hogy a $p^{II} = 1\,2\,3\,4\,5\,6$ Pascal-egyeneshez van rendelve. Minthogy pedig ilyenformán minden Pascal-egyeneshez van egy Kirkman-pont V rendelve: *a* Kirkman-*pontok száma hatvan.*

4. A Pascal-egyenesekből és Kirkman-pontokból álló Desargues-configuratiók.

8. *Az egymást* Kirkman-*pontban metsző három* Pascal-*egyeneshez rendelt* Kirkman-*pontok abban a* Pascal-*egyenesben feküsznek, a melyhez az előbbi* Kirkman-*pont rendelve van.*

E tétel legegyszerűbben úgy bizonyítható be,[1] hogy előbb felírjuk azokat a Pascal-egyeneseket, melyek egy Pascal-egyeneshez rendelt Kirkman-ponton mennek keresztűl és aztán azt a kilencz Pascal-egyenest, melyek egymást a három Pascal-egyeneshez rendelt három Kirkman-pontban metszik, vagyis, hogy felírjuk a következő táblázatot:

[1] L. Veronese-nek a 101. oldalon id. munkája 17. oldalát.

$$p^{II}=1\,2\,3\,4\,5\,6 \left\{ \begin{array}{ll} \beta_3^{II}=1\,3\,5\,2\,6\,4 & \left\{ \begin{array}{l} a_3^{II}=1\,5\,6\,3\,4\,2 \\ p^{II}=5\,6\,1\,2\,3\,4 \\ c_3^{II}=6\,1\,5\,4\,2\,3 \end{array} \right. \\ \\ \beta_2^{II}=3\,5\,1\,4\,2\,6 & \left\{ \begin{array}{l} a_2^{II}=3\,1\,2\,5\,6\,4 \\ p^{II}=1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ c_2^{II}=2\,3\,1\,6\,4\,5 \end{array} \right. \\ \\ \beta_1^{II}=5\,1\,3\,6\,4\,2 & \left\{ \begin{array}{l} a_1^{II}=5\,3\,4\,1\,2\,6 \\ p^{II}=3\,4\,5\,6\,1\,2 \\ c_1^{II}=4\,5\,3\,2\,6\,1, \end{array} \right. \end{array} \right.$$

hol

a $\beta_3^{II}\,\beta_2^{II}\,\beta_1^{II}$ PASCAL-egyenesek a p^{II}-hez rendelt KIRKMAN-ponton P^{II}-n,
az $a_3^{II}\,p^{II}\,c_3^{II}$ » » β_3^{II} » » » B_3^{II}-n,
az $a_2^{II}\,p^{II}\,c_2^{II}$ » » β_2^{II} » » » B_2^{II}-n,
az $a_1^{II}\,p^{II}\,c_1^{II}$ » » β_1^{II} » » » B_1^{II}-n
mennek keresztűl.

Ebből látható, hogy a $\beta_1^{II}\,\beta_2^{II}\,\beta_3^{II}$ Pascal-egyenesekhez rendelt $B_1^{II}\,B_2^{II}\,B_3^{II}$ Kirkman-pontok a p^{II} egyenesen feküsznek.[1]

A fentebbi táblában tíz Pascal-egyenes fordúl elő, a melyet mind meghatároz a p^{II} egyenes. De ama tíz Pascal-egyenes bármelyike ugyanazon módon, mint p^{II}, meghatározza a többi kilenczet, a mit a következő táblázatból láthatunk:

$$\beta_3^{II}=1\,3\,5\,2\,6\,4 \left\{ \begin{array}{ll} a_3^{II}=1\,5\,6\,3\,4\,2 & \left\{ \begin{array}{l} c_2^{II}=1\,6\,4\,5\,2\,3 \\ \beta_3^{II}=6\,4\,1\,3\,5\,2 \\ c_1^{II}=4\,1\,6\,2\,3\,5 \end{array} \right. \\ \\ p^{II}=5\,6\,1\,2\,3\,4 & \left\{ \begin{array}{l} \beta_1^{II}=5\,1\,3\,6\,4\,2 \\ \beta_3^{II}=1\,3\,5\,2\,6\,4 \\ \beta_2^{II}=3\,5\,1\,4\,2\,6 \end{array} \right. \\ \\ c_3^{II}=6\,1\,5\,4\,2\,3 & \left\{ \begin{array}{l} a_2^{II}=6\,5\,2\,1\,3\,4 \\ \beta_3^{II}=5\,2\,6\,4\,1\,3 \\ a_1^{II}=2\,6\,5\,3\,4\,1. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

[1] Hesse úgy vélte, hogy azok a Pascal-egyenesek, melyek a $\beta_1^{II}\,\beta_2^{II}\,\beta_3^{II}$ Pascal-egyenesekhez rendelt Kirkman-pontokon mennek keresztűl, *egymástól*

E szerint a

$$p^{II}\beta_1{}^{II}\beta_2{}^{II}\beta_3{}^{II}a_1{}^{II}a_2{}^{II}a_3{}^{II}c_1{}^{II}c_2{}^{II}c_3{}^{II}$$

PASCAL-egyenesek mindegyikén' három KIRKMAN-pont fekszik, és e KIRKMAN-pontok mindegyikén három PASCAL-egyenes megy keresztül. E tíz PASCAL-egyenes tehát egymást a következő tíz

$$P^{II}B_1{}^{II}B_2{}^{II}B_3{}^{II}A_1{}^{II}A_2{}^{II}A_3{}^{II}\Gamma_1{}^{II}\Gamma_2{}^{II}\Gamma_3{}^{II}$$

KIRKMAN-pontban metszi s így egy DESARGUES-configuratiót $(10_3, 10_3)$ képez, melynek minden egyenese PASCAL-egyenes és minden pontja KIRKMAN-pont.

9. Induljunk ki egy másik PASCAL-hatszögből, pl. az 1 6 3 2 5 4-ből, melynek p^I PASCAL-egyenese az előbbi tíztől különbözik, s mely tehát ismét még új kilencz PASCAL-egyenest határoz meg. Ugyanígy lehet a $p^{III}\pi^{IV}\pi^{V}\pi^{VI}$ PASCAL-egyenesekkel kapcsolatos kilencz-kilencz PASCAL-egyeneset is meghatározni, vagyis az összes PASCAL-egyeneseket tízesével hat csoportba osztani, mint azt az I. táblázat a 120-ik oldalon mutatja.

E táblázatban a PASCAL-egyenesek akkép vannak hat csoportba osztva, hogy, ha bármely csoport első PASCAL-egyenesét collineatio-tengelynek tekintjük, akkor a következő három PASCAL-egyenes vetítősugara ama perspectivás háromszögek szögpontjainak, a melyeknek oldalait a következő három-három PASCAL-egyenes képezi.

Kimondhatjuk tehát a következő tételt: *Egy teljes* PASCAL-*hatszögnek hatvan* PASCAL-*egyeneséből (v) és hatvan* KIRKMAN-*pontjából (V) álló [Vv]-configuratio hat* DESARGUES-*configuratióra $(10_3, 10_3)$-ra oszlik.*

10. *Minden* STEINER-*ellenpontpáron keresztűl menő hat* PASCAL-*egyenes egy-egy* DESARGUES-*configuratióhoz tartozik.*

Ez kitűnik a 121-ik oldalon következő II. táblázatból, melyet a 4. pont értelmében az I. táblázatból képeztünk.

különbözők (CRELLE 's Journal, Jahrg. 1868, p. 193), a miért is nem találhatta meg azt a hat DESARGUES-configuratiót, a melyre a hatvan PASCAL-egyenes felbomlik.

5. A Cayley-egyenesekről.

11. Az előbbiek meggyőzhettek arról, hogy a hatvan Pascal-egyenes hármasával a húsz Steiner-ponton és hatvan Kirkman-ponton megy keresztül, továbbá hogy a hatvan Kirkman-pont hármasával a hat-

I.	II.	III.
$p^{I}=163254$	$p^{II}=123456$	$p^{III}=143652$
$\alpha_1^{I}=126435$	$\beta_1^{II}=136425$	$\gamma_1^{III}=135426$
$\alpha_2^{I}=135642$	$\beta_2^{II}=142635$	$\gamma_2^{III}=132645$
$\alpha_3^{I}=134265$	$\beta_3^{II}=135264$	$\gamma_3^{III}=164235$
$b_1^{I}=142563$	$c_1^{II}=145326$	$a_1^{III}=156432$
$b_2^{I}=152634$	$c_2^{II}=164523$	$a_2^{III}=165342$
$b_3^{I}=125364$	$c_3^{II}=154236$	$a_3^{III}=126543$
$c_1^{I}=165423$	$a_1^{II}=126534$	$b_1^{III}=152364$
$c_2^{I}=154326$	$a_2^{II}=125643$	$b_2^{III}=142536$
$c_3^{I}=164532$	$a_3^{II}=156342$	$b_3^{III}=145263$
IV.	**V.**	**VI.**
$\pi^{IV}=163452$	$\pi^{V}=123654$	$\pi^{VI}=143256$
$a_1^{IV}=146235$	$a_2^{V}=135246$	$a_3^{VI}=136245$
$b_1^{IV}=132465$	$b_2^{V}=162435$	$b_3^{VI}=135462$
$c_1^{IV}=135624$	$c_2^{V}=134625$	$c_3^{VI}=124635$
$\alpha_2^{IV}=165243$	$\alpha_3^{V}=154362$	$\alpha_1^{VI}=146532$
$\beta_2^{IV}=162534$	$\beta_3^{V}=125463$	$\beta_1^{VI}=156324$
$\gamma_2^{IV}=152346$	$\gamma_3^{V}=124536$	$\gamma_1^{VI}=145623$
$\alpha_3^{IV}=124563$	$\alpha_1^{V}=156234$	$\alpha_2^{VI}=125346$
$\beta_3^{IV}=145362$	$\beta_1^{V}=146523$	$\beta_2^{VI}=152436$
$\gamma_3^{IV}=154632$	$\gamma_1^{V}=165324$	$\gamma_2^{VI}=162543$

(I. táblázat.)

van Pascal-egyenesen fekszik. Vizsgáljuk most meg, *vajjon a hatvan* Kirkman-*pont nem fekszik-e szintén hármasával még más húsz egyenesen?*

A P STEINER-pontban egymást metsző p^{I}, p^{II}, p^{III} PASCAL-egyenesekhez rendelt P^{I}, P^{II}, P^{III} KIRKMAN-pontok metszőpontjai a következő PASCAL-egyeneseknek:

$$\alpha_1^{I} = 1\,2\,6\,4\,3\,5 \qquad \beta_1^{II} = 1\,3\,6\,4\,2\,5 \qquad \gamma_1^{III} = 1\,3\,5\,4\,2\,6$$
$$\alpha_2^{I} = 1\,3\,5\,6\,4\,2 \qquad \beta_2^{II} = 1\,4\,2\,6\,3\,5 \qquad \gamma_2^{III} = 1\,3\,2\,6\,4\,5$$
$$\alpha_3^{I} = 1\,3\,4\,2\,6\,5 \qquad \beta_3^{II} = 1\,3\,5\,2\,6\,4 \qquad \gamma_3^{III} = 1\,6\,4\,2\,3\,5.$$

STEINER-pontok,	a rajtuk keresztűl menő PASCAL-egyenesek	STEINER-pontok,	a rajtuk keresztűl menő PASCAL-egyenesek
P	p^{I}, p^{II}, p^{III}	Π	π^{IV}, π^{V}, π^{VI}
A_1	a_1^{IV}, a_1^{II}, a_1^{III}	$\mathbf{A}_1$	α_1^{I}, α_1^{V}, α_1^{VI}
B_1	b_1^{IV}, b_1^{III}, b_1^{I}	$\mathbf{B}_1$	β_1^{II}, β_1^{V}, β_1^{VI}
C_1	c_1^{IV}, c_1^{I}, c_1^{II}	Γ_1	γ_1^{III}, γ_1^{V}, γ_1^{VI}
A_2	a_2^{V}, a_2^{II}, a_2^{III}	$\mathbf{A}_2$	α_2^{I}, α_2^{VI}, α_2^{IV}
B_2	b_2^{V}, b_2^{III}, b_2^{I}	$\mathbf{B}_2$	β_2^{II}, β_2^{VI}, β_2^{IV}
C_2	c_2^{V}, c_2^{I}, c_2^{II}	Γ_2	γ_2^{III}, γ_2^{VI}, γ_2^{IV}
A_3	a_3^{VI}, a_3^{II}, a_3^{III}	$\mathbf{A}_3$	α_3^{I}, α_3^{IV}, α_3^{V}
B_3	b_3^{VI}, b_3^{III}, b_3^{I}	$\mathbf{B}_3$	β_3^{II}, β_3^{IV}, β_3^{V}
C_3	c_3^{VI}, c_3^{I}, c_3^{II}	Γ_3	γ_3^{III}, γ_3^{IV}, γ_3^{V}

(II. táblázat.)

De az

$$\alpha_1^{I}\,\beta_1^{II}\,\gamma_1^{III}, \quad \alpha_2^{I}\,\beta_2^{II}\,\gamma_2^{III}, \quad \alpha_3^{I}\,\beta_3^{II}\,\gamma_3^{III}$$

háromszögekről bebizonyíthatjuk, hogy azok páronkint perspectivásak. Ugyanis

az $(\alpha_1^{I}\ \beta_1^{II})$ $(\alpha_2^{I}\ \beta_2^{II})$ szögpontokat összekötő egyenes a c_3^{VI} PASCAL-egyenes
a $(\beta_1^{II}\ \gamma_1^{III})$ $(\beta_2^{II}\ \gamma_2^{III})$ » » » a_3^{VI} »
a $(\gamma_1^{III}\,\alpha_1^{I})$ $(\gamma_2^{III}\,\alpha_2^{I})$ » » » b_3^{VI} »

mert ezek az egyenesek a megfelelő (5 1, 6 4), (3 5, 4 2), illetőleg (1 3, 4 2), (5 1, 2 6) és (3 5, 2 6), (1 3, 6 4) PASCAL-pontokon mennek keresztűl.

Minthogy az utóbbi PASCAL-egyenesek egymást abban a Π^{VI} KIRKMAN-pontban metszik, mely a π^{VI} PASCAL-egyeneshez van rendelve: az $\alpha_1^{I}\,\beta_1^{II}\,\gamma_1^{III}$, $\alpha_2^{I}\,\beta_2^{II}\,\gamma_2^{III}$ háromszögek megfelelő oldalainak metszőpontjai, azaz a

$$P^{I}=(\alpha_1{}^{I}\alpha_2{}^{I}\alpha_3{}^{I}),\quad P^{II}=(\beta_1{}^{II}\beta_2{}^{II}\beta_3{}^{III}),\quad P^{III}=(\gamma_1{}^{III}\gamma_2{}^{III}\gamma_3{}^{III})$$

Kirkman-pontok ugyanegy p egyenesen fekszenek.

Ebből folyólag a következő tételhez jutunk:

Egy Steiner-*ponton keresztűl menő három* Pascal-*egyeneshez rendelt három* Kirkman-*pont egy egyenesen fekszik, melyet* a Steiner-*ponthoz rendelt* Cayley-*egyenesnek neveznek.*[1]

Minthogy a teljes Pascal-szög húsz Steiner-pontot határoz meg, a Cayley-egyenesek száma szintén húsz. E szerint:

A hatvan Kirkman-*pont hármasával a húsz* Cayley-*egyenesen fekszik.*

Jegyzet. Mi a következőkben a Cayley-egyeneseket ugyanazon, de kis betűkkel jelöljük, mint a Steiner-pontokat, a melyekhez rendelve vannak, és azokat a Cayley-egyeneseket, melyek egy-egy Steiner-ellenpontpárhoz rendelvék, Cayley-*ellenegyenesek*-nek nevezzük.

12. Az előbbiekből következik, hogy az $\alpha_1{}^{I}\beta_1{}^{II}\gamma_1{}^{III}$, $\alpha_2{}^{I}\beta_2{}^{II}\gamma_2{}^{III}$, $\alpha_3{}^{I}\beta_3{}^{II}\gamma_3{}^{III}$ háromszögek páronként a

$$p=(P^{I}P^{II}P^{III})$$

Cayley-egyenesre, mint collineatio-tengelyre vonatkozólag páronként perspectivásak; a vetítő sugarak az $a_1{}^{IV}b_1{}^{IV}c_1{}^{IV}$, $a_2{}^{V}b_2{}^{V}c_2{}^{V}$, $a_3{}^{VI}b_3{}^{VI}c_3{}^{VI}$ Pascal-egyenesek; a három collineatio-középpont a π Cayley-egyenesen fekvő

$$\Pi^{IV}=(a_1{}^{IV}b_1{}^{IV}c_1{}^{IV}),\quad \Pi^{V}=(a_2{}^{V}b_2{}^{V}c_2{}^{V}),\quad \Pi^{VI}=(a_3{}^{VI}b_3{}^{VI}c_3{}^{VI})$$

Kirkman-pont.

Ennélfogva:

Ama kilencz Pascal-*egyenes, mely egy* Cayley-*egyenesen fekvő három* Kirkman *ponton megy keresztűl, három, páronként perspectivás háromszögnek oldalait szolgáltatja. E háromszögek szögpontjait vetítő kilencz sugár* Pascal-*egyenes; a három collineatio-középpont* Kirkman-*pont; a rajtuk keresztűl menő egyenes az a* Cayley-*egyenes, mely a felvett* Cayley-*egyenessel együtt egy ellenegyenespárt képez.*

E configuratio egy Cayley-ellenegyenespárból, hat Kirkman-pontból és tizennyolcz Pascal-egyenesből áll. A teljes Pascal-hatszög tíz ilyen configuratióra oszlik; minden Pascal-egyenes három ilyen

[1] Crelle's Journal, XLI.

configuratióban fordúl elő; ellenben két ily configuratiónak négy közös PASCAL-egyenese van. (Lásd a III. táblázatot.)

13. *Minden* CAYLEY-*egyenes keresztűl megy azon a* STEINER-*ponton, mely a* CAYLEY-*egyeneshez rendelt* STEINER-*pontnak* STEINER-*ellenpontja.*

CAYLEY-egyenesek	a rajtuk fekvő KIRKMAN-pontok		
p	$P^{\mathrm{I}} = (\alpha_1^{\mathrm{I}}\, \alpha_2^{\mathrm{I}}\, \alpha_3^{\mathrm{I}})$	$P^{\mathrm{II}} = (\beta_1^{\mathrm{II}}\, \beta_2^{\mathrm{II}}\, \beta_3^{\mathrm{II}})$	$P^{\mathrm{III}} = (\gamma_1^{\mathrm{III}}\, \gamma_2^{\mathrm{III}}\, \gamma_3^{\mathrm{III}})$
a_1	$A_1^{\mathrm{IV}} = (\alpha_2^{\mathrm{IV}}\, \alpha_3^{\mathrm{IV}}\, \pi^{\mathrm{IV}})$	$A_1^{\mathrm{II}} = (c_2^{\mathrm{II}}\, c_3^{\mathrm{II}}\, \beta_1^{\mathrm{II}})$	$A_1^{\mathrm{III}} = (b_2^{\mathrm{III}}\, b^{\mathrm{III}}_3\, \gamma_1^{\mathrm{III}})$
a_2	$A_2^{\mathrm{V}} = (\alpha_3^{\mathrm{V}}\, \alpha_1^{\mathrm{V}}\, \pi^{\mathrm{V}})$	$A_2^{\mathrm{II}} = (c_3^{\mathrm{II}}\, c_1^{\mathrm{II}}\, \beta_2^{\mathrm{II}})$	$A_2^{\mathrm{III}} = (b_3^{\mathrm{III}}\, b_1^{\mathrm{III}}\, \gamma_2^{\mathrm{III}})$
a_3	$A_3^{\mathrm{VI}} = (\alpha_1^{\mathrm{VI}}\, \alpha_2^{\mathrm{IV}}\, \pi^{\mathrm{VI}})$	$A_3^{\mathrm{II}} = (c_1^{\mathrm{II}}\, c_2^{\mathrm{II}}\, \beta_3^{\mathrm{II}})$	$A_3^{\mathrm{III}} = (b_1^{\mathrm{III}}\, b_2^{\mathrm{III}}\, \gamma_3^{\mathrm{III}})$
b_1	$B_1^{\mathrm{IV}} = (\beta_2^{\mathrm{IV}}\, \beta_3^{\mathrm{IV}}\, \pi^{\mathrm{IV}})$	$B_1^{\mathrm{III}} = (a_2^{\mathrm{III}}\, a_3^{\mathrm{III}}\, \gamma_1^{\mathrm{III}})$	$B_1^{\mathrm{I}} = (c_2^{\mathrm{I}}\, c_3^{\mathrm{I}}\, \alpha_1^{\mathrm{I}})$
b_2	$B_2^{\mathrm{V}} = (\beta_3^{\mathrm{V}}\, \beta_1^{\mathrm{V}}\, \pi^{\mathrm{V}})$	$B_2^{\mathrm{III}} = (a_3^{\mathrm{III}}\, a_1^{\mathrm{III}}\, \gamma_2^{\mathrm{III}})$	$B_2^{\mathrm{I}} = (c_3^{\mathrm{I}}\, c_1^{\mathrm{I}}\, \alpha_2^{\mathrm{I}})$
b_3	$B_3^{\mathrm{VI}} = (\beta_1^{\mathrm{VI}}\, \beta_2^{\mathrm{VI}}\, \pi^{\mathrm{VI}})$	$B_3^{\mathrm{III}} = (a_1^{\mathrm{III}}\, a_2^{\mathrm{III}}\, c_3^{\mathrm{III}})$	$B_3^{\mathrm{I}} = (c_1^{\mathrm{I}}\, c_2^{\mathrm{I}}\, \alpha_3^{\mathrm{I}})$
c_1	$C_1^{\mathrm{IV}} = (\gamma_2^{\mathrm{IV}}\, \gamma_3^{\mathrm{IV}}\, \pi^{\mathrm{IV}})$	$C_1^{\mathrm{I}} = (b_2^{\mathrm{I}}\, b_3^{\mathrm{I}}\, \alpha_1^{\mathrm{I}})$	$C_1^{\mathrm{II}} = (a_2^{\mathrm{II}}\, a_3^{\mathrm{II}}\, \beta_1^{\mathrm{II}})$
c_2	$C_2^{\mathrm{V}} = (\gamma_3^{\mathrm{V}}\, \gamma_1^{\mathrm{V}}\, \pi^{\mathrm{V}})$	$C_2^{\mathrm{I}} = (b_3^{\mathrm{I}}\, b_1^{\mathrm{I}}\, \alpha_2^{\mathrm{I}})$	$C_2^{\mathrm{II}} = (a_3^{\mathrm{II}}\, a_1^{\mathrm{II}}\, \beta_2^{\mathrm{II}})$
c_3	$C_3^{\mathrm{VI}} = (\gamma_1^{\mathrm{VI}}\, \gamma_2^{\mathrm{VI}}\, \pi^{\mathrm{VI}})$	$C_3^{\mathrm{I}} = (b_1^{\mathrm{I}}\, b_2^{\mathrm{I}}\, \alpha_3^{\mathrm{I}})$	$C_3^{\mathrm{II}} = (a_1^{\mathrm{II}}\, a_2^{\mathrm{II}}\, \beta_3^{\mathrm{II}})$
π	$\Pi^{\mathrm{IV}} = (a_1^{\mathrm{IV}}\, b_1^{\mathrm{IV}}\, c_1^{\mathrm{IV}})$	$\Pi^{\mathrm{V}} = (a_2^{\mathrm{V}}\, b_2^{\mathrm{V}}\, c_2^{\mathrm{V}})$	$\Pi^{\mathrm{VI}} = (a_3^{\mathrm{VI}}\, b_3^{\mathrm{VI}}\, c_3^{\mathrm{VI}})$
α_1	$\mathbf{A}_1^{\mathrm{I}} = (b_1^{\mathrm{I}}\, c_1^{\mathrm{I}}\, p^{\mathrm{I}})$	$\mathbf{A}_1^{\mathrm{V}} = (\beta_3^{\mathrm{V}}\, \gamma_3^{\mathrm{V}}\, a_1^{\mathrm{V}})$	$\mathbf{A}_1^{\mathrm{VI}} = (\beta_2^{\mathrm{VI}}\, \gamma_2^{\mathrm{VI}}\, a_3^{\mathrm{VI}})$
α_2	$\mathbf{A}_2^{\mathrm{I}} = (b_2^{\mathrm{I}}\, c_2^{\mathrm{I}}\, p^{\mathrm{I}})$	$\mathbf{A}_2^{\mathrm{VI}} = (\beta_1^{\mathrm{VI}}\, \gamma_1^{\mathrm{VI}}\, a_3^{\mathrm{VI}})$	$\mathbf{A}_2^{\mathrm{IV}} = (\beta_3^{\mathrm{IV}}\, \gamma_3^{\mathrm{IV}}\, a_1^{\mathrm{IV}})$
α_3	$\mathbf{A}_3^{\mathrm{I}} = (b_3^{\mathrm{I}}\, c_3^{\mathrm{I}}\, p^{\mathrm{I}})$	$\mathbf{A}_3^{\mathrm{IV}} = (\beta_2^{\mathrm{IV}}\, \gamma_2^{\mathrm{IV}}\, a_1^{\mathrm{IV}})$	$\mathbf{A}_3^{\mathrm{V}} = (\beta_1^{\mathrm{V}}\, \gamma_1^{\mathrm{V}}\, a_2^{\mathrm{V}})$
β_1	$\mathbf{B}_1^{\mathrm{II}} = (c_1^{\mathrm{II}}\, a_1^{\mathrm{II}}\, p^{\mathrm{II}})$	$\mathbf{B}_1^{\mathrm{V}} = (\gamma_3^{\mathrm{V}}\alpha_3^{\mathrm{V}}b_2^{\mathrm{V}})$	$\mathbf{B}_1^{\mathrm{VI}} = (\gamma_2^{\mathrm{VI}}\, \alpha_2^{\mathrm{VI}}\, b_3^{\mathrm{VI}})$
β_2	$\mathbf{B}_2^{\mathrm{II}} = (c_2^{\mathrm{II}}\, a_2^{\mathrm{II}}\, p^{\mathrm{II}})$	$\mathbf{B}_2^{\mathrm{VI}} = (\gamma_1^{\mathrm{VI}}\, \alpha_1^{\mathrm{VI}}\, b_3^{\mathrm{VI}})$	$\mathbf{B}_2^{\mathrm{IV}} = (\gamma_3^{\mathrm{IV}}\, \alpha_3^{\mathrm{IV}}\, b_1^{\mathrm{IV}})$
β_3	$\mathbf{B}_3^{\mathrm{II}} = (c_3^{\mathrm{II}}\, a_3^{\mathrm{II}}\, p^{\mathrm{II}})$	$\mathbf{B}_3^{\mathrm{IV}} = (\gamma_2^{\mathrm{IV}}\, \alpha_2^{\mathrm{IV}}\, b_1^{\mathrm{IV}})$	$\mathbf{B}_3^{\mathrm{V}} = (\gamma_1^{\mathrm{V}}\, \alpha_1^{\mathrm{V}}\, b_2^{\mathrm{V}})$
γ_1	$\Gamma_1^{\mathrm{III}} = (a_1^{\mathrm{III}}\, b_1^{\mathrm{III}}\, p^{\mathrm{III}})$	$\Gamma_1^{\mathrm{V}} = (\alpha_3^{\mathrm{V}}\, \beta_3^{\mathrm{V}}\, c_2^{\mathrm{V}})$	$\Gamma_1^{\mathrm{VI}} = (\alpha_2^{\mathrm{VI}}\, \beta_2^{\mathrm{VI}}\, c_3^{\mathrm{VI}})$
γ_2	$\Gamma_2^{\mathrm{III}} = (a_2^{\mathrm{III}}\, b_2^{\mathrm{III}}\, p^{\mathrm{III}})$	$\Gamma_2^{\mathrm{VI}} = (\alpha_1^{\mathrm{VI}}\, \beta_1^{\mathrm{VI}}\, c_3^{\mathrm{VI}})$	$\Gamma_2^{\mathrm{IV}} = (\alpha_3^{\mathrm{IV}}\, \beta_3^{\mathrm{IV}}\, c_1^{\mathrm{IV}})$
γ_3	$\Gamma_3^{\mathrm{III}} = (a_3^{\mathrm{III}}\, b_3^{\mathrm{III}}\, p^{\mathrm{III}})$	$\Gamma_3^{\mathrm{IV}} = (\alpha_2^{\mathrm{IV}}\, \beta_2^{\mathrm{IV}}\, c_1^{\mathrm{IV}})$	$\Gamma_3^{\mathrm{V}} = (\alpha_1^{\mathrm{V}}\, \beta_1^{\mathrm{V}}\, c_2^{\mathrm{V}})$

(III. táblázat.)

Vagy, a mi ugyanaz:

A CAYLEY-*ellenegyenespárok váltakozva keresztűl mennek a hozzájuk rendelt* STEINER-*ellenpontpárokon.*

Ugyanis az

$$\alpha_1^{I}\beta_1^{II}\pi^{IV},\quad \alpha_2^{I}\beta_2^{II}\pi^{V}$$

háromszögek perspectivás helyzetűek, mert

$$(\alpha_1^{I}\beta_1^{II})(\alpha_2^{II}\beta_2^{II})=c_3^{IV}=1\,2\,4\,6\,3\,5$$
$$(\beta_1^{II}\pi^{IV})(\beta_2^{II}\pi^{V})=(3\,6,\ 5\,2)\ (1\,4,\ 3\,6)=3\,6$$
$$(\pi^{IV}\alpha_1^{I})(\pi^{V}\alpha_2^{I})=(3\,4,\ 1\,2)\ (5\,6,\ 1\,2)=1\,2;$$

a megfelelő oldalak metszőpontjai tehát egy egyenesben fekszenek. Ennélfogva a $\Pi=(\pi^{IV}\pi^{V}\pi^{VI})$ Steiner-pont a $P^{I}=(\alpha_1^{I}\alpha_2^{I}\alpha_3^{I})$ és $P^{II}=(\beta_1^{II}\beta_2^{II}\beta_3^{II})$ Kirkman-pontokat összekötő Cayley-egyenesen p-n fekszik.

Ebből még az is kitűnik, hogy a 12. pontban leírt configuratiók bármelyike valamennyi Steiner-ellenpontpárt magában foglalja, t. i. egy Steiner-ellenpontpár a Cayley-ellenegyenespáron, a többi kilencz pár pedig a configuratióban szereplő tizennyolcz Pascal-egyenesen fekszik.

14. Vizsgáljuk már most meg, hogy egy P Steiner-pont és a hozzá rendelt p Cayley-egyenes nem polus és polaris-e a Pascal-hatszög körül írt kúpszeletre nézve?

Ha kimutatható, hogy van egy a P-hez kapcsolt polus, mely a p egyenesen kivül fekszik, akkor a p egyenes nem lehet polarisa a P pontnak, mert a p polarisa az összes P-hez kapcsolt polusokat tartalmazza.

A P ponton keresztül menő $p^{II}=1\,2\,3\,4\,5\,6$ Pascal-egyenesnek polusa (m, n) metszőpontja a p^{II}-őn fekvő (1 2, 4 5), (2 3, 5 6) pontok polarisainak, m-nek és n-nek, mely (m, n) pont a P-hez kapcsolt polus. Az m, n polarisok azonban az 1 2 4 5, 2 3 5 6 négyszögek révén az (1 5, 2 4), (1 4, 2 5), illetve (2 5, 3 6), (3 5, 2 6) pontokon mennek keresztül.

Ha az (m, n) pont a p egyenesen feküdnék, akkor az

$$(1\,4,\ 2\,5),\quad (2\,5,\ 3\,6),\quad P^{II}=(\beta_1^{II}\beta_2^{II}\beta_3^{III})$$
$$(1\,5,\ 2\,4),\quad (3\,5,\ 2\,6),\quad P^{III}=(\gamma_1^{III}\gamma_2^{III}\gamma_3^{III})$$

szögpontú háromszögek perspectivásak volnának, mert az első, második és harmadik oszlopban felírt pontok az m, n, p egyeneseken vannak.

Ámde e háromszögek megfelelő oldalainak,

a 25 és $b_1^V = 153426$ metszőpontja a (25, b_1^V)
a $\beta_3^{II} = 135264$ és $\gamma_3^{III} = 164235$ » a (35, 64)
a $\beta_1^{II} = 136425$ és $\gamma_1^{III} = 135426$ » a (13, 42).

E pontok közűl a két utolsó az $a_1^V = 135246$ egyenesen, ellenben az első az a_1^V egyenesen kivűl fekszik, mert b_1^V a (25, 16) ponton nem megy keresztűl.

Ama két háromszög tehát nem perspectivás, és a P ponthoz kapcsolt polus (m, n) nem fekszik a p egyenesen. *A p egyenes tehát nem polarisa a P pontnak, s ugyanazon oknál fogva a π egyenes nem polarisa a Π pontnak.*

Vizsgáljuk még meg, hogy a p, π CAYLEY-egyenesek nem kapcsolt polarisok-e a PASCAL-hatszög körűl írt kúpszeletre vonatkozólag?

Ha p. π kapcsolt polarispár volna, akkor a p-nek polusa P′, mely az előbbiek szerint a P ponttal nem esik egybe, a π egyenesen feküdnék. Ekkor azonban, minthogy Π, P′ és Π, P (5. és 6. pont) kapcsolt polus, a Π pont polarisa a P P′ = π egyenes volna, a mi az előbbi tétellel ellenkezik. E szerint

A CAYLEY-*ellenegyenespárok nem kapcsolt polarisok a* PASCAL-*hatszög körűl írt kúpszeletre vonatkozólag.*[1]

6. A Steiner-egyenesekről.

15. A 4. pontban kimutattuk, hogy az

12	34	56
45	61	23
36	25	14

oldalú háromszögek a Π collineatio-középpontra vonatkozólag perspectivásak; a vetítő sugarak és a collineatio-tengelyek a π^{IV} π^{V} π^{VI}, illetve p^{I} p^{II} p^{III} PASCAL-egyenesek, mely utóbbiak egymást a P STEINER-pontban metszik.

Ugyanígy kimutathattuk volna, a mi különben az előbbinek következménye, hogy az

12	45	36
34	61	25
56	23	14

[1] V. ö. VERONESE-nek a 101. oldalon id. m. 27. old.

oldalú háromszögek a P collineatio-középpontra perspectivásak; a $p^{I} p^{II} p^{III}$, $\pi^{IV} \pi^{V} \pi^{VI}$ Pascal-egyenesek közűl az első három vetítősugár, a többi collineatio-tengely, mely egymást a II pontban metszi.

Ha akár az egyik, akár a másik csoport háromszögeit tekintjük, azt látjuk, hogy

az 12, 61, 14 meg nem felelő oldalak metszőpontja az 1 pont,
az 12, 23, 25 » » » » » a 2 »
a 34, 23, 36 » » » » » a 3 »
a 34, 45, 14 » » » » » a 4 »
az 56, 45, 25 » » » » » az 5 »
az 56, 61, 36 » » » » » a 6 »

ellenben a megfelelő oldalak metszőpontjai a collineatio-tengelyeken feküsznek, melyek ugyanegy ponton mennek keresztűl.

Ennélfogva mondhatjuk:

»Ha két háromszög akkép van egymásra vonatkoztatva, hogy az egyik háromszög minden

oldalának a másik két háromszög egy-egy oldala felel meg, és a meg nem felelő oldalak metszőpontjai egy Pascal-hatszögnek szögpontjai, akkor a háromszögek ugyanegy collineatio-középpontra vonatkozólag perspectivásak, s így a megfelelő oldalak metszőpontjai három, ugyanegy ponton keresztűl menő egyenesen fekszenek«.

szögpontjának a másik két háromszögnek egy-egy szögpontja felel meg, és a meg nem felelő szögpontok hat egyenesen fekszenek, melyek egy kúpszeletnek érintői (egy Brianchon-hatoldalt képeznek), akkor a háromszögek ugyanegy collineatio - tengelyre vonatkozólag perspectivásak, s így a megfelelő szögpontok is hármasával oly egyeneseken fekszenek, melyek egymást hármasával egy egyenes három pontjában metszik«.

Ha ama két csoportban felírt háromszögeket tekintjük, azt látjuk, hogy az első, illetve második csoportban levő háromszögek oldalai az 135 pontok összekötő egyenesei a 246, 462, 624, illetve 264, 642, 426 pontokkal. Továbbá mindegyik háromszögnek oldalain rajta fekszenek a Pascal-hatszögnek szögpontjai.

Kérdés: *Hány ily Δ háromszög található az egész configuratióban, és hányfélekép lehet ezeket hármasával a fentebbi módon csoportosítani?*

16. Az 1 2 3 4 5 6 pontnak tizenöt összekötő egyenese van. Minden ily egyenes, a négy másik pontot összekötő három egyenespárral egy-egy háromszöget képez, a melynek oldalain rajta fekszik mind a hat pont. Ama tizenöt egyenesnek tehát bármelyike három Δ-háromszögnek oldala, s így ezeknek száma 15.3 : 3 = 15.

A 15 Δ-háromszögnek 45 szögpontja mind PASCAL-pont, a melyeknek mindegyikén négy PASCAL-egyenes megy keresztül. Így: az (1 2, 4 5) PASCAL-ponton keresztűl mennek a

$$p^{II} = 1\,2\,3\,4\,5\,6,\quad a_3^{III} = 1\,2\,6\,5\,4\,3,\quad b_3^{VI} = 1\,2\,6\,4\,5\,3,\quad c_3^{I} = 1\,2\,3\,5\,4\,6$$

PASCAL-egyenesek, tehát: *a teljes* PASCAL-*hatszög hatvan* PASCAL-*egyenese egymást négyesével a tizenöt Δ-háromszög negyvenöt szögpontjában metszi; mindenik* PASCAL-*egyenesen három ily szögpont* (PASCAL-*pont) fekszik. (4.45 = 3.60).*

A mi pedig ama csoportok számát illeti, a melyekre a tizenöt Δ-háromszög hármasával osztható oly módon, hogy minden csoport háromszögei páronként perspectivásak legyenek: az 1 2 3 4 5 6 pont közűl kiválasztunk hármat és ezeket a megmaradt hárommal, valamint ezeknek, cyclicus felcserélésük által nyert, complexióival összekötjük; a nyert összekötő egyenesek az ily háromszög-csoportoknak oldalai. Ennélfogva:

A tizenöt Δ-háromszög hármasával húsz oly csoportba osztható, hogy mindegyik csoport háromszögei ugyanegy collineatio-középpontra vonatkozólag perspectivásak; a húsz collineatio-középpont, valamint a collineatio-tengelyek húsz metszőpontja a húsz STEINER-*pont.*

17. Mindenik Δ-háromszög négy csoportban fordul elő; pl. az 1 2 3 4 5 6 oldalú Δ-háromszög, melyet [1 2 3 4 5 6]-tal akarunk jelölni, fellép a következő csoportokban:

[1 2 3 4 5 6]	[1 2 3 4 6 5]	[1 2 3 4 5 6]	[1 2 4 3 6 5]
[4 5 6 1 3 2]	[6 4 1 5 3 2]	[5 3 1 6 4 2]	[4 5 6 2 1 3]
[3 6 5 2 1 4]	[3 5 6 2 1 4]	[4 6 5 2 1 3]	[6 3 1 5 4 2].

E perspectivás háromszögekhez tartozó collineatio-tengelyek

$p^{II} = 1\,2\,3\,4\,5\,6$	$a_1^{III} = 1\,2\,3\,4\,6\,5$	$a_2^{III} = 1\,2\,4\,3\,5\,6$	$a_3^{III} = 1\,2\,6\,5\,4\,3$
$p^{III} = 1\,4\,3\,6\,5\,2$	$a_1^{II} = 1\,4\,3\,5\,6\,2$	$a_2^{II} = 1\,3\,4\,6\,5\,2$	$a_3^{II} = 1\,5\,6\,3\,4\,2$
$p^{I} = 1\,6\,3\,2\,5\,4$	$a_1^{IV} = 1\,5\,3\,2\,6\,4$	$a_2^{V} = 1\,6\,4\,2\,5\,3$	$a_2^{VI} = 1\,3\,6\,2\,4\,5$,

melyek egymást a $P\,A_1\,A_3\,A_3$ betűkkel jelölt Steiner-pontokban metszik.

E perspectivás háromszögekhez tartozó vetítősugarak:

$\pi^{IV} = 1\,6\,3\,4\,5\,2$	$\alpha_1^{I} = 1\,2\,6\,4\,3\,5$	$\alpha_2^{VI} = 1\,2\,5\,3\,4\,6$	$\alpha_3^{V} = 1\,5\,4\,3\,6\,2$
$\pi^{V} = 1\,2\,3\,6\,5\,4$	$\alpha_1^{VI} = 1\,4\,6\,5\,3\,2$	$\alpha_2^{I} = 1\,3\,5\,6\,4\,2$	$\alpha_3^{IV} = 1\,2\,4\,5\,6\,3$
$\pi^{VI} = 1\,4\,3\,2\,5\,6$	$\alpha_2^{V} = 1\,5\,6\,2\,3\,4$	$\alpha_2^{IV} = 1\,6\,5\,2\,4\,3$	$\alpha_3^{I} = 1\,3\,4\,2\,6\,5$.

Egymást a $\Pi\,\mathbf{A}_1\,\mathbf{A}_2\,\mathbf{A}_3$ Steiner-pontokban metszik, melyek az előbbieknek megfelelő Steiner-ellenpontjai. A $\Delta = [1\,2\;\;3\,4\;\;5\,6]$ háromszögnek ez utóbbi tulajdonságát a következőkép fejezhetjük ki: »A $\Delta = [1\,2\;\;3\,4\;\;5\,6]$ szögpontjaiból kisugárzó tizenkét Pascal-egyenes egymást a $\Pi\,\mathbf{A}_1\,\mathbf{A}_2\,\mathbf{A}_3$ Steiner-pontban metszi«. (9. ábra.)

Ámde a tizenkét Pascal-egyenes egymást hármasával még négy Kirkman-pontban:

$$P^{I} = (\alpha_1^{I}\,\alpha_2^{I}\,\alpha_3^{I}), \quad A_1^{IV} = (a_2^{IV}\,\alpha_3^{IV}\,\pi^{IV}), \quad A_2^{V} = (\alpha_3^{V}\,\alpha_1^{V}\,\pi^{V}),$$
$$A_3^{VI} = (\alpha_1^{VI}\,\alpha_2^{1}\,\pi^{VI})$$

metszi, melyek a p^{I}, a_1^{IV}, a_2^{V}, a_3^{VI} Pascal-egyenesekhez vannak rendelve. Ennélfogva:

Minden Δ-háromszög szögpontjaiból kisugárzó tizenkét Pascal-*egyenes egymást hármasával négy* Steiner- *és négy* Kirkman-*pontban metszi.*

18. Vegyük most az

$5\,6$	$3\,4$	$1\,2$
$a_1^{II} = 1\,4\,3\,5\,6\,2$	$a_2^{II} = 1\,3\,4\,6\,5\,2$	$a_3^{III} = 1\,5\,6\,3\,4\,2$
$a_1^{III} = 1\,2\,3\,4\,6\,5$	$a_2^{III} = 1\,2\,4\,3\,5\,6$	$a_3^{III} = 1\,2\,6\,5\,4\,3$

oldalú háromszögeket tekintetbe.

Ezeknek elseje a második és harmadik háromszöggel perspectivás, mert a megfelelő oldalak metszőpontjai a $p^{III} = 1\,4\,3\,6\,5\,2$, illetve $p^{II} = 1\,2\,3\,4\,5\,6$ Pascal-egyenesben fekszenek. Ennélfogva az első és második, valamint az első és harmadik háromszög meg nem felelő oldalainak metszőpontjai (2.) egy-egy Pascal-hatszögnek szögpontjai. Ámde e szögpontok mindkét esetben ugyanazok, mert

a_2^{II}, a_3^{III} és 56 metszőpontja (56, 13)
a_3^{II}, a_1^{III} és 34 » (34, 15)
a_1^{II}, a_2^{III} és 12 » (12, 53)
a_3^{II}, a_2^{III} és 56 » (56, 24)
a_2^{II}, a_1^{III} és 12 » (12, 64)
a_1^{II}, a_3^{III} és 34 » (34, 26);

tehát a második és harmadik háromszög meg nem felelő oldalainak metszőpontjai egy PASCAL-hatszögnek szögpontjai, s így e két utóbbi háromszög egy P_1^{I} collineatio-középpontra vonatkozólag perspectivás, vagyis a megfelelő

$$a_2^{II}, a_1^{III};\ a_2^{II}, a_2^{III};\ a_3^{II}, a_3^{III}$$

oldalak metszőpontjai egy egyenesen fekszenek (8. ábra.)

De ha három háromszög meg nem felelő oldalainak metszőpontjai, egy PASCAL-hatszögnek szögpontjai, akkor (15.) a háromszögek ugyanegy collineatio-középpontra vonatkozólag perspectivásak és a collineatio-tengelyek egymást ugyanegy pontban metszik. Ebből pedig az következik, hogy a

$$p^{II}p^{III},\ a_1^{II}a^{III},\ a_2^{II}a_2^{III},\ a_3^{II}a_3^{III}$$

PASCAL-egyeneseknek metszőpontjai, azaz a P, A_I, A_2, A_3 STEINER-pontok ugyanegy egyenesben fekszenek. Oly egyenest, a melyen négy STEINER-pont fekszik: STEINER-*egyenesnek* neveznek.

Miután a teljes PASCAL-hatszög tizenöt Δ háromszöget határoz meg és e háromszögek mindegyike, mint láttuk, egy STEINER-egyeneshez vezet, a STEINER-*egyenesek száma tizenöt.* Ennélfogva:

A húsz STEINER-*pont négyesével tizenöt* STEINER-*egyenesen fekszik; minden* STEINER-*ponton három* STEINER-*egyenes megy keresztűl (15.4=20.3).*[1]

A tizenöt STEINER-*egyenesből és húsz* STEINER-*pontból álló* (15_4, 20_3) *configuratio, három, páronként ugyanegy collineatio-középpontra perspectivás háromszögből származtatható le; e háromszögek oldalai, a collineatio-tengelyek és vetítősugarak, a configuratio egyenesei.*

[1] PLÜCKER: »Ueber ein neues Princip der Geometrie«; CRELLE 's Journal, V. kötet; vagy SCHRÖTER: »Theorie der Kegelschnitte« 28. §.

Ezt a configuratiót HESSE-*configuratiónak* nevezzük és H-val jelöljük, mert HESSE ismerte fel a STEINER-pontok és egyeneseknek a tételben kifejezett helyzetét.[1]

Jegyzet: 1. Azt a két II. és III. DESARGUES-configuratiót, melyeknek egyeneseit felhasználtuk annak a tételnek bebizonyításánál, hogy a $P A_1 A_2 A_3$ STEINER-pontok egy STEINER-egyenesen fekszenek, továbbá a $\Delta = [12\ 34\ 56]$ háromszöget a $| P A_1 A_2 A_3 |$ STEINER-egyeneshez »rendelt«-nek nevezzük.

2. A STEINER-egyeneseket általában σ-val, a $| P A_1 A_2 A_3 |$ STEINER-egyenest $\sigma^{II, III}$-mal, az $[12\ 34\ 56]$ háromszöget $\Delta^{II, III}$-mal jelöljük, a mely jelölésben a mutatók a hozzárendelt DESARGUES-configuratiónak mutatói.

3. A 17. pontban kimutattuk, hogy a $\sigma^{II, III} = | P A_1 A_2 A_3 |$ STEINER-egyeneshez rendelt $\Delta^{II, III}$ háromszög szögpontjaiból kisugárzó tizenkét PASCAL-egyenes egymást hármasával a $P A_1 A_2 A_3$ STEINER-pontok $\Pi \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3$ ellenpontjaiban és a $P^I A_1^{IV} A_2^{V} A_3^{VI}$ KIRKMAN-pontokban metszi. A $\Pi \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3$, valamint a $P^I A_1^{IV} A_2^{V} A_3^{VI}$ négyszöget és a $p^I a_2^{IV} a_2^{V} a_3^{VI}$ négyoldalt a $\sigma^{II, III}$ STEINER-egyeneshez rendeltnek nevezzük és rövidség kedvéért $S^{II, III}$ $V^{II, III}$, illetve $v^{II, III}$ betűkkel jelöljük. Az egész configuratióban tizenöt ily S és V négyszög, valamint v négyoldal van, melyek az egyes σ STEINER-egyenesekhez vannak rendelve.

7. A Salmon-pontokról.

19. A $\sigma^{II, III}$ STEINER-egyenesen fekvő $P A_1 A_2 A_3$ STEINER-pontokhoz a $p\, a_1\, a_2\, a_3$ CAYLEY-egyenesek vannak rendelve, melyekről kimutatható, hogy egymást egy $\Sigma^{II, III}$ pontban, úgynevezett SALMON-*pontban* metszik. Azokat a $\sigma^{II, III}$ STEINER-egyeneshez »rendeltek«-nek nevezzük.

Ugyanis az

$$\begin{array}{lll} a_1^{IV} = 1\,5\,3\,2\,6\,4 & b^{IIII} = 1\,5\,2\,3\,6\,4 & c_1^{II} = 1\,6\,2\,3\,5\,4 \\ a_2^{V} = 1\,3\,5\,2\,4\,6 & b_2^{III} = 1\,4\,2\,5\,3\,6 & c_2^{II} = 1\,3\,2\,5\,4\,6 \\ a_3^{VI} = 1\,3\,6\,2\,4\,5 & b_3^{III} = 1\,4\,5\,2\,6\,3 & c_3^{II} = 1\,5\,4\,2\,3\,6 \end{array}$$

PASCAL-egyenesek közűl az 1-ső, 2-dik és 3-dik sorban felírtak egymást a (2 3, 1 4), (2 5, 1 6), (5 4, 3 6) pontokban metszik, melyek a $p^I = 1\,6\,3\,2\,5\,4$ PASCAL egyenesen fekszenek.

[1] CRELLE'S Journal; XLI. kötet.

Ebből pedig következik, hogy az

$$a_1^{IV} a_2^{V} a_3^{VI}, \quad b_1^{III} b_2^{III} b_3^{III}, \quad c_1^{II} c_2^{II} c_3^{III}$$

háromszögek a p^I collenatio-tengelyre vonatkozólag páronként perspectivásak és így e perspectivás háromszögekhez tartozó collineatio-középpontok egy egyenesben fekszenek.

Ámde az 1-ső és 2-dik, 1-ső és 3-dik, 2-dik és 3-dik háromszöghöz tartozó projiciálósugarak

$$\gamma_1^{III} \gamma_2^{III} \gamma_3^{III}, \quad \beta_1^{II} \beta_2^{II} \beta_3^{II}, \quad a_1 a_2 a_3.$$

mert

a γ_1^{III}	egyenes összeköti az	$A_1^{III}=(b_2^{III} b_3^{III})$	KIRKMAN-pontot és az	$(1\,3,\ 4\,2)=(a_2^{V}\ a_3^{VI})$	pontot,
a γ_2^{III}	»	$A_2^{III}=(b_3^{III} b_1^{III})$	»	$(1\,5,\ 2\,6)=(a_3^{VI}\ a_1^{IV})$	»
a γ_3^{III}	»	$A_3^{III}=(b_1^{III} b_2^{III})$	»	$(3\,5,\ 6\,4)=(a_1^{IV}\ a_2^{V})$	»
a β_1^{II}	»	$A_1^{II}=(c_2^{II}\ c_3^{II})$	»	$(1\,3,\ 4\,2)=(a_2^{V}\ a_3^{VI})$	»
a β_2^{II}	»	$A_2^{II}=(c_3^{II}\ c_1^{II})$	»	$(1\,5,\ 2\,6)=(a_3^{VI}\ a_1^{IV})$	»
a β_3^{II}	»	$A_3^{II}=(c_1^{II}\ c_2^{II})$	»	$(3\,5,\ 6\,4)=(a_1^{IV}\ a_2^{V})$	»
az a_1	»	A_1^{II} és A_1^{III}			
az a_2	»	A_2^{II} és A_2^{III}			
az a_3	»	A_3^{II} és A_3^{III}			

Ennélfogva az $a_1 a_2 a_3$ CAYLEY-egyenesek egymást a $P^{III}=(\gamma_1^{III} \gamma_2^{III} \gamma_3^{III})$, $P^{II}=(\beta_1^{II} \beta_2^{II} \beta_3^{II})$ KIRKMAN-pontok összekötő egyenesén, vagyis a p CAYLEY-egyenesen metszik.

E szerint: *Egy* STEINER-*egyenesen fekvő négy* STEINER-*ponthoz rendelt négy* CAYLEY-*egyenes egymást egy* SALMON-*pontban metszi; minden* CAYLEY-*egyenesen három* SALMON-*pont fekszik.*

A húsz CAYLEY-*egyenes és tizenöt* SALMON-*pont egy* $H'=(20_3,\ 15_4)$ *configuratiót képez, mely reciprocus alakzata az előbbi* $H=(15_4,\ 20_3)$ *configuratiónak, s három, páronként ugyanarra a collineatio-tengelyre perspectivás háromszögnek oldalaiból, a közös collineatio-tengelyből és a collineatio-középpontokat tartó egyenesből áll.*

20. Más úton is kimutatható, hogy a p $a_1 a_2 a_3$ CAYLEY-egyenesek egymást egy pontban metszik. Ugyanis az

$$A_1^{IV} A_2^{V} A_3^{VI}$$

$$(3\,4,\ 1\,2) \quad (1\,2,\ 5\,6) \quad (5\,6,\ 3\,4)$$

$$\mathbf{A_1 A_2 A_3}$$

háromszögek (9. ábra) közül az első kettő perspectivás, mert az oszlopokban fekvő szögpontok a $\pi^{IV}\pi^{V}\pi^{VI}$ egyeneseken vannak. Ennélfogva a meg nem felelő szögpontok összekötő egyenesei $\alpha_1{}^{V}\alpha_1{}^{VI}$ $\alpha_2{}^{VI}\alpha_2{}^{IV}\alpha_3{}^{IV}\alpha_3{}^{V}$ egy kúpszeletet burkolnak be (2.). De ez utóbbi egyenesek a harmadik háromszögnek szögpontjain is keresztűl mennek; miért is (15) a harmadik háromszög az előbbi kettővel perspectivás és a collineatio-középontok egy egyenesben fekszenek. Ámde az 1-ső és 3-ik, valamint a 2-ik és 3-ik háromszög megfelelő szögpontjai az $a_1\,a_2\,a_3$ Cayley-egyenesen, illetve az $\alpha_1{}^{I}\alpha_2{}^{I}\alpha_3{}^{I}$ Pascal-egyenesen vannak, minek következtében az $a_1\,a_2\,a_3$ egyenesek egymást a $P^{I}=(\alpha_1{}^{I}\alpha_2{}^{I}\alpha_3{}^{I})$ Kirkman pontnak és Π Steiner-pontnak összekötő egyenesén, a $p=(\Pi\,P^{I}\,P^{II}\,P^{III})$ Cayley-egyenesen metszik.

21. Az imént leírt configuratióban előfordúl négy Cayley-egyenes $p\,a_1\,a_2\,a_3$, melyek egymást egy $\Sigma^{II,\,III}$ Salmon-pontban metszik;

a p	CAYLEY-egyenesen fekszik a	Π	STEINER-pont és a	P^{I}	KIRKMAN-pont,
az a_1	»	A_1	»	$A_1{}^{IV}$	»
az a_2	»	A_2	»	$A_2{}^{V}$	»
az a_3	»	A_3	»	$A_3{}^{VI}$	»

mely utóbbiak az $S^{II,\,III}=\Pi\,A_1\,A_2\,A_3$, $V^{II,\,III}=P^{I}\,A_1{}^{IV}\,A_2{}^{V}\,A_3{}^{VI}$ négyszögeknek szögpontjai. E négyszögek a $\Delta^{II,\,III}=[1\ 2\ 3\,4\ 5\,6]$ háromszöggel perspectivás háromszögekre bonthatók; a collineatio-középpontok a $V^{II,\,III}$ és $S^{II,\,III}$ négyszögek szögpontjai. Ennélfogva:

Egy Σ Salmon-*ponton keresztűl menő négy* Cayley-*egyenesen egy-egy* Steiner-*pont fekszik, melyek egy S-négyszögnek szögpontjai. E négyszög négy háromszögre bomlik, melyek ugyanegy Δ-háromszöggel perspectivásak; a collineatio-középpontok ama* Cayley-*egyeneseken fekvő oly* Kirkman-*pontok, a melyek egy V négyszögnek szögpontjai; a projiciáló sugarak e* Kirkman-*pontokból kisugárzó* Pascal-*egyenesek.*

Jegyzet. A IV. táblázat első oszlopában a Steiner-egyeneseken σ-n fekvő Steiner-pontok; a 2-ikban egy Salmon-pontban Σ-ban egymást metsző Cayley-egyenesek; a 3-, 4- és 5-ikben az ezekhez rendelt V, v és Δ négyszögek, négyoldalak és háromszögek szögpontjai, illetve oldalai; végre a 6-ikban az ezekhez rendelt Desargues-configuratiók jelző számai találhatók.

A STEINER-egyenesek σ	A SALMON-pontok Σ	A hozzájuk rendelt			
		V négyszögek szögpontjai	v négyoldalak oldalai	Δ háromszög oldalai	DESARGUES-féle configuratiók jelző száma
$\lvert P\, A_1\, A_2\, A_3 \rvert$	$(p\, a_1\, a_2\, a_3)$	$P^{I}\, A_1^{IV}\, A_2^{V}\, A_3^{VI}$	$p^{I}\, a^{IV}{}_1\, a_2^{V}\, a_3^{VI}$	[1 2 3 4 5 6]	II, III
$\lvert P\, B_1\, B_2\, B_3 \rvert$	$(p\, b_1\, b_2\, b_3)$	$P^{II}\, B_1^{IV}\, B_2^{V}\, B_3^{VI}$	$p^{II}\, b_1^{IV}\, b_2^{V}\, b_3^{VI}$	[1 4 3 6 5 2]	III, I
$\lvert P\, C_1\, C_2\, C_3 \rvert$	$(p\, c_1\, c_2\, c_3)$	$P^{III}\, C_1^{IV}\, C^{V}{}_2\, C_3^{VI}$	$p^{III}\, c_1^{IV}\, c_2^{V}\, c_3^{VI}$	[1 6 3 2 5 4]	I, II
$\lvert \Pi\, \mathbf{A}_1\, \mathbf{B}_2\, \Gamma_3 \rvert$	$(\pi\, \alpha_1\, \beta_1\, \gamma_1)$	$\Pi^{IV}\, \mathbf{A}_1^{I}\, \mathbf{B}_1^{II}\, \Gamma_1^{III}$	$\pi^{IV}\, \alpha_1^{I}\, \beta_1^{II}\, \gamma_1^{III}$	[1 4 3 2 5 6]	V, VI
$\lvert \Pi\, \mathbf{A}_2\, \mathbf{B}_2\, \Gamma_2 \rvert$	$(\pi\, \alpha_2\, \beta_2\, \gamma_2)$	$\Pi^{V}\, \mathbf{A}_2^{I}\, \mathbf{B}_2^{II}\, \Gamma_2^{III}$	$\pi^{V}\, \alpha_2^{I}\, \beta_2^{II}\, \gamma_2^{III}$	[1 6 3 4 5 2]	VI, IV
$\lvert \Pi\, \mathbf{A}_3\, \mathbf{B}_3\, \Gamma_3 \rvert$	$(\pi\, \alpha_3\, \beta_3\, \gamma_3)$	$\Pi^{VI}\, \mathbf{A}_3^{I}\, \mathbf{B}_3^{II}\, \Gamma_3^{III}$	$\pi^{VI}\, \alpha_3^{I}\, \beta_3^{II}\, \gamma_3^{III}$	[1 2 3 6 5 4]	IV, V
$\lvert B_1\, C_1\, \mathbf{A}_2\, \mathbf{A}_3 \rvert$	$(b_1\, c_1\, \alpha_2\, \alpha_3)$	$B_1^{III}\, C_1^{II}\, \mathbf{A}_2^{VI}\, \mathbf{A}_3^{V}$	$b_1^{III}\, c_1^{II}\, \alpha_2^{VI}\, \alpha_3^{V}$	[1 3 2 4 5 6]	I, IV
$\lvert C_1\, A_1\, \mathbf{B}_2\, \mathbf{B}_3 \rvert$	$(c_1\, a_1\, \beta_2\, \beta_3)$	$C_1^{I}\, A_1^{III}\, \mathbf{B}_2^{VI}\, \mathbf{B}_3^{V}$	$c_1^{I}\, a_1^{III}\, \beta_2^{VI}\, \beta_3^{V}$	[1 4 3 5 2 6]	II, IV
$\lvert A_1\, B_1\, \Gamma_2\, \Gamma_3 \rvert$	$(a_1\, b_1\, \gamma_2\, \gamma_3)$	$A_1^{II}\, B_1^{I}\, \Gamma_2^{VI}\, \Gamma_3^{V}$	$a_1^{II}\, b_1^{III}\, \gamma_2^{VI}\, \gamma_3^{V}$	[1 5 4 6 2 3]	III, IV
$\lvert B_2\, C_2\, \mathbf{A}_3\, \mathbf{A}_1 \rvert$	$(b_2\, c_2\, \alpha_3\, \alpha_1)$	$B_2^{III}\, C_2^{II}\, \mathbf{A}_3^{IV}\, \mathbf{A}_1^{VI}$	$b_2^{III}\, c_2^{II}\, \alpha_3^{IV}\, \alpha_1^{VI}$	[1 5 2 6 3 4]	I, V
$\lvert C_2\, A_2\, \mathbf{B}_3\, \mathbf{B}_1 \rvert$	$(c_2\, a_2\, \beta_3\, \beta_1)$	$C_2^{I}\, A_2^{III}\, \mathbf{B}_3^{IV}\, \mathbf{B}_1^{VI}$	$c_2^{I}\, a_2^{III}\, \beta_3^{IV}\, \beta_1^{VI}$	[1 3 2 5 4 6]	II, V
$\lvert A_2\, B_2\, \Gamma_3\, \Gamma_1 \rvert$	$(a_2\, b_2\, \gamma_3\, \gamma_1)$	$A_2^{II}\, B_2^{I}\, \Gamma_3^{IV}\, \Gamma_1^{VI}$	$a_2^{II}\, b_2^{I}\, \gamma_3^{IV}\, \gamma_1^{VI}$	[1 6 2 4 3 5]	III, V
$\lvert B_3\, C_3\, \mathbf{A}_1\, \mathbf{A}_2 \rvert$	$(b_3\, c_3\, \alpha_1\, \alpha_2)$	$B_3^{III}\, C_3^{II}\, \mathbf{A}_1^{V}\, \mathbf{A}_2^{IV}$	$b_3^{III}\, c_3^{II}\, \alpha_1^{V}\, \alpha_3^{IV}$	[1 2 3 5 6 4]	I, VI
$\lvert C_3\, A_3\, \mathbf{B}_1\, \mathbf{B}_2 \rvert$	$(c_3\, a_3\, \beta_1\, \beta_2)$	$C_3^{I}\, A_3^{III}\, \mathbf{B}_1^{V}\, \mathbf{B}_2^{IV}$	$c_3^{I}\, a_3^{III}\, \beta_I^{V}\, \beta_2^{IV}$	[1 5 2 4 6 3]	II, VI
$\lvert A_3\, B_3\, \Gamma_1\, \Gamma_2 \rvert$	$(a_3\, b_3\, \gamma_1\, \gamma_2)$	$A_3^{II}\, B_3^{I}\, \Gamma_1^{V}\, \Gamma_2^{IV}$	$a_3^{II}\, b_3^{I}\, \gamma_1^{V}\, \gamma_2^{IV}$	[1 3 4 5 6 2]	III, VI

(IV. táblázat.)

8. A Desargues- és Hesse-configuratiók kölcsönös helyzete.

22. Kimutattuk a 13. pontban, hogy minden CAYLEY-egyenes a hozzárendelt STEINER-pontnak ellenpontján megy keresztűl. Ebből pedig az következik, hogy a $H=(15_4, 20_3)$ és $H'=(20_3, 15_4)$ HESSE-konfiguratiók összefüggnek egymással, még pedig:

A STEINER-*egyenesek és pontok képezte $H=(15_4, 30_3)$-, és a* CAYLEY-*egyenesek és* SALMON *pontok képezte $H'=(20_3, 15_4)$* HESSE-*configuratiók együtt egy $(35_4, 35_4)$ configuratiót alkotnak. Ennek 35 egyenese és 35 pontja a 15* STEINER- *és 20* CAYLEY-*egyenes, illetve a 20* STEINER- *és 15* SALMON-*pont. Mindegyik* STEINER-*egyenesen négy* STEINER-*pont, mindegyik* CAYLEY-*egyenesen három* SALMON- *és egy* STEINER-*pont fekszik; mindegyik* STEINER-*ponton három* STEINER- *és egy* CAYLEY-*egyenes, mindegyik* SALMON-*ponton négy* CAYLEY-*egyenes megy keresztűl.*

E configuratio nem egyéb, mint három, páronként ugyanegy collineatio-középpontra perspectivás tetraëder éleinek és szögpontjainak, továbbá a megfelelő lapok- és élek metszővonalainak és pontjainak, végűl a projiciáló sugaraknak és a collineatio-síkok közös metszővonalának központi vagy parallel projectiója egy síkra.

A $(35_4, 35_4)$ configuratio a következő módon szerkeszthető meg: a sík egy P pontján keresztűl négy egyenest: $P A_1 A_2 A_3$, $P B_1 B_2 B_3$, $P C_1 C_2 C_3$ és π-t húzunk. Ezután három négyszöget rajzolunk, melyeknek szögpontjai amaz egyeneseken feküsznek, oldalaik: $A_i B_i$, $B_i C_i$, $C_i A_i$, α_i, β_i, γ_i. Az $(\alpha_i \beta_i \gamma_i)$ szögpont a π egyenesen fekszik és $i=1, 2, 3$. E három négyszöget négy, a P pontra páronként perspectivás háromszögre bonthatjuk, melyeknek oldalai: $A_i B_i$, $B_i C_i$, $C_i A_i$; $A_i B_i$, α_i, β_i; $B_i C_i$, β_i, γ_i; $C_i A_i$, γ_i, α_i, $(i=1, 2, 3)$. A collineatio-tengelyek $| \mathbf{A}_i \mathbf{B}_i \Gamma_i |$, a_i, b_i, c_i $(i=1, 2, 3)$, melyek egymást a p egyenesen fekvő Π, $(a_1 a_2 a_3)$, $(b_1 b_2 b_3)$, $(c_1 c_2 c_3)$ collineatio-középpontokban metszik.

23. Vizsgáljuk most meg, hogy mily helyzetű egy $(10_3, 10_3)$ DESARGUES-konfiguratio a két H, H' HESSE-konfiguratio irányában.

A II. DESARGUES-konfiguratio tíz egyenese közül

$p^{II} a_1^{II} a_2^{II} a_3^{II}$	megfelelőleg	a $P A_1 A_2 A_3$	STEINER-ponton
$p^{II} c_1^{II} c_2^{II} c_3^{II}$	»	a $P C_1 C_2 C_3$	»
$c_1^{II} a_1^{II} \beta_2^{II} \beta_3^{II}$	»	a $C_1 A_1 B_2 B_3$	»
$c_2^{II} a_2^{II} \beta_3^{II} \beta_1^{II}$	»	a $C_2 A_2 B_3 B_1$	»
$c_3^{II} a_3^{II} \beta_1^{II} \beta_2^{II}$	»	a $C_3 A_3 B_1 B_2$	»

megy keresztűl; e STEINER-pontok pedig egy-egy olyan egyenesen feküsznek, melyek egy teljes ötoldalt képeznek. (6. ábra.)

Minthogy a DESARGUES-configuratiónak tíz egyenese ennek a teljes ötoldalnak tíz szögpontján megy keresztűl, a DESARGUES-configuratio az ötoldal körűl van írva.

Amaz ötoldal és a DESARGUES-configuratio együttvéve egy $(15_4, 20_3)$ configuratiót képez; a három perspectivás háromszög pl. $a_1^{II} a_2^{II} a_3^{II}$, $c_1^{II} c_2^{II} c_3^{II}$, $B_1 B_2 B_3$; a projiciáló sugarak: $\beta_1^{II} \beta_2^{II} \beta_3^{II}$; a collineatio-tengelyek: p^{II}, $\sigma^{II,\, III} = | P A_1 A_2 A_3 |$, $\sigma^{I,\, II} = | P C_1 C_2 C_3 |$.

A II. DESARGUES-configuratiónak tíz KIRKMAN-pontja közűl

$P^{II} A_1^{II} A_2^{II} A_3^{II}$	megfelelőleg	a $p\, a_1 a_2 a_3$	CAYLEY-egyenesen
$P^{II} C_1^{II} C_2^{II} C_3^{II}$	»	a $p\, c_1 c_2 c_3$	»
$C_1^{II} A_1^{II} B_2^{II} B_3^{II}$	»	a $c_1 a_1 \beta_2 \beta_3$	»
$C_2^{II} A_2^{II} B_3^{II} B_1^{II}$	»	a $c_2 a_2 \beta_3 \beta_1$	»
$C_3^{II} A_3^{II} B_1^{II} B_2^{II}$	»	a $c_3 a_3 \beta_1 \beta_2$	»

fekszik; ezek egy-egy SALMON-ponton mennek keresztűl és egy teljes ötszögnek szögpontjai. (7. ábra.)

Minthogy a DESARGUES-configuratiónak tíz KIRKMAN-pontja a teljes ötszögnek tíz oldalán fekszik, a DESARGUES-configuratio az ötszögbe be van írva.

Amaz ötszög és a DESARGUES-configuratio együttvéve egy $(20_3, 15_4)$ configuratiót képez; a perspectivás háromszögek pl. $a_1^{II} a_2^{II} a_3^{II}$, $c_1^{II} c_2^{II} c_3^{II}$, $\beta_1 \beta_2 \beta_3$; a collineatio-tengely p^{II}; a collineatio-középpontok: $P^{II} = (\beta_1^{II} \beta_2^{II} \beta_3^{II})$, $\Sigma^{II,\, III} = (p\, a_1 a_2 a_3)$, $\Sigma^{I,\, II} = (p\, c_1 c_2 c_3)$.

A nyert eredményeket ezek után a következőleg fejezhetjük ki:

A STEINER-*egyenesekből és pontokból álló $H=(15_4, 20_3)$ configuratio és a* CAYLEY-*egyenesekből és* SALMON-*pontokból álló $H'=(20_3, 15_4)$ configuratio hat teljes ötoldalra, illetve hat teljes ötszögre bontható. A* PASCAL-*egyenesekből és* KIRKMAN-*pontokból álló hat $(10_3, 10_3)$* DESARGUES-*configuratio min-*

degyike egy ily ötoldal körűl, illetve ötszögbe be van írva. Ugyanegy DESARGUES-*configuratióba írt, illetve körűl írt ötoldal és ötszög oldalai és szögpontjai, valamint szögpontjai és oldalai egymáshoz rendelt* STEINER-*egyenesek és* SALMON-*pontok, illetve* STEINER-*pontok és* CAYLEY-*egyenesek.*

Így pl. a II. DESARGUES-configuratio a $\sigma^{\mathrm{I,\ II}}$ $\sigma^{\mathrm{II,\ III}}$ $\sigma^{\mathrm{II,\ IV}}$ $\sigma^{\mathrm{II,\ V}}$ $\sigma^{\mathrm{II,\ VI}}$ ötoldalba be van írva és a $\Sigma^{\mathrm{I,\ II}}$ $\Sigma^{\mathrm{II,\ III}}$ $\Sigma^{\mathrm{II,\ IV}}$ $\Sigma^{\mathrm{II,\ V}}$ $\Sigma^{\mathrm{II,\ VI}}$ ötszög körűl van írva.

24. A P^{II} KIRKMAN-ponton keresztűl menő $\beta_1^{\mathrm{II}}\,\beta_2^{\mathrm{II}}\,\beta_3^{\mathrm{II}}$ PASCAL-egyeneseken a 23. pontban tekintetbe vett KIRKMAN- és STEINER-pontokon kivűl még három-három PASCAL-pont fekszik, t. i.:

β_1^{II}-en fekszenek az $A_1^{\mathrm{II}}\,C_1^{\mathrm{II}}\,\mathbf{B}_1$ (1 5, 4 6), (1 3, 2 4), (2 5, 3 6) pontok
β_2^{II}-en » az $A_2^{\mathrm{II}}\,C_2^{\mathrm{II}}\,\mathbf{B}_2$ (2 4, 3 5), (1 5, 2 6), (1 4, 3 6) »
β_3^{II}-en » az $A_3^{\mathrm{II}}\,C_3^{\mathrm{II}}\,\mathbf{B}_3$ (1 3, 2 6), (3 5, 4 6), (1 4, 2 5) »

melyek a P^{II} középpontra perspectivás: $A_1^{\mathrm{II}}\,A_2^{\mathrm{II}}\,A_3^{\mathrm{II}} = c_1^{\mathrm{II}}\,c_2^{\mathrm{II}}\,c_3^{\mathrm{II}}$, $C_1^{\mathrm{II}}\,C_2^{\mathrm{II}}\,C_3^{\mathrm{II}} = a_1^{\mathrm{II}}\,a_2^{\mathrm{II}}\,a_3^{\mathrm{II}}$, $\mathbf{B}_1\,\mathbf{B}_2\,\mathbf{B}_3$, $c_1^{\mathrm{IV}}\,c_2^{\mathrm{V}}\,c_3^{\mathrm{VI}}$, $a_1^{\mathrm{IV}}\,a_2^{\mathrm{V}}\,a_3^{\mathrm{VI}}$, $\Delta^{\mathrm{I,\ III}} =$ [1 4 2 5 3 6] háromszögeknek szögpontjai.

E háromszögek közűl:

$$\left.\begin{matrix} c_1^{\mathrm{II}}\,c_2^{\mathrm{II}}\,c_3^{\mathrm{II}} \\ a_1^{\mathrm{II}}\,a_2^{\mathrm{II}}\,a_3^{\mathrm{II}} \end{matrix}\right\}\text{perspec-tivás a}\quad p^{\mathrm{II}} = |\,\mathbf{B}_1^{\mathrm{II}}\,\mathbf{B}_2^{\mathrm{II}}\,\mathbf{B}_3^{\mathrm{II}}\,|\,;\qquad \left.\begin{matrix} a_1^{\mathrm{IV}}\,a_2^{\mathrm{V}}\,a_3^{\mathrm{VI}} \\ c_1^{\mathrm{IV}}\,c_2^{\mathrm{V}}\,c_3^{\mathrm{VI}} \end{matrix}\right\}\text{perspec-tivás a}\quad \pi = |\,\Pi^{\mathrm{IV}}\,\Pi^{\mathrm{V}}\,\Pi^{\mathrm{VI}}\,|$$

$$\left.\begin{matrix} a_1^{\mathrm{IV}}\,a_2^{\mathrm{V}}\,a_3^{\mathrm{VI}} \\ a_1^{\mathrm{II}}\,a_2^{\mathrm{II}}\,a_3^{\mathrm{II}} \\ \mathbf{B}_1\,\mathbf{B}_2\,\mathbf{B}_3 \end{matrix}\right\}\text{»}\quad |\,P\,A_1\,A_2\,A_3\,|\,;\qquad \left.\begin{matrix} c_1^{\mathrm{IV}}\,c_2^{\mathrm{V}}\,c_3^{\mathrm{VI}} \\ c_1^{\mathrm{II}}\,c_2^{\mathrm{II}}\,c_3^{\mathrm{II}} \\ \mathbf{B}_1\,\mathbf{B}_2\,\mathbf{B}_3 \end{matrix}\right\}\text{»}\quad |\,P\,C_1\,C_2\,C_3\,|$$

$$\left.\begin{matrix} c_1^{\mathrm{II}}\,c_2^{\mathrm{II}}\,c_3^{\mathrm{II}} \\ a_1^{\mathrm{IV}}\,a_2^{\mathrm{V}}\,a_3^{\mathrm{VI}} \\ [14\ \ 25\ \ 36] \end{matrix}\right\}\text{»}\quad p^{\mathrm{I}} = 1\,6\,3\,2\,5\,4\,;\qquad \left.\begin{matrix} a_1^{\mathrm{II}}\,a_2^{\mathrm{II}}\,a_3^{\mathrm{II}} \\ c_1^{\mathrm{IV}}\,c_2^{\mathrm{V}}\,c_3^{\mathrm{VI}} \\ [14\ \ 25\ \ 36] \end{matrix}\right\}\text{»}\quad p^{\mathrm{III}} = 1\,4\,3\,6\,5\,2$$

collineatio-tengelyre, melyek egymást a P STEINER-pontban metszik.

A KIRKMAN-pontok számának megfelelőleg hatvan ily configuratio van, melyek azonban egymást részben elfödik.

A $\mathfrak{c}$ CAYLEY-egyenesen a P^{II} KIRKMAN-ponton kivűl még a P^{I}, P^{III} KIRKMAN-pontok feküsznek; az ezekből levezetett configuratiok az előbbit még a következőkkel egészítik ki: 1. a P^{I}, P^{III} pontokból kisugárzó $\alpha_1^{\mathrm{I}}\,\alpha_2^{\mathrm{I}}\,\alpha_3^{\mathrm{I}}$, $\gamma_1^{\mathrm{III}}\,\gamma_2^{\mathrm{III}}\,\gamma_3^{\mathrm{III}}$ PASCAL-egyenesekkel; 2. a $P^{\mathrm{I}}\,p^{\mathrm{I}}$ és $P^{\mathrm{III}}\,p^{\mathrm{III}}$ collineatio-középpontra és tengelyre perspectivás $b_1^{\mathrm{I}}\,b_2^{\mathrm{I}}\,b_3^{\mathrm{I}}$,

$c_1^I c_2^I c_3^I$; $a_1^{III} a_2^{III} a_3^{III}$, $b_1^{III} b_2^{III} b_3^{III}$ háromszögekkel; 3. a $b_1^{IV} b_2^V b_3^{VI}$ háromszöggel, mely a $c_1^{IV} c_2^V c_3^{VI}$ és $a_1^{IV} a_2^V a_3^{VI}$ háromszöggel a P^{II}, π és P^{III}, π-re vonatkozólag perspectivás; 4. a $\Delta^{II, III} = [1\,2\ 3\,4\ 5\,6]$, $\Delta^{I, II} = [1\,6\ 3\,2\ 5\,4]$ háromszögekkel, melyek egymás között és a $\Delta^{I, III}$ háromszöggel a Π pontra és a $p^I p^{II} p^{III}$ collineatio-tengelyekre vonatkozólag perspectivásak; végre 5. az $A_1 A_2 A_3$, $\Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3$ háromszögekkel, melyek egymás között és a $B_1 B_2 B_3$ háromszögekkel a Π pontra és a $| P A_1 A_2 A_3 |$, $| P B_1 B_2 B_3 |$, $| P C_1 C_2 C_3 |$ tengelyekre vonatkozólag perspectivásak.

E configuratio (új egyenesek hozzáadása nélkül is) magába foglalja már valamennyi Steiner-pontot és egyenest, 39 Pascal-egyenest és 33 Kirkman-pontot, 3 Δ-háromszöget és a π, p Cayley-egyeneseket.

9. A V_1 Veronese-pontok és két Desargues-configuratio kölcsönös helyzete.

25. Ama tétel bebizonyításánál, hogy négy Steiner-pont egy egyenesen fekszik (18.) az $[5\,6\ 3\,4\ 1\,2]$, $a_1^{II} a_2^{II} a_3^{II}$, $a_1^{III} a_2^{III} a_3^{III}$ háromszögekből indultunk ki, melyek páronként a P_1^I collineatio-középpontra és a p^{III}, p^{II}, $\sigma^{II, III} = | P A_1 A_2 A_3 |$ collineatio-tengelyre vonatkozólag perspectivásak. De ép így kiindulhattunk volna (8. ábra) az

$[5\,6\ 1\,2\ 3\,4]$	$[3\,4\ 5\,6\ 1\,2]$	$[1\,2\ 3\,4\ 5\,6]$
$p^{II} a_2^{II} a_3^{II}$	$p^{II} a_3^{II} a_1^{II}$	$p^{II} a_1^{II} a_2^{II}$
$p^{III} a_2^{III} a_3^{III}$	$p^{III} a_3^{III} a_1^{III}$	$p^{III} a_1^{III} a_2^{III}$

háromszögekből is, melyek az

$A_{1_1}^{IV}$ collineatio-középpont és a_1^{III}, a_1^{II}, $\sigma^{II, III}$ collineatio-tengelyekre
$A_{2_1}^{V}$ » » a_2^{III}, a_2^{II}, $\sigma^{II, III}$ »
$A_{3_1}^{VI}$ » » a_3^{III}, a_3^{II}, $\sigma^{II, III}$ »

vonatkozólag perspectivásak.

A négy collineatio-középpont megannyi szögpontja egy

$$V_1^{II, III} = [P_1^I A_{1_1}^{IV} A_{2_1}^{V} A_{3_1}^{VI}] = [P^I A_1^{IV} A_2^V A_3^{VI}]_1$$

négyszögnek, melynek átlósháromszöge $\Delta^{II, III} = [1\,2\ 3\,4\ 5\,6]$.

E négyszög mindegyik oldalán két Kirkman-pont és a $\Delta^{II, III}$ háromszögnek egy-egy szögpontja fekszik, még pedig:

a $| P^{I} A_1^{IV} |_1$ oldalon a C_1^{II}, B_1^{III}, (34, 12) pontok fekszenek,
a $| P^{I} A_2^{V} |_1$ » a C_2^{II}, B_2^{III}, (12, 56) » »
a $| P^{I} A_3^{VI} |_1$ » a C_3^{II}, B_3^{III}, (56, 34) » »
a $| A_2^{V} A_3^{VI} |_1$ » a B_1^{II}, Γ_1^{III}, (34, 12) » »
a $| A_3^{VI} A_1^{IV} |_1$ » a B_2^{II}, Γ_2^{III}, (12, 56) » »
a $| A_1^{IV} A_2^{V} |_1$ » a B_3^{II}, Γ_3^{III}, (56, 34) » »

Minthogy a teljes Pascal-hatszög tizenöt Steiner-egyenest szolgáltat, a V_1-négyszögek száma is ugyanannyi. A V_1-négyszögeket az illető Steiner-egyenesekhez rendeljük és hatvan szögpontjukat V_1-Veronese-*pontoknak*, vagy röviden V_1-pontoknak nevezzük.

A mi a hatvan V_1-pont különös jelölését illeti, megjegyzendő a következő: Egy Steiner-egyenes négy Steiner-pontjából 1. egy v-négyoldal négy oldala, mint négy Pascal-egyenes és 2. még négy pár Pascal-egyenes sugárzik ki. Az utóbbi Pascal-egyenespárok közűl három-három két, a Steiner-egyenesre, mint collineatio-tengelyre, és egy V_1 pontra, mint collineatio-középpontra, vonatkozólag perspectivás négyszöget képez. Ezt a V_1 pontot, mint a v négyszög egyik oldalához, ahhoz a Pascal-egyeneshez rendeljük, mely a negyedik Steiner-ponton megy keresztűl, és a Pascal-egyeneshez rendelt Kirkman-pont jelző-betűjével látjuk el, melyhez megkülönböztetésűl még egy »$_1$« mutatót függesztünk. Ugyanahhoz a Pascal-egyeneshez rendelt Kirkman- és V_1-pontot egymáshoz rendeltnek fogunk nevezni.

26. A V_1-pontról Veronese [1] kimutatta, hogy:

Egy Steiner-*ponton keresztűl menő három* Pascal-*egyeneshez oly három V_1-pont van rendelve, mely a* Steiner-*ponthoz rendelt* Cayley-*egyenesen fekszik.*

Ugyanis az

$$a_1^{II} a_2^{II} a_3^{II} = C_1^{II} C_2^{II} C_3^{II}, \quad a_1^{III} a_2^{III} a_3^{III} = B_1^{III} B_2^{III} B_3^{III},$$
$$b_1^{III} b_2^{III} b_3^{III} = A_1^{III} A_2^{III} A_3^{III}, \quad c_1^{II} c_2^{II} c_3^{II} = A_1^{II} A_2^{II} A_3^{II}$$

háromszögek közűl az 1-ső és 2-ik, a 2-ik és 3-ik, a 3-ik és 4-ik, a 4-ik és 1-ső perspectivás; a collineatio-középpontok és tengelyek:

$$P_1^{I}, \ | A_1 A_2 A_3 | ; \ P^{III} = (\gamma_1^{III} \gamma_2^{III} \gamma_3^{III}), \ p^{III}; \ \Sigma^{II, III} = (a_1 a_2 a_3), \ p^{I};$$
$$P^{II} = (\beta_1^{II} \beta_2^{II} \beta_3^{II}), \ p^{II};$$

[1] Veronese: id. m. 36. old.

és, mert a collineatio-tengelyek egymást a P Steiner-pontban metszik, a négy collineatio-középpont ugyanegy egyenesen fekszik.[1] Ámde a három utolsó pont a p Cayley-egyenesen fekszik, minek következtében a p egyenes a P_1^I ponton megy keresztül.

Ugyanígy kimutatható, hogy a p egyenes a P_1^{II} és P_1^{III} ponton is keresztül megy, vagyis hogy a P Steiner-pontból kisugárzó $p^I p^{II} p^{III}$ Pascal-egyenesekhez rendelt V_1 pontok a P-hez rendelt p Cayley-egyenesen feküsznek.

A tételből még az is következik, hogy a $\sigma^{II,\ III} = | P A_1 A_2 A_2 |$ Steiner-egyeneshez rendelt $V_1^{II,\ III} = [P^I A_1^{IV} A_2^{V} A_3^{VI}]_1$ négyszög szögpontjai a $p\, a_1\, a_2\, a_3$ Cayley-egyenesekben feküsznek, mely utóbbiak

[1] »Ha a $\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 \Delta_4$ háromszögek közül $\Delta_1 \Delta_2$, $\Delta_2 \Delta_3$, $\Delta_3 \Delta_4$, $\Delta_4 \Delta_1$ a t_{12}, O_{12}; t_{23}, O_{23}; t_{34}, O_{34}; t_{41}, O_{41} collineatio-tengelyre es középpontra vonatkozólag perspectivás és a négy collineatio-tengely egymást egy T pontban metszi, akkor a négy collineatio-középpont egy o egyenesen fekszik«.

Bizonyítás :

Ha azt a háromszöget, mely a $\Delta_1 \Delta_2$ háromszögekkel a t_{12} tengelyre, a $\Delta_3 \Delta_4$ háromszögekkel a t_{34} tengelyre vonatkozólag perspectivás, Δ_5-tel jelöljük; továbbá azt a háromszöget, mely a $\Delta_1 \Delta_4$ háromszögekkel, a t_{41}, a $\Delta_2 \Delta_3$ háromszögekkel a t_{23} tengelyre perspectivás, Δ_6-tal jelöljük, akkor

a $\Delta_1 \Delta_2 \Delta_5$	háromszögek a t_{12}	tengelyre	és $O_{12} O_{25} O_{15}$	középpontokra
a $\Delta_3 \Delta_4 \Delta_5$	» a t_{34}	»	és $O_{34} O_{45} O_{34}$	»
a $\Delta_1 \Delta_4 \Delta_6$	» a t_{41}	»	és $O_{41} O_{46} O_{16}$	»
a $\Delta_2 \Delta_3 \Delta_6$	» a t_{23}	»	és $O_{23} O_{36} O_{26}$	»

vonatkozólag perspectivásak, miért is az egyes sorokban levő középpontok egy egyenesen feküsznek.

Miután a $\Delta_1 \Delta_4 \Delta_5$ háromszögek a t_{41}, O_{41}; t_{12}, O_{15}; t_{34}, O_{45} collineatio-tengelyekre és középpontokra vonatkozólag perspectivásak, és a feltétel szerint a $t_{41}\, t_{12}\, t_{34}$ egyenesek egymást a T pontban metszik, az $O_{41} O_{15} O_{45}$ pontok egybeesnek, még pedig az O_{41} pontban.

Ugyanígy kimutatható, hogy az $O_{25} O_{35} O_{23}$, valamint az $O_{26} O_{12} O_{16}$ és az $O_{34} O_{36} O_{46}$ pontok az O_{23}, O_{12}, illetőleg O_{34} ponttal egyesűlnek. Ennélfogva

$$| O_{12} O_{25} O_{15} | = | O_{12} O_{23} O_{41} |, \quad | O_{34} O_{45} O_{35} | = | O_{34} O_{41} O_{23} |,$$
$$| O_{41} O_{46} O_{16} | = | O_{41} O_{34} O_{24} |, \quad | O_{23} O_{36} O_{26} | = | O_{23} O_{34} O_{12} |,$$

a miből már következtetni lehet, hogy az $O_{12} O_{23} O_{34} O_{41}$ pontok egy egyenesben feküsznek.

egymást a $\sigma^{II, III}$ STEINER-egyeneshez rendelt $\Sigma^{II, III}$ SALMON-pontban metszik. Ennélfogva:

Egy STEINER-*egyeneshez rendelt V_1 négyszög szögpontjai azokon a* CAYLEY-*egyeneseken feküsznek, melyek egymást a* STEINER-*egyeneshez rendelt* SALMON-*pontban metszik.*

27. Két DESARGUES-configuratiónak kölcsönös helyzete ezek-után a következőkép állapítható meg.

A $\sigma^{II, III} = |\,P\,A_1\,A_2\,A_3\,|$ STEINER-egyeneshez a $\Sigma^{II, III} = (p\,a_1\,a_2\,a_3)$ SALMON-pont, a $v^{II, III} = p^I a_1^{IV} a_2^{V} a_3^{VI}$ négyoldal, a $V_1^{II, III} = [P^I A_1^{IV} A_2^{V} A_3^{VI}]_1$ négyszög és a II. és III. DESARGUES-configuratio van rendelve.

E DESARGUES-configuratiókat egy-egy négyszögre és négyoldalra bonthatjuk:

$$p^{II} a_1^{II} a_2^{II} a_3^{II} = C_1^{II} C_2^{II} C_3^{III} \mathbf{B}_1^{II} \mathbf{B}_2^{II} \mathbf{B}_3^{II},$$
$$P^{II} A_1^{II} A_2^{II} A_3^{II} = c_1^{II} c_2^{II} c_3^{II} \beta_1^{II} \beta_2^{II} \beta_3^{II},$$
$$p^{III} a_1^{III} a_2^{III} a_3^{III} = B_1^{III} B_2^{III} B_3^{III} \Gamma_1^{III} \Gamma_2^{III} \Gamma_3^{III},$$
$$P^{III} A_1^{III} A_2^{III} A_3^{III} = b_1^{III} b_2^{III} b_3^{III} \gamma_1^{III} \gamma_2^{III} \gamma_3^{III}.$$

A négyoldalaknak

$$p^{II},\ p^{III};\ a_1^{II},\ a_1^{III};\ a_2^{II},\ a_2^{III};\ a_3^{II},\ a_3^{III}$$

oldalain rajta feküsznek a P, A_1, A_2, A_3 STEINER-pontok, és a négyszögeknek

$$P^{II},\ P^{III};\ A_1^{II}\ A_1^{III};\ A_2^{II},\ A_2^{III};\ A_3^{II},\ A_3^{III}$$

pontjain a p, a_1, a_2, a_3 CAYLEY-egyenesek mennek keresztül.

A négyszögek

$$a_1^{II},\ b_1^{III};\ c_2^{II},\ b_2^{III};\ c_3^{II},\ b_3^{III};\ \beta_1^{II},\ \gamma_1^{III};\ \gamma_2^{II},\ \gamma_2^{III};\ \beta_3^{II},\ \gamma_3^{III}$$

oldalai egymást a $v^{II, III} = p^I a_1^{IV} a_2^{V} a_3^{VI}$ négyoldal szögpontjaiban metszik, miért is ama négyszögeket négy pár a $v^{II, III}$ négyoldal oldalaira, mint collineatio-tengelyre, perspectivás háromszögre bonthatjuk; ellenben a négyoldalak

$$C_1^{II},\ B_1^{III};\ C_2^{II},\ B_2^{III};\ C_3^{II},\ B_3^{III};\ \mathbf{B}_1^{II},\ \Gamma_1^{III};\ \mathbf{B}_2^{II},\ \Gamma_2^{III};\ \mathbf{B}_3^{II},\ \Gamma_3^{III}$$

szögpontjai páronként a $V_1^{II, III} = [P^I A_1^{IV} A_2^{V} A_3^{VI}]_1$ négyszög oldalain feküsznek (25.), és e négyoldalak szintén négy pár a $V^{II, III}$ négyszög szögpontjaira vonatkozó perspectivás háromszögre bonthatók.

Továbbá az

$$a_1^{II}\,a_2^{II}\,a_3^{II} \quad p^{II}\,a_2^{II}\,a_3^{II} \quad p^{II}\,a_3^{II}\,a_1^{II} \quad p^{II}\,a_1^{II}\,a_2^{II}$$
$$a_1^{III}\,a_2^{III}\,a_3^{III} \quad p^{III}\,a_2^{III}\,a_3^{III} \quad p^{III}\,a_3^{III}\,a_1^{III} \quad p^{III}\,a_1^{III}\,a_2^{III}$$

háromszögek, melyekre a $p^{II}\,a_1^{II}\,a_2^{II}\,a_3^{II}$, $p^{III}\,a_1^{III}\,a_2^{III}\,a_3^{III}$ négyoldalak bonthatók, perspectivásak a

$$[A_1^{IV}\,A_2^{V}\,A_3^{VI}]_1, \quad [P^{I}\,A_2^{V}\,\Delta_3^{VI}]_1, \quad [P^{I}\,A_3^{VI}\,A_1^{IV}]_1, \quad [P^{I}\,A_1^{IV}\,A_2^{V}]_1$$

háromszögekkel, melyekre a $V_1^{II,\,III}$ négyszög oszlik; a kimaradt oldalak és szögpontok

$$p^{II},\ p^{III},\ P_1^{III}; \quad a_1^{II},\ a_1^{III},\ A_{1_1}^{IV}; \quad a_2^{II},\ a_2^{III},\ A_{2_1}; \quad a_3^{II},\ a_3^{III},\ A_{3_1}^{VI}$$

a collineatio-tengelyek és középpontok.

Ugyanekképen az

$$A_1^{II}\,A_2^{II}\,A_3^{II} \quad P^{II}\,A_2^{II}\,A_3^{II} \quad P^{II}\,A_3^{II}\,A_1^{II} \quad P^{II}\,A_1^{II}\,A_2^{II}$$
$$A_1^{III}\,A_2^{III}\,A_3^{III} \quad P^{III}\,A_2^{III}\,A_3^{III} \quad P^{III}\,A_3^{III}\,A_1^{III} \quad P^{III}\,A_1^{III}\,A_2^{III}$$

háromszögek, melyekre a $P^{II}\,A_1^{II}\,A_2^{II}\,A_3^{II}$, $P^{III}\,A_1^{III}\,A_2^{III}\,A_3^{III}$ négyszögek bonthatók, perspectivásak a $v^{II,\,III} = p^{I}\,a_1^{IV}\,a_2^{V}\,a_3^{VI}$ négyoldalból leszármaztatható

$$a_1^{IV}\,a_2^{V}\,a_3^{VI} \quad p^{I}\,a_2^{V}\,a_3^{VI} \quad p^{I}\,a_3^{VI}\,a_1^{IV} \quad p^{I}\,a_1^{IV}\,a_2^{V}$$

háromszögekkel; a kimaradt

$$P^{II},\ P^{III},\ p^{I};\ A_1^{II},\ A_1^{III},\ a_1^{IV};\ A_2^{II},\ A_2^{III},\ a_2^{V};\ A_3^{II},\ A_3^{III},\ a_3^{VI}$$

szögpontok és oldalak a collineatio-középpontok és tengelyek. Ennélfogva:

Minden STEINER-*egyeneshez két* DESARGUES *configuratio van rendelve, melyek egy-egy négyoldalra és négyszögre bonthatók.*

A két négyoldal, melynek oldalai a STEINER-*egyenesen fekvő* STEINER-*pontokon mennek keresztül, négy perspectivás háromszögre oszlik; a collineatio-tengelyek a* STEINER-*egyenesben feküsznek, a collineatio-középpontok pedig a* STEINER-*egyeneshez ren-*

A két négyszög, melyeknek szögpontjai a STEINER-*egyeneshez rendelt* SALMON-*ponton keresztűlmenő* CAYLEY-*egyeneseken feküsznek, négy perspectivás háromszögre oszlik; a collineatio középpontok a* SALMON-*pontban egyesűlnek, ellenben a collineatio-*

delt V_1 négyszögnek szögpontjai.

E háromszögek még azokkal a háromszögekkel is perspectivásak, a melyekre a V_1 oszlik; a négyoldalaknak és a négyszögnek kimaradt oldalai és szögpontjai a collineatió-tengelyek és középpontok.

tengelyek a Steiner-*egyeneshez rendelt v négyoldalnak oldalai.*

E háromszögek még azokkal a háromszögekkel is perspectivásak, a melyekre a v négyoldal oszlik; a négyszögeknek és a négyoldalnak kimaradt szögpotjai és oldalai a collineatio-középpontok és tengelyek.

28. A 25. pontban kimutattuk, hogy a

$$\mathbf{B}_1{}^{\text{II}}\Gamma_1{}^{\text{III}},\ \mathbf{B}_2{}^{\text{II}}\Gamma_2{}^{\text{III}},\ \mathbf{B}_3{}^{\text{II}}\Gamma_3{}^{\text{III}},\ B_1{}^{\text{III}}C_1{}^{\text{II}},\ B_2{}^{\text{III}}C_2{}^{\text{II}},\ B_3{}^{\text{III}}C_3{}^{\text{II}}$$

Kirkman-pontok a $V_1{}^{\text{II, III}}$ négyoldalnak

$$|\, A_2{}^{\text{V}}A_3{}^{\text{VI}}\,|_1,\ |\, A_3{}^{\text{VI}}A_1{}^{\text{IV}}\,|_1,\ |\, P^{\text{I}}A_1{}^{\text{IV}}\,|_1,\ |\, P^{\text{I}}A_2{}^{\text{V}}\,|_1,\ |\, P^{\text{I}}A_3{}^{\text{VI}}\,|_1$$

oldalain feküsznek. Amaz egyenesek azonban a következő hat V négyszögnek

$$V^{\text{V, IV}}=\Pi^{\text{VI}}\mathbf{A}_1{}^{\text{I}}\mathbf{B}_1{}^{\text{II}}\Gamma_1{}^{\text{III}};\ V^{\text{VI, IV}}=\Pi^{\text{V}}\mathbf{A}_2{}^{\text{I}}\mathbf{B}_2{}^{\text{II}}\Gamma_2{}^{\text{III}},$$
$$V^{\text{IV, V}}=\Pi^{\text{VI}}\mathbf{A}_3{}^{\text{I}}\mathbf{B}_3{}^{\text{II}}\Gamma_3{}^{\text{III}},$$
$$V^{\text{I, IV}}=B_1{}^{\text{III}}C_1{}^{\text{II}}\mathbf{A}_2{}^{\text{VI}}\mathbf{A}_3{}^{\text{V}},\ V^{\text{I, V}}=B_2{}^{\text{III}}C_2{}^{\text{II}}\mathbf{A}_3{}^{\text{IV}}\mathbf{A}_1{}^{\text{VI}},$$
$$V^{\text{I, VI}}=B_3{}^{\text{III}}C_3{}^{\text{II}}\mathbf{A}_1{}^{\text{V}}\mathbf{A}_2{}^{\text{IV}}$$

egy-egy oldalát képezik, valamint fordítva is a $V^{\text{II, III}}=P^{\text{I}}A_1{}^{\text{IV}}A_2{}^{\text{V}}A_3{}^{\text{VI}}$ négyszögnek oldalai egyszersmind a $V_1{}^{\text{V, VI}}$, $V_1{}^{\text{VI, IV}}$, $V_1{}^{\text{I, IV}}$, $V_1{}^{\text{I, V}}$, $V_1{}^{\text{I, VI}}$ négyszögeknek egy-egy oldalával egyesűlnek, úgy hogy a tizenöt V_1 négyszögnek 90 oldala a tizenöt V négyszögnek 90 oldalával egybeesik.

Az V. táblázatban a tizenöt V_1 négyszög, valamint az azoknak oldalain fekvő Kirkman-pontok vannak felírva. Ezeket az oldalakat vagy egyeneseket általában g_{01}-gyel jelöljük, két oly egyenest pedig, melyeken egymáshoz rendelt Kirkman- és V_1-pontok feküsznek g_{01}, g'_{01}-gyel.

29. Mielőtt vizsgálatainkat folytatnók, még az ugyanegy Steiner-egyeneshez rendelt Δ háromszög és v négyoldal közötti összefüggést akarjuk bemutatni. Legyenek azok:

$$\Delta^{\text{II, III}}=[1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6]\ \text{és}\ v^{\text{II, III}}=p^{\text{I}}a_1{}^{\text{IV}}a_2{}^{\text{V}}a_3{}^{\text{VI}}.$$

A $p^{\mathrm{I}} = 1\,6\,3\,5\,4\,2$ PASCAL-egyenesen fekvő

k ü s z n e k

$^{\mathrm{III}}\ \Gamma_1^{\mathrm{II}}$	$'P_1^{\mathrm{I}}\ A_{2_1}^{\mathrm{V}}\ B_2^{\mathrm{III}}\ C_2^{\mathrm{II}}$	$'P_1^{\mathrm{I}}\ A_{3_1}^{\mathrm{VI}}\ B_3^{\mathrm{III}}\ C_3^{\mathrm{II}}$
$_1^{\mathrm{I}}\ A_1^{\mathrm{III}}$	$'P_1^{\mathrm{II}}\ B_{2_1}^{\mathrm{V}}\ C_2^{\mathrm{I}}\ A_2^{\mathrm{III}}$	$'P_1^{\mathrm{II}}\ B_{3_1}^{\mathrm{VI}}\ C_3^{\mathrm{I}}\ A_3^{\mathrm{III}}$
$_1^{\mathrm{II}}\ B_1^{\mathrm{I}}$	$'P_1^{\mathrm{III}}\ C_{2_1}^{\mathrm{V}}\ A_2^{\mathrm{II}}\ B_2^{\mathrm{I}}$	$'P_1^{\mathrm{III}}\ C_{3_1}^{\mathrm{VI}}\ A_3^{\mathrm{II}}\ B_3^{\mathrm{I}}$
$^{\mathrm{VI}}\ \mathbf{A}_3^{\mathrm{V}}$	$'\Pi_1^{\mathrm{IV}}\ \mathbf{B}_{1_1}^{\mathrm{II}}\ \mathbf{B}_2^{\mathrm{VI}}\ \mathbf{B}_3^{\mathrm{V}}$	$'\Pi_1^{\mathrm{IV}}\ \Gamma_{1_1}^{\mathrm{III}}\ \Gamma_2^{\mathrm{VI}}\ \Gamma_3^{\mathrm{V}}$
$^{\mathrm{IV}}\ \mathbf{A}_1^{\mathrm{VI}}$	$'\Pi_1^{\mathrm{V}}\ \mathbf{B}_{2_1}^{\mathrm{II}}\ \mathbf{B}_3^{\mathrm{IV}}\ \mathbf{B}_1^{\mathrm{VI}}$	$'\Pi_1^{\mathrm{V}}\ \Gamma_{2_1}^{\mathrm{III}}\ \Gamma_3^{\mathrm{IV}}\ \Gamma_1^{\mathrm{VI}}$
$^{\mathrm{V}}\ \mathbf{A}_2^{\mathrm{IV}}$	$'\Pi_1^{\mathrm{VI}}\ \mathbf{B}_{3_1}^{\mathrm{II}}\ \mathbf{B}_1^{\mathrm{V}}\ \mathbf{B}_2^{\mathrm{IV}}$	$'\Pi_1^{\mathrm{VI}}\ \Gamma_{3_1}^{\mathrm{III}}\ \Gamma_1^{\mathrm{V}}\ \Gamma_2^{\mathrm{IV}}$
$_2^{\mathrm{I}}\ \Gamma_3^{\mathrm{IV}}$	$'C_{1_1}^{\mathrm{II}}\ \mathbf{A}_{2_1}^{\mathrm{VI}}\ C_3^{\mathrm{I}}\ \mathbf{B}_2^{\mathrm{IV}}$	$'C_{1_1}^{\mathrm{II}}\ \mathbf{A}_{3_1}^{\mathrm{V}}\ C_2^{\mathrm{I}}\ \mathbf{B}_3^{\mathrm{IV}}$
$^{\mathrm{I}}\ \mathbf{A}_3^{\mathrm{IV}}$	$'A_{1_1}^{\mathrm{III}}\ \mathbf{B}_{2_1}^{\mathrm{VI}}\ A_3^{\mathrm{II}}\ \Gamma_2^{\mathrm{IV}}$	$'A_{1_1}^{\mathrm{III}}\ \mathbf{B}_{3_1}^{\mathrm{V}}\ A_2^{\mathrm{II}}\ \Gamma_3^{\mathrm{IV}}$
$^{\mathrm{III}}\ \mathbf{B}_2^{\mathrm{IV}}$	$'B_{1_1}^{\mathrm{I}}\ \Gamma_{2_1}^{\mathrm{VI}}\ B_3^{\mathrm{III}}\ \mathbf{A}_2^{\mathrm{IV}}$	$'B_{1_1}^{\mathrm{I}}\ \Gamma_{3_1}^{\mathrm{V}}\ B_2^{\mathrm{III}}\ \mathbf{A}_3^{\mathrm{IV}}$
$B_3^{\mathrm{I}}\ \Gamma_1^{\mathrm{V}}$	$'C_{2_1}^{\mathrm{II}}\ \mathbf{A}_{3_1}^{\mathrm{IV}}\ C_1^{\mathrm{I}}\ \mathbf{B}_3^{\mathrm{V}}$	$'C_{2_1}^{\mathrm{II}}\ \mathbf{A}_{1_1}^{\mathrm{VI}}\ C_3^{\mathrm{I}}\ \mathbf{B}_1^{\mathrm{V}}$
$^{\mathrm{II}}\ \mathbf{A}_1^{\mathrm{V}}$	$'A_{2_1}^{\mathrm{III}}\ \mathbf{B}_{3_1}^{\mathrm{IV}}\ A_1^{\mathrm{II}}\ \Gamma_3^{\mathrm{V}}$	$'A_{2_1}^{\mathrm{III}}\ \mathbf{B}_{1_1}^{\mathrm{VI}}\ A_3^{\mathrm{II}}\ \Gamma_1^{\mathrm{V}}$
$_3^{\mathrm{III}}\ \mathbf{B}_1^{\mathrm{V}}$	$'B_{2_1}^{\mathrm{I}}\ \Gamma_{3_1}^{\mathrm{IV}}\ B_1^{\mathrm{III}}\ \mathbf{A}_3^{\mathrm{V}}$	$'B_{2_1}^{\mathrm{I}}\ \Gamma_{1_1}^{\mathrm{VI}}\ B_3^{\mathrm{III}}\ \mathbf{A}_1^{\mathrm{V}}$
$B_1^{\mathrm{I}}\ \Gamma_2^{\mathrm{VI}}$	$'C_{3_1}^{\mathrm{II}}\ \mathbf{A}_{1_1}^{\mathrm{V}}\ C_2^{\mathrm{I}}\ \mathbf{B}_1^{\mathrm{VI}}$	$'C_{3_1}^{\mathrm{II}}\ \mathbf{A}_{2_1}^{\mathrm{IV}}\ C_1^{\mathrm{I}}\ \mathbf{B}_2^{\mathrm{VI}}$
$^{\mathrm{II}}\ \mathbf{A}_2^{\mathrm{VI}}$	$'A_{3_1}^{\mathrm{III}}\ \mathbf{B}_{1_1}^{\mathrm{V}}\ A_2^{\mathrm{II}}\ \Gamma_1^{\mathrm{VI}}$	$'A_{3_1}^{\mathrm{III}}\ \mathbf{B}_{2_1}^{\mathrm{IV}}\ A_1^{\mathrm{II}}\ \Gamma_2^{\mathrm{VI}}$
$_1^{\mathrm{III}}\ \mathbf{B}_2^{\mathrm{VI}}$	$'B_{3_1}^{\mathrm{I}}\ \Gamma_{1_1}^{\mathrm{V}}\ B_2^{\mathrm{III}}\ \mathbf{A}_1^{\mathrm{VI}}$	$'B_{3_1}^{\mathrm{I}}\ \Gamma_{2_1}^{\mathrm{IV}}\ B_1^{\mathrm{III}}\ \mathbf{A}_2^{\mathrm{VI}}$

A $p^I = 1\,6\,3\,5\,4\,2$ Pascal-egyenesen fekvő

$(3\,2,\ 4\,1)$ pont polarisa a $(3\,4,\ 1\,2)$ és $(1\,3,\ 2\,4) = (a_2{}^V\, a_3{}^{VI})$ összekötő egyenese.
$(1\,6,\ 2\,5)$ » » $(1\,2,\ 5\,6)$ és $(1\,5,\ 2\,6) = (a_3{}^{VI}\, a_1{}^{IV})$ » »
$(6\,3,\ 5\,4)$ » » $(5\,6,\ 3\,4)$ és $(3\,5,\ 4\,6) = (a_1{}^{IV}\, a_2{}^V)$ » »

E polarisok metszőpontja, mely a p^I-nek polarisa, collineatio-középpontja az $[5\,6\ \ 3\,4\ \ 1\,2]$, $a_1{}^{IV}\, a_2{}^V\, a_3{}^{VI}$ háromszögeknek.

Ugyanígy kimutatható, hogy az $a_1{}^{IV}$, $a_2{}^V$, $a_3{}^{VI}$ egyeneseknek polusai egyszersmind collineatio-középpontjai az

$$[5\,6\ \ 3\,4\ \ 1\,2],\ p^I a_3{}^{VI} a_2{}^V;\ [3\,4\ \ 1\,2\ \ 5\,6],\ p^I a_1{}^{IV} a_3{}^{VI};$$
$$[1\,2\ \ 5\,6\ \ 3\,4],\ p^I a_2{}^V a_1{}^{IV}$$

perspectivás háromszögeknek.

Kitűnik továbbá, hogy az $[1\,2\ \ 3\,4\ \ 5\,6]$ háromszög $(3\,4,\ 1\,2)$ szögpontja az $(1\,4,\ 2\,3) = (p^I a_1{}^{IV})$, $(1\,3,\ 2\,4) = (a_2{}^V a_3{}^{VI})$ pontoknak összekötő egyenese. Ennélfogva a $(p^I a_1{}^{IV})$, $(a_2{}^V a_3{}^{VI})$ pontoknak polarisai, melyek a p^I, $a_1{}^{IV}$; $a_2{}^V$, $a_3{}^{VI}$ egyenesek polusainak összekötő egyenesei, egymást a $(3\,4,\ 1\,2)$ pontban metszik.

Látható tehát, hogy a

$$\Delta^{II,\ III} = [1\,2\ \ 3\,4\ \ 5\,6]$$

háromszög a

$$v^{II,\ III} = p^I a_1{}^{IV} a_2{}^V a_3{}^{VI}$$

négyoldal polaris alakzatának átlósháromszöge, vagy a mi ugyanaz: a $v^{II,\ III}$ négyoldal átlósháromszöge polaris alakzata a $\Delta^{II,\ III}$ háromszögnek a Pascal-hatszög körűl írt kúpszeletre vonatkozólag.

E szerint:

Egy Steiner-egyeneshez rendelt v négyoldal oly négy háromszögre oszlik, melyek a Steiner-egyeneshez rendelt Δ háromszöggel perspectivásak; a collineatio középpontok a v négyoldal polaris négyszögének szögpontjai a Pascal-hatszög körűl írt kúpszeletre vonatkozólag. A Δ háromszög polaris alakzata a v négyoldal átlósháromszögének s így véle perspectivás.

10. Az Y-négyoldalakról.

30. A 20. pontban két négyszöggel

$$V^{II,\,III} = P^{I} A_1^{IV} A_2^{V} A_3^{VI}, \quad S^{II,\,III} = \Pi\, \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3$$

találkoztunk (9. és 8. ábra), melyeknek szögpontjai az egymást a $\Sigma^{II,\,III}$ Salmon-pontban metsző $p\, a_1\, a_2\, a_3$ Cayley-egyeneseken feküdtek. E négyszögek szögpontjainak összekötő egyenesei a $\Delta^{II,\,III} = [1\,2 \;\; 3\,4 \;\; 5\,6]$ háromszög szögpontjain mennek keresztűl, t. i.

$$\text{a } \Pi A_1^{IV} = \pi^{IV}, \quad \mathbf{A}_1 P^{I} = \alpha_1^{I}, \quad \mathbf{A}_2 A_3^{VI} = \alpha_2^{VI}, \quad \mathbf{A}_3 A_2^{V} = \alpha_3^{V}$$

egyenesek az (1 2, 3 4) ponton,

$$\text{a } \Pi A_2^{V} = \pi^{V}, \quad \mathbf{A}_1 A_3^{VI} = \alpha_1^{VI}, \quad \mathbf{A}_2 P^{I} = \alpha_2^{I}, \quad \mathbf{A}_3 A_1^{IV} = \alpha_3^{IV}$$

egyenesek az (5 6, 1 2) ponton,

$$\text{a } \Pi A_3^{V} = \pi^{VI}, \quad \mathbf{A}_1 A_2^{V} = \alpha_1^{V}, \quad \mathbf{A}^2 A_1^{IV} = \alpha_1^{IV}, \quad \mathbf{A}_3 P^{I} = \alpha_3^{I}$$

egyenesek az (3 4, 5 6) ponton

mennek keresztűl.

A $V^{II,\,III}$, $S^{II,\,III}$ négyszögek négy pár háromszögre oszlanak, melyek a $\Delta^{II,\,III}$ háromszöggel perspectivásak, ezek:

$$\begin{array}{cccccc} A_1^{IV} & A_1^{V} & A_3^{VI} & P^{I} & A_2^{V} & A_3^{VI} \\ \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_3 & \Pi & \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_3 \\ (3\,4,\ 1\,2) & (1\,2,\ 5\,6) & (5\,6,\ 3\,4) & (1\,2,\ 3\,4) & (3\,4,\ 5\,6) & (5\,6,\ 1\,2) \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} P^{I} & A_3^{VI} & A_1^{IV} & P^{I} & A_1^{IV} & A_2^{V} \\ \Pi & \mathbf{A}_3 & \mathbf{A}_1 & \Pi & \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ (5\,6,\ 1\,2) & (1\,2,\ 3\,4) & (3\,4,\ 5\,6) & (3\,4,\ 5\,6) & (5\,6,\ 1\,2) & (1\,2,\ 3\,4); \end{array}$$

a collineatio-középpontok:

$$\Sigma^{II,\,III} P^{I} \Pi, \quad \Sigma^{II,\,III} A_1^{IV} \mathbf{A}_1, \quad \Sigma^{II,\,III} A_2^{V} \mathbf{A}_2, \quad \Sigma^{II,\,III} A_3^{VI} \mathbf{A}_3.$$

Minthogy ez utóbbiak egy-egy egyenesben feküsznek, a collineatio-tengelyek egy

$$Y^{II,\,III} = Y_{12}\, Y_{34}\, Y_{56}\, Y'_{12}\, Y'_{34}\, Y'_{56}$$

négyoldalnak oldalai lesznek, melynek szögpontjaiban ama négyszögek és ama háromszög oldalai egymást metszik, még pedig

az Y_{12} pontban az $A_1^{IV} A_2^{V}$, $\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2$, 1 2, az Y'_{12} pontban a $P^{I} A_3^{VI}$, $\Pi \mathbf{A}_3$, 1 2
az Y_{56} » $A_2^{V} A_3^{VI}$, $\mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3$, 5 6; az Y'_{56} » $P^{I} A_1^{IV}$, $\Pi \mathbf{A}_1$, 5 6
az Y_{34} » $A_3^{VI} A_1^{IV}$, $\mathbf{A}_3 \mathbf{A}_1$, 3 4; az Y'_{34} » $P^{I} A_2^{V}$, $\Pi \mathbf{A}_2$, 3 4
oldalak.

Az $Y^{II, III}$ négyoldalt a $\sigma^{II, III}$ egyeneshez és a $\Sigma^{II, III}$ ponthoz rendeljük. E négyoldal szögpontjai a $\Delta^{II, III}$ háromszög szögpontjaitól harmonicusan vannak elválasztva, minthogy az a háromszög átlósháromszöge a szóban lévő négyoldalnak.

A tizenöt σ egyeneshez rendelt Y-négyoldalaknak csak 45 szögpontjuk van, mert kettő-kettő közülök mindig egybeesik.

Ugyanis a Pascal-hatszögnek mindegyik oldala három Δ-háromszögnek oldala; pl. az $\overline{12}$ oldal a $\Delta^{II, III}$, $\Delta^{IV, V}$, $\Delta^{I, VI}$ háromszögeknek oldala, melyek a

$$\sigma^{II, III} = | P A_1 A_2 A_3 |, \sigma^{IV, V} = | \Pi \mathbf{A}_3 \mathbf{B}_3 \Gamma_3 |, \sigma^{I, VI} = | B_3 C_3 \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 |$$

Steiner-egyenesekhez rendelvék.

De az imént úgy tapasztaltuk, hogy a $\sigma^{I, IV}$, $\sigma^{IV, V}$ egyenesek a $\Delta^{II, III}$ háromszög 1 2 oldalát az Y_{12}, Y'_{12} pontokban metszik, melyek az (1 2, 3 4), (1 2, 5 6) pontoktól harmonicusan vannak elválasztva. Ugyanezen úton kimutatható, hogy a $\sigma^{II, III}$, $\sigma^{I, VI}$ egyenesek a $\Delta^{IV, V}$ háromszög $\overline{12}$ oldalát az Y''_2, Y'_{12} pontokban, a $\sigma^{II, III}$, $\sigma^{IV, V}$ egyenesek a $\Delta^{I, VI}$ háromszögnek $\overline{12}$ oldalát az Y''_{12}, Y_{12} pontokban metszik, még pedig úgy, hogy az Y''_{12}, Y'_{12} pontok az (1 2, 3 6), (1 2, 5 4)-től, az Y''_{12}, Y_{12} pontok az (1 2, 3 5), (1 2, 6 4)-től harmonicusan vannak elválasztva.

Ebből az következik, hogy *a 15 Y-négyoldal szögpontjainak száma 45, melyek hármasával a Δ-háromszögek oldalain feküsznek; továbbá a Δ-háromszögek oldalain az Y pontok harmonicusan választják el a* Pascal-*pontokat.*

31. A $\sigma^{II, III}$ egyenes a $\Delta^{II, III}$ háromszög $\overline{12}$ oldalát az Y''_{12} pontban metszi. Ugyanígy a $\sigma^{II, III}$ egyenes a $\Delta^{II, III}$ háromszögnek $\overline{34}$, $\overline{56}$ oldalát az Y''_{34}, Y''_{56} pontban metszi. Ennélfogva: *a 45 Y-pont hármasával a tizenöt* Steiner-*egyenesen, a tizenöt Δ-háromszögnek negyvenöt oldalán és a tizenöt Y-négyoldalnak hatvan oldalán fekszik.*

Az Y-négyoldalak hatvan oldaláról kimutatható, hogy hármasával a Steiner-*pontokon mennek keresztűl.*

Ha ugyanis a helyett, hogy, mint előbb, a $V^{II, III}$, $S^{II, III}$, $\Delta^{II, III}$-ból, a $\sigma^{III, I} = | P B_1 B_2 B_3 |$ Steiner-egyeneshez rendelt

$$V^{III, I} = P^{II} B_1^{IV} B_2^{V} B_3^{VI}, \quad S^{III, I} = \Pi \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_3, \quad \Delta^{III, I} = [1\,4\;\,3\,6\;\,5\,2]$$

négyszögekből, illetve háromszögből indulunk ki, azt látjuk, hogy az $Y^{III,\ I}$ négyoldal $Y_{14}\,Y_{52}\,Y_{36}$ oldala közös collineatio-tengelye a

$$B_1^{IV}\,B_2^{V}\,B_3^{VI},\ \mathbf{B}_1\,\mathbf{B}_2\,\mathbf{B}_3,\ (2\,5,\ 3\,6)\ (3\,6,\ 1\,4)\ (1\,4,\ 2\,5)$$

háromszögeknek.

Ha továbbá meggondoljuk, hogy az

$$\mathbf{A}_1\,\mathbf{A}_2\,\mathbf{A}_3,\quad (3\,4,\ 1\,2)\ (1\,2,\ 5\,6)\ (5\,6,\ 3\,4),$$
$$(2\,5,\ 3\,6)\ (3\,6,\ 1\,4)\ (14,\ 25),\quad \mathbf{B}_1\,\mathbf{B}_2\,\mathbf{B}_3$$

háromszögek közűl

az 1-ső és 2-ik a P^I és $|\,Y_{12}\,Y_{34}\,Y_{56}\,|$ coll.-középpont- és tengelyre
a 2-ik és 3-ik a Π és p^{III} » » »
a 3-ik és 4-ik a P^{II} és $|\,Y_{14}\,Y_{52}\,Y_{36}\,|$ » » »
a 4-ik és 1-ső a Π és $|\,P\,C_1\,C_2\,C_3\,|$ » » »

perspectivás, és hogy a collineatio-középpontok a p Cayley-egyenesen feküsznek, beláthatjuk, hogy a collineatio-tengelyek egymást ugyanegy pontban metszik.[1] Minthogy a p^{III} és a $|\,P\,C_1\,C_2\,C_3\,|$ egyenesek a P ponton mennek keresztűl, az $|\,Y_{12}\,Y_{34}\,Y_{56}\,|$ és $|\,Y_{14}\,Y_{52}\,Y_{36}\,|$ egyenesek és hasonlókép az $|\,Y_{16}\,Y_{32}\,Y_{54}\,|$ egyenes is a P ponton fog keresztűl menni.

A mint az imént láttuk, az $Y^{II,\ III}$ négyoldalnak $Y_{12}\,Y_{34}\,Y_{56}$ oldala a $\sigma^{II,\ III} = |\,P\,A_1\,A_2\,A_3\,|$ Steiner-egyenesnek P Steiner-pontján megy keresztűl. — Ugyanígy kell az $Y^{II,\ III}$ négyoldal $Y'_{12}\,Y'_{34}\,Y_{56}$, $Y'_{12}\,Y'_{56}\,Y_{34}$, $Y'_{56}\,Y'_{34}\,Y_{12}$ oldalainak, a $\sigma^{II,\ III}$-nak $A_1\,A_2\,A_3$ Steiner-pontján keresztűl mennie, vagyis: *egy* Steiner-*egyeneshez rendelt Y-négyoldalnak oldalai a* Steiner-*egyenest a* Steiner-*pontokban metszik.*

32. Térjünk vissza az előbbi configuratióhoz (9. ábra), a melyben a $V^{II,\ III}$, $S^{II,\ III}$, $V_1^{II,\ III}$ négyszögeknek szögpontjai a $p\,a_1\,a_2\,a_3$ Cayley-egyeneseken feküsznek (26.) és a $V_1^{II,\ III}$ négyszögnek átlósháromszöge a $\Delta^{II,\ III}$ háromszög

A $\Delta^{II,\ III}$ háromszög (3 4, 1 2), (1 2, 5 6), (5 6, 3 4) szögpontjaiban a $V_1^{II,\ III}$ négyszög

$$|\,A_2^{V}\,A_3^{VI}\,|_1,\quad |\,P^I\,A_1^{IV}\,|_1;\quad |\,A_3^{VI}\,A_1^{IV}\,|_1,\quad |\,P^I\,A_2^{V}\,|_1;$$
$$|\,A_1^{IV}\,A_2^{V}\,|_1,\quad |\,P^I\,A_3^{VI}\,|_1$$

oldalai egymást metszik, s azokon

[1] 26. pont, jegyzetben.

$$\mathbf{B}_1^{II}\,\Gamma_1^{III},\ B_1^{III}\,C_1^{II};\ \mathbf{B}_2^{II}\,\Gamma_2^{III},\ B_2^{III}\,C_2^{II};\ \mathbf{B}_3^{II}\,\Gamma_3^{III},\ B_3^{III}\,C_3^{II}$$

KIRKMAN-pontok (27.) is rajta feküsznek. Ámde a felírt KIRKMAN-pontok összekötő g_{01} egyenesei, mint a V-négyszögek oldalai, a hozzájuk rendelt Δ háromszögek oldalait Y-pontokban metszik, még pedig:

$$\left.\begin{array}{l}
\text{a } V^{V,\,VI} = \Pi^{IV}\,\mathbf{A}_1^{I}\,\mathbf{B}_1^{II}\,\Gamma_1^{III} \\
\text{a } V^{VI,\,IV} = \Pi^{V}\,\mathbf{A}_2^{I}\,\mathbf{B}_2^{II}\,\Gamma_2^{III} \\
\text{a } V^{IV,\,V} = \Pi^{VI}\,\mathbf{A}_3^{I}\,\mathbf{B}_3^{II}\,\Gamma_3^{III} \\
\text{a } V^{I,\,IV} = B_1^{III}\,C_1^{II}\,\mathbf{A}_2^{VI}\,\mathbf{A}_3^{V} \\
\text{a } V^{I,\,V} = B_2^{III}\,C_2^{II}\,\mathbf{A}_3^{IV}\,\mathbf{A}_1^{VI} \\
\text{a } V^{I,\,IV} = B_3^{III}\,C_3^{II}\,\mathbf{A}_1^{V}\,\mathbf{A}_2^{IV}
\end{array}\right\}\text{négyszögek}
\left.\begin{array}{l}
\mathbf{B}_1^{II}\,\Gamma_1^{III} \\
\mathbf{B}_2^{II}\,\Gamma_2^{III} \\
\mathbf{B}_3^{II}\,\Gamma_3^{III} \\
B_1^{III}\,C_1^{II} \\
B_2^{III}\,C_2^{II} \\
B_3^{III}\,C_3^{II}
\end{array}\right\}\text{oldala, a}
\left.\begin{array}{l}
\Delta^{V,\,VI} \\
\Delta^{VI,\,IV} \\
\Delta^{IV,\,V} \\
\Delta^{I,\,IV} \\
\Delta^{I,\,V} \\
\Delta^{I,\,VI}
\end{array}\right\}\text{háromszögek}
\left.\begin{array}{c}
56 \\ 34 \\ 12 \\ 56 \\ 34 \\ 12
\end{array}\right\}\text{oldalát az}
\left.\begin{array}{l}
Y_{56} \\ Y_{34} \\ Y_{12} \\ Y'_{56} \\ Y'_{34} \\ Y'_{12}
\end{array}\right\}\text{pontban}$$

metszi.

A fölsorolt Y-pontok azonban az $Y^{II,\,III}$ négyoldalnak szögpontjai; tehát a $V_1^{II,\,III}$ négyszög az $Y^{II,\,III}$ négyoldal körűl van írva, s mert átlósháromszögük közös, azért *az illető Y-négyoldalaknak oldalai a V_1 négyszögek szögpontjainak harmonicus polarisai a hozzájuk rendelt Δ háromszögekre vonatkozólag.*

33. Az $Y^{V,\,VI}$, $Y^{VI,\,IV}$, $Y^{IV,\,V}$ négyoldalak szemben fekvő szögpontjai az

$$Y_{32}\,Y''_{32},\ Y_{56}\,Y''_{56},\ Y_{14}\,Y''_{14};\ Y_{16}\,Y''_{16},\ Y_{34}\,Y''_{34},\ Y_{52}\,Y''_{52};$$
$$Y_{54}\,Y''_{54},\ Y_{12}\,Y''_{12},\ Y_{36}\,Y''_{36}$$

pontok, melyek az

$$\begin{array}{ll}
Y_{56}\,Y_{34}\,Y_{12}, & \sigma^{II,\,III} = P\,A_1\,A_2\,A_3 = Y''_{56}\,Y''_{34}\,Y''_{12} \\
Y_{12}\,Y_{52}\,Y_{36}, & \sigma^{III,\,I} = P\,B_1\,B_2\,B_3 = Y''_{14}\,Y''_{52}\,Y''_{36} \\
Y_{32}\,Y_{16}\,Y_{54}, & \sigma^{I,\,II} = P\,C_1\,C_2\,C_3 = Y''_{32}\,Y''_{16}\,Y''_{54}
\end{array}$$

egyenesekben (30, 31) feküsznek; ezek az egyenesek tehát involutiót képeznek.

Ennélfogva:

Minden STEINER-*ponton keresztűl megy három* STEINER-*egyenes, valamint három oldala azoknak az Y-négyoldalaknak, melyek e* STEINER-*egyenesekhez vannak rendelve. E hat egyenes oly involutiót képez, melyben a mondott Y-négyoldalak oldalai a* STEINER-*egyenesekhez kapcsoltak.*

Az $Y^{V,\,VI}$, $Y^{VI,\,IV}$, $Y^{IV,\,V}$ négyoldalak $\Delta^{V,\,VI}$, $\Delta^{VI,\,IV}$, $\Delta^{IV,\,V}$ átlósháromszögei a P collinatio-középpontra és a π^{IV}, π^{V}, π^{VI} collineatio-tengelyekre vonatkozólag perspectivásak (15.) lévén, következik, hogy a négyoldalak is perspectivásak a P pontra és a π^{IV}, π^{V}, π^{VI} tengelyekre vonatkozólag. Tudjuk továbbá (32), hogy ama négyoldalak oldalainak harmonicus polusai átlósháromszögeikre vonatkozólag a $V_1^{V,\ VI}$, $V_1^{VI,\ IV}$, $V_1^{IV,\ V}$ négyszögeknek szögpontjai; ezért e négyszögek is perspectivásak a P pontra és π^{IV}, π^{V}, π^{VI} tengelyekre.

Ennélfogva:

Egy STEINER-*ponton keresztűl menő három* STEINER-*egyeneshez rendelt Y-négyoldalak, (valamint V_1-négyszögek), páronként perspectivásak; a* STEINER-*ponton keresztűl menő* PASCAL-*egyenesek képezik a collineatio-tengelyeket, a* STEINER-*pont ellenpontja a collineatio-középpontot.*

Vagy:

Úgy a tizenöt Y-négyoldal, mint a tizenöt V_1-négyszög, hármasával húszszor perspectivás a húsz STEINER-*pontra, mint collineatio-középpontra vonatkozólag; a collineatio-középpontoknak, mint* STEINER-*pontoknak, ellenpontjain keresztűl menő* PASCAL-*egyenesek képezik a collineatio-tengelyeket.*

E tételek szerint az $Y^{II,\ III}$ négyoldal perspectivás

az $Y^{III,\ I}$, $Y^{II,\ I}$-gyel a Π, p^{III}, p^{II};
az $Y^{III,\ IV}$, $Y^{II,\ IV}$-gyel az A_1, a_1^{III}, a_1^{II};
az $Y^{III,\ V}$, $Y^{II,\ V}$-tel az A_2, a_2^{III}, a_2^{II};
az $Y^{III,\ VI}$, $Y^{II,\ VI}$-tal az A_3, a_3^{III}, a_3^{II}

pontokra és egyenesekre vonatkozólag; és ugyanígy a $V_1^{II,\ III}$ négyszög.

Tehát:

Mindegyik Y-négyoldal (V_1-négyszög) négy pár Y-négyoldallal (V_1-négyszöggel) perspectivás; a négy pár collineatio-tengely négy pár PASCAL-egyenes, melyek a felvett Y-négyoldalhoz rendelt STEINER-egyenesen fekvő STEINER-pontokban metszik egymást; a collineatio-középpontok pedig a STEINER-pontoknak ellenpontjai. *A négy pár* PASCAL-*egyenes két negyoldalt képez, melyek a* STEINER-*egyeneshez rendelt két* DESARGUES-*configuratióhoz tartoznak.*

34. Ha a (8. ábra)

$$p^{II} a_1^{II} p^{III} a_1^{III}, \quad p^{II} a_2^{II} p^{III} a_2^{III}, \quad p^{II} a_3^{II} p^{III} a_3^{III}$$

oldalú négyszögeket tekintjük, melyeknek két-két átlója

$$P Y_{12} Y_{34} Y_{56}, \; Y'_{12} Y'_{34} Y_{56}; \; P Y_{12} Y_{34} Y_{56}, \; Y'_{12} Y_{34} Y'_{56};$$
$$P Y_{12} Y_{34} Y_{56}, \; Y_{12} Y'_{34} Y'_{56}$$

az $Y^{II, III}$ négyoldalnak oldala, és

$$\mathbf{B}_1^{II}, (2\,3,\ 5\,6); \quad \mathbf{B}_2^{II}, (1\,6,\ 3\,4); \quad \mathbf{B}_3^{II}, (5\,4,\ 1\,2)$$

szögpontjai a p^{II} oldalon feküsznek, következik, hogy e szögpontpárok amaz átlóktól harmonicusan vannak elválasztva. Minthogy a p^{II} egyenes az $Y^{II, III}$, $Y^{II, I}$ perspectivás négyoldalaknak collineatiotengelye, mondhatjuk, hogy

Mindegyik Pascal-*egyenes collineatio-tengelye két Y-négyoldalnak; egy megfelelő oldalpár a* Pascal-*egyenest a* Steiner-*pontban, a többi három pár pedig más három pontban metszi. Ez a* Steiner-*pont harmonicusan választja el a három metszőpontot a* Pascal-*egyenesen fekvő* Kirkman- *és* Pascal-*pontoktól; továbbá a* Steiner-*pont ellenpontja a két perspectivás Y-négyoldalhoz tartozó collineatio-középpont.*

Ha ellenben a II Steiner-pontra vonatkozólag perspectivás

$$V_1^{II, III} = [P^I A_1^{IV} A_2^{V} A_3^{VI}]_1, \quad V_1^{I, II} = [P^{III} C_1^{IV} C_2^{V} C_3^{VI}]_1$$

négyszögeket tekintjük, melyeknek átlósháromszögei

$$\Delta^{II, III} = [1\,2\ \ 3\,4\ \ 5\,6], \quad \Delta^{I, II} = [5\,4\ \ 1\,6\ \ 3\,2],$$

azt látjuk, hogy ezeknek megfelelő oldalai egymást az (1 2, 5 4), (3 4, 1 6), (5 6, 3 2) Pascal-pontokban, amazoknak megfelelő oldalai pedig egymást a p^{II} egyenesnek

$$\mathbf{B}_1^{II} = (A_{2_1}^{V} A_{3_1}^{V},\ C_{2_1}^{V} C_{3_1}^{VI}), \quad \mathbf{B}_2^{II} = (A_{3_1}^{VI} A_{1_1}^{IV},\ C_{3_1}^{VI} C_{1_1}^{IV}),$$
$$\mathbf{B}_3^{II} = (A_{1_1}^{IV} A_{2_1}^{V},\ C_{1_1}^{IV} C_{2_1}^{V})$$

Kirkman-pontjaiban és még három U pontban:

$$(P_1^{I} A_{1_1}^{IV},\ P_1^{III} C_{1_1}^{IV}), \quad (P_1^{I} A_{2_1}^{V},\ P_1^{III} C_{2_1}^{V}), \quad (P_1^{I} A_{3_1}^{VI},\ P_1^{III} C_{3_1}^{VI})$$

metszik.

A négyszögek harmonicus tulajdonsága következtében az U pontok a Kirkman-pontokat két Pascal-egyenestől harmonikusan választják el. Ennélfogva:

Mindegyik Pascal-*egyenes két perspectivás V_1-négyszögnek collineatio-tengelye; a collineatio-középpont a* Pascal-*egyenesen fekvő* Steiner-*pont ellenpontja. A négyszögek megfelelő oldalpárjai egymást a collineatio-tengely három* Kirkman-*pontjában és más három U pontban metszik; ama négyszögek átlósháromszögeinek megfelelő oldalai pedig egymást a tengely* Pascal-*pontjaiban metszik. Két-két* Pascal-*pont egy* Kirkman-*ponttól és egy U ponttól harmonikusan van elválasztva.*

Mivel mindegyik Pascal-egyenesen három U pont fekszik, az U pontok száma $3.60 = 180$; s mert mindegyik U pontban egymást két g_{01} egyenes, mint V_1-négyszögeknek oldalai metszi, azért mindegyik g_{01} egyenesen négy U pont van. Így pl. a $P_1{}^{I} A_{1_1}{}^{IV}$ egyenesen rajta feküsznek a

$$(P^I A_1{}^{IV},\ P^{II} B_1{}^{IV})_1,\quad (P^I A_1{}^{IV},\ P^{III} C_1{}^{IV})_1,\quad (P^I A_1{}^{IV},\ A_1{}^{II} \Gamma_3{}^{V})_1,$$
$$(P^I A_1{}^{IV},\ A_1{}^{III} B_2{}^{VI})_1$$

pontok, melyek egyszersmind pontjai a p^{II}, p^{III}, $a_1{}^{II}$, $a_1{}^{III}$ egyeneseknek.

35. Az $Y^{II,\ III}$ négyszög Y'_{56} szögpontján keresztűl mennek (9. ábra) a $V^{II,\ III}$, $S^{II,\ III}$, $V_1{}^{II,\ III}$ négyszögeknek $P^I A_1{}^{IV}$, ΠA_1, $|\, P^I A_1{}^{IV} \,|_1$ oldalai, s az utóbbi oldalon még az $(1\,2,\ 3\,4)$ Pascal-pont is rajta fekszik. Abból, hogy a $P^I A_1{}^{IV} \Pi A_1$ négyszögnek átlóspontjai Y'_{56}, $\Sigma^{II,\ III}$, $(1\,2,\ 3\,4)$, következik, hogy a

$$P^I A_1{}^{IV},\ \Pi A_1;\quad Y'_{56} P_1{}^{I} A_{1_1}{}^{IV},\ Y'_{56} \Sigma^{II,\ III}$$

egyenespárok s így a

$$P^I,\ \Pi;\quad P_1{}^{I},\ \Sigma^{II,\ III}$$

pontpárok harmonicusan vannak elválasztva.

Ugyanígy kimutatható, hogy a p Cayley-egyenesen a P^{II}, Π; $P_1{}^{II}$, $\Sigma^{III,\ I}$ és a P^{III}, Π; $P_1{}^{III}$, $\Sigma^{I,\ II}$ pontpárok harmonicusan vannak elválasztva. Ennélfogva:

Mindegyik Cayley-*egyenesen egy* Steiner-, *három* Kirkman-, *három* Salmon- *és három V_1-pont fekszik. A* Steiner-

pont és mindegyik KIRKMAN-*pont az utóbbiakhoz rendelt* V_1-*pontoktól és egy-egy* SALMON-*ponttól harmonicusan van elválasztva.*

E tétel alapján a hatvan V_1-pont könnyen megszerkeszthető, ha a hatvan KIRKMAN-, húsz STEINER- és tizenöt SALMON-pont ismeretes. Pl. a p egyenesen fekvő P_1^I, P_1^{II}, P_1^{III} pontok a

$$(P^I \Pi P_1^I \; \Sigma^{II,\;III}) = (P^{II} \Pi P_1^{II} \; \Sigma^{III,\;I}) = (P^{II} \Pi P_1^{III} \; \Sigma^{I,\;II}) = -1$$

relatiókból könnyen megszerkeszthetők.

A fentebbi tételből (vagy az $A_1^{IV} A_2^V \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2$ négyszögből) következik, hogy a $V_1^{II,\;III}$ négyszög $| A_1^{IV} A_2^V |$ oldalán a szögpontok az Y_{12}, (3 4, 5 6) pontoktól harmonicusan vannak elválasztva. Vagyis: a g_{01} egyeneseken fekvő V_1-pontpárok az Y pontoktól és a PASCAL-pontoktól harmonicusan vannak elválasztva.

36. Ha a 8-ik ábrában a $p^{II} p^{III} a_3^{II} a_3^{III}$ négyoldalt tekintjük, melynek egyik átlóspontja és átlója Y_{12}, $\sigma^{II,\;III}$, azt látjuk, hogy a $p^{II} p^{III}$ egyenespárok a $\sigma^{II,\;III}$ $| P Y_{12} Y_{34} Y_{56} |$ egyenespároktól, és hasonlókép az $a_3^{II} a_3^{III}$ egyenespárok a $\sigma^{II,\;III}$ $| A_3 Y_{12} Y'_{34} Y'_{56} |$ egyenespároktól harmonicusan vannak elválasztva. Minthogy mindegyik STEINER-ponton a tizenöt Y-négyoldal hatvan oldala közűl három megy keresztűl, kimondhatjuk, hogy

Egy STEINER-*ponton keresztűl menő három* PASCAL-*egyenes közűl kettő-kettő harmonicusan választja el a* STEINER-*egyenest a* STEINER-*egyeneshez rendelt Y-négyoldal három oldalától.*

Ha továbbá a $p^{II} p^{III} a_3^{II} a_3^{III}$ négyoldalnak azt az átlóját

$$\mathbf{B}_3^{II} \Gamma_3^{III} = (p^{II} a_3^{II}) \; (p^{III} a_3^{III})$$

tekintjük, melyen az $A_{1_1}^{IV}$, $A_{2_1}^{IV}$ pontok feküsznek, azt látjuk, hogy az Y_{12} pont és a $\sigma^{II,\;III}$ egyenes a $\mathbf{B}_3^{II} \Gamma_3^{II}$ pontpárokat harmonicusan választja el. Így tehát: *A* g_{01} *egyeneseken, mint a* V_1-*négyszögek oldalain, fekvő* KIRKMAN-*pontok egy Y-ponttól és a* V_1-*négyszöghöz rendelt* STEINER-*egyenestől harmonicusan vannak elválasztva.*

Ezt a tulajdonságot a 9-ik ábrából is kiolvashatjuk. Mert $\Pi \mathbf{A}_3 Y_{12}$ átlósháromszöge az

$$A_1^{IV} A_2^V \; (1\,2,\; 5\,6) \; (1\,2,\; 3\,4)$$

négyszögnek, s így az A_1^{IV}, A_2^{V} pontok az Y_{12} ponttól és a $|\,\Pi\,\mathbf{A}_3\,|$ egyenestől harmonikusan vannak elválasztva. De az $A_1^{IV}\,A_2^{V}$ egyenes egybeesik a $|\,\mathbf{B}_3^{II}\,\Gamma_3^{III}\,|_1$ egyenessel, mely a $V_1^{IV,\,V}=[\Pi^{VI}\,\mathbf{A}_3\,\mathbf{B}_3^{II}\,\Gamma_3^{III}]_1$ négyszögnek egyik oldala, és $\Pi\,\mathbf{A}_3\,\mathbf{B}_3\,\Gamma_3$ a $\sigma^{IV,\,V}$ Steiner-egyenes.

A $p^{II}\,p^{III}\,a_3^{II}\,a_3^{III}$, $a_1^{II}\,a_1^{III}\,a_2^{II}\,a_2^{III}$ négyoldalak végre azt is mutatják, hogy az

$A_1\,A_2$ pontpárok az Y''_{12}, $|\,P^{I}\,A_3^{VI}\,|_1$-től és a

$P\,A_3$ » az Y''_{12}, $|\,A_1^{IV}\,A_2^{V}\,|_1$-től

harmonicusan vannak elválasztva, a mit a következőkép fejezhetünk ki: *Egy* Steiner-*egyenesen fekvő négy* Steiner-*pontot hatszor bonthatunk szét pontpárokká; e pontpárok mindegyikét egy Y pont és a* Steiner-*egyeneshez rendelt V_1-négyszög egy oldala harmonicusan választja el.*

Végezetűl még a VI. és VII. táblázat megtekintésére kérjük fel az olvasót.

11. Az y-négyszögekről.

37. Tudjuk, hogy a tizenöt σ Steiner-egyenes a hozzájuk rendelt Δ-háromszögeknek oldalait negyvenöt Y-pontban metszi. Ennek megfelelőleg a tizenöt Σ Salmon-pontot a hozzájuk rendelt Δ-háromszögek szögpontjaival összekötő egyeneseket általában y-egyeneseknek nevezzük. Számuk szintén negyvenöt. A mi pedig az y-egyenesek különös megjelölését illeti, gondoljuk meg, hogy a $\sigma^{II,\,III}$ egyenes a $\Delta^{II,\,III}$ háromszög 1 2 3 4 5 6 oldalait az Y''_{12}, Y''_{34}, Y''_{56} pontokban metszi. Nevezzük tehát a $\Sigma^{II,\,III}$ pont öszszekötő egyeneseit a $\Delta^{II,\,III}$ háromszög (3 4, 5 6), (5 6, 1 2), (1 2, 3 4) szögpontjaival rendre y''_{12}, y''_{34} és y''_{56}-nak.

Ha ezek után ismét a 9-ik ábrához térünk vissza s azt látjuk, hogy az

$$A_1^{IV}\,A_2^{V}\,\mathbf{A}_1\,\mathbf{A}_2,\ P^{I}\,A_3^{VI}\,\Pi\,\mathbf{A}_3$$

négyszögek átlóspontjai

$$\Sigma^{II,\,III}\,(3\,4,\ 5\,6)\ Y_{12}\,;\quad \Sigma^{II,\,III}\,(3\,4,\ 5\,6)\ Y'_{12}\,;$$

ennélfogva

az $A_1^{IV}\,\mathbf{A}_1=a$, $A_2^{V}\,\mathbf{A}_2=a_2$ egyenespárok az Y_{12}, y''_{12}-től;

a $P^{I}\,\Pi=p$, $A_3^{IV}\,\mathbf{A}_3=a_3$ » az Y'_{12}, y''_{12}-től

harmonicusan vannak elválasztva.

$Y_{34}=(A_3^{VI}A_1^{IV},\mathbf{B}_2^{II}\Gamma_2^{III},\sigma^{I,\ V})$	$Y'_{34}=(P^{I}A_2^{V},B_2^{III}C_2^{II},\sigma^{VI,\ IV})$	$Y''_{34}=(A_3^{IV}\mathbf{A}_1^{VI},\Pi^{V}\mathbf{A}_2^{I},\sigma^{II,\ III})$
$Y_{56}=(A_2^{V}A_3^{VI},\mathbf{B}_1^{II}\Gamma_1^{III},\sigma^{I,\ IV})$	$Y'_{56}=(P^{I}A_1^{IV},B_1^{III}C_1^{II},\sigma^{V,\ VI})$	$Y''_{56}=(\mathbf{A}_2^{VI}\mathbf{A}_3^{V},\Pi^{IV}\mathbf{A}_1^{I},\sigma^{II,\ III})$
$Y_{12}=(A_1^{IV}A_2^{V},\mathbf{B}_3^{II}\Gamma_3^{III},\sigma^{I,\ VI})$	$Y'_{12}=(P^{I}A_3^{VI},B_3^{III}C_3^{II},\sigma^{IV,\ V})$	$Y''_{12}=(\mathbf{A}_1^{V}\mathbf{A}_2^{IV},\Pi^{VI}\mathbf{A}_3^{I},\sigma^{II,\ III})$
$Y_{14}=(B_2^{V}B_3^{VI},\Gamma_1^{III}\mathbf{A}_1^{I},\sigma^{II,\ IV})$	$Y'_{14}=(P^{II}B_1^{IV},C_1^{I}A_1^{III},\sigma^{V,\ VI})$	$Y''_{14}=(\mathbf{B}_2^{VI}\mathbf{B}_3^{V},\Pi^{IV}\mathbf{B}_1^{II},\sigma^{III,\ I})$
$Y_{52}=(B_3^{VI}B_1^{IV},\Gamma_2^{III}\mathbf{A}_2^{I},\sigma^{II,\ V})$	$Y'_{52}=(P^{II}B_2^{V},C_2^{I}A_2^{III},\sigma^{VI,\ IV})$	$Y''_{52}=(\mathbf{B}_3^{IV}\mathbf{B}_1^{VI},\Pi^{V}\mathbf{B}_2^{II},\sigma^{III,\ I})$
$Y_{36}=(B_1^{IV}B_2^{V},\Gamma_3^{III}\mathbf{A}_3^{I},\sigma^{II,\ VI})$	$Y'_{36}=(P^{II}B_3^{VI},C_3^{I}A_3^{III},\sigma^{IV,\ V})$	$Y''_{36}=(\mathbf{B}_1^{V}\mathbf{B}_2^{IV},\Pi^{VI}\mathbf{B}_3^{II},\sigma^{III,\ I})$
$Y_{32}=(C_2^{V}C_3^{VI},\mathbf{A}_1^{I}\mathbf{B}_1^{II},\sigma^{III,\ IV})$	$Y'_{32}=(P^{III}C_1^{IV},A_1^{II}B_1^{I},\sigma^{V,\ VI})$	$Y''_{32}=(\Gamma_2^{VI}\Gamma_3^{V},\Pi^{IV}\Gamma_1^{III},\sigma^{I,\ II})$
$Y_{16}=(C_3^{VI}C_1^{IV},\mathbf{A}_2^{I}\mathbf{B}_2^{II},\sigma^{III,\ V})$	$Y'_{16}=(P^{III}C_2^{V},A_2^{II}B_2^{I},\sigma^{VI,\ IV})$	$Y''_{16}=(\Gamma_3^{IV}\Gamma_1^{VI},\Pi^{V}\Gamma_2^{III},\sigma^{I,\ II})$
$Y_{54}=(C_1^{IV}C_2^{V},\mathbf{A}_3^{I}\Gamma_3^{II},\sigma^{III,\ VI})$	$Y'_{54}=(P^{III}C_3^{VI},A_3^{II}B_3^{I},\sigma^{IV,\ V})$	$Y''_{54}=(\Gamma_1^{V}\Gamma_2^{IV},\Pi^{VI}\Gamma_3^{III},\sigma^{I,\ II})$
$Y_{13}=(A_2^{III}\mathbf{B}_1^{VI},A_3^{II}\Gamma_1^{V},\sigma^{I,\ IV})$	$Y'_{13}=(B_3^{I}\Gamma_2^{IV},B_1^{III}\mathbf{A}_2^{VI},\sigma^{II,\ V})$	$Y''_{13}=(C_1^{II}\mathbf{A}_3^{V},C_2^{I}\mathbf{B}_3^{IV},\sigma^{III,\ VI})$
$Y_{51}=(A_3^{III}\mathbf{B}_2^{IV},A_1^{II}\Gamma_2^{VI},\sigma^{I,\ V})$	$Y'_{51}=(B_1^{I}\Gamma_3^{V},B_2^{III}\mathbf{A}_3^{IV},\sigma^{II,\ VI})$	$Y''_{51}=(C_2^{II}\mathbf{A}_1^{VI},C_3^{I}\mathbf{B}_1^{V},\sigma^{III,\ IV})$
$Y_{35}=(A_1^{III}\mathbf{B}_3^{V},A_2^{II}\Gamma_3^{IV},\sigma^{I,\ VI})$	$Y'_{35}=(B_2^{I}\Gamma_1^{VI},B_3^{III}\mathbf{A}_1^{V},\sigma^{II,\ IV})$	$Y''_{35}=(C_3^{II}\mathbf{A}_2^{IV},C_1^{I}\mathbf{B}_2^{VI},\sigma^{III,\ V})$
$Y_{24}=(A_2^{II}\Gamma_1^{VI},A_3^{III}\mathbf{B}_1^{V},\sigma^{I,\ IV})$	$Y'_{24}=(B_1^{III}\mathbf{A}_3^{V},B_2^{I}\Gamma_3^{IV},\sigma^{II,\ VI})$	$Y''_{24}=(C_1^{II}\mathbf{A}_2^{VI},C_3^{I}\mathbf{B}_2^{IV},\sigma^{III,\ V})$
$Y_{62}=(A_3^{II}\Gamma_2^{IV},A_1^{III}\mathbf{B}_2^{VI},\sigma^{I,\ V})$	$Y'_{62}=(B_2^{III}\mathbf{A}_1^{VI},B_3^{I}\Gamma_1^{V},\sigma^{II,\ IV})$	$Y''_{62}=(C_2^{II}\mathbf{A}_3^{IV},C_1^{I}\mathbf{B}_3^{V},\sigma^{III,\ VI})$
$Y_{46}=(A_1^{II}\Gamma_3^{V},A_2^{III}\mathbf{B}_3^{IV},\sigma^{I,\ VI})$	$Y'_{46}=(B_3^{III}\mathbf{A}_2^{IV},B_1^{I}\Gamma_2^{VI},\sigma^{II,\ V})$	$Y''_{46}=(C_3^{II}\mathbf{A}_1^{V},C_2^{I}\mathbf{B}_1^{VI},\sigma^{III,\ IV})$

(VI. táblázat.)

E VI. táblázatban az van föltűntetve, hogy a 45 Y-pont mindenikében mely egyenesek metszik egymást. A következő oldalon levő VII. táblázat pedig a 15 Y-négyoldal szögpontjait csoportosítja.

Ugyanennél az oknál fogva mondhatjuk, hogy

az $a_2\,a_3$ egyenes-párok Y_{56}, y''_{56}-tól ; a $p\,a_1$ egyenes-párok Y'_{56}, y''_{56}-től
az $a_3\,a_1$ » » Y_{34}, y''_{34}-től ; a $p\,a_2$ » » Y'_{34}, y''_{34}-től
vannak harmonicusan elválasztva. Tehát:

Egy SALMON-*pontból kisugárzó négy* CAYLEY-*egyenes hat egyenespárra bontható; ezek az egyenespárok a* SALMON-

Alábbi négy-oldalaknak	következő szögpontjaik vannak:
$Y^{II,\ III}$	$Y_{12}\ Y_{34}\ Y_{56}\ Y'_{12}\ Y'_{34}\ Y'_{56}$
$Y^{III,\ I}$	$Y_{36}\ Y_{25}\ Y_{14}\ Y'_{36}\ Y'_{25}\ Y'_{14}$
$Y^{I,\ II}$	$Y_{54}\ Y_{16}\ Y_{32}\ Y'_{54}\ Y'_{16}\ Y'_{32}$
$Y^{V,\ VI}$	$Y_{32}\ Y_{56}\ Y_{14}\ Y''_{32}\ Y''_{56}\ Y''_{14}$
$Y^{VI,\ IV}$	$Y_{16}\ Y_{34}\ Y_{52}\ Y''_{16}\ Y''_{34}\ Y''_{52}$
$Y^{IV,\ V}$	$Y_{54}\ Y_{12}\ Y_{36}\ Y''_{54}\ Y''_{12}\ Y''_{36}$
$Y^{I,\ IV}$	$Y''_{56}\ Y''_{13}\ Y''_{24}\ Y'_{56}\ Y'_{13}\ Y'_{24}$
$Y^{II,\ IV}$	$Y''_{14}\ Y_{35}\ Y_{26}\ Y'_{14}\ Y''_{35}\ Y''_{26}$
$Y^{III,\ IV}$	$Y''_{32}\ Y'_{46}\ Y'_{15}\ Y'_{32}\ Y_{46}\ Y_{15}$
$Y^{I,\ V}$	$Y''_{34}\ Y''_{26}\ Y''_{15}\ Y'_{34}\ Y'_{26}\ Y'_{15}$
$Y^{II,\ V}$	$Y''_{25}\ Y_{46}\ Y_{13}\ Y'_{25}\ Y''_{46}\ Y''_{13}$
$Y^{III,\ V}$	$Y''_{16}\ Y'_{24}\ Y'_{35}\ Y'_{16}\ Y_{24}\ Y_{35}$
$Y^{I,\ VI}$	$Y''_{12}\ Y''_{64}\ Y''_{35}\ Y'_{12}\ Y'_{64}\ Y'_{35}$
$Y^{II,\ VI}$	$Y''_{63}\ Y_{24}\ Y_{15}\ Y'_{63}\ Y''_{24}\ Y''_{15}$
$Y^{III,\ VI}$	$Y''_{45}\ Y'_{62}\ Y'_{13}\ Y'_{45}\ Y_{62}\ Y_{13}$

(VII. táblázat.)

E táblázathoz megjegyzendő, hogy a négyoldalak első három szögpontja mindig egy egyenesben fekszik, a következő három pedig egy háromszögnek szögpontja.

ponton keresztűl menő egy-egy y-egyenestől és a SALMON-*ponthoz rendelt Y-négyoldal szögpontjaitól harmonicusan vannak elválasztva.*

A $\sigma^{II,\ III}$ STEINER-egyenes a $\Delta^{II,\ III}$ háromszög oldalait az Y''_{12}, Y''_{34}, Y''_{56} pontokban metszi, a $\Delta^{II,\ III}$ háromszögnek szögpontjai pedig, mint mondottuk, a $\Sigma^{II,\ III}$ SALMON-pontból az y''_{12}, y''_{34}, y''_{55} egyenesekkel projiciálvák. Ezért:

Egy Steiner-*egyenesen fekvő Y-pontok az illetőhöz rendelt* Salmon-*pontból kisugárzó y-egyenesektől involutiósan vannak elválasztva.*

38. *A negyvenöt y-egyenes egymást hármasával a tizenöt* Salmon-*ponton kivűl még hatvan pontban metszi, melyek hármasával a* Cayley-*egyeneseken feküsznek.*

Ugyanis az

$$a_1^{III} a_2^{III} a_3^{II}, \; \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3, \; a_1^{IV} a_2^{V} a_3^{VI}$$

háromszögek oldalai, az A_1, A_2, A_3 pontokon mennek keresztűl, melyek a $\sigma^{II,\ III} = | P A_1 A_2 A_3 |$ egyenesen feküsznek; a háromszögek tehát perspectivásak. A collineatio-középpontok, melyek az 1-ső és 2-ik háromszöghez tartoznak: $\Sigma^{III,\ I} = (p\, b_1 b_2 b_3)$, $P^{III} = (\gamma_1^{III} \gamma_2^{III} \gamma_3^{III})$ a szögpontokat vetítő sugarak $b_1 b_2 b_3$, $\gamma_1^{III} \gamma_2^{III} \gamma_3^{III}$; ennélfogva a 2-ik és 3-ik perspectivás háromszöghez tartozó vetítő sugarak egymást a $\Sigma^{III,\ I}$, $P^{III} = p$ Cayley-egyenesen metszik.

Ámde ez utóbbi háromszögek szögpontjai a

$$\Sigma^{I,\ IV} = (b_1 c_1 \alpha_2 \alpha_3), \; \Sigma^{I,\ V} (b_2 c_2 \alpha_3 \alpha_1), \; \Sigma^{I,\ VI} = (b_3 c_3 \alpha_1 \alpha_2)$$

Salmon-pontok és e Salmon-pontokhoz rendelt $\Delta^{I,\ IV}$, $\Delta^{I,\ V}$, $\Delta^{I,\ VI}$ háromszögeknek

$$(1\,3,\ 2\,4)\ (1\,5,\ 2\,6)\ (3\,5,\ 4\,6)$$

szögpontjai. Ennélfogva az $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$, $a_1^{IV} a_2^{V} a_3^{IV}$ perspectivás háromszögekhez tartozó vetítő sugarak az y_{56}, y_{34}, y_{12} egyenesek, melyek egymást a p Cayley-egyenesen metszik.

Ugyanezen az úton kimutatható, hogy

az $y_{14} = \Sigma^{II,\ IV} (35, 26)$, $y_{25} = \Sigma^{II,\ V} (13, 46)$, $y_{36} = \Sigma^{II,\ VI} (24, 15)$
és az $y_{23} = \Sigma^{III,\ IV} (15, 46)$, $y_{16} = \Sigma^{III,\ V} (35, 24)$, $y_{45} = \Sigma^{III,\ VI} (13, 26)$
egyenesek egymást a p-egyenesen metszik.

39. A negyvenöt y-egyenest tizenöt y-négyszög oldalának tekinthetjük és ezeket a tizenöt Salmon-ponthoz és tizenöt Steiner-egyeneshez rendelhetjük.

Láttuk az imént, hogy az y_{12}, y_{34}, y_{56} egyenesek egymást a p-egyenesen metszik, s ha

$$\Sigma^{V,\ VI} (1\,4,\ 3\,2) \equiv y'_{56}, \; \Sigma^{VI,\ IV} (1\,6,\ 5\,2) = y'_{34}, \; \Sigma^{IV,\ V} (3\,6,\ 5\,4) \equiv y'_{12},$$

ugyanoly módon kimutathatjuk, hogy az

$$y_{12}, y_{34}, y_{56}\,;\; y'_{12}, y'_{34}, y_{56}\,;\; y'_{12}, y_{34}, y'_{56}\,;\; y_{12}, y'_{34}, y'_{56}$$

egyenesek is megfelelőleg p, a_1, a_2, a_3 CAYLEY-egyeneseken metszik egymást.

Ez oknál fogva az $y_{12}, y_{34}, y_{56}, y'_{12}, y'_{34}, y'_{56}$ egyenesek egy $y^{II, III}$ négyszögnek oldalai, melynek szögpontjai a $\Sigma^{II, III}$ pontból kisugárzó $p\, a_1\, a_2\, a_3$ egyeneseken feküsznek.

Ha tehát ezt az $y^{II, III}$ négyszöget a $\Sigma^{II, III}$ ponthoz és $\sigma^{II, III}$ egyeneshez, valamint a többi hasonló y-négyszögeket a többi Σ-ponthoz és σ-egyeneshez rendeljük, mondhatjuk:

A negyvenöt y-egyenes tizenöt y-négyszöget képez, melynek 4.15=60 szögpontja hármasával a húsz CAYLEY-*egyenesen fekszik, még pedig akkép, hogy mindegyik y-négyszögnek négy szögpontja azon a négy* CAYLEY-*egyenesen fekszik, a melyek egymást az y-négyszöghez rendelt* SALMON-*pontban metszik.*

40. A 38. pontban tárgyaltak szerint az

$$(y_{12}\, y_{34}\, y_{56}),\ (y_{36}\, y_{25}\, y_{14}),\ (y_{54}\, y_{16}\, y_{32})$$

pontok a p CAYLEY-egyenesen feküsznek, mely még a

$$\Sigma^{II,\ III}=(y''_{12}\, y''_{34}\, y''_{56}),\quad \Sigma^{III,\ I}=(y''_{36}\, y''_{25}\, y''_{14}),\quad \Sigma^{I,\ II}=(y''_{54}\, y''_{16}\, y''_{32})$$

SALMON-pontokat is tartalmazza.

Ámde

az y_{32}, y''_{32} ; y_{56}, y''_{56} ; y_{14}, y''_{14} ellenoldalpárjai az $y^{V,\ VI}$ négyszögnek,
az y_{16}, y''_{16} ; y_{34}, y''_{34} ; y_{52}, y''_{52} » $y^{VI,\ IV}$ »
az y_{54}, y''_{54} ; y_{12}, y''_{12} ; y_{36}, y''_{36} » $y^{IV,\ V}$ »

a minek következtében eme hat pontpár a p-egyenesen involutiót képez. Tehát:

Mindegyik CAYLEY-*egyenesen hat oly pont van, a melyekben az y-egyenesek egymást hármasával metszik, t. i. három pont mint az y-négyszögeknek szögpontja és három e négyszögekhez rendelt* SALMON-*pont. E hat pont involutiót képez, melyben a* SALMON-*pontokhoz a hozzájuk rendelt négyszögek szögpontjai kapcsolvák.* (Összehasonlítandó a 32. pontban foglalt tétellel.)

41. Miután az $y^{II,\ III}$, $V_1^{II,\ III}$ négyszögeknek

$$\underset{P_1^{I}}{(y_{12}\, y_{34}\, y_{56})}\quad \underset{A_{1_1}^{IV}}{(y'_{12}\, y'_{34}\, y_{56})}\quad \underset{A_{2_1}^{V}}{(y'_{12}\, y_{34}\, y'_{56})}\quad \underset{A_{3_1}^{VI}}{(y_{12}\, y'_{34}\, y'_{56})}$$

szögpontjai a p, a_1, a_2, a_3 egyeneseken feküsznek, kérdezhetjük, hogy nem perspectivás helyzetűek-e, vagyis, hogy a megfelelő oldalaiknak metszőpontjai nem feküsznek-e ugyanegy egyenesben?

Tudjuk, hogy

$$y_{56} \equiv \Sigma^{I, IV} (1\,3,\ 2\,4) \equiv (b_1\, c_1\, \alpha_2\, \alpha_3)\ (1\,3,\ 2\,4)$$
$$P_1{}^{I} A_{1_1}{}^{IV} \equiv B_1{}^{III} C_1{}^{II},$$

és hogy a b_1, c_1 egyenesek a $B_1{}^{III}$, $C_1{}^{II}$ pontokon mennek keresztül. Miután az y_{56} egyenes a b_1, c_1 egyenespárt a $B_1{}^{III}, C_1{}^{II}$ egyenesen fekvő Y'_{56} ponttól harmonicusan választja el (37.), az (y_{56}, $B_1{}^{III}$, $C_1{}^{II}$) pont is harmonicusan választja el a $B_1{}^{III}, C_1{}^{II}$ pontokat az Y'_{56} ponttól.

Ha ezután az $a_2{}^{II} a_2{}^{III} a_3{}^{II} a_3{}^{III}$ négyoldalt (8. ábra) tekintjük, melynek szemben fekvő szögpontjai $B_1{}^{III}$, $C_1{}^{II}$; egyik átlóspontja Y'_{56}; egyik átlója $\sigma^{II, III} = |\ P\, A_1\, A_2\, A_3\ |$, beláthatjuk, hogy az ($Y_{56}$, $P_1{}^{I} A_{1_1}{}^{IV}$) pont a $\sigma^{II, III}$ egyenesen fekszik és az A_2, A_3 pontokat az Y''_{56} ponttól harmonicusan választja el.

Ugyanezen az úton kimutatható, hogy az $y^{II, III}$, $V_1{}^{II, III}$ négyszögek többi oldalai is a $\sigma^{II, II}$ egyenesen metszik egymást és a megfelelő oldalpárok

$$(y_{56}, P_1{}^{I} A_{1_1}{}^{IV}),\ (y'_{56}, A_{2_1}{}^{V} A_{3_1}{}^{VI}),\ (y_{34}, P_1{}^{I} A_{2_1}{}^{V}),\ (y'_{34}, A_{3_1}{}^{VI} A_{1_1}{}^{IV}),$$
$$(y_{12}, P_1{}^{I} A_{3_1}{}^{VI}),\ (y'_{12}, A_{1_1}{}^{IV} A_{2_1}{}^{V})$$

metszőpontjai az

$$A_2 A_3,\ P A_1,\ A_3 A_1,\ P A_2,\ A_1 A_2,\ P A_3$$

pontpárokat az

$$Y''_{56},\ Y''_{56},\ Y''_{34},\ Y''_{34},\ Y''_{12},\ Y''_{12}$$

pontoktól harmonicusan választják el, és így ama négyszögek perspectivás helyzetűek. Ennélfogva:

A tizenöt V_1-négyszög a tizenöt y-négyszöggel perspectivás helyzetű; a hozzájuk rendelt SALMON-*pontok és* STEINER-*egyenesek a collineatio-középpontok és tengelyek.*

Vagy pedig:

A STEINER-*egyenesek a hozzájuk rendelt y-négyszögek oldalait kilenczven pontban metszik; mindegyik metszőponton keresztül megy a kilenczven g_{01} egyenes közül egy-egy.*

Továbbá, tekintettel a 36. pont utolsó tételére:

Egy Steiner-*egyenesen fekvő négy* Steiner-*pont hat pontpárra bontható; e pontpárokat a* Steiner-*egyeneshez rendelt y-négyszög (úgyszintén V_1-négyszög) egy-egy oldala és egy Y-pont harmonicusan választja el* (Dualisan megfelel a 37. pontban levő tételnek.)

E tétel a 9. ábrából is kimagyarázható, melyben az $A_1 A_2$ pontpár az Y_{12}, y''_{12}-től és hasonlókép a $\sigma^{I, VI} = \mid B_3 C_3 A_1 A_2 \mid$-n fekvő

$B_3 C_3$, $B_3 A_1$, $C_3 A_2$, $B_3 A_2$, $C_3 A_1$ pontpárok, az

Y_{12}, y'_{12}; Y_{35}, y'_{35}; Y_{35}, y''_{35}; Y_{46}, y'_{46}; Y_{46}, y''_{46} ponttól és egyenestől harmonicusan vannak elválasztva.

42. Az $A_1^{IV} A_2^{V} A_1 A_2$, $P^I A_3^{VI} \Pi A_3$ négyszögekből látható (9. ábra), hogy az

$$A_2^V A_1 = \alpha_1^V,\ A_1^{IV} A_2 = \alpha_2^{IV} \text{ egyenesek az } Y_{12}, y''_{12}\text{-től, és az}$$
$$A_3^{VI} \Pi = \pi^{VI},\ P_1 A_3 = \alpha_3^{I} \text{ egyenesek az } Y'_{12}, y''_{12}\text{-től}$$

harmonicusan vannak elválasztva.

Ez pedig a következőkép fejezhető ki: Egy Δ-háromszög mindegyik szögpontján négy Pascal-egyenes és egy y-egyenes megy keresztül; e Pascal-egyenesek közül kétszer kettő az y-egyenestől és egy a Δ-háromszög ama szögpontjával szemben fekvő oldalon nyugvó Y-ponttól harmonicusan van elválasztva. Vagy, miután a $V_1^{II, III} = [P^I A_1^{IV} A_2^V A_3^{VI}]_1$ négyszög $\mid A_1^{IV} A_2^V \mid_1$, $\mid P^I A_3^{VI} \mid_1$ oldalai az Y_{12}, Y'_{12} pontokon mennek keresztül, mondhatjuk:

Egy V_1 négyszög átlós háromszögének, Δ-nak mindegyik szögpontjában a V_1 négyszögnek két oldala, azaz két g_{01} egyenes, egy y egyenes és négy Pascal-*egyenes találkozik; mindegyik g_{01} egyenes az y egyenest két* Pascal-*egyenestől harmonicusan választja el.*

43. Vegyük szemügyre a $V_1^{I, IV} = [B_1^{III} C_1^{II} A_2^{VI} A_3^{V}]_1$ négyszöget és annak $\Delta^{I, IV} = [1\,3\ 2\,4\ 5\,6]$ átlósháromszögét, mely egyszersmind átlósháromszöge az

$$Y^{I, IV} = Y'_{13}\, Y'_{24}\, Y'_{56}\, Y''_{13}\, Y''_{24}\, Y''_{56}$$

négyoldalnak is. A mondott átlósháromszögnek szögpontjait a $\Sigma^{I, IV}$ Salmon-ponttal összekötve, az y_{56}, y_{13}, y_{24} egyeneseket nyerjük.

A $\Delta^{I, IV}$ háromszög (1 3, 2 4) szögpontján keresztülmenő $V_1^{I, IV}$ négyszög oldala, y-egyenes és PASCAL-egyenesek közűl a

$$Y'_{56} B_{1_1}{}^{III} C_{1_1}{}^{II} = | P^I A_1^{IV} |, y_{56}$$

harmonicusan választják el a

$$\beta_1^{II} = | P^{II} C_1^{II} A_1^{II} | \gamma_1^{III} = | P^{III} A_1^{III} B_1^{III} |$$

egyeneseket. Minthogy azonban a

$$P^I, (y_{12}\, y_{34}\, y_{56}), P^{II}, P^{III}$$

pontok a p-egyenesen fekűsznek, azért a két első pont a két utóbbit is harmonicusan választja el.

Hasonló úton, ha a $V_1^{II, IV}$, $V_1^{III, IV}$ négyszögekből indulunk ki, kimutatható, hogy a p-egyenesen fekvő

$$P^{II}, (y_{14}\, y_{25}\, y_{36}), P^{III}, P^I \text{ és } P^{III}, (y_{23}\, y_{16}\, y_{45}), P^I, P^{II}$$

pontok harmonicus helyzetűek.

Tekintve, hogy az $(y_{12}\, y_{34}\, y_{56})$, $(y_{14}\, y_{25}\, y_{36})$, $(y_{23}\, y_{16}\, y_{45})$ pontok az $y^{II, III}$, $y^{III, I}$, $y^{I, II}$ négyszögeknek szögpontjai, mondhatjuk:

Minden CAYLEY-*egyenes három* KIRKMAN-*pontot és az y-négyszögek három szögpontját tartalmazza, a mely hat pont involutiót képez. Két-két ily* KIRKMAN-*pont a harmadik* KIRKMAN-*pontot, az y-négyszögek egyik szögpontjától s így egyszersmind az y-négyszögek két szögpontja a harmadik szögpontot egy* KIRKMAN-*ponttól harmonicusan választja el.*

Jegyzet. Ha e tételt a 36. tétellel a 151. lapon összehasonlítjuk, azt látjuk, hogy a PASCAL-egyenesek és az Y négyoldalak oldalai *nem felelnek meg dualisan* a KIRKMAN-pontoknak és az y-négyszögek szögpontjainak. E szerint VERONESE »Sull' hexagrammum mysticum« czímű értekezésének LXI. theoremája *hibás.*

44. A 38. pontban kimutattuk, hogy az $a_1^V a_2^V a_3^{VI}$, $\alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3$ háromszögek az $(y_{12}\, y_{34}\, y_{56})$ collineatio-középpontra és a $\sigma^{II, III}$ collineatio-tengelyre vonatkozólag perspectivásak.

Ugyanígy kimutatható, hogy a

$$\begin{matrix} p^I a_2^V a_3^{VI} & p^I a_3^{VI} a_1^{IV} & p^I a_1^{IV} a_2^V \\ \pi\ \alpha_2\ \alpha_3 & \pi\ \alpha_3\ \alpha_1 & \pi\ \alpha_1\ \alpha_2 \end{matrix}$$

háromszögpárok is perspectivásak az $(y'_{12}\, y'_{34}\, y_{56})$, $(y'_{12}\, y_{34}\, y'_{56})$,

$(y_{12}\, y'_{34}\, y'_{56})$ collineatio-középpontokra és a $\sigma^{II,\,III}$ egyenesre, mint collineatio-tengelyre, vonatkozólag, vagyis:

»A $v^{II,\,III} = p^{I}\, a_1^{IV}\, a_2^{V}\, a_3^{VI}$, $s^{II,\,III} = \pi\, \alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3$ négyoldalak négy pár háromszögre bonthatók, melyek az $y^{II,\,III}$ négyszög szögpontjaira és a $\sigma^{II,\,III}$ egyenesre, mint collineatio-középpontokra és tengelyre vonatkozólag perspectivásak; a szögpontokat vetítő sugarak az $y^{II,\,III}$ négyszög oldalai«.

»A $V^{II,\,III} = P^{I}\, A_1^{IV}\, A_2^{V}\, A_3^{VI}$, $S^{II,\,III} = \Pi\, A_1\, A_2\, A_3$ négyszögek négy pár háromszögre bonthatók, melyek a $Y^{II,\,III}$ négyoldalra és a $\Sigma^{II,\,III}$ pontra, mint collineatiotengelyekre és középpontra vonatkozólag perspectivásak; a megfelelő oldalak metszőpontjai az $Y^{II,\,III}$ négyoldal szögpontjai (30.)«.

Tudjuk továbbá (27. és 41. pont), hogy a $\sigma^{II,\,III}$ Steiner-egyenes P, A_1, A_2, A_3 Steiner-pontjából kisugárzó

$$\pi\, p^{I}\, p^{II}\, p^{III} \qquad \alpha_1\, a_1^{IV}\, a_1^{II}\, a_1^{III} \qquad \alpha_2\, a_2^{V}\, a_2^{II}\, a_2^{III} \qquad \alpha_3\, a_3^{VI}\, a_3^{II}\, a_3^{III}$$

Pascal-egyenesek az

$$s^{II,\,III} = \pi\, \alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3 \qquad p^{II}\, a_1^{II}\, a_2^{II}\, a_3^{II}$$
$$v^{II,\,III} = p^{I}\, a_1^{IV}\, a_2^{V}\, a_3^{VI} \qquad p^{III}\, a_1^{III}\, a_2^{III}\, a_3^{III}$$

négyoldalaknak oldalai.

A két első és a két utóbbi négyoldal a $\sigma^{II,\,III}$ collineatio-tengelyre és az

$$y^{II,\,III} = y_{12}\, y_{34}\, y_{56}\, y'_{12}\, y'_{34}\, y'_{56}, \quad V_1^{II,\,III} = [P^{I}\, A_1^{IV}\, A_2^{V}\, A_3^{VI}]_1$$

négyszög szögpontjaira, mint collineatio-középpontokra vonatkozólag perspectivás, maguk az $y^{II,\,III}$, $V_1^{II,\,III}$ négyszögek pedig a $\sigma^{II,\,III}$ és $\Sigma^{II,\,III}$ tengelyre és középpontra vonatkozólag perspectivásak.

45. Az $y^{II,\,III}$, $V_1^{II,\,III}$ négyszögekkel együtt azoknak $D^{II,\,III}$, $\Delta^{II,\,III}$ átlósháromszögei is perspectivásak az $\sigma^{II,\,III}$ $\Sigma^{II,\,III}$-ra vonatkozólag. Ámde e háromszögeknek megfelelő szögpontjai

$$D_{12} = (y_{12}\;\; y'_{12}) \quad D_{34} = (y_{34}\;\; y'_{34}) \quad D_{56} = (y_{56}\;\; y'_{56})$$
$$(34,\ 56) \qquad\qquad (56,\ 12) \qquad\qquad (12,\ 34),$$

s ennélfogva a $\Sigma^{II,\,III}$ pontot a $\Delta^{II,\,III}$ háromszög szögpontjaival összekötő egyenesek, névszerint y''_{12}, y''_{34}, y''_{56}, a $D^{II,\,III}$ háromszög szögpontjain mennek keresztűl, és a $\sigma^{II,\,III}$ egyenesnek Y''_{12}, Y''_{34}, Y''_{56} metszőpontjai a $\Delta^{II,\,III}$ háromszög 12 34 56 oldalaival a $D^{II,\,III}$ háromszög oldalain feküsznek.

Abból továbbá, hogy a $\Delta^{\mathrm{II,\,III}}$ átlósháromszöge az $Y^{\mathrm{II,\,III}}$ négyoldalnak, következik:

Az

$$Y^{\mathrm{II,\,III}} = Y_{12}\,Y_{34}\,Y_{56}\,Y'_{12}\,Y'_{34}\,Y'_{56},\quad y^{\mathrm{II,\,III}} = y_{12}\,y_{34}\,y_{56}\,y'_{12}\,y'_{34}\,y'_{56}$$

négyoldal és négyszög átlósháromszögei $\Delta^{\mathrm{II,\,III}}$ *és* $D^{\mathrm{II,\,III}}$ *a hozzájuk rendelt* $\sigma^{\mathrm{II,\,III}}$ STEINER-*egyenesre, mint collineatio-tengelyre, és a hozzájuk rendelt* $\Sigma^{\mathrm{II,\,III}}$ SALMON-*pontra, mint középpontra, vonatkozólag perspectivásak; a megfelelő oldalak metszőpontjai* $Y''_{12}\,Y''_{34}\,Y''_{56}$, *és a megfelelő szögpontokat összekötő egyenesek* y''_{12}, y''_{34}, y''_{56}.

Továbbá:

A negyvenöt y-egyenes egymást hármasával a tizenöt SALMON-*ponton és a* CAYLEY-*egyeneseken fekvő hatvan ponton kivűl még tizenöt D-pontban metszi, melyek a tizenöt y-négyszög D-átlósháromszögeinek szögpontjai.*

Valamint hogy a tizenöt Δ-háromszög negyvenöt szögpontja a negyvenöt y-egyenesen fekszik, azonképen a tizenöt D-háromszög negyvenöt oldala a negyvenöt Y-ponton megy keresztűl.

46. Miután az y_{12}, y'_{12}, y''_{12} egyenesek egymást ugyanegy pontban, D_{12}-ben, metszik, e pont szögpontja a

$$D^{\mathrm{II,\,III}} = D_{12}\,D_{34}\,D_{56},\quad D^{\mathrm{IV,\,V}} = D_{12}\,D_{36}\,D_{54},\quad D^{\mathrm{I,\,VI}} = D_{12}\,D_{35}\,D_{64}$$

háromszögnek. Tehát:

A tizenöt y-négyszög átlósháromszögeinek, azaz a tizenöt D-háromszögnek csak tizenöt szögpontja van, miként a tizenöt Y-négyoldal Δ átlósháromszögeinek is csak tizenöt oldala van.

Az $y^{\mathrm{II,\,III}}$, $y^{\mathrm{I,\,VI}}$, $y^{\mathrm{IV,\,V}}$ négyszögek y_{12}, y'_{12}; y''_{12}, y_{12} szemben fekvő oldalpárjai

a $D^{\mathrm{II,\,III}}$ háromszögnek $D_{12}D_{34} = (y_{12}\,y'_{12})\,(y_{34}\,y'_{34})$,
$D_{12}D_{56} = (y_{12}\,y'_{12})\,(y_{56}\,y'_{56})$ oldalait,

a $D^{\mathrm{I,\,IV}}$ háromszögnek $D_{12}D_{35} = (y'_{12}\,y''_{12})\,(y'_{35}\,y''_{35})$,
$D_{12}D_{64} = (y'_{12}\,y''_{12})\,(y'_{64}\,y''_{64})$ oldalait,

a $D^{\mathrm{IV,\,V}}$ háromszögnek $D_{12}D_{36} = (y''_{12}\,y_{12})\,(y''_{36}\,y_{36})$,
$D_{12}D_{54} = (y''_{12}\,y_{12})\,(y''_{54}\,y_{54})$ oldalait

harmonicusan választják el.

A D háromszögeknek a D-háromszögek szögpontjaiból kisugárzó három oldalpárja ugyanazon szögpontokból kisugárzó y-egyenesektől harmonicusan van elválasztva. (Megfelel a 30. pontban levő tételnek).

47. Az

$$y^{V,\ VI} = y_{56}\, y_{14}\, y_{32}\, y''_{56}\, y''_{14}\, y''_{32}\,; \quad y^{VI,\ IV} = y_{34}\, y_{52}\, y_{16}\, y''_{34}\, y''_{52}\, y''_{16}\,;$$
$$y^{IV,\ V} = y_{12}\, y_{36}\, y_{54}\, y''_{12}\, y''_{36}\, y''_{54}$$

négyszögek oldalpárjai egymást az

$$(y_{56}\, y_{34}\, y_{12}),\ \Sigma^{II,\ III} = (y''_{56}\, y''_{34}\, y''_{12})\,; \ (y_{14}\, y_{52}\, y_{36}),\ \Sigma^{III,\ I} = (y''_{14}\, y''_{52}\, y''_{36})\,;$$
$$(y_{32}\, y_{16}\, y_{54}),\ \Sigma^{I,\ II} = (y''_{32}\, y''_{16}\, y''_{54})$$

pontpárokban metszik, melyek a p-egyenesen involutiót képeznek.

Ama négyszögek tizenkét szögpontja közűl

$$(y_{56}\, y_{14}\, y_{32}) \quad (y_{34}\, y_{52}\, y_{16}) \quad (y_{12}\, y_{36}\, y_{54})$$

a π Cayley-egyenesen fekszik, a többi pedig szögpontja a következő perspectivás háromszögeknek:

$$y''_{56}\, y''_{14}\, y''_{32}, \quad y''_{34}\, y''_{52}\, y''_{16}, \quad y''_{13}\, y''_{36}\, y''_{54},$$

mely háromszögekhez tartozó collineatio középpontok a π-egyenesen feküsznek.

Ugyanis az

$$y''_{56}\, y''_{14}\, y''_{32}, \ [A_1^{I}\, B_1^{II}\, \Gamma_1^{III}]_1, \ [A_2^{I}\, B_2^{II}\, \Gamma_2^{III}]_1, \ y''_{34}\, y''_{52}\, y''_{16}$$

háromszögek közűl

az 1-ső perspectivás a 2-ikkal $\Sigma^{V,\ VI}$, $\sigma^{V,\ VI}$-ra vonatkozólag (41.)
a 2-ik » a 3-ikkal P, π^{VI}-ra »
a 3-ik » a 4-ikkel $\Sigma^{VI,\ IV}$, $\sigma^{VI,\ IV}$-re »
a 4-ik » az 1-sővel p-ra »

s mert a négy collineatio-tengely egymást a II Steiner-pontban metszi, a collineatio-középpontok a π-egyenesen feküsznek.

Ugyanezen az úton következtethető, hogy az $y''_{56}\ y''_{14}\ y''_{32}$, $y''_{12}\, y''_{36}\, y''_{54}$ és $y''_{34}\, y''_{52}\, y''_{16}$, $y''_{12}\, y''_{36}\, y''_{54}$ perspectivás háromszögek collineatio-középpontjai is a π-egyenesen feküsznek.

Minthogy az $y^{V,\ VI}$, $y^{VI,\ IV}$, $y^{IV,\ V}$ négyszögeknek három szögpontja a π-egyenesen volt, következtethető, hogy azok páronként perspectivásak; a közös collineatio-tengely a p-egyenes, és a három collineatio-középpont a π-egyenesen van.

Ama négyszögek

$$D^{V,\,VI}=D_{56}D_{14}D_{32},\quad D^{VI,\,IV}=D_{34}D_{52}D_{16},\quad D^{IV,\,V}=D_{12}D_{36}D_{54}$$

átlósháromszögei tehát szintén perspectivásak a p collineatio-tengelyre és a π-egyenesen fekvő collineatio-középpontokra vonatkozólag, és a megfelelő oldalak metszőpontjai közűl kettő-kettő harmonicusan választja el annak az involutiónak kapcsolt pontpárjait, a mely involutio szerint az $y^{V,\,VI}$, $y^{VI,\,IV}$, $y^{IV,\,V}$ négyszögek oldalai a p-egyenest metszik; vagyis a

$$(D_{56}D_{14},\ D_{34}D_{52},\ D_{12}D_{36}),\quad (D_{56}D_{32},\ D_{34}D_{16},\ D_{12}D_{54}),$$
$$(y_{56}\,y_{34}\,y_{12}),\quad (y''_{56}\,y''_{34}\,y''_{12});$$
$$(D_{12}D_{32},\ D_{52}D_{16},\ D_{36}D_{54}),\quad (D_{14}D_{56},\ D_{52}D_{34},\ D_{36}D_{12}),$$
$$(y_{14}\,y_{52}\,y_{36}),\quad (y''_{14}\,y''_{52}\,y''_{36});$$
$$(D_{32}D_{56},\ D_{16}D_{34},\ D_{54}D_{12}),\quad (D_{32}D_{14},\ D_{16}D_{52},\ D_{54}D_{36}),$$
$$(y_{32}\,y_{16}\,y_{54}),\quad (y''_{32}\,y''_{16}\,y''_{54})$$

pontok harmonicus négyest képeznek.

A $D^{V,\,VI}$, $D^{VI,\,IV}$, $D^{IV,\,V}$ háromszögeknek szögpontjai egyszersmind szögpontjai az

$$y^{II,\,III}=y_{56}\,y_{34}\,y_{12}\,y'_{56}\,y'_{34}\,y'_{12},\quad y^{III,\,I}=y_{14}\,y_{52}\,y_{36}\,y'_{14}\,y'_{52}\,y'_{36},$$
$$y^{I,\,II}=y_{32}\,y_{16}\,y_{54}\,y'_{32}\,y'_{16}\,y'_{54}$$

négyszögek

$$D^{II,\,III}=D_{12}D_{34}D_{56},\quad D^{III,\,I}=D_{36}D_{52}D_{14},\quad D^{I,\,II}=D_{54}D_{16}D_{32}$$

átlósháromszögeinek, mely utóbbi négy- és háromszögek a π collineatio-tengelyre a p-egyenesen fekvő collineatio-középpontokra vonatkozólag perspectivásak.

Jelen esetben is a négyszögek megfelelő oldalainak metszőpontjai

$$(y_{56}\,y_{14}\,y_{32}),\ \Sigma^{V,\,VI}=(y'_{56}\,y'_{14}\,y'_{32});\quad (y_{34}\,y_{52}\,y_{16}),\ \Sigma^{VI,\,IV}=(y'_{34}\,y'_{52}\,y'_{16});$$
$$(y_{12}\,y_{36}\,y_{54}),\ \Sigma^{IV,\,V}=(y'_{12}\,y'_{36}\,y'_{54})$$

harmonicusan vannak elválasztva a háromszögek megfelelő oldalainak

$$(D_{12}D_{34},\ D_{36}D_{52},\ D_{54}D_{16}),\quad (D_{34}D_{56},\ D_{52}D_{14},\ D_{16}D_{32}),$$
$$(D_{56}D_{12},\ D_{14}D_{36},\ D_{32}D_{54})$$

metszőpontjaitól. Ámde ez utóbbi pontok a $D^{V,\,VI}$, $D^{VI,\,IV}$, $D^{IV,\,V}$, $y^{V,\,VI}$, $y^{VI,\,IV}$, $y^{IV,\,V}$ perspectivás három- és négyszögek collineatio-középpontjai; ennélfogva mondhatjuk:

A tizenöt y-négyszög (és a tizenöt D-háromszög) közűl húszszor választhatunk ki hármat, mely páronként perspectivás a CAYLEY-*egyenesekre, mint collineatio-tengelyekre, vonatkozólag. A három collineatio-középpont, mely ily három perspectivás y-négyszöghez (és D-háromszöghez) tartozik, a* CAYLEY-*egyenes ellenegyenesén fekszik és harmonicusan választja el annak az involutiónak kapcsolt pontpárjait, mely involutiót a* CAYLEY-*egyenesen fekvő* SALMON-*pontoknak és az y-négyszögeknek szögpontjai képeznek.*

Jegyzet. E három collineatio-középpont nem esik egybe a CAYLEY-egyenes KIRKMAN-pontjaival, mert két KIRKMAN-pont az y-négyszögeknek egy szögpontjától és *a harmadik* KIRKMAN-*ponttól van harmonicusan elválasztva,* holott két collineatio-középpont az y-négyszögek egy szögpontjától és egy SALMON-*ponttól* van harmonicusan elválasztva.

48. E fejezet végén még az Y-pontok- és y-egyeneseknek, valamint a g_{01} egyeneseken fekvő pontoknak említésre méltó helyzeti viszonyáról akarunk szólani.

A (3 4, 5 6), illetve (5 4, 3 6) ponton keresztűl menő

$$g_{01} = A_1^{IV} A_2^{V} \mathbf{B}_{3_1}^{II} \Gamma_{3_1}^{III}, \quad g'_{01} = A_{1_1}^{IV} A_{2_1}^{V} \mathbf{B}_3^{II} \Gamma_3^{III}$$

egyenespár egymást az Y_{12} pontban metszi.

Az $y''_{12} = \Sigma^{II,\,III}$ (3 4, 5 6) egyenes az $A_1^{IV} A_2^{V}$, $A_{1_1}^{IV} A_{2_1}^{V}$ pontpárokat és az $y'_{12} = \Sigma^{IV,\,V}$ (3 6, 5 4) egyenes a $\mathbf{B}_3^{II} \Gamma_3^{III}$, $\mathbf{B}_{3_1}^{II} \Gamma_{3_1}^{III}$ pontpárokat harmonicusan választja el az Y_{12} ponttól. E szerint:

»Minden Y-ponton egy g_{01} és egy g'_{01} egyenes megy keresztűl, melyeken két-két KIRKMAN- és két-két V_1-pont fekszik. A két KIRKMAN-pont a g_{01} egyenesen és a két V_1-pont a g'_{01} egyenesen, és fordítva a két KIRKMAN-pont a g'_{01} és a két V_1-pont a g_{01} egyenesen, a felvett Y-ponttól és egy-egy y-egyenestől harmonicusan van elválasztva. A két y-egyenesnek és az Y-pontnak ugyanazon alsó, de különböző felső mutatója van«.

Jegyzet. 1. Ha a VII. táblázatban a nagy betűket kicsinyekkel cseréljük föl, akkor az egyes y-négyszögek oldalait nyerjük.

2. A VIII. táblázatból látható, hogy mely y-egyenesek mennek keresztűl az egyes Salmon-pontokon.

$\Sigma^{II,\ III}=(y''_{12}\ y''_{34}\ y''_{56})$	$\Sigma^{III,\ I}=(y''_{14}\ y''_{36}\ y''_{52})$	$\Sigma^{I,\ II}=(y''_{16}\ y''_{32}\ y''_{54})$
$\Sigma^{V,\ VI}=(y'_{14}\ y'_{32}\ y'_{56})$	$\Sigma^{VI,\ IV}=(y'_{16}\ y'_{34}\ y'_{52})$	$\Sigma^{IV,\ V}=(y'_{12}\ y'_{36}\ y'_{54})$
$\Sigma^{I,\ IV}=(y_{13}\ y_{24}\ y_{56})$	$\Sigma^{II,\ IV}=(y_{14}\ y'_{35}\ y'_{26})$	$\Sigma^{III,\ IV}=(y''_{15}\ y''_{46}\ y_{32})$
$\Sigma^{I,\ V}=(y_{15}\ y_{26}\ y_{34})$	$\Sigma^{II,\ V}=(y'_{13}\ y_{25}\ y'_{46})$	$\Sigma^{III,\ V}=(y_{16}\ y''_{24}\ y''_{35})$
$\Sigma^{I,\ VI}=(y_{12}\ y_{35}\ y_{46})$	$\Sigma^{II,\ VI}=(y'_{15}\ y'_{24}\ y_{36})$	$\Sigma^{III,\ VI}=(y''_{13}\ y_{45}\ y''_{26})$

(VIII. táblázat.)

12. A v_1-Veronese-egyenesekről.

49. Ismeretes, hogy a P^I Kirkman-ponton keresztűl menő $\alpha_1{}^I\,\alpha_2{}^I\,\alpha_3{}^I$ Pascal-egyenesekhez a p^I egyenesen fekvő $A_1{}^I\,A_2{}^I\,A_3{}^I$ Kirkman-pontok vannak rendelve.

De ugyanezekhez a Pascal-egyenesekhez az $A_{1_1}{}^I\,A_{2_1}{}^I\,A_{3_1}{}^I$ pontok is rendelvék, melyekről szintén kimutatható, hogy egy $p_1{}^I$ egyenesen feküsznek, mely épen úgy, mint a p^I, keresztűl megy a P-ponton.

Ugyanis az

$$(1\,2,\ 3\,4)\ (5\,6,\ 1\,2)\ (3\,4,\ 5\,6) \qquad B_1{}^{IV}B_2{}^{V}B_3{}^{VI},\ C_1{}^{IV}C_2{}^{V}C_3{}^{VI}$$

háromszögek a II collineatio-középpontra vonatkozólag perspectivásak, mert megfelelő szögpontjaik a $\pi^{IV}, \pi^{V}, \pi^{VI}$ egyenesekben feküsznek.

De az 1-ső és 2-ik, 1-ső és 3-ik háromszöghöz tartozó collineatio-tengelyek, mert megfelelő oldalaiknak metszőpontjai a

$$(1\,2,\ 4\,5),\ (3\,4,\ 6\,1),\ (5\,6,\ 2\,3);\quad (1\,2,\ 3\,6),\ (3\,4,\ 5\,2),\ (5\,6,\ 1\,4)$$

pontok, a p^{II}, p^{III} egyenesek. De a 2-ik és 3-ik háromszög oldalai g_{01} egyenesek, melyeket V_1-pontokkal ekkép fejezhetünk ki (V. táblázat):

$$|\ A_1{}^I\Gamma_1{}^{III}\quad A_2{}^I\Gamma_2{}^{III}\quad A_3{}^I\Gamma_3{}^{III}\ |_1$$

$$|\ A_1{}^I B_1{}^{II}\quad A_2{}^I B_2{}^{II}\quad A_3{}^I B_3{}^{II}\ |_1$$

Ennélfogva az $|\ A_1{}^I A_2{}^I A_3{}^I\ |_1$ pontok, mint a megfelelő oldalak metszőpontjai, egy p_1^I egyenesen feküsznek, mely a $P = (p^{II} p^{III})$ ponton megy keresztül.

Ha még meggondoljuk, hogy az $\alpha_1^I, \alpha_2^I, \alpha_3^I$ egyenesek P^I metszőpontja a p-egyenesen fekszik, kimondhatjuk a következő tételt:

Egy CAYLEY-*egyenesen fekvő* KIRKMAN-*pontból kisugárzó három* PASCAL-*egyeneshez oly három V_1 pont van rendelve, mely a* CAYLEY-*egyeneshez rendelt* STEINER-*ponttal együtt egy egyenesen fekszik.*

Ezt az egyenest a KIRKMAN-ponthoz rendelt v_1 VERONESE-egyenesnek, vagy röviden v_1 egyenesnek nevezzük általánosan, s minthogy minden KIRKMAN-ponthoz egy v_1 egyenes van rendelve, azért a *v_1 egyenesek száma hatvan.* Ez egyeneseket külön-külön akkép jelöljük, mint a KIRKMAN-pontokhoz rendelt PASCAL-egyeneseket, de megkülönböztetésül még egy »$_1$« mutatót függesztünk hozzájuk.

Igy a

$$p^I, \quad P^I = (\alpha_1^I \alpha_2^I \alpha_3^I), \quad P_1^I, \quad p_1^I = | \mathbf{A}_{1_1}^I \mathbf{A}_{2_1}^I \mathbf{A}_{3_1}^I | = | \mathbf{A}_1^I \mathbf{A}_2^I \mathbf{A}_3^I |_1$$

pontok és egyenesek egymáshoz rendeltek.

Miután minden PASCAL-egyenesen három KIRKMAN-pont fekszik, minden V_1 ponton is három v_1 egyenes megy keresztül; s mert minden CAYLEY-egyenesen három KIRKMAN-pont van, azért minden STEINER-ponton három v_1 egyenes megy keresztül. Ennélfogva:

A hatvan v_1 egyenes hármasával a hatvan V_1 ponton és a húsz STEINER-*ponton megy keresztűl.*	*A hatvan V_1 pont hármasával a hatvan v_1 egyenesen és húsz* CAYLEY-*egyenesen fekszik.*

50. Vizsgáljuk most meg, hogy egy DESARGUES-configuratio tíz PASCAL-egyeneséhez és tíz KIRKMAN-pontjához rendelt V_1, v_1 pontok és egyenesek mily configuratiót képeznek.

A p^I egyenesen fekvő $\mathbf{A}_1^I \mathbf{A}_2^I \mathbf{A}_3^I$ pontokhoz oly $\alpha_{1_1}^I \alpha_{2_1}^I \alpha_{3_1}^I$ egyenesek vannak rendelve, melyek egymást a p^I-hez rendelt P_1^I pontban metszik; továbbá a P^I ponton keresztűl menő $\alpha_1^I \alpha_2^I \alpha_3^I$ egyenesekhez oly $\mathbf{A}_{1_1}^I \mathbf{A}_{2_1}^I \mathbf{A}_{3_1}^I$ pontok vannak rendelve, melyek a P^I-hez rendelt p_1^I egyenesen feküsznek. Miután a

$$b_1^I b_2^I b_3^I = C_1^I C_2^I C_3^I, \quad c_1^I c_2^I c_3^I = B_1^I B_2^I B_3^I$$

háromszögek, melyeknek szögpontjai az $\alpha_1^I, \alpha_2^I, \alpha_3^I$ egyeneseken feküsznek és melyeknek oldalai egymást az $\mathbf{A}_1^I, \mathbf{A}_2^I, \mathbf{A}_3^I$ pontokban metszik, a

$$P^I = (\alpha_1^I \alpha_2^I \alpha_3^I), \quad p^I = | \mathbf{A}_1^I \mathbf{A}_2^I \mathbf{A}_3^I |$$

pontra és egyenesre vonatkozólag perspectivásak, a

$$(B_1^I B_2^I B_3^I)_1 = (c_1^I c_2^I c_3)_1, \quad (C_1^I C_2^I C_3)_1 = (b_1^I b_2^I b_3^I)_1$$

háromszögek is, melyeknek oldalai egymást az $| \mathbf{A}_1^I, \mathbf{A}_2^I, \mathbf{A}_3^I |_1$ pontokban metszik és melyeknek szögpontjai az $| \alpha_1^I, \alpha_2^I, \alpha_3^I |_1$ egyeneseken feküsznek, perspectivásak a

$$p_1^I = | \mathbf{A}_1^I \mathbf{A}_2^I \mathbf{A}_3 |_1, \quad P_1^I = (\alpha_1^I \alpha_2^I \alpha_3^I)_1$$

egyenesre és pontra, mint collineatio-tengelyre és középpontra, vonatkozólag. Ennélfogva:

A hatvan V_1 pontból és hatvan v_1 egyenesből álló $[V_1 v_1] = [Vv]_1$ configuratio, ép úgy, mint a hatvan Pascal-*egyenesből v-ből és hatvan* Kirkman-*pontból V-ből álló $[Vv]$ configuratio, hat* Desargues-*configuratióra oszlik. Mindkét configuratio $[Vv]$, $[Vv]_1$ a két $H = (15_4, 20_3)$, $H' = (20_3, 15_4)$* Hesse-*configuratio irányában egyenlőkép viselkedik, a mennyiben minden* Steiner-*ponton keresztűl megy három v_1 és három v-egyenes és minden* Cayley-*egyenesen három V_1 és három V-pont fekszik.*

51. A 44. pontban két háromszöget

$$B_1^{IV} B_2^{V} B_3^{VI}, \quad C_1^{IV} C_2^{V} C_3^{VI}$$

tárgyaltunk, melyek egymás irányában és az $A_1^{IV} A_2^{V} A_3^{VI}$ irányában, a p_1^I, p_1^{II}, p_1^{III} collineatio-tengelyekre és a π pontra vonatkozólag, perspectivásak voltak. A három háromszög tehát egy $(15_4, 20_3)$ Hesse-configuratiót képezett. Ennek húsz pontja a kilencz Kirkman- és a kilencz V_1 pont

$$(\mathbf{A}_1^I \mathbf{A}_2^I \mathbf{A}_3^I \; \mathbf{B}_1^{II} \mathbf{B}_2^{II} \mathbf{B}_3^{II} \; \Gamma_1^{III} \Gamma_2^{III} \Gamma_3^{III})_1,$$

valamint a P II Steiner-ellenpontpár; tizenöt egyenese pedig a három $\pi^{IV}, \pi^{V}, \pi^{VI}$ Pascal-egyenes, a három v_1 egyenes,

$$p_1^I = | \mathbf{A}_1^I \mathbf{A}_2^I \mathbf{A}_3^I |_1, \quad p_1^{II} = | \mathbf{B}_1^{II} \mathbf{B}_2^{II} \mathbf{B}_3^{II} |_1, \quad p^{III} = | \Gamma_1^{III} \Gamma_2^{III} \Gamma_2^{III} |_1,$$

és kilencz g_{0I} egyenes, a melyeken két-két Kirkman- és két-két V_1 pont (V. táblázat) fekszik. Ennélfogva:

Egy STEINER-pontból kisugárzó három

PASCAL-egyenesen kilencz KIRKMAN-pont fekszik; ezek három, páronként perspectivás háromszögnek szögpontjai. A megfelelő oldalok metszőpontjai V_1-pontok; a collineatio tengelyek v_1 egyenesek,	v_1 egyenesen kilencz V_1 pont fekszik; ezek három, páronként perspectivás háromszögnek szögpontjai. A megfelelő háromszögoldalok metszőpontjai KIRKMAN-pontok; a collineatio-tengelyek PASCAL-egyenesek,	STEINER-egyenesen kilencz STEINER-pont fekszik; ezek három, páronként perspectivás háromszögnek szögpontjai. A megfelelő háromszög-oldalok metszőpontjai STEINER-pontok; a collineatio-tengelyek STEINER-egyenesek,

melyek egymást a STEINER-pont ellenpontjában metszik.

A középső tétel a configuratio

$$[A_i^{I} B_i^{II} \Gamma_i^{III}]_1 \; . \; . \; . \; . \; (i=1, 2, 3)$$

háromszögeiből folyik és általánosítható.

52. A

$$V_1^{V,\ VI} = [\Pi^{IV} A_1^{I} B_1^{II} \Gamma_1^{III}]_1, \quad V_1^{VI,\ IV} = [\Pi^{V} A_2^{I} B_2^{II} \Gamma_2^{III}]_1,$$
$$V_1^{IV,\ V} = [\Pi^{V} A_3^{I} B_3^{II} \Gamma_3^{III}]_1$$

négyszögek szögpontjai a P ponton keresztűl menő $\pi\, p_1^{I}\, p_1^{II}\, p_1^{III}$ egyenesen feküsznek, és a P pont és $\pi^{IV}, \pi^{V}, \pi^{VI}$ collineatio-tengelyekre perspectivásak.

Ugyanis ama négyszögek átlós háromszögei: $\Delta^{V,\ VI}$, $\Delta^{VI,\ IV}$, $\Delta^{IV,\ V}$, valamint az

$$[A_i^{I} B_i^{II} \Gamma_i^{III}]_1 \; . \; (i=1, 2, 3)$$

háromszögek, mint ama négszögeknek részei, a nevezett pontra és collineatio-tengelyekre vonatkozólag perspectivásak.

Minthogy ama négyszögek a Π STEINER-ponton keresztűl menő $\sigma^{V,\ VI}$, $\sigma^{VI,\ IV}$, $\sigma^{IV,\ V}$ STEINER-egyenesekhez vannak rendelve, következik:

»Egy STEINER ponton keresztűl menő három STEINER-egyeneshez rendelt három V_1 négyszög páronként perspectivás, a STEINER-ponton keresztűl menő PASCAL-egyenesek képezik a collineatio-tengelyeket, a STEINER-pont ellenpontja a közös collineatio középpont«.

Vagy még:

»A tizenöt V_1 négyszög hármasával húszlélekép perspectivás, a húsz Steiner-pont képezi a collineatio-középpontokat; az ezeknek ellenpontjain keresztűl menő Pascal egyenesek pedig a collineatio-tengelyek«.

Mindkét tételt már a 33. pontban levezettük.

53. A 35. pontban foglalt tétel alapján (9. ábra):

$$(A_{1_1}{}^{IV}\ \Sigma^{II,\ III}\ A_1{}^{IV}\ A_1) = -1,$$

tehát egyszersmind azoknál a sugaraknál

$$\Pi A_{1_1}{}^{IV} = \pi_1{}^{IV},\ \Pi\Sigma^{II,\ III} = p,\ \Pi A_1{}^{IV} = \pi^{IV},\ \Pi A_1 = \sigma^{V,\ VI},$$

melyek e négyes pontjait a Π pontból projiciálják

$$(\pi_1{}^{IV}\ p\ \pi^{IV}\ \sigma^{V,\ VI}) = -1.$$

Ugyanígy, a Π pontból kisugárzó többi $\Pi A_{2_1}{}^{V} = \pi_1{}^{V}$, $\Pi A_{3_1}{}^{VI} = \pi_1{}^{VI}$, . . . sugarakat tekintve,

$$(\pi_1{}^{V}\ p\ \pi^{V}\ \sigma^{VI,\ IV}) = (\pi_1{}^{VI}\ p\ \pi^{VI}\ \sigma^{IV,\ V}) = -1.$$

Ez pedig a következőkép fejezhető ki:

Minden Steiner-*pontból kisúgárzik egy* Cayley-, *három* Pascal-, *három* v_1-, *és három* Steiner-*egyenes. A* Cayley-*egyenes és a* v_1-*egyenes, az utóbbihoz rendelt* Pascal-*egyenestől és egy* Steiner-*egyenestől harmonicusan van elválasztva.*

Ennélfogva, ha a Pascal-, Cayley-, és Steiner-egyenesek ismeretesek, ezekből a v_1-egyenesek egyszerű úton szerkeszthetők. Mert pl. a P ponton keresztűl menő $p_1{}^{I}$, $p_1{}^{II}$, $p_1{}^{III}$ egyenesekre nézve

$$(p_1{}^{I}\,\pi\,p^{I}\,\sigma^{II,\ III}) = (p_1{}^{II}\,\pi\,p^{II}\,\sigma^{III,\ I}) = (p_1{}^{III}\,\pi\,p^{III}\,\sigma^{I,\ II}) = -1.$$

13. A Pascal-egyenesek nincsenek correlatiós vonatkozásban a Kirkman-, és V_1-pontokkal, és nincsenek collinearis vonatkozásban a v_1-egyenesekkel.

54. A föntebbiekből meggyőződhettünk arról, hogy a hatvan

Pascal-egyenes	Kirkman-pont	V_1 pont
1. hármasával a húsz Steiner-ponton,	1. hármasával a húsz Cayley-egyenesen,	1. hármasával a húsz Cayley-egyenesen,

2. hármasával a hatvan Kirkman ponton, 3. négyesével a negyvenöt Pascal-ponton megy keresztül.	2. hármasával a hatvan Pascal-egyenesen fekszik.	2. hármasával a hatvan v_1 egyenesen fekszik.

Vizsgáljuk most meg, hogy *nem feküsznek-e az olyan* Kirkman-, *valamint V_1-pontok, melyek egy* Pascal-*ponton keresztűl menő négy* Pascal-*egyeneshez vannak rendelve, ugyanegy egyenesben?*

Az (1 4, 2 3) ponton (I. táblázat) keresztűl mennek a $p^{I}\ a_1^{IV}\ b_1^{III}\ c_1^{II}$ Pascal-egyenesek, melyekhez a

$$P^{I} A_1^{IV} B_1^{III} C_1^{II}\,; \quad | P^{I} A_1^{IV} B_1^{III} C_1^{II} |_1$$

pontok vannak rendelve, és az V. és IV. táblázat szerint a

$$P_1^{I} A_{1_1}^{IV} B_1^{III} C_1^{II}\ (1\,2,\ 3\,4), \text{ valamint a } B_{1_1}^{III} C_{1_1}^{II} P^{I} A_1^{IV}\ (1\,3,\ 2\,4)$$

pontok egy-egy egyenesben (g_{01}, g'_{01}) feküsznek.

Ha már most ama négy Kirkman- és négy V_1-pont egy-egy egyenesben feküdnék, akkor ez a két egyenes egybeesnék, egy q-egyenessel, mert mindegyiknek két közös pontja van a másik egyenessel, és akkor az (1 2, 3 4), (1 3, 2 4) pontok is a q egyenesen volnának. Ámde

az (1 3, 2 4) és $C_1^{II} = (\beta_1^{II}\, a_2^{II}\, a_3^{II})$ pontok összekötő egyenese: β_1^{II},
» (1 2, 3 4) » $A_1^{IV} = (\pi^{IV}\, \alpha_2^{IV}\, \alpha_3^{IV})$ » » » π^{IV};

ennélfogva a q egyenes úgy a β_1^{II}, mint a π^{IV}-gyel egybeesnék. Minthogy azonban az általános Pascal-hatszögben a β_1^{II} és π^{IV} Pascal-egyenesek különbözők, ama feltevésünk, hogy a négy Kirkman-, vagy a négy V_1-pont egy egyenesben fekszik, hamis. Így tehát:

Egy Pascal-*pontból kisúgárzó négy* Pascal-*egyeneshez rendelt négy* Kirkman-, *valamint négy V_1 pont nem fekszik ugyanegy egyenesben.*

Ennek pedig az a következménye, hogy *a hatvan* Pascal-*egyenes képezte configuratio sem a hatvan* Kirkman-*pontból, sem pedig a hatvan V_1 pontból álló configuratióval nincs correlatióban.*

55. Vizsgáljuk még meg, hogy *a hatvan* Pascal-*egyenes, és a hatvan* v_1 *egyenes képezte configuratiók nem collinearis alakzatai-e egymásnak?*

Ha ismét kimutathatjuk, hogy négy egymást egy (Pascal) pontban metsző Pascal-egyeneshez rendelt v_1 egyenes nem metszi egymást egy pontban, akkor a Pascal-egyenesek és v_1-egyenesek nem lehetnek egymásnak collinearis alakzatai akképpen, mint a hogy az egymáshoz rendelést egész eddigi tárgyalásunk folyamán eszközöltük.

A 9. ábrában három négyszöget $V^{II,\ III} = P^{I}\, A_1^{IV}\, A_2^{V}\, A_3^{VI}$, $V_1^{II,\ III} = [P^{I}\, A_1^{IV}\, A_2^{V}\, A_3^{VI}]_1$, $S^{II,\ III} = \Pi\, \mathbf{A}_1\, \mathbf{A}_2\, \mathbf{A}_3$ látunk, melyeknek szögpontjai az egymást a $\Sigma^{II,\ III}$ pontban metsző p $a_1\, a_2\, a_3$ egyenesen feküsznek.

Ha az alábbi egyenesek metszőpontjai

$$(\mathbf{A}_1 A_{2_1}{}^{V},\ \mathbf{A}_2 A_{1_1}{}^{IV}) = (3\,4,\ 5\,6)_1,\quad (A_1{}^{IV} A_{2_1}{}^{V},\ A_2{}^{V} A_{1_1}{}^{IV}) = (3\,4,\ 5\,6)'_1$$
$$(\mathbf{A}_2 A_{3_1}{}^{VI},\ \mathbf{A}_3 A_{2_1}{}^{V}) = (1\,2,\ 3\,4)_1,\quad (A_2{}^{V} A_{3_1}{}^{VI},\ A_3{}^{VI} A_{2_1}{}^{V}) = (1\,2,\ 3\,4)'_1$$
$$(\mathbf{A}_3 A_{1_1}{}^{IV},\ \mathbf{A}_1 A_{3_1}{}^{VI}) = (5\,6,\ 1\,2)_1,\quad (A_3{}^{VI} A_{1_1}{}^{IV},\ A_1{}^{IV} A_{3_1}{}^{VI}) = (5\,6,\ 1\,2)'_1,$$

akkor

a $\Sigma^{II,\ III}$ $(3\,4,\ 5\,6)$, $(3\,4,\ 5\,6)_1$, $(3\,4,\ 5\,6)'_1$ pontok az y''_{12} egyenesen,
» $\Sigma^{II,\ III}$ $(5\,6,\ 1\,2)$, $(5\,6,\ 1\,2)_1$, $(5\,6,\ 1\,2)'_1$ » y''_{34} »
» $\Sigma^{II,\ III}$ $(1\,2,\ 3\,4)$, $(1\,2,\ 3\,4)_1$, $(1\,2,\ 3\,4)'_1$ » y''_{56} »

feküsznek, és mindegyik egyenesen az első két pont az utóbbi kettőt harmonicusan választja el.

Ha most az $\alpha_2 = |\ \mathbf{A}_2\, A_3{}^{V}\, (3\,4,\ 1\,2)\ |$ collineatio-tengelyre perspectivás

$$\left.\begin{matrix} \Sigma^{II,\ III}\ A_{2_1}\ A_{3_1}{}^{IV} \\ (3\,4,\ 5\,6)\ A_1{}^{IV}\ \Pi \end{matrix}\right\} \qquad \left.\begin{matrix} \Sigma^{II,\ III}\ A_2{}^{V}\ \mathbf{A}_3 \\ (3\,4,\ 5\,6)\ A_{1_1}\ P_1{}^{I} \end{matrix}\right\}$$

háromszögeket tekintjük, azt látjuk, hogy a

$$\pi_1{}^{VI} = \Pi\, A_{3_1}{}^{VI} \qquad \alpha_{3_1}{}^{I} = \mathbf{A}_3\, P_1{}^{I}$$

egyenesek az

$$y''_{12} = \Sigma^{II,\ III}\ (3\,4,\ 5\,6), \quad A_{2_1}{}^{V} A_1{}^{IV},\ A_2{}^{V} A_{1_1}{}^{IV}$$

egyenesek $(3\,4,\ 5\,6)'_1$ metszőpontjában találkoznak, az

$$\alpha_{1_1}{}^{V} = \mathbf{A}_1\, A_{2_1}{}^{V} \qquad \alpha_{2_1}{}^{IV} = \mathbf{A}_2\, A_{1_1}{}^{IV}$$

egyenesek pedig a $(3\,4,\ 5\,6)_1$ ponton mennek keresztűl.

Minthogy azonban a $(3\,4,\ 5\,6)_1$ pontok általában nem esnek egybe, mert a $\Sigma^{\mathrm{II},\ \mathrm{III}}$ (3 4, 5 6) pontoktól harmonicusan vannak elválasztva, a $\pi^{\mathrm{VI}}\,\alpha_3{}^{\mathrm{I}}\,\alpha_1{}^{\mathrm{V}}\,\alpha_2{}^{\mathrm{IV}}$ Pascal-egyenesekhez rendelt $\pi_1{}^{\mathrm{VI}}\,\alpha_{3_1}{}^{\mathrm{I}}\,\alpha_{1_1}{}^{\mathrm{V}}\,\alpha_{2_1}{}^{\mathrm{IV}}$ v_1-egyenesek nem metszik egymást ugyanegy pontban. Ezért: *A hatvan* Pascal- *és a hatvan v_1-egyenes képezte configuratiók nem collinearis alakzatai egymásnak*

56. Az előbbi bizonyításból kitűnik, hogy az y''_{56}, y''_{34}, y''_{12} egyenesek mindegyikének két pontjában két v_1-egyenes metszi egymást, melyek az illető y-egyenes és az $Y^{\mathrm{II},\ \mathrm{III}}$ négyszög szögpontjaitól harmonicusan vannak elválasztva. Még pedig:

az $(1\,2,\ 3\,4)_1$	ponton keresztűl menő	$\alpha_{2_1}{}^{\mathrm{VI}}\,\alpha_{3_1}{}^{\mathrm{V}}$	egyenesek harmonicusan vannak elválasztva a	y''_{56}, Y_{56}-tól,
az $(1\,2,\ 3\,4)'_1$	»	$\pi_1{}^{\mathrm{IV}}\,\alpha_{1_1}{}^{\mathrm{I}}$	»	y''_{56}, Y'_{56}-tól,
az $(5\,6,\ 1\,2)_1$	»	$\alpha_{3_1}{}^{\mathrm{IV}}\,\alpha_{1_1}{}^{\mathrm{IV}}$	»	y''_{34}, Y_{34}-től,
az $(5\,6,\ 1\,2)'_1$	»	$\pi_1{}^{\mathrm{V}}\,\alpha_{2_1}{}^{\mathrm{I}}$	»	y''_{34}, Y'_{34}-től,
a $(3\,4,\ 5\,6)_1$	»	$\alpha_{1_1}{}^{\mathrm{V}}\,\alpha_{2_1}{}^{\mathrm{IV}}$	»	y''_{12}, Y_{12}-től.
a $(3\,4,\ 5\,6)'_1$	»	$\pi_1{}^{\mathrm{VI}}\,\alpha_{3_1}{}^{\mathrm{I}}$	»	y''_{12}, Y'_{12}-től,

hol $\Pi\,A_{2_1}{}^{\mathrm{V}}=\pi_1{}^{\mathrm{V}}$, $\mathbf{A}_2\,P_1{}^{\mathrm{I}}=\alpha_{2_1}{}^{\mathrm{I}}$, $\mathbf{A}_3\,A_{1_1}{}^{\mathrm{IV}}=\alpha_{3_1}{}^{\mathrm{IV}}$, $\mathbf{A}_1\,A_{3_1}{}^{\mathrm{VI}}=\alpha_{1_1}{}^{\mathrm{VI}}$
$\Pi\,A_{1_1}{}^{\mathrm{IV}}=\pi_1{}^{\mathrm{IV}}$, $\mathbf{A}_3\,P_1{}^{\mathrm{I}}=\alpha_{3_1}{}^{\mathrm{I}}$, $\mathbf{A}_2\,A_{3_1}{}^{\mathrm{VI}}=\alpha_{2_1}{}^{\mathrm{VI}}$, $\mathbf{A}_3\,A_{2_1}{}^{\mathrm{V}}=\alpha_{3_1}{}^{\mathrm{V}}$.

Minden y-egyenes egy Salmon-pontot egy Pascal-ponttal köt össze, és minden y-egyenesen két ily pont, mint $(3\,4,\ 5\,6)_1$, $(3\,4,\ 5\,6)'_1$ fekszik, melyek ama pontokat $\Sigma^{\mathrm{II},\ \mathrm{III}}$ (3 4, 5 6) harmonicusan választják el. Ezeknek az új, párosával az y-egyeneseken fekvő pontoknak száma tehát kilenczven. Általában G_{12}-vel jelöljük őket, és, ha két ugyanegy y-egyenesen fekvő ily pontról van szó, G_{12}, G'_{12}-vel; a relatio, melyben a Σ Salmon-pontokkal és az ezentúl G-vel jelölendő Pascal-pontokkal vannak,

$$(G_{12}\ G'_{12}\ \Sigma\ G)=-1.$$

Minden y-egyenesen fekvő G_{12}, G'_{12} pontpáron négy v_1 egyenes megy keresztűl; kettő a G_{12} és kettő a G'_{12} ponton, ezek azokhoz a Pascal-egyenesekhez vannak rendelve, melyek az y-egyenesen fekvő G Pascal-egyenesen mennek keresztűl. Máskülönben e G_{12}, G'_{12} pontpár a negyvenöt g_{01}, g'_{01} egyenespárhoz rendelhető.

Ugyanis az y''_{12} egyenesen rajta feküsznek a

$$G_{12}=(3\,4,\ 5\,6)_1,\quad G'_{12}=(3\,4,\ 5\,6)'_1$$

pontok, melyekben az $\alpha_{1_1}{}^{\mathrm{V}}\,\alpha_{2_1}{}^{\mathrm{IV}}$, $\pi_1{}^{\mathrm{VI}}\,\alpha_{3_1}{}^{\mathrm{V}}$ egyenesek egymást metszik, és az Y''_{12} ponton keresztűl mennek a

$$g_{01} = |\,\mathbf{A}_{2_1}^{V}\mathbf{A}_{2_1}^{IV}\mathbf{A}_{3_1}^{I}\Pi^{VI}\,|\,,\quad g'_{01} = |\,\Pi_1^{VI}\mathbf{A}_{3_1}^{V}\mathbf{A}_1^{V}\mathbf{A}_2^{IV}\,|$$

egyenesek, melyeken az $\mathbf{A}_{1_1}^{V}\mathbf{A}_{2_1}^{IV}$, $\Pi_1^{VI}\mathbf{A}_{3_1}^{I}$ pontok feküsznek.

Akkép, a mint mindegyik Pascal-egyenes három Pascal-pontot, G-t, tartalmaz, minden v_1 egyenesen is három G_{12} pont fekszik. Igy a

$$\pi = 1\,4\,3\,2\,5\,6 = |\,\Pi A_3^{VI} B_3^{VI} C_3^{VI}\,|$$

Pascal-egyenesen a

$$(3\,4,\ 5\,6) = (\pi^{VI}\alpha_3^{I}\alpha_1^{V}\alpha_2^{IV}),\quad (1\,4,\ 5\,2) = (\pi^{VI}\beta_3^{II}\beta_1^{V}\beta_2^{IV}),$$
$$(1\,6,\ 3\,2) = (\pi^{VI}\gamma_3^{III}\gamma_1^{V}\gamma_2^{IV})$$

Pascal-pontok feküsznek, holott a $\pi_1^{VI} = |\Pi A_{3_1}^{VI} B_{3_1}^{VI} C_{3_1}^{VI}|$ v_1-egyenes a

$$(3\,4,\ 5\,6)'_1 = (\pi^{VI}\alpha_3^{I})_1,\quad (1\,4,\ 5\,2)'_1 = (\pi^{VI}\beta_3^{II})_1,\quad (1\,6,\ 3\,2)'_1 = (\pi^{VI}\gamma_3^{III})_1$$

G_{12} pontokat tartalmazza.

57. *A negyvenöt Y-pont mindegyikén négy l_{12} egyenes megy keresztűl, melyeken a kilenczven G_{12} pont közűl kettő-kettő fekszik; az egész configuratióban 180 ily l_{12} egyenes van, minden G_{12} ponton keresztűl megy négy.*

A negyvenöt y-egyenes mindegyikében négy L_{01} pont van, melyben a kilenczven g_{01} egyenes közűl kettő-kettő egymást metszi; az egész configuratióban 180 ily L_{01} pont van, minden g_{01} egyenesen négy fekszik.

Ugyanis az

$$\left.\begin{matrix} A_{1_1}^{IV}\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3 \\ \mathbf{A}_1 A_{2_1}^{V} A_{3_1}^{VI}\end{matrix}\right\}\quad \left.\begin{matrix} P_1^{I}\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3 \\ \Pi A_{2_1}^{V} A_{3_1}^{VI}\end{matrix}\right\}\quad \left.\begin{matrix} \mathbf{A}_{1_1}^{I} B_1 C_1 \\ A_1 \mathbf{B}_{1_1}^{II}\Pi_{1_1}^{III}\end{matrix}\right\}\quad \left.\begin{matrix} \Pi_1^{IV} B_1 C_1 \\ P\,\mathbf{B}_{1_1}^{II}\Gamma_{1_1}^{III}\end{matrix}\right\}$$

háromszögpárok közűl a két első a $\Sigma^{II,\,III}$, a két utóbbi pedig a $\Sigma^{V,\,VI}$ collineatio-középpontra vonatkozólag perspectivás, ennélfogva az

$\mathbf{A}_2 A_{1_1}^{IV} = \alpha_{2_1}^{IV}$,	$\mathbf{A}_1 A_2^{V} = \alpha_{1_1}^{V}$	egymást	$(\alpha_2^{IV}\alpha_1^{V})_1 = (3\,4,\ 5\,6)_1$
$\mathbf{A}_3 A_{1_1}^{IV} = \alpha_{3_1}^{IV}$,	$\mathbf{A}_1 A_{3_1}^{VI} = \alpha_{1_1}^{VI}$	»	$(\alpha_3^{IV}\alpha_1^{VI})_1 = (5\,6,\ 1\,2)_1$
$\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3$,	$A_{2_1}^{V} A_{3_1}^{VI}$	»	Y_{56}
$\mathbf{A}_2 P_1^{I} = \alpha_2^{I}$,	$\Pi A_{2_1}^{V} = \pi_1^{V}$	»	$(\alpha_2^{I}\pi^{V})_1 = (5\,6,\ 1\,2)'_1$
$\mathbf{A}_3 P_1^{I} = \alpha_{3_1}^{I}$,	$\Pi A_{3_1}^{VI} = \pi_1^{VI}$	»	$(\alpha_3^{I}\pi^{V})_1 = (3\,4,\ 5\,6)'_1$
$\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3$.	$A_{2_1}^{V} A_{3_1}^{VI}$	»	Y_{56}

$$\begin{array}{llll}
B_1\,\mathbf{A}_{1_1}{}^{I}=b_{1_1}{}^{I}, & A_1\,\mathbf{B}_{1_1}{}^{II}=a_{1_1}{}^{II} & \text{egymást} & (b_1{}^{I}\,a_1{}^{II})_1=(5\,6,\ 1\,4)_1 \\
C_1\,\mathbf{A}_{1_1}{}^{I}=c_{1_1}{}^{I}, & A_1\,\Gamma_{1_1}{}^{III}=a_{1_1}{}^{III} & \text{»} & (c_1{}^{I}\,a_1{}^{III})_1=3\,2,\ 5\,6)_1 \\
B_1\,C_1, & \mathbf{B}_{1_1}{}^{II}\,\Gamma_{1_1}{}^{III} & \text{»} & Y_{56} \\
 & & & \\
B_1\,\Pi_1{}^{IV}=b_{1_1}{}^{IV}, & P\,\mathbf{B}_{1_1}{}^{II}=p_1{}^{II} & \text{»} & (b_1{}^{IV}\,p^{I})_1=(3\,2,\ 5\,6)'_1 \\
C_1\,\Pi_1{}^{IV}=c_{1_1}{}^{IV}, & P\,\Gamma_{1_1}{}^{III}=p_1{}^{III} & \text{»} & (c_1{}^{IV}\,p^{III})_1=(5\,6,\ 1\,4)'_1 \\
B_1\,C_1, & \mathbf{B}_{1_1}{}^{II}\,\Gamma_{1_1}{}^{III} & \text{»} & Y_{56}
\end{array}$$

pontokban metszik, melyek mindig egy egyenesben feküsznek.

Ha ellenben az

$$\left.\begin{array}{l} a_1{}^{IV}\,\alpha_2\,\alpha_3 \\ \alpha_1\,a_2{}^{V}\,a_3{}^{VI} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} p^{I}\,\alpha_2\,\alpha_3 \\ \pi\,a_2{}^{V}\,a_3{}^{VI} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} \alpha_1{}^{I}\,b_1\,c_1 \\ a_1\,\beta_1{}^{II}\,\gamma_1{}^{III} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} \pi^{IV}\,b_1\,c_1 \\ p\,\beta_1{}^{II}\,\gamma_1{}^{III} \end{array}\right\}$$

háromszögpárokból indultunk ki, melyek közűl az első két, illetve a másik két pár a $\sigma^{II,\ III}$, $\sigma^{V,\ VI}$ collineatio-tengelyekre vonatkozólag perspectivás, azt látjuk, hogy az

$$\begin{array}{lllll}
\alpha_2\,a_1{}^{IV}=\mathbf{A}_2{}^{IV}, & \alpha_1\,a_2{}^{V}=\mathbf{A}_1{}^{V} & \text{pontok} & \text{az} & \mathbf{A}_2{}^{IV}\,\mathbf{A}_1{}^{V} \\
\alpha_3\,a_1{}^{IV}=\mathbf{A}_3{}^{IV}, & \alpha_1\,a_3{}^{VI}=\mathbf{A}_1{}^{VI} & \text{»} & \text{az} & \mathbf{A}_3{}^{IV}\,\mathbf{A}_1{}^{VI} \\
\alpha_2\,\alpha_3, & a_2{}^{V}\,a_3{}^{VI}=(1\,3,\,2\,4) & \text{»} & \text{az} & y_{56} \\
\alpha_2\,p^{I}=A_2{}^{I}, & \pi\,a_2{}^{V}=\Pi^{V} & \text{»} & \text{az} & A_2{}^{I}\,\Pi^{V} \\
\alpha_3\,p^{I}=A_3{}^{I}, & \pi\,a_3{}^{VI}=\Pi^{VI} & \text{»} & \text{az} & \mathbf{A}_3{}^{I}\,\Pi^{VI} \\
\alpha_2\,\alpha_3, & a_2{}^{V}\,a_3{}^{VI}=(1\,3,\,2\,4) & \text{»} & \text{az} & y_{56} \\
b_1\,\alpha_1{}^{I}=B_1{}^{I}, & a_1\,\beta_1{}^{II}=A_1{}^{II} & \text{»} & \text{a} & B_1{}^{I}\,A_1{}^{II} \\
c_1\,\alpha_1{}^{I}=C_1{}^{I}, & a_1\,\gamma_1{}^{III}=A_1{}^{III} & \text{»} & \text{a} & C_1{}^{I}\,A_1{}^{III} \\
b_1\,c_1, & \beta_1{}^{II}\gamma_1{}^{III}=(1\,3,\,2\,4) & \text{»} & \text{az} & y_{56} \\
b_1\,\pi^{IV}=B_1{}^{IV}, & p\,\beta_1{}^{II}=P^{II} & \text{»} & \text{a} & B_1{}^{IV}\,P^{II} \\
c_1\,\pi^{IV}=C_1{}^{IV}, & p\,\gamma_1{}^{III}=P^{III} & \text{»} & \text{a} & C_1{}^{IV}\,P^{III} \\
b_1\,c_1, & \beta_1{}^{II}\gamma_1{}^{III}=(1\,3,\,2\,4) & \text{»} & \text{az} & y_{56}
\end{array}$$

egyenesekben feküsznek, melyek egymást egy pontban metszik.

14. Az $_0V$, $_1V$ pontokról és a $_0v$, $_1v$ egyenesekről.

A Pascal-egyenesek és Kirkman-pontok, valamint a v_1 egyenesek és V_1 pontok képezte [Vv], $[Vv]_1$ configuratiókhoz még új $_0$[Vv], $_1$[Vv] configuratiókat találhatunk, melyek bizonyos tekintetben az előbbiekkel a correlatio vonatkozásában állanak; a mennyiben a Pascal- és v_1-egyenesekkel az ${}_0V$ és ${}_1V$ pontok és a Kirkman- és V_1-pontokkal az ${}_0v$ és ${}_1v$-egyenesek állíthatók szembe oly módon, hogy ezekből az új pontokból és egyenesekből a következőkben directe levezetett tételek megegyeznek azokkal a tételekkel, melyeket nyerünk, ha a már ismert tételeket az említett felcseréléssel fejezzük ki.

58. A p Cayley-egyenesen a Π Steiner pont, a $P^{I} P^{II} P^{III}$ Kirkman-pontok, a $P_1^{I} P_1^{II} P_1^{III}$ Veronese- vagyis V_1-pontok feküsznek. Határozzunk most meg három új pontot, ${}_0P^{I}\ {}_0P^{II}\ {}_0P^{III}$-at, a

$$(P^{I} P_1^{I}\ {}_0P^{I}\ \Pi) = (P^{II} P_1^{II}\ {}_0P^{II}\ \Pi) = (P^{III} P_1^{III}\ {}_0P^{III}\ \Pi) = -1$$

relatiókból.

Minden Cayley-egyenesen három ily új pont fekszik; melyeknek száma tehát hatvan és a melyeket általában ${}_0V$-vel jelölünk és a Pascal-egyenesekhez rendelünk.

Igy az a_1, a_2, a_3 egyeneseken az ${}_0A_1^{IV}$, ${}_0A_2^{V}$, ${}_0A_3^{VI}$ pontokat

$$(A_1^{IV} A_{1_1}^{IV}\ {}_0A_1^{IV}\ \mathbf{A}_1) = (A_2^{V} A_{2_1}^{V}\ {}_0A_2^{V}\ \mathbf{A}_2) = (A_3^{VI} A_{3_1}^{VI}\ {}_0A_3^{VI}\ \mathbf{A}_3) = -1$$

relatiók határozzák meg.

A $V^{II,\ III}$, $V_1^{II,\ III}$, $S^{II,\ III}$ négyszögekhez (10. ábra) most egy új négyszög ${}_0V^{II,\ III} = {}_0[P^{I} A_1^{IV} A_2^{V} A_3^{VI}]$ járul, melynek oldalai ép úgy, mint a három előbbi négyszögnek oldalai, az

$$Y^{II,\ III} = Y_{12}\, Y_{34}\, Y_{46}\, Y'_{12}\, Y'_{34}\, Y'_{56}$$

négyoldal szögpontjain mennek keresztűl, mert a két első és a két utóbbi négyszög szögpontjai a feltétel szerint harmonicusan vannak elválasztva.

Az Y_{12} ponton keresztűl menő

$$|\, A_1^{IV} A_2^{V} \,| = g_{01}, \quad |\, A_1^{IV} A_2^{V} \,| = g'_{01}, \quad \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 = \sigma^{I,\ VI}$$

egyeneseken még megfelelőleg rajta feküsznek a $\mathbf{B}_{3_1}^{II} \Gamma_{3_1}^{III}$, $\mathbf{B}_3^{II} \Gamma_3^{III}$, $B_3\, C_3$ pontok. Ezek azonban más rendben még a β_3, γ_3 Cayley-egyeneseken is rajta vannak, és így a

$$(\mathbf{B}_3^{II}\, \mathbf{B}_{3_1}^{II}\ {}_0\mathbf{B}_3^{II}\, B_3) = (\Gamma_3^{III}\, \Gamma_{3_1}^{III}\ {}_0\Gamma_3^{III}\, C_3) = -1$$

relatiókból meghatározott ${}_0\mathbf{B}_3^{II}$, ${}_0\Gamma_3^{III}$ pontok az ${}_0|\, A_1^{IV} A_2^{V} \,|$ egyenesen feküsznek.

Minthogy az ${}_0g = {}_0|\, A_1^{IV} A_2^{V} \mathbf{B}_3^{II} \Gamma_3^{III} \,|$ egyenesen fekvő négy ${}_0V$ ponthoz rendelt négy Pascal-egyenes, a_1^{IV}, a_2^{V}, β_3^{II}, γ_3^{III}, egymást a $G = (35,\ 46)$ Pascal-pontban metszi, mondhatjuk:

Egy PASCAL-*ponton keresztűl menő négy* PASCAL-*egyeneshez rendelt négy ${}_0V$ pont egy egyenesen fekszik.*

Vagy:

A hatvan ${}_0V$ pont négyesével a negyvenöt ${}_0g$ egyenesen fekszik, melyek a negyvenöt Y-ponton mennek keresztűl.

A hatvan PASCAL-*egyenes egymást négyesével a negyvenöt* PASCAL-*pontban, G-ben, metszi, melyek a negyven y-egyenesen feküsznek.*

Az ${}_0g$ egyeneseket a G-pontokhoz rendeljük.

Minthogy a negyvenöt ${}_0g$ egyenes mindegyikén a hatvan ${}_0V$ pont közűl négy fekszik, azért *minden ${}_0V$ ponton három ${}_0g$ egyenes megy keresztűl* úgy, mint a hogy minden PASCAL-egyenesen három PASCAL-pont fekszik.

A $v^{II,\ III} = p^I a_1^{IV} a_2^V a_3^{VI}$ négyoldalnak négy oldala és hat szögpontja PASCAL-egyenes és PASCAL-pont. Ezekhez a

$$ {}_0V^{II,\ III} = {}_0[P^I A_1^{IV} A_2^V A_3^{VI}] $$

négyszögnek négy szögpontja és hat oldala van rendelve, melyek ${}_0V$ pontok és ${}_0g$ egyenesek. Az $y^{II,\ III}$ négyszög a $v^{II,\ III}$ négyoldal körűl van írva, holott az $Y^{II,\ III}$ négyoldal az ${}_0V^{II,\ III}$ négyszögbe bele van írva.

59. Az ${}_0\pi^{IV}$ egyenest ekkép értelmezzük: $(\pi^{IV}\ {}_0\pi^{IV}\ \sigma^{V,\ VI}) = -1$. Minthogy

$$ \pi^{IV} = \Pi A_1^{IV} B_1^{IV} C_1^{IV}, \quad \pi_1^{IV} = \Pi A_{1_1}^{IV} B_{1_1}^{IV} C_{1_1}^{IV}, \quad \sigma^{V,\ VI} = \Pi \mathrm{A}_1 \mathrm{B}_1 \Gamma_1, $$

az a_1, b_1, c_1 egyeneseknek ${}_0A_1^{IV}$, ${}_0B_1^{IV}$, ${}_0C_1^{IV}$ pontjai az ${}_0\pi^{IV}$ egyenesen feküsznek. De az ${}_0A_1^{IV}$, ${}_0B_1^{IV}$, ${}_0C_1^{IV}$ pontokhoz rendelt PASCAL-egyenesek a_1^{IV}, b_1^{IV}, c_1^{IV} egymást a π CAYLEY-egyenesen fekvő II^{IV} KIRKMAN-pontban metszik. Ennélfogva:

Egy CAYLEY-*egyenes* KIRKMAN-*pontján keresztűl menő három* PASCAL-*egyeneshez három ugyanegy egyenesen fekvő ${}_0V$ pont van rendelve, s az utóbbi egyenes a* CAYLEY-*egyeneshez rendelt* STEINER-*ponton megy keresztűl.*

Vagy pedig:

A hatvan ${}_0V$ pont hármasával hatvan ${}_0v$ egyenesen fekszik, melyek hármasával a húsz STEINER-*ponton mennek keresztűl; az ${}_0V$ pontok ellenben hármasával a húsz* CAYLEY-*egyenesen feküsznek.*

A hatvan ${}_0v$ egyenest az ismert módon a hatvan ${}_0V$ ponthoz rendeljük.

Miután a hatvan ${}_0V$ pont hármasával a hatvan ${}_0v$ egyenesen fekszik, minden ${}_0V$ ponton három ${}_0v$ egyenes megy keresztül; továbbá egy DESARGUES-configuratióhoz tartozó tíz PASCAL-egyeneshez és tíz KIRKMAN-ponthoz oly tíz ${}_0V$ pont és ${}_0v$ egyenes van rendelve, melyek szintén egy DESARGUES-configuratiót képeznek.

Azaz: *A hatvan ${}_0V$ pont és hatvan ${}_0v$ egyenes képezte ${}_0[Vv]$ configuratio hat* DESARGUES-*configuratióra bomlik.*

60. Húzzuk meg a

$$ {}_0\pi^{VI} = \Pi\, {}_0A_3{}^{VI}, \quad {}_0\alpha_1{}^{V} = \mathbf{A}_1\, {}_0A_2{}^{V}, \quad {}_0\alpha_2{}^{IV} = \mathbf{A}_2\, {}_0A_1{}^{IV}, \quad {}_0\alpha_3{}^{I} = \mathbf{A}_3\, {}_0P^{I} $$

egyeneseket, melyek a ${}_0g$ egyenes ${}_0\Pi^{VI}$, ${}_0\mathbf{A}_1{}^{V}$, ${}_0\mathbf{A}_2{}^{IV}$, ${}_0\mathbf{A}_3{}^{I}$ pontjaihoz rendelvék. A

$$ \Pi\, \mathbf{A}_3\, {}_0A_3{}^{VI}\, P^{I}; \quad \mathbf{A}_1\, \mathbf{A}_2\, {}_0A_2{}^{V}\, {}_0A_1{}^{IV} $$

négyszögek arra utalnak, hogy a

$$ {}_0\pi^{VI}, \ {}_0\alpha_3{}^{I} \text{ és } {}_0\alpha_1{}^{V}, \ {}_0\alpha_2{}^{IV} $$

egyenesek egymást az y''_{12} egyenesen metszik, mert Y_{12}, y''_{12} az $a_1 a_2$ egyeneseket és $Y'_{12}\, y''_{12}$ a $p\, a_3$ egyeneseket harmonicusan választja el.

Továbbá:

$$ \Pi\big((34,\ 56)'_1\ {}_0(\pi^{VI} a_3{}^{I})\ (34,\ 56)\ \Sigma^{II,\ III}\big) \barwedge (A_{3_1}{}^{VI}\ {}_0A_3{}^{VI}\ A_3{}^{VI}\ \Sigma^{II,\ III}) \barwedge $$
$$ (A_{1_1}{}^{IV}\ {}_0A_1{}^{IV}\ A_1{}^{IV}\ \Sigma^{II,\ III}) \barwedge \big((34,\ 56)_1\ {}_0(\alpha_1{}^{V}\alpha_2{}^{IV})\ (34,\ 56)\,\Sigma^{II,\ III}\big), $$

ennélfogva a ${}_0(\pi^{VI}\alpha_3{}^{I})$, ${}_0(\alpha_1{}^{V}\alpha_2{}^{IV})$ pontok egyidejüleg a $(34,\ 56)'_1$, $(34,\ 56)_1$ pontokkal a $(34,\ 56)$, $\Sigma^{II,\ III}$ pontokat harmonicusan választják el.

Ugyanígy az y''_{56}, y''_{34} egyeneseken fekvő

$$ {}_0(\pi^{IV}\alpha_1{}^{I})\ {}_0(\alpha_2{}^{VI}\alpha_3{}^{V})\ (12,\ 34)\ \Sigma^{II,\ III};\ {}_0(\pi^{V}\alpha_2{}^{I})\ {}_0(\alpha_3{}^{IV}\alpha_1{}^{VI})\ (56,\ 12)\ \Sigma^{II,\ III} $$

négyesek is harmonicusak. Ezért:

»Négy ugyanegy ${}_0g$ egyenesen fekvő ${}_0V$ ponthoz rendelt ${}_0v$ egyenes, nem metszi egymást egy pontban. Ezeknek az egye-

»Egy PASCAL-ponton, G-n, keresztül metsző négy PASCAL-egyeneshez rendelt négy KIRKMAN-pont, nem fekszik ugyanegy neseknek két ${}_{01}G$ metszőpontja egy y-egyenesben fekszik és annak Σ, G pontjait harmonicusan választja el«.

egyenesben. E pontoknak két összekötő egyenese, g_{0I}, egy Y-ponton megy keresztűl és harmonicusan választja el ama Y-pontból kisúgárzó σ, ${}_0g$ egyeneseket«.

[A jobboldali tétel részben ismeretes, részben nem szorúl megvilágításra; mert pl.

$A_1^{IV} A_2^{V} \mathbf{B}_{3_1}^{II} \Gamma_{2_1}^{III}$, $\mathbf{B}_3^{II} \Gamma_3^{III} A_{1_1}^{IV} A_{2_1}^{V}$ harmonicusan választja el a $\sigma^{V, VI} = | \Pi \mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1 \Gamma_1 |$, ${}_0g = {}_0 | A_1^{IV} A_2^{V} \mathbf{B}_3^{II} \Gamma_3^{III} |$ egyeneseket].

Oly pont, mint ${}_{01}G$, kilenczven van, s azok a kilenczven g_{01} egyeneshez rendelhetők.

A kilenczven ${}_{01}G$ pont még páronként a negyvenöt ${}_0g$ egyenesen is fekszik; pl. az

${}_0(\pi^{VI} \alpha_3^{I})$, ${}_0(a_3^{VI} p^{I})$ pont, a ${}_0 | A_1^{IV} A_2^{V} \mathbf{B}_3^{II} \Gamma_3^{III} |$ egyenesen fekszik.

Először is a $\Pi \mathbf{A}_3 A_3^{VI}$, $A_2^{V} A_1^{IV} \mathbf{A}_1$ háromszögek az (1 2, 5 6) pontra vonatkozólag perspectivásak; tehát az $F = (\Pi \mathbf{A}_3, A_1^{IV} A_2^{V})$ pont az y''_{12} egyenesen fekszik.

Ugyanígy kimutatható, — a mi különben állításunk igazolására nem szükséges — hogy a $V^{II, III}$ $S^{II, III}$ négyszögek többi oldalpárjai

$P^{I} A_1^{IV}$, $\mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3$; $A_2^{V} A_3^{VI}$, $\Pi \mathbf{A}_1$ egymást az y''_{56} egyenesen
$P^{I} A_2^{V}$, $\mathbf{A}_3 \mathbf{A}_1$; $A_3^{VI} A_1^{IV}$, $\Pi \mathbf{A}_2$ » » y''_{34} »
$P^{I} A_3^{VI}$, $\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2$; $A_1^{IV} A_2^{V}$, $\Pi \mathbf{A}_3$ » » y''_{12} »

metszik, és e metszőpontok a $\Sigma^{II, III}$ ponttól és a $\Delta^{II, III}$ háromszög szögpontjaitól harmonicusan vannak elválasztva.

Ha továbbá rövidség kedvéért

$$J = (y''_{12}, {}_0 | A_1^{IV} A_2^{V} |), \quad H = (A_1^{IV} \mathbf{A}_2, A_{1_1}^{IV} A_2, {}_0 | A_1^{IV} A_2^{V} |),$$

és mi a ($\Sigma^{II, III}$ J (3 4, 5 6) F) négyes pontjait

az Y_{12}	pontból	az	a_1	egyenesre,	s e projectiókat	ismét
az A_2^{V}	»	»	${}_0 | A_1^{IV} A_2^{V} |$	»	»	»
az $\mathbf{A}_2$	»	»	a_1	»	»	»
az Y_{34}	»	»	a_3	»	»	»
az Π	»	»	y''_{12}	»	»	»

projiciáljuk, következik

$$(\Sigma^{\mathrm{II,\ III}}\ J\,(3\,4,\ 5\,6)\,F) \barwedge (\Sigma^{\mathrm{II,\ III}}\ {}_0A_1^{\mathrm{IV}}\ A_1^{\mathrm{IV}}\ A_1^{\mathrm{IV}}) \barwedge ({}_0A_2^{\mathrm{V}}\ {}_0A_1^{\mathrm{IV}}\ H\ Y_{12}) \barwedge$$
$$(\Sigma^{\mathrm{II,\ III}}\ {}_0A_1^{\mathrm{IV}}\ A_1^{\mathrm{IV}}\ \mathbf{A}_1) \barwedge (\Sigma^{\mathrm{II,\ III}}\ {}_0A_3^{\mathrm{VI}}\ A_3^{\mathrm{VI}}\ \mathbf{A}_3) \barwedge$$
$$(\Sigma^{\mathrm{II,\ III}}\ {}_0(\pi^{\mathrm{VI}}\,\alpha_3^{\mathrm{I}})\ (3\,4,\ 5\,6)\,F),$$

a miből az látható, hogy a J pont egybeesik az ${}_0(\pi^{\mathrm{VI}}\,\alpha_3^{\mathrm{I}})$ ponttal, vagyis, hogy az ${}_0\,|\,A_1^{\mathrm{IV}}\,A_2^{\mathrm{V}}\,\mathbf{B}_3^{\mathrm{II}}\,\Gamma_3^{\mathrm{III}}\,|$ egyenes a ${}_0(\pi^{\mathrm{VI}}\,\alpha_3^{\mathrm{I}})$ ponton megy keresztűl, és e pont az Y_{12} pontot az ${}_0A_1^{\mathrm{IV}}\ {}_0A_2^{\mathrm{V}}$ pontpártól harmonicusan választja el.

Ugyanezen az úton kimutathatjuk, a $\Sigma^{\mathrm{IV,\ V}}$, $V^{\mathrm{IV,\ V}}$, $S^{\mathrm{IV,\ V}}$ négyszögekből kiindulva, hogy a ${}_0(a_3^{\mathrm{VI}}\,p^{\mathrm{I}})$ pont szintén amaz egyenesen fekszik és az Y_{13} pontot a ${}_0\mathbf{B}_3^{\mathrm{II}}\ {}_0\Gamma_3^{\mathrm{III}}$ pontpártól harmonicusan választja el.

Ennélfogva:

»A negyvenöt ${}_0g$ egyenes mindegyikén egy Y, négy ${}_0V$ és két ${}_{01}G$ pont fekszik; mindegyik ${}_{01}G$ pont az Y-pontot a ${}_0V$ ponttól harmonicusan választja el«.

»Mindegyik G-pontból kisugárzik egy y, négy PASCAL- és két ${}_{01}g$ egyenes; mindegyik ${}_{01}g$ egyenes az y-egyenest két PASCAL-egyenestől harmonicusan választja el (42)«.

61. »A kilenczven ${}_0G$ pont hármasával a hatvan ${}_0v$ egyenesen és hármasával még más hatvan ${}_1v$ egyenesen fekszik, úgy, hogy mindegyik ${}_{01}G$ ponton két ${}_0v$ és két ${}_1v$ egyenes megy keresztűl«.

»A kilenczven ${}_{01}g$ egyenes hármasával a hatvan KIRKMAN-ponton és a hatvan V_1 ponton megy keresztűl, úgy, hogy mindegyik ${}_{01}g$ egyenesen két KIRKMAN- és két V_1 pont fekszik. (V. táblázat)«.

Az ${}_0\pi^{\mathrm{IV}} = \mathrm{II}\ {}_0A_1^{\mathrm{IV}}\ {}_0B_1^{\mathrm{IV}}\ {}_0C_1^{\mathrm{IV}}$ egyenes az

$$\mathbf{A}_1\ {}_0P^{\mathrm{I}} = {}_0\alpha_1^{\mathrm{I}},\ \mathbf{B}_1\ {}_0P^{\mathrm{II}} = {}_0\beta_1^{\mathrm{II}},\ \Gamma_1\ {}_0P^{\mathrm{III}} = {}_0\gamma_1^{\mathrm{III}}$$

egyenesektől az ${}_0(\pi^{\mathrm{IV}}\,\alpha_1^{\mathrm{I}})$, ${}_0(\pi^{\mathrm{IV}}\,\beta_1^{\mathrm{II}})$, ${}_0(\pi^{\mathrm{IV}}\,\gamma_1^{\mathrm{III}})$ pontokban metszetik, melyek az ${}_0\pi^{\mathrm{IV}}$ egyenesen feküsznek. Ugyanígy a hatvan ${}_0v$ egyenes mindegyike három ${}_{01}G$ pontot tartalmaz.

De ha a $\Sigma^{\mathrm{II,\ III}}$ pontra vonatkozólag perspectivás

$${}_0(A_1^{\mathrm{III}}\,A_2^{\mathrm{III}}\,A_3^{\mathrm{III}}) = {}_0(b_1^{\mathrm{III}}\,b_2^{\mathrm{III}}\,b_3^{\mathrm{III}}),\quad {}_0(A_1^{\mathrm{II}}\,A_2^{\mathrm{II}}\,A_3^{\mathrm{II}}) = {}_0(c_1^{\mathrm{II}}\,c_2^{\mathrm{II}}\,c_3^{\mathrm{II}})$$

háromszögeket tekintjük, melyeknek szögpontjai az a_1, a_2, a_3 egyeneseken feküsznek, azt látjuk, hogy a megfelelő oldalok három metszőpontja ${}_0(b_i^{III}\,c_i^{II})$, egy ${}_1p^I$ egyenesen fekszik, mely ${}_0p^I$ től különbözik, mert a hatvan ${}_0v$ egyenes közűl az ${}_0(b_i^{III}\,c_i^{II})$ ponton csak az ${}_0b_i^{III}$, ${}_0c_i^{II}$ egyenesek mennek keresztűl.

A hatvan ${}_0v$ egyenesből hatvanszor lehet oly perspectivás háromszögpárokat, mint ${}_0(b_1^{III}\,b_2^{III}\,b_3^{III})$, ${}_0(c_1^{II}\,c_2^{II}\,c_3^{II})$. alkotni és így hatvan ${}_1v$ collineatio-tengelyt nyerünk. Így pl. az

$$\left.\begin{matrix}{}_0(b_1^{III}\,\gamma_2^{III}\,\gamma_3^{III})\\ {}_0(c_1^{II}\;\beta_2^{II}\;\beta_3^{II})\end{matrix}\right\}\quad \left.\begin{matrix}{}_0(b_2^{III}\,\gamma_3^{III}\,\gamma_1^{III})\\ {}_0(c_2^{II}\;\beta_3^{II}\;\beta_1^{II})\end{matrix}\right\}\quad \left.\begin{matrix}{}_0(b_3^{III}\,\gamma_1^{III}\,\gamma_2^{III})\\ {}_0(c_3^{II}\;\beta_1^{II}\;\beta_2^{II})\end{matrix}\right\}$$

háromszögpárok az ${}_1a_1^{IV}$, ${}_1a_2^{V}$, ${}_1a_3^{VI}$ collineatio-tengelyre vonatkozólag perspectivásak, s, mint látható, az ${}_0(b_i^{III}\,c_i^{II})$ pontokon $(i=1, 2, 3)$ még a ${}_1p^I\,{}_1a_1^{IV}$; ${}_1p^I\,{}_1a_2^{IV}$; ${}_1p^I\,{}_1a_3^{VI}$ egyenespárok is keresztűl mennek.

62. *A hatvan ${}_1v$ egyenes egymást hármasával a húsz* Steiner-*pontban metszi*, mint a hogy a hatvan V_1 pont hármasával a húsz Cayley-egyenesen fekszik.

Ugyanis az

$${}_0(A_1^{II}\,A_2^{II}\,A_3^{II}) = {}_0(c_1^{II}\,c_2^{II}\,c_3^{II}), \qquad {}_0(A_1^{III}\,A_3^{III}\,A_2^{III}) = {}_0(b_1^{III}\,b_2^{III}\,b_3^{III})$$
$${}_0(B_1^{III}\,B_2^{III}\,B_3^{III}) = {}_0(a_1^{III}\,a_2^{III}\,a_3^{III}), \qquad {}_0(C_1^{II}\,C_3^{II}\,C_3^{II}) = {}_0(a_1^{II}\,a_2^{II}\,a_3^{II})$$

háromszögek közűl

az 1-ső persp.	a 2-dikkal	az	$\Sigma^{II,\,III}$, ${}_1p^I$;
a 2-ik	» a 3-dikkal	az	${}_0P^{III}$, ${}_0p^{III}$;
a 3-ik	» a 4-dikkel	az	${}_0P^I$, $\sigma^{II,\,III}$;
a 4-ik	» az 1-sővel	az	${}_0P^{II}$, ${}_0p^{II}$

collineatio-középpontra és tengelyre vonatkozólag, és a collineatio-középpontok a p-egyenesen feküsznek; ennélfogva az ${}_1p^I$ egyenes a P-ponton megy keresztűl.

A hatvan ${}_1v$ egyenes egymást hármasával a hatvan ${}_1V$ pontban metszi, melyek hármasával a húsz Cayley-*egyenesen feküsznek. Ezek az ${}_1v$, ${}_1V$ egyenesek és pontok oly ${}_1[Vv]$ configuratiót képeznek, mint a már ismert $[Vv]$, $[Vv]_0$, $[Vv]_1$, ${}_0[Vv]$ configuratiók.*

Ugyanis az

$${}_0(A_1^{IV}\,A_2^{V}\,A_3^{VI}),\quad {}_0[(a_2^{VI}\,a_3^{V})\,(a_3^{IV}\,a_1^{VI})\,(a_1^{V}\,a_2^{IV})] =$$
$${}_1(1\,2,\,3\,4)\quad {}_1(5\,6,\,1\,2)\quad {}_1(3\,4,\,5\,6),\quad \mathbf{A_1\,A_2\,A_3}$$

háromszögek, minthogy oldalaik az Y_{56}, Y_{34}, Y_{12} ponton mennek keresztül, perspectivásak; ennélfogva collineatio-középpontjuk egy p-egyenesen fekszik, melyet már az

$$A_1^{IV} A_2^{V} A_3^{VI},\quad (12,\ 34)\ (56,\ 12)\ (34,\ 56),\quad \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3$$

háromszögek meghatároznak.[1]

Ebből pedig az következik, hogy az

$$_1\alpha_1^{I} = \mathbf{A}_1\ {}_0(\alpha_2^{VI} \alpha_3^{V}),\quad {}_1\alpha_2^{I} = (\mathbf{A}_2\ {}_0(\alpha_3^{VI} \alpha_1^{IV}),\quad {}_1\alpha_3^{I} = \mathbf{A}\ {}_0(\alpha_1^{V} \alpha_2^{IV})$$

egyenesek egymást a p-egyenes ${}_1P^{I}$ pontjában metszik.

Ugyanezen úton következtethető, hogy az ${}_1\beta_1^{II}$ ${}_1\beta_2^{II}$ ${}_1\beta_3^{II}$ és

[1] Ha két háromszog $M_1 M_2 M_3$, $U_1 U_2 U_3$ az O, o collineatio-középpontra és tengelyre vonatkozólag perspectivás és

$$M'_1 = (M_2 U_3,\ M_3 U_2),\quad M'_2 = (M_3 U_1,\ M_1 U_3),\quad M'_3 = (M_1 U_2,\ M_2 U_1),$$

akkor az

$$\begin{matrix} M_1\ U_2\ U_3 & & M_2\ U_3\ U_1 & & M_3\ U_1\ U_2 \\ U_1\ M_2\ M_3 & & U_2\ M_3\ M_1 & & U_3\ M_1\ M_2 \end{matrix}$$

háromszögek perspectivás volta miatt

az $M_2\ M_3$, $U_2\ U_3$, $M'_2\ M'_3$ egyenesek egymást az O_1 pontban
az $M_3\ M_1$, $U_3\ U_1$, $M'_3\ M'_1$ » » az O_2 »
az $M_1\ M_2$, $U_1\ U_2$, $M'_1\ M'_2$ » » az O_3 »

metszik, melyek az $o = |\ O_1 O_2 O_3\ |$ egyenesen feküsznek.

Ennélfogva az $M'_1 M'_2 M'_1$ háromszög perspectivás a felvett két $M_1 M_2 M_3$, $U_1 U_2 U_3$ háromszöggel, és a két collineatio-középpont M, U_m az O-ponttal egy $r = |\ O\ M\ U_m\ |$ egyenesen fekszik.

Ha $U_1 U_2 U_3$, O, o, $O_1 O_2 O_3$ állandó marad, ellenben az $M_1\ M_2\ M_3$ háromszög változik, akkor az r-egyenes nem változtatja helyzetét.

Ha ugyanis az $N_1 N_2 N_3$ egy más háromszög, mely az $U_1 U_2 U_3$-mal az O-pontra és o-egyenesre vonatkozólag perspectivás és, ha megfelelő oldalaik O_1, O_2, O_3 metszőpontjai is ugyanazok, s ha továbbá

$$N'_1 = (N_2 U_3,\ N_3 U_2),\quad N'_2 = (N_3 U_1,\ N_1 U_3),\quad N'_3 = (N_1 U_2,\ N_2 U_1),$$

akkor ezek a pontok az $O M'_1$, $O M'_2$, $O M'_3$ egyeneseken vannak és az o collineatio-tengelyre perspectivás

$$\begin{matrix} M'_1\ M'_2\ M'_3 & & N_1\ N_2\ N_3 \\ N'_1\ N'_2\ N'_3 & & N'_1\ N'_2\ N'_3 \\ U_1\ U_2\ U_3 & & U_1\ U_2\ U_3 \end{matrix}$$

háromszögekhez tartozó O, U_m, U_n, illetve O, N, U_n collineatio-középpontok az $r = |\ O\ M\ N\ U_m\ U_n\ |$ egyenesen feküsznek.

${}_1\gamma_1{}^{III}$ ${}_1\gamma_2{}^{III}$ ${}_1\gamma_3{}^{III}$ egyeneseknek metszőpontjai ${}_1P^{II}$, ${}_1P^{III}$ is a p-n feküsznek.

63. A Cayley-egyeneseken fekvő ${}_1V$ pontok a Σ, ${}_0V$ és Pascal-pontokból egyszerűen szerkeszthetők.

Ugyanis az y''_{56} egyenesen fekvő

$$ {}_1(3\,4,\ 1\,2)',\quad {}_1(3\,4,\ 1\,2),\quad \Sigma^{II,\ III},\ (3\,4,\ 1\,2)$$

harmonicus pontokat Π-ből az ${}_0\pi^{IV}$ ${}_1\pi^{IV}$ p π^{IV} harmonicus sugarakkal projiciáljuk, melyek az a_1 egyenest az ${}_0A_1{}^{IV}$ ${}_1A_1{}^{IV}$ $\Sigma^{II,\ III}$ $A_1{}^{IV}$ harmonicus pontokban metszik.

E szerint az ${}_1A_1{}^{IV}$ pont és hasonlókép ${}_1P^I$, ${}_1B_1{}^{III}$, ${}_1C_1{}^{II}$, . . . valamint a többi ${}_1V$ pont e körülmény alapján szerkeszthető, t. i.

$$({}_0P^I\,{}_1P^I\,\Sigma^{II,\ III}\,P^I)=({}_0A_1{}^{IV}\,{}_1A_1{}^{IV}\,\Sigma^{II,\ III}\,A_1{}^{IV})=$$
$$({}_0B_1{}^{III}\,{}_1B_1{}^{III}\,\Sigma^{I,\ IV}\,B_1{}^{III})=({}_0C_1{}^{II}\,{}_1C_1{}^{II}\,\Sigma^{I,\ IV}\,C_1{}^{II})=-1.$$

A $P^I A_1{}^{IV}$, ${}_0\,|\,P^I A_1{}^{IV}\,|$, $B_1{}^{III}C_1{}^{II}$, ${}_0\,|\,B_1{}^{III}C_1{}^{II}\,|$ egyenesek egymást az Y'_{56} pontban metszik, tehát az ${}_1\,|\,P^I A_1{}^{IV}\,|$ ${}_1\,|\,B_1{}^{III}C_1{}^{II}\,|$ egyenesek is ezen Y'_{56} ponton mennek keresztűl.

(De e két utóbbi egyenes nem eshetik egybe, hanem harmonicusan választja el az ${}_0g={}_0\,|\,P^I A_1{}^{IV} B_1{}^{III} C_1{}^{II}\,|$, $\sigma^{V,\ VI}=|\,\Pi\,\mathbf{A}_1\,\mathbf{B}_1\,\Gamma_1\,|$ egyeneseket. Ugyanis

$$Y'_{56}\ ({}_0P^I\,\Pi\,P^I\,{}_1P^I)\ \overline{\wedge}\ Y'_{56}\ ({}_0B_1{}^{III}\,\mathbf{B}_1\,B_1{}^{III}\,{}_1B_1{}^{III})$$

-ból következik, miután a két első megfelelő sugár az ${}_0g$, illetve $\sigma^{V,\ VI}$-ba egyesűl, a harmadik megfelelő sugárpár pedig ${}_0g$, $\sigma^{V,\ VI}$-ot harmonicusan választja el, hogy a negyedik megfelelő sugárpár, azaz ${}_1\,|\,P^I A_1{}^{IV}\,|$, ${}_1\,|\,B_1{}^{III}C_1{}^{II}\,|$ szintén harmonicusan választja el az ${}_0g$, $\sigma^{V,\ VI}$ egyeneseket).

Minthogy ezek szerint a negyvenöt Y-pont mindegyikén két ily egyenes, melyen két ${}_1V$ pont fekszik, megy keresztűl, számuk kilenczven. Mi ezeket az egyeneseket általában ${}_{12}g$-vel, vagy ha egy párról van szó ${}_{12}g$, ${}_{12}g'$-vel jelöljük.

Ennélfogva:

A hatvan ${}_1V$ pont párosával az Y-pontokkal kilenczven ${}_{12}g$ egyenesen fekszik, mely egyenesek hármasával a ${}_1V$ pontokon,

A hatvan ${}_1v$ egyenes egymást párosával kilenczven G_{12} pontban metszi, mely pontok hármasával a v_1 egyeneseken, pá-

párosával pedig az Y-pontokon mennek keresztűl és az ${}_0g$, σ-egyeneseket harmonicusan választják el.

rosával pedig az y-egyeneseken feküsznek és a G, Σ-pontokat harmonicusan választják el (55).

64. A ${}_1P^{I}$ pontot (és így valamennyi ${}_1V$ pontot) nemcsak az

$$({}_0P^{I}\ {}_1P^{I}\ \Sigma^{II,\ III}\ P^{I}) = -1 \ldots\ldots 1)$$

relatióból, hanem az

$$({}_1P^{I}\ \Pi\ {}_0P\ \Sigma^{II,\ III}) = -1 \ldots\ldots 2)$$

relatióból is szerkeszthetjük. Mert az y''_{56} egyenesen fekvő

$${}_0(\pi^{IV}\alpha_1{}^{I}) \quad (y''_{56}, \mathbf{A}_2\,\mathbf{A}_3) \quad {}_0(\alpha_2{}^{VI}\alpha_3{}^{V}) \quad \Sigma^{II,\ III}$$

harmonicus pontokat az $\mathbf{A}_2$ pontból az ${}_1a_2{}^{VI}\ \sigma^{I,\ IV}\ {}_0\alpha_2{}^{VI}\ a_2$ sugarakkal projiciáljuk, melyek az a_3 egyenest az ${}_1A_3{}^{VI}\ \mathbf{A}_3\ {}_0A_3{}^{VI}\ \Sigma^{II,\ III}$ harmonicus pontokban metszik; ennélfogva

$$({}_1P^{I}\ \Pi\ {}_0P^{I}\ \Sigma^{II,\ III}) = ({}_1A_3{}^{VI}\ \mathbf{A}_3\ {}_0A_3{}^{VI}\ \Sigma^{II,\ III}) = -1.$$

Azt találtuk az előbb, hogy

$$({}_0\pi^{VI}\ {}_1\pi^{VI}\ p\ \pi^{VI}) = -1, \quad ({}_1a_2{}^{VI}\ \sigma^{I,\ IV}\ {}_0\alpha_2{}^{VI}\ a_2) = -1\,;$$

ennélfogva a P Steiner-ponton keresztűl menő sugarakra nézve is hasonlólag

$$({}_0p^{I}\ {}_1p^{I}\ \pi p^{I}) = -1 \ldots\ldots 3.)$$
$$({}_1p^{I}\ \sigma^{II,\ III}\ {}_0p^{I}\ \pi) = -1 \ldots 4.).$$

3.) és 4.) az előbbi 1.), 2.) egyenletekkel, melyek a p-egyenesen fekvő pontokra vonatkoznak, szembe állítható.

De a 3.), 4.) egyenleteket

$$(P^{I}\ P_1{}^{I}\ \Pi\ {}_0P^{I}) = -1 \ldots\ldots 3')$$
$$(P_1{}^{I}\ \Sigma^{II,\ III}\ P^{I}\ \Pi) = - \ldots 4')$$

-gyel és az 1.), 2.)-dikat az

$$\mathbf{A}_1\,(P^{I}\ P_1{}^{I}\ \Pi\ {}_0P^{I}) \equiv (\alpha_1{}^{I}\ \alpha_{1_1}{}^{I}\ \sigma^{II,\ III}\ {}_0\alpha_1{}^{I}) = -1$$
$$\mathbf{A}_1\,(P_1{}^{I}\ \Sigma^{II,\ III}\ P^{I}\ \Pi) \equiv (a_{1_1}{}^{I}\ a_1\ a_1{}^{I}\ \sigma^{II,\ III}) = -1$$

egyenletekből származó egyenletekkel

$$(p^{I}\ p_1{}^{I}\ \sigma^{II,\ III}\ {}_0p^{I} = -1 \ldots\ldots 1'.)$$
$$(p_1{}^{I}\ \pi\ p^{I}\ \sigma^{II,\ III}) = -1 \ldots\ldots 2'.)$$

is összehasonlíthatjuk, mondván:

ha a KIRKMAN-pontokat a hozzájuk rendelt ${}_0v$-egyenesekkel
ha a STEINER- » » » » CAYLEY- »
ha a SALMON- » » » » STEINER- »
ha a ${}_0V$- » » » » PASCAL- »
ha a ${}_1V$- » » » » v_1- »
ha a V_1- » » » » ${}_1v$- »
felcseréljük, akkor az 1.), 2.), 3.), 4.) egyenletek az 1'.), 2'.), 3'.), 4'.) egyenletekre változnak át. —

Az előbbi egyenletekből következtethető, hogy a

$$\Pi\ \Sigma^{II,\ III};\quad P^I\ {}_0P^I;\quad P_1{}^I\ {}_1P^I$$

pontpárok és a

$$\pi\ \sigma^{II,\ III};\quad p^I\ {}_0p^I;\quad p_1{}^I\ {}_1p^I$$

egyenespárok egy-egy involutiónak kapcsolt elempárjai, mert

$$({}_1P^I\ \Pi\ {}_0P^I\ \Sigma^{II,\ III}) = (P_1{}^I\ \Sigma^{II,\ III}\ P^I\ \Pi) = -1,$$
$$({}_1p^I\ \pi\ {}_0p^I\ \sigma^{II,\ III}) = (p_1{}^I\ \sigma^{II,\ III}\ p^I\ \pi) = -1.$$

Továbbá az 1.) és 2.) egyenletekből

$$({}_0P^I\ \Sigma^{II,\ III}\ {}_1P^I\ P^I) = 2,\quad ({}_0P^I\ \Sigma^{II,\ III}\ \Pi\ {}_1P^I) = -1,$$

tehát

$$({}_0P^I\ \Sigma^{II,\ III}\ \Pi\ P^I) = -2,\ \text{és}\ ({}_0P^I\ \Pi\ \Sigma^{II,\ III}\ P^I) = 3.$$

Ez utóbbi egyenlet azt mutatja, hogy az ${}_0P^I$, Π pontok az $\Sigma^{II,\ III}$, P^I pontoktól nincsenek elválasztva

Ha a p-egyenesnek azokat a részeit, melyeken az $\Sigma^{II,\ III}\ P^I$, illetve Π, ${}_0P^I$ pontok nem feküsznek [$\Pi\ {}_0P^I$], illetve [$\Sigma^{II,\ III}\ P^I$]-gyel jelöljük, akkor

$$(P^I\ P_1{}^I\ \Pi\ {}_0P^I) = -1,\ \text{és}\ ({}_0P^I\ {}_1P^I\ \Sigma^{II,\ III}\ P^I) = -1$$

egyenletek következtében a $P_1{}^I$ pont az [$\Pi\ {}_0P^I$] vonaldarabon, de a [$\Sigma^{II,\ III}\ P^I$] vonaldarabon kivűl fekszik, ellenben az ${}_1P^I$ pont az [$\Sigma^{II,\ III}\ {}_0P^I$] vonaldarabon, de a [$\Pi\ {}_0P^I$] vonaldarabon kivűl van.

65. Az Y_{12} ponton keresztűl menő sugarakra vonatkozólag

$$Y_{12}\,(A_{1_1}{}^{IV}\ \Sigma^{II,\ III}\ A_1{}^{IV}\ \mathbf{A}_1) = Y_{12}\,(\mathbf{B}_{3_1}{}^{II}\ \Sigma^{IV,\ V}\ \mathbf{B}_3{}^{II}\ \mathbf{A}_1) =$$
$$Y_{12}\,(A_1{}^{IV}\ \Sigma^{IV,\ V}\ A_{1_1}{}^{IV}\ \mathbf{A}_1) = -1\ ;$$

ennélfogva $Y_{12}\ \mathbf{A}_1 = \sigma^{I,\ VI}$ kettőssugara az

$$Y_{12}\ A_1{}^{IV},\ Y_{12}\ A_{1_1}{}^{IV};\quad Y_{12}\ \Sigma^{II,\ III},\ Y_{12}\ \Sigma^{IV,\ V}$$

sugárpároktól meghatározott involutiónak. Minthogy azonban $Y_{12}\ \mathbf{A}_1 = \sigma^{II,\ VI}$, ${}_0|\ A_1{}^{IV}\ A_2{}^V\ \mathbf{B}_3{}^{II}\ \Gamma_3{}^{III}\ |$ a két első sugarat, tehát egyszersmind a két utóbbi sugarat is harmonicusan választja el, következik :

»Egy Y-ponton keresztülmenő STEINER-egyenes és ${}_0g$ egyenes két SALMON-ponttól harmonicusan van elválasztva«.

»Egy y-egyenesen fekvő SALMON- és PASCAL-pont (G) két STEINER-egyenestől harmonicusan van elválasztva«.

(A jobb oldali tétel evidens, mert a $\Sigma^{II,\ III}$, (3 4, 5 6), F, E pontok harmonicusak).

A tétel még így is kifejezhető:

»Két-két SALMON-pont, melynek különböző mutatói vannak, egy ${}_0g$- és egy STEINER-egyenestől harmonicusan van elválasztva«.

»Két-két STEINER-egyenes, melynek különböző mutatói vannak, egy PASCAL-ponttól (G) és egy SALMON-ponttól harmonicusan van elválasztva«.

Minthogy a

$$\sigma^{I,\ IV} = |\,\mathbf{A}_1\ \mathbf{A}_2\ B_3\ C_3\,| \text{ és } {}_0g = {}_0|\,A_1^{IV}\ A_2^{V}\ \mathbf{B}_3^{II}\ \Gamma_3^{III}\,|$$

egyenesek a $\Sigma^{II,\ III}$, $\Sigma^{IV,\ V}$ pontoktól és a $g_{01} = |\,A_1^{IV}\ A_2^{V}\ \mathbf{B}_{3_1}^{II}\ \Gamma_{3_1}^{III}\,|$, $g'_{01} = |\,A_{1_1}^{IV}\ A_{2_1}^{V}\ \mathbf{B}_3^{II}\ \Gamma_3^{III}\,|$ egyenesektől harmonicusan vannak elválasztva, a

$$\sigma^{I,\ VI},\ {}_0g;\quad Y_{12}\Sigma^{II,\ III},\ g_{01};\quad Y_{12}\Sigma^{IV,\ V},\ g'_{01}$$

egyenespárok involutiót képeznek és így egy egyenespártól harmonicusan vannak elválasztva.

Hasonlóképen involutiót képeznek a

$$\Sigma^{II,\ III},\ G=(3\,4,\ 5\,6);\quad E=(y''_{12}\ \sigma^{I,\ VI}),\quad {}_{01}G={}_1(3\,4,\ 5\,6);$$
$$F=(y''_{12}\ \sigma^{IV,\ V}),\quad {}_{01}G={}_1(3\,4,\ 5\,6)'$$

pontpárok és egy pontpártól ezek is harmonicusan vannak elválasztva.

De nem folytatjuk ez irányú fejtegetéseinket, hanem visszatérünk a ${}_0G$ pontokhoz és a ${}_{12}g$ egyenesekhez.

66. *A negyvenöt Y-pont mindegyikén négy ${}_{01}l$ egyenes megy keresztül, melyeken a kilenczven ${}_{01}G$ pontból kettő-kettő fekszik; összesen 180 ily ${}_{01}l$ egyenes van, minden ${}_{01}G$ ponton négy megy keresztül.*

A negyvenöt y-egyenes mindegyikén, a kilenczven ${}_{12}g$ egyenes közül négy pár metszi egymást; összesen 180 ily ${}_{12}L$ metszőpont van, minden ${}_{12}g$ egyenesen fekszik négy.

(E tételek dualisan felelnek meg az 57. pontban levő tételeknek).

Ugyanis az

$$\left.\begin{matrix} {}_0A_1^{IV} & \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_3 \\ \mathbf{A}_1 & {}_0A_2^{V} & {}_0A_3^{VI} \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} {}_0P^{I} & \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_3 \\ \Pi & {}_0A_2^{V} & {}_0A_3 \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} {}_0\mathbf{A}_1^{I} & B_1 & C_1 \\ A_1 & {}_0\mathbf{B}_1^{II} & {}_0\Gamma_1^{III} \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} {}_0\Pi^{IV} & B_1 & C_1 \\ P & {}_0\mathbf{B}_1^{II} & {}_0\Gamma_1^{III} \end{matrix}\right\}$$

háromszögpárok közűl a két első és a két utolsó pár a $\Sigma^{II,\ III}$, illetve $\Sigma^{V,\ VI}$ pontokra vonatkozólag perspectivás; ennélfogva az

$$\mathbf{A}_2\ {}_0A_1^{IV} = {}_0\alpha_2^{IV},\quad \mathbf{A}_1\ {}_0A_2^{V} = {}_0\alpha_1^{V},\quad \mathbf{A}_3\ {}_0A_1^{IV} = {}_0\alpha_3^{IV},\ \ldots$$

egyenesek

$${}_0(\alpha_2^{IV}\,\alpha_1^{V}),\ {}_0(\alpha_3^{IV}\,\alpha_1^{VI});\ {}_0(\alpha_2^{I}\,\pi^{V}),\ {}_0(\alpha_3^{I}\,\pi^{VI});\ {}_0(b_1^{I}\,a_1^{II}),\ {}_0(c_1^{I}\,a_1^{III});$$
$${}_0(b_1^{IV}\,p^{II}),\ {}_0(c_1^{IV}\,p^{III})$$

metszőpontpárjai az

$$Y_{56} = (\mathbf{A}_2\,\mathbf{A}_3,\ {}_0A_2^{V}\ {}_0A_3^{VI}) = (B_1\,C_1,\ {}_0\mathbf{B}_1^{II}\ {}_0\Gamma_1^{III})$$

ponttal egy ${}_{01}l$ egyenesen feküsznek.

Ha ellenben a $\sigma^{II,\ III}$ és $\sigma^{V,\ VI}$ collineatio-tengelyre vonatkozólag perspectivás

$$\left.\begin{matrix} {}_1a_1^{IV} & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1 & {}_1\alpha_2^{V} & {}_1\alpha_3^{VI} \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} {}_1p^{I} & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \pi & {}_1\alpha_2^{V} & {}_1\alpha_3^{VI} \end{matrix}\right\} \text{ és } \left.\begin{matrix} \alpha_1^{I} & b_1 & c_1 \\ a_1 & {}_1\beta_1^{II} & {}_1\gamma_1^{III} \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} {}_1\pi^{IV} & b_1 & c_1 \\ p & {}_1\beta_1^{II} & {}_1\gamma_1^{III} \end{matrix}\right\}$$

háromszögekből indulunk ki és tekintetbe vesszük, hogy

$$(\alpha_2\ {}_1a_1^{IV}) = {}_1\mathbf{A}_2^{IV},\ (\alpha_1\ {}_1a_2^{V}) = {}_1\mathbf{A}_1^{V},\ (\alpha_3\ {}_1a_1^{IV}) = {}_1\mathbf{A}_3^{IV},\ \ldots,$$

azt találjuk, hogy a

$${}_1|\,\mathbf{A}_2^{IV}\,\mathbf{A}_1^{V}\,|,\ {}_1|\,\mathbf{A}_3^{IV}\,\mathbf{A}_1^{VI}\,|;\quad {}_1|\,\mathbf{A}_2^{I}\,\Pi^{V}\,|,\ {}_1|\,\mathbf{A}_3^{I}\,\Pi^{VI}\,|;$$
$${}_1|\,B_1^{I}\,A_1^{II}\,|,\ {}_1|\,C_1^{I}\,A_1^{III}\,|;\quad {}_1|\,B_1^{IV}\,P^{II}\,|,\ {}_1|\,C_1^{IV}\,P^{III}\,|$$

egyenespárok (${}_{12}g$) egymást az y_{56} egyenesen metszik.

67. Vizsgáljuk most meg, hogy a ${}_0g$ egyenespárok metszőpontjai mikép viselkednek az y-egyenesek irányában. A

$$\begin{matrix} {}_0a_1^{IV} & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1 & {}_0a_2^{V} & {}_0a_3^{VI} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} {}_0a_2^{V} & \pi & \alpha_1 \\ \alpha_2 & {}_0p^{I} & {}_0a_1^{IV} \end{matrix} \quad \Bigg| \quad \begin{matrix} {}_0\alpha_2^{VI} & \beta_1 & \gamma_1 \\ a_2 & {}_0b_2^{III} & {}_0c_1^{II} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} {}_0c_2^{II} & a_2 & a_3 \\ \gamma_1 & {}_0\alpha_2^{VI} & {}_0\alpha_3^{V} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} {}_0\beta_1^{II} & p & a_1 \\ b_1 & {}_0\pi^{IV} & {}_0\alpha_1^{I} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} {}_0\alpha_1^{I} & b_1 & c_1 \\ a_1 & {}_0\beta_1^{II} & {}_0\gamma_1^{III} \end{matrix}$$

háromszögpárok a

$$\sigma^{II,\ III} = P\,A_1\,A_2\,A_3,\quad \sigma^{V,\ VI} = \Pi\,\mathbf{A}_1\,\mathbf{B}_1\,\Gamma_1,\quad \sigma^{I,\ IV} = B_1\,C_1\,\mathbf{A}_2\,A_3$$

collineatio-tengelyekre vonatkozólag perspectivásak; ennélfogva, minthogy

$$\alpha_2\ {}_0a_1^{IV} = {}_0\mathbf{A}_2^{IV},\quad \alpha_1\ {}_0a_2^{V} = {}_0\mathbf{A}_1^{V},\quad \alpha_3\ {}_0a_1^{IV} = {}_0\mathbf{A}_3^{IV},\ \ldots\ldots,$$

az

$$\begin{array}{llllll}
{}_0|\mathbf{A}_1^{V}\,\mathbf{A}_2^{IV}|, & {}_0|\mathbf{A}_1^{VI}\,\mathbf{A}_3^{IV}|, & y_{56}; & {}_0|\Pi^{V}\,\mathbf{A}_2^{I}|, & {}_0|\mathbf{A}_1^{V}\,\mathbf{A}_2^{IV}|, & y'_{56}; \\
{}_0|\mathbf{B}_1^{VI}\,A_2^{III}|, & {}_0|\Gamma_1^{VI}\,A_2^{II}|, & y'_{56}; & {}_0|A_2^{II}\,\Gamma_1^{VI}|, & {}_0|A_3^{II}\,\Gamma_1^{V}|, & y''_{56}; \\
{}_0|P^{II}\,B_1^{IV}|, & {}_0|A_1^{II}\,B_1^{I}|, & y''_{56}; & {}_0|B_1^{I}\,A_1^{II}|, & {}_0|C_1^{I}\,A_1^{III}|, & y_{56}
\end{array}$$

egyenesek egymást egy-egy pontban metszik. Ezt még a következőkép is kifejezhetjük: a hat ${}_0g$ egyenes közűl, t. i. a

$$\begin{array}{lll}
{}_0|\Pi^{VI}\,\mathbf{A}_1^{V}\,\mathbf{A}_2^{IV}\,\mathbf{A}_3^{I}|, & {}_0|\Pi^{V}\,\mathbf{A}_1^{VI}\,\mathbf{A}_2^{I}\,\mathbf{A}_3^{IV}|, & {}_0|\mathbf{B}_1^{VI}\,\Gamma_1^{V}\,A_2^{III}\,A_3^{II}|, \\
{}_0|\mathbf{B}_1^{V}\,\Gamma_1^{VI}\,A_2^{II}\,A_3^{III}|, & {}_0|P^{II}\,A_1^{III}\,B_1^{IV}\,C_1^{I}|, & {}_0|P^{III}\,A_1^{II}\,B_1^{I}\,C_1^{IV}|
\end{array}$$

egyenesek közűl az 1-ső és 2-ik egymást az y_{56} és y'_{56} egyenesen, a 3-ik és 4-ik az y'_{56} és y''_{56}, az 5-ik és 6-ik az y''_{56} és y_{56} egyenesen metszi. Minthogy azonban az $y_{56}\,y'_{56}\,y''_{56}$ egyeneseknek egy közös D_{56} pontjuk van, ama hat ${}_0g$ egyenes mind keresztűl megy a D_{56} ponton.

A hat ${}_0g$ egyenes a Pascal-hatszög $\overline{56}$ oldalán fekvő

(34, 56) (12, 56) (24, 56) (13, 56) (23, 56) (14, 56)

Pascal-pontokhoz van rendelve; ennélfogva:

»Ama negyvenöt ${}_0g$ egyenes, melyen a 60 ${}_0V$ pont négyesével rajta fekszik, hatával a tizenöt y-négyszög tizenöt átlóspontján megy keresztűl«.	»A negyvenöt Pascal-pont, melyekben a hatvan Pascal-egyenes egymást négyesével metszi, hatával, a tizenöt Y-négyoldal tizenöt átlóján fekszik«.

Miután a tizenöt D-pont mindegyikén a negyvenöt ${}_0g$ egyenesből hat megy keresztűl, a ${}_0g$ egyenesek mindegyikén két D-pont fekszik. Pl. a

$$\begin{array}{lll}
{}_0|\Pi^{IV}\,\mathbf{A}_1^{I}\,\mathbf{A}_2^{VI}\,\mathbf{A}_3^{V}|, & {}_0|\Pi^{V}\,\mathbf{A}_2^{I}\,\mathbf{A}_3^{VI}\,\mathbf{A}_1^{VI}|, & {}_0|\Pi^{VI}\,\mathbf{A}_3^{I}\,\mathbf{A}_1^{V}\,\mathbf{A}_2^{IV}| \text{ egyeneseken a} \\
\quad D_{12}\ D_{34} & \quad D_{56}\ D_{12} & \quad D_{34}\ D_{56} \text{ pontok feküsznek,}
\end{array}$$

és így ezek az egyenesek az $y^{II,\,III}$ négyszög $D^{II,\,III} = D_{12}\,D_{34}\,D_{56}$ átlósháromszögének oldalai. Ennélfogva:

»A negyvenöt ${}_0g$ egyenes a tizenöt y-négyszögnek átlója, azaz a tizenöt D-átlósháromszögnek oldala«.	»A negyvenöt G-Pascal-pont a tizenöt Y-négyoldalnak átlóspontja, azaz a tizenöt Δ-háromszögnek szögpontja«.

A $D^{II, III}$ háromszög oldalain, mint ${}_0g$ egyeneseken, ${}_{01}G$ pontok feküsznek, még pedig

$$\text{az } ({}_0b_1^{III}\ {}_0c_1^{II}\ {}_1p^{I}\ {}_1a_1^{IV}),\quad ({}_0\beta_1^{II}\ {}_0\gamma_1^{III}\ {}_1a_2^{V}\ {}_1a_3^{VI})$$
$$\text{pontok a } D_{12}D_{34} = {}_0|\,\Pi^{IV}\ A_1^{I}\ A_2^{VI}\ A_3^{V}\,|,$$
$$\text{az } ({}_0b_2^{III}\ {}_0c_2^{II}\ {}_1p^{I}\ {}_1a_2^{V}),\quad ({}_0\beta_2^{II}\ {}_0\gamma_2^{III}\ {}_1a_3^{VI}\ {}_1a_1^{IV})$$
$$\text{pontok a } D_{56}D_{12} = {}_0|\,\Pi^{V}\ A_2^{I}\ A_3^{IV}\ A_1^{VI}\,|,$$
$$\text{az } ({}_0b_3^{III}\ {}_0c_3^{II}\ {}_1p^{I}\ {}_1a_3^{VI}),\quad ({}_0\beta_3^{II}\ {}_0\gamma_3^{III}\ {}_1a_1^{IV}\ {}_1a_2^{V})$$
$$\text{pontok a } D_{34}D_{56} = {}_0|\,\Pi^{VI}\ A_3^{I}\ A_1^{V}\ A_2^{IV}\,|$$

egyenesen; ennélfogva $D^{II, III}$ háromszög átlósháromszöge a ${}_1v^{II, III} = {}_1[p^I a_1^{IV} a_2^{V} a_3^{VI}]$ négyoldalnak, s mert a ${}_1v^{II, III}$ négyoldal az $y^{II, III}$ négyszögbe be van írva, azért az $y^{II, III}$ négyszög szögpontjainak a $D^{II, III}$ átlósháromszöget illetőleg harmonicus polárisai a ${}_1v^{II, III}$ négyoldalnak oldalai. Ennélfogva:

A hatvan ${}_1v$ egyenes tizenöt ${}_1v$ négyoldalra oszlik, melyek a tizenöt y-négyszögbe be vannak írva, és melyeknek átlósháromszögük azokéval közös. (Dualis tétele a 32-nek.)

68. A következőkben ki akarjuk mutatni, hogy a configuratióban a 9. ábrával correlatiós ábra rejlik. (12. ábra.)

A $\sigma^{II, III}$ collineatio-tengelyre perspectivás

$${}_0(a_1^{IV} a_2^{V} a_3^{VI}) \equiv {}_1(3\,5,\ 4\,6)\ {}_1(1\,3,\ 2\,4)\ {}_1(1\,5,\ 2\,6),\quad \alpha_1\alpha_2\alpha_3$$

háromszögek megfelelő oldalai egymást az $A_1 A_2 A_3$ pontokban metszik; a megfelelő szögpontokat vetítő y_{12}, y_{56}, y_{34} sugarak egymást az $y^{II, III}$ négyszög egyik szögpontjában metszik.

Azonkivűl az

$$({}_0a_1^{IV}\alpha_2) = {}_0A_2^{IV},\quad ({}_0a_1^{IV}\alpha_3) = {}_0A_3^{IV},\quad ({}_0a_2^{V}\alpha_3) = {}_0A_3^{V},$$
$$({}_0a_1^{V}\alpha_1) = {}_0A_1^{V},\quad ({}_0a_3^{VI}\alpha_1) = {}_0A_1^{VI},\quad ({}_0a_3^{VI}\alpha_2) = {}_0A_2^{VI} \text{ és az}$$
$${}_0|\,A_2^{VI}\ A_1^{V}\,| = D_{34}\ D_{56},\quad {}_0|\,A_1^{VI}\ A_3^{IV}\,| = D_{56}\ D_{12},\quad {}_0|\,A_3^{V}\ A_2^{VI}\,| = D_{12}\ D_{34}$$

egyenesek a $D^{II, III}$ háromszög oldalai.

Ez a $D^{II, III}$ háromszög a ${}_0(a_1^{IV} a_2^{V} a_3^{VI})$ háromszöggel a π, és az $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ háromszöggel a ${}_0p^I$ collineatio-tengelyre vonatkozólag perspectivás; a közös collineatio-középpont $(y_{12}\ y_{34}\ y_{56})$; és a megfelelő oldalak metszőpontjai ${}_0\Pi^{IV}$, ${}_0\Pi^{V}$, ${}_0\Pi^{VI}$; ${}_0A_1^{I}$, ${}_0A_2^{I}$, ${}_0A_3^{I}$.

Ama négy pár háromszög, melyre a

$${}_0v^{II, III} = {}_0[p^1\ a_1^{IV}\ a_2^{V}\ a_3^{VI}],\quad s^{II, III} = \pi\ \alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3$$

bonthatók, az $y^{II,\ III} = y_{12}\, y_{34}\, y_{56}\, y'_{12}\, y'_{34}\, y'_{56}$ négyszög szögpontjaira perspectivásak; a szögpontokat vetítő sugarak e négyszögnek oldalai. A ${}_1p^I\, p^I\, p^I_1$, ${}_1a_1^{IV}\, a_1^{IV}\, a_{1_1}^{IV}$, stb. sugarak között következő relatiók léteznek:

$$({}_1p^I\ \sigma^{II,\ III}\ {}_0p^I\ \pi) = ({}_1a_1^{IV}\ \sigma^{II,\ III}\ {}_0a_1^{IV}\ \alpha_1) = \ldots = -1$$
$$({}_1p^I\ {}_0p^I\ \pi\ p^I) = ({}_1a_1^{IV}\ {}_0a_1^{IV}\ \alpha_1\ a_1^{IV}) = \ldots = -1$$
$$(p_1^I\ \pi\ p^I\ \pi^{II,\ III}) = (a_{1_1}^{IV}\ \alpha_1\ a_1^{IV}\ \sigma^{II,\ III}) = \ldots = -1.$$

A $v^{II,\ III} = (p^I\, a_1^{IV}\, a_2^{V}\, a_3^{VI}$, $v_1^{II,\ III} = (p^I\, a_1^{IV}\, a_2^{V}\, a_3^{VI})_1$,

$${}_1v^{II,\ III} = {}_1(p^I\, a_1^{IV}\, a_2^{V}\, a_3^{VI})$$

négyoldalak épen úgy, mint a ${}_0v^{II,\ III}$, $s^{II,\ III}$ négyoldalak, az $y^{II,\ III}$ négyszögbe vannak írva, és a ${}_1v^{II,\ III}$, $y^{II,\ III}$ négyszögeknek közös átlósháromszögük a $D^{II,\ III}$.

Ama négyoldalaknak az $y^{II,\ III}$ négyszög oldalain fekvő szögpontjai Pascal-, Salmon-, ${}_{01}G$, és G_{12} pontok.

Hasonlókép lehet a 8. ábrához is correlatiós ábrát (11. ábra) találni. A

$${}_0(A_1^{II}\, A_2^{II}\, A_3^{II}) = {}_0(c_1^{II}\, c_2^{II}\, c_3^{II}),\quad {}_0(A_1^{III}\, A_2^{III}\, A_3^{III}) = {}_0(b_1^{III}\, b_2^{III}\, b_3^{III})$$

perspectivás háromszögek megfelelő szögpontjai az $a_1\, a_2\, a_3$ egyeneseken, a megfefelő oldalak metszőpontjai a ${}_1p^I$ egyenesen feküsznek.

Az ${}_0\,|\,A_i^{II}\ A_j^{III}\,|$, ${}_0|\,A_j^{II}\ A_i^{III}\,|$ egyenespárok egymást a $D^{II,\ III} = D_{12}\, D_{34}\, D_{56}$ háromszög szögpontjaiban metszik, mely háromszög a fentebbiekkel a ${}_1p^I$ collineatio-tengelyre és a p-egyenesen fekvő ${}_0P^{III}$, ${}_0P^{II}$ collineatio-középpontokra perspectivás.

A négy háromszögpár, a melyekre a

$${}_0[P^{II}\ A_1^{II}\ A_2^{II}\ A_3^{II}],\quad {}_0[P^{III}\ A_1^{III}\ A_2^{III}\ A_3^{III}]$$

négyszögek oszthatók, a ${}_1v^{II,\ III} = {}_1[p^I\, a_1^{IV}\, a_2^{V}\, a_3^{VI}]$ négyoldal oldalaira, mint collineatio-tengelyre, perspectivás.

Az $y^{II,\ III}$ négyszög a ${}_1v^{II,\ III}$ négyoldal körűl van írva, és mindkettőjüknek közös átlósháromszöge $D^{II,\ III}$; végre ez utóbbinak szögpontjait a $\Sigma^{II,\ III} = (p\, a_1\, a_2\, a_3)$ pontból az $y''_{12}\ y''_{34}\ y''_{36}$ sugarakkal projiciáljuk.

69. A 31. és 32. pontban levő tételekhez a correlatiós tételek szintén könnyen megtalálhatók.

Ugyanis a

$${}_1v^{II,\ III} = {}_1[p^I\, a_1^{IV}\, a_2^{V}\, a_3^{VI}],\quad Y^{II,\ III} = Y_{12}\, Y_{34}\, Y_{56}\, Y'_{12}\, Y'_{34}\, Y'_{56}$$

négyoldalok oldalai a $\sigma^{II,\ III}$ egyenes $P A_1 A_2 A_3$ pontjain mennek keresztül, és átlósháromszögeik, $D^{II,\ III}$ és $\Delta^{II,\ III}$, a $\Sigma^{II,\ III}$ pontra és a $\sigma^{II,\ III}$ egyenesre vonatkozólag (45.) perspectivásak. Minthogy ezek következtében ama négyoldalak is perspectivásak, kimondhatjuk, hogy

A tizenöt ${}_1v$ és Y-négyoldal a hozzájuk rendelt Σ-pont- és σ-egyenesre vonatkozólag perspectivás.

Vagy más szóval:

A kilenczven ${}_{01}G$ pont azon a kilenczven egyenesen fekszik, melyek a Σ pontokat a hozzájuk rendelt Y-négyoldalok szögpontjaival összekötik.

Továbbá a $D^{II,\ III}\ D^{III,\ I}\ D^{I,\ II}\quad D^{V,\ VI}\ D^{VI,\ IV}\ D^{IV,\ V}$ háromszögek szögpontjai és oldalai

$$\begin{aligned}
D_{56}D_{34}D_{12} &= {}_0|\Pi^{IV}\mathbf{A}_1{}^{I}\mathbf{A}_2{}^{VI}\mathbf{A}_3{}^{V}|,\ {}_0|\Pi^{V}\mathbf{A}_2{}^{I}\mathbf{A}_3{}^{IV}\mathbf{A}_1{}^{VI}|,\ {}_0|\Pi^{VI}\mathbf{A}_3{}^{I}\mathbf{A}_1{}^{V}\mathbf{A}_2{}^{IV}|\\
D_{14}D_{25}D_{36} &= {}_0|\Pi^{IV}\mathbf{B}_1{}^{II}\mathbf{B}_2{}^{VI}\mathbf{B}_3{}^{V}|,\ {}_0|\Pi^{V}\mathbf{B}_2{}^{II}\mathbf{B}_3{}^{IV}\mathbf{B}_1{}^{VI}|,\ {}_0|\Pi^{VI}\mathbf{B}_3{}^{II}\mathbf{B}_1{}^{V}\mathbf{B}_2{}^{IV}|\\
D_{23}D_{16}D_{45} &= {}_0|\Pi^{IV}\Gamma_1{}^{III}\Gamma_2{}^{VI}\Gamma_3{}^{V}|,\ {}_0|\Pi^{V}\Gamma_2{}^{III}\Gamma_3{}^{IV}\Gamma_1{}^{VI}|,\ {}_0|\Pi^{VI}\Gamma_3{}^{III}\Gamma_1{}^{V}\Gamma_2{}^{IV}|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{56}D_{14}D_{23} &= {}_0|P^{I}A_1{}^{IV}B_1{}^{III}C_1{}^{II}|,\ {}_0|P^{II}B_1{}^{IV}C_1{}^{I}A_1{}^{III}|,\ {}_0|P^{III}C_1{}^{IV}A_1{}^{II}B_1{}^{I}|\\
D_{34}D_{25}D_{16} &= {}_0|P^{I}A_2{}^{V}B_2{}^{III}C_2{}^{II}|,\ {}_0|P^{II}B_2{}^{V}C_2{}^{I}A_2{}^{III}|,\ {}_0|P^{III}C_2{}^{V}A_2{}^{II}B_2{}^{I}|\\
D_{12}D_{36}D_{45} &= {}_0|P^{I}A_3{}^{VI}B_3{}^{III}C_3{}^{II}|,\ {}_0|P^{III}B_3{}^{VI}C_3{}^{I}A_3{}^{III}|,\ {}_0|P^{III}C_3{}^{VI}A_3{}^{II}B_3{}^{I}|.
\end{aligned}$$

A három első és a három utolsó háromszög a

$$\pi = {}_0|\Pi^{IV}\Pi^{V}\Pi^{VI}|,\quad p = {}_0|P^{I}P^{II}P^{III}|$$

collineatio-tengelyre és a

$${}_0P^{I}\quad {}_0P^{II}\quad {}_0P^{III},\qquad {}_0\Pi^{IV}\quad {}_0\Pi^{V}\quad {}_0\Pi^{VI}$$

collineatio-középpontokra perspectivás.

De ama háromszögek átlósháromszögei a

$$\left.\begin{aligned}
{}_1v^{II,\ III} &= {}_1[p^{I}\,a_1{}^{IV}a_2{}^{V}a_3{}^{VI}]\\
{}_1v^{III,\ I} &= {}_1[p^{II}\,b_1{}^{IV}b_2{}^{V}b_3{}^{VI}]\\
{}_1v^{I,\ II} &= {}_1[p^{III}\,c_1{}^{IV}c_2{}^{V}c_3{}^{VI}]
\end{aligned}\right\}\qquad
\left.\begin{aligned}
{}_1v^{V,\ VI} &= {}_1[\pi^{IV}\alpha_1{}^{I}\beta_1{}^{II}\gamma_1{}^{III}]\\
{}_1v^{VI,\ IV} &= {}_1[\pi^{V}\alpha_2{}^{I}\beta_2{}^{II}\gamma_2{}^{III}]\\
{}_1v^{IV,\ V} &= {}_1[\pi^{VI}\alpha_3{}^{I}\beta_3{}^{II}\gamma_3{}^{III}]
\end{aligned}\right\}$$

négyoldalaknak, melyeknek oldalai a π, illetve p-egyenesen fekvő

$$P\ {}_1\Pi^{IV}\ {}_1\Pi^{V}\ {}_1\Pi^{VI},\quad \Pi\ {}_1P^{I}\ {}_1P^{II}\ {}_1P^{III}$$

pontokon mennek keresztül. Ennélfogva ama négyoldalak közűl az első és az utolsó három a π és p tengelyekre és a ${}_0P^{I}\ {}_0P^{II}\ {}_0P^{III}$ és ${}_0\Pi^{IV}$ ${}_0\Pi^{V}\ {}_0\Pi^{VI}$ pontokra vonatkozólag perspectivás.

Tekintettel a 47. pontra, mondhatjuk: A tizenöt $_1v$-négyoldalból, D-háromszögből és y-négyszögből húszszor lehet három olyant kiválasztani, mely a húsz Cayley-egyenesre, mint collineatio-tengelyre vonatkozólag perspectivás; a hatvan collineatio-középpont a hatvan $_0V$ pont. Három-három collineatio-középpont, mely egy Cayley-egyenesen nyugvó perspectivás alakzathoz tartozik, a Cayley-egyenes ellenegyenesén fekszik.

15. A v_1 Veronese-egyenesekről és V_1 Veronese-pontokról.

70. Tudjuk az előbbiekből, hogy a hatvan v_1 egyenes egymást párosával a kilenczven G_{12} pontban metszi, úgy hogy minden v_1 egyenesen három G_{12} pont fekszik.

E kilenczven G_{12} pont azonban hármasával még más hatvan egyenesen is fekszik.

Ugyanis az

$$(A_1^{II} A_2^{II} A_3^{II})_1 = (c_1^{II} c_2^{II} c_3^{II})_1, \quad (A_1^{III} A_2^{III} A_3^{III})_1 = (b_1^{III} b_2^{III} b_3^{III})_1$$

háromszögek, melyeknek megfelelő szögpontjai az egymást a $\Sigma^{II, III}$ pontban metsző $a_1 a_2 a_3$ egyenesen feküsznek, perspectivásak; ennélfogva megfelelő oldalainak metszőpontjai

$$(c_1^{II} b_1^{III})_1 = (1\,4,\ 2\,3)_1, \quad (c_2^{II} b_2^{III})_1 = (1\,6,\ 2\,5)_1, \quad (c_3^{II} b_3^{III})_1 = (3\,6,\ 4\,5)_1$$

egy p_2^I egyenesen feküsznek, mely a p_1^1 egyenestől különbözik, minthogy a p^I egyenesen fekvő

$$(p^I a_1^{IV})_1 = (1\,4,\ 2\,3)'_1, \quad (p^I a_2^{V})_1 = (1\,6,\ 2\,5)'_1, \quad (p^I a_3^{VI})_1 = (3\,6,\ 4\,5)'_1$$

pontok, melyek amazokkal együtt az $y'_{56}\, y'_{34}\, y'_{12}$ egyeneseken feküsznek, ugyancsak ama pontokat a $\Sigma^{V, VI}$ ponttól és az $(1\,4,\ 2\,3)$, $(1\,6,\ 2\,5)$, $(3\,6,\ 4\,5)$ pontoktól harmonicusan választják el.

A hatvan v_1 egyenesből hatvan ily perspectivás háromszögpárt és így hatvan ily p_2^I collineatio-tengelyt, melyet általában v_2 egyenesnek nevezünk, lehet kiválasztani.

Ha ama perspectivás háromszögek közűl az

$$(A_2^{III} A_3^{III} P^{III})_1 = (b_1^{III} \gamma_2^{III} \gamma_3^{III})_1, \quad (A_2^{II} A_3^{II} P^{II})_1 = (c_1^{II} \beta_2^{II} \gamma_3^{II})_1$$

háromszögeket vesszük tekintetbe, melyeknek megfelelő oldalai egymást az $a_{1_2}{}^{IV}$ egyenes

$$(b_1{}^{III} c_1{}^{II})_1 = (1\,4,\ 3\,2)_1,\quad (\gamma_2{}^{III} \beta_2{}^{II})_1 = (1\,5,\ 2\,6)'_1,\quad (\gamma_3{}^{III} \beta_3{}^{II})_1 = (3\,5,\ 4\,6)'_1$$

pontjaiban metszik, azt látjuk, hogy az $a_{1_2}{}^{IV}$ egyenes különbözik az $a_{1_1}{}^{IV}$-től, a melyen az

$$(a_1{}^{IV} p^I)_1 = (1\,4,\ 3\,2)'_1,\ (a_1{}^{IV} a_3{}^{VI})_1 = (1\,5,\ 2\,6)_1,\ (a_1{}^{IV} a_2{}^{V})_1 = (3\,5,\ 4\,6)_1$$

pontok feküsznek.

A $G_{12} = (1\,4,\ 3\,2)_1$ ponton keresztűl mennek a $b_{1_1}{}^{III} c_{1_1}{}^{II} a_{1_2}{}^{IV} p_2{}^I$ egyenesek és a $G'_{12} = (1\,4,\ 3\,2)'_1$ ponton a $b_{1_2}{}^{III} c_{1_2}{}^{II} a_{1_1}{}^{IV} p_1{}^I$ egyenesek, és hasonlókép az y-egyeneseken fekvő mindenik G_{12}, G'_{12} pontpáron két-két v_1 és v_2 egyenes megy keresztűl. Ennélfogva:

»Minden y-egyenesen egy G_{12}, G'_{12} pontpár fekszik, melyeken két-két v_1 és két-két v_2 egyenes megy keresztűl. Ezek az egyenesek azokhoz a PASCAL-egyenesekhez vannak rendelve, melyek egymást a felvett y-egyenesen fekvő PASCAL-pontban metszik«.

»A hatvan v_2 egyenes egymást hármasával a húsz STEINER-pontban metszi, még pedig azokban a STEINER pontokban, a melyekben a hozzájuk rendelt PASCAL-egyenesek metszik egymást«.

Ugyanis az

$$(A_1{}^{II} A_2{}^{II} A_3{}^{II})_1 = (c_1{}^{II} c_2{}^{II} c_3{}^{II})_1,\ (A_1{}^{III} A_2{}^{III} A_3{}^{III})_1 = (b_1{}^{III} b_2{}^{III} b_3{}^{III})_1,$$
$$(B_1{}^{III} B_2{}^{III} B_3{}^{III})_1 = (a_1{}^{III} a_2{}^{III} a_3{}^{III})_1,\ (C_1{}^{II} C_2{}^{II} C_3{}^{II})_1 = (a_1{}^{II} a_2{}^{II} a_3{}^{II})_1$$

háromszögek közűl

az 1-ső persp. a 2-dikkal a $\Sigma^{II,\ III}$ és a $p_2{}^I$;
a 2-ik » a 3-dikkal a $P_1{}^{III}$ és a $p_1{}^{III}$;
a 3-ik » a 4-dikkel a P_1 és a $\sigma^{II,\ III}$;
a 4-ik » az 1-sővel a $P_1{}^{II}$ és a $p_1{}^{II}$

középpontra és tengelyre vonatkozólag. E középpontok a p-egyenesen feküdvén, a $p_2{}^I$ egyenes a P-ponton megy keresztűl.

Miután a $p_2{}^I p_1{}^I \pi p^I$ egyenesek az $(1\,4, 3\,2)_1$, $(1\,4, 3\,2)'_1$, $\Sigma^{V,\ VI}$, $(1\,4,\ 3\,2)$ harmonicus pontokat a P-pontból vetítik,

$$(p_2{}^I p_1{}^I \pi p^I) = (p_1{}^I p_2{}^I \pi p^I) = -1.$$

71. Akkép, mint a hogy a hatvan v_1 egyenes egymást hármasával a húsz STEINER-ponton kivűl még hatvan V_1 pontban metszi, a hatvan

v_2 egyenes is a húsz STEINER-ponton kivűl még hatvan V_2 pontban fogja egymást metszeni, melyeket a hatvan V_1 pontokhoz rendelünk. Az

$$(A_1^{IV} A_2^{V} A_3^{VI})_1, \quad (1\,2,\ 3\,4)_1\ (5\,6,\ 1\,2)_1\ (3\,4,\ 5\,6)_1 =$$
$$(\alpha_2^{IV} \alpha_3^{V})_1\ (\alpha_3^{IV} \alpha_1)_1\ (\alpha_1^{V} \alpha_2^{IV})_1, \quad \mathbf{A}_1\,\mathbf{A}_2\,\mathbf{A}_3$$

háromszögek, minthogy oldalaik egymást az $|\,Y_{56}\,Y_{34}\,Y_{12}\,|$ egyenes Y_{56}, Y_{34}, Y_{12} pontjaiban metszik, perspectivásak, s így collineatio-középpontjaik a p-egyenesen feküsznek, melyet már az

$$A_1^{IV} A_2^{V} A_3^{VI},\ (1\,2,\ 3\,4)\ (5\,6,\ 1\,2)\ (3\,4,\ 5\,6),\ \mathbf{A}_1\,\mathbf{A}_2\,\mathbf{A}_3$$

perspectivás háromszögek meghatároznak. (Jegyzetben a 181. lapon.)

Ennélfogva az

$$\mathbf{A}_1\ (1\,2,\ 3\,4)_1 = \alpha^{I}_{1_2} \quad \mathbf{A}_2\ (5\,6,\ 1\,2) = \alpha^{I}_{2_2} \quad \mathbf{A}_3\ 3\,4,\ 5\,6)_1 = \alpha_{3_2}$$

sugarak egymást a p-egyenes P_2^{I} pontjában metszik.

Hasonló úton kimutatható, hogy a $\beta_1^{II}\beta_2^{II}\beta_3^{II}$ és $\gamma_1^{III}\gamma_2^{III}\gamma_3^{III}$ PASCAL-egyenesekhez rendelt $\beta_{1_2}^{II}\,\beta_{2_2}^{II}\,\beta_{3_2}^{II}$ és $\gamma_{1_2}^{III}\,\gamma_{2_2}^{III}\,\gamma_{3_2}^{III}$ egyenesek egymást a p-egyenesen fekvő P_2^{II}, illetve P_2^{III} pontokban metszik. E szerint kimondhatjuk, hogy

»A hatvan v_2 egyenes egymást hármasával hatvan V_2 pontban metszi, melyek hármasával a húsz CAYLEY-egyenesen feküsznek. Minden V_2 pontból három v_2 egyenes sugárzik ki, és minden v_2 egyenes három V_2 pontot tartalmaz«.

Ebből folytatólag következik, hogy egy DESARGUES-configuratiót képező tíz PASCAL-egyeneshez és tíz KIRKMAN-ponthoz rendelt tíz v_2 egyenes és tíz V_2 pont szintén egy $(10_3,\ 10_3)$ DESARGUES-configuratiót képez, azaz:

»A hatvan V_2 pont és v_2 egyenes, melyek maguk egy $[Vv]_2$ configuratiót képeznek, hat DESARGUES-configuratióra oszlik«.

Minthogy az $\alpha_{1_1}^{I}\,\alpha_{1_2}^{I}\,a_1\,\alpha_1^{I}$ harmonicus egyenesek a P_1^{I}, P_2^{I}, $\Sigma^{II,\ III}$, P^{I} pontokat az $\mathbf{A}_1$ pontból projiciálják,

$$(P_1^{I}\ P_2^{I}\ \Sigma^{II,\ III}\ P^{I}) = -1,$$

s mert a $(P_1^{I}\ P_2^{I}\ \Sigma^{II,\ III}\ P^{I})$, $(A_{1_1}^{IV}\ A_{1_2}^{IV}\ \Sigma^{II,\ III}\ A_1^{IV})$ négyesek harmonicusak, a $|\,P^{I}\,A_1^{IV}\,|_2$ egyenes az $Y'_{56} = (P^{I}\,A_1^{IV},\ P_1^{I}\,A_{1_1}^{IV})$ ponton megy keresztűl.

A $P^I A_1^{IV}$ egyenesen rajta feküsznek még a $B_{1_1}^{III} C_{1_1}^{II}$ pontok is; a $| P^I A_1^{IV} |_1$ egyenesen pedig a $B_1^{III} C_1^{II}$ pontok, továbbá a b_1, c_1 egyeneseken a

$$B_{1_1}^{III}\ B_{1_2}\ \Sigma^{I,\ IV}\ B_1^{III};\ C_{1_1}^{II}\ C_{1_2}^{II}\ \Sigma^{I,\ IV}\ C_1^{II}$$

harmonicus pontok; ennélfogva a $| B_1^{III} C_1^{II} |_2$ egyenes a

$$P_1^I\ A_{1_1}^{IV}\ B_1^{III}\ C_1^{II},\quad P^I\ A_1^{IV}\ B_{1_1}^{III}\ C_{1_1}^{II}$$

egyeneseknek Y'_{56} metszőpontján megy keresztül. De e két egyenes $| P^I A_1^{IV} |_2$ $| B_1^{III} C_1^{II} |_2$, nem esik egybe.

Ugyanis egyrészt tudjuk a 63. pontból, hogy a P_1^I pont a $[\Sigma^{II,\ III} P^I]$ vonaldarabon kivűl fekszik, tehát a $(P_1^I P_2^I \Sigma^{II,\ III} P^I) = -1$ relatio következtében P_2^I a $[\Sigma^{II,\ III} P^I]$ vonaldarabon van, de nem esik egybe a ${}_0P^I$ ponttal. Igy $(P^I P_1^I\ \Pi\ P_2^I)$ nem harmonicus négyes. (Értéke különben $= 4$.)

Másrészt a

$$(P^I P_1^I\, \Pi\, P_2^I) \barwedge (B_1^{III} B_{1_1}^{III} \mathbf{B}_1 B_{1_2}^{III})$$

helyzeti viszonylat miatt

$$Y'_{56}\ (\,| P^I A_1^{IV} |\quad | P^I A_1^{IV} |_1\quad | \Pi\, \mathbf{A}_1 |\quad | P^I A_1^{IV} |_2) \barwedge$$
$$Y'_{56}\ (B_1^{III} C_1^{II} |\quad | B_1^{III} C_1^{II} |_1\quad | \mathbf{B}_1 \Gamma_1 |\quad | B_1^{III} C_1^{II} |_2),$$

és mert

$$| P^I A_1^{IV} | \equiv | B_1^{III} C_1^{II} |_1,\quad | P^I A_1^{IV} |_1 \equiv | B_1^{III} C_1^{II} |,\quad | \Pi\, \mathbf{A}_1 | \equiv | \mathbf{B}_1 \Gamma_1 |,$$

azért a $| P^I A_1^{IV} |$, $| P^I A_1^{IV} |_1$ kapcsolt sugárpártól és a $| \Pi\, \mathbf{A}_1\, \mathbf{B}_1\, \Gamma_1 |$ kettőssugárpártól meghatározott involutióban $| P^I A_1^{IV} |_2$, $| B_1^{III} C_1^{II} |_2$ szintén kapcsolt sugárpár lesz. De e két sugár nem esik egybe, mert $(P^I P_1^I\, \Pi\, P_2^I)$ nem harmonicus négyes, és így a $P^I P_1^I$, ΠP_2^I pontpárok nincsenek harmonicusan elválasztva.

Ennélfogva:

»A hatvan V_2 pont párosával kilenczven g_{23} egyenesen fekszik, melyek egymást párosával (g_{23}, g'_{23}) a negyvenöt Y-pontban metszik«.

Ugyanegy Y-ponton keresztűl menő g_{01} g'_{01} g_{23} g'_{23} σ ${}_0g$ egyenesekre nézve pedig

$$(g_{01}\ g'_{01}\ \sigma\ g_{23}) \barwedge (g'_{01}\ g_{01}\ \sigma\ g'_{23}),$$

s mert $(g_{01}\ g'_{01}\ \sigma\ {}_0g) = -1$, azért a σ és ${}_0g$ kettős sugarai a g_{01} g'_{01}, g_{23} g'_{23} sugárpontoktól meghatározott involutiónak.

72. Vizsgáljuk már most az

$$(a_1^{II} a_2^{II} a_3^{II})_2 = (C_1^{II} C_2^{II} C_3^{II})_2,\quad (a_1^{III} a_2^{III} a_3^{III})_2 = (B_1^{III} B_2^{III} B_3^{III})_2$$

perspectivás háromszögeket, melyeknek oldalai a $\sigma^{II, III}$ egyenes $A_1 A_2 A_3$ pontjain keresztül menő v_2 egyenesek, szögpontjai pedig a következő g_{23} egyeneseken $|B_1^{III} C_1^{II}|_2$, $|B_2^{III} C_2^{II}|_2$, $|B_3^{III} C_3^{II}|_2$ fekvő V_2 pontok. Ez utóbbi g_{23} egyenesek tehát egymást egy pontban metszik. Minthogy azonban ezeken a g_{23} egyeneseken a kijelölt V_2 pontokon kivül más V_2 pontok nincsenek, ama három egyenes metszőpontja, P_3^I, nem esik egybe a P^I ponttal.

A hatvan v_2 egyenesből hatvan ily perspectivás háromszög képezhető, melyek a σ-egyenesekre, mint collineatio-tengelyekre, perspectivásak, mert minden σ-egyenes négy pár perspectivás háromszögnek collineatio-tengelye. A hatvan collineatio-középpontot, melyekhez ama háromszögek vezetnek, a KIRKMAN-pontokhoz rendeljük és általában V_3-mal jelöljük; különös megjelölésük ellenben olyan legyen, mint a KIRKMAN-pontoké, melyekhez rendelvék, de még $_3$-mas mutatókkal is lássuk el őket.

A g_{23} egyenesek mindegyikén két V_3 pont fekszik, melyek az analogus g_{01} egyeneseken fekvő V_1 pontokhoz rendelvék. Mert a

$$(p^{II} a_2^{II} a_3^{II})_2 = (C_1^{II} \mathbf{B}_1^{II} \mathbf{B}_3^{II})_2, \quad (p^{III} a_1^{III} a_2^{III})_2 = (B_1^{III} \Gamma_1^{III} \Gamma_3^{III})_2$$

háromszögek az $A_{1_3}^{IV}$ collineatio-középpontra perspectivásak, mely pont a P_3^I ponttal együtt a $|B_1^{III} C_1^{II}|_2$ egyenesen fekszik.

Minthogy az

$$(a_1^{II} a_2^{II} a_3^{II})_2 \; (a_1^{III} a_2^{III} a_3^{III})_2, \; (b_1^{III} b_2^{III} b_3^{III})_2 \; (c_1^{II} c_2^{II} c_3^{II})_2$$

háromszögek közül az 1-ső és 2-ik a P_3^I, $\sigma^{II, III}$; a 2-ik és 3-ik a P_2^{III}, p_2^{III}; a 3-ik és 4-ik a $\Sigma^{II, III}$, p_1^I a 4-ik és 1-ső a P_2^{II} pontra s a p_2^{II} egyenesre vonatkozólag perspectivás, és azok az egyenesek a P-ponton mennek keresztül, ezért ama pontok a p-egyenesen feküsznek.

Ugyanezt mondhatjuk a P_3^{II}, P_3^{III} pontokról, melyek collineatio-középpontjai a $(b_1^{III} b_2^{III} b_3^{III})_2$, $(b_1^I b_2^I b_3^I)_2$ és $(c_1^I c_2^I c_3^I)_2$, $(c_1^{II} c_2^{II} c_3^{II})_2$ perspectivás háromszögeknek.

Ennélfogva: »A hatvan V_3 pont hármasával a húsz CAYLEY-egyenesen fekszik«.

Minthogy a $|P^I A_1^{IV}|_3$, $|B_1^{III} C_1^{II}|_2$ egyenesek egybe esnek, a $|P^I A_1^{IV}|_3 = g'_{23}$, valamint a $|P^I A_1^{IV}| = g_{01}$, $|P^I A_1^{IV}|_1 = g'_{01}$, $|P^I A_1^{IV}|_3 = g_{23}$ egyenesek az Y'_{56} ponton mennek keresztül. Ezek az egyenesek a p-t a P^I, P_1^I, P_2^I, P_3^I pontokban metszik; és a II,

${}_0P^I$ pontok kettőspontjai a $P^I\,P_1{}^I$, $P_2{}^I\,P_3{}^I$ pontpároktól meghatározott involutiónak.

Ennek következtében

$$(P_2{}^I\,P_3{}^I\,\Pi\,{}_0P^I) = -1\,;$$

és mert a $P_2{}^I$ nincs a $[\Pi\,{}_0P^I]$ vonaldarabon: a $P_3{}^I$ pont a $[\Pi\,{}_0P^I]$ vonaldarabon, de a $[\Sigma^{II,\,III}\,P^I]$ vonaldarabon kivűl fekszik.

73. A hatvan V_3 pont hármasával a húsz Cayley-egyenesen kivűl még más hatvan v_3 egyenesen is fekszik. Ezek a v_3 egyenesek hármasával a húsz Steiner-poton mennek keresztűl és egy a $[Vv]_2$-vel analogus $[Vv]_3$ configuratiót képeznek

Ugyanis, minthogy a

$$\pi_2{}^{IV} = |\,A_1{}^{IV}B_1{}^{IV}C_1{}^{IV}\,|_2,\quad \pi_2{}^{V} = |\,A_2{}^{V}B_2{}^{V}C_2{}^{V}\,|_2,\quad \pi_2{}^{VI} = |\,A_3{}^{VI}B_3{}^{VI}C_3{}^{VI}\,|_2$$

egyenesek egymást a Π pontban metszik, az

$$(A_1{}^{IV}A_2{}^{V}A_3{}^{VI})_2 = (B_1{}^{II}\,\Gamma_1{}^{III}\;\; B_2{}^{II}\,\Gamma_2{}^{III}\;\; B_3{}^{II}\,\Gamma_3{}^{III})_3$$
$$(C_1{}^{IV}C_2{}^{V}C_3{}^{V})_2 = (A_1{}^{I}B_1{}^{II}\;\; A_2{}^{I}B_2{}^{II}\;\; A_3{}^{I}B_3{}^{II})_3$$

háromszögek perspectivásak, és megfelelő oldalaik metszőpontjai a $p_3{}^{II} = |\,B_1{}^{II}\;B_2{}^{II}\;B_3{}^{II}\,|_3$ egyenesen feküsznek.

Minthogy továbbá a $\Sigma^{II,\,III}$ collineatio-középpontra perspectivás háromszögek,

$$(A_1{}^{IV}\;A_2{}^{V}\;A_3{}^{VI})_1\quad (A_1{}^{IV}\;A_2{}^{V}\;A_3{}^{VI})_2\quad \beta_1\;\beta_2\;\beta_3,$$

közűl, az 1-ső és 2-ik az $|\,Y_{56}\;\;Y_{34}\;\;Y_{12}\,|$ tengelyre; a 3-ik az első kettővel a p^{II}, $p_3{}^{II}$, tengelyekre perspectivás, és megfelelő oldalaik egymást a p^{II}, illetve $p_3{}^{II}$ egyeneseken fekvő

$$B_1{}^{II} = (\beta_1,\; A_{2_1}{}^{V}A_{3_1}{}^{VI}B_1{}^{II}\,\Gamma_1{}^{III}),\quad B_2{}^{II} = (\beta_2,\; A_{3_1}{}^{VI}A_{1_1}{}^{IV}B_2{}^{II}\,\Gamma_2{}^{III}),$$
$$B_3{}^{II} = (\beta_3,\; A_{1_1}{}^{IV}A_{2_1}{}^{V}B_3{}^{II}\,\Gamma_3{}^{III})$$
$$B_{1_3}{}^{II} = (\beta_1,\; A_{2_2}{}^{V}A_{3_2}{}^{VI}B_{1_3}{}^{II}\,\Gamma_{1_3}{}^{III}),\quad B_{2_3}{}^{II} = (\beta_2,\; A_{3_2}{}^{V}A_{1_2}{}^{IV}B_{2_3}{}^{II}\,\Gamma_{2_3}{}^{III}),$$
$$B_{3_3}{}^{II} = (\beta_3,\; A_{1_2}{}^{IV}A_{2_2}{}^{V}B_{3_3}{}^{II}\,\Gamma_{3_3}{}^{III})$$

pontokban metszik, a $p_3{}^{II}$ egyenes a $P = (p^{II},\,Y_{56}\;Y_{34}\;Y_{12})$ ponton megy keresztűl.

74. A hatvan v_3 egyenes egymást párosával az y-egyeneseken fekvő kilenczven G_{34} pontban metszi, úgy hogy minden G_{34} ponton két v_3 egyenes megy keresztűl, s minden v_3 egyenesen három G_{34} pont fekszik, megfelelőleg a v_1 egyeneseknek és a G_{12} pontoknak.

Az $\alpha_{1_3} = \mathbf{A}_1 A_{2_3}{}^{V} \mathbf{B}_{3_3}{}^{V} \Gamma_{3_3}{}^{V}$, $\alpha_{2_3}{}^{IV} = \mathbf{A}_2 A_{1_3}{}^{IV} \mathbf{B}_{3_3}{}^{IV} \Gamma_{3_3}{}^{IV}$ v_3-egyenesek egymást az $(\alpha_1{}^{V} \alpha_2{}^{IV})_3 = (3\,4,\ 5\,6)_3$ G_{34}-pontban, és a $\pi_3{}^{VI} = \Pi A_{3_3}{}^{VI} B_{3_3}{}^{VI} C_{3_3}{}^{VI}$ $\alpha_{3_3}{}^{I} = \mathbf{A}_3 P_3{}^{I} B_{3_3}{}^{I} C_{3_3}{}^{I}$ v_3-egyenesek egymást a $(\pi^{VI} \alpha_3{}^{I})_3 = (3\,4,\ 5\,6)'_3$ G'_{34}-pontban metszik, mely pontok az y''_{12} egyenesen feküsznek, mert Y_{12}, y''_{12} és Y'_{12}, y''_{12} átlóspontja és átlója az $\mathbf{A}_1\ \mathbf{A}_2\ A_{1_3}{}^{IV}\ A_{2_3}{}^{V}$, $\Pi\ \mathbf{A}_3\ P_3{}^{I}\ A_{3_3}{}^{VI}$ négyszögeknek.

Ugyanigy, ha

$$\alpha_{2_3}{}^{VI} = \mathbf{A}_2 A_{3_3}{}^{VI},\quad \alpha_{3_3}{}^{V} = \mathbf{A}_3 A_{2_3}{}^{V},\quad \alpha_{3_3}{}^{IV} = \mathbf{A}_3 A_{1_3}{}^{IV},\quad \alpha_{1_3}{}^{VI} = \mathbf{A}_1 A_{1_3}{}^{IV},$$
$$\pi_3{}^{IV} = \Pi A_{1_3}{}^{IV},\quad \pi_3{}^{V} = \Pi A_{2_3}{}^{V},\quad \alpha_{1_3}{}^{I} = \mathbf{A}_1 P_3{}^{I},\quad \alpha_{2_3}{}^{I} = \mathbf{A}_2 P_3{}^{I},$$

akkor a

$$(\alpha_2{}^{VI} \alpha_3{}^{V})_3 = (1\,2,\ 3\,4)_3,\quad (\pi^{IV} \alpha_1{}^{I})_3 = (1\,2,\ 3\,4)'_3,$$
$$(\alpha_3{}^{IV} \alpha_1{}^{VI})_3 = (5\,6,\ 1\,2)_3,\quad (\pi^{V} \alpha_2{}^{I})_3 = (5\,6,\ 1\,2)'_3$$

pontok G_{34} pontok; és a

$$(\pi^{VI} \alpha_3{}^{I})_3 = (3\,4,\ 5\,6)'_3,\quad (\pi^{VI} \beta_3{}^{II})_3 = (1\,4,\ 2\,5)'_3,\quad (\pi^{VI} \gamma_3{}^{III})_3 = (1\,6,\ 3\,2)'_3$$

a $\pi_3{}^{VI}$ egyenesen fekvő G_{34} pontok.

Minthogy

$$(A_2{}^{V} A_{2_1}{}^{V} A_{2_2}{}^{V} A_{2_3}{}^{V}) \barwedge (A_3{}^{VI} A_{3_1}{}^{VI} A_{3_2}{}^{VI} A_{3_3}{}^{VI}),$$

azért e négyeseket (melyeknek értéke különben $= 1:16$) az $\mathbf{A}_1$, Π pontokból projiciáló sugarakra is

$$(\alpha_1{}^{V} \alpha_{1_1}{}^{V} \alpha_{1_2}{}^{V} \alpha_{1_3}{}^{V}) \barwedge (\pi^{VI} \pi_1{}^{VI} \pi_2{}^{VI} \pi_3{}^{VI}),$$

valamint ezeknek metszőpontjaira y''_{12}-vel

$$\big((3\,4,\ 5\,6)\ (3\,4,\ 5\,6)_1\ (3\,4,\ 5\,6)'_1\ (3\,4,\ 5\,6)_3\big) \barwedge$$
$$\big((3\,4,\ 5\,6)\ (3\,4,\ 5\,6)'_1\ (3\,4,\ 5\,6)_1\ (3\,4,\ 5\,6)'_3\big);$$

vagy általánosan

$$(G\ G_{12}\ G'_{12}\ G_{34}) \barwedge (G\ G'_{12}\ G_{12}\ G'_{34}).$$

Ha pedig azt is tekintetbe vesszük, hogy $(G_{12}\ G'_{12}\ \Sigma\ G) = -1$, következik, hogy a Σ, G-pontok kettőspontjai a $G_{12}\ G'_{12}$, $G_{34}\ G'_{34}$ pontpároktól meghatározott involutiónak, és így $(G_{34}\ G'_{34}\ \Sigma\ G) = -1$.

»A negyvenöt Y-pont mindegyikén négy l_{34} egyenes megy keresztűl, melyeken a kilenczven G_{34} pont közűl kettő-kettő van; az l_{34} egyenesek száma 180: minden G_{34} ponton keresztűl megy négy«.

»A negyvenöt y-egyenes mindegyikén a kilenczven g_{23} egyenes közűl négy pár metszi egymást; ez L_{23} metszőpontok száma 180; minden g_{23} egyenesen négy ily pont van«.

Mindkét tétel hasonló úton bizonyítható be, mint az 57. pontban foglalt tételek, csak az »$_1$« mutató cserélendő föl »$_3$«-mal.

75. A kilenczven G_{34} pont hármasával a hatvan v_3 egyenesen kivűl még hatvan v_4 egyenesen is fekszik, melyeket ezekhez és a Pascal-, valamint v_1, v_2 egyenesekhez rendelhetünk.

Ugyanis a $\Sigma^{II,\ III}$ pontra vonatkozólag perspectivás háromszögek

$$(A_1^{II} A_2^{II} A_3^{II})_3 = (c_1^{II} c_2^{II} c_3^{II})_3, \quad (A_1^{III} A_2^{III} A_3^{III})_3 = (b_1^{III} b_2^{III} b_3^{III})_3$$

oldalai egymást a

$$(c_1^{II} b_1^{III})_3 = (1\,4,\ 2\,3)_3,\ (c_2^{II} b_2^{III}) = (1\,6,\ 2\,5)_3,\ (c_3^{II} b_3^{III}) = (3\,6,\ 4\,5)_3$$

pontokban metszik; ezek egy p_4^I egyenesen feküsznek, mely a p_3^I egyenestől különbözik, mert p_3^I-en a

$$(p^I a_1^{IV})_3 = (1\,4,\ 2\,3)'_3,\ (p^I a_2^{V})_3 = (1\,6,\ 2\,5)'_3,\ (p^I a_3^{VI})_3 = (3\,6,\ 4\,5)'_3$$

pontok feküsznek.

A kilenczven G_{34} pont mindegyikén két v_3 és két v_4 egyenes megy keresztűl, mert az

$$(A_1^{II} A_3^{II} P^{II})_3 = (c_1^{II} \beta_2^{II} \beta_3^{II})_3,\ (A_2^{III} A_3^{III} P^{III})_3 = (b_1^{III} \gamma_1^{III} \gamma_3^{III})$$

perspectivás háromszögek collineatio-tengelye a_{14}^{IV}, a p_4^I egyenessel együtt a $(c_1^{II} b_1^{III})_3 = (1\,4,\ 2\,3)_3$ ponton megy keresztűl, holott a

$$\left.\begin{array}{l}(C_1^I \mathbf{A}_2^I \mathbf{A}_3^I)_3 = (p^I b_3^I b_2^I) \\ (C_1^{IV} \mathbf{A}_2^{IV} \mathbf{A}_3^{IV})_3 = (a_1^{IV} \gamma_2^{IV} \gamma_3^{IV})_3\end{array}\right\} \left.\begin{array}{l}(B_1^I \mathbf{A}_2^I \mathbf{A}_3^I)_3 = (p^I c_3^I c_2^I)_3 \\ (B_2^{IV} A_2^{IV} \mathbf{A}_3^{IV})_3 = (a_1^{IV} \beta_2^{IV} \beta_3^{IV})_3\end{array}\right\}$$

perspectivás háromszögpároknak megfelelő oldalai egymást a b_{14}^{III}, c_{14}^{II} egyeneseken fekvő

$$\begin{array}{lll}(p^I a_1^{IV})_3 = (1\,4,\ 2\,3)'_3, & (b_3^I \gamma_2^{IV})_3 = (4\,6,\ 2\,5)'_3, & (b_2^I \gamma_3^{IV})_3 = (6\,3,\ 1\,5)'_3 \\ (p^I a_1^{IV})_3 = (1\,4,\ 2\,3)'_3, & (c_3^I \beta_2^{IV})_3 = (1\,6,\ 3\,5)_3, & (c_2^I \beta_3^{IV})_3 = (2\,6,\ 4\,5)_3\end{array}$$

pontokban metszik, úgy, hogy

$$(c_{13}^{II} b_{13}^{III} p_4^I a_{14}^{IV}) = (1\,4,\ 2\,3)_3, \quad (c_{14}^{II} b_{14}^{III} p_3^I a_{13}^{IV}) = (1\,4,\ 2\,3)'_3.$$

Hasonló úton, mint a v_2 egyenesekre nézve, itt is kimutatható, hogy a hatvan v_4 egyenes hármasával a húsz Steiner-ponton megy keresztűl.

Minthogy a $p_3{}^I\, p_4{}^I\, \pi\, p^I$ egyenesek az $(1\,4,\ 2\,3)_3$, $(1\,4,\ 2\,3)'_3$ $\Sigma^{V,\ VI}$ $(1\,4,\ 2\,3)$ harmonicus pontokat a P-pontból projiciálják: $(p_3{}^I\, p_4{}^I\, \pi\, p^I) = -1$.

A hatvan v_4 egyenes egymást hármasával a hatvan V_4 pontban és a húsz CAYLEY-pontban metszi; és épen úgy, mint a hatvan v_1, v_2, v_3 egyenes, hat DESARGUES-configuratióra oszlanak.

Ugyanis az

$$(A_1{}^{IV} A_2{}^{V} A_3{}^{VI})_3,\quad (1\,2,\ 3\,4)_3\ (5\,6,\ 1\,2)_3\ (3\,4,\ 5\,6)_3 =$$
$$(\alpha_2{}^{VI}\alpha_3{}^{V})_3\ (\alpha_3{}^{IV}\alpha_1{}^{VI})_3\ (\alpha_1{}^{V}\alpha_2{}^{IV})_3,\quad \mathbf{A}_1\,\mathbf{A}_2\,\mathbf{A}_3$$

háromszögek, mert oldalaik az $|\,Y_{56}\,Y_{34}\,Y_{12}\,|$ egyenes Y_{56}, Y_{34}, Y_{12} pontjain mennek keresztűl, perspectivásak; a collineatio-középpontok a p-egyenesen feküsznek. Ebből pedig az következik, hogy az

$$\mathbf{A}_1\,(1\,2,\ 3\,4)_3 = \alpha_{14}{}^{I},\quad \mathbf{A}_2\,(5\,6,\ 1\,2)_3 = \alpha_{24}{}^{I},\quad \mathbf{A}_3\,(3\,4,\ 5\,6)_3 = \alpha_{34}{}^{I}$$

egyenesek egymást egy $P_4{}^I$ pontban, és, hasonló úton kimutathatólag, a

$$\mathbf{B}_1\,(3\,6,\ 5\,2)_3 = \beta_{14}{}^{II},\quad \mathbf{B}_2\,(1\,4,\ 3\,6)_3 = \beta_{24}{}^{II},\quad \mathbf{B}_3\,(5\,2,\ 1\,4)_3 = \beta_{34}{}^{II}$$
$$\Gamma_1\,(5\,4,\ 1\,6)_3 = \gamma_{14}{}^{III},\quad \Gamma_2\,(3\,2,\ 5\,6)_3 = \gamma_{24}{}^{III},\quad \Gamma_3\,(1\,6,\ 3\,2)_3 = \gamma_{34}{}^{III}$$

egyenesek egymást egy $P_4{}^{II}$, $P_4{}^{III}$ pontban metszik, mely utóbbiak a $P_4{}^I$ ponttal együtt a p-egyenesen feküsznek.

Minthogy $(\alpha_{13}{}^I\alpha_{14}{}^I a_1\,\alpha_1{}^I) = -1$, azért a sugarak metszőpontjaira nézve p-vel $(P_3{}^I\ P_4{}^I\ \Sigma^{II,\ III}\ P^I) = -1$; és hasonló oknál fogva

$$(A_{13}{}^{IV}\ A_{14}{}^{IV}\ \Sigma^{II,\ III}\ A_1{}^{IV}) = (B_{13}{}^{III}\ B_{14}{}^{III}\ \Sigma^{I,\ IV}\ B_1{}^{III}) =$$
$$(C_{13}{}^{II}\ C_{14}{}^{II}\ \Sigma^{I,\ IV}\ C_1{}^{II}) = -1.$$

De a

$$|\,P^I A_1{}^{IV}\,| = g_{01},\quad |\,P^I A_1{}^{IV}\,|_3 = g_{23},\quad |\,B_1{}^{III} C_1{}^{II}\,| = g'_{01},\quad |\,B_1{}^{III} C_1{}^{II}\,|_3 = g'_{23}$$

egyenesek az Y'_{56} pontban metszik egymást, s így a

$$|\,P^I A_1{}^{IV}\,|_4 = g_{45}\qquad |\,B_1{}^{III} C_1{}^{II}\,|_4 = g'_{45}$$

egyenesek is keresztűl mennek az Y'_{56} ponton.

A két utóbbi g_{45}, g'_{45} egyenes azonban nem esik egybe.

Tudjuk ugyanis, hogy a $P_3{}^I$ pont a $[\Sigma^{II,\ III}\ P^I]$ vonaldarabon kivűl fekszik; tehát a $(P_3{}^I\ P_4{}^I\ \Sigma^{II,\ III}\ P^I) = -1$ relatio következtében, $P_4{}^I$ a $[\Sigma^{II,\ III}\ P^I]$ vonaldarabon fekszik és a ${}_0P^I$ ponttal nem esik egybe. Ennélfogva $(P_2{}^I P_3{}^I \Pi P_4{}^I)$ nem harmonicus négyes. (Értéke = 56.) A

$$(P_2{}^{I} P_3{}^{I}\ \Pi P_4{}^{I}) \barwedge (B_{12}{}^{III}\ B_{13}{}^{III}\ \mathbf{B}_1\ B_{14}{}^{III})$$

helyzeti viszonylat következtében

$$Y'_{56}\ (\ |\ P^I A_1{}^{IV}\ |_2\ \ |\ P^I A_1{}^{IV}\ |_3\ \ |\ \Pi\,\mathbf{A}_1\ |\ \ |\ P^I A_1{}^{IV}\ |_4) \barwedge$$
$$Y'_{56}\ (\ |\ B_1{}^{III} C_1{}^{II}\ |_2\ \ |\ B_1{}^{III} C_1{}^{II}\ |_3\ \ |\ \mathbf{B}_1\ \Gamma_1\ |\ \ |\ B_1{}^{III} C_1{}^{II}\ |_4),$$

s mert

$$|P^I A_1{}^{IV}|_2 = |B_1{}^{III} C_1{}^{III}|_3,\quad |P^I A_1{}^{IV}| = |B_1{}^{III} C_1{}^{II}|_2,\quad |\Pi\,\mathbf{A}_1| = |\mathbf{B}_1\,\Gamma_1|,$$

a $|\ P^I A_1{}^{IV}\ |_2$, $|\ P^I A_1{}^{IV}\ |_3$, kapcsolt sugárpár, valamint, a $|\ \Pi\,\mathbf{A}_1\,\mathbf{B}_1\,\Gamma_1|$ kettős sugárból meghatározott involutióban, a $|\ P^I A_1{}^{IV}\ |_4$, $|\ B_1{}^{III} C_1{}^{II}|_4$ is kapcsolt sugárpár lesz. Ez utóbbiak azonban nem egyesűlhetnek, mert $(P_2{}^I P_3{}^I\,\Pi\,P_4{}^I)$ nem harmonicus négyes, azaz a $P_2{}^I P_3{}^I$ pontpár a $\Pi P_4{}^I$ pontpártól nincsen harmonicusan elválasztva.

Ennélfogva mondhatjuk: A hatvan V_4 pont párosával kilenczven g_{45} egyenesen fekszik, melyek viszont párosával (g_{45}, g'_{45}) az Y-pontokon mennek keresztűl.

Ugyanazon az Y-ponton keresztűl menő g_{01} g'_{01}, g_{23} g'_{23}, g_{45} g'_{45} egyenesek involutiót képeznek, melynek kettős sugarai σ, ${}_0g$.

76. Az $A_1 A_2 A_3$, $P A_2 A_3$ pontokon keresztűl menő v_4 egyenesek következő perspectivás háromszögpároknak oldalai

$$(a_1{}^{II}\, a_2{}^{II}\, a_3{}^{II})_4 = (C_1{}^{II}\, C_2{}^{II}\, C_3{}^{II})_4,\quad (a_1{}^{III}\, a_2{}^{III}\, a_3{}^{III})_4 = (B_1{}^{III}\, B_2{}^{III}\, B_3{}^{III})_4\,;$$
$$(p^{II}\, a_2{}^{II}\, a_3{}^{II})_4 = (C_1\, \mathbf{B}_2{}^{II}\, \mathbf{B}_3{}^{II})_4,\quad (p^{III}\, a_2{}^{III}\, a_3{}^{III})_4 = (B_1{}^{III}\, \Gamma_1{}^{III}\, \Gamma_3{}^{III})_4\,;$$

ezeknek megfelelő szögpontjai a

$$|\ C_1{}^{II} B_1{}^{III}\ |_4\quad |\ C_2{}^{II} B_2{}^{III}\ |_4\quad |\ C_3{}^{II} B_3{}^{III}\ |_4\,;$$
$$|\ C_1{}^{II} B_1{}^{III}\ |_4\quad |\ \mathbf{B}_2{}^{II}\, \Gamma_2{}^{III}\ |_4\quad |\ \mathbf{B}_3{}^{II}\, \Gamma_3{}^{III}\ |_4$$

g_{45} egyeneseken feküsznek, melyek egymást a $P_5{}^I$, illetve $A_{15}{}^{IV}$ pontokban metszik. Ez utóbbi pontok azonban különböznek a $|\ P_4{}^I,\ A_{14}{}^{IV}|$ pontoktól, melyek nem feküsznek a $|\ B_1{}^{III}\ C_1{}^{II}\ |_4$ egyenesen.

A hatvan v_4 egyenes hatvan perspectivás háromszögpárt nyujt; a hozzájuk tartozó hatvan V_5 collineatio-középpont párosával a kilenczven g_{45} egyenesen fekszik.

Tekintettel arra, hogy az egymásra következő $(a_1{}^{II}\, a_2{}^{II}\, a_3{}^{II})_4$, $(a_1{}^{III}\, a_2{}^{III}\, a_3{}^{III})_4$, $(b_1{}^{III}\, b_2{}^{III}\, b_3{}^{III})_4$, $(c_1{}^{III}\, c_2{}^{III}\, c_3{}^{III})_4$ háromszögpárok a $P_5{}^I$, $P_4{}^{III}$, $\Sigma^{II,\ III}$, $P_4{}^{II}$ collineatio-középpontokra és a $\sigma^{II,\ III}$, $p_4{}^{III}$, $p_3{}^I$, $p_4{}^{II}$ collineatio-tengelyekre vonatkozólag perspectivásak és ez utóbbi egyenesek a P-ponton mennek keresztűl, következik, hogy a P_5^I pont a $p \equiv \Sigma^{II,\ III}\ P_4^{II}\ P_4^{III}$ Cayley-egyenesen fekszik.

Minden Cayley-egyenesen három V_5 pont van; így pl. a p Cayley-egyenesen a P_5^I, P_5^{II}, P_5^{III}, mely utóbbiak a $(b_1^{III} b_2^{III} b_3^{III})_4$, $(b_1^I b_2^I b_3^I)_4$; $(c_1^I c_2^I c_3^I)_4$, $(c_1^{II} c_2^{II} c_3^{II})_4$ perspectivás háromszögpároknak collineatio-középpontjai.

Minthogy

$$(\Sigma^{II,\ III}\ P_1^I\ P_2^I\ .\ .\ P_5^I) \barwedge (\Sigma^{II,\ III}\ A_{11}^{IV}\ A_{12}^{IV}\ .\ .\ A_{15}^{IV})$$

a $\mid P^I A_1^{IV} \mid$, $\mid P^I A_1^{IV} \mid_1$, $\mid P^I A_1^{IV} \mid_2$ . . $\mid P^I A_1^{IV} \mid_5$

egyenesek az Y_{56} ponton mennek keresztűl.

A p Cayley-egyenes a

$$\mid B_1^{III}\ C_1^{II} \mid_2, \quad \mid B_1^{III}\ C_1^{II} \mid_3, \quad \mid B_1^{III}\ C_1^{II} \mid_4, \quad \mid \Pi\ \mathbf{A}_1\ \mathbf{B}_1\ \Gamma_1 \mid$$

egyeneseket a $P_3^I P_2^I P_5^I \Pi$ pontokban metszvén,

$$(P_2^I\ P_3^I\ \Pi\ P_4^I) \barwedge (P_3^I\ P_2^I\ \Pi\ P_5^I),$$

s így a P_5^I pont ebből, vagy pedig a $(P_4^I\ P_5^I\ \Pi\ {}_0P^I) = -1$ relatióból is szerkeszthető.

A hatvan V_5 pont hármasával hatvan v_5 egyenesen fekszik, melyek viszont hármasával a húsz Steiner-ponton mennek keresztűl. E hatvan v_5 egyenes egymást párosával a negyvenöt y-egyenesen fekvő negyvenöt G_{56}, G'_{56} pontpárban metszi, úgy, hogy e pontokból minden v_5 egyenesen három van. Így az

$$\alpha_{15}^V = \mid \mathbf{A}_1\ A_{25}^V\ \mathbf{B}_{35}^V\ \Gamma_{35}^V \mid, \quad \alpha_{23}^{IV} = \mid \mathbf{A}_2\ A_{15}^{IV}\ \mathbf{B}_{35}^{IV}\ \Gamma_{35}^{IV} \mid;$$
$$\pi_5^{VI} = \mid \Pi\ A_{35}^{VI}\ B_{35}^{VI}\ C_{35}^{VI} \mid, \quad \alpha_{35}^I = \mid \mathbf{A}_3\ P_5^I\ B_{35}^I\ C_{35}^I \mid$$

v_5 egyenespárok egymást az Y''_{12} egyenesen fekvő :

$$(\alpha_1^V\ \alpha_2^{IV})_5 = (3\,4,\ 5\,6)_5, \quad (\pi^{VI}\ \alpha_3^I)_5 = (3\,4,\ 5\,6)'_5$$

$(G_{56}\ G'_{56})$ pontpárokban metszik; az Y''_{12} Y''_{36} Y''_{54} egyeneseken fekvő

$$(\pi^{VI}\ \alpha_3^I)_5 = (3\,4,\ 5\,6)'_5, \quad (\pi^{VI}\ \beta_3^I)_5 = (1\,4,\ 2\,5)'_5, \quad (\pi^{VI}\ \gamma_3^I)_5 = (1\,6,\ 3\,2)'_5$$

pontokat pedig a π_5^{VI} egyenes tartalmazza. A

$$(A_{22}^V\ A_{23}^V\ A_{24}^V\ A_{25}^V) \barwedge (A_{32}^{VI}\ A_{33}^{VI}\ A_{34}^{VI}\ A_{35}^{VI}),$$

projectiós négyeseket az $\mathbf{A}_1$, illetve Π-pontból projiciáló

$$(\alpha_{12}^{V}\ \alpha_{13}^{V}\ \alpha_{14}^{V}\ \alpha_{15}^{V}) \barwedge (\pi_2^{VI}\ \pi_3^{VI}\ \pi_4^{VI}\ \pi_5^{VI})$$

sugarak metszései az Y''_{12} egyenessel

$$((34,\ 56)'_1\ (34,\ 56)_3\ (34,\ 56)'_3\ (34,\ 56)_4) \barwedge$$
$$((34,\ 56)_1\ (34,\ 56)'_3\ (34,\ 56)_3\ (34,\ 56)'_5),$$

és általánosan

$$(G'_{12}\ G_{34}\ G'_{34}\ G_{54}) \barwedge (G_{12}\ G'_{34}\ G_{34}\ G'_{56}).$$

Ez utóbbi helyzeti viszonylatból pedig az következik, hogy a $G_{12}G'_{12}$, $G_{34}G'_{34}$, $G_{56}G'_{56}$ pontpárok involutiot képeznek, s mert a Σ, G-pontok az első két pontpártól meghatározott involutiónak kettőspontjai, azért $(G_{56}\ G'_{56}\ \Sigma\ G) = -1$.

A kilenczven G_{56} pontról végre megjegyezzük még, hogy párosával a negyvenöt Y-ponttal együtt 180 l_{56} egyenesen feküsznek, úgy, hogy minden G_{56} ponton négy l_{56} egyenes megy keresztűl. Ugyanígy a negyvenöt y-egyenes mindegyikén a kilenczven g_{45} egyenes közűl négy pár metszi egymást 180 L_{45} pontban, úgy, hogy minden g_{45} egyenesen négy L_{45} pont van.

77. A kilenczven G_{56} pont még hármasával hatvan v_6 egyenesen fekszik, úgy, hogy minden G_{56} ponton két v_5 és v_6 egyenes megy keresztűl. E v_6 egyenesek egymást hármasával a húsz Steiner-pontban és más hatvan V_6 pontban metszik, mely utóbbiak szintén hármasával a húsz Cayley-egyenesen és párosával kilenczven g_{67} egyenesen, vagy negyvenöt $g_{67}\ g'_{67}$ egyenespáron feküsznek. Ezek az egyenespárok a negyvenöt G-ponton mennek keresztűl és kapcsolt sugarai a $g_{01}\ g'_{01}$, $g_{23}\ g'_{23}$, $g_{56}\ g'_{56}$ sugárpároktól képezett involutiónak.

Minthogy a $p_5^I p_6^I \pi p^I$ sugarak P-ből az $(14,\ 23)_5$, $(14,\ 23)'_5$, $\Sigma^{V,\ VI}$, $(14,\ 23)$ harmonicus pontokat projiciálják, $(p_5^I\ p_6^I\ \pi\ p^I) = -1$.

Ha P_6^I az előbbi P_i^I pontokhoz rendelt V_6 pont, akkor P_6^I a $(P_5^I\ P_6^I\ \Sigma^{II,\ III}\ P^I) = -1$ relatióból is meg van határozva és a $[\Sigma^{II,\ III}\ P^I]$ vonaldarabon fekszik, mert P_5^I a $[\Pi\ _0P^I]$ vonaldarabon van.

A hatvan v_6 egyenes hatvan perspectivás háromszögpárnak oldala, valamint a hatvan V_6 pont azoknak szögpontja; a hatvan V_7 collineatio-középpont párosával kilenczven g_{67} egyenesen, vagy, a mi ugyanazt fejezi ki, negyvenöt $g_{67}\ g'_{67}$ egyenespáron fekszik. Ha P_7^I az előbbi P_i^I pontokhoz rendelt V_7 pont, akkor ez vagy a

$$(P_4^I\ P_5^I\ \Pi\ P_6^I) \barwedge (P_5^I\ P_4^I\ \Pi\ P_7^I),$$

vagy a $(P_6{}^I\ P_7{}^I\ \Pi\ {}_0P^I) = -1$ viszonylatból szerkeszthető és a $[\Pi\ {}_0P^I]$ vonaldarabon fekszik.

A hatvan V_7 pont hatvan v_7 egyenest, ezek megint a negyvenöt g-egyenesen fekvő negyvenöt $G_{78}\,G'_{78}$ pontpárt, melyekre nézve $(G_{78}\,G'_{78}\,\Sigma\,G) = -1$, és hatvan v_8 egyenest szolgáltatnak.

A v_8 egyenesek V_8 pontokhoz, ezek pedig $g_{89}\,g'_{89}$ egyenespárokhoz vezetnek, melyek a $g_{01}\,g'_{01}$, $g_{23}\,g'_{23}$, . . . involutiós sornak kapcsolt sugarai, és így tovább.

16. Az ${}_iV$ pontokról és ${}_iv$ egyenesekről.

78. Hasonló úton, mint a hogy a V_i pontokat és v_i egyeneseket a V_1 pontokból és a v_1 egyenesekből származtattuk, a ${}_1V$ pontokból és ${}_1v$ egyenesekből új ${}_iV$ pontok és ${}_iv$ egyenesek nyerhetők. Ezek új $[{}_iV\ {}_iv] = {}_i[Vv]$ configuratiókat fognak adni, melyek a Steiner-pontok és Cayley-egyenesek irányában ugyanúgy viselkednek, mint a már ismert $[Vv]_i$ configuratiók.

A 63. pontban egy tételre jutottunk, mely szerint a hatvan ${}_1V$ pont párosával kilenczven ${}_{12}g$ egyenesben fekszik, úgy, hogy mindegyik ${}_1V$ pontból három ${}_{12}g$ egyenes sugárzik ki.

E kilenczven ${}_{12}g$ egyenes egymást hármasával még más hatvan ${}_2V$ pontban metszi, melyek szintén párosával feküsznek a ${}_{12}g$ egyeneseken.

Ugyanis az

$$\left.\begin{array}{l} {}_1(a_1{}^{II}\ a_2{}^{II}\ a_3{}^{II}) = {}_1(C_1{}^{II}\ C_2{}^{II}\ C_3{}^{II}) \\ {}_1(a_1{}^{III}\ a_2{}^{III}\ a_3{}^{III}) = {}_1(B_1{}^{III}\ B_2{}^{III}\ B_3{}^{III}) \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} {}_1(p^{II}\ a_2{}^{II}\ a_3{}^{II}) = {}_1(C_1{}^{II}\ \mathbf{B}_2{}^{II}\ \mathbf{B}_3{}^{II}) \\ {}_1(p^{III}\ a_2{}^{III}\ a_3{}^{III}) = {}_1(B_1{}^{III}\ \Gamma_2{}^{III}\ \Gamma_3{}^{III}) \end{array}\right\}$$

háromszögpárok oldalai, melyek ${}_{12}g$ egyenesek, a $\sigma^{II,\ III}$ egyenesen fekvő $A_1\,A_2\,A_3$, $P\,A_2\,A_3$ pontokon mennek keresztül, s ezért a három ${}_1|B_1{}^{III}\ C_1{}^{II}|$, ${}_1|\Gamma_2{}^{III}\ \mathbf{B}_2{}^{II}|$, ${}_1|\Gamma_3{}^{III}\ \mathbf{B}_3{}^{II}|$ egyenes egymást egy ${}_2A_1{}^{IV}$ pontban metszi, mely metszőpontok a ${}_1P^I\ {}_1A_1{}^{IV}$ pontoktól különböznek, mert a ${}_1|B_1{}^{III}\ C_1{}^{II}|\ {}_1|P^I\ A_1{}^{IV}|$ egyenespár a ${}_0|P^I\ A_1{}^{IV}\ B_1{}^{III}\ C_1{}^{II}|$ $|\Pi\ \mathbf{A}_1\ \mathbf{B}_1\ \Gamma_1|$ egyenespárt harmonicusan választja el.

A hatvan ${}_1v$ egyenesből hatvan oly perspectivás háromszögpár alakítható, mint az előbbiek, és így hatvan ${}_2V$ collineatio-középpontot nyerünk, melyekben az ${}_{12}g$ egyenesek egymást hármasával metszik, úgy, hogy *minden* $_{12}g$ *egyenesen két* $_1V$ *és* $_2V$ *pont fekszik.*

Minthogy a

$$_1(a_1{}^{II}\, a_2{}^{II}\, a_3{}^{II}) = {}_1(C_1{}^{II}\, C_2{}^{II}\, C_3{}^{II}), \quad {}_1(a_1{}^{III}\, a_2{}^{III}\, a_3{}^{III}) = {}_1(B_1{}^{III}\, B_2{}^{III}\, B_3{}^{III}),$$
$$_1(b_1{}^{III}\, b_2{}^{III}\, b_3{}^{III}) = {}_1(A_1{}^{III}\, A_2{}^{III}\, A_3{}^{III}), \quad {}_1(c_1{}^{II}\, c_2{}^{II}\, c_3{}^{II}) = {}_1(A_1{}^{II}\, A_2{}^{II}\, A_3{}^{II})$$

háromszögek közül

az 1-ső a 2-dikkal $\sigma^{II,\ III}$, $_2P^I$; a 2-dik a 3-dikkal $_1p^{III}$, $_1P^{III}$;
a 3-dik a 4-dikkel $_0p^{III}$, $\Sigma^{II,\ III}$; a 4-dik az 1-sővel $_1p^{II}$, $_1P^{II}$

collineatio-tengelyre, illetőleg középpontra perspectivás és a tengelyek a P-ponton mennek keresztűl; a $_2P^I$ pont a p-egyenesen fekszik. Minthogy továbbá a

$$_{12}g = |\ {}_1P^I\ {}_1A_1{}^{IV}\ {}_2B_1{}^{III}\ {}_2C_1{}^{II}\ |, \quad {}_{12}g' = |\ {}_1B_1{}^{III}\ {}_1C_1{}^{II}\ {}_2P^I\ {}_2A_1{}^{IV}\ |$$

egyenesek a $|\ \Pi\ \mathbf{A}_1\ \mathbf{B}_1\ \Gamma_1\ |$, $_0|\ P^I\ A_1{}^{IV}\ B_1{}^{III}\ C_1{}^{II}\ |$ egyeneseket harmonicusan választják el, $({}_1P^I\ {}_2P^I\ \Pi\ {}_0P^I) = -1$.

A hatvan V_2 pont hármasával hatvan $_2v$ egyenesen fekszik, melyek szintén hármasával a húsz Steiner-ponton mennek keresztűl. Ugyanis az

$$_1(A_1{}^{IV}\, A_2{}^{V}\, A_3{}^{VI}) = {}_2(\mathbf{B}_1{}^{II}\, \Gamma_1{}^{III}\quad \mathbf{B}_2{}^{II}\, \Gamma_2{}^{III}\quad \mathbf{B}_3{}^{II}\, \Gamma_3{}^{III}),$$
$$_1(C_1{}^{IV}\, C_2{}^{V}\, C_3{}^{VI}) = {}_2(\mathbf{A}_1{}^{I}\, \mathbf{B}_1{}^{II}\quad \mathbf{A}_2{}^{I}\, \mathbf{B}_2{}^{II}\quad \mathbf{A}_3{}^{I}\, \mathbf{B}_3{}^{II})$$

háromszögek, mert a

$$_1\pi^{IV} = {}_1|\ A_1{}^{IV}\, B_1{}^{IV}\, C_1{}^{IV}\ |, \quad {}_1\pi^{V} = {}_1|\ A_2{}^{V}\, B_2{}^{V}\, C_2{}^{V}\ |, \quad {}_1\pi^{VI} = {}_1|\ A_3{}^{VI}\, B_3{}^{VI}\, C_3{}^{VI}\ |$$

egyenesek a Π-ponton mennek keresztűl, perspectivásak; ezért a megfelelő oldalak metszőpontjai a $_2p^{II} = {}_2|\ \mathbf{B}_1{}^{II}\ \mathbf{B}_2{}^{II}\ \mathbf{B}_3{}^{II}\ |$ egyenesen feküsznek.

Minthogy továbbá a $\Sigma^{II,\ III}$ középpontra perspectivás

$$_0(A_1{}^{IV}\, A_2{}^{V}\, A_3{}^{VI}), \quad {}_1(A_1{}^{IV}\, A_2{}^{V}\, A_3{}^{VI}), \quad \beta_1\, \beta_2\, \beta_3$$

háromszögek közül az 1-ső a 2-dikkal, a 3-dik az 1-sővel és a 2-dikkal az $|\ Y_{56}\ Y_{34}\ Y_{12}\ |$, $_0p^{II} = {}_0|\ \mathbf{B}_1{}^{II}\ \mathbf{B}_2{}^{II}\ \mathbf{B}_3{}^{II}\ |$, $_2p^{II} = {}_2|\ \mathbf{B}_1{}^{II}\ \mathbf{B}_2{}^{II}\ \mathbf{B}_3{}^{II}\ |$ collineatio-tengelyre vonatkozólag perspectivás: a $_2p^{II}$ egyenes a $P = (\ |\ Y_{56}\ Y_{34}\ Y_{12}\ |$, $_0p^{II}$ ponton megy keresztűl.

»A hatvan v_2 egyenes egymást párosával az y-egyeneseken fekvő kilenczven $_{23}G$, $_{23}G'$ pontban metszi, melyek minden y-egyenesen a Σ- és G-pontokat harmonicusan választják el. E kilenczven

${}_{23}G$, ${}_{23}G'$ pont párosával az Y-pontokkal együtt 180 ${}_{23}l$ egyenesen fekszik, úgy, hogy minden Y-ponton és minden ${}_{23}G$ ponton négy ${}_{23}l$ egyenes megy keresztűl«.

Ugyanis az Y_{12}, y''_{12} és Y'_{12}, y''_{12} átlóspontja és átlója az

$$A_1\ A_2\ {}_2A_1^{IV}\ {}_2A_2^{V}\quad \Pi\ A_3\ {}_2P^{I}\ {}_2A_3^{VI}$$

négyszögeknek, tehát

az $A_1\ {}_2A_2^{V} = {}_2\alpha_1$, $A_2\ {}_2A_1^{IV} = {}_2\alpha_2^{IV}$ egyenesek egymást a

$${}_2(\alpha_1^{V}\ \alpha_2^{IV}) = {}_2(3\,4,\ 5\,6) = {}_{23}G \text{ pontban;}$$

a $\Pi\ {}_2A_3^{VI} = {}_2\pi^{VI}$, $A_3\ {}_2P^{I} = {}_2\alpha_3^{I}$ egyenesek egymást a

$${}_2(\pi^{VI}\ \alpha_3^{I}) = {}_2(3\,4,\ 5\,6)' = {}_{23}G' \text{ pontban}$$

metszik, melyek az y''_{12} egyenesen feküsznek.

Továbbá az

$$({}_{\ }A_2^{V}\ {}_0A_2^{V}\ {}_1A_2^{V}\ {}_2A_2^{V})\ \overline{\wedge}\ (A_3^{VI}\ {}_0A_3^{VI}\ {}_1A_3^{VI}\ {}_2A_3^{VI})$$

négyeseket az A_1, Π-pontokból projiciáló

$$(\alpha_1^{V}\ {}_0\alpha_1^{V}\ {}_1\alpha_1^{V}\ {}_2\alpha_1^{V})\ \overline{\wedge}\ (\pi^{VI}\ {}_0\pi^{VI}\ {}_1\pi^{VI}\ {}_2\pi^{VI})$$

sugarak metszőpontjai y''_{12}-vel

$$(G\ {}_{01}G\ {}_{01}G'\ {}_{23}G)\ \overline{\wedge}\ (G\ {}_{01}G'\ {}_{01}G\ {}_{23}G');$$

s mert $({}_{01}G\ {}_{01}G'\ \Sigma\ G) = -1$, azért $({}_{23}G\ {}_{23}G'\ \Sigma\ G) = -1$.

Végre a tétel utolsó része hasonló úton bizonyítható be, mint a 65. pontban levő tétel, csak fel kell az elől álló »${}_0$« mutatókat »${}_2$«-vel cserélni.

»A kilenczven ${}_{23}G$ pont hármasával még más hatvan ${}_3v$ egyenesen is fekszik, úgy, hogy mindegyik ${}_{23}G$ ponton két ${}_2v$ és két ${}_3v$ egyenes megy keresztűl. E ${}_3v$ egyenesek hármasával keresztűl mennek a Steiner-pontokon«.

Igy pl. a ${}_{23}G = {}_2(\alpha_1^{V}\,\alpha_2^{IV}) = {}_2(3\,4,\ 5\,6)$ ponton még a ${}_3\pi^{VI}$, ${}_3\alpha_3^{I}$; a ${}_{23}G' = {}_2(\pi^{VI}\,\alpha_3^{I}) = {}_2(3\,4,\ 5\,6)'$ ponton még a ${}_3\alpha_1^{V}$, ${}_3\alpha_2^{IV}$ egyenesek is keresztűl mennek és, mert $({}_{23}G\ {}_{23}G'\ \Sigma\ G) = -1$, azért $({}_2\alpha_1^{V}\ {}_3\alpha_1^{V}\ a_1\ \alpha_1^{V}) = -1$, és hasonlókép $({}_2p^{I}\ {}_3p^{I}\ \pi\ p^{I}) = -1$.

»A hatvan ${}_3v$ egyenes egymást hármasával hatvan ${}_3V$ pontban metszi, melyek hármasával a Cayley-egyeneseken feküsznek. E ${}_3V$ pontok párosával kilenczven ${}_{34}g$, ${}_{34}g'$ egyenesen feküsznek, melyek párosával az Y-pontokon és hármasával a ${}_3V$ pontokon mennek keresztűl; az egyes Y-pontokban a σ, ${}_0g$ egyeneseket pedig harmonicusan választják el.

A hatvan ${}_3v$ egyenes és azoknak hatvan ${}_3V$ metszőpontja oly ${}_3[Vv]$ configuratiót képez, mint a ${}_2[Vv]$«.

A $({}_2\alpha_I^V\, {}_3\alpha_1\, a_1\, \alpha_I^V) = -1$ egyenletből következik, mert ${}_3P^I \equiv (p\, {}_3\alpha_1^V)$, hogy $({}_2P^I\, {}_3P^I\, \Sigma^{II,\, III}\, P^I) = -1$.

A kilenczven ${}_{34}g$, ${}_{34}g'$ egyenes egymást hármasával még hatvan ${}_4V$ pontban is metszi, úgy, hogy minden ${}_{34}g$ egyenesen két ${}_3V$ és két ${}_4V$ pont fekszik. Ezek az új ${}_4V$ metszőpontok hármasával más rendben még a húsz Cayley-egyenesen is feküsznek. Igy

$${}_{34}g =_3 \mid A_1^V\, A_2^{IV} \mid =_4 \mid \Pi^{VI}\, A_3^I \mid, \quad {}_{34}g' =_3 \mid \Pi^{VI}\, A_3^I \mid =_4 \mid A_1^V\, A_2^{IV} \mid$$

s mert $({}_{34}g\; {}_{34}g'\; \sigma\; {}_0g) = -1$, azért $({}_3A_1^V\; {}_4A_1^V\; A_1\; {}_0A_1^V)$ is $= -1$, s hasonlókép $({}_3P^I\; {}_4P^I\; \Pi\; {}_0P^I) = -1$.

A hatvan ${}_4V$ pont hármasával hatvan ${}_4v$ egyenesen fekszik, melyek ugyancsak hármasával a Steiner-pontokon mennek keresztűl. A hatvan ${}_4v$ egyenes a ${}_3[Vv]$-vel analogus ${}_4[Vv]$ configuratiót képez.

A P Steiner-ponton keresztűl menő ${}_4p^I$ egyenesre áll, hogy

$$({}_3p^I\; {}_4p^I\; \sigma^{II,\, III}\; {}_0p^I) = -1, \text{ stb.}$$

17. Általános tételek a Pascal-hatszöggel kapcsolatos configuratiókról.

79. Eddigi fejtegetéseink eredményét a következő tételbe foglalhatjuk össze:

Ha a Pascal-hatszög képezte configuratióban

v_0 a hatvan Pascal-egyenes,

V_0 a hatvan Kirkman-pont,

S a húsz Steiner-pont,

s a húsz Cayley-egyenes,

σ a tizenöt Steiner-egyenes,

Σ a tizenöt Salmon-pont

egyikét jelenti, akkor minden s-egyenesen három V_0- és három Σ-pont bizonyos módon egymáshoz van rendelve, és minden S-ponton három v_0-egyenes és három σ-egyenes megy keresztűl, melyek ugyanazon módon vannak egymáshoz rendelve.

(Igy a p Cayley-egyenesen: a $P^I, \Sigma^{II,\, III}$; $P^{II}, \Sigma^{III,\, I}$; $P^{III}, \Sigma^{I,\, II}$ Kirkman- és Salmon-pontok; a P Steiner-ponton keresztűl menő egyenesek közül a $p^I, \sigma^{II,\, III}$; $p^{II}, \sigma^{III,\, I}$; $p^{III}, \sigma^{I,\, II}$ Pascal- és Steiner-egyenesek vannak egymáshoz rendelve.)

Ha a tizenöt s-egyenesen a hatvan ${}_0V$, V_1, $V_2 \ldots V_i, \ldots {}_1V$, ${}_2V, {}_3V \ldots {}_iV \ldots$ pontot a következő egyenletekből (64)

$$(S\,{}_0V\,\Sigma\,V_0) = \frac{1}{3}$$

$$(V_0\,V_1\,S\,{}_0V) = -1, \quad (V_1\,V_2\,\Sigma\,V_0) = -1$$

$$\vdots$$

$$(V_{2i}\,V_{2i+1}\,S\,{}_0V) = -1, (V_{2i+1}\,V_{2i+2}\,\Sigma\,V_0) = -1$$

$$\vdots$$

$$({}_0V\,{}_1V\,\Sigma\,V_0) = -1$$

$$({}_1V\,{}_2V\,S\,{}_0V) = -1,$$

$$({}_{2i+1}V\,{}_{2i+2}V\,S\,{}_0V) = -1, ({}_{2i+2}V\,{}_{2i+3}V\,\Sigma\,V_0) = -1$$

$$\vdots$$

meghatározzuk, akkor a $V_0\,V_1$, $V_2\,V_3, \ldots {}_1V\,{}_2V, {}_3V\,{}_4V, \ldots$ pontpárok egy involutiós sort képeznek, melynek kettőspontjai S, ${}_0V$, és a $V_1\,V_2$, $V_3\,V_4, \ldots {}_0V\,{}_1V$, ${}_2V\,{}_3V, \ldots$ pontpárok egy másik involutiós sort képeznek, melynek kettőspontjai Σ, V_0. Az a $V_\infty\,{}_\infty V$ pontpár, mely az $S\,{}_0V$, $\Sigma\,V_0$ pontpárokat harmonicusan elválasztja, az első és második invulutiós pontsornak kapcsolt pontpárja; e pontpárhoz közelednek, a végtelenig nagyobbodó i-vel, az első és második involutiós sornak $V_{2i}\,V_{2i+1}$, illetve ${}_{2i+1}V\,{}_{2i+2}V$ kapcsolt pontpárjai.

A hatvan V_i pont mindegyikében a hatvan v_i egyenes közűl három-három metszi egymást, és minden v_i egyenesen, három-három V_i pont fekszik. A hatvan

Ha a tizenöt S-ponton keresztűl menő hatvan ${}_0v$, ${}_1v$, ${}_2v, \ldots$ $v_i, \ldots {}_1v, {}_2v, {}_3v, \ldots {}_iv, \ldots$ egyenest a következő egyenletekből

$$(s\,{}_0v\,\sigma\,v_0) = \frac{1}{3}$$

$$(v_0\,v_1\,s\,{}_0v) = -1, \quad (v_1\,v_2\,\sigma\,v_0) = -1$$

$$\vdots$$

$$(v_{2i}\,v_{2i+1}\,s\,{}_0v) = -1, (v_{2i+1}\,v_{2i+2}\,\sigma\,v_0) = -1$$

$$\vdots$$

$$({}_0v\,{}_1v\,\sigma\,v_0) = -1$$

$$({}_1v\,{}_2v\,s\,{}_0v) = -1,$$

$$({}_{2i+1}v\,{}_{2i+2}v\,s\,{}_0v) = -1, ({}_{2i+2}v\,{}_{2i+3}v\,\sigma\,v_0 = -1)$$

$$\vdots$$

meghatározzuk, akkor a $v_0\,v_1$, $v_2\,v_3, \ldots {}_1v\,{}_2v, {}_3v\,{}_4v, \ldots$ sugárpárok egy involutiós sort képeznek, melynek kettőssugarai s, ${}_0v$, és a $v_1\,v_2$, $v_3\,v_4, \ldots {}_0v\,{}_1v$, ${}_2v\,{}_3v, \ldots$ sugárpárok egy másik involutiós sort képeznek, melynek kettőssugarai σ és v_0. Az a $v_\infty\,{}_\infty v$ sugárpár, mely az $s\,{}_0v$, $\sigma\,v_0$ sugárpárokat harmonicusan elválasztja, az első és második involutiós sugársornak kapcsolt sugárpárja; e sugárpárhoz közelednek, a végtelenig nagyobbodó i-vel, az első és második involutiós sornak $v_{2i}\,v_{2i+1}$, illetve ${}_{2i+1}v\,{}_{2i+2}v$ kapcsolt sugárpárjai.

A hatvan ${}_iv$ egyenes mindegyikén a hatvan ${}_iV$ pont közűl három-három fekszik, és az ${}_iV$ pont mindegyikében három-három ${}_iv$ egyenes metszi egymást.

V_i pont és a hatvan v_i egyenes egy $[Vv]_i$ configuratiót képez, mely 6 DESARGUES-configuratióra (10_3, 10_3) oszlik.

A hatvan V_i pont és a hatvan v_i egyenes hatvan perspectivás háromszögpárnak collineatio-középpontja és tengelye; e háromszögpároknak oldalai és szögpontjai a $[Vv]_i$ configuratiónak egyenesei és pontjai.

Ezenkivűl minden v_{2i} egyenes collineatio-tengelye és egy Σ pont collineatio-középpontja egy perspectivás háromszögpárnak, melynek oldalai és szögpontjai a $[Vv]_{2i-1}$ configuratióhoz tartoznak; és minden V_{2i+1} pont collineatio-középpontja és egy σ egyenes collineatio-tengelye egy perspectivás háromszögpárnak, melynek oldalai és szögpontjai a $[Vv]_{2i}$ configuratióhoz tartoznak.

Ha $i=o$, akkor minden v_o egyenes collineatio-tengelye és egy Σ pont collineatio-középpontja egy perspectivás háromszögpárnak, melynek oldalai és szögpontjai a $[Vv]_o$ configuratióhoz tartoznak; ha pedig $i=\infty$, akkor v_∞ és egy bizonyos Σ, valamint egy σ és V_∞ collineatiotengelye, illetve középpontja oly perspectivás háromszögpárnak, melynek oldalai és szögpontjai a $_\infty[Vv]$ configuratióhoz tartoznak.

A hatvan V_{2i} és V_{2i+1} pont páronként kilenczven $g_{2i,\ 2i+1}$

A hatvan $_iv$ egyenes és a rajtuk fekvő hatvan $_iV$ pont egy $_i[Vv]$ configuratiót képez, mely hat DESARGUES-configuratióra (10_3, 10_3) oszlik.

A hatvan $_iv$ egyenes és hatvan $_iV$ pont hatvan perspectivás háromszögpárnak collineatio-tengelye és középpontja; e háromszögpároknak oldalai és szögpontjai az $_i[Vv]$ configuratio egyenesei és pontjai. Ezen kivűl minden $_{2i}V$ pont collineatio-középpontja és egy σ-egyenes collineatio tengelye egy perspectivás háromszögpárnak, melynek oldalai és szögpontjai $a_{2i-1}[Vv]$ configuratióhoz tartoznak; és minden $_{2i+1}v$ egyenes collineatió-tengelye és egy Σ-pont collineatio-középpontja egy perspectivás háromszögpárnak, melynek oldalai és szögpontjai a $_{2i}[Vv]$ configuratióhoz tartoznak.

Ha $i=o$, akkor minden $_oV$ pont collineatio-középpontja és egy σ-egyenes collineatio-tengelye egy perspectivás háromszögpárnak, melynek oldalai és szögpontjai a $_o[Vv]$ configuratióhoz tartoznak; ha pedig $i=\infty$, akkor $_\infty V$ és egy bizonyos σ, valamint Σ és $_\infty v$ collineatio-középpontja, illetve tengelye oly perspectivás háromszögpárnak, melynek oldalai és szögpontjai a $[Vv]_\infty$ configuratióhoz tartoznak.

egyenesen fekszik, még pedig akkép, hogy minden ily egyenesen két V_{2i} és két V_{2i+1} pont van. E kilenczven egyenes egymást párosával ($g_{2i,2i+1}$ $g'_{2i,2i+1}$) negyvenöt, hármasával a σ-egyeneseken fekvő és *az i értékétől független Y-pontban metszi.*

A hatvan ${}_{2i+1}V$ és ${}_{2i+2}V$ pont páronként kilenczven ${}_{2i+1},{}_{2i+2}g$ egyenesen fekszik, még pedig akkép, hogy minden ily egyenesen két ${}_{2i+1}V$ és két ${}_{2i+2}V$ pont van. E kilenczven egyenes egymást párosával (${}_{2i+1},{}_{2i+2}g$, ${}_{2i+1},{}_{2i+2}g'$) az előbbi negyvenöt Y-pontban metszi.

A hatvan ${}_0V$ pont *négyesével* ${}_0g$ egyenesen fekszik, melyek szintén az Y-pontokon mennek keresztűl és tizenöt D-háromszögnek oldalai.

A hatvan V_∞ és hatvan ${}_\infty V$ pont hasonlóképp kilenczven, páronként a Y-pontokon keresztűl menő, (${}_\infty g_\infty$, ${}_\infty g'_\infty$) egyenesen fekszik, még pedig minden ily egyenesen két V_∞ és két ${}_\infty V$ pont van.

Ugyanazon az Y-ponton keresztűl menő egyenesekre nézve:

$$(g_{2i,2i+1}\ g'_{2i,2i+1}\ \sigma\ {}_0g) = -1,$$
$$({}_{2i+1,2i+2}g\ {}_{2i+1,2i+2}g'\ \sigma\ {}_0g) = -1,$$
$$(g'_{2i,2i+1}\ g_{2i+2,2i+3}\ \Sigma\ g_{01}) = -1,$$
$$({}_{2i+1,2i+2}g'\ {}_{2i+3,2i+4}g\ \Sigma\ g_{01}) = -1.$$

A jobb oldalon álló tétel negy-

A hatvan ${}_{2i}v$ és ${}_{2i+1}v$ egyenes páronként kilenczven ${}_{2i,2i+1}G$ ponton megy keresztűl, még pedig akkép, hogy minden ily pontban két ${}_{2i}v$ és két ${}_{2i+1}v$ egyenes metszi egymást. A metszőpontok párosával (${}_{2i,2i+1}G$, ${}_{2i,2i+1}G'$) negyvenöt, hármasával a Σ-pontokon keresztűl menő és *az i értékétől független y-egyenesen vannak.* A hatvan v_{2i+1} és v_{2i+2} egyenes egymást kilenczven $G_{2i+1,2+2}$ pontban metszi, még pedig akkép, hogy minden ily pontból két v_{2i+1} és két v_{2i+2} egyenes sugárzik ki. E kilenczven pont párosával ($G_{2i+1,2i+2}$, $G'_{2i+1,2i+2}$) az előbbi negyvenöt y-egyenesen fekszik.

A hatvan v_0 egyenes négyesével negyvenöt G-pontban metszi egymást, melyek szintén az y-egyeneseken feküsznek és tizenöt Δ-háromszögnek szögpontjai.

A hatvan ${}_\infty v$ és hatvan ${}_\infty v$ egyenes egymást szintén kilenczven, páronként az y-egyeneseken fekvő, (${}_\infty G_\infty$, ${}_\infty G'_\infty$) pontban metszi, még pedig minden ily pontból két v_∞ és két ${}_\infty v$ egyenes sugárzik ki.

Ugyanazon az y-egyenesen fekvő pontokra nézve:

$$({}_{2i,2i+1}G\ {}_{2i,2i+1}G'\ \Sigma\ G) = -1,$$
$$(G_{2i+1,2i+2}\ G'_{2i+1,2i+2}\ \Sigma\ G) = -1,$$
$$({}_{2i,2i+1}G'\ {}_{2i+2,2i+3}G\ \sigma\ {}_{01}G) = -1,$$
$$(G'_{2i+1,2i+2}\ G_{2i+3,2i+4}\ \sigma_{01}G) = -1.$$

venöt y-egyenesén a kilenczven $g_{2i,\,2i+1}$ egyenesből és a kilenczven $_{2i+1,\,2i+2}g$ egyenesből négy-négy pár metszi egymást $L_{2i,\,2i+1}$, illetve $_{2i+1,\,2i+2}L$ pontokban. E pontoknak száma külön-külön 180, úgy, hogy minden $g_{2i,\,2i+1}$ egyenesen négy $L_{2i,\,2i+1}$, és minden $_{2i+1,\,2i+2}g$ egyenesen négy $_{2i+1,\,2i+2}L$ pont fekszik.

A negyvenöt $_0g$ egyenes egymás hatával a fenti tizenöt D-háromszög tizenöt szögpontjában metszi, melyekben az y-egyenesek is hármasával találkoznak; e pontok mindegyike tizenként incidens L-pontnak tekinthető.

A baloldalon álló tétel negyvenöt Y-pontjából négy-négy $_{2i,\,2i+1}l$ és négy-négy $_{2i+1,\,2i+2}l$ egyenes sugárzik ki, melyeken a $_{2i,\,2i+1}G$ és a $_{2i+1,\,2i+2}G$ pontokból négy-négy fekszik. Ezeknek az egyeneseknek száma 180, úgy, hogy minden $_{2i,\,2i+1}G$ pontban négy $_{2i,\,2i+1}l$ és minden $_{2i+1,\,2i+2}G$ pontban négy $_{2i+1,\,2i+2}l$ egyenes metszi egymást.

A negyvenöt G-pont hatával a fenti tizenöt Δ-háromszög tizenöt oldalán fekszik, melyeken az Y-pontok is hármasával rajta vannak; e háromszögoldalok mindegyike tizenkét incidens l-egyenesnek tekinthető.

18. Nehány, a configuratióval kapcsolatos involutiós helyzetű pontról és sugárról.

80. A configuratióban az előbbiekben ismertetett involutiós pontokon és sugarakon kivűl még más involutiós pontok és sugarak is rejlenek, melyek akkép szerkeszthetők, hogy a configuratióban előforduló négyszögek szögpontjait bizonyos pontokból projiciáljuk és a négyoldalak oldalait bizonyos egyenesekkel metszszük. Ezek az involutiók többnyire közös tartón hármasával lépnek fel és részben közös elemei vannak. Együttes tárgyalásuk kedvéért czélszerűnek tartjuk előre bocsátani a következő tételt:

›Ha a b, c d, x y; b c, d a, y z két involutiós sornak kapcsolt elemei, akkor a c a, b d, z x elempárok is kapcsolt elemei egy involutiónak, és a z, x, y elemekhez kapcsolt elemek e három involutióban incidensek«.

Ugyanis a feltétel szerint

$$(a\,c\,b\,x) \barwedge (b\,d\,a\,y), \quad (b\,d\,a\,y) \barwedge (c\,a\,d\,z),$$

ennélfogva $(a\,c\,b\,x) \barwedge (c\,a\,d\,z)$, azaz az $a\,c$, $c\,d$, $z\,x$ elemek kapcsolt elemei egy involutiónak. Másrészt abból, hogy

$$(a\,c\,x\,z') \barwedge (b\,d\,y\,z'), \quad (a\,c\,x\,z) \barwedge (d\,b\,x'\,y),$$

következik, hogy

$$(b\,d\,y\,z') \barwedge (d\,b\,x'\,y) \barwedge (b\,d\,y\,x'),$$

vagyis $z' \equiv x'$, és, hasonló úton kimutatva, $z' \equiv y'$.

Az $a\,b\,c\,d\,x\,y\,z$ elemeket úgy tekinthetjük, mint egy négyoldal oldalainak metszőpontjait egy egyenessel, vagy mint vetítő sugarait egy négyszög szögpontjainak, valamint átlósháromszöge szögpontjainak egy pontból. Ennélfogva:

»Egy általános helyzetű egyenes egy négyoldalnak és átlósháromszögének oldalait hét pontban metszi. A négy első metszőpont háromszor bontható két-két párra, melyek három involutio kapcsolt pontjainak tekinthetők. Ez involutiók mindegyikében a három utóbbi metszőpont közűl kettő kapcsolt pontpár, és a kimaradt harmadik ponthoz a három kapcsolt pont az egyenes involutiókban incidens«.

Ezt a segédtételt és dualis tételét fogjuk a következőkben alkalmazni.

81. A P Steiner-pont összekötő egyenesei

$$\begin{array}{lll} p^{I}\ p^{II} & p^{II}\ \pi & \sigma^{II,\ III}\ \sigma^{III,\ I} \\ p^{II}\ p^{III} & p^{I}\ \pi & \sigma^{III,\ I}\ \sigma^{I,\ II} \\ p^{III}\ p^{I} & p^{II}\ \pi & \sigma^{I,\ II}\ \sigma^{II,\ III} \end{array}$$

az

$$\begin{array}{llll} \alpha_1\ \beta_1\ a_1{}^{II}\ b_1{}^{I} \equiv \mathbf{A}_1{}^{I}\ \mathbf{B}_1{}^{II} & (1\,4,\ 5\,6) & \Sigma^{V,\ VI}\ A_1\ B_1 \\ \beta_2\ \gamma_2\ b_2{}^{III}\ c_2{}^{II} \equiv \mathbf{B}_2{}^{II}\ \Gamma_2{}^{III} & (1\,6,\ 5\,2) & \Sigma^{VI,\ IV}\ B_2\ C_2 \\ \gamma_3\ \alpha_3\ c_3{}^{I}\ a_3{}^{III} \equiv \Gamma_3{}^{III}\ \mathbf{A}_3{}^{I} & (1\,2,\ 4\,5) & \Sigma^{IV,\ V}\ C_3\ A_3 \end{array}$$

négyoldalak szemben fekvő szögpontjaival egy-egy involutiót képeznek. A $\sigma^{I,\ II}$, $\sigma^{II,\ III}$, $\sigma^{III,\ I}$-hez kapcsolt sugár az egyes involutiókból ugyanegy sugár.

Továbbá a p Cayley-egyenes az

$$\mathbf{A}_1\ \mathbf{B}_1\ {}_0A_1{}^{II}\ {}_0B_1{}^{I}, \quad \mathbf{B}_2\ \Gamma_2\ {}_0B_2{}^{III}\ {}_0C_2{}^{II}, \quad \Gamma_3\ \mathbf{A}_3\ {}_0C_3{}^{I}\ {}_0A_3{}^{III}$$

négyszögek szemben fekvő oldalait a

$$
\begin{array}{llll}
{}_0P^{I} & {}_0P^{II} & {}_0P^{III}\ II & \Sigma^{II,\ III}\ \Sigma^{III,\ I} \\
{}_0P^{II} & {}_0P^{III} & {}_0P^{I}\ II & \Sigma^{III,\ I}\ \Sigma^{I,\ II} \\
{}_0P^{III} & {}_0P^{I} & {}_0P^{II}\ II & \Sigma^{I,\ II}\ \Sigma^{II,\ III}
\end{array}
$$

pontpárokban metszi, melyek egy-egy involutiót képeznek. Ezekben az involutiókban a $\Sigma^{I,\ II}$, $\Sigma^{II,\ III}$, $\Sigma^{III,\ I}$ sugarakhoz kapcsolt három sugár egybeesik.

Ennélfogva:

»Minden Steiner-pontból három Pascal-, egy Cayley- és három Steiner-egyenes sugárzik ki. A négy első egyenes, páronként egyesítve, három involutiót határoz meg. — Ez involutiók mindegyikében két Steiner-egyenes kapcsolt, és a kimaradt harmadik Steiner-egyeneshez kapcsolt három sugár egybeesik«.

»Minden Cayley-egyenesen három ${}_0V$-, egy Steiner- és három Salmon-pont fekszik. A négy első pont páronként egyesítve három involutiót határoz meg. — Ez involutiók mindegyikében két Salmon-pont kapcsolt, és a kimaradt harmadik Salmon-ponthoz kapcsolt három sugár egybeesik«.

82. A ${}_0v^{II,\ III} = {}_0[p^{I}\ a_1^{IV}\ a_2^{V}\ a_3^{VI}]$ négyoldal és $D^{II,\ III} = D_{12}\ D_{34}\ D_{56}$ átlósháromszögének oldalai a $\sigma^{II,\ III}$ egyenest a P, A_1, A_2, A_3, Y''_{12}, Y''_{34}, Y''_{56} pontokban metszik. Továbbá a $V_1^{II,\ III} = [P^{I}\ A_1^{IV}\ A_2^{V}\ A_3^{VI}]_1$ négyszög és $\Delta^{II,\ III}$ átlósháromszöge szögpontjainak összekötő egyenesei a $\Sigma^{II,\ III}$ ponttal a p a_1 a_2 a_3 y''_{12} y''_{34} y''_{56} egyenesek.

Ennélfogva a:

$$
\begin{array}{llllll}
P\ A_1 & A_2\ A_3 & Y''_{12}\ Y''_{34}, & p\ a_1 & a_2\ a_3 & y''_{12}\ y''_{34} \\
P\ A_2 & A_3\ A_1 & Y''_{56}\ Y''_{12}, & p\ a_2 & a_3\ a_1 & y''_{56}\ y''_{12} \\
P\ A_3 & A_1\ A_2 & Y''_{34}\ Y''_{56}, & p\ a_3 & a_1\ a_2 & y''_{34}\ y''_{56}
\end{array}
$$

elempárok involutiós alakzatok.

Igy tehát:

Egy Steiner-egyenesen fekvő négy Steiner-pont, páronként egyesítve, négy involutiót határoz meg. Ez involutiók mindegyikében két Y-pont kapcsolt,[1]

»Egy Salmon-pontból kisugárzó négy Steiner-egyenes páronként egyesítve négy involutiót határoz meg. Ez involutiók mindegyikében két y-egye-

[1] Veronese, id. m. 37. old. XXV. és XXVII. teorema.

és a Steiner-egyenes harmadik Y-pontjához kapcsolt pontjai az egyes involutióknak egybeesnek«.

nes kapcsolt, és a Salmon-pontból kisugárzó harmadik y-egyeneshez kapcsolt sugarai az egyes involutióknak egybeesnek«.

Ha ellenben ama ${}_0v^{II,\ III}$ négyoldalnak és $D^{II,\ III}$ átlósháromszögének oldalait a π Cayley-egyenessel metszszük, valamint a $V_1^{II,\ III}$ négyszög és $\Delta^{II,\ III}$ átlósháromszögének szögpontjait a Π Steiner-pontból projiciáljuk, akkor ama metszőpontok és eme projiciáló sugarak

$$
\begin{array}{llllllllll}
{}_1\Pi^{V} & {}_1\Pi^{VI} & {}_1\Pi^{IV} & P & {}_0\Pi^{V} & {}_0\Pi^{VI}, & \pi_1{}^{V} & \pi_1{}^{VI} & \pi_1{}^{IV}\ p & \pi^{V}\ \pi^{VI} \\
{}_1\Pi^{VI} & {}_1\Pi^{IV} & {}_1\Pi^{V} & P & {}_0\Pi^{VI} & {}_0\Pi^{VI}, & \pi_1{}^{VI} & \pi_1{}^{IV} & \pi_1{}^{V}\ p & \pi^{VI}\ \pi^{IV} \\
{}_1\Pi^{IV} & {}_1\Pi^{V} & {}_1\Pi^{VI} & P & {}_0\Pi^{IV} & {}_0\Pi^{V}, & \pi_1{}^{IV} & \pi_1{}^{V} & \pi_1{}^{VI}\ p & \pi^{IV}\ \pi^{V}
\end{array}
$$

involutiós alakzatok. Ennélfogva:

»Minden Cayley-egyenesen három ${}_1V$-, egy Steiner- és három ${}_0V$-pont fekszik; ezek közűl az első négy páronként egyesítve három involutiót határoz meg. Ez involutiók mindegyikében két ${}_0V$-pont kapcsolt, és a kimaradt harmadik ${}_0V$ ponthoz kapcsolt pontok egybeesnek«.

»Minden Steiner-ponton három v_1, egy Cayley- és három Pascal-egyenes megy keresztűl; ezek közűl az első három páronként egyesítve három involutiót határoz meg. Ez involutiók mindegyikében két Pascal-egyenes kapcsolt, és a kimaradt harmadik Pascal-egyeneshez kapcsolt egyenesek egybeesnek«.

83. A p Cayley-egyenes a

$$
\mathbf{B}_1\,\Gamma_1\,B_1{}^{III}\,C_1{}^{II} \qquad \Gamma_1\,\mathbf{A}_1\,C_1{}^{I}\,A_1{}^{III} \qquad \mathbf{A}_1\,\mathbf{B}_1\,A_1{}^{II}\,B_1{}^{I}
$$

négyszögek szemben fekvő oldalait következő pontpárokban metszi, és a P Steiner-pontból a

$$
\beta_1\,\gamma_1\,{}_1b^{III}\,{}_1c^{II} \qquad \gamma_1\,\alpha_1\,{}_1c^{I}\,{}_1a^{III} \qquad \alpha_1\,\beta_1\,{}_1a^{II}\,{}_1b^{I}
$$

négyoldalak szemben fekvő szögpontjai a következő sugárpárokkal vetíthetők:

$$
\begin{array}{llllllllll}
P^{II} & P^{III} & \Sigma^{I,\ III} & \Sigma^{I,\ II} & \Pi\ P_1{}^{I}, & {}_0p^{II} & {}_0p^{III} & \sigma^{I,\ III} & \sigma^{I,\ II} & \pi\ {}_1p^{I} \\
P^{III} & P^{I} & \Sigma^{II,\ I} & \Sigma^{II,\ III} & \Pi\ P_1{}^{II}, & {}_0p^{III} & {}_0p^{I} & \sigma^{II,\ I} & \sigma^{II,\ III} & \pi\ {}_1p^{II} \\
P^{I} & P^{II} & \Sigma^{III,\ II} & \Sigma^{III,\ I} & \Pi\ P_1{}^{III}, & {}_0p^{I} & {}_0p^{II} & \sigma^{III,\ II} & \sigma^{III,\ I} & \pi\ {}_1p^{III}
\end{array}
$$

melyek involutiós helyzetűek.

Ezért:

»Minden Cayley-egyenesen három Kirkman-, három Salmon-, három V_1- és egy Steiner-pont fekszik. Két Kirkman-pont és a két hozzárendelt Salmon-pont egy involutiót határoz meg, melyben a Steiner-ponthoz egy V_1 pont van kapcsolva«.

»Minden Steiner-pontból kisugárzik három ${}_0v$-, három Steiner-, három ${}_1v$- és egy Cayley-egyenes. Két ${}_0v$ egyenes és a hozzá rendelt két Steiner-egyenes egy involutiót határoz meg, melyben a Cayley-egyeneshez egy ${}_1v$ egyenes van kapcsolva«.

II. NÉGY KÜLÖNÖS PASCAL-HATSZÖGRŐL.

Az előbbi fejezetben láttuk volt, hogy egy általános Pascal-hatszög hatvan Pascal-egyenese és hatvan Kirkman-pontja mind különböző. Lehet azonban oly Pascal-hatszögeket is szerkesztenünk, melyeknek a Pascal-egyenesei és Kirkman-pontjai közűl többen egyesűlnek. Ugyanis, ha a Pascal-hatszög körül írt kúpszeleten a hatszög szögpontjai egy-, két-, három- vagy négyféleképen képeznek involutiót, akkor ezekben az esetekben megfelelőleg egyszer négy, kétszer négy, háromszor négy és egyszer három, végre háromszor négy és egyszer hat Pascal-egyenes és ugyanannyi Kirkman-pont egy-egy egyenesben, illetve pontban egyesűl, a mint azt a következőkből be fogjuk láthatni.

1. Oly Pascal-hatszögről, melynek szögpontjai involutiót képeznek.

1. Egy kúpszeleten felveszünk három pontpárt, az 1 2, 3 6, 5 4-et, melyek involutiót képeznek; e pontok egy különös Pascal-hatszögnek 1 2 3 4 5 6-nak szögpontjai, melynek négy Kirkman-pontja az involutio-középpontba, T=(1 2, 3 6, 5 4)-be és négy Pascal-egyenese a t involutio-tengelybe kerűl.

Megtartván az általános Pascal-hatszöghöz használt jelölést, az I. és III. táblázatból azonnal kitűnik, mert a T-nek polárisa a t-egyenes, hogy

$$t \equiv \alpha_3{}^{I}\ \beta_3{}^{II}\ \gamma_3{}^{III}\ \pi^{VI}, \quad T \equiv A_3{}^{I}\ B_3{}^{II}\ \Gamma_3{}^{III}\ \Pi^{VI};$$

továbbá, hogy a $b_3^I c_3^I c_3^{II} a_3^{II} a_3^{III} b_3^{III} p^I p^{II} p^{III} a_3^{VI} b_3^{VI} c_3^{VI}$ PASCAL-egyenesek a T-ponton mennek keresztűl és a

$$B_3^I\ C_3^I\ C_3^{II}\ A_3^{II}\ A_3^{III}\ B_3^{III}\ P^I\ P^{II}\ P^{III}\ A_3^{VI}\ B_3^{VI}\ C_3^{VI}$$

KIRKMAN pontok a t-egyenesen feküsznek.

A 2316, 4635 négyszögeknek szemben fekvő oldalpárjai 23, 16; 46, 35 harmonicusan vannak elválasztva a T-től s a t-től, s ugyanígy ezeknek (23, 46) (16, 35) metszőpontjai, valamint e pontokat az A_3^{VI} pontból projitiáló $\alpha_1^{VI}\ \alpha_2^{VI}$ egyenesek is.

Hasonló úton bizonyítható be, hogy a t-egyenes

$$B_3^{VI}\ C_3^{VI}\ P^I\ P^{II}\ P^{III}\ B_3^I\ C_3^I\ C_3^{II}\ A_3^{II}\ A_3^{III}\ B_3^{III}\ (35,\ 46)\ (15,\ 24)$$
$$(13,\ 62)\ (34,\ 56)\ (14,\ 25)\ (16,\ 32)\ \Pi\ \mathbf{A}_3\ \mathbf{B}_3\ \Gamma_3$$

pontjaiból kisugárzó

$$\beta_1^{VI}\ \beta_2^{VI},\ \gamma_1^{VI}\ \gamma_2^{VI},\ \alpha_1^I\ \alpha_2^I,\ \beta_1^{II}\ \beta_2^{II},\ \gamma_1^{III}\ \gamma_2^{III},\ c_1^I\ c_2^I,\ b_1^I\ b_2^I,$$
$$a_1^{II}\ a_2^{II},\ c_1^{II}\ c_2^{II},\ b_1^{III}\ b_2^{III},\ a_1^{III}\ a_2^{III},\ a_1^{IV}\ a_2^V,\ b_1^{IV}\ b_2^V,\ c_1^{IV}\ c_2^V,$$
$$\alpha_2^{IV}\ \alpha_1^V,\ \beta_2^{IV}\ \beta_1^V,\ \gamma_2^{IV}\ \gamma_1^V,\ \pi^{IV}\ \pi^V,\ \alpha_3^{IV}\ \alpha_3^V,\ \beta_3^{IV}\ \beta_3^V,\ \gamma_3^{IV}\ \gamma_3^V$$

egyenespárok harmonicusan vannak elválasztva a T-től s a t-től.

Minthogy az $\mathbf{A}_1^{VI} = (\beta_2^{VI}\ \gamma_2^{VI})$, $\mathbf{A}_2^{VI} = (\beta_1^{VI}\ \gamma_1^{VI})$ és a $\beta_1^{VI}\ \beta_2^{VI}$, $\gamma_1^{VI}\ \gamma_2^{VI}$ egyenespárok harmonicusan vannak elválasztva a T- és t-től, azért az $\mathbf{A}_1^{VI}\ \mathbf{A}_2^{VI}$ pontpár és, hasonló úton bebizonyítva, mind az előbbi PASCAL-egyenespárokhoz rendelt KIRKMAN-pontpárok harmonicusan lesznek elválasztva a T- és t-től.

2. A STEINER-pontok és CAYLEY-egyenesek helyzete szintén egyszerűbbé lesz.

Ugyanis $P\,A_3\,B_3\,C_3 \equiv T$, $p\,a_3\,b_3\,c_3 \equiv t$, $\Pi\,\mathbf{A}_3\,\mathbf{B}_3\,\Gamma_3$ pontok a t-egyenesen feküsznek, és a $\pi\,\alpha_3\,\beta_3\,\gamma_3$ egyenesek a T-ponton mennek keresztűl. Minthogy a T- és t-től harmonicusan elválasztott $a_1^{II}\ a_2^{II}$, $a_1^{III}\ a_2^{III}$ és $\alpha_1^V\ \alpha_2^{IV}$, $\alpha_1^{VI}\ \alpha_2^{VI}$ egyenespárok egymást az $A_1\ A_2$, $\mathbf{A}_1\ \mathbf{A}_2$ pontpárokban metszik, e pontpárok és hasonlókép $B_1 B_2, \ldots$ $a_1\ a_2$, $b_1\ b_2, \ldots$ pont- és egyenespárok harmonicusan vannak elválasztva T- és t-től.

A STEINER-egyenesek közűl hat a T pontból sugárzik ki és involutiót képez, négy pár a $\Pi\ \mathbf{A}_3\ \mathbf{B}_3\ \Gamma_3$ pontokból sugárzik ki s a T- és t-től harmonicusan van elválasztva, végre egy a t egyenesben fekszik. Ugyanez mondható, a változtatandók megváltoztatásával, a SALMON-pontokról.

3. Nézzük most, mikép viselkednek a $[Vv]_j$, $_j[Vv]$ configuratiók pontjai és egyenesei a T és t irányában.

Az általános Pascal-hatszögről láttuk, hogy egy tetszőleges [Vv] configuratióhoz tartozó és bármily felső mutatóval ellátott $p\, a_3\, b_3\, c_3$ egyenesek megfelelőleg a $P\, A_3\, B_3\, C_3$ Steiner-pontokon mennek keresztűl, melyek jelenleg a T-ben egyesűlnek. Ezek az összes egyenesek tehát jelenleg a T-ponton mennek keresztűl. Ámde ama configuratiónak $b_3^{VI}\, c_3^{VI}$, $b_3^{I}\, c_3^{I}$, $c_3^{II}\, a_3^{II}$, $a_3^{III}\, b_3^{III}$ egyenespárjai egymást annak $\Pi^{VI}\, \mathbf{A}_2^{I}\, \mathbf{B}_3^{II}\, \Gamma_3^{III}$ pontjaiban metszik; ennélfogva minden [Vv] configuratiónak $\Pi^{VI}\, \mathbf{A}_2^{I}\, \mathbf{B}_3^{II}\, \Gamma_3^{III}$ pontjai a T-ben vannak.

Továbbá a configuratiónak bármily felső mutatóval ellátott $P\, A_3\, B_3\, C_3$ pontjai megfelelőleg a t-vel egybeeső $p\, a_3\, b_3\, c_3$ Cayley-egyeneseken feküsznek, s mert a $B_3^{VI}\, C_3^{VI}$, $B_3^{I}\, C_3^{I}$, $C_3^{II}\, A_3^{II}$, $A_3^{III}\, B_3^{III}$ pontpároknak összekötő egyenesei a configuratiónak $\pi^{VI}\, \alpha_3^{I}\, \beta_3^{II}\, \gamma_3^{III}$ egyenesei, azért ezek az egyenesek a t-vel összeesnek.

Az $A_1\, A_2$, $B_1\, B_2$, $C_1\, C_2$, $\mathbf{A}_1\, \mathbf{A}_2$, $\mathbf{B}_1\, \mathbf{B}_2$, $\Gamma_1\, \Gamma_2$ Steiner-pontpárok harmonicusan lévén elválasztva a T- és t-től, a tekintetbe vett configuratiónak $a_1^{II}\, a_2^{II}$, $a_1^{III}\, a_2^{III}$, $b_1^{I}\, b_2^{I}$, $b_1^{III}\, b_2^{III}$, $c_1^{I}\, c_2^{I}$, $c_1^{II}\, c_2^{II}$, $\alpha_1^{I}\, \alpha_2^{I}$, $\alpha_1^{VI}\, \alpha_2^{VI}$, $\beta_1^{II}\, \beta_2^{II}$, $\beta_1^{VI}\, \beta_2^{VI}$, $\gamma_1^{III}\, \gamma_2^{III}$, $\gamma_1^{VI}\, \gamma_2^{VI}$ egyenespárjai, melyek ama pontpárokat a configuratiónak a t-egyenesen fekvő $C_3^{II}\, B_3^{III}\, C_3^{I}\, A_3^{III}\, B_3^{I}\, A_3^{III}\, P^{I}\, A_3^{VI}\, P^{II}\, B_3^{VI}\, P^{III}\, C_3^{VI}$ pontjaiból projiciálják, szintén harmonicusan vannak elválasztva a T- és t-től.

A j-dik configuratiónak, akár $[Vv]_j$, akár $_j[Vv]$-nek, $a_1^{IV}\, a_2^{V}$ egyenesei a $(_{j+1})$-dik vagy $(_{j-1})$-dik configuratio $\beta_3^{II}\, \beta_3^{III}$ egyeneseinek G_{jk} vagy $_{kj}G$ metszőpontján mennek keresztűl s, mert ez utóbbi egyenesek a t-ben egyesűltek, azért valamennyi configuratiónak $a_1^{IV}\, a_2^{V}$ egyenespárjai és, hasonlókép következtetve, $b_1^{IV}\, b_2^{V}$, $c_1^{VI}\, c_2^{V}$, $\alpha_1^{V}\, \alpha_2^{IV}$, $\beta_1^{V}\, \beta_2^{IV}$, $\gamma_1^{V}\, \gamma_2^{IV}$ egyenespárjai egymást a t-ben metszik. Ámde e hat egyenespár az előbb felírt hat Steiner-pontpárt projiciálja; ennélfogva a hat egyenespár is harmonicusan van elválasztva a T- és t-től.

Eddig egy tetszőleges configuratiónak tizennyolcz egyenespárjáról mutattuk ki, hogy a T- és t-től harmonicusan vannak elválasztva. De ha ezeknek az egyenespároknak megjelölésére szolgáló kis betűket nagy betűkkel cseréljük fel, akkor az így származott tizennyolcz pontpárról ugyanazon az úton kimutatható, hogy azok a T- és t-től harmonicusan vannak elválasztva. És ha e pontpárokból az $A_1^{IV}\ A_2^{V}$, $A_1^{IV}\ A_2^{V}$, $B_1^{IV}\ B_2^{V}$, $C_1^{IV}\ C_2^{V}$-öt a t-egyenes $\Pi\ \mathbf{A}_3\ \mathbf{B}_3\ \Gamma_3$ pontjaiból projiciáljuk, akkor a projiciáló egyenesek $\pi^{IV}\ \pi^{V}$, $\alpha_3^{IV}\ \alpha_3^{V}$, $\beta_3^{IV}\ \beta_3^{V}$, $\gamma_3^{IV}\ \gamma_3^{V}$, valamint az ezekhez rendelt $\Pi^{IV}\ \Pi^{V}$, . . . pontpárok, szintén harmonicusan lesznek elválasztva a T és t-től.

Ezzel kimutattuk, hogy egy tetszés szerinti [Vv] configuratio egyenesei és pontjai akkép viselkednek a T- és t irányában, mint a $[Vv]_0$ configuratiónak azokhoz rendelt PASCAL-egyenesei és KIRKMAN-pontjai. Ki mondhatjuk tehát, hogy:

Ha egy PASCAL-*hatszög szögpontjai involutiót képeznek a rajtuk keresztűl menő kúpszeleten a T involutio-középpontra és a t involutio-tengelyre, akkor e hatszögnek négy* KIRKMAN-*pontja és négy azokhoz rendelt* PASCAL-*egyenese a T- illetve t-ben egyesűl. Tizenkét* PASCAL-*egyenes a T-ponton megy keresztűl és az ezekhez rendelt* KIRKMAN-*pont a t-egyenesen fekszik; végre a többi huszonkét pár* PASCAL-*egyenes és* KIRKMAN-*pont a T- és t-től harmonicusan van elválasztva.*

Ugyanígy viselkednek az összes $[Vv]_j$, $_j[Vv]$ *configuratióknak pontjai és egyenesei a T- és a t irányában.*

A STEINER-*pontok közül négy a T-ben van és azoknak ellenpontja a t-n fekszik; a* CAYLEY-*egyenesek közül négy a t-ben fekszik és azoknak ellenegyenese a T-n megy keresztűl; a többi négy pár* STEINER-*pont és* CAYLEY-*egyenes a T- és t-től harmonicusan van elválasztva.*

A STEINER *egyenesekből és* SALMON-*pontokból egy a t-ben, illetve T-ben van; hat a T-ből sugárzik ki, illetve a t-n fekszik és involutiót képez; végre négy pár* STEINER-*egyenes és* SALMON-*pont a T- és t-tól harmonicusan van elválasztva.*

2. Oly Pascal-hatszögről, melynek szögpontjai kétféleképen képeznek involutiót.

1. Egy kúpszeleten felveszünk egy pontpárt, 1 2-t, és szerkesztünk azon oly két pontpárt, 3 5, 4 6-ot, mely az 1 2-t harmonicusan elválasztja. Az 1 2 3 4 5 6 hatszög egy különös PASCAL-hatszög lesz,

melynek négy Kirkman-pontja és négy Pascal-egyenese kétszer egyesűl egy-egy ponttá, illetve egyenessé.

A 3456 négyszög átlósháromszögének, tehát a kúpszelet egyik poláris háromszögének szögpontjait és oldalait következőkép jelöljük:

$$T=(34,\ 56),\quad T_1=(36,\ 54),\quad U_1=(35,\ 46),$$
$$t=T_1U_1,\quad t_1=U_1T,\quad u_1=TT_1.$$

Minthogy a szerkesztés következtében a 35, 46 pontpárok az 12-t harmonicusan választják el,

$$u_1=12,\quad T=(12,\ 36,\ 54),\quad T_1=(12,\ 34,\ 56);$$

tehát az 11, 22, 35, 46; 12, 36, 54; 12, 34, 56 pontpárok involutiót képeznek, melynek involutio-középpontja illetőleg tengelye U_1, u_1; T, t; T_1, t_1.

Ebből, tekintettel az előbbi §-ra, következik, hogy a $\pi^{\mathrm{VI}}\ \alpha_3{}^{\mathrm{I}}\ \beta_3{}^{\mathrm{II}}\ \gamma_3{}^{\mathrm{III}}$, $p^{\mathrm{I}}\ a_1{}^{\mathrm{IV}}\ a_2{}^{\mathrm{V}}\ a_3{}^{\mathrm{VI}}$ Pascal-egyenesek a t, t_1-gyel és a $\Pi^{\mathrm{VI}}\ \mathbf{A}_3{}^{\mathrm{I}}\ \mathbf{B}_3{}^{\mathrm{II}}\ \Gamma_3{}^{\mathrm{III}}$, $P^{\mathrm{I}}\ A_1{}^{\mathrm{IV}}\ A_2{}^{\mathrm{V}}\ A_3{}^{\mathrm{VI}}$ Kirkman-pontok a T, T_1-gyel egyesűlnek; továbbá, hogy a $b_3{}^{\mathrm{I}}\ c_3{}^{\mathrm{I}}\ c_3{}^{\mathrm{II}}\ a_3{}^{\mathrm{II}}\ a_3{}^{\mathrm{III}}\ b_3{}^{\mathrm{III}}\ p^{\mathrm{II}}\ p^{\mathrm{III}}\ b_3{}^{\mathrm{VI}}\ c_3{}^{\mathrm{VI}}$ és az $\alpha_1{}^{\mathrm{VI}}\ \alpha_2{}^{\mathrm{VI}}\ \alpha_2{}^{\mathrm{IV}}\ \alpha_3{}^{\mathrm{IV}}\ \alpha_1{}^{\mathrm{V}}\ \alpha_3{}^{\mathrm{V}}\ \pi^{\mathrm{IV}}\ \pi^{\mathrm{IV}}\ \alpha_1{}^{\mathrm{I}}\ \alpha_2{}^{\mathrm{I}}$ Pascal-egyenesek a T, illetve T_1 ponton mennek keresztűl, holott a $B_3{}^{\mathrm{I}}\ C_3{}^{\mathrm{I}}\ C_3{}^{\mathrm{II}}\ A_3{}^{\mathrm{II}}\ A_3{}^{\mathrm{III}}\ B_3{}^{\mathrm{III}}\ P^{\mathrm{II}}\ P^{\mathrm{III}}\ B_3{}^{\mathrm{VI}}\ C_3{}^{\mathrm{VI}}$ és az $\mathbf{A}_1{}^{\mathrm{VI}}\ \mathbf{A}_2{}^{\mathrm{VI}}\ \mathbf{A}_2{}^{\mathrm{IV}}\ \mathbf{A}_3{}^{\mathrm{IV}}\ \mathbf{A}_1{}^{\mathrm{V}}\ \mathbf{A}_3{}^{\mathrm{V}}\ \Pi^{\mathrm{IV}}\ \Pi^{\mathrm{V}}\ \mathbf{A}_1{}^{\mathrm{I}}\ \mathbf{A}_2{}^{\mathrm{I}}$ Kirkman-pontok a t, illetve t_1 egyenesen vannak; végre az

$$\alpha_1{}^{\mathrm{VI}}\ \alpha_2{}^{\mathrm{VI}},\ \beta_1{}^{\mathrm{VI}}\ \beta_2{}^{\mathrm{VI}},\ \gamma_1{}^{\mathrm{VI}}\ \gamma_2{}^{\mathrm{VI}},\ \alpha_1{}^{\mathrm{I}}\ \alpha_2{}^{\mathrm{I}},\ \beta_1{}^{\mathrm{II}}\ \beta_2{}^{\mathrm{II}},\ \gamma_1{}^{\mathrm{III}}\ \gamma_2{}^{\mathrm{III}};\ c_1{}^{\mathrm{I}}\ c_2{}^{\mathrm{I}},$$
$$b_1{}^{\mathrm{I}}\ b_2{}^{\mathrm{I}},\ a_1{}^{\mathrm{II}}\ a_2{}^{\mathrm{II}},\ c_1{}^{\mathrm{II}}\ c_2{}^{\mathrm{II}},\ b_1{}^{\mathrm{III}}\ b_2{}^{\mathrm{III}},\ a_1{}^{\mathrm{III}}\ a_2{}^{\mathrm{III}},\ b_1{}^{\mathrm{IV}}\ b_2{}^{\mathrm{V}},\ c_1{}^{\mathrm{IV}}\ c_2{}^{\mathrm{V}},$$
$$\alpha_2{}^{\mathrm{IV}}\ \alpha_1{}^{\mathrm{V}},\ \beta_2{}^{\mathrm{IV}}\ \beta_1{}^{\mathrm{V}},\ \gamma_2{}^{\mathrm{IV}}\ \gamma_1{}^{\mathrm{V}},\ \pi^{\mathrm{IV}}\ \pi^{\mathrm{V}},\ \alpha_3{}^{\mathrm{IV}}\ \alpha_3{}^{\mathrm{V}},\ \beta_3{}^{\mathrm{IV}}\ \beta_3{}^{\mathrm{V}},\ \gamma_3{}^{\mathrm{IV}}\ \gamma^{\mathrm{V}}{}_3,$$

és a $b_3{}^{\mathrm{I}}\ c_3{}^{\mathrm{I}}$, $b_1{}^{\mathrm{I}}\ c_1{}^{\mathrm{I}}$, $b_2{}^{\mathrm{I}}\ c_2{}^{\mathrm{I}}$. $b_3{}^{\mathrm{VI}}\ c_3{}^{\mathrm{VI}}$, $b_1{}^{\mathrm{IV}}\ c_1{}^{\mathrm{IV}}$, $b_2{}^{\mathrm{V}}\ c_2{}^{\mathrm{V}}$, $\beta_2{}^{\mathrm{VI}}\ \gamma_2{}^{\mathrm{VI}}$,

$$\beta_1{}^{\mathrm{VI}}\ \gamma_1{}^{\mathrm{VI}},\ \beta_2{}^{\mathrm{IV}}\ \gamma_2{}^{\mathrm{IV}},\ \beta_3{}^{\mathrm{IV}}\ \gamma_3{}^{\mathrm{IV}},\ \beta_3{}^{\mathrm{V}}\ \gamma_3{}^{\mathrm{V}},\ \beta_1{}^{\mathrm{V}}\ \gamma_1{}^{\mathrm{V}},\ \beta_1{}^{\mathrm{II}}\ \gamma_1{}^{\mathrm{III}},\ \beta_2{}^{\mathrm{II}}\ \gamma_2{}^{\mathrm{III}},$$
$$a_3{}^{\mathrm{II}}\ a_3{}^{\mathrm{III}},\ b_1{}^{\mathrm{III}}\ c_1{}^{\mathrm{II}},\ b_2{}^{\mathrm{III}}\ c_2{}^{\mathrm{II}},\ p^{\mathrm{II}}\ p^{\mathrm{III}},\ c_3{}^{\mathrm{II}}\ b_3{}^{\mathrm{III}},\ a_1{}^{\mathrm{II}}\ a_1{}^{\mathrm{III}},\ a_2{}^{\mathrm{II}}\ a_2{}^{\mathrm{III}}$$

egyenespárok harmonicusan vannak elválasztva a T, t, illetve T_1, t_1-től. Ugyanez mondható amaz egyenespárokhoz rendelt Kirkman-pontokról is.

Az U_1, u_1-től harmonicusan vannak elválasztva: a T-ből kisugárzó $b_3{}^{\mathrm{I}}\ c_3{}^{\mathrm{I}}$, $b_3{}^{\mathrm{III}}\ c_3{}^{\mathrm{II}}$, $a_3{}^{\mathrm{II}}\ a_3{}^{\mathrm{III}}$, $b_3{}^{\mathrm{VI}}\ c_3{}^{\mathrm{VI}}$, $p^{\mathrm{II}}\ p^{\mathrm{III}}$ és a T_1-ből kísugárzó $\alpha_1{}^{\mathrm{VI}}\ \alpha_2{}^{\mathrm{VI}}$, $\alpha_3{}^{\mathrm{V}}\ \alpha_3{}^{\mathrm{IV}}$, $\alpha^{\mathrm{IV}}{}_2\ \alpha_1{}^{\mathrm{V}}$; $\alpha_1{}^{\mathrm{I}}\ \alpha_2{}^{\mathrm{I}}$, $\pi^{\mathrm{IV}}\ \pi^{\mathrm{V}}$, valamint a $b_1{}^{\mathrm{I}}\ c_2{}^{\mathrm{I}}$, $b_2{}^{\mathrm{I}}\ c_1{}^{\mathrm{I}}$, $a_1{}^{\mathrm{II}}\ a_2{}^{\mathrm{III}}$, $a_1{}^{\mathrm{III}}\ a_2{}^{\mathrm{II}}$, $b_1{}^{\mathrm{III}}\ c_2{}^{\mathrm{II}}$, $b_2{}^{\mathrm{III}}\ c_1{}^{\mathrm{II}}$, $b_1{}^{\mathrm{IV}}\ c_2{}^{\mathrm{V}}$, $b_2{}^{\mathrm{V}}\ c_1{}^{\mathrm{IV}}$, $\beta_1{}^{\mathrm{VI}}\ \gamma_2{}^{\mathrm{VI}}$, $\beta_2{}^{\mathrm{VI}}\ \gamma_1{}^{\mathrm{VI}}$, $\beta_3{}^{\mathrm{IV}}\ \gamma_3{}^{\mathrm{V}}$, $\beta_3{}^{\mathrm{V}}\ \gamma_3{}^{\mathrm{IV}}$, $\beta_2{}^{\mathrm{IV}}\ \gamma_1{}^{\mathrm{V}}$, $\beta^{\mathrm{V}}{}_1\ \gamma_2{}^{\mathrm{IV}}$, $\beta_1{}^{\mathrm{II}}\ \gamma_2{}^{\mathrm{III}}$, $\beta_2{}^{\mathrm{II}}\ \gamma_1{}^{\mathrm{III}}$ egyenespárok, valamint az ezekhez rendelt Kirkman-pontpárok. Ugyanis pl. ez utóbbi csoport első két egyenespárja azért van harmonicusan elválasztva U_1, u_1-től, mert a tőlük meghatározott négyoldal átlósháromszöge $T\,T_1\,U_1$.

2. A Steiner-pontok és Cayley-egyenesek helyzete a következő:

$P\,A_3\,B_3\,C_3 \equiv T$, $\Pi\,\mathbf{A}_1\,\mathbf{A}_2\,\mathbf{A}_3 \equiv T_1$; $\mathbf{B}_3\,\Gamma_3$ a t-n, $A_1\,A_2$ a t_1-en fekszik;
$p\,a_3\,b_3\,c_3 \equiv t$, $\pi\,\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3 \equiv t_1$; $\beta_3\,\gamma_3$ a T-n, $a_1\,a_2$ a T_1-en megy keresztül.

Az $A_1\,A_2$, $B_1\,B_2$, $C_1\,C_2$, $\mathbf{B}_1\,\mathbf{B}_2$, $\Gamma_1\,\Gamma_2$ pontpárok és az $a_1\,a_2$, . . . egyenespárok T- és t-től,

a $\mathbf{B}_1\,\Gamma_1$, $\mathbf{B}_2\,\Gamma_2$, $\mathbf{B}_3\,\Gamma_3$, $B_1\,C_1$, $B_2\,C_2$ pontpárok és a $\beta_1\,\gamma_1$, . . . egyenespárok T_1- és t_1-től,

az $A_1\,A_2$, $B_1\,C_2$, $B_2\,C_1$, $\mathbf{B}_3\,\Gamma_3$, $\mathbf{B}_1\,\Gamma_2$, $\mathbf{B}_2\,\Gamma_1$ pontpárok és az $a_1\,a_2$, . . . egyenespárok U_1- és u_1-től

vannak harmonicusan elválasztva.

Ennélfogva

$$\text{az}\quad \left.\begin{matrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{matrix}\right\}\quad \left.\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{matrix}\right\};\quad \left.\begin{matrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 & \mathbf{B}_3 \\ \Gamma_1 & \Gamma_2 & \Gamma_3 \end{matrix}\right\}\quad \left.\begin{matrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{matrix}\right\}$$

háromszögpárok a T- és t-re, illetve T_1- és t_1-re,

$$\text{az}\quad \left.\begin{matrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 & B_2 \end{matrix}\right\}\quad \left.\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \end{matrix}\right\};\quad \left.\begin{matrix} \mathbf{B}_3 & \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \\ \Gamma_3 & \Gamma_2 & \Gamma_1 \end{matrix}\right\}\quad \left.\begin{matrix} \beta_3 & \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma_3 & \gamma_2 & \gamma_1 \end{matrix}\right\}$$

háromszögpárok az U_1- és u_1-re

vonatkozólag perspectivásak.

A $t\,t_1\,u_1$ egyenesek Steiner-egyenesek és a $T\,T_1\,U_1$ pontok Salmon-pontok; a T, T_1-ből kisugárzó Steiner-egyenesek és a t, t_1-en fekvő Salmon-pontok kétszeresen képeznek involutiót.

3. Az előbbi §. szerint a $[Vv]_j$, $_j[Vv]$ configuratióknak viselkedése a $T\,t$ és $T_1\,t_1$ irányában megegyezik a $[Vv]_0$ configuratio viselkedésével. Jelenleg tehát csak azt kell megvizsgálnunk, hogy a $[Vv]_0$ configuratiónak az U_1, u_1-től harmonicusan elválasztott pontjaihoz és egyeneseihez rendelt pontok és egyenesek a $[Vv]_j$, $_j[Vv]$ configuratióban szintén harmonicusan vannak-e elválasztva az U_1- és u_1-től.

Egy tetszés szerinti [Vv] configuratiónak az a tizenhat egyenespárja (és az azokhoz rendelt pontpárja), melyet a 2. pont végén felírtunk, azért lesz harmonicusan elválasztva az U_1, u_1-től, mert az egymásra következő párok oly négyoldalnak oldalai, melynek átlósháromszöge a $T T_1 U_1$. A configuratiónak többi kétszer öt egyenespárja, mely a $[Vv]_0$ configuratiónak az U_1- és u_1-től harmonicusan elválasztott egyenespárjaihoz van rendelve, azért van az U_1- és u_1-től harmonicusan elválasztva, mert mindig olyan pontpárját projiciálja a configuratiónak a T vagy T_1 pontból, a melyről már tudjuk, hogy az U_1- és u_1-től harmonicusan van elválasztva. Igy a configuratiónak $b_3^{I}\, c_3^{I}$ vagy $p^{II}\, p^{III}$ egyenespárjai az U_1- és u_1-től harmonicusan elválasztott $C_2^{I}\, B_1^{I}$, $B_1^{II}\, \Gamma_2^{III}$ pontpárjait projiciálják a T-pontból.

Ezzel kimutattuk, hogy egy tetszés szerinti $[Vv]$ configuratio ép úgy viselkedik az U_1, u_1 iránt, mint a $[Vv]_0$ configuratio.

Összefoglalva fejtegetésünk eredményét, kimondhatjuk, hogy

Ha egy Pascal-*hatszögnek szögpontjai kétszeresen képeznek involutiót a rajtuk keresztűl menő kúpszeleten a T és a T_1 involutio-középpontra és a t és t_1 tengelyre, akkor e hatszögnek négy-négy* Kirkman-*pontja a T-vel és a T_1-gyel, és négy-négy azokhoz rendelt* Pascal-*egyenese a t-vel és t_1-gyel egyesűl. Ezeken kivűl öt-öt pár* Pascal-*egyenes a T és a T_1 ponton megy keresztűl és az azokhoz rendelt* Kirkman-*pontpárok a t és a t_1 egyenesen feküsznek. Mindezek az egyenes- és pontpárok és a még hátra levő tizenhat egyenes- és pontpár az $U_1 = (t\, t_1)$-től s az $u_1 = |\, T\, T_1 \,|$-től harmonicusan van elválasztva.*

Ugyanígy viselkednek e hatszöggel kapcsolatos $[Vv]_J$, $_J[Vv]$ configuratióknak pontjai és egyenesei a T, t- s a T_1, t_1 irányában.

A Steiner-*pontok közűl négy-négy a T, T_1-ben, egy-egy pár a t, t_1-en van és az U_1, u_1-től, a hátralevő négy pár pedig a T, t; T_1, t_1 és az U_1, u_1-től harmonicusan van elválasztva. Az utóbbi tizenkét* Steiner-*pont tehát két háromszögpárnak szögpontja, melyek a T és az U_1, illetve a T_1 és az U_1 collineatio-középpontokra és a t és az u_1,*

A Cayley-*egyenesekből négy-négy a t, t_1-ben van, egy-egy pár a T, T_1-en megy keresztűl és az U_1, u_1-től, a hátralevő négy pár pedig a T, t_1, T_1, t_1 és az U_1, u_1-től harmonicusan van elválasztva. Ez utóbbi tizenkét* Cayley-*egyenes tehát két háromszögpárnak oldala, melyek a T és az U_1, illetve a T_1 és az U_1 collineatio-*

illetve t_1 és az u_1 collineatio-tengelyekre vonatkozólag perspectivásak.

A Steiner*-egyenesek közűl hat-hat a T- és T_1-ből sugárzik ki és involutiót képez, ezeken kivűl még két-két pár a T- és t-től és ugyanannyi a T_1- és t_1-től harmonicusan van elválasztva. A t, t_1, u_1 egy-egy* Steiner*-egyenes.*

középpontokra és a t és az u_1, illetve a t_1 és az u_1 collineatio-tengelyekre vonatkozólag perspectivásak.

A Salmon*-pontok közűl hat-hat a t- és t_1-en fekszik és involutiót képez, ezeken kivűl még két-két pár a T- és t-től és a T_1- és t_1-től harmonicusan van elválasztva. A T, T_1, U_1 egy-egy* Salmon*-pont.*

3. Oly Pascal-hatszögről, melynek szögpontjai háromfélekép képeznek involutiót.

1. Egy kúpszeleten felveszünk három pontot, az 1 3 5-öt, és megszerkesztjük azt a t egyenest, melyben az 1 3 5 pont erintői megfelelőleg a 3 5, 5 1, 1 3 egyeneseket metszik; a t egyenes tetszés szerinti T_1 pontjából az 1 3 5 pontokat a kúpszeletre projiciáljuk 2 4 6-ba. Az 1 2 3 4,5 6 hatszög egy különös Pascal-hatszög lesz, melynek bizonyos Pascal-egyenesei coincidálnak (3. ábra).

A 4 1 5 6 3 3, 1 2 3 6 5 4 egyszerű Pascal-hatszögek Pascal-egyenesei a t egyenesen feküsznek, mert az első hatszög Pascal-egyenesének t-vel két közös pontja van és az még a $T_2=(1\,4,\ 3\,6)$ ponton is keresztűl megy; a második hatszög Pascal-egyenese pedig a T_1, T_2 pontot köti össze. A $T_3=(2\,3,\ 4\,5)$ pont tehát a t-egyenesen fekszik.

Ugyanígy a 6 1 3 4 5 5, 1 6 3 4 5 2 és a 2 5 3 4 1 1, 1 4 3 2 5 6 Pascal-hatszögek Pascal-egyenesei is a $t = |\,T_1\,T_2\,T_3\,|$ egyenesen feküsznek, tehát

$$T_1=(1\,2,\ 3\,4,\ 5\,6),\quad T_2=(1\,4,\ 3\,6,\ 5\,2),\quad T_3=(1\,6,\ 3\,2,\ 5\,4).$$

Ebből következik, hogy az 1 2, 3 4, 5 6; 1 4, 3 6, 5 2; 1 6, 3 2, 5 4 pontpárok a kúpszeleten involutiót képeznek, melynek involutiós középpontja T_1, T_2, T_3, tengelye pedig t_1, t_2, t_3; továbbá, hogy az 1 3 5, 2 4 6; 1 3 5, 4 6 2; 1 3 5, 6 2 4 háromszögek a T_1, T_2, T_3, collineatio-középpontra és a t_1, t_2, t_3 tengelyre vonatkozólag perspectivásak;[1] végre, hogy a t_i, t_j egyenesek és a T_i, T_j pontok a t_k, t_k-tól harmonicusan vannak elválasztva.

Az 1 2 3 4 5 6 teljes hatszög Pascal-egyenesei közűl

$$\pi^{IV}\,\pi^{V}\,\pi^{VI} \equiv t,\; a_1^{IV}\,a_2^{V}\,a_3^{VI}\,p^{I} \equiv t_1,\; b_1^{IV}\,b_2^{V}\,b_3^{VI}\,p^{II} \equiv t_2,\; c_1^{IV}\,c_2^{V}\,c_3^{VI}\,p^{III} \equiv t_3\,;$$

az α_j^i, β_j^i, γ_j^i Pascal-egyenesek rendre a T_1, T_2, T_3 ponton mennek keresztűl, az $\mathbf{A}_j^i$, $\mathbf{B}_j^i$, Γ_j^i Kirkman-pontok pedig a t_1, t_2, t_3 egyeneseken feküsznek; végre a $\Pi^{IV}\,\Pi^{V}\,\Pi^{VI}$, $A_1^{IV}\,A_2^{V}\,A_3^{VI}\,P^{I}$, $B_1^{IV}\,B_2^{V}\,B_3^{VI}\,P^{II}$, $C_1^{IV}\,C_2^{V}\,C_3^{VI}\,P^{III}$ Kirkman-pontok rendre a $T = (t_1\; t_2\; t_3)$, T_1, T_2, T_3 pontokkal coincidálnak.

Minthogy az 1 2 3 4 5 6 pont háromszorosan involutiós helyzetű a T_i, középpontra és a t_i tengelyre vonatkozólag, a következő Pascal-egyenespárok

$$\begin{array}{l} a_i^{II}\,a_i^{III},\; b_i^{I}\,c_i^{I},\; b_i^{III}\,c_i^{II},\; \beta_i^{II}\,\gamma_i^{III},\; \beta_i^{IV}\,\gamma_i^{IV},\; \beta_i^{V}\,\gamma_i^{V},\; \beta_i^{VI}\,\gamma_i^{VI} \text{ a } T_1,\, t_1\text{-től},\\ b_i^{III}\,b_i^{I},\; c_i^{II}\,a_i^{II},\; c_i^{I}\,a_i^{III},\; \gamma_i^{III}\,\alpha_i^{I},\; \gamma_i^{IV}\,\alpha_i^{IV},\; \gamma_i^{V}\,\alpha_i^{V},\; \gamma_i^{VI}\,\alpha_i^{VI} \text{ a } T_2,\, t_2\text{-től},\\ c_i^{I}\,c_i^{II},\; a_i^{III}\,b_i^{III},\; a_i^{II}\,b_i^{I},\; \alpha_i^{I}\,\beta_i^{II},\; \alpha_i^{IV}\,\beta_i^{IV},\; \alpha_i^{V}\,\beta_i^{V},\; \alpha_i^{VI}\,\beta_i^{VI} \text{ a } T_3,\, t_3\text{-tól}, \end{array}$$

valamint az ezekhez rendelt Kirkman-pontok harmonicusan vannak elválasztva.

Ezzel megállapítottuk az összes Pascal-egyenesek és Kirkman-pontok különös helyzetét a $T_1\,T_2\,T_3\,t_1\,t_2\,t_3$ alakzat irányában és áttérhetünk a Steiner-pontok és egyenesek, valamint a Cayley-egyenesek és Salmon-pontok képezte Hesse-configuratiókra.

2. A Steiner-pontokból és Cayley-egyenesekből a Π a t-n fekszik, a π a T-n megy keresztűl, de mindkettő határozatlan;

[1] »Ha két háromszög háromfélekép perspectivás helyzetű és a hozzá tartozó collineatio-középpontok egy egyenesen feküsznek, akkor a háromszögek szögpontjai egy kúpszeletnek pontjai«.

Ugyanis, ha az

$$\left.\begin{matrix} M_1\; M_2\; M_3 \\ N_1\; N_2\; N_3 \end{matrix}\right\} \qquad \left.\begin{matrix} M_1\; M_2\; M_3 \\ N_2\; N_3\; N_1 \end{matrix}\right\} \qquad \left.\begin{matrix} M_1\; M_2\; M_3 \\ N_3\; N_1\; N_2 \end{matrix}\right\}$$

perspectivás háromszögek collineatio-középpontjai O_1, O_2, O_3, akkor és csak akkor lesz az $M_1\,N_1\,M_2\,N_3\,M_3\,N_2$ hatszög Pascal-hatszög, ha a szemben fekvő oldalainak metszőpontjai

$$(M_1\,N_1,\; N_3\,M_3) = O_1, \quad (N_1\,M_2,\; M_3\,N_2) = O_3, \quad (M_2\,N_3,\; N_2\,M_1) = O_2$$

egy egyenesen feküsznek.

$$P \equiv T,\ A_1\ A_2\ A_3 \equiv T_1,\ B_1\ B_2\ B_3 \equiv T_2,\ \Gamma_1\ \Gamma_2\ \Gamma_3 \equiv T_3,$$
$$p \equiv t,\ \alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3 \equiv t,\ \beta_1\ \beta_2\ \beta_3 \equiv t_2,\ \gamma_1\ \gamma_2\ \gamma_2 \equiv t_3;$$

az A_1 A_2 A_3, B_1 B_2 B_3, C_1 C_2 C_3 pontok rendre a t_1, t_2, t_3 egyeneseken feküsznek es az a_1 a_2 a_3, b_1 b_2 b_3, c_1 c_2 c_3 egyenesek megfelelőleg a T_1, T_2, T_3 pontokon mennek keresztűl.

Ama háromszögeknek oldalai és a t_i egyenesek egyszeres, a t pedig háromszoros Steiner-egyenesek; ugyanígy a következő három háromszög szögpontjai és a T_i pontok egyszeres, a T pedig háromszoros Salmon-pontok.

Az általános Pascal-hatszögben a két Hesse-configuratio három, ugyanarra a középpontra, de különböző tengelyre, illetve ugyanarra a tengelyre, de különböző középpontokra perspectivás háromszög; a jelen hatszögben azonban mindkét Hesse-configuratio három-három, ugyanarra a középpontra és ugyanarra a tengelyre perspectivás háromszögből áll.

3. Láttuk a két előbbi § ban, hogy a $[Vv]_j$, $_j[Vv]$ configuratiók pontjai és egyenesei az involutio-középpontok és tengelyek irányában akkép viselkednek, mint a $[Vv]_o$ configuratio pontjai és egyenesei; ennélfogva ez a jelen hatszögben is ugyanígy lesz. Ezért:

Ha egy kúpszeleten hat pontot veszünk fel, melyek háromfélekép képeznek involutiót a T_1 T_2 T_3 középpontokra és a t_1 t_2 t_3 tengelyekre, mely középpontok és tengelyek tehát egy t-egyenesen feküsznek, illetve egy T-ponton mennek keresztűl, akkor ama hat pont oly Pascal-*hatszögnek szögpontja, melynek négy-négy* Kirkman-*pontja a T_1, T_2, T_3-mal és három* Kirkman-*pontja a T-vel egyesűl és négy-négy* Pascal-*egyenese a t_1, t_2, t_3-mal és három* Pascal-*egyenese a t-vel egyesűl. Tizennyolczpár* Kirkman-*pont és ugyanannyi* Pascal-*egyenes a T_i, t_i-től harmonicusan van elválasztva. Ugyanígy viselkednek a többi $[Vv]_j$, $_j[Vv]$ configuratiók is a T_i t_i alakzat irányában.*

A Steiner-*pontok közűl egy határozatlan, ennek ellenpontja a T-vel, három-három* Steiner-*pont a T_1, T_2, T_3 mal egyesűl; ez utóbbiaknak ellenpontjai három perspectivás háromszögnek szögpontjai, melyeknek megfelelő oldalai és szögpontjai a T_i pontokon mennek keresztűl, illetve a t_i egyeneseken feküsznek.*

A CAYLEY-*egyenesek közűl egy határozatlan, ennek ellenegyenese a t-vel, három-három* CAYLEY-*egyenes a* t_1, t_2, t_3*-mal egyesűl; ez utóbbiaknak ellenegyenesei három perspectivás háromszögnek oldalai, melyeknek megfelelő oldalai és szögpontjai a* T_i *pontokon mennek keresztűl, illetve a* t_i *egyeneseken feküsznek.*

4. Oly Pascal-hatszögről, melynek szögpontjai négyfélekép képeznek involutiót.

1. Az imént tárgyalt két hatszögben a kúpszeleten oly hat pontot vettünk fel, melyek az elsőben kétszeresen, a másodikban háromszorosan képeztek involutiót. E két esetet azonban egyesíteni is lehet, azaz: lehet a kúpszeleten oly hat pontot felvenni, melyek négyszeresen képeznek involutiót. Ily hat pont egy különös PASCAL-hatszögnek szögpontja, mely az előbbi két hatszögnek különleges tulajdonságait egyesíti. E hatszög a következőkép szerkeszthető:

Egy kúpszeleten felveszünk három pontot, 1 3 5-öt; ezeknek érintői a 3 5, 5 1, 1 3 egyeneseket az U_1, U_2, U_3 pontokban metszik, melyek egy t-egyenesen feküsznek. Az 1, 3, 5 pontoknak projectiói a t-egyenesnek abból a T_1 pontjából, mely az U_1-et az U_2, U_3-tól harmonicusan elválasztja, 2, 4, 6; az 1 2 3 4 5 6 hatszög már a keresett.

Ugyanis az $U_2 U_3$, $U_1 T_1$ pontpárok harmonicusan lévén elválasztva, az U_1 polárisa $T_1\, 1\, 2 = u_1$, és a 3 5, 4 6 pontpárok harmonicusan vannak elválasztva az 1 2-től; a 4 6 egyenes az U_1 ponton megy keresztűl és az $(1\,2,\ 3\,6) = T$ pont a t-nek polusa. Ebből következőleg a 2 4, 3 6 egyenesek az U_2, U_3 ponton mennek keresztűl, az 1 4, 2 5, 3 6 és az 1 6, 2 3, 4 5 egyenesek egymást a t-nek T_2, T_3 pontjában metszik. Összefoglalva,

$$T = (1\,2,\ 3\,6,\ 4\,5),\quad T_1 = (1\,2,\ 3\,4,\ 5\,6),\quad T_2 = (1\,4,\ 3\,6,\ 5\,2),\quad T_3 = (1\,6,\ 3\,2,\ 5\,4)$$

és az U_1 U_2 U_3 T_1 T_2 T_3 T pontok polárisai a

$$1\,2 = T_1 T = u_1,\quad 3\,6 = T_2 T = u_2,\quad 5\,4 = T_3 T = u_3,\quad U_1 T = t_1,\quad U_2 T = t_2,\quad U_3 T = t_3,\quad U_1\, U_2\, U_3\, T_1\, T_2\, T_3 = t.$$

Ebből következik: 1.) az 1 2, 3 6, 5 4; 1 2, 3 4, 5 6; 1 4, 3 6, 5 2; 1 6, 3 2, 5 4 pontpárok a kúpszeleten involutiót képeznek, melynek középpontja, illetőleg tengelye T, t; T_1, t_1; T_2, t_2; T_3, t_3; 2.) a T_1 U_1, T_3 U_3, T_2 U_2; T_1 U_1, T_3 T_2, T_2 U_3; T_1 U_2, T_3 U_3, T_2, U_1; T_1 U_3, T_3 U_1, T_2 U_2 pontpárok, mint amazoknak projectiói a 2 pontból, involutiót képeznek a t egyenesen; 3.) az 1 1, 2 2, 5 3, 4 6; 3 3, 6 6, 1 5, 2 4; 5 5, 4 4, 3 1. 6 2 pontpárok a kúpszeleten és a T_1 T_1, U_1 U_1, T_2 T_3, U_2 U_3; T_3 T_3, U_3 U_3, T_1 T_2, U_1 U_2; T_2 T_2, U_2 U_2, T_3 T_1, U_3 U_1 pontpárok a t egyenesen involutiót képeznek, tehát 4.) nemcsak a T_1 U_1, U_2 U_3 pontpárok vannak harmonicusan elválasztva, hanem általában a T_i U_i, pontpár harmonicusan választja el az U_j U_k, T_j T_k pontpárokat; végre 5.) az

$$\left.\begin{array}{c}1\ 3\ 5\\ 2\ 6\ 4\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{c}1\ 3\ 5\\ 2\ 4\ 6\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{c}1\ 3\ 5\\ 4\ 6\ 2\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{c}1\ 3\ 5\\ 6\ 2\ 4\end{array}\right\}$$

háromszögpárok perspectivásak a T, t: T_1 t_1; T_2 t_2; T_3, t_3 collineatio-középpontokra és tengelyekre vonatkozólag.

Az 1 2 3 4 5 6 Pascal-hatszögre nézve pedig azt látjuk, hogy a Pascal-egyenesek közűl

$$\pi^{IV}\ \pi^{V}\ \pi^{VI}\ \alpha_3{}^{I}\ \beta_3{}^{II}\ \gamma_3{}^{III} \equiv t, \quad p^{I}\ a_1{}^{IV}\ a_2{}^{V}\ a_3{}^{VI} \equiv t_1,$$
$$p^{II}\ b_1{}^{IV}\ b_2{}^{V}\ b_3{}^{VI} \equiv t_2, \quad p^{III}\ c_1{}^{IV}\ c_2{}^{V}\ c_3{}^{VI} \equiv t_3,$$

az $a_3{}^{i}$, $b_3{}^{i}$, $c_3{}^{i}$, egyenesek a T-n, az α_j^i, β_j^i, γ_j^i egyenesek pedig a T_1, T_2, T_3 ponton mennek keresztűl; a Kirkman-pontok közűl

$$\Pi^{IV}\ \Pi^{V}\ \Pi^{VI}\ \mathbf{A}_2{}^{I}\ \mathbf{B}_3{}^{II}\ \Gamma_3{}^{III} \equiv T, \quad P^{I}\ A_1{}^{IV}\ A_2{}^{V}\ A_3{}^{VI} \equiv T_1,$$
$$P^{II}\ B_1{}^{IV}\ B_2{}^{V}\ B_3{}^{VI} \equiv T_2, \quad P^{III}\ C_1{}^{IV}\ C_2{}^{V}\ C_3{}^{VI} \equiv T_3,$$

az $A_3{}^{i}$, $B_3{}^{i}$, $C_3{}^{i}$ pontok a t-n, az $\mathbf{A}_j^i$, $\mathbf{B}_j^i$, Γ_j^i pontok pedig a t_1, t_2, t_3 egyeneseken feküsznek.

A T pontból kisugárzó $a_3{}^{i}$ $b_3{}^{i}$ $c_3{}^{i}$ egyenesek háromszor képeznek involutiót, mégpedig a: $b_3{}^{I}$ $c_3{}^{I}$, $a_3{}^{II}$ $a_3{}^{III}$, $c_3{}^{II}$ $b_3{}^{III}$; $c_3{}^{II}$ $a_3{}^{II}$, $b_3{}^{III}$ $b_3{}^{I}$, $a_3{}^{III}$ $c_3{}^{I}$; $a_3{}^{III}$ $b_3{}^{III}$, $c_3{}^{I}$ $c_3{}^{II}$, $b_3{}^{I}$ $a_3{}^{II}$ párok, melyeknek kettőssugarai t_1 u_1, t_2 u_2, t_3 u_3; ugyanígy képeznek az ezekhez rendelt Kirkman-pontok is egy-egy involutiót a t egyenesen, a T_i U_i kettőspontokkal.

Hasonlókép involutiót képeznek a T_i pontokból kisugárzó: $\alpha_1{}^{I}$ $\alpha_2{}^{I}$, $\alpha_1{}^{VI}$ $\alpha_2{}^{VI}$, $\alpha_1{}^{V}$ $\alpha_2{}^{V}$, $\alpha_3{}^{IV}$ $\alpha_3{}^{V}$; $\beta_1{}^{II}$ $\beta_2{}^{II}$, $\beta_1{}^{VI}$ $\beta_2{}^{VI}$, $\beta_1{}^{V}$ $\beta_2{}^{IV}$,

$\beta_3^{IV}\ \beta_3^{V}$; $\gamma_1^{III}\ \gamma_2^{III}$, $\gamma_1^{VI}\ \gamma_2^{VI}$, $\gamma_1^{V}\ \gamma_2^{IV}$, $\gamma_3^{IV}\ \gamma_3^{V}$ PASCAL-egyenesek, melyeknek kettős sugarai t u_1, t u_2, t u_3 és az ezekhez rendelt KIRKMAN-pontok a t_i egyeneseken, a T U_i kettőspontokkal.

A t egyenes $C_3^{I}\ B_3^{I}\ A_3^{II}\ C_3^{II}\ B_3^{III}\ A_3^{III}$ pontjaiból kisugárzó $b_1^{I}\ b_2^{I}$, $c_1^{I}\ c_2^{I}$, $c_1^{II}\ c_2^{II}$, $a_1^{II}\ a_2^{II}$. $a_1^{III}\ a_2^{III}$, $b_1^{III}\ b_2^{III}$ egyenespárok és a T ponton keresztűlmenő $c_3^{I}\ b_3^{I}\ a_3^{II}\ c_3^{II}\ b_3^{III}\ a_3^{III}$ egyeneseken a $B_1^{I}\ B_2^{I}$, $C_1^{I}\ C_2^{I}$, $C_1^{II}\ C_2^{II}$, $A_1^{II}\ A_2^{II}$, $A_1^{III}\ A_2^{III}$, $B_1^{III}\ B_2^{III}$ pontpárok harmonicusan vannak elválasztva a T, t-től.

A következő sorokban felírt egyenespárok harmonicusan vannak elválasztva az U_1, u_1, illetve U_2, u_2 és U_3, u_3-tól

$b_1^{I}\ c_2^{I}$, $c_1^{I}\ b_2^{I}$, $a_1^{II}\ a_2^{III}$, $a_1^{III}\ a_2^{II}$. $b_1^{III}\ c_2^{II}$, $b_2^{III}\ c_1^{II}$. $\beta_1^{VI}\ \gamma_2^{VI}$, $\beta_2^{VI}\ \gamma_1^{VI}$. $\beta_3^{IV}\ \gamma_3^{V}$, $\beta_3^{V}\ \gamma_3^{IV}$, $\beta_2^{IV}\ \gamma_1^{V}$, $\beta_1^{V}\ \gamma_2^{IV}$, $\beta_1^{II}\ \gamma_2^{III}$, $\beta_2^{II}\ \gamma_1^{III}$;
$c_1^{II}\ a_2^{II}$, $c_2^{II}\ a_1^{II}$, $b_1^{III}\ b_2^{I}$. $b_1^{I}\ b_2^{III}$, $c_1^{I}\ a_2^{III}$. $c_2^{I}\ a_1^{III}$, $\gamma_1^{VI}\ \alpha_2^{VI}$, $\gamma_2^{VI}\ \alpha_1^{VI}$, $\gamma_3^{IV}\ \alpha_3^{V}$, $\gamma_3^{V}\ \alpha_3^{IV}$, $\gamma_2^{IV}\ \alpha_1^{V}$, $\gamma_1^{V}\ \alpha_2^{IV}$, $\gamma_1^{III}\ \alpha_2^{I}$, $\gamma_2^{III}\ \alpha_1^{I}$;
$a_1^{III}\ b_2^{III}$, $a_2^{III}\ b_1^{III}$. $c_1^{I}\ c_2^{II}$, $c_2^{I}\ c_1^{II}$. $a_1^{II}\ b_2^{I}$, $a_2^{II}\ b_1^{I}$. $\alpha_1^{VI}\ \beta_2^{VI}$, $\alpha_2^{VI}\ \beta_1^{VI}$, $\alpha_3^{IV}\ \beta_3^{V}$, $\alpha_3^{V}\ \beta_3^{IV}$, $\alpha_2^{IV}\ \beta_1^{V}$, $\alpha_1^{V}\ \beta_2^{IV}$, $\alpha_1^{I}\ \beta_2^{II}$, $\alpha_2^{I}\ \beta_1^{II}$;

és ezeknek az egyenespároknak metszőpontjai, a mint azok egymásra következnek, harmonicusan vannak elválasztva a T- és t-től. Ugyanez mondható, a változtatandók megváltoztatásával, a megfelelő KIRKMAN-pontpárokról is.

2. A szóban levő hatszög STEINER-pontjai és CAYLEY-egyenesei közűl II és π határozatlan a t-n, illetve a T körűl;

$$P\ A_3\ B_3\ C_3 \equiv T,\quad \mathbf{A}_1\ \mathbf{A}_2\ \mathbf{A}_3 \equiv T_1,\quad \mathbf{B}_1\ \mathbf{B}_2\ \mathbf{B}_3 \equiv T_2,\quad \Gamma_1\ \Gamma_2\ \Gamma_3 \equiv T_3,$$
$$p\ a_3\ b_3\ c_3 \equiv t,\quad \alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3 \equiv t_1,\quad \beta_1\ \beta_2\ \beta_3 \equiv t_2,\quad \gamma_1\ \gamma_2\ \gamma_3 \equiv t;$$

a többi STEINER-pont és CAYLEY-egyenes két háromszögpárnak $A_1\ B_1\ C_1$, $A_2\ B_2\ C_2$; $a_1\ b_1\ c_1$, $a_2\ b_2\ c_2$-nek szögpontja és oldala, melyek a T, t ; U_i, u_i collineatio-középpontokra és tengelyekre, tehát négyszeresen perspectivásak.

Ez utóbbi állításunk igazolására csak ki kell mutatnunk, hogy az $A_1\ B_1\ C_1$, $A_2\ B_2\ C_2$; $A_1\ B_1\ C_1$, $A_2\ C_2\ B_2$ háromszögpárok szögpontjai a T, t, illetve az U_1, u_1-től harmonicusan vannak elválasztva. De a T, t-től harmonicusan elválasztott $a_1^{II}\ a_2^{II}$, $b_1^{III}\ b_2^{III}$, $c_1^{I}\ c_2^{I}$ egyenespárok a $t_1 = a_1^{IV}\ a_2^{V}$, illetve $t_2 = b_1^{IV}\ b_2^{V}$, $t_3 = c_1^{IV}\ c_2^{V}$ egyeneseket az $A_1\ A_2$, $B_1\ B_2$, $C_1\ C_2$ pontpárokban metszik ; és az U_1- és u_1 től harmonicusan elválasztott $a_1^{II}\ a_2^{III}$, $b_1^{I}\ c_2^{I}$, $c_1^{I}\ b_2^{I}$ egyenespárok közűl az első a t_1 et az A_1 A_2-ben, a második és harmadik pedig az U_1- és u_1-től harmonicusan elválasztott t_2 t_3, t_3 t_2 egyenespárt a B_1 C_2, C_1 B_2 pontpárokban metszi.

A STEINER-egyenesek és SALMON-pontok közűl a t és T egy háromszoros, a t_i, u_i és a T_i, U_i egy-egy egyszeres; végre az A_1 B_1 C_1, A_2 B_2 C_2 háromszögeknek oldalai és az a_1 b_1 c_1, a_2 b_2 c_2 háromszögeknek szögpontjai egyszeres STEINER-egyenesek, illetve SALMON-pontok.

3. Hátra volna még a $[Vv]_j$ és $_j[Vv]$ configuratiók helyzetének megvizsgálása a szilárd T T_i t t_i alakzat irányában. Ámde, mint már említettük, e PASCAL-hatszög az előbb tárgyalt két PASCAL-hatszögnek különös esete, úgy, hogy mindkettőnek különleges mivoltát önmagában egyesíti. Az előbbi két hatszög felől azonban kimutattuk volt, hogy a $[Vv]_j$, $_j[Vv]$ configuratiók a T T_i t t_i alakzat irányában ép úgy viselkednek, mint a $[Vv]_o$ configuratio; ennélfogva e körűlménynek elég bizonyító ereje van annak kimutatására, hogy a hatszög $[Vv]_j$, $_j[Vv]$ configuratióinak helyzete a T T_i t t_i iránt megegyezik a $[Vv]_o$ configuratioéval.

Ezért kimondhatjuk, hogy

Ha egy kúpszeleten hat pontot veszünk fel, melyek négyféleként képeznek involutiót, még pedig a T, t; T_1, t_1; T_2, t_2; T_3, t_3 középpontra, illetőleg tengelyre nézve, akkor e hat pont egy különös PASCAL-*hatszögnek szögpontja.*

Ha $T=(t_1\, t_2\, t_3)$, $t=(T_1\, T_2\, T_3)$, $U_i=(t\, t_i)$, $u_i=(T\, T_i)$, akkor ama hatszög

PASCAL-*egyeneseiből hat a t-vel és négy-négy a t_i-vel egyesűl; nyolcz-nyolcz a t_i pontokon megy keresztűl és oly involutiót képez, melynek kettőssugarai $t\, u_i$; hat a T-ponton megy keresztűl és háromszorosan képez involutiót, melynek kettőssugarai a $t_i\, u_i$ egyenespárok. A t egyenesen fekvő hat* KIRKMAN-*pontból kisugárzó*

KIRKMAN-*pontjaiból hat a T-vel és négy-négy a t_i-vel egyesűl; nyolcz-nyolcz a t_i egyeneseken fekszik és involutiót képez, melynek kettőspontjai $T\, U_i$; hat a t egyenesen fekszik és háromszorosan képez involutiót, melynek kettőspontjai a $T_i\, U_i$ pontpárok. A T ponton keresztűl menő hat* PASCAL-*egyenesen hat* KIRKMAN-*pont-*

hat PASCAL-*egyenespár a* T- *és* t-*től és tizennégy-tizennégy egyenespár az* U_i- *és* u_i-*től harmonicusan van elválasztva.*

A STEINER-*pontokból egy határozatlan a* t *egyenesen; a* T *négyszeres, a* T_i *pontok pedig háromszoros* STEINER-*pontok; a többi hat egy oly háromszögpárnak szögpontja, melyek a* T *és* U_i *collineatio-középpontokra és és* t *és* u_i *tengelyekre vonatkozólag, tehát négyszeresen perspectivásak.*

E háromszögpárnak hat oldala és a t_i, u_i *egyenesek egyszeres, a* t *pedig háromszoros* STEINER-*egyenes.*

pár tekszik, mely T- *és* t-*től és tizennégy-tizennégy pontpár az* U_i- *és* u_i-*től harmonicusan van elválasztva.*

A CAYLEY-*egyenesekből egy határozatlan, de a* T *ponton megy keresztűl; a* t *négyszeres, a* t_i *egyenesek pedig háromszoros* CAYLEY-*egyenesek; a többi hat egy oly háromszögpárnak oldala, melyek a* T *és* U_i *collineatio-középpontokra és a* t *és* u_i *tengelyekre vonatkozólag, tehát négyszeresen perspectivásak.*

E háromszögpárnak hat szögpontja és a T_i, U_i *pontok egyszeres, a* T *pedig háromszoros* SALMON-*pont.*

A hatszög $[Vv]_j$, ${}_j[Vv]$ *configuratióinak egyenesei és pontjai akkép viselkednek a* $T\ T_i\ t\ t_i$ *iránt, mint a hozzájuk rendelt* PASCAL-*egyenesek és* KIRKMAN-*pontok.*