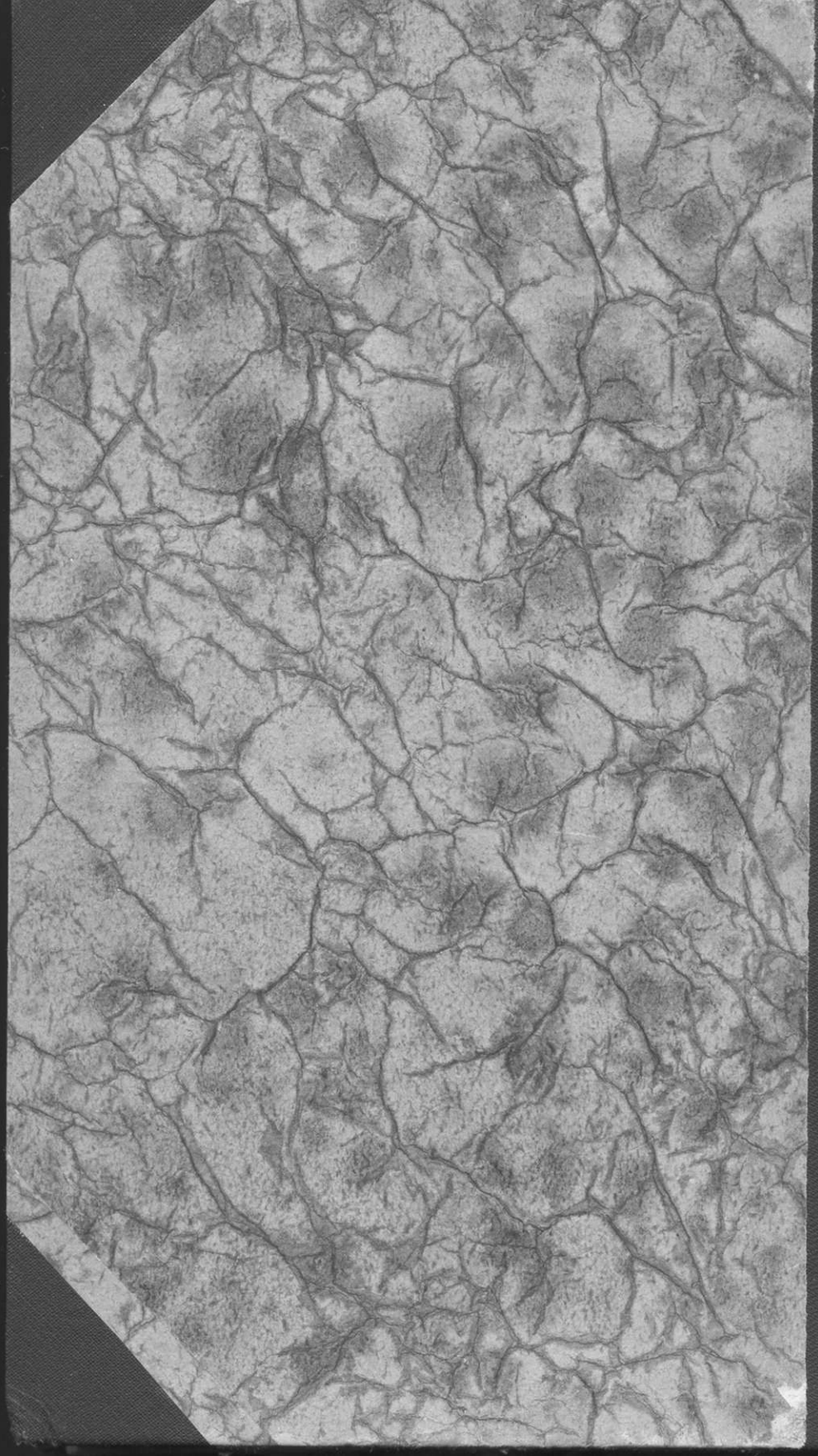


KOLOZSVÁRI BOLYAI
TUDOMÁNYEGYETEM
MATEMATIKAI INTÉZET
KÖNYVTÁRA

Szakl. sz.: 411-4

# PROJEKTIV GEOMETRIA.

***

IRTA

DR. KLUG LIPÓT,

KOLOZSVÁRI TUD. EGYETEMI TANÁR.

MEGJELENIK

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

ANYAGI TÁMOGATÁSÁVAL.

BUDAPEST, 1903.

LAMPEL RÓBERT (WODIANER F. ÉS FIAI)

CS. ÉS KIR. UDV. KÖNYVKERESKEDÉSÉNEK KIADÁSA.

516

K-58-4

411-4

M. Kir. Ferenc József - Tudományegyetem
Geometriai
Intézete
Kolozsvár

BOLYAI TUD. EGYETEM - Kolozsvár

2030—903. Budapest. Nyomatott Wodianer F. és Fiainál.

# ELŐSZÓ.

A midőn e könyvet a nyilvánosságnak átadom, szólanom kell annak vonatkozásáról, a tizenegy évvel ezelőtt megjelent „Projektiv Geometria Elemei“ című könyvemhez, és be kell számolnom annak foglalatáról.

A Projektiv Geometria Elemeinek főtárgya: az ugyanegy síkban fekvő első fokozatú alapalakzatoknak projektiv vonatkozása és képződménye, a kúpszelet. Ezeknek ismeretéből indultam ki jelen könyvem megirásakor.

Megkezdem pedig a tárgyalást az I. fejezetben, a síksornak más sorokra való projektiv vonatkozásával.

Ezt követi a II. és III. fejezetben az első fokozatú alapalakzatok két térbeli képződményének, a másodrendü kúpnak és a sugársereg-nek tárgyalása.

A sugársereg tanulmányozása annyi vonalgeometriai anyagot ölelt föl, hogy azzal könnyen tárgyalhattam a IV. fejezetben a linearis komplexust és a linearis kongruenciát.

Az V. fejezetben behatóan foglalkozom a másodfokozatú alapalakzatok projektiv vonatkozásaival. Végre a VI. fejezet, két kollinear sugárnyaláb képződményéről, a harmadrendű térgörbéről szól.

Arra törekedtem e könyv megírásakor, hogy a felvett anyagot a mennyire lehet, kimerítően dolgozzam fel, s azért könyvemben sok újat is talál az olvasó. Fölöslegesnek tartom ezeket a szakembernek külön megjelölni, a ki pedig e könyvből tanulja először a tárgyat, arra nézve úgyis közömbös, hogy mely részek származnak tőlem.

Mint a Projektiv Geometria Elemei című könyvem, úgy ez is csak a Magyar Tudományos Akadémiának jelentékeny anyagi támogatásával jelenhetett meg. Fogadja a M. T. Akadémia belém helyezett bizalmáért hálás köszönetemet. Ámde az iró hálája csekély ahoz képest, melyet a magyar ifjúságnak kell éreznie és érez is, hogy anyanyelvén sajátíthatja el e szép tudományt, melynek nem-

csak nálunk, hanem más országban is kevés a művelője, mert megalkotói elhaltak, közetlen követői pedig már elöregedtek.

Vajha akadna a magyar ifjak között is olyan, ki teljes erejét e tárgy tanulmányozására s önálló művelésére szentelné és oly nimbust szerezhetne annak, a milyen azt a mult század első felében övezte.

Ha könyvem hozzájárul e czél előmozdításához, úgy fáradozásom dús jutalmát látja.

Kolozsvártt, az 1903. év május havában.

Klug Lipót.

I. FEJEZET.

# Az első fokozatú alapalakzatoknak projektiv vonatkozása és képződményei.

## 1. §. A síksornak projektiv vonatkozása a pont-, sugár- és síksorra.

1. Az egyenes pontjai, mint ismeretes, *pontsort*, a pont sugarai a síkban *sugársort* képeznek. A pontsor pontjainak és a sugársor sugarainak száma egyszeresen végtelen sok ($\infty^1$).

Valamely $s$ egyenesen keresztül menő összes síkoknak, az $s$ egyenes síkjainak, száma szintén $\infty^1$; e síkok *síksort* képeznek, melynek *tengelye* az $s$ egyenes.

A pontsort, a sugársort és a síksort *alapalakzatoknak*, és az ezekben levő pontokat, sugarakat és síkokat az alakzat *elemeinek* nevezzük.

Az alapalakzatok egymásra projektiv vonatkoztathatók. A pont- és sugársorok projektiv vonatkozása már az olvasó előtt ismeretes.

A síksor projektiv vonatkozása a pont- vagy sugársorra legkönnyebben megérthető, ha azoknak perspektiv helyzetéből indulunk ki.

Az $s$ síksor $\alpha\beta\gamma \ldots$ síkjai a $t$ egyenest a $t$ pontsor $ABC \ldots$ pontjaiban metszik. Minden $\xi$ síknak az $s$ síksorban megfelel egy $X$ pont a $t$ pontsorban, melyben t. i. a $\xi$ sík a pontsor $t$ tartóját *metszi*, s viszont a $t$ pontsor minden $Y$ pontjának megfelel egy $\eta$ sík az $s$ síksorban, mely t. i. az $Y$ pontot az $s$ tengelyből *projicziálja*. Az $s$ síksor *projektiv van vonatkoztatva* a $t$ pontsorra, és e vonatkozásban a síksor minden síkjának az a pont felel meg a pontsorban, melyben az illető sík a pontsornak $t$ tartóját metszi. A síksor a mellett hogy *projektiv vonatkozású*, még *perspektiv helyzetű* a pontsorral, mert a síksor minden síkja a pontsorban, a neki megfelelő ponton megy keresztül.

Mozdítsuk el a pontsort és a síksort e perspektiv helyzetből. A síksor minden síkja $\alpha\beta\gamma\xi\eta \ldots$ ekkor már nem megy keresztül azokon az $ABCXY \ldots$ pontokon, melyek ama síkoknak a projektiv vonatkozásban megfeleltek. A síksor és pontsor perspektiv helyzete megszűnt, de megmaradt azoknak projektiv vonatkozása, mely a perspektiv helyzetből származott.

Hasonlóképen, ha az $s$ síksort egy $\tau$ síkkal metszük, egy $(T, \tau)$ sugársort nyerünk a metszősíkban $\tau$-ban, melynek $T$ középpontja a síksor $s$ tengelyének metszőpontja, és melynek $abc \ldots$ sugarai a síksor $\alpha\beta\gamma \ldots$ síkjainak metszővonalai a $\tau$ síkkal. Az $\alpha\beta\gamma \ldots$ síksor az $abc \ldots$ sugársorral *perspektiv helyzetű és projektiv vonatkozású.* E vonatkozásban a síksor minden $\xi$ síkjának az az $x$ sugár felel meg a $(T, \tau)$ sugársorban, melyben a $\xi$ a $\tau$ síkot *metszi*, és a sugársor minden $y$ sugarának az a $\eta$ sík felel meg a síksorban, mely az $y$ sugarat az $s$ tengelyből *projicziálja.*

Elmozdítván a sugár- és síksort e helyzetéből, megszüntetjük a két sornak perspektiv helyzetét, de megmarad azoknak projektiv vonatkozása, mely az $s$ síksor minden síkjához egy sugarat rendel a $(T, \tau)$ sugársorban, mint ama síknak megfelelőt.

2. *Két sugársor, mely különböző síkban van és ugyanegy pontsorral perspektiv, tehát egymással és a pontsorral projektiv, egyszersmind perspektiv és projektiv ugyanegy síksorral.* A síksor tengelye a két sugársor középpontjainak összekötő egyenese, a síksor síkjai pedig a sugársor megfelelő sugarain mennek keresztül.

*Két projektiv sugársor, melynek közös középpontja, egy megfelelő közös sugara és két különböző síkja van, szintén perspektiv és így projektiv ugyanegy síksorral.*

Ugyanis egy tetszésszerinti $\sigma$ sík a két sugársort $(T, \tau)$ és $(T, \tau_1)$-et, két perspektiv pontsorban metszi, mert ezek a megfelelő közös sugárban egy megfelelő közös ponttal bírnak. Minthogy e pontsorokkal perspektiv $(S, \sigma)$ sugársor a felvett $(T, \tau)$ és $(T, \tau_1)$ sugársorokkal szintén perspektiv, azért az a síksor, mely az $(S, \sigma)$-val és a felvett sugársorok egyikével perspektiv, a másikkal is az lesz.

A két tétel ekkép meg is fordítható:

*Két tetszésszerinti síknak metszése minden síksorral két projektiv sugársor.*

Ugyanis, ha a két metszősík $\tau, \tau_1$ nem megy keresztül a síksor tengelyének ugyanegy pontján, akkor a két kimetszett sugársor perspektiv, tehát projektiv azzal a pontsorral, melyben a $\tau, \tau_1$ síkoknak $\pi_1$ metszővonala a síksort metszi. Ha ellenben a $\tau, \tau_1$ síkok a

síksor tengelyének ugyanegy $T$ pontján mennek keresztül, akkor minden $\sigma$ sík, melyben nem fekszik a $T$ pont, a síksort a $\tau$, $\tau_1$ síkok által kimetszett sugársorokkal perspektiv sugársorban metszi, miből már következik, hogy a $\tau$ és $\tau_1$-ben levő sugársorok projektivek.

Az előbbi tételnek következménye, hogy: *tetszésszerinti egyeneseknek és síkoknak metszései minden síksorral projektiv sorok lesznek.* Mert ha pl. a $t$, $t_1$ egyenesektől kimetszett pontsorokra gondolunk, akkor ezeknek $t$, $t_1$ tartóin keresztül fektetett $\tau$, $\tau_1$ síkok a síksort két projektiv sugársorban metszik, melyek a pontsorokkal perspektivek, tehát a pontsorok projektivek.

Két síksorról, mely ugyanegy sugársorral perspektiv, azt mondjuk, hogy egymással is *perspektiv* helyzetű és projektiv vonatkozású; e vonatkozásban azok a síkok felelnek meg egymásnak, melyek a sugársornak ugyanegy sugarán mennek keresztül. A két síksornak van egy közös megfelelő síkja, ebben van a két síksornak két tengelye. Ez értelmezésből következik, hogy két síksor perspektiv, ha ugyanegy pontsorral perspektiv és tengelyei egymást metszik; mert a két síksor perspektiv azzal a sugársorral, mely a pontsort a tengelyek metszőpontjából projicziálja. Ellenben: két síksor, mely ugyanegy pontsorral perspektiv, de melynek tengelyei nem metszik egymást, projektiv vonatkozású ugyan, de nem perspektiv helyzetű. Ugyanis ebben az esetben nincsen oly sugársor, mely mindkét síksorral perspektiv, mert az ily sugársor középpontjának mindkét síksor tengelyében kellene lenni, de a tengelyek nek a föltétel szerint nincsen közös pontjuk. A két síksor azonban projektiv vonatkozású, mert metszései minden síkkal vagy egyenessel projektiv sorok lesznek azzal a pontsorral, melylyel a síksorok perspektivek. Ebből következik:

Ha két síksort projektiv akarunk egymásra vonatkoztatni, akkor az egyik síksor három síkjának, $\alpha\beta\gamma$-nak, megfelelő síkjait, $\alpha_1\beta_1\gamma_1$-et, a másik síksorban tetszésszerint vehetjük fel. Az $\alpha\alpha_1$, $\beta\beta_1$, $\gamma\gamma_1$ megfelelő síkpároknak metszővonalaihoz vezetett $t$ szelő e metszővonalakat, tehát ama síkpárokat az $ABC$ pontokban metszi. A síksoroknak minden síkpárja, mely $t$ egyenes pontjához vezethető már megfelelő lesz a két projektiv síksorban.

3. A síksor tengelyére merőleges sík a síksort egy sugársorban metszi; e sugársor két-két sugarának hajlásszöge *méri* a síksorban a rajtuk keresztül menő síkoknak hajlásszögét.

Messe a síksor $\alpha\beta\gamma\delta$ . . . síkjait egy annak tengelyére merőleges $\sigma$ sík az $a_1b_1c_1d_1$ . . . sugársorban, a tetszésszerinti $\tau$ sík az $abcd$ . . . sugársorban, a $t$ egyenes pedig az $ABCD$ . . . pontsorban,

és jelöljük a síksor $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, . . . síkjainak hajlásszögeit $(\alpha\beta)$, $(\alpha\gamma)$, . . .-vel, mely szögek az értelmezés folytán egyenlők az $(a_1b_1)$, $(a_1c_1)$, . . . szögekkel.

Minthogy az $ABCD$ . . . pontsor az előbbiek szerint projektiv az $abcd$ . . . és az $a_1b_1c_1d_1$ . . . sugársorral, azért az $ABCD$, $abcd$, $a_1b_1c_1d_1$ és $\alpha\beta\gamma\delta$ pontnégyesnek, sugárnégyesnek és síknégyesnek kettősviszonyai egyenlők, azaz:

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{sin(ac)}{sin(bc)} : \frac{sin(ad)}{sin(bd)} = \frac{sin(a_1c_1)}{sin(b_1c_1)} : \frac{sin(a_1d_1)}{sin(b_1d_1)} =$$
$$= \frac{sin(\alpha\gamma)}{sin(\beta\gamma)} : \frac{sin(\alpha\delta)}{sin(\beta\gamma)},$$

vagy szimbolikus jelöléssel:

$$(ABCD) = (abcd) = (a_1b_1c_1d_1) = (\alpha\beta\gamma\delta).$$

Ezt pedig szavakban ekkép fejezhetjük ki:

*A síksor bármely síknégyesének kettősviszonya egyenlő annak a sugár- vagy pontnégyesnek kettősviszonyával, melyben ama síknégyes egy tetszésszerinti síkot, vagy egyenest metsz.*

Ebből folyólag a perspektiv helyzettől függetlenül fejezzük ki az alapalakzatok projektiv vonatkozását, ha azt mondjuk: *Két egymásra vonatkoztatott alapalakzat projektiv, ha az egyik alakzatban bármely négyesnek kettősviszonya egyenlő a másik alakzatban neki megfelelő négyesnek kettősviszonyával.*

Ebből ismét következik: ha két alapalakzatot projektiv akarunk egymásra vonatkoztatni, akkor az egyik alakzatnak három eleméhez a megfelelő három elemet a másikban tetszés szerint választhatjuk; minden elem az első alakzatban a felvett hárommal egy négyest képez, melynek kettősviszonya ugyanannyi, mint a milyent a negyedik elemnek megfelelő elem a második alakzatban az ebben felvett hárommal képez. Továbbá: ha két különnemű projektiv alapalakzat oly helyzetű, hogy az egyik alakzatnak kettőnél több eleme fekszik a másik alakzatnak megfelelő elemében, vagy keresztül megy annak megfelelő elemén, akkor ez minden megfelelő elempárra nézve bekövetkezik, és így az alakzatok perspektiv helyzetűek. Ha tehát két projektiv alapalakzat nem perspektiv, akkor az egyiknek csak két eleme lehet a másiknak megfelelő elemében; továbbá: két közös tengelyű projektiv síksornak csak két megfelelő közös síkja, úgynevezett *kettőssíkja* van.

Két projektiv síksorban vannak oly síkpárok, melyek ép oly szögeket képeznek egymással, mint a nekik megfelelő síkpárok

továbbá van egy vagy végtelen sok egymásra merőleges síkpár, melynek a megfelelő síkpárja vagy síkpárjai szintén merőlegesek egymásra. Ugyanis ha a síksorokat az egyiknek és a másiknak tengelyére merőleges síkkal metszük, akkor a kimetszett projektiv sugársorok egyikében végtelen sok oly sugárpár van, melynek hajlásszöge egyenlő a neki megfelelő sugárpárnak hajlásszögével; továbbá az első sugársorban egy vagy végtelen sok oly derékszögű sugárpár van, melynek megfelelő sugárpárja vagy sugárpárjai a másikban szintén derékszögűek. Tekintve, hogy a kimetszett sugársorok sugarainak hajlásszögei mérik a síksorok síkjainak hajlásszögeit: e tulajdonságok a projektiv síksorokban is megvannak.

Ha $\pi\rho$ és $\pi_1\rho_1$ a két projektiv síksor derékszögű megfelelő síkpárja, $\alpha\alpha_1$, $\beta\beta_1$, . . . pedig más megfelelő síkpárok, akkor a

$$tg\,(\alpha\pi).\ tg\,(\alpha_1\rho_1) = tg\,(\beta\pi).\ tg\,(\beta_1\rho_1) = \ldots$$

szorzat képezi a projektiv síksorok *hatványát*, és ha a $\gamma\gamma_1$, $\chi\chi_1$ megfelelő síkpárok azok, melyekre nézve a

$$(\gamma\pi) = (\gamma_1\rho_1) = (\pi\chi) = (\rho_1\chi_1)$$

szögek egyenlők, akkor ezek a $\gamma\gamma_1\chi\chi_1$ síkok a projektiv síksoroknak *hatványsíkjai*.

4. Két közös tengelyű projektiv síksor *involucziós helyzetű* (involucziós), ha azoknak bármilyen metszése síkkal vagy egyenessel involucziós sor. Ilyen lesz pedig a síksoroknak minden metszése síkkal vagy egyenessel, ha a síksor egy $\alpha$ ($\beta_1$) síkjának, mint az első, illetve a másodikhoz tartozónak megfelelő $\alpha_1$, illetve $\beta$ síkjai a másik sorban, egybeesnek. A két síksor ekkor *egy* involucziós síksort, vagy *involucziót* képez, melyben az előbbi megfelelő síkok, mint $\alpha(\beta_1)$ és $\alpha_1(\beta)$ *kapcsolt-* vagy *társsíkoknak* neveztetnek. A szerint, a mint az involucziós síksor két pár társsíkja el van választva, vagy nincsen elválasztva egymástól, tehát az involucziós síksor *elliptikus* vagy *hyperbolikus*, annak két képzetes, illetve két valós kettőssíkja van, melyekben két-két társsík egyesül. Ezek a kettőssíkok pedig harmonikusan választják el az involucziós síksornak összes társsíkjait úgy, mikép a másik két involucziós alapalakzatnak kettőselemei harmonikusan választják el azoknak összes társelemeit. — Az oly involucziós síksort, melynek kettőssíkjai egymásra merőlegesek, egyenoldalúan hyperbolikusnak, vagy újabban *szimmetrikus-involucziós* síksornak nevezzük, mert társsíkjai a kettőssíkok irányában szimmetrikusak.

Minthogy minden involucziós sugársorban egy vagy valamennyi társsugárpár derékszögű, azért az involucziós síksorban is legalább egy társsíkpár merőleges egymásra, vagy pedig valamennyi merőleges. Ha az involucziós síksornak kettőssíkjai valósak, akkor a derékszögű társsíkpár felezi a kettőssíkok hajlásszögeit; ha pedig az involucziós síksornak nincsenek valós kettőssíkjai, akkor van azokban egy különös társsíkpár, „a hatványsíkpár", melynek hajlásszögeit szintén felezi a derékszögű társsíkpár. — Az oly involucziós síksort, melynek minden társsíkpárja derékszögű, czirkularisnak, vagy újabban *orthogonalis*-nak nevezzük; ennek kettőssíkjai képzetesek, és minden társsíkpárja egyszersmind hatványsíkpár.

Az olyan síksort, melynek tengelye végtelen távol van, melynek tehát síkjai párhuzamosak, *párhuzamos síksornak* nevezzük. A párhuzamos síksornak egyik síkja végtelen távol van, s metszése minden síkkal párhuzamos-sugarú sor. — Két síksornak, mely külön-külön párhuzamos síkokból áll, egy végtelen távol fekvő közös síkja van. Ha a két sor projektiv van egymásra vonatkoztatva és a végtelen távol levő sík megfelelő, akkor a síksorok perspektivek, és így a megfelelő síkpárok metszései párhuzamos sugarú sort képeznek.

5. Minthogy a projektiv geometriában a harmonikus elemeknek kiváló szerepük van, szükséges, hogy azoknak harmonikus helyzetét minden változatában egyszerűen kifejezhessük. Az előbbiek szerint, ha négy sík $\alpha\beta\gamma\delta$ harmonikus, vagy harmonikus négyest képez, akkor azoknak minden metszése síkkal vagy egyenessel harmonikus sugárnégyes, illetve harmonikus pontnégyes. És ha az $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ síkpárok társsíkok az $\alpha\beta\gamma\delta$ harmonikus négyesben, akkor azt mondjuk, hogy az egyik társsíkpár, pl. az $\alpha\beta$, harmonikusan választja el a $\gamma$ síkot a $\delta$ síktól, és a $\gamma$ síknak minden pontját és egyenesét a $\delta$ síknak minden pontjától és minden egyenesétől. A $PQ$ pontpár tehát harmonikusan van elválasztva az $\alpha\beta$ síkpártól, ha az a két sík, mely a $PQ$ pontpárt az $\alpha\beta$ egyenesből projicziálja, harmonikusan van elválasztva az $\alpha\beta$ síkpártól. Ép így: ha a $pq$ egyenespárt az $\alpha\beta$ síkpár harmonikusan választja el, akkor kell, hogy az $\alpha\beta$ síkok $s$ metszővonala messe a $p$ és $q$-t és az $[sp]$, $[sq]$ síkok harmonikusan legyenek elválasztva az $\alpha\beta$ síkoktól.

## 2. §. A síksorokból kimetszhető különös sugársorok és pontsorok.

1. Két sík a síksort általában különböző (nem kongruens) sugársorban metszi. De ha a két sík párhuzamos, vagy a síksor tengelyéhez egyenlő szög alatt hajlik és metszővonala a síksor tengelyére merőleges, akkor a két sík a síksort kongruens sugársorokban metszi. A párhuzamos síksort minden sík, más síksort pedig ennek tengelyével párhuzamos sík párhuzamos sugarú sorban metszi. A párhuzamos síksort bármily egyenesek, más síksort pedig ennek bármelyik síkjával párhuzamos egyenesek, vagy egymással párhuzamos egyenesek hasonlóan-projektiv pontsorokban metszenek. Párhuzamos egyenesek, melyek egy síksor tengelyétől egyenlő távolságra vannak, e síksort és így a párhuzamos síksort is egyenlően-projektiv pontsorokban metszik. Ugyanígy egyenlően-projektivek (azaz kongruensek) lesznek azok a sorok is, melyekben a párhuzamos síksort ennek síkjaihoz egyenlő szög alatt hajló egyenesek vagy síkok metszik.

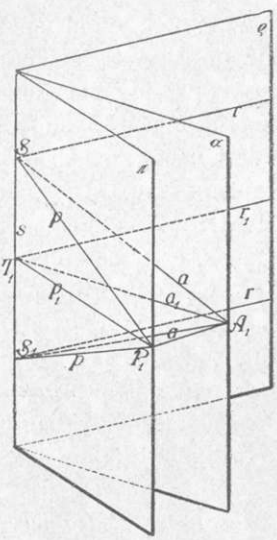
*Az s síksor és a véle projektiv* $(T, \tau)$ *sugársor perspektiv helyzetbe hozható*, ha a sorok elemei nem párhuzamosak.

Messe a síksor tengelyére merőleges $\tau_1$ sík a síksort a $(T_1, \tau_1)$ sugársorban és legyenek a $(T, \tau)$ és $(T_1, \tau_1)$ projektiv sugársorokban az egymásnak megfelelő derékszögek szárai $pr$, illetve $p_1 r_1$, és egy megfelelő sugárpár $a$ és $a_1$.

Az $a$ sugár a $pr$ sugarak egyikével, pl. a $p$-vel kisebb szöget képez, mint az $a$-nak megfelelő $a_1$ sugár jelenleg a $p$-nek megfelelő $p_1$ sugárral. Ezért ha a $PA = P_1A_1$ vonaldaraboknak végpontjait akkép helyezzük a $pa$ és $p_1a_1$ szögek száraira, hogy $PA$ a $p$-re és $P_1A_1$ a $p_1$-re merőleges legyen, akkor $TP > T_1P_1$-nél (1. *a*) ábra). A $P_1$ pontból a $PT$ radiussal leírt gömb az $s$ síksornak tengelyét az $S$, $S_1$ pontokban metszi (1. ábra), mig az $SP_1A_1$, $S_1P_1A_1$ síkok a síksor $p_1a_1r_1$ sugarain keresztül menő $\pi\alpha\rho$ síkokat oly három-három sugárban metszik, melyek a $par$ sugarakra boríthatók. Ebből következik, hogy ha a $(T, \tau)$ sugársornak $p$, $a$ sugarait az $SP_1$, $SA_1$-re vagy az $S_1P_1$, $S_1A_1$-re helyezzük, akkor ezzel a $(T, \tau)$ sugársort a síksorral perspektiv helyzetbe hoztuk.

Ha viszont a $p$-n keresztül menő és a $\tau$ síkra merőleges síkban a $P$ pontból a $P_1T_1$ radiussal kört írunk le, és ehhez a $T$ pontból $t$, $t_1$ érintőket vezetünk, a síksornak $\pi\alpha\rho$ síkja reá helyezhetők arra a három-három síkra, melyek a $t$ és $t_1$ érintőket a $par$ sugarakkal

összekötik. Ebből következik, hogy a $(T, t)$ sugársort a $t$ és a $t_1$-ből projicziáló síksorok kongruensek az adott $s$ síksorral, tehát ha a síksor $s$ tengelyét a $t$ vagy $t_1$-be, a $\pi$ síkot pedig a $p$ sugáron át helyezzük, akkor az $s$ síksort a $(T, t)$ sugársorral perspektiv helyzetbe hoztuk.

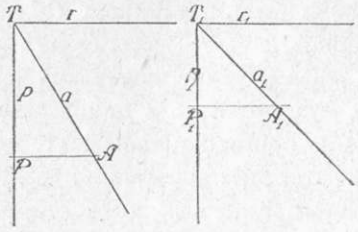


1. ábra.

E szerkesztés mutatja, hogy *mikép kell egy sugársornak három sugarát, abc-t, egy síksornak három adott síkjába αβγ-ba, vagy egy harmonikus sugárnégyes abcd sugarait egy adott harmonikus síknégyes αβγδ síkjaiba helyezni.*

2. *Minden elliptikus vagy hyperbolikus involucziós síksor perspektiv helyzetbe hozható egy megadott elliptikus, illetve hyperbolikus sugársorral,* ha a sorok elemei nem párhuzamosak.

Vegyünk fel először az elliptikus involucziós síksorban egy $\alpha\alpha_1$ társsíkpárt, a sugársorban pedig egy $aa_1$ társsugárpárt és legyen a síksorban $\beta\beta_1$, a sugársorban $bb_1$ az a társsíkpár, illetve társsugárpár, mely amazokat harmonikusan elválasztja. Ha az előbbi szerkesztés szerint az $aa_1bb_1$ és $\alpha\alpha_1\beta\beta_1$ harmonikus sugár- és síknégyeseket perspektiv helyzetbe hoztuk, akkor ezzel az adott sugár- és síkinvolucziós sorok is perspektiv helyzetbe jutottak, azaz a sugársornak minden társsugárpárja a síksornak egy társsíkpárján lesz. — A feladatnak végtelen sok megoldása van, mert az $aa_1$ társsugárpárhoz az $\alpha\alpha_1$ társsíkpárt tetszésszerint választhatjuk a síksorban.



1a. ábra.

Ha másodszor a sugársor és síksor involucziója hyperbolikus, és ezeknek kettős elemei $mn$ és $\mu\nu$, akkor csak az $mn$ sugarakat a $\mu\nu$ síkokra kell helyezni, hogy a sugársort és a síksort perspektiv helyzetbe hozzuk, mert ekkor a sugársornak minden társsugárpárja a síksornak társsugárpárján lesz. E feladatnak szintén végtelen sok megoldása van, mert az $mn$ szögnek szárai végtelen sokféleképp helyezhetők a $\mu\nu$ lapszögnek száraira.

E feladatoknak speciális esetei:

1. *Elliptikus involucziós sugársoron orthogonalis síksort áthelyezni*; 2. *hyperbolikus involucziós sugársoron szimmetrikus-involucziós síksort átfektetni.*

Legyen $aa_1$, $bb_1$ az elliptikus involucziós sugársornak két társsugárpárja. Oly $s$ egyenest kell keresnünk, melyből ama $aa_1$, $bb_1$ sugárpárok derékszögű síkpárokkal projicziáltatnak. Ha az $a$ síksor síkjaira az $a_1$-ből merőleges síkokat bocsátunk, akkor e merőleges síkok amazokat egy különös kúpnak (úgynevezett orthogonalis kúpnak) alkotóiban metszik, mely alkotókból az $aa_1$ sugárpár derékszögű síkpárral projicziáltatik. Ugyanígy a $b$ síksor síkjaira a $b_1$-ből merőlegesen bocsátott síkok amazokat egy másik orthogonalis kúpnak alkotóiban metszik. A két orthogonalis kúp két közös alkotójából $s$ és $s_1$-ből már az $aa_1$ és $bb_1$ társsugárpárok, tehát az adott involucziós sugársornak összes társsugárpárjai orthogonalis síkpárokkal projicziáltatnak, és így az $s$ és $s_1$ egyenesek lesznek a keresett orthogonalis síksoroknak tengelyei.

A szerkesztés kivitele egyszerűsül, ha a két felvett társsugárpár a derékszögű társsugárpár $rr_1$ és az a $gg_1$ társsugárpár (hatványsugárpár), mely az $rr_1$-et harmonikusan választja el, tehát az $rr_1$-hez egyenlő szög alatt hajlik, mert ekkor az $rr_1$-ből származó orthogonalis kúp abba a síkpárba $\varrho\varrho_1$-be korcsosul el, mely az $rr_1$-en keresztül megy és merőleges a sugársor síkjára, a $gg_1$-ből származó orthogonalis kúp pedig a $\varrho$ és $\varrho_1$ irányában önmagával szimmetrikus lesz. Ha tehát a $gg_1$ sugarak az $r$-rel kisebb szögeket képeznek, mint az $r_1$-gyel, és a $g$ egyenes $G$ pontjából az $r$-re bocsátott merőleges talppontja $R$, és mi a sugársor $T$ középpontjából $s$ és $s_1$ érintőket húzunk ahhoz a körhez, mely az $R$ pontból a $\varrho$ síkban az $RG$ radius hosszával leírható, akkor ezekből az $s$ és $s_1$ érintőkből már a $gg_1$ sugárpár, valamint az $rr_1$ sugárpár derékszögű síkpárral projicziálható. Az $s$ és $s_1$ egyenesek lesznek tehát tengelyei azoknak a síksoroknak, melyekből az adott elliptikus involucziós sugársor orthogonalis síksorral projicziálható.

Ha másodszor az adott involucziós sugársor hyperbolikus és annak kettőssugarai $mn$, akkor azok az $s$ egyenesek, melyekből az $mn$ sugárpár derékszögű síkpárokkal, tehát az adott sugársor szimmetrikus-involucziós síksorral, projicziálható egy orthogonalis kúpnak alkotói. Ezért ha az $m$ kettőssugáron keresztül bármilyen síkot, az $n$ kettőssugáron keresztül pedig erre merőleges síkot fektetünk, úgy e két sík metszővonala $s$ már tengelye egy oly síksornak, mely az adott sugársort szimmetrikus involucziós síksorral

projicziálja. A második feladatnak tehát végtelen sok megoldása van.

A két feladat fordítottja:

1. *Elliptikus involucziós síksort orthogonalis sugársorban metszeni*; 2. *hyperbolikus involucziós síksort szimmetrikus-involucziós sugársorban metszeni.*

Ha $\alpha\alpha_1$ és $\beta\beta_1$ egy elliptikus involucziós síksornak két társsíkpárja, akkor oly $\sigma$ síkot kell keresnünk, mely azokat derékszögű sugárpárokban metszi. Végtelen sok síkot lehet találni, mely a síksor $s$ tengelyének egy $S$ pontján megy keresztül és az $\alpha\alpha_1$ síkpárt derékszögben metszi; ezek ismét egy különös kúpot burkolnak, melylyel alább foglalkozni fogunk és melyet parabolikus kúpnak nevezünk. Ép így parabolikus kúpot burkolnak azok az $S$-en keresztül menő síkok, melyek a $\beta\beta_1$ síkpárt derékszögben metszik. A két kúpnak közös érintősíkja már orthogonalis sugársorban metszi a felvett síksort.

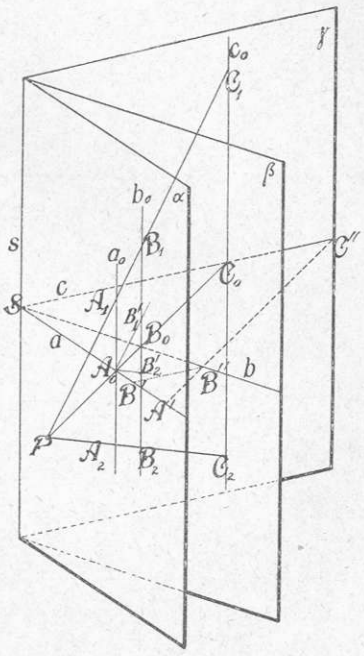
A szerkesztés egyszerűsbül, ha az $\alpha\alpha_1$ síkpár az involucziós síksornak derékszögű síkpárja $\rho\rho_1$, a $\beta\beta_1$ síkpár pedig annak a $\rho\rho_1$-hez egyenlő szögek alatt hajló társsíkpárja (hatványsíkpárja) $\gamma\gamma_1$; mert ekkor az első kúp azzá a két egyenessé $rr_1$-gyé korcsosúl el, melyben az $S$ ponton keresztül menő és a síksor tengelyére merőleges $\tau$ sík a $\rho\rho_1$ síkpárt metszi; a második kúp pedig szimmetrikus a $\gamma\gamma_1$ hatványsíkok irányában. Ha tehát a $\gamma$ kisebb hegyes szöget képez a $\rho$-val, mint a $\rho_1$-gyel, és mi az $r$ egyenesnek $R$ pontjából az $RS$ radiussal kört írunk le, melynek síkja merőleges az $r$-re, akkor e kör a $\gamma$ síkot két pontban, $C$ $C_1$-ben úgy metszi, hogy a $CSR$, $C_1SR$ szögek 45°-úak. A $[Cr]$, $[C_1r]$ síkok a $\rho\rho_1$, $\gamma\gamma_1$ síkpárokat, és így az adott involucziós síksornak minden társsíkpárját derékszögű sugárpárokban metszik, tehát a kívánt tulajdonsággal bírnak.

Ha másodszor $\mu\nu$ az adott hyberbolikus involucziós síksornak kettőssíkjai, akkor e síksor $s$ tengelyének $S$ pontján keresztül $\infty^1$ sík fektethető, mely $\mu\nu$ síkpárt derékszögben metszi; e síkok, melyek egy parabolikus kúpot burkolnak, már oly tulajdonságúak, hogy az adott síksort szimmetrikus-involucziós sugársorban metszik. Jelenleg tehát szintén végtelen sok síkot lehet egy ponton keresztül vezetni, mely valamely hyberbolikus involucziós síksort szimmetrikus-involucziós sugársorban metsz.

3. Minthogy minden pontsor perspektiv helyzetbe hozható egy véle projektiv sugársorral, azért a pontsor egyszersmind perspektiv helyzetbe hozható egy véle projektiv síksorral is. Egy erre vonatkozó határozott feladat:

„Hozzuk a $t(ABC\ldots)$ pontsort akképen perspektiv helyzetbe a véle projektiv $s$ $(\alpha\beta\gamma\ldots)$ síksorral, hogy annak $t$ tartója az adott $P$ ponton menjen keresztül."

A $P$ pontból a síksor tengelyére merőlegesen bocsátott sík a síksor $\alpha\beta\gamma\ldots$ síkjait az $S(abc\ldots)$ sugársorban metszi (2. ábra). A $t(ABC\ldots)$ pontsort akkép helyezzük (Proj. Geom. E. 46.) az $a$ sugárra, hogy a $C$ pontja az $S$-be jusson és ekkor az $AB$ pontok az $a$ sugár $A'B'$ pontjában vannak. A $B'$ ponton keresztül menő és a $c$-vel párhuzamos sugár a $b$-t a $B''$ pontban, míg az $A'B''$ egyenes a $c$-t a $C''$ pontban metszi. A $P$-n átmenő és az $A'B''$ egyenessel párhuzamos sugár az $abc$ sugarakat az $A_0B_0C_0$ pontokban metszi. Ha az $A_0B_0C_0$ pontokon keresztül a síksor tengelyével $a_0b_0c_0$ párhuzamosakat vezetünk, és az $A_0$ pontból az $[a_0b_0c_0]$ síkban az $AB$ radiussal leírt körnek $B'_1$, $B'_2$ metszőpontjait a $b_0$ egyenessel, az $A_0$ ponttal összekötjük, akkor a keresett $t_1$, $t_2$ egyenesek már az $A_0B'_1$, $A_0B'_2$ egyenesekkel lesznek párhuzamosak.




2. ábra.

Ugyanis ha a $t_1$, $t_2$ egyenesek a síksornak $\alpha\beta\gamma\ldots$ síkjait az $A_1B_1C_1\ldots$, $A_2B_2C_2\ldots$ pontokban metszik, akkor

$$s(\alpha\beta\gamma\ldots) \overline{\wedge} S(abc\ldots) \overline{\wedge} a(A'B'S\ldots) \overline{\wedge} (A'B''C''\ldots) \overline{\wedge} (A_0B_0C_0\ldots) \overline{\wedge} (a_0b_0c_0\ldots) \overline{\wedge} t_1(A_1B_1C_1\ldots) \overline{\wedge} t_2(A_2B_2C_2\ldots);$$

és mert

$$AB = A_0B'_1 = A_0B'_2 = A_1B_1 = A_2B_2$$

azért a $t(ABC\ldots)$ pontsor kongruens a $t_1(A_1B_1C_1\ldots)$ és a $t_2(A_2B_2C_2\ldots)$ pontsorral.

Meg akarjuk még itt jegyezni, hogy:

két projektiv síksor, melynek tengelyei egymást nem metszik, $\infty^1$ pontsorral lehet perspektiv. Minden egyenes, mely három megfelelő síkpárnak $\alpha\alpha_1$, $\beta\beta_1$ és $\gamma\gamma_1$-nek metszővonalait metszi, tartója egy ily pontsornak.

két projektiv pontsor, melynek tartói nincsenek ugyanegy síkban, $\infty^1$ tengelyből projicziálható a pontsorokkal perspektiv síksorokkal. Minden egyenes, mely három megfelelő pontnak $AA_1$, $BB_1$ és $CC_1$-nek összekötő egyeneseit metszi, tengelye egy ily síksornak.

## 3. §. Az alapalakzatok képződményei.

1. Ismeretes, hogy a síkban fennforgó dualitási elv alapján a pontnak az egyenes, tehát a pontsornak a sugársor a dualisan megfelelő alakzata. *A tér alakzataira vonatkozó dualitási elv*, mely az előbbit is magában foglalja, akkép nyilvánul, hogy *a pontnak a sík képezi dualis alakzatát.* E szerint *az egyenesnek*, mely két ponton megy keresztül, *dualis alakzata az egyenes*, mely két sík metszővonala; a sík pontjainak és egyeneseinek a ponton keresztül menő síkok és egyenesek; továbbá a pontsornak a síksor, a sugársornak pedig a sugársor dualis alakzata.

Ugyanegy síkban fekvő két projektiv pontsor képződménye, mint ismeretes, vagy két pont, vagy egy II. osztályú sugársor, a szerint, a mint a pontsorok perspektivek vagy általános helyzetűek. És ennek a síkra nézve dualisan megfelelő tétele: ugyanegy síkban fekvő két projektiv sugársor képződménye, vagy két egyenes, vagy egy II. r. görbe (kúpszelet), a szerint, a mint ismét ama sorok perspektivek vagy általános helyzetűek.

Vizsgáljuk most meg, hogy *mily dualis képződmények származnak, ha a három alapalakzat: a pontsor, a sugársor és a síksor közül két-két, akár egynemű, akár különnemű, de projektiv vonatkozásban álló sort használunk fel új alakzatok képzésére?*

Ha tekintetbe vesszük, hogy projektiv sorok képződményének elemei a sorok megfelelő elemeitől meghatározott, azaz rajtuk keresztül menő vagy bennük fekvő pont, sugár vagy sík, akkor következő projektiv soroknak nincsenek képződményei:

Két sugársornak, melynek síkja és középpontja különböző és mely nem perspektiv helyzetű; továbbá a pontsornak és síksornak, mely szintén nem perspektiv helyzetű.

Oly projektiv sorok pedig, melyek már ismert alakzatot képeznek:

a pontsor és a sugársor, ha amannak $t$ tartója ennek $\tau$ síkjában van, vagy pedig $t$ nem fekszik a sugársor síkjában, de $T$ középpontján megy keresztül. Az első esetben a sorok síkképződménye határozatlan, vagy pedig a sugársornak $\tau$ síkja lesz, a szerint, a mint a sorok perspektivek, vagy nem azok; a második esetben a képződmény a $t$ síksor.

a síksor és a sugársor, ha amannak $s$ tengelye ennek $T$ középpontján megy keresztül, vagy pedig ha $s$ nem megy a sugársor középpontján keresztül, de ennek $\tau$ síkjában van. Az első esetben a sorok pontképződménye határozatlan, vagy pedig a sugársornak $T$ középpontja, a szerint, a mint a sorok perspektivek vagy nem azok; a második esetben a képződmény az $s$ pontsor.

Ugyancsak ismert alakzat a sugársor és a véle projektiv síksor képződménye azoknak általános helyzetében, t. i. a kúpszelet.

Az itt felsorolt eseteken kívül a projektiv alapalakzatok új alakzatokat képeznek.

2. Ha két projektiv sugársornak $(T, \tau)$ és $(T, \tau_1)$-nek ugyanegy $T$ középpontja, de különböző ($\tau$ és $\tau_1$) síkja van, akkor azoknak képződményére nézve két esetet különböztethetünk meg.

Az első esetben a sugársorok síkjainak metszővonala $p \equiv p_1$ megfelelően közös sugár a két sugársorban. A sugársorok ekkor *perspektivek*, és a megfelelő sugarakat összekötő síkok egy $s$ egyenesen mennek keresztül, tehát egy közönséges, azaz *I. o. síksort*, $s$-et, képeznek. De azonkívül még azt a síksort is a képződményhez tartozónak tekintjük, melynek síkjai ama megfelelően közös sugáron, $p$-n, mennek keresztül.

A második esetben a sugársorok síkjainak metszővonala nem megfelelően közös, a metszővonalnak tehát, mint az egyik vagy másik sorhoz tartozónak, más sugár felel meg a másik sorban, azaz a sugársorok nem perspektivek. E konczentrikus, de nem perspektiv sugársoroknak síkképződménye (a megfelelő sugárpárokat összekötő síkoknak összessége) egy *II. o. síksor*. E II. o. síksornak metszése bármely $\sigma$ síkkal, mely nem megy a sugársoroknak közös középpontján keresztül egy II. o. sugársor, mert a $\sigma$ a két sugársort két általános helyzetű projektiv pontsorban metszi, melynek képződménye ama II. o. síksornak metszése a $\sigma$ síkkal. — Ebből

látható, hogy a II. o. síksor azoknak a síkoknak összessége, melyek egy II. o. sugársor sugarait, síkján kívül fekvő pontból projiciálják.

A II. o. síksortól beburkolt felületet II. o. kúpfelületnek, vagy röviden *II. o. kúpnak* nevezzük; a II. o. síksor egyes síkjai a kúpnak *érintősíkjai*; minden érintősíknak metszése a szomszéd érintősíkkal az elsőnek *érintő-alkotója* a kúppal. A kúpot magát, ép úgy, mint a II. o. síksort, melynek síkjai a kúpot beburkolják, a felvett két projektiv sugársor képződményének tekintjük.

Könnyen belátható, hogy ha a két konczentrikus projektiv sugársor helyett egy sugársort és egy véle projektiv pontsort veszünk fel, mely utóbbinak tartója sem nem megy keresztül a sugársor középpontján, sem nem fekszik annak síkjában, akkor azoknak síkképződménye (a megfelelő sugarat és pontot összekötő síkok összessége) vagy egy I. o. vagy egy II. o. síksor a szerint, a mint a pontsor tartójának és a sugársor síkjának metszőpontja, e metszőpontnak megfelelő sugáron van, vagy azon kívül van.

3. Két projektiv síksor $s$ és $s_1$, melynek tengelyei ugyanegy $M$ ponton mennek keresztül, vagy perspektiv helyzetű, vagy nem.

Az első esetben a síksorok $ss_1$ tengelyein keresztül menő sík $\pi \equiv \pi_1$ megfelelően közös, a többi megfelelő síkpár pedig egymást egy $(M, \tau)$ sugársorban metszi, és ekkor e $\pi$ síkot, valamint az $(M, \tau)$ sugársort és ennek $\tau$ síkját a két síksor képződményének tekintjük.

A második esetben, a midőn a síksorok nem perspektivek, tehát megfelelően közös síkkal nem bírnak, azoknak képződménye egy II. r. kúpfelület vagy rövidebben *II. r. kúp*. A síksoroknak megfelelő síkjai egymást e II. r. kúpnak *alkotóiban* metszik, és mindez alkotók, melyekhez a síksoroknak $ss_1$ tengelyei is tartoznak az $M \equiv (ss_1)$ pontban, a kúpnak *csúcsában* vagy *középpontjában* metszik egymást.

A II. r. kúpnak minden síkmetszése, melynek síkja nem megy a kúp csúcsán keresztül, egy *kúpszelet* (II. r. görbe), mert a kúpot képező két projektiv síksornak metszése (nyoma) a metszősíkon két projektiv sugársor, melynek kúpszelet a képződménye. E kúpszelet pontjaiban két megfelelő sugár jut metszéshez, tehát e kúpszelet minden pontja nyoma egy kúpalkotónak a metszősíkon.

Minthogy minden $k^{(2)}$ kúpszelet ($\infty^2$-szor) két projektiv sugársor képződménye, úgyszintén a $k^{(2)}$ kúpszeletet burkoló II. o. sugársor $\bar{k}^{(2)}$ ($\infty^2$-szor) két projektiv pontsor képződménye, ama projek-

tiv sugársorokat a kúpszelet síkján kívül fekvő $M$ pontból projicziáló síksorok, és ama pontsorokat az $M$-ből projicziáló sugársorok projektivek. És mert e síksoroknak és sugársoroknak képződménye a $k^{(2)}$ kúpszeletet, illetve a $\bar{k}^{(2)}$ sugársort az $M$ pontból projicziáló II. r. kúp, illetve II. o. síksor, azért a II. o. síksortól beburkolt II. o. kúp szintén II. r. kúp. A II. r. és II. o. kúp tehát nem különbözik egymástól.

Meg akarjuk még e helyen jegyezni, hogy ha a két projektiv síksor nem perspektiv, de tengelyei párhuzamosak, akkor képződményük egy különös II. r. kúp, melyet *II. r. hengernek* nevezünk. A hengernek alkotói mind párhuzamosak egymással.

4. Két projektiv síksornak képződménye, ha azoknak tengelyei nem metszik egymást, egy *sugársereg*. Minthogy a síksoroknak egyes megfelelő elemei folytonosan következnek egymásra, azért a sugárseregnek egyes sugarai is folytonosan fognak egymásra következni, és így egy felületen lesznek, melyet *egyágú hyperboloidnak*, vagy rövidebben, mert ebben az egész könyvben csak az egyágú hyperboloidról szólunk, csak hyperboloidnak nevezünk. Magát a sugársereget közelebbről meghatározva, általában *hyperboloidikus sugárseregnek* mondjuk, de ha annak egy sugara végtelen távol van, akkor a sugársereget paraboloidikusnak, a felületet pedig, melyen e sugársereg rajta van: *hyperbolikus paraboloid*-nak szokás nevezni. A sugárseregnek egyes sugarai, a rajtuk keresztül menő hyperboloidnak, vagy hyperbolikus paraboloidnak *alkotói*.

A sugárseregről, ugyanoly módon, mint az a II. r. kúp esetében történt, kimutatható, hogy annak metszése minden oly síkkal, mely a sugársereget képező két síksor egyikének tengelyén sem megy keresztül — szintén kúpszelet.

Hátra volna végre oly két projektiv pontsornak $t$ és $t_1$-nek, sugárképződményét megismerni, mely pontsoroknak tartói egymást nem metszik. De könnyen belátható, hogy a származó képződmény ismét egy sugársereg lesz, mert a $t$ pontsornak pontjait a $t_1$ egyenesből projicziáló síksor projektiv, a $t_1$ pontsornak pontjait a $t$ egyenesből projicziáló síksorral és e síksorok megfelelő síkjainak metszővonalai, egyszersmind összekötő egyenesei ama pontsorok megfelelő pontjainak.

5. Ezek szerint a három alapalakzat: a pontsor, a sugársor és a síksor közül kettő-kettőnek, mely projektiv vonatkozású, de nem perspektiv helyzetű, következő dualisan megfelelő képződménye van:

1. A *kúpszelet* (II. r. görbe), melynek pontjai két ugyanegy síkban fekvő és általános helyzetű projektiv sugársor megfelelő elemeinek, vagy egy síksor és egy vele projektiv és általános helyzetű sugársor megfelelő elemeinek metszőpontjai.

2. A *II. o. síksor* (és az attól beburkolt II. r. kúp), melynek síkjai két ugyanegy középpontú, de általános helyzetű projektiv sugársor megfelelő elemein, vagy egy pontsor és egy vele projektiv és általános helyzetű sugársor megfelelő elemein mennek keresztül.

3. A *II. r. kúp*; ennek alkotói oly két projektiv vonatkozású és nem perspektiv helyzetű síksor megfelelő síkjainak metszővonalai, mely síksorok tengelyei ugyanegy ponton mennek keresztül.

4. A *II. o. sugársor* (és az attól beburkolt kúpszelet), melynek sugarai két ugyanegy síkban fekvő projektiv vonatkozású, de nem perspektiv helyzetű pontsor megfelelő elemein mennek keresztül.

5. A *sugársereg* (valamint az azoktól képezett hyperboloid felület), melynek sugarai vagy alkotói oly két projektiv pontsor megfelelő pontjain mennek keresztül, melynek tartói egymást nem metszik.

síksor megfelelő síkjainak metszővonalai, melynek tengelyei egymást nem metszik.

*Staudt* e nyolcz alakzatot: a pontsort és a kúpszeletet, mint pontok sokaságát, az I. és II. o. sugársort, a II. r. kúpot és a sugársereget, mint sugarak sokaságát, végre az I. és a II. o. síksort, mint síkok sokaságát, mely sokaságok mindannyian egyszeresen végtelenek ($\infty^1$): *elemi alapalakzatoknak* nevezte. Ezen elemi alapalakzatok közül bármely kettő egymásra projektiv vonatkoztatható és így új alakzatok képzésére alkalmazható.

Ha felveszszük, hogy az elemi alapalakzatok elemeinek száma $\infty^1$, *akkor a síkban* $\infty^2$ *pont és* $\infty^2$ *egyenes van*; mert a sugársor ($\infty^1$) sugarainak ($\infty^1$) pontjai betöltik az egész síkot pontokkal, továbbá pontsor ($\infty^1$) pontjaiból kisugárzó ($\infty^1$) sugarak ugyanegy síkban teljesen betöltik ezt a síkot sugarakkal (egyenesekkel).

*A térben* $\infty^3$ *pont és* $\infty^3$ *sík van.* Ugyanis valamely a síkon kívül fekvő *A* pontból az *a* sik $\infty^2$ pontjához $\infty^2$ sugár vezethető és az ezeken levő ($\infty^1$) pontok betöltik az egész tért pontokkal; továbbá valamely sík $\infty^2$ egyenesének $\infty^1$ síkja van és mindezek betöltik a tért síkokkal.

*A térben* $\infty^4$ *egyenes van,* mert pl. az $\alpha$ sík $\infty^2$ pontjából a $\beta$ sík $\infty^2$ pontjához vezetett egyenesek betöltik az egész tért egyenesekkel.

II. FEJEZET.

# A másodrendű kúp.

## 4. §. A másodrendű kúp származtatása és polaristulajdonságai.

1. Láttuk az előbbiekben, hogy a II. r. kúp alkotói oly két projektiv síksor megfelelő síkjainak közös sugarai, melynek tengelyei ugyanegy, egymásnak meg nem felelő síkban feküsznek; továbbá, hogy a II. o. kúp érintősíkjai oly két projektiv sugársor megfelelő sugarainak összekötő síkjai, melynek közös középpontja, de különböző síkja van és e síkoknak metszőegyenese nem megfelelőleg közös sugár a két sugársorban. A II. r. és a II. o. kúp e származásánál fogva minden síktól, mely nem megy keresztül a képző síksorok tengelyeinek metszőpontján, illetve a sugársoroknak közös középpontján, egy kúpszeletben metszetik, és ezért a II. r. és a II. o. kúp nem különbözik egymástól. E szerint:

*A II. r. kúp alkotói és érintősíkjai, projicziáló sugarai, illetve projicziáló síkjai egy kúpszelet pontjainak és érintőinek a kúpszelet síkján kivül fekvő pontból.*

A II. r. kúpnak e tulajdonsága arra alkalmas, hogy a kúpszelet ismert projektiv tulajdonságait, azaz oly tulajdonságokat, melyek projicziálás által nem vesznek el, a II. r. kúpra átvihessük. E projektiv tulajdonságok következő tételekből származnak:

projektiv pontsorokat és sugársorokat pontokból vagy tengelyekből projicziáló sugársorok és síksorok projektivek.

projektiv síksorokból és sugársorokból egyenesek vagy síkok által kimetszett pontsorok vagy sugársorok projektivek.

2. Ismeretes a kúpszeletekről a következő két alaptétel: a kúpszelet pontjait annak tetszés szerinti két pontjából projicziáló sugársorok projektivek, és a kúpszelet érintői annak két tetszésszerinti érintőjét projektiv pontsorokban metszik. Ezekből a II. r. kúpra vonatkozólag származik:

Azok a síksorok, melyek egy II. r. kúp alkotóit, annak két tetszésszerinti alkotójából projicziálják, projektivek.

Azok a sugársorok, melyekben egy II. r. kúp érintősíkjai annak két tetszésszerinti érintősíkját metszik, projektivek.

Ugyancsak e tételből származik a II. r. kúpra alkalmazott *Pascal*-tétel és *Brianchon*-tétel, mely ekképen szól:

| | |
|---|---|
| A II. r. kúpba beírt hatél átellenes lapjainak metszővonalai ugyanegy síkban feküsznek. | A II. r. kúp körülírt hatlap átellenes éleit összekötő síkok (a hatlap főátlósíkjai) egymást ugyanegy egyenesben metszik. |

Minthogy a valós kúpszeletnek poláris tulajdonságai a fönnebbi alaptételből származtathatók le, a valós II. r. kúpnak úgynevezett poláris tulajdonságai is a fönnebbi tételekből vezethetők le. De hogy e tulajdonságokról, melyek általában függetlenek attól, hogy a II. r. kúp valós vagy képzetes-e, szólhassunk, induljunk ki egy síkbeli poláris-rendszerből (P. G. E. 15. §.), melyet e könyvben *polárismezőnek* akarunk nevezni.

A polárismező tudvalevőleg oly vonatkozása a sík $\infty^2$ számú pontjainak, azaz a *pontmezőnek*, és $\infty^2$ számú egyeneseinek vagy sugarainak, azaz a *sugármezőnek*, hogy minden $t$ pontsor pontjainak egy $T$ sugársor sugarai felelnek meg, s mely megfelelő sorok egymás irányában involucziós fekvésűek. Ily különnemű soroknak involucziós fekvése azt jelenti, hogy a $t$ pontsort a $T$ középpontból projicziáló sugársor a $T$ sugársorral involucziós, vagy a mi ugyanaz, a $t$ pontsor tartója a $T$ sugársort egy a $t$ pontsorral involucziós pontsorban metszi. A megfelelő pontot és sugarat, mint a milyen a polárismezőben a $T$ és $t$ is, pólus és polárisnak, minden $Q$ pontot, mely egy $P$ pont polárisán, $p$-n, fekszik a $P$-hez kapcsolt pólusnak, és minden $q$ sugarat, mely a $p$ sugár pólusán, $P$-n, megy keresztül a $p$-hez kapcsolt polárisnak nevezzük. A polárismezőnek pedig az a tulajdonsága van, hogyha valamely pont a polárisán fekszik, tehát a pont kapcsolt pólusával, és így egyszersmind a pontnak polárisa kapcsolt polárisával egyesül, akkor a polárismezőben végtelen sok ily pont és sugár van; e pontok egy kúpszeleten feküsznek, a sugarak pedig ennek a kúpszeletnek érintői. E kúpszeletet a polárismező *rendigörbéjének* vagy *vezető kúpszeletének* (direktrixjének) nevezzük. Ha ellenben a polárismezőben nincsen olyan pont, mely polárisán fekszik, akkor a polárismező rendigörbéjéről azt mondjuk, hogy az képzetes kúpszelet. De e képzetes kúpszelet, mely nem képződménye két valós sugarakból álló projektiv sugársornak, mindama poláris tulajdonságokban megegyezik a valós kúpszelettel, melyek nem vonatkoznak a kúpszeletek pontjainak vagy érintőinek valós vagy képzetes mineműségére.

3. Ezeket előre bocsátva, legyen az $\varepsilon$ síkban egy polárismező megadva és projicziáljuk az $\varepsilon$ síkban fekvő pontmezőt és sugár-

mezőt egy a síkon kívül fekvő $M$ pontból sugarakkal és síkokkal. E projicziáló sugarakat (számra $\infty^2$) *sugárnyalábnak* és e projicziáló síkokat ($\infty^2$) *síknyalábnak*, az $M$ pontot pedig a *nyaláb középpontjának* nevezzük. A pontmező, a sugármező, a sugárnyaláb és a síknyaláb, minthogy kétszeresen végtelen sok ($\infty^2$) pontot, sugarat, illetve síkot vagy általánosan $\infty^2$ elemet foglal magában, *másodfokozatú alapalakzat*, míg a pontsor, a sugársor és a síksor, mert elemeinek sokasága $\infty^1$ *elsőfokozatú alapalakzat.*

A térben fennforgó dualitási elv szerint a pontmezőnek a síknyaláb, a sugármezőnek a sugárnyaláb, a pontmező egy pontsorának a síknyaláb egy síksora, a sugármező egy sugársorának a sugárnyaláb egy sugársora a dualis alakzata. Úgy mikép a pont- és sugármezőben megvan a dualitási elv, mely szerint a pontnak az egyenes (sugár) felel meg a síkban, úgy megvan e dualitási elv a sugár- és síknyalábban is, mely szerint a nyaláb egy sugarának egy sík felel meg a nyalábban.

Az $M$ sugárnyalábnak és síknyalábnak oly elemeit, melyek az $\varepsilon$ polárismezőnek pólus és polárisait projicziálják, *polárissugárnak* és *polárissíknak* nevezzük. E szerint, ha a $T$ pontnak az $\varepsilon$ polárismezőben polárisa a $t'$ egyenes, akkor az $M$ nyalábban az $MT \equiv t$ sugárnak polárissíkja az $[Mt'] \equiv \tau$ sík és a $\tau$ síknak polárissugara a $t$ sugár. A $t$ sugáron keresztül menő síkoknak polárissugarai $t$-nek polárissíkjában, $\tau$-ban, egy sugársort képeznek, mely ama síksor irányában involucziós fekvésű. Ez pedig annyit jelent, hogy e sugársort a $t$-ből projicziáló síksor involucziós az előbbi síksorral, vagy a mi ugyanazt fejezi ki: a síksor nyoma a $\tau$ síkon a sugársorral involucziós sugársort képez. — A sugárnyalábot és a síknyalábot ebben a kölcsönös helyzetben, melyet elfoglalnak, együttvéve *polárisnyalábnak*, minden $r$ sugarat a nyalábban, mely a nyaláb $p$ sugarának polárissíkjában fekszik a $p$-hez *kapcsolt polárissugárnak*, és minden $\rho$ síkot, mely egy $\pi$ sík $p$ polárissugarán megy keresztül, a $\pi$ síkhoz *kapcsolt polárissíknak* nevezzük. E szerint: *a polárisnyaláb minden síkjában a kapcsolt polárissugarak involucziós sugársort, és minden sugarának kapcsolt polárissíkjai involucziós síksort képeznek.*

Minthogy az $\varepsilon$ polárismező egybeeső kapcsolt pólusai és egybeeső kapcsolt polárisai a polárismező vezető kúpszeletének pontjai és érintői: a polárismezőt az $M$ pontból projicziáló polárisnyalábban az egybeeső kapcsolt polárissugarak és polárissíkok egy II. r. kúpnak alkotói, illetve érintősíkjai. Ezt a polárisnyalábtól meghatározott II. r. kúpot a nyaláb *rendi-* vagy *vezető kúpjának*

(direktrixjének) nevezzük s a szerint, a mint az $\varepsilon$ polárismező vezető kúpszelete valós vagy képzetes volt, a polárisnyalábnak vezető kúpja is ugyanilyen lesz.

4. Ha a polárisnyaláb meghatározásához szükséges adatok ismeretesek, melyek olyanok, mintha a polárisrendszer meghatározására szolgáló adatok egy pontból projicziáltatnak, akkor azok meghatározzák a polárisnyaláb vezető kúpját. Viszont minden II. r. kúp meghatároz egy polárisnyalábot, melynek a kúp vezető kúpja, s melyről azt mondjuk, hogy a kúp által *indukáltatik*.

Akkép, mint a II. r. kúp, minden síkot, mely nem megy középpontján keresztül, kúpszelet szerint metsz: a polárisnyaláb is, legyen annak vezető kúpja valós vagy képzetes egy tetszésszerinti síkot, mely nem megy középpontján keresztül, polárismezőben metsz. Ugyanis az $M$ polárisnyalábnak egy tetszésszerinti síksora $t(\alpha\beta\gamma\ldots)$ és e sor poláris sugaraitól képezett $(M, \tau)$ sugársora involucziós fekvésű lévén, minden $\varepsilon$ síkot involucziós fekvésű sugársorban, illetve pontsorban metsz, s ezért a polárisnyalábnak metszése az $\varepsilon$ síkkal egy polárismező lesz. Úgy, mikép a polárismező tulajdonságai a vezető kúpszeletének poláris tulajdonságai: a polárisnyalábnak tulajdonságai, a vezető kúpjának, tehát a II. r. kúpnak *poláris tulajdonságai*. Ezért oly tételekben, melyek a II. r. kúpnak poláris tulajdonságaira vonatkoznak, egyaránt használhatjuk a polárisnyaláb vagy II. r. kúp kifejezést.

Állítsuk most össze a kúpszeletek poláris tulajdonságaiból (P. G. E. 11. §.) folyó, és II. r. kúpra közvetlen átvihető poláris tulajdonságokat.

Ha a II. r. kúp csúcsán keresztül menő

$t$ sugárnak polárissíkja $\tau$, akkor a $t$-n keresztül fektetett síkok a kúpot oly alkotópárok szerint metszik, melyek a $t$ és $\tau$-tól harmonikusan vannak elválasztva. Ez alkotópárok a kúp tetszésszerinti alkotójából involucziós síksorral projicziáltatnak; s mindez involucziós síksorok a $\tau$ síkot ugyanegy involucziós sugársorban metszik, melynek társsugarai kapcsolt polárissugarak a kúpra vonatkozólag.

$\tau$ síknak polárissugara $t$, akkor a kúpnak oly érintősíkpárja, mely egymást a $\tau$-ban metszi, a $\tau$ és $t$-től harmónikusan van elválasztva. E síkpárok a kúpnak tetszésszerinti érintősíkját involucziós sugársorban metszik; s minden érintősíkon az ekkép kimetszett sugársorok a $t$ sugárból ugyanegy involucziós síksorral projicziáltatnak, melynek társsíkjai kapcsolt polárissíkok a kúpra vonatkozólag.

Minden a $\tau$-val párhuzamos $\varepsilon$ sík a kúpot és a tőle indukált polárisnyalábot oly kúpszeletben (vagy polárismezőben) metszi, melynek középpontja és kapcsolt átmérőpárjai a $\tau$ polárissugárnak, $t$-nek, illetve a $t$-n keresztül menő kapcsolt polárissíkoknak metszései az $\varepsilon$ síkkal. E kimetszett kapcsolt átmérőpárok tehát párhuzamosak a $\tau$-ban fekvő kapcsolt polárissugarakkal. A kimetszett kúpszelet ellipsis, hyperbola vagy parabola, a szerint, a mint a kapcsolt polárissíkok, vagy a mi ugyanaz, a $\tau$-ban fekvő kapcsolt polárissugarak elliptikus, hyperbolikus, vagy parabolikus involucziós sort képeznek, vagy még más szóval kifejezve: a szerint, a mint a $\tau$ sík a kúpot két képzetes, két valós vagy végre két egybeeső alkotó szerint metszi. Minden pont középpontja egy, a II. r. kúpból (és a tőle indukált polárisnyalábból) kimetszhető kúpszeletre (polárismezőre) nézve; a sík állása megegyezik azon síkkal, mely a felvett ponton és a kúp csúcsán keresztül menő sugárnak polárissíkja. — Minden $g$ egyenesen keresztül lehet oly síkot fektetni, hogy annak metszése a kúppal (a polárisnyalábbal) egy oly kúpszelet (polárismező), melynek átmérője a $g$ egyenes. A kúpnak $M$ csúcsán keresztül menő és a $g$-vel párhuzamos $p$ sugárnak polárissíkja $\tau$ a $g$-t egy $O$ pontban metszi, mely a keresett kúpszeletnek középpontja; ennek síkja pedig az $OM$ sugár polárissíkjával párhuzamos.

5. Minden oly háromélet a polárisnyalábban, vagy a II. r. kúpra vonatkozólag, melynek minden éle a szemben fekvő lapnak polárissugara (s mely tehát a polárismező vagy kúpszelet polárisháromszögének felel meg a nyalábban), a polárisnyaláb vagy a II. r. kúp *polárisháromélének* nevezzük. A polárisnyaláb polárisháromléleinek száma $\infty^3$.

A valós II. r. kúp polárisháromélének egyik lapján fekvő kapcsolt polárissugarak és így az evvel szemben fekvő élen keresztül menő kapcsolt polárissíkok elliptikus, míg a többi két lapon fekvő, illetve a többi két élen átmenő kapcsolt elempárok hyperbolikus involucziós sort képeznek. A polárisháromélnek két lapja tehát a kúpot valós alkotópárokban metszi, és két éléből valós érintősíkpárok fektethetők a kúphoz.

Minthogy a polárismező két polárisháromszögének szögpontjai kúpszeleten feküsznek, és e polárisháromszögek oldalai egy másik kúpszeletnek érintői, azért a polárisnyaláb két polárisháromélének élei egy II. r. kúpnak alkotói, és lapjai egy másik II. r. kúpnak érintősíkjai.

Tekintve, hogy egy $ABC$ háromszög szögpontjainak polárisai a polárismezőben, az $ABC$-vel perspektiv háromszögnek oldalai

következik: Ha a polárisnyalábban levő *abc* háromél éleinek polárissíkjai $\alpha\beta\gamma$, úgy e síkoktól képezett háromél az *abc*-vel perspektiv helyzetű a nyalábban, azaz: az *a*, $\beta\gamma$; *b*, $\gamma\alpha$; *c*, $\alpha\beta$ éleket összekötő síkok ugyanegy *o* egyenesen mennek keresztül, és az $\alpha$, *bc*; $\beta$, *ca*; $\gamma$, *ab* síkpároknak metszőegyenesei egy $\omega$ síkban feküsznek, mely az *o* sugárnok polárissíkja a nyalábban.

Minthogy a polárismező síkjában fekvő minden kúpszelet pontjainak és érintőinek polárisai és pólusai egy másik kúpszeletnek érintői és pontjai, azért: Egy polárisnyaláb azon sugarainak és síkjainak polárissíkjai és polárissugarai, melyek egy II. r. kúpnak alkotói és érintősíkjai, egy másik II. r. kúpnak érintősíkjai és alkotói. A két kúpról azt mondjuk, hogy az egyik a másiknak *polárisalakzata* a polárisnyalábban.

6. A kúpszeletre (polárismezőre) vonatkozó HESSE-tételek a polárisnyalábra alkalmazva, ekkép fejezhetők ki:

Ha az $aa_1$, $bb_1$ sugárpárok kapcsolt polárissugarak egy polárisnyalábban, akkor az $[ab]$, $[a_1b_1]$ és az $[ab_1]$, $[a_1b]$ síkpárok *c*, $c_1$ metsző egyenesei, azaz az $abca_1b_1c_1$ négylapnak szemben fekvő élei $aa_1$, $bb_1$, $cc_1$ kapcsolt polárissugarak a polárnyalábban.

Egy olyan négylapot a polárisnyalábban, melynek szemben fekvő élei kapcsolt polárissugarak: *polárisnégylapnak* nevezünk.

Ha az $\alpha\alpha_1$, $\beta\beta_1$ síkpárok kapcsolt polárissíkok egy polárisnyalábban, akkor az $(\alpha\beta)$, $(\alpha_1\beta_1)$ és az $(\alpha\beta_1)$, $(\alpha_1\beta)$ sugárpárokat összekötő síkok $\gamma$, $\gamma_1$, azaz az $\alpha\beta\gamma\alpha_1\beta_1\gamma_1$ négyélnek szemben fekvő lapjai $\alpha\alpha_1$, $\beta\beta_1$, $\gamma\gamma_1$, kapcsolt polárissíkok a polárisnyalábban.

Egy olyan négyélet a polárisnyalábban, melynek szemben fekvő lapjai kapcsolt polárissíkok: *polárisnégyélnek* nevezünk.

Minthogy az *a* és a *b* sugarak mindegyikét $\infty^2$-szor vehetjük fel a nyalábban és az *a* és *b*-hez $\infty^1$ számú kapcsolt polárissugár van, azért egy polárisnyaláb polárisnégylapjainak és polárisnégyéleinek száma $\infty^6$.

A polárisnégyélnek három élét, *abc*-t, tetszésszerint vehetjük fel a polárisnyalábban *M*-ben; ez éleknek $\alpha\beta\gamma$ polárissíkjai az *M*(*abc*)-vel perspektiv háromélnek lapjai. Ha a megfelelő éleket összekötő síkok metszőegyenese a *d*, és a megfelelő lapoknak metszőegyenesei a $\delta$ síkban feküsznek, akkor az *M*(*abcd*) polárisnégyél és az $M(\alpha\beta\gamma\delta)$ polárisnégylap az *M* nyalábban. Ebből is látható, minthogy a felvett *abc* élek mindegyikének $\infty^2$ helyzetet

adhatunk a nyalábban, hogy a polárisnégyélnek száma a polárisnyalábban $\infty^6$.

Egy polárisháromél és egy tetszésszerinti sugár (sík) a polárisnyalábban polárisnégyélet (polárisnégylapot) képez. Mert mind a három sík, mely a polárisháromél éleit a felvett sugárral összeköti kapcsolt polárissíkja a polárisháromél egyes lapjainak.

7. A polárisnégyélekről és polárisnégylapokról REYE szerint a következő dualis tételeket állíthatjuk fel:

Ha a polárisnyaláb két polárisnégyélének két közös éle van, akkor azoknak összes élei egy II. r. kúpon feküsznek.

polárisnégylapjának két közös lapja van, akkor azoknak összes lapjai egy II. r. kúpnak érintősíkjai.

Ugyanis, ha az $M(abcd)$, $M(abc'd')$ polárisnégyélek $abcdc'd'$ éleinek polárissíkjai $\alpha\beta\gamma\delta\gamma'\delta'$, akkor, tekintve, hogy egy síksor polárissugaraival involucziós fekvésű:

$$a(cdc'd') \barwedge \alpha(\gamma\delta\gamma'\delta') \barwedge b(dcd'c') \barwedge b(cdc'd'),$$

mert az $\alpha\gamma$, $\alpha\delta$ stb. sugarak megfelelőleg a $bd$, $bc$ stb. síkokban feküsznek. Minthogy ezek szerint az $a$ és a $b$ élből a $cdc'd'$ élek projektiv síknégyesekkel projicziálhatók: az $abcdc'd'$ élek egy II. r. kúpnak alkotói.

E tételnek következménye:

Ha a polárisnyaláb egy polárisháromélének és egy polárisnégyélének egy éle közös, akkor az összes élek egy II. r. kúpnak alkotói.

polárisnégylapjának egy közös lapja van, akkor az összes lapok egy II. r. kúpnak érintősíkjai.

Két közös középpontú (konczentrikus) polárisnyalábnak $\infty^4$ közös polárisnégyéle és polárisnégylapja van. Az ily polárisnégyélnek két szemben fekvő lapját $\alpha$, $\beta$-t, tetszésszerint vehetjük fel a nyalábban. Az $\alpha$ és $\beta$ síknak polárissugarait a nyalábokban összekötő $\alpha_1$, illetve $\beta_1$ sík, kapcsolt polárissíkja $\alpha$, illetve $\beta$-nak mindkét nyalábban és így a közös polárisnégyélnek élei, az $\alpha\beta$, $\alpha\beta_1$, $\alpha_1\beta$, $\alpha_1\beta_1$ sugarak. Ily közös polárisnégyélek és lapokról kimutatható, hogy:

Ha két konczentrikus polárisnyaláb két közös polárisnégyélének egy éle közös, akkor ez az él a többi hat szabad éllel együtt egy II. r. kúpon fekszik.

polárisnégylapjának egy lapja közös, akkor ez a lap és a többi hat szabad lap ugyanegy II. r. kúpnak érintősíkja.

Legyenek a két polárisnégyélnek élei $abcd$, $ab'c'd'$; azok az élek, melyek az $abb'$ háromélt az egyes nyalábokban polárisnégy-

élekké egészítik ki $p$ és $p'$. Az előbbi tétel szerint az $abb'p$, $abcd$; $abb'p'$, $abcd$; $abb'p$, $ab'c'd'$; $abb'p'$, $ab'c'd'$ polárisnégyélek élei egy-egy II. r. kúpon feküsznek. De a két első kúpnak $abcdb'$ öt közös alkotója lévén, egybeesik; úgyszintén a két utóbbi kúp, mely az $ab'c'd'b$ éleken megy keresztül. Ámde a $p$, $p'$ élek mindkét kúpnak alkotói, tehát a kúpoknak szintén $abb'pp'$ öt közös alkotójuk van; miért is az $abcdb'c'd'$ élek ugyanegy II. r. kúpnak alkotói.

8. Két polárismezőnek (kúpszeletnek), mely ugyanegy síkban fekszik, tudvalevőleg általában csak egy közös polárisháromszöge van, s csak abban az esetben lesz a két polárismezőnek $\infty^1$ közös polárisháromszöge, ha egy sugársor összes sugarainak pólusai a két mezőben ugyanegy pontsornak pontjai, vagy a mi ugyanazt fejezi ki, ha a polárismezőknek vezető kúpszeletei kettősérintésűek. Hasonlókép *két konczentrikus polárisnyalábnak általában egy, s a nyalábok különös helyzeténél $\infty^1$ közös poláris háromél van.*

Hogy két konczentrikus, de különben általános helyzetű, polárisnyalábnak, $Mp$, $Mp'$-nek, melynek középpontja az $M$ pont, közös polárisháromélét megtaláljuk, analogusan járunk el, mint két kúpszelet közös polárisháromszögének meghatározásánál. A nyalábok egy $\sigma$ síkjában fekvő $(M, \sigma)$ sugársor $x$ sugarainak $\xi$ és $\xi'$ polárissíkjai az $(M, \sigma)$ sugársorral és így egymással is projektiv $s$ és $s'$ síksort alkotnak. E két projektiv síksor képződménye egy $\sigma_1^{(2)}$ II. r. kúp, melynek alkotói az $(M, \sigma)$ sugársor $x$ sugaraihoz kapcsolt polárissugarak mindkét polárisnyalábban $Mp$-ben és $Mp'$-ben.

A két konczentrikus polárisnyaláb tehát *Steiner-féle rokonságot* (Projek. Geom. Elemei. 148. p.) létesít az $M$ nyalábban; ebben a nyaláb minden $x$ sugarának az a $\xi\xi'$ sugár felel meg, mely az $x$-hez kapcsolt polárissugár mindkét polárisnyalábra nézve; és a nyaláb minden $\sigma$ síkjában fekvő sugársorának egy $\sigma_1^{(2)}$ II. r. kúp alkotói felelnek meg. Az $M$ nyaláb egy másik síkjának, $\tau$-nak, tehát e Steiner-féle rokonságban megfelel egy másik II. r. kúp $\tau_1^{(2)}$.

A $\sigma_1^{(2)}\tau_1^{(2)}$ kúpoknak egy közös alkotója a $\sigma\tau$ síkok metszővonalához kapcsolt polárissugár; e kúpoknak tehát van még három közös alkotójuk $abc$. Minden ilyen alkotó, pl. az $a$, mindkét nyalábban a $\sigma$ és a $\tau$ sík egy-egy sugarához kapcsolt polárissugár, tehát a rajtuk keresztül menő $\alpha$ síknak polárissugara. Ugyanígy a $b$ és a $c$ sugárnak a két polárnyalábban ugyanegy $\beta$, illetve $\gamma$ sík polárissíkja van. Az $abc$ élektől és az $\alpha\beta\gamma$ síkoktól képezett háromélek azonban egybeesnek. Mert az $\alpha$ síkban fekvő kapcsolt polárissugarak az egyes nyalábokban egy-egy involucziós sort alkotnak, me-

lyeknek egy közös elempárja az $a$-val együtt egy közös polárishárómélnek éleit képezi. Ugyanígy a $\beta$ és $\gamma$ síkokban a közös kapcsolt polárissugárpárok a $b$ és $c$ sugárral egy-egy közös polárishárómélnek élei. De a két polárisnyalábnak egynél több közös polárisharóméle nem lehet, mert már két polárisháromél, melynek nincs közös éle, egyfélekép határoz meg egy polárisnyalábot. Ebből következik, hogy a $bc$, $ca$, $ac$ élek megfelelőleg az $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ síkokban feküsznek, azaz *az* $M(abc) \equiv M(\alpha\beta\gamma)$ *háromélek a két polárisnyalábnak közös polárisháromélét képezik.*

Visszatérve az $(M, \sigma)$ sugársor sugarainak polárissíkjaitól képezett $s$ és $s'$ projektiv síksorokhoz, megtörténhetik, hogy azok perspektiv helyzetűek, tehát egy megfelelőleg közös $\delta$ síkkal bírnak, mely a tetszőlegesen felvett $\sigma$ sík egy $d$ sugarának polárissíkja a két polárisnyalábban. Ugyanígy a tetszésszerinti $\tau$ síkban is van egy $d_1$ sugár, melynek polárissíkjai a nyalábokban, egy $\delta_1$ síkkal esnek egybe. A $d$, $d_1$ sugaraknak $\delta$, $\delta_1$ polárissíkjai egymást egy $p$ sugárban, a $dd_1 \equiv \tau$ síknak polárissugarában metszik, s mert a $\delta$, $\delta_1$ síkok nem mennek a $d_1$, illetve $d$ sugáron keresztül, azért a $\tau$ sík minden sugarának a polárisnyalábokban közös polárissíkjai a $p$ egyenesen mennek keresztül. A két polárisnyalábnak ebben a helyzetben végtelen sok közös polárisharóméle van, melyeknek egy éle $p$ és az ezzel szemben fekvő lapja $\tau$ közös. Ebben az esetben tehát a két polárisnyaláb vezető kúpjai akár valósak, akár képzetesek, egymást két alkotóban, azaz *kettősen érintik*, mely érintési alkotók a $\tau$ síkban fekvő és mindkét polárisnyalábra vonatkozó kapcsolt polárissugarakból álló involucziós sornak kettőssugarai.

9. A polárisnyalábok között legegyszerűbb az úgynevezett *orthogonalis polárisnyaláb* vagy csak *orthogonalis nyaláb*, melynek minden sugara merőleges polárissíkjára, tehát minden sugarán átmenő kapcsolt polárissíkok és minden síkjában fekvő kapcsolt polárissugarak orthogonalis (involucziós) sort képeznek. Az orthogonalis nyaláb minden polárisharóméle orthogonalis, azaz e háromélnek minden élszöge és lapszöge derékszög; minden polárisnégyélének szemben fekvő lapjai és minden polárisnégylapjának szemben fekvő élei derékszöget képeznek. Az orthogonalis nyaláb vezető kúpja képzetes, mert a nyalábban nincsen olyan valós sugár, mely polárissíkjában feküdnék. Minden sík az orthogonalis nyalábot képzetes körben metszi; e körnek valós középpontja a nyaláb $M$ középpontjából a metszősíkra bocsátott merőlegesnek talppontja $O$, s e kör radiusának négyzete: $-MO^2$. Valamennyi orthogonalis nyaláb $(\infty^2)$, a végtelen távol fekvő síkot ugyanegy

polárismezőben metszi, melynek vezető köre képzetes s melyet a *tér végtelen távol fekvő képzetes körének* nevezünk. Az orthogonalis sugársor a síkban analogonja az orthogonális nyalábnak a térben; amaz a sík végtelen távol fekvő egyenesét involucziós pontsorban metszi, melynek kettőspontjai a képzetes körpontok a síkban; ez a tér végtelen távol fekvő síkját polárismezőben metszi, melynek vezető kúpszelete a végtelen távol fekvő képzetes kör. Úgy, mikép az orthogonalis sor meg van határozva középpontja által, az orthogonalis nyalábot is meghatározza annak középpontja.

Minden kúpnak poláris alakzata az orthogonalis nyalábban egy másik kúp, melynek alkotói és érintősíkjai, amannak érintősíkjaira és alkotóira merőlegesek. Két kúpot, mely egymásnak poláris alakzata egy orthogonális nyalábban, *reciprokus kúpnak* nevezünk. Az egyik kúp minden polárisháromélének, polárisnégyélének és polárisnégylapjának poláris alakzata az orthogonalis nyalábban: polárisháromél, polárisnégylapja, illetve polárisnégyél a reciprokus kúpnak, stb.

## 5. §. A polárisnyaláb főtengelyei és fősíkjai.

1. Ismeretes, hogy a polárismező (kúpszelet) síkjában vannak oly pontok és sugarak, mint a középpont, a gyujtópontok, a tengelyek, a végtelen távol fekvő egyenes, melyek a többiektől különös tulajdonságaiknál fogva kiválnak. Ily különös sugarakat és síkokat a polárisnyalábban és vezető kúpja irányában is találunk, ezek: a polárisnyaláb főtengelyei, fősíkjai, fokalis sugarai és cziklikus sikjai.

A polárisnyalábban oly összetartozó polárissugarat és polárissíkot, mely egymásra merőleges, a polárisnyaláb *főtengelyének* és *fősíkjának*, a polárisnyalábban előforduló orthogonalis polárisháromélét pedig a nyaláb fő-polárisháromélének nevezzük. Az orthogonalis nyalábban minden sugár és minden sík főtengely, illetve fősík. Az általános polárisnyalábnak a vele közös középpontú orthogonalis nyalábbal egy közös polárisháromél van; e közös polárisháromélnek élei és lapjai képezik az általános polárisnyalábnak főtengelyeit és fősikjait.

Az általános eljárás szerint (4. §, 8. p.) az általános $M$ polárisnyalábnak és a véle konczentrikus orthogonalis nyalábnak közös polárisháromélét, tehát ama polárisnyalábnak főtengelyeit következőképen szerkesztjük:

Az $M$ polárisnyaláb két tetszésszerinti $\sigma$ és $\tau$ síkjában fekvő $(M, \sigma)$, $(M, \tau)$ sugársoroknak polárissíkjai az $s$ és $t$ síksorok; ugyan-

csak az $(M, \sigma)$ és $(M, \tau)$ sugársorok sugaraira merőleges síkok az $s'$ és $t'$ síksorok.

Az $s$ és $s'$, valamint a $t$ és $t'$ síksorok projektivek lévén, képződményük a $\sigma_1^{(2)}$, illetve a $\tau_1^{(2)}$ II. r. kúp, és e kúpoknak egyik közös $m_1$ alkotójuk a $\sigma\,\tau \equiv m$ sugár polárissíkjában fekvő és a $\sigma\tau \equiv m$-re merőleges egyenes. A $\sigma_1^{(2)}$, $\tau_1^{(2)}$ kúpoknak e közös valós alkotóján $m_1$-en kívül van még legalább egy közös valós alkotójuk $a$. Az $a$-nak polárissíkjában, $\alpha$-ban, a kapcsolt polárissugarak között van legalább egy pár valós $bc$, mely mindig merőleges egymásra; ezek és az $a$ sugár képezik az $M$ polárisnyalábnak mindenkor valós főtengelyeit; e főtengelyeket páronként összekötő $bc \equiv \alpha$, $ca \equiv \beta$, $ab \equiv \gamma$ síkok pedig annak fősíkjait.

De ha a polárisnyaláb $\alpha$ síkjában a kapcsolt polárisok orthogonalis sort képeznek, akkor e síkban végtelen sok főtengely van. Az ily specziális polárisnyalábot *rotatórikusnak* vagy *forgási polárisnyalábnak*, annak $a$ főtengelyét *forgástengelynek*, a nyaláb vezető kúpját, mely valós vagy képzetes lehet, *forgáskúpnak* nevezzük.

Ha végre a polárisnyalábban két sík, $\alpha$ és $\beta$, merőleges polárissugarára, $a$-ra és $b$-re, és azonkívül az $\alpha$ és $\beta$-ban a kapcsolt polárissugarak orthogonalis sort képeznek, akkor a nyaláb egy tetszésszerinti $\sigma$ síkjának polárissugara $s$, mint az $\alpha\sigma$ és a $\beta\sigma$ sugarakra merőlegesen álló és az $a$-n, illetve a $b$-n keresztül menő síkoknak metszővonala, merőleges a $\sigma$-ra. A polárisnyaláb tehát ebben az esetben *orthogonalis* nyaláb.

2. A polárisnyaláb és vezető kúpja főtengelyeinek stereometriai szerkesztését az előbbiekben kifejtettük. E szerkesztés megengedi, hogy a nyalábban két síkot $\sigma$ és $\tau$-t tetszésszerint vehessünk fel és azért lássuk, hogy a szabadon választható $\sigma$ és $\tau$ sík czélszerű felvétele mikép egyszerüsíti a szerkesztést. Oldjuk meg tehát a gyakorlati czélnak megfelelőleg a következőképen fogalmazott feladatot:

*Adva van az $\varepsilon$ síkban a $k^{(2)}$ kúpszelet (pl. ellipsis) és $\varepsilon$-nak síkján kívül az $M$ pont, melynek $M'$ derékszögű projekcziója $\varepsilon$-ra és $r$ távolsága az $\varepsilon$ síktól ismeretes; szerkesztendők annak az $M.k^{(2)}$ kúpnak főtengelyei, mely a $k^{(2)}$ kúpszeletet az $M$ pontból projicziálja* (3. ábra.).

A feladat lényegében nem más, mint a $k^{(2)}$ kúpszeletre vonatkozólag egy oly $ABC$ polárisháromszöget szerkeszteni, mely az $M$ pontból orthogonális (derékszögű) hároméllel $M(abc)$-vel projicziálható. Vagy pedig: a $k^{(2)}$ kúpszeletnek és annak a képzetes körnek, $k^{i(2)}$-nek

közös polárisháromszögét szerkeszteni, melynek középpontja az $M'$ és radiusának négyzete $-r^2$, azaz mely $k_i^{(2)}$ képzetes körben az $M$ középpontú orthogonalis nyaláb az $\varepsilon$ síkot metszi. E szerint két adott polárismezőnek közös polárisháromszögét, $ABC$-t, kell meghatározni.

A $k^{(2)}$, $k_i^{(2)}$ görbék $k^{(2)}$ $k_i^{(2)}$ Steiner-féle rokonságot állapítanak meg az $\varepsilon$ síkban; ennél minden $P$ pontnak az a $P_1$ felel meg, melyben a $P$-nek a $k^{(2)}$ és $k_i^{(2)}$-re vonatkozó polárisai egymást metszik, mely tehát a $P$-hez kapcsolt pólus a $k^{(2)}$-re és a $k_i^{(2)}$-re nézve. Minden $s$ egyenesnek az $ABC$ háromszög körül írt oly $s_1^{(2)}$ kúpszelet felel meg, mely az $s$ pontjaihoz a $k^{(2)}$- és $k_i^{(2)}$-re vonatkozó kapcsolt pólusokat tartja. Az $s$-n és az $s_1^{(2)}$-en a megfelelő pontok projektiv sorokat képeznek s ezért minden az $s$-n fekvő involucziós sornak involucziós sor felel meg az $s_1^{(2)}$ kúpszeleten. Ha a $t$ egyenes az $s_1^{(2)}$ kúpszeletet a $JK$ pontokban metszi, akkor a $t$-nek megfelelő $t_1^{(2)}$ kúpszelet is metszeni fogja az $s$ egyenest a $JK$-nak megfelelő $J_1K_1$ pontokban. A $t$ egyenesen fekvő és az $s_1^{(2)}$-re vonatkozólag kapcsolt pólusoknak, melyek tehát a $JK$ pontpárt harmónikusan választják el és involucziót képeznek, egy involuczió fog megfelelni a $t_1^{(2)}$ kúpszeleten, melynek társpontjai a $J_1K_1$ pontokat választják el harmónikusan. Ugyanígy az $s$ egyenesen fekvő $t_1^{(2)}$-re vonatkozó kapcsolt pólusoknak, melyek a $J_1K_1$ pontpárt választják el harmónikusan és igy szintén involucziót képeznek, az az involuczió fog megfelelni az $s_1^{(2)}$ kúpszeleten, melynek társpontjai a $JK$ pontokat választják el harmónikusan.

Ez utóbbi állítás általánosabban kifejezve (azaz ha a $JKJ_1K_1$ pontok nem valósak, tehát a $t$ és $s$ nem metszi az $s_1^{(2)}$ és $t_1^{(2)}$-et valós pontokban), szintén igaz marad t. i.:

„Ha az $s$ és a $t$ egyenesnek a $k^{(2)}$ $k_i^{(2)}$ Steiner-féle rokonságban az $s_1^{(2)}$ és $t_1^{(2)}$ kúpszeletek felelnek meg, akkor a $t$ egyenesen az $s_{1(2)}$-re vonatkozó kapcsolt pólusoktól képezett involucziónak a $t_1^{(2)}$ kúpszeleten oly involuczió felel meg, melynek involuczió-tengelye az $s$ egyenes, és az $s$ egyenesen a $t_1^{(2)}$-re vonatkozó kapcsolt pólusoktól képezett involucziónak az $s_1^{(2)}$ kúpszeleten oly involuczió felel meg, melynek involuczió-tengelye a $t$ egyenes."

Ugyanis a $t$ egyenes valamely $P$ pontjából kisugárzó sugaraknak a $k^{(2)}$ $k_i^{(2)}$ Steiner-féle rokonságban oly kúpszeletsor felel meg, melynek alappontjai az $ABC$ polárisháromszögnek szögpontjai és a $P$-nek megfelelő $P_1$ pont. Ama sugársor sugarai, köztük a $t$ is, az $s_1^{(2)}$-et az $I_{s1}$ involuczióban, a megfelelő kúpszeletsor pedig, melynek egyik eleme a $t_1^{(2)}$ kúpszelet, az $s$ egyenest egy, annak

megfelelő $I_s$ involuczióban metszi. A $P$ pontnak az $s_1^{(2)}$-re vonatkozó polárisa keresztül megy a $t$-nek $s_1^{(2)}$-re vonatkozó $T$ pólusán és az $s_1^{(2)}$-et, ha a $JK$ pontpár (a $t$ és az $s_1^{(2)}$ metszőpont párja) nem volt valós, az $L_1N_1$ valós pontpárban metszi, mely az $I_{s_1}$ involucziónak kettőspontpárja. A $L_1N_1$-nek megfelelő pontpár $LN$ a $k^{(2)}$ $k_i^{(2)}$ Steiner-féle rokonságban $I_s$ involucziónak kettőspontpárja, tehát a $t_1^{(2)}$-re vonatkozólag kapcsolt póluspár.

Ha most a $P$-t tovamozgatjuk a $t$-n, akkor evvel az $L_1N_1$ sugár a $T$ körül forog és az $L_1N_1$ pontpárok is változnak az $s_1^{(2)}$-en és az $LN$ pontpárok az $s$-en. Ez utóbbik, mint a $t_1^{(2)}$-re kapcsolt pólusok involucziót képeznek az $s$-en és a nekik megfelelő kapcsolt pólusok involucziót képeznek az $s_1^{(2)}$-en; de ennek az involucziónak involuczió-tengelye a $T$ pontnak az $s_1^{(2)}$-re vonatkozó polárisa $t$ — és ezt fejezi ki a „ "-ben foglalt tétel.

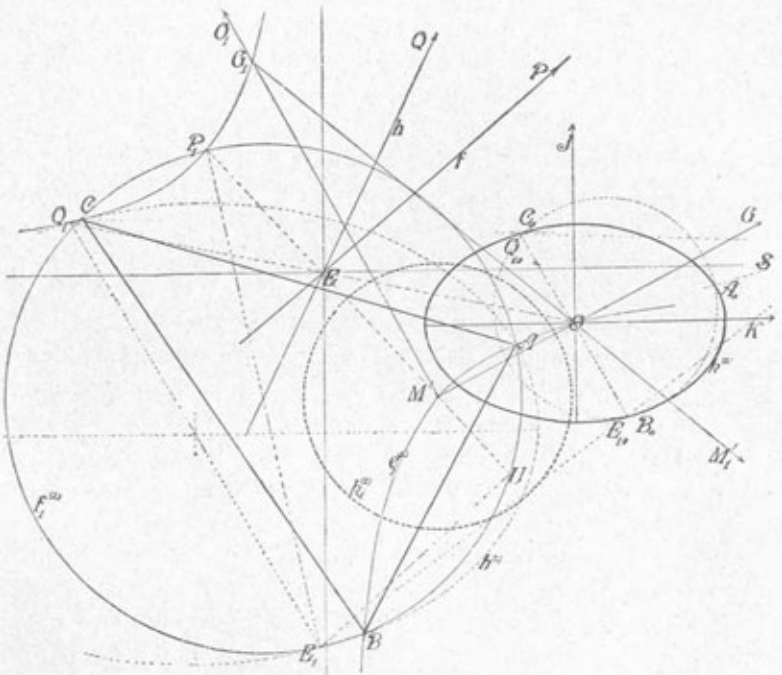
A tétel természetesen még abban a különös esetben is igaz marad, ha az $s$ és $t$ egyenesek és így az $s_1^{(2)}$ és $t_1^{(2)}$ kúpszeletek egybeesnek. Tehát:

„Ha a $k^{(2)}$ $k_i^{(2)}$ Steiner-féle rokonságban az $s$ egyenesnek az $s_1^{(2)}$ kúpszelet felel meg, akkor az $s$-en levő és az $s_1^{(2)}$-re vonatkozó kapcsolt pólusoktól képezett involucziónak a $k^{(2)}$ $k^{(2)}$ Steiner-féle rokonságban oly involuczió felel meg az $s_1^{(2)}$-en, melynek involuczió-tengelye az $s$ egyenes és igy pólusa az $s$-nek az $s_1^{(2)}$-re vonatkozó pólusa."

3. Nézzük most, hogy alkalmazhatók e tételek a $k^{(2)}$ kúpszelet és az $M$ ponttal adott $M.k^{(2)}$ kúp főtengelyeinek egyszerű meghatározására. (3. ábra.)

Az $\varepsilon$ sík végtelen távol fekvő $e_\infty$ egyenesének a $k^{(2)}$ $k_i^{(2)}$ Steiner-féle rokonságban az $e_1^{(2)}$ egyenoldalú hyperbola felel meg. Ugyanis ha a $k^{(2)}$ tengelyeinek végtelen távol fekvő pontjait $JK$-val jelöljük, akkor e pontoknak a $k^{(2)}$-re és a $k_i^{(2)}$-re vonatkozó polárisai egymást a $K$, illetve a $J$ pontban metszik, melyek az $e_1^{(2)}$ kúpszeletnek végtelen távol fekvő pontjai; azaz az $e_1^{(2)}$ kúpszelet egyenoldalú hyperbola. Az $e_1^{(2)}$ a $k_i^{(2)}$ körnek $M'$ középpontján és a $k^{(2)}$ ellipsisnek $O$ középpontján megy keresztül; mert ha a $k^{(2)}$-nek az $M'O$ egyenesre merőleges átmérője és az $M'O$-hoz kapcsolt átmérője az $e_\infty$ egyenest az $O_1$ és $M_1'$ pontokban metszi, akkor az $O_1, M_1'$ pontoknak $k^{(2)}$ és $k_i^{(2)}$-re vonatkozó polárisai az $O, M'$ pontokban találkoznak. Ha az $M'O$ egyenesnek végtelen távol fekvő pontja a $G$, akkor a $G$-nek a $k_i^{(2)}$ és $k^{(2)}$-re vonatkozó $M'O_1$, $OM'_1$ polárisai egymást az $e_1^{(2)}$ hyperbolának $G_1$ pontjában metszik. Ha az $e_1^{(2)}$ hyperbolában írt $O'G_1M'$ háromszög oldalainak felezőpontjain keresztül egyenesc-

ket húzunk, melyek az illető oldalakat a $JK$ pontoktól harmónikusan választják el, azaz a $k^{(2)}$ ellipsis tengelyeivel ugyanoly összegeket képeznek, mint az illető oldalak, akkor ezek az egyenesek egymást az $e_1^{(2)}$-nek $E$ középpontjában metszik, mert ama háromszög oldalakhoz, mint hyperbola-húrokhoz kapcsolt átmérők. [E középpontot a második specziális tételre alapítva akkép is megkaphatjuk, ha azoknak az $\overline{O_1 M'_1 G}$ pontoknak keressük a $k^{(2)} k_i^{(2)}$ Steiner-féle rokonságban a megfelelő pontjait $\overline{OM}, G_1$-et, melyek az $O_1 M'_1 G$ pontokat a $JK$-tól harmónikusan elválasztják; az $\overline{OO}, \overline{M'M}, \overline{G_1 G}$



3. ábra.

egyenesek egymást az $e_\infty$-nek $e_1^{(2)}$-re vonatkozó pólusában, $E$-ben metszik.]

Az $e_1^{(2)}$ egyenoldalú hyperbola már a keresett $ABC$ háromszög körül van irva. De az $ABC$ háromszög körül még egy $f_1^{(2)}$ kört is írhatunk. Hogy azt az $f$ egyenest megtaláljuk, melynek a $k^{(2)} k_i^{(2)}$ Steiner-féle rokonságban az $f_1^{(2)}$ kör felel meg, gondoljunk az előbbi általános tételre: az $e_\infty$-n fekvő és az $f_1^{(2)}$-re vonatkozó kapcsolt pólusoktól képezett involucziós sornak a $k^{(2)}$ $k_i^{(2)}$-ben, az $e_1^{(2)}$-en fekvő oly involucziós sor felel meg,

melynek involuczió-tengelye az $f$ egyenes. De minden orthogonalis sor az $e_\infty$ egyenest az $f_1^{(2)}$ körnek kapcsolt pólusaiban metszi; ebben a sorban társpontok $JK$ és $GO_1$. A $JK$-nak és a $GO_1$-nek a $k^{(2)}$ $k_i^{(2)}$ Steiner-féle rokonságban a $KJ$ és a $G_1O$ pontok felelnek meg az $e_1^{(2)}$-en; a $KJ$ és $G_1O$ egyenesek metszőpontjának $M'_1$-nek az $e_1^{(2)}$-re vonatkozó polárisa tehát az $f$ egyenes. De e poláris az $e_1^{(2)}$-nek $E$ középpontján, az $OG_1$ vonaldarabnak felezőpontján megy keresztül és így a $k^{(2)}$-nek tengelyeivel ugyanolyan szöget képez, mint az $OG_1$.

Vegyünk fel ezután az $f$ egyenesen oly pontpárt, mely az $e_1^{(2)}$-re vonatkozólag kapcsolt póluspár és keressük meg az ennek megfelelő pontpárját a $k^{(2)}$ $k_i^{(2)}$ Steiner-féle rokonságban. E pontpár az $f_1^{(2)}$ körön van és a pontpárnak összekötő egyenese az $e_\infty$ egyenesnek az $f_1^{(2)}$-re vonatkozó pólusán, azaz az $f_1^{(2)}$ körnek középpontján megy keresztül.

Válaszszuk e czélból az $f$ egyenesnek végtelen távol fekvő $P \equiv (fe_\infty)$ pontját és az $E$ pontot. Ezeknek a $k^{(2)}$ és $k_i^{(2)}$-re vonatkozó polárisai egymást a $P_1$ és $E_1$ pontokban metszik, melyek közül a $P_1$ még az $e_1^{(2)}$ hyperbolán is rajta van. ($M'EP_1 \perp EP$, $P_1E = EM'$; az $E$ pontnak a $k_i^{(2)}$-re vonatkozó polárisa az $UE_1$, ha $UE_1 \perp EM'$, $EM'.M'U = r^2$, $U$ az $EM'$ egyenesen van és $M'$ elválasztja az $E$, $U$ pontokat; az $E$-nek $k^{(2)}$-ra vonatkozó polárisa $E_1U$-t az $E_1$ pontban metszi.)

Az $E_1P_1$ vonaldarab az $f_1^{(2)}$ körnek átmérője, annak felező pontja az $f_1^{(2)}$-nek középpontja. Ezzel az $f^{(2)} \equiv ABCP_1E_1$ kör, és az $e_1^{(2)} \equiv ABCM'G_1OP_1$ egyenoldalú hyperbola meg van rajzolva, melyeknek $ABC$ metszőpontjai az $M$. $k^{(2)}$ II. r. kúp főtengelyeinek, $abc$-nek, nyomai az $\varepsilon$ síkon.

4. Czélszerűen lehet még az $ABC$ pontok szerkesztésére egy a $k^{(2)}$ ellipsishez hasonló $h_1^{(2)}$ ellipsist fölhasználni.

A $h_1^{(2)}$ ellipsis kapcsolt átmérői a hasonlóság folytán párhuzamosak $k^{(2)}$-nek kapcsolt átmérőivel, tehát azok a pontpárok, melyekben a $k^{(2)}$-nek kapcsolt átmérőpárjai az $e_\infty$-$t$ metszik, kapcsolt pólusok a $h_1^{(2)}$-re. Ily két kapcsolt póluspár a $JK$ és a $GM'_1$, melynek a $k^{(2)}$ $k_i^{(2)}$ Steiner-féle rokonságban a $KJ$ és $G_1M'$ pontpárok felelnek meg az $e_1^{(2)}$-en; a $KJ$ és a $G_1M'$ egyenesek $O_1$ metszőpontjának az $e_1^{(2)}$-re vonatkozó polárisa, mely az $E$ pontot a $G_1M'$ vonaldarab felezőpontjával összeköti, lesz tehát az a $h$ egyenes, melynek a Steiner-féle rokonságban a $k^{(2)}$-vel hasonló $h_1^{(2)}$ ellipsis felel meg. A $h$ egyenes végtelen távol fekvő $Q \equiv (he_\infty)$ pontja és az $E$ pont kapcsolt pólus az $e_1^{(2)}$-re, az $E$ és $Q$-nak a $k^{(2)}$ $k_i^{(2)}$-ben megfelelő

pontja az $E_1$ és $Q_1$. Az $E_1$ pontnak meghatározásáról már előbb szólottunk; a $Q$ és $O_1$ kapcsolt pólus az $e_1^{(2)}$ hyperbolára (mert az $JK$ pontpártól harmónikusan van elválasztva), tehát az $O_1Q$ pontoknak megfelelő pontjai a $k^{(2)}k_i^{(2)}$ Steiner-féle rokonságban az $e_1^{(2)}$ egyik átmérőjének végpontjai; a $Q_1$ pont tehát az $OE$ egyenesen fekszik és $EO = Q_1E$. Az $E_1Q_1$ vonaldarab és annak felezőpontja a $h_1^{(2)}$ ellipsisnek átmérője és középpontja. Ez az $E_1Q_1$ átmérő a $h_1^{(2)}$ ellipsis meghatározásához elégséges, mert a $h_1^{(2)}$ hasonló a $k^{(2)}$-val. A $h_1^{(2)}$ ellipsis az $f_1^{(2)}$ kört az $E_1$ ponton kívül a keresett $ABC$ pontokban metszi. Ezeket a metszőpontokat a $h_1^{(2)}$ megrajzolása nélkül a $k^{(2)}$ segélyével következőkép nyerjük:

A $h_1^{(2)}$ hasonló lévén a $k^{(2)}$-val, a hasonlósági pontot $S$-et megkapjuk, ha a $k^{(2)}$-nek az $E_1Q_1$-gyel párhuzamos $E_{10}Q_{10}$ átmérője. $E_{10}Q_{10}$ végpontjait az $E_1Q_1$ pontokkal összekötjük; az összekötő egyenesek $E_1E_{10}$, $Q_1Q_{10}$-nak metszőpontja az $S$ pont.

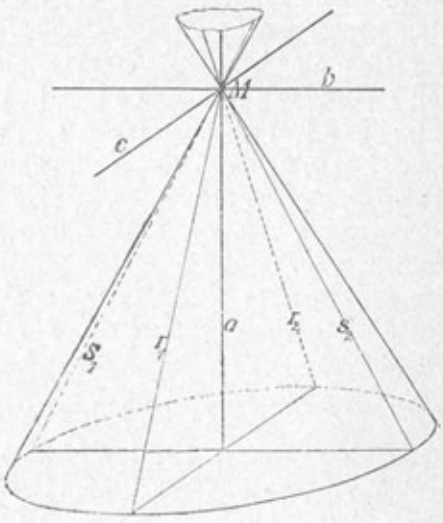
E hasonlóságban az $f_1^{(2)}$ körnek egy $f_{10}^{(2)}$ kör felel meg, mely a $k^{(2)}$-t az $A_0B_0C_0E_{10}$ pontokban metszi; s ha ezeket az $S$-ből ismét visszaviszszük az $f_1^{(2)}$ körre, úgy megkapjuk az $ABCE_1$ pontokat.

5. Foglaljuk most röviden össze az egész szerkesztést: Ha az $M.k^{(2)}$ II. r. kúpnak vezető vonala a $k^{(2)}$ ellipsis és $M$ csúcsának derékszögű projekciója a $k^{(2)}$ síkjára az $M'$ pont, végre az ellipsis középpontja az $O$, akkor az $OM'$-hez kapcsolt ellipsisátmérő és az $OM'$-re az $M'$ pontban merőleges egyenes egymást a $G_1$ pontban metszi. Ha az $M'OG_1$ derékszögű háromszög oldalainak felezőpontjain keresztül egyeneseket húzunk, melyek a $k^{(2)}$-nak tengelyeivel ugyanoly szögeket képeznek, mint az $M'OG_1$-nek illető oldalai, akkor ezek egymást egy $E$ pontban metszik. A $Q_1$ pont az $EO$ egyenesen a $P_1$ és $U$ pont az $EM'$ egyenesen akkép van meghatározva, hogy $Q_1E = EO$, $P_1E = EM'$, $EM'.UM' = -M'M^2$, és az $E$-nek a $k^{(2)}$-ra vonatkozó polárisa az $EM'U$-ra az $U$ pontban emelt merőlegest az $E_1$ pontban metszi. A $k^{(2)}$-hoz hasonló és hasonló fekvésű ellipsis, melynek átmérője a $Q_1E_1$, és az a kör, melynek átmérője a $P_1E_1$, az $E_1ABC$ pontokban metszi egymást. Ugyancsak az $ABC$ pontokon és a $P_1Q_1G_1M'O$ ponton megy keresztül még egy egyenoldalú hyperbola is, melynek középpontja az $E$ pont, és asymtotái a $k^{(2)}$-nek tengelyeivel párhuzamosak. Az $ABC$ háromszög szögpontjai az $M.k^{(2)}$ kúp főtengelyeinek metszőpontjai a $k^{(2)}$ síkjával, az $ABC$ háromszög magasságpontja pedig az $M'$ pont.*)

*) L. Wiener C.: *Darstellende Geometrie*; II. kötet 17. oldal.

6. Minthogy a II. r. valós-kúp minden polárisháromélének két lapján a kapcsolt polárissugarak hyperbolikus involucziót, a harmadik lapon elliptikus involucziót képeznek, azért ily tulajdonságú az $M(abc)$ főpolárisháromél is. Jelöljük azt a lapját e polárisháromélnek, melyben a kapcsolt polárissugarak elliptikus involucziót képeznek $\alpha \equiv [bc]$-vel, és nevezzük az erre merőleges főtengelyt, $a$-t, a *kúp elliptikus tengelyének*, a másik két tengelyt, $b$ és $c$-t, a *kúp hyperbolikus tengelyének.*

Az $a$-ra merőleges síkok a kúpot ellipsisek szerint metszik (4. ábra), melyeknek középpontjai az $a$-n vannak és tengelyei a $b$, $c$-vel párhuzamosak, s a $b$ vagy a $c$-re merőleges síkok a kúpot hyperbolák szerint metszik, melyeknek középpontjai a $b$, illetve a $c$-n feküsznek és tengelyei az $ac$, illetve $cb$ főtengelyekkel párhuzamosak. Ebből következik: *A II. r. kúp alkotói úgy a főtengelyek, mint a fősíkok irányában symmetrikus fekvésűek.*



4. ábra.

Nevezzük a kúp polárisnyalábja tetszőleges $\varepsilon$ síkjának poláris sugarát $e$-nek; $\varepsilon$-nak metszőegyeneseit a $bc$, $ca$, $ab$ fősíkokkal $x$, $y$, $z$-nek; e sugarak $ea$, $eb$, $ec$ polárissíkjainak metszővonalait ama fősíkokkal, azaz az $x$, $y$, $z$-nek kapcsolt polárissugarait a fősíkokban $x'$, $y'$, $z'$-nek.

Ha bármily $M(abc)$ háromél lapjait az $M$ nyaláb $\varepsilon$ síkja az $x$, $y$, $z$-ben metszi és a nyaláb bármily $e$ sugarán keresztül menő $ea$, $eb$, $ec$ síkok ama lapokat az $x'$, $y'$, $z'$ sugarakban metszik, akkor

$$\sin(az).\sin(bx).\sin(cy) = \sin(ay).\sin(bz).\sin(cx)$$

$$\sin(az').\sin(bx').\sin(cy') = -\sin(ay').\sin(bz').\sin(cx')$$

a miből

$$(abzz').(bcxx').(cayy') = -1.$$

De mert, az előbbi esetre visszatérve, az $M(abc)$ háromél orthogonális, a két előbbi relacziók következőképen egyszerüsbül:

$$tg\,(az).\,tg\,(bx).\,tg\,(cy) = 1$$
$$tg\,(az').\,tg\,(bx').\,tg\,(cz') = -1$$

Ez utóbbi egyenletek baloldalainak szorzata három tényezőre osztható, melyek a fősíkokban fekvő kapcsolt polárissugaraktól képezett involucziókнak hatványai, a jobb oldalak szorzata negativ, t. i.

$$tg\,(az)\,tg\,(az').\,tg\,(bx)\,tg\,(bx').\,tg\,(cy)\,tg\,(cy') = -1,$$

s ezért: A polárisnyaláb fősíkjaiban a kapcsolt polárissugarak képezte involuciók páratlan számban elliptikusak, tehát vagy mind a három elliptikus, vagy csak egy, a szerint, a mint a nyaláb vezető kúpja képzetes vagy valós.

Ha a polárisnyaláb vezető kúpja valós, és e kúp tetszésszerinti $P$ pontjának távolsága a $[bc]$, $[ca]$, $[ab]$ síkoktól $x$, $y$, $z$, továbbá az $[ab]$ és a $[ca]$ síkokban fekvő $s_1s_2$, $r_1r_2$ kúpalkotók az $a$ elliptikus tengelylyel $\psi$, $\vartheta$ szöget képeznek, akkor a $P$ ponton keresztül menő és az $a$-ra merőleges síknak metszése a kúppal oly ellipsis, melynek féltengelyei $x\,tg\,\psi$, $x\,tg\,\vartheta$. Ez ellipsis $P$ pontjának távolsága tengelyeitől $y$, $z$, tehát:

$$\frac{y^2}{x^2\,tg^2\,\psi} + \frac{z^2}{x^2\,tg^2\,\vartheta} = 1,$$

vagy máskép irva:

$$y^2\,cotg^2\,\psi + z^2\,cotg^2\,\vartheta = x^2.$$

Ez az egyenlet a *II. r. kúpnak egyenlete* vonatkoztatva annak főtengelyeire, mint koordináta-rendszer tengelyekre.

## 6. §. A polárisnyaláb fokalis sugarai és cziklikus síkjai.

1. Az orthogonális nyaláb minden sugarán keresztül menő kapcsolt polárissíkok és minden síkjában fekvő kapcsolt polárissugarak orthogonális sort képeznek. De láttuk előbb, hogy a rotatórikus polárisnyalábban is van egy oly sugár, a forgástengely, a melyen keresztül menő kapcsolt polárissíkok orthogonális síksort alkotnak és e forgástengelyre merőleges fősíkban a kapcsolt polárissugaraktól képezett sugársor orthogonális természetü.

Azzal a kérdéssel akarunk most foglalkozni, hogy *van-e az általános polárisnyalábban oly sugár, a melyen keresztül menő, és oly sik, a melyben fekvő kapcsolt elempárok orthogonális sort képeznek?*

E czélból ugyanazt az eljárást követjük, mint a kúpszeletek

gyujtópontjainak megállapításakor, mert e sugarak és síkok a polárisnyalábban tényleg analogusok a kúpszelet gyujtópontjaival a polárismezőben.

Láttuk, hogy az $M$ polárisnyaláb egy $\sigma$ síkjának $x$ sugaraira merőleges kapcsolt polárissugarak egy $\sigma_1^{(2)}$ *II. r.* kúpnak $x_1$ alkotói, mely a polárisnyalábnak fő-polárisháromléle, $M(abc)$, körül van irva; az $x$ sugarak az $(M, \sigma)$ sorban és az $x_1$ alkotók a $\sigma_1^{(2)}$ kúpon projektivek. Ennek dualisan megfelel: a polárisnyaláb egy $s$ sugarán keresztül menő $\xi$ síkokra merőleges kapcsolt polárissíkok $\xi_1$, egy *II. r.* kúpnak érintősíkjai, mely az $M(abc)$ háromélbe be van irva, tehát a $\xi_1$ síkok egy $s_1^{(2)}$ *II. o.* síksort képeznek; a $\xi$ síkok az $s$ síksorban és a $\xi_1$ síkok az $s_1^{(2)}$ *II. o.* síksorban projektivek.

A $\sigma_1^{(2)}$ *II. r.* kúpon fekvő főtengelyek bármelyikéből, pl. a $b$-ből, az $x$ és $x_1$ projektiv sugarak involucziós síksorral projicziálhatók, mert ha az $x$ a $bc$ fősíkban van, akkor az $x_1$ az $a$ főtengely és ha az $x$ az $ac$ fősíkban van, akkor az $x_1$ a $c$ főtengely. A $bc$, $ba$ síkok tehát felcserélhetően felelnek meg egymásnak azokban a projektiv síksorokban, melyek az $(M, \sigma)$ sugársornak és a $\sigma_1^{(2)}$ kúpnak megfelelő $x$ és $x_1$ sugarait a $b$ tengelyből projicziálják. Ugyanígy az $s_1^{(2)}$ *II. o.* síksorhoz tartozó bármelyik fősík, pl. az $ac$, a $\xi$ és $\xi_1$ projektiv síkok sorát involucziós sugársorban metszi, mert ha a $\xi \equiv as$, akkor $\xi_1 \equiv bc$ és ha a $\xi \equiv cs$, akkor $\xi_1 \equiv ac$; az $a$, $c$ sugarak tehát felcserélhetően felelnek meg egymásnak azokban a projektiv sorokban, melyben az $ac$ sík, az $s$ és $s_1^{(2)}$ I. és II. o. síksort metszi. Ennélfogva:

A polárisnyaláb tetszésszerinti sugarán keresztül menő síkok és az ezekre merőleges kapcsolt polárissíkok a fősíkok bármelyikét involucziós sugársorban metszik.

síkjában fekvő sugarak és az ezekre merőleges kapcsolt polárissugarak bármelyik főtengelyből involucziós síksorral projicziáltatnak.

Messük ezután a polárisnyalábot a nyalábon kívül fekvő $\varepsilon$ síkkal, mely az $s$ tengelyü síksor $\xi$ síkjára és a reá merőleges kapcsolt polárissíkra, $\xi_1$-re, merőleges. Ez az $\varepsilon$ sík a nyalábnak három fősíkját $ab$, $bc$, $ca$-t hegyesszögű háromszögben, a $\xi\xi_1$ síkokat pedig ama háromszög magasságpontján keresztül menő két egyenesben metszi. E két egymásra merőleges egyenes ama hegyesszögű háromszögnek csak egyik oldalát metszheti a szögpontoktól határolt vonaldarabokon (oldalokon) belül. És ha a háromszögnek ez az oldala az $ab$ fősíkban van, akkor a $\xi$ és $\xi_1$ I. és II. osztályu síksorok az $ab$ fősíkot hyperbolikus involucziós sugársorban, a másik két fősíkot, $bc$-t és $ac$-t pedig elliptikus involucziós sugársorban metszik. A hyperbolikus

involucziós sugársornak kettőssugarait $f, f_1$-gyel jelölvén, látható, hogy az $f$-en (és hasonlókép az $f_1$-en) keresztül menő kapcsolt polárissíkok közül két pár merőleges egymásra: t. i. az $sf \equiv \xi$ és a hozzátartozó $\xi_1$ a II. o. síksorból, valamint az $fc$ és $ab$. Ennélfogva a polárisnyaláb $f$ sugarán, valamint $f_1$ sugarán keresztül menő kapcsolt polárissíkok orthogonális síksort képeznek.

Az $ff_1$ sugarak annak az involucziónak kettőssugarai, mely szerint a $\xi, \xi_1$ I. és II. o. síksor az $ab$ fősíkot metszi. Ha ez utóbbi síksorok helyett más ily vonatkozásu I. és II. o. síksort $\eta, \eta_1$-t választunk, melyek közül az elsőnek tengelye a $t$ sugár, akkor ezek az $ab$ fősíkot szintén egy uj involucziós sugársorban metszik. A két involucziós sugársorban azonban egyrészt az $a$ $b$ sugarak társsugarak, másrészt az $st$ síknak és az erre merőleges kapcsolt polárissíknak metszései az $ab$ fősíkkal szintén társsugarak; a két involucziós sugársor tehát egybeesik és így az $\eta, \eta_1$ síksorok nem vezetnek uj $f, f_1$ kettőssugarakhoz. E vizsgálódásnak eredményét és a dualisan megfelelő eredményt ekkép foglalhatjuk egybe:

A polárisnyalábnak valamennyi egymásra merőleges kapcsolt polárissíkpárja annak a három fősíkját involuczióban metszi; ezek közül kettő elliptikus, a harmadik hyperbolikus, melynek $f, f_1$ kettőssugarai a nyalábnak úgynevezett *fokális sugarai*. Bármelyik fokális sugáron keresztül menő kapcsolt polárissíkok orthogonális sort képeznek és bármelyik fokális sugárra merőleges sík a nyalábot oly polárismezőben (kúpszeletben) metszi, melynek egyik gyujtópontja (fókusa) az illető fokalis sugárnak nyoma a metszősíkon.

A polárisnyalábnak valamennyi egymásra merőleges kapcsolt polárissugárpárja annak a három főtengelyéből involucziós síksorral projicziáltatik; ezek közül kettő elliptikus, a harmadik hyperbolikus, melynek $\varkappa, \varkappa_1$ kettőssíkjai a nyalábnak úgynevezett *cziklikus síkjai*. Bármelyik cziklikus síkban a kapcsolt polárissugarak orthogonális sort képeznek; és bármelyik cziklikus síkkal párhuzamos sík a nyalábot oly polárisrendszerben metszi, melynek vezető kúpszelete valós vagy képzetes kör.

2. Ha a II. r. kúp $ab, ac$ fősíkjai a kúpot az $s_1s_2, r_1r_2$ alkotók szerint metszik és az $s_1s_2$ alkotóknak hegyesszögü hajlásszöge $\psi$ az $a$ főtengelyhez nagyobb, mint az $r_1r_2$ alkotóknak $\vartheta$ hegyesszögű hajlásszöge az $a$ főtengelyhez, akkor az $f, f_1$ fokalis sugarak az $ab$ fősíkban feküsznek és $\varkappa, \varkappa_1$ cziklikus síkok a $b$ főtengelyen mennek keresztül.

Ugyanis nevezzük a kúpnak érintősíkjait az $s_1r_1$ alkotók mentén $\sigma_1, \rho_1$-nek; az $a$-n keresztül menő és az $s_1r_1$ síkra merőleges síkot $\tau$-nak. A $\tau$ sík az $s_1r_1$-nek polárissugarát $\sigma_1\rho_1$-et az $s_1$-től nem

választja el, ellenben az $r_1$-től elválasztja ; ennélfogva a $\sigma_1\varrho_1$-ből az $s_1r_1$ síkra bocsátott merőleges síknak $\tau'$-nek metszővonala az $ab$ fősíkkal az $a$-t az $s_1$-től elválasztja ; ellenben $\tau'$-nek metszővonala az $ac$ fősíkkal az $a$-t az $r_1$-től nem választja el. Így tehát az egymásra merőleges kapcsolt polárissíkpárok, köztük a $\tau'$, $s_1r_1$ síkpár is, az $ab$ fősíkot hyperbolikus involuczióban metszik ; az $ab$ síkban lesznek tehát a fokális sugarak.

Másrészt az $s_1r_1$ kúpalkotók hajlásszögeinek felezői $g, h$, egymásra merőleges kapcsolt polárissugarak. És ha az $a$ főtengelyre merőleges $\varepsilon$ sík az $s_1r_1gh$ sugarakat az $S_1R_1GH$ pontokban metszi, akkor $R_1$ szükségképen a $GH$ vonaldarabon van, mert $MR_1 < MS_1$. Ebből folyólag a $ba, bc$ fősíkok a $bg$, $bh$ síkoktól nincsenek elválasztva, ellenben a $ca$, $cb$ síkok a $cg$, $ch$ síkoktól el vannak választva ; az egymásra merőleges kapcsolt polárissugarak tehát a $b$ főtengelyből hyperbolikus involucziós síksorral, a $c$ tengelyből pedig elliptikus involucziós síksorral projicziáltatnak, s ezért a kúp cziklikus síkjai a $b$ főtengelyen mennek keresztül.

A II. r. kúp $\varkappa$, valamint $\varkappa_1$ cziklikus síkjaival párhuzamos síkok, mint láttuk, a kúpot körök szerint metszik ; a II. r. kúpon tehát $\infty^1$, kör van, melynek síkja a $\varkappa$ síkkal és $\infty^1$ kör van, melynek síkja $\varkappa_1$ síkkal párhuzamos. Állítom, hogy *a II. r. kúpon oly két kör* $k^{(2)}$ *és* $k_1^{(2)}$, *melynek két síkja nem párhuzamos, mindig egy gömbön fekszik.*

A kúpnak $ac$ fősíkja merőleges a $k^{(2)}$, $k_1^{(2)}$ körök síkjaira és a kúpot, valamint e köröket is szimmetrikus részekre osztja. Ezért az $ac$ fősík, mely a kúpot az $r_1r_2$ alkotókban metszi, a $k^{(2)}$-t és a $k_1^{(2)}$-et egy-egy kör átmérőnek $AB$ és $A_1B_1$ végpontjaiban metszi. Az $ABB_1A_1$ négyszögnek szögpontjai egy $k_2^{(2)}$ körön vannak, mert az $AB, A_1B_1$ egyenesek az $AA_1 \equiv r_1, BB_1 \equiv r_2$ alkotókhoz egyenlő szögek alatt hajlanak és nem párhuzamosak. A $k_2^{(2)}$ körnek $O_2$ középpontjából az $AB$ és $A_1B_1$ húrokra és így a $k^{(2)}$ és $k_1^{(2)}$ körök síkjaira bocsátott merőlegesek $O$ és $O_1$ talppontjai a $k^{(2)}$ és $k_1^{(2)}$ köröknek középpontjai, s mert az $O_2$ pont egyenlő távolságra van az $AB$ és $A_1B_1$ pontoktól, azért egyenlő távolságra van egyszersmind a $k^{(2)}$ és $k_1^{(2)}$ köröknek összes pontjaitól. Az $O_2$ pont tehát középpontja annak a gömbnek, mely a $k^{(2)}$ és $k_1^{(2)}$ körökön keresztül megy. Ha fordítva egy $k^{(2)}$ körön egy gömböt és egy II. r. kúpot fektetünk keresztül, akkor azok egymást még egy körben $k_1^{(2)}$-ben metszik. Vagy egy gömbön levő két tetszésszerinti körön mindig lehet II. r. kúpot keresztül fektetni (és pedig általában két kúpot).

A fokalis sugarak és a cziklikus síkok származásuknál fogva, mint már említettük, a kúpszeletek gyujtópontjaival analogus tulaj-

donságuak. A polárisnyaláb bármelyik fokalis sugarán keresztül menő kapcsolt polárissíkok és bármelyik cziklikus síkban fekvő kapcsolt polárissugarak orthogonális sort képeznek, úgy mikép a polárismező gyujtópontjaiból kisugárzó kapcsolt polárissugarak. De ebből a tulajdonságból leszármaztathatók a fokalis sugaraknak és a cziklikus síkoknak másnemű vonatkozásai a polárisnyaláb vezető kúpjához, mint azt a következőkben látni fogjuk.

3. Nevezzük a II. r. kúp $t$ és $t_1$ alkotóinak érintősíkjait $\tau$ és $\tau_1$-nek, ezeknek metszővonalát $p$-nek. A $\tau\tau_1$ síkok hajlásszögeinek felezősíkjai egymásra merőleges kapcsolt polárissíkok, tehát az $f, f_1$ fokalissugaraktól harmónikusan vannak elválasztva és mert egymásra merőlegesek, azért a $pf$, $pf_1$ síkok hajlásszögeit is felezik. Ennélfogva:

A II. r. kúp két érintősíkjának metszővonalát a fokalis sugarakkal összekötő síkok a két érintősíkhoz egyenlő szögek alatt hajlanak.

A II. r. kúp csúcsán keresztül menő tetszésszerinti sík a cziklikus síkokat oly sugarakban metszi, melyek a metszősíkban fekvő kúpalkotókhoz egyenlő szögek alatt hajlanak.

Ennek különös esete áll elő, ha a két érintősík, illetve a két kimetszett alkotó egyesül:

A II. r. kúp minden érintősíkja felezi ama síkoknak egyik hajlásszögét, mely síkok az érintősík érintőalkotóját a fokalis sugarakkal összekötik.

A II. r. kúp bármely alkotója felezi azoknak a sugaraknak egyik szögét, melyben az alkotó érintősíkja a cziklikus síkokat metszi.

E két tétel alapján a II. r. kúpnak érintősíkjait és azoknak érintőalkotóit megszerkeszthetjük, ha annak a két fokalis sugara $f$, $f_1$ és egy érintősíkja $\tau$, illetve a két cziklikus síkja $\varkappa$, $\varkappa_1$ és egy alkotója $t$ ismeretes.

Az $f$-nek a $\tau$-ra vonatkozó tükörképét $g$-t az $f_1$-gyel összekötő $gf_1$ sík, a $\tau$ síkot a $t$ érintőalkotóban metszi, mert az $ft$, $f_1t$ síkok a $\tau$-hoz egyenlő szögek alatt hajlanak. A $\tau$ síkban, a kúp $M$ csúcsán keresztül egy $p$ egyenest vezetünk és $p$-n keresztül oly $\tau_1$ síkot fektetünk, hogy a $\tau_1$ a $pf$, $pf_1$ síkokkal ugyanoly szögeket képezzen, mint a $\tau$ érintősík képez a $pf_1$, $pf$ síkokkal. E $\tau_1$ sík szintén érintősíkja a kúpnak és ha az $f$-nek a $\tau_1$-re vonatkozó tükörképe $g_1$, akkor $g_1f_1$ sík a $\tau_1$-t ennek érintőalkotójában, $t_1$-ben, metszi. E szerint a $p$ egyenesnek változtatásával az $(M, \tau)$ sugársorban a kúpnak összes érintősíkját és azoknak érintőalkotóját megszerkeszthetjük.

Minthogy a $gg_1$ tükörképek a $p$-hez oly szög alatt hajlanak, mint az $f$, és

$$\sphericalangle([gp], [pf_1]) = ([f_1p], [pg_1]),$$

azért az $M(gpf_1)$, $M(g_1pf_1)$ háromélek symmetrikusak, tehát

1. . . . . $\sphericalangle(gf_1) = (g_1f_1) = (tf) + (tf_1)$
2. . . . . $\sphericalangle([gf_1], [f_1p]) = ([pf_1], [f_1g_1])$,

vagy szavakba foglalva:

1. A II. r. kúp egyik fokalis sugarának tükörképei az érintősíkokra vonatkozólag a másik fokalis sugárhoz egyenlő szögek alatt hajlanak, tehát oly forgáskúpnak alkotói, melynek forgástengelye ez utóbbi fokalis sugár.

Ha a II. r. kúp egyik cziklikus síkjában az egyes alkotókra merőleges sugarakat állítunk, melyek egymást a kúp csúcsában metszik, akkor e sugarakon keresztül menő síkok, melyek az alkotókkal ugyanoly szögeket képeznek, mint a cziklikus sík, egy forgáskúpnak érintősíkjai; ennek forgástengelye merőleges a másik cziklikus síkra.

2. A kúp két alkotóját egy fokalis sugárral összekötő síkok egyik hajlásszögének felezősíkja keresztül megy ama két alkotó két érintősíkjának metszővonalán.

Két kúpalkotón keresztül menő sík metszése egy cziklikus síkkal, felezője ama szögnek, melyet a két kúpalkotó érintősíkjának metsző vonalai ama cziklikus síkkal képeznek.

Az 1. tétel következménye:

Azoknak az $(ft)$, $(f_1t)$ szögeknek összege, valamint különbsége, melyet egy változó kúpalkotó $t$, a fokalis sugarakkal $f$, $f_1$-gyel képez állandó és egyenlő a fokalis sugarakkal ugyanegy fősíkban fekvő $s_1s_2$ alkotók egyik vagy másik hajlásszögével.

Azoknak a $(\varkappa\tau)$, $(\varkappa_1\tau)$ szögeknek összege, valamint különbsége, melyet a kúp egy változó érintősíkja $\tau$, a cziklikus síkokkal $\varkappa$,$\varkappa_1$-gyel képez állandó és egyenlő a cziklikus síkok metszővonalán keresztül menő $\rho_1$, $\rho_2$ érintősíkok egyik vagy másik hajlásszögével.

Ugyanis láttuk előbb, hogy az $(ft)$, $(f_1t)$ szögek összege állandó; de ha a $t$ alkotó az $ab$ fősíkban fekvő $s_1s_2$ alkotók egyike, akkor

$$(ft) + (f_1t) = (fs_1) + (f_1s_1) = (fs_1) + (s_2f) = (s_2s_1).$$

És ha az $(ft) + (f_1 t) = (s_2 s_1)$ kifejezésben $(f_1 t)$ szög helyett $180^0 - (f'_1 t)$ szöget írunk, hol az $f'_1$ félsugár az $f_1$-nek a kúp csúcsán túl hosszabbított részét jelenti, akkor

$$(ft) - (f'_1 t) = (s_2 s_1) - 180^0$$

vagy

$$(f'_1 t) - (ft) = 180^0 - (s_2 s_1) = (s'_2 s_1),$$

hol $s'_2$ az $s_2$-nek szintén a kúp csúcsán túl hosszabbított részét jelenti.

A dualisan megfelelő tételre vonatkozólag következőket jegyezzük meg: A $bc$ fősík a kúpot, annak érintősíkjait és a $\varkappa$, $\varkappa_1$ cziklikus síkokat két részre osztja; vegyük e részek egyikét tekintetbe. A kúpnak $\tau$ érintősíkja és a két cziklikus sík két háromélet képez; az egyik a félkúpot magába zárja, a másik kizárja; ez utóbbi háromél ama két szögének $(\varkappa\tau)$, $(\varkappa_1\tau)$-nak összege, melyet az érintősík a cziklikus síkokkal képez állandó és egyenlő, a $b$ főtengelyen átmenő $\varrho_1$, $\varrho_2$ érintősíkok hajlásszögének kiegészítőszögével, vagyis

$$(\varkappa\tau) + (\varkappa_1\tau) = 180^0 - (\varrho_2\varrho_1).$$

Ha pedig az egyik cziklikus síknak, pl. a $\varkappa_1$-nek, a $bc$ fősíkon túlhosszabbított felét $\varkappa'_1$-nek nevezzük, tehát $(\varkappa_1\tau) = 180^0 - (\varkappa'_1\tau)$, akkor

$$(\varkappa\tau) + (\varkappa_1\tau) = (\varkappa\tau) + 180^0 - (\varkappa'_1\tau) = 180^0 - (\varrho_2\varrho_1)$$

és

$$(\varkappa'_1\tau) - (\varkappa\tau) = (\varrho_2\varrho_1). —$$

Az előbbi 2. tétel általánosítható, hogy ha egy harmadik változó $\tau_2$ érintősíkot veszünk fel, mely a $\tau$ $\tau_1$ állandó érintősíkokat a változó $p_1$, $p$ sugarakban metszi és a $\tau$ $\tau_1$ $\tau_2$ síkoknak érintőalkotói $t$ $t_1$ $t_2$.

Ugyanis

$$([tf], [fp_1]) = ([p_1 f], [ft_2]), \quad ([t_2 f], [fp]) = ([pf], [ft_1])$$

tehát

$$([p_1 f], [fp]) = ([tf], [fp_1]) + ([p_1 f], [ft_1]) = \tfrac{1}{2}([tf], [ft_1]),$$

és így:

A II. r. kúpnak egy változó érintősíkja annak két állandó érintősíkját oly sugarakban metszi, melyek az egyik vagy másik fokalis sugárból állandó lapszögek alatt projiczialtatnak.

Egy változó kúpalkotónak összekötő síkjai két állandó kúpalkotóval bármelyik cziklikus síktól oly sugarak szerint metszetnek, melyeknek hajlásszögei állandók.

E tételek egyszersmind arra tanítanak, hogy mikép lehet oly tengelyt találni, melyből két konczentrikus, de különböző síkban fekvő projektiv sugársor *egyenlően-projektiv* síksorokkal projicziáltatik. | két projektiv síksort, melynek tengelyei egymást metszik, *egyenlően-projektiv* sugársorok szerint metszeni.

4. Jelöljük a II. r. kúp $a$ elliptikus tengelyének hajlásszögét az $ab$ fősíkban fekvő $f, f_1$ fokalissugarakhoz $\varepsilon$-mal, a $b$ főtengelyen keresztül menő $\varkappa, \varkappa_1$ cziklikus síkokhoz $\varepsilon'$-mal, az $ab$ és $ac$ fősíkokban fekvő $s_1 s_2$, $r_1 r_2$ alkotókhoz $\psi$, $\vartheta$-val, végre jelöljük a kúp csúcsát $M$-mel.

Az $M(afr_1)$ háromélnek az $a$ élnél levő lapszöge derékszög,

$$(af) = \varepsilon, \quad (r_1 f) = (as_1) = \psi, \quad (r_1 a) = \vartheta$$

tehát

1. . . . . $\cos \psi = \cos \varepsilon \,.\, \cos \vartheta.$

Másrészt az $s_1$ alkotó érintősíkját $\sigma_1$-nek nevezvén, a $b$, $c$, $|\, \sigma_1 \varkappa \,| \equiv e$ élekkel biró $M\,(bce)$ háromélnek $(bc)$ oldala, azaz a $(bc)$ szög derékszög;

$$\sphericalangle\,([bc], \varkappa) = 90^0 - \varepsilon', \quad \sphericalangle\,([bc], \sigma_1) = 90^0 - \psi$$

$$\sphericalangle\,(\varkappa\sigma_1) = \tfrac{1}{2}\,[(\varkappa\sigma_1) + (\varkappa_1\sigma_1)] = 180^0 - \tfrac{1}{2}\,(180^0 - 2\vartheta) = 90^0 + \vartheta\,;$$

tehát

$$\cos\,(90^0 + \vartheta) = -\cos\,(90^0 - \varepsilon').\cos\,(90^0 - \psi)$$

végre

2. . . . . $\sin \vartheta = \sin \varepsilon' . \sin \psi.$

Ha a II. r. kúpot annak elliptikus tengelyére merőleges síkkal metszük, mely a kúpnak $M$ csúcsától $h$ távolságra van és a kimetszett ellipsis tengelyeit és excentriczitását $2a$, $2b$, $2c$-vel, a fokalis sugarak metszőpontjainak és a cziklikus síkok metszővonalainak távolságát $2d$, illetve $2\delta$-val jelöljük, akkor az előbbi 1. és 2. egyenletekből és az

3. . . $a = htg\psi$, $b = htg\vartheta$, $d = htg\varepsilon$, $\delta = htg\varepsilon'$, $c^2 = a^2 - b^2$

egyenletekből következik:

$$4. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad d = \frac{hc}{\sqrt{b^2 + h^2}}, \quad \delta = \frac{b\sqrt{a^2 + h^2}}{c}$$

E két egyenlet alapján a II. r. kúpnak fokalis sugarai és cziklikus síkjai könnyen szerkeszthetők, ha ismeretes a kúpnak elliptikus tengelyére merőleges metszése, mely egy $2a$, $2b$ tengelyü ellip-

sis és ismeretes csúcsának $h$ távolsága az ellipsis síkjától, mely csúcs az ellipsis középpontjában annak síkjára emelt merőlegesen fekszik.

5. Állítsunk a II. r. kúp $f$ fokalis sugarára egy merőleges síkot, mely a kúpot a $k^{(2)}$ kúpszeletben, az $f$-et és ennek $\varphi$ polárissíkját a $k^{(2)}$ gyujtópontjában $F'$-ben és az ehhez tartozó vezérlő vonalban $f'$-ben metszi. Ha a $k^{(2)}$ kúpszelet egy változó $P$ pontjából merőlegeseket bocsátunk a $\varphi$ síkra és az $f'$ egyenesre és ezeknek talppontja $Q$, illetve $R$, akkor a $k^{(2)}$ minden $P$ pontjára vonatkozólag

$$PF' : PR = \text{állandó}$$

és a $k^{(2)}$ síkjának minden $P$ pontjára vonatkozólag

$$PR : PQ = \text{állandó},$$

tehát a $k^{(2)}$ kúpszelet minden $P$ pontjára vonatkozólag

$$PF' : PQ = \text{állandó}.$$

Minthogy ez az állandó változatlan marad, ha a $P$ pont a kúpnak egy alkotóját befutja, következik:

*A II. r. kúp pontjainak a kúp bármelyik fokalis sugarától és az ehhez tartozó polárissíktól mért távolságai állandó viszonyban vannak.* Vagy más szóval kifejezve:

A II. r. kúp tetszőleges alkotójának hajlásszöge egy fokalis sugárhoz és annak polárissíkjához, oly két szög, melynek sinusa állandó viszonyt ad.

A II. r. kúp tetszőleges érintősíkjának hajlásszöge egy cziklikus síkhoz és annak polárissugarához, oly két szög, melynek sinusa állandó viszonyt ad.

Hogy ezeket az állandókat, $\lambda$ és $\lambda'$-t, a kúpnak $\psi$, $\vartheta$ állandóival ($\psi > \vartheta$) kifejezhessük, nevezzük a kúp $f$ fokalis sugarának és e sugár polárissíkjának hajlásszögét a kúp $a$ elliptikus tengelyéhez $\varepsilon$-nak, illetve $\tau$-nak.

A fokalis sugár és polárissíkja harmónikusan választja el az $ab$ fősíkban fekvő $s_1 s_2$ kúpalkotókat, tehát

$$tg^2\psi = tg\varepsilon \,.\, tg\tau;$$

másrészt találtuk, hogy

$$\cos\psi = \cos\varepsilon \,.\, \cos\vartheta$$

végre az előbbi proporczióból következik, ha $P$ az $s_1$ vagy $s_2$-n van

$$\lambda = \frac{\sin(\psi - \varepsilon)}{\sin(\tau - \psi)}$$

E három egyenletből a $\tau$, $\varepsilon$ értékeket kiküszöbölvén:

$$\lambda = \sqrt{1 + tg^2\vartheta - tg^2\vartheta \, cotg^2\psi}.$$

A $\lambda'$ állandó értéket, mely a jobb oldalon álló tételre vonatkozik, a dualisan megfelelő

$$\lambda' = \frac{sin\ (\varepsilon' - \vartheta)}{sin\ (\vartheta - \tau')},\ tg^2\vartheta = tg\varepsilon'.\ tg\tau',\ sin\ \vartheta = sin\ \varepsilon'.\ sin\ \psi$$

egyenletekből határozhatjuk meg ekképen:

$$\lambda' = \sqrt{1 + cotg^2\psi - cotg^2\psi\ tg^2\vartheta},$$

ha a két kiküszöbölt szög $\varepsilon'$ és $\tau'$, a kúp egyik cziklikus síkjának és e sík polarissugarának hajlásszöge a kúp elliptikus tengelyéhez.

A három egyenlet közül az elsőt ekkép vezethetjük le közvetlen: A kúp egyik $\varkappa$ cziklikus síkjának a kúpra vonatkozó polárissugarát jelöljük $k$-val, a kúp csúcsát és egyik érintősíkját $M$ és $\pi$-vel, azt a kört, melyben a $\varkappa$-val párhuzamos sík a kúpot metszi $k^{(2)}$-vel, végre ennek a $k$-n fekvő középpontját $O$-val, radiusát pedig $r$-rel.

Az $O$ pontból $\pi$ síkra bocsátott merőleges hossza $r.sin\ (\pi\varkappa)$ és $OM\ .\ sin\ (\pi k)$, tehát

$$\lambda' = \frac{OM}{r} = \frac{sin\ (\pi\varkappa)}{sin\ (\pi k)};$$

és ha a $\pi$ sík az $ac$ fősíkban fekvő $r_1$, $r_2$ alkotók egyikének érintősíkja, akkor

$$\lambda' = \frac{sin\ (\varepsilon' - \vartheta)}{(sin\ \vartheta - \tau').}$$

6. A kúpszelet ama tulajdonságának analogonja, hogy gyujtópontjaiból az érintőkre bocsátott merőlegeseknek szorzata állandó, a II. r. kúpon is felismerhető.

Ha a II. r. kúp $t$ alkotója $\tau$ érintősíkjának hajlásszögét a $tf$ síkhoz, s így egyszersmind a $tf_1$ síkhoz $\omega$-val jelöljük, akkor az $M(ff_1t)$ háromélből következik, mert $\sphericalangle\ (ff_1) = 2\varepsilon$,

$$cos\ 2\varepsilon = cos\ (tf)\ cos\ (tf_1) - sin\ (tf)\ sin\ (tf_1)\ cos\ 2\omega =$$
$$cos\ (tf)\ cos\ (tf_1) - sin\ (tf)\ sin\ (ft_1) + 2\ sin\ (tf)\ sin\ \omega.\ sin\ (tf_1)\ sin\ \omega,$$

s mert

$$sin\ (\tau f) = sin\ (tf).\ sin\ \omega,\quad sin\ (\tau f_1) = sin\ (tf_1)\ sin\ \omega$$
$$(tf) + (tf_1) = 2\psi,$$

azért

$$sin\ (\tau f).\ sin\ (\tau f_1) = \tfrac{1}{2}\ (cos\ 2\varepsilon - cos\ 2\psi) = sin\ (\psi + \varepsilon)\ sin\ (\psi - \varepsilon) = \text{állandó}$$
$$= tg^2\vartheta\ cos^2\psi$$

Ennélfogva:

A II. r. kúp fokalis sugarai a kúp érintősíkjaihoz oly szögek alatt hajlanak, mely szögek sinusának szorzata állandó. (E szorzat a kúp állandóival kifejezve $= tg^2\vartheta \cos^2\psi$.)

A II. r. kúp alkotói a cziklikus síkokhoz oly szögek alatt hajlanak, mely szögek sinusának szorzata állandó. (E szorzat a kúp állandóival kifejezve $= \sin^2\vartheta \cot g^2\psi$.)

7. Ismeretes, hogy a kúpszelet gyujtópontjaiból annak érintőire bocsátott merőlegeseknek talppontjai egy körön feküsznek, melynek átmérője a kúpszelet főtengelye. Kérdés, mikép nyilvánul e tulajdonság a II. r. kúpon, azaz: ha a II. r. kúp fokalis sugarait derékszög alatt a kúpnak érintősíkjaira projicziáljuk, mi lesz e projekczióknak geometriai helye?

Messe egy az $f$ fokalis sugárra merőleges $\mu$ sík a kúpot és az $f$-et a $k^{(2)}$ kúpszeletben és az $F'$ pontban; $F'$ a $k^{(2)}$-nek egyik gyujtópontja.

Az $F'$ pontból a $k^{(2)}$ kúpszelet $t'$ érintőjére bocsátott merőlegesnek talppontja rajta fekszik azon egyenesen, melyben az $f$-en keresztül menő és az $Mt'$ érintősíkra merőleges sík az $Mt'$ érintősíkot metszi; s mert a $t'$ érintő változásával ama talppontok egy $l$ körön feküsznek, melynek átmérője a $k^{(2)}$ főtengelye, azért az $f$ fokalis sugárnak derékszögü projekczió az $M.k^{(2)}$ kúp érintősíkjaira egy $M.l$ II. r. kúpnak alkotói.

Az $M.l$ kúp az $M.k^{(2)}$ kúpot azokban az $s_1 s_2$ alkotókban érinti, melyek ez utóbbi kúp $ff_1$ fokalis sugarain keresztül menő $ab$ fősíkban feküsznek. Ebből következik, hogy a két kúpnak a $bc$ főtengelyei és fősíkjai közösek, s mert az $M.l$ kúpnak egyik cziklikus síkja az eredeti kúpnak $f$ fokalis sugarára merőleges, azért a másik cziklikus síkja a másik $f_1$ fokalis sugárra is merőleges lesz, s így az $f_1$-nek derékszögű projekczió az $M.k^{(2)}$ kúp érintősíkjaira szintén az $M.l$ kúpon feküsznek.

Az $M.l$-nek cziklikus síkjai egymást a $c$ főtengelyben metszik, e kúpnak tehát vagy az $a$, vagy a $b$ az elliptikus főtengelye. Hogy megtudjuk, melyik a kettő közül az elliptikus főtengely, s hogy mily nagyok e kúpnak állandói, nevezzük az $M.k^{(2)}$ kúp $ab$ és $ac$ fősíkjaiban fekvő alkotóknak, az $ff_1$ fokalis sugaraknak és a cziklikus síkoknak hajlásszögeit az $M.k^{(2)}$ kúp $a$ elliptikus tengelyéhez, mint előbb $\psi$, $\vartheta$, $\varepsilon$, $\varepsilon'$-vel, és az $M.l$ kúpra vonatkozólag ugyanezeknek az egyeneseknek és síkoknak hajlásszögeit az $a$ tengelyhez $\psi_l$, $\vartheta_l$, $\varepsilon_l$, $\varepsilon'_l$-sel.

Az előbbiek folytán $\vartheta_1 = \psi$, $\varepsilon'_1 = 90^0 - \varepsilon$; de mint minden II. r. kúpra vonatkozólag, úgy az $M.l$-re is $sin\ \vartheta_1 = sin\ \varepsilon'_1 . sin\ \psi_1$, tehát jelenleg $sin\ \psi = cos\ \varepsilon . sin\ \psi_1$, miből

$$sin\ \psi_1 = \frac{sin\ \psi}{cos\ \varepsilon} = tg\ \psi\ cos\ \vartheta$$

és

$$tg\ \psi_1 = \frac{tg\ \psi}{\sqrt{1 + tg^2\vartheta - tg^2\psi}}$$

Ez egyenlet szerint a $\psi_1$ valós vagy képzetes a szerint, a mint $1 + tg^2\vartheta$ nagyobb vagy kisebb, mint $tg^2\psi$; ez eseteknek megfelelőleg lesz az $a$ vagy a $b$ az $M.l$ kúpnak elliptikus tengelye; s ha $1 + tg^2\vartheta = tg^2\psi$, akkor az $M.l$ kúp egy síkpárrá fajul el. Az $M.l$ kúp vagy a síkpár az $M.k^{(2)}$ kúpot az $s_1 s_2$ alkotók szerint érinti és az első esetben bezárja, a másodikban pedig kizárja azt.

A talált eredmény egybefoglalva ekkép szól:

A II. r. kúp fokalis sugarainak derékszögü projekcziói annak érintősíkjaira oly II. r. kúpon feküsznek, melynek főtengelyei az eredetinek főtengelyeivel egybeesnek, cziklikus síkjai pedig az eredeti kúpnak fokalis sugaraira merőlegesek; a két kúp egymást abban a két alkotóban érinti, mely az eredetinek fokalis sugaraival egy fősíkban fekszik, vagy a mi ugyanazt fejezi ki, mely a leszármaztatott kúp cziklikus síkjainak metszővonalára merőleges.

Ha az eredeti kúp állandói $\psi$, $\vartheta$ (hol $\psi > \vartheta$), akkor a leszármaztatott kúpnak $\psi_1$, $\vartheta_1$ állandói ezekkel ekkép függnek össze:

$$\vartheta_1 = \psi,$$

$$tg\ \psi_1 = \frac{tg\psi}{\sqrt{\pm(1 + tg^2\vartheta - tg^2\psi)}}$$

Ha a II. r. kúp alkotóit a cziklikus síkoknak az illető alkotókra merőleges sugaraival síkok által összekötjük, akkor ezek a síkok oly II. r. kúpot burkolnak, melynek síkjai az eredetinek síkjaival egybeesnek, fokalis sugarai pedig az eredeti kúpnak cziklikus síkjaira merőlegesek; a két kúp egymást abban a két síkban érinti, mely az eredeti kúp cziklikus síkjainak metszővonalán megy keresztül, vagy a mi ugyanazt fejezi ki, mely a leszármaztatott kúp fokalis sugarainak síkjára merőleges.

Ha az eredeti kúp állandói $\psi$, $\vartheta$ (hol $\psi > \vartheta$), akkor a leszármaztatott kúpnak $\psi_m$, $\vartheta_m$ állandói ezekkel ekkép függnek össze:

$$\psi_m = \vartheta,$$

$$cotg\ \vartheta_m = \frac{cotg\ \vartheta}{\sqrt{\pm(1 + cotg^2\psi - cotg^2\vartheta)}}$$

s így a két kúpnak elliptikus tengelyei vagy egybeesnek, vagy különbözők, vagy a leszármaztatott kúp egy síkpárrá fajul el a szerint, a mint $1 + tg^2\vartheta - tg^2\psi$ nagyobb, kisebb vagy egyenlő 0. Az első esetben a leszármaztatott kúp az eredetit bezárja, a másodikban pedig kizárja.

s így a két kúpnak elliptikus tengelyei vagy egybeesnek, vagy különbözők, vagy a leszármaztatott kúp egy egyenes párrá fajul el a szerint, a mint $1 + cotg^2\psi - cotg^2\vartheta$ nagyobb, kisebb vagy egyenlő 0. Az első esetben a leszármaztatott kúp az eredetitől be van zárva, a másodikban ki van zárva.

A baloldalon álló tételt tekintve, az eredeti és a leszármaztatott kúp oly helyzetű, mint a jobb oldali tételnél a leszármaztatott és az eredeti kúp.

A két tétel következménye:

Ha az $f$ egyenes merőleges a II. r. kúp egyik cziklikus síkjára annak csúcsában és egy derékszögű lapszöget akkép mozgatunk, hogy egyik szára az $f$-en menjen keresztül, a lapszög éle pedig a kúpon maradjon, akkor a derékszögű lapszög másik szára egy II. r. kúpot burkol, mely a felvett kúpot a cziklikus síkban fekvő tengelyre merőleges alkotókban érinti és egyik fokalis sugara az $f$.

Ha a $\varkappa$ sík merőleges a II. r. kúp egyik fokalis sugarára annak csúcsában és egy derékszöget akkép mozgatunk, hogy egyik szára a $\varkappa$-ban maradjon, síkja pedig a kúpot érintse, akkor a másik szár egy II. r. kúpot ír le, mely a felvett kúpot a fokalis sugáron keresztül menő fősíkra merőleges érintősík érintőalkotójában érinti és egyik cziklikus síkja a $\varkappa$.

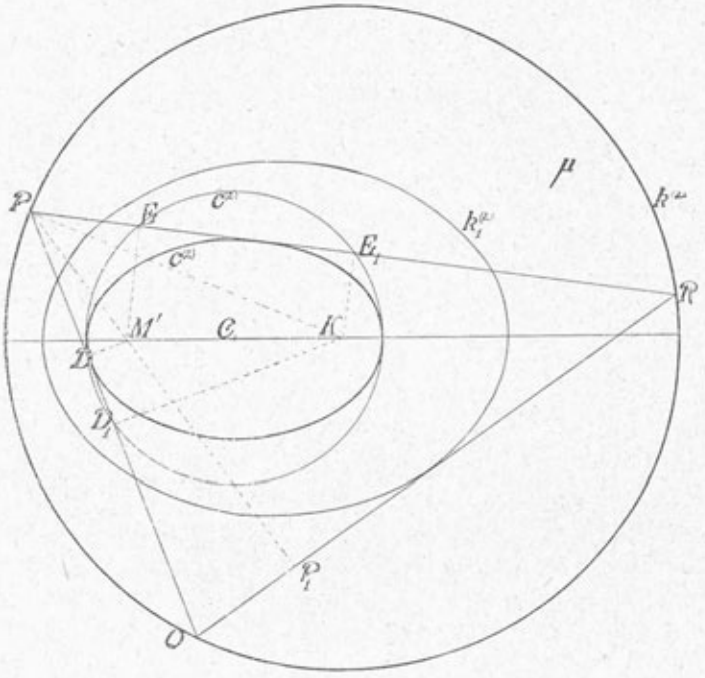
E tételek speciális esetéről alább fogunk szólani.

8. Foglalkozzunk most azzal a feladattal: milyen kúpot burkolnak mindazok a síkok, melyek az $M.k^{(2)}$ kúpot derékszögű alkotópárokban metszik? továbbá az ennek dualisan megfelelő feladattal: milyen kúpon feküsznek mindazok a sugarak, melyekből az $M.k_1^{(2)}$ II. r. kúphoz vonható érintősíkok egymásra merőlegesek. A két feladat egyikével a másik is meg van oldva, mert ha az $M.k^{(2)}$ és $M.k_1^{(2)}$ kúpok egymásnak recziprokus kúpjai és azt találjuk, hogy az $M.k^{(2)}$ kúpot derékszögű alkotók szerint metsző síkok az $M.c^{(2)}$ II. r. kúpot burkolják, akkor e kúp recziprokus kúpjának, $M.c_1^{(2)}$-nek, minden alkotójából az $M.k_1^{(2)}$-hez vonható érintősíkok egymásra merőlegesek és az $M.c_1^{(2)}$ szintén II. r. kúp.

Messük az $M.k^{(2)}$ kúpot és recziprokus kúpját $M.k_1^{(2)}$-t az elsőnek az egyik cziklikus síkjával párhuzamos $\varrho$ síkkal a $k^{(2)}$ kör-

ben, illetve a $k_1^{(2)}$ kúpszeletben (5. ábra). Az $M$ csúcsnak $M'$ derékszögű projekciója a $\mu$ síkra a $k_1^{(2)}$-nek egyik gyujtópontja, míg az $M.k_1^{(2)}$ kúpnak egyik fokalis sugara az $MM'$.

Az $M.k^{(2)}$ kúp $MP$ alkotójára azok az $MQ, MR$ alkotók merőlegesek, melyekben az $M.k_1^{(2)}$ kúpnak az $MP$-re merőleges érintősíkja az $M.k^{(2)}$ kúpot metszi. És feladatunk: az $M(PQR)$ háromél $MPQ$, $MPR$ lapjaitól burkolt kúpnak rendjét megállapítani, ha a




5. ábra.

háromélnek $MP$ éle az $M.k^{(2)}$ kúpnak alkotója és $MQR$ lapja az $M.k_1^{(2)}$ kúpnak $MP$-re merőleges érintősíkja.

Bocsássunk az $MM'$ egyenesen keresztül az $M(PQR)$ háromél $MQR$, $MPQ$ és $MPR$ lapjaira merőleges síkokat, melyek ezeket az $MP_1$, $MD$, $ME$ egyenesekben metszik s nevezzük ezeknek az egyeneseknek, valamint a háromél éleinek metszőpontjait a $\mu$ síkkal $P_1DEPQR$-nek és a $k^{(2)}$ kör $K$ középpontjából a $PQ$ és $PR$-re bocsátott merőlegeseknek talppontjait $D_1$ és $E_1$-nek.

Tekintve a $k^{(2)}$ körbe beírt $PQR$ háromszöget, melynek az $M'$ pont a $PP_1$ magasságán fekszik és melynek $PQ$, $PR$ oldalaira

az $M'D$, $M'E$ egyenesek merőlegesek, s tekintve továbbá a $PM'E \sim PRP_1$, $PM'D \sim PQP_1$ háromszögeket:

$$\frac{PM' \cdot PP_1}{2} = \frac{PD \cdot PQ}{2} = PD \cdot PD_1 = PE \cdot PE_1$$

A $DD_1EE_1$ pontok tehát oly $\overline{c}^{(2)}$ körön feküsznek, melynek középpontja az $M'K$ vonaldarab felezőpontja $C$. E $\overline{c}^{(2)}$ kör $r$ radiusának négyzete:

$$r^2 = PC^2 - PE \cdot PE_1 = PC^2 - \frac{PM' \cdot PP_1}{2}$$

és mert a $PC$ az $M'PK$ háromszögnek középvonala, azért

$$r^2 = \frac{PK^2 + PM'^2 - 2M'C^2 - PM' \cdot PP_1}{2} =$$

$$= \frac{PK^2 - PM' \cdot M'P_1 - 2M'C^2}{2} = \frac{PK^2 - MM'^2 - 2M'C^2}{2},$$

s így az $r$ független a $k^{(2)}$ körnek $P$ pontjától.

Ennélfogva az $MM'$ sugárnak $MD$, $ME$ derékszögű projekcziói az $M(PQR)$ háromél $MPQ$, $MPR$ lapjaira az $M.\overline{c}^{(2)}$ II. r. kúpnak alkotói, s ezért a háromélnek $MRQ$, $MPR$ lapjai oly II. r. kúpnak $M.c^{(2)}$-nek érintősíkjai, melynek egyik fokalis sugara az $MM'$.

E vizsgálatok alapján fölírhatjuk a következő dualis tételeket:

Azok a síkok, melyek a II. r. kúpot egymásra merőleges alkotók szerint metszik oly II. r. kúpnak érintősíkjai, melynek fokalis sugarai az eredeti kúp cziklikus síkjaira merőlegesek, és így a két kúp főtengelyei ugyanazok.

Azok a sugarak, melyekből a II. r. kúphoz húzható érintősíkok egymásra merőlegesek, oly II. r. kúpon feküsznek, melynek cziklikus síkjai az eredeti kúp fokalis sugaraira merőlegesek és így a két kúp főtengelyei ugyanazok.

*Jegyzet.* Számítás útján kimutatható, hogy ha az eredeti $\mathbf{K}^{(2)}$ kúp fősíkjaiban fekvő alkotók a kúp elliptikus tengelyével $x$-szel $\psi$ és $\vartheta$ szöget ($\psi > \vartheta$) képeznek, tehát a kúp egyenlete a főtengelyekre vonatkoztatva:

$$y^2 cotg^2\psi + z^2 cotg^2\vartheta = x^2,$$

akkor annak a $\mathbf{K}_1^{(2)}$ kúpnak egyenlete, melynek érintősíkjai az eredeti kúpot derékszögű alkotók szerint metszik

$$\frac{y^2}{tg^2\vartheta(tg^2\psi - 1)} + \frac{z^2}{tg^2\psi(tg^2\vartheta - 1)} = \frac{x^2}{tg^2\vartheta + tg^2\psi}$$

és annak a $K_2^{(2)}$ kúpnak egyenlete, melynek alkotóiból az eredetihez vonható érintősíkpárok merőlegesek

$$y^2(1-tg^2\vartheta) + z^2(1-tg^2\psi) = x^2(tg^2\vartheta + tg^2\psi).$$

Ezekből az egyenletekből pedig következik, hogy ha

| $\psi$ | $\vartheta$ | Ugyanakkor | |
|---|---|---|---|
| | | $K_1^{(2)}$ | $K_2^{(2)}$ |
| $< 45^0$ | $< 45^0$ | képzetes kúp | valós kúp, melynek elliptikus főtengelye az $x$ |
| $45^0$ | $< 45^0$ | az $[xy]$ fősík | két, a $z$ főtengelyen keresztül menő sík |
| $> 45^0$ | $< 45^0$ | valós kúp, melynek elliptikus főtengelye a $z$ | valós kúp, melynek elliptikus tengelye az $y$ főtengely |
| $> 45^0$ | $45^0$ | két egyenes az $[xz]$ fősíkban | az $y$ főtengely |
| $> 45^0$ | $> 45^0$ | valós kúp, melynek elliptikus főtengelye az $x$ | képzetes kúp |
| $45^0$ | $45^0$ | az $x$ főtengely | az $[yz]$ fősík. |

## 7. §. Különös másodrendű kúpok.

1. Az általános II. r. kúpon kívül megismerkedtünk már az előbbiekben különös kúpokkal. Ilyen volt először is az a II. r. kúp, melynek csúcsa végtelen távol van, és melyet II. r. *hengernek* neveztünk. Maga a II. r. henger pedig a végtelen távol fekvő alkotóit tekintve: elliptikus (vagy különös esetben forgáshenger), parabolikus vagy hyperbolikus henger lehet a szerint, a mint annak *0*, *1* vagy *2 valós* alkotója van végtelen távol, tehát minden síkmetszése, mely nem párhuzamos a henger alkotóival: ellipsis, parabola,

illetve hyperbola. Az elliptikus és hyperbolikus hengernek két fősíkja és egy azok metszővonalában levő főtengelye, valamint a két valós fokalis sugara van véges távolságban; a parabolikus hengernek csak egy fősíkja és egy fokalis sugara van véges távolságban, a többi fősíkok és főtengelyek végtelen távol vannak.

A kúp főtengelyeit tekintve, szintén megkülömböztettünk két különös kúpot. Az első olyan volt, hogy poláris nyalábjában minden sugarat és síkot főtengelynek, illetve fősíknak lehetett tekinteni. E kúp polárisnyalábja az *orthogonalis nyaláb*, alkotói pedig képzetesek és a végtelen távol fekvő képzetes kört projicziálják.

A második különös kúp, melyről előbb szintén szólottunk, a *forgáskúp*; ennek $\infty^1$ főtengelye és köztük egy, a többiekre merőleges különös főtengelye van, melyet forgástengelynek neveztünk. E forgástengelyen, *a*-n, keresztül menő kapcsolt polárissíkok orthogonalis síksort, a forgástengelyre merőleges fősíkban, $\alpha$-ban, fekvő kapcsolt polárissugarak pedig orthogonalis sugársort képeznek. E sugársornak minden sugara főtengelye, ama *a* síksornak pedig minden síkja fősíkja a forgáskúpnak.

Úgy mikép az általános II. r. kúp, a forgáskúp is a főtengelyek és a fősíkok irányában szimmetrikus. Ha tehát a *g* egyenes a forgáskúpnak egyik alkotója, akkor a *g*-nek tükörképei az *a* forgástengelynek összes síkjaira vonatkozólag, szintén alkotói annak a kúpnak. S mert a *g* egyenes a tükröző síkban fekvő *a* körül a tükörképébe forgatható, azért az egész forgáskúpot úgy írhatjuk le, hogy tetszésszerinti *g* alkotóját az *a* forgástengely körül addig forgatjuk, míg eredeti helyzetébe vissza nem tér. A kúpnak e származtatási módját tekintve nevezzük azt forgáskúpnak. — A forgáskúpnak minden alkotója és minden érintősíkja úgy annak forgástengelyéhez, mint az arra merőleges fősíkhoz egyenlő szög alatt hajlik.

Az *M* forgáskúpnak az *M* orthogonalis polárisnyaláb képzetes vezető kúpja iránt az a különös helyzete van, hogy az *a* forgástengelynek kapcsolt polárissíkjai, és az *a* polárissíkjában, az $\alpha$ fősíkban, levő kapcsolt polárissugarak, melyek orthogonalis síksort, illetve sugársort képeznek, mindkét kúpra nézve ugyanazok. A két kúpnak tehát az $\alpha$ fősíkban két közös alkotója van, mely ama orthogonalis sugársornak két képzetes kettőssugara, és melynek érintősíkjai, az *a* forgástengely orthogonális síksorában levő képzetes kettőssíkok.

*A forgáskúp tehát a csúcsához tartozó orthogonális nyalábnak vezető kúpját, a forgástengelyre merőleges fősík két képzetes alkotójában, azaz kettősen érinti.*

És fordítva: Minden II. r. kúp, mely az orthogonalis nyaláb vezető kúpját kettősen érinti: forgáskúp.

Tekintve, hogy a végtelen távol levő képzetes kör rajta van minden orthogonalis nyalábnak vezető kúpján, azért: *minden forgáskúpot és (ha annak csúcsa végtelen távol van) minden forgáshengert olyannak tekinthetünk, mely a végtelen távol fekvő képzetes kört kettősen érinti.*

Más különös kúpokat akkép nyerünk, hogy a kúp fokalis sugarainak, vagy cziklikus síkjainak adunk előre különös helyzetet, vagy pedig azoknak egyes alkotóit vagy érintősíkjait különös kölcsönös helyzetben vesszük fel. Ily kúpokkal és azoknak tulajdonságaival akarunk a következőkben foglalkozni.

2. *A parabolikus kúp.* A II. r. kúpnak $ff_1$ fokális sugarait és ezeknek síkjában levő $s_1 s_2$ kúpalkotókat tetszésszerint vehetjük fel, hacsak az $ff_1$, $s_1 s_2$ egyenespároknak szögfelezői, melyek a kúpnak főtengelyei lesznek, egybeesnek. Válasszuk tehát az $ff_1$, $s_1 s_2$ egyenespárokat akképen, hogy $f \perp s_2$ és $f_1 \perp s_1$ legyen; az $s_1 s_2$ alkotópárok ekkor a kúpnak elliptikus tengelyével, $x$-szel, $45^0$-nál nagyobb szöget képeznek.

A fokalis sugaraknak amaz általános tulajdonságánál fogva, hogy bármelyik fokalis sugárra merőleges sík a kúpot oly kúpszeletben metszi, melynek gyújtópontja ama fokalis sugárnak talpa a metszősíkon következik: hogy az ilyen kúpot, bármelyik fokalis sugarára merőleges sík parabola szerint metsz.

Messük tehát az ilyen kúpot, melynek csúcsa az $M$, az $f$ fokalis sugárra merőleges $\varepsilon$ síkkal a $p^{(2)}$ parabolában, és nevezzük az $f$-nek metszőpontját az $\varepsilon$-mal, mely a $p^{(2)}$ gyujtópontja, $F$-nek; a másik fokalis sugárra $f_1$-re merőleges $s_1$ alkotónak és $\sigma_1$ érintősíkjának metszését az $\varepsilon$-mal $S$, illetve $s$-nek; az $f$-re merőleges $s_2$ alkotónak az $\varepsilon$-mal párhuzamos érintősíkját $\sigma_2$-nek; a kúp érintősíkját egy tetszésszerinti $t$ alkotó mentén $\tau$-nak; végre az $(s, \tau)$ metszőpontot $T'$-nek és az $\varepsilon\tau$ metszővonalat $t'$-nek.

A $p^{(2)}$ parabolának $t'$ érintője merőleges az $FT'$ egyenesre és az $MFT' \equiv \rho$ síkra, tehát a $t'$-sel párhuzamos $\tau\sigma_2 \equiv MQ$ egyenes is merőleges a $\rho$ síkra és ennek $MT' \equiv \tau\sigma_1$ egyenesére, és azonkívül a $\rho$ sík is merőleges a $\tau$-ra. Ennélfogva:

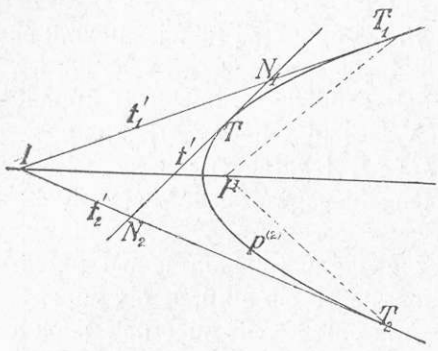
*Ha egy változatlan csúcscsal M biró ($T'MQ$) derékszög akkép mozog, hogy szárai ($T'M$ és $MQ$) két szilárd síkon ($\sigma_1\sigma_2$-ön) maradnak, akkor a derékszög síkja ($\tau$) egy II. r. kúpot burkol, mely az előbbivel megegyező.*

Továbbá: *Ha egy derékszögű síkpár ($\rho\tau$) akkép mozog, hogy*

*egyik síkja* ($\rho$) *egy szilárd f egyenesen megy keresztül, metszővonala* ($\rho\tau$) *pedig egy szilárd síkon* ($\sigma_1$-*en*) *marad, akkor a derékszögű síkpárnak másik síkja* ($\tau$) *egy az előbbivel megegyező kúpot burkol, melynek a szilárd f egyenes egyik fokalis sugara.*

A kúpnak ez utóbbi származtatása a parabolára emlékeztet, melyet tudvalevőleg egy derékszögnek egyik szára burkol, ha a másik szára egy szilárd ponton megy keresztül és a csúcsa egyenesen mozog. A tárgyalt kúpot ez oknál fogva *parabolikus kúpnak* akarjuk nevezni.

A parabolikus kúpnak a parabolára emlékeztető még más tulajdonsága is van. Hogy ezt lássuk, nevezzük az előbbbi $M.p^{(2)}$ parabolikus kúpnak, az $[s_1 s_2]$ fősíkjához egyenlő szögek alatt hajló két tetszésszerinti érintősíkját $\tau_1$ és $\tau_2$-nek, egy változó érintő síkját $\tau$-nak, mely síkok a kúpot a $t_1 t_2 t$ alkotókban érintik. E síkoknak és alkotóknak metszései a $p^{(2)}$ parabola síkjával legyenek (6. ábra) a $t'_1 t'_2 t'$ egyenesek és a $T_1 T_2 T$ pontok, és a $t'_1 t'_2 t'$ háromoldal szögpontjai legyenek:




6. ábra.

$$N_1 \equiv (t't'_1), \quad N_2 \equiv (t't'_2), \quad I \equiv (t'_1 t'_2).$$

Minthogy a $T_1FI$, $IFT_2$ háromszögek egyenszárúak és kongruensek, a $T_1MI$, $IMT_2$ háromszögek is azok lesznek, és mert a $p^{(2)}$ parabola egyik tulajdonsága folytán $T_1N_1 = IN_2$, azért

$$T_1MN_1 \sphericalangle = IMN_2 \sphericalangle$$

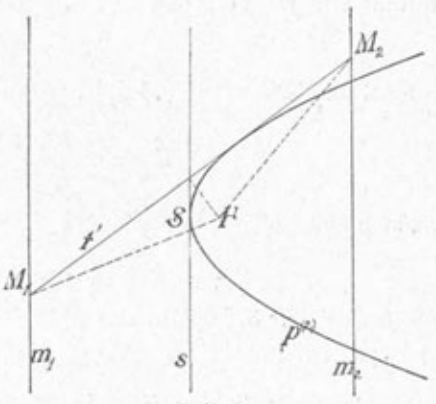
Ennélfogva: *A parabolikus kúpnak egy változó érintősíkja a kúpnak bármily két, a fokalis sugarain keresztül menő fősíkhoz egyenlő szögek alatt hajló érintősíkját egyenlően-projektiv sugársorokban metszi.*

Vagy: *Két egyenlően-projektiv* (*kongruens*) *sugársornak képződménye, ha közös középpontúak, különböző síkban fekvőek, de nem perspektiv helyzetűek, parabolikus kúp; ennek egyik fősíkja felezi a sugársorok síkjainak* $\tau_1$, $\tau_2$-*nek, egyik hajlásszögét. E fősíkban fekvő* $s_1$, $s_2$ *alkotók* $\sigma_1$, $\sigma_2$ *érintősíkjai a sugársorok síkjainak* $\tau_1\tau_2$ *metszővonalához egyenlő szög alatt hajló megfelelő sugarakon*

*mennek keresztül és ezekre az érintősíkokra a kúp fokalis sugarai merőlegesek.*

A paraboláról tudjuk, hogy az két általános helyzetű, egyenlően-projektiv pontsornak képződménye.

3. A $p^{(2)}$ parabolának $\varepsilon$ síkjában (7. ábra) annak $s$ csúcsérintőjétől egyenlő távolságra két egyenest, $m_1$ és $m_2$-öt veszünk fel. A parabola $F$ gyujtópontjában annak síkjára emelt merőlegesnek $M$ pontját az $m_1$ és $m_2$-vel összekötő síkok: $\mu_1 \equiv Mm_1$ és $\mu_2 \equiv Mm_2$. Az $M.p^{(2)}$ parabolikus kúpnak tetszésszerinti $\tau$ érintősíkja az $m_1$, $m_2$ egyeneseket az $M_1$, $M_2$ pontokban, a $p^{(2)}$ parabola síkját a $t'$ egyenesben, a $\mu_1$ és $\mu_2$ síkokat az $l_1 \equiv M_1M \equiv \tau\mu_1$ és $l_2 \equiv M_2M \equiv \tau\mu_2$ egyenesekben metszi. Az $M_1(t'm_1l_1)$ és $M_2(t'm_2l_2)$ háromélekből következik:



7. ábra.

$$\frac{sin(t'l_1)}{sin(t'm_1)} = \frac{sin(\varepsilon\mu_1)}{sin(\tau\mu_1)}, \quad \frac{sin(t'l_2)}{sin(t'm_2)} = \frac{sin(\varepsilon\mu_2)}{sin(\tau\mu_2)};$$

de az $M_1FM_2$, $M_1MM_2$ háromszögek egyenlőszárúak, tehát

$$(t'l_1) \sphericalangle = (t'l_2) \sphericalangle, \text{ és } (t'm_1) \sphericalangle = (t'm_2) \sphericalangle$$

és így

$$\frac{sin(\tau\mu_1)}{sin(\tau\mu_2)} = \frac{sin(\varepsilon\mu_1)}{sin(\varepsilon\mu_2)} = \text{állandó.}$$

Tekintve, hogy az $m_1m_2$ egyenesek a $p^{(2)}$ parabolának kapcsolt polárisai, tehát a $\mu_1\mu_2$ síkok az $M.p^{(2)}$ kúpnak kapcsolt poláris síkjai, következik: *ama szögek sinusainak viszonya, melyeket a parabolikus kúpnak változó érintősíkja két, a kúp fokalis sugarain keresztül menő fősíkra merőleges kapcsolt polárissíkkal képez, állandó.*

És fordítva: ha két sík metszővonalának valamely pontján keresztül oly síkokat vezetünk, a melyek hajlásszögeinek sinusa a két síkhoz állandó viszonyban van, akkor ezek a változó síkok egy parabolikus kúpot burkolnak; a két sík a kúpnak oly kapcsolt polárissíkpárja, mely a fokalis sugarakat tartó fősíkra merőleges.

Ha a parabolikus kúpot és fokalis sugarait az elliptikus tengelyére merőleges és a kúp csúcsától $h$ távolságra levő síkkal metszszük és a kimetszett ellipsis tengelyeit $2a$, $2b$-vel, a fokalis sugarak metszőpontjainak távolságát $2d$-vel jelöljük, akkor e kúp fokalis sugarainak ama különös helyzete folytán, hogy azok a fokalis sugarak síkjában levő alkotókra merőlegesek:

$$ad = h^2;$$

s mert az általános II. r. kúpra nézve (6. §; 4. $p$; 4. képlete szerint)

$$d = \frac{h\sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{b^2 + h^2}},$$

azért e parabolikus kúpra nézve

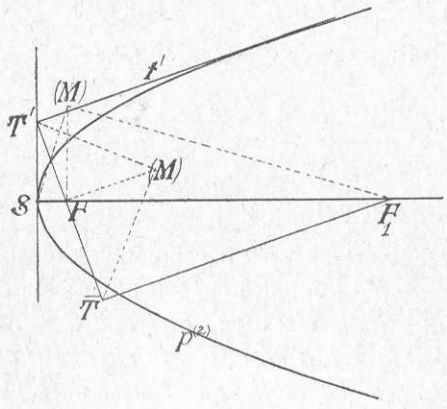
$$h = \sqrt{a^2 - b^2} = c$$

és (6. §. 4. p.; 3. képlete sz.)

$$tg^2\psi - tg^2\vartheta = 1.$$

4. *Az orthogonalis kúp.* A parabolikus kúpnak recziprokus kúpja szintén egy különös II. r. kúp, melyet *Schröter**) — *orthogonalis kúpnak* nevezett.

Hogy erről fogalmat szerezzünk, induljunk ki a $\varepsilon$ síkban fekvő $p^{(2)}$ parabolából (8. ábra), melynek csúcsa és csúcsérintője $S$ és $s$, gyujtópontja az $F$, és az $F$ pontban az $\varepsilon$-ra emelt $f$ merőlegesnek tetszésszerinti pontja $M$. Az $M.p^{(2)}$ parabolikus kúpnak egyik fokalis sugara az $f$, a másik pedig, mely az $\varepsilon$ síkot az $F_1$ pontban metszi, a kúp $Ms \equiv \sigma_1$ érintősíkjára az $M$ csúcsban emelt merőleges $f_1$.




8. ábra.

Ha az $M.p^{(2)}$ kúpnak $\tau$ érintősíkjára az $M$ pontban merőlegest emelünk, mely az $\varepsilon$ síkot a $T$ pontban metszi, és $\tau$-nak metszővonalát és metszőpontját az $\varepsilon$ síkkal és az $s$ egyenessel $t'$ és $T'$-sel jelöljük, akkor az

*) Die Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung. (1880.) 67. oldal.

$$MF^2 = T'F \,.\, F\bar{T} = SF \,.\, FF_1$$

viszonylat következtében $T'SF \sim F_1\bar{T}F$, tehát az $F\bar{T}F_1 \sphericalangle$ úgy mikép az $FST' \sphericalangle$, derékszög. Ennélfogva az $M.\, p^{(2)}$ kúpnak $\tau$ változó érintősíkjára az $M$ pontban emelt merőleges az $\varepsilon$ síkot olv $T$ pontban metszi, mely az $\varepsilon$ síkban az $FF_1$ átmérő fölé írható $k^{(2)}$ körön van. Az $M.\, p^{(2)}$ kúpnak reciprokus kúpja tehát oly $M.\, k^{(2)}$ kúp, melynek jellemző tulajdonsága, hogy az az $\varepsilon$ sík, mely e kúpot a $k^{(2)}$ körben metszi és az ezzel párhuzamos cziklikus síkja $\varkappa$ e kúpnak $f$ alkotójára merőleges, és így a másik cziklikus síkja $\varkappa_1$ az $f_1$ alkotóra merőleges.

Minthogy egy II. r. kúpnak főtengelyeire, fősíkjaira, fokalis sugaraira és cziklikus síkjaira a csúcsban emelt merőleges síkok és egyenesek a reciprokus kúpnak fősíkjai, főtengelyei, cziklikus síkjai, illetve fokalis sugarai lesznek; és mert az egyik kúpnak projektiv-tulajdonságai a másik kúpra is a sugár- és síknyalábban uralkodó dualitási elv szerint átvihetők: a parabolikus kúpnak a 2. és 3. pontban talált tulajdonságai az orthogonalis kúpra nézve a következőkbe mennek át:

„Ha két egymást metsző egyenesen keresztül egy derékszögű síkpárt fektetünk és azt akkép mozgatjuk, hogy az egyik sík mindig az egyik egyenesen, a másik sík pedig a másik egyenesen menjen keresztül, akkor a síkpárnak változó metszővonala egy orthogonalis kúpot ír le."

Vagy: „Ha két egymást metsző egyenest veszünk fel, és az egyiknek síkjaira a másik egyenesen keresztül merőleges síkokat vezetünk, akkor a merőleges síkpárok egymást a két felvett egyenesen keresztül menő orthogonalis kúpnak alkotóiban metszik."

„Ha egy derékszög akkép mozog, hogy egyik szára egy szilárd $\varkappa$ síkon marad, síkja pedig valamely egyenes körül forog, akkor annak másik szára oly orthogonalis kúpot ír le, melynek a $\varkappa$ sík egyik cziklikus síkja."

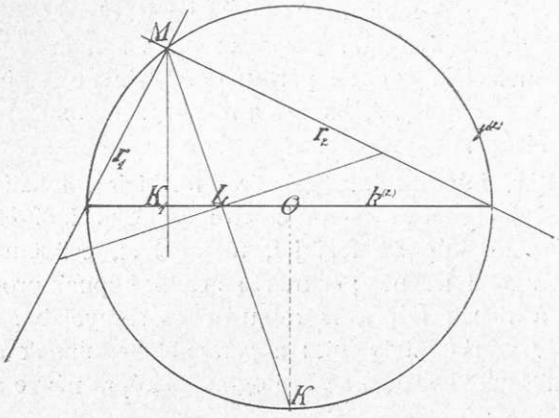
„Két nem perspektiv helyzetű egyenlően projektiv (kongruens) síksornak képződménye, ha tengelyei egymást nem metszik, orthogonalis kúp."

„Ha két szilárd egyenes metszőpontján keresztül egyeneseket vezetünk, melyeknek hajlásszögei a két szilárd egyeneshez olyanok, hogy azok sinusának viszonya állandó, akkor azok a változó egyenesek egy orthogonalis kúpnak alkotói. A két szilárd egyenes kapcsolt polárissugárpárja e kúpnak és a kúp cziklikus síkjaira merőleges fősíkban van."

Vagy fordítva:

„Az orthogonalis kúp alkotói a cziklikus síkjaira merőleges fősíkban fekvő két kapcsolt polárissugárhoz oly szögek alatt hajlanak, melyeknek sinusa állandó.“

Az előbbi és ez a tétel még ekkép is fogalmazható:



9. ábra.

„Ama pontok geometriai helye, melyeknek két metsző egyenestől mért távolságai állandó viszonyt adnak, orthogonalis kúp.“

„Az orthogonalis kúp pontjainak oly két kapcsolt polárissugártól mért távolsági viszonya, mely két polárissugár a kúp cziklikus síkjaira merőleges fősíkban van, — állandó.“

Ha az orthogonalis kúp elliptikus tengelyére merőleges és a csúcstól $h$ távolságra levő sík a kúpot a $2a$ és $2b$ tengelyű ellipsisben, a kúp cziklikus síkjait pedig két párhuzamos egyenesben metszi, melyeknek távolsága $2\delta$, akkor

$$b\delta = h^2;$$

s mert az általános kúpra nézve

$$\delta = \frac{b\sqrt{a^2 + h^2}}{\sqrt{a^2 - b^2}},$$

azért az orthogonalis kúp esetében

$$h = \frac{ab}{\sqrt{a^2 - b^2}}$$

és (6. §; 4. p.; 3. képlete szerint)

$$tg^2\psi = \frac{a^2 - b^2}{b^2} \quad tg^2\vartheta = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$$

és

$$cotg^2\vartheta - cotg^2\psi = 1.$$

5. *A Pappus-féle kúp.* — Reye *) Pappus-féle kúpnak nevez egy oly kúpot, mely valamely $\gamma^{(2)}$ gömbnek egyik $k^{(2)}$ főkörét a gömb tetszésszerinti $M$ pontjából projicziálja (9. ábra).

E kúpnak származtatásánál fogva az a tulajdonsága van, hogy a kúp csúcsán és a $k^{(2)}$ kör $O$ középpontján keresztül menő síkok a kúpot derékszögü alkotópárokban metszik.

Minthogy az $O$ középpontnak a $k^{(2)}$ körre vonatkozó polárisa végtelen távol van: az $MO$ egyenesnek az $M.k^{(2)}$ kúpra vonatkozó poláris síkja $\varkappa$ párhuzamos a $k^{(2)}$ síkjával, azaz: $MO$ polárissugara e kúp $\varkappa$ cziklikus síkjának.

A $k^{(2)}$ kör $O$ középpontjában annak síkjára emelt merőleges a $\gamma^{(2)}$ gömböt két pontban metszi; ezek közül legyen $K$ az a metszőpont, melyet a $k^{(2)}$ kör síkja a kúp csúcsától elválaszt. Az $MK$ egyenesen az $M.k^{(2)}$ kúpnak elliptikus tengelye, mert az $MOK$ sík a kúpot két szimmetrikus részre osztja, és az $MK$ egyenes ama síkban fekvő $r_1r_2$ kúpalkotóknak egyik hajlásszögét felezi.

Az $M$ pontból a $k^{(2)}$ síkjára bocsátott $MK_1$ merőleges az $MOK$ síkban van, és az $r_1$, $r_2$ alkotókkal ugyanoly szögeket képez, mint az $MO$ az $r_2$, $r_1$-gyel. Ezért az $MK_1$-nek is az a tulajdonsága van a kúp irányában, mint az $MO$-nak, t. i.: az $MK_1$ egyenesen keresztül menő síkok az $M.k^{(2)}$ kúpot szintén derékszögü alkotópárokban metszik. Az $MK_1$-nek a kúpra vonatkozó $\varkappa_1$ polárissíkja a $\gamma^{(2)}$ gömböt az $M$ pontban érinti, merőleges az $MO$ gömbsugárra és a kúpnak második cziklikus síkja.

A $k^{(2)}$ kör síkjának és az $MK$ egyenesnek $L$ metszőpontján keresztül menő és az $MK$-ra merőleges sík a kúpot ellipsisben metszi. Minthogy $MK$ felezi az $r_1r_2$ derékszögü alkotópár hajlásszögét: $2.LM$ egyenlő ama ellipsisnek egyik tengelyével; a másik tengely pedig a $k^{(2)}$ körnek az $OL$-re merőleges húrja, s mint ilyen a $2.LM$-nél nagyobb. Az $LM$ tehát a kimetszett ellipsis fél-mellék-tengelyével egyenlő, a mi jellemzetes tulajdonsága a Pappus-féle kúpnak. Ennélfogva:

*Ha valamely ellipsis $L$ középpontjában síkjára merőlegest emelünk, és ezen oly $M$ pontot veszünk fel, mely az $L$ középponttól az ellipsis fél-melléktengelyének távolságára van, akkor az ellipsist az $M$ pontból projicziáló kúp, Pappus-féle kúp.*

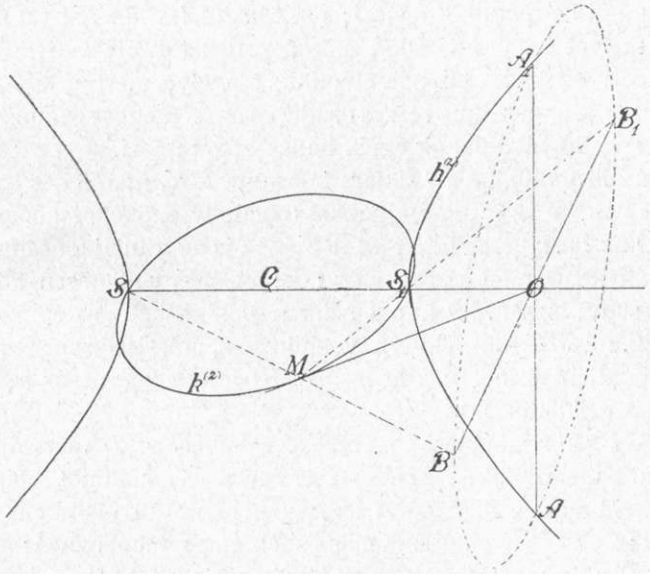
*A kúp bármelyik cziklikus síkjának polárissugara merőleges a másik cziklikus síkra, és e polárissugáron keresztül menő minden sík a kúpot derékszögü alkotópárokban metszi. Ezért a kúp bármelyik*

*) Reye: Die Geometrie der Lage. (1899.) I. Abth., 260. old.

*cziklikus síkjára merőleges síknak metszése a kúppal egyenoldalú hyperbola. —*

*Ha valamely körnek egyik átmérője egy egyenoldalú hyperbolának főtengelye és a kör síkja a hyperbola síkjára merőleges, akkor a hyperbolát a kör bármelyik pontjából projicziáló kúp Pappus-féle kúp.*

Jelöljük (10. ábra) a tételben előforduló kört $k^{(2)}$ -vel, a hyperbolát $h^{(2)}$-vel, ennek középpontját és csúcsait $C$, $S$, $S_1$-gyel, a kör valamely pontját $M$-mel, az $M$ pont érintőjének metszőpontját az $SS_1$ egyenessel $O$-val ; az $O$ pontban az $SS_1$-re merőlegesen álló $\varepsilon$




10. ábra.

síknak metszőpontjait a hyperbolával $A$, $A_1$-gyel, és metszőpontjait az $MS$, $MS_1$ egyenesekkel $B$, $B_1$-gyel.

Az egyenoldalu hyperbolának tulajdonsága, hogy

$$OM = AO = OA_1 ;$$

az $MSS_1$ és $MBB_1$ derékszögű háromszögek miatt pedig

$$OM = BO = OB_1.$$

Az $M.h^{(2)}$ kúp tehát az $\varepsilon$ síkot oly körben metszi, melynek egymásra merőleges átmérői $AOA_1$ és $BOB_1$ ; az $OM = OA = OB$ egyenlet következtében pedig ez a kúp Pappus-féle. —

Ha mint előbb, a Pappus-féle kúpot is annak elliptikus tengelyére merőleges és a csúcstól $h$ távolságra levő síkkal metszük és a kimetszett ellipsisnek fő- és melléktengelyei $2a$, $2b$, excentriczitása $2c$, a fokalis sugarak metszőpontjainak távolsága $2d$, a cziklikus síkok metszővonalainak távolsága $2\delta$, e síkok polárissugarai metszőpontjainak távolsága $2\delta'$, végre a $\psi$, $\vartheta$ szögek jelentése ugyanolyan, mint az általános kúpnál, akkor

$$h = b, \quad \vartheta = 45^0, \quad \psi > 45^0$$

$$d = \frac{bc}{\sqrt{b^2+b^2}} = \frac{c}{\sqrt{2}}, \quad \delta = \frac{b\sqrt{a^2+b^2}}{c}, \quad \delta' = \frac{b^2}{\delta} = \frac{bc}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

6. *A Hachette-féle kúp.*

Szerkeszszük meg a Pappus-féle kúpnak reciprokus kúpját. E végből messük a Pappus-féle kúpot az elliptikus főtengelyére merőleges $\varepsilon$ síkkal az $e^{(2)}$ ellipsisben, melynek fő- és melléktengelye $2a$ és $2b$. E kúpnak alkotóira az $M$ csúcsban emelt merőleges síkok az $\varepsilon$ síkot egy oly $e'^{(2)}$ ellipsis érintőiben metszik, melynek fő- és melléktengelye $2b$ és $2b^2 : a$, mert az $M$ pont az $\varepsilon$ síktól $b$ távolságra van.

Az $M.e^{(2)}$ Pappus-féle kúpnak ama tulajdonsága miatt, hogy $\varkappa$, $\varkappa_1$ cziklikus síkjaira az $M$ pontban merőlegesen álló $MK_1$ és $MO$ egyeneseknek síkjai a kúpot derékszögü alkotópárokban metszik, következik, hogy az $M.e^{(2)}$ kúpnak $M.e'^{(2)}$ reciprokus kúpja oly tulajdonságu, hogy merőleges érintősíkpárjai a $\varkappa$, vagy a $\varkappa_1$ síkban metszik egymást.

De az $MK_1$, $MO$, egyenesek polárissugarai a $\varkappa_1$, $\varkappa$ cziklikus síkoknak az $M.e^{(2)}$ kúpra vonatkozólag, s mert a $\varkappa$, $\varkappa_1$ síkokra merőlegesek, azért azok az $M.e'^{(2)}$ kúpnak fokalis sugarai. Másrészt a $\varkappa_1$, $\varkappa$ síkok az $M.e'^{(2)}$ kúpra vonatkozólag is polárissíkjai az $MK_1$, $MO$ fokalis sugaraknak.

Ha tehát Reye szerint az $M.e'^{(2)}$ kúpot, mint a Pappus-félének reciprokus kúpját, Hachette-félének nevezzük, mondhatjuk:

*Ha valamely ellipsis középpontjában annak síkjára merőlegest állítunk és erre az ellipsis fél-főtengelyének hosszát a középponttól mérve az M pontig reá visszük, akkor az a kúp, mely az ellipsist az M pontból projicziálja, Hachette-féle kúp. E kúpnak az a jellemzetes tulajdonsága van, hogy az egymásra merőleges érintősíkpárjai egymást a fokalis sugarainak polárissíkjaiban metszik, és e polárissugarak fölvállva merőlegesek a fokalis sugarakra.*

A Hachette-féle kúpot a következőképen is szerkeszthetjük: Valamely ellipsis egyik gyujtópontjában, $F$-ben, merőlegest állítunk

annak síkjára és az ellipsist a merőlegesnek abból az $M$ pontjából projicziáljuk, melynek távolsága az ellipsis síkjától egyenlő az ellipsis fél-melléktengelyével; a projicziáló kúp Hachette-féle.

Ugyanis $MF$ egyik fokalis sugara a kúpnak; a másik fokalis sugár $MO$, az ellipsis $O$ középpontján megy keresztül, mert az $MF$, $MO$ egyenesek a kúpnak az $MOF$ síkban fekvő alkotóihoz egyenlő szögek alatt hajlanak. Az $MO$ fokalis sugárnak polarissíkja az ellipsis síkjával párhuzamos, tehát a másik fokalis sugárra merőleges és ez egy jellemző tulajdonsága a Hachette-féle kúpnak.

E kúpra nézve a már többször használt állandók a következők:

$$h = a, \quad \vartheta < 45^0, \quad \psi = 45^0$$

$$d = \frac{ac}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \delta = \frac{ba\sqrt{2}}{c}, d' = \frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{c}$$

hol $2d'$ amaz egyenespárok távolsága, melyben a fokalis sugarak polarissíkjai az ellipsis síkját metszik.

Meg akarjuk még e helyen jegyezni, hogy a 49. oldalon levő táblázat 2. és 4. sorában jelzett kúpok Hachette-, illetve Pappus-félék.

7. *Oly kúpok, melyeknek cziklikus síkjai, vagy fokalissugarai merőlegesek.* — Láttuk az 5. pontban, hogy ha egy $h^{(2)}$ egyenoldalú hyperbolának $SS_1$ főtengelye egy $k^{(2)}$ körnek átmérője és a két görbe síkja egymásra merőleges, akkor a $h^{(2)}$-őt a $k^{(2)}$ bármely pontjából projicziáló kúp Pappus-féle. Nézzük most, hogy mily különös tulajdonsága van egy oly kúpnak, mely a $k^{(2)}$ kört a $h^{(2)}$ hyperbola egy tetszésszerinti $M$ pontjából projicziálja.

Minthogy az egyenoldalú hyperbola tulajdonsága folytán az $M$ pontból az $SS_1$-re bocsátott $MM_1$ merőleges az $MS, MS_1$ egyenesekkel ugyanoly szöget képez, mint az $SS_1$ az $MS_1$, $MS$ egyenesekkel, tehát az $M.k^{(2)}$ kúp $MS, MS_1$ alkotói az $M$ pontból az $SS_1$ egyenesre merőlegesen bocsátott $\varkappa_1$ síkkal ép oly szögeket képeznek, mint a $k^{(2)}$ kör síkjával, vagy az avval párhuzamos $\varkappa$ cziklikus síkkal: *Az $M.k^{(2)}$ kúpnak $\varkappa$ és $\varkappa_1$ cziklikus síkjai egymásra merőlegesek.*

Tekintve, hogy a $k^{(2)}$ síkjának és reá merőleges $MM_1$ egyenesnek $M_1$ metszőpontjából a $k^{(2)}$ körhez huzott érintő az $MM_1$ vonaldarabbal egyenlő, következik:

*Ha valamely kör síkjának tetszésszerinti $M_1$ pontjában a sikra merőlegest állítunk, és ezen oly $M$ pontot veszünk fel, melynek a kör síkjától mért távolságra $MM_1$, egyenlő az $M_1$ pontból a körhez huzható érintő hosszával, akkor a kört az $M$ pontból projicziáló kúpnak cziklikus síkjai merőlegesek egymásra.*

Vagy végre: Ha valamely pont derékszögü projekcziója egy $r$ radiussal bíró kör síkjára a kör középpontjától $d$ távolságra van, és négyzete a pont távolságának a kör síkjától $(r^2 - d^2)$, akkor az a kúp, mely a kört a felvett pontból projicziálja vagy Pappus-féle, vagy olyan, melynek cziklikus síkjai merőlegesek egymásra, a szerint, a mint $r > d$, vagy $r < d$. —

Szerkeszszük most meg az előbbi $M.k^{(2)}$ kúpnak recziprokus kúpját, melynek tehát fokalis sugarai merőlegesek egymásra. Az $M.k^{(2)}$ kúp érintősíkjaira az $M$ pontban emelt merőlegesek a $k^{(2)}$ kör síkját oly $h'^{(2)}$ hyperbolában metszik, melynek $S'S'_1$ csúcspontjai az $M.k^{(2)}$ kúp $MS$, $MS_1$ alkotóinak érintősíkjaira emelt merőlegeseknek metszőpontjai az $SS_1$-gyel; középpontja $O$, az $S'S'_1$ felezőpontja; egyik gyujtópontja $M_1$, az $M$ pontból a $k^{(2)}$ síkjára bocsátott merőlegesnek talpa. De mert az $M$ pont a $h^{(2)}$ egyenoldalú hyperbolán van, azért az $MSS_1$, $MS'_1S'$ és az $MS_1M_1$, $MS'M_1$ háromszögpárok kongruensek, tehát $MM_1$ egyenlő a $h'^{(2)}$ hyperbola fél-melléktengelyével.

Ebből folyólag a merőleges fokalis sugarakkal bíró kúp következőkép szerkeszthető: Valamely hyperbola egyik gyujtópontjában annak síkjára merőlegest emelünk, és erre a talpponttól mérve reá visszük a hyperbola fél-melléktengelyét az $M$ pontig; a hyperbolát az $M$ pontból projicziáló kúpnak egyik fokalis sugara merőleges a hyperbola síkjára, a másik pedig azzal a síkkal párhuzamos, tehát a kúp két fokalis sugara merőleges egymásra. Előbb azt találtuk, hogy ha e szerkesztésben a hyperbolát ellipsissel helyettesítjük, akkor a kúp Hachette-féle.

8. *Az egyenoldalú kúp és annak recziprokus kúpja.*

Két, közös csúcscsal bíró orthogonalis háromélnek élei, alkotói egy II. r. kúpnak. | lapjai, érintősíkjai egy II. r. kúpnak.

Ugyanis ha a két orthogonalis háromél $M(a_1a_2a_3)$ és $M(b_1b_2b_3)$, akkor a következő egymásra merőleges síkpároknak

$$a_1a_2 \perp b_1a_3, \quad a_1a_3 \perp b_1a_3$$
$$a_1b_2 \perp b_1b_3, \quad a_1b_3 \perp b_1b_2$$

metszővonalai az $a_1b_1$ élekkel együtt egy orthogonalis kúpon feküsznek. Ennélfogva

$$a_1(a_2a_3b_2b_3) \overline{\wedge} b_1(a_3a_2b_3b_2),$$

s mert általában

$$b_1(a_3a_2b_3b_2) \overline{\wedge} b_1(a_2a_3b_2b_3),$$

BOLYAI TUD. EGYETEM KÖNYVTÁRA I. r. Kolozsvár.

azért

$$a_1 (a_2 a_3 b_2 b_3) \barwedge b_1 (a_2 a_3 b_2 b_3),$$

mely viszonylat, a II. r. kúpok általános tulajdonságát tekintve, a baloldali tételt igazolja. Ebből pedig az következik, hogy a jobboldali tétel is helyes, mert a második kúp az elsőnek reciprokus kúpja.

A baloldalon levő tétellel értelmezett kúpot SCHRÖTER *egyenoldalú kúpnak* nevezi; a jobboldali tétellel értelmezett kúp tehát *az egyenoldalú kúpnak reciprokus kúpja.*

Ha az előbbi $M(a_1 a_2 a_3 b_1 b_2 b_3)$ egyenoldalú kúpon egy tetszésszerinti $c_1$ alkotót veszünk fel, és a kúpot a $c_1$-re a csúcsban merőlegesen álló $\gamma_1$ síkkal a $c_2 c_3$ alkotókban metszük, akkor ezek az alkotók is merőlegesek egymásra úgy, hogy az $M(c_1 c_2 c_3)$ háromél is orthogonalis.

Ugyanis a II. r. kúpra átvitt DESARGUES-féle tétel szerint a $\gamma_1$ sík az $M(c_1 a_1 a_2 a_3)$ négyélnek szemben fekvő lapjait és a kúpot involucióban metszi. Ez az involució azonban orthogonalis, mert a $\gamma_1$ sík az $M(c_1 a_1 a_2 a_3)$ négyélnek szemben fekvő merőleges síkpárjait

$$c_1 a_1 \perp a_2 a_3, \quad c_1 a_2 \perp a_3 a_1\text{-et}$$

merőleges sugárpárokban metszi; tehát a $c_2$ is merőleges a $c_3$-ra.

Minthogy e bizonyitásban nem használtuk fel az $M(b_1 b_2 b_3)$ orthogonalis háromélet, azért:

Minden II. r. kúp, mely egy orthogonalis háromél élein megy keresztül, egyszersmind végtelen sok ($\infty^1$) orthogonalis háromél élein is keresztül megy. A kúpnak minden alkotója, éle egy ily orthogonalis háromélnek. Egy orthogonalis háromél körül irt II. r. kúp tehát egyenoldalú kúp.

Ebből következik:

Az egyenoldalú kúp bármelyik alkotójára merőleges sík a kúpot egyenoldalú hyperbolában metszi.

lapjait érinti, egyszersmind $\infty^1$ orthogonalis háromélnek lapjait érinti. A kúpnak minden érintősíkja, lapja egy ily orthogonalis háromélnek. Egy orthogonalis háromélbe beirt II. r. kúp tehát reciprokus kúpja az egyenoldalú kúpnak.

Az egyenoldalú kúp reciprokus kúpjának bármelyik érintősíkjával párhuzamos sík a kúpot oly parabolában metszi, melynek vezérlő vonala keresztül megy a kúp csúcsának a metszősíkon levő orthogonalis projekcióján.

Ugyanis az $M$ egyenoldalú kúp tetszésszerinti $a_1$ alkotója, éle e kúpba beírt $M(a_1a_2a_3)$ orthogonalis háromélnek. Tehát minden az $a_1$-re merőleges $\varepsilon$ sík párhuzamos a kúpnak $a_2a_3$ derékszögű alkotóival és ezért a kúpot oly egyenoldalú hyperbolában metszi, melynek asymptótái párhuzamosak az $a_2a_3$-mal.

A jobb oldali tételben jelzett $M$ kúpnak tetszésszerinti $\alpha_1$ érintősíkja egy a kúp körül írt $M(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)$ orthogonalis háromélnek lapja. Tehát minden az $\alpha_1$-gyel párhuzamos $\varepsilon$ sík e kúpot parabolában, annak $\alpha_2\alpha_3$ derékszögű érintősíkpárját pedig a parabola derékszögű érintőpárjában, $\varepsilon\alpha_2$ és $\varepsilon\alpha_3$-ban, metszi. A parabola derékszögű érintőpárjai annak vezérlő vonalában találkoznak, tehát az $\alpha_2\alpha_3$ $\varepsilon$ síkoknak metszőpontja, mely az $M$ csúcsnak derékszögű projekciója az $\varepsilon$ síkra, a parabola vezérlő vonalán van.

De fordítva is következik:

Ha valamely egyenoldalú hyperbola síkjára a hyperbola egyik pontjában $a_1$ merőlegest állítunk, akkor az a kúp, mely az egyenoldalú hyperbolát e merőlegesnek bármely $M$ pontjából projicziálja, egyenoldalú.

Ugyanis az $a_1$ egyenesen és az $M$ ponton keresztül az egyenoldalú hyperbola asymptótáival párhuzamosan vezetett $a_2a_3$ egyenesek, alkotói ama projicziáló kúpnak; a kúp tehát az $M(a_1a_2a_3)$ orthogonalis háromél körül van írva, és ezért egyenoldalú.

Ha valamely parabola síkjára e parabola vezérvonalának egyik pontjában $a_1$ merőlegest állítunk, akkor az a kúp, mely a parabolát e merőlegesnek bármely $M$ pontjából projicziálja az egyenoldalúnak reciprokus kúpja.

Ugyanis a projicziáló kúpnak a parabola síkjával párhuzamos $\alpha_1$ érintősíkja, és az $a_1$-en keresztül menő $\alpha_2\alpha_3$ érintősíksíkjai egy $M(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)$ orthogonalis háromélnek lapjai; ezért a projicziáló kúp, reciprokusa egy egyenoldalú kúpnak.

9. Ismeretes, hogy az egyenoldalú hyperbolába beírt tetszésszerinti háromszögnek magasságpontja szintén rajta van az egyenoldalú hyperbolán. Ezzel analogus tétel az egyenoldalú kúpra vonatkozólag ekkép szól:

Az egyenoldalú kúpba beírt tetszésszerinti háromélnek magasságvonala alkotója ama egyenoldalú kúpnak.

Az egyenoldalú kúp reciprokus kúpja körül írt tetszésszerinti háromélnek magasságsíkja érintősíkja ama reciprokus kúpnak.

Ha az $M(l_1l_2l_3)$ háromél $l_1l_2l_3$ élein keresztül a szemben fekvő $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ lapokra $\mu_1, \mu_2, \mu_3$ merőleges síkokat állítunk, úgy ezek egymást

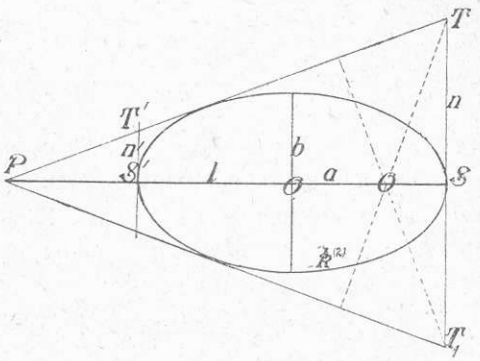
egy egyenesben, a háromél *magasságvonalában*, metszik. Ugyanis, ha a $\mu_1\mu_2$ síkok metszővonala az $l$, akkor az $l$-re az $M$ pontban merőlegesen álló $\varepsilon$ sík az $M(l_1l_2l_3l)$ négyélet othogonalis involuczióban metszi, mert a $\lambda_1\mu_1$, $\lambda_2\mu_2$ derékszögű síkpároknak metszővonalai a $\mu_1$ és $\mu_2$-re merőleges $\varepsilon$ síkkal, derékszögű egyenespárok. Az $l_1l_2 \equiv \lambda_3$ és $ll_3$ sík tehát szintén derékszögű egyenespárban metszi az $\varepsilon$ síkot; s mert az $ll_3$ sík merőleges az $\varepsilon$ síkra, azért az $ll_3$ sík merőleges az $l_1l_2 \equiv \lambda_3$ síkra is, miből már következik, hogy az $ll_3$ sík azonos a $\mu_3$ síkkal. — Az $M(l_1l_2l_3l)$ négyélnek minden szemben fekvő lappárja $l_1l$, $l_2l_3$; $l_2l$, $l_3l_1$; $l_3l$, $l_1l_2$ derékszögű lévén, annak minden éle magasságvonala a másik három éltől képezett háromélnek.

Eddigelé csak azt igazoltuk, hogy a háromél élein keresztül a szemben fekvő lapokra bocsátott merőleges síkok egymást ugyanegy egyenesben, a háromél magasságvonalában metszik.

Irjunk ezután az $M(l_1l_2l_3)$ háromél körül egy egyenoldalú kúpot; ezt az $M$ kúpot az $l_1$-re az $M$-ben merőlegesen álló $\pi$ sík az $a_2a_3$ derékszögű alkotópárban metszi. Nevezzük a kúpnak azt az alkotóját, melyben az $M(l_1l_2l_3)$ háromél $l_1$ éléből a szemben fekvő $l_2l_3$ lapra bocsátott $\mu_1$ merőleges sík a kúpot metszi $l$-nek. A $\pi$ sík a kúpba beírt $M(l_1l_2l_3l)$ négyélnek szemben fekvő lappárjait és a kúpot involucziós sugárpárokban metszi; ez az involuczió azonban orthogonális, mert a $\pi$ sík a kúpot az $a_2a_3$ derékszögű alkotópárokban, az $l_1l$, $l_2l_3$ derékszögű lappárokat (minthogy $\pi \perp l_1$) szintén derékszögű egyenespárokban metszi. A $\pi$ sík tehát az $l_2l$, $l_3l_1$, és az $l_3l$, $l_1l_2$ lappárokat szintén derékszögű egyenespárokban metszi, és mert az $l_3l_1$ és $l_1l_2$ lapok merőlegesek a $\pi$-re, azért ama lappárok derékszögűek és így az $l$ magasságvonala az $M(l_1l_2l_3)$ háromélnek. Ezzel a baloldalon álló tétel igazolva van.

A jobb oldalon álló tétel a másiknak dualis tétele, csak tudnunk kell, hogy mit értünk egy háromél *magasságsíkján*. A magasságsík a magasságvonalnak dualis alakzata a nyalábban, azaz polárissíkja a magasságvonalnak abban az orthogonális nyalábban, melynek a felvett hároméllel közös csúcsa van. A háromél magasságvonala három síknak metszővonala, mely az egyes éleken keresztül megy merőlegesen a szemben fekvő lapokra. A háromél magasságsíkja tehát három egyenesen megy keresztül, melyek egyenkint a háromél egyes lapjaiban vannak és merőlegesek ama lapokkal szemben fekvő élekre. E szerint: a háromél éleire a csúcsban merőlegesen álló síkok a szemben fekvő lapokat három egyenesben metszik, melyek a háromél magasságsíkjában vannak.

10. Fektessünk most valamely $k^{(2)}$ ellipsisen keresztül, melynek tengelyei $2a$, $2b$, az egyenoldalú kúppal reciprokus kúpot, melynek $M$ csúcsa az ellipsis $O$ középpontjában annak síkjára emelt merőlegesen legyen és számítsuk ki, hogy milyen $h$ távolságra van az $M$ csúcs az ellipsis síkjától.




11. ábra.

Irjunk e végből (11. ábra) az ellipsis körül az ellipsist magába záró $PTT_1$ egyenszárú háromszöget, melynek $P$ csúcsa a főtengelyen van, $TT_1$ alapja pedig az ellipsist a főtengelyen levő $S$ csúcsban érinti. Messe a főtengely másik csúcsának, $S'$-nek, érintője a $PT$ egyenest a $T'$ pontban és legyen

$$PS = l, \quad ST = T_1S = n, \quad S'T' = n'.$$

Az ellipsisnek tulajdonsága folytán

$$nn' = b^2$$

tehát

$$\frac{n^2 - b^2}{n^2} = \frac{n - n'}{n} = \frac{2a}{l}.$$

De ha a $PTT_1$-nek magasságpontja az ellipsisnek középpontja, akkor

$$n^2 = al,$$

miből tekintettel az előbbi egyenletre:

$$n^2 - b^2 = 2a^2, \text{ vagy } n^2 - a^2 = a^2 + b^2.$$

Ha végre azt kívánjuk, hogy a $PTT_1$ háromszöget az $M$ pontból projicziáló háromél orthogonalis, tehát az ellipsist projicziáló kúp az egyenoldalúval reciprokus legyen, akkor az $M$ pontnak távolsága az $O$-tól:

$$h = \sqrt{n^2 - a^2} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Ha ismét az ellipsis fő- és melléktengelyének csúcspontjait projicziáló kúpalkotók a kúp $MO$ elliptikus tengelyével $\psi$ és $\vartheta$ szöget képeznek, tehát

$$a = htg\psi, \quad b = htg\vartheta$$

akkor az utolsó egyenlet folytán *az egyenoldalúval reziprokus kúpra* nézve

$$tg^2\psi + tg^2\vartheta = 1.$$

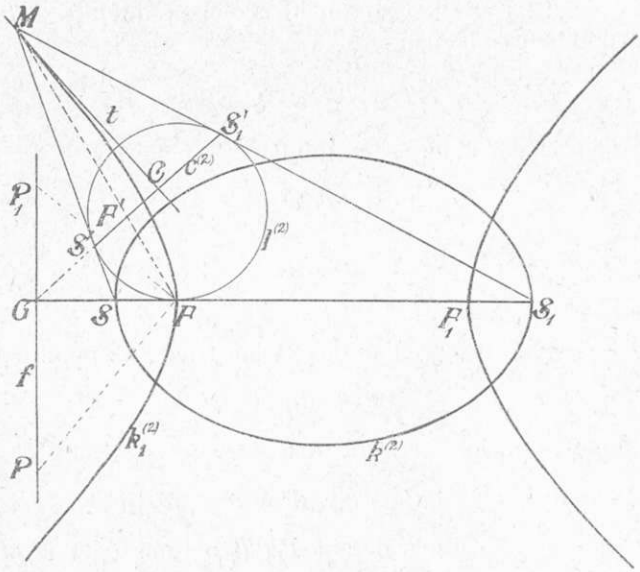
Ebből következik, hogy az egyenoldalú kúpra vonatkozólag:

$$cotg^2\psi + cotg^2\vartheta = 1.$$

És ha ez egyenoldalú kúp az előbbinek reziprokus kúpja, akkor ez, az előbbi ellipsisnek síkját egy oly ellipsisben metszi, melynek $2a$, $2b$ tengelyei az $MO = h$ vonaldarabbal ekkép függnek össze

$$h = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

11. Szólani akarunk végre még azokról a pontokról, a melyekből egy megadott kúpszelet forgáskúppal projicziáltatik.

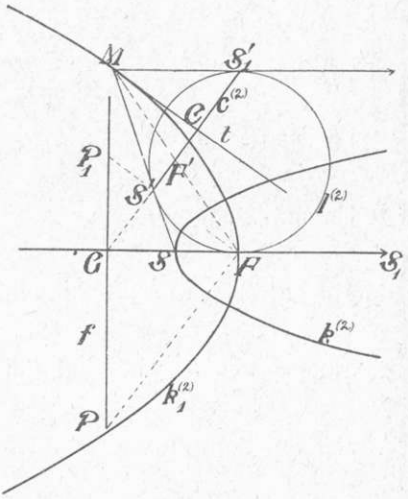



12. ábra.

Két kúpszeletet *fokalis kúpszeletnek* nevezünk, ha azoknak síkjai egymásra merőlegesek, és az egyiknek, tehát bármelyiknek, gyujtópontjai, a másiknak a főtengelyen levő csúcspontjai. Fokalis kúpszeletek pedig csak ebben a kapcsolatban lehetségesek: ellipsis és hyperbola, vagy két kongruens parabola.

*A fokalis kúpszeleteknek az a tulajdonságuk van, hogy az egyiknek pontjaiból a másik kúpszelet forgáskúppal projicziáltatik.*

Hogy ezt kimutassuk, vegyünk fel a $k^{(2)}$ $k_1^{(2)}$ fokalis kúpszeletek egyikén, pl. a $k_1^{(2)}$-en egy $M$ pontot és projicziáljuk ebből a $k^{(2)}$-őt az $M.k^{(2)}$ kúppal (12. és 12a. ábra). Ennek egyik fősíkja a $k_1^{(2)}$-nek síkja, és ebben az elliptikus főtengely $t$, a $k_1^{(2)}$-nek érintője az $M$ pontban, a mely az $M$-hez futó $MS$, $MS_1$ vonósugaraknak egyik hajlásszögét felezi.




12a. ábra.

Az $MSS_1$ háromszögbe írható köröknek egyike $l^{(2)}$, a $k^{(2)}$-nek $SS_1$ főtengelyét ennek $F$ gyujtópontjában érinti (mert az $M$ és $F$ pontokhoz tartozó $MS$, $MS_1$ és $FS$, $FS_1$ vonósugaraknak összege vagy különbsége állandó a szerint, a mint a $k_1^{(2)}$ ellipsis vagy hyperbola); az $MS$, $MS_1$ oldalakat pedig az $l^{(2)}$ kör az $S'$, $S'_1$ pontokban érinti.

Az $S'S'_1$-en keresztül menő és az $MSS_1$ síkra merőleges $\varepsilon$ sík az $M.k^{(2)}$ kúpot és $t$ tengelyét a $c^{(2)}$ kúpszeletben és ennek $C$ középpontjában, a $k^{(2)}$-nek síkját az $f$ egyenesben, végre az $SS_1$ és $MF$ egyeneseket a $G$ és $F'$ pontokban metszi.

A $G$ pont pólusa az $MF$-nek az $l^{(2)}$ körre, és így az $f$ egyenes polárisa az $F$ pontnak a $c^{(2)}$-re nézve. Ha tehát az $f$-en a $PP_1$ egy kapcsolt póluspárja a $k^{(2)}$-nek és így egyszersmind a $c^{(2)}$-nek, akkor a

$$PG \,.\, PG_1 = GF^2 = GS' \,.\, GS'_1 = GC \,.\, GF'$$

viszonylatnak két szélső egyenlőségéből következik, hogy a $c^{(2)}$ kúpszelet kör. Minthogy pedig a $c^{(2)}$ körnek síkja az $M.k^{(2)}$ kúpnak $t$ tengelyére merőleges, azért az $M.k^{(2)}$ kúp forgáskúp.

* * *

A 68. és 69. oldalon levő táblázatban egybe vannak foglalva a tárgyalt különös kúpok állandóinak összefüggései egymással.

A kúpot, annak elliptikus tengelyére merőleges és a csúcstól

| A kúp neve vagy tulajdonsága | $h$ | $d$ |
|---|---|---|
| A parabolikus kúp . . . . . | $c$ | $\frac{c^2}{a}$ |
| Az orthogonalis kúp . . . . . | $\frac{ab}{c}$ | $\frac{ac}{\sqrt{2a^2-b^2}}$ |
| A Pappus-féle kúp . . . . . | $b$ | $\frac{c\sqrt{2}}{2}$ |
| A Hachette-féle kúp . . . . . | $a$ | $\frac{ac}{\sqrt{a^2+b^2}}$ |
| Merőleges cziklikus síkokkal biró kúp . | $\frac{ab}{\sqrt{a^2-2b^2}}$ | $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ |
| Merőleges fokalis sugarakkal biró kúp . | $\sqrt{a^2-2b^2}$ | $\sqrt{a^2-2b^2}$ |
| Az egyenoldalú kúp . . . . . | $\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$ | $\frac{ac}{\sqrt{2a^2+b^2}}$ |
| Az egyenoldalúnak reciprokus kúpja . | $\sqrt{a^2+b^2}$ | $c\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2+2b^2}}$ |
| Merőleges fokalis sugarakkal és merőleges cziklikus síkokkal biró kúp . . | $a=2b$<br>$h=b\sqrt{2}$ | $d=b\sqrt{2}$ |
| A Pappus-féle parabolikus kúp . . . | $b=c$ | $\frac{b\sqrt{2}}{2}$ |
| A Hachette-féle orthogonalis kúp . . | $a=b\sqrt{2}$ | $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ |
| Az általános forgáskúp . . . . . | tetszés szerinti | 0 |
| A Pappus- és Hachette-féle forgáskúp . | $a=b$ | 0 |
| Az egyenoldalú forgáskúp . . . . . | $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ | 0 |
| Az egyenoldalúval reciprokus forgáskúp | $a\sqrt{2}$ | 0 |

| $\delta$ | A $\psi$ és $\vartheta$ közötti relaczió | A kúp egyenlete tengelyeire, mint koordináta tengelyekre vonatkoztatva |
|---|---|---|
| $\frac{\sqrt{2a^2-b^2}}{c}$ | $tg^2\psi - tg^2\vartheta = 1$ | $\frac{y^2}{k^2} + \frac{z^2}{k^2-1} = x^2,\ k > 1$ |
| $\frac{a^2 b}{c^2}$ | $cotg^2\vartheta - cotg^2\psi = 1$ | $y^2 + z^2(k^2+1) = k x^2$ |
| $\frac{b\sqrt{a^2+b^2}}{c}$ | $\vartheta = 45^0,\ \psi \geqq 45^0$ | $\frac{y^2}{k^2} + z^2 = x^2,\ k \geqq 1$ |
| $\frac{ab\sqrt{2}}{c}$ | $\psi = 45^0,\ \vartheta \leqq 45^0$ | $y^2 + z^2 k^2 = x,\ h \geqq 1$ |
| $\frac{ab}{\sqrt{a^2-2b^2}}$ | $cotg^2\vartheta + 2cotg^2\psi = 1$ | $\frac{y^2}{k^2} + \frac{z^2 k^2}{k^2-1} = x^2,\ k > 1$ |
| $b\sqrt{2}$ | $tg^2\psi - 2tg^2\vartheta = 1$ | $\frac{y^2}{k^2} + \frac{2z^2}{k^2-1} = x^2,\ k > 1$ |
| $\frac{ab}{c}\sqrt{\frac{a^2+2b^2}{a^2+b^2}}$ | $cotg^2\vartheta - cotg^2\psi = 1$ | $y^2 + z^2(k^2-1) = k^2 x^2,\ k > 1$ |
| $\frac{\sqrt{2a^2+b^2}}{c}$ | $tg^2\psi + tg^2\vartheta = 1$ | $\frac{y^2}{k^2} + \frac{z^2}{1-k^2} = x^2,\ 1 > k$ |
| $b\sqrt{2}$ | $tg\psi = cotg\vartheta = \sqrt{2}$ | $\frac{y^2}{2} + 2z^2 = x^2$ |
| $b\sqrt{3}$ | $\vartheta = 45^0,\ tg\psi = \sqrt{2}$ | $\frac{y^2}{2} + z^2 = x^2$ |
| $2b$ | $\psi = 45^0,\ cotg\vartheta = \sqrt{2}$ | $y^2 + 2z^2 = x^2$ |
| $\infty$ | $\vartheta = \psi$ | $y^2 + z^2 = k^2 x^2$ |
| $\infty$ | $\vartheta = \psi = 45^0$ | $y^2 + z^2 = x^2$ |
| $\infty$ | $tg\psi = tg\vartheta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ | $y^2 + z^2 = \frac{x^2}{2}$ |
| $\infty$ | $cotg\psi = cotg\vartheta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ | $y^2 + z^2 = 2x^2$ |

$h$ távolságra levő síkkal képzeljük metszve; a kimetszett ellipsisnek fő- és melléktengelye $2a$, $2b$, kétszeres excentriczitása $2c$. A kúp fokalis sugarainak metszőpontjai, és cziklikus síkjainak metszővonalai az ellipsis síkjával $2d$, illetve $2\delta$ távolságra vannak; az ellipsis fő- és melléktengelyének csúcsain keresztül menő kúpalkotók hajlásszöge $2\psi$, $2\vartheta$; végre a kúp alábbi egyenletében, mely annak tengelyeire van vonatkoztatva, a $k$ szám állandó.

## 8. §. A másodrendű kúpok szerkesztése.

1. A II. r. kúp meg van határozva, ha ismeretes annak $M$ csúcsa és egy a kúpon fekvő kúpszelet, vagy oly adatok, melyek e kúpszelet meghatározásához elégségesek. Ebből folyólag a II. r. kúp meg van határozva, ha ismeretes pl. annak öt alkotója, vagy öt érintő-síkja, stb.

A II. rendű kúp meghatározása annak nyolcz általános helyzetű pontjából e helyen nem tárgyalható. De tárgyalható a kúp meghatározása ezekből az adatokból azokban az esetekben, a melyekben a nyolcz pont közül

*a*) öt egy síkban, a többi három pedig e síkon kívül van;

*b*) négy pont és a másik négy pont egy-egy síkban van;

*c*) három pont egy egyenesen és a többi öt pedig az egyenesen kívül általános helyzetben van.

Lássuk egyenként e feladatok megoldásait:

*a*) Nevezzük az öt ponton keresztül fektetett kúpszeletet $k^{(2)}$-nek, a többi három pontot, mely nincsen ugyanegy egyenesben, $ABC$-nek. Az $ABC$ sík a $k^{(2)}$ kúpszelet síkját a $t$ egyenesben, a $k^{(2)}$ kúpszeletet pedig a $JK$ pontokban metszi, melyek vagy képzetesek, vagy valósak és ez utóbbi esetben egybeesők is lehetnek a $t$ egyenesen. Mind a három esetben lehet az $ABC$ és a $JK$ pontokon keresztül fektetni egy $k_1^{(2)}$ kúpszeletet.

A további feladatunk oly pontot találni, melyből a $k^{(2)}$ $k_1^{(2)}$ kúpszeletek és így a tőlük meghatározott polárismezők egyike a másikba projicziálható. Kössük e végből össze a $t$ egyenesnek a $k^{(2)}$ és a $k_1^{(2)}$-re vonatkozó $T$ és $T_1$ pólusát a $TT_1$ egyenes által. A $TT_1$ egyenesen és a $k^{(2)}$ kúpszeletnek egy valós $D$ pontján keresztül fektetett sík a $k^{(2)}$-t még az $E$ valós pontban, a $k_1^{(2)}$-őt a $D_1E_1$ pontokban a $t$ egyenest pedig az $N$ pontban metszi. Ha a $D_1E_1$ pontok képzetesek, akkor a nyolcz adott ponton keresztül nem fektethető valós kúp. Ha ellenben a $D_1E_1$ pontok is, úgy mint a $DE$ pontok valósak, akkor a $DED_1E_1$ négyszög $DE$, $D_1E_1$; $DD_1$, $EE_1$ és $DE_1$, $D_1E$ szemben

fekvő oldalai egymást a négyszög átlóháromszögének $N$, $M$, $M_1$ szögpontjaiban metszik. S mert a $DE$ pontpár az $NT$-től, a $D_1E_1$ pontpár pedig a $NT_1$-től harmónikusan van elválasztva, azért a $TT_1$ pontok ama négyszögnek $MM_1$ átlóján vannak. A $TT_1$ egyenesnek úgy az $M$, mint az $M_1$ pontja már csúcsa a keresett kúpnak, mert pl. az $MTT_1J$, $MTT_1K$ síkokat az $MJ$, $MK$ egyenesekben érintő és az $MDD_1$ egyenesen keresztül menő, és így ez adatokkal meghatározott II. r. kúp, keresztül megy a $k^{(2)}$ és $k_1^{(2)}$ kúpszeleteken is, mert ezeknek síkja az $M$ kúpot oly két kúpszeletben metszi, melyek közül az első a $D$ ponton megy keresztül és a $TJ$, $TK$ egyeneseket a $J$, $K$ pontokban érinti, tehát a $k^{(2)}$; a második pedig a $D_1$ ponton megy keresztül és a $T_1J$, $T_1K$ egyeneseket a $J$, $K$ pontokban érinti, tehát a $k_1^{(2)}$.

Ha azonban a $JK$ pontok és így ezekkel a $TT_1$ pontok is egybeesnek a $t$ egyenesen, akkor a $t$ egyenes három pontjából a $k^{(2)}$, $k_1^{(2)}$ kúpszeletekhez egy-egy érintőt vezethetünk. Két-két ily érintő, mely a $t$-nek egy pontjában találkozik, meghatároz egy síkot és a három sík egymást a keresett kúpszeleteken keresztül menő II. r. kúpnak csúcsában metszi.

A feladatnak tehát 0, 1 vagy 2 megoldása van, a mennyiben a középső esetben az egyik kúp abba a síkpárba korcsosul el, mely a $k^{(2)}$ és $k_1^{(2)}$ kúpszeleteken megy keresztül.

A tárgyalt szerkesztésből következik:

Két, különböző síkban levő és egymást két (valós vagy képzetes) pontban metsző kúpszeleten két valós II. r. kúp fektethető keresztül, ha a két kúpszelet síkjai metszővonalának egy tetszésszerinti pontjából mindkét kúpszelethez valós, vagy mindkét kúpszelethez képzetes érintők vezethetők. A két kúp csúcsa a kúpszeletek síkjától harmónikusan van elválasztva.

Ha a két kúpszelet két metszőpontja egybeesik, akkor a kúpszeleteken csak egy II. r. kúp fektethető keresztül; a másik kúp, a két kúpszelet síkpárjává korcsosul el.

Két II. r. kúp, melynek két különböző csúcsa és két (valós vagy képzetes) közös érintősíkja van, egymást két valós kúpszeletben metszi, ha a két csúcs összekötő egyenesén keresztül menő tetszésszerinti sík mindkét kúpot valós, vagy mindkét kúpot képzetes alkotókban metszi. A két kúpszelet síkja a kúpok csúcsaitól harmónikusan van elválasztva.

Ha a két kúpnak két érintősíkja egybeesik, akkor azok egymást csak egy kúpszeletben metszik; a másik kúpszelet a két kúp csúcsává korcsosul el.

*b*) A második feladat, melynek megoldását magunk elé tüztük, ez volt: nyolcz ponton keresztül II. r. kúpot fektetni, ha közülök négy és a másik négy egy-egy síkon van.

A feladat az előbbire vezethető vissza, ha sikerül a négy első ponton, $ABCD$-n, és a négy utóbbi ponton, $A_1B_1C_1D_1$-en, oly két kúpszeletet keresztül vezetni, mely egymást két pontban metszi.

Az $ABCD$ és az $A_1B_1C_1D_1$ pontokon keresztül menő kúpszeletek ama pontok síkjainak metszővonalát egy-egy involuczióban metszik. E két involucziónak van egy közös társpontpárja, $JK$, mely vagy valós, vagy képzetes, vagy egybeeső (azaz egy közös kettőspont). Az $ABCDJK$ és $A_1B_1C_1D_1JK$ pontokon keresztül vezetett kúpszeletek már olyanok, hogy a rajtuk keresztül menő II. r. kúpok a feladat megoldásai.

*c*) A harmadik feladat azt kivánja, hogy egy II. r. kúp vezettessék át három ponton, mely egy $g$ egyenesen van, azaz ezen a $g$-n és még más öt ponton, $ABCDE$-n.

Ha az $E$ ponton oly $u$ egyenest vezetünk keresztül, mely metszi a $g$-t és a mellett

$$u\,(ABCD) \barwedge g\,(ABCD),$$

akkor az $u$ és $g$ metszőpontja $M$, már csúcsa lesz a keresett II. r. kúpnak, mert az $ug$ kúpalkotókból az $ABCD$ pontokon keresztül menő kúpalkotók projektiv négyesekkel projicziáltatnak.

Az $ED$ egyenesen keresztül oly $\tau$ síkot vezetünk, hogy az $EDA$, $EDB$, $EDC$ és $\tau$ síkok a $g(ABCD)$-vel projektiv síknégyest képezzenek. Azután megszerkesztjük azt a $K^{(2)}$ II. r. kúpot, melynek alkotói $EA$, $EB$, $EC$, $ED$ és a melynek érintősíkja az $ED$ alkotóban a $\tau$ sík. E $K^{(2)}$ kúpnak minden alkotójából az $ABCD$ pontok a $g(ABCD)$-vel projektiv négyesekkel projicziáltatnak. A $g$ egyenes a $K^{(2)}$ kúpnak két alkotóját, $u$-t és $v$-t, az $U$ és $V$ pontokban metszi. Ezek az $U$ és $V$ pontok lesznek a kivánt II. r. kúpoknak csúcsai. A feladatnak tehát 0, 1, vagy 2 valós megoldása van, a szerint, a mint a $g$ egyenes a $K^{(2)}$ kúpot nem metszi valós pontokban, érinti, vagy két valós pontban metszi.

2. A különös II. r. kúpok közül csak a forgáskúp szerkesztését akarjuk tárgyalni, és pedig abban az esetben, ha annak három alkotója van adva.

A forgáskúp meg van határozva, ha ismeretes annak három alkotója $a_1a_2a_3$, mely egy tetszésszerinti $M(a_1a_2a_3)$ háromélnek három éle lehet. A forgáskúpot azért határozza meg már alkotója (vagy három érintősíkja), mert a forgáskúp az $M$ orthogonális nyaláb

vezető kúpját, $M_1^{(2)}$-t, kettősen érinti és ez a föltétel két alkotóval egyenértékü.

*Határozzuk meg tehát annak a forgáskúpnak forgástengelyét, mely az $M(a_1a_2a_3)$ háromél körül van írva.*

Ha az $M(a_1a_2a_3)$ háromél $(a_2a_3)$, $(a_3a_1)$ élszögeinek $m_1$, $m_2$ felezőin keresztül az $a_2a_3$, illetve $a_3a_1$ lapokra $\mu_1$, $\mu_2$ merőleges síkokat állítunk, akkor ezeknek $\mu_1\mu_2 \equiv t$ metszővonala a háromél éleihez egyenlő szögek alatt hajlik, s mint ilyen tengelyét képezi a háromél körül irható forgáskúpnak.

Ha az $M(a_1a_2a_3)$ háromél $(a_2a_3)$, $(a_3a_1)$ élszögei mellékszögeinek felezői $m'_1$, $m'_2$, és az ezeken keresztül menő és az $a_2a_3$, $a_3a_1$ lapokra merőlegesen álló síkok $\mu'_1$, $\mu'_2$, akkor ezeknek és az előbbi $\mu_1$, $\mu_2$ síkoknak következő metszővonalai $\mu'_1\mu_2 \equiv t_1$, $\mu_1\mu'_2 \equiv t_2$, $\mu'_1\mu'_2 \equiv t_3$ szintén egyenlő szögek alatt hajlanak a háromél éleihez, tehát szintén tengelyei a háromél körül irható forgáskúpoknak. E szerint *minden háromél körül négy forgáskúp irható.*

E forgáskúpokat azonban most abból a föltételből akarjuk szerkeszteni, hogy azok az $M$ orthogonális nyaláb $M_1^{(2)}$ vezető kúpját kettősen érintik. A feladat lényegében megegyezik a kúpszeletekre vonatkozó következő feladattal: valamely háromszög körül oly kúpszeletet irni, mely egy adott kúpszeletet kettősen érint. (P. G. E. 134. oldal.)

Ha két II. r. kúp $M^{(2)}$, $M_1^{(2)}$ egymást a $gh$ alkotókban, tehát kettősen érinti, akkor a kúpok közös $M$ csúcsán keresztül menő $gh \equiv \sigma$ síknak mindkét kúpra vonatkozólag ugyanegy $s$ polárissugara van s úgy a $\sigma$ síkban levő kapcsolt polárissugarak, mint az $s$ síksorban levő kapcsolt polárissíkok mindkét kúpra vonatkozólag ugyanazok. Az $M$ nyaláb tetszésszerinti $x$ sugarának pedig kapcsolt polárissugara mindkét kúpra vonatkozólag az $sx$ síknak a $\sigma$ síkban fekvő polárissugara $x_1$.

Ha tehát az $M(a_1a_2a_3)$ háromél be van irva az $M$ kúpba és az $m_1m'_1$, $m_2m'_2$, $m_3m'_3$ sugárpárok harmónikusan választják el az $a_2a_3$, $a_3a_1$, $a_1a_2$ élpárokat és a mellett kapcsolt polárisok az $M_1^{(2)}$ kúpra vonatkozólag, akkor azok hármanként egy-egy síkban, az

$$m'_1m'_2m'_3 \equiv \tau,\ m'_1m_2m_3 \equiv \tau_1,\ m_1m'_2m_3 \equiv \tau_2,\ m_1m_2m'_3 \equiv \tau_3$$

síkban feküsznek és az $M^{(2)}$, $M_1^{(2)}$ kúpoknak két érintőalkotója e síkok egyikében van. Az $M(\tau\tau_1\tau_2\tau_3)$ négylapnak átlós háromléle az $M(a_1a_2a_3)$ háromél, tehát amannak bármely két lapja és a másik két lapja, ennek egy élétől és az avval szemben fekvő laptól harmónikusan van elválasztva.

E mellett, ha az $M(a_1a_2a_3)$ háromélnek $a_1a_2 \equiv \alpha_3$ lapja az $M_1^{(2)}$ kúpot az $l_3l'_3$ alkotókban, az $a_1a_3 \equiv \alpha_2$ lapja pedig az $M_1^{(2)}$ kúpot az $l_2l'_2$ alkotókban metszi, akkor az $M(l_2l'_2l_3l'_3)$ négyélnek $l_2l'_3$ élei, melyek az $m_2m'_2$ sugárpártól, és az $l_3l'_3$ élei, melyek az $m_3m'_3$ sugárpártól harmónikusan vannak elválasztva, oly helyzetűek, hogy az $m_1m_2m'_3 \equiv \tau_3$, $m_1m'_2m_3 \equiv \tau_2$ síkpárok és az $m'_1m_2m_3 \equiv \tau_1$, $m'_1m'_2m'_3 \equiv \tau$ síkpárok harmónikusan választják el az $l_2l'_2$, $l'_2l'_3$ lapoknak $l_1$ metszővonalát, az $l_2l_3$, $l'_2l'_3$ lapoknak $l'_1$ metszővonalától.

Ezek az $l_1l'_1$ egyenesek még az $l_2l'_2 \equiv a_1a_3 \equiv \alpha_2$ és $l_3l'_3 \equiv a_1a_2 \equiv \alpha_3$ síkoktól is harmónikusan vannak elválasztva; továbbá az $a_1$ polárissugara az $l_1l'_1$ síknak, míg az $l_1l'_1$ egyenesek kapcsolt polárissugarak az $M_1^{(2)}$ kúpra vonatkozólag.

Ezt tekintetbe véve, következőkép szerkeszthetjük meg az $M(a_1a_2a_3)$ háromél körül írt azt a II. r. kúpot, mely az $M$ orthogonalis nyaláb $M_i^{(2)}$ vezető kúpját kettősen érinti, mely tehát forgáskúp.

Az $a_2a_3$ sugaraknak $m_1m'_1$ szögfelezői, és az $a_3a_1$ sugaraknak $m_2m'_2$ szögfelezői, kapcsolt polárissugarak az $a_2a_3$ és az $a_3a_1$ alkotópárokon keresztül menő minden II. r. kúpra nézve, de kapcsolt polárisok az $M$ orthogonális nyalábban is. Az $M(a_1a_2a_3)$ háromél körül írt II. r. kúp tehát az $M_i^{(2)}$ kúpot az

$$m'_1m'_2 \equiv \tau, \quad m'_1m_2 \equiv \tau_1, \quad m_1m'_2 \equiv \tau_2, \quad m_1m_2 \equiv \tau_3$$

síkban fekvő alkotókban érintheti kettősen.

Minthogy a $\tau$, $\tau_1$, $\tau_2$, $\tau_3$ síkoknak polárissugarai $t$, $t_1$, $t_2$, $t_3$ mindkét kúpra nézve ugyanazok, azért e polárissugarak merőlegesek ama síkokra. A $t$, $t_1$, $t_2$, $t_3$ egyenesek tehát főtengelyei, a $\tau$, $\tau_1$, $\tau_2$, $\tau_3$ síkok pedig fősíkjai a kivánt kúpoknak. De e $\tau$, $\tau_1$ ... síkokban fekvő kapcsolt polárissugarak az $M_i^{(2)}$ kúpra nézve orthogonalis sugársort képeznek, s mert e kapcsolt polárisok az egyes szerkesztendő kúpokra nézve is kapcsolt polárisok, azért a kivánt kúpok forgáskúpok és azoknak forgástengelyei a $t$, $t_1$, $t_2$ és $t_3$ egyenesek.

Hogy ezek a forgáskúpok az előbb szerkesztettekkel egybeesnek, onnan következik, hogy e $t$, $t_1$, $t_2$, $t_3$ forgástengelyek ugyanazok, mint az előbb talált forgástengelyek. Ugyanis az előbbi $\mu_1$ és $\mu_2$ síkok olyanok, hogy $\mu_1 \perp m'_1$, $\mu_2 \perp m'_2$; tehát a $\mu_1$, $\mu_2$ síkoknak metszővonala merőleges az $m'_1m'_2 \equiv \tau$ síkra és így mindkét esetben egybeesik a $t$-vel. Ugyanez áll a többi $t_i$ egyenesekre nézve is.

3. *Szerkesszük meg az $M(a_1a_2a_3)$ háromél körül írható forgáskúpnak forgástengelyét, ha a háromél $a_2a_3$ élei kapcsolt-képzetesek.*

Az $M(a_1a_2a_3)$ háromél $a_1$ éle valós, $a_2a_3$ élei pedig az $(M, \alpha_1)$ sugársorban adott $I$ elliptikus involucziónak képzetes kettőssugarai. Az $I$ involucziónak $m_1m'_1$ derékszögű társsugarai harmónikusan választják el az $a_2a_3$ kettőssugarakat, tehát kapcsolt polárissugarai a keresett $M^{(2)}$ kúpnak, valamint az $M$ orthogonális nyaláb $M_i^{(2)}$ vezető kúpjának.

Az előbbi általános szerkesztés szerint ezen az $m_1$-en és $m'_1$-en mennek keresztül azok a $\tau_i$ síkok, melyekben az $M^{(2)}$ és $M_i^{(2)}$ kettős érintésű kúpoknak érintő alkotói vannak.

A valós $a_1$ élnek az $M_i^{(2)}$ kúpra vonatkozó $\beta_1$ polárissíkjában $(\beta_1 \perp a_1)$ most oly $l_1l'_1$ sugárpárt kell találni, mely harmónikusan választja el az $M(a_1a_2a_3)$ háromél $a_1a_3 \equiv \alpha_2$, $a_1a_2 \equiv \alpha_3$ kapcsolt-képzetes lappárjait és az $M_i^{(2)}$-re vonatkozólag kapcsolt polárispár. Ha tehát az $I$ sugárinvolucziót az $a_1$ élből a $\beta_1$ síkra projicziáljuk, úgy e projekczió $I'$ ismét egy elliptikus sugárinvolucziő lesz és ennek egymásra merőleges társsugarai a keresett $l_1l'_1$ sugarak.

Ezután megszerkesztjük az $m'_1$-en keresztül azt a $\tau\tau_1$ síkpárt és az $m_1$-en keresztül azt a $\tau_2\tau_3$ síkpárt, mely harmónikusan választja el az $l_1l'_1$ sugárpárt és egyszersmind az $a_1\alpha_1$ sugarat és síkot. Ha az $\alpha_1$, $a_1m_1$, $a_1m'_1$ síkok a $\beta_1$ síkot a $b_1$, $c_1$, $c'_1$ sugarakban metszik, akkor a $\tau\tau_1$ keresztül megy azokon a sugarakon, melyek az $l_1l'_1$, $b_1c'_1$ sugárpárokat, és $\tau_2\tau_3$ keresztül megy azokon a sugarakon, melyek az $l_1l'_1$ és $b_1c_1$ sugárpárokat harmónikusan választják el.

Minthogy $m_1m'_1$ társsugárpárja az $I$ involucziónak, tehát $c_1c'_1$ társsugárpárja az $I'$ involucziónak, és az $l_1l'_1$ ez utóbbi elliptikus involuczióhoz tartozik, azért az $l_1l'_1$, $c_1c'_1$ sugárpárok el vannak választva.

Bárhol legyen is e sugárpárok sorában a $b_1$ sugár, az $l_1l'_1$ sugárpár vagy a $b_1c_1$, vagy a $b_1c'_1$ sugárpárt választja el; a miből az következik, hogy megfelelően vagy a $\tau_2\tau_3$ síkpár, vagy a $\tau\tau_1$ síkpár képzetes lesz.

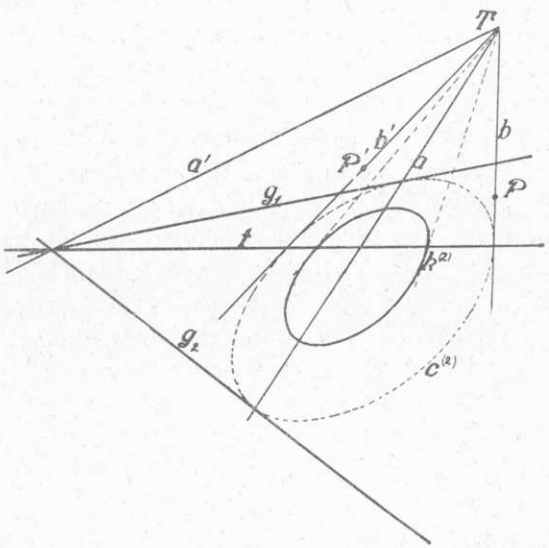
A $\tau\tau_1$ (vagy $\tau_2\tau_3$) síkokban vannak azok az alkotópárok, melyekben az $M(a_1a_2a_3)$ körül írt II. r. kúp az $M_i^{(2)}$ kúpot kettősen érinti; a $\tau\tau_1$ (vagy $\tau_2\tau_3$) síkok tehát fősíkjai, és az $M$ nyalábban az ezekre merőlegesen álló $tt_1$ (vagy $t_2t_3$) sugarak forgástengelyei, a keresett forgáskúpnak.

Mindezekből azt látjuk, hogy *az $M(a_1a_2a_3)$ háromél körül csak két valós forgáskúp írható, ha a háromélnek egyik éle valós, a másik kettő pedig kapcsolt képzetes.*

E megoldásban az $\alpha_1$ síkban adott $I$ elliptikus involuczió egymásra merőleges $m_1m'_1$ társsugarainak egyikén vagy másikán

keresztül oly két síkot $\tau\tau_1$-et, illetve $\tau_2\tau_3$-t kellett keresztül vezetni, mely az élet és a vele szemben fekvő lapot és ezenkívül az $I'$ involucziónak egymásra merőleges $l_1 l'_1$ társsugárpárját harmónikusan választja el. De megtörténhetik, hogy az $I'$, mely az $I$ involucziónak projekcziója az $a_1$ élből, az $a_1$-re merőleges $\beta_1$ síkra, az $M$ nyalábban orthogonális involucző. Ekkor az $I'$ involucziónak nemcsak egy merőleges társsugárpárja ($l_1 l'_1$) van, hanem végtelen sok, és ekkor a tárgyalt megoldás nem vezet czélhoz.

De ettől eltekintve, még akkor sem lehet a feladatot az előbbi eljárás szerint megoldani, ha az $\alpha_1$ és $\beta_1$ sík egymást az $l_1$ vagy $l'_1$ egyenesben metszi és e metszőegyenes ($b_1$) egybeesik az $m_1$ vagy $m'_1$ egyenessel.




13. ábra.

4. A következőkben oly megoldását adjuk a kitűzött feladatnak, mely ezekben az esetekben is alkalmazható lesz.

Erre fölhasználjuk STAUDT-nak a következő tételét és szerkesztését:

„Ha valamely $k^{(2)}$ kúpszelet síkjában egy tetszésszerinti elliptikus sugárinvolucző $I$ van adva, úgy mindig lehet két egyenest találni, mely az $I$-t oly pontinvolucziókban metszi, hogy annak társpontjai kapcsolt pólusok a $k^{(2)}$-re nézve." (Beitr. z. Geom. d. Lage 165. pont.)

Legyen az $I$ involucző középpontjának, a $T$ pontnak, a $k^{(2)}$-re vonatkozó polárisa a $t$, továbbá legyen az $I$-nek egy tetszésszerinti társsugárpárja a $bb'$, az a társsugárpárja pedig, mely egyszersmind kapcsolt polárispárja a $k^{(2)}$-nek, az $aa'$ (13. ábra). Az $aa't$ tehát polárisháromszöge a $k^{(2)}$-nek.

A $b$ sugáron változó $P$ pontnak polárisai a $k^{(2)}$ vonatkozólag a $b'$ sugarat a $P$ pontsorral projektiv $P'$ pontsorban metszik; e projektiv pontsoroknak megfelelő pontjai tehát kapcsolt pólusok a $k^{(2)}$-re

nézve és képződményük a $c^{(2)}$ kúpszeletet burkoló II. r. sugársor. A $bb'$ egyenesek, mint ama pontsorok tartói, érintői a $c^{(2)}$-nek és pedig a $(tb)$ és $(tb')$ pontokban, melyek a $(bb') \equiv T$ pontnak az egyik és másik pontsorban megfelelnek. Az $aa'$, $bb'$ sugárpárok el lévén választva az $I$ sorban, el lesznek egyszersmind a $(ta)$ $(ta')$ és $(tb)$ $(tb')$ pontpárok is választva a $t$ egyenesen; s mert az utóbbi pontpár a $c^{(2)}$ kúpszeleten van, azért a $(ta)$, $(ta')$ pontok közül az egyik $(ta')$, a $c^{(2)}$-n belül, a másik pedig $(ta)$, azon kívül van, és csak ez utóbbiból vezethetők valós érintők a $c^{(2)}$-hez.

Ebből a $(ta)$ pontból a $c^{(2)}$-hez vezetett $g_1$, $g_2$ érintők már a kívánt tulajdonsággal bírnak, mert egyrészt mint érintői a $c^{(2)}$-nek a $bb'$ sugárpárt, a $k^{(2)}$-nek kapcsolt pólusaiban metszik, másrészt az $aa'$ sugárpárt is a $k^{(2)}$-nek kapcsolt pólusaiban metszik, minthogy a $(ta)$ pontnak polárisa a $k^{(2)}$-re nézve az $a'$.

A kivitel alkalmával nem szükség a $c^{(2)}$ kúpszeletet megrajzolnunk, mert miután a $c^{(2)}$-nek $bb'$, $g_1g_2$ érintői harmónikus fekvésű érintők, minden más érintője a $c^{(2)}$-nek azokat harmónikus pontnégyesekben metszi; a $g_1g_2$ érintők tehát harmónikusan választják el a $b$-n és $b'$-ön levő projektiv pontsorok minden megfelelő pontpárját $PP'$-t, valamint a $T$ pontot és a $t$ egyenest.

Ezek szerint a $g_1g_2$ egyenespárt következőkép szerkesztjük:

Miután felkerestük az $I$ involuczióban azt az $aa'$ társsugárpárt, mely kapcsolt poláris a $k^{(2)}$-re nézve, és a sugársor $T$ középpontjának a $k^{(2)}$-re vonatkozó polárisát $t$-t, egy $bb'$ társsugárpárt veszünk fel az $I$-ben és a $b$ sugár valamely $P$ pontjának a $k^{(2)}$-re vonatkozó polárisát metszük a $b'$-sel a $P'$ pontban. A keresett $g_1g_2$ egyenesek, vagy az $(at)$ vagy az $(a't)$ ponton mennek keresztül és harmónikusan választják el a $PP'$ pontpárt és egyszersmind a $T$ pontot és a $t$ egyenest.

Ezek után már áttérhetünk a kitüzött feladathoz, mely ekkép szól:

Irjunk az $M(a_1a_2a_3)$ háromél körül forgáskúpot, ha annak $a_1$ éle valós, az $a_2a_3$ élei pedig egy az $\alpha_1$ síkban levő $I$ elliptikus involucziónak kettőssugarai.

*Megoldás**): Az $M$ pontból egy $\gamma^{(2)}$ gömböt írunk le, mely az $a_1$-et az $A_1A'_1$ pontokban, az $\alpha_1$ síkot a $k^{(2)}$ körben metszi.

Felkeressük azt a két egyenest $g_1$-t és $g_2$-őt, melyek az $I$ sugárinvolucziót oly $I_1$ és $I_2$ pontinvolucziókban metszik, melyeknek

---

*) HOFFMANN F.: *Die Construction doppelt berührender Kegelschnitte.* (Teubner, 1886; 30. és 90. oldal.)

társpontjai kapcsolt pólusok a $k^{(2)}$ körre nézve. Az $M$ pontból az $A_1g_1$ síkra bocsátott $t_1$ merőleges és az $A_1g_2$ síkra bocsátott $t_2$ merőleges már forgástengelyét képezi a keresett forgáskúpoknak.

Ugyanis az $A_1g_1$ sík a $\gamma^{(2)}$ gömböt egy az $A_1$ ponton keresztül menő $k_1^{(2)}$ körben metszi, tehát a $k^{(2)}$ és $k_1^{(2)}$ körök egy II. r. kúpon vannak és így egymást a $g_1$ egyenesnek két pontjában metszik. A $k^{(2)}$ kör a $g_1$-et az $I_1$ involucziónak képzetes kettőspontjaiban metszi, ezeken a kettőspontokon fog tehát a $k_1^{(2)}$ kör is keresztül menni, azaz: az $I_1$ pontinvolucziónak társpontjai kapcsolt pólusok a $k_1^{(2)}$ körre nézve.

Ebből következik, hogy az $I_1$ pontinvolucziót az $M$ pontból projicziáló sugárinvolucziő, mely az eredeti $I$ involucziő, oly tulajdonságú, hogy társsugarai kapcsolt polárissugarak arra az $M.k_1^{(2)}$ kúpra vonatkozólag, mely a $k_1^{(2)}$ kört az $M$ pontból projicziálja; azaz: az $M.k_1^{(2)}$ kúp az $M(a_1a_2a_3)$ háromél körül van írva. De az $M.k_1^{(2)}$ kúp forgáskúp, mert az $M$ pontból a $k_1^{(2)}$ körnek $A_1g_1$ síkjára bocsátott $t_1$ merőleges, a $k_1^{(2)}$ körnek középpontján megy keresztül.

Ép így kimutatható, hogy az az $M.k_2^{(2)}$ kúp, mely az $A_1g_2$ síknak és a $\gamma^{(2)}$ gömbnek metszését, a $k_2^{(2)}$ kört, az $M$ pontból projicziálja, szintén az $M(a_1a_2a_3)$ háromél körül írt forgáskúp, melynek forgástengelye az $M$ pontból az $A_1g_2$ síkra bocsátott $t_2$ merőleges egyenes.

5. Irjunk az $M(a_1a_2a_3)$ háromél körül forgáskúpot, ha a háromélnek két éle $a_2a_3$ egy $M^{(2)}$ II. r. kúpnak két egybeeső alkotója $a$.

Ily forgáskúpot kettőt lehet találni.

Állítsunk az $aa_1$ síkra $\mu_1$, $\mu'_1$ merőleges síkokat, melyek $aa_1$ egyeneseknek $m_1$, $m'_1$ szögfelezőin mennek keresztül. Állítsunk továbbá az $M^{(2)}$ kúp érintősíkjára az $a$ alkotó mentén, merőleges síkot $\alpha$-t, mely az $a$-n megy keresztül; ez az $M^{(2)}$ kúp $a$ alkotójának normális síkja. A $\mu_1\mu'_1$ síkok az $\alpha$ normális síkot a kivánt forgáskúpok $tt_1$ forgástengelyeiben metszik. —

Oldjuk meg végre ezt a feladatot, ha a háromélnek $a_1$ éle szintén az $M^{(2)}$ kúpnak $a$ alkotójában van. Azaz:

*Szerkesszük meg azokat a forgáskúpokat, melyek* az $M^{(2)}$ *II. r. kúpot annak a alkotójában kétszeresen érintik* (*oskullálják*).

Az $M^{(2)}$ kúpnak normálissíkja $\alpha$ az $a$ alkotó mentén az $a$-hoz szomszédos alkotó normális síkját egy $t$ egyenesben metszi, mely az egyik keresett forgáskúpnak forgástengelye. A másik forgáskúpnak forgástengelye $t_1$ szintén az $\alpha$ normális síkban van és merőleges az $M$ csúcsban az előbbi $t$ tengelyre.

A $t$ forgástengelyt akkép szerkeszthetjük, hogy az $M^{(2)}$ kúpot egy $\sigma$ síkkal a $k^{(2)}$ kúpszeletben metszük; és ennek $(a\sigma)$ pontjában megszerkesztjük a görbületi kör középpontját $N$-et, mely a $k^{(2)}$ kúpszelet két szomszéd normálisának metszőpontja; a $t$ forgástengelyen ezen az $N$ ponton megy keresztül.

*

6. Mielőtt e fejezetet bevégeznők, még ennek tárgyára vonatkozó *számláló geometriai* részről is akarunk szólani.

Minden síkban annyi a sugársor, a mennyi a pont, azaz $\infty^2$, mert minden pont lehet egy sugársor középpontja.

*A térben levő sugársorok száma tehát* $\infty^5$, *a pontsorok és a síksorok száma pedig csak* $\infty^4$, mert ennyi a pontsorok tartója és a síksorok tengelye.

Minden $g$ egyenesnek $\infty^3$ metsző egyenese van, és minden $g$ egyenesre $\infty^2$ egyenes merőleges, mert az első esetben a $g$ egyenes minden pontjából $\infty^2$ egyenes sugárzik ki. A második esetre gondolva pedig a $g$ egyenesre minden egyenes merőleges, mely a $g$-re merőleges $\infty^1$ számú síkban van.

A térben $\infty^8$ általános helyzetü és $\infty^7$ merőleges egyenpár van; továbbá $\infty^7$ egymást metsző és $\infty^6$ egymást metsző és merőleges egyenespár van, mert minden sugársorban van $\infty^2$ egymást metsző és $\infty^1$ merőleges sugárpár.

Minden sor $\infty^3$-félekép vonatkoztatható projektiv egy más adott sorra, mert az első sor három eleméhez a másodikban három elemet $\infty^3$-félekép választhatunk ki, mely amazoknak megfelel.

E szerint minden pont-, sugár- vagy síksor $\infty^7$-félekép lehet projektiv az összes pont- vagy síksorokkal és $\infty^8$-félekép lehet projektiv az összes sugársorokkal. Van tehát összesen $\infty^{11}$ projektiv pontsorpár és ugyanannyi síksorpár, végre $\infty^{13}$ projektiv sugársorpár. Konczentrikus és hasonlóképen konplanar (ugyanegy síkban fekvő) projektiv sugársorpár van $\infty^{10}$, és ugyanennyi projektiv pontsorpár és síksorpár, melynek tartói, illetve tengelyei egymást metszik.

Az egyenesen vagy a kúpszeleten öt pontot $\infty^5$-féleképen, ellenben a síkban öt pontot $\infty^{10}$-féleképen lehet felvenni, s mert a kúpszelet meghatározásához öt pont szükséges, azért minden síkban $\infty^5$ kúpszelet van. Egy megadott sík 1, 2, 3, 4, 5 adott pontján át (vagy ugyanennyi egyenest érintőleg) $\infty^4$, $\infty^3$, $\infty^2$, $\infty^1$ és 1 kúpszelet fektethető. A síkban tehát $\infty^4$ parabola és $\infty^3$ kör van. A tér kúpszeleteinek száma $\infty^8$, ezek között van $\infty^7$ parabola és $\infty^6$ kör.

Valamely sík kúpszeleteit a síkon kívül fekvő pontokból projicziáló kúpok a tér összes II. r. kúpjai. E szerint:

*A térben $\infty^8$ II. r. kúp van.*

*Az orthogonális és a parabolikus kúpok száma* $\infty^7$, mert minden metsző egyenespár meghatároz egy orthogonális kúpot, melynek ama egyenespár oly két alkotója, hogy ez alkotók egyikére vagy másikára merőleges síkok a kúpnak cziklikus síkjai. És mert a parabolikus kúp az orthogonalisnak dualisan megfelel, azért amazoknak száma szintén $\infty^7$.

*A Pappus-féle és a Hachette-féle kúpok száma* $\infty^7$.

Ugyanis a térben $\infty^6$ kör van; minden kör egy gömb félkörének tekinthető, melynek $\infty^2$ pontjaiból a felvett kör $\infty^2$ Pappus-féle kúppal projicziálható. Volna tehát összesen $\infty^{6+2}$ Pappus-féle kúp, ha minden ily kúpon, csak egy kör feküdnék. Minthogy azonban a Pappus-féle kúpon $\infty^1$ kör van, azért e kúpok száma csak $\infty^7$.

*$\infty^7$ az oly kúpoknak száma, melyeknek fokalis sugarai, vagy cziklikus síkjai merőlegesek.*

A két fokalis sugár a II. r. kúp két pár érintősíkjával egyenlő értékü, mert minden fokalis sugárból két, a fokalis sugárral megadott képzetes érintősík vezethető a kúphoz. Van tehát $\infty^1$ oly kúp, melynek ugyanegy a fokalis sugárpárja. De ha mind a $\infty^6$ lehetséges derékszögü és egymást metsző egyenespárt tekintjük fokalis sugárpárnak, akkor az ezekkel meghatározott kúpok száma $\infty^7$.

*Az egyenoldalú kúpoknak és ezek reziprokus kúpjainak száma szintén* $\infty^7$.

Ugyanis a térben $\infty^6$ derékszögü és egymást metsző egyenespár és így egyszersmind $\infty^6$ orthogonális háromél van. Minden háromélen $\infty^2$ II. r. kúp megy keresztül, de minden ily kúpban $\infty^1$ derékszögü háromél írható be; ezért az egyenoldalú kúpok száma $\infty^7$.

*A forgáskúpoknak, a Hachette-féle orthogonális kúpoknak, a Pappus-féle parabolikus kúpoknak (melyek amazoknak reziprokus kúpjai) száma* $\infty^6$.

Minden egyenes $\infty^2$ forgáskúp tengelye, és a térben $\infty^4$ egyenes van. Ezért a forgáskúpok száma $\infty^6$.

Adott síkban $\infty^3$, az egész térben pedig az $\infty^6$ kongruens ellipsis van. Minden ily ellipsist csak véges számu (t. i. két) pontból projicziálhatjuk Hachette-féle orthogonalis kúppal, vagy annak reziprokus kúpjával, a Pappus-féle parabolikus kúppal. Ezért összesen $\infty^6$ ily különös kúp lehetséges. Vagy: ha az orthogonális kúpnak az az alkotó párja, melyre a cziklikus síkok merőlegesek, olyan, hogy a fél

hajlásszögnek, cotangense $= \sqrt{2}$, akkor az orthogonalis kúp egyszersmind Hachette-féle. De minden szög a térben $\infty^6$ számban fordul elő s ezért a Hachette-féle orthogonalis kúpok száma, melyek különben mind kongruensek, $\infty^6$.

*Az egyenoldalú forgáskúpoknak, ezek recziprokus kúpjainak, a Pappus- és Hachette-féle forgáskúpoknak száma $\infty^5$; mind e $\infty^5$ kúp külön-külön egymással kongruens. — Végre az orthogonalis nyaláb képzetes vezető kúpjainak száma csak $\infty^3$.*

---

III. FEJEZET.

# A hyperboloid.

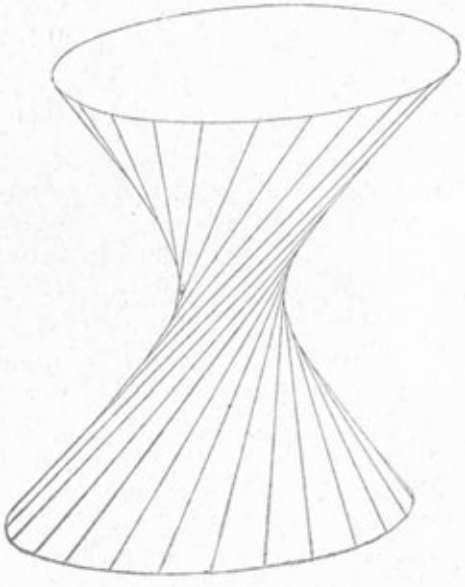
## 9. §. A hyperboloidon fekvő sugárseregek.

1. A 3. §-ból tudjuk, hogy két projektiv pontsornak, a $g_1(A_1B_1C_1\ldots)$-nek és a $g_2(A_2B_2C_2\ldots)$-nek, melyeknek $g_1, g_2$ tartói nincsenek ugyanegy síkban, képződménye *hyperboloid*, és két projektiv síksornak, a $g_1[\alpha_1\beta_1\gamma_1\ldots]$-nek és a $g_2[\alpha_2\beta_2\gamma_2\ldots]$-nek, melyeknek tengelyei egymást nem metszik, képződménye szintén hyperboloid. Ha a $g_2[\alpha_2\beta_2\gamma_2\ldots]$ síksor a $g_1(A_1B_1C_1\ldots)$ pontsorral, a $g_1[\alpha_1\beta_1\gamma_1\ldots]$ síksor pedig a $g_2(A_2B_2C_2\ldots)$ pontsorral perspektiv, akkor a két pontsornak és a két síksornak képződménye ugyanegy hyperboloid, mert az $A_1A_2$, $B_1B_2$, $C_1C_2\ldots$ pontoknak összekötő egyenesei egyszersmind az $\alpha_1\alpha_2$, $\beta_1\beta_2$, $\gamma_1\gamma_2\ldots$ síkoknak metszőegyenesei $h_1$, $h_2$, $h_3\ldots$ — A hyperboloidot alkotó $h_1h_2h_3\ldots$ sugarakat együttvéve *sugársereg*nek, külön-külön pedig a hyperboloid alkotóinak, vagy a sugársereg sugarainak, a hyperboloidot pedig a sugársereg *tartójának* nevezzük (14. ábra). A $h_1h_2h_3\ldots$ sugárseregről azt mondjuk, hogy a $(A_1B_1C_1\ldots)$ és $(A_2B_2C_2\ldots)$ pontsorral, valamint az $(\alpha_1\beta_1\gamma_1\ldots)$, és $(\alpha_2\beta_2\gamma_2\ldots)$ síksorral perspektiv, mert sugarai amazoknak pontjain mennek keresztül, illetve ezeknek síkjaiban feküsznek. A sugársereg sugarainak száma $\infty^1$.

*A sugársereg jellemző tulajdonsága, hogy ha egy egyenes annak három sugarát metszi, akkor az annak valamennyi sugarát fogja metszeni.* Ugyanis ha a $h_1h_2h_3\ldots$ sugársereg a $g_1(A_1B_1C_1\ldots)$, $g_2(A_2B_2C_2\ldots)$ projektiv pontsoroknak képződménye és a $g_i$ egyenes a $h_1h_2h_3$ sugarakat metszi, akkor annak a két projektiv

síksornak, mely a $g_i$-ből a két felvett projektiv pontsort projicziálja, három, tehát minden megfelelő síkja közös. A két projektiv pontsornak tehát minden megfelelő pontpárja a $g_i$-vel ugyanegy síkban van, s így a $h_1 h_2 h_3 \ldots$ sugárseregnek minden sugara metszi a $g_i$-t.

De fordítva is következik, hogy *mindazok a sugarak, melyek három egymást nem metsző egyenest, $g_1 g_2 g_3$-mat, metszenek, sugársereget képeznek.* Ugyanis az a síksor, melynek tengelye a három felvett $g$ egyenes egyike, a másik két $g$ egyenest projektiv pontsorokban metszi, s e projektiv pontsorok képződménye egy sugársereg, mely mind a három $g$ egyenest metszi. Ugyanezt a sugársereget nyerjük, ha a három $g$ egyenes egyikének pontjait a másik két $g$ egyenesből síkokkal projicziáljuk; e síkok két projektiv síksort adnak, melynek képződménye a három $g$ egyenest metsző sugársereg.



14. ábra

Ebből ismét az következik, hogy mindazon $g_i$ sugarak, melyek egy $h_i$ sugárseregnek három, tehát valamennyi sugarát metszik, egy uj sugársereget képeznek; e két sugársereg közül mindenik a másiknak *vezető, vagy támasztó serege,* s mindkét sugársereg ugyanegy hyperboloidon fekszik, mely mindkét sugárseregnek tartója. E szerint:

*A hyperboloidon két sugársereg van, melyek közül egyik a másiknak vezető serege. E két sugársereg bármelyikének sugarai, a vezető sugárseregnek sugaraitól projektiv pontsorokban metszenek, és e vezető seregnek sugarait ama pontsorokkal és így egymás között is projektiv síksorokkal projicziálják.*

A sugársereg sugarait a támasztó sugársereg sugaraiból projicziáló $\infty^1$ projektiv síksorokról azt mondjuk, hogy azok egy *síksorsereget* képeznek, azok a $\infty^1$ projektiv pontsorok pedig, melyekben a sugársereg a támasztó sugárseregnek sugarait metszi, egy *pontsorsereget* alkotnak.

Minthogy három egyenest a térben $\infty^{12}$-féleképen, a sugárseregben pedig $\infty^3$-féleképen vehetjük fel, azért *a hyperboloidok és a sugársheregek száma* $\infty^9$.

2. Minden $\varepsilon$ sík, mely egy $g$ sugárseregnek egyik sugarán, $g_i$-n, keresztül megy, e sugársereg vezető seregének, $h$-nak, is tartalmazza egyik sugarát; mert az $\varepsilon$ sík a $g$-nek minden sugarát metszi és e metszőpontok a $h$ sugárseregnek egy sugarán, mondjuk a $h_1$-en, feküsznek. Az $\varepsilon \equiv [g_i h_1]$ síkban fekvő minden $t$ egyenes a $g$ és $h$ sugárseregeket tartó $H^{(2)}$ hyperboloidot két pont metszi, t. i. a $(tg_i)$ és a $(th_1)$ pontban. E metszőpontok egybeesnek, ha a $t$ egyenes a $(g_i h_1)$ ponton megy keresztül és az $\varepsilon$ síkban van, és akkor a $t$ egyenes érintője a hyperboloidnak. Minden a $(g_i h_1)$ ponton keresztül menő és az $\varepsilon$ síkban fekvő egyenes, mert a hyperboloidot két egybeeső pontban metszi, érintője a hyperboloidnak, míg minden a $(g_i h_1)$ ponton keresztül menő $s$ egyenes, mely nem fekszik az $\varepsilon$ síkban a hyperboloidot még egy, a $(g_i h_1)$-től különböző pontban metszi, mivel a $[g_i s]$ sík még tart egy $h_2$ alkotót a $h$ seregből, melynek $(sh_2)$ metszőpontja az $s$-sel, az $s$-nek második metszőpontja a hyperboloiddal. A $[g_i h_1]$ síkot azon tulajdonságánál fogva, hogy minden benne fekvő és a $(g_i h_1)$ ponton keresztül menő $t$ egyenes a $H^{(2)}$ hyperboloidot a $(g_i h_1)$ pontban érinti, a hyperboloid *érintősíkjának* nevezzük, és a $(g_i h_1)$ pont e $[g_i h_1]$ síknak *érintőpontja*.

E szerint: a hyperboloid minden pontjának érintősíkja az illető ponton átvonuló két alkotón megy keresztül; az alkotó különböző pontjainak különböző érintősíkja van, s minden sík, mely egy alkotón keresztül megy, érintősíkja a hyperboloidnak ez alkotó egy pontjában; végre a *hyperboloid valamely alkotóján keresztül menő érintősíkok és azoknak érintőpontjai egymással projektiv sorokat adnak.*

Minden $s$ egyenes, mely nem alkotója a hyperboloidnak, azt két pontban metszi, és minden ily $s$ egyenesen keresztül két érintősík vezethető a hyperboloidhoz; a szerint, a mint az $s$-nek metszőpontjai hyperboloiddal valósak, képzetesek vagy egybeesők, az $s$-en keresztül menő érintősíkok is ugyanily természetűek lesznek. Tekintsük ugyanis a hyperboloidot két projektiv síksor képződményének. Az $s$ egyenes e két síksort két projektiv pontsorban metszi, melynek két kettőspontja a hyperboloidnak metszőpontja az $s$-sel. Ha e kettőspontok valósak és azokat a rajtuk keresztül menő és a hyperboloidon fekvő alkotókkal ekkép jelöljük $(g_i h_i)$, $(g_j h_j)$, akkor az $s$-en keresztül menő érintősíkok $[g_i h_j]$, $[g_j h_i]$. Ha ama projektiv pontsorok kettőspontjai egybeesnek, tehát az $s$-nek csak egy $(g_i h_i)$

közös pontja van a hyperboloiddal, akkor az $s$ a $[g_i h_i]$ érintősíkban fekszik és az $s$-en keresztül nem vezethető más érintősík a hyperboloidhoz.

Az egyenes és a hyperboloid metszőpontjainak szerkesztése tehát lényegében megegyezik a következő GERGONNE-tól származó másodfokú feladattal:

*Adva van négy általános helyzetű egyenes* $h_1 h_2 h_3 s$; *szerkesztendők oly egyenesek, melyek ezeket metszik.*

Ugyanis ha a $h_1 h_2 h_3$ egyeneseket egy $h$ sugársereg három sugarának, tehát e sugárseregen keresztül menő $H^{(2)}$ hyperboloid három alkotójának tekintjük, akkor e hyperboloid és az $s$ egyenes két valós, képzetes vagy egybeeső metszőpontján keresztül menő $g$ alkotók a $h_1 h_2 h_3 s$ egyeneseknek metsző egyenesei (transversalisai, vagy *szelői*) lesznek. A feladatot pedig STEINER szerint következőképen oldjuk meg: A $h_3$ pontjait a $h_1$ és $h_2$-ből az $s$-re projicziáljuk: ekkép az $s$-en a $h_3$ pontsorral projektiv pontsorokat nyerünk. A két projektiv pontsor egyik kettőspontját $J$-et, a $h_1$ és a $h_2$-vel összekötő $[h_1 J]$, $[h_2 J]$ síkoknak metszőegyenese $g_j$, az $s$-nek $J$ pontján megy keresztül és a $h_3$-mat metszi, mivel ama síkok a $h_3$-nak ugyanegy pontját projicziálják; végre a $h_1$, $h_2$-t is metszik, mert azokkal egy-egy síkban feküsznek.

A feladatnak általában 2, 1, 0 számú valós megoldása van, s csak akkor lesz a feladatnak végtelen sok megoldása, ha az $s$-en létesített két projektiv pontsornak kettőnél több, tehát végtelen sok megfelelő pontja esik egybe, vagyis ha az $s$ egyenes a $h_1 h_2 h_3$-mal ugyanegy hyperboloidon fekszik. S ezért: ha négy egymást nem metsző egyenesnek kettőnél több szelője van, akkor a négy egyenes egy hyperboloidon fekszik, *azaz hyperboloidikus fekvésü.* Általában négy egyenesről akkor mondjuk, hogy hyperboloidikus fekvésű, ha azok közül bármely háromnak minden transversalisa egyszersmind a negyedik egyenesnek is transversalisa. Ebben az egyenesek különös helyzeteire vonatkozó értelmezés is benn foglaltatik.

Minthogy a térben $\infty^9$ hyperboloid és minden hyperboloidon $\infty^4$ hyperboloidikus fekvésű egyenes van, azért *a hyperboloidikus fekvésű egyenes-négyesek száma* $\infty^{13}$.

A következő §-ban több érdekes példában fogunk bemutatni hyperboloidikus fekvésű egyeneseket. Itt azonban még megemlítjük, hogy ha négy egyenes $h_1 h_2 h_3 h_4$ hyperboloidikus fekvésű, akkor azoknak végtelen sok transversalisuk van, és ezek mindenikén a négy egyenes projektiv pontnégyeseket metsz ki. Ha azonban a négy egyenes *nem* hyperboloidikus fekvésű, akkor azoknak két

transversalisán, $u$ és $v$-n, a négy egyenes oly pontnégyeseket metsz ki, melyek nem projektivek. Ha a $h_1h_2h_3h_4$ egyeneseknek egyik transversalisuk az $u$, és az a pontnégyes, melyben $u$ a négy egyenest metszi, és az a síknégyes, mely az $u$-ból a négy egyenest projicziálja, projektiv, akkor a négy egyenesnek vagy nincs több transversalisa, vagy pedig végtelen sok van tehát hyperboloidikus fekvésű, a szerint, a mint az adott egyenesek hármának bármelyik transversalisa a negyediket nem metszi, vagy pedig metszi.

3. Az előbbiekben kifejtettük, hogy a sugársereg valamely sugarán keresztül menő bármely sík a sereg sugaraitól egy egyenesen fekvő pontsorban metszetik, továbbá, hogy a sugársereg valamely sugarán fekvő bármely pontból a sereg sugarai egy (I. o.) síksorral projicziáltatnak. De könnyen belátható, hogy a sugársereg irányában általános helyzetű $\varepsilon$ sík a sugársereg sugarait egy kúpszelet pontjaiban metszi, és minden általános helyzetű $E$ pontból a sugársereg sugarai egy II. o. síksorral projicziáltatnak.

Ugyanis ha a sugársereg sugarait két projektiv síksor képződményének tekintjük, akkor azok az $\varepsilon$ metszősíkot két általános helyzetű sugársorban metszik, melyeknek képződménye a sugársereg metszése az $\varepsilon$ síkkal. És ha másodszor a sugársereget két projektiv pontsor képződményének tekintjük, akkor e két projektiv pontsort az $E$ pontból projicziáló sugársorok képződménye II. o. síksor, melynek egyes síkjai a sugársereg sugarait az $E$ pontból projicziálják. — Minthogy minden sík, mely a sugársereg valamely sugarán keresztül megy, a sugársereget tartó hyperboloidnak érintősíkja, azért *a hyperboloidnak, egy a felületen kívül fekvő ponton keresztül menő érintősíkjai egy II. r. kúpot burkolnak, s a hyperboloidnak metszése egy oly síkkal, mely nem tartalmaz alkotókat, egy kúpszelet.*

Fektessünk a hyperboloid három érintősíkjának, a $[g_1h_1]$, $[g_2h_2]$, $[g_3h_3]$-nak, érintőpontjain, $(g_1h_1)$, $(g_2h_2)$, $(g_3h_3)$-mon keresztül az $\varepsilon$ síkot és nevezzük a három érintősík metszőpontját $E$-nek. A hyperboloidnak az $E$ ponton keresztül menő összes érintősíkjai egy II. o. síksort képeznek, tehát ezen érintősíkok bármelyikében, pl. a $[g_jh_j]$-ben fekvő $g_jh_j$ alkotók az $E$ ponton keresztül menő többi érintősíkoktól, $[g_ih_i]$-től, projektiv pontsorokban metszetnek. Ennélfogva a $g_j(h_1h_2h_3 \ldots h_i)$, $h_j(g_1g_2g_3 \ldots g_i)$ pontsorok és a $g_j[h_1h_2h_3 \ldots h_i]$, $h_j[g_1g_2g_3 \ldots g_i]$ síksorok projektivek.

Az $\varepsilon$ sík az egymást támasztó $g_1g_2g_3 \ldots g_i$, $h_1h_2h_3 \ldots h_i$ sugárseregeket ugyanegy $k^{(2)}$ kúpszeleten fekvő $G_1G_2G_3 \ldots G_i$, $H_1H_2H_3 \ldots H_i$ pontsorokban metszi, melyek, mert az előbbi $h_j[g_1g_2 \ldots]$, $g_j[h_1h_2 \ldots]$ síksorok projektivek voltak, egymással

projektivek lesznek. De e pontsoroknak három megfelelőleg közös pontjuk $G_1 \equiv H_1 \equiv (g_1 h_1)$, $G_2 \equiv H_2 \equiv (g_2 h_2)$, $G_3 \equiv H_3 \equiv (g_3 h_3)$ van, tehát minden megfelelő pontjuk, $G_i$, $H_i$ is egybeesik, s így az $E$ ponton keresztül menő $[g_i h_i]$ érintősíkoknak $(g_i h_i)$ érintőpontjai is a $k^{(2)}$ kúpszeleten lesznek. Ezért:

*A hyperboloidon kívül levő pontból a hyperboloidhoz fektethető érintősíkok érintőpontjai egy kúpszeleten vannak.*

*Egy sík és egy hyperboloid közös pontjainak érintősíkjai egy II. r. kúpot burkolnak, tehát egy ponton mennek keresztül.*

A baloldali tételből következik, hogy egy $M$ pontból a hyperboloidhoz huzható érintők egy II. r. kúpnak alkotói, mert ezek az $M$ pontból a hyperboloidhoz vezetett érintősíkok érintőpontjain mennek keresztül, melyek általában egy kúpszeleten feküsznek. Az a II. r. kúp, melynek alkotói egy pontból a hyperboloidhoz huzható érintők, az illető pontnak a hyperboloidhoz tartozó *érintőkúpja.*

4. A hyperboloid bármelyik sugárseregének sugarai a másikat projektiv pontsorokban metszik. Ha tehát a két egymást támasztó sugársereg egy-egy sugarán, a $g_i$-n, és a $h_i$-n, egy-egy projektiv pontsort veszünk fel, és a megfelelő pontokon keresztül menő sugarakat a másik seregből megfelelőknek tekintjük, akkor a két sugársereget egymásra projektiv vonatkoztattuk.

Az egymást támasztó projektiv sugárseregeknek pontképződménye egy kúpszelet, síkképződménye pedig egy II. o. síksor. Ugyanis három megfelelő sugárpár metszőpontján $(g_1 h_1)$, $(g_2 h_2)$, $(g_3 h_3)$-mon keresztül menő sík a hyperboloidot egy kúpszeletben metszi; ezen a sugárseregek megfelelő sugarainak nyomai oly projektiv pontsorokat képeznek, melyeknek három, tehát minden megfelelő pontjuk közös.

A *sugársereg sugarait involucziósan párosítjuk*, ha a sugársereget tartó hyperboloidot egy $\varepsilon$ síkkal metszük és a kimetszett kúpszeleten (vagy ha az $\varepsilon$ érintősík, tehát a kimetszett kúpszelet a sugárseregnek és az ezt vezető sugárseregnek egy-egy sugarává fajul, ez utóbbin) involucziós pontsort veszünk fel; a sugárseregnek az involucziós pontsor társpontjain keresztül menő sugarai képezik involuciósan párosított sugárseregnek társsugarait. A szerint, a mint ama felvett pontsor elliptikus vagy hyperbolikus involuciót képezett, a sugársereg is ilyen involuciót fog képezni. A hyperbolikus involucziós sugársereg társsugarai nem választják el egymást a hyperboloidon és kettőssugarai a seregnek *valós* sugarai. Az elliptikus involucziós sugársereg társsugarai egymást a hyperboloidon elvá-

lasztják, tehát kettőssugarai *képzetesek*. A képzetes sugarak abban különböznek egy elliptikus involucziós sugársor képzetes kettőssugaraitól, hogy ezeknek *egy valós pontjuk van*, t. i. a sugársor középpontja, és ezeken egy valós sík megy keresztül, t. i. a sugársor síkja. Az elliptikus involucziós sugársereg kettőssugarainak nincsen valós pontjuk és azoknak egyikén sem lehet valós síkot keresztül fektetni. E végből Staudt az elliptikus involucziós sugárseregnek kettőssugarait *II. faju képzetes egyeneseknek*, az elliptikus involucziós sugársor képzetes sugarait pedig *I. faju képzetes egyeneseknek* nevezte. (Staudt: Beitr. z. Geom. d. Lage. 7. §.)

A II. fajú kapcsolt képzetes sugarak minden síktól egy kapcsolt-képzetes pontpárban metszetnek. | pontból egy kapcsolt-képzetes síkpárral projicziáltatnak.

Ha az $aa'$, $bb'$ . . . sugárpárok az involucziós sugársereg társsugarai, a mely esetben az involucziós sugársereget ekkép jelöljük: $aa' . bb' \ldots$, akkor e sugársereg egyik sugarán, tehát vezetősugárseregének is egyik, pl. a $h$ sugarán keresztül menő $\varepsilon$ sík a sugársereget a $h$-n fekvő $h(aa' . bb' \ldots)$ involucziós pontsorban metszi; ennek kettőspontjai az $aa' . bb' \ldots$, involuczió sugársereg (valós vagy képzetes) kettőssugarainak metszőpontjai az $\varepsilon$ síkkal.

Ha pedig az $\varepsilon$ sík nem megy keresztül az $aa' . bb' \ldots$ sugárseregnek egy sugarán, akkor az $\varepsilon$ a sugársereget egy involucziós kúpszeletben, $k^{(2)}$-ben, metszi, melynek társpontjai, a sugársereg társsugarainak metszőpontjai az $\varepsilon$ síkkal. A $k^{(2)}$-n levő involucziós pontsor kettőspontjai, már az involucziós sugársereg kettőssugarainak metszőpontjai az $\varepsilon$ síkkal. Ama involucziós pontsor involucziós tengelye $q$ a $k^{(2)}$-t a kettőspontokban metszi; és ha a $k^{(2)}$-n levő involucziós pontsort annak bármely pontjából a $q$-ra projicziáljuk, úgy a $q$-n nyert pontsor szintén involucziós és kettőspontjai egybeesnek a projicziált pontsor kettőspontjaival. E szerint minden $\varepsilon$ síkban lehet egy határozott valós egyenesen oly involucziós pontsort előállítani, melynek kettőspontjai az adott $aa' . bb' \ldots$ involucziós sugársereg kettőssugarainak metszőpontjai az $\varepsilon$ síkkal. Ép így lehet a dualis eljárás szerint minden $E$ ponton keresztül egy határozott valós $q$ egyenest vezetni, mely egy oly involucziós síksornak tengelye, hogy annak kettőssíkjai az adott sugársereg kettőssugarait projicziálják. —

Négy egyenesnek, $abcd$-nek, melyek közül egyik sem metsz egy másikat a többi három közül, és melyek nem hyperboloidikus fekvésűek, mint láttuk, két valós vagy képzetes, vagy két egybeeső valós szelője van, a szerint, a mint pl. az $abc$-n keresztül menő hyper-

boloidnak és a $d$ egyenesnek metszőpontjai valósak, képzetesek vagy egybeesnek. Ha tehát a $d$-n keresztül menő tetszésszerinti sík az $abc$ hyperboloidot a $k^{(2)}$ kúpszeletben metszi, és a $k^{(2)}$-n azt az involucziós pontsort vesszük fel, melynek involucziós tengelye a $d$ egyenes, akkor annak társpontjain keresztül menő azon alkotók a hyperboloidon, melyek az $abc$ alkotókat metszik, egy involucziós sugársereget képeznek. Ennek valós vagy képzetes kettőssugarai az $abcd$ egyeneseknek valós vagy II. fajú képzetes szelői.

## 10. §. Hyperboloidikus fekvésű egyenesekről.

1. A 64. oldalon kimutattuk, hogy ha az $S(abc)$ háromél $a$, $b$, $c$ élein keresztül a szemben fekvő $bc$, $ca$, $ab$ lapokra az $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ síkokat merőlegesen fektetjük, úgy ezek egymást egy $g$ egyenesben, a háromélnek úgynevezett *magasságvonalában*, metszik. E tételnek egy elemiebb, de az előbbitől lényegében keveset eltérő bizonyítása a következő: Az $\alpha\beta$ síkoknak $g$ metszővonalára merőlegesen álló sík, mely nem megy a háromél $S$ csúcsán keresztül, a háromél $abc$ éleit az $ABC$ pontokban, a $g$ egyenest pedig egy $G$ pontban metszi. E $G$ pont az $ABC$ háromszög magasságpontja (mert a $BC$ egyenes, mint a $bc$ és $ABC$ sík metszővonala merőleges az $\alpha$ síkra és így annak $AG$ egyenesére, továbbá a $CA$ egyenes, mint a $ca$ és $ABC$ sík metszővonala merőleges a $\beta$ síkra és így annak $BG$ egyenesére), tehát $AB$ merőleges a $CG$-re és egyszersmind az $SG \equiv g$-re, valamint azoknak összekötő $SCG$ síkjára, mely utóbbi sík szintén merőleges az $SAB \equiv ab$ síkra. De az $SCG$ sík, mely a $c$ élen megy keresztül és merőleges az $ab$ síkra az előbbi $\gamma$ sík, és így az $\alpha\beta\gamma$ síkok egymást a $g$ egyenesben metszik.

Ezt fölhasználva könnyen bebizonyítható Steinernek*) a következő tétele:

*Minden tetraedernek magasságai hyperboloidikus fekvésűek.*

Ugyanis ha a tetraeder $A_1A_2A_3A_4$ szögpontjaiból a szemben fekvő lapokra bocsátott $h_1h_2h_3h_4$ merőlegeseket, a tetraederek magasságait, figyelembe vesszük, azt látjuk, hogy az $A_1h_2$, $A_1h_3$, $A_1h_4$ síkok, melyek megfelelőleg az $A_1A_3A_4$, $A_1A_4A_2$, $A_1A_2A_3$, tetraederlapokra merőlegesek, egymást az $A_1(A_2A_3A_4)$ háromél $g_1$ magasságvonalában metszik; a $g_1$ magasságvonal tehát a tatraedernek mind a négy magasságát metszi. Ugyanígy kimutatható, hogy a

*) Steiner: Gesam. Werke (1881); 454. oldal; 78. pont.

tetraeder más három-három lapjából képezett $A_2(A_3A_4A_1)$, $A_3(A_4A_1A_2)$, $A_4(A_1A_2A_3)$ háromeléknek $g_2$, $g_3$, $g_4$ magasságvonalai szintén metszik a tetraedernek $h_1h_2h_3h_4$ magasságait, tehát úgy e magasságok, mint a négy háromélnek magasságvonalai (mert kettőnél több szelőjük van) hyperboloidikus fekvésűek. — Az előbbi tételt pedig még a következővel egészíthetjük ki: *egy tetraedernek lapjai egyszersmind négy háromélnek lapjai; e négy háromélnek magasságvonalai hyperboloidikus fekvésűek.*

A $h_1h_2h_3h_4$ magasságok és a $g_1g_2g_3g_4$ magasságvonalak ugyanegy hyperboloid két sugárseregéhez tartoznak, tehát a négy $g_i$ magasságvonal mindenik $h_i$ magasságot projektiv pontnégyesekben metszi, és ugyanígy a négy $h_i$ magasság mindenik $g$ magasságvonalat projektiv pontnégyesekben metszi.

Ha a négy magasság közül kettő, pl. a $h_1$ és $h_2$ egymást metszi, akkor azoknak síkja az $A_1A_3$ élen megy keresztül, merőleges az $A_3A_4$ élre és a $g_1g_2$ is abban a síkban van. Minthogy ekkor az $A_1A_2 \perp A_3A_4$: a $h_3$ és $h_4$ magasságok a $g_3g_4$ magasságvonalakkal együtt szintén egy síkban feküsznek és így ezek is metszik egymást. És pedig a $g_1g_2h_3h_4$ egyenesek egymást a $[h_1h_2]$ síknak, a $g_3g_4h_1h_2$ egyenesek pedig egymást a $[h_3h_4]$ síknak egy-egy pontjában metszik, és ekkor a $h_1h_2h_3h_4$ magasságokon, valamint a $g_1g_2g_3g_4$ magasságvonalakon keresztül menő hyperboloid a $[h_1h_2]$, $[h_3h_4]$ síkpárrá korcsosul el. E síkpár metszővonalán vannak a $h_1h_2$ és $h_3h_4$ egyenespároknak metszőpontjai, és ugyanott a $g_3g_4$ és $g_1g_2$ egyenespároknak metszőpontjai. Az ilyen négy egyenest, mint a $h_1h_2h_3h_4$ vagy a $g_1g_2g_3g_4$ ebben a helyzetben *kétszöges fekvésű sugaraknak* nevezünk.

A midőn a $h_1$ a $h_2h_3$ magasságokat metszi, a $h_1$ egybeesik a $g_1$-gyel és így a $h_4$ magasságot is metszi. Ebből pedig tekintettel az előbbire következik, hogy a $h_1h_2h_3h_4$ magasságok közül bármely kettő találkozik, és mert azok nem fekhetnek ugyanegy síkban, azért ugyanegy ponton mennek keresztül és mindenik $h$ magasság a $g_i$ magasságvonallal egyesül. A tetraedernek ekkor mind a három szemben fekvő élpárja merőleges egymásra, és így egy tetraedernek 0, 1 vagy 3 szemben fekvő élpárja lehet merőleges egymásra.

2. A tárgyalt tételeknek dualisan megfelelő tételei a következők lehetnek:

„A tetraeder magasságainak harmónikus polárissíkjai a tetraeder azon háromléleire vonatkozólag, melyeknek csúcsain az egyes magasságok keresztül mennek, a csúcsokkal szemben fekvő lapokat hyperboloidikus fekvésű egyenesekben metszik."

„A tetraederhez tartozó háromélek magasságvonalainak har-

mónikus polárissíkjai e háromélekre vonatkozólag a csúcsokkal szemben fekvő lapokat hyperboloidikus fekvésű egyenesekben metszik."

Ha a $G$ pontnak harmónikus polárisa egy $ABC$ háromszögre vonatkozólag a $g'$ egyenes, és az $S$ a háromszög síkján kívül fekvő pont, akkor az $Sg'$ sík *harmónikus polárissíkja* az $SG$ sugárnak az $S(ABC)$ *háromélre vonatkozólag*. Az $Sg'$ sík tehát harmónikusan választja el az $SGA$, $SGB$, $SGC$ síkokat az $S(ABC)$ háromél élpárjaitól.

Tartsuk meg a tetraederre az előbbi jelölést; legyen tehát $A_1A_2A_3A_4$ annak négy szögpontja; $h_1h_2h_3h_4$ annak négy magassága; $g_1g_2g_3g_4$ pedig háromeléinek magasságvonala. Jelöljük e magasságok és magasságvonalak harmónikus poláris síkjainak metszővonalait a háromélek csúcsaival szemben fekvő tetraederlapokkal $h'_1h'_2h'_3h'_4$-gyel, illetve $g'_1g'_2g'_3g'_4$-gyel.

A $g_1h_2$ sík az $A_1A_2$ élen megy keresztül, tehát az a pont, mely a $g_1h_2$ síkot a tetraeder $A_3A_4$ szögpontjaitól harmónikusan elválasztja, benne van a $g'_1$ és a $h'_2$ egyenesben, és így ez utóbbiak egymást az $A_3A_4$ élnek egy pontjában metszik. Ugyanígy kimutatható, ha a $g_1h_3$ és $g_1h_4$ síkból indulunk ki, hogy a $g'_1h'_3$ és $g'_1h'_4$ egyenesek egymást az $A_2A_4$, $A_2A_3$ éleken metszik. A $h'_1$ egyenes pedig az $A_2A_3A_4$ síkban van, tehát a $g'_1$ egyenes metszi a $h'_1h'_2h'_3h'_4$ egyeneseket. Ép ily egyszerű úton igazolható, hogy a $g'_2g'_3g'_4$ egyenesek is metszik a négy $h'_i$ egyenest, tehát úgy a négy $h'_i$, mint a négy $g'_i$ egyenes hyperboloidikus fekvésű. —

Ha tetraedernek $A_1A_2$, $A_3A_4$ szemben fekvő élei egymásra merőlegesek, tehát $h_1h_2$ magasságok és a $g_1g_2$ magasságvonalak ugyanegy síkban vannak, akkor az a pont, mely e síkot az $A_3A_4$ pontoktól harmónikusan elválasztja a $g'_1h'_2$ és a $g'_2h'_1$ egyenesekben van, tehát a $h'_1h'_2$ és a $g'_1g'_2$ egyenespárok egymást ugyanegy pontban metszik. Hasonlóképen $h_3'h_4'g_3'g_4'$ egyenesek is keresztül mennek azon a ponton, mely a $h_3h_4g_3g_4$ síkot az $A_1A_2$ pontoktól harmónikusan választja el; a $h_1h_2g_1g_2$, $h_3h_4g_3g_4$ síkoknak metszővonala és a $h'_1h'_2g'_1g'_2$, $h'_3h'_4g'_3g'_4$ pontoknak összekötő egyenese pedig, az $A_1A_3$, $A_2A_4$; $A_1A_4$, $A_2A_3$ szemben fekvő élpároktól van harmónikusan elválasztva.—

Ha a tetraedernek mind a három szemben fekvő élpárja merőleges egymásra, tehát a $g_i$ magasságvonalak a $h_i$ magasságokkal egybeesnek és ezek a $h_1h_2h_3h_4$ magasságok egy $H$ pontban találkoznak, a $g_i'$ vonalak is egybeesnek a $h'_i$-ekkel és ezek egy síkban feküsznek, mely a $H$ pontnak harmónikus polárissíkja a tetraederre

vonatkozólag. *Valamely P pontnak harmónikus polárissíkja egy tetraederre vonatkozólag*, általánosan szólva, az a $\pi$ sík, mely harmónikusan választja el a $P$ pontból a tetraeder szemben fekvő éleihez vezetett transversalisokat az illető éleken fekvő szögpontpároktól. Viszont a $P$ pont *harmónikus pólusa* a $\pi$ síknak a tetraederre vonatkozólag.

3. *) Hyperboloidikus fekvésű egyenesekre vonatkozó egy más példát mond a következő tétel, mely általánosítása a tetraeder magasságaira vonatkozó tételnek:

*Ha valamely tetraeder lapjaira mint alaplapokra gulákat állítunk, melyeknek oldallapjai az alaplapokhoz egyenlő szögek alatt hajlanak és pedig mind a négy gulát az eredeti tetraederen kívül, akkor e gulák csúcsait az alaplappal szemben fekvő csúcscsal összekötő egyenesek hyperboloidikus fekvésűek.* (Döhlemann.)

Hogy e tételt bebizonyítsuk, induljunk ki egy $S(lmn)$ háromélből, melynek az $lmn$ éleknél levő lapszögei $\lambda\mu\nu$. Helyezzünk ennek $lm$, $mn$, $nl$ lapjaira az $S(lmn)$ háromélen kívül oly $lmn'$, $mnl'$, $nlm'$ háromléleket, hogy ezeknek az $l'm'n'$ élekből kiinduló lapjai a szemben fekvő lapokhoz $\varphi$ szög alatt hajoljanak, és mutassuk meg, hogy ekkor az $ll'$, $mm'$, $nn'$ síkok egymást egy egyenesben metszik.

Jelöljük e három sík metszővonalát az $mn$, ill. $nl$, $lm$ síkokkal $l_1$, $m_1$, $n_1$-gyel. Az $S(ll_1m)$, $S(ll'm)$ háromléleknek és az $S(ll_1n)$, $S(ll'n)$ háromléleknek az $l$ élnél egyenlő lapszögei vannak, tehát e lapszögek sinusa megfelelőleg:

$$\frac{\sin(ml_1)\,.\,\sin\mu}{\sin(ll_1)} = \frac{\sin(ml')\,\sin(\mu+\varphi)}{\sin(ll')}$$

$$\frac{\sin(nl_1)\,\sin\nu}{\sin(ll_1)} = \frac{\sin(nl')\,\sin(\nu+\varphi)}{\sin(ll')}$$

a miből következik, mert $(ml')\sphericalangle = (nl')\sphericalangle$:

$$\frac{\sin(ml_1)}{\sin(nl_1)} = \frac{\sin(\mu+\varphi)\,\sin\nu}{\sin(\nu+\varphi)\,.\,\sin\mu} \qquad 1_1$$

Ha még a két analogus relacziót felirjuk

$$\frac{\sin(nm_1)}{\sin(lm_1)} = \frac{\sin(\nu+\varphi)\,\sin\lambda}{\sin(\lambda+\varphi)\,\sin\nu} \qquad 1_2$$

$$\frac{\sin(ln_1)}{\sin(mn_1)} = \frac{\sin(\lambda+\varphi)\,\sin\mu}{\sin(\mu+\varphi)\,\sin\lambda} \qquad 1_3$$

*) A 3. és 4. pont az első olvasásnál kihagyható.

és az előbbivel sorozzuk, akkor az egyenlet jobboldala egyenlő egygyel, azaz:

$$\frac{\sin(ml_1)\sin(nm_1)\sin(ln_1)}{\sin(nl_1)\sin(lm_1)\sin(mn_1)} = 1 \qquad 2$$

a mely már azt mutatja, hogy az $ll_1l'$, $mm_1m'$, $nn_1n'$ síkok egymást ugyanegy egyenesben metszik.

Vegyünk ezután fel egy $ABCD$ tetraedert és helyezzünk ennek lapjaira a tetraederen kívül oly háromoldalú gulákat $A'BCD$, $B'CDA$, $C'DAB$, $D'ABC$-t, hogy ezeknek az $A'$, $B'$, $C'$, $D'$ csúcsaiban találkozó lapjai az alaplapokhoz mind egyenlő szögek alatt hajoljanak és mutassuk meg, hogy az $AA'$, $BB'$, $CC'$, $DD'$ egyenesek hyperboloidikus fekvésűek.

Ha a háromélre előbb levezetett tételt az $A(BCD)$, $B(CDA)$, $C(DAB)$, $D(ABC)$ háromélekre alkalmazzuk, azt találjuk, hogy az $ABB'$, $ACC'$, $ADD'$; $BCC'$, $BDD'$, $BAA'$; $CDD'$, $CAA'$, $CBB'$, végre a $DAA'$, $DBB'$, $DCC'$ síkhármasak egymást egy-egy egyenesben metszik. De ezek az egyenesek az $AA'$, $BB'$, $CC'$, $DD'$ egyeneseknek transversalisai, tehát úgy azok, mint emezek hyperboloidikus fekvésűek és így a tétel igazolva van.

4. Térjünk vissza az előbbi $S(lmn)$ háromélhez és annak lapjaira helyezett $S(l'mn)$, $S(lm'n)$, $S(lmn')$ háromélekhez. Cseréljük fel az $S(l'mn)$ háromélnek $l'n$ lapját annak az $mn$ síkra vonatkozó tükörképével, mely az $l'm$ lapot egy $l''$ egyenesben metszi úgy, hogy az $S(l'mn)$ háromél helyett egy $S(l''mn)$ háromélet nyerünk. Cseréljük fel továbbá az $S(lm'n)$ háromélnek $m'n$ lapját az $nl$ síkra vonatkozó tükörképével, mely az $m'l$ lapot egy $m''$ egyenesben metszi úgy, hogy az $S(lm'n)$ helyett egy $S(lm''n)$ háromélet nyerünk. Az $S(l''mn)$, $S(lm''n)$, $S(lmn')$ háromélek ismét oly tulajdonságúak, hogy az $ll''$, $mm''$, $nn'$ síkok egymást egy egyenesben metszik, mert e háromélekre vonatkozó képleteket az előbbi $1_1$ és $1_2$ képletekből akkép nyerjük, hogy ezekben $(\nu+\varrho)$ helyett $(\nu-\varrho)$-t irunk, se e cserével a 2. képlet nem változik.

Ha továbbá az $S(l'mn)$, $S(lm'n)$, $S(lmn')$ háromeléknek tükörképei az $mn$, $nl$, $ml$ lapokra vonatkozólag az $S(l'''mn)$, $S(lm'''n)$, $S(lmn''')$, másrészt az $S(l''mn)$, $S(lm''n)$, $S(lmn')$ háromeléknek tükörképei ugyanazon lapokra vonatkozólag $S(l''''mn)$, $S(lm''''n)$, $S(lmn'''')$, akkor úgy az $ll'''$, $mm'''$, $nn'''$ síkok, mint az $ll''''$, $mm''''$, $nn''''$ síkok egymást egy-egy egyenesben metszik, mert az első esetben nyert háromélekre vonatkozó képletek az $1_1$, $1_2$, $1_3$ képletekből akkép származnak, hogy azokban $(\lambda+\varrho)$, $(\mu+\varrho)$, $(\nu+\varrho)$

helyett $(\lambda - \varphi)$, $(\mu - \varphi)$, $(\nu - \varphi)$-t irunk, a második esetben pedig, hogy $1_1$, $1_2$, $1_3$-ban $(\lambda + \varphi)$, $(\mu + \varphi)$ helyett $(\lambda - \varphi)$, illetve $(\mu - \varphi)$-t irunk, s mely csere által a 2. képlet nem szenved változást.

Ha tehát az $S$ $(lmn)$ háromél $m$ és $n$ élén keresztül két-két síkot fektetünk, mely az $mn$ laphoz $\varphi$ szög alatt hajlik, akkor ezek egymást négy egyenesben $l'l''l'''l''''$-ben metszik, melyek az $mn$-nel együtt négy háromélnek élei. E háromélek közül kettő a másik kettőnek az $mn$ síkra vonatkozólag tükörképe. Ugyanígy lehet a $\varphi$ szög megtartásával az $nl$ és az $lm$ lapokra is négy-négy háromélet helyezni, melyeknek ama lapokon kívül fekvő élei $m'm''m'''m''''$, $n'n''n'''n''''$. Az előbbiekből következik, hogy az $l' \ldots$, $m' \ldots$, $n' \ldots$ éleket az $l$, $m$, $n$ élekkel összekötő tizenkét sík oly helyzetű, hogy azok egymást hármasával nyolcz egyenesben metszik.

Ha ezután ismét az $ABCD$ tetraederre gondolunk, és annak $BCD$ lapján levő $BC$, $CD$, $DB$ élein keresztül két-két síkot helyezünk, melyek a $BCD$ lappal $\varphi$ szöget képeznek, akkor ez a hat sík egymást nyolcz $A^i$ pontban metszi, melyek közül négy a másik négynek tükörképe a $BCD$ síkra vonatkozólag, s mely nyolcz pont a $BCD$ lapon nyugvó tetraedernek csúcsa. Ugyanígy lehet a $\varphi$ szög megtartásával a $CDA$, $DAB$ és $ABC$ lapokra is nyolcz-nyolcz tetraedert helyezni, melyeknek csúcsait $B^i$, $C^i$, $D^i$-vel akarjuk jelölni. Ha az $A^i$, $B^i$, $C^i$, $D^i$ pontokat az $A$, $B$, $C$, $D$ pontokkal összekötő egyeneseket az $a^i$, $b^i$, $c^i$ és $d^i$-vel jelöljük, akkor az előbbiek szerint e 32 egyenesből 64-szer lehet négyet-négyet úgy kiválasztani, hogy azok hyperboloidikus fekvésűek legyenek. T. i. egy tetszésszerinti $a^i$ és egy tetszésszerinti $b^i$ egyeneshez, már egy ezek által meghatározott $c^i$ és $d^i$ egyenes tartozik úgy, hogy az egymástól különböző egyenes-négyesek száma $8 \cdot 8 = 64$.

Ha a $\varphi$ szöget derékszögnek vesszük fel, akkor az összes $A^i$, $B^i$, $C^i$, $D^i$ pontok végtelenbe jutnak, és pedig a tetraedernek $A$, $B$, $C$, $D$ pontjain keresztül menő magasságok végtelen távol levő pontjaiba. Ezért a tetraeder magasságaira vonatkozó Steiner-tétel, az általános tétel specziális esetének tekinthető.

Ha ellenben a $\varphi$ szög a zérushoz közeledik, akkor az $A^i$, $B^i$, $C^i$, $D^i$ pontok az $ABCD$ tetraeder $BCD$, $CDA$, $DAB$, $ABC$ lapjaiba, mint háromszögekbe írható köröknek középpontjaihoz közelednek, és ha $\varphi = 0$, akkor tényleg e középpontokba mennek át.

Jelöljük a $BCD$ háromszögbe beírt körök középpontjait $A_0A_2A_3A_4$-gyel, hol az első beirt kör mind a három oldalnak véges darabját, a többi három beírt kör pedig rendre a $CD$, $DB$, $BC$ oldalaknak véges darabját érinti. Ha ugyanígy a $CDA$, $DAB$, $ABC$

lapokba írt körök középpontjait $B_0B_3B_4B_1$, $C_0C_4C_1C_2$, $D_0D_1D_2D_3$-mal jelöljük, úgy a négy $a_i \equiv AA_i$, négy $b_i \equiv BB_i$, $c_i \equiv CC_i$, $d_i \equiv DD_i$ egyenes közül 32-szer lesz négy-négy hyperboloidikus fekvésű. Ezek pedig:

$$
\begin{array}{cccc}
a_0\,b_0\,c_0\,d_0 & a_2\,b_0\,c_1\,d_1 & a_3\,b_0\,c_1\,d_0 & a_4\,b_0\,c_0\,d_1 \\
a_0\,b_0\,c_4\,d_3 & a_2\,b_0\,c_2\,d_2 & a_3\,b_0\,c_2\,d_3 & a_4\,b_0\,c_4\,d_2 \\
a_0\,b_1\,c_1\,d_1 & a_2\,b_1\,c_0\,d_0 & a_3\,b_1\,c_0\,d_1 & a_4\,b_1\,c_1\,d_0 \\
a_0\,b_1\,c_2\,d_2 & a_2\,b_1\,c_4\,d_3 & a_3\,b_1\,c_4\,d_2 & a_4\,b_1\,c_2\,d_3 \\
a_0\,b_3\,c_2\,d_0 & a_2\,b_3\,c_0\,d_2 & a_3\,b_3\,c_0\,d_3 & a_4\,b_3\,c_1\,d_2 \\
a_0\,b_3\,c_1\,d_3 & a_2\,b_3\,c_4\,d_1 & a_3\,b_3\,c_4\,d_0 & a_4\,b_3\,c_2\,d_1 \\
a_0\,b_4\,c_0\,d_2 & a_2\,b_4\,c_2\,d_0 & a_3\,b_4\,c_0\,d_2 & a_4\,b_4\,c_0\,d_3 \\
a_0\,b_4\,c_4\,d_1 & a_2\,b_4\,c_1\,d_3 & a_3\,b_4\,c_2\,d_1 & a_4\,b_4\,c_4\,d_0
\end{array}
$$

5. Hyperboloidikus fekvésű egyenesekre vonatkozó új példát látunk a következő (Chasles-tól eredő) tételben kifejezve.

*Ha két tetraeder $ABCD$, $A'B'C'D'$ oly helyzetű, hogy az $AA'$, $BB'$, $CC'$, $DD'$ szögpontpárokat összekötő egyenesek hyperboloidikus fekvésűek, akkor e szögpontpárokkal szemben fekvő lappároknak $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$, $\delta\delta'$ metszővonalai is hyperboloidikus fekvésűek.* — A két tetraedert ebben a helyzetben *hyperboloidikus fekvésűnek* nevezzük.

Jelöljük a tételben felírt szögpontpároknak összekötő egyeneseit *abcd*-vel, a lappárok metszővonalait $a_1b_1c_1d_1$-gyel.

Vegyük figyelembe az $A'(B'C'D')$, $A'(BCD)$ közös csúcsu hároméleket. Ezeknek $A'B'$, $A'B$; $A'C'$, $A'C$; $A'D'$, $A'D$ élpárjait összekötő síkok egymást egy $\bar{a}$ egyenesben, az $A'$ pontból a föltétel szerint a $BB' \equiv b$, $CC' \equiv c$ és $DD' \equiv d$-hez vezethető transversalisban metszik. Ezért ama háromélek *perspektivek*, és így az $A'C'D'$, $A'CD$; $A'D'B'$, $A'DB$; $A'B'C'$, $A'BC$ lappároknak metszővonalai ugyanegy síkban feküsznek. E metszővonalakon vannak a $CD$, $DB$, $BC$ éleknek metszőpontjai az $A'C'D'$, $A'D'B'$, $A'B'C'$ síkokkal, tehát amaz élek eme síkokat egy $a'$ egyenesen fekvő három pontban metszik. De metszőpontokon mennek keresztül az $A'C'D$, $ACD$; $A'D'B'$, $ADB$; $A'B'C'$, $ABC$ síkpároknak $b_1$, $c_1$, $d_1$ metszővonalai, tehát a $BCD$ síkban fekvő $a'$ egyenes metszi a $b_1$, $c_1$, $d_1$ egyenest, valamint a $BCD$ síkban levő $a_1$ egyenest is.

Ugyanigy kimutathatjuk, ha a $B'(C'D'A')$, $B'(CDA)$; $C'(D'A'B')$, $C'(DAB)$; $D'(A'B'C')$, $D'(ABC)$ perspektiv háromélpárokból indulunk ki, hogy a $c_1d_1a_1$, $d_1a_1b_1$, $a_1b_1c_1$ egyeneseknek metszőpontjai a $CDA$, $DAB$, $ABC$ síkokkal szintén egy-egy $b'$, $c'$, $d'$ egyenesben vannak, melyek szintén mind a négy egyenest $a_1b_1c_1d_1$-et metszik, s melylyel aztán a tétel igazolva van.

Lássuk a különös eseteket!

Tételezzük fel, hogy a tetraederek szögpontjait összekötő *abcd* egyenesek *kétszöges fekvésűek*, tehát pl. hogy az *ab* és *cd* egyenesek egymást metszik, és e metszőpontok síkjaiknak metszővonalában vannak.

Ekkor az $AB$, $A'B'$ valamint a $CD$, $C'D'$ élek is metszik egymást, tehát az $ABC$, $A'B'C'$; $ABD$, $A'B'D'$ síkpároknak $d_1$, $c_1$ metszővonalai az $(AB, A'B')$ ponton, és az $ACD$, $A'C'D'$; $BCD$, $B'C'D$ síkpároknak $b_1$, $a_1$ metszővonalai a $(CD, C'D')$ ponton mennek keresztül.

Az $AB$ és $A'B'$ élek a $[cd] \equiv CC'DD'$ síkot az $E$ és $E'$ pontokban metszik, melyek a $(cd)$ ponttal ugyanegy egyenesben vannak, mert a föltétel szerint az $AA'BB' \equiv [ab]$ sík a $(cd)$ ponton megy keresztül. A $CDE$, $C'D'E'$ háromszögek tehát perspektivek a $(cd)$ pontra vonatkozólag, miért is megfelelő oldalpárjaiknak: $CD$, $C'D'$; $DE$, $D'E'$, $EC$, $EC$-nek metszőpontjai ugyanegy egyenesben vannak. De a második és harmadik metszőpont az $ABC$, $A'B'C'$, illetve az $ABD$, $A'B'D'$ síkpároknak $d_1$, $c_1$ metszővonalán van, tehát a $[d_1c_1]$ sík az a $(CD, C'D') \equiv (a_1b_1)$ ponton megy keresztül.

Hasonlóképen kimutatható, hogy az $[a_1b_1]$ sík az $(AB, A'B') \equiv [c_1d_1]$ ponton megy keresztül, s minthogy ezek szerint az $[a_1b_1]$, $[c_1d_1]$ síkok metszővonala egyszersmind az $(a_1b_1)$, $(c_1d_1)$ pontoknak összekötő egyenese: az $a_1b_1c_1d_1$ egyenesek is kétszöges fekvésüek. E szerint:

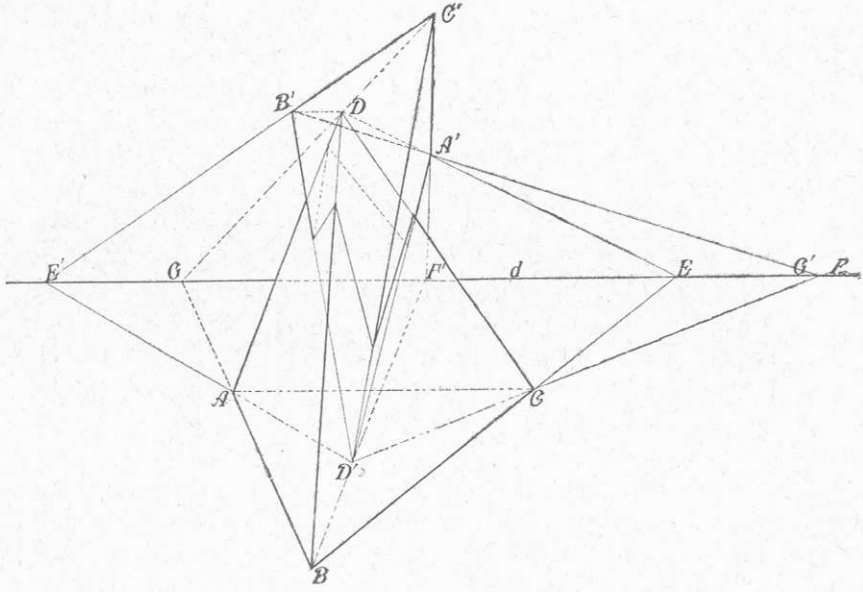
*Ha két tetraeder szögpontjait, egy bizonyos rendben összekötő négy egyenes kétszöges fekvésű, akkor az ezekkel szemben fekvő lapok metszővonalai is kétszöges fekvésűek.* — A két tetraedert ekkor *kétszöges fekvésűnek* nevezzük. —

Ha négy hyperboloidikus fekvésü egyenes közül három egymást páronként metszi, akkor a metszőpontok vagy mind egybeesnek és a negyedik egyenes is ezen a ponton megy keresztül, vagy pedig ama metszőpontok különbözők, tehát a három egyenes ugyanegy síkban van, és ekkor a negyediknek is ebben a síkban kell lenni. Mert csak ezekben az esetekben lehetséges, hogy a három első egyenesnek minden transversalisa a negyediket is messe.

Két tetraeder szögpontpárjait összekötő egyenesek nem fekhetnek ugyanegy síkban, mert akkor a tetraederek is e síkban lennének. Ennélfogva a szögpontok összekötő egyenesei csak az előbbi első eset alá tartozhatnak, és ekkor a reájuk vonatkozó tétel így szól:

*Ha két tetraeder szögpontpárjait egy bizonyos rendben összekötő egyenesek egy O pontban találkoznak, akkor e szögpontpárokkal szemben fekvő lappárok metszővonalai egy ω síkban vannak és a tetraederek ekkor (czentrikusan) perspektiv helyzetűek.*

Ugyanis ha a tetraedereknek oly szögpontjait, melyek az $O$ ponttal egy egyenesben vannak, megfelelő szögpontoknak, és oly éleit és lapjait, melyek megfelelő szögpontokon mennek keresztül, szintén megfelelőknek nevezzük, azt látjuk, hogy a hat megfelelő élpár metszőpontjai hármasával a négy megfelelő lappár




15. ábra.

metszővonalában vannak. De e négy vonal közül bármily kettő metszi egymást (egy megfelelő élpár metszőpontjában), és mind a négy nem megy egy ponton keresztül, tehát mind a négy metszővonal egy síkban van.

6. Bemutatunk végre hyperboloidikus fekvésü egyeneseket az úgynevezett *Möbius*-féle tetraederekben. *Két tetraedert, melyeknek bármelyike a másikba be van írva és a másik körül van írva, Möbius-féle tetraedernek* nevezünk, mert Möbius ismerte fel először, hogy ily helyzete két tetraedernek lehetséges.

Ha a $T \equiv ABCD$ tetraederbe és a körül egy $T' \equiv A'B'C'D'$ tetraedert akarunk írni, akkor (15. ábra) ennek $D'$ csúcsát tetszés-

szerint vehetjük fel az $ABC \equiv \delta$ lapban, és ennek a $D'$-vel szemben fekvő $\delta'$ lapját tetszésszerint vezethetjük a $D$ csúcson keresztül. Ezután a $\delta\delta' \equiv d$ egyenessel metszük az $ABCD'$ négyszög $BC, AD'$; $CA, BD'$; $AB, CD'$ szemben fekvő oldalpárjait az $EE'$, $FF'$, $GG'$ pontpárokban, melyek involucziót képeznek. Végre a $\delta'$ síkban egy $A'B'C'$ háromszöget veszünk fel úgy, hogy az $A'B'C'D$ négyszögnek $A'D$, $B'C'$; $B'D$, $C'A'$; $C'D$, $A'B'$ szemben fekvő oldalpárjai az $EE'$, $FF'$, $GG'$ involucziós pontpárokon menjenek keresztül, — ami végtelen sokfélekép lehetséges.

Az $ABCD$, $A'B'C'D'$ tetraederek már a kivánt helyzetüek, mert azoknak csúcsai ilyképen vannak azoknak $\alpha\beta\gamma\delta$, $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ lapjaiban elhelyezve:

| | |
|---|---|
| $\alpha$-ban a $BCDA'$ | $\alpha'$-ben a $B'C'D'A$ |
| $\beta$- „ „ $CDAB'$ | $\beta'$- „ „ $C'D'A'B$ |
| $\gamma$- „ „ $DABC'$ | $\gamma'$- „ „ $D'A'B'C$ |
| $\delta$- „ „ $ABCD'$ | $\delta'$- „ „ $A'B'C'D$. |

. . . . . 1)

E különös helyzetű nyolcz pont $ABCDA'B'C'D'$ a következő hyperboloidikus fekvésü egyeneseket szolgáltatja:

| | |
|---|---|
| $AB$, $CD$, $A'B'$, $C'D'$; | $AB'$, $BA'$, $CD'$, $DC'$, |
| $AC$, $BD$, $A'B'$, $D'B'$; | $AC'$, $BD'$, $CA'$, $DB'$, . . . . . 2) |
| $AD$, $BC$, $A'D'$, $B'C'$; | $AD'$, $BC'$, $CB'$, $BA'$, |

hol mindenik sorban az első négy egyenesnek transversalisa a második négy egyenes. Igy, az első sort tekintve, $AB'$ metszi az $AB$ és $A'B'$-t az $A$ és $B'$ pontban; de metszi a $CD$ és $C'D'$-t is, mert ezekkel a $\beta$, illetve az $\alpha'$ síkban van. $BA'$ metszi az $AB$ és $A'B'$-t a $B$ és $A'$ pontban, és metszi a $CD$ és $C'D'$ is, mert ezekkel az $\alpha$ illetve a $\beta'$ síkban van, stb.

Hogy a Möbius-féle tetraedereknek e tulajdonságát egy tételbe foglalva kifejezhessük, nevezzünk azoknak nyolcz csúcsa közül oly kettőt-kettőt, melynek bármelyike a másikkal szemben fekvő lapban van, megfelelőnek, továbbá két megfelelő csúcscsal szemben fekvő lapot szintén megfelelőnek, végre legyen a két tetraedernek oly két éle megfelelő, melyen megfelelő csúcsok vannak.

E szerint: *két Möbius-féle tetraedernek két megfelelő éle és az ezekkel szemben fekvő szintén megfelelő két éle hyperboloidikus fekvésü.*

Az $ABCDA'B'C'D'$ pontok az

$$\begin{matrix} ABCD \\ A'B'C'D' \end{matrix}\Big\} \quad \begin{matrix} ABC'D' \\ A'B'CD \end{matrix}\Big\} \quad \begin{matrix} AB'CD' \\ A'BC'D \end{matrix}\Big\} \quad \begin{matrix} AB'C'D \\ A'BCD' \end{matrix}\Big\} \ldots 3)$$

Möbius-féle tetraedereknek csúcsai.

Igy pl. a második csoportban felírt tetraederek azért Möbius-félék, mert az elsőnek $A$, $B$, $C'$, $D'$ csúcsai, a másodiknak $B'CD$, $CDA'$, $DA'B$, $B'CD$ lapjaiban vannak, és a másodiknak $A'$, $B'$, $C$, $D$ csúcsai az elsőnek $BC'D'$, $C'D'A$, $D'AB$, $ABC'$ lapjaiban vannak, mint ezt az 1) táblázat mutatja. Ugyanez mondható a másik két tetraederpárról is.

De ezek az új Möbius-féle tetraederek nem nyujtanak más hyperboloidikus fekvésű egyenesnégyeseket, mint a 2) táblázatban felírtak.

7.*) Ismertetni akarjuk e helyen a Möbius-féle tetraedereknek még más érdekes tulajdonságait.

Jelöljük a $T \equiv ABCD$ és $T' \equiv A'B'C'D$ Möbius-féle tetraederek megfelelő csúcsainak összekötő egyeneseit, a *csúcstengelyeket*, és megfelelő lapjainak metszővonalait, a *laptengelyeket*, ekképen:

$$AA' \equiv a_1, \quad BB' \equiv b_1, \quad CC' \equiv c_1, \quad DD' \equiv d_1$$
$$\alpha\alpha' \equiv a, \quad \beta\beta' \equiv b, \quad \gamma\gamma' \equiv c, \quad \delta\delta' \equiv d,$$

és feleljen meg minden csúcstengelynek az a laptengely, melyben a csúcstengelyen levő csúcsokkal szemben fekvő lapok egymást metszik.

Kimutatható, hogy minden csúcstengelyből a többi megfelelő csúcspárok involucziós síkpárokkal projicziáltatnak, továbbá minden laptengely a megfelelő lappárokat involucziós pontpárokban metszi.

Igy az $a_1$ csúcstengelyt a $BB'$, $CC'$, $DD'$ pontpárokkal összekötő síkpárok a $d$ laptengelyt a $GG'$, $FF'$, $EE'$ involucziós pontpárokban metszik, tehát ama síkpárok is involucziósak. Továbbá az $a$ laptengelyt, mely az

$$\alpha \equiv A'BCD \quad \alpha' \equiv AB'C'D'$$

síkok metszővonala

a $\beta \equiv AB'CD$, $\beta' \equiv A'BC'D'$ síkok az $(AB', CD)$, $(A'B, C'D')$
„ $\gamma \equiv ABC'D$, $\gamma' \equiv A'B'CD'$ „ „ $(AC', DB)$, $(A'C, D'B')$
„ $\delta \equiv ABCD'$, $\delta' \equiv A'B'C'D$ „ „ $(AD', BC)$, $(A'D, B'C')$

pontpárokban metszik, melyek az $a$ laptengelyen involucziót képeznek, mert e pontpárok úgy az $A'BCD$ négyszög, mint az $AB'C'D'$ négyszög szemben fekvő oldalainak metszőpontjai az $a$-val.

A tétel azonban még általánosabban is kifejezhető, és pedig ekképen:

---

*) E §-nak további részlete a könyv első olvasásánál kihagyható.

A Möbius-féle tetraedereknek bármelyik

lapjában fekvő egyenes a többi megfelelő lappároktól involucziós pontpárokban metszetik.

csúcsán keresztül menő egyenesből a többi megfelelő csúcspárok involucziós síkpárokkal projicziáltatnak.

Ugyanis egy a $\delta$ síkban fekvő $\mathfrak{d}$ egyenes az $ABCD'$ négyszög $BC, D'A$; $CA, BD'$; $AB, CD'$ szemben fekvő oldalpárjait ugyanazokban a pontpárokban metszi, a melyekben az $\alpha, \alpha'$; $\beta, \beta'$; $\gamma, \gamma'$ megfelelő lappárok, és egy a $D$ ponton keresztül menő $\mathfrak{d}^*$ egyenesből, mely pl. a $\delta$ lapot egy $\mathfrak{D}^*$ pontban metszi, az $A, A'$; $B, B'$; $C, C'$ megfelelő csúcspárok involucziós síkpárokkal projicziáltatnak, mert ezek a síkpárok a $d$ egyenest ugyanabban a három involucziós pontpárban metszik, mint az $ABC\mathfrak{D}^*$ négyszögnek szemben fekvő oldalai. A mit pedig a Möbius-féle tetraederek $\delta$ lapjáról és $D$ csúcsáról kimutattunk, az érvényes a többi lapokra és csúcsokra nézve is.

8. Vizsgáljuk most meg ama nyolcz egyenes helyzetét, melyben valamely $\sigma$ sík a Möbius-féle tetraederek lapjait metszi. Jelöljük e végből az $\alpha\beta\gamma\delta\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ lapoknak metszővonalait a $\sigma$ síkkal rendre $\mathfrak{abcda'b'c'd'}$-sel, az $abcd$ laptengelyeknek és az $a_1b_1c_1d_1$ csúcstengelyeknek metszőpontjait a $\sigma$ síkkal $\mathfrak{ABCD}$, $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1$-gyel.

Kimutatható, hogy az

$$\left.\begin{matrix}\mathfrak{abcd}\\ \mathfrak{a'b'c'd'}\end{matrix}\right\}\mathfrak{A}_2 \quad \left.\begin{matrix}\mathfrak{abc'd'}\\ \mathfrak{a'b'cd}\end{matrix}\right\}\mathfrak{B}_2 \quad \left.\begin{matrix}\mathfrak{ab'cd'}\\ \mathfrak{abc'd'}\end{matrix}\right\}\mathfrak{C}_2 \quad \left.\begin{matrix}\mathfrak{ab'c'd}\\ \mathfrak{a'bcd'}\end{matrix}\right\}\mathfrak{D}_2$$

$$\left.\begin{matrix}\mathfrak{ab'c'd'}\\ \mathfrak{a'bcd}\end{matrix}\right\}\mathfrak{A}_1 \quad \left.\begin{matrix}\mathfrak{a'bc'd'}\\ \mathfrak{ab'cd}\end{matrix}\right\}\mathfrak{B}_1 \quad \left.\begin{matrix}\mathfrak{a'b'cd'}\\ \mathfrak{abc'd}\end{matrix}\right\}\mathfrak{C}_1 \quad \left.\begin{matrix}\mathfrak{a'b'c'd}\\ \mathfrak{abcd'}\end{matrix}\right\}\mathfrak{D}_1$$

négyoldalpárok oly helyzetűek, hogy szögpontpárjainak összekötő egyenesei közül hat megy a melléjük írt pontokon keresztül.

Igy pl. az

$$(\mathfrak{ab})\,(\mathfrak{c'd'}),\ (\mathfrak{bc})\,(\mathfrak{a'd'}),\ (\mathfrak{ac})\,(\mathfrak{b'd'})$$
$$(\mathfrak{a'b'})\,(\mathfrak{cd}),\ (\mathfrak{b'c'})\,(\mathfrak{ad}),\ (\mathfrak{a'c'})\,(\mathfrak{bd})$$

egyenesek ez $\mathfrak{A}_2$ ponton mennek keresztül.

Ugyanis az előbbi tétel folytán, az $\mathfrak{abc}$, $\mathfrak{a'b'c'}$ háromszögeknek oldalai a $\mathfrak{d'}$ egyenest egy involuczióban metszik, tehát az $(\mathfrak{ab})\,(\mathfrak{c'd'})$, $(\mathfrak{bc})\,(\mathfrak{a'd'})$ egyeneseknek $\mathfrak{A}_2$ metszőpontján keresztül megy az $(\mathfrak{ac})\,(\mathfrak{b'd'})$ egyenes.

Ugyanígy

az $\mathfrak{abd}$, $\mathfrak{a'b'd'}$ háromszögek oldalai a $\mathfrak{c}$ egyenest involuczióban metszik,

a $\mathfrak{bcd}$, $\mathfrak{b'c'd'}$ „ „ az $\mathfrak{a}$ „ „ „

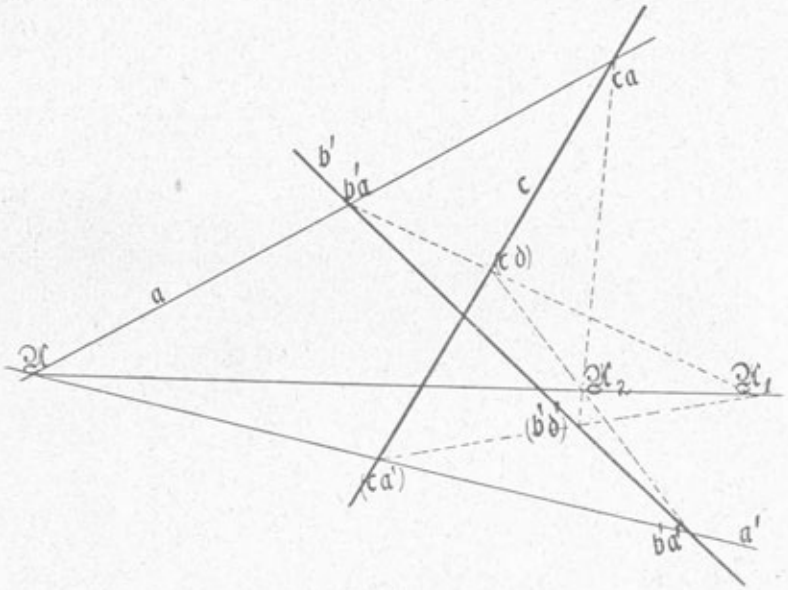
az $\mathfrak{acd}$, $\mathfrak{a'c'd'}$ „ „ a $\mathfrak{b}$ „ „ „

tehát

az (ac)(b′d′), (bc)(a′d′) egyeneseknek $\mathfrak{A}_2$ metszőpontján keresztül megy a (cd)(a′b′),
„ (ab)(c′d′), (ac)(b′d′) „ „ „ „ „ (ad)(b′c′),
„ (bc)(a′d′), (ab)(c′d′) „ „ „ „ „ (bd)(a′c′),

és így mind a hat felírt egyenes az $\mathfrak{A}_2$ ponton megy keresztül.

Hasonlókép mutatható ki a jelzett tulajdonság a többi hét négyoldalpárról. De hátra van még annak igazolása, hogy ezek az $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1$ pontok az $a_1b_1c_1d_1$ csúcstengelyeknek metszőpontjai a $\sigma$ síkkal, a mi következőkép történik:




16. ábra.

Az $A'B$, $AB$, $A'C$, $AC$ egyenesek a $\sigma$ síkot az (ab′), (cd), (ac′), (bd) pontokban metszik; ennélfogva az $A'AB$, $A'AC$ és $\sigma$ síkoknak metszővonalai az $AA'$, (ab′)(cd), (ac′)(bd) egyenesek, tehát az $AA' \equiv a_1$ egyenes keresztül megy a másik kettőnek $\mathfrak{A}_1$ metszőpontján.

Az $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$, $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_2\mathfrak{D}_2$ négyszögek olyan helyzetüek, hogy szögpontjaik hármasával tizenhat egyenesen vannak, ezek az egyenesek pedig:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\mathfrak{A}\,\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{A}_2$ | $\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}_1\,\mathfrak{B}_2$ | $\mathfrak{A}\,\mathfrak{C}_1\,\mathfrak{C}_2$ | $\mathfrak{A}\,\mathfrak{D}_1\,\mathfrak{D}_2$ |
| $\mathfrak{B}\,\mathfrak{B}_1\,\mathfrak{A}_2$ | $\mathfrak{B}\,\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{B}_2$ | $\mathfrak{B}\,\mathfrak{D}_1\,\mathfrak{C}_2$ | $\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}_1\,\mathfrak{D}_2$ |
| $\mathfrak{C}\,\mathfrak{C}_1\,\mathfrak{A}_2$ | $\mathfrak{C}\,\mathfrak{D}_1\,\mathfrak{B}_2$ | $\mathfrak{C}\,\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{C}_2$ | $\mathfrak{C}\,\mathfrak{B}_1\,\mathfrak{D}_2$ |
| $\mathfrak{D}\,\mathfrak{D}_1\,\mathfrak{A}_2$ | $\mathfrak{D}\,\mathfrak{C}_1\,\mathfrak{B}_2$ | $\mathfrak{D}\,\mathfrak{B}_1\,\mathfrak{C}_2$ | $\mathfrak{D}\,\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{D}_2$ |

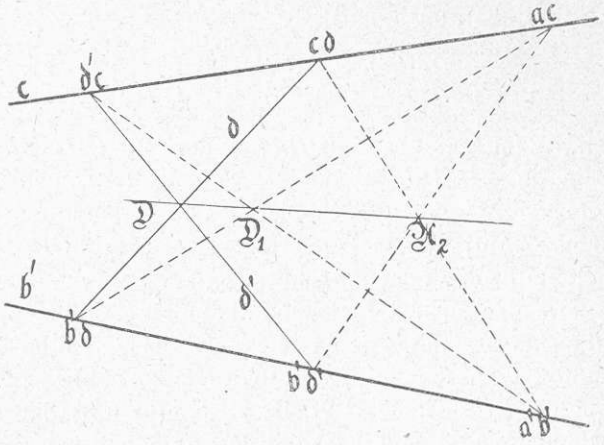
Annak kimutatására, hogy pl. az $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2$ pontok egy egyenesen feküsznek, induljunk ki (16. ábra.) az

$$(ac)\ (b'd')\ (a'c)\ (a'b')\ (cd)\ (ab')$$

hatszögből, melynek három nem egymásra következő szögpontja a $c$ egyenesen van, a másik három pedig a $b'$ egyenesen van, mely tehát Pascal-hatszög. Ezért a szemben fekvő oldalak metszőpontjai

$$|(ac)\ (b'd'),\ (a'b')\ (cd)| \equiv \mathfrak{A}_2$$
$$|(b'd')\ (a'c),\ (cd)\ (ab')| \equiv \mathfrak{A}_1$$
$$|(a'c)\ (a'b'),\ (ab')\ (ac)| \equiv (aa') \equiv \mathfrak{A}$$

ugyanegy egyenesen vannak.




17. ábra.

Ha pedig az

$$(ac)\ (b'd)\ (cd)\ (a'b')(cb')\ (b'd')$$

Pascal-hatszögből indulunk ki (17. ábra), melynek szögpontjai szintén a $cb'$ egyenespáron feküsznek, következik, hogy a szemben fekvő oldalaknak metszőpontjai:

$$|(ac)\ (b'd),\ (a'b')\ (cb')| \equiv \mathfrak{D}_1$$
$$|(b'd)\ (cd),\ (cb')\ (b'd')| \equiv (bd') \equiv \mathfrak{D}$$
$$|(cd)\ (a'b'),\ (b'd')\ (ac)| \equiv \mathfrak{A}_2$$

szintén ugyanegy egyenesen vannak.

Hasonlókép igazolható, hogy a többi ponthármasok is egy-egy egyenesen vannak. — Irjuk most fel a talált eredményeket a következő tételbe:

*Egy tetszésszerinti sík két Möbius-féle tetraeder lapjait nyolcz egyenesben metszi, mely nyolcz négyoldalpár oldalainak*

*tekinthető. E négyoldalpárok mindegyike oly tulajdonságú, hogy a szögpontpárjaikat összekötő egyenesek hatával egy ponton mennek keresztül. Ilyen pont tehát nyolcz van, melyek két pontnégyesre bonthatók; ezeknek egyikében a megfelelő tetraederlapok metszővonalai, a laptengelyek, metszik a felvett síkot. Az egyik pontnégyes pontjait a másik pontnégyes pontjaival összekötő egyenesek négyesével négy pontban, tehát egy harmadik pontnégyesben találkoznak, mely a csúcstengelyeknek metszése a felvett síkkal.*

A tételben előforduló három pontnégyes egyikében, $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$-ben a Möbius-féle tetraederek laptengelyei, a másikban, $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1$-ben, annak csúcstengelyei metszik a felvett síkot. Milyen jelentést adhatunk még a harmadik pontnégyesnek, $\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_2\mathfrak{D}_2$-nek?

Az $\mathfrak{A}_2$ pontban találkoznak az

$$(\mathfrak{a}\mathfrak{b})\,(\mathfrak{c}'\mathfrak{d}'),\ (\mathfrak{b}\mathfrak{c})\,(\mathfrak{a}'\mathfrak{d}'),\ (\mathfrak{a}\mathfrak{c})\,(\mathfrak{b}'\mathfrak{d}')$$
$$(\mathfrak{a}'\mathfrak{b}')\,(\mathfrak{c}\mathfrak{d}),\ (\mathfrak{b}'\mathfrak{c}')\,(\mathfrak{a}\mathfrak{d}),\ (\mathfrak{a}'\mathfrak{c}')\,(\mathfrak{b}\mathfrak{d})$$

egyenesek. Az $(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$ pont az $ABCD$ tetraeder $\alpha\beta \equiv CD$ élének, a $(\mathfrak{c}'\mathfrak{d}')$ pont pedig az $A'B'C'D'$ tetraeder $\gamma'\delta' \equiv A'B'$ élének metszőpontja a $\sigma$ síkkal. Ugyanígy a többi felírt pont ama tetraederek többi éleinek metszőpontja a $\sigma$ síkkal. E szerint: az $ABCD$, $A'B'C'D'$ Möbius-féle tetraederek élei a $\sigma$ síkot tizenkét pontban metszik, ha az egyik tetraeder éleinek metszőpontjait összekötjük az ezeknek megfelelő élekkel szemben fekvő éleknek metszőpontjaival, akkor az összekötő egyenesek egy $\mathfrak{A}_2$ pontban találkoznak.

Ugyanígy származnak a $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{C}_2$, $\mathfrak{D}_2$ pontok a 3) alatt levő más három Möbius-féle tetraederpárból. Ezért mondhatjuk:

*Ha két Möbius-féle tetraeder éleit egy tetszésszerinti síkkal metszük és az egyik tetraeder hat élének metszőpontjait, az egyes élekkel szemben fekvő éleknek megfelelő élek metszőpontjaival egyenesek által összekötjük, úgy ez a hat összekötő egyenes ugyanegy pontban találkozik. Ugyanebben a pontban találkozik az a négy egyenes is, mely a két Möbius-féle tetraeder négy pár megfelelő csúcs- és laptengelyének metszőpontjait a felvett síkkal összeköti.*

Vagy:

*Egy tetszésszerinti $\sigma$ sík két Möbius-féle tetraeder megfelelő csúcs- és laptengelyeit négy pontpárban metszi, melynek négy összekötő egyenese egy pontban találkozik. Ez a $\sigma$ sík a két tetraeder lapjait oly két négyoldal szerint metszi, melynek szögpontjai ama találkozási pontból egymásba projicziáltatnak.*

9. A Möbius-féle tetraedereknek nevezetes tulajdonsága, hogy a

négy csúcstengelynek és a négy laptengelynek ugyanaz a két szelője van.

Hogy ezt kimutassuk, induljunk ki abból az $EE'$. $FF'$. $GG'$ pontinvoluczióból, melyben az $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ megfelelő lappárok a $\delta\delta' \equiv d$ tengelyt metszik, és húzzunk annak $M_dN_d$ kettőspontjaiból az $a_1 \equiv AA'$, $b_1 \equiv BB'$ csúcstengelyekhez az $m$, $n$ szelőket (15. ábra).

Az $a_1b_1d$ tengelynek $m$, $n$, $AB$, $A'B'$ szelői a $d$ tengelyt az $M_dN\ GG'$ harmónikus pontnégyesekben metszik, és ezért az $a_1$, $b_1$ tengelyeket is ugyanilyen pontnégyesekben fogják metszeni, tehát az $AA'$, $BB'$ pontpárok az $m$, $n$ szelőktől harmónikusan vannak elválasztva.

Minthogy az $AA'$, $FF'$ és a $BB'$, $EE'$ pontpárok az $m$, $n$ szelőktől harmónikusan vannak elválasztva, azért úgy az $AF$, $A'F'$, $m$, $n$, mint a $BE$, $B'E'$, $m$, $n$ egyeneseknek minden szelője az illető négy egyenest harmónikus pontnégyesben metszi.

Az a pont tehát, mely az $AF$, $BE$ egyeneseknek $C$ metszőpontját az $m$, $n$ szelőktől harmónikusan elválasztja, rajta van az $A'F'$ és $B'E'$ egyenesen, s így ezeknek $C'$ metszőpontja. Az $m$, $n$ szelők tehát a $CC'$ megfelelő csúcsokat is harmónikusan választják el és metszik a $CC' \equiv c_1$ csúcstengelyt.

Hasonlóképen az $AA'$, $EE'$, és $BB'$, $FF'$ pontpárok az $m$, $n$ szelőktől harmónikusan lévén elválasztva: az $AE'$, $A'E$, $m$, $n$ egyeneseknek és a $BF'$, $B'F$, $m$, $n$ egyeneseknek minden szelője az illető egyeneseket harmónikus pontnégyesekben metszi.

Az a pont tehát, mely az $AE'$, $BF'$ egyeneseknek $D$ metszőpontját az $m$ $n$ szelőktől harmónikusan elválasztja, rajta van az $AE'$, $B'F$ egyeneseken s így ezeknek $D$ metszőpontja. Az $m$ $n$ szelők ezért a $DD'$ megfelelő csúcsokat is harmónikusan választják el és metszik a $DD' \equiv d_1$ csúcstengelyt.

Minthogy végre az $AA'$, $BB'$, $CC'$, $DD'$ megfelelő csúcsok az $m$, $n$ szelőktől harmónikusán vannak elválasztva a $BCD \equiv \alpha$, $B'C'D' \equiv \alpha'$; $CAD \equiv \beta$, $C'A'D' \equiv \beta'$, $ABD \equiv \gamma$, $A'B'D' \equiv \gamma'$ lappárok az $m$, $n$ szelőktől szintén harmónikusan lesznek elválasztva, és ezért az $m$, $n$ szelők az $\alpha\alpha' \equiv a$, $\beta\beta' \equiv b$, $\gamma\gamma' \equiv d$ laptengelyeket is metszik. Ehhez képest mondhatjuk:

*A Möbius-féle tetraederek csúcs- és laptengelyeinek két közös (valós vagy képzetes) szelője van, mely úgy a megfelelő csúcspárokat, mint a megfelelő lappárokat harmónikusan választja el.*

10. Két Möbius-féle tetraeder szerkesztését megkezdhetjük annak a két szelőnek, $m$ és $n$-nek, felvételével, mely az összes csúcs- és laptengelyeket metszi. Felvehetjük azonkívül még az egyik

tetraedernek három csúcsát, pl. $ABC$-t. Ezután megszerkesztjük azokat az $A'$, $B'$, $C'$ pontokat, melyek az $A, B, C$-t az $m$, $n$ egyenespártól harmónikusan elválasztják. Az $ABC$, $A'B'C'$ síkok egymást a $d$ laptengelyben, az $AB'C'$, $BC'A'$, $CA'B'$, $ABC$ síkok egymást a $D'$ pontban, végre az $A'BC$, $B'CA$, $C'AB$, $A'B'C'$ síkok egymást a $D$ pontban metszik, és $ABCD$, $A'B'C'D'$ a két Möbius-féle tetraeder. — Ha az $n$ egyenes az $m$-re merőleges síknak végtelen távol fekvő egyenese, akkor az előbbi eljárás szerint az $ABC$-ből szerkesztett $ABCD$, $A'B'C'D'$ Möbius-féle tetraederek egymásnak tükörképei az $m$ tükröző egyenesre vonatkozólag. (Érdekes volna azoknak az $m$ egyeneseknek geometriai helyét fölkeresni, melyre, mint tükröző egyenesre vonatkozólag, egy adott $ABCD$ tetraedernek tükörképe az adottal Möbius-féle tetraedert képez!)

A Möbius-féle tetraeder első szerkesztése alkalmával (a 96. oldalon) egy $ABCD'$ négyszögből és egy, annak szemben fekvő oldalait az $EE'$, $FF'$, $GG'$ pontpárokban metsző $d$ egyenesből indultunk ki, mely $d$-n keresztül menő $\delta'$ síkban egy $A'B'C'D$ négyszöget akkép vettünk fel, hogy annak szemben fekvő oldalai szintén az $EE'$, $FF'$, $GG'$ pontpárokon menjenek keresztül. Ha a $d$ egyenest nem vesszük fel tetszésszerint ama négyszög síkjában, hanem úgy, hogy az a $D'$ pontnak harmónikus polárisa legyen az $ABC$ háromszögre vonatkozólag, tehát az $E'$, $F'$, $G'$ pontok harmónikusan válaszszák el az $E, F, G$ pontokat az $FG$, $GE$, $EF$ pontpároktól, akkor a $d$ egyenes a $D$ pontnak is harmónikus polárisa az $A'B'C'$ háromszögre vonatkozólag. De ekkor nemcsak a $d$ laptengelynek van az a tulajdonsága, hogy harmónikus polárisa a $D, D'$ pontoknak az $A'B'C'$, $ABC$ háromszögekre vonatkozólag, hanem az $a, b, c$ laptengelyek is harmónikus polárisai a megfelelő $a_1$, $b_1$, $c_1$ csúcstengelyeken fekvő csúcsoknak, a laptengelyeken keresztül menő lapokban fekvő, és a tetraedereket határló háromszögek vonatkozólag.

Ugyanis az $a$ laptengely a $\delta$ és $\delta'$ lapokat az $(AD', BC) \equiv A_\delta$, $(A'D, B'C) \equiv A_{\delta'}$ pontokban metszi, melyek közül az $A_\delta$ pont az $E \equiv (A'D, BC)$ pontot a $BC$ pontpártól harmónikusan választja el; az $A_\delta$ pont pedig akkép van elhelyezve, hogy a $DEA'A_{\delta'}$ pontnégyes kettős viszonyának értéke $= -2$. Ebből pedig már az következik *), hogy az $a$ laptengely harmónikus polárisa az $A'$ pontnak a $BCD$ háromszögre vonatkozólag, és így egyszersmind az $A$ pontnak a $B'C'D'$ háromszögre vonatkozólag. E szerint:

*Ha két Möbius-tetraeder oly különös helyzetű, hogy egyik laptengelye harmónikus polárisa egy tetraedercsúcsnak a másik tetraedert határló háromszögre vonatkozólag, akkor mind a négy lap-*

*tengelynek ugyanez a tulajdonsága van, és a csúcstengelyek harmónikus polárissugarai bármelyik tetraeder lapjának a másik tetraedert határló háromélekre vonatkozólag.*

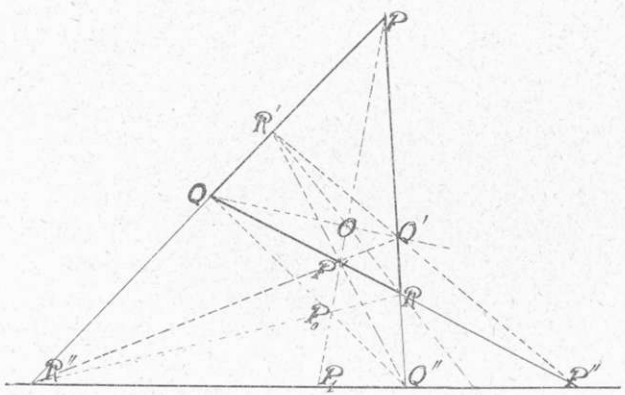
Ily különös Möbius-féle tetraederek csúcs- és laptengelyeinek közös szelői mindig képzetesek.

## 11. §. A hyperboloid poláris tulajdonságai.

1. Egy $P$ pontból a hyperboloidhoz fektethető érintősíkok érintőpontjain keresztül menő $\pi$ síkot (9. §. 3.) *a $P$ pont polárissíkjának*, és a $P$ pontot a $\pi$ *sík pólusának* nevezzük. Ez értelmezés alapján a hyperboloid valamely $P$ pontjának polárissíkja, a $P$ pont érintősíkja $\pi$, és egy $\pi$ érintősíknak pólusa, az érintőpont $P$.

Ebből látható, hogy oly módon, mint a $\mu$ sík pontjai és egyenesei között a $\mu$ síkban fekvő bármely kúpszelet, és az $M$ nyaláb

*) Ha (18. ábra) a $PQR$ háromszög $P$, $Q$, $R$ szögpontjait az $O$ ponttal összekötő egyenesek a szemben fekvő oldalakat a $P'$, $Q'$, $R'$ pontokban metszik és a




18. ábra.

$P''$,$Q''$,$P''$ pontok a $P'$, $Q'$, $R'$ pontokat a $QR$, $RP$, $PQ$ pontpároktól harmónikusan választják el, akkor a $P''Q''R''$ pontok az $O$ pontnak a $PQR$ háromszögre vonatkozó harmónikus polárisán feküsznek. Ha a $PO$, $QO$, $RO$ egyeneseknek metszőpontjai a $P''Q''R''$ egyenessel $P_1$, $Q_1$, $R_1$,

akkor: $$(PP'OP_1) = (QQ'OQ_1) = (RR'OR_1) = -2.$$

Ugyanis az $(R''Q, Q''R) \equiv P_0$ pont a $POP'P_1$ egyenesen akkép fekszik, hogy

$$(P'PP_0O) = -1,\ (P'P_1PP_0) = -1,\ \text{tehát}\ (P'PP_1P_0) = 2,$$

és így: $$(PP'OP_1) = (P'PP_1O) = (P'PP_1P_0)\,(P'PP_0O) = 2 \cdot -1 = -2.$$

síkjai és sugarai között e nyalábban fekvő bármely II. r. kúp, vonatkozást, úgynevezett *poláris vonatkozást* létesít: *a tér pontjai és síkjai között a hyperboloid vonatkozást hoz létre, melyben minden P pontnak egy π sík, a P pontnak a hyperboloidra vonatkozó polárissíkja, és minden síknak egy pont, a síknak a hyperboloidra vonatkozó pólusa felel meg.*

A tér pontjainak és síkjainak e vonatkozását térbeli poláris vonatkozásnak vagy *polaritásnak*, a polaritás alapján rendezett tért, *poláris-térnek* vagy *polárisrendszernek*, végre azt a hyperboloidot, mely a polaritást létesíti, a poláris-tér vezető- vagy *rendifelületének* nevezzük.

Vegyük tekintetbe a $P$ pontnak egy hyperboloidhoz tartozó érintő kúpját, tehát azt a II. r. kúpot, melynek alkotói a $P$ pontból a hyperboloidhoz vezethető érintők. A $P$ ponton keresztül menő $\rho_1$ sík ezt az érintőkúpot két valós alkotó szerint, a hyperboloidot egy $k_1^{(2)}$ kúpszeletben metszi, melynek ama alkotók érintői. Ebből következik, hogy a $P$ pontnak a $k_1^{(2)}$-re vonatkozó polárisa, a $P$ pontnak $\pi$ polárissíkjában van, és így a $P$-n keresztül menő és a $\rho_1$ síkban levő sugarak metszőpontjai a hyperboloiddal, (melyek tehát a $k_1^{(2)}$-en vannak), a $P$ ponttól és a $\pi$ síktól harmónikusan lesznek elválasztva.

Ha a $\rho_2$ egy másik sík, mely a $P$-n keresztül megy és a kúpot két valós alkotóban, a hyperboloidot egy $k_2^{(2)}$ kúpszeletben metszi, akkor a $P$-n keresztül menő és a $S_2$ síkban fekvő sugarak metszőpontjai a hyperboloiddal, a $P$-től és $\pi$-től szintén harmónikusan vannak elválasztva. Ha végre a $\rho_3$ a $P$-n keresztül menő tetszésszerinti sík, mely ama kúpot nem metszi valós alkotók szerint, akkor a $\rho_1\rho_3$, és a $\rho_2\rho_3$ egyeneseknek metszőpontjai a hyperboloiddal a $P$-től és $\pi$-től harmónikusan vannak elválasztva, tehát a $(\rho_3\pi)$ egyenes szintén polárisa a $P$ pontnak arra a kúpszeletre vonatkozólag, melyet a $\rho_3$ sík a hyperboloidból kimetsz. Ennélfogva általánosan:

Valamely $P$ ponton keresztül menő síkok a hyperboloidot kúpszeletek szerint metszik; a $P$ pontnak e kúpszeletekre vonatkozó polárisai a $P$ pontnak a hyperboloidra vonatkozó polárissíkjában feküsznek.

Ha valamely $\pi$ síknak pontjaiból a hyperboloidhoz érintőkúpokat fektetünk, akkor a $\pi$ síknak e II. r. kúpokra vonatkozó polárissugarai egymást egy pontban, a $\pi$ síknak hyperboloidra vonatkozó pólusában, metszik.

Nevezzük a $P$ sík polárissíkjának egy pontját $R$-nek. A $PR$ egyenesen keresztül menő sík a hyperboloidot oly kúpszeletben

metszi, melyre nézve a $PR$ pontpár kapcsolt pólus, s ezért az $R$-nek polárisa e kúpszeletre vonatkozólag, tehát az $R$-nek polárissíkja a hyperboloidra vonatkozólag, a $P$ ponton megy át. E szerint:

A $\pi$ síkban fekvő pontoknak polárissíkjai a hyperboloidra vonatkozólag, $\pi$-nek pólusán, $P$-n, mennek keresztül.

A $P$ ponton keresztül menő síkoknak pólusai a hyperboloidra vonatkozólag, a $P$ pont polárissíkjában, $\pi$-ben, feküsznek.

Ebből az előbbi tétellel egybevetve következik:

Ha a $P$ pontnak polárissíkja a hyperboloidra vonatkozólag a $\pi$ sík, akkor a $P$ nyaláb sugarainak metszőpontjai a hyperboloiddal, valamint e metszőpontok érintősíkjai, a $P$ ponttól és a $\pi$ síktól harmónikusan vannak elválasztva.

2. A $P$ pontnak a hyperboloidra vonatkozó polárissíkjában, $\pi$-ben, minden pontot és egyenest a $P$-hez kapcsolt pólusnak, illetve kapcsolt polárisnak nevezünk.

A $\pi$ síknak a hyperboloidra vonatkozó $P$ pólusán keresztül menő minden síkot és egyenest, a $\pi$-hez kapcsolt polárissíknak, illetve kapcsolt polárisnak nevezünk.

Ha az $S$ pont a $P$ és $R$ pontokhoz kapcsolt pólus, tehát a $P$ és $R$ pontok $\pi$ és $\rho$ polárissíkjainak $q \equiv \pi\rho$ metszővonalában fekszik, akkor az $S$-nek polárissíkja $\sigma$, a $PR$ pontokon, tehát a $PR \equiv q_1$ egyenesen megy keresztül; és fordítva: a $q_1$-en keresztül menő síkok pólusai a $q$-ban feküsznek. E szerint:

A hyperboloidra vonatkozólag bármely egyenesen fekvő pontoknak polárissíkjai egymást egy egyenesben metszik.

keresztül menő síkoknak pólusai egy egyenesen feküsznek.

Ily két egyenes, mely közül bármelyik a másikon keresztül menő síkok pólusait tartja, együttvéve *polárispárnak*, külön-külön pedig az egyiket a másik *polárisának* nevezzük úgy a hyperboloidra vonatkozólag, mint a hyperboloidtól meghatározott polárisrendszerben. A polárisrendszerben $\infty^4$ polárispár van, mert minden egyenesnek van egy polárisa, mely véle egy párt alkot.

Ha a $q$ és $q_1$ egyenes polárispár a $H^{(2)}$ hyperboloidra vonatkozólag és a $q$ a hyperboloidot a $(g_1h_1)$, $(g_2h_2)$ pontokban metszi, akkor e pontoknak érintősíkjai $[g_1h_1]$, $[g_2h_2]$, mint ama metszőpontoknak polárissíkjai, a $q_1$ egyenesen mennek keresztül. Ez a $q_1$ egyenes a hyperboloidot tehát szintén metszi a $(g_1h_2)$, $(g_2h_1)$ valós pontokban, melyeknek érintősíkjai $[g_1h_2]$, $[g_2h_1]$ a $q$-ban találkoznak. Ha $q$ és $q_1$

polárispár közül a $q$ egyenes a hyperboloid $[g_1 h_1]$ érintősíkjában van és a $(g_1 h_1)$ érintőponton megy keresztül, akkor annak polárisa $q_1$ szintén keresztül megy a $(g_1 h_1)$ ponton és a $[g_1 h_1]$ síkban fekszik; s mert a $q_1$ egyenes benne van a $q$ bármely pontjának polárissíkjában, azért a $g_1$, $h_1$ alkotók a $q$, $q_1$-től harmónikusan vannak elválasztva. Ha végre a $q$ egyenes ebben a $[g_1 h_1]$ érintősíkban a $g_1$, $h_1$ egyenesek egyikével egyesül, akkor a $q_1$ is egy esül ugyanazzal az egyenessel.

Könnyen belátható, hogy két egymást metsző $q$, $r$ egyenesnek $q_1$, $r_1$ polárisai is metszik egymást, mert a $[qr]$ síknak pólusa, a $q_1$-ben és az $r_1$-ben fekvő pont. Mindazokat az $r_1$ egyeneseket, melyek a $q$ egyenes polárisát, $q_1$-et, metszik, a $q$-hoz *kapcsolt polárisnak* nevezzük. Az egyenes kapcsolt polárisainak száma $\infty^3$.

Valamely $q$ egyenesen fekvő pontsor polárissíkjai a hyperboloidra vonatkozólag a pontsorral involucziós fekvésű síksort képeznek, melynek tengelye $q_1$, a $q$-nak polárisa.

A síksor síkjainak pólusai a hyperboloidra vonatkozólag a síksorral involucziós fekvésű pontsort képeznek.

Ugyanis a $q$-n keresztül fektetett $\pi$ sík a hyperboloidot egy $k^{(2)}$ kúpszeletben, a $q$ pontsor polárissíkjait pedig e pontsornak a $k^{(2)}$-re vonatkozó polárisaiban metszi, melyek a pontsorral involucziós fekvésű sugársort képeznek.

A hyperboloidra vonatkozólag az $(A, \beta)$ sugársor sugarainak polárisai, a sorral projektiv $(B, \alpha)$ sugársort képeznek, melynek $B$ középpontja és $\alpha$ síkja, ama $(A, \beta)$ sor $\beta$ síkjának pólusa és $A$ középpontjának polárissíkja.

Ugyanis az a pontsor, melyben az $(A, \beta)$ sugársor az $\alpha\beta \equiv q$ egyenest metszi, projektiv pontjai polárissíkjainak sorával, és így egyszersmind azzal a $(B, \alpha)$ sugársorral, melyben az $\alpha$ sík azt a síksort metszi.

A hyperboloidra vonatkozólag a kúpszelet pontjainak polárissíkjai II. o. síksort, és egy sugársereg (vagy II. o. sugársor) sugarainak polárisai szintén sugársereget (illetve II. r. kúpot) képeznek.

Tekintsük a kúpszeletet két projektiv sugársor képződményének. E sorok polárisai közös középpontú és projektiv sugársorok lesznek, melyeknek képződménye II. o. síksor. Ha pedig a sugársereget két projektiv pontsor képződményének tekintjük, akkor e két pontsor polárissíkjainak képződménye, mely szintén sugársereg, a felvett sugársereg polárisaiból áll.

Könnyen belátható, hogy négy hyperboloidikus fekvésű egyenesnek a hyperboloidra vonatkozó polárisai szintén hyperbolikus fekvésűek.

3. A hyperboloidra vonatkozólag valamely egyenesen fekvő kapcsolt pólusok a hyperboloid tetszőleges alkotójából ugyanazzal az involucziós síksorral projicziáltatnak, mint az egyenes polárisán fekvő kapcsolt pólusok.

keresztül menő kapcsolt polárissíkok a hyperboloid bármely alkotóját ugyanabban az involucziós pontsorban metszik, mint az egyenes polárisán keresztül menő kapcsolt polárissíkok.

Ugyanis (a jobboldalon álló tételre gondolva), ha az $r$ egyenes a hyperboloid egy tetszőleges polárispárját, $q$ és $q_1$-et, és egy $g$ alkotóját metszi, akkor az $r$-nek polárisa $r_1$ szintén metszeni fogja a $q$, $q_1$ és $g$-t. Ennélfogva a $[qr]$ és $[qr_1]$ kapcsolt polárissíkok a $g$ alkotót ugyanabban a pontpárban metszik, mint a $[q_1r]$ és $[q_1r_1]$ kapcsolt polárissíkok. És ha a $q$, $q_1$, és $g$ egyenesek szelőjét, $r$-t, változtatjuk, azt látjuk, hogy a $q$-n s a $q_1$-en keresztül menő összes kapcsolt polárissíkpárok a $g$-t ugyanazokban a pontpárokban metszik.

Ha a $q$ és $q_1$ a hyperboloidnak oly polárispárja, mely egymást nem metszi, akkor a hyperboloidon fekvő bármelyik sugárseregben azok a sugarak, melyek a $q$, $q_1$-et harmónikusan elválasztják, involuciósan vannak párosítva, s mint ilyenek egy *involucziós sugársereget* képeznek. A szerint, a mint a $q$-nak, és így egyszersmind a $q_1$-nek, metszőpontjai a hyperboloiddal valósak vagy képzetesek: a hyperboloidon meghatározott mindkét involucziós sugársereg hyperbolikus, illetve elliptikus.

Ugyanis azok a pontok, melyek a hyperboloid egy $g_i$ alkotójának pontjait a $q$, $q_1$-től harmónikusan elválasztják egyrészt a hyperboloidon, másrészt egy egyenesen feküsznek, mely a $g_i$-t nem metszi; ennélfogva ez utóbbi egyenes a $g$ sugárseregnek egy sugara $g_i$. A $q$-n keresztül menő tetszőleges sík a hyperboloidot a $k^{(2)}$ kúpszeletben, a $q_1$-et a $Q$ pontban metszi, mely a $q$-nak a $k^{(2)}$-re vonatkozó pólusa. A $[Qq]$ síkban a $Q$-n keresztül menő sugarak a $k^{(2)}$-t involucziós pontsorban metszik, melynek társpontjai a $q$, $q_1$ egyenesektől harmónikusan vannak elválasztva; a hyperboloidnak e társpontokon keresztül menő alkotói, akármelyik rendszerhez tartozzanak azok, a $q$ és $q_1$-től szinten harmónikusan lesznek elválasztva. Abban az esetben, a midőn a $q$ egyenes a hyperboloidot, és így a $k^{(2)}$ kúpszeletet is, valós pontokban metszi, a $k^{(2)}$-n meghatározott involucziós pontsor és ezzel egyszersmind a hyperboloidon levő két involu-

cziós sugársereg hyperbolikus természetű. E sugárseregeknek két pár kettőssugara egy tetraedernek két pár szemben fekvő élpárja, melynek harmadik szemben fekvő élpárja a $qq_1$.

Ha a $[Qq]$ sík helyett a $q$-n keresztül más síkot fektetünk, akkor $k^{(2)}$ kúpszelet ugyan változni fog, de a két involucziós sugárseregnek minden társsugárpárja ugyanaz marad, mert pl. a $g_i$-t a $q, q_1$-től csak egy sugár $g'_i$ választja el harmónikusan. Ebből még az is következik, hogy ha a $q$ és $q_1$-től az előbbiek szerint meghatározott involucziós sugárseregeknek társsugarai $g_ig'_i$, $h_ih'_i$, akkor a $(g_ih_i)$, $(g'_ih'_i)$, valamint a $(g_ih'_i)$, $(g'_ih_i)$ pontpárok összekötő egyenesei a $qq_1$ egyeneseket metszeni fogják. —

Függetlenül a polárispártól, mint már előbb (9. §. 4.) láttuk, úgy párosíthatjuk egy sugársereg sugarait involucziósan, hogy vagy a támasztó sugárseregnek egyik sugarán egy involucziós pontsort veszünk fel; ennek társpontjain keresztül menő sugárpárok az adott sugárseregben már egy involucziós sugársereget képeznek. Vagy pedig az adott sugársereget egy síkkal kúpszelet szerint metszük és ezen egy involucziós pontsort veszünk fel; ennek társpontjain keresztül menő sugarak az adott seregben már involucziósan vannak párosítva. A kúpszeleten felvett involucziós pontsor involucziós tengelye, s annak a sugársereget tartó hyperboloidra vonatkozó polárisa, harmónikusan választja el a szerkesztett sugársereg társsugarait.

Ha a hyperboloid két sugárseregének sugarai involucziósan vannak párosítva és mindkét involucció hyperbolikus, vagy elliptikus, akkor ezek a hyperboloidra vonatkozólag egy polárispárt, $qq_1$-et, határoznak meg, mely a két involucziós sugársereg társsugarait harmónikusan választja el.

A midőn ugyanis mindkét involucció hyperbolikus, a $qq_1$ annak a tetraedernek harmadik szemben fekvő élpárja, melynek másik két élpárját ama involucziós sugárseregek kettőssugarai képezik.

A midőn mindkét involucziós sugársereg elliptikus természetű, vegyünk fel mindkettőben két pár társsugarat $g_1g'_1$, $g_2g'_2$-t és $h_1h'_1$, $h_2h'_2$-őt, melyek egymást harmónikusan elválasztják (Proj. G. E. 54.). A $(g_1h_1)$ $(g'_1h'_1)$ $(g_2h_2)$ pontokon keresztül menő sík a hyperboloidot egy $k^{(2)}$ kúpszeletben, a sugárseregeket, a $k^{(2)}$-n fekvő involucziókban metszi. Ezekben a $(g_1h_1)$, $(g'_1h'_1)$ társpontokat a $(g_2h_2)$-től, a $g'_2$- és $h'_2$-ben fekvő pont választja el, tehát a $g'_2h'_2$ egymást szintén a $k^{(2)}$-n metszi, s mert a két involucziónak két társpontpárja $(g_1h_1)$ $(g'_1h'_1)$, $(g_2h_2)$ $(g'_2h'_2)$ közös, azért azok csak egy involucziót képeznek a $k^{(2)}$-őn; ennek involucziós tengelye $q$, és $q$-nak polárisa $q_1$, a két involucziós sugárseregtől meghatározott polárispár.

Ha a hyperboloidon a két sugársereg közül egyiknek sugarai hyperbolikus, a másikénak sugarai elliptikus involucziót képeznek, akkor az a polárispár, mely mindkét involucziónak társsugarait harmónikusan választja el, II. fajú képzetes egyenes. —

Egy elliptikus involucziós sugárseregben mindig van egy társsugárpár, mely a sugársereget tartó hyperboloidnak egy $qq_1$ polárispárját, mely nem metsző egyenespár, harmónikusan választja el. Ugyanis azok a sugárpárok az adott sugárseregben, melyek a $qq_1$-et harmónikusan választják el, egy új involuciós sugársereget képeznek. Ennek pedig az adott elliptikus sugársereggel mindig van egy (vagy $\infty^1$) közös társsugárpárja, mely már a keresett sugárpár lesz.

4. Egy oly tetraedert, melynek mindegyik lapja a szemben fekvő csúcsnak polárissíkja, és így mindegyik éle, a szemben fekvő élnek polárisa valamely hyperboloidra vonatkozólag, a hyperboloid, valamint a tőle meghatározott polárisrendszer, *poláristetraeder*ének nevezzük.

A poláristetraederek száma a hyperboloidtól meghatározott polárisrendszerben $\infty^6$; mert a poláristetraeder egyik csúcsát tetszésszerint választhatjuk a térben; annak többi három csúcsa egy tetszésszerinti polárisháromszögnek szögpontja arra a kúpszeletre vonatkozólag, mely szerint a felvett pont polárissíkja a hyperboloidot metszi. A hyperboloid poláristetraedere tehát oly tulajdonságú, hogy mindegyik

lapjában fekvő három éle, polárisháromszög arra a kúpszeletre vonatkozólag, melyben ama lap a hyperboloidot metszi.

csúcsából kisugárzó háromél, polárisháromél arra a kúpra vonatkozólag, melynek alkotói ama csúcsból a hyperboloidhoz húzható érintők.

A poláristetraeder egyik lapjában fekvő élek közül kettő a hyperboloidot valós, a harmadik képzetes pontpárban metszi; az ezekkel szemben fekvő élek, mint amazoknak polárisai, szintén ily tulajdonságuak.

Ha az $ABCD$ tetraedernek két szemben fekvő élpárja $AB$, $CD$; $AC$, $BD$ polárispár egy hyperboloidra vonatkozólag, akkor a harmadik élpár $AD$, $BC$ (mert az $A$ és $D$ pontnak polárissíkja $BCD$, illetve $ABC$ is az lesz, és a tetraeder poláristetraedere a hyperboloidnak. —

„Minden tetraedernek általános tulajdonsága, hogy ama pontnégyes, mely szerint valamely egyenes annak lapjait metszi, projektiv ama síknégyessel, mely a felvett egyenesből ama lapokkal szemben fekvő csúcsokat projicziálja.“ (Staudt.)

Messe (19. ábra) a $p$ egyenes az $ABCD$ tetraeder ilyképen felírt csúcsaival szemben fekvő lapjait az $A_1B_1C_1D_1$ pontokban és nevezzük az $A_1B_1C_1$ pontok projekczióit a $D$ pontból a szemben fekvő lapra $A_2B_2C_2$-nek, a $D_1C$ és $AB$ egyenesek metszőpontját $F$-nek.

$$p(A_1B_1C_1D_1) \barwedge (A_2B_2C_2D_1) \barwedge (BAC_2F) \barwedge D_1(BAC_2C) \barwedge p[BAC_2C]$$

mert a két első négyes a $D$-re, a következő kettő a $C$ pontra perspektiv; ámde a $[pC_2]$ és $[pD]$ sík ugyanegy, tehát

$$p(A_1B_1C_1D_1) \barwedge p[BADC] \barwedge p[ABCD].$$

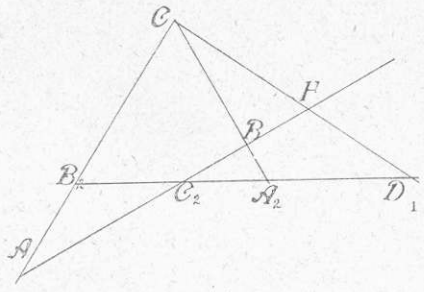
E tétel segélyével kimutatható, hogy:

A hyperboloid polároistetraederének

csúcsait valamely egyenesből és annak a hyperboloidra vonatkozó polárisából projicziáló síknégyesek projektivek.

lapjait valamely egyenes és annak a hyperboloidra vonatkozó polárisa projektiv pontnégyesekben metszi.

Ugyanis ha $ABCD$ egy polároistetraeder, és a $q$-nak polárisa $q_1$, akkor az $[Aq]$ síknak pólusa a $BCD$ síknak és a $q_1$ egyenesnek metszőpontja, tehát a $q$ $[ABCD]$ síknégyes projektiv azzal a pontnégyessel, melyben a $q_1$ az $A$, $B$, $C$, $D$-vel szemben fekvő lapokat metszi, és így az előbbi tétel alapján a $q_1[ABCD]$ síknégyessel is. — Minthogy $q[ABCD] \barwedge q_1[ABCD]$, azért a megfelelő síkok metszővonalai a $qq_1$-gyel együtt egy hyperboloidon vagy II. r. kúpon feküsznek a szerint, a mint a $qq_1$ egyenesek egymást metszik vagy nem metszik. Tehát: egy hyperboloid polároistetraederének négy csúcsa és egy tetszésszerinti polárispár vagy egy hyperboloidon vagy II. r. kúpon fekszik. Ezt még ekképen is kifejezhetjük:



19. ábra.

A hyperboloid bármelyik polároistetraederének csúcsaiból egy polárispárjához vezetett szelők hyperboloidikus fekvésűek.

5.*) A hyperboloid polároistetraederének 4 éle a hyperboloidot nyolcz valós pontban, a másik két éle négy képzetes pontban metszi; a valós pontokon keresztül menő alkotók az egyik és a másik rendszerben harmónikus négyeseket képeznek.

*) E §-nak hátra levő része a könyv első olvasásánál kihagyható.

Ugyanis az $A_1A_2A_3A_4$ poláristetraedernek $A_1A_2A_3$ lapja a hyperboloidot kúpszeletben metszi, melyre nézve az $A_1A_2A_3$ háromszög polárisháromszög. Ha tehát ennek $A_1A_2$, $A_2A_3$ oldalai a kúpszeletet valós pontpárokban metszik, akkor ezek a pontpárok, és így a rajtuk keresztül menő és bármelyik rendszerhez tartozó alkotópárok, harmónikusan vannak elválasztva. Ámde ezek az alkotópárok a poláristetraedernek az $A_1A_2$, $A_2A_3$-mal szemben fekvő $A_3A_4$, $A_4A_1$ éleit is metszik, mert ezek amazoknak polárisai a hyperboloidra vonatkozólag.

A hyperboloid bármely alkotója a hyperboloid minden poláristetraederének négy lapját négy pontban metszi; e metszőpontok közül az a két pár van egymástól elválasztva, mely a poláristetraedernek a hyperboloidot (valós pontban) nem metsző éleiben találkozó lappárokon nyugszik. (Következménye a 3. pontban levő tételeknek.)

„Ha a $g_1$ a hyperboloidnak egy tetszésszerinti alkotója, akkor a hyperboloidnak három ugyanahoz a rendszerhez tartozó $g_2g_3g_4$ alkotója a $g_1$-et a hyperboloid valamely poláristetraederének szemben fekvő élpárjaitól, és a másik rendszerhez tartozó $h_1h_2h_3h_4$ alkotója a $g_1$-et, valamint a $g_2g_3g_4$-t, ama tetraeder csúcspontjaitól és az azokkal szemben fekvő lapjaitól, harmónikusan választja el. A $g_1g_2g_3g_4$, $h_1h_2h_3h_4$ alkotóknak 16 metszőpontja a poláristetraeder lapjaiban fekszik, és ezért a poláristetraeder lapjai ama nyolcz alkotót oly pontnégyesekben metszik, melyek egymással és a négy $g$, valamint a négy $h$ alkotóval projektivek."

A hyperboloid a felvett $A_1A_2A_3A_4 \equiv \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ poláristetraeder egyik lapját, pl. az $\alpha_1 \equiv A_2A_3A_4$-et, a $k^{(2)}$ kúpszeletben a felvett $g_1$ alkotót pedig az $\alpha_1$ lap a $k^{(2)}$-nek $K_1$ pontjában metszi. Ha a $K_1$ pontnak projekcziói az $A_2A_3A_4$ háromszög így felírt szögpontjaiból a $k^{(2)}$-re: $K_2K_3K_4$, tehát a $K_1K_2K_3K_4$ négyszögnek átlósháromszöge az $A_2A_3A_4$, akkor a hyperboloidnak a $K_1K_2K_3K_4$ pontokon keresztül menő $g_1g_2g_3g_4$, $h_1h_2h_3h_4$ alkotói már a tételben említettek.

Ugyanis $g_1$, a $h_1h_2h_3h_4$ alkotókat az $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ tetraederlapokban metszi, mert pl. az $A_i$ a $[g_1h_i]$ síkban van, és a poláristetraeder tulajdonsága folytán a $g_1h_i$ alkotók az $A_i$ ponttól és az $\alpha_i$ laptól harmónikusan vannak elválasztva, tehát a $(g_1h_i)$ pont az $\alpha_i$ síkban lesz.

Ebből következik, hogy

$$g_1\ (\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)\ \overline{\wedge}\ h_1h_2h_3h_4\ \overline{\wedge}\ k^{(2)}\ (K_1K_2K_3K_4)\ \overline{\wedge}\ g_1g_2g_3g_4.$$

De ez utóbbi alkotók bármelyike a $h_1h_2h_3h_4$ alkotókat a poláristetraeder lapjaiban metszi, mert ezek a $h$ alkotók megfelelőleg a

$g_1(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4) \barwedge g_2(\alpha_2\alpha_1\alpha_4\alpha_3) \barwedge g_3(\alpha_3\alpha_4\alpha_2\alpha_1) \barwedge g_4(\alpha_4\alpha_3\alpha_2\alpha_1)$ projektiv pontnégyesek pontjain mennek keresztül.

Hogy végre a felírt négy $g$ és négy $h$ alkotók közül bármely kettő a poláristetraeder egy szemben fekvő élpárjától harmónikusan van elválasztva, onnan következik, hogy a poláristetraedernek minden szemben fekvő élpárja a hyperboloid polárispárja, és a $K_1K_2K_3K_4$ négyoldalnak bármely oldala két szemben fekvő élpárt és két $g$ (vagy két $h$) alkotót metsz, és a kimetszett pontpárok harmónikusan vannak elválasztva.

Ha a hyperboloidon négy ugyanegy rendszerhez tartozó alkotó van adva, akkor $\infty^3$ számu oly poláristetraedert lehet találni, melynek lapjai azokat az alkotókat projektiv pontnégyesekben metszik.

Ugyanis a kivánt poláristetraedernek egyik lapját (vagy egyik csúcsát) tetszésszerint vehetjük fel. A négy alkotó metszőpontjai e lappal egy négyszögnek szögpontjai, melynek átlósháromszöge már a keresett poláristetraedernek egyik határló lapja; e lapnak pólusa a poláristetraedernek hiányzó negyedik szögpontja.

6. Valamely háromszög oldalainak polárisai a hyperboloidra vonatkozólag egy háromélnek élei; a háromszög oldalai a velük szemben fekvő szögpontok polárissíkjait ugyanegy $q$ egyenes három pontjában metszik, s a háromszög szögpontjainak összekötő sikjai a szemben fekvő oldalak polárisaival egy $q_1$ egyenesen mennek keresztül, mely a $q$-nak a hyperboloidra vonatkozó polárisa.

Ugyanis a felvett háromszög síkja a hyperboloidot egy kúpszeletben, a háromél lapjait egy háromszögben metszi, mely az előbbi háromszögnek poláris ábrája a kúpszeletre vonatkozólag. Ily két háromszög azonban perspektiv (Projek. G. E. 97. és 98. oldal); a kollineaczió-tengely a $q$ egyenes; a kollineaczió-középpont pedig $q$-nak pólusa a kúpszeletre vonatkozólag. Minthogy $q_1$ ezen póluson és az előbbi síknak a hyperboloidra vonatkozó pólusán megy keresztül, a $qq_1$ polárispár a hyperboloidra nézve. —

Valamely $A$ tetraeder $A_1A_2A_3A_4$ csúcsainak $\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4$ polárissíkjai, és $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ lapjainak $B_1B_2B_3B_4$ pólusai a $H^{(2)}$ hyperboloidra vonatkozólag ugyanegy $B$ tetraedernek lapjai, illetve csúcsai; az $AB$ tetraedereknek, $A_iB_i$ csúcsait összekötő egyenesek, valamint az $\alpha_i\beta_i$ lapjainak metszővonalai, hyperboloidikus fekvésűek.

A tétel első része egészen világos. A másodikra vonatkozólag az $A$ tetraeder három csúcsának, $A_1A_2A_3$-nak, polárissíkjai egy $B_4(B_1B_2B_3)$ háromélnek lapjai, tehát az előbbi tétel szerint az $A_1B_1B_4$, $A_2B_2B_4$, $A_3B_3B_4$ síkok egy $d_4$ egyenesen mennek keresztül, mely az $A_1B_1$, $A_2B_2$, $A_3B_3$, $A_4B_4$ egyeneseket metszi. Ugyanígy

lehet, ha az $A$ tetraedernek más három csúcsából indulunk ki, a $B_1B_2B_3$ pontokon keresztül menő három oly egyenest, $d_1d_2d_3$-mat találni, mely a tételben jelzett $A_iB_i$ egyeneseket metszi, tehát ezek az $A_1B_1$, $A_2B_2$, $A_3B_3$, $A_4B_4$ egyenesek hyperboloidikus fekvésűek. Ha végre meggondoljuk, hogy az $A_iB_i$ egyeneseknek polárisai az $\alpha_i\beta_i$ egyenesek, és amazok $d_i$ szelőinek polárisai az $\alpha_i\beta_i$ egyeneseket metszik, úgy a tétel utolsó része is igazolva van.

A tételben jelzett kétszer négy egyenes $A_iB_i$ és $\alpha_i\beta_i$ azonban egyszerűbb kölcsönös helyzettel bír, s így a rajtuk keresztül menő hyperboloid elkorcsosul, ha az eredeti $A$ tetraeder különös helyzetű a hyperboloid irányában:

És pedig:

*a*) Ha az $A \equiv A_1A_2A_3A_4$ tetraedernek egy élpárja, pl. az $A_1A_2$, $A_3A_4$ *kapcsolt poláris* a hyperboloidra nézve, tehát $A_1A_2$-nek polárisa, $B_3B_4$, metszi az $A_3A_4$-et, és $B_1B_2$ metszi az $A_1A_2$-t. Ekkor ugyanis az $A_1B_1$, $A_2B_2$ és az $A_3B_3$, $A_4B_4$ egyenesek egy-egy pontban találkoznak, melyeknek összekötő egyenese egyszersmind az $A_1A_2B_1B_2$, $A_3A_4B_3B_4$ síkoknak metszővonala, mert csak az ilyen helyzetben lehet a négy $A_iB_i$ egyeneshez kettőnél több metszőegyenest húzni. Az $A_iB_i$ egyenesek ekkor *kétszögös sugarakat* képeznek, és ugyanily helyzetűek az $\alpha_i\beta_i$ síkpárok metszővonalai is. Ha egy oly tetraedert akarunk szerkeszteni, melynek $A_1A_2$, $A_3A_4$ élei kapcsolt polárisok, akkor annak három csúcsát, pl. az $A_1A_2A_3$-at, tetszésszerint választjuk; a negyediket, $A_4$-et, pedig abban a síkban vesszük fel, mely az $A_3$ pontot az $A_1A_2$ oldalnak polárisával összeköti. Ebből a szerkesztésből látható, mert az $A_1A_2A_3$ pontok tetszésszerint, az $A_4$ pont pedig egy síkban vehető fel, hogy az ily tetraederek száma $\infty^{11}$.

*b*) Ha az $A$ tetraedernek két pár szemben fekvő éle kapcsolt poláris, akkor az $A_iB_i$ egyenesek közül az előbbi $A_1B_1$, $A_2B_2$; $A_3B_3$, $A_4B_4$-en kívül még más két pár is metszi egymást, tehát mind a négy egy ponton megy keresztül. Ez esetben az $A$ tetraedernek mind a három szemben fekvő élpárja kapcsolt poláris és így mondhatjuk:

Ha egy hyperboloidra vonatkozólag egy tetraedernek két pár szemben fekvő éle kapcsolt poláris, akkor a harmadik szemben fekvő élpárja is az lesz.

Ha egy oly tetraedert akarunk szerkeszteni, melynek szemben fekvő élpárjai kapcsolt polárisok, akkor annak három csúcsát $A_1A_2A_3$-at tetszésszerint vehetjük fel és megszerkeszthetjük azt a $B_4(B_1B_2B_3)$ háromélt, melynek élei az $A_1A_2A_3$ háromszög oldalai-

nak polárisai. Az $A_1A_2A_3$ csúcsoknak összekötő síkjai a szemben fekvő oldalak polárisaival egymást egy $q$ egyenesben metszik, melynek tetszésszerinti $A_4$ pontja képezi a keresett $A_1A_2A_3A_4$ tetraedernek negyedik csúcsát.

Ugyanis az $A_1A_4$, $A_2A_4$, $A_3A_4$ tetraederélek a szemben fekvő $A_2A_3$, $A_3A_1$, $A_1A_2$ éleknek $B_1B_4$, $B_2B_4$, $B_3B_4$ polárisait metszik, tehát az $A_1A_4$, $A_2A_4$, $A_3A_4$ éleknek $B_2B_3$, $B_3B_1$, $B_1B_2$ polárisai is metszeni fogják az $A_2A_3$, $A_3A_1$, $A_1A_2$ éleket az $A_4B_4 \equiv q$ egyenesnek $q_1$ polárisán, és ezért az $A_1B_1$, $A_2B_2$, $A_3B_3$ egyenesek a $q$ egyenesnek egy $O$ pontján mennek keresztül. Ez az $O$ pont az $A_1A_2A_3A_4$, $B_1B_2B_3B_4$ perspektiv tetraederek kollineacció-középpontja; az $O$-nak a $q_1$-en keresztül menő polárissíkja pedig a kollineációsík $\omega$. Az $A_iB_i$ egyenesek ekkor *pontbeli sugarak*, mert az $O$-n mennek keresztül, az $\alpha_i\beta_i$ egyenesek pedig *síkbeli sugarak*, mert az $\omega$ síkban feküsznek.

$\infty^{10}$ számú oly tetraeder van, melynek szemben fekvő élei kapcsolt polárisok valamely hyperboloidra vonatkozólag.

7. Vizsgáljuk meg mikép helyezkednek el a hyperboloidnak polárispárjai a térben.

Jelöljük $g$-vel a $H^{(2)}$ hyperboloidnak valamely alkotóját, továbbá $qq'$-sel, a $H^{(2)}$-nek egy olyan polárispárját, mely nem metszi a $H^{(2)}$-őt.

Minthogy a $qq'$ és $g$ egyenesek minden $r_i$ szelőjének polárisa $r'_i$ szintén szelője a $qq'$ és $g$-nek, és az $r_ir'_i$ polárispárok a $q$-n fekvő kapcsolt pólusokon mennek keresztül, azért a $qq'$ és $g$-t metsző $r_ir'_i$ polárispárok egy elliptikus involucziós sugársereget alkotnak, melynek tartója az $S^{(2)}$ hyperboloid.

Az $r_ir'_i$ sugársereg minden $q_i$ szelőjének polárisa, $q'_i$, szintén szelője e sugárseregnek, tehát, $q_iq'_i$ polárispárok szintén involucziós sugársereget alkotnak az $S^{(2)}$ hyperboloidon; ennek egyik társsugárpárja a felvett $qq'$, egyik kettőssugara a $g$, a másik kettőssugara pedig a $H^{(2)}$-nek az a $g'$ alkotója, mely a $g$-t a $qq'$-től harmónikusan választja el.

A $H^{(2)}$-nek $r_ir'_i$ polárispárja a $H^{(2)}$-őt a $gg'$ alkotókon és a $H^{(2)}$-nek másik rendszeréhez tartozó $h_ih'_i$ alkotóin metszi úgy, hogy ez az $r_ir'_i$ polárispár a $H^{(2)}$ fekvő $gh_ig'h'_i$ négyszögnek átlópárja. Másrészt e $h_ih'_i$ alkotópár polárispárja az $S^{(2)}$-nek, mert átlópárja az $S^{(2)}$-n fekvő $gr_ig'r'_i$ négyszögnek.

Az $S^{(2)}$-n az $r_ir'_i$ sugárpárokból álló elliptikus involucziós sugársereg a $g$-t egy involucziós pontsorban találja; tehát az $S^{(2)}$-nek $h_ih'_i$ polárispárjai a $H^{(2)}$-n egy elliptikus involucziós sugársereget alkotnak. Ennek két II. fajú kapcsolt-képzetes kettőssugara $jk$,

egyszersmind kettőssugara a $r_i r'_i$ sugárseregnek az $S^{(2)}$-n úgy, hogy a $H^{(2)}$ és $S^{(2)}$ hyperboloidok egymást a $gg'jk$ négyszögben metszik, és e négyszögnek két átlója, mely szintén II. fajú kapcsolt-képzetes egyenes, polárispár mindkét hyperboloidra vonatkozólag.

A $H^{(2)}$ másik sugárseregének sugarai szintén oly involucziós sereget képeznek, melynek $g_i g'_i$ társsugarai polárispárok az $S^{(2)}$-re vonatkozólag, és ennek az involucziós sugárseregnek kettőssugara a $gg'$ valós alkotók lesznek.

E szerint:

*Ha a $H^{(2)}$ hyperboloid egyik (valós) alkotóján g-n, és egyik (valós) polárispárján qq'-ön, mely a $H^{(2)}$-őt nem metszi, hyperboloidot fektetünk keresztül, akkor ez a hyperboloid $S^{(2)}$, a $H^{(2)}$-őt a g-n kívül még egy g' alkotóban, és a másik sugársereghez tartozó két II. fajú kapcsolt-képzetes alkotóban, jk-ban, metszi.*

*A gg'jk négyszög oldalain keresztül menő $H^{(2)}$ és $S^{(2)}$ hyperboloidok helyzete olyan, hogy bármelyik hyperboloidon azok az alkotópárok, melyek a gg' (valós) vagy a jk képzetes alkotókat harmónikusan választják el, s mint ilyenek involucziós sugárseregeket képeznek, polárispárok a másik hyperboloidra vonatkozólag.*

Ha a $H^{(2)}$ hyperboloid és a $qq'$ polárispár, mely azt nem metszi valós pontokban, adva van, akkor ezzel a $jk$ kapcsolt képzetes egyenespár is meg van adva, mert ez, a $qq'$ polárispárnak és $H^{(2)}$ hyperboloidnak négy képzetes metszőpontján megy keresztül és a $H^{(2)}$ hyperboloidnak egyik vagy másik sugárseregéhez tartozik.

Ha tehát a $qq'$ polárispáron és a $H^{(2)}$ hyperboloid $g$ sugárseregének egyes sugarain keresztül $S^{(2)}$ hyperboloidokat fektetünk, akkor ez a $\infty^1$ számú $S^{(2)}$ hyperboloid a $qq'jk$ négyszög oldalain megy át és a $H^{(2)}$-t a $jk$-n kívül a $g$ sugárseregnek azokban a sugárpárjaiban metszi, melyek a $qq'$-től és a $qq'jk$ négyszögnek $j^*k^*$ átlóitól harmónikusan vannak elválasztva. Ezek a $gg'$ sugárpárok a $H^{(2)}$-n egy elliptikus involucziós sugársereget képeznek, melynek kettőssugarai $j^*k^*$. Ép így, ha a $qq'$ polárispáron és a $H^{(2)}$ hyperboloid $h$ sugárseregének egyes sugarain $S^{(2)}$ hyperboloidokat fektetünk keresztül, akkor ez a $\infty^1$ számú $S^{(2)}$ hyperboloid a $qq'j^*k^*$ négyszög oldalain megy át és a $H^{(2)}$-t a $jk$-n kívül a $h$ sugárseregnek azokban a sugárpárjaiban metszi, melyek a $qq'$-től és a $qq'j^*k^*$ négyszög $jk$ átlóitól harmónikusan vannak elválasztva. Ezek a $hh'$ sugárpárok a $H^{(2)}$-n egy elliptikus involucziós sugársereget képeznek, melynek kettőssugarai $jk$.

Legyen most az $rr'$ olyan polárispárja a $H^{(2)}$-nek, mely azt, a $gg'$ és $hh'$ (valós) alkotókon metszi, továbbá legyen a $q$, és így annak

$q'$ polárisa, szelője az $rr'$-nek. A $gg'qq'$ egyeneseken már az előbbi tulajdonsággal biró $S^{(2)}$ hyperboloid megy keresztül; ezen rajta van a felvett $rr'$ polárispár is. Ha a $q$-t az $(rq)$ ponton és a $q'$ egyenesen keresztül menő síkban az $(rq)$ pont körül forgatjuk, akkor minden új helyzetében oly $q$ egyenest nyerünk, mely polárisával $q'$-sel együtt metszi a felvett $rr'$ polárispárt, és mindezek a $qq'$ polárispárok a $gg'$ alkotópárral meghatároznak egy $S^{(2)}$ hyperboloidot. E szerint a $H^{(2)}$ hyperboloidot metsző $rr'$ polárispáron és a $gg'$ alkotókon, tehát az $rr'gg'$ négyszögön, úgyszintén az $rr'$ polárispáron és a $hh'$ alkotókon, tehát az $rr'hh'$ négyszögön, $\infty^1$ oly $S^{(2)}$ hyperboloid megy keresztül, melyen a $H^{(2)}$-re vonatkozólag polárispárok vannak.

Ha végre az $r$ egyenes érinti a $H^{(2)}$ hyperboloidot a $(gh)$ pontban, tehát az $r$ és annak polárisa $r'$, a $(gh)$ ponton megy keresztül és ennek $[gh]$ érintősíkjában van, akkor ama $S^{(2)}$ hyperboloidok, melyek az $rr'$ metsző polárispárokat tartják, síkpárokká fajulnak el. E síkpároknak egyik síkja mindig a $[gh]$ sík, a másik pedig vagy az $r$-n, vagy a $r'$-ön megy keresztül.

Ez utóbbi eredményeket egybefoglalva mondhatjuk:

*Minden $q$ egyenesen és annak a $H^{(2)}$ hyperboloidra vonatkozó $q'$ polárisán $\infty^1$ oly $S^{(2)}$ hyperboloid megy keresztül, melynek minden alkotójához a $H^{(2)}$-re vonatkozó polárisa szintén az $S^{(2)}$-n van. Ezek az $S^{(2)}$ hyperboloidok két részre oszlanak, melyek egy-egy négyszög oldalain mennek át; mindkét négyszögnek egy pár szemben fekvő oldala a $qq'$, a másik szemben fekvő oldalpárja pedig a $H^{(2)}$-nek az egyik és másik rendszerhez tartozó az a két alkotója, mely a $qq'$ polárispárt metszi. Ez a két négyszög valós, vagy részben képzetes, vagy végre elkorcsosulva egybeesik, a szerint, a mint a $qq'$ polárispár a $H^{(2)}$-őt valós vagy képzetes pontokban metszi, vagy végre érinti. Ez utóbbi esetben az $S^{(2)}$ hyperboloidok síkpárokká korcsosulnak el.*

Ezt még következőkép is kifejezhetjük:

*Minden hyperboloidnak egy polárispárjához $\infty^2$ polárispár szerkeszthető, mely amavval hyperboloidikus fekvésű. Mindezek a hyperboloidikus fekvésű polárispárok $\infty^1$ hyperboloidon vannak, és azokon involuciós sugárseregeket képeznek; e sugárseregeknek vezető seregei szintén polárispárokból állanak és e polárispárok ezekben a sugárseregekben szintén involuciós seregeket alkotnak.*

*A $H^{(2)}$ hyperboloidnak $\infty^4$ polárispárja $\infty^4$ hyperboloidon, $S^{(2)}$-n, van, és ezeknek mindegyikén involuciós sugársereget képez; ezek az $S^{(2)}$ hyperboloidok a $H^{(2)}$-őt alkotópárokban metszik. Minden egyenesen $\infty^1$, a tér minden pontján, valamint a $H^{(2)}$-nek minden*

*alkotóján* $\infty^3$, *végre a* $H^{(2)}$*-nek két ugyanegy rendszerhez tartozó alkotóján* $\infty^2$ *ily* $S^{(2)}$ *hyperboloid megy keresztül.*

Láttuk ugyanis, hogy minden polárispáron $\infty^1$ számú $S^{(2)}$ hyperboloid megy keresztül és minden $S^{(2)}$-n $\infty^1$ polárispár van. Ebből következik, hogy az $S^{(2)}$ hyperboloidok száma ugyanannyi, mint a polárispárok száma, azaz : $\infty^4$.

Egy sugárnyalábnak minden sugarán és annak polárisán $\infty^1$ számú $S^{(2)}$ hyperboloid vonul keresztül; ezért a sugárnyaláb középpontján, azaz egy tetszésszerinti $P$ ponton, keresztül menő $S^{(2)}$ hyperboloidok száma $\infty^3$. Ha ez a $P$ pont a $H^{(2)}$ hyperboloid $g$ és $h$ alkotójának $(gh)$ metszőpontjában van, akkor e $P$ nyaláb minden sugarán átmenő $S^{(2)}$ tartalmazza a $H^{(2)}$-nek $g$ vagy $h$ alkotóját is; tehát $\infty^3$ oly $S^{(2)}$ hyperboloid van, mely a $H^{(2)}$-nek $g$ vagy $h$ alkotóján megy keresztül. Ha végre a $H^{(2)}$ hyperboloid egy $g$ alkotójának valamely pontját egy másik $g'$ alkotójának pontjaival összekötjük, akkor az összekötő egyenesnek mindegyikén $\infty^1$ $S^{(2)}$ hyperboloid megy keresztül, mely a $gg'$ alkotópárt tartalmazza. Ezért a $gg'$ alkotópáron keresztül menő $S^{(2)}$ hyperboloidok száma $\infty^2$.

## 12. §. A hyperboloid fősíkjai és tengelyei.

1. Úgy mikép a II. r. kúp, a hyperboloid is bizonyos egyenesek és síkokra vonatkozólag symmetrikus fekvésű; ezeknek fölkeresése és a hyperboloidhoz való helyzeti viszonyának megállapítása képezi a következőknek tárgyát.

Legyen a $H^{(2)}$ hyperboloid a $h_1h_2h_3$ alkotókkal megadva. A végtelen távol fekvő sík $\varepsilon_\infty$, ezeket a $h_1h_2h_3$ alkotókat három végtelen távol fekvő pontban metszi, melyek vagy ugyanegy egyenesen, $g_\infty$-en, feküsznek és ekkor az $\varepsilon_\infty$ érintősíkja a hyperboloidnak, vagy pedig a $h_1h_2h_3$ egyeneseknek végtelen távol levő pontjai nincsenek ugyanegy egyenesen, és ekkor az $\varepsilon_\infty$ sík nem érinti, hanem egy $k^{(2)}_\infty$ kúpszelet szerint metszi a hyperboloidot. Az első esetben, a midőn $h_1h_2h_3$, és így valamennyi a $h$ rendszerhez tartozó alkotó végtelen távol levő pontja a $g_\infty$ egyenesen van, tehát úgy a felvett három, mint minden e rendszerhez tartozó $h$ alkotó egy síkkal párhuzamos, a felület egy különös hyperboloid, melyet *hyperbolikus paraboloidnak* nevezünk; míg a második, amannál általánosabb esetben, a felület a tulajdonképeni (*egyágú*) *hyperboloid.*

Az előbbiekben talált tételek a hyperboloidra és a hyperbolikus paraboloidra vonatkozólag egyaránt érvényesek; most azonban a

tárgyalást a dolog természete folytán ketté választjuk, s előbb a hyperboloiddal, aztán a hyperbolikus paraboloiddal foglalkozunk. —

A végtelen távol fekvő $\varepsilon_\infty$ sík pólusát a hyperboloidra vonatkozólag *középpontnak*, minden a középponton keresztül menő egyenest és síkot a hyperboloid *átmérőjének*, illetve *átmérősíkjának* nevezünk.

Hogy a $h_1h_2h_3$ alkotóktól meghatározott hyperboloidnak $M$ középpontját megtaláljuk, megszerkesztjük a $h_1h_2$ és $h_3$ alkotók végtelen távol fekvő pontjain keresztül menő érintősíkokat; ezeknek metszőpontja, mint az $\varepsilon_\infty$ sík pólusa, a keresett középpont $M$. A $h_2$ és a $h_3$ egyeneseken keresztül menő és a $h_1$-gyel párhuzamos síkok, egy a $h_1$-gyel párhuzamos és a $h_2$ és $h_3$-mat metsző $g_1$ egyenesben találkoznak; $[g_1h_1]$ sík a hyperbola érintősíkja a $h_1$ végtelen távoli pontjában $(g_1h_1)$-ben. Ugyanígy, ha a $g_2$ egyenes párhuzamos a $h_2$-vel és metszi a $h_3$ és $h_1$-et, továbbá ha a $g_3$ párhuzamos a $h_3$-mal és metszi a $h_1$ és $h_2$-őt, úgy a $[g_2h_2]$, $[g_3h_3]$ síkok a hyperboloid érintősíkjai a $h_2$, $h_3$ végtelen távoli pontjaiban $(g_2h_2)$ és $(g_3h_3)$-ban, és a $[g_1h_1]$, $[g_2h_2]$, $[g_3h_3]$ síkok egymást a hyperboloidnak $M$ középpontjában metszik.

Ez az $M$ középpont úgy a $g_1h_1$, mint a $g_2h_2$ és $g_3h_3$ egyenesektől egyenlő távolságra van, mert az $M$ polárissíkja végtelen távol lévén, pl. a $g_1h_1$ egyenesek minden egyenesről, mely a $[g_1h_1]$ síkban az $M$ ponton keresztül lesz vezetve, oly vonaldarabot metszenek le, mely az $M$-ben feleztetik.

A hyperboloidon végtelen távol levő $k_\infty^{(2)}$ kúpszelet pontjainak érintősíkjai egy II. r. kúpot $M.k_\infty^{(2)}$-t burkolnak, mely a hyperboloidnak *asymptótikus kúpja*. Ennek a kúpnak csúcsa az $M$ középpont, alkotói pedig a hyperboloid egyik és másik rendszerének alkotóival párhuzamosak és felezik e párhuzamos alkotóktól határolt szalagokat.

Minthogy az asymptótikus kúp a hyperboloidot a $k_{(2)}$ kúpszeletben érinti, a hyperboloidnak és asymptótikus kúpjának minden síkmetszése oly két kúpszelet, melyeknek végtelen távoli pontjai és e pontoknak érintői közösek, azaz melyek hasonlók és hasonló fekvésűek. A metszési görbék tehát egyidejüleg ellipsisek, hyperbolák, parabolák, vagy ezeknek elkorcsosulásai. Igy pl. ha a metszősík a hyperboloid $M$ középpontján megy keresztül, tehát az $M.k_\infty^{(2)}$ asymptótikus kúpot, két képzetes, két valós, de egybeeső, vagy két valós, de különböző alkotó szerint metszi, ugyanekkor a sík a hyperboloidot ellipsis, két párhuzamos egyenes, illetve hyberbola szerint metszi; és ha a metszősík a hyperboloidnak egy alkotóján

megy keresztül, akkor az a hyperboloidot még egy alkotóban, az asymptótikus kúpot pedig hyperbola vagy két egybeeső egyenes (kúpalkotó) szerint metszi stb.

2. A hyperboloid asypmtótikus kúpja $M.k_{\infty}^{(2)}$, mint minden II. r. kúp, polárisnyalábot indukál. E polárisnyalábban, azaz az $M.k_{\infty}^{(2)}$ kúpra vonatkozó, minden összetartozó polárissugár és polárissík, kapcsolt polárissugárpár, kapcsolt polárissíkpár, és polárisháromél: a hyperboloidnak átmérője és az ahhoz *kapcsolt* átmérősíkja, illetve kapcsolt átmérőpárja, kapcsolt átmérősíkpárja, és kapcsolt átmérő-háromele. E szerint a hyperboloid minden $d$ átmérőjéhez kapcsolt átmérősík $\delta$, a $d$ átmérő végtelen távol fekvő pontjának polárissíkja, és a $\delta$ átmérősíkhoz kapcsolt átmérő $d$, a $\delta$ átmérősík végtelen távol fekvő egyenesének polárisa; továbbá a $d$ átmérőhez kapcsolt minden átmérő a $\delta$ síkban, és a $\delta$ átmérősíkhoz kapcsolt minden sík, mely a $d$-n megy keresztül; végre minden kapcsolt átmérőpár $d_1 d_2$ a $\delta$ síkban, a $d$-vel együtt egy $dd_1d_2$ kapcsolt átmérő-háromélnek három éle.

A $d$ átmérőnek és a hozzá kapcsolt $\delta$ átmérősíknak az a tulajdonsága van, hogy minden a $\delta$-val párhuzamos sík a hyperboloidot és annak asymptótikus kúpját hasonló és hasonló (vagy perspektiv) fekvésű és közös középpontú kúpszeletekben metszik, mely középpont a $d$ átmérőn van; továbbá a $d$ átmérővel párhuzamos húroknak felezőpontjai, tartozzanak azok a húrok akár a hyperboloidhoz, akár annak asymptótikus kúpjához, a $\delta$ síkban feküsznek.

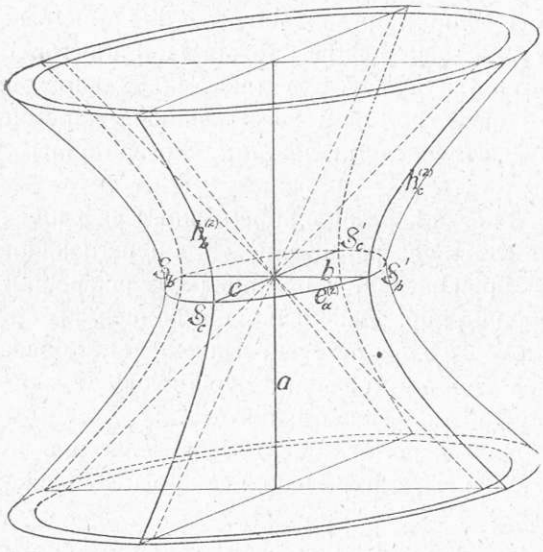
A hyperboloid minden kapcsolt átmérő-háromélének három lapja s a végtelen távol fekvő sík, a hyperboloid egy poláristetraederének négy lapját képezi.

Minthogy a hyperboloid minden poláristetraederének két pár átellenes éle a hyperboloidot valós, a harmadik pedig képzetes pontokban metszi, azért az $MA_{\infty}B_{\infty}C_{\infty}$ poláristetraeder, melynek az $M$ csúcsa a hyperboloid középpontja, a többi három csúcsa pedig a végtelen távol fekvő $\varepsilon_{\infty}$ síkban van, olyan tetraeder, hogy négy éle, pl. az $MB_{\infty}$, $MC_{\infty}$, $A_{\infty}B_{\infty}$, $A_{\infty}C_{\infty}$ a hyperboloidot valós, az $MA_{\infty}$ és $B_{\infty}C_{\infty}$ éle pedig képzetes pontpárban metszi. Az $MA_{\infty}B_{\infty}$ és $MA_{\infty}C_{\infty}$ átmérősík tehát a hyperboloidot egy-egy hyperbolában, az $MB_{\infty}C_{\infty}$ sík pedig ellipsis szerint metszi. Vagy általánosabban kifejezve: a hyperboloid minden kapcsolt átmérő-háromélének két lapja a hyperboloidot hyperbolában, a harmadik lapja pedig ellipsisben metszi.

3. A hyperboloid asymptótikus kúpjának főtengelyei és fősíkjai egyszersmind *főtengelyei és fősíkjai a hyperboloidnak*; a főten-

gelyeknek metszőpontjai, és a fősíkoknak metszővonalai a hyperboloiddal, annak *csúcsai*, illetve *főmetszései*. A hyperboloid tengelyei és fősíkjai tehát oly kapcsolt átmérő-háromélnek élei és lapjai, mely orthogonalis. E fősíkok a hyperboloid asymptótikus kúpját és ezzel együtt magát a hyperboloidot is symmetrikus részekre osztják. A hyperboloidnak az asymptótikus kúp elliptikus tengelyére merőleges főmetszése ellipsis, míg a hyperbolikus tengelyekre merőleges főmetszések oly hyperbolák, melyeknek asymptótái az asymptótikus kúpnak a síkokban fekvő alkotói.

A hyperboloidról következőképen szerzünk fogalmat: Képzelünk egy II. r. kúpot; ennek $[ab]$ és $[ac]$ fősíkjaiban fekvő $s_1 s_2$ és $r_1 r_2$ alkotói a kúpnak $\bar{a}$ elliptikus tengelyével $\psi$ és $\vartheta$ szöget képeznek. Az $\bar{a}$ tengelyre merőleges $[bc]$ fősíkban oly $e_a^{(2)}$ ellipsist veszünk, melynek tengelyei egybeesnek a kúpnak $\bar{b}$ és $\bar{c}$ tengelyeivel és $b$, $c$ hosszuságuk pedig a $b.cotg\ \psi = c.cotg\ \vartheta$ egyenletnek eleget tesz. Ez az $e_a^{(2)}$ ellipsis tehát hasonló a kúpnak elliptikus tengelyére merőleges síkmetszésével. Az $[ab]$ fősíkban leirunk egy $h_c^{(2)}$ hyperbolát, melynek $S_b S'_b$ csúcsai egybeesnek az $e_a^{(2)}$-nak két csúcsával és asymptótái az $s_1 s_2$ kúpalkotók, és az $[ac]$ fősíkban leírunk egy $h_b^{(2)}$ hyperbolát, melynek $S_c S'_c$ csúcsai egybeesnek az $e_a^{(2)}$-nak másik két csúcsával és asymptótái az $r_1 r_2$ kúpalkotók. E hyperbolák tengelyeinek négyzetei $b^2$, $— b^2\ cotg^2\ \psi$, illetve $c^2$, $— c^2\ cotg^2\ \vartheta$. Ha ezután az $e_a^{(2)}$ síkjával párhuzamos síkokban oly $e^{(2)}$ ellipsiseket képzelünk, melyeknek csúcsai a $h_b^{(2)}$, $h_c^{(2)}$ hyperbolákon vannak, úgy ezek az ellipsisek leirják azt a hyperboloidot, melyeknek csúcsai az $S_b S'_b S_c S'_c$ pontok, melynek főmetszései $e_a^{(2)}$, $h_b^{(2)}$ $h_c^{(2)}$ kúpszeletek, és melynek asymptotikus kúpja a felvett kúp. (20. ábra.)




20. ábra.

Ha az előbbi $e^{(2)}$ ellipsis egy pontjának távolsága a hyperboloid $[\overline{bc}]$, $[\overline{ca}]$, $[\overline{ba}]$ fősíkjától $x, y, z$, és $b \operatorname{cotg} \psi = c \operatorname{cotg} \vartheta = a$, akkor az ellipsisnek tengelyei $b\sqrt{a^2 + x^2} : a$ és $c\sqrt{a^2 + x^2} : a$ hosszúságúak; az $e^{(2)}$ ellipsisnek egyenlete pedig vonatkoztatva saját tengelyeire

$$\frac{y^2}{\frac{b^2}{a^2}(a^2 + x^2)} + \frac{z^2}{\frac{c^2}{a^2}(a^2 + x^2)} = 1.$$

E kifejezés, mely ekkép is irható

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

és egy összefüggést ad a hyperboloid tetszésszerinti pontjának a fősíkoktól mért $x, y, z$ távolságai, és az $a, b, c$ mennyiségek között: a *hyperboloidnak egyenlete vonatkoztatva a főtengelyeire.*

De ha a hyperboloidot, mint egyenes vonalakat tartó felületet, tehát, mint a hyperboloidon fekvő két sugársereg sugarait akarjuk látni, akkor az előbbi $e_a^{(2)}$ ellipsis egy változó átmérőjének végpontjain keresztül $g_i g'_i h_i h'_i$ párhuzamosakat vezetünk azokhoz az $l_i l'_i$ kúpalkotókhoz, melyekben a felvett átmérőn keresztül menő érintősíkok az asymptótikus kúpot érintik. Ama négy egyenes közül oly kettő, mely nem párhuzamos és nem metsző, mint $g_i g'_i$ az egyik sugársereghez, a másik kettő $h_i h'_i$ pedig a másik sugársereghez tartozik. —

(A 11. §. 5. pontjából következik: hogy ha egy orthogonalis háromélet és egy oly $g_1$ egyenest veszünk fel, mely sem nem párhuzamos a háromél lapjaival, sem nem metszi annak éleit, akkor a $g_1$-nek $h_2$, $h_3$, $h_4$, tükörképei ama háromél lapjaira vonatkozólag, és $h_1$ symmetralisa a háromél csúcsára vonatkozólag, a $g_1$-gyel egy hyperboloidon vannak, melynek fősíkjai a háromél lapjai. A $h_1 h_2 h_3 h_4$ egyenesnek még más három transversalisuknak, $g_2 g_3 g_4$-nek, is tükörképei a háromél lapjaira és symmetralisai annak csúcsára nézve úgy, hogy e nyolcz egyenes $g_1 g_2 g_3 g_4$, $h_1 h_2 h_3 h_4$ egymást négy végtelen távol fekvő és tizenkét végesben fekvő pontban metszi, mely utóbbiak a hyperboloid főmetszéseibe írt derékszögű négyszögeknek szögpontjai. A hyperboloidon $\infty^1$ ily alkotónégyesek találhatók a két rendszerben; a hyperboloidnak $S_b S'_b$ csúcsain és az $S_c S'_c$ csúcsain keresztül menő alkotók ama alkotó-négyesek elkorcsosulásainak tekintendők.)

## 13. §. Különös hyperboloidok.

1. Ha a hyperboloidnak asymptótikus kúpja nem általános, hanem különös kúp, akkor maga a hyperboloid is különös tulajdonság által tünik ki, amely annak asymptótikus kúpjából származik; mint ilyen *különös hyperboloidnak* nevezhető. Ezek közül a különös hyperboloidok közül ismertebbek azok, melyeknek asymptotikus kúpja orthogonális kúp, egyenoldalú kúp, vagy forgáskúp, s mely hyperboloidokat ezeknek megfelelőleg *orthogonális hyperboloidnak, egyenoldalú hyperboloidnak*, végre *forgáshyperboloidnak nevezünk.*

Ezeknek a különös hyperboloidoknak száma $\infty^1$-szer annyi, mint az ugyanily nevü II. r. kúpoknak, azaz az illető felületek asymptótikus kúpjainak száma.

Van tehát $\infty^8$ *orthogonális és ugyanannyi egyenoldalú hyperboloid, továbbá* $\infty^7$ *forgáshyperboloid.*

Lássuk először mily különös tulajdonságai vannak az *orthogonális hyperboloidnak?*

A hyperboloid minden $g_i$ alkotójával párhuzamosan vezethető egy $\bar{g}_i$ alkotó annak asymptótikus kúpján. Tekintsük a hyperboloidon fekvő $h$ sugársereget oly két projektiv síksor képződményének, melynek tengelye a $g_1$ és a $g_2$, és fektessünk a síksorok síkjaival párhuzamosan síkokat a $\bar{g}_1, \bar{g}_2$ kúpalkotókon keresztül. Ez utóbbi síksorok szintén projektivek lesznek és képződményük a hyperboloid asymptótikus kúpja. A hyperboloidnak minden $h_i$ alkotójával, melyben a $g_1$ és $g_2$ síksorok megfelelő $[g_1 h_i]$ $[g_2 h_i]$ síkjai egymást metszik, párhuzamos az az $l_i$ alkotó az asymptótikus kúpon, melyben az előbbi síkpárral párhuzamos $[\bar{g}_1 l_i]$, $[\bar{g}_2 l_i]$ síkpárok egymást metszik. És fordítva: ha az $l_i$ alkotó befutja az asymptótikus kúpot, a változó $[\bar{g}_1 l_i]$, $[\bar{g}_2 l^i]$ síkpárok projektiv síksorokat írnak le; a $g_1$ és $g_2$ hyperboloid-alkotókon keresztül menő és ama síksorok síkjaival párhuzamos $[g_1 h_i]$, $[g_2 h_i]$ síkpárok szintén projektiv síksorokat írnak le, melyeknek képződménye a hyperboloid.

Induljunk ki ezek után egy orthogonalis kúpból, melynek fősíkjaiban fekvő $s_1 s_2$, $r_1 r_2$ alkotók a kúp elliptikus tengelyével, $\bar{a}$-val, oly $\psi$, $\vartheta$ szögeket képeznek, hogy

$$cotg^2\vartheta - cotg^2\psi = 1.$$

És ha ez orthogonális kúpnak az $\bar{a}$ elliptikus tengelyére merőleges metszése az $e_1^{(2)}$ ellipsis, melynek fő- és melléktengelye $2b_1$, $2c_1$,

akkor e kúpra vonatkozólag (7. §. 4. p. végén)

$$tg^2\psi = \frac{b_1^2 - c_1^2}{c_1^2}, \quad tg^2\vartheta = \frac{b_1^2 - c_1^2}{b_1^2}.$$

A kúp $M$ csúcsán keresztül menő és az $e_1^{(2)}$ síkjával párhuzamos síkban egy $e_a^{(2)}$ ellipsist veszünk fel, mely hasonló és hasonló fekvésű az $e_1^{(2)}$-gyel, melynek középpontja az $M$, fő- és mellék-tengelye $2b$ és $2c$, végre csúcspontjai ama tengelyeken $S_bS'_b$, $S_cS'_c$. Ha ezt az $e_a^{(2)}$ ellipsist oly hyperboloid elliptikus főmetszésének tekintjük, melynek asymptótikus kúpja az $M.e_1^{(2)}$ orthogonális kúp, akkor a hyperboloid orthogonális lesz.

E hyperboloid másik két főmetszésének a $h_b^{(2)}$ és $h_c^{(2)}$ hyperbolának asymptótái az $r_1r_2$, illetve az $s_1s_2$ kúpalkotók, csúcsai $S_cS'_c$ és $S_bS'_b$, végre e hyperbolák tengelyeinek négyzete:

$$\text{a } h_b^{(2)}\text{-nél: } a^2 = c^2cotg^2\vartheta = \frac{c^2b^2}{b^2c^2}, \text{ és } c^2,$$

$$\text{a } h_c^{(2)}\text{-nél: } a^2 = b^2cotg^2\psi = \frac{c^2b^2}{c^2b^2}, \text{ és } b^2.$$

Ebből következik, hogy *az orthogonalis hyperboloid 2a, 2b, 2c főtengelyei között a következő reláczió van:*

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} = 0,$$

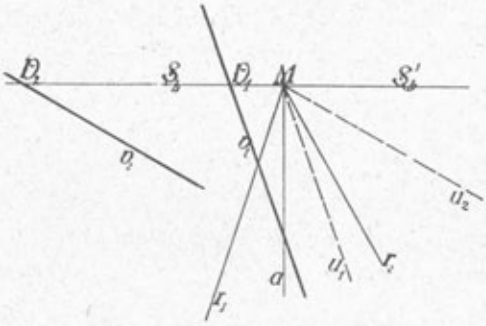
hol $b$ és $c$ a hyperboloid elliptikus főmetszésének fél fő- és mellék-tengelye, $-a^2$ pedig a hyperboloidnak e főmetszésére merőleges tengelyén lévő kapcsolt pólusokból álló involucziónak hatványa.

Jelöljük a hyperboloid $S_b$, $S_b'$ csúcsain keresztül menő s így az $r_1r_2$-vel párhuzamos alkotókat $g_1h_2$, $g_2h_1$-gyel ($r_1 \parallel g_1 \parallel h_1$, $r_2 \parallel g_2 \parallel h_2$).

Az $M.e_1^2$ kúpon változó $l_i$ alkotót az $r_1r_2$-vel összekötő $[r_1l_i]$ $[r_2l_i]$ síkok egymásra merőlegesek, mert a kúp orthogonális (7. §. 4.). És ha a $g_1g_2$ alkotókon keresztül az $[r_1l_i]$, $[r_2l_i]$ síkokkal párhuzamos síkokat vezetünk, akkor ezek szintén merőlegesek egymásra és egymást a hyperboloid változó $h_i$ alkotójában metszik, mely az $l_i$ kúpalkotóval párhuzamos. E szerint: ha a $g_1$-en keresztül menő síkokat a $g_2$-ből reájuk bocsátott merőleges síkokkal metszük, úgy a metsző egyenesek az orthogonális hyperboloidnak alkotói. — Ha fordítva, két tetszésszerinti általános helyzetű egyenesből, $g_1$ és $g_2$-ből indulunk ki s a $g_1$-en keresztül menő síkokat, a $g_2$-ből reájuk bocsátott merőleges síkokkal metszük, akkor a metszőegyenesek, mert a $g_1g_2$ síksorok projektivek, oly hyperboloidnak lesznek alkotói,

mely orthogonális. Ugyanis a $g_1g_2$ egyenesek normalis transversalisa a $g_1g_2$-t az $S_bS'_b$ pontokban metszi. Ha az $S_bS'_b$ vonaldarab $M$ felezőpontján keresztül a $g_1$ és $g_2$-vel párhuzamosan haladó $r_1r_2$ egyenesek egyikén keresztül egy síksort, a másikán egy erre merőleges síksort fektetünk, akkor e két síksor képződménye oly orthogonalis kúp, mely az előbbi hyperboloidnak asymptotikus kúpja. Ezért általánosan mondhatjuk:

*Két síksort akképen lehet egymásra projektiv vonatkoztatni, hogy a megfelelő síkok egymásra merőlegesek legyenek. Ily két síksor képződménye orthogonalis kúp vagy orthogonalis hyperboloid, a szerint, amint a síksorok tengelyei egymást metszik, vagy nem metszik. Minden sík, mely a síksorok bármelyikének tengelyére merőleges, az illető képződményt kör szerint metszi.*




21. ábra.

Ha a két síksor tengelye egymásra merőleges, akkor azoknak képződménye két egymásra merőleges sík; ezek az egyes tengelyeken keresztül menőleg a másik tengelyre merőlegesek.

2. Vegyünk fel az előbbi $M.e_1^{(2)}$ orthogonalis kúpon két alkotót $s$ és $t$-t, mely alkotók az $[r_1r_2]$ főSík irányában symmetrikusok. Találtuk (7. §. 4.), hogy az orthogonalis kúpnak változó $l_i$ alkotóit az $s$ és $t$ alkotókkal összekötő $[sl_i]$, $[tl_i]$ síkok egyenlően projektiv síksort képeznek. Nevezzük az előbbi orthogonalis hyperboloidnak az $s$ és $t$ alkotókkal párhuzamos $g$ alkotóit $g_s$ és $g_t$-nek. A $g_s$ és $g_t$ alkotókon keresztül menő és az $[sl_i]$, $[tl_i]$ síkokkal párhuzamos síkok egymást a hyperboloid $h_i$ alkotóiban metszik, s a $[g_sh_i]$, $[g_th_i]$ síkok sora úgy, mikép az $[sl_i]$, $[tl_i]$ síkok sora szintén egyenlően projektiv. Ezért:

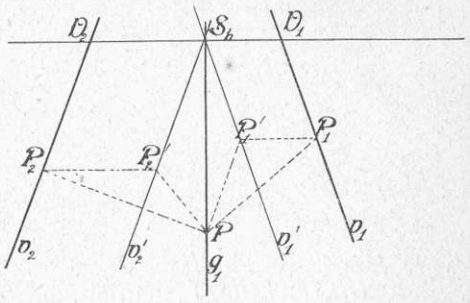
*Két egyenlően projektiv síksor képződménye orthogonalis kúp vagy orthogonalis hyperboloid, a szerint, a mint azoknak tengelyei egymást metszik vagy nem metszik.*

Vegyünk fel folytatólag (21. ábra) az $M.e_1^{(2)}$ asymptotikus kúpnak az $S_bMS'_b \equiv b$ főtengelyére merőleges $[r_1r_2]$ főSíkjában oly két sugarat $u_1$ és $u_2$-őt, melyek az $r_1r_2$ kúpalkotókat harmónikusan választják el. Ha az $l_i$ a kúpnak tetszésszerinti alkotója, akkor

$$sin(l_iu_1) : sin(l_iu_2) = \text{állandó} = \lambda.$$

Válasszunk most az $S_b S'_b$ egyenesen oly két pontot, $V_1 V_2$-t, hogy ezek az $S_b S'_b$ pontpárt harmónikusan válasszák el, és az $S_b V_1 : S_b V_2$ viszony absolut értéke legyen egyenlő a $\lambda$-val. Húzzunk a $V_1$, $V_2$ pontokon keresztül az $u_1$, illetve az $u_2$-vel párhuzamosakat és jelöljük ezeket $v_1, v_2$-vel. A $v_1 v_2$ egyenespár polárispárja a hyperboloidnak. Ugyanis a $V_2$ pont polárissíkja merőleges az $S_b S'_b$ főtengelyre és keresztül megy a $V_1$ ponton, tehát egyszersmind a $v_1$ egyenesen. Másrészt a $u_2$ egyenesnek polárissíkja az $M . e_1^{(2)}$ kúpra, tehát egyszersmind az $u_2$ és $v_2$ egyenes közös végtelen távol fekvő pontjának polárissíkja a hyperboloidra vonatkozólag az $S_b S'_b u_1 v_1$ sík. Minthogy a $v_2$ egyenes $V_2$ pontjának és a végtelen távoli pontjának polárissíkja a hyperboloidra vonatkozólag a $v_1$ egyenesen megy keresztül, azért a $v_1$ és $v_2$ egyenes polárispárja a hyperboloidnak.

A hyperboloid minden $h_i$ (és minden $g_i$) alkotója a $v_1 v_2$ polárisokhoz oly szögek alatt hajlik, melyekre nézve $sin(h_i v_1) : sin(h_i v_2) = \lambda$, mert egyrészt a $h_i$ (és $g_i$) párhuzamos az $M . e_1^{(2)}$ kúpnak egy $l_i$ alkotójával, másrészt $u_1 \parallel v_1$, $u_2 \parallel v_2$ és e kúpra nézve $sin(l_i u_1) sin(l_i u_2) = \lambda$.



22. ábra.

Folytatólag kimutatható, hogy a hyperboloid pontjainak a a $v_1 v_2$ egyenesektől mért távolságai is állandó viszonyt adnak, mely egyenlő a $\lambda$-val. Mutassuk ki először a hyperboloidnak e tulajdonságát az $M . e_1^{(2)}$ kúp $r_1 r_2$ alkotóival párhuzamos, tehát az $S_b S'_b$ pontokon keresztül menő, $g_1 g_2 h_1 h_2$ alkotóknak pontjaira.

Húzzuk e végből (22. ábra) az $S_b$ (vagy az $S'_b$) ponton keresztül a $v'_1$ és a $v'_2$ egyenest akképen, hogy $v'_1 \parallel v_1$, $v'_2 \parallel v_2$, és bocsássunk a $g_1$ (vagy $h_2$, illetőleg $g_2$, $h_1$) tetszésszerinti $P$ pontjából a $v_1 v'_1 v_2$ és $v'_2$-re merőlegeseket, melyeknek talppontja a $P_1$, $P'_1$, $P_2$ és $P'_2$. A $PP_1P'_1$, $PP_2P'_2$ háromszögek a $P'_1$ és a $P'_2$ csúcsnál derékszögűek, mert a $P_1P'_1$, $P_2P'_2$ egyenesek a $[v'_1 v'_2 g_1]$ síkra merőlegesek; továbbá $S_b V_1 = P'_1 P_1$, $S_b V_2 = P'_2 P_2$.

Másrészt

$$\lambda = PS_b sin(g_1 v'_1) : PS_b sin(g_1 v'_1) = PP' : PP'_2$$

és

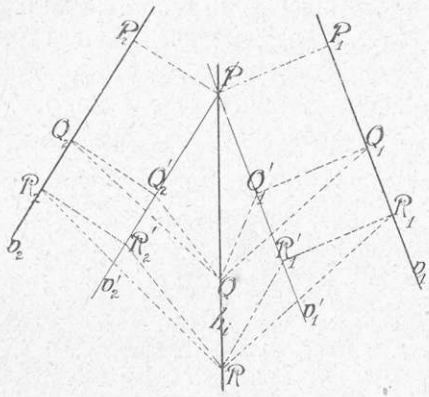
$$\lambda = S_b V_1 : S_b V_2 = P_1 P'_1 : P_2 P'_2,$$

tehát a $PP_1P'_1$, $PP_2P'_2$ háromszögek hasonlók és így

$$PP_1 : PP_2 = \lambda,$$

azaz: a $g_1$ (és a $h_2g_2h_1$) egyenes bármely pontjának a $v_1v_2$ egyenesektől mért távolsági viszonya egyenlő $\lambda$-val.

3. Vegyünk fel ezután (23. ábra) egy tetszésszerinti $h_i$ alkotót a hyperboloidon, mely az előbbi $g_1g_2$ alkotókat a $PQ$ pontokban metszi és legyen az $R$ pont a $h_i$-nek egy szabadon választott pontja.



23. ábra.

Húzzunk a $P$ ponton keresztül a $v_1v_2$-vel párhuzamos $v'_1v'_2$ egyeneseket és messük a $v_1$ és $v'_1$-et, a $P$, $Q$ és $R$ pontokból azokra bocsátott merőleges síkokkal, a $P_1$ és $P$, $Q_1$ és $Q'_1$, végre az $R_1$ és $R'_1$ pontokban; a $v_2$ és $v'_2$-et, a $P$, $Q$ és $R$ pontokból azokra bocsátott merőleges síkokkal a $P_2$ és $P$, $Q_2$ és $Q'_2$, végre az $R_2$ és $R'_2$ pontokban.

A $QQ_1Q'_1$, $QQ_2Q'_2$ háromszögekről és az $RR_1R'_1$, $RR_2R'_2$, háromszögekről kimutatjuk, hogy hasonlók. Ugyanis közvetlen látjuk, hogy

$$\begin{array}{ll} PP_1 \# Q'_1Q_1 \# R'_1R_1, & PP_2 \# Q'_2Q_2 \# R'_2R_2; \\ QQ'_1 \parallel RR'_1 & QQ'_2 \parallel RR'_2 \\ QQ'_1 = PQsin(h_iv'_1), & RR'_1 = PRsin(h_iv'_1) \\ QQ'_2 = PQsin(h_iv'_2), & RR'_2 = PRsin(h_iv'_2) \end{array}$$

és a $PQ$ pontoknak, valamint a $h_i$ alkotónak tulajdonsága folytán

$$\lambda = PP_1 : PP_2 = QQ_1 : QQ_2 = QQ'_1 : QQ'_2 = RR'_1 : RR'_2$$

tehát

$$\lambda = Q'_1Q_1 : Q'_2Q_2 = QQ'_1 : QQ'_2 = QQ_1 : QQ_2$$

és

$$\lambda = R'_1R_1 : R'_2R_2 = RR'_1 : RR'_2.$$

Az első proporcióból már következik, hogy $QQ_1Q'_1 \sim QQ_2Q'_2$, a másodikból pedig, mert

$$\sphericalangle QQ'_1Q_1 = RR'_1R_1, \quad \sphericalangle QQ'_2Q_2 = RR'_2R_2,$$

következik, hogy $RR_1R'_1 \sim RR_2R'_2$.

Ennélfogva

$$\lambda = RR_1 : RR_2,$$

azaz: a $h_i$ egyenes bármely $R$ pontja távolának viszonya a $v_1$, $v_2$ egyenesektől szintén egyenlő $\lambda$-val. E szerint:

*Az orthogonalis hyperboloid pontjainak két egyenestől mért távolságai viszonya állandó* (Schröter; Oberfl. zweiter Ord. 26. §).

E két egyenes $v_1 v_2$, a hyperboloidnak arra a $b$ főtengelyére merőleges és e főtengelyt metsző polárispárja, mely főtengely párhuzamos a hyperboloid körmetsző síkjaival.

Azonban nem minden a $\overline{b}$ főtengelyre merőleges polárispárnak van az a tulajdonsága, melyet a tétel kifejez, hanem csak annak, mely a $\overline{b}$-t a $\overline{b}$-vel ugyanegy síkban fekvő $e_a^{(2)}$, $h_c^{(2)}$ főmetszéseknek $W_1 W'_1$, $W_2 W'_2$ gyujtópontjaitól határolt $W_1 W_2$, vagy $W'_1 W'_2$ vonaldarabokon metszik.

Hogy ezt kimutassuk, gondoljunk vissza a hyperboloid asymptótikus kúpjára, $M.e_1^{(2)}$-re. E kúp pontjainak az $u_1, u_2$ egyenespártól mért távolságai viszonya $\lambda$ állandó, hol az $u_1, u_2$ egyenesek csak annak a föltételnek vannak alávetve, hogy e kúp $r_1, r_2$ alkotóit harmónikusan választják el. Ama állandó viszony $\lambda$ azonban változik, a mint az $u_1$-nek más és más helyzetet adunk az $[r_1 r_2]$ fősíkban; és $\lambda$ legkisebb értékét akkor éri el, a midőn $u_1$ a kúp elliptikus tengelye, $u_2$ pedig az $[r_1 r_2]$ fősíkban fekvő másik főtengely. E legkisebb értéke $\lambda$-nak $= tg\vartheta = \sqrt{b_1^2 - c_1^2} : b_1$, vagy a mi ugyanaz $\sqrt{b^2 - c^2} : b$, ha $\vartheta$ az $r_1, r_2$ alkotók hajlásszöge a kúp elliptikus tengelyéhez.

Ha az $e_a^{(2)}$ ellipsis egyik gyujtópontja a $W_1$ és az ehez kapcsolt pólus a $\overline{b} \equiv S_b S'_b$ tengelyen a $W_2$, akkor a $W_2$ a $h_c^{(2)}$ hyperbolának gyujtópontja, mert

$$W_1 M = \sqrt{b^2 - c^2},\ W_2 M = \frac{b^2}{\sqrt{b^2 - c^2}};$$

továbbá

$$W_1 S_b = b - \sqrt{b^2 - c^2},\ W_2 S_b = \frac{b(b - \sqrt{b^2 - c^2})}{\sqrt{b^2 - c^2}}$$

tehát

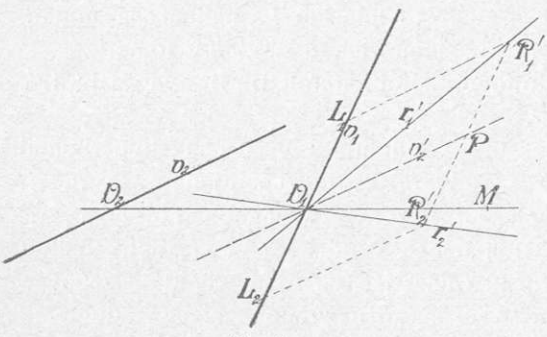
$$W_1 S_b : W_2 S_b = \sqrt{b^2 - c^2} : b,$$

és így a $W_1$ pontban az $e_a^{(2)}$ fősíkra és a $W_2$ pontban a $h_c^{(2)}$ síkra merőlegesen álló $w_1, w_2$ egyenespár oly polárispár, melytől mérve a hyperboloid pontjainak távolságai viszonya a legkisebb.

4. Mutassuk ki végre, hogy az a polárispár $v_1 v_2$, melytől mérve a hyperboloid pontjainak távolságai viszonya állandó, pl. $\lambda$, egyszer-

smind oly tulajdonságú is, hogy bármelyikén keresztül menő kapcsolt polárissíkok orthogonalis sort képeznek.

Messük e végből a hyperboloidot a $v_1$-en keresztül menő és a $b$ tengelyre merőleges síkkal a $h^{(2)}$ hyperbolában (24. ábra). Ennek középpontja a $V_1$ pont, egyik átmérője a $v_1$ egyenes, az ehhez kapcsolt átmérő $v'_2$ párhuzamos a $v_2$-vel, végre $r'_1 r'_2$ asymptótái párhuzamosak a hyperboloid asymptótikus kúpjának, $M$. $e_1{}^{(2)}$-nek, $r_1 r_2$ alkotóival. Ha a $v'_2$ átmérőnek egyik metszőpontja a $h^{(2)}$ hyperbolával a $P$, és $h^{(2)}$-nek érintője a $P$ pontban az $r'_1 r'_2$ asymptótákat az $R'_1 R'_2$ pontokban metszi, s ha végre az $R'_1 R'_2$ pontokon keresztül párhuzamosakat húzunk a $v'_2$-vel, melyek a $v_1$-et az $L_1 L_2$ pontokban metszik, akkor e metszőpontok kapcsolt pólusok a $h^{(2)}$-re, és így a hyperboloidra vonatkozólag.



24. ábra.

A $P$ pontnak távolsága a $v_1$-től $PV_1 . sin(v_1 v'_2)$, s a $v_2$-től $V_1 V_2$; s mert a $P$ a hyperboloidon fekszik, azért e távolságok viszonya $\lambda$, azaz:

$$PV_1 sin(v_1 v'_2) : V_1 V_2 = \lambda.$$

Az $r'_1$ asymptóta $R'_1$ pontjának a $v_1$ és $v'_2$-től mért távolságai viszonya, az asymptótikus kúpnak az $r'_1$-gyel párhuzamos $r_1$ alkotója tulajdonsága folytán, szintén egyenlő $\lambda$-val (mert $r_1 \parallel r'_1$, $u_1 \parallel v_1$, $u_2 \parallel v'_2$ és $sin(r'_1 v_1) : sin(r'_1 v'_2) = sin(r_1 u_1) : sin(r_2 u_2) = \lambda$).

Ámde az $R'_1$-nek távolsága a $v_1$-től $= PV_1 sin(v_1 v'_2)$, tehát az $R'_1$ pontnak és így egyszersmind az $L_1, L_2$ pontoknak távolsága a $v'_2$ egyenestől az előbbi egyenlet szerint egyenlő a $V_1 V_2$ vonaldarabbal. Ebből az következik, hogy a $v_2$ egyenest a $v_1$-en fekvő $L_1, L_2$ kapcsolt pólusokkal összekötő $[v_2 L_1]$, $[v_2 L_2]$ síkok, melyek kapcsolt polárissíkok, merőlegesek egymásra.

Egy másik a $v_2$-n keresztül menő kapcsolt poláris síkpár a $V_1$ pontot és a $v_1$-nek végtelen távol fekvő pontját köti össze a $v_2$-vel, s így szintén merőleges egymásra. Ebből láthatjuk, hogy a $v_2$-n (s hasonlókép a $v_1$-en) keresztül menő összes kapcsolt polárissíkpárok merőlegesek egymásra.

Tehát:

*Az orthogonalis hyperboloid oly polárispárjainak, melyektől a hyperboloid pontjainak mért távolságai viszonya állandó, az a tulajdonsága van, hogy bármelyikén keresztül menő kapcsolt polárissíkpárok orthogonalis sort képeznek.*

E tételt még a következőképen is igazolhatjuk:

Messük az orthogonalis hyperboloidot a $[V_1v_2]$ vagy $[V_2v_1]$ síkok egyikével, pl. az elsővel, a $k^{(2)}$ kúpszeletben, és messe ekkor a $V_2$ pontnak $\omega_2$ polárissíkja, a mely a $V_1$ ponton megy keresztül merőlegesen a $V_1V_2$ egyenesre, a $k^{(2)}$-őt a $PQ$ pontokban. Ha a $k^{(2)}$-nek a $V_1V_2$ tengelyén levő csúcsai $SS'$, akkor a $PSQS'$ négyszögnek $PS$, $QS'$ és $PS'$, $QS$ szemben fekvő oldalpárjai a $v_2$ egyenesnek $Q_2$, $P_2$ pontjaiban találkoznak. Ezek a $Q_2P_2$ pontok, a $V_2$-től egyenlő távolságra levő kapcsolt pólusai a $k^{(2)}$-nek és az orth. hyperboloidnak, tehát a $[P_2v_1]$, $[Q_2v_1]$ kapcsolt polárissíkpárja a hyperboloidnak.

Ha a $k^{(2)}$ kúpszelet $P$ pontjából a $v_1$ és $v_2$ polárisokra bocsátott merőlegeseknek talppontjai $R_1$ és $R_2$, úgy az orth. hyperboloidnak a $v_1v_2$ polárispár iránt való tulajdonságból folyólag, és a hasonló háromszögek miatt:

$$\frac{PR_2}{PR_1} = \frac{SV_2}{SV_1} = \frac{PU_2}{PU_1}.$$

Ha tehát a $V_2$ ponton keresztül menő és a $PR_1$-gyel párhuzamos egyenes a $[P_2v_1]$, $[Q_2v_1]$ síkokat a $T$, $U$ pontokban metszi, úgy $UV_2 = V_2T$, és a $PR_1V_1$, $V_2TP_2$ hasonló háromszögek, valamint az előbbi egyenlet miatt:

$$UV_2 = V_2T = PR_1\frac{P_2V_2}{PV_1} = PR_1\frac{PR_2}{PR_1} = PR_2 = V_1V_2.$$

Ebből látható, hogy a $TV_1U$ háromszögnek $V_1$ szöge derékszög, tehát a $[P_2v_1]$, $[Q_2v_1]$ síkok, melyek kapcsolt polárissíkok, egymásra merőlegesek. S mert a $[V_2v_1]$ és $\omega_2$ síkok szintén merőleges kapcsolt polárissíkok, azért helyes a fönnebbi tétel.

*

5. Foglalkozzunk ezután oly hyperboloiddal, melynek asymptótikus kúpja egyenoldalú és melyet tehát *egyenoldalú hyperboloidnak* nevezünk.

Az egyenoldalú kúp $\psi$, $\vartheta$ állandói között a következő reláczió van:

$$cotg^2\psi + cotg^2\vartheta = 1;$$

ennélfogva az egyenoldalú hyperboloid elliptikus főmetszésének $2b$ és $2c$ fő- és melléktengelye és a harmadik főtengely $2a$ között az általános $a = b \cdot cotg\psi$, $a = c \cdot cotg\vartheta$ relációt tekintve, ez az összefüggés van:

$$\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2} = 0.$$

Az egyenoldalú kúpnak tulajdonsága, hogy alkotói végtelen sok derékszögű háromélnek élei, tehát minden alkotójára merőleges két alkotó, mely azonkívül egymásra is merőleges. Minthogy a hyperboloid egyik és másik rendszerhez tartozó alkotói az asymptótikus kúp alkotóival párhuzamosak: az egyenoldalú hyperboloid minden $g$ alkotójára, és a vele párhuzamos $h$ alkotóra, merőleges két $g$ és két $h$ alkotó, melyek azonkivül egymásra is merőlegesek. Ha az ilyen három $g$ és három $h$ alkotót a $g_1g_2g_3h_1h_2h_3$-mal jelöljük ($g_i \parallel h_i$), akkor ezek egy a hyperboloidon fekvő $g_1h_2g_3h_1g_2h_3$ derékszögü hatoldalnak oldalai. E szerint:

*Az egyenoldalú hyperboloidon végtelen sok oly hatoldal van, melynek minden szöge derékszög; minden alkotó egy ily hatoldalnak egyik oldala.*

A $g_1h_2g_3h_1g_2h_3$ hatoldal egymásra következő oldalain keresztül menő $[g_1h_2]$, $[h_2g_3]$, ... $[h_3g_1]$ síkok egy derékszögű parallelepipedonnak lapjai; ennek hat csúcsa $(g_1h_2)$ $(h_2g_3)$ ... $(h_3g_1)$ egybeesik a hatoldal hat szögpontjával, a többi két szemben fekvő csúcs nincs a hyperboloidon, hanem az azokon keresztül menő három-három parallelepipedon lap $[g_1h_2][g_2h_3][g_3h_1]$, $[h_1g_2][h_2g_3][h_3g_1]$ érintősíkja a hyperboloidnak.

Mindezen $\infty^1$ parallelepipedon átlóinak metszőpontja a hyperboloidnak középpontja, mert a szemben fekvő $g_1h_1$, $g_2h_2$, $g_3h_3$ élpárokon átmenő síkok a hyperboloidot az élpárok végtelen távol fekvő pontjában érintik, s így egymást a hyperboloidnak középpontjában metszik.

„Mindezeknek a parallelepipedonoknak csúcsai egy gömbön feküsznek, melynek középpontja a hyperboloid középpontja és sugarának négyzete $= b^2 + c^2 - a^2$.“

Ez állítás első részét igazolandó, jelöljük a hyperboloid két egymásra merőleges alkotóját $g_1h_2$-vel, egy másik pár egymásra merőleges, de különben tetszésszerinti alkotóját $g'_1h'_2$-vel, és mutassuk ki, hogy a $(g_1h_2)$ $(g'_1h'_2)$ pontok a hyperboloid középpontjától egyenlő távolságra vannak.

A $g_1h_2g'_1h'_2$ négyoldalnak $(g_1h_2)(g'_1h'_2) \equiv q$, $(g_1h'_2)(g'_1h_2) \equiv q_1$ átlói polárisok a hyperboloidra vonatkozólag; ezeknek $Q$, $Q_1$ felező-

pontjait és végtelen távoli pontjait összekötő egyenesek szintén polárisok úgy, hogy a $QQ_1$ egyenes ez oknál fogva a hyperboloid középpontján megy keresztül. Tekintve, hogy a $(g_1h_2)$, $(g'_1h'_2)$ szögek derékszögek: a $Q_1$ pont a $g_1h_2g'_1h'_2$ négyoldal minden szögpontjától egyenlő távolságra van, és így a $QQ_1$ egyenes merőleges a $q$ egyenesre és a $QQ_1$ egyenesnek minden pontja, tehát a hyperboloidnak középpontja is, a $(g_1h_2)(g'_1h')_2$ pontoktól egyenlő távolságra van. Ebből azt látjuk, hogy az egymásra merőleges $g, h$ alkotók metszőpontjai egy gömbön feküsznek, mely a hyperboloiddal konczentrikus.

Hogy e gömb sugarát meghatározzuk, vegyük tekintetbe a hyperboloidnak azt a főmetszését $h_c^{(2)}$-t, melynek síkja merőleges a $c$ főtengelyre, melynek asypmtótái az asymptótikus kúpnak $s_1s_2$ alkotói, melynek tehát $M$ középpontja a hyperboloidnak középpontja. A hyperboloidnak az $s_1$-re merőleges érintősíkja a hyperboloidot a $g_1h_2$ alkotókban az $s_1s_2$ asymptótákat az $L_1L_2$ pontokban metszi és a $h_c^{(2)}$ hyperbolát, valamint a hyperboloidot az $N=(g_1h_2)$ pontban érinti. A $g_1h_2$ alkotók egymásra merőlegesek, mert mindkettő merőleges a hyperboloidnak az $s_1$-gyel párhuzamos $g_3, h_3$ alkotóira, melyek a már többször használt $S_cS'_c$ pontokon mennek keresztül s a $h_c^{(2)}$ síkjától $c$ távolságra vannak.

Az $L_1$ felezőpontja a $(g_1h_3)(g_1h_2)$ pontokat összekötő vonaldarabnak, s így az $L_1$ pont a $(g_2h_3)(g_3h_2)$ pontoktól, valamint a $(g_1h_2)\equiv N$ ponttól $c$ távolságra van, azaz:

$$c = L_1N = NL_2.$$

Tekintve a $h_c^{(2)}$ hyperbolát: az $L_1L_2M$ derékszögű háromszögnek területe $ab$, s mert az egyik befogó $L_1L_2 = 2c$, azért a másik befogó $ML_1 = \frac{ab}{c}$. Azonban ez utóbbi kifejezés négyzete a hyperboloid $a, b, c$ állandói között fenforgó

$$a^2c^2 + b^2a^2 - b^2c^2 = 0$$

reláczió alapján $b^2 - a^2$, tehát a keresett gömb sugarának négyzete:

$$ML_1^2 + L_1N^2 = MN^2 = b^2 - a^2 + c^2.$$

6. Térjünk ezek után a *forgáshyperboloidhoz!*

Ha két egymást nem metsző és egymásra nem merőleges egyenes $g$ és $t$ közül az egyik, pl. a $g$, a másik körül egy teljes körülforgást végez, akkor a forgó egyenes egy *forgáshyperboloidot* ír le.

Ugyanis a $g$ egyenes pontjai, a $t$ körül történő forgás alkalmával ugyanazokat a köröket írják le, mint ama pontoknak tükörképei, a $t$-n keresztül menő és a $g$-vel párhuzamos $\nu$ síkra, mint tükörre, vonatkozólag. Ezért a $g$-nek tükörképe a $h$, a $\nu$ síkra vonatkozólag, ugyanazt a felületet írja le, ha a $t$ körül forog, mint maga a $g$ egyenes. Minthogy ezek szerint a forgó $g$ egyenes a forgó $h$-t minden helyzetében metszi, tehát a $g$ egyenes három és még több egyenest mozgása közben folyton metsz, azért a $g$ leír egy hyperboloidot. Minthogy végre e hyperboloidnak és egyszersmind asymptótikus kúpjának alkotói a $t$ forgástengelyhez egyenlő szög alatt hajlanak, azért ama kúp, forgáskúp és a hyperboloid, forgáshyperboloid.

E forgáshyperboloidnak középpontja $M$ az a pont, melyben a $g$ és $t$ egyeneseknek $n$ merőleges szelője a $t$ forgástengelyt, melyet egyszersmind a *hyperboloid forgástengelyének* is nevezünk, metszi; e forgástengelynek azonkívül, hogy a hyperboloid alkotóihoz egyenlő szög alatt hajlik, még az a tulajdonsága is van, hogy pontjainak távolsága a hyperboloid összes $g$ és $h$ alkotóitól egyenlő, mert a milyen távolságra volt a $t$-nek $P$ pontja, pl. a $g$-nek első helyzetétől, olyan marad e távolság a $g$-nek forgatása alkalmával is.

A $t$ forgástengelyre az $M$ középpontban merőlegesen álló $\tau$ sík a hyperboloidnak egyik fősíkja; e sík a hyperboloidot annak *torokkörében* metszi; a többi fősíkok, a $t$-nek összes síkjai, hyperboloidot oly hyperbolákban metszik, melyeknek asymptótái a $t$ forgástengelylyel ugyanoly szögeket képeznek, mint a forgó $g$ egyenes. E felületet és annak asymptótikus kúpját tehát leírhatjuk egy hyperbolának egyik ágával és egyik asymptótájával, ha azokkal egy teljes körülforgást végezünk a hyperbolának $t$ melléktengelye körül.

Két egymást nem metsző $g_1$ és $g_2$ egyenesen $\infty^1$ forgáshyperboloid fektethető keresztül.

Szerezzünk magunknak fogalmat e hyperboloidok egyikének forgástengelyéről.

Lényegében a feladat abban áll, hogy oly $t$ forgástengelyt találjunk, mely körül a $g_1$ forgatva a $g_2$ helyzetbe jusson.

Vegyünk fel e végből a $g_1$ egyenesen egy $A_1B_1$ vonaldarabot, és a $g_2$-ön az $A_1B_1$-gyel egyenlő $A_2B_2$ vonaldarabot. Az $A_1A_2$ és $B_1B_2$ vonaldarabok felezőpontjaiban az illető vonaldarabokra $\alpha$, illetve $\beta$ merőleges síkokat állítunk; ezeknek metszővonala $t$ már a kivánt tulajdonságú tengely lesz. Ugyanis a $t$ egyenesnek minden pontja az $A_1A_2$ pontoktól, valamint a $B_1B_2$ pontoktól egyenlő távol-

ságra van, minthogy a $t$ ama $\alpha, \beta$ merőleges síkoknak metszővonala. Ha tehát $A_3B_3$ két tetszésszerinti pontja a $t$-nek, akkor az $A_1A_3B_3B_1$ tetraedernek minden éle egyenlő az $A_2A_3B_3B_2$ tetraedernek egy-egy élével és így a két tetraeder vagy kongruens, vagy pedig az egyik a másiknak tükörképe.

De a két tetraeder sem az $\alpha$, sem a $\beta$, sem más a közös $A_2B_3 \equiv t$ élen keresztül menő síkra nem lehet egymásnak tükörképe, mert akkor az $A_1B_1 \equiv g_1$, és $A_2B_2 \equiv g_2$ éleknek egymást abban a tükörsíkban metszeniök kellene, föltevésünk ellenében. Ama két tetraeder tehát kongruens és ezért az egyik a $t$ körül a másikba forgatható.

Az $A_2B_2$ vonaldarabot $\infty^1$-félékép vehetjük fel a $g_2$ egyenesen, még pedig kétféle értelemben és ha a szerkesztést az állandó $A_1B_1$-gyel és mindezekkel a változó $A_2B_2$ vonaldarabokkal úgy mint előbb elvégezzük, megkapjuk az összes tengelyeket, a melyek körül a $g_1$-et a $g_2$-be lehet forgatni. —

Máskép is meghatározhatjuk ezeket a $t$ tengelyeket.

Vezessünk valamely $P$ ponton keresztül a $g_1$ és $g_2$-vel párhuzamosakat, $s_1$ és $s_2$-t; állítsunk az $s_1s_2$ egyenesek hajlásszögeinek felezőin keresztül az $[s_1s_2]$ síkra merőleges $\sigma, \sigma'$ síkokat. E $\sigma\sigma'$ síkok szintén merőlegesek egymásra és e síkok bármelyikében fekvő vagy azokkal párhuzamos egyenes úgy az $s_1$ és $s_2$-hez, mint a velök párhuzamos $g_1g_2$ egyenesekhez, egyenlő szög alatt hajlik.

Legyen tehát $t'$ egy a $\sigma$ síkban fekvő és a $P \equiv (s_1s_2)$ ponton keresztül menő egyenes, mely nem merőleges az $s_1$ és $s_2$-re; $\varepsilon$ pedig a $t'$-re merőleges sík, mely a $g_1g_2s_1s_2t'$ egyeneseket a $G_1G_2S_1S_2T'$ pontokban metszi. Határozzuk meg az $\varepsilon$ síkban a $T$ pontot akképen, hogy a $G_1G_2T$ háromszög hasonló legyen az $S_1S_2T'$ egyenszárú háromszöggel, és vezessünk e $T$ ponton keresztül a $t'$-sel párhuzamos $t$ egyenest.

Minthogy az $s_1$ egyenes és annak $S_1$ pontja a $t'$ körül az $s_2$-be, illetve az $S_2$-be forgatható, és $s_1 \parallel g_1$, $s_2 \parallel g_2$, $t' \parallel t$, azért a $g_1$-nek nemcsak a $G_1$ pontja kerül a $t$ körül forgatva a $G_2$-be, hanem a $g_1$-nek végtelen távol fekvő pontja is a $g_2$-nek végtelen távol fekvő pontjába jut, és így maga a $g_1$ egyenes is a $t$ körül forgatva, egyszer a $g_2$-vel egyesül. Azaz: a $g_1$ és $g_2$ egyeneseken keresztül menő forgáshyperboloidok egyikének forgástengelye a $t$.

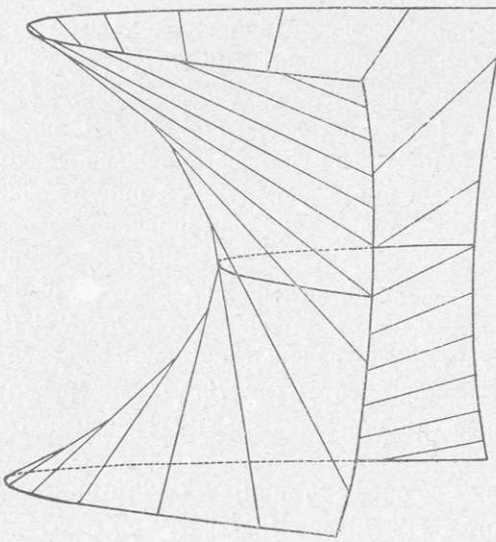
Ezek a forgástengelyek mind párhuzamosak oly két sugársornak sugaraival, melyeknek síkjai ($\sigma$ és $\sigma'$) merőlegesek egymásra. Azonkívül pontjainak távolságai a $g_1$ és $g_2$ egyenesektől egyenlők. Az ily tulajdonságú egyenesekről alább (15. §. 3. p. végén) ki fogjuk

mutatni, hogy azok egy egyenoldalú hyperbolikus paraboloidnak alkotói. —

Meg akarjuk még e helyen jegyezni, hogy még a forgáshyperboloidok között is van egy különös, t. i. az, melynek asymptótikus kúpja Pappus- és Hachette-féle forgáskúp. Ennek minden metszése az oly síkkal, mely a forgástengelyen megy keresztül, egyenoldalú hyperbola és minden alkotója a forgástengelylyel $45^0$ szöget képez.

## 14. §. A hyperbolikus paraboloid származtatása, tengelye és fősíkjai.

1. Mondottuk a 119. oldalon, hogy ha a hyperboloid meghatározására szolgáló három alkotónak, a $h_1h_2h_3$-nak, végtelen távol fekvő pontja $H_{1\infty}H_{2\infty}H_{3\infty}$ ugyanegy egyenesen, $g_\infty$-n, fekszik, azaz a három alkotó ugyanegy síkkal, $\varepsilon_h$-val, párhuzamos, akkor a tőlük meghatározott *különös* hyperboloidot *hyperbolikus paraboloidnak*, és a rajta levő két sugársereget *paraboloidikus* sugárseregeknek nevezzük (25. ábra).



25. ábra.

Valamely $\varepsilon_h$ síkkal párhuzamos $h_1h_2h_3$ egyeneseknek szelői amazokon *hasonlóan-projektiv pontsorokat metszenek* ki, mert egy síksor, melynek tengelye a $h_3$, a $h_1h_2$ egyeneseket oly projektiv pontsorokban metszi, melyeknek végtelen távol fekvő $H_{1\infty}H_{2\infty}$ pontjai megfelelők. Ha azonban a $g_i$ egyeneseket két projektiv síksor képződményének tekintjük, akkor a $h_3$-mon fekvő pontsort a $h_1$, $h_2$ tengelyekből projicziáló síksorok *csak különös helyzetűek*, t. i. hogy egy megfelelő síkpárjuk, mely a $H_{3\infty}$ ponton megy keresztül, párhuzamos, de maguk a síksorok *általánosan projektivek*.

A $h_1h_2$ alkotókat az $A_1B_1C_1 \ldots H_{1\infty}$, $A_2B_2C_2 \ldots H_{2\infty}$ pontsorokban metsző $g_1g_2g_3 \ldots g_\infty$ alkotók, szintén párhuzamosak ugyanegy síkkal, mert a hasonlóan projektiv vonatkozásból származó

$$A_1C_1 : B_1C_1 = A_2C_2 : B_2C_2$$

proporczió folytán a $C_1$ ponton keresztül, a $g_1$ és $g_2$-vel párhuzamosan vezetett sík, a $h_2$-t a $C_2$ pontban metszi. Minthogy továbbá a $h_1h_2h_3$ alkotók az $\varepsilon_h$ síkkal párhuzamosak, úgy ezek a $g_1, g_2$ alkotókról szintén aránylagos részeket metszenek le, tehát a $h_i$ alkotók a $g_1g_2g_3 \ldots$ alkotókat szintén hasonlóan projektiv pontsorok szerint metszik, és ezért a $h_i$ alkotók között is van egy $h_\infty$ alkotó végtelen távol.

Minthogy minden egyenest $\infty^3$ egyenes metsz, azért az oly egyenes-hármasoknak száma, melyek egy megadott $l$ egyenest metszenek $\infty^9$. Az $l$ egyenest a végtelen távol fekvő síkban $\infty^2$-szer vehetjük fel; van tehát $\infty^{11}$ oly egyenes-hármas, mely mindig egy síkkal párhuzamos. De a hyperbolikus paraboloid egy sugárseregében $\infty^3$ egyenes-hármas vehető fel, és ezért *a hyperbolikus paraboloidok* száma $\infty^8$.

A végtelen távol fekvő $\varepsilon_\infty \equiv [g_\infty h_\infty]$ sík, mely a hyperbolikus paraboloidnak a két végtelen távol fekvő $g_\infty h_\infty$ alkotóján megy keresztül, a felület érintősíkja az $E_\infty = (g_\infty h_\infty)$ pontban, s az $E_\infty$ pont, mint az $\varepsilon_\infty$ síknak pólusa, a felületnek *végtelen távol levő középpontja.*

A $g_i$ és a $h_i$ alkotókkal párhuzamos, s így a $h_\infty$, illetve $g_\infty$ alkotókon keresztül menő $\varepsilon_g$, $\varepsilon_h$ síkokat, a felület *vezető síkjainak* nevezzük; ezeknek $\varepsilon_g\varepsilon_h$ metszővonala a felület $E_\infty$ középpontján megy keresztül.

Minden sík, mely a hyperbolikus paraboloid vezető síkjainak $\varepsilon_g\varepsilon_h$ metszővonalával párhuzamos, tehát az $E_\infty$ ponton megy keresztül, a felületet oly parabola szerint metszi, melynek végtelen távol fekvő pontja az $E_\infty$ pont. Ellenben az oly síknak metszése a felülettel, mely az $\varepsilon_g\varepsilon_h$ egyenest a végesben, tehát a $g_\infty h_\infty$ alkotókat két különböző pontban metszi, hyperbola.

2. A hyperbolikus paraboloidon két oly különös alkotó, $g_o$ $h_o$, van, mely a vezető síkoknak $\varepsilon_g\varepsilon_h$ metszővonalára merőleges.

E $g_oh_o$ alkotókat szerkesztendő, vegyünk fel egy $ABCD$ térnégyszöget, és tekintsük annak szemben fekvő $AB \equiv g_1$, $CD \equiv g_2$; $BC \equiv h_1$, $DA \equiv h_2$ oldalait a hyperbolikus paraboloid két különböző rendszerhez tartozó alkotóinak; e két pár alkotó már meghatározza a hyperbolikus paraboloidnak a $g_1g_2$, illetve a $h_1h_2$ alkotókkal párhuzamos $\varepsilon_g\varepsilon_h$ vezető síkjait és magát a hyperbolikus paraboloidot. A $g$

rendszerhez tartozó alkotók a $h$ rendszer alkotóin, és a $h$ rendszer alkotói a $g$ rendszer alkotóin hasonlóan projektiv pontsorokat metszenek ki, azaz: a $g$ rendszerhez tartozó alkotók a $BC$, $AD$ vonaldarabokat, és a $h$ rendszerhez tartozó alkotók az $AB$, $DC$ vonaldarabokat aránylagos részekre osztják és ez alapon meghatározhatók. Az $\varepsilon_g\varepsilon_h$ egyenesre merőleges síkok úgy a $g_1g_2$ alkotókon, mint a $h_1h_2$ alkotókon szintén hasonlóan-projektiv pontsorokat metszenek ki. Ha tehát az $A$ és $B$ pontokon keresztül az $\varepsilon_g\varepsilon^h$ egyenesre merőlegesen bocsátott síkok a $g_2$-t a $D_1$, $C_1$ pontokban metszik és a $G_2$ oly pont a $g_2$ egyenesen, hogy $DG_2 : G_2C = D_1G_2 : G_2C_1$, akkor a $G_2$ ponton keresztül menő és az $\varepsilon_g\varepsilon_h$ egyenesre merőleges sik a $g_1h_1h_2$ alkotókat oly $G_1H_1H_2$ pontokban metszi, hogy a $G_1G_2 \equiv h_o$, $H_1H_2 \equiv g_o$ alkotók már merőlegesek az $\varepsilon_g\varepsilon_h$ egyenesre.

A hyperbolikus paraboloidnak e különös $g_oh_o$ alkotói egymást annak $S$ *csúcsában* metszik, s ezért a $g_oh_o$ alkotókat *csúcsalkotóknak* nevezzük; az $S$ ponton keresztül menő és az $\varepsilon_g\varepsilon_h$-val párhuzamos $c$ egyenes pedig a hyperbolikus paraboloid *tengelye*. A $c$ tengely metszőpontjai a felülettel $S \equiv (g_oh_o)$ és $E_\infty \equiv (g_\infty h_\infty)$; e pontok érintősíkjai, $\sigma \equiv [g_oh_o]$ és $\varepsilon_\infty \equiv [g_\infty h_\infty]$, egymást $c$-nek polárisában $c_\infty \equiv \sigma\varepsilon_\infty$-ben metszik. A $c$-n keresztül menő kapcsolt polárissíkoktól képezett involucziós síksor kettőssíkjai $[cg_oh_\infty]$ és $[ch_og_\infty]$, ezek párhuzamosak az $\varepsilon_g\varepsilon_h$ vezető síkokkal. E síkok hajlásszögeit felező $\alpha$ és $\beta$ síkok oly egymásra merőleges kapcsolt polárissíkok, melyek egyszersmind felezik a $g_oh_o$ és $g_\infty h_\infty$ alkotók hajlásszögeit is. Minthogy az $\alpha$ és $\beta$ síkok pólusai, a $\beta$ és $\alpha$ síkoknak $A_\infty$ és $B_\infty$ metszőpontjai a $c_\infty$ egyenessel, és e pontok az $\alpha$, illetve a $\beta$ síkra merőleges egyeneseknek végtelen távol fekvő pontjai, azért: *a hyperbolikus paraboloid az $\alpha, \beta$ síkokra vonatkozólag symmetrikus.* Ez okból az $\alpha, \beta$ síkokat a felület *fősíkjainak*, azoknak metszését a felülettel *főmetszéseknek* nevezzük. A $\sigma\varepsilon_\infty\alpha\beta$ tetraeder így felírt lapjainak pólusai $SE_\infty A_\infty B_\infty$; az első két lap mint érintősík átmegy saját pólusán, a másik két lap felváltva megy át a másik két póluson; a tetraedernek egyik szemben fekvő élpárja

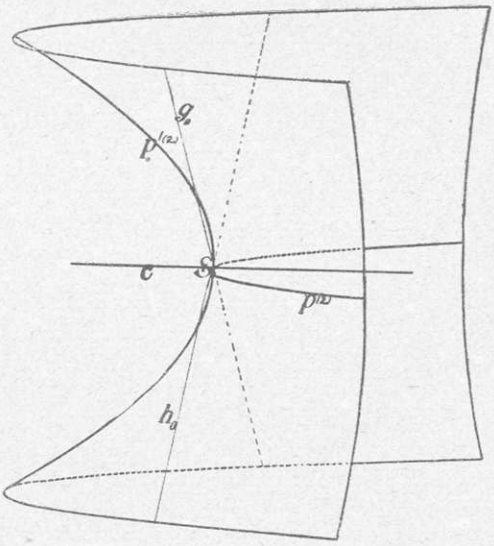
$$\sigma\varepsilon_\infty \equiv c_\infty, \quad \alpha\beta \equiv c$$

polárispár, míg az

$$\alpha\sigma \equiv a, \beta\varepsilon_\infty \equiv a_\infty \text{ és } \beta\sigma \equiv b, \alpha\varepsilon_\infty \equiv b_\infty$$

szemben fekvő élek közül az $a$ és $b$, a $g_oh_o$ alkotóknak, az $a_\infty$ és $b_\infty$ pedig a $g_\infty h_\infty$ alkotóknak hajlásszögeit felezi.

*A hyperbolikus paraboloid főmetszései parabolák*, mert síkjuk a $c$ tengelyen megy keresztül; e $p^{(2)}, p'^{(2)}$ paraboláknak a $c$-ben közös tengelyük, az $S$-ben közös csúcsuk van, de pontjaik a $\sigma$ érintősík különböző oldalain feküsznek (26. ábra). Ugyanis a $c$-n keresztül menő $[cg_o h_\infty]$, $[ch_o g_\infty]$ érintősíkok az $\alpha$ és $\beta$ fősíkoktól harmónikusan vannak elválasztva; tehát egy $h_i$ alkotónak metszőpontjai $(h_i g_o)$ $(h_i g_\infty)$ $(h_i \alpha)$ $(h_i \beta)$ ama négy síkkal szintén harmónikusak, s így az első metszőpont, mely a $\sigma \equiv [g_o h_o]$ síkban fekszik, a harmadik és negyedik metszőponttól határolt vonaldarabot felezi, mert a második metszőpont végtelen távol van.



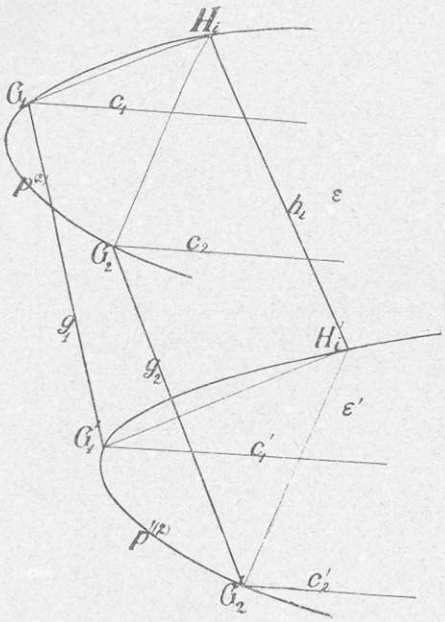
26. ábra.

3. A hyperbolikus paraboloidnak oly $h_i h'$ alkotói, melyek a $g_o$ csúcsalkotót az $S \equiv (g_o h_o)$ csúcsponttól egyenlő távolságban metszik, tehát az $S$ ponttól egyenlő távolságra vannak, oly egyenoldalúan hyperbolikus involucziós sort képeznek a $h$ alkotók seregében, melynek kettőssugarai $h_o h_\infty$. E sor társsugárpárjait, $h_i h'_i$-t, a $g_o$-ból projicziáló $[g_o h_i][g_o h'_i]$ síkpárok egy involucziós síksort képeznek, melynek kettőssíkjai $[g_o h_o] \equiv \sigma$, $[g_o h_\infty] \equiv [g^o c]$ egymásra merőlegesek. Ennélfogva a $[g_o h_i]$ $[g_o h'_i]$ társsíkok egyenlő szögek alatt hajlanak a $\sigma$ és a $[g_o c]$ síkhoz; és mert a $h_i$ és $h'_i$ alkotókon keresztül menő és az $\varepsilon_h$ vezetősíkkal párhuzamos síkok a $\sigma$-ra merőlegesek, azért a $h_i h'_i$ alkotók a $\sigma$-hoz, és a $[g_o c]$ síkhoz, valamint ezeknek $g_o$ metszőegyeneséhez és a $[g_o c]$-vel párhuzamos $\varepsilon_g$ vezetősíkhoz, egyenlő szögek alatt hajlanak. Ebből következik, hogy az $\varepsilon_g$-vel párhuzamos síkok sora a $h_i$, $h'_i$ alkotókat egyenlően projektiv pontsorokban metszi, tehát:

*A hyperbolikus paraboloid csúcsától egyenlő távolságra levő két ugyanegy rendszerhez tartozó alkotó a másik rendszer alkotóitól egyenlően-projektiv pontsorokban metszetik.*

4. *A hyperbolikus paraboloid metszési görbéi annak tengelyével és egymással párhuzamos síkokkal kongruens parabolák.*

Messe egy a $c$ tengelylyel párhuzamos $\varepsilon$ sík a felület $g_1 g_2$ alkotóit a $G_1 G_2$ pontokban, továbbá egy az $\varepsilon$ síkkal párhuzamos $\varepsilon'$ sík ugyanezeket a $g_1 g_2$ alkotókat a $G'_1 G'_2$ pontokban (27. ábra). A $g_1$-en és a $g_2$-őn keresztül menő és az $\varepsilon_g$ vezetősíkkal párhuzamos síkok az $\varepsilon$ síkot a $c_1 c_2$ egyenesekben, az $\varepsilon'$ síkot pedig a $c'_1 c'_2$ egyenesekben metszik. A $c_1 c_2 c'_1 c'_2$ egyenesek párhuzamosak a $c$ tengelylyel, a $G_1 G_2 G'_1 G'_2$ pontokon mennek keresztül és a $c_1 c_2$ egyenesek távolsága egymástól egyenlő a $c'_1 c'_2$ egyenesek távolságával.



27. ábra.

A szilárd $g_1$ alkotón és a változó $h_i$ alkotón keresztül menő síkok sora az $\varepsilon, \varepsilon'$ síkokat a $(G_1, \varepsilon)$, $(G_1, \varepsilon')$ sugársorok szerint metszik, melyeknek megfelelő sugarai párhuzamosak; úgyszintén a $g_2$ szilárd alkotón és a változó $h_i$ alkotón keresztül menő síkok sora az $\varepsilon, \varepsilon'$ síkokat a $(G_2, \varepsilon)$, $(G'_2, \varepsilon')$ sugársorok szerint metszik, melyekben ismét a megfelelő sugarak párhuzamosak. A $(G_1, \varepsilon)$, $(G_2, \varepsilon)$, $(G'_1, \varepsilon')$ és $(G'_2, \varepsilon')$ sugársorok projektivek, ha oly sugarak tekintetnek megfelelőknek, melyek ugyan egy $h_i$ sugarat metszenek. A két első, és hasonlókép a két utóbbi sugársor képződménye az a $p^{(2)}$, illetve az a $p'^{(2)}$ parabola, melyben az $\varepsilon$, illetve az $\varepsilon'$ sík a hyperbolikus paraboloidot metszi.

De minthogy a $(G_1, \varepsilon)$ és $(G'_1, \varepsilon')$, valamint a $(G_2, \varepsilon)$ és $(G'_2, \varepsilon')$ sugársorok megfelelő sugarai párhuzamosak, és a $G_1 G_2$ és a $G'_1 G'_2$ pontokon keresztül a $c$ tengelylyel párhuzamosan haladó $c_1 c_2$ és $c'_1 c'_2$ egyenesek egyenlő távolságra vannak egymástól, azért a $p^{(2)}$ és $p'^{(2)}$ parabolák kongruensek.*)

---

*) L. *Math. és Phys. Lapok* 1894. évfolyam 167. oldal: „Tételek a paraboláról és a hyperbolikus paraboloidról" című czikket, vagy a következőket: Ha a $G_1 G'_2$, $G'_1 G_2$ egyenesek (28. ábra) valamely $p^{(2)}$ parabolának párhuzamos húrjai, a $H_i$ pedig annak egy pontja, akkor azok a $G'_1 H'_i$, $G_2 H'_i$ egyenesek, melyek megfelelőleg a $G_1 H_i$-vel, illetve a $G_2 H_i$-vel párhuzamosak, egymást a $G_1 H_i G_2 G'_1 H'_i G'_2$ Pascal-hatszög miatt a parabola $H'_i$ pontjában

A hyperbolikus paraboloidot ezek szerint egy mozgó parabolával következőképen írjuk le:

Egy parabolát akkép mozgatunk, hogy síkja és tengelye párhuzamos maradjon, és a parabola két, síkján kívül levő és egy közös ponttal bíró $g_i h_i$ egyenest messen; a mozgó parabola leír egy oly hyperbolikus paraboloidot, melynek tengelye a mozgó parabola tengelyével párhuzamos. Ha a $g_i h_i$ egyenesek a mozgó parabolának síkjával és azonkívül annak tengelyével egyenlő szöget képeznek, akkor a mozgó parabola csúcsa leírja a felület egyik főmetszését és maga a mozgó parabola egyik helyzetében, a midőn ama főmetszésnek csúcsán megy keresztül, a másik főmetszés. S ha még ez utóbbi esetben a $g_i h_i$ egyenesek síkja merőleges a mozgó parabola síkjára, akkor a $(g_i h_i)$ pont a felület csúcsa lesz.

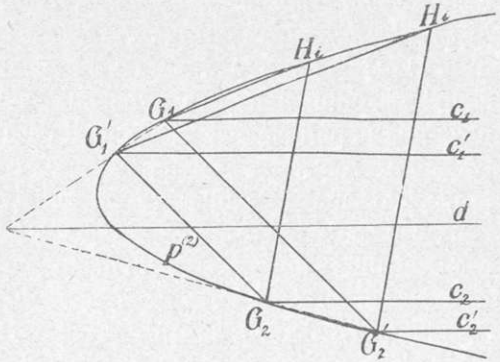
5. Ha a hyperbolikus paraboloid, mint már előbb (a 2. pontban) a $g_1 h_1 g_2 g_2 = ABCD$, $(AB \equiv g_1,\ BC \equiv h_1,\ CD \equiv g_2,\ DA \equiv h_2)$ térnégyszög által van adva, úgy egy adott $\varepsilon$ síkkal párhuzamos érintősíkban fekvő $g_i h_i$ alkotókat a következőkép találjuk meg: Az $A$ és a $B$ ponton keresztül menő, és az $\varepsilon$ síkkal párhuzamos síkok a $g_2$ egyenest a $D_1$, $C_1$ pontokban metszik; a $G_2$ pont a $g_2$-ön akkép van meghatározva, hogy $DG_2 : G_2C = D_1G_2 : G_2C_1$; a $G_2$ ponton keresztül menő és az $\varepsilon$ síkkal párhuzamos sík a $g_1, h_1, h_2$ egyeneseket $G_1, H_1, H_2$ pontokban, a hyperbolikus paraboloidot, a keresett $G_1G_2 \equiv h_i$, $H_1H_2 \equiv g_i$ alkotókban metszi.

A hyperbolikus paraboloidnak metszése minden $\varepsilon$ síkkal, mely

---

metszik. És mert ama párhuzamos húrok végpontjai a hozzájuk kapcsolt $d$ átmérőtől egyenlő távolságra vannak, azért a $G_1G_2$ és $G'_1G'_2$ pontokon keresztül menő $c_1c_2$ és $c'_1c'_2$ átmérőpárok távolságai egyenlők.

Ha fordítva valamely $\pi^{(2)}$ parabolának $G_1G_2$ pontjain keresztül menő $c_1c_2$ átmérők távolsága egyenlő a velük párhuzamos $c'_1c'_2$ egyenesek távolságával, és a $Hi$ pont leírja a $\pi^{(2)}$ parabolát, akkor a $c'_1c'_2$ egyeneseknek tetszésszerinti $G'_1G'_2$ pontjain keresztül menő és a $G_1H_i$ $G_2H_i$-vel megfelelőleg párhuzamos $G'_1H'_i$, $G'_2H'_i$ sugaraknak $H'_i$ metszőpontja a $\pi^{(2)}$-vel kongruens parabolát ír le.




28. ábra.

a $c$ tengelylyel nem párhuzamos: hyperbola; ennek asymptótái párhuzamosak az $\varepsilon$ síkkal párhuzamos érintősíkban fekvő $g_i h_i$ alkotókkal, és középpontja a $(g_i h_i)$ ponton keresztül menő és a $c$ tengelylyel párhuzamos egyenesnek — a $(g_i h_i)$ ponthoz tartozó *d átmérőnek* —, metszőpontja az $\varepsilon$ síkkal.

A $[g_i h_i]$ érintősíkkal párhuzamosan menő összes síkok a felületet hasonló és hasonló fekvésű hyperbolák szerint metszik; ezeknek kapcsolt átmérő rendszerei és asymptótái egymás között párhuzamosak, mert kapcsolt átmérő rendszerei a $d$ átmérőn keresztül menő kapcsolt polárissíkoknak, és asymptótái, a $[g_i d]$ $[h_i d]$ síkoknak (melyek amazokat harmónikusan elválasztják), metszései az $[g_i h_i]$ érintősíkkal párhuzamos síkrendszerrel. E párhuzamos síkrendszer kétkét síkja $\varepsilon, \varepsilon'$, mely a $[g_i h_i]$ érintősíktól egyenlő távolságra van, a felületet *konjugált* (*kapcsolt*) *hyperbolákban* metszi.

Ugyanis az $\varepsilon$ síkban fekvő $h^{(2)}$ hyperbola egy tetszésszerinti $AB$ átmérőjének, mely a felületet az $AB$ pontokban metszi, polárisa, az $\varepsilon'$ síkban fekvő $h'^{(2)}$ hyperbolának egy $A'B'$ átmérője, mely a felületet az $A'B'$ pontokban metszi. Ezeknek az $A'B'$ pontoknak projekcziói a $(g_i h_i)$ pontból, a $h^{(2)}$ hyperbolának az $AB$-hez kapcsolt átmérőjére, oly kapcsolt polárisok, melyek a $h^{(2)}$ hyperbola középpontjától egyenlő, és egymástól $A'B'$ távolságra vannak. Ezért: *a hyperbolikus paraboloid bármely érintősíkjával párhuzamos és attól egyenlő távolságra levő két sík a felületet kapcsolt hyperbolákban metszi.*

*A hyperbolikus paraboloid két tetszésszerinti hyperbolikus metszésének derékszögű projekcziója a tengelyére merőleges síkra, vagy hasonló és hasonló fekvésü hyperbola, vagy az egyikhez konjugált hyperbola, hasonló és hasonló fekvésű a másikhoz.*

Ugyanis két hyperbola hasonló és hasonló fekvésű, vagy az egyikhez konjugált hyperbola hasonló és hasonló fekvésű a másikhoz, ha a hyperboláknak asymptótái párhuzamosak. Ezt tekintve, a két adott hyperbola asymptótáit a felület tengelye irányában projicziáló síkok a felület vezető síkjaival párhuzamosak, s ezért metszésük a tengelyre merőleges síkkal, tehát az asymptóták projekcziói, a felület csúcsán keresztül menő $g_o h_o$ alkotókkal párhuzamosak.

6. Az a kérdés, hogy *egy hyperbolikus paraboloid metszhető-e egyenoldalú hyperbola szerint*, lényegével megegyezik azzal a kérdéssel, vannak-e a hyperbolikus paraboloidon oly $h$ alkotók, melyek a $g$ alkotók egyikére vagy másikára merőlegesek, mert minden sík, mely párhuzamos két egymásra merőleges $g_i h_i$ alkotóval, a felületet már egyenoldalú hyperbola szerint metszi.

E kérdést tárgyalandó, legyen a $g_i$ egy alkotója a hyperbolikus paraboloidnak, melynek vezető síkjai $\varepsilon_g$ és $\varepsilon_h$. A $g_i$-re merőleges sík az $\varepsilon_h$-t egy, a $g_i$-re merőleges $l$ egyenes szerint metszi, melyhez párhuzamos, tehát a $g_i$-re merőleges $h_i$ alkotó van felületen; mert a $g_i$-n keresztül menő és az $l$-lel párhuzamos sík a felületet már a $g_i$-ben és az erre merőleges $h_i$ alkotóban metszi.

Lássuk, mi a geometriai helye azon pontoknak, melyekben az egymásra merőleges $g_i h_i$ alkotók egymást metszik. Legyenek a $g_1 h_1$ és $g_2 h_2$ alkotók egymásra merőlegesek. Ekkor a $g_1 h_2 g_1 h_2 \equiv ABCD$ ($AB \equiv g_1$, $BC \equiv h_1$, $CD \equiv g_2$, $DA \equiv h_2$) térnégyszög szögpontjai egy oly gömbön feküsznek, melynek középpontja az $AC$ vonaldarab $E$ felezőpontja, és az $E$ pontot a $BD$ vonaldarab $F$ felezőpontjával összekötő egyenes merőleges a $BD$-re. Az $EF$ egyenes azonban párhuzamos a felület $c$ tengelyével, mert párhuzamos azzal a két síkkal, mely a $g_1 g_2$, illetve a $h_1 h_2$ egyenesekkel párhuzamos. Ha tehát a $g_1 h_1$ alkotókat, és ezzel a $(g_1 h_1) \equiv B$ pontot megtartjuk, a $g_2 h_2$ alkotókat pedig akként változtatjuk a felületen, hogy azok egymásra merőlegesek maradjanak, akkor a változó $(g_2 h_2) \equiv D$ pontot a szilárd $B$ ponttal összekötő egyenes mindig merőleges marad a felület $c$ tengelyére.

Ebből következik, hogy *a hyperbolikus paraboloid egymásra merőleges alkotóinak metszőpontjai egy $h^{(2)}$ hyperbolán feküsznek, melynek síkja a felület tengelyére merőleges. Minden sík, mely a hyperbolikus paraboloidot egyenoldalú hyperbola szerint metszi, párhuzamos a felület oly érintősíkjával, mely a felületet ennek a $h^{(2)}$ hyperbolának egyik pontjában érinti.*

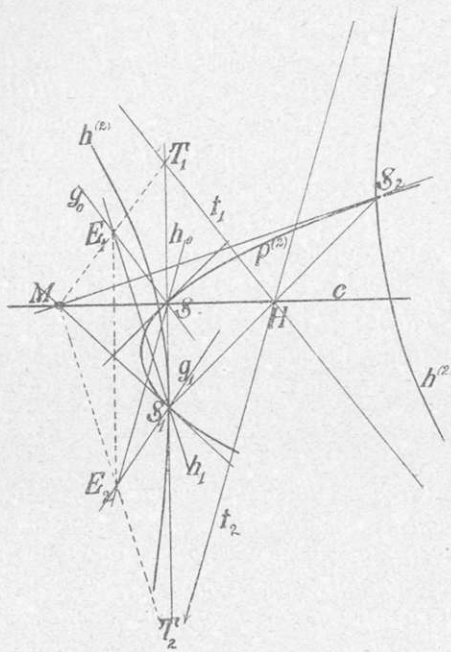
A $h^{(2)}$ hyperbola pontjaiban a felülethez vonható érintősíkok egy $M$. $h^{(2)}$ II. r. kúpot burkolnak, melynek $M$ csúcsa a felület tengelyén a felület $S$ csúcsától ép oly távolságra van, mint az $S$ a $h^{(2)}$ síkjától, és melynek két fősíkja egybeesik a hyperbolikus paraboloid két fősíkjával, tehát a harmadik fősíkja párhuzamos a $h^{(2)}$-nek síkjával. A $h^{(2)}$-nek $H$ középpontja a hyperbolikus paraboloid $c$ tengelyén, $S_1$ és $S_2$ csúcsa pedig annak egyik főmetszésén, a $p^{(2)}$ parabolán van (29. ábra).

A felületnek $g_o h_o$ csúcsalkotói az $S_1$ ponton keresztül menő, egymásra merőleges $h_1 g_1$ alkotóit oly $E_1 \equiv (g_o h_1)$, $E_2 \equiv (h_o g_1)$ pontokban metszik, hogy az $ME_1S_1E_2$ pontok egy négyzetnek szögpontjai. A $h^{(2)}$ hyperbolának $t_1$, $t_2$ asymptótái párhuzamosak a $g_o h_o$ csúcsalkotókkal; az $ME_1$, $ME_2$ egyenesek pedig ezeket a $t_1$, $t_2$ asymptótákat az $S_1$ hyperbola-csúcsérintőjének $T_1$, $T_2$ pontjaiban metszik úgy, hogy

$S_1M = S_1T_1 = S_1T_2$. Végre az $MHS_1$ derékszögű háromszög miatt:

$$MH^2 = S_1M^2 - S_1H^2 = S_1T_1^2 - S_1H^2.$$

Az $M.h^{(2)}$ kúpot az $S_1$ ponton keresztül menő és az $S_1S_2$ egyenesre, tehát egyszersmind a kúpnak elliptikus tengelyére merőleges, és a kúp csúcsától $S_1H$ távolságra levő sík oly ellipsis szerint metszi, melynek fél-főtengelye $S_1T_1$-gyel, és félmelléktengelye $MH$-val egyenlő; ezért az $M.h^{(2)}$ kúp, parabolikus kúp (54. oldal).



29. ábra.

Ennélfogva: *A hyperbolikus paraboloidnak mindazon érintősíkjai, melyek a felületet derékszögű alkotókban metszik, oly parabolikus kúpot burkolnak, melynek csúcsa a felület tengelyén van.*

Hogy a hyperbolikus paraboloid $S$ csúcsának távolságát az előbbi $h^{(2)}$ hyperbola síkjától és az $M.h^{(2)}$ kúp $M$ csúcsától megtalálhassuk, fejezzük ki annak a szögnek tangensét, melyet a $g_oh_o$ csúcsalkotók, vagy (ami ugyanaz) a vezető síkok, a felület egyik fősíkjával képeznek, az $\alpha$ és $\beta$ fősíkokban fekvő $p^{(2)}$ és $p'^{(2)}$ parabolák $F, F'$ gyujtópontjainak a csúcstól mért $FS = p$, $F'S = p'$ távolságaival. Messe a felület egy $g$ alkotója a $p^{(2)}$ és $p'^{(2)}$ parabolákat a $P$ és $P'$ pontokban; ezek az $S$ csúcspontnak $\sigma$ érintősíkjától egyenlő, a $c$ tengelytől pedig $y$, illetve $y'$ távolságra vannak. A $g$ egyenesnek derékszögű projekciója a $\sigma$ síkra párhuzamos a $g_o$ alkotóval, tehát a $g_o$-nak $\psi$ hajlásszöge a $p^{(2)}$ síkjához olyan, hogy

$$y' = y \operatorname{tg} \psi.$$

Minthogy a $P$ és $P'$ pont a $\sigma$ síktól egyenlő távol van, azért a parabola ismert tulajdonsága folytán

$$y'^2 : y^2 = p' : p,$$

miből — tekintettel az előbbi egyenletre — következik:

$$tg^2\psi = \frac{p'}{p}.$$

Azaz: *ha a hyperbolikus paraboloid főmetszéseinek gyujtópontjai annak csúcsától $p$, $p'$ távolságra vannak, akkor ama szög tangensének négyzete, melyet a vezető síkok az első fősíkkal képeznek: $= p' : p$.*

Az $M.h^{(2)}$ kúp egyik fősíkjában fekvő alkotók párhuzamosak a $g_o h_o$-hoz, tehát a kúp elliptikus tengelyével $\psi$ szöget képeznek. De minthogy az $M.h^{(2)}$ kúp parabolikus, azért a másik fősíkban fekvő alkotók $\vartheta$ hajlásszöge a kúp elliptikus tengelyéhez olyan, hogy:

$$tg^2\vartheta = tg^2\psi - 1 = \frac{p'-p}{p}.$$

Ez utóbbi kúpalkotók érintik a $p^{(2)}$ parabolát, ha $p' > p$; tehát $M$ metszőpontjuknak távolsága a $p^{(2)}$ parabola $S$ csúcsától

$$p tg^2\vartheta = p'-p.$$

Ugyancsak $p'-p$ távolságra van a $h^{(2)}$ hyperbola síkja is az $S$ csúcstól. Ennélfogva:

„Ha a hyperbolikus paraboloid fősíkjaiban fekvő $p^{(2)}, p'^{(2)}$ paraboláknak gyujtópontjai a felület csúcspontjától $p$ és $p'$ távolságra vannak $(p' > p)$, akkor annak a $h^{(2)}$ hyperbolának a síkja, melynek pontjaiban a felületnek egymásra merőleges alkotói találkoznak, a felület csúcsától $p'-p$ távolságra van, merőleges a felület tengelyére és azt a parabolát metszi, melynek gyujtópontja a csúcshoz közelebb van."

7. Vizsgáljuk most meg, mily pontsorban metszik a hyperbolikus paraboloid ugyanegy rendszeréhez tartozó és egymásra merőleges alkotói a másik rendszer alkotóit.

Projicziáljuk e végből a felület $g$ és $h$ rendszerbeli alkotóit a $g$ alkotók $\varepsilon_g$ vezetősíkjára oly sugarakkal, melyek egy $h_1$ alkotóval párhuzamosak. A $h$ alkotó projekczióí egy párhuzamos sugarú sort, a $g$ alkotóknak projekczióí pedig egy közönséges sort képeznek, melynek csúcsa az $(\varepsilon_g, h_1) = H_1$ pont. Minthogy két-két $g$ alkotó ugyanoly szög alatt hajlik egymáshoz, mint azoknak projekcziója az $\varepsilon_g$ síkon: az egymásra merőleges $g$ alkotók projekczióí orthogonalis sort képeznek. De mert ez az orthogonalis sor a $h$ alkotók projekczióit elliptikus involucziós pontsorban metszi és a $h_1$-ből ugyanily síksorral projicziáltatik, mondhatjuk:

*A hyperbolikus paraboloidnak bármelyik rendszeréhez tartozó, egymásra merőleges alkotói a másik rendszer alkotóit elliptikus involucziós pontsorokban metszik és e rendszernek alkotóiból elliptikus involucziós síksorokkal projicziáltatnak.*

Megjegyezhető még, hogy az $(\varepsilon_g, H_1)$ sugársornak az a $g_o$ sugara, mely a $h$ alkotók projekczióira merőleges, a felület $g_o$ csúcsalkotójának projekcziója lesz, mert az erre merőleges $g$ alkotó $(g_\infty)$, mint a $h$ alkotók projicziáló síkjainak metszővonala, végtelen távol van. De az $(\varepsilon_g, H_1)$ sugársornak erről a $g'_o$ sugaráról bármily két $h$ alkotónak projekcziója kisebb vonaldarabot metsz le, mint az $(\varepsilon_g, H_1)$ sugársornak más sugaráról. Ezért:

*A hyperbolikus paraboloid egyik sugárserege a másik seregnek csúcsalkotójától kisebb részeket metsz le, mint ez utóbbi sugárseregnek bármelyik sugaráról.*

8. Ha a hyperbolikus paraboloid minden $g$ alkotóján keresztül a $g$ alkotókkal párhuzamos $\varepsilon_g$ vezetősíkra merőleges síkokat bocsátunk, úgy ezek a felületet az illető $g$ alkotók egy-egy pontjában érintik. Ezeknek az érintőpontoknak geometriai helye, mint az $\varepsilon_g$-re merőleges egyenes végtelen távol fekvő pontja polárissíkjának metszése a felülettel, egy $p_g^{(2)}$ parabola, melynek csúcsa és tengelye egybeesik a felület csúcsával és tengelyével és melynek síkja harmónikusan választja el a $g_o h_o$ csúcsalkotókat az $\varepsilon_g$ síkra merőleges egyenes végtelen távol fekvő pontjától. Ugyanígy van a felületen egy $p_h^{(2)}$ parabola, melynek pontjain keresztül menő érintősíkok a felület másik vezetősíkjára merőlegesek, és mely a felület fősíkjait illetőleg symmetrikusan van elhelyezve a $p_g^{(2)}$ parabolához. E két parabolát a $g$, illetve a $h$ alkotók *strikczió-vonalának* (*szükülő* vonalának) nevezzük. Ez az elnevezés onnan származik, hogy minden alkotónak a strikczió-vonalon fekvő pontja a szomszéd alkotóhoz közelebb van, mint minden más pontja. Ugyanis ha a $g_1 g_2$ szomszéd alkotókat tekintjük, melyek egymástól 1-ső rendű végtelen kicsiny távolságra vannak, és a $g_1$-ön keresztül a $g_1 g_2$-vel párhuzamos $\varepsilon_g$ síkra merőleges síkot bocsátunk, úgy ez a $g_2$-öt egy $G_2$ pontban metszi, a felületet pedig a $g_1$-nek egy $G_1$ pontjában érinti. A $G_1 G_2$ két 1-ső rendű végtelen kicsiny távolságra fekvő pont, melynek összekötő egyenese a felület egy $h$ alkotója. De ez a $G_1$ pont végtelen közel van ahhoz a $G'_1$ ponthoz, melyben a $G_2$ pontból a $g_1$-re bocsátott merőleges a $g_1$-et metszi. A $G_1 G_2$ egyenes a merőleges szelője a $g_1$ és $g_2$-nek, és mert a $G'_1 G_1 G_2$ végtelen kicsiny derékszögű háromszögben a $G'_1 G_2$ befogó és a $G_2 G_1$ átfogó egyenlő rendű végtelen kicsinyek, a $G'_1 G_2 G_1$ szög pedig véges, azért a $G'_1$ a $G_1$-től ugyanoly

rendű végtelen kis távolságban van, tehát a határra áttérve: a $G_1$ egybeesik $G'_1$-gyel. De $G_1$ a $p_g^{(2)}$ strikczió-vonalnak pontja, tehát $g_1$-nek ez a $G_1$ pontja a szomszéd $g_2$ alkotóhoz legközelebb van.

A $p_g^{(2)}$ és $p_h^{(2)}$ paraboláknak még egy más tulajdonságát is fel akarjuk itt említeni. Legyen a $g_i$ és $h_i$ két egymásra merőleges alkotója a hyperbolikus paraboloidnak, melyeknek $(g_i h_i)$ metszőpontja, mint láttuk, egy $h^{(2)}$ hyperbolán fekszik. A felület $g$ alkotói közül az a $g'_i$ alkotó, mely a $g_i$-re merőleges, a $h_i$-t a $p_g^{(2)}$ parabolán metszi. Ugyanis a $g_i$ merőleges a $h_i$-re és a $g'_i$-re, tehát a $[h\, g'_i]$ síkra is, s ezért a $[h_i g'_i]$ érintősík merőleges az $\varepsilon_g$ vezetősíkra. Ezért mondhatjuk: *Ha egy hyperbolikus paraboloid egymásra merőleges alkotóinak metszőpontjai a $h^{(2)}$ hyperbolán fekűsznek, és a $g$ alkotórendszer strikczió-vonala a $p_g^{(2)}$ parabola, akkor azok a $g$ alkotópárok, melyek egy-egy $h$ alkotót a $h^{(2)}$ és $p_g^{(2)}$ görbéken metszik, egymásra merőlegesek.* —

(A hyperboloid egyes alkotó rendszerének is van strikczió-vonala. Ez szintén geometriai helye azoknak a pontoknak, melyeknek érintősíkjai merőlegesek az alkotók végtelen távol fekvő pontjainak érintősíkjaira, — ép úgy, mint a hyperbolikus paraboloid alkotó rendszerének. A hyperboloid minden $g$ és minden $h$ alkotója benne fekszik asymptótikus kúpjának abban az érintősíkjában, mely a kúpot az illető $g$ és $h$-val párhuzamos $l$ alkotóban érinti. Ha tehát az asymptótikus kúpnak érintősíkjaira merőleges síkokat állítunk az érintősíkokban fekvő egyes hyperboloid alkotókon keresztül, úgy e merőleges síkoknak érintőpontjai a hyperboloiddal a strikczió-vonalnak pontjai. A hyperboloidnak két strikczió-vonala azonban általaban térgörbe, tehát nem parabola, mint a hyperbolikus paraboloidnak két strikczió-vonala.)

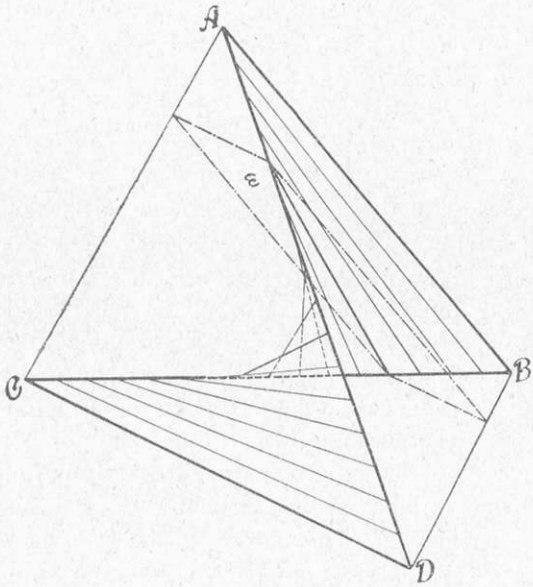
9. Jelöljük a hyperbolikus paraboloid valamely $P$ pontjának távolságát a két főstktól és $S$ csúcsának $\sigma$ érintősíkjától $x$, $y$, $z$-vel; továbbá jelöljük ama főstkokban fekvő $p^{(2)}, p'^{(2)}$ parabolák gyujtópontjainak távolságát az $S$ csúcstól, mint már előbb tettük, $p$ és $p'$-sel. A $P$ ponton keresztül menő és az első főstkkal párhuzamos sík a hyperbolikus paraboloidot a $p^{(2)}$-vel kongruens $\pi^{(2)}$ parabolában metszi, melynek csúcsa a $p'^{(2)}$ parabolán a $\sigma$-tól $\frac{x^2}{4p'}$-távolságra van úgy, hogy a $\sigma$ sík e csúcsot és a $p^{(2)}$ parabolát elválasztja. De mert a $\pi^{(2)}$ parabola kongruens a $p^{(2)}$-vel, azért az $xyz$ mennyiségek között ez az összefüggés van:

$$y^2 = 4p\left(z + \frac{x^2}{4p'}\right), \quad \text{vagy} \quad \frac{y^2}{4p} - \frac{x^2}{4p'} = z.$$

Ez a reláczió, melyet a hyperbolikus paraboloid főmetszéseinek $p, p'$ gyujtóponttávolsága, és bármely pontjának a fősíkoktól és a csúcs érintősíkjától mért $xyz$ távolsága között találtunk: *a hyperbolikus paraboloid egyenlete* vonatkoztatva az illető síkokra.

10. Mint a 2. pont alatt kimutattuk, minden $ABCD$ térnégyszög oldalalain keresztül fektethető egy hyperbolikus paraboloid; a négyszög szemben fekvő oldalai az egyik és a másik alkotórendszerhez tartoznak. A térben egy $ABCD$ pontnégyest $\infty^{12}$-szer, a hyperbolikus paraboloidon pedig az egyik és a másik rendszerhez tartozó két alkotópárt $\infty^4$-szer vehetünk fel. Ezért a hyperbolikus paraboloidok száma:

$$\infty^{12-4} = \infty^8.$$



30. ábra.

Az $ABCD$ térnégyszög szögpontjai egy tetraedernek csúcsai; ennek élei három térnégyszögnek lehetnek oldalai, t. i. az $ABCD$, $ACBD$ és $ACDB$-nek, s e négyszögnek mindegyikén egy-egy hyperbolikus paraboloid fektethető keresztül. A tetraedernek lapjaitól határolt véges térben e paraboloidok bármelyikének olyan felület-darabja van, mely a tetraedert két egyenlő térfogatú részre osztja.

Ugyanis az $ABCD$ tetraeder $AB$ és $CD$ éleivel párhuzamos $\varepsilon$ síkok a tetraeder lapjait parallelogrammákban, az $ABCD$ négyszögön keresztül menő hyperbolikus paraboloidot pedig oly alkotókban metszik, melyek ama parallelogrammáknak átlói. (30. ábra.) Minthogy ezek az átlók felezik az egyes parallelogrammákat, azért az ismert Cavalieri-féle elv szerint ama hyperbolikus paraboloidnak a tetraederben levő felület-darabja felezi a tetraedert. A talált eredményt ekkép fejezhetjük ki: *A tetraedernek két pár szemben fekvő élén keresztül fektetett hyperbolikus paraboloid, felezi a tetraeder térfogatát.*

## 15. §. Az egyenoldalú hyperbolikus paraboloid.

1. A hyperbolikus paraboloidot *egyenoldalúnak* nevezzük, ha vezető síkjai egymásra merőlegesek. E felületnek $g_o h_o$ csúcsalkotói is merőlegesek egymásra és $\psi$ hajlásszögük az egyik és a másik fősíkhoz $45^0$. Ezért a $p^{(2)}$, $p'^{(2)}$ parabolikus főmetszések gyujtópontjainak $p$ és $p'$ távolsága az $S$ csúcstól az általános relácziót $(tg^2\psi = p' : p)$ figyelembe véve, egyenlő, tehát a főmetszések kongruens parabolák. E felület csúcsérintősíkja a felületet két kongruens részre osztja úgy, hogy ha a felületet a csúcsalkotóknak egyik szögfelezője körül két derékszög alatt, aztán a felület tengelye körül egy derékszög alatt forgatjuk, akkor a főmetszések, és a csúcsérintősíktól ketté osztott felületrészek helyet cserélnek.

Az a $h^{(2)}$ hyperbola, melynek pontjain keresztül menő $g_i h_i$ alkotók az általános hyperbolikus paraboloid esetében egymásra merőlegesek, az egyenoldalú hyperbolikus paraboloidnál, a midőn $p' = p$, a csúcsalkotókká, $g_o$ és $h_o$-sá korcsosul el; a felület minden $h$ alkotója merőleges a $g_o$-ra, és minden $g$ alkotója merőleges a $h_o$-ra. A $g_o$ és $h_o$ csúcsalkotók képezik tehát az összes $h$, illetve a $g$ alkotóknak merőleges szelőit és a $h$, illetve $g$ alkotók strikczió-vonalát, tehát az általános felületnek a $p^{(2)}_h$ és $p^{(2)}_g$-vel jelölt paraboláit.

A derékszögű és egymást metsző $g_o h_o$ csúcsalkotók még nem határozzák meg az egyenoldalú hyperbolikus paraboloidot. De ha ezeknek egyikére, pl. a $g_o$-ra, egy megadott pontban merőleges egyenes $h$ ismeretes, melyen a felület keresztül megy, akkor $g_o h_o h$ már meghatározza azt. A $g_o h_o$ merőleges egyenespárt $\infty^6$-szor, a $g_o$-ra egy adott pontban a $h$-t $\infty^1$-szer vehetjük fel merőlegesen. Ezért: *az egyenoldalú hyperbolikus paraboloidok száma* $\infty^7$. —

Két egymást nem metsző $g_1$, $g_2$ egyenesen fekvő hasonlóan projektiv pontsorok képződménye csak akkor lesz egyenoldalú hyperbolikus paraboloid, ha a $g_1 g_2$-nek merőleges szelője egy megfelelő pontpáron megy keresztül; e merőleges szelő $h_o$ a felületnek csúcsalkotója. Ha tehát két egymást nem metsző egyenes $g_1 g_2$ és azoknak egy $h_1$ szelője, mely a $g_1$ és $g_2$-re nem merőleges, adva van, akkor a $g_1 h_1 g_2$ egyeneseken egy meghatározott egyenoldalú hyperbolikus paraboloid fektethető keresztül; ennek egyik csúcsalkotója $h_o$, a $g_1 g_2$ egyeneseknek, a másik csúcsalkotója $g_o$, a $h_o h_1$ egyeneseknek merőleges szelője.

Egy $g_1 h_1 g_2 h_2 \equiv ABCD$ $(AB \equiv g_1, \ldots)$ térnégyszögön keresztül csak akkor lehet egyenoldalú hyperbolikus paraboloidot fektetni, ha

a szemben fekvő $g_1g_2$ és $h_1h_2$ oldalaknak $h_0g_0$ merőleges szelői egymást metszik. —

Ha két tetszésszerinti egymást nem metsző egyenes egyikének pontjaiból a másikra merőleges szelőket bocsátunk, úgy ezek egy egyenoldalú hyperbolikus paraboloidnak alkotói; a két felvett egyenesnek merőleges szelője az egyik csúcsalkotója, és az az egyenes, a melyre a merőleges szelőket bocsátottuk, a másik csúcsalkotója a felületnek.

Ha egy síksor tengelyén a síksorral projektiv pontsort veszünk fel, és a pontsor minden pontján keresztül a megfelelő síkban a tengelyre merőlegest emelünk, vagy a síksor minden síkjára a megfelelő ponton keresztül merőleges egyeneseket emelünk, úgy ezek a merőlegesek egy-egy egyenoldalú hyperbolikus paraboloidot képeznek, melynek egyik csúcsalkotója a síksor tengelye. Ugyanis az első esetben a merőlegesektől leírt felület képződménye az adott pontsornak, és a síksor tengelyére merőlegesen álló végtelen távol fekvő egyenesen a síksortól kimetszett pontsornak; a második esetben a felület az előbbinek egy derékszög alatt elforgatott helyzete.

Tekintettel arra, hogy a hyperboloidnak, vagy bármely hyperbolikus paraboloidnak, egy alkotóján keresztül menő érintősíkok sora projektiv az érintőpontok sorával, és hogy a felület egy érintősíkjára az érintőpontban emelt merőleges a *felület normálisa*, következik az előbbiekből, hogy: *a hyperboloidnak, vagy a hyperbolikus paraboloidnak egy alkotója pontjain keresztül menő normalisai, valamint egy alkotó pontjaiban arra az alkotóra merőleges érintői, egy-egy egyenoldalú hyperbolikus paraboloidnak alkotói. Mindkét esetben e felületnek egyik csúcsalkotója a felvett alkotó, csúcsa pedig az alkotónak az a pontja, melyben ez az alkotó az eredeti felületen a rendszeréhez tartozó strikczió-vonalat metszi.*

2. Vegyünk fel az egyenoldalú hyperbolikus paraboloid egyik főmetszésén (31. ábra) egy $A$ pontot, mely a felület $\sigma \equiv [g_0h_0]$ csúcsérintősíkjától $2p$, azaz két oly távolságra van, mint a $p^{(2)}$ parabolikus főmetszés gyujtópontjának távolsága az $S$ csúcstól. Az $A$ pont ekkor a felületnek és a $p^{(2)}$ parabolának $c$ tengelyétől $2p\sqrt{2}$, és a $[cg_0]$ $[ch_0]$ síkoktól, melyek a $p^{(2)}$ síkjához $45^0$ alatt hajlanak $2p$ távolságra van úgy, hogy az $A$ pontnak távolsága a három páronként egymásra merőleges síktól, a $\sigma$, $[cg_0]$, $[ch_0]$-tól, egyenlő $2p$-vel.

Az $A$ pontot és a rajta keresztül menő $g_1h_1$ alkotókat, melyek a $h_0$ illetve $g_0$ alkotókra a $H$, $G$ pontban merőlegesek, projicziáljuk derékszögű sugarakkal a $[ch_0]$ síkra és legyenek ezek a projekcziók $A'$, $g'_1$, $h'_1$. A $g'_1 \equiv A'H$, úgy mint a $g_1$, merőleges a $h_0$ ra a

$H$ pontban; a $h'_1$ a $h_o$-sal, a $g_1$ a $g'_1$-gyel 45 szöget képez, tehát

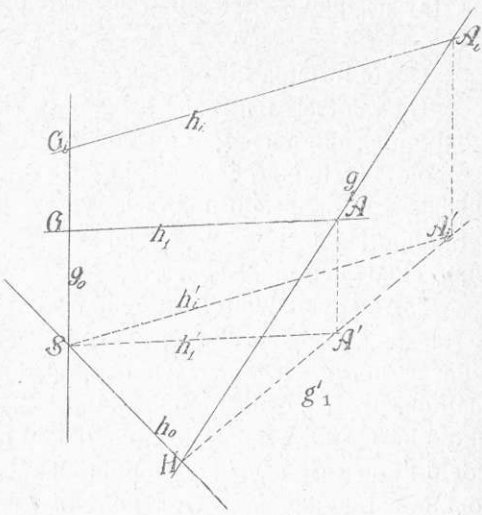
$$GS = AA' = HA' = SH = 2p.$$

Jelöljük a felület egy tetszésszerinti $h_i$ alkotójának, mely a $g_1$ és $g_o$ t az $A_i$ és $G_i$ pontokban metszi, és az $A_i$ pontnak derékszögű projekcióját a $[ch_o]$ síkra, $h'_i$ és $A'_i$-vel. Minthogy ekkor

$$SG_i = A_iA'_i = HA'_i = SH\,tg\,(h'_ih_o) = 2p\,.\,tg\,(h_ih_o)$$

következik:

*Annak a szögnek tangense, melyet az egyenoldalú hyperbolikus paraboloidnak egy változó alkotója ugyanahhoz a rendszerhez tartozó csúcsalkotóval képez, aránylagos azzal a vonaldarabbal, melyet a változó alkotó a másik csúcsalkotóról, a felület csúcsától mérve, lemetsz.*




31 ábra.

Vagy: Ha egy derékszög egyik szára a másik szár körül egyenletesen forog, a derékszög csúcsa pedig a szilárd száron egyenletesen tovahalad és ama forgási szög tangense aránylagos a csúcstól befutott vonaldarabbal, akkor a mozgó szár oly egyenoldalú hyperbolikus paraboloidot ír le, melynek csúcsalkotói a derékszög szárai a mozgás kezdetén.

Ha az előbbi ábrában a $h_i$ egyenes egy tetszésszerinti pontjának távolságát a $\sigma$, $[cg_o]$, $[ch_o]$ síkoktól, $z$, $y$, $x$-szel jelöljük, azt átjuk, hogy

$$SG_i = x, \quad y\,.\,tg(h_ih_o) = z,$$

tehát tekintettel az utolsó egyenletre

$$xy = 2pz.$$

Ez a reláczió, mely az egyenoldalú hyperbolikus paraboloid pontjainak a $[ch_o]$, $cg_o]$, $\sigma$ síkoktól mért $x, y, z$ távolsága és a $p$ vonaldarab között van, a felület egyenlete ama három síkra vonatkoztatva.

— Az egyenoldalú hyperbolikus paraboloid egyenlete a fősíkokra és a csúcsérintősíkra vonatkoztatva, mint az általános hyperbolikus paraboloid egyenletéből következik:

$$y^2 - x^2 = 4pz. —$$

Láttuk az imént, hogy a $p^{(2)}$ parabola $A$ pontja a $\sigma$, $[cg_o]$, $[ch_o]$ síkoktól $2p$ távolságra van. A $p^{(2)}$ parabolán még egy $B$ pont, a másik főmetszésen, a $p'^{(2)}$ parabolán pedig még két oly pont $C$, $D$ található, mely ama három síktól szintén $2p$ távolságra van. A felületnek az $A, B$ pontján keresztül menő $g_1h_1$, $g_2h_2$ alkotói egymást a $C \equiv (g_1h_2)$, $D \equiv (g_2h_1)$ pontokban metszik, és az $ABCD$ pontok oly szabályos tetraedernek szögpontjai, melynek élhossza $4p\sqrt{2}$.

Ebből fordítva következik:

Ha valamely négyszög szögpontjai egy szabályos tetraedernek szögpontjai, akkor a négyszög oldalain egy egyenoldalú hyperbolikus paraboloid fektethető keresztül; ennek csúcsalkotói a szemben fekvő oldalak felezőpontjain mennek keresztül és a főmetszések két gyujtópontjának távolsága félakkora, mint a négyoldal szemben fekvő oldalainak távolsága.

3. Az egyenoldalú hyperbolikus paraboloid minden $h$ alkotója merőleges a $g_o$ csúcsalkotóra és minden $g$ alkotója merőleges a $h_o$ csúcsalkotóra. A felületen tehát végtelen sok oly alkotó-hármasokat találunk, melyekben mindenik a másik kettőre merőleges. Ilyen alkotó-hármasok vannak az egyenoldalú hyperboloidon és az egyenoldalú kúpon, és ezért e szempontból véve: az egyenoldalu hyperbolikus paraboloidot az *egyenoldalú hyperboloid speciálitásának* tekinthetjük. De tekinthetjük az egyenoldalú hyperbolikus paraboloidot az *orthogonalis hyperboloid speciálitásának* is, mert pontjainak két egyenestől mért távolságai viszonya állandó, és pedig éppen az *egység*, azaz: az egyenoldalu hyperbolikus paraboloid pontjai két egyenestől egyenlő távolságra vannak.

Ezt kimutatandó, vegyünk fel az egyenoldalú hyperbolikus paraboloid $c$ tengelyén két pontot, $V_1$, $V_2$-őt az $S$ csúcstól $m$ távolságra, mely kisebb, mint a $p^{(2)}$ és $p'^{(2)}$ főmetszési parabolák $F$, $F'$ gyujtópontjainak $p$ távolsága az $S$ csúcstól (32. ábra). Állitsunk a $V_1$ pontban, mely az $SF$ vonaldarabon van, a $c$ tengelyre oly merőleges egyenest, $v_1$-et, hogy az a $\varphi$ szög, melyet a $v_1$ a felület egyik vezető síkjával, pl. a $[cg_o]$-sal képez, ekképen legyen meghatározva

$$p\sin 2\varphi = m.$$

A $v_1$ polárisa $v_2$ a felületet illetőleg, merőleges a $c$-re, a $V_2$ ponton megy keresztül, a $[cg_o]$ vezető síkkal szintén $\varphi$ szöget képez úgy, hogy a $v_1$, $v_2$ egyenesek a $[cg_o]$, $[ch_o]$ vezető síkoktól harmónikusan vannak elválasztva.

A $p^{(2)}$ parabola egy $P$ pontjának $x$ távolságát $s$ csúcsérintőjétől, és $y$ távolságát $c$ tengelyétől az

$$y^2 = 4px$$

relacziő köti össze.

Ha a $P$ pontból a $v_i$ egyenesre és a $[cv_i]$ síkra bocsátott merőlegeseknek talppontja $P_i$, illetve $Q_i$, úgy

$$PP_1^2 = PQ_1^2 + P_1Q_1^2 = y^2\cos^2(45^0 - \varphi) - (x - m)^2$$

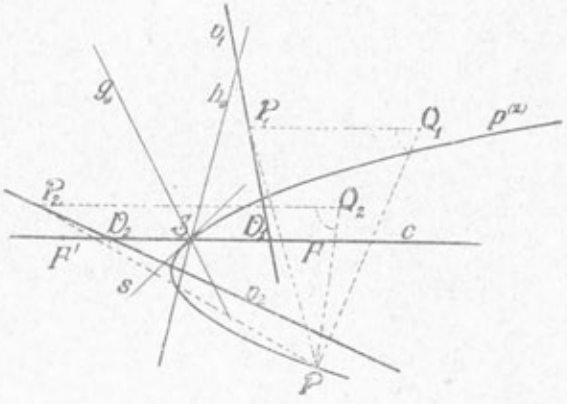
és

$$PP_2^2 = PQ_2^2 + P_2Q_2^2 = y^2\sin^2(45^0 - \varphi) + (x + m)^2$$

E két egyenletből, tekintettel az előbbi kettőre, következik, hogy

$$PP_1 = PP_2,$$

azaz: a $p^{(2)}$ parabola tetszésszerinti $P$ pontja a $v_1$ és $v_2$ egyenesektől egyenlő távolságra van. Ugyanez úton találjuk, hogy a $p'^{(2)}$ parabolának is minden pontja a $v_1$ és $v_2$-től egyenlő távolságra van.




23. ábra.

A felület egy tetszésszerinti alkotója metszi a $p^{(2)}$ és $p'^{(2)}$ parabolákat, tehát a metszőpontok egyenlő távolságra vannak $v_1$ és $v_2$-től. Másrészt a felvett alkotó vagy a $[cg_o]$, vagy a $[ch_o]$ vezető síkkal párhuzamos, s mint ilyen a $v_1$ és $v_2$ egyenesekhez egyenlő szögek alatt hajlik. De ha egy egyenes más két egyeneshez egyenlő szög alatt hajlik és két pontjának távolsága e két egyenestől egyenlő, akkor annak minden pontja a két egyenestől egyenlő távolságra lesz.

Ezt vagy akképen bizonyítjuk, mint az orthogonalis hyperboloid esetében mutattuk, csakhogy jóval egyszerűbben, vagy pedig a következőképen.

Feltételezvén, hogy a $h$ egyenes a $v_1$ és $v_2$ egyenesekhez

egyenlő szögek alatt hajlik és a $h$ egyenesnek $P$ és $Q$ pontja a $v_1$ és $v_2$-től egyenlő távolságra van, és e pontokból amaz egyenesekre bocsátott merőlegeseknek talpai $P_1Q_1P_2Q_2$ úgy

$$PP_1 = PP_2, \quad QQ_1 = QQ_2 \quad \text{és} \quad P_1Q_1 = P_2Q_2.$$

De mert a $PQQ_1P_1$ négyszögnek oldalai meg a $P_1Q_1$-nél levő szögei megegyezők a $PQQ_2P_2$ négyszög oldalaival meg a $P_2Q_2$-nél levő szögekkel, és a $P_1Q_1 \equiv v_1$, $P_2Q_2 \equiv v_2$ egyenesek egymást nem metszik, azért a két négyszög kongruens, és így a közös $PQ \equiv h$ oldal körül egymásba forgathatók. Ezért a $h$ egyenesnek minden pontja egyenlő távolságra van a $v_1$ és $v_2$ egyenesektől.

Mindezek után mondhatjuk: *Ha az egyenoldalú hyperbolikus paraboloid két főmetszésének gyujtópontja a felület csúcsától p távolságra van és a felület tengelyére merőleges $v_1$ egyenes egyik fősíkjához $\psi$ szög alatt hajlik és a tengelyt a felület csúcsától p cos $2\psi$ távolságra metszi, akkor a felület pontjai a $v_1$ egyenestől és annak $v_2$ polárisától egyenlő távolságra vannak.*

Vagy másképen fogalmazva:

*Mindazon pontok, melyek két egymást nem metsző és egymáshoz $2\varphi$ szög alatt hajló egyenestől, $v_1$ és $v_2$-től, egyenlő távolságra vannak, egy egyenoldalú hyperbolikus paraboloidon fekünsznek.* Ennek $c$ tengelye a $v_1$, $v_2$ egyeneseknek merőleges szelője, $S$ csúcsa a $v_1$, $v_2$ által a $c$-ről lemetszett $V_1V_2 = 2m$ vonaldarab felezőpontja; a felület egyik főmetszésének, $p^{(2)}$-nek, síkja a $v_1$-hez $45^0 + \varphi$, a $v_2$-hez $45^0 - \varphi$ szög alatt hajlik, a másik főmetszésnek, $p'^{(2)}$-nek, síkja pedig a $v_1$-hez hajlik $45^0 - \varphi$ és a $v_2$-hez $45^0 + \varphi$ szög alatt. E főmetszések gyujtópontjai az $S$-től $m : sin2\varphi$ távolságra vannak úgy, hogy az elsőnek gyujtópontja és a $V_1$ pont, a másodiknak gyujtópontja és a $V_2$ pont, az $S$-től nincsen elválasztva.

Két egyenest, $v_1$ és $v_2$-öt, a térben $\infty^8$-félekép vehetünk fel. Volna tehát $\infty^8$ oly egyenoldalú hyperbolikus paraboloid, melynek pontjai e változó egyenespár egyeneseitől egyenlő távolságra vannak. Ámde $\infty^1$ oly egyenespár van, melytől ugyanegy egyenoldalú hyperbolikus paraboloid pontjai egyenlő távolságra vannak. Ezért az egyenoldalú hyperbolikus paraboloid száma csak $\infty^7$, mint azt már előbb találtuk.

4. Mi lesz a geometriai helye azoknak a $v_1v_2$ polárispároknak, melyektől egy megadott $F^{(2)}$ egyenoldalu hyperbolikus paraboloid pontjai egyenlő távolságra vannak?

Tartsuk meg a $v_1v_2$ polárispárra az előbbi jelöléseket és legyen $u_1u_2$ egy másik ily tulajdonságú polárispár mint a $v_1v_2$, mely a fel-

vett $F^{(2)}$ egyenoldalú hyperbolikus paraboloid $S$ csúcsától $m_1$ távolságra van, a $[cg_o]$ vezető síkhoz $\varphi_1$ szög alatt hajlik, melyre nézve tehát $p\,sin\,2\varphi_1 = m_1$, úgy mikép a $V_1 V_2$ polárispárra vonatkozólag $psin2\varphi = m$.

E két egyenletből következik, hogy

$$\frac{m - m_1}{m + m_1} = \frac{sin2\varphi - sin2\varphi_1}{sin2\varphi + sin2\varphi_1}.$$

És ha a jobboldal számlálójának és nevezőjének első tagját $(sin^2\varphi_1 + cos^2\varphi_1)$-gyel, a második tagját pedig $(sin^2\varphi + cos^2\varphi)$-vel szorozzuk, a kettősszögeket pedig egyszerű szögekkel fejezzük ki, akkor könnyen látható, hogy

$$\frac{m - m_1}{m + m_1} = \frac{sin(\varphi - \varphi_1)cos(\varphi + \varphi_1)}{cos(\varphi - \varphi_1).sin(\varphi + \varphi_1)} = \frac{tg(\varphi - \varphi_1)}{tg(\varphi + \varphi_1)}.$$

A $v_1 v_2 u_1$ egyenesek merőlegesek az $F^{(2)}$ egyenoldalu hyperbolikus paraboloid $c$ tengelyére, ezért a rajtuk keresztül menő és tőlük meghatározott egyenoldalú hyperbolikus paraboloidnak, $H^{(2)}$-nek, egyik csúcsalkotója a $c$ egyenes. De mert a $v_1$ és $v_2$ hajlásszöge az $u_1$-hez $\varphi - \varphi_1$ és $\varphi + \varphi_1$, továbbá mert a $v_1$ és $v_2$-nek távolsága az $u_1$-től $m - m_1$ és $m + m_1$, azért az utóbbi egyenlet miatt, tekintettel a 2. pontban levő tételre, az $u_1$ másik csúcsalkotója a $H^{(2)}$-nek. Ezért mondhatjuk:

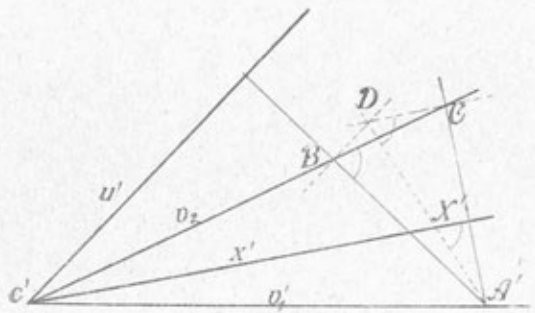
*Ha valamely $F^{(2)}$ egyenoldalú hyperbolikus paraboloidnak pontjai a $v_1 v_2$ polárispártól egyenlő távolságra vannak, akkor a $v_1 v_2$-n keresztül menő $(\infty^1)$ egyenoldalú hyperbolikus paraboloidoknak egyik csúcsalkotója az $F^{(2)}$-nek $c$ tengelye, a többi csúcsalkotók pedig páronként akkép foglalhatók az $F^{(2)}$ polárispárjaivá egybe, hogy e polárispároktól az $F^{(2)}$-nek pontjai szintén egyenlő távolságra lesznek.*

Ezt még máskép is kifejezhetjük! Az $u_1$ mint csúcsalkotója a $v_1 v_2 u_1$-en keresztül menő $H^{(2)}$ hyperboloidnak merőlegesen metszi a $v_1 v_2 u_1$-nek minden szelőjét. De ha az $u_1$ nincs megadva, akkor azt akkép találhatjuk meg, hogy $v_1$ és $v_2$-nek egyik szelőjére, $x$-re, valamint a $v_1$ és $v_2$-nek merőleges szelőjére, $c$-re, merőleges szelőt állítunk. Azaz:

*Ha az $F^{(2)}$ egyenoldalú hyperbolikus paraboloid pontjai a $v_1 v_2$ polárispártól egyenlő távolságra vannak, akkor az $F^{(2)}$-nek $c$ tengelyére, meg a $v_1$ és $v_2$-nek változó szelőire merőleges szelők páronként akkép foglalhatók polárispárokká egybe, hogy az $F^{(2)}$-nek pontjai, úgy mikép a $v_1 v_2$-től, ezektől a polárispároktól is egyenlő távolságra*

*vannak*. E szerint az összes ily tulajdonságú polárispárok egy ily polárispárból $v_1v_2$-ből akkép szerkesztők, hogy a $v_1$-nek egy $A$ pontjából szelőket vezetünk a $v_2$-hez, és minden ily szelőhez meg a $v_1v_2$-nek $c$ merőleges szelőjéhez a merőleges szelőt meghúzzuk; ez a merőleges szelő már egyik egyenese a polárispárnak.

E polárispárok egy $\Pi^{(3)}$ torzfelületet képeznek, melynek ama polárisok alkotói; e torzfelület *konoida*, mivel alkotói mind párhuzamosak egy síkkal, mert merőlegesek egy egyenesre: az egyenoldalú hyperbolikus paraboloidnak $c$ tengelyére. Ez a $c$ tengely *kettős vezérlővonala* a konoidának, mert $c$-nek minden pontján a $\Pi^{(3)}$-nak két alkotója megy keresztül. Ezen alkotók közül csak azok valósak, melyek a $c$ tengelyt a hyperbolikus paraboloid főmetszéseinek $FF^v$ gyujtópontjaitól határolt véges vonaldarabon belül metszik. A konoidának ezen $F$ és $F^v$ pontokon keresztül menő két egybeeső alkotóját *torsalisalkotónak* nevezzük.



33. ábra.

A $\Pi^{(3)}$ konoida harmadrendű, mert minden $l$ egyenes, mely például a $v_1v_2$ (vagy bármely más $u_1u_2$) polárispárt metsz, még egy alkotót fog metszeni, t. i. azt, mely a $c$ tengelynek és az $l$ egyenesnek merőleges szelője. Ezt még azzal is igazolhatjuk, hogy kimutatjuk, hogy $\Pi^{(3)}$ konoida bármely $u$ alkotóján keresztül menő sík a felületet az $u$-n kívül még egy ellipsisben metszi.

Legyen a $c$ tengelynek és a $\Pi^{(3)}$ konoida $v_1$, $u$, $x$ alkotójának derékszögű projekciója a $v_2$-n keresztül menő és a $c$-re merőlegesen álló $\varepsilon$ síkon a $c'$ pont és a $v_1'$, $u'$, $x'$ egyenes (33. ábra). Ha az $u$ alkotónak egyik síkja $\mu$ a $v_1$ és $v_2$ egyenest az $A$ és $B$ pontban metszi, akkor az $AB$ egyenes merőleges az $u$-ra, és annak $A'B$ derékszögű projekciója az $\varepsilon$ síkon, merőleges az $u'$-re; a $\mu$ és $\varepsilon$ metszővonala $BD$ pedig párhuzamos $u'$-sel. Hasonlóképen: ha az $[Ax] \equiv \xi$ sík a $v_1$ és $v_2$ egyenest az $A$ és $C$ pontban metszi, akkor az $AC$ egyenes merőleges az $x$-re, az $A'C$ merőleges az $x'$-re; a $\xi$ és $\varepsilon$ metszővonala $CD$ párhuzamos $x'$-sel. Az $\varepsilon$, $\mu$ és $\xi$ síkok metszőpontja a $D$, tehát a $\mu$ és $\xi$ síkok metszővonala az $AD$, és így az $x$ egyenes

a $\mu$ síkot abban az $X$ pontban metszi, melynek derékszögű projekciója az $\varepsilon$ síkon az $(x', A'D) \equiv X'$ pont. Ámde az $A'BDC$ négyszög húrnégyszög, tehát

$$\sphericalangle A'BD = \sphericalangle A'DC = \sphericalangle 180^0 - A'X'c'$$

tehát az $X'$ pont az $A'Bc'$ háromszög körül írt $k'^{(2)}$ körön van. Ha a $\mu$ sík szilárd marad, az $x$ alkotókat pedig változtatjuk a $\Pi^{(3)}$ konoidán, akkor ezeknek az $x$ alkotóknak $X$ metszőpontjai a $\mu$ síkkal olyanok, hogy derékszögű projekciói az $\varepsilon$ síkon a $k'^{(2)}$ körbe esnek. Azaz: a konoida alkotói, tehát a konoida felület maga is az $u$ alkotóján keresztül menő $\mu$ síkot oly $k^{(2)}$ görbében, melynek derékszögű projekciója az $\varepsilon$ síkon egy $k'^{(2)}$ kör. Ebből következik, hogy a $k^{(2)}$ görbe ellipsis, és a konoida harmadrendű.

Az itt talált konoidát Mannheim*) *Plücker-féle konodiának* nevezi, mert Plücker foglalkozott vele először.

E szerint mondhatjuk:

*Az egyenoldalú hyperbolikus paraboloidnak ama polárispárjai, melytől a felület pontjai egyenlő távolságra vannak, egy Plücker-féle konoidán feküsznek. A paraboloid tengelye kettős vezérlővonala, a paraboloid főmetszéseinek vezérlő vonalai pedig torsalisalkotói a konoidának.*

A Plücker-féle konoidát ama tulajdonságánál fogva, hogy egyes alkotóin keresztül menő síkoknak metszései a felülettel oly ellipsisek, melyeknek projekciói az alkotókkal párhuzamos síkra körök, ekkép képezhetjük: Egy forgáshengert egy síkkal a $k^{(2)}$ ellipsis szerint metszünk, és kiválasztunk egy $c$ alkotót a hengeren. A $c$-re merőleges síkok a $k^{(2)}$-öt a $K_iK'_i$ pontpárokban, a $c$-t pedig a $C_i$ pontokban metszik, és a $C_iK_i$, $C_iK'_i$ egyenesek már alkotói egy Plücker-féle konoidának. A $k^{(2)}$ főtengelyének végpontjain keresztül menő $ff_1$ alkotók és a melléktengelyének végpontjain keresztül menő $g_oh_o$ alkotók egymásra merőlegesek. A $c$ egyenes tengelye, a $g_o$ és $h_o$ csúcsalkotója, a $[cf]$ és $[cf_1]$ sík a két fősíkja, a $(cf)$ és $(cf_1)$ pont a két főmetszés gyujtópontja lesz annak az $F^{(2)}$ egyenoldalú hyperbolikus paraboloidnak, melynek pontjai e Plücker-féle konoidán levő alkotópároktól, mint $F^{(2)}$-nek polárispárjaitól, egyenlő távolságra vannak.

5. *Az $F^{(2)}$ egyenoldalú hyperbolikus paraboloiddal kapcsolatos Plücker-féle konoida alkotói oly tulajdonságúak, hogy a rajtuk keresztül menő és az $F^{(2)}$-re vonatkozó kapcsolt polárissíkok orthogonalis sort képeznek.*

*) Mannheim: *Géométrie cinématique.* (1894; 260. oldal.)

Legyen ismét a $c$ tengelye, a $v_1 v_2$ pedig oly polárispárja az $F^{(2)}$-nek, melytől ennek pontjai egyenlő távolságra vannak. A $V_2 \equiv (cv_2)$ pontnak $\omega_2$ polárissíkja a $v_1$-en megy keresztül és merőleges a $c$-re. A $[cv_2]$ sík az $F^{(2)}$-őt az $l^{(2)}$ parabolában, az $\omega_2$ sík pedig ezt a parabolát a $PQ$ pontokban, a $v_1$ egyenest a $V_1 \equiv (cv_1)$ pontban metszi. A $PQ$ egyenes polárisa a $V_2$ pontnak az $l^{(2)}$-re nézve, tehát a $PQ$ pontpárnak $P_2Q_2$ derékszögű projekciója a $v_2$-re, kapcsolt póluspárja az $l^{(2)}$-nek és egyszersmind az $F^{(2)}$-nek. A $PQ$ pontoknak távolsága a $v_1$-től olyan, mint a $v_2$-től, t. i. $PP_2 = QQ_2 = V_1V_2$; ezért a $[P_2v_1]$, $[Q_2v_1]$ síkok, melyek az $F^{(2)}$-re vonatkozólag kapcsolt polárissíkok, egymásra merőlegesek. Tekintve végre, hogy a $[cv_1]$ és $\omega_2$ egy másik derékszögű kapcsolt polárissíkpárja az $F^{(2)}$-nek, — a tétel igazolva van.

---

IV. FEJEZET.

# A linearis komplexus és a linearis kongruenczia.

## 16. §. A nullarendszer és a linearis komplexus.

1. Az előbbiekből ismeretes, hogy a sugársereg a tér pontjai és síkjai, úgyszintén annak egyenesei között *poláris* vonatkozást létesít. Az egymásra vonatkoztatott pontok és síkok, valamint az egyenespárok, melyek a sugársereget tartó hyperboloidra nézve pólus és polárissíkok, illetve poláris egyenespárok, együttvéve egy *polárisrendszert* képeznek a térben.

A sugársereg azonban még másképen is létesíthet vonatkozást a tér pontjai és síkjai, valamint annak egyenespárjai között. Hogy ezt megismerjük, párosítsuk egy $H^{(2)}$ hyperboloid egyik sugárseregének sugarait involucziósan. És pedig legyenek a sugárseregnek $aa', bb', \ldots$ sugárpárjai társsugarai ennek az involucziós sugársereg-nek, melyet $aa'.\ bb' \ldots$-vel fogunk jelölni.

Valamely $\pi$ sík a $H^{(2)}$ hyperboloidot a $k^{(2)}$ kúpszeletben, az $aa'.bb' \ldots$ involuciós sugársereget a $k^{(2)}$-n fekvő $AA'.\ BB' \ldots$ pont-involucióban metszi. E pontinvolucció társpontjainak összekötő egyenesei a $P$ pontban, az involucióközéppontban, találkoznak és ezt *a $P$ pontot a $\pi$ síkhoz rendeljük*. Ebben a $\pi$-hez rendelt $P$ pont-

ban találkoznak az $aa'.bb'\ldots$ involucziós sugársereg társsugarainak a $\pi$ síkban fekvő szelői.

Ha viszont egy $P$ pontból indulunk ki és ebből az $aa'.bb'\ldots$ sugársereg társsugarait az $\alpha\alpha'.\beta\beta'\ldots$ síkpárokkal projicziáljuk, úgy e síkpárok egy $K^{(2)}$ II. r. kúpot burkolnak és ezen egy involucziós síksort képeznek. Ez involucziós síksor társsíkjainak metszővonalai, melyek egyszersmind a $P$ pontból az $aa'.bb'\ldots$ involucziós sugársereg társsugaraihoz húzható szelők, egy $\pi$ síkban, a síksor involucziósíkjában, vannak. Ezt *a $\pi$ síkot a $P$ ponthoz rendeljük.*

Az adott $aa'.bb'\ldots$ sugársereg segélyével tehát egy $\pi$ síkhoz egy $P$ pontot rendelünk, mely $P$ ponthoz viszont a $\pi$ sík van rendelve. Azt a vonatkozást, mely ez alapon rendeli a tér síkjaihoz annak pontjait és a tér pontjaihoz annak síkjait, a polárisrendszertől megkülömböztetőleg Möbius szerint *nullarendszernek* nevezzük. A síkhoz rendelt pont annak *nullapontja* (vagy pólusa), a ponthoz rendelt sík annak *nullasíkja* (vagy polárissíkja). A polárisrendszertől eltérőleg *jellemző a nullarendszerre nézve, hogy minden pontnak nullasíkja az illető ponton megy keresztül, és minden síknak nullapontja az illető síkban van.*

A midőn a $\pi$ sík az $aa'.bb'\ldots$ sugárseregnek egyik, pl. az $a$ sugarán megy keresztül, a $bb'$,... társsugárpároknak a $\pi$ síkban fekvő szelői, a $H^{(2)}$ hyperboloid második sugárseregének a $\pi$ síkban fekvő $h$ sugarában egyesülnek; az $aa'$ társsugárpárnak pedig ekkor végtelen sok szelője van a $\pi$ síkban, melyek a $\pi$ síknak és az $a'$ sugárnak $(\pi a') \equiv (ha')$ metszőpontján mennek keresztül. E metszőpont $(\pi a')$ lesz tehát az $a$ sugár $\pi$ síkjának nullapontja. Viszont a $(\pi a')$ pontnak, tehát az $a'$ sugár egy tetszésszerinti pontjának, nullasíkja az a $\pi$ sík, mely a felvett $(\pi a')$ pontot az $a'$-nek társsugarával, $a$-val, összeköti.

Az $aa'.bb'\ldots$ involucziós sugárseregnek $jk$ kettőssugarai valósak, vagy képzetesek lehetnek. Ha a kettőssugarak valósak, akkor a $P$ pontnak nullasíkja $\pi$, a $H^{(2)}$ hyberboloid $(Pj)$, $(Pk)$ érintősíkjainak érintőpontjain és a $P$ ponton megy keresztül; és a $\pi$ síknak $P$ nullapontja, a $(\pi j)$, $(\pi k)$ pontok érintősíjainak és a $\pi$ síknak metszőpontja. A kettőssugár egy pontjának nullasíkja annak érintősíkja a $H^{(2)}$ hyperboloiddal, és a kettőssugár egy síkjának nullapontja annak érintőpontja a hyperboloiddal. A felvett $aa'.bb'\ldots$ involucziós sugársereg segélyével tehát a tér minden pontjához a nullasíkot és minden síkjához a nullapontot megszerkeszthetjük. A nullarendszernek e képzése az involucziós sugárseregből Chasles-től ered (1839-ből) és azért azt, ha arra hivatkozunk, *Chasles-féle képzésnek* nevezzük.

2. Vegyünk fel a $\pi$ síkban, melynek nullapontja a $P$, egy $P_i$ pontot. Ha a nullarendszer meghatározására szolgáló involucziós sugárseregnek $aa'.\ bb'\ldots$-nek kettőssugarai képzetesek, akkor a $\pi$ síkban a $P$-n keresztül vezetett minden egyenes metszi a sugárseregnek egy társsugárpárját. A $PP_i$ egyenes is metszi az $aa'.\ bb'\ldots$-nek egy társsugárpárját, és ezért a $P_i$ pontnak nullasíkja $\pi_i$, a $PP_i$ egyenesen, tehát egyszersmind a $P$ ponton megy keresztül.

Ha ellenben az $aa'.bb'\ldots$ sugárseregnek $jk$ kettőssugarai valósak, tehát a sugárseregnek képzetes társsugárpárjai is vannak, úgy a $\pi$ síkban a $P$-n keresztül vezetett sugarak egy része a valós, a másik része a képzetes társsugárpárokat metszi. Mutassuk ki anélkül, hogy a képzetes társsugárpárokat figyelembe vennők, hogy akkor is a $\pi$ sík $P_i$ pontjának $\pi_i$ nullasíkja a $P$ ponton megy keresztül.

A $[P_ij]$, $[P_ik]$ síkok a $H^{(2)}$ hyperboloidot még egy-egy alkotóban $h$, $h_1$-ben metszik és a $(jh)$ $(kh_1)$ pontokban érintik, mely utóbbiakon és a $P_i$-n keresztül megy a $P_i$ pontnak nullasíkja $\pi_i$. A $\pi$ sík a $H^{(2)}$ hyperboloidot a $k^{(2)}$ kúpszeletben, $jkhh_1$ alkotókat pedig a $k^{(2)}$-be írt négyszög szögpontjaiban metszi; ennek $(\pi j)(\pi h_1)$, $(\pi k)(\pi h_1)$ oldalpárjai a $P_i$ pontban, a $(\pi j)(\pi h_1)$, $(\pi k)(\pi h)$ oldalpárjai pedig a $PP_i$ egyenesnek egy $P_i'$ pontjában találkoznak, mert a $(\pi j)(\pi k)$ egyenes a $PP_i$-nek a $k^{(2)}$-re vonatkozó pólusán megy keresztül. De a $[P_ijh]$, $[P_ikh_1]$ érintősíkok $(jh)$, $(kh_1)$ érintőpontjainak összekötő egyenese a $[jh_1]$, $[kh]$ síkoknak metszővonala, mely utóbbi a $\pi$ síkot a $PP_i$ egyenes $P_i$, pontjában metszi. Ezért a $P_i$ pontnak nullasíkja $\pi_i \equiv [P_i(jh)(kh_i)]$ keresztül megy a $PP_i$ egyenesen és így a $P$ ponton is. Egész általánosságban mondhatjuk tehát:

A nullarendszerben bármely

| | |
|---|---|
| sík pontjainak nullasíkjai a sík nullapontján mennek keresztül. | pont síkjainak nullapontjai a pont nullasíkjában vannak. |

3. Vegyünk fel két tetszésszerinti síkot $\pi$ és $\pi_1$-et, melyeknek metszővonala a $p$, és mely síkok $P$ és $P_1$ nullapontjainak összekötő egyenese a $p'$. Minden a $p'$-ön, tehát a $\pi$ és $\pi_1$ síkok nullapontjain, keresztül vezetett síknak nullapontja a $\pi$ és $\pi_1$ síkok metszővonalán, $p$-n, van és így fordítva is: a $p$ egyenes minden síkjának nullapontja a $p'$ egyenesen lesz. Ennélfogva: *a nullarendszer a tér egyeneseit akkép egyesíti párokká, hogy minden egyenespár egyik egyenese pontjainak nullasíkjai és síkjainak nullapontjai, a másik egyenesnek síkjai, illetve pontjai. E mellett az egyik egyenes pontjainak és síkjainak sora perspektiv és így projektiv a másik egyenesen levő nullapontjainak, illetve azon keresztül menő nullasíkjainak sorával.*

Ezeket az egyenespárokat, számra $\infty^4$-t, úgy mint a polárisrendszerben, együttvéve *polárispárok*nak nevezzük, külön-külön pedig azt mondjuk, hogy az egyik egyenes a másiknak *polárisa* a nullarendszerben vagy a nullarendszerre vonatkozólag.

A polárispár egyenesei nem metszhetik egymást, mert a $\pi$ síkban fekvő $p$ egyeneseknek polárisai a $\pi$ síknak nullapontján, $P$-n, mennek keresztül és nincsenek a $\pi$ síkban. *Vannak azonban olyan egyenesek is, melyek polárisaikkal egybeesnek: ezek a $\pi$ sík nullapontján keresztül menő és a $\pi$ síkban levő, tehát a $(\pi,P)$ sugársorhoz tartozó egyenesek.* Láttuk ugyanis (a 2. pont alatt), hogy ha a $\pi$ síkban, annak $P$ nullapontján keresztül egy $g$ egyenest vezetünk, akkor a $g$ egyenes bármily $P_i$ pontjának nullasíkja $\pi_i$, a $PP_i \equiv g$ egyenesen megy keresztül. — Ezek a $\pi_i$ síkok a $P_i$ pontból az $aa', bb' \ldots$ involucziós sugársereg társsugaraihoz vezetett szelőket tartalmazzák. A $g$-n mozgó $P_i$ pontból az $aa'$ társsugárpárhoz húzott $l_i$ szelők, a $P_i$ pontsorral és a $[gl_i]$ síksorral perspektiv sugársereget képeznek, a miből már következik, hogy jelen esetben is a $P_i$ pontok sora a $g$-n projektiv nullasíkjainak sorával. Ezért általánosan mondhatjuk, akár különvált, akár egybeeső polárispárról van szó, hogy: *a nullarendszerben minden síksor projektiv síkjai nullapontjainak sorával.*

Ebből következik: *A nullarendszerben bármely sugársor sugarainak polárisai a sugársorral projektiv sort képeznek, és a két sugársornak egy megfelelőleg közös sugara van.*

Ugyanis legyen az $(A,\beta)$ sugársor $A$ középpontjának nullasíkja az $\alpha$, és $\beta$ síkjának nullapontja a $B$. Az $(A,\beta)$ sugársor $pqr \ldots$ sugarainak $p'q'r' \ldots$ polárisai a $B$-n mennek keresztül és az $\alpha$ síkban vannak, tehát egy $(B,\alpha)$ sugársort képeznek. Az első, azaz az $A(pqr \ldots)$ sugársort az $A$ ponton keresztül menő és az $\alpha$ síkban fekvő $g_1$ egyenesből projicziáló $g_1(pqr \ldots)$ síksor síkjainak nullapontjai, a $p'q'r' \ldots$ sugársornak metszőpontjai a $g_1$-gyel. E nullapontok sora a síksorral projektiv, a miből már következik, hogy az $(A,\beta)$ $(B,\alpha)$ sugársorokban a polárispárok oly projektiv sugársorok lesznek, melyekben az $AB \equiv \alpha\beta$ sugár megfelelőleg közös.

Minthogy minden $k^{(2)}$ kúpszelet az $\alpha$ síkban két projektiv sugársor képződménye és ily két sugársornak polárisai az $\alpha$ síknak $A$ nullapontjában közös középponttal biró és egymással szintén projektiv sugársorok lesznek, azért ez utóbbiaknak képződménye egy II. o. síksor. Tehát: *Egy kúpszelet pontjainak nullasíkjai és érintőinek polárisai, egy II. r. kúpnak érintősíkjai, illetve alkotói. A kúpszelettől meghatározott polárismezőnek, a nullarendszerben oly polárisi-*

*nyaláb felel meg, melynek középpontja, azaz a kúp csúcsa, a kúpszelet sikjának nullapontja.* Ez utóbbi rész onnan következik, hogy a polárismező a kúpszeletnek *projektiv* tulajdonságaiból származtatható le, a projektiv tulajdonságok pedig a nullarendszerben változatlanok maradnak.

Ugyanígy kimutatható, hogy minden sugársereg sugarainak polárisai a nullarendszerben egy másik sugársereget képeznek. Amaz két projektiv pontsor képződménye, ez pedig a projektiv pontsorok nullasíkjaitól származó projektiv síksoroknak képződménye.

4. Azokat a különös egyeneseket, melyek a nullarendszerben polárisaikkal egybeesnek, STAUDT*) (1856.) a nullarendszer *vezetősugarainak* nevezte. E sugarak száma $\infty^3$, mert minden síkban e sugarak egy sugársort képeznek, melynek középpontja a sík nullapontja. A térben $\infty^3$ sík van, tehát a nullarendszer vezetősugarai ugyanennyi sugársort adnak; ámde minden vezetősugár $\infty^1$ síkban van és ezért *a nullarendszer vezetősugarainak száma csak* $\infty^3$.

A nullarendszer vezetősugarairól azt mondjuk, hogy azok egy *linearis komplexus*-t képeznek; a vezetősugarak a komplexusnak *komplexussugarai* vagy csak röviden *sugarai*, míg a polárispárokat a nullarendszerben, a komplexusra vonatkozólag is polárispároknak nevezzük. A komplexussugarak a nullarendszerben a hyperboloid alkotóival hasonlíthatók össze a hyperboloidtól meghatározott polárisrendszerben. Amott a komplexussugarak pontjainak nullasíkjai az illető sugarakon mennek keresztül, úgy, mikép a hyperboloid alkotóin levő pontoknak polárissíkjai is azon alkotókon mennek keresztül. Ámde a hyperboloid alkotóinak száma $\infty^1$, a komplexussugaraké $\infty^3$; azok nem töltik be az egész tért, hanem egy felületen vannak, míg a nullarendszerben a tér minden pontján nemcsak egy, hanem $\infty^1$ komplexussugár megy keresztül és minden síkjában $\infty^1$ komplexussugár van. De ha a tért nem pontokkal és síkokkal képzeljük betöltve, hanem sugarakkal (egyenesekkel), azaz ha nem a *ponttérre* és nem a *síktérre*, hanem a *sugártérre* gondolunk, akkor azt látjuk, hogy a komplexussugarak nem töltik be a sugártért. Ugyanis a sugártér sugarainak száma $\infty^4$, míg a komplexussugarak száma komplexusban csak $\infty^3$. A nullarendszer által meghatározott vezetősugarak vagy komplexussugarak jól megkülömböztethetők a tér más egyeneseitől. A nullarendszer tulajdonságaiban, amennyiben ezek a vezetősugarakra vagy a polárispárokra vonatkoznak, kifejezésre jutnak e vezetősugaraktól meghatározott linearis komplexus-

*) *Beiträge z. Geometrie der Lage.* 56. old. 94. p.

nak tulajdonságai is. A nullarendszer meghatározza a linearis komplexust, melynek amaz *alapját képezi*, de a linearis komplexus is, azaz a komplexus sugarainak összesége, meghatározza az alapját képező nullarendszert, mert egy pontnak nullasíkja az e ponton keresztül menő komplexussugarak síkja és egy síknak nullapontja, a síkban levő komplexussugaraknak metszőpontja. — E magyarázatok után a komplexus szót, vagy az általánosabb nullarendszer kifejezést félreértés nélkül használhatjuk.

5. A nullarendszer meghatározására szolgáló eredetileg felvett $aa'.bb'\ldots$ involucziós sugárseregnek minden társsugárpárja polárispárja a nullarendszernek, mert az egyik sugár minden síkjának nullapontja, mint láttuk, a társsugáron van. Ebben az $aa'.bb'\ldots$ involucziós sugárseregnek $j$, $k$ kettőssugarai vezetősugarak, mert mindegyikben egy polárispár egyesült.

Minden $g$ egyenes, mely az $aa'.bb'\ldots$ sugárseregnek két társsugarát metszi, a nullarendszernek egy vezetősugara, és ezekhez számítandók az adott sugársereg támasztó seregének sugarai is. Mert az adott értelmezés szerint az $aa'$ egyenespárt metsző $g$ egyenes valamely $P$ pontjának nullasíkja $\pi$, keresztül megy a $P$ pontból az $aa'.bb'\ldots$ sugársereg társsugaraihoz vezetett összes szelőkön, melyek mindannyian vezetősugarai a nullarendszernek, miután a $P$-n mennek keresztül és a $\pi$ síkban feküsznek.

*De minden g egyenes, mely a nullarendszer bármely pp' polárispárjának szelője, egyszersmind vezetősugara a nullarendszernek*, mert a $[pg]$ sík nullapontja a $p'$-nek nyoma a $[pg]$ síkon és ez a nyom a $g$ egyenesen van; a $g$ tehát a $[pg]$ síkban van és annak $(p'g)$ nullapontján megy keresztül. — Viszont *a nullarendszernek minden vezetősugara g, mely bármely pp' polárispárjának egyikét metszi, a másikat is metszeni fogja*, mert a $g$ a $[pg]$ síknak nullapontján tartozik keresztül menni, mely nullapont a $p$-nek polárisán, $p'$-ön fekszik.

Ebből következik, hogy *a nullarendszer bármily két polárispárja pp', qq' hyperboloidikus fekvésű*, mert a $pp'q'$ egyeneseknek szelői a nullarendszernek vezetősugarai és így ezek a $q$-nak polárisát $q'$-t is metszik. — A $pp'$, $qq'$ polárispárokon keresztül menő hyperboloid egyik sugárseregének sugarai tehát mind vezetősugarak a nullarendszerben, a másiknak, azaz a támasztó sugárseregnek sugarai pedig, melyekhez a $pp'$, $qq'$ polárispárok is tartoznak, oly polárispárok, melyek egy involucziós sugársereget képeznek. Ugyanis valamely $\pi$ sík a $pp'qq'\ldots$ hyperboloidot kúpszeletben, a $pp'$, $qq'$ polárispárokat két-két pontban metszi, és utóbbiaknak összekötő

egyenesei a $\pi$ sík nullapontjában, $P$-ben, találkoznak. E $P$ ponton keresztül menő összes vezetősugarak ama kúpszeletet oly involucziós pontsorban metszik, melynek társpontjain keresztül menő és a $pp'qq'$ sugársereghez tartozó sugárpárok polárispárok a nullarendszerben és egy involucziós sugársereget képeznek.

Viszont a nullarendszer három vezetősugara $gg_1$ és $g_2$, melyek közül egyik sem metszi a másikat, meghatároz egy oly sugársereget, melynek minden sugara, úgy mint a $gg_1$ és $g_2$, csupa vezetősugarakból áll, míg a támasztó sugárseregnek sugarai polárispárokká egyesülnek és ezek egy involucziós sugárseregnek társsugarai. Mindezekből látható, hogy az eredetileg a nullarendszer meghatározására felvett $aa'.bb'\ldots$ involucziós sugársereg bármely más sugársereggel, melynek társsugarai polárispárok a nullarendszerben, pótolható, tehát amannak semmi különös szerepe nincsen a nullarendszerben.

*A nullarendszerben $\infty^6$ oly involucziós sugársereget vehetünk fel, melynek társsugarai polárispárok a nullarendszerben.* Ugyanis két egyenes $pq$ és azoknak $p'q'$ polárisai már meghatározzák a $pp'.qq'\ldots$ involucziós sugársereget a nullarendszerben. A tér $\infty^4$ egyenesei közül két egyenest $\infty^{4+4}$-szer, a sugársereg $\infty^1$ egyenesei közül kettőt $\infty^{1+1}$-szer vehetünk fel, ezért a nullarendszerben előforduló involucziós sugárseregek száma $\infty^{8-2}=\infty^6$. Ha e szám megállapítása végett a vezetősugarakból indulunk ki, akkor figyelembe kell vennünk, hogy három vezetősugár meghatározza az involucziós sugársereg támasztó seregét. A nullarendszer $\infty^3$ vezetősugarából három sugarat $\infty^{3\cdot3}$-szor, a sugárseregből pedig $\infty^{1\cdot3}$-szor választhatunk k és így a nullarendszerben előforduló oly sugárseregek száma, melyeknek sugarai mind vezetősugarak, $\infty^6$.

A térben van $\infty^9$ sugársereg; mindeniknek sugarai $\infty^2$-félekép képezhetnek involucziót (mert két sugárnak megfelelő társsugara $\infty^2$-szer vehetjük fel mindegyik seregben); tehát van $\infty^{11}$-en involucziós sugársereg. Ezeknek mindenike meghatároz (Chasles-féle képzés szerint) egy nullarendszert; de mert a nullarendszerben $\infty^6$ involucziós sugársereg van, azért *a tér összes nullarendszereinek száma* $\infty^5$.

A térben van $\infty^{13}$ hyperboloidikus sugárnégyes; mindenike két párra bontva, mint két polárispár meghatároz egy nullarendszert. Ebben azonban $\infty^8$-szor lehet két polárispárt kiválasztani; tehát a nullarendszerek száma ismét $\infty^5$.

6. Úgy, mikép két polárispár, $pp'$ és $qq'$, meghatározza a nullarendszert, meghatározza azt egyszersmind egy polárispár $pp'$ és egy egybeeső polárispár, azaz egy vezetősugár $g$. A $pp'g$-n keresztül-

menő hyperboloidnak egyik sugárserege csupa vezetősugarakból áll, a másik, melyhez a $pp'g$ sugarak tartoznak, pedig involucziósan párosított polárispárokból. Ennek az involucziós sugárseregnek pedig egyik kettőssugara a $g$, egy társsugárpárja a $pp'$. Az a $g_1$ sugár, mely a $g$-t a $pp'$-től harmónikusan választja el, tehát a $gg.pp'\ldots$ involucziós sugárseregnek második kettőssugara, szintén vezetősugara a nullarendszernek. Ezért mondhatjuk: „azok a sugarak, melyek a nullarendszer egy vezetősugarát, $g$-t, annak egyes polárispárjaitól harmónikusan választják el, vezetősugarai a nullarendszernek."

A nullarendszerben $\infty^4$ polárispár van; a $g$ vezetősugarat ezektől nem $\infty^4$, hanem csak $\infty^3$ sugár választja el harmónikusan, mert ama $\infty^4$ polárispárból $\infty^1$ számú egy-egy involucziós sugársereget képez, melyeknek társsugarait a $g$-től csak egy sugár választja el harmónikusan.

A nullarendszerben $\infty^2$ vezetősugár van, mely egy $p$ egyenest metsz és $\infty^1$ vezetősugár van, mely két egyenest, $p$-t és $q$-t metsz. Mert a keresett vezetősugarak az első esetben a $p$-nek polárisát, a másodikban a $p$ és $q$-nek polárisait is metszik. E vezetősugarak az első esetben egy úgynevezett linearis kongruenciát, a másodikban egy sugársereget képeznek. — Bármily sugárseregben két valós vagy képzetes sugár van, mely egy adott nullarendszerhez tartozik. Ugyanis a sugársereg vezetőseregében felvett $p$ sugárnak polárisa az adott sugárseregnek két valós vagy képzetes sugarát metszi, melyek a nullarendszerben vannak.

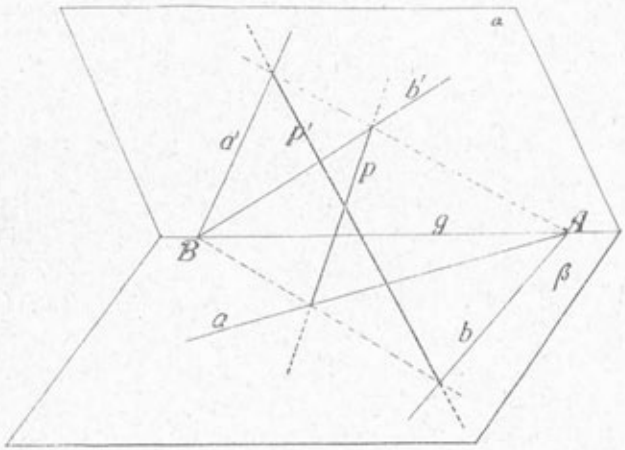
7. Két különböző síkban $\beta$ és $\alpha$-ban fekvő, különböző középponttal $A$ és $B$-vel, és egy megfelelőleg közös $g$ sugárral bíró projektiv sugársor $(A, \beta)$ és $(B, \alpha)$, egy elkorcsosult involucziós sugárseregnek tekinthető. E sugársorok $\beta$ és $\alpha$ síkjai képezik az involucziós sugársereget tartó elkorcsosult hyperboloidot, míg a $\beta$ és $\alpha$ síkban fekvő és $B$, illetve $A$ középpontú sugársorok a támasztó sugárseregnek tekinthetők.

Valamely $\pi$ sík a $\beta, \alpha$ síkokat két egyenesben, az $(A, \beta), (B, \alpha)$ sugársorokat két perspektiv pontsorban metszi; ezek megfelelő pontjainak összekötő egyenesei egy $P$ pontban találkoznak. Viszont az a két síksor, mely egy $P$ pontból a két projektiv sugársort projicziálja, perspektiv, tehát a megfelelő síkpárok metszővonalai, melyek a $P$ pontból ama sugársorok megfelelő sugaraihoz vezetett szelők, egy $\pi$ síkban vannak.

A két sugársor $(A, \beta), (B, \alpha)$, mint elkorcsosult involucziós sugársereg, tehát ép úgy alkalmas a nullarendszer meghatározásá-

hoz, mint az általános involucziós sugársereg. Minden $\pi$ síknak nullapontja az a $P$ pont, melyben a $\pi$ síkban fekvő és a sugársorok megfelelő sugarait metsző egyenesek, a nullarendszer vezetősugarai, találkoznak; viszont minden $P$ pontnak nullasíkja az a $\pi$ sík, melyben $P$ pontból a sugársorok megfelelő sugaraihoz vezetett szelők, a nullarendszer vezetősugarai, feküsznek.

Az $(A, \beta)$ és $(B, \alpha)$ sugársorok $A$ és $B$ középpontjainak nullasíkjai az $\alpha$ és $\beta$ síkok. Az $(A, \beta)$ és $(B, \alpha)$ projektiv sugársorok megfelelő sugarai polárispárok, míg az $(A, \alpha)$ és $(B, \beta)$ sugársorok sugarai, vezetősugarak a nullarendszerben. Hogy a nullarendszerben egy sugársor sugarainak polárisai a sugársorral projektiv sugársort képeznek, azt már előbb volt alkalmunk látni (a 3. pont alatt). Erre




34. ábra.

a tulajdonságára van állapítva *a nullarendszernek és a linearis komplexusnak képzése két projektiv sugársorból*, mely képzés SYLVESTER-től származik (1861-ből). És ha csak a nullarendszer vezetősugaraiból képezte linearis komplexusra gondolunk, mondhatjuk:

*Mindazok a sugarak, melyek két különböző síkban fekvő különböző középponttal és egy megfelelő közös sugárral bíró projektiv sugársor megfelelő sugarait metszik, egy linearis komplexust képeznek.*

A két projektiv sugársorból, $(A, \beta)$ és $(B, \alpha)$-ból, meghatározott nullarendszerben egy $p$ egyenesnek polárisát $p'$-et következőkép szerkesztjük (34. ábra): A $p$ az $(A, \beta)$ és a $(B, \alpha)$ sugársorok két meg nem felelő sugarát $a$ és $b'$-et metszi; az a $p'$ sugár, mely az $a$

és $b$-nek megfelelő $a'$ és $b$ sugarakat az $[ap]$ illetve $[b'p]$ síkban metszi, a keresett $p'$ poláris. — Ez alapon a linearis komplexus a $g$ komplexus sugárból és a $pp'$ polárispárból, mely a $g$-t nem metszi, ekkép szerkeszthető: A $g$-n keresztül két síkot, $\alpha$ és $\beta$-t, fektetünk; az $(\alpha p)$, $(\alpha p')$ és $(\beta p)$, $(\beta p')$ pontoknak összekötő egyenesei a $g$-t az $\alpha$ és $\beta$ síknak $A$ és $B$ nullapontjában metszik. Ha $A(\beta p) \equiv a$, $A(\beta p') \equiv b$, $B(\alpha p) \equiv a'$, $B(\alpha p') \equiv b'$, akkor az $A(abg\ldots) \barwedge B(a'b'g\ldots)$ sugársorok megfelelő sugarainak szelői, a keresett komplexusnak sugarai lesznek.

8. *A nullarendszert, és ezzel vezetősugarainak komplexusát, öt vezetősugárból $g_1g_2g_3g_4$ és $g_5$-ből,* Reye *szerint következőkép szerkeszthetjük meg*: Föltételezvén az általános esetet, hogy az öt $g_i$ sugár közül egyik sem metszi a másik négyet és azoknak egy négyese sem hyperboloidikus fekvésű, jelöljük a $g_1g_2g_3g_4$-nek két szelőjét $pp'$-sel, a $g_1g_2g_3g_5$-nek két szelőjét $qq'$-sel. E két szelőpár $pp'$, $qq'$, mint polárispár meghatároz egy nullarendszert, melyben a $g_1g_2g_3g_4g_5$ sugarak vezetősugarak. — Ha azonban az előbbi egyenes-négyeseknek nincsenek valós szelőjük, akkor messük a $g_1g_2g_5$, $g_3g_4g_5$ sugarakon keresztül menő hyperboloidokat egy $p$ egyenessel két-két pontban, a mi mindig lehetséges, és jelöljük e metszőpontokon keresztül menő és a $g_1g_2g_5$, és $g_3g_4g_5$ sugárseregekhez tartozó sugarakat $l_1l_2$ és $l_3l_4$-gyel. Ezeknek már a $p$ egy valós szelőjük és van még egy valós szelőjük, a $p'$; e $pp'$ egyenespár, mint polárispár, és a $g_5$ vezetősugár egy nullarendszert határoz meg, a melyben a $l_1l_2l_3l_4$ és $g_5$ sugarak vezetősugarak. Minthogy a $g_1g_2$ és a $g_3g_4$ sugarak az $l_1l_2g_5$, illetve az $l_3l_4lg_5$ sugarakon keresztül menő sugárseregben vannak, azért a $g_1g_2g_3g_4$ sugarak is vezetősugarai ama nullarendszernek. —

Szerkesszük meg a *Sylvester-féle képzés* alapján a linearis komplexust annak öt sugarából, $gg_1g_2g_3$ és $g_4$-ből.

A $g$-n keresztül menő $\beta$ és $\alpha$ sík a $g_1g_2g_3g_4$ sugarakat az $A_1A_2A_3A_4$ és $B_1B_2B_3B_4$ pontokban metszi. Ha a $g$ egyenesen oly $A$ és $B$ pontokat szerkesztünk, hogy

$$A(A_1A_2A_3A_4g) \barwedge B(B_1B_2B_3B_4g) \qquad 1.)$$

akkor e sugarakkal meghatározott projektiv sugársorok már a keresett komplexus képzésére alkalmasak.

A megadott vonatkozás kielégítő $A$ és $B$ pontoknak szerkesztése az úgynevezett linearis *projektivitási feladatokhoz* tartozik, melyek vonalzóval megoldhatók. A megoldás Staudt-nak következő tételén alapszik:

„Ha a $g$ egyenes az $ABC$ háromszög $BC$, $CA$, $AB$ oldalait az

$A_1$, $B_1$ és $C_1$ pontokban metszi, és a $G$ a $g$ egyenesnek tetszésszerinti pontja, akkor az $A_1B_1C_1G$ pontnégyes projektiv a $G(ABCg)$ sugárnégyessel."

Mert ha az $AG$, $BC$ egyenesek metszőpontja a $D$, akkor

$$A_1B_1C_1G \overline{\wedge} GC_1B_1A_1 \overline{\wedge} A(DBCA_1) \overline{\wedge} (DBCA_1) \overline{\wedge} G(ABCg)$$

Visszatérve ezután az eredeti feladatunkhoz, messék az $A_1A_2A_3A_4$ és $B_1B_2B_3B_4$ négyszögeknek $A_iA_j$ és $B_iB_j$ oldalai a $g$ egyenest az $X_{ij}$ és $Y_{ij}$ pontokban, és legyenek az $X_i$, $Y_i$, $Y'_i$ oly változó pontok a $g$ egyenesen, hogy

$$X_{12}X_{13}X_{23}X_i \overline{\wedge} Y_{12}Y_{13}Y_{23}Y_i \qquad 2)$$

és

$$X_{12}X_{14}X_{24}X_i \overline{\wedge} Y_{12}Y_{14}Y_{24}Y'_i \qquad 3)$$

Az $X_i$ pontok sorával projektiv $Y_i$ és $Y'_i$ pontok sora egymással is projektiv és ezeknek egyik kettőspontja az $Y_{12}$, mely az $X_{12}$-nek felel meg a 2) és 3)-ban.

Legyen a $B$ pont az $Y_i$ és $Y'_i$ soroknak második kettőspontja, az $A$ pedig az annak megfelelő pont az $X_i$ sorban; továbbá feleljenek meg az $X_{13}$, $X_{23}$ pontoknak 3-ban, az $Y'_{13}$, $Y'_{23}$ pontok, azaz legyen:

$$X_{12}X_{14}X_{24}X_{13}X_{23}A \overline{\wedge} Y_{12}Y_{14}Y_{24}Y'_{13}Y'_{23}B.$$

Minthogy

$$A(A_1A_2A_3g) \overline{\wedge} X_{23}X_{13}X_{12}A \overline{\wedge}$$
$$\overline{\wedge} Y_{23}Y_{13}Y_{12}B \overline{\wedge} Y'_{23}Y'_{13}Y_{12}B \overline{\wedge} B(B_1B_2B_3g)$$

és

$$A(A_1A_2A_4g) \overline{\wedge} X_{24}X_{14}X_{12}A \overline{\wedge} Y_{24}Y_{14}Y_{12}B \overline{\wedge} B(B_1B_2B_4g),$$

azért

$$A(A_1A_2A_3A_4g) \overline{\wedge} B(B_1B_2B_3B_4g).$$

E szerint ha az $Y'_{13}$ és $Y'_{23}$ pontokat az

$$X_{12}X_{14}X_{24}X_{13}X_{23} \overline{\wedge} Y_{12}Y_{14}Y_{24}Y'_{13}Y'_{23}$$

-ból megszerkesztjük, akkor az

$$Y_{12}Y_{13}Y_{23}\ldots \overline{\wedge} Y_{12}Y'_{13}Y'_{23}\ldots$$

projektiv soroknak második kettőspontja $B$ és az

$$Y_{12}Y_{13}Y_{23}B \overline{\wedge} X_{12}X_{13}X_{23}A$$

-ból meghatározott $A$ pont, már a kivánt $B$ és $A$ pont lesz. —

Az öt adott egyenesnek, $gg_1g_2g_3$ és $g_4$-nek, általános helyzetében az $A$ és $B$ pontokon kívül nincs több pontpár a $g$-ben, mely a

kivánt követelményt, 1)-et, kielégítené. Ugyanis, ha az $A^*$, $B^*$ még egy ilyen pontpár volna, akkor az $Y_i$, $Y'_i$ projektiv pontsorok egybeesnének, mert az $Y_{12}$, $B$ és $B^*$-ban három megfelelő közös pontjuk volna. Ekkor az $X_i$, $Y_i$ projektiv pontsoroknak minden megfelelő pontpárja kielégítené a követelményeket és így azoknak $J$, $K$ kettőspontjuk is. Minthogy ekkor

$$J(A_1A_2A_3A_4g) \barwedge J(B_1B_2B_3B_4g),$$

azért a $g_1g_2g_3g_4$ egyeneseket a $J$ kettőspontból projicziáló síkok egymást egy $j$ egyenesben metszenék, mely mind az öt adott egyenesnek szelője. Ép így lehetne ekkor a $K$ pontból is a $gg_1g_2g_3g_4$ egyenesekhez egy $k$ szelőt húzni. Az öt adott egyenes ekkor már különös helyzetű, és így a komplexus meghatározásához nem alkalmas.

Öt sugarat a térben $\infty^{5\cdot4}$-szer, a linearis komplexusban $\infty^{5\cdot3}$-szor vehetünk fel. Ezért: a linearis komplexusok (és nullarendszerek) száma $^5$.

9. Eddigelé a nullarendszer szerkesztéséhez vagy polárispárokat, vagy vezetősugarat, vagy mindkét ily fajta egyenest használtunk. Lássuk most, mikép lehet a nullarendszert adott pontokból és azoknak nullasíkjaiból meghatározni.

Három pont, $A$, $B$ és $C$ és az azokon rendre keresztül menő $\alpha$, $\beta$ és $\gamma$ sík általános helyzetben nem lehet egy nullarendszerben egymáshoz rendelt pont és sík, mert az $ABC \equiv \omega$ síknak nullapontja $O$, mint az $\alpha\beta\gamma$ síkoknak metszőpontja, az $\omega$ síkban tartozik lenni. Ha ez bekövetkezik, akkor az $ABC$ pontok és azoknak $\alpha\beta\gamma$ nullasíkjai meghatározzák a nullarendszert.

Ugyanis ha az $ABC$ háromszög oldalait és az $\alpha\beta\gamma$ háromél éleit ekkép jelöljük:

$$BC \equiv p \qquad CA \equiv q \qquad AB \equiv r$$
$$\beta\gamma \equiv p' \qquad \gamma\alpha \equiv q' \qquad \alpha\beta \equiv r'$$

és

az $\alpha\beta\gamma \equiv p'q'r' \equiv O$ pont, az $ABC \equiv pqr \equiv \omega$ síkban van
„ $A$ „ „ $\alpha$ „ „
a $B$ „ „ $\beta$ „ „
„ $C$ „ „ $\gamma$ „ „

akkor a $pp'$ polárispártól és a $qq'$ egyenespárt metsző $g$ vezetősugártól meghatározott nullarendszer már olyan lesz, hogy abban az $ABC$ pontoknak nullasíkjai az $\alpha\beta\gamma$ síkok, mint azt azonnal kimutatjuk.

Ebben a nullarendszerben a

$$pq \equiv \omega \qquad p'r' \equiv \beta \qquad p'q' \equiv \gamma$$

síkoknak nullapontjai az

$$\omega p' \equiv O \qquad \beta p \equiv B \qquad \gamma p \equiv C$$

pontok.

A $C$ ponton keresztül menő és az $\omega$ síkban fekvő és a $g$ vezetősugarat metsző $q$ egyenesnek polárisa ebben a nullarendszerben: a $p$ síkban fekvő és az $O$ ponton keresztül menő és az $g$ egyenest metsző egyenes, — mely a $q'$. Tehát a $q'r' \equiv \alpha$ síknak nullapontja az $\alpha q \equiv A$ pont, és az $\alpha\beta \equiv r'$ egyenesnek polárisa az $AB \equiv r$ egyenes. E szerint a $pp'$ polárispár és a $g$ vezetősugártól meghatározott nullarendszerben az $ABC$ pontoknak nullasíkjai tényleg az $\alpha\beta\gamma$ síkok. —

A nullarendszer meghatározására szolgáló $ABC$ pontok és $\alpha\beta\gamma$ síkok közül az $AB$ pontokat és megfelelőleg az azokon keresztül menő $\alpha\beta$ síkokat tetszésszerint vehetjük fel; a $\gamma$ síknak helyzete is bármilyen lehet, csak ne menjen az $AB$ pontokon vagy az $\alpha\beta$ metszővonalon keresztül, hanem az $\alpha\beta\gamma$ messe egymást egy $O$ pontban. A $C$ pontnak helyzete ekkor az $ABO \equiv \omega$ sík és a $\gamma$ sík metszővonalának az $O$-n és az $AB$ egyenesen kívül fekvő bármely pontja lehet.

Ha tehát egy $\alpha\beta\gamma$ háromélt és annak $D'$ csúcsán keresztül menő $\delta'$ síkban egy $ABC$ háromszöget úgy veszünk föl, hogy annak $A$, $B$, $C$ szögpontjai az $\alpha\delta'$, $\beta\delta'$, $\gamma\delta'$ egyeneseken feküdjenek, akkor e pontok ama síkoknak nullapontjai lehetnek egy nullarendszerben.

Messük még az $\alpha\beta\gamma$ háromél $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ éleit egy $\delta$ síkkal az $A'$, $B'$, $C'$ pontokban és jelöljük e pontoknak nullasíkjait a nullarendszerben $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$-sel, a $\delta$-nak nullapontját $(\alpha'\beta'\gamma') \equiv D$-vel.

Az

$$ABCD \equiv \alpha'\beta'\gamma'\delta', \qquad A'B'C'D' \equiv \alpha\beta\gamma\delta$$

tetraederpárok Möbius-félék lesznek, mert e tetraedereknek bármelyik lapja az illető tetraedernek három, a másiknak pedig egy csúcsát tartalmazza (10. §. 6. p. a 97. oldalon). És pedig:

$$\begin{aligned} \alpha &\equiv AB'C'D' & \alpha' &\equiv A'BCD \\ \beta &\equiv A'BC'D' & \beta' &\equiv AB'CD \\ \gamma &\equiv A'B'CD' & \gamma' &\equiv ABC'D \\ \delta &\equiv A'B'C'D & \delta' &\equiv ABCD'. \end{aligned}$$

Ezért mondhatjuk: *Valamely tetraeder lapjainak nullapontjai egy nullarendszerben egy másik tetraedernek csúcsai, mely az elsővel egy Möbius-féle tetraederpárt képez: azaz a második tetraeder az elsőbe és az első körül van írva.*

A nullarendszerben $\infty^{12}$ Möbius-féle tetraederpár van.

10. Staudt a nullarendszer meghatározására egy térbeli ötszöget vesz fel és annak minden csúcsát, e csúcson és a két szomszéd csúcson keresztül menő síkhoz, mint nullasíkhoz, rendeli. Ha tehát az $ABCDE$ a térbeli ötszög, akkor az $A, B, C, D, E$ csúcsoknak nullasíkjai az $EAB$, $ABC$, $BCD$, $CDE$, $DEA$ síkok.

Az ötszög $AB, BC \ldots EA$ oldalai ekkor a nullarendszer vezetősugarai, tehát egyértékűek öt vezetősugárral, de a melyek itt abban a különös helyzetben vannak, hogy az első a másodikat, a második a harmadikat, stb. az ötödik az elsőt metszi. Ezekből a nullarendszer, daczára a különös helyzetnek, szerkeszthető, mert az $AB \equiv g$ vezetősugár és a $CE \equiv p$ és $(BCD, DEA) \equiv p'$ polárispár meghatároz egy nullarendszert. Ebben az $AB \equiv g$, továbbá a $BC$, $DE$, $CD$, $DE$ egyenesek, melyek a $pp'$ polárispárt metszik, vezetősugarak, tehát az ötszög csúcsainak nullasíkjai, e csúcsokon és a két szomszéd csúcsokon keresztül menő síkok.

A nullarendszerben $\infty^{10}$ ily ötszög van; mert az $A$ csúcsot tetszésszerint, tehát $\infty^3$ helyzetben, a $B$-t az $A$-nak nullasíkjában, tehát $\infty^2$ helyzetben, ép így a $C$-t és a $D$-t is $\infty^2$ helyzetben, végre az $E$-t, az $A$ és $D$ pontok nullasíkjainak metszővonalában, tehát $\infty^1$ helyzetben vehetjük fel.

Minthogy a nullarendszerben $\infty^{10}$ ilyen Staudt-féle ötszög, a térben pedig $\infty^{5 \cdot 3}$ ötszög található, azért a nullarendszerek száma $\infty^5$.

11. A nullarendszer vezetősugarai, mint értelmeztük, egy linearis komplexusnak sugarai. Erre nézve pedig jellemző, hogy annak a tér minden sugársorában van egy sugara. De ha a komplexusnak valamely sugársorban egynél több sugara van, akkor annak minden sugara komplexussugár. E tulajdonságot alapul véve kimutatható Sturm-nak e tétele:

Ha két projektiv síksor tengelyei nincsenek ugyanegy síkban, akkor e síksorokat involuczióban metsző egyenesek egy linearis komplexust képeznek.

Ha két projektiv pontsor tartói nem metszik egymást, akkor azok az egyenesek, melyekből e pontsorok involucziós síksorokkal projicziáltatnak, egy linearis komplexust képeznek.

Legyen a jobboldali tételben $g(ABC\ldots) \barwedge g_1(A_1B_1C_1\ldots)$ a két projektiv pontsor. Egy $P$ pontból azoknak $g, g_1$ tartóihoz húzott $p$ szelő messe a tartókat az $A, B_1$ pontokban, melyeknek megfelelő $A_1, B$ pontjait a $p'$ egyenes köti össze. Minden a $P$-n keresztül menő és a $[Pp'] \equiv \pi$ síkban levő $g_i$ sugár oly tulajdonságú, hogy abból az adott pontsorok involucziós síksorokkal projicziáltatnak, mert a $g_iAB_1 \equiv g_ip$ síknak a $g_i[ABC\ldots] \barwedge g_i[A_1B_1C_1\ldots]$ síksorokban, mint az egyik vagy a másik sorhoz tartozónak, a $g_iA_1B \equiv g_ip'$ sík felel meg. E szerint a tér bármely pontján keresztül menő oly sugarak, melyekből ama pontsorok involucziós síksorokkal projicziáltatnak, egy sugársort képeznek, és így e sugarak összessége egy linearis komplexus lesz. A pontsorok $g, g_1$ tartói szintén komplexussugarak; ellenben ezek bármely szelőjének, $p$-nek, polárisa $p'$, az az egyenes, mely a $(pg)$, $(pg_1)$ pontoknak megfelelő pontokat köti össze, és a $pp'$ polárispárnak bármely szelője komplexussugár, mert abból a két pontsor involucziós síksorral projicziáltatik.

Ugyanígy bizonyítható be a $g(\alpha\beta\gamma\ldots) \barwedge g_1(\alpha_1\beta_1\gamma_1\ldots)$ projektiv síksorokra vonatkozó baloldali tétel. Két meg nem felelő sík metszővonala $\alpha\beta_1 \equiv p$, és az ezeknek megfelelő síkok metszővonala $\alpha_1\beta \equiv p'$ polárispár a komplexusban, és a $pp'$-nek bármely szelője a síksorokat, mint könnyen látható, involuczióban metszi, tehát komplexussugár. — Ha a $g(\alpha\beta\gamma\ldots)$ síksor perspektiv a $g_1(A_1B_1C_1\ldots)$ pontsorral, és a $g_1(\alpha_1\beta_1\gamma_1\ldots)$ síksor perpsektiv a $g(ABC\ldots)$ pontsorral, akkor a két pontsortól és a két síksortól a tétel értelmében meghatározott két komplexus ugyanegy, mert az $\alpha\beta_1 \equiv A_1B$, $\alpha_1\beta \equiv AB_1$ polárispárnak szelőiből a pontsorok involucziós síksorokkal projicziáltatnak, és azok a szelők a síksorokat involucziós pontsorokban metszik. Két megfelelő pontnak összekötő egyenese, a mely egyszersmind két megfelelő síknak metszővonala egy komplexussugár, és az egyik pontsor egy pontjának nullasíkja a komplexushoz tartozó nullarendszerben, keresztül megy a pontsor tartóján és a másiknak tartóját a megfelelő pontban metszi.

## 17. §. Méretes vonatkozások a nullarendszerben.

1. A nullarendszerben minden síknak van egy a síkban fekvő nullapontja, és így a végtelen távoli $\varepsilon_\infty$ síknak is. Az $\varepsilon_\infty$-nek nullapontját $E_\infty$-nel akarjuk jelölni. Az $\varepsilon_\infty$ síkban levő $a'_i$ egyeneseknek $a_i$ polárisait, melyek az $E_\infty$-n mennek keresztül és így egymással

párhuzamosak, a *nullarendszer átmérőinek* nevezzük. Ezt, valamint a többi alább következő elnevezés, a nullarendszer vezetősugaraitól képezett linearis komplexusra is alkalmazzuk.

Párhuzamos, tehát egymást az $\varepsilon_\infty$ sík $a'_i$ egyeneseiben metsző síkoknak nullapontjai abban az $a$ átmérőben vannak, mely ama síkok végtelen távol fekvő $a'_i$ metszővonalának polárisa. Ezt az $a_i$ egyenest Mannheim szerint a *párhuzamos síkokhoz adjungált átmérőnek* nevezzük. Minden átmérő ahhoz a párhuzamos síksorhoz adjungált, melynek végtelen távol levő tengelye ama átmérőnek polárisa.

Az $\varepsilon_\infty$ síkban az $E_\infty$ ponton keresztül menő egyenesek, mint a nullarendszer vezetősugarai, egybeesnek polárisaikkal. Ezért az $E_\infty$ ponton keresztül menő és így az átmérőkkel párhuzamos síkoknak — *az átmérősíkoknak* — nullapontjai az $\varepsilon_\infty$-ben, tehát végtelen távol vannak. Ezért az átmérősíkokban lévő vezetősugarak mind párhuzamosak egymással, de általában nem párhuzamosak az átmérőkkel. Két párhuzamos átmérősíknak különböző nullapontja van az $\varepsilon_\infty$-ben, tehát egy-egy síkban fekvő és önmaguk között párhuzamos vezetősugarak, nem párhuzamosak egymással.

Ha a nullarendszert az átmérők irányában eltoljuk, akkor annak átmérői, átmérősíkjai, valamint az ezekben fekvő vezetősugarak sorai, melyek a nullarendszer valamennyi vezetősugarát magukban foglalják, önmagukban tolatnak el. Ezért mondhatjuk: *A linearis komplexus nem változik, ha azt átmérői irányában eltoljuk*; azaz: minden komplexussugár egy másik komplexussugár helyére kerül.

A nullarendszer két polárispárja, mint tudjuk, mindig hyperboloidikus fekvésű. Ha az egyik polárispárnak egyik egyenese az $a_i$ átmérő, akkor, mert ennek polárisa $a'_i$ végtelen távol van, az $a_i a'$, $pp'$ polárispárok egy hyperbolikus paraboloidon feküsznek, és ezért az $a_i pp'$ egyenesek annak a paraboloidnak egyik vezető síkjával párhuzamosak. A $pp'$ tetszésszerinti polárispárral párhuzamos sík tehát párhuzamos a nullarendszer átmérőivel. Ez különben abból is következik, hogy egy polárispárnak minden szelője, tehát az $\varepsilon_\infty$-ben levő végtelen távoli szelője is, vezetősugár, és mint ilyen az $E_\infty$ ponton megy keresztül.

A nullarendszer átmérőire merőleges, tehát egymással párhuzamos síkoknak nullapontjai egy különös átmérőben, $a$-ban, vannak, melyet a nullarendszer és a komplexus *főtengelyének* nevezünk. A főtengelynek, $a$-nak, polárisa $a'$ a reá merőleges síknak végtelen távoli egyenese. Minden az $a$ főtengelyre merőleges metsző egyenes,

mely tehát az $a'$-t is metszi, vezetősugara a nullarendszernek. Az $a$ főtengelynek és a $p$ egyenesnek merőleges szelője $g$, mint vezetősugár, metszi a $p$-nek $p'$ polárisát is; és mert az $a$ $pp'$ egyenesek egy síkkal párhuzamosak, azért a $g$, mely erre a síkra merőleges, a $p'$-re is merőleges. Ennélfogva:

*A linearis komplexus minden polárispárjának merőleges szelője, merőlegesen metszi annak főtengelyét.*

Ha tehát a $pp'$ és $p_1p'_1$ polárispároknak merőleges szelőjük a $g$ és $g_1$, akkor a $gg_1$-nek merőleges szelője a főtengely $a$.

A nullarendszernek főtengelye és egy polárispárja, vagy főtengelye és egy reája *nem* merőleges vezetősugara, meghatározza a nullarendszert.

2. Legyen $\alpha$ az $a$ főtengely $A$ pontjában az $a$-ra merőlegesen álló sík, tehát az $A$-nak nullasíkja az $\alpha$. Ebben a síkban az $A$ pontból egy $k^{(2)}$ kört írunk le. A $k^{(2)}$ kör pontjainak nullasíkjai az $A$-n mennek keresztül és egy II. r. kúpot $K^{(2)}$-t burkolnak (16. §. 3.), melynek alkotói, a $k^{(2)}$ kör érintőinek polárisai a nullarendszerben. A nullarendszerben valamely $P$ pontnak és a $k^{(2)}$-re vonatkozó $p$ polárisának, egy $\pi$ nullasíkja és egy $p'$ polárisa van; a $\pi$ sík a $p'$ sugárnak polárisa a $K^{(2)}$ kúpra vonatkozólag. Az $A$ pontnak a $k^{(2)}$-re vonatkozó $a'$ polárisa végtelen távol van; tehát az $A$ pont nullasíkjának, $\alpha$-nak, polárissugara a $K^{(2)}$-re vonatkozólag, az $a'$-nak polárisa, azaz az $a$ főtengely. Minthogy pedig $a$ merőleges az $\alpha$-ra, és $a$ és $\alpha$ a $K^{(2)}$-re polárissugár és polárissík: azért az $a$ főtengelye, az $\alpha$ pedig fősíkja a $K^{(2)}$ kúpnak.

A $k^{(2)}$ körnek minden egymásra merőleges átmérőpárja kapcsolt; ezek mint vezetősugarak a nullarendszerben egybeesnek polárisaikkal; tehát a $k^{(2)}$-nek egymásra merőleges átmérői, a $K^{(2)}$ kúpra vonatkozólag kapcsolt polárissugarak, és így az $\alpha$ a $K^{(2)}$-nek egy cziklikus síkja. De ha a kúpnak egy cziklikus síkja egyszersmind fősík, akkor a kúp forgáskúp. Ennélfogva az $a$ főtengelyre merőleges $\alpha$ síkban fekvő és annak ugyancsak a főtengelyen levő $A$ nullapontjából leírt $k^{(2)}$ kör pontjainak nullasíkjai oly forgáskúpot burkolnak, melynek csúcsa az $A$ pont és forgástengelye az $a$ főtengely.

Ebből következik, hogy a *nullarendszer és a linearis komplexus annak főtengelye körül önmagában forgatható.*

Azaz: A főtengely körül történő forgatás alkalmával a tér pontjai más és más helyzetbe jutnak; velük egyszersmind a forgatott pontok nullasíkjai is, e pontoknak nullasíkjaiba kerülnek. Ugyanígy a komplexussugarak is mindig komplexussugarakba forgattatnak, a mi egy (Plückertől fölismert) jellemző tulajdonsága a linearis komplexusnak.

Minthogy a nullarendszert a főtengely irányában önmagában eltolhatjuk és a főtengely körül önmagában forgathatjuk: a két mozgást egyidejüleg is végezhetjük. E kettős mozgást, ha az eltolás aránylagos a forgatással: *csavarmozgás*nak vagy *csavarás*nak nevezzük. Ezért:

*A linearis komplexus főtengelye körül önmagában csavarható*, tehát úgy, mint pl. a forgáshenger elcsavarható önmagában forgástengelye körül; de már nem csavarható el önmagában a forgáskúp vagy a forgáshyperboloid a forgástengely körül.

3. Bocsássunk egy tetszésszerinti $X$ pontból a nullarendszer $a$ főtengelyére azt a merőleges $g_0$ egyenest, mely a főtengelyt az $A$ pontban metszi. A $g_0$ vezetősugárnak egy másik pontja legyen $X_1$, a végtelen távoli pontja $A'$, és az $AA'XX_1$ pontoknak nullasíkjai legyenek az $\alpha\alpha'\xi\xi_1$ síkok. E nullasíkok a $g_0$-on mennek keresztül; az $\alpha$ merőleges az $a$-ra és az $\alpha'$ tartalmazza az $a$-t, tehát az $\alpha$ merőleges az $\alpha'$-re, végre

$$g_0(AA'XX_1) \wedge g_0(\alpha\alpha'\xi\xi_1).$$

Ha az $X$ és $X_1$ pontok távolságát az $a$-tól, $r$ és $r_1$-gyel, a $\xi$ és $\xi_1$ síkok hajlásszögét az $a$-hoz, $\rho$ és $\rho_1$-hez jelöljük, akkor

$$AX = r, \quad AX_1 = r_1, \quad A'X = A'X_1 = \infty$$

$$(\alpha'\xi) = \rho, \quad (\alpha'\xi_1) = \rho_1, \quad (\alpha\xi) = 90^0 - \rho, \quad \alpha_1\xi \equiv 90^0 - \rho_1$$

és az előbbi projektivitás miatt:

$$\frac{AX}{A'X} : \frac{AX_1}{A'X_1} = \frac{sin(\alpha\xi)}{sin(\alpha'\xi)} : \frac{sin(\alpha\xi_1)}{sin(\alpha'\xi_1)}$$

vagy

$$r : r_1 = \frac{cos\rho}{sin\rho} : \frac{cos\rho_1}{sin\rho_1} = tg\rho_1 : tg\rho$$

azaz

$$rtg\rho = r_1 tg\rho_1 = \text{állandó}.$$

Minthogy a nullarendszer főtengelye körül önmagában csavarható, azért az $X_1$ pont és $\xi_1$ nullasíkja bármely a főtengelytől $r_1$ távolságra levő $Y_1$ pontba és ennek $\eta_1$ nullasíkjába csavarható, és így az $\eta_1$-nek hajlásszöge a főtengelyhez szintén $\rho_1$. Ezért az utóbbi egyenlet ekkép fejezhető ki:

*Ha bármely pont távolságát a nullarendszer főtengelyétől megszorozzuk annak a szögnek tangensével, melyet a főtengely a pont nullasíkjával képez, állandó szorzatot nyerünk.* Ezt a szorzatot PLÜCKER szerint a nullarendszer és a tőle meghatározott linearis komplexus *parameterének* nevezzük, és $k$-val jelöljük.

Ebből látható, hogy a nullarendszer $a$ főtengelye és egy $X$ pontjának $\xi$ nullasíkja, meghatározza a nullarendszert. Ha az $X$ pontot azon a $g_o$ vezetősugáron, mely az $X$-ből a főtengelyre merőlegesen bocsátható, tovamozgatjuk, és e mellett a $\xi$-t szintén a $g_o$ körül vele projektivásan forgatjuk, ha ezután az $X$ pontsort és a $\xi$ síksort az $a$ körül forgatjuk és az $a$ irányában eltoljuk, akkor az $X$ a tér minden pontjába és vele a $\xi$ sík a tér minden síkjába jut. Az $a$-nak $\infty^4$ helyzetet, az $X$ pont nullasíkjának pedig $\infty^1$ helyzetet adhatunk a $g_o$ síksorban, tehát az összes nullarendszerek száma ismét $\infty^5$.

4. Legyen ezután a $g$ egy tetszésszerinti vezetősugara a nullarendszernek; ennek és az $a$ főtengelynek merőleges szelője $g_o$ messe a $g$-t az $X$ pontban, az $a$-t az $A$ pontban. Az $X$-nek nullasíkja a $\xi \equiv [gg_o]$, és mert az $a$ és $g$ merőleges a $g_o$-ra, azért az $a$ és $g$ hajlásszöge egyenlő az $a$ és $\xi$ hajlásszögével, $\rho$-val. A $g$-nek távolsága az $a$-tól $AX = r$, tehát egy tetszésszerinti vezetősugárra nézve, mely a főtengelytől $r$ távolságra van és ahhoz $\rho$ szög alatt hajlik az $r \cdot tg\rho$ egyenlő a nullarendszer parameterével. Vagy:

*A linearis komplexus bármely sugarának távolsága annak főtengelyétől és e sugár és a főtengely hajlásszögének tangense állandó szorzatot ad, mely a komplexus parameterével egyenlő.* —

Fektessük a $g$ vezetősugáron keresztül az $a$ főtengelyhez a párhuzamos síkot $\pi$-t, mely az $a$ és $g$-nek merőleges szelőjét, $g_o$-t, az $X$ pontban metszi. Az $(X, \pi)$ sugársor $p_i$ sugarainak $p'_i$ polárisai az $X$-nek $\xi \equiv [gg_o]$ nullasíkjában, a $g$-vel párhuzamos és az $(X, \pi)$-vel projektiv sugársort képeznek, mert az $a$ főtengely végtelen távoli $E_\infty$ pontján keresztül menő $\pi$ síknak nullapontja is végtelen távol van a $g$-n. A $g$-nek $r$ távolsága az $a$-tól ugyanaz, mint a $p_i$ sugaraké, és a $g$-nek $\rho$ hajlásszöge az $a$-hoz ugyanaz, mint a $p'_i$ polárisoké.

Jelöljük a változó $p_i$ sugarak hajlásszögét az $a$-hoz $\rho_i$-vel és $p'_i$ polárisainak távolságát az $a$-tól $r^i$-vel. A $p_i$-nek két helyzetében, $p_o$ és $p_1$-ben, könnyű meghatározni polárisainak helyzetét; t. i. ha a $p_o$ párhuzamos az $a$-val, tehát az $E_\infty$-n megy keresztül, akkor $p'_o$ végtelen távol van az $a$-tól és minden végesben fekvő egyenestől; ha pedig a $p_1$ merőleges az $a$-ra, akkor a $p'_1$ metszi az $a$-t, tehát attól 0 távolságra van. E szerint, ha a párhuzamos $p_i p_k$ egyenesek távolságát $| p_i p_k |$ -val jelöljük és meggondoljuk, hogy a $(p\, p_o)$ és $(gp_o)$ szögek egyenlők $\rho_i$-vel és $\rho$-val, a $(p_i p_1)$ és $(gp_1)$ szögek azoknak pótlószögei, úgy a

$$(p_i g p_o p_1) \overline{\wedge} (p'_i g p'_o p'_1),$$

vagy teljesebben kiírva :

$$\frac{sin(p_i p_o)}{sin(g p_o)} : \frac{sin(p_i p_1)}{sin(g p_1)} = \frac{|p'_i p'_o|}{|g p'_o|} : \frac{|p'_i p'_1|}{|g p'_1|}$$

ekkép egyszerüsbül :

$$\frac{sin\varrho_i}{sin\varrho} : \frac{cos\varrho_i}{cos\varrho} = \frac{r_i}{r},$$

vagy

$$r \,.\, tg\varrho = r_i \,.\, tg\varrho_i = k.$$

Ezt pedig ekkép fejezhetjük ki :

*Ha egy egyenes távolságát a nullarendszer főtengelyétől megszorozzuk annak a szögnek tangensével, melyet az egyenes polárisa a főtengelylyel képez, a nullarendszer parameterét nyerjük.*

Vagy : a nullarendszer főtengelyének távolságai egy polárispártól és tangensei azoknak a szögeknek, melyeket ama polárisok a főtengelylyel képeznek, egyenlő viszonyokat adnak.

5. Hogy az előbbi tétel alapján fogalmat szerezzünk a linearis komplexusról, képzeljünk egy $H^{(2)}$ forgáshengeren (36. ábra), melynek tengelye az $a$ és alkotói az $a$-tól $r$ távolságra vannak, a $c$ csavarvonalat *) a $h$ menetmagassággal. Húzzuk meg ennek minden pontjá-

*) Mint már fönn említettük, egy pontnak *csavarmozgása* vagy *csavarodása* valamely tengely körül két mozgásból állítható össze : a pont a tengely körül forog és egyidejüleg a tengely irányában tovatolódik. A pont ekkor egy *csavarvonalat* ir le, melynek tengelye ama forgástengely. Lényegileg kétféle lehet a csavarvonal : jobbra vagy balra csavarodó. Ha a pontot mindig egyértelemben forgatjuk a tengely körül, de a tovahaladás a tengely irányában az egyik vagy a másik értelemben megy végbe, akkor a leírt csavarvonalak közül az egyik jobbra csavarodó, a másik balra csavarodó lesz. És pedig : Ha egy a tengelyben álló és a csavarvonalra nézőnek a csavarvonal balról jobbra *lefelé halad*, akkor a csavarvonalat *jobbra csavarodónak*, ellenkező esetben *balra csavarodónak* nevezzük. Ezt az elnevezést kapja maga a mozgás is. A nálunk használatban levő csavarok élei jobbra csavarodók, ezeknek tükörképei egy síkon balra csavarodó csavarok. (A 35. ábrában az *a*) és *b*) balra csavarodó, a *c*) és *d*) jobbra csavarodó csavarvonalat mutat az illető forgáshengerrel együtt. A látósugarak a forgáshengerek alkotóit az *a*) és *c*) ábrában merőlegesen, a *b*) és *d*) ábrában hegyes szög alatt metszik.)

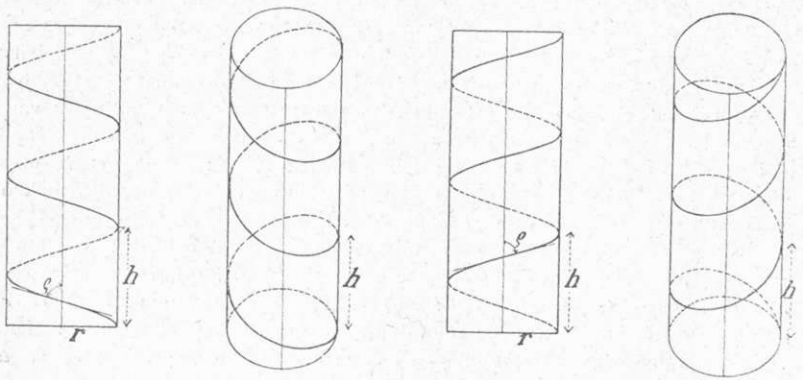
Mialatt a csavarodó pont egy teljes körülforgást végzett a tengely körül, leírt egy *csavarmenetet*, a tengely irányában pedig egy $h$ vonaldarabbal, — a *csavarmenet magasságával* vagy röviden a *menetmagassággal* — haladt tovább. A csavarodó pont oly forgáshengeren maradt, melynek tengelye egybeesik a forgástengelylyel, alkotói pedig a tengelytől oly $r$ távolságra vannak, mint a csavarvonalat leíró pont.

A csavarmenet a henger kifejtésében (a hálón) egyenes vonal lesz ; ebbe a vonalba jutnak a csavarvonal pontjainak érintői, melyek a hergernek is érintői.

ban az érintőt, $g$-t, melynek, úgy mint a csavarvonalnak, hajlásszöge a tengelyhez legyen $\varrho$. Toljuk el a csavarvonalat összes érintőivel a $H^{(2)}$ hengeren tengelyének irányában. Ezután írjunk le az $a$ tengely körül egy új forgáshengert $H_i^{(2)}$-őt, melynek alkotói az $a$-tól $r_i$ távolságra vannak és határozzuk meg a $\varrho_i$ szöget ebből az egyenletből $r\operatorname{tg}\varrho = r_i \operatorname{tg}\varrho_i$. A $H_i^{(2)}$-n vegyünk fel egy $c_i$ csavarvonalat, melynek hajlásszöge az $a$ tengelyhez $\varrho_i$, vagy $h_i$ menetmagassága kielégíti a $h_i : h = r_i^2 : r^2$ relacziót, és ép úgy jobbra vagy balra csavarodó legyen, mint a $c$. Ezt a $c_i$-t a $H_i^{(2)}$ hengeren összes érintőivel együtt tovamozgatjuk az $a$ irányában. Változtassuk most az $r_i$-t a 0-tól $\infty$-ig és végezzük az előbbi szerkesztést az új $H_i^{(2)}$ hengereken és az új $c_i$ csavarvonalakon. E $\infty^1$ számú $H_i^{(2)}$ hengeren levő $\infty^2$ számú $c_i$ csavarvonalnak $\infty^3$ számú érintője egy linearis komplexust képez, melynek főtengelye az $a$; a csavarvonalak pontjainak simulósíkjai pedig a komplexus alapnullarendszerének nullasíkjai. Azt is mondhatjuk, hogy a $\infty^2$ számú $c_i$ csavarvonal $\infty^2$ kifejthető felületének alkotói képezik a linearis komplexust. E kifejthető csavarfelületek között $\infty^1$ különböző van, melyek mindannyian a főtengely irányában eltolva $\infty^1$ helyzetben fordulnak elő a komplexusban.

---

Maga a vonaldarab egy oly derékszögű háromszögnek átfogója, melynek befogói $2\pi r$ és $h$. Ez az átfogó a $h$ befogóhoz oly $\varrho$ szög alatt hajlik, mint a csavarvonal




35. ábra.

bármely pontjának érintője a tengelyhez. Ezzel a $\varrho$ szöggel mérjük a *csavarvonal hajlását a tengelyhez*, és a $h$, $r$, $\varrho$ között levő összefüggés:

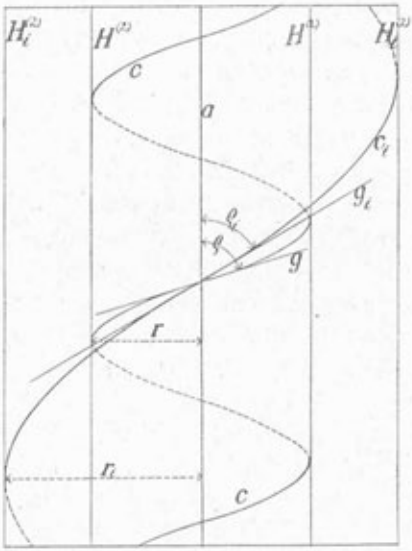
A

$$h = 2r\pi \operatorname{cotg}\varrho.$$

$$h_0 = \frac{h}{2\pi} = r\operatorname{cotg}\varrho$$

A leírt tulajdonság miatt Sturm a linearis komplexust *sugárcsavarnak* (Strahlengewinde) nevezi. *)

Helyzetüktől eltekintve, a *sugárcsavarok egymástól parametereikben és még abban különbözhetnek, hogy jobbra vagy balra csavarodók.* S mert a parameternek $\infty^1$ értéket adhatunk, azért *az alakilag különböző sugárcsavaroknak (linearis komplexusoknak) száma* $\infty^1$. Mindezeket annyi helyzetben vehetjük fel, mint tengelyeiket; azaz $\infty^4$ helyzetben. Igy tehát a tér összes sugárcsavarait ez alapon megszámlálva ismét az ismert $\infty^5$ sokaságot nyerjük.




36. ábra.

Ha az előbbi szerkesztésben a $c$ csavarvonal jobbra vagy balra csavarodott, úgy a

---

vonaldarabot a *csavarvonal redukált menetmagasságának* nevezzük. A redukált menetmagasság *meghatározza* a csavarmozgást, melyet egy pont vagy egy pont rendszer végez egy tengely körül; mert megadja, hogy mennyivel haladnak tova a mozgó pontrendszernek pontjai a tengely irányában egyik vagy másik értelemben, míg a rendszer pontjai a tengely körül történő forgásukban olyan íveket írnak le, mint a pontoknak távolságai a tengelytől.

A csavarvonal érintői, alkotói a csavarvonal kifejthető felületének, melyet *kifejthető csavarfelületnek* nevezünk; maga a csavarvonal a kifejthető csavarfelületnek *éle*. E felület két szomszéd alkotóján, vagy a mi ugyanegy, a csavarvonal két szomszéd érintőjén keresztül menő sík, a kifejthető csavarfelület *érintősíkja* az illető két egybeeső alkotó mentén, illetve a csavarvonal *simuló síkja* ama érintőknek a csavarvonalon fekvő metszőpontjában, az úgynevezett *simulóponlban.*

A csavarvonal minden pontjának simulósíkja keresztül megy a pont érintőjén, továbbá az érintő és a tengely merőleges szelőjén. A simulósík tehát ép oly szöget képez a tengelylyel, mint az érintő, és mert a csavarvonal pontjainak érintői egyenlően hajlanak a tengelyhez, azért simulósíkjainak hajlásszöge a tengelyhez is egyenlő lesz. Ha tehát egy ponton keresztül a csavarvonal pontjainak érintőivel és simulósíkjaival párhuzamos egyeneseket és síkokat vezetünk, akkor azok ugyanegy forgáskúpnak alkotói és érintősíkjai lesznek, melynek tengelye párhuzamos a csavarvonal tengelyével.

A csavarvonal és kifejthető felülete önmagában csavarható; de e csavarásnak ugyanoly redukált menetmagasság felel meg, mint a csavarvonalnak, illetve a kifejthető csavarfelület élének.

*) Sturm R. Liniengeometrie; (1892.) I. köt., 94. old.

leszármaztatott sugárcsavar is jobbra vagy balra csavarodó lesz. Ha a sugárcsavar főtengelyéből a főtengelylyel párhuzamos síkra nézünk és ebben a sugárcsavar sugarai balról jobbra lefelé következnek egymásra, akkor a sugárcsavar *jobbra csavarodó*, ellenkező esetben *balra csavarodó*. A jobbra csavarodó csavarvonalnak tükörképe valamely síkon balra csavarodó csavarvonal; ezért az egyenlő parameterű sugárcsavarok, ha különböző csavarodásuak, egymásnak tükörképei lehetnek.

Ha a sugárcsavar, főtengelye körül, csavarodása értelmének (jobbra vagy balra) megfelelőleg végez csavarodást, úgy a sugárcsavarnak $\infty^1$ kongruens kifejthető csavarfelülete önmagában csavarodik, a többiek egymás után a velük kongruens kifejthető csavarfelületekbe kerülnek. Ha a sugárcsavar parametere $k$, a csavarodás redukált menetmagassága $h_o$, és az önmagában csavarodó kifejthető csavarfelületnek alkotói a főtengelytől $r$ távolságra vannak és ahhoz $\rho$ szög alatt hajlanak, akkor

$$r\,tg\rho = k, \quad r\,cotg\rho = h_o$$

tehát

$$r^2 = kh_o, \; tg^2\rho = \frac{k}{h_o}.$$

6. Ha a sugárcsavarnak parametere 0, akkor *a sugárcsavar elkorcsosul*. Ez elkorcsosult sugárcsavart, vagy linearis komplexust Sturm *sugárbokornak* (Strahlengebüsch) nevezi; ez a főtengely pontjaiból kisugárzó sugarakból, vagy a mi ugyanaz: a főtengelyt (azaz egy egyenest) metsző összes, számra $\infty^3$, sugárból áll. E különös komplexus nullarendszerében minden pontnak nullasíkja a főtengelyen megy keresztül, és minden síknak nullapontja a főtengelyen van. A főtengely pontjainak és síkjainak végtelen sok nullasíkjuk és nullapontjuk van. Ezért minden egyenesnek polárisa a főtengely vagy maga az egyenes, a szerint, a mint az metszi vagy nem metszi a főtengelyt. A főtengely polárisa pedig bármely egyenes lehet.

## 18. §. A linearis kongruenczia és a kéttengelyű involuczió.

1. Láttuk az előbbiekben, hogy a linearis komplexus sugarainak száma $\infty^3$, azaz: a komplexussugarak háromszorosan végtelen nagy sokaságúak. A tér kétszeresen végtelen nagy sokaságú egyeneseiről vagy sugarairól azt mondjuk, hogy azok egy *kongruen-*

*cziát* képeznek. A kongruenczia *n-ed rendű*, ha bármely ponton annak $n$ sugara halad keresztül, és *m-ed osztályú*, ha bármely síkban annak $m$ sugara van. Az első rendű és első osztályú kongruencziát *linearis kongruenczianak* nevezzük, és ezzel fogunk a következőkben foglalkozni.

*Két linearis komplexusnak közös sugarai egy linearis kongruencziát képeznek.*

Ugyanis, ha a tetszésszerinti $P$ pontnak az első, illetve a második komplexus nullarendszerében nullasíkja a $\pi$ és $\pi_1$, akkor a $\pi\pi_1$ sugár a két komplexusnak a $P$-n keresztül menő közös sugara. Ha továbbá a $\rho$ síknak nullapontjai a két nullarendszerben az $R$ és $R_1$, akkor az $RR_1$ sugár a két komplexusnak a $\rho$ síkban levő közös sugara. E szerint a két komplexushoz bármely ponton keresztül egy közös sugár vezethető, és bármely síkban azoknak egy közös sugaruk van; ezért a közös sugarak egy linearis kongruencziát képeznek. Két linearis komplexus közös sugaraiból álló linearis kongruencziát a két komplexus *metszésének* nevezhetjük.

Abból, hogy egy sugáralakzatnak a tér minden pontján egy (vagy több, de véges számú) sugara megy keresztül, már arra lehet következtetni, hogy az alakzat kongruenczia, mert a tér $\infty^3$ pontján ugyan $\infty^3$ sugár megy keresztül, de minden sugár a benne levő $\infty^1$ számú pont miatt ugyanannyiszor lett számítva úgy, hogy a sugáralakzatnak tényleg csak $\infty^2$ sugara van.

A két komplexusnak, $\Gamma$ és $\Gamma_1$-nek, nullarendszereit akkép vehetjük fel, hogy azokban egyes síkoknak nullapontjai egybeessenek. Az ily síkban a két komplexusnak végtelen sok, annak közös nullapontján keresztül menő közös sugara van. A kongruencziának ily különös pontjait és síkjait, a melyeken $\infty^1$ számú sugár megy keresztül, illetve a melyekben ugyanannyi sugár van, *singularis* pontoknak és síkoknak nevezzük. Ha a két linearis kongruencziának két közös sugara egymást metszi, akkor ezeknek úgy a metszőpontja, mint a síkja singularis.

2. *A linearis kongruencziának oly sugarai, melyek egy tetszésszerinti p egyenest metszenek, egy sugársereget képeznek. A linearis kongruencziában $\infty^3$ sugársereg van.*

Ugyanis, ha a kongruencziát két linearis komplexus, $\Gamma$ és $\Gamma_1$, metszésének tekintjük, és a $p$ egyenes polárisai a két komplexusban $p'$ és $p'_1$, akkor a $pp'p'_1$-nek $g_i$ szelői a két komplexusnak közös sugarai lesznek, és így ezek egy sugársereget képeznek. A $p$-nek $\infty^4$ helyzetet adhatunk, és ekkép $\infty^4$ sugársereget nyernénk a kongruencziában; de e sugárseregek közül csak $\infty^3$ különböző van,

mert a $p$-nek mindenik sugársereg vezetőseregében $\infty^1$ helyzetet adhatunk és mindig csak ugyanazt az egy sugársereget nyerjük.

Változtassuk a $p$ egyenest az előbbi $pp'p'_1$ sugárseregben, $S$-ben. Mialatt a $p$ az $S$-et leírja, annak $p'$ és $p'_1$ polárisai a $\Gamma$ és $\Gamma_1$-ben a változó $p$-vel involucziós sugárseregeket fognak leírni úgy, hogy a $pp'$ sugarak az egyikben és a $pp'_1$ sugarak a másikban társsugarak lesznek. E két involucziós sugárseregnek közös valós vagy képzetes társsugárpárja $uv$, a két komplexusnak egy közös polárispárja, és így azoknak összes szelői a metszési kongruenczíának, $\Gamma\Gamma_1$-nek, sugarai.

A két linearis komplexusnak, $\Gamma$ és $\Gamma_1$-nek, egynél több közös polárispárja nem lehet, mert két polárispár már meghatározza a komplexust.

Könnyen belátható, hogy ha a talált közös polárispár $uv$ valós, akkor az a kongruenczíát képező $\infty^3$ sugársereg mindenikének vezetőseregéhez tartozik. Ugyanis, ha a $q$ egyenesnek polárisai a $\Gamma$ és $\Gamma_1$-ben a $q'$ és $q'_1$, akkor az $uv, qq'$ és az $uv, qq'_1$ polárispároknak szelői a $\Gamma$-nak, illetve a $\Gamma_1$-nek sugarai. De a két szelőrendszer ugyanegy, mert mindenik szelőrendszer metszi az $uvq$ egyeneseket.

A linearis kongruenczia meghatározására szolgáló $\Gamma$ és $\Gamma_1$ komplexusoknak közös polárispárját, $uv$-t, melyet tehát a kongruenczíának összes sugarai metszenek, Reye a *kongruenczia tengelyeinek* nevezi, és a mennyiben ezek valósak, könnyen fogalmat szerezhetünk úgy a kongruenczíának, mint ama $\infty^3$ sugárseregnek sugarairól, melyek a kongruenczíában vannak. Mert:

*Két egymást nem metsző $u$ és $v$ egyenesnek összes szelői egy linearis kongruenczíát képeznek, melynek az $uv$ egyenesek tengelyei. Az $uv$ tengelyeken és egy változó $p$ egyenesen keresztül menő $\infty^3$ sugárseregnek támasztó sugárseregei képezik a kongruenczíát.* És mert az $uv$ tengelyek a kongruenczíát meghatározzák, azért azt (Staudt szerint) röviden $(u,v)$-vel jelölhetjük.

A kongruenczíának valamely $P$ ponton keresztül menő sugara a $Pu$, $Pv$ síkoknak metszővonala, egy $\pi$ síkban fekvő sugara pedig a $\pi u$, $\pi v$ pontoknak összekötő egyenese. A tengelyek pontjai, és azoknak síkjai a kongruenczia *singularis* pontjai és síkjai, mert egy tengely akármelyik pontjából a másik tengelyhez húzható $\infty^1$ sugár, és egy tengelynek akármelyik síkjában a másik tengely és a sík metszőpontjához vezetett bármelyik sugár, a kongruenczíának sugara.

3. De hogy az oly linearis kongruenczíának sugarait is áttekinthessük, melynek $u$ *és* $v$ *tengelyei II. fajú képzetes* egyenesek (9. §. 4.) továbbá, hogy arról a $\infty^3$ sugárseregről is fogalmat nyerjünk, melyek

ebben az esetben a kongruenciát képezik, előre kell bocsátanunk a következőket:

*Egy p egyenesen és egy aa' bb' . . . involucziós sugársereg nek társsugárpárjain keresztül menő paa', pbb' . . . sugársereg eknek a p-n kívül még egy közös q sugaruk van, mely esetleg a p-vel egyesül.*

Ugyanis az $aa' . bb' \ldots$ involucziós sugársereg meghatároz egy nullarendszert, melyben a sugársereg nek társsugarai polárispárok, a $p$ egyenesnek pedig polárisa egy $q$ egyenes. Minthogy a nullarendszernek bármily két polárispárja hyperboloidikus fekvésű; a $pq, aa'$; $pq, bb'$; . . . polárispárok egy-egy sugársereghez tartoznak és így valamennyi $paa', pbb', \ldots$ sugársereg nek közös sugara a $p$-n kívül még a $q$ sugár. — Ha azonban a $p$ vezetősugara a nullarendszernek, akkor a $q$ egybeesik a $p$-vel és a $paa', pbb', \ldots$ sugarakon keresztül menő hyperboloidok egymást a $p$-nek minden pontjában érintik.

Magából a tételből következik, hogy a $p$ egyenesnek $\pi_i$ síkjai az $aa' . bb' \ldots$ involucziós sugársereget oly involucziós kúpszeletekben, $k_i^{(2)}$-ben, metszik, hogy e kúpszeletekben levő involucziós pontsoroknak $G_i$ involuczió-középpontjai egy $q$ egyenesen feküsznek.

De mily felületen vannak ama involucziós pontsoroknak $g_i$ involuczió-tengelyei?

Az $aa' . bb' \ldots$ involucziós sugársereget tartó hyperboloidot $H^{(2)}$-vel jelölvén, a $g_i$ involuczió-tengely egyrészt a $G_i$ pontnak a $H^{(2)}$-re vonatkozó polárissíkjában, $\gamma_i$-ben, másrészt a $\pi_i$ síkban van. Ha tehát a $\pi_i$ sík a $p$ körül forog, akkor a $G_i$ pont azzal egy projektiv pontsort ír le a $q$-n, és a $G_i$ pontsor polárissíkja azzal egy projektiv síksort ír le, a $q$-nak a $H^{(2)}$-re vonatkozó $p_1$ polárisa körül. E két $p$ és $p_1$ tengelyű projektiv síksor képződménye egy $H_p^{(2)}$ hyperboloid, és a $g_i$ tengelyek annak egyik sugárseregét adják.

Minthogy az összetartozó $G_i$ és $g_i$ involuczió-középpontok és tengelyek harmónikusan vannak elválasztva az $aa' . bb' \ldots$ involucziós sugársereg nek minden társsugárpárjától, azért azok a $p_i$ egyenesek, melyek a $q$ egyenest az $aa' . bb' \ldots$ involucziós sugársereg nek egyes-egyes társsugárpárjaitól harmónikusan választják el, és a melyekhez a $p$ és $p_1$ is tartozik, mindannyian szelői a $g_i$ involuczió-tengelyeknek. A $p_i$ sugársereg ek tehát a $g_i$ sugársereg nek vezetősugársereg e és abban vannak az $aa' . bb' \ldots$ involucziós sereg nek $uv$ kettőssugarai is, mert a $g_i$ involuczió-tengelyek a $k_i^{(2)}$ kúpszeleteket az involucziós pontsorok kettőspontjaiban metszik, mely kettőspontok az $uv$ kettőssugarakon vannak.

A $g_i$-n levő és a $H^{(2)}$-re vonatkozó kapcsolt pólusok egy involucziós pontsort, és e kapcsolt pólusokon keresztül menő $p$ sugarak a $H_p^{(2)}$-n egy involucziós sugársereget képeznek, úgy, hogy az $uv$ egyenesek ez utóbbi sugárseregnek is kettőssugarai. A felvett $p$ egyenesnek társsugara ebben az involucziós sugárseregben a $q$-nak a $H^{(2)}$-re vonatkozó polárisa $p_1$, mert a $p$ egyenesnek a $k_i^{(2)}$-re vonatkozó pólusa a $G_i$ és $(p_1 g_i)$ pontoknak összekötő egyenesén van. És minthogy e vizsgálatokban nem voltunk tekintettel az $aa' . bb' \ldots$ involucziós sugársereg minéműségére, azért az eredmények akkor is érvényesek maradnak, ha ama sugárseregnek $uv$ kettőssugarai képzetesek.

E szerint: „Egy oly $(u, v)$ linearis kongruencziáról és az abban levő $\infty^3$ sugárseregről, melynek $uv$ tengelyei az $aa' . bb' \ldots$ involucziós sugárseregnek II. fajú képzetes kettőssugarai, következőképen szerezhetünk fogalmat:

„Valamely $\pi$ síknak metszése az $aa' . bb' \ldots$ involucziós sugársereggel oly involucziós kúpszelet, melynek involuczió-tengelye a $\pi$ síkban fekvő kongruenczia-sugár.“

„Valamely $P$ pontból az $aa' . bb' \ldots$ involucziós sugársereg társsugaraihoz vezetett síkpárok involucziós síksort képeznek egy II. r. kúp érintősíkjaiban; e síksornak involuczió-sugara a $P$ pontból kisugárzó kongruenczia-sugár.“

„A $p$ egyenesen és az $aa' . bb' \ldots$ sugársereg $uv$ kettőssugarain keresztül menő $p_i$ sugárseregnek vezetősugárseregét pedig a $p$ pontjaiból kisugárzó, tehát egyszersmind a $p$ síkjaiban fekvő, kongruenczia-sugarak képezik. Ezeknek bármelyikén az $aa' . bb' \ldots$ sugársereget tartó hyperboloidra vonatkozó kapcsolt pólusok egy involucziós pontsort adnak; és ennek társpontjain keresztül menő $p_i$ sugárpárok már annak az involucziós seregnek társsugarai, melynek kettőssugarai szintén az $u$ és $v$.“

Ebből látható, hogy egy adott II. fajú kapcsolt-képzetes egyenespár $uv$, mint $\infty^3$ számú involucziós sugárseregnek kettőssugara állítható elő.

E sugárseregek bármelyike meg van határozva, ha ismeretes az $uv$-n kívül egy valós sugaruk, $p$.

De lehet az $uv$ II. fajú képzetes egyeneseken keresztül menő sugársereget a következő, szintén az előbbiekből folyó tétel alapján is előállítani:

„Azok a $p_i$ sugarak, melyek az $aa' . bb' \ldots$ sugárseregnek társsugárpárjait egy $q$ egyenestől harmónikusan elválasztják, az

$aa' . bb' \ldots$ sugárseregnek $uv$ kettőssugarain keresztül menő sugársereget képeznek." Minthogy az $uv$ sugarak képzetesek, az $aa' . bb' \ldots$ sugárseregnek minden társsugárpárja a seregnek egy más társsugárpárjától harmónikusan van elválasztva. Két-két sugár, $pp'_i$, mely a $q$-t az ily harmónikusan elválasztott két társsugárpár egyikétől és másikától harmónikusan elválasztja, involucziót képez a $p_i$ sugarak seregében, és ennek az involucziónak kettőssugarai szintén az $uv$ sugarak lesznek.

4. Láttuk az előbbiekben, hogy a nullarendszer a tér pontjai és síkjai, valamint annak egyenespárjai között vonatkozást létesít. E vonatkozásban vannak olyan egyenesek, melyek párjukkal egybeesnek, és ezek egy linearis komplexusnak sugarai. A nullarendszer, mely *vonatkozást* fejez ki, meghatározza a linearis komplexust, mint egy abból leszármaztatható sugáralakzatot, s viszont ez utóbbi sugáralakzat meghatározza ama általánosabb vonatkozást, a nullarendszert.

A linearis kongruenczia, mint geometriai alakzat szintén leszármaztatható egy általánosabb vonatkozásból. E vonatkozást *kéttengelyű involuczió s rendszernek*, vagy kéttengelyű involucziónak (torz-involucziónak), vagy végre a benne előforduló végtelen sok involuczió s sugársereg miatt (Staudt szerint*) sereges involuczió s rendszernek (geschaart-involutorisches System) is nevezik.

A kéttengelyű involuczió s rendszer megállapítására kiindulhatunk két egyenesből, $u$ és $v$-ből, mely vagy II. fajú kapcsolt-képzetes, vagy ha valós, úgy egymást nem metszi (torz-helyzetű), és mely az involuczió s rendszer két *tengelyének* neveztetik. Magát az involuczió s rendszert, mert az $u, v$ tengelyek azt meghatározzák, e tengelyekkel ekkép jelöljük: $(u, v)$.

E két tengely, $u$ és $v$, segélyével, melyet először *valós*-nak tételezünk fel, a tér pontjai, a tér síkjai és a tér egyenesei között a következő vonatkozást létesíthetjük:

Egy $A$ ponthoz oly $A'$ pontot rendelünk, mely az $A$-t az $u$ és $v$-tól harmónikusan választja el. Ha tehát az $A$ pontból meghúzzuk a $g$ szelőt az $u$ és $v$-hez, akkor az $AA'$ pontpár az $(ug)(vg)$ pontpárt harmónikusan választja el. Az $A'$ pontnak viszont e szerkesztés alapján az $A$ pont fog megfelelni, azaz: az $AA'$ pontok felcserélhetően (involucziósan) felelnek meg egymásnak. Az $u$ és $v$ tengelyen fekvő pontok megfelelő pontjaikkal esnek egybe.

Ha az $A$ pont egy $a$ egyenest ír le, úgy az $A$-nak megfelelő

*) Beiträge z. Geom. d. Lage. 63. oldal.

$A'$ pontok abban az $a'$ egyenesben lesznek, mely az $a$-t az $u$ és $v$-től harmónikusan választja el. És mert az $AA' \equiv g$ egyenes, mint szelője az $aa'uv$ egyeneseknek az $A$ változásával az $a$-n egy sugársereget ír le, azért az $a$ egyenesen levő pontsor projektiv a megfelelő pontsorral az $a'$-ön.

Ha az $a$ metszi az egyik tengelyt, pl. az $u$-t, akkor az $a'$ is az $(au)$ ponton megy keresztül és az $[au]$ síkban fekszik, és az $aa'$ egyenespár az $u$-t, az $[au]$ sík és a $v$ tengely metszőpontjától harmónikusan választja el. Ha pedig az $a$ mindkét tengelyt metszi, akkor egybeesik az $a'$-sel, és a megfelelő pontok a közös egyenesen oly involucziós sort képeznek, melynek kettőspontjai a tengelyeken vannak.

Egy $\alpha$ síkban fekvő bármely két egyenes metszi egymást, és e metsző egyeneseknek ismét metsző egyenesek felelnek meg. Ezért az $\alpha$ sík pontjainak és egyeneseinek megfelelő pontjai és egyenesei oly $\alpha'$ síkban vannak, mely az $\alpha$-t az $u$ és $v$-től harmónikusan választja el; az $\alpha\alpha'$ síkok metszővonala tehát mindkét tengelyt metszi. A tengelyek síkjai megfelelő síkjaikkal esnek egybe.

Ha e vonatkozást összehasonlítjuk a linearis kongruencziáról elmondottakkal, azt látjuk, hogy *az $(u, v)$ kéttengelyű involucziós rendszerben az egymáshoz rendelt (megfelelő) pontoknak összekötő egyenesei, és az egymáshoz rendelt síkoknak metszővonalai, mint önmaguknak megfelelő egyenesek, egy linearis kongruenczíát képeznek, melynek tengelyei az involucziós rendszer $u, v$ tengelyeivel esnek egybe.* Ezeket a megfelelő egybeeső egyeneseket, ha az involucziós rendszerről szólunk (Staudt szerint), a rendszer *vezetősugarainak* nevezzük.

Tételezzük fel másodszor, hogy a kéttengelyű involucziós-rendszer $u$, $v$ tengelyei a $H^{(2)}$ hyperboloidon levő $aa' . bb' \ldots$ involucziós sugárseregnek *képzetes* kettőssugarai, és szerkesszük meg az $A$ pontnak és az $\alpha$ síknak megfelelő $A'$ és $\alpha'$ pontját és síkját.

Az $A$ pontból az adott involucziós sereg az $A\,(aa' . bb' \ldots)$ involucziós síksorral (egy II. r. kúp involucziós érintősíkjaival) projicziáltatik; e síksornak involucziós-sugarán fekvő, és az $A$-hoz a $H^{(2)}$-re vonatkozólag kapcsolt pólus, az $A$-nak megfelelő pontja $A'$.

Hasonlókép: az $\alpha$ sík a sugársereget az $\alpha\,(aa' . bb' \ldots)$ involucziós kúpszeletben metszi; ennek involuczió-tengelyén keresztül menő és az $\alpha$-hoz a $H^{(2)}$-re vonatkozólag kapcsolt polárissík, az $\alpha$-nak megfelelő síkja $\alpha'$.

Ama $AA'$ involuczió-sugár, és emez $\alpha\alpha'$ involuczió-tengely,

sugara az $(u, v)$ kongruenciának, és az $AA'$ pontpár, valamint az $\alpha\alpha'$ síkpár harmónikusan választja el az $u$, $v$ tengelypárt.

Minden $p$ egyenesnek megfelel egy oly $p'$ egyenes, mely a $puv$ sugárseregben van és a $p$-t az $uv$-től harmónikusan választja el. Ha az $A$ pont a $p$ egyenesen egy pontsort ir le, akkor az $A'$ a $p'$ egyenesen egy vele projektiv pontsort fog leírni. A felvett $aa' . bb' \ldots$ sugárseregnek társsugarai megfelelő egyenesek az involucziós rendszerben.

A képzetes tengelyű involucziós rendszerben, $(u, v)$-ben, tehát nincsen oly valós pont és valós sík, mely megfelelőjével egybeesnék. Ellenben $\infty^2$ oly valós egyenes van, mely megfelelőjével egybeesik; ezek képezik az $(u, v)$ involucziós rendszer vezetősugarait, és az $(u, v)$ kongruenciának sugarait.

5. Láttuk, hogy a kéttengelyű involucziós rendszerben, $(u, v)$-ben, a megfelelő egyeneseken a megfelelő pontsorok projektivek; tehát egyszersmind oly megfelelő sugár- vagy síksorok, melyek azokat megfelelő pontokból, vagy egyenesekből projicziálják, szintén projektivek. Ezért minden kúpszeletnek, II. r. kúpnak, sugársereg-nek és ezek polárisrendszereinek: egy kúpszelet, II. r. kúp, sugársereg, valamint ezeknek poláris rendszerei felelnek meg.

Lehet azonban az $(u, v)$ involucziós rendszerben oly sugársereget is felvenni, hogy a sugarainak megfelelő sugarak maguk is a felvett sugárseregben legyenek. A sugárseregek megfelelő sugarai involucziót képeznek, és igy a rendszerben levő involucziós sugárseregekhez tartoznak.

E sugárseregek kétfélék lehetnek:

1. olyanok, melyeknek vezetőserege a rendszernek vezető-sugaraiból (az $(u, v)$ kongruenciának sugaraiból) áll;

2. olyanok, melyeknek vezetőserege is involucziós rendszert képez a rendszerben.

Ha 1) a $pp'$ egy oly megfelelő egyenespár az $(u, v)$ involucziós rendszerben, mely az egyik tengelyt sem metszi, és a $p$ egyenes $ABC \ldots$ pontjainak az $A'B'C' \ldots$ pontok felelnek meg a $p'$-ben, akkor az $uu . vv . pp' \ldots$ involucziós sugárseregnek társsugarai az $(u, v)$ rendszerben megfelelők, és annak vezetőserege mind oly $AA' \equiv a, BB' \equiv b, CC' \equiv c, \ldots$ sugarakból áll, melyek vezetősugarai az $(u, v)$ rendszernek. Az $(u, v)$ involucziós rendszerben $\infty$ ily involucziós sugársereg van, mint az $uu . vv . pp' \ldots$, melynek tehát támasztó serege vezetősugarakból áll.

Ha 2) a $pp'$ megfelelő egyenespáron az $ABCD$ és $A'B'C'D'$ pontnégyesek megfelelők, akkor az $AB' \equiv a$, $CD' \equiv c$ egyenesek-

nek az $(u, v)$ rendszerben az $A'B \equiv a'$, $C'D \equiv c'$ egyenesek felelnek meg; és mert

$$ABCD \wedge A'B'C'D' \wedge B'A'D'C',$$

azért az $AB'$, $CD'$, $BA'$, $DC'$ egyenesek hyperboloidikus fekvésűek. Minden $q$ egyenesnek, mely az $a, c, a', c'$ egyeneseket metszi, egy oly $q'$ egyenes felel meg az $(u, v)$ rendszerben, mely az $a', c', a, c$ egyeneseket, tehát az előbbieket metszi.

Az $(u, v)$ involucziós-rendszer $u$, $v$ tengelyei harmónikusan választják el a nyert és egymást támasztó sugárseregekben az $(u, v)$ rendszer megfelelő $pp', qq', \ldots$ egyeneseit és az $aa', cc', \ldots$ egyeneseit. Ezért az $u, v$ egy polárispárja az ezeket tartó $H^{(2)}$ hyperboloidnak, és a felírt megfelelő sugarak az egymást támasztó sugárseregekben *involucziós* sugárseregeknek társsugarai. —

Ha az $u$, $v$ tengelyek valósak, akkor azok valós vagy képzetes pontokban metszhetik a $H^{(2)}$ hyperboloidot; a $pp' . qq' \ldots$ és az $aa' . cc' \ldots$ involucziós sugárseregek ez esetben hyperbolikusak, illetve elliptikusak. Ha ellenben az $u$, $v$ tengelyek képzetesek, akkor ama egymást támasztó sugárseregek közül egyik hyperbolikus, a másik elliptikus, mert ha ez nem így volna, akkor a másik esetnek kellene beállani, t. i. hogy az $u$ és $v$ valós.

Számláljuk meg, hogy hány ily involucziós sugársereget, mint a $pp' . qq' \ldots$, melynek tehát támasztó serege $aa' . cc' \ldots$ is a rendszerhez tartozó involucziós sugársereg, lehet találni az $(u, v)$ involucziós rendszerben.

A $pp'$ egyenespárt metsző $a$ és $c$ egyenest, mely már az $a'$ és $c'$-t is meghatározza, $\infty^4$-szer vehetjük fel; ezzel az egymást támasztó $pp' . qq' \ldots$ és $aa' . cc' \ldots$ involucziós sugárseregek már meg vannak határozva. De a $pp'$-t a térben $\infty^4$-szer, a $pp' . qq' \ldots$ sugárseregben $\infty^1$-szer, az $a$ és $c$-t a támasztó $aa' . cc' \ldots$ sugárseregben $\infty^2$-szer vehetjük fel. Ezért az ily sugárseregek száma $\infty^{4-1} . \infty^{4-2} = \infty^5$.

Az $(u, v)$ involucziós rendszernek, mint a tárgyalásból látható volt, oly szerepe van az $(u, v)$ kongruenczia irányában, mint a nullarendszernek a tőle meghatározott linearis komplexus irányában, vagy pl. egy polárismezőnek a síkban, a vezető kúpszelete irányában. A kéttengelyű involucziós rendszer meghatározza a kongruenciát, mert ezt amannak vezetősugarai képezik, s viszont a kongruenczia is meghatározza a kéttengelyű involucziós rendszert.

Ugyanis egy $P$ pontnak megfelelő $P'$ pont az involucziós rendszerben: a $P$-n keresztül menő $g$ kongruenczia sugáron van, és harmónikusan választja el a $P$-t, a kongruenczia $u$, $v$ tengelyeitől.

6. Az eddigiekben a kéttengelyű involucziós rendszert, $(u, v)$-t, mindig a két valós vagy képzetes tengelyből, $u$ és $v$-ből, határoztuk meg. Lehet azonban más alakzatokból is kiindulni:

Két háromszög $ABC$, $A'B'C'$ csak úgy lehet egy kéttengelyű involucziós rendszerben egymásnak megfelelő alakzata, ha azoknak megfelelő oldalai, $\delta$ és $\delta'$ síkjuknak $d_1$ metszővonalát involuczióban metszik. E metszővonal $\delta\delta' \equiv d_1$, és ama háromszögek megfelelő szögpontjainak összekötő egyenesei $AA' \equiv a$, $BB' \equiv b$, $CC' \equiv c$, vezetősugarai az involucziós rendszernek. A $d_1$-en kimetszett involucziónak kettőspontjaiból az $a$, $b$, $c$-hez húzható $u$, $v$ valós vagy képzetes szelők tengelyei a rendszernek.

Ha a $d_1$-nek metszőpontját a $BC$, $CA$, $AB$, $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ egyenesekkel, rendre az $A'$, $B'$, $C'$, $A$, $B$, $C$ pontokkal összekötjük, úgy az első három összekötő egyenes egymást egy $D$ pontban, az utóbbi három pedig egymást a $D$-nek megfelelő $D'$ pontban metszi, és az $ABCD$, $A'B'C'D'$ tetraederek egymásnak megfelelők és Möbius-félék.

E szerkesztésből folyólag hány kéttengelyű involucziós rendszer (vagy linearis kongruenczia) lehetséges?

A tetszésszerinti $ABC$ háromszöghez az $A'$ pontot $\infty^3$-szor, a $B'$ pontot $\infty^3$-szor, az $A'B'$ egyenesen keresztül a síkot $\infty^1$-szer, és ebben végre a $C'$ pontot $\infty^1$-szer vehetjük fel úgy, hogy az $ABC$ $A'B'C'$ háromszögek oldalai síkjuknak metszővonalát involuczióban messék. E szerint a térben $\infty^8$ kéttengelyű involucziós rendszer és ugyanennyi linearis kongruenczia van.

Minden kéttengelyű involucziós rendszerben $\infty^9$ Möbius-féle tetraederpár van. Egy $ABC$ háromszög már meghatározza a megfelelő $A'B'C'$ háromszöget, és ezek együtt az $ABCD$, $A'B'C'D'$ Möbius-féle tetraedereknek $D$, $D'$ negyedik szögpontjait. Az $ABC$ háromszöget pedig $\infty^9$-szer vehetjük fel a térben.

A térben $\infty^8$ kéttengelyű involucziós rendszer és mindenikben $\infty^9$ Möbius-féle tetraederpár, összesen tehát $\infty^{17}$ Möbius-féle tetraederpár van.

A térben van $\infty^{12}$ tetraeder; mindenikhez tehát $\infty^5$ tetraeder található, mely azzal egy Möbius-féle tetraederpárt képez. Ez közvetlen is belátható: Ha az $ABCD$ tetraederhez az $A'B'C'D'$-t úgy akarjuk megszerkeszteni, hogy azok egy Möbius-féle tetraederpárt képezzenek, akkor a $D'$ csúcsot az $ABC$ lapban $\infty^2$-szer, az $A'B'C'$ lapot a $D$ csúcson keresztül $\infty^2$-szer, végre még egy csúcsot az $A'B'C'$ közül egy már meghatározott egyenesen $\infty^1$-szer vehetünk fel.

Lássuk még más úton, hogy $\infty^8$ kéttengelyű involucziós rendszer és ugyanannyi linearis kongruenczia lehetséges. Az $u$, $v$ tengelyek meghatározzák azokat. Ilyen valós tengelypárt $\infty^4 . \infty^4 = \infty^8$-szor lehet fölvenni. De II. fajú képzetes egyenespár sincs több, mint $\infty^8$. Mert három egyenes meghatároz egy sugársereget; a térben $\infty^{4\cdot3}$, a sugárseregben $\infty^{1\cdot3}$ sugárhármas, tehát a térben $\infty^9$ sugársereg van. Minden sugárseregben $\infty^2$ involucziót létesíthető; van tehát ebben $\infty^2$ II. fajú képzetes egyenespár, és összesen $\infty^{9+2} = \infty^{11}$. De minden valós vagy II. fajú képzetes egyenespáron $\infty^3$ sugársereg fektethető keresztül, azért $\infty^8$ különböző valós vagy II. fajú képzetes egyenespár van.

7. Legyen $aa'bb'$ négy egyenes, melyek közül kettő-kettő nem metszi egymást; vizsgáljuk meg, hogy lehet-e ezekkel oly kéttengelyű involucziós rendszert meghatározni, melyben az $a$ és $b$-nek az $a'$ és $b'$ egyenesek felelnek meg?

Ha van oly egyenespár $uv$, mely úgy az $aa'$, mint a $bb'$ egyenespárt harmónikusan választja el, akkor ez már a keresett involucziós rendszernek két tengelye.

Az $aa'bb'$ egyenesek pedig vagy hyperboloidikus, vagy általános fekvésűek lehetnek.

1. *Ha az $aa'bb'$ egyenesek hyperboloidikus fekvésűek*, tehát egy $H^{(2)}$ hyperboloidon levő sugárseregben vannak, akkor az $aa' . bb' \ldots$ involucziós sugárseregnek valós vagy képzetes kettőssugarai $uv$, már az $aa'$, $bb'$ egyenespárokat harmónikusan választják el. De e kettőssugarakon kívül még $\infty^2$ oly egyenespár van, mely az $aa'$, $bb'$ egyenespárt harmónikusan választja el, és mindezek az $(u, v)$ kongruenczianak sugarai. Mert egy $\pi$ sík ama sugársereget egy involucziós kúpszeletben metszi, melynek a $p$ involuczió-tengelye, és annak a $H^{(2)}$-re vonatkozó $q$ polárisa szintén harmónikusan választja el az $aa' . bb' \ldots$ sugársereg társsugarait; ezek a $pq$ polárispárok pedig az $(u, v)$ kongruenczihoz tartoznak. Az $aa' . bb' \ldots$ sugársereg támasztó seregének minden sugarában, pl. a $h$-ban, egy ily sugárpár, mint a $pq$, egyesül; és tényleg mindazok a pontok, melyek a $h$-nak pontjait az $aa'$, vagy a $bb'$ egyenespártól harmónikusan választják el, magán a $h$ egyenesen vannak.

Ha tehát az $aa'$, $bb'$ egyenespárok hyperboloidikus fekvésűek, akkor azok, mint megfelelő egyenesek, *nem egy, hanem* $\infty^2$ kéttengelyű involucziós rendszert határoznak meg, azaz a kéttengelyű involucziós rendszer meghatározására nem alkalmasak.

Tételezzük fel 2-szor, hogy *az $aa'bb'$ egyenesek nem hyperboloidikus fekvésűek*, tehát azoknak csak két valós, vagy képzetes $mn$ szelőjük van.

*Ha a) az aa'bb' egyeneseknek mn szelői valósak*, és ezek az *aa'bb'* egyeneseket az $AA'BB'$, $A_1A'_1B_1B'_1$ pontokban metszik, és ha az $UV$ pontpár az $AA'$, $BB'$ pontpárokat, az $U_1V_1$ pontpár pedig az $A_1A'_1$, $B_1B'_1$ pontpárokat harmónikusan választja el, akkor az $UV$ és $U_1V_1$ pontpárok vagy valósak, vagy képzetesek, vagy végre az egyik pontpár valós, a másik képzetes.

Az első esetben az $UVU_1V_1$ tetraedernek $UU_1$, $VV_1$ és $UV_1$, $U_1V$ szemben fekvő valós élpárjai harmónikusan választják el az *aa'*, *bb'* egyenespárt, tehát oly kéttengelyű involucziós rendszer valós tengelyeinek vehetők, melyben az *aa'* és a *bb'* egyenespárok megfelelők.

A második esetben az $UVU_1V_1$ tetraedernek $UU_1$, $VV_1$ és $UV_1$, $U_1V$ szemben fekvő képzetes élpárjai, melyek szintén harmónikusan választják el az *aa'* és *bb'* egyenespárokat, oly kéttengelyű involucziós rendszernek II. fajú képzetes tengelyei, melyben az *aa'* és a *bb'* egyenespárok szintén megfelelők.

A harmadik esetben az $UVU_1V_1$ tetraedernek $UU_1$, $VV_1$ és $UV_1$, $U_1V$ szemben fekvő képzetes élpárjai szintén harmónikusan választják el az *aa'* és *bb'* egyenespárokat, de azok nem II. fajú, hanem I. fajú képzetes egyenesek, mert az $UV$, vagy $U_1V_1$ pontjaik valósak, és így nem lehetnek olyan involucziós rendszernek tengelyei, melyeket az előbbiekben tárgyaltunk.

Az első és második esetben az $UV$, $U_1V_1$ és $UV_1$, $U_1V$ tengelypárokon kívül más tengelypár nincsen, mely az *aa'* és *bb'*-t harmónikusan választaná el, mert különben az *aa'bb'* egyeneseknek hyperboloidikus fekvésűeknek kellene lenni.

*Ha b) az aa'bb' egyeneseknek mn szelői képzetesek*, akkor mindig van egy oly egyenespár *uv*, mely az *aa'*, *bb'* egyenespárokat harmónikusan választja el, s mely tehát a keresett involucziós rendszernek két tengelye.

E tengelyeknek meghatározását Staudt (Beiträge z. G. d. L. 112. pont) a következő tételre alapítja:

*Az aa'b és az aa'b' sugarakon keresztül menő sugárseregek elsejében van egy oly c sugár, a másodikában pedig egy oly c' sugár, hogy*

$$aa'bc \wedge a'ab'c',$$

*és a mellett a bc, b'c' sugárpárok egymástól el vannak választva a rajtuk keresztül menő sugárseregben.*

E *cc'* sugarak pedig következőképen szerkeszthetők:

A *b'* sugárnak egy tetszésszerinti $\xi$ síkja az első sugársereg tartóját a $k^{(2)}$ kúpszeletben, az *aa'b* sugarakat az $AA'B$ pontokban

metszi. A $b'$ egyenesnek a $k^{(2)}$ kúpszelettel a föltétel szerint nincsen közös pontja, tehát az $(AA', b') \equiv B'$ pontból a $k^{(2)}$ -hez két valós érintő vezethető, és ezek egyikének $C$ érintőpontját a $k^{(2)}$ -vel, az $AA'B'$, $b'$ egyenesek a $B$ ponttól elválasztják. Az első sugárseregnek e $C$ ponton keresztül menő $c$ sugara, és a második sugárseregnek az $(AA', BC) \equiv C'$ ponton keresztül menő $c'$ sugara eleget tesz a tételben kifejezett követelményeknek.

Ugyanis az $aa', bc$ egyenespárok, mint polárispárok, meghatároznak egy sugárkomplexust; ebben a $b'$ sugárnak polárissugara az $aa'b'$ sugárseregben az a sugár, mely a $\xi$ síknak $C'$ nullapontján megy keresztül, tehát a $c'$.

Minthogy

$$aa'bc \barwedge AA'BC \barwedge AA'C'B' \barwedge aa'c'b' \barwedge a'ab'c',$$

az első követelmény ki van elégítve; és mert a $BC$ pontpár a $b'$ sugár és a $C'$ ponttól el van választva, azért a $bc$ és $b'c'$ sugárpárok is a rajtuk keresztül menő sugárseregben szintén el vannak választva, tehát ki van elégítve a tételnek második követelménye is.

Ezek után *következőkép határozzuk meg azt az uv egyenespárt, mely az aa', bb' egyenespárokat, amelyeknek nincsenek valós szelői, harmónikusan választja el.* Fölkeressük az $aa'b$ és az $aa'b'$ sugarakon keresztül menő sugárseregekben azokat a $c$ és $c'$ sugarakat, melyek az

$$aa'bc \barwedge a'ab'c'$$

vonatkozást kielégítik; a $bb'.cc'$... involucziós sugárseregnek mindig valós kettőssugárpárja már a keresett $uv$ egyenespár.

Ugyanis az $a$ egyenes tetszésszerinti $A$ pontjából a $bc$ és a $b'c'$ egyenespárokhoz vezetett $fg$ szelők, az $a'$ egyenest metszik, tehát az $a'$-sel együtt egy $\pi$ síkban vannak, mert az $a'$ az $abc$..., illetve az $ab'c'$... sugársereghez tartozik és $f$ az első, $g$ pedig a második sugárseregnek a felírt három sugarát metszi.

Minthogy a föltétel szerint

$$aa'bc \barwedge a'ab'c'$$

tehát

$$f(aa'bc) \barwedge g(a'ab'c') \barwedge g(aa'c'b'),$$

az $f(aa'bc)$ és $g(aa'c'b')$ pontnégyesek perspektivek, az $(fb)(gc')$ és az $(fc)(gb')$ egyenesek egymást az $(fa')(ga') \equiv a'$ egyenesnek egy $A'$ pontjában metszik.

Az $AA'$ pontpár tehát az $(fb)(gb')(fc)(gc')$ négyszög folytán kapcsolt póluspár a $bb'cc'$... sugársereget tartó hyperboloidra vonat-

kozólag, miért is az $AA'$ pontpár harmónikusan van elválasztva attól az $UV$ pontpártól, melyben az $AA'$ egyenes a hyperboloidot metszi, és ez az $UV$ pontpár az $uv$ egyenespáron van.

Tekintve, hogy az $A$ az $a$ egyenesnek tetszésszerinti pontja: az $aa'$ egyenespár harmónikusan van elválasztva az $uv$ egyenespártól; az $uv$ egyenespár tehát a két tengelye annak az involucziós rendszernek, melyben az $aa'$ és $bb'$ egyenespárok megfelelők.

8. A kéttengelyű involucziós rendszer és vezetősugarainak kongruenczíája meg van határozva, ha ismeretes négy vezetősugara, azaz a linearis kongruenczíának négy sugara, mely általános és nem hyperboloidikus helyzetű.

Ha az adott $gg_1g_2g_3$ sugaraknak van két valós szelőjük $u$ és $v$, akkor azok az involucziós rendszernek és a linearis kongruenczíának tengelyei. De ha az adott sugaraknak szelői képzetesek, akkor a $g$-n keresztül egy síkot fektetünk, mely a $g_1g_2g_3$ szelőiből álló sugársereget egy $k^{(2)}$ kúpszeletben metszi. A $k^{(2)}$-n meghatározzuk azt az elliptikus involucziós pontsort, melynek involucziós tengelye a $g$; annak társpontjain keresztül menő és a $g_1g_2g_3\ldots$ sereg támasztó seregéhez tartozó sugarak oly involucziós sugársereget képeznek a rendszerben, melynek $u$, $v$ kettőssugarai, a keresett involucziós rendszernek tengelyei s melyek a $gg_1g_2g_3$ sugaraknak képzetes szelői. Minden ponton keresztül és minden síkban lehet ezek után, mint az előbbiekből ismeretes, vezetősugarat (kongruenczia-sugarat) húzni.

*A linearis kongruenczíát négy sugárból, $gg_1g_2g_3$-ból, akkép is szerkeszthetjük,* hogy azt két linearis komplexus metszésének tekintjük és ezekre a *Sylvester*-féle képzést (16. §. 8.) alkalmazzuk. Mert:

*Minden linearis komplexus, mely egy linearis kongruenczíának négy sugarán megy keresztül, magában foglalja annak összes sugarait.*

Ugyanis a linearis kongruenczíát a $gg_1g_2g_3$ sugarakból, melyek nincsenek ugyanegy sugárseregben, akkép képzelhetjük származtatva, hogy a $gg_1g_2$ sugárseregnek egy szilárd sugarán, pl. a $g$-n, és egy változó sugarán, pl. a $g_i$-n, valamint a negyedik adott sugáron, $g_3$-on, keresztül $gg_3g_i$ sugárseregeket fektetünk keresztül. E $\infty^1$ sugárseregnek $\infty^2$ számú sugara képezi a kívánt linearis kongruenczíát. De minden linearis komplexus, mely a $gg_1g_2g_3$ sugarakon megy keresztül, magában foglalja a $gg_1g_2$ sugárseregnek minden $g_i$ sugarát és a $gg_3g_i$ sugárseregeknek is minden sugarát, azaz a $gg_1g_2g_3$ sugarakon keresztül menő linearis kongruenczíának minden sugarát.

Ha ezután a $gg_1g_2g_3$ sugarakkal adott linearis kongruenciát két linearis komplexus metszésének tekintjük, melyeket a Sylvester-féle képzés szerint szerkesztünk: a $g_1g_2g_3$ sugarakat metszéshez hozzuk a $g$-n keresztül menő $\alpha$ és $\beta$ síkkal az $A_1A_2A_3$ és a $B_1B_2B_3$ pontokban és az $A_iA_j$, $B_iB_j$ egyeneseknek metszőpontjait a $g$-vel, $X_{ij}$, $Y_{ij}$-vel jelöljük.

Ha az $X_1Y_1X_2Y_2$ pontok akkép vannak meghatározva, hogy

$$X_{12}X_{13}X_{23}X_1X_2 \wedge Y_{12}Y_{13}Y_{23}Y_1Y_2,$$

úgy azok az egyenesek, melyek az $X_1(A_1A_2A_3\ldots)$, $Y_1(B_1B_2B_3\ldots)$ projektiv sugársorok megfelelő sugarait metszik egy $\Gamma_1$ linearis komplexust képeznek és azok az egyenesek, melyek az $X_2(A_1A_2A_3\ldots)$ $Y_2(B_1B_2B_3\ldots)$ projektiv sugársorok megfelelő sugarait metszik, egy másik linearis komplexust, $\Gamma_2$-őt, képeznek. Mindkét komplexus a $gg_1g_2g_3$ sugarakon megy keresztül, tehát közös sugarai a keresett linearis kongruenciához tartoznak. E kongruenciának új $g_i$ sugarait pedig ekkép szerkeszthetjük:

Ha az $A_i$ az $\alpha$ síknak tetszésszerinti pontja, akkor az $X_1A_i$, $X_2A_i$ sugaraknak az $X_1(A_1A_2A_3\ldots)$, $X_2(A_1A_2A_3\ldots)$ sorokban megfelel két sugár az ezekkel projektiv $Y_1(B_1B_2B_3\ldots)$, $Y_2(B_1B_2B_3\ldots)$ sorokban, melyek egymást egy $B_i$ pontban metszik; és az $A_iB_i \equiv g_i$ egyenes már egy sugara az adott kongruenciának. Ebből látható, hogy az $A_i$ pont változtatásával az $\alpha$ síkban, megkapjuk a kongruenciának összes ($\infty^2$) sugarait. — A kongruenciának e meghatározását négy sugarából *Sylvester-féle képzésnek* nevezhetjük.

Ha azonban a kongruenciának egy adott $\gamma$ síkban fekvő sugarát akarjuk a Sylvester-féle képzés alapján szerkeszteni, akkor az $X_1$ és $Y_2$ pontot a $\gamma$ sík és a $g$ sugár $\gamma g$ metszőpontjában vesszük fel és meghatározzuk az $X_2$ és $Y_1$ pontokat az előbbi

$$X_{12}X_{13}X_{23}X_1X_2 \wedge Y_{12}Y_{13}Y_{23}Y_1Y_2$$

viszonylatokból. A $\gamma\alpha$, $\gamma\beta$ sugarak az $X_1(A_1A_2A_3\ldots)$, $Y_2(B_1B_2B_3\ldots)$ sugársorokhoz tartoznak, melyeknek a projektivitás folytán megfelel az $Y_1(B_1B_2B_3\ldots)$ sorban egy sugár, illetve az $X_2(A_1A_2A_3\ldots)$ sorban egy másik sugár. E két sugár a $\gamma$ síkot az ebben fekvő kongruenczia-sugáron metszi.

A Sylvester-féle képzésnek dualis képzése ez volna:

A $g$-nek két pontjából, pl. az $A$ és $B$-ből, a $g_1g_2g_3$ sugarakat az $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$, $\beta_1\beta_2\beta_3$ háromél lapjaival, úgyszintén ezeknek $\alpha_i\alpha_j$, $\beta_i\beta_j$ éleit a $g$-ből a $\xi_{ij}$, $\eta_{ij}$ síkokkal projicziáljuk. A $C$ ponton kereszt-

tül menő kongruenczia-sugarat most akkép szerkeszthetjük, hogy a $Cg \equiv \xi_1 \equiv \eta_2$ síkhoz meghatározzuk a $\xi_2$, $\eta_1$ síkokat úgy, hogy

$$\xi_{12}\xi_{13}\xi_{23}\eta_1\xi_2 \wedge \eta_{12}\eta_{13}\eta_{23}\eta_1\eta_2.$$

Az $AC$, $BC$ sugarak a $\xi_1(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots)$, $\eta_2(\beta_1\beta_2\beta_3\ldots)$ sugársorokhoz tartoznak, melyeknek a projektivitás folytán az $\eta_1(\beta_1\beta_2\beta_3\ldots)$, illetve a $\xi_2(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots)$ sugársorokban egy-egy sugár felel meg. A $C$ pontból e két sugárhoz húzható szelő, már a kongruenczához tartozik.

9. A Sylvester-féle képzésből folyólag *könnyen megállapítható, hogy öt sugár $gg_1g_2g_3g_4$ ugyanegy kongruenczához tartozik-e vagy nem.* A $g$-n keresztül menő két sík $\alpha$ és $\beta$ a $g_1g_2g_3g_4$ sugarakat az $A_1A_2A_3A_4$, $B_1B_2B_3B_4$ pontokban, a $g$ az $A_iA_j$, $B_iB_j$ egyeneseket az $X_{ij}$, $Y_{ij}$ pontokban metszi. Ha az $X_1$, $X_2$ két tetszésszerinti pontja a $g$-nek és az $Y_1$, $Y_2$ pontok akkép vannak szerkesztve, hogy $X_{12}X_{13}X_{23}X_1X_2 \wedge Y_{12}Y_{13}Y_{23}Y_1Y_2$ és ha ekkor az $X_1(A_1A_2A_3A_4) \wedge Y_1(B_1B_2B_3B_4)$, úgyszintén $X_2(A_1A_2A_3A_4) \wedge Y_2(B_1B_2B_3B_4)$, úgy az öt adott sugár ugyanegy kongruenczához tartozik, különben nem. A szerkesztések, melyeket a Sylvester-féle képzésnél és ennél alkalmaztunk, mindvégig *linearisok.*

Már az előbbiekből is lehetett egy más kriteriumot találni arra nézve, hogy öt sugár, $gg_1g_2g_3g_4$, egy linearis kongruenczához tartozik-e vagy nem. Ugyanis az imént láttuk, hogy a linearis kongruenczának sugarai azokban a $gg_3g_i$ sugárseregekben vannak, melyek a $g_3$-mon, továbbá a $gg_1g_2$ sugárseregnek egy tetszésszerinti $g$ szilárd és egy változó $g_i$ sugarán mennek keresztül; tehát a $g_4$ sugárnak is a $gg_3g_i$ sugárseregek egyikében kell lenni. Ezért: ha a $gg_1g_2g_3g_4$ sugarak egy linearis kongruenczához tartoznak: a $gg_3g_4$ és a $gg_1g_2$ sugarakon keresztül menő sugárseregeknek a $g$-n kívül egy $g_i$ közös sugaruk van. Vagy általánosabban kifejezve: *Ha öt sugár egy linearis kongruenczához tartozik, akkor ama öt sugár közül hármon, továbbá ezeknek egyikén és a hátralevő két sugáron keresztül menő sugárseregeknek a közös sugáron kívül van még egy közös sugaruk.* (*Sturm.*)

## 19 §. A linearis komplexussor.

1. A linearis kongruenczián $\infty^1$ linearis komplexus megy keresztül; a kongruenczián kívül levő minden sugár és a kongruenczának négy általános helyzetű sugara, meghatároz egy ily komplexust.

A térben a linearis kongruenciának sugarain kivül még $\infty^4$ sugár van; ezek megoszlanak $\infty^1$ linearis komplexus között, mert ezekben $\infty^3$ sugár van. E $\infty^1$ linearis komplexus egy *komplexussort*, azoknak nullarendszerei pedig egy *nullarendszersort* képeznek. A linearis konruenczia pedig, melyen a komplexusok keresztül mennek, a sor *alapkongruenciája.*

Minden $\pi$ síknak, $X$ pontnak, vagy $p$ sugárnak e $\infty^1$ nullarendszerben, $\mathfrak{N}_i$-ben, van $\infty^1$ számú nullapontja $P_i$, nullasíkja $\zeta_i$, illetve polárisa $p_i$. A $\pi$ síknak $P_i$ nullapontjai e nullarendszersorban, az alapkongruenciának a $\pi$ síkban fekvő $g_i$ sugarán vannak; és az $X$ pontnak $\zeta_i$ nullasíkjai, az $X$-ből az alapkongruenciához vezethető sugáron mennek keresztül; végre a $p$ sugárnak $p_i$ polárisai egy sugársereget képeznek, melynek vezetőserege az alapkongruenciának a $p$ t metsző sugaraiból áll.

A sor egyik nullarendszerében a $p$ egybeesik polárisával, $p_i$-vel, azaz annak vezetősugara, tehát a komplexussor egy komplexusának sugara. Minden sugár a $p_i$ sugárseregben olyan, hogy polárisai a nullarendszersorban, ugyancsak a $p_i$ sugárseregben vannak. És e sugárseregnek minden sugara egy-egy komplexushoz tartozik a komplexussorban. Ha tehát egy linearis kongruenciában oly sugársereget veszünk fel, melynek három, tehát valamennyi sugara a kongruenciához tartozik és a kongruencián, valamint a felvett sugársereget támasztó sugárseregnek egyes sugarain keresztül komplexusokat fektetünk, megkapjuk a felvett kongruencián keresztül menő linearis komplexussort.

2. Fektessük a $p$ egyenesen keresztül az $\alpha,\beta,\gamma,\ldots$ síkokat. Ezeknek nullapontjai egy nullarendszersorban egyrészt a $p$-nek polárisain, tehát a $p_i$ sugársereg sugarain, másrészt az alapkongruenciának az $\alpha,\beta,\gamma,\ldots$ síkokban fekvő sugarain, tehát amannak vezetőseregéhez tartozó sugarain vannak. Ebből látható, hogy:

a nullarendszersorban a $p$ egyenes síkjainak nullapontjai projektiv pontsorokat képeznek; ezeknek tartói egy sugárseregben vannak, mely a nullarendszersor alapkongruenciájának a $p$ síkjaiban fekvő sugaraiból áll, míg e sugársereg vezetőseregének sugarai, a $p$-nek polárisai a nullarendszersorban.

pontjainak nullasíkjai projektiv síksorokat képeznek; ezeknek tengelyei egy sugárseregben vannak, mely a nullarendszersor alapkongruenciájának a $p$ pontjain keresztül menő sugaraiból áll, míg a sugársereg vezetőseregének sugarai, a $p$-nek polárisai a nullarendszersorban.

Minthogy a $p$ tetszésszerinti egyenes, tehát annak az $\alpha$ és $\beta$ síkja, valamint az $A$ és $B$ pontja is tetszésszerinti, mondhatjuk:

*A nullarendszersorban bármily két síknak nullapontjai és bármily két pontnak nullasíkjai a sor nullarendszereire vonatkozólag, projektiv sorokat képeznek.*

E tételt ugyancsak oly síkokra és pontokra mutattuk ki, melyeknek metszővonalai, illetve összekötő egyenesei nem tartoznak a sor alapkongruenciájához. De ha az $\alpha$ és $\beta$ sík a sor alapkongruenciájának egy $g$ sugarában metszi egymást és a $\gamma$ sík nem megy keresztül a $g$-n, akkor a $\gamma$ síknak nullapontjai projektivek az $\alpha$ és $\beta$ síkok nullapontjainak sorával és így az alapkongruenczia egy $g$ sugarán keresztül menő $\alpha$, $\beta$ síkok nullapontjainak sora is projektiv egymással. —

*Két egyenesnek polárisai a nullarendszersorban projektiv sugárseregeket képeznek.*

Ugyanis a $p$ és $q$ egyenesnek $p_i$ és $q_i$ polárisai egy-egy sugárseregben vannak. Minthogy a $p$ egyenes egy $\alpha$ síkjának és a $q$ egyenes egy $\beta$ síkjának nullapontjai projektivek és a $p$ és $q$-nak ugyanegy nullarendszerhez tartozó $p_i$ és $q_i$ polárisa az $\alpha$ és $\beta$ síknak e rendszerben levő nullapontjain mennek keresztül, azért a $p_i$ és $q_i$ sugarak serege is projektiv. — A tétel és bizonyítása még akkor is érvényes marad, ha a $q$ egyenes a $p$ polárisainak sugárseregében van.

A nullarendszersort és a komplexussort projektiv vonatkoztathatjuk minden más sorra, pl. a $P_i$ pontsorra, ha egy $\alpha$ síknak $A_i$ nullapontjait vagy egy $p$ egyenesnek $p_i$ polárisait a nullarendszersorban, projektiv vonatkoztatjuk az adott $P_i$ pontsorra. Minden $P_i$ pontnak e sorban, projektiv megfelel egy $A_i$ pont az $\alpha$ sík nullapontjai sorában, illetve egy $p_i$ sugár, a $p$ sugár $p_i$ polárisainak seregében, — és az a nullarendszer $\mathbf{N}_i$ (illetve komplexus $\Gamma_i$), a melyre vonatkozólag az $\alpha$-nak nullapontja az $A_i$, illetve a $p$-nek polárisa a $p_i$, megfelel a $P_i$ pontnak.

Tételezzük fel azt az esetet, hogy a $p$ és $q$-nak $p_i$ és $q_i$ polárisai a $p$ és $q$-val együtt ugyanegy sugárseregben vannak, tehát abban két projektiv sort képeznek. E soroknak valós vagy képzetes kettőssugarai oly tulajdonságúak, hogy az egyik is és a másik is a $p$ és $q$ egyenesnek polárisa ugyanegy nullarendszerben vagy komplexusban. E két kettőssugár *a komplexussorban levő két valós vagy képzetes elkorcsosult komplexusnak főtengelye* (17. §. 6. p.). E két komplexus is keresztül megy az alapkongruencián, tehát azoknak két főtengelye az alapkongruenciának két tengelye $u$ és $v$. És a szerint, amint komplexussor alapkongruenciájának tengelyei valósak vagy képze-

tesek, a komplexussornak e két különös komplexusa szintén valós vagy képzetes. Ezek az $uv$ tengelyek pedig benne vannak mindazokban a sugárseregekben, melyet egy a térben változó $p$ egyenesnek polárisai képeznek és azonkívül az $uv$ egy polárispár, a komplexussor minden komplexusára vonatkozólag. Mert pl. az $u$ egyenes metszi az alapkongruenciának minden sugarát, tehát az $u$-nak polárisa a komplexussor bármelyik komplexusára szintén metszi a kongruenciának minden sugarát. De az $u$-n kivül még csak a $v$ metszi az alapkongruenciának minden sugarát és ezért az $u$-nak polárisa a sor bármelyik komplexusára vonatkozólag a $v$.

3. Vegyünk fel két komplexust, $\Gamma_1$ és $\Gamma_2$-őt, a $[\Gamma_i]$ sorban, és két sugarat, $p$ és $q$-t, a sor $(u, v)$ alapkongruenciájának $u, v$ tengelyein keresztül menő sugárseregben.

A $p$ és $q$-nak $p_1$, $p_2$ és $q_1$, $q_2$ polárisai a $\Gamma_1$ és $\Gamma_2$-re vonatkozólag az $uvpq$ sugárseregben vannak, és a mellett $uvp_1p_2 \wedge uvq_1q_2$. A két komplexusnak, $\Gamma_1$ és $\Gamma_2$-nek, változásával a $\Gamma_i$ sorban, változnak a $p$ és $q$-nak $p_1p_2$ és $q_1q_2$ polárisai is, de ezek az $u$ és $v$-vel mindig projektiv sugárnégyeseket képeznek az $uvpq$ seregben. Ha e sugárnégyesek harmónikusak, azaz a $p_1$, $p_2$ harmónikusan választja el az $u$-t a $v$-től, akkor a $q_1$, $q_2$ is azt teszi, és akkor azt mondjuk, hogy az a két komplexus, $\Gamma_1$ és $\Gamma_2$, a melyre vonatkozólag a $p$-nek polárisai $p_1$ és $p_2$, tehát egyszersmind a $q$-nak is polárisai $q_1$ és $q_2$, — *harmónikusan választja el a sor két különös komplexusát*: egymás irányában *egymást támasztó komplexusok* a sorban. És mert mindazok a $p_1p_2$ sugárpárok az $uvp$ sugárseregben, melyek a valós vagy képzetes $u$, $v$-t harmónikusan elválasztják, involucziót képeznek, azért a *komplexussor összes egymást támasztó komplexusairól azt mondjuk, hogy azok involucziót képeznek a sorban.* —

*Két egymást támasztó komplexusnak nevezetes tulajdonsága, hogy az egyik komplexus bármelyik sugarának polárisa a másikra vonatkozólag amannak szintén sugara.*

Hogy ezt belássuk, legyen $\Gamma$, $\Gamma'$ két egymást támasztó komplexus a $(\Gamma\Gamma')$ sorban, és legyenek e sor alapkongruenciájának tengelyei $u$ és $v$.

A $\Gamma$ egy tetszésszerinti $p$ sugarának polárisa $p'$, a $\Gamma'$-re vonatkozólag harmónikusan választja el az $u$, $v$ tengelyeket az $uvpp'$ sugárseregben, mert a $p$-nek polárisai a $\Gamma$ és $\Gamma'$-re vonatkozólag a $p$ illetve a $p'$. Az $uvpp'$ sugársereg vezetőseregének sugarai az alapkongruenciához, tehát a $\Gamma$-hoz is tartoznak; az $uv$ pedig egy polárispár a $\Gamma$-ban. Tehát a $p'$ sugár, mely az $uv$ polárispárt a $p$-től harmónikusan választja el, szintén sugara a $\Gamma$-nak. — A szerint a

mint az $uv$ tengelyek valósak vagy képzetesek: a $\Gamma'$ komplexusnak az $uvpp'$ sugárseregben két képzetes vagy két valós sugara van.

*Két egymást támasztó linearis komplexusnak tehát egy közös polárispárja van, és bármelyiknek egy polárispárja, mely amazt harmónikusan elválasztja, két komplexussugár a másikban.* —

*Minden linearis komplexus* $\infty^4$ *linearis komplexusnak támasztója.*

Ugyanis ha a $\Gamma$ linearis komplexusnak a $p$ egy sugara, az $uv$ pedig egy polárispárja, akkor a $\Gamma$-nak van egy $q$ sugara, mely az $uv$-t a $p$-től harmónikusan választja el. Az a $\Gamma'$ komplexus pedig, melynek az $uv$ és $pq$ két polárispárja, már támasztója a $\Gamma$-nak.

Ha most a $\Gamma$-ban a $p$ sugarat megtartjuk, az $uv$ polárispárt pedig változtatjuk, tehát az $uv$-t $\infty^4$ helyzetben vesszük fel, úgy megkapjuk mindazokat a $\Gamma'$ komplexusokat, melyek a $\Gamma$-t támasztják.

*Minden linearis komplexussornak,* $[\Gamma_i]$*-nek, egy vagy valamennyi eleme, a soron kivül álló* $\Gamma$ *komplexusnak támasztója.*

Ugyanis ha a $[\Gamma_i]$ sor alapkongruenciájának tengelyei $u$ és $v$, és ezeknek polárisai a $\Gamma$-ban $u'$ és $v'$, akkor az $uvu'v'$ sugársereg vezetőseregének sugarai, a $\Gamma$-nak és a sor $\Gamma_i$ komplexusainak sugarai. Azok a sugárpárok pedig az $uvu'v'$ sugárseregben, melyek az $uv$-t harmónikusan választják el, a $[\Gamma_i]$ sor egyes komplexusainak sugarai.

Az $uu' . vv' \ldots$ involucziós sugárseregnek minden társsugárpárja polárispár a $\Gamma$-ban. Ezek között van egy pár $pp'$, mely az $uv$ sugarakat harmónikusan választja el. A $pp'$ pedig két sugara annak a $\Gamma$ komplexusnak a sorban, mely a $\Gamma$-ra támaszkodik. Ha azonban az $uv$ sugarak maguk is sugarai a $\Gamma$-nak, tehát $u \equiv u'$, $v \equiv v'$, akkor a $[\Gamma_i]$ sorban minden komplexus támasztója a $\Gamma$-nak.

Minthogy egy $\Gamma$ komplexus akkor támasztója egy komplexussor minden komplexusának, ha keresztül megy a sor alapkongruenciájának $(u, v)$-nek tengelyein, a $\Gamma$ meghatározásához pedig az $u$ $v$ sugarakon kivül még három sugár vehető fel tetszésszerint, végre minthogy három sugár a térben $\infty^{4 \cdot 3}$-szor, a linearis komplexusban pedig $\infty^{3 \cdot 3}$-szor választható ki: azért $\infty^{4.3-3.3} \equiv \infty^3$ linearis komplexus van, mely a linearis komplexussornak minden elemét támasztja.

4. Ezek után *a* $[\Gamma_i]$ *linearis komplexussorban előforduló komplexusok főtengelyeinek geometriai helyét akarjuk megvizsgálni.*

Legyenek a $[\Gamma_i]$ sor alapkongruenciájának tengelyei $u$ és $v$; ezeknek merőleges szelője — *az alapkongruenciának fősugara* — legyen a $g$ egyenes.

Az $uv$ egy polárispárja a sor minden komplexusának; ezért a $g$ fősugárnak és az $(u, v)$ alapkongruenczia egy $g_i$ sugarának m e r ő l e g e s szelője $a_i$, már főtengelye a $[\Gamma_i]$ sor egy komplexusának $\Gamma_i$-nek (17. §. 1.). Bár a $g_i$-nek $\infty^2$ helyzetet adhatunk a kongruenczában, azért a $\Gamma_i$ komplexusok $a_i$ főtengelyeinek száma nem lesz $\infty^2$, hanem csak $\infty^1$ t. i. annyi, a hány komplexus van a sorban; mert minden főtengely, a kongruenczának $\infty^1$ $g_i$ sugarára merőleges. Ezek a $g_i$ sugarak egy egyenoldalú hyperbolikus paraboloidot képeznek, melynek csúcsalkotói a $g$ fősugár és az $a_i$ főtengely.

Minthogy az $a_i$ főtengelyek merőleges szelői az $uv$ egyenesek egyes szelőinek és az $uv$ egyenesek merőleges szelőjének, $g$-nek, azért az $a_i$ főtengelyek egy Plücker-féle konoidának alkotói (15. §. 4.). A $g$ fősugár kettős vezérlővonala, az $uv$ egyenesek pedig szintén alkotói e konoidának. Tehát:

*A linearis komplexussor komplexusainak főtengelyei egy Plücker-féle konoidának alkotói; a sor alapkongruenciájának fősugara, kettős vezérlővonala, az alapkongruenciának tengelyei pedig egyszerű alkotói a konoidának.**)

Ha az $uv$ tengelyek képzetesek, tehát egy elliptikus involucziós sugárseregnek kettőssugarai, akkor az $(u, v)$ kongruenczának fősugarát, $g$-t, és az $(u, v)$ kongruenczián keresztül menő $\Gamma_i$ komplexusoknak $a_i$ főtengelyeit, a következőképen szerkeszthetjük:

Fölkeressük az $(u, v)$ egyenespárnak végtelen távol fekvő szelőjét. E végből az adott involucziós sugárseregnek három társsugárpárjához párhuzamosakat vezetünk egy $O$ ponton keresztül; ezek egy $O^{(2)}$ involucziós kúpnak alkotói, melynek involucziós síkja $\varrho$, az $uv$ II. fajú képzetes egyenespárt már ezeknek végtelen távol fekvő szelőjében metszi. Ez a $\varrho$ sík és egy reá merőleges $\xi_i$ sík vezérlő síkja az $uv$ egyenespáron keresztül menő $P_i^{(2)}$ egyenoldalú hyperbolikus paraboloidnak. A $\xi_i$-vel párhuzamos síkokban fekvő kongruenczia-sugarak, melyek az adott elliptikus involucziós sugársereg segélyével szerkeszthetők, a $P_i^{(2)}$ paraboloid egyik seregéhez

---

*) E konoidának két neve van, a mi könnyen zavart okoz. A *Plücker-féle konoida* nevet Mannheim adta neki (*Géometrie cinématique*; Paris, 1894; 260. oldal), a hol megemlíti, hogy Cayley *Cylindroïde*-nak nevezi ezt a felületet. — Sturm az ő *Liniengeometrie* (1892) czimü műve I. kötetének 150. oldalán megtartja a Cayley-féle *Cylindroid* elnevezést. Ámde *Cylindroid*nak az *Ábrázoló geometriában* egy más torzfelületet neveznek, a mely *negyedrendű*. (Fiedler: Darst. Geometrie (1885), II. köt. 410. oldal; Wiener: Darst. Geometrie (1887.) II. köt. 471. oldal; Rohn és Papperitz: Darst. Geometrie (1896) II. köt. 306 oldal.) Ez utóbbi mű külön szól a Plücker-féle konoidáról is a 268. oldalon.

tartoznak. E $P_i^{(2)}$ paraboloidnak a $\varrho$ vezérlő síkra merőleges alkotója $g$, mely csúcsalkotó, már fősugara az $(u, v)$ kongruenczianak, míg a másik vezérlő síkra, $\xi_i$-re, merőleges alkotója $a_i$, mely a másik csúcsalkotója a $P_i^{(2)}$-nek, tengelye a kongruenczia valamelyik komplexusának.

Ha a $g$-n keresztül a $\xi_i$ síkokat változtatjuk, akkor a $P_i^{(2)}$ paraboloidok is változnak, de megmarad egyik csúcsalkotójuknak a $g$, mert a $g$ kongruenczia-sugárnak minden síkjában, csak a $g$ lesz a kongruenczia-sugár. S minthogy minden egyenoldalú hyperbolikus paraboloid bármelyik csúcsalkotója körül $180^0$-kal forgatva önmagába fordul, ezért nemcsak az $uv$ kongruenczia tengelyeknek valós esetében, a midőn ez közvetlen belátható, hanem akkor is, ha az $u$, $v$ tengelyek képzetesek, áll a következő tétel:

*Ha a komplexussort alapkongruenczájának fősugara körül $180^0$-kal elforgatjuk, úgy a forgatott komplexusok önmagukba jutnak.*

5. Három általános helyzetű linearis komplexusnak, $\Gamma_1$, $\Gamma_2$ és $\Gamma_3$-nak, közös sugarai egy valós vagy képzetes sugárseregben vannak. Ugyanis a $\Gamma_1\Gamma_2$ komplexusoknak van egy közös polárispárjuk, úgyszintén a $\Gamma_1\Gamma_3$ komplexusoknak. E két polárispár a $\Gamma_1$ komplexushoz tartozik, s mint ilyen hyperboloidikus fekvésű; ezeknek szelői, mint a $\Gamma_1\Gamma_2$ és $\Gamma_1\Gamma_3$, tehát a $\Gamma_1$, $\Gamma_2$ és $\Gamma_3$ komplexusoknak közös sugarai egy sugárseregben vannak.

Négy általános helyzetű linearis komplexusnak $\Gamma_1$, $\Gamma_2$, $\Gamma_3$ és $\Gamma_4$-nek két közös sugara van. A $\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3$ és a $\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_4$ komplexusoknak ugyanis közös sugarai egy-egy sugársereghez tartoznak. E két sugársereg a $\Gamma_1\Gamma_2$ komplexusoktól meghatározott linearis kongruenczia-ban van, tehát ennek tengelyei a két sugársereg vezető seregének sugarai. Minthogy pedig a két sugársereg vezető seregének két közös sugara van, azért magának a két sugárseregnek is lesz két közös sugara, és ezek a $\Gamma_1$, $\Gamma_2$, $\Gamma_3$ és $\Gamma_4$ komplexusoknak közös sugarai.

V. FEJEZET.

# A másodfokozatú alapalakzatok.

## 20 §. A másodfokozatú alapalakzatok projektiv vonatkozása.

1. Az előbbiekben az *első fokozatú* elemi alapalakzatokat: a pontsort, a sugársort és a síksort vonatkoztattuk egymásra projektiv, és e vonatkoztatás alapján velük új alakzatokat képeztünk. Ama három alapalakzat közül a síkban a pontsornak a sugársor, a térben pedig a pontsornak a síksor felelt meg dualisan, s mind a három alakzatban az elemek száma egyszerűen végtelen sok ($\infty^1$) volt.

*Másodfokozatú alapalakzatnak* nevezzük az egy $\mu$ síkban – sík mezőben — fekvő $\infty^2$ számú pontnak és egyenesnek (sugárnak) összességét, melyek egy pontmezőt és egy sugármezőt képeznek, továbbá az egy ponton, $M$-en, keresztül menő $\infty^2$ számú sugárnak és ugyanennyi síknak összességét, melyek egy sugár- és síknyalábot, és egy néven is sugárnyalábot képeznek. A $\mu$ sík tartója vagy síkja a pont- és sugármezőnek, $M$ pont pedig tartója vagy középpontja a sugár- és síknyalábnak. A sík mezőben $\infty^2$ számú pontsor és ugyanennyi sugársor van, a sugárnyalábban szintén $\infty^2$ sugársor és ugyanannyi síksor van. A sugárnyaláb és a síknyaláb metszése egy oly síkkal, mely nem megy középpontján keresztül: pontmező és sugármező; a pontmezőt és a sugármezőt a tartójukon kívül fekvő pontból projicziáló sugarak és síkok sugárnyalábot, illetve síknyalábot képeznek.

A másodfokozatú alapalakzatokat egymásra lehet vonatkoztatni, még pedig

*a*) a $\mu$ sík mező akkép vonatkoztatható a $\mu_1$ sík mezőre, hogy a $\mu$ minden $P$ pontjának a $\mu_1$-ben egy $P_1$ pont feleljen meg, és a $\mu$ sík minden $p$ egyenesének, mely a $P$-n megy keresztül, a $\mu_1$-ben oly $p_1$ egyenes feleljen meg, mely szintén a $P_1$-n megy keresztül;

*b*) a $\mu$ sík mező akkép vonatkoztatható az $M_1$ sugárnyalábra, hogy $\mu$ minden $P$ pontjának és a $\mu$ síkban e ponton keresztül menő $p$ egyenesnek egy $p_1$ sugár, és ennek egy $\pi_1$ síkja feleljen meg az $M_1$-ben; végre

*c*) az $M$ és $M_1$ sugárnyalábok akkép vonatkoztathatók egymásra, hogy az $M$ minden $p$ sugarának és e $p$ sugáron keresztül

menő $\pi$ síknak egy $p_1$ sugár és e $p_1$ sugárnak $\pi_1$ síkja feleljen az $M_1$ nyalábban.

E vonatkozását a másodfokozatú alapalakzatoknak *kollinear* vonatkozásnak vagy rokonságnak, vagy röviden *kollineacziónak* nevezzük.

Hogy a másodfokozatú alapalakzatoknak ily vonatkozása lehetséges, arról könnyen meggyőződhetünk. Ugyanis, ha a $\mu$ sík mezőt a síkján kívül fekvő $M_1$ pontból a $\mu_1$ síkra projicziáljuk, akkor e projekczió a $\mu$-vel kollinear sík mező lesz, mert a $\mu$ minden $P$ pontjának és minden a $P$ ponton keresztül menő $a$ egyenesnek projekcziója az $M_1$-ből a $\mu_1$-re egy $P_1$ pont és egy a $P_1$-en keresztül menő $a_1$ egyenes; a $P_1$, $a_1$ projekczió képezik, tehát a $P$-nek és az $a$-nak megfelelő elemeket. Másrészt a $\mu$ síkmezőt az $M_1$ pontból projicziáló sugár- és síknyaláb szintén kollinear a $\mu$-vel, mert a $P$ pontot és az $a$ egyenest projicziáló $p_1 \equiv M_1P$ sugár és $\alpha_1 \equiv [M_1a]$ sík is abban a kölcsönös helyzetben van, hogy az $\alpha_1$ a $p_1$-en megy keresztül, ha a $P$ pont az $a$ egyenesen lett felvéve. Ha végre a $\mu$ síkmezőt két, síkján kívül fekvő pontból, $M$ és $M_1$-ből, projicziáljuk, akkor a $\mu$ sík pontjait és egyeneseit projicziáló sugarak és síkok két kollinear nyalábot képeznek, minthogy a $\mu$ síknak egy $P$ pontját és a $P$-n keresztül menő $a$ egyenesét projicziáló $p$, $p_1$ sugarak és $\alpha$, $\alpha_1$ síkok közül: $p$ és $\alpha$, valamint $p_1$ és $\alpha_1$ inczidensek, azaz az egyik elem a másikban van.

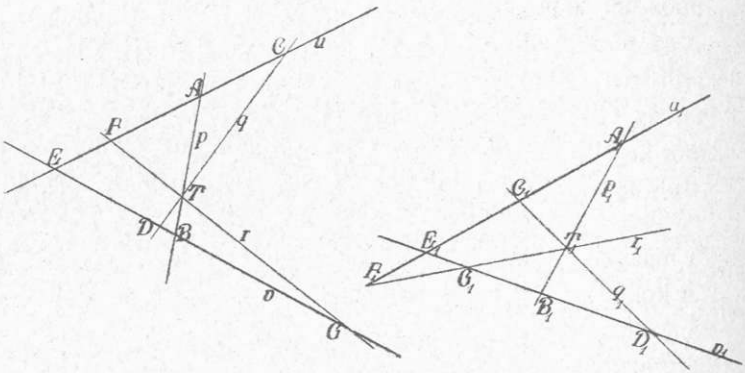
A kollinear alapalakzatoknak azt a különös helyzetét, melyet az imént elmondott leszármaztatásban elfoglalnak úgy, mint az első fokozatú alapalakzatok esetében, *perspektivnek* nevezzük. E szerint egy $\mu$ sík mező és egy $M_1$ sugárnyaláb kollinear vonatkozású és perspektiv helyzetű, ha ennek minden sugara keresztül megy amannak megfelelő pontján; továbbá két sík mező $\mu$ és $\mu_1$ kollinear vonatkozású és perspektiv helyzetű, ha az egyik a másiknak projekcziója egy $M_1$ pontból, vagy másképen kifejezve: ha van egy sugárnyaláb, mely mindkét mezővel perspektiv; végre két kollinear sugárnyaláb perspektiv, ha a megfelelő sugarak egy $\mu$ sík mezőben metszik egymást, azaz mindkét nyaláb ugyanegy sík mezővel perspektiv.

Ha perspektiv helyzetű kollinear alapalakzatokat a perspektiv helyzetből kimozdítjuk, kölcsönös vonatkozásuk, azaz a kollinear vonatkozás megmarad, mely a három esetet egybefoglalva, a következő, Staudt-tól származó definiczióval van jellemezve:

*Két másodfokozatú alapalakzat kollinear, ha az egyik alakzat két tetszésszerinti különnemű elemének, P-nek és a-nak, melyek közül*

*az első a másodikban van, oly két különnemű elem,* $P_1$ *és* $a_1$, *felel meg, melyek közül szintén az első a másodikban van.*

2. E vonatkozás lehetőségét a perspektiv helyzettől függetlenül is kimutathatjuk, melyből kitűnik, hogy mikép szerkeszthető egy másodfokozatú alapalakzattal kollinear alapalakzat, mely azzal nem persektiv helyzetű. Világos, hogy bármily két másodfokozatú alapalakzaton történik a vizsgálat, tehát két mezőn, vagy egy mezőn és egy nyalábon, vagy két nyalábon, — azzal a vizsgálatot a másik kettőre nézve is elvégeztük. Mert ha pl. $\mu$ és $\mu_1$ mezők között létesítjük a kollineacziót, akkor a $\mu$ mező kollinear lesz minden $M_1$ sugárnyalábbal, mely a $\mu_1$ mezőt egy $M_1$ pontból projicziálja, valamint az a két sugárnyaláb is kollinear, mely a $\mu$, $\mu_1$ mezőket egy-egy pontból projicziálja, mivel a nyert alakzatok eleget tesznek a kollineaczió




37. ábra.

előbbi részletesebb, vagy későbbi egybefoglalt értelmezésének. Szorítkozzunk tehát vizsgálatunkban két sík mezőre, a $\mu$ és $\mu_1$-re.

Legyen e végből a $\mu$-ben az $u$ és $v$ két egyenes (37. ábra), melynek a $\mu_1$-ben feleljen meg két tetszésszerinti egyenes, $u_1$ és $v_1$. Az $u$ és az $u_1$, valamint a $v$ és a $v_1$ pontsorokat vonatkoztassuk úgy egymásra projektiv, hogy az $(uv) \equiv E$ pontnak a $\mu$-ben, az $(u_1 v_1) \equiv E_1$ pont feleljen meg a $\mu_1$-ben, mint azt a kollineacziő értelmezése kivánja, máskülönben pedig az $uu_1$ és a $vv_1$ pontsorok projektivitása tetszésszerint lehet megállapítva. E projektivitásokban ($u \barwedge u_1$ és $v \barwedge v_1$-ben) az egymásnak megfelelő pontok, feleljenek meg egyszersmind egymásnak a $\mu$ és $\mu_1$ mezők kollineacziójában is.

A $\mu$ sík egy $p$ egyenesének, mely az $u$ és $v$ egyeneseket az $AB$ pontokban metszi, az a $p_1$ egyenes felel meg, mely az $u_1$ és $v_1$-et az $u \barwedge u_1$ és $v \barwedge v_1$ projektivitások alapján az $AB$ pontoknak meg-

felelő $A_1B_1$ pontokban metszi. A $\mu$ mező egy $q$ egyenesének, mely az $u$ és $v$-t szintén két különböző pontban, $CD$-ben, metszi, megfelel a $\mu_1$-ben egy $q_1$ egyenes, mely az $u_1$ és $v_1$-et a megfelelő $C_1D_1$ pontokban metszi. A $pq$ egyenesek $T$ metszőpontjának megfelel a $p_1q_1$ egyenesek $T_1$ metszőpontja. A $T$ ponton keresztül menő $r$ egyenesnek, mely az $uv$-t az $FG$ pontokban metszi, oly $r_1$ egyenes felel meg, mely az $FG$ pontoknak megfelelő $F_1G_1$ pontokat köti össze. De mert a $T$ ponton keresztül menő $pqr$ sugarak miatt az $ECAF$, $EDBG$ pontnégyesek perspektivek, és az $E_1C_1A_1F_1$, $E_1D_1B_1G_1$ pontnégyesek amazokkal projektivek: ez utóbbiak is perspektivek lesznek, tehát az $r_1 \equiv F_1G_1$ egyenes is a $T_1$ ponton megy keresztül, és ezért a $T$ sugársornak a $\mu$-ben a vele projektiv $T_1$ sugársor felel meg a $\mu_1$-ben.

Ha továbbá a $q$ sugár a $D$ körül egy sugársort ír le a $\mu$ ben, akkor a $q_1$ azzal projektiv sugársort fog leírni a $D_1$ körül a $\mu_1$-ben, és így a $T_1 \equiv (p_1q_1)$ pont is a $p_1$-en a $T \equiv (pq)$ ponttal projektiv pontsort ír le a $p$-n. Végre azoknak az egyeneseknek, melyek a $T$ pontsort a $p$-n az $E \equiv (uv)$ pontból projicziálják, megfelelnek azok az $E_1T_1$ egyenesek, melyek a $T_1$ pontsort a $p_1$-en az $E_1$ pontból projicziálják s melyek amazokkal projektiv sugársort képeznek.

Ebből látható, hogy a $\mu$ és $\mu_1$ mezőkben felvett $u \overline{\wedge} u_1$ és $v \overline{\wedge} v_1$ pontsorok segélyével oly vonatkozást létesítettünk a két mező pontjai és egyenesei között, hogy nemcsak minden pontnak és e ponton keresztül menő egyenesnek az egyik mezőben egy pont és e ponton keresztül menő egyenes felel meg a másikban, hanem minden pontsornak és sugársornak is azokkal projektiv pontsor és sugársor felel meg. Ezt, tekintve a kollinear vonatkozású mezőket vagy más másodfokozatú alapalakzatokat, Staudt egyszersmind *projektiveknek* is nevezi, mert minden első fokozatú megfelelő alapalakzatuk is projektiv.

Az $u \overline{\wedge} u_1$ és $v \overline{\wedge} v_1$ pontsorok helyett két projektiv sugársor $U \overline{\wedge} U_1$ és $V \overline{\wedge} V_1$-et is vehettünk volna fel a $\mu$ és $\mu_1$ mezőkben, melyeknek projektivitását ismét akkép kellett volna megállapítani, hogy az $UV \equiv e$ egyenesnek az $U_1V_1 \equiv e_1$ egyenes feleljen meg. Ekkor a $\mu$ mező $P$ és $Q$ pontjának az a $P_1$ és $Q_1$ pont fog megfelelni, melyben az $UP$, $VP$ és $UQ$, $VQ$ sugaraknak a projektiv sugársorokban megfelelők találkoznak; a $PQ \equiv t$ egyenesnek pedig megfelel a $P_1Q_1 \equiv t_1$ egyenes.

Ha tekintetbe vesszük, hogy az előbbi $u \overline{\wedge} u_1$ és $v \overline{\wedge} v_1$ pontsorok projektivitásának megállapítására az $E \equiv (uv)$, $E_1 \equiv (u_1v_1)$ pontokon kívül azokat az $ACBD$, $A_1C_1B_1D_1$ pontokat, melyekben a

$pq$ egyenesek az $uv$-t, és a $p_1q_1$ egyenesek az $u_1v_1$-et metszik, azaz a $pquv$ és $p_1q_1u_1v_1$ négyoldalakat, tetszésszerint vehetjük fel, úgyszintén az $U \wedge U_1$ és $V \wedge V_1$ sugársorok projektivitásának megállapítására szolgáló $UV$, $UP$, $UQ$, $VP$, $VQ$ sugarakhoz az $U_1V_1$, $U_1P_1$, $U_1Q_1$, $V_1P_1$, $V_1Q_1$ megfelelőket, azaz az $UVPQ$ és $U_1V_1P_1Q_1$ négyszögeket szabadon választhatjuk, következik:

Ha két sík mezőben kollinear vonatkozást akarunk létesíteni, akkor az egyik mezőben négy egyeneshez, mely közül kettőnél több nem megy ugyanegy ponton keresztül, a másik mezőben négy egyenest, mely közül szintén kettőnél több nem megy ugyanegy ponton keresztül, ponthoz, mely közül kettőnél több nincs ugyanegy egyenesben, a másik mezőben négy pontot, mely közül szintén kettőnél több nincs ugyanegy egyenesben, mint azoknak megfelelőt tetszésszerint vehetünk fel; ezzel a két mező kollineacziója meg van állapítva úgy, hogy minden ponthoz és egyeneshez az egyikben, a megfelelő pont és egyenes a másikban vonalosan szerkeszthető.

Ebből folytatólag következik, hogy a sík mező és a sugárnyaláb kollinear vonatkozásának létesítésére a mezőben egy négyszöghez vagy négyoldalhoz, a nyalábban egy négyélet, illetve négylapot, mint amannak megfelelőt, tetszésszerint vehetünk fel, továbbá, hogy két sugárnyaláb kollinear vonatkozásának létesítésére az egyik nyaláb egy négyéléhez vagy négylapjához, a másikban egy négyélet, illetve négylapot, mint amannak megfelelőt, szintén tetszésszerint vehetünk fel, melylyel a két alapalakzat kollineacziója meg van határozva.

3. A másodfokozatú alapalakzatok a kollineacziön kívül még más vonatkozásban is lehetnek egymáshoz, melyet *reczíprok* vagy *korrelatív* vonatkozásnak, vagy rövidebben *korrelacziónak* nevezünk.

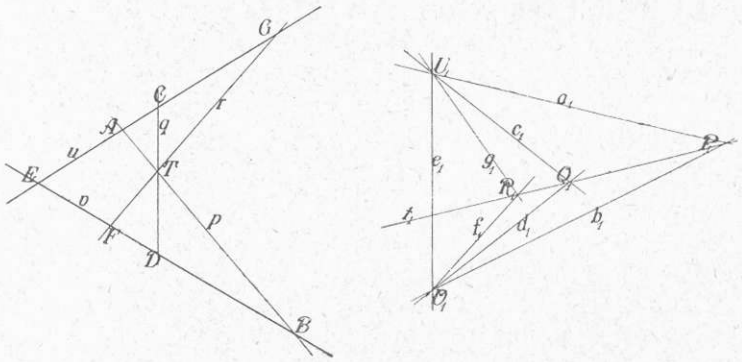
Ha a $\mu$ sík mező a $\mu_1$ sík mezővel korrelaczióban van, akkor az egyik mező minden pontjának egy egyenes, és minden egyenesének egy pont felel meg a másikban, még pedig akképen, hogy ha a $P$ pont az $a$ egyenesben van, akkor a $P$-nek megfelelő $p_1$ egyenes az $a$-nak megfelelő $A_1$ ponton megy keresztül.

Ha pedig a $\mu$ sík mező az $M_1$ sugárnyalábbal van korrelaczióban, akkor a $\mu$ mező minden $P$ pontjának és e ponton keresztül menő $a$ egyenesnek egy $\pi_1$ sík és e síkban fekvő $a_1$ sugár felel meg az $M_1$ nyalábban.

Ha végre két sugárnyaláb, $M$ és $M_1$ korrelaczióban van, akkor az $M$ nyaláb minden $p$ sugarának és a $p$-n keresztül menő $\alpha$ sík-

nak, egy $\pi_1$ sík és e síkban fekvő $a_1$ sugár felel meg az $M_1$ nyalábban.

Hogy a másodfokozatú alapalakzatok ilynemű vonatkozása lehetséges, azt két esetben, t. i. a polárismezőnél, melyet a kúpszelet indukál, és a polárisnyalábnál, melyet a II. r. kúp indukál, már láttuk, noha a korrelativ alakzatok ekkor különös kölcsönös helyzetben vannak, melyet involucziós-, vagy polárishelyzetnek nevezünk. De ha e különös helyzetet megszüntetjük pl. akképen, hogy a $\mu$ sík mező pontjainak a $k^{(2)}$ kúpszeletre vonatkozó polárisait e polárisok kölcsönös helyzetének megtartása mellett a $\mu_1$ síkba helyezzük, vagy a $\mu$ síkban eredeti helyzetükből elmozdítjuk, úgy a polárisok és pólusok rendszere korrelativ vonatkozásban marad. Ha aztán a pólusok rendszerét a $\mu$ síkon kívül fekvő $M$ pontból projicziáljuk, akkor a




38. ábra.

projicziáló sugarak és ezeknek síkjai oly sugárnyalábot adnak, mely a polárisok rendszerével a $\mu_1$-ben szintén korrelativ. S ha végre a $\mu$ és $\mu_1$ korrelativ mezőket az $M$, illetve az $M_1$ pontból, melyek szintén a $\mu$ és $\mu_1$ síkokon kívül feküsznek, projicziáljuk, akkor a projicziáló sugarak és síkok két korrelativ nyalábot képeznek.

A korrelativ vonatkozás lehetősége ezekből kitűnik, de még meg akarjuk mutatni, hogyan lehet a poláris helyzettől függetlenül a $\mu$ sík mezőt egy másik sík mezőre, a $\mu_1$-re, korrelativ vonatkoztatni, melyből könnyen kitűnik az az eljárás, mely a mező és a sugárnyaláb, vagy két sugárnyaláb korrelacziójának létesítéséhez vezet.

4. Vegyünk fel a $\mu$ sík mezőben (38. ábra) két pontsort, $u$-t és $v$-t, és vonatkoztassuk ezeket a $\mu_1$ sík mező két sugársorára, az $U_1$-re és $V_1$-re projektiv, de úgy, hogy az $(uv) \equiv E$ pontnak ama pontsorokban az $U_1 V_1 \equiv e_1$ sugár feleljen meg a sugársorokban. A $\mu$ mező

valamely $p$ egyenesének, mely az $uv$-t az $AB$ pontokban metszi, megfelel az a $P_1$ pont, melyben az $AB$ pontoknak megfelelő $a_1b_1$ sugarak az $U_1V_1$ sugársorokban találkoznak. A $qr$ egyeneseknek a $\mu$-ben, melyek a $p$-nek egy $T$ pontján mennek keresztül és az $uv$ egyeneseket a $CD$, illetve az $GF$ pontokban metszik, megfelelnek a $Q_1R_1$ pontok, melyekben a $CD$ és $GF$ pontoknak megfelelő $c_1d_1$ és $g_1f_1$ sugarak az $U_1V_1$ sugársorokból találkoznak. De minthogy az $EACG$ és $EBDF$ pontnégyesek perspektivek, azért a velök projektiv $e_1a_1c_1g_1$ és $e_1b_1d_1f_1$ sugárnégyesek az $U_1$ és $V_1$ sugársorokban szintén perspektivek lesznek, tehát az $(a_1b_1) \equiv P_1$, $(c_1d_1) \equiv Q_1$, $(f_1g_1) \equiv R_1$ pontok a $T$ pontnak megfelelő $t_1$ egyenesen feküsznek.

Ha a $T$ pont befutja a $p$ egyenest, akkor a $C$ pont az $U$-n és a $q \equiv DC$ sugár a $D$ körül a $T$-vel perspektiv pont- és sugársort, tehát a $c_1$ sugár az $U_1$ körül, a $t_1$ sugár a $P_1$ körül a $d_1$ egyenesen fekvő pontsorra vonatkozólag perspektiv sugársort ír le, mely ama pontsorokkal projektiv. Ugyancsak projektiv lesz tehát az a sugársor, mely a $T$ pontsort az $E \equiv (uv)$-ből projicziálja azzal a pontsorral, a melyben a $t_1$ sugársor az $e_1 \equiv U_1V_1$ egyenest metszi. Ebből látható, hogy a $\mu$ mező minden pontjának, egyenesének, pontsorának és sugársorának: a $\mu_1$-ben egyenes, pont, sugársor, illetve pontsor fog megfelelni és a sorok még azonkívül projektivek.

Tekintve a kollineaczió tárgyalásakor mondottakat, következik:

Ha két sík mezőt korrelativ akarunk egymásra vonatkoztatni, akkor az egyik mezőben egy négyszöget (négyoldalt), a másikban egy négyoldalt (négyszöget) tetszésszerint veszünk fel és ezeknek alkotó részeit, mint megfelelőket egymáshoz rendeljük; továbbá:

ha valamely sík mezőt és a sugárnyalábot korrelativ akarunk egymásra vonatkoztatni, akkor a mezőben egy négyszöget (négyoldalt), a nyalábban egy négylapot (négyélet) tetszésszerint veszünk fel és ezeknek alkotó részeit, mint megfelelőket, egymáshoz rendeljük; végre

ha két sugárnyaláb között akarunk korrelativ vonatkozást létesíteni, akkor az egyiknek egy négyéléhez (négylapjához) a másikban egy négylapot (négyélet) tetszésszerint rendelhetünk, melylyel aztán mind a három esetben bármely elemnek megfelelő eleme meg van határozva és szerkeszthető.

Minthogy úgy a korrelaczió, mint a kollineaczió esetében a másodfokozatú alapalakzatokban levő megfelelő első fokozatú alapalakzatok projektivek, azért mindkét vonatkozást *a másodfokozatú alapalakzatok projektiv vonatkozásának, vagy projektivitásának* nevezzük és $\overline{\wedge}$-vel jelöljük.

Az eddigiekből következik még, hogy akképen, mint az elsőfokozatú alapalakzatok esetében a sorokról, úgy a másodfokozatú alapalakzatokról is mondható, hogy ha több mező és nyaláb közül az első a másodikkal, ez a harmadikkal stb. kollinear, akkor az első az utolsóval is kollinear lesz; továbbá ha két mező, vagy két nyaláb, vagy egy mező és egy nyaláb akár egy mezővel, akár egy nyalábbal korrelativ, akkor azok egymással kollinear vonatkozásban vannak.

## 21. §. Perspektiv helyzetű kollinear mezők és sugárnyalábok.

1. Két kollinear sík mező $\mu$ és $\mu_1$ ugyanegy síkba helyezhető. Ily két kollinear mezőről, mely ugyanegy síkban van, azt mondjuk, hogy azok *konjektivek*, vagy a két mező *konplanar*. Az előbbi tárgyalásból következik, hogy ha két kollinear sík mezőben, a $\mu$ és $\mu_1$-ben, egy négyszög szögpontjai, vagy egy négyoldal oldalai megfelelőleg közösek, akkor az egyik mezőnek minden pontja és egyenese, a másik mezőben a neki megfelelő ponttal és egyenessel egybeesik. Ugyancsak az előbbi tárgyalásból következik, hogy ha két konczentrikus kollinear sugárnyalábban, az $M$ és $M_1$-ben, egy négyél élei vagy egy négylap lapjai megfelelőleg közösek, akkor a nyaláboknak minden sugara és síkja megfelelőleg közös. A két kollinear sík mező és a kollinear sugárnyaláb tehát ezekben az esetekben *kongruens*.

Ha továbbá a $\mu$ sík mező és a véle kollinear $M$ sugárnyaláb oly helyzetű, hogy ez utóbbiban egy négyél élei (vagy egy négylap lapjai) a $\mu$ mezőben ennek megfelelő négyszög szögpontjain (illetve a négyoldal oldalain) mennek keresztül, akkor a sugárnyaláb minden sugara és síkja az ezeknek a $\mu$ mezőben megfelelő ponton vagy egyenesen fog keresztül menni, tehát a sugárnyaláb perspektiv helyzetű a sík mezőhöz.

Ebből ismét azt a következtetést vonjuk, hogy ha két nem konplanar és kollinear sík mező $\mu$ és $\mu_1$ síkjainak $s$ metszővonalában minden pont a megfelelővel esik egybe, akkor a két mező, minden megfelelő pontpárjának összekötő egyenese és minden megfelelő egyenesének összekötő egyenesén keresztülmenő minden sík megfelelő, akkor a nyaláb minden megfelelő síkpárjának metszővonala és minden megfelelő konczentrikus és kollinear sugárnyaláb $M$ és $M_1$ középpontjainak összekötő egyenesén keresztülmenő minden sík megfelelő, akkor a nyaláb minden megfelelő síkpárjának metszővonala és minden megfelelő

nespárjának összekötő síkja egy $M$ ponton megy keresztül, tehát a két kollinear mező egymáshoz és az $M$ sugárnyalábhoz perspektiv.

sugárpárjának metszőpontja ugyanegy $\mu$ síkban van, tehát a két kollinear sugárnyaláb egymáshoz és a $\mu$ sík mezőhöz perspektiv.

Ugyanis a $\mu$ és $\mu_1$ kollinear mezők két tetszésszerinti megfelelő pontjának, az $AA_1$- és $BB_1$-nek, összekötő egyenesei egymást metszik, mert az $AB$ és $A_1B_1$ egyeneseken a megfelelő pontsorok perspektivek, lévén az $(s, AB)$, $(s, A_1B_1)$ pont megfelelőleg közös. De minthogy a kollinear mezők összes megfelelő pontjainak összekötő egyenesei nincsenek ugyanegy síkban, azért azok ugyanegy ponton mennek keresztül, azaz a két kollinear sík mező perspektiv. — Hasonlókép bizonyítható be a jobb oldalon álló tétel is.

2. Két konplanar kollinear sík mezőről azt mondjuk, hogy *perspektiv helyzetű*, ha azokban valamely egyenes pontsornak pontjai és egy sugársornak sugarai megfelelőleg közösek. Két konczentrikus sugárnyalábot pedig perspektivnek nevezünk, ha azokban valamely síksornak síkjai és egy sugársornak sugarai megfelelőleg közösek. A konplanar kollinear mezőkben a megfelelőleg közös pontsor tartóját *kollineaczió-tengelynek* és a megfelelőleg közös sugársor középpontját *kollineaczió-középpontnak*; a konczentrikus kollinear sugárnyalábokban a megfelelőleg közös síksor tengelyét *kollineaczió-tengelynek* és a megfelelőleg közös sugársor síkját *kollineaczió-síknak* nevezzük. Az előbbiek alapján könnyen kimutatható, hogy ha két kollinear és

konplanar mezőben, $\mu$ és $\mu_1$-ben, egy $s$ pontsor pontjai, vagy egy $O$ sugársor sugarai megfelelőleg közösek, akkor a mezők perspektivek, tehát az első esetben még egy megfelelőleg közös sugársorral, a másodikban pedig egy megfelelőleg közös pontsorral birnak.

konczentrikus sugárnyalábban, $M$ és $M_1$-ben, egy $s$ síksor síkjai, vagy egy $\omega$ sugársor sugarai megfelelőleg közösek, akkor a nyalábok perspektivek, tehát az első esetben még egy megfelelőleg közös sugársorral, a másodikban pedig egy megfelelőleg közös síksorral birnak.

Nevezzük a $\mu$ mezőnek projekcziójáť valamely $M$ pontból az $s$ egyenesen keresztül menő síkra $\mu_2$-nek. A $\mu_2$ mező származása folytán perspektiv a $\mu$-vel és így kollinear a $\mu_1$-gyel, de egyszersmind perspektiv is a $\mu_1$-gyel, mert a $\mu_1$ és $\mu_2$-nek az $s$-ben egy megfelelőleg közös pontsora van s így a $\mu_2$ a $\mu_1$-nek is projekcziója egy bizonyos $M_1$ pontból. Maguk az $M$ és $M_1$ projicziáló sugárnyalábok

szintén perspektivek a $\mu_2$-vel és egymással, tehát a nyalábóknak minden közös eleme s ilyenek az $MM_1$ tengelyű síksor síkjai, megfelelő. Ez az $MM_1$ síksor a $\mu$ és $\mu_1$ konplanar mezők közös síkját egy $O$ sugársorban metszi, melynek tehát, mint a $\mu$ és $\mu_1$-hez tartozó sugársornak minden sugara megfelelőleg közös. — A tétel második részét kimutatandó, projicziáljuk az $O$-ban egy megfelelőleg közös sugársorral biró $\mu$ és $\mu_1$ kollinear sík mezők közül az elsőt a síkjukon kívül fekvő tetszésszerinti $M$ pontból, a másodikat az $MO$ egyenesnek $M_1$ pontjából. Minthogy a projicziáló sugárnyalábok kollinearok és az $MM_1O$ tengelyű síksoruk közös, azért perspektivek egymással és egy $\mu_2$ sík mezővel. A $\mu_2$ sík a $\mu\mu_1$ síkot egy $s$ egyenesben metszi, melynek minden pontja megfelelőleg közös, tehát a $\mu$ $\mu_1$ mezők perspektivek. — Hasonlókép bizonyítjuk a jobb oldalon álló két tételt is.

3. Két kollinear sík mezőben különös egyenesek vannak, melyek a projektiv pontsorok ellenpontjaival analogusok. (Projek. Geom. Elemei. 175—179. pont.) A $\mu$ mező végtelen távol fekvő $q$ egyenesének a $\mu$-vel kollinear $\mu_1$ mezőben megfelelő $q_1$ egyenese általában nincs végtelen távol; úgy szintén a $\mu_1$ mező végtelen távol fekvő $r_1$ egyenesének megfelelő $r$ egyenese a $\mu$-ben végesben van. A két kollinear mezőnek ezen $rq_1$ egyeneseit, melyek a végtelen távol fekvő $r_1q$ egyeneseknek felelnek meg, a mezők *ellentengelyeinek* nevezzük.

A $\mu$ mezőben egy párhuzamos sugarú sornak a $\mu_1$-ben általában oly sugársor felel meg, melynek középpontja a $q_1$ ellentengelyben van s ugyanígy a $\mu_1$ mezőben bármely párhuzamos sugarú sornak a $\mu$-ben oly sugársor felel meg, melynek középpontja az $r$ ellentengelyben van. Csak az $rq$ metszőpontján keresztül menő, tehát a $\mu$-ben az $r$ ellentengelylyel párhuzamos sugarak olyanok, hogy ezeknek az $r_1q_1$ ponton keresztül menő, tehát a $q_1$ ellentengelylyel párhuzamos sugarak felelnek meg. S minthogy e különös sugársorok megfelelő sugarain, a kollineaczióból származó projektiv pontsoroknak végtelen távol fekvő [$(rq)$ és $(r_1q_1)$] pontjai megfelelők, azért az ellentengelyekkel párhuzamos megfelelő egyeneseken a megfelelő pontsorok *hasonlóan-projektivek*.

E hasonlóan-projektiv pontsorok között vannak egyenlően projektivek is. Ugyanis a $q_1$-nek egy tetszésszerinti $Q_1$ pontján keresztül menő $a_1$ és $b_1$ egyeneseknek a $\mu$ mezőben az $ab$ párhuzamos egyenesek felelnek meg. Ezek az $ab$ párhuzamosak az $r$ ellentengelyről lemetszenek egy $\delta$ hosszúságú vonaldarabot. A $q_1$-től egyenlő távolságra két párhuzamos egyenest, $s_1$ és $t_1$-et szerkeszthe-

tünk, melyekről az $a_1b_1$ egyenesek a $\delta$-val egyenlő nagyságú vonaldarabot metszenek le. Ezeknek az $s_1$ és $t_1$ egyeneseknek oly $s$ és $t$ egyenesek felelnek meg a $\mu$-ben, melyek az $r$-rel párhuzamosak és a melyekről az $ab$ párhuzamosak szintén a $\delta$-val egyenlő vonaldarabot fognak lemetszeni. Minthogy a megfelelő $s$ és $s_1$-en, valamint a $t$ és $t_1$-en az $ab$ és $a_1b_1$ egyenespároktól lemetszett vonaldarabok megfelelők és egyenlők, azért az $s$ és $s_1$-en és a $t$ és $t_1$ egyeneseken a kollineaczióban megfelelő hasonlóan-projektiv pontsorok egyenlően-projektivek

A $\mu$ és $\mu_1$ kollinear mezőknek az $s$ és $s_1$ (és ugyanígy a $t$ és $t_1$) egyeneseit $\infty^1$-félekép helyezhetjük úgy egymásra, hogy azoknak megfelelő pontjai egybeessenek; s ebben a helyzetekben a két kollinear mező mindig perspektiv lesz A két kollinear mezővel egyidejűleg perspektiv sugárnyalábnak $M$ középpontja abban az egyenesben van, melyben az $r$-en keresztül menő és a $\mu_1$ síkjával párhuzamos sík, a $q_1$-en keresztül menő és a $\mu$ síkjával párhuzamos síkot metszi. Ha tehát a $\mu$ sík változatlan marad, a $\mu_1$ síkot pedig az $s \equiv s_1$ körül forgatjuk, akkor az $M$ pont oly kört ír le, melynek középpontja az $r$-ben van és sugara egyenlő az $s_1q_1$ párhuzamos szalag szélességével. E kör a $\mu$ síkot két pontban metszi, melyek egyenként kollineacció-középpontjai a konplanar és perspektiv helyzetű kollinear sík mezőknek. De minthogy a $t$ és $t_1$ pontsorok szintúgy egyesíthetők, mint az $s$ és $s_1$ sorok, azért *két kollinear mező általában négyfélekép hozható ugyanegy síkban perspektiv helyzetbe.* — Ugyanegy síkban fekvő perspektiv helyzetű mezőket és azoknak megfelelő alakzatait *czentrikusan kollinearnak* és a vonatkozásukat *czentrikus-kollineacziónak* nevezzük.

Jelöljük a $\mu$ és $\mu_1$ czentrikusan-kollinear mezők kollineacziójának középpontját $O$-val, kollineaczió-tengelyét $s$-sel, a két ellentengelyt pedig $r$ és $q_1$-gyel. Az $O$ sugársor minden $p$ sugarán két megfelelő projektiv pontsor van; e konjektiv pontsoroknak egyik kettőspontja az $O$, másik kettőspontja a $(ps) \equiv S$, ellenpontjai pedig $(pr) \equiv R$ és $(pq_1) \equiv Q_1$. Ebből következik, hogy az $O$ pont az $r, q_1$ ellentengelyektől ép oly távolságra van, mint az $s$ tengely a $q_1$, illetve az $r$-től. Hasonlóképen az $s$ kollineaczió-tengely egy tetszésszerinti $P$ pontjából kisugárzó megfelelő, tehát projektiv, sugársoroknak egyik kettőssugara az $s$, a másik a $PO$ sugár. És ha az $aa_1$ két megfelelő sugár a $P$ sorban, akkor az $O$ sugársor minden sugara ezeket megfelelő pontokban metszi, valamint viszont az előbbi $p$ egyenesen fekvő pontsoroknak bármily megfelelő pontpárja $AA_1$, az $s$ egyenes pontjaiból megfelelő sugarakkal projicziáltatik. Ebből pedig az

következik, hogy a czentrikus-kollineacziò meg van határozva, ha ismeretes a kollineacziò-középpont és tengely, $O$ és $s$, és ezeken kivül még két megfelelő pont $A, A_1$, mely tehát az $O$-val ugyanegy egyenesen van, vagy pedig (az $AA_1$ helyett) két megfelelő egyenes $aa_1$, mely az $s$-ben találkozik. De az előbbiektől függetlenül is belátható, hogy ezek az adatok ($OsAA_1$, vagy $Osaa_1$) a kollineacziò meghatározására elégségesek, mert ha az első esetben a $BC$ két pontja az $s$-nek, akkor az $OABC$ négyszögnek az egyik mezőben megfelel az $OA_1BC$ négyszög a másikban, és a második esetben, ha $bc$ két egyenes az $O$ sorban, akkor az $sabc$ és $sa_1bc$ megfelelő négyoldalak meghatározzák a kollineacziót.

Ama $OSAA_1$ pontnégyes kettősviszonyának értékét $\Delta$-át, melyet a czentrikusan-kollinear mezők két megfelelő $AA_1$ pontja és azoknak összekötő egyenesén az $OS$ kettőspontok képeznek s mely független a történetesen felvett $AA_1$ megfelelő pontoktól, a czentrikus-kollineacziò *karakteristikájának* nevezzük. Ha az $AA_1$ egyenesen a megfelelő pontsorok ellenpontjai $R$ és $Q_1$ és az ezeknek megfelelő végtelen távol fekvő pontok $R_1$, $Q$, akkor

$$\Delta = (OSAA_1) = (OSRR_1) = (OSQQ_1)$$

tehát

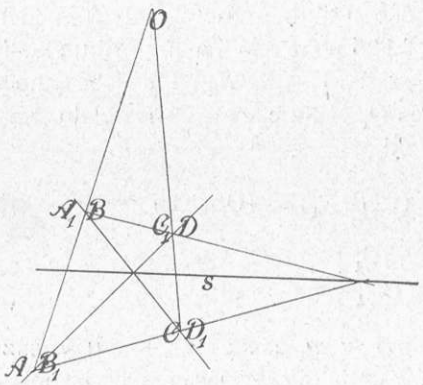
$$\Delta = \frac{OR}{SR} = \frac{SQ_1}{OQ_1};$$

s mert $OR = SQ_1$, azért $\Delta$ egyenlő az $sq_1$ és $sr$, vagy ami ugyanazt mondja, az $s_1q_1$ és $sr$ párhuzamos szalagok szélességének viszonyával. Ez utóbbi viszony azonban független a kollinear mezők perspektiv helyzetéből, tehát *kollinear vonatkozás már meghatározza a mezők karakteristikájának absolut értékét.*

4. A midőn a czentrikusan-kollinear mezők karakteristikája $\Delta = -1$, tehát a megfelelő pontpárok és a megfelelő egyenespárok az $O$ és $s$ kollineacziò-középpont és tengelytől harmónikusan vannak elválasztva, akkor minden $A(B_1)$ pontnak, melyet mint az első mezőhöz tartozót $A$-val, mint a másodikhoz tartozót $B_1$-gyel jelölünk, megfelelő $A_1B$ pontjai egybeesnek; igy tehát az ellentengelyek pontjai és maguk az $rq_1$ ellentengelyek is. Ebben az esetben a czentrikusan-kollinear mezőket és az azokban fekvő megfelelő alakzatokat *involucziós fekvésűeknek*, a két mezőt együttvéve *involucziós mezőknek*, a kollineacziò-középpontot és tengelyt *involucziò-középpontnak* és *involucziò-tengelynek* nevezzük.

Ha két konjektiv kollinear mezőben, a $\mu$ és $\mu_1$-ben, két oly pont $A(B_1)$, $C(D_1)$ van, hogy a nekik mindkét mezőben megfelelő

pontok $A_1$, $B$, illetve $C_1$, $D$ egybeesnek, anélkül azonban, hogy az $AC$, $B_1D_1$ egyenesek megfelelők volnának, akkor a két mező minden pontja a jelzett tulajdonságú és így azok egy involucziós mezőt képeznek. Ugyanis (39. ábra) az $AB$, $CD$ egyenesnek a $\mu$-ben ugyanaz a két egyenes felel meg a $\mu_1$-ben, mert $AB \equiv A_1B_1$, $CD \equiv C_1D_1$; ezeknek $O$ metszőpontja egy megfelelőleg közös pont. Az $AC$, $BD$ és az $AD$, $BC$ egyenesek metszőpontjai szintén megfelelőleg közösek; ezeknek összekötő egyenese $s$ harmónikusan választja el az $AA_1$, $CC_1$ pontpárokat az $O$-tól s mint ilyen keresztül megy az $AA_1$, $CC_1$ egyeneseken fekvő megfelelő pontsoroknak, melyek involucziósak, kettőspontjain. Minthogy az $s$-nek kettőnél több pontja önmagának megfelelő, a két kollinear mező az $s$ kollineaczió-tengelyre és az $O$ kollineaczió-középpontra vonatkozólag perspektiv s végre mert a megfelelő $AA_1$ pontpár az $O$ és $s$-től harmónikusan van elválasztva, a mezők involucziósok.



39. ábra.

Az involucziós mezőt síkján kívül fekvő $M$ pontból projicziáló sugárnyalábot involucziósnak nevezzük. Az involucziós sugárnyaláb tehát oly két perspektiv helyzetű konczentrikus kollinear nyaláb, melyben a megfelelő sugarak és síkok egy síktól és egy sugártól — az *involuczió-síktól* és az *involuczió-tengelytől* — harmónikusan vannak elválasztva.

A kúpszelet önmagával involucziós fekvésű bármely $O$ pontra mint involuczió-középpontra és annak a kúpszeletre vonatkozó $s$ polárisára, mint involuczió-tengelyre. A II. r. kúp önmagával involucziós a csúcsán keresztül menő bármelyik síkra és e sík polárissugarára vonatkozólag.

Általában legyenek a kollinear mezők perspektiv vagy bármily helyzetben, az egyik mező minden $k^{(2)}$ kúpszeletének, melyet akár mint két projektiv sugársor, akár mint két projektiv pontsor képződményének tekintünk, egy oly $k_1^{(2)}$ görbe fog megfelelni, mely szintén két projektiv sugársornak, illetve két projektiv pontsornak képződménye, tehát kúpszelet. Vagy tekintve, hogy az involucziós soroknak az egyik mezőben, involucziós sorok felelnek meg a másikban;

minden polárismezőnek és vezető kúpszeletének az egyik mezőben, egy polárismező és ennek vezető kúpszelete felel meg a másikban, mely vezető kúpszeletek tehát egyidejűleg valósak vagy képzetesek.

Ha azonban két mezőt, $\mu$ és $\mu_1$-et, úgy akarunk egymásra kollinear vonatkoztatni, hogy két, ezekben megadott kúpszelet $k^{(2)}$ és $k_1^{(2)}$ egymásnak megfelelő alakzata legyen, akkor a $k_1^{(2)}$ három pontjának, $ABC$-nek, megfelelő pontjait $A_1B_1C_1$-et a $k^{(2)}$-ben tetszésszerint vehetjük fel, melylyel a mezők kollinear vonatkozása már meg van határozva. Ugyanis az $AB$ egyenes $D$ pólusának a $k^{(2)}$-re vonatkozólag, az $A_1B_1$ egyenesnek $k_1^{(2)}$-re vonatkozó $D_1$ pólusa tartozik megfelelni, tehát az $ABC$, $A_1B_1C_1$ háromszögekkel és a $k^{(2)}$, $k_1^{(2)}$ kúpszeletekkel a $D$, $D_1$ pontok is meg vannak adva, és az $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$ négyszögek meghatározzák a kollinear vonatkozást. Ezekből az adatokból kiindulva valamely kúpszeletnek, mely az $ABC$ pontokon megy keresztül és a $DA$, $DB$ egyeneseket az $A$, $B$ pontokban érinti, mely tehát a $k^{(2)}$, egy oly kúpszelet fog megfelelni, mely az $A_1B_1C_1$ pontokon megy keresztül és a $D_1A_1$, $D_1B_1$ egyeneseket az $A_1$, $B_1$ pontokban érinti, tehát a $k_1^{(2)}$ kúpszelet.

5. Ismeretes, hogy a projektiv sugársorokban az egymásnak megfelelő derékszög szárai analógusak a pontsorok ellenpontjaival. Ezt alapul véve gyaníthatjuk, hogy két kollinear nyalábban az oly háromélek, melyek orthogonalisak (derékszögűek) és megfelelők, a kollinear mezők ellentengelyeivel analógus tulajdonságot fognak mutatni. Ezért kérdjük, van-e $M$ és $M_1$ kollinear sugárnyalábokban két megfelelő orthogonalis háromél $(qrs)$, $(q_1r_1s_1)$?

Jelöljük az $M$ középponttal bíró orthogonalis nyalábot $M^o$-val, az $M^o$-nak az $M$ és $M_1$ nyalábok kollinear vonatkozása alapján megfelelő elliptikus polárisnyalábot $M_1{}^o$-gyel, mely utóbbi csak abban az esetben orthogonalis, ha az adott $M$ és $M_1$ nyalábok kongruensek. Minden polárisnyalábban, tehát az $M_1{}^o$-ban is van egy derékszögű poláris háromél $q_1r_1s_1$ (5. §. 1.); ennek megfelel az $M^o$-ban szintén egy derékszögű polárisháromél $qrs$, mert az $M^o$-ban minden polárisháromél derékszögű. Lehetséges ugyan, hogy az $M_1{}^o$ polárisnyalábban végtelen sok $(\infty^1)$ egy közös éllel bíró derékszögű polárisháromél van, t. i. ha az rotatorikus, de ez csak egy *különös* esetben következik be.

Erről a különös esetről könnyen fogalmat szerezhetünk, ha az $M$ és $M_1$ kollinear nyalábokat perspektiv helyzetben vesszük fel. Ugyanis a két, a $\mu$ mezővel perspektiv nyalábot akkép kell felvennünk, hogy az $M$ és $M_1$ középpontoknak összekötő egyenese $q \equiv q_1$ a $\mu$ síkra merőleges legyen, mert ekkor mindazoknak a $qrs$ orthogo-

nalis háromélek nek az $M$-ben, melyeknek egyik éle a $q$, orthogonalis háromélek, $q_1 r_1 s_1$, felelnek meg az $M_1$-ben. E vonatkozás azonban akkor is megmarad, ha az $M$ és $M_1$ nyalábokat ebből a kölcsönös helyzetből elmozdítjuk. Ha viszont két kollinear sugárnyalábban $\infty^1$ orthogonalis háromél megfelelő, mely háromeléknek tehát egy $q$, illetve $q_1$ élük közös, és ezeket egyesítvén, a két nyalábnak egy pár a $q$-ra merőleges $r$ és $r_1$ megfelelő éleit párhuzamos helyzetbe hozzuk, akkor a két nyaláb perspektiv helyzetű lesz.

Vizsgáljuk most meg, hogy két kollinear nyaláb $M$ és $M_1$, melynek csak *egy* pár orthogonalis megfelelő hároméle, $qrs$ és $q_1 r_1 s_1$ van, perspektiv helyzetbe hozható-e? Ha az egyik nyalábban van egy oly sugársor, mely a neki megfelelő sugársorral a másik nyalábban kongruens, és e két sugár megfelelő sugarait egyesítjük, akkor a két nyaláb perspektiv lesz.

Kimutatható, hogy ha a nyalábokban megfelelő kongruens sugársorok vannak, akkor azoknak $\omega$ és $\omega_1$ síkjai a megfelelő derékszögű háromeléknek, a $qrs$ és $q_1 r_1 s_1$-nek, egy-egy megfelelő élpárján kell keresztül menni. Ugyanis, ha az $\omega$ és $\omega_1$ ily tulajdonságú két sík, akkor az $\omega$, $[qr]$ és az $\omega$, $[q_1 r_1]$ síkoknak $a$ és $a_1$ metszővonalai megfelelő sugarak; az ezekre az $\omega$, illetve $\omega_1$ síkban emelt $d$, $d_1$ merőlegesek szintén megfelelők, és $[ds] \perp a$, $[d_1 s_1] \perp a_1$. A $[ds]$, $[d_1 s_1]$ síkokban a kollineacźióból folyólag van két projektiv sugársor, és ezekben egy megfelelő derékszögű sugárpár $bc$ és $b_1 c_1$; ennélfogva az $M$, $M_1$ sugárnyalábokban van még egy megfelelő derékszögű háromélpár $abc$, $a_1 b_1 c_1$, a mi feltevésünkkel ellenkezik. Ha azonban az $\omega$ és $\omega_1$ síkok pl. a $q$ és $q_1$ sugarakon mennek megfelelőleg keresztül, akkor az előbbi $d$, $d_1$ sugarak az $[rs]$, $[r_1 s_1]$ síkokban vannak, és így a $[ds]$, $[d_1 s_1]$ síkok nem vezetnek új megfelelő orthogonalis háromélekhez. Ennélfogva, ha a kollinear nyalábokban megfelelő kongruens sugársorok vannak, akkor azoknak síkjai csak a megfelelő orthogonalis hároméleknek élein mehetnek keresztül.

A $q$ és $q_1$ sugarakon két megfelelő síkot fektetünk keresztül; az ezekben fekvő megfelelő projektív sugársorok derékszögű sugarai a $q$, $q_1$ és a síkoknak metszővonalai az $[rs]$, $[r_1 s_1]$ síkokkal. Ha tehát a két felvett megfelelő síkban még egy-egy megfelelő sugár van, mely a $q$-val, illetve a $q_1$-gyel egyenlő szöget képez, akkor már a felvett síkok lesznek a keresett $\omega$, $\omega_1$ síkok. Az $M$ nyalábban a $q$-hoz $45^0$ alatt hajló sugarak egy $\varkappa^{(2)}$ forgáskúpnak alkotói; ennek megfelel a kollineacźió folytán az $M_1$ nyalábban egy $\varkappa_1^{(2)}$ II. r. kúp. A $(qrs)$ orthogonalis háromél poláris hároméle a $\varkappa^{(2)}$-nek, tehát a $(q_1 r_1 s_1)$ háromél is poláris hároméle a $\varkappa_1^{(2)}$-nek, és mert ez derékszögű, azért

a $q_1 r_1$ és $s_1$ egyenesek főtengelyei a $\varkappa_1^{(2)}$-nek. Az a $\varkappa'^{(2)}$ forgáskúp, melynek csúcsa az $M_1$ és melynek alkotói a $q_1$-gyel $45^0$ szöget képeznek, a $\varkappa_1^{(2)}$ kúpot négy alkotóban metszi, ezek közül kettő és a másik kettő a $q_1$-gyel egy-egy síkban $\omega_1$ és $\omega'_1$-ben van, s ezek a síkok a $[q_1 r_1]$ és $[q_1 s_1]$ síkok irányában symmetrikusak, tehát tőlük harmónikusan vannak elválasztva. A talált $\omega_1 \omega'_1$ síkoknak az $M$ nyalábban két sík, $\omega\omega'$, fog megfelelni, melyek szintén symmetrikusak a $[qr]$ és $[qs]$ síkok irányában.

Az $\omega\omega_1$ és az $\omega'\omega'_1$ síkok már oly megfelelő síkjai a nyalábóknak, hogy a bennük levő megfelelő sugársorok kongruensek. Ezért, ha vagy az $\omega\omega_1$ síkokban, vagy az $\omega'\omega'_1$ síkokban fekvő megfelelő sugársorokat akkép egyesítjük, hogy a megfelelő sugarak egyesüljenek, akkor az $M$, $M_1$ sugárnyalábok már perspektívek lesznek.

Mindkét esetben az egyesített nyaláboknak még egy megfelelő közös síksoruk is van, melynek az első esetben tengelye $o(o_1)$, a másodikban $o'(o'_1)$. Mindkét esetben a $q$, $q_1$ sugarak tehát a reájuk merőleges $[rs]$, $[r_1 s_1]$ síkok is egyesültek, s ezért az $o$, $o'$ sugaraknak az $[rs]$ síkban, az $o_1$, $o'_1$ sugaraknak pedig az $[r_1 s_1]$ síkban kell feküdni. Az $\omega$, $\omega'$ síkoknak $t$, $t'$ metszővonalai az $[rs]$ síkkal, és az $\omega_1$, $\omega'_1$ síkoknak metszővonalai az $[r_1 s_1]$ síkkal az $r$ és $s$, illetve az $r_1$ és $s_1$ sugarak irányában symmetrikusak.

Az $\omega$, $\omega_1$ síkokban, és az $\omega'$, $\omega'_1$ síkokban fekvő megfelelő sugársoroknak egyesítése alkalmával a $t$ a $t_1$-be, illetve a $t'$ a $t'_1$-be kerül úgy, hogy az első esetben az egyesült $[rs]$, $[r_1 s_1]$ síkokban a $t(t')$ és $o(o_1)$, a második esetben a $t'(t'_1)$ és $o'(o'_1)$ sugarak lesznek a megfelelő projektív sugársoroknak kettőssugarai. Minthogy azonban a $tt'$ sugarak a derékszögű $rs$ sugarak irányában, és a $t_1 t'_1$ sugarak a derékszögű $r_1 s_1$ sugarak irányában, az $\omega$, $\omega'$, $\omega_1$, $\omega'_1$ síkoknak előbb kimutatott helyzete folytán, symmetrikusak, azért ilyenek lesznek az $o$ és $o'$, valamint az $o_1$ és $o'_1$ sugarak is.

Megjegyzendő még, hogy ha az $\omega$, $\omega_1$, vagy az $\omega'$, $\omega'_1$ síkoknak egyesítése által perspektív helyzetbe hozott nyalábok közül az egyiket az $o(o_1)$, illetve az $o'(o'_1)$ egyenes mentén párhuzamosan tovatoljuk, akkor az eltolt nyaláb még mindig perspektiv marad a másikkal, csakhogy nem lesz többé azzal konczentrikus. Így tehát kollinear sugárnyalábokat kétfélekép lehet végtelen sokszor perspektiv helyzetbe hozni, ha a $q_1 r_1 s_1$ derékszögű háromél egyik élén keresztül lehet oly két síkot $\omega_1$ és $\omega'_1$-et átfektetni, hogy a bennük fekvő sugársorok a megfelelőkkel kongruensek.

Ámde a $q$, $q_1$-en keresztül menő $\omega$, $\omega_1$ és $\omega'$, $\omega'_1$ síkok csak akkor valósak, ha $\varkappa'^{(2)}$ forgáskúp a $\varkappa_1^{(2)}$ II. r. kúpot valós alkotók-

ban metszi. Ez pedig csak akkor következik be, ha a $\varkappa_1^{(2)}$ kúpnak egyik fősíkjában, pl. a $[q_1 r_1]$-ben fekvő $l_1 l'_1$ alkotók a kúpnak $q_1$ elliptikus tengelyével 45°-nál kisebb, a másik fősíkban, $[q_1 s_1]$-ben, fekvő $n_1$, $n'_1$ alkotók 45°-nál nagyobb szöget képeznek.

A *qrs* orthogonalis háromél *qr*, *rs*, *sq* élszögeinek felezői $ll'$, $mm'$ és $nn'$, egy az $M$ nyalábban levő négy lapnak szemben fekvő élei (élpárjai), melynek átlósháromléle (*qrs*). E négylapnak megfelel az $M_1$ nyalábban egy négylap, melynek élpárjai, $l_1 l'_1$, $m_1 m'_1$ és $n_1 n'_1$, a négylap $(q_1 r_1 s_1)$ átlósháromélének élei irányában symmetrikusak. A (*qrs*) háromélnek minden éle, mely az első négylapnak egy élpárjával ugyanegy síkban van, azzal 45° szöget képez; a $(q_1 r_1 s_1)$ háromélnek általában egyik éle sem képez a második négylapnak véle ugyanegy síkban fekvő élpárjával 45° szöget. Hanem a $(q_1 r_1 s_1)$ háromélnek egyik, pl. az $r_1$ éle az $l_1 l'_1$, $m_1 m'_1$ élpárokkal 45°-nál nagyobb, az $s_1$ pedig az $m_1 m'_1$, $n_1 n'_1$ élpárokkal 45°-nál kisebb, végre a $q_1$ az $n_1 n'_1$-gyel 45°-nál nagyobb és az $l_1 l'_1$-gyel 45°-nál kisebb szöget képez.

Az $l_1 l'_1 m_1 m'_1$, $m_1 m'_1 n_1 n'_1$, $n_1 n'_1 l_1 l'_1$ négyélek körül írható II. r. kúpok közül, melyeknek főtengelyei $q_1 r_1 s_1$, az elsőn minden alkotó a kúp $r_1$ elliptikus tengelyével 45°-nál kisebb szöget, a másodikon minden alkotó a kúp $s_1$ elliptikus tengelyével 45°-nál kisebb szöget képez, és csak a harmadik kúpon lesz négy mindenkor valós alkotó, mely a kúpnak $q_1$ elliptikus tengelyéhez 45° alatt hajlik. Ebből következik, hogy a (*qrs*) és $(q_1 r_1 s_1)$ orthogonalis háromléleknek csak *egyik* élén megy két oly *valós* sík keresztül, melyben a kollinear nyalábok megfelelő sugársorai kongruensek.

A talált eredmények egybefoglalva ekkép szólanak:

a) *Két kollinear nyaláb $\infty^3$-szor hozható perspektiv helyzetbe, ha azok kongruensek.*

b) *Ha két kollinear nyalábban $\infty^1$ megfelelő orthogonalis háromél van, akkor azoknak egy-egy $q$ és $q_1$ éle közös; és ha $e$ $q$ és $q_1$ megfelelő kongruens síksorokat egyesítjük, akkor a nyalábok perspektívek lesznek, és a kollineacció-sík merőleges a kollineacció-tengelyre. E művelet $\infty^1$-szer végezhető.*

c) *Ha végre két kollinear nyalábban csak a (qrs) és $(q_1 r_1 s_1)$ egy pár orthogonalis megfelelő háromél van, akkor ennek egy pár megfelelő élén, pl. a $q$ és $q_1$-en keresztül oly megfelelő és a háromélek lapjai irányában symmetrikus síkok $\omega$, $\omega'$, és $\omega_1$, $\omega'_1$ mennek keresztül, melyekben a megfelelő sugársorok kongruensek; továbbá a háromléleknek a $q$ és $q_1$-gyel szemben fekvő $[rs]$, $[r_1 s_1]$ lapjaiban az élek irányában oly $o$, $o'$ és $o_1$, $o'_1$ symmetri-*

*kus sugarak vannak, melyeknek megfelelő síksorai szintén kongruensek. Ha ezeket az o, $o_1$ vagy az o' $o'_1$ megfelelő síksorokat egyesítjük, akkor a nyalábok perspektiv helyzetbe jutnak. E művelet kétféleképen végezhető $\infty^1$-szer.*

6. Vizsgáljuk most meg, hogy egy $\mu$ sík mező egy vele kollinear $M_1$ sugárnyalábbal perspektiv helyzetbe hozható-e? Könnyen belátjuk, hogy ez általánosan nem lehetséges.

Ugyanis a $\mu$ mező végtelen távol fekvő egyenesén annak a $J$ involucziós pontsornak, melynek kettőspontjai a $\mu$ sík képzetes körpontjai, megfelel az $M_1$ nyalábban egy $J_1$ involucziós sugársor, mely ugyan elliptikus, de általában nem lesz orthogonalis. De ha a $J_1$ sugársor nem orthogonális, akkor az a $J$ pontsorral nem hozható perspektiv helyzetbe. Ennélfogva a $\mu$ mező csak akkor hozható az $M_1$ nyalábbal perspektiv helyzetbe, ha a $\mu$ két tetszésszerinti *ab*, *cd* derékszögű egyenespárjának az $M_1$-ben megfelelő $\alpha_1\beta_1$, $\gamma_1\delta_1$ síkpárok, a $\mu$ végtelen távol fekvő egyenesének megfelelő $\varepsilon_1$ síktól, derékszögű sugárpárokban metszetnek. Ha ez bekövetkezik, akkor az $\varepsilon_1$-re merőleges orthogonalis síksornak $p_1$-nek, a nyalábban, megfelel egy orthogonalis sugársor $P$ a mezőben; e soroknak perspektiv helyzetbe hozatala által a mező és nyaláb is perspektiv helyzetbe jut.

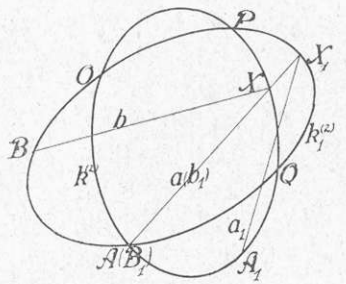
Ebből következik, hogy egy adott $ABCD$ síknégyszög általában nem helyezhető egy adott *abcd* négyélre úgy, hogy annak szögpontjai ennek élein legyenek. Ellenben az előbbi eseteket véve: két tetszésszerinti négyszög $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$ akkép helyezhető el, hogy azokon ugyanegy négyél menjen keresztül; továbbá két tetszésszerinti négyél *abcd*, $a_1b_1c_1d_1$ oly helyzetbe hozható, hogy az $aa_1$, $bb_1$, $cc_1$ $dd_1$ élek metszőpontjai ugyanegy síkban legyenek.

## 22. §. Konplanar kollinear mezők kettős elemei. Cziklikus mezők.

1. Láttuk az előbbiekben, hogy két kollinear sík mezőt akkép helyezhetünk valamely síkba, hogy azoknak egy pontsora, tehát $\infty^1$ pontja, és egy sugársora tehát $\infty^1$ egyenese megfelelőleg közös legyen. Vizsgáljuk most meg, hogy ha a két kollinear sík mezőt, a $\mu$ és $\mu_1$-et, tetszésszerint helyezünk egy síkba, hány oly pont és hány oly egyenes van, mely megfelelőleg közös? Minden ily tulajdonságú pontot és egyenest a konplanar mezők *kettőspontjának*, illetve *kettősegyenesének* fogunk nevezni. Előre látható, hogy ha a

mezőknek négy kettőspontjuk volna, mely közül kettőnél több nincs ugyanegy egyenesben, vagy négy kettős egyenesük volna, mely közül szintén kettőnél több nem megy ugyanegy ponton keresztül, akkor a mezőknek minden pontja és egyenese kettős lenne.

Az $\mu$ és $\mu_1$ mezők közös síkjában (40. ábra) valamely $A(B_1)$ pontnak és e ponton keresztül menő $a(b_1)$ egyenesnek, mint a $\mu$ és $\mu_1$-hez tartozónak egy $A_1$ és egy $B$ pont, illetve egy $a_1$ és egy $b$ egyenes felel meg a másik mezőben. Ha az $a(b_1)$ egyenest az $A(B_1)$ pont körül forgatjuk, akkor az $a_1$ és a $b$ ezzel projektiv forog az $A_1$ és a $B$ pont körül, és így az $aa_1$ sugarak egymást az $AA_1$ pontokon keresztül menő $k_1^{(2)}$ kúpszeletben, a $bb_1$ sugarak pedig egymást a $BB_1$ pontokon keresztül menő $k^{(2)}$ kúpszeletben metszik. Az $aa_1 \equiv X_1$ pontnak, mely $b_1a_1$-nek is írható, megfelel a $bb_1 \equiv X$ pont, melyet $ba$-nak is írhatunk; tehát a $k^{(2)}$, $k_1^{(2)}$ kúpszeletek megfelelők, és a megfelelő pontok az $A(B_1)$ ponton keresztül menő egyeneseken feküsznek. Ezért a $k^{(2)}$, $k_1^{(2)}$ kúpszeleteknek mindegyik közös pontja az $A(B_1)$-en kívül a $\mu$, $\mu_1$ mezőknek kettőspontja lesz.



40 ábra.

A $k^{(2)}$ kúpszelet (és hasonlókép a $k_1^{(2)}$) nem korcsosul el egyenespárrá, mert a képző sugársorok közös $BA$ sugarának a $\mu$-ben, a $B_1A_1$ felel meg a $\mu_1$-ben, mely az előbbitől különbözik. A $B_1A_1$ egyenes a $k^{(2)}$-őt érinti s a $k_1^{(2)}$-őt metszi az $A(B_1)$ pontban, tehát a két kúpszelet egymást ebben a pontban nem érinti. A két kúpszelet egymást az $A(B_1)$ ponton kívül még három pontban, $OPQ$-ban metszi, melyek közül legalább egy pont és a másik kettőnek összekötő egyenese valós. De lehet vagy mind a három metszőpont valós és különböző, vagy kettő egybeeső, vagy mind a három egybeeső. Minthogy két kettőspont összekötő egyenese mindig egy kettősegyenes, azért csak a valós kettőselemeket számítva mondhatjuk:

*Két konplanar, de nem perspektiv helyzetű kollinear mezőnek vagy egy háromszög szögpontjai és oldalai képezik a kettőspontokat és kettősegyeneseket, vagy a mezőknek csak két kettőspontja és két kettősegyenese van, mely utóbbiak közül az egyik mindkét kettősponton, a másik pedig egy kettősponton megy keresztül, vagy végre a mezőknek csak egy kettőspontja és egy kettősegyenese van.*

2. Ha az $O$ pont a két kollinear mezőnek kettőspontja és a $t$, $t_1$ két azon keresztül menő megfelelő egyenes, akkor a $t$ és $t_1$-en levő

megfelelő pontsorok perspektivek egy $O'$ pontra vonatkozólag. Az $O'$ pontnak, mint a $\mu$ mezőhöz tartozónak megfelel a $\mu_1$-ben egy $O_1'$ pont, és az $O'O_1'$ pontoknak összekötő egyenese a kollinear mezőknek kettősegyenese $o$. Az $o$ vagy keresztül megy az $O$ ponton és akkor a $\mu\mu_1$ mezőknek az $O$ és $o$-n kívül nincs több kettőspontjuk és kettősegyenesük, vagy pedig az $o \equiv O'O_1'$ egyenes nem megy keresztül az $O$-n és ekkor a kollineacció folytán az $o$-n fekvő megfelelő projektiv sorok kettőspontjai, és ezeknek projicziáló sugarai az $O$-ból, a mezőknek még hiányzó kettőspontjait, illetve kettősegyeneseit képezik.

Ha az $o$-n a megfelelő pontsorok involucziósak, tehát az $O$-n keresztül menő megfelelő sugarak sora, mely az előbbi pontsorokat projicziálja, szintén involucziós, akkor a $\mu$, $\mu_1$ kollinear mezők különös fekvésűek. Ugyanis minden pontnak, $A(B_1)$-nek, mint az egyik és másik mezőhöz tartozónak egy-egy pont $A_1$ és $B$ felel meg a másikban, mely $A_1$ és $B$ pont, mert az $AO \equiv B_1O$ sugárnak ugyanegy sugár felel meg az $O$ involucziós sorban, az $O$-val ugyanegy egyenesen van. Hasonlókép valamely $a(b_1)$ egyenesnek megfelel az $a_1$ és a $b$ egyenes, melyek egymást az $o$ kettősegyenesen metszik; e metszőpont az $(oa)$-nak társpontja az $o$-n levő involucziós sorban. Ebből látható, hogy a $\mu$, $\mu_1$ mezők e különös helyzetében a közös síkjukban fekvő sokszögnek két sokszög felel meg az egyik és a másik mezőben, mely utóbbiak az $O$ pontra és az $o$ egyenesre, mint kollineacció-középpontra és kollineacció-tengelyre perspektivek.

Tekintetbe véve, hogy a $\mu$ és $\mu_1$ kollinear mezőknek egy egyenesén, mely aztán kettősegyenes lesz, akkor kapunk involucziós sorokat, ha a két mezőnek egy pontpárja egymásnak mindkét vonatkozásban, azaz involucziósan megfelel, mondhatjuk:

*Ha két konplanar kollinear mezőnek, $\mu$ és $\mu_1$-nek, egy involucziósan megfelelő pontpárja van, akkor az ezeken keresztül menő $o$ egyenes a mezőknek egy kettősegyenese, és ezen kívül van még a mezőknek egy kettőspontja $O$.*

*A mezők minden pontjának megfelelő pontpárjai az $O$-val egy egyenesben feküsznek, és minden egyenesnek megfelelő egyenespárjai egymást az $o$-n metszik, és ezért e pontpárok és egyenespárok két czentrikusan kollinear mezőt képeznek.*

*Ha még az adott $\mu$ és $\mu_1$ mezők egy pontjának megfelelő pontpárja az $O$ ponttól és az $o$ egyenestől harmónikusan van elválasztva, akkor a leszármaztatott kollinear mezők czentrikusan-involucziósak.*

3. Térjünk vissza a $\mu$ és $\mu_1$ konplanar kollinear mezőkhöz, melyeknek egyik kettőspontja az $O$ és a másik két valós vagy kép-

zetes kettőspont összekötő kettősegyenese az $o$, s mely utóbbin fekvő megfelelő pontsorokról nem mondjuk, hogy azok involucziósak. E kollinear mezőkből, két, az $o$-n tetszésszerint felvett $O^s$, $O^t$ pont segélyével új pontokat származtathatunk le a következőképen: az $O^s$-et összekötjük a $\mu$ mezőnek egy változó $A$ pontjával az $O^sA$ egyenes által, és az $O^t$-t összekötjük az $A$-nak megfelelő $A_1$ ponttal a $\mu_1$ mezőben az $O^tA_1$ egyenes által; e két egyenes $O^sA$ és $O^tA$ metszőpontja $A_2$ a változó új pont.

Ha az $A$ a $g$ pontsort, tehát az $A_1$ a $g$-nek megfelelő $g_1$ pontsort írja le, akkor az $A_2$ pontok, mint két projektiv és perspektiv helyzetű sugársor megfelelő sugarainak metszőpontjai, egy $g_2$ egyenesen a $g$ és $g_1$-gyel projektiv pontsort fogják leírni. Ennélfogva az $A_2$ pontok a $\mu$-vel az $O^s$ pontra és a $\mu_1$-gyel az $O^t$ pontra vonatkozólag czentrikusan kollinear $\mu_2$ mezőt írnak le. A $\mu$ és $\mu_1$ mezőknek két megfelelő $s$ és $s_1$ pontsora az $O^s$ pontból, és két megfelelő $t$ és $t_1$ pontsora az $O^t$ pontból egymásba projicziáltatik. A $(gs)$ pontnak a $\mu$-ben, megfelel a $(g_1s_1)$ pont $\mu_1$-ben; az elsőt az $O^s$-sel és a másodikat az $O^t$-vel összekötő egyenesek egymást a $(g_1s_1)$ pontban metszik, melyen a $g_2$ egyenes is keresztül megy. Hasonlókép a $(gt)$ és $(g_1t_1)$ megfelelő pontokat az $O^s$, illetve az $O^t$-vel összekötő egyenesek egymást a $(gt)$ pontban metszik, tehát a $g_2$ egyenes a a $(gt)$-n is keresztül megy. Minthogy a megfelelő $g_1g_2$ egyenesek egymást az $s_1$-ben, és a megfelelő $gg_2$ egyenesek egymást $t$-ben metszik: a $\mu_1$ és $\mu_2$ mezők kollineacziő tengelye az $s_1$, és a $\mu$ és $\mu_2$ mezők kollineacziő-tengelye a $t$.

Ha fordítva a $\mu$ mező pontjait projicziáljuk az $O^t$ pontból, és a $\mu_1$ mező pontjait az $O^s$ pontból, akkor a megfelelő pontokhoz tartozó projicziáló sugarak metszőpontjai egy $\mu_3$ mezőt képeznek, mely a $\mu$-vel az $O^t$ pontra és az $s$ tengelyre, a $\mu_1$-gyel pedig az $O^s$ pontra és a $t_1$ tengelyre vonatkozólag czentrikusan kollinear.

Ha az $O^sO^t$ pontok a $\mu$ és $\mu_1$ mezők megfelelő pontjai, akkor az $s_1$ és $t$ egyenesek egybeesnek. Ugyanis egy az $O^s$-en keresztül menő $b$ egyenes az $s$ és $s_1$-et a $B$ és $B_1$ pontokban metszi; a $b$-nek megfelel a $\mu_1$-ben a $B_1O^t \equiv b_1$, mely a $t$ és $t_1$-et a megfelelő $C$ és $C_1$ pontokban metszi. De minthogy a $B_1C_1 \equiv b_1$ egyenesnek a $BC$ felel meg a $\mu$-ben, azért a $BC$-nek a $BB_1$-gyel, és így a $C$ pontnak a $B_1$-gyel, a $t$ egyenesnek az $s_1$-gyel kell egyesülni. Ebben az esetben azok a sugarak, melyek a $\mu$-nek pontjait az $O^s$-ből és azok, melyek a megfelelő pontokat a $\mu_1$-ben az $O^t$-ből projicziálják, egymást az $s_1t$ egyenesben metszik, úgy, hogy az egész $\mu_2$ mező ebbe az $s_1t$ egyenesbe korcsosul el.

Ha még az $o$ kettősegyenesen a megfelelő pontsorok involucziósak és $O^sO^t$ ebben az involuczióban két társpont, akkor nemcsak az $s_1t$ egyenesek, hanem az előbbi oknál fogva a $st_1$ egyenesek is egyesülnek, és így nemcsak a $\mu_2$ mező, hanem a $\mu_3$ mező is elkorcsosul az $s_1t$, illetve az $st_1$ egyenesbe.

A midőn a $\mu$ és $\mu_1$ mezők az $O$ pontra és az $o$ tengelyre czentrikusan kollinearok és az $O^sO^t$ két pontja az $o$-nak, akkor az $s, s_1$ valamint a $t, t_1$ egyenesek egybeesnek az $OO^s$, illetve az $OO^t$ egyenesekkel, tehát a $\mu\mu_2$ mezők az $O^s$ pontra és a $OO^t$ tengelyre, a $\mu_1\mu_2$ mezők az $O^t$ pontra és az $OO^s$ tengelyre, a $\mu\mu_3$ mezők az $O^t$ pontra és az $OO^s$ tengelyre, végre a $\mu_1\mu_3$ mezők az $O^s$ pontra és az $OO^t$ tengelyre czentrikusan kollinearok.

Ha végre a $\mu$ és $\mu_1$ mezők még involucziós fekvésűek az $O$ pontra és az $o \equiv O^sO^t$ tengelyre, és a $\mu_2, \mu_3$ mezők az előbbi eljárás szerint vannak az $O^sO^t$ pontok segélyével leszármaztatva, akkor a $\mu\mu_1\mu_2\mu_3$ mezők közül bármely kettő és a másik kettő az $OO^sO^t$ háromszög egy szögpontjára és az avval szemben fekvő oldalra vonatkozólag involucziós fekvésű.

E szerint:

*Ha az o egyenes a $\mu$ és $\mu_1$ kollinear és konplanar mezők egy kettősegyenese, az $O^sO^t$ pedig az o-nak két tetszésszerinti pontja, akkor a mezők O kettőspontján keresztül menő $s, s_1$ és $t, t_1$ megfelelő pontsorok közül a két első az $O^s$ pontból, a két utóbbi az $O^t$ pontból egymásba projicziálhatók.*

*Ha először az $O^s$ pontból a $\mu$ mező pontjaihoz, és az $O^t$ pontból a $\mu_1$ mező pontjaihoz sugarakat vezetünk, másodszor az $O^t$ pontból a $\mu$ mező pontjaihoz, és az $O^s$ pontból a $\mu_1$ mező pontjaihoz sugarakat vezetünk; akkor a megfelelő pontokhoz vezetett sugarak egymást az első esetben egy $\mu_2$ mező pontjaiban, a második esetben pedig egy $\mu_3$ mező pontjaiban metszik.*

*A $\mu\mu_2$ mezők az $O^s$ pontra és a $t$ egyenesre,*
*„ $\mu_1\mu_2$ „ „ $O^t$ „ „ „ $s_1$ „*
*„ $\mu\mu_3$ „ „ $O^t$ „ „ „ $s$ „*
*„ $\mu_1\mu_3$ „ „ $O^s$ „ „ „ $t$ „*

*mint kollineaczió-középpontra és tengelyre vonatkozólag perspektivek.*

*Ha az $O^s$ pontnak a $\mu$-ben, az $O^t$ pont felel meg a $\mu_1$-ben, akkor az $s_1t$ egyenesek egybeesnek és a $\mu_2$ mező ebbe az egyenesbe korcsosul el.*

*Ha az o-n a megfelelő pontok involucziót képeznek, és az $O^sO^t$*

*pontok ebben társpontok, akkor a* $\mu_2$ *mező az egybeeső* $s_1 t$ *egyenesbe, és a* $\mu_3$ *mező az egybeeső* $st_1$ *egyenesbe korcsosul el.*

*Ha a* $\mu$ *és* $\mu_1$ *mezők czentrikusan kollinearok az O középpontra és az o tengelyre vonatkozólag, akkor ugyanaz következik be, mint az általános esetben, csakhogy* $ss_1$ *egybeesik az* $OO^s$ *egyenessel és* $tt_1$ *egybeesik az* $OO^t$ *egyenessel.*

*Ha végre még a* $\mu$ *és* $\mu_1$ *mezők involucziós fekvésűek, akkor a* $\mu\mu_1\mu_2\mu_3$ *mezők közül bármely kettő és a másik kettő az* $OO^sO^t$ *háromszög egy szögpontjára és az avval szemben fekvő oldalra involucziós fekvésű.*

4. Ha felveszünk két kollinear mezőt, $\mu$ és $\mu_1$-et, mely involucziós, akkor minden $A_1$ pontnak megfelelő pontjai tekintsük azt az első, vagy a második mezőhöz tartozónak, ugyanegy $A_2$ pontban vannak. Az ily kollinear mezőket még kettesen (binär) cziklikusnak is nevezzük és a két mezőt egy *binär cziklikus mezőnek* tekintjük.

*Hármasan (ternär) cziklikusak a* $\mu$ *és* $\mu_1$ *konplanar kollinear mezők*, ha egy $A_1$ pontnak az elsőben, egy $A_2$ pont felel meg a másodikban, és az $A_2$-nek az elsőben, egy $A_3$ pont felel meg a másodikban, mely $A_3$ pontnak, mint az első mezőhöz tartozónak az $A_1$ pont felel meg a második mezőben, azaz: ha az $A_1A_2A_3$ pontoknak $\mu$-ben, az $A_2A_3A_1$ pontok felelnek meg $\mu_1$-ben. Ha a két kollinear mezőben *egy* ily cziklikusan megfelelő *ponthármas* $A_1A_2A_3$ van, akkor azokban $\infty^2$ cziklikusan megfelelő ponthármast lehet találni, melyek a két, egynek tekinthető, és így *ternär cziklikusnak* nevezhető mezőt teljesen betöltik.

Ugyanis induljunk ki egy tetszésszerinti $B_1$ pontból, tehát legyenek a $\mu$ és $\mu_1$ kollinear mezőkben a megfelelő pontok

$$A_1A_2A_3B_1B_2B_3$$
$$A_2A_3A_1B_2B_3X,$$

és mutassuk ki, hogy az $X$ pont a $B_1$-ben van.

A kollinear mezők projektivitása folytán

$$A_1(A_2A_3B_1B_2) \barwedge A_2(A_3A_1B_2B_3) \barwedge A_2(A_1A_3B_3B_2)$$
$$A_3(A_1A_2B_1B_2) \barwedge A_1(A_2A_3B_2B_3) \barwedge A_1(A_3A_1B_3B_2)$$
$$A_2(A_3A_1B_1B_2) \barwedge A_3(A_1A_2B_2B_3) \barwedge A_3(A_2A_1B_3B_2).$$

Mind a három sorban az első és utolsó sugárnégyesek perspektivek, tehát a megfelelő sugarak egymást egy egyenes pontjaiban metszik.

Ez az egyenes az 1-ső esetben az $A_3B_2$,
„ „ „ a 2-ik „ „ $A_2B_2$,
„ „ „ „ 3-ik „ „ $A_1B_2$,

és $A_3B_2$-ben még az $A_1B_1$ , $A_2B_3$ egyenespárok találkoznak,
$A_2B_2$-ben „ „ $A_3B_1$ , $A_1B_3$ „ „
$A_1B_2$-ben „ „ $A_2B_1$ , $A_3B_3$ „ „

tehát az

$$\begin{matrix} A_1A_2A_3 \\ B_1B_3B_2 \end{matrix}\Big\} \qquad \begin{matrix} A_1A_2A_3 \\ B_3B_2B_1 \end{matrix}\Big\} \qquad \begin{matrix} A_1A_2A_3 \\ B_2B_1B_3 \end{matrix}\Big\}$$

háromszögpárok perspektivek, és így

az $A_1$ pont összekötő egyenese az $(A_2A_3\,,\,A_3B_2)$ ponttal,
„ $A_3$ „ „ „ „ $(A_1B_3\,,\,A_2B_3)$ „
„ $A_2$ „ „ „ „ $(A_1B_2\,,\,A_3B_3)$ „

a $B_1$ ponton megy keresztül.

Ha a $B_1$ pont helyett a $B_2$ pontból indulunk ki, akkor ugyanezen úton azt találjuk, hogy az

$$\begin{matrix} A_1A_2A_3 \\ B_2XB_3 \end{matrix}\Big\} \qquad \begin{matrix} A_1A_2A_3 \\ XB_3B_2 \end{matrix}\Big\} \qquad \begin{matrix} A_1A_2A_3 \\ B_3B_2X \end{matrix}\Big\}$$

háromszögpárok perspektivek, tehát

az $A_2$ pont összekötő egyenese az $(A_1B_2,\ A_3B_3)$ ponttal
„ $A_1$ „ „ „ „ $(A_2B_3,\ A_3B_2)$ „
„ $A_2$ „ „ „ „ $(A_1A_3,\ A_2B_2)$ „

az $X$ ponton megy keresztül, a miből látható, hogy az $X$ pont a $B_1$ pontban van.

Az $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$, . . . ponthármasoktól képezett háromszögeknek a ternär cziklikus mezőben nemcsak szögpontjai, hanem egyszersmind oldalai is cziklikusan felelnek meg egymásnak a $\mu$ és $\mu_1$ kollinear mezőkben, mert pl. az $A_1A_2$, $A_2A_3$, $A_3A_1$, egyeneseknek a $\mu$-ben, az $A_2A_3$, $A_3A_1$, $A_1A_2$ egyenesek felelnek meg a $\mu_1$-ben.

Az $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$ háromszorosan perspektiv háromszögekhez tartozó

$$C_1 = (A_2A_3,\ A_3B_2),\ C_2 = (A_3B_1,\ A_1B_3),\ C_3 = (A_1B_2,\ A_2B_1)$$

kollineaczió-középpontok, és hasonlóképen a $c_1$, $c_2$, $c_3$ kollineacziótengelyek cziklikus ponthármasokat és sugárhármasokat képeznek a ternär mezőben.

Két konplanar kollinear mezőben, mint előbb láttuk, legalább egy valós kettőspont $O$, és egy valós kettősegyenes $o$ van. Azok a sugarak, melyek az $A_1A_2A_3$, . . . ponthármasokat, a ternär cziklikus mezőben, az $O$ kettőspontból projicziálják, cziklikus sugár-

hármasokat képeznek az $O$ sugársorban, és azok a pontok, melyekben az $A_1A_2A_3; \ldots$ háromszögek oldalai az $o$ kettősegyenest metszik, cziklikus ponthármasokat képeznek az $o$ pontsorban, úgy, hogy az $O(A_1A_2A_3; \ldots)$ sugárhármasoknak és az $o(A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1; \ldots)$, ponthármasoknak a $\mu$-ben, az $O(A_2A_3A_1; \ldots)$ és az $o(A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2; \ldots)$ sugár- és ponthármasok felelnek meg a $\mu_1$-ben. Csak a kettőspontban találkozhatnak ily sugárhármasok és csak a kettősegyenesen lehetnek ily ponthármasok, mert ha pl. a $D_1D_2$ pontnak a $\mu$-ben, a $D_2D_3$ pontok felelnek meg a $\mu_1$-ben, és a $D_1D_2, D_2D_3$ pontok ugyanegy egyenesen vannak, akkor ez egy kettősegyenes. Világos, hogy a ponthármasok sora az $o$-n perspektiv a sugárhármasok sorával az $O$-ban.

A $\mu$ és $\mu_1$ kollinear mezőknek az $o$ projektiv pontsorokban nincs valós kettőspontja, mert ha $D_1D_2D_3$ egy ponthármas az $o$ egyenesen és $P$ egy kettőspont, akkor

$$D_1D_2D_3P \barwedge D_2D_3D_1P.$$

Ámde ha az első pontnégyes kettősviszonyának értéke $\lambda$, akkor a másodiké $1 : 1 - \lambda$, tehát $\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$. Ebből látható, hogy az első és hasonlókép a második pontnégyes kettősviszonyának az értéke képzetes és mert a $D_1D_2D_3$ pontok valósak, azért a $P$ pont képzetes.

Ez utóbbi tulajdonságot még a következő úton is kimutathatjuk: Az $A_1A_2A_3$ ponthármas egy háromszögnek szögpontja, melynek $A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2$ oldalai az $o$ kettősegyenest a $D_1D_2D_3$ pontokban metszik.

Az $A_1A_2A_3$ háromszög körül oly $k^{(2)}$ kúpszeletet írhatunk, melynek az $A_1D_1, A_2D_2, A_3D_3$ egyenesek érintői ama szögpontokban. Ezek az érintők egy $E_1E_2E_3$ háromszöget képeznek, melynek szögpontjai, valamint oldalai cziklikus hármasok a $\mu\mu_1$ ternär mezőben. A $k^{(2)}$ kúpszelet önmagának kollinear ábrája, mert az $A_1, A_2, A_3$ pontoknak és azok $E_2E_3, E_3E_1, E_1E_2$ érintőinek az $A_2, A_3, A_1$ pontok és ezeknek $E_3E_1, E_1E_2, E_2E_3$ érintői felelnek meg. Tehát az $o$ egyenes és a $k^{(2)}$ kúpszelet metszőpontjai a $\mu\mu_1$ mezőknek $o$-n fekvő kettőspontjai, melyek azonban az $o$ és $k^{(2)}$ kölcsönös helyzeténél fogva képzetesek. Az $A_1A_2A_3$, $E_1E_2E_3$ háromszögek az $o$ tengelyre vonatkozólag perspektivek, tehát az $A_1E_1, A_2E_2, A_3E_3$ cziklikusan megfelelő egyenesek egymást az $O$ kettőspontban metszik, mely pont az $o$-nak pólusa a $k^{(2)}$-re vonatkozólag. A $k^{(2)}$-ben még végtelen sok cziklikus ponthármas van; másrészt a mezők minden cziklikus ponthármasa körül írt kúpsze-

let, melyre vonatkozólag az $O$-nak polárisa az $o$, egy a $\mu\mu_1$ kollinear mezőkben önmagának megfelelő kúpszelet, és mindezen $(\infty^1)$ kúpszeletek egymást és a két képzetes kettősegyenest a képzetes kettőspontokban érintik.

Ha a $\mu\mu_1$ ternär cziklikus mezőben a $B_1$ pont az $OA_1$-nek egy pontja, akkor az $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$ ponthármasok nemcsak háromszorosan, hanem még az $O$ pontra vonatkozólag is, tehát négyszeresen perspektivek. Ez utóbbi perspektivitáshoz tartozó kollineáczió-tengely az $o$ egyenes, mert az $A_1A_2$, $B_1B_2$; stb. megfelelő oldalpárok egymást egy cziklikus ponthármasban egy egyenesen metszik, és csak az $o$ egyenesen vannak cziklikus ponthármasok.

Ha valamely sík mezőben ternär cziklikus kollinear vonatkozást akarunk létesíteni, akkor egy $A_1A_2A_3$ cziklikus ponthármast és még egy megfelelő pontpárt, vagy az $O$ kettőspontot tetszésszerint vehetjük fel, csak az $A_1A_2A_3$ pontok egy háromszögnek legyenek szögpontjai és az $O$ ne feküdjék ennek oldalain, mert az $OA_1A_2A_3$, $OA_2A_3A_1$ négyszögek a $\mu\mu_1$ mezők kollinear vonatkozását meghatározzák. A ternär cziklikus mezőt ekkor $O.A_1A_2A_3$-mal, vagy ha még egy pontcziklus $B_1B_2B_3$ ismeretes, $A_1A_2A_3.B_1B_2B_3$...-mal jelöljük.

Ha az $A_1A_2A_3$ háromszöget szabályosan és az $O$ kettőspontot annak középpontjában vesszük fel, akkor az $O.A_1A_2A_3$, vagyis a $\mu$ mező az $O$ pont körül 120°-kal forgatva az $O.A_2A_3A_1$-be, azaz a $\mu_1$ mezőbe megy át.

Ebből következik, hogy ebben a mezőben a cziklikus ponthármasok mind oly szabályos háromszögeknek szögpontjai, melyeknek középpontja az $O$ pont. Ez oknál fogva ezt a különös ternär cziklikus mezőt *szabályos*-nak, minden mást *általános*-nak nevezzük. A szabályos ternär cziklikus mező $o$ kettősegyenese végtelen távol van, mert csak ez az egyedüli egyenes nem változik, ha a mezőt forgatjuk; az $O$ kettőspontból kisugárzó hármassugarak 120°-u szögeket képeznek egymással, és az $o$-n a ponthármasok az ily sugárhármasoknak végtelen távol fekvő pontjai.

Ha $O'.A'_1A'_2A'_3$ egy szabályos ternär cziklikus mező $\mu'$, az $OA_1A_2A_3$ pedig egy tetszésszerinti négyszög a $\mu$ mezőben, akkor a $\mu'$ és a $\mu$ között oly kollinear vonatkozást létesíthetünk, hogy az $O'A'_1A'_2A'_3$ négyszögnek, az $OA_1A_2A_3$ négyszög feleljen meg. Az $O'.A'_1A'_2A'_1$ szabályos ternär cziklikus mezőnek és abban minden ponthármasnak egy általános ternär cziklikus mező $O.A_1A_2A_3$ és abban a ponthármasok felelnek meg. Viszont minden

általános ternär cziklikus mező kollineacziò útján szabályosba alakítható át (transformálható).

Ez utóbbi vizsgálataink eredménye egybefoglalva, így szól: *Ha két sík mezőt akkép vonatkoztatunk egymásra kollinear, hogy az $A_1A_2A_3$ háromszögnek az egyik mezőben* az $A_2A_3A_1$ *háromszög felel meg a másikban, azaz egy háromszög szögpontjai egymásnak cziklikusan felelnek meg, akkor $\infty^2$ háromszög van a mezők közös síkjában, melynek szögpontjai és oldalai a kollineacziò folytán cziklikusan felelnek meg. Az ily háromszögeknek szögpontjait és oldalait cziklikus ponthármasoknak, illetve egyeneshármasoknak, és a két mezőt együttvéve: ternär cziklikus mezőnek nevezzük. Két háromszög az ily mezőben, melynek szögpontjai ponthármasok, általában háromszorosan perspektivek; a perspektivitásokhoz tartozó kollineacziò-középpontok és tengelyek szintén pont- és egyeneshármasok a mezőben.*

*A két kollinear mezőnek, mely a ternär cziklikus mezőt alkotja, csak egy valós kettőspontja és kettősegyenese van; amabból $\infty^1$ cziklikus sugárhármasok sugároznak ki, ebben ugyanannyi cziklikus ponthármasok feküsznek, melyek a sugárhármasokkal perspektivek; ama sugárhármasok a mező összes ponthármasait projicziálják a kettőspontból, ezek a ponthármasok a kettősegyenesen pedig a mező összes egyeneshármasainak metszőpontjai a kettősegyenessel.*

*Ha a ternär cziklikus mezőben a ponthármasok szabályos háromszögeknek szögpontjai, akkor azoknak középpontjai egybeesnek a mező kettőspontjába; a mező kettősegyenese ekkor végtelen távol van és a mezőt szabályosnak nevezzük. Minden általános ternär cziklikus mező kollinear transformáczióval szabályosba vihető át.*

Láttuk a 213. oldalon, hogy két kollinear mező általában nem hozható és csupán akkor hozható involucziós helyzetbe, ha az $rs$, $q_1s_1$ szalagok szélessége egyenlő. Ezt most így fejezzük ki, hogy: két általános kollinear mező binär cziklikus helyzetbe általában nem hozható.

*De két általános kollinear mező $\mu$ és $\mu_1$ $\infty^1$-szer hozható ternär cziklikus helyzetbe.* Ugyanis valamely párhuzamos sugársornak a $\mu$-ben, mely az $r$ ellentengelyhez $\varphi$ szög alatt hajlik, megfelel egy közönséges sugársor a $\mu_1$-ben, melynek középpontja a $q_1$ ellentengelyben van. Ez utóbbinak sugarai között kettő a $q_1$-hez szintén $\varphi$ szög alatt hajlik.

Ha ezeknek egyike az $a_1$, akkor a neki megfelelő $a$ sugár a párhuzamos sugarú sorban olyan, hogy $(ar) \sphericalangle = (a_1q_1) \sphericalangle = \varphi$. Ezért a $\mu$ és $\mu_1$ mező akkép helyezhető egy síkba, hogy az

$aq_1$, $ra_1$, $qr_1$ egyenesek egybeessenek, tehát az $arq$ háromszög oldalai és így egyszersmind szögpontjai cziklikusan felelnek meg egymásnak a $\mu$, $\mu_1$ mezőkben; a két adott mező tehát ekkor egy ternär cziklikus mezőt képez.

5. Térjünk ezután a négyesen (quaternär) cziklikus kollinear mezőhöz, azaz olyanhoz, melyben a $\mu$ mező $A_1A_2A_3A_4$ pontjainak az $A_2A_3A_4A_1$ pontok felelnek meg a $\mu_1$ mezőben; e két cziklikusan megfelelő pontnégyes

$$A_1A_2A_3A_4$$
$$A_2A_3A_4A_1$$

éppen meghatározza a $\mu$ és $\mu_1$ mezők kollineaczióját.

Az $A_1A_3$, $A_2A_4$ egyeneseknek és azok $O$ metszőpontjának megfelelnek az $A_2A_4$, $A_3A_1$ egyenesek és azoknak ugyancsak $O$ metszőpontja; ez az $O$ pont tehát kettőspontja a mezőknek.

Az $A_1A_2$, $A_3A_4$ és az $A_2A_3$, $A_4A_1$ egyeneseknek metszőpontjai egymásnak mindkét mezőben megfelelők; azoknak $o$ összekötő egyenese tehát kettősegyenes és a rajta fekvő megfelelő pontsorok involucziósak. Minthogy az $o$-nak metszőpontjai az egymásnak mindkét mezőben megfelelő $A_1A_3$, $A_2A_4$ egyenesekkel amaz involucziónak társpontjai, melyek az előbb talált társpontokat harmónikusan választják el, azért az $o$-n az involuczió elliptikus.

Az $A_1A_2A_3A_4$ négyszög minden szögpontjának más két szögpont felel meg a kollinear mezőkben, melyek a négyszög harmónikus tulajdonsága folytán az $O$ átlóspont és az $o$ átlótól harmónikusan vannak elválasztva; így az $A_1$ pontnak megfelelnek az $A_2A_4$ pontok, melyek az $O$ és $o$-tól harmónikusan vannak elválasztva.

Feleljen meg a $\mu$ mező tetszésszerinti $B_1$ pontjának a $\mu_1$-ben a $B_2$; ennek, mint a $\mu$-hez tartozónak a $B_3$; ennek, mint a $\mu$-hez tartozónak a $B_4$; végre ennek, mint a $\mu$-hez tartozónak, az $X$, azaz legyenek a $\mu$ és $\mu_1$-ben a megfelelő pontok

$$A_1A_2A_3A_4B_1B_2B_3B_4$$
$$A_2A_3A_4A_1B_2B_3B_4X.$$

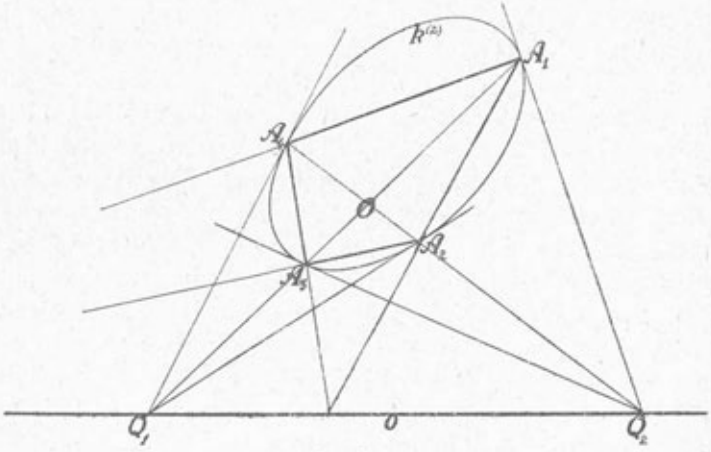
Kimutatjuk, hogy az $X$ pont a $B_1$-ben van, tehát a $B_1B_2B_3B_4$ pontok is egy négyes cziklust képeznek a közös mezőben.

A $B_2$ pontnak, mint a $\mu$ és $\mu_1$-hez tartozónak megfelelnek a $\mu_1$ és $\mu$-ben a $B_3$ és $B_1$ pontok; ugyanígy a $B_4$-nek megfelelnek a $\mu_1$ és $\mu$-ben az $X$ és $B_3$ pontok. Minthogy az $o$ kettősegyenesen a megfelelő pontok involucziót képeznek és már az $A_2$-nek mindkét mezőben megfelelő $A_1A_3$ pontok, mint láttuk előbb, az $O$ és $o$-tól harmónikusan vannak elválasztva, azért (22. §. 2. p. végén) a $B_1B_3$

és az $XB_3$ pontok az $O$ és $o$-tól szintén harmónikusan lesznek elválasztva, tehát az $X$ pont egybeesik a $B_1$-gyel.

Az egész quaternär cziklikus mező ily $A_1A_2A_3A_4$, $B_1B_2B_3B_4$,..., számra $\infty^2$, pontnégyesekkel van bevonva, melynek pontjai cziklikusan felelnek meg egymásnak.

Az $A_1A_3$, $A_2A_4$ egyeneseknek (41. ábra) $Q_1$, $Q_2$ metszőpontjait az $o$ egyenessel, kössük össze az $A_1A_3$, illetve az $A_2A_4$ pontokkal. Ezek egy az $A_1A_2A_3A_4$ pontokon keresztül menő $k^{(2)}$ kúpszeletnek érintői az illető pontokban. E kúpszelet önmagának felel meg a kollinear mezőkben; keresztül megy az $o$-n fekvő involucziónak $PQ$ képzetes kettőspontjain; érinti az $OP$, $OQ$ képzetes sugarakat és az $O$ pontnak pólusa reá nézve az $o$ egyenes. A $k^{(2)}$ kúpszeletbe még




41. ábra.

végtelen sok cziklikus pontnégyes írható be; ugyanígy a quaternär cziklikus mező minden cziklikus pontnégyesén és a $PQ$ kettőspontokon keresztül menő $k^{(2)}$ kúpszeletébe és minde $\infty^1$ számú kúpszelet egymást a $PQ$ pontokban érinti.

Ha az $A_1A_2A_3A_4$ pontok egy négyzet szögpontjai, akkor az összes cziklikus négyesek négyzeteknek szögpontjai és ekkor a $\mu\mu_1$ quaternär mezőt *szabályosnak* nevezzük. Az összes négyzetek közös középpontja és a sík végtelen távol fekvő egyenese a $\mu$ és $\mu_1$ kollinear mezők kettőspontja, illetve kettősegyenese, és az egyik mező 90°-kal a kettőspont körül forgatva, a másik mezőbe megy át. Minden quaternär cziklikus mező kollinear transformáczió útján egy szabályos quaternär cziklikus mezőbe vihető át hasonlóképen, mint azt a ternär cziklikus mezők esetében láttuk.

6. Valamely síknégyszög $A_1A_2A_3A_4$ szögpontjai 24 kollinear vonatkozást létesíthetnek, melyekben ama pontok részben önmaguknak, részben egymásnak felelnek meg. És pedig:

1. Mindegyik pont megfelelhet önmagának, képletileg:

$$A_1 \,.\, A_2 \,.\, A_3 \,.\, A_4.$$

Ebben a kollineaczióban, mely az *identitás* vagy a kongruenczia, a sík minden pontja önmagának felel meg.

2. Két pont önmagának, a másik kettő pedig involucziósan felel meg egymásnak, vagy képletben:

$$\begin{array}{lll} A_1 \,.\, A_2 \,.\, A_3A_4 & A_1 \,.\, A_3 \,.\, A_4A_2 & A_1 \,.\, A_4 \,.\, A_2A_3 \\ A_3 \,.\, A_4 \,.\, A_1A_2 & A_4 \,.\, A_2 \,.\, A_1A_3 & A_2 \,.\, A_3 \,.\, A_1A_4 \end{array}$$

Az első esetben tehát az $A_1A_2$ egyenes az involucző-tengely $o$, az $A_3A_4$ két egymásnak involucziósan megfelelő pont, mely az $o \equiv A_1A_2$ egyenest a mező involucző-középpontjától, $O$-tól, harmónikusan választja el; a mező *binär cziklikus*.

3. Két pontpár felel meg egymásnak involucziósan; képletben:

$$A_1A_2 \,.\, A_3A_4 \qquad A_1A_3 \,.\, A_4A_2 \qquad A_1A_4 \,.\, A_2A_3.$$

Az első esetben pl. az $A_1A_2$, $A_3A_4$ egyeneseknek metszőpontja az involucző-középpont $O$; az $A_1A_3$, $A_2A_4$ és az $A_1A_4$, $A_2A_3$ egyenesek metszőpontjainak összekötő egyenese az involucző-tengely: $o$. A mezők szintén *binär cziklikusok*.

4. Mindegyik pont önmagának, a többi három pedig cziklikusan felel meg egymásnak; képletben:

$$\begin{array}{ll} A_1 \,.\, A_2A_3A_4 & A_1 \,.\, A_2A_4A_3 \\ A_2 \,.\, A_1A_3A_4 & A_2 \,.\, A_1A_4A_3 \\ A_3 \,.\, A_1A_2A_4 & A_3 \,.\, A_1A_4A_2 \\ A_4 \,.\, A_1A_2A_3 & A_4 \,.\, A_1A_3A_2. \end{array}$$

Az elsőben pl. az $A_1$ pont a mező kettőspontja, az $A_2A_3A_4$ pedig egy hármas cziklust képez, melynek az $A_3A_4A_1$ pontok felelnek meg. A mező *ternär cziklikus*.

5. A négy pont egymásnak cziklikusan felel meg; képletben:

$$\begin{array}{lll} A_1A_2A_3A_4, & A_1A_3A_2A_4, & A_1A_4A_2A_3 \\ A_1A_2A_4A_3, & A_1A_3A_4A_2, & A_1A_4A_3A_2 \end{array}$$

Az első esetben tehát az $A_1A_2A_3A_4$ pontok képeznek egy quaternär cziklust és a mező *quaternär cziklikus*.

Minden pontnak a 24 kollineacció folytán egy pont felel meg, melyek közül az identitásból származó magával a ponttal esik egybe. —

7. E §-nek elején talált tételek két kollinear és konczentrikus sugárnyalábra, vagy egy sík mezőre és egy vele kollinear sugárnyalábra átvive ekkép szólanak:

Ha két konczentrikus sugárnyaláb egymásra kollinear van vonatkoztatva, de nem perspektiv, akkor a nyalábban legalább egy és legföljebb három oly valós sugár (kettőssugár) és ugyanannyi valós sík (kettőssík) van, mely megfelelőjével esik egybe; továbbá, ha egy sík mező egy sugárnyalábbal kollinear, de nem perspektiv, akkor legalább egy és legföljebb három oly valós pont és ugyanannyi egyenes van a mezőben, mely a nyaláb megfelelő sugarán, illetve síkján fekszik.

Hasonlókép átvihetők a többi tételek is a konczentrikus kollinear sugárnyalábokra. Igy pl. ha az $M$ és $M_1$ sugárnyalábokban az egymásnak megfelelő derékszögű hároméleknek $qrs$, $q_1r_1s_1$-nek éleit úgy egyesítjük, hogy a $qs_1$, $rq_1$, $sr_1$ élek egybeessenek, akkor a két kollinear nyaláb egy ternär cziklikus nyalábot képez.

## 23. §. A köbös involucziò.

1. Az előbbi §-ban megismerkedtünk a másodfokozatú alapalakzatok ternär-cziklikus kollinear vonatkozásával. A másodfokozatú alapalakzat azonban végtelen sok első fokozatú alapalakzatból van összetéve. Ezért a következőkben részletesen akarunk foglalkozni az első fokozatú alapalakzatok ternär-cziklikus projektiv vonatkozásával, melynek ismerete később, a III. r. térgörbék tárgyalásánál hasznunkra szolgál.

Létesitsünk e végből egy $k^{(2)}$ kúpszeleten fekvő pontsorban *egy ternär-cziklikus projektiv vonatkozást*, tehát olyant, melyben a kúpszelet $A_1A_2A_3$ pontjainak az $A_2A_3A_1$ pontok felelnek meg. Az $A_1A_2A_3$ pontoknak (42. ábra) $a_1a_2a_3$ érintői, az $A_1A_2A_3$-mal perspektiv háromszögnek oldalai; e perspektiv háromszögpárhoz tartozó kollineacció-középpont $O$ és kollineacció-tengely $o$, pólus és poláris a $k^{(2)}$-re vonatkozólag. Az $O$ pont az $O.A_1A_2A_3$ ternär-cziklikus mező kettőspontja, az $o$ egyenes pedig annak kettősegyenese. Az $o$ egyenes a $k^{(2)}$-t, ha az $A_1A_2A_3$ pontok valósak voltak, két kapcsolt képzetes pontban, $JK$-ban metszi, melyeknek $jk$ érintői az $O$ pontban találkoznak; az $OJK \equiv ojk$ háromszög a $\mu \equiv OA_1A_2A_3$... és a vele kollinear $\mu_1 \equiv OA_2A_3A_1$ ... mező kettős háromszöge.

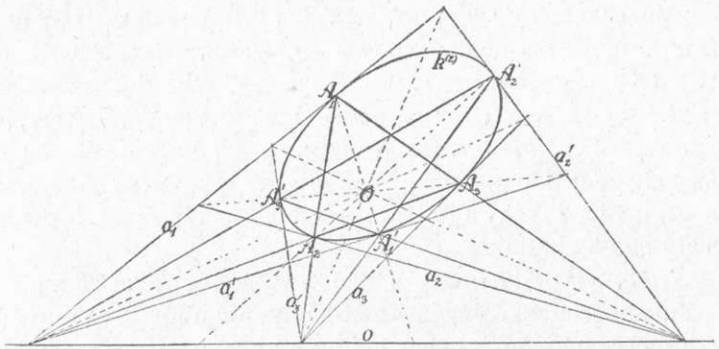
Az $A_1A_2A_3JK$ pontok közül a $k^{(2)}$-n az $A_1A_1 \,.\, A_2A_3 \,.\, JK$, $A_1A_3 \,.\, A_2A_2 \,.\, JK$ és az $A_1A_2 \,.\, A_3A_3 \,.\, JK$ pontpárok involucziót képeznek. Az első, harmadik és második involuczióból kifolyólag

$$A_1A_3A_2KJ \;\overline{\wedge}\; \left\{ \begin{array}{l} A_1A_2A_3JK \\ A_2A_3A_1JK \\ A_3A_1A_2JK \end{array} \right.$$

míg az első, második és harmadik involuczió miatt

$$A_1A_2A_3JK \;\overline{\wedge}\; \left\{ \begin{array}{l} A_1A_3A_2KJ \\ A_3A_2A_1KJ \\ A_2A_1A_3KJ \end{array} \right.$$

Ezzel analogus viszonylatok írhatók fel a $k^{(2)}$ kúpszeletet az $A_1A_2A_3JK$ pontokban érintő $a_1a_2a_3jk$ sugarakról.




42. ábra.

Cremona szerint a $JK$ pontok az $A_1A_2A_3$ pontokkal *aequianharmónikus* pontnégyeseket képeznek, azaz az $A_1A_2A_3J$ és $A_1A_2A_3K$ pontnégyesek aequianharmónikusak. Mindazon $B_1B_2B_3$ ponthármasok a $k^{(2)}$ kúpszeleten, melyek a $J$ és $K$-val aequianharmónikus pontnégyeseket képeznek, az $A_1A_2A_3 \ldots \overline{\wedge}\; A_2A_3A_1 \ldots$ ternär-cziklikus projektiv vonatkozásban egy pontcziklust adnak; azaz: $A_1A_2A_3B_1B_2B_3 \;\overline{\wedge}\; A_2A_3A_1B_2B_3B_1$. Célunk ily pontcziklusokat szerkeszteni a $k^{(2)}$ kúpszeleten.

Az $OA_1$, $OA_2$, $OA_3$ egyenesek a $k^{(2)}$-t még az $A'_1, A'_2, A'_3$ pontokban metszik, melyeknek $a'_1, a'_2, a'_3$ érintői az $(a_1o)$, $(a_2o)$, $(a_3o)$ pontokon mennek keresztül. Minthogy az $A'_1A'_2A'_3$, $a'_1a'_2a'_3$ háromszögek szintén perspektivek az $O$ pontra és az $o$ tengelyre vonatkozólag: az $A_iA_j$, $A'_iA'_j$ egyenesek egymást az $A_kA'_k$ egyenesnek

$(a_k a'_k)$ pólusában metszik és ezért úgy az $A_1A_2A_3$, mint az $A'_1A'_2A'_3$ ponthármasok bármely két pontja a harmadikat a másik hármasnak egy pontjától harmónikusan választja el. Ebből pedig az következik, hogy az $A_1A'_1 \,.\, A_2A'_2 \,.\, A_3A'_3 \,.\, JK$ és az $A_iA'_j \,.\, A_jA'_i \,.\, A_kA'_k \,.\, JK$ pontpárok involucziókat képeznek.

Az $A_2A'_2, A_2A'_1; A_2A_3, A_2A'_3$ sugárpárok egymást harmónikusan választják el; az első pár az $A_1A'_1$ egyenest az $O$ és $A'_1$ pontban metszi; e pontok a második sugárpártól, és így az $A_2A_3$ és $o$ egyenesektől harmónikusan van elválasztva. Ha tehát a $k^{(2)}$ kúpszeleten az $A_1$ pont és azonkívül a $JK$ pontpár, mint az $o$ egyenesnek két metszőpontja a $k^{(2)}$-vel adva van, akkor azt a két pontot $A_2$ és $A_3$-mat, melyre nézve az $A_1A_2A_3J$ és $A_1A_2A_3K$ pontnégyesek aequianharmónikusak, akkép szerkesztjük, hogy az $A_1$ pont $a_1$ érintőjének és az $o$ egyenesnek $(oa_1)$ metszőpontjából meghúzzuk a második érintőt, $a'_1$-et a $k^{(2)}$-hez és a $k^{(2)}$-őt azzal az egyenessel metszük az $A_2$, $A_3$ pontokban, mely az $o$-t annak a $k^{(2)}$-re vonatkozó $O$ pólusától és az $a'_1$ érintőtől harmónikusan választja el. E szerkesztésből látható, hogy a $JK$ és $A_2A_3$ egyenesek közül az egyik a $k^{(2)}$ kúpszeletet valós, a másik kapcsolt képzetes pontban metszi; továbbá még azt is látjuk, hogy miként kell egy $B_1$ ponthoz azt a $B_2B_3$ pontot megtalálni, mely a $B_1$-gyel egy cziklust képez, végre még az is következtethető, hogy ha az $A_1$ pont a $J$- vagy a $K$-ban vétetik fel, akkor az $A_2A_3$ pontok is az illető pontba jutnak.

Arról a $\infty^1$ ponthármasról, mely a $k^{(2)}$ kúpszeleten a $JK$ pontokkal aequianharmónikus négyeseket képez, minthogy a ponthármasok bármely pontjából a másik két pont ugyanegyfélekép szerkeszthető, azt akarjuk mondani, hogy azok egy *köbös involucziót*, $I^{(3)}$-*t képeznek*. A $JK$ pontok e köbös involucziónak *hármaspontjai*, mert ezekben egy ponthármas három pontja egyesül. A $JK \equiv o$ egyenes az $I^{(3)}$ köbös involucziónak *tengelye* vagy *polárisa*, ennek a $k^{(2)}$-re vonatkozó pólusa, $O$, pedig az involucziónak *középpontja* vagy *pólusa*. A szerint, a mint a $JK$ hármaspontok valósak vagy képzetesek, a köbös involucziót *hyperbolikusnak*, vagy *elliptikusnak* nevezzük.

2. A $k^{(2)}$ kúpszeleten levő $I^{(3)}$ köbös involucziónak ponthármasait a $k^{(2)}$-nek valamely $T$ pontjából projicziáló sugárhármasok egy köbös sugárinvolucziót képeznek a $T$ sugársorban; ennek metszése bármely $t$ egyenessel egy köbös pontinvolucziót a $t$ pontsorban. A $t$ egyenesen levő köbös-involucziós pontsort valamely egyenesből projicziáló síksor köbös síkinvolucziót. A $k^{(2)}$ kúpszeleten levő $I^{(3)}$ ponthármasait a $k^{(2)}$ síkján kívül fekvő $M$ pontból projicziáló

alkotóhármasok az $M^{(2)} \equiv M.k^{(2)}$ II. r. kúpon egy köbös involucziót képeznek; az $I^{(3)}$ involucziónak involuczió-tengelyét és involuczió-középpontját projicziáló sík és sugár az $M^{(2)}$ kúpon levő köbös involucziónak involuczió-síkja és involuczió-sugara. Minden sík az $M^{(2)}$ kúpon levő köbös involuczió alkotó-hármasait egy kúpszeleten levő köbös involuczió ponthármasaiban metszi.

Ha a $k^{(2)}$ kúpszeleten keresztül egy $F^{(2)}$ hyperboloidot fektetünk, akkor az $I^{(3)}$ köbös involuczió ponthármasain keresztül menő alkotóhármasok az $F^{(2)}$-n levő sugárseregekben köbös involucziót képeznek. Ha valamely $P$ pontnak egy kúpszeletsor kúpszeleteire vonatkozó polárisai köbös involucziót képeznek a $Q$ sugársorban, akkor azok a kúpszelethármasok, melyekre vonatkozólag a $P$-nek polárisai e köbös involucziónak sugárhármasai, szintén köbös involucziót képeznek a kúpszeletsorban.

A $k^{(2)}$ kúpszeleten levő $I^{(3)}$ köbös involuczió ponthármasait az involuczió $O$ középpontjából projicziáló sugarak egy köbös sugár-involucziót, $I_O^{(3)}$-t képeznek, míg ama $I^{(3)}$ ponthármasainak érintői az $I^{(3)}$ köbös involuczió $o$ tengelyét egy köbös pontinvoluczióban, $I_o^{(3)}$-ban, metszik. Ugyanebben az $I_o^{(3)}$-ben metszik az $I_O^{(3)}$-nak sugárhármasai is az $o$ tengelyt. Az $I_o^{(3)}$ involuczió ponthármasainak polárisai a $k^{(2)}$-re vonatkozólag, sugárhármasai az $I_O^{(3)}$ involucziónak. Az $I^{(3)}$ ponthármasai a $k^{(2)}$ kúpszelet bármely pontjából az $I_o^{(3)}$ ponthármasaiba projicziáltatnak. Az $I^{(3)}$ bármely két ponthármasa az $o$ egyenes három pontjából, mely az $I_o^{(3)}$-ban egy hármast képez, egymásba projicziálható.

Az a három pont, $A'_1A'_2A'_3$, mely egy $I^{(3)}$ köbös involuczió egyik hármasának, $A_1A_2A_3$-nak, két-két pontját a harmadiktól harmónikusan választja el, szintén ponthármast képez az $I^{(3)}$-ban. Két hármast, valamely köbös-involucziós sorban vagy általában akármilyen sorban, melyek közül az egyiknek bármely két eleme a harmadikat a másiknak egy elemétől harmónikusan választja el, *társhármasnak* vagy *kapcsolt hármasnak* nevezünk. Két kapcsolt hármasban oly két elemet, mely úgy az egyik, mint a másik hármasnak más két elemét harmónikusan választja el, szintén *társ*nak vagy *kapcsolt*nak nevezünk. E szerint: ha az $I^{(3)}$ köbös involuczióban, az $A_1A_2A_3$, $A'_1A'_2A'_3$ hármasok társhármasok és ezekben az $A_1A'_1$, $A_2A'_2$, $A_3A'_3$ pontpárok társpontok, akkor az $A_2A_3A_1A'_1$, $A_3A_1A_2A'_2$, $A_1A_2A_3A'_3$, $A'_2A'_3A'_1A_1$, $A'_3A'_1A'_2A_2$, $A'_1A'_2A'_3A_3$ négyesek harmónikusak. A $k^{(2)}$ kúpszeleten levő $I^{(3)}$ köbös involucziónak társpontjai és társhármasai az involuczió-középpontból egymásba projicziáltatnak. — Mindazoknak a szabályos három-

szögeknek szögpontjai, melyek ugyanegy síkban vannak és középpontjuk egy $O$ pont, az $O$ pontból egy *szabályos* köbös-involucziós sugársorral projiczáltatnak.

3. Az $F^{(2)}$ hyperboloid mindkét sugárseregében három sugarat veszünk fel; ezek: $g_1g_2g_3$ és $h_1h_2h_3$.

A $(g_ih_j)$, $(g_kh_l)$ pontoknak összekötő egyenese a $[g_ih_l]$, $[g_kh_j]$ síkoknak metszővonala, vagyis

$$(g_ih_j)(g_kh_l) \equiv [g_ih_l][g_kh_j].$$

A $(g_ih_j)$, $(g_kh_l)$, $(g_mh_n)$ pontokon keresztül menő $(g_ih_j)(g_kh_l)(g_mh_n)$ síknak pólusa a $[g_ih_j]$, $[g_kh_l]$, $[g_mh_n]$ síkoknak metszőpontja $[g_ih_j][g_kh_l][g_mh_n]$.

Az $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, $\beta_1$, $\beta_2$, $\beta_3$ síkoknak pólusai az $F^{(2)}$ hyperboloidra vonatkozólag az $A_1,A_2,A_3$, $B_1,B_2,B_3$ pontok, ha:

$$\begin{array}{ll}
\alpha_1 \equiv (g_1h_1)(g_2h_2)(g_3h_3) & A_1 \equiv [g_1h_1][g_2h_2][g_3h_3] \\
\alpha_2 \equiv (g_2h_1)(g_3h_2)(g_1h_3) & A_2 \equiv [g_2h_1][g_3h_2][g_1h_3] \\
\alpha_3 \equiv (g_3h_1)(g_1h_2)(g_2h_3) & A_3 \equiv [g_3h_1][g_1h_2][g_2h_3] \\
\beta_1 \equiv (g_1h_1)(g_2h_3)(g_3h_2) & B_1 \equiv [g_1h_1][g_2h_3][g_3h_2] \\
\beta_2 \equiv (g_2h_2)(g_3h_1)(g_1h_3) & B_2 \equiv [g_2h_2][g_3h_1][g_1h_3] \\
\beta_3 \equiv (g_3h_3)(g_1h_2)(g_2h_1) & B_3 \equiv [g_3h_3][g_1h_2][g_2h_1]
\end{array}$$

A $B_1$ pont a $[g_2h_3][g_3h_2] \equiv (g_2h_2)(g_3h_3)$ egyenesen van
„ $B_2$ „ „ $[g_3h_1][g_1h_3] \equiv (g_3h_3)(g_1h_1)$ „ „
„ $B_3$ „ „ $[g_1h_2][g_2h_1] \equiv (g_1h_1)(g_2h_2)$ „ „

mely három egyenes az $\alpha_1$ síkon fekszik; az $\alpha_1$ sík tehát keresztül megy a $B_1B_2B_3$ pontokon.

Ugyanígy kimutatható, hogy az $\alpha_2,\alpha_3$ síkok is a $B_1B_2B_3$ pontokon, és a $\beta_1\beta_2\beta_3$ síkok az $A_1A_2A_3$ pontokon mennek keresztül. Ebből pedig az következik, hogy az $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ síkok metszővonala a $B_1B_2B_3$ egyenes és a $\beta_1\beta_2\beta_3$ síkok metszővonala az $A_1A_2A_3$ egyenes, azaz:

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \equiv B_1B_2B_3 \equiv p$$
$$\beta_1\beta_2\beta_3 \equiv A_1A_2A_3 \equiv q.$$

Ez a $pq$ egyenespár pedig polárispár az $F^{(2)}$-re vonatkozólag.

Legyen $g'_1g'_2g'_3$ és $h'_1h'_2h'_3$ az a három sugár, mely az $F^{(2)}$ hyperboloidon levő sugárseregek $g_1g_2g_3$, illetve $h_1h_2h_3$ sugarai közül kettőt-kettőt a harmadiktól harmónikusan választ el, azaz a

$$\begin{array}{lll}
g_2g_3g_1g'_1, & g_3g_1g_2g'_2, & g_1g_2g_3g'_3 \\
h_2h_3h_1h'_1, & h_3h_1h_2h'_2, & h_1h_2h_3h'_3
\end{array}$$

sugárnégyesek legyenek harmónikusak.

A

$$(g_2h_2)(g_3h_3)(g_1h_1)(g'_1h'_1)$$
$$(g_3h_3)(g_1h_1)(g_2h_2)(g'_2h'_2)$$
$$(g_1h_1)(g_2h_2)(g_3h_3)(g'_3h'_3)$$

pontnégyesek harmónikusak azon a $k_1^{(2)}$ kúpszeleten, melyben az előbbi $\alpha_1$ sík az $F^{(2)}$ hyperboloidot metszi, tehát a $(g'_1h'_1)$, $(g'_2h'_2)$, $(g'_3h'_3)$ pontok is az $\alpha_1$ síkban vannak és a $[g'_1h'_1]$, $[g'_2h'_2]$, $[g'_3h'_3]$ síkok egymást az $\alpha_1$ sík $A_1$ pólusában metszik.

Hasonló úton következtethető, hogy e táblázatban

$$\alpha_1 \equiv (g'_1h'_1)(g'_2h'_2)(g'_3h'_3)$$
$$\alpha_2 \equiv (g'_2h'_1)(g'_3h'_2)(g'_1h'_3)$$
$$\alpha_3 \equiv (g'_3h'_1)(g'_1h'_2)(g'_2h'_3)$$

$$\beta_1 \equiv (g'_1h'_1)(g'_2h'_3)(g'_3h'_2)$$
$$\beta_2 \equiv (g'_2h'_2)(g'_3h'_1)(g'_1h'_3)$$
$$\beta_3 \equiv (g'_3h'_3)(g'_1h'_2)(g'_2h'_1)$$

levő pontok, a megjelölt előbbi síkokban vannak, melyeknek pólusai az $A_1A_2A_3$ és $B_1B_2B_3$ pontok.

Tételezzük fel, hogy a $g_1g_2g_3$, $h_1h_2h_3$ sugárhármasok helyett a $g'_1g'_2g'_3$, $h_1h_2h_3$ sugárhármasok lettek volna adva és ezekből származtattuk volna le hasonló módon a $g_1g_2g_3$, $h'_1h'_2h'_3$ sugárhármasokat. Az előbbiekben kifejtettek szerint ebből azt lehet következtetni, hogy az alábbi hatszor hat pont az

$$\alpha'_1 = (g'_1h_1)(g'_2h_2)(g'_3h_3)(g_1h'_1)(g_2h'_2)(g_3h'_3)$$
$$\alpha'_2 = (g'_2h_1)(g'_3h_2)(g'_1h_3)(g_2h'_1)(g_3h'_2)(g_1h'_3)$$
$$\alpha'_3 = (g'_3h_1)(g'_1h_2)(g'_2h_3)(g_3h'_1)(g_1h'_2)(g_2h'_3)$$

$$\beta'_1 = (g'_1h_1)(g'_2h_3)(g'_3h_2)(g_1h'_1)(g_2h'_3)(g_1h'_2)$$
$$\beta'_2 = (g'_2h_2)(g'_3h_1)(g'_1h_3)(g_2h'_2)(g_3h'_1)(g_1h'_3)$$
$$\beta'_3 = (g'_3h_3)(g'_1h_2)(g'_2h_1)(g_3h'_3)(g_1h'_2)(g_2h'_1)$$

síkokban van, mely síkoknak $A'_1A'_2A'_3$, $B'_1B'_2B'_3$ pólusaiban ama pontok polárissíkjai egymást metszik.

Kimutatható, hogy az $\alpha'_1\alpha'_2\alpha'_3$ síkok szintén a $p$ egyenesen, a $\beta'_1\beta'_2\beta'_3$ síkok pedig a $q$ egyenesen mennek keresztül, tehát a $B'_1B'_2B'_3$ pontok a $p$ egyenesen az $A'_1A'_2A'_3$ pontok pedig a $q$ egyenesen vannak.

Ugyanis a

$$(g_2h_1)(g_3h_1)(g_1h_1)(g'_1h_1)$$
$$(g_3h_2)(g_1h_2)(g_2h_2)(g'_2h_2)$$
$$(g_1h_3)(g_2h_3)(g_3h_3)(g'_3h_3)$$

pontnégyesekben az első és második pont a harmadik és negyediktől harmónikusan van elválasztva. De az egymásra következő oszlopokban álló pontok az $\alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_1\ \alpha'_1$ síkokban vannak, melyek közül az első három a $p$ egyenesen megy keresztül, tehát a negyedik sík is a $p$-n fog keresztül menni és a negyedik sík, $\alpha'_1$, a harmadikat az első és másodiktól harmónikusan választja el.

Ugyanígy kimutatható ez a többi új síkokra, azaz hogy az

$$\begin{matrix}\alpha_2\alpha_3\alpha_1\alpha'_1 & \alpha_3\alpha_1\alpha_2\alpha'_2 & \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha'_3\\ \beta_2\beta_3\beta_1\beta'_1 & \beta_3\beta_1\beta_2\beta'_2 & \beta_1\beta_2\beta_3\beta'_3\end{matrix}$$

síknégyesek és azoknak pólusai, az

$$\begin{matrix}A_2A_3A_1A'_1 & A_3A_1A_2A'_2 & A_1A_2A_3A'_3\\ B_2B_3B_1B'_1 & B_3B_1B_2B'_2 & B_1B_2B_3B'_3\end{matrix}$$

pontnégyesek harmónikusak.

Ha figyelembe vesszük, hogy a

$$[g_1h_1][g_2h_2][g_3h_3][g'_1h'_1][g'_2h'_2][g'_3h'_3]$$

síkok egymást az $\alpha_1$ sík $A_1$ pólusában metszik és ama hat sík közül e három párnak metszővonalai

$$\begin{aligned}[g_1h_1][g'_1h'_1] &= (g'_1h_1)(g_1h'_1)\\ [g_2h_2][g'_2h'_2] &= (g'_2h_2)(g_2h'_2)\\ [g_3h_3][g'_3h'_3] &= (g'_3h_3)(g_3h'_3)\end{aligned}$$

az $\alpha'_1$ síkban vannak, következik, hogy az $\alpha'_1$ sík az $\alpha_1$-nek $A_1$ pólusán megy keresztül. Ez mondható a többi hasonnemű síkokról, azaz hogy az $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha'_1\alpha'_2\alpha'_3\beta_1\beta_2\beta_3\beta'_1\beta'_2\beta'_3$ síkok rendre az $A'_1A'_2A'_3A_1A_2A_3$ $B'_1B'_2B'_3B_1B_2B_3$ pontokon mennek keresztül, tehát az $\alpha_i\alpha'_i$ és a $\beta_i\beta'_i$ síkpárok, valamint az $A_iA'_i$ és a $B_iB'_i$ pontpárok kapcsolt polárissíkok és kapcsolt pólusok az $F^{(2)}$-re vonatkozólag.

Foglaljuk most egybe a talált eredményeket:

„Ha a $g_1g_2g_3$ és $h_1h_2h_3$ sugárhármasok két egymást támasztó sugárseregben vannak és a $g'_1g'_2g'_3$, $h'_1h'_2h'_3$ sugárhármasok az előbbi sugárhármasoknak két-két sugarát a harmadiktól harmónikusan választják el, akkor a $g_1g_2g_3g'_1g'_2g'_3$ és a $h_1h_2h_3h'_1h'_2h'_3$ sugaraknak 36 metszőpontja hatával az $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ $\alpha'_1\alpha'_2\alpha'_3$ síkokban és hatával a $\beta_1\beta_2\beta_3\beta'_1\beta'_2\beta'_3$ síkokban fekszik és az első hat sík egy $p$ egyenesen, a másik hat sík összekötő síkja hatával az $A_1A_2A_3A'_1A'_2A'_3$ pontokon és a $B_1B_2B_3B'_1B'_2B'_3$ pontokon megy keresztül és az első hat pont egy $q$ egyenesen, a másik

pedig egy $q$ egyenesen megy keresztül. E két egyenes polárispár a felvett sugarakat tartó $F^{(2)}$ hyperboloidra vonatkozólag. Ugy az első, mint a másik hat sík három párra, $\alpha_1\alpha'_1$, $\alpha_2\alpha'_2$, $\alpha_3\alpha'_3$ és $\beta_1\beta'_1$, $\beta_2\beta'_2$, $\beta_3\beta'_3$-re bontható, melyek maguk kapcsolt polárissíkok, míg azoknak a $q$-n, illetve a $p$-n fekvő $A_1A'_1$, $A_2A'_2$, $A_3A'_3$ és $B_1B'_1$, $B_2B'_2$, $B_3B'_3$ pólusai, kapcsolt pólusok az $F^{(2)}$-re vonatkozólag. Ugy az egyik, mint a másik hat sík két társhármasra, $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$, $\alpha'_1\alpha'_2\alpha'_3$-ra és $\beta_1\beta_2\beta_3$, $\beta'_1\beta'_2\beta'_3$-ra, azaz oly hármasokra bontható, hogy bármelyik hármasnak két-két síkja a harmadikat a másik hármasnak egy síkjától harmónikusan választja el."

hat pont pedig egy $p$ egyenesen van. E két egyenes polárispár a felvett sugarakat tartó $F^{(2)}$ hyperboloidra vonatkozólag. Ugy az első, mint a másik hat pont három párra $A_1A'_1$, $A_2A'_2$, $A_3A'_3$ és $B_1B'_1$, $B_2B'_2$, $B_3B'_3$-ra bontható, melyek maguk kapcsolt pólusok, míg azoknak a $p$-n, illetve a $q$-n keresztül menő $\alpha_1\alpha'_1$, $\alpha_2\alpha'_2$, $\alpha_3\alpha'_3$ és $\beta_1\beta'_1$, $\beta_2\beta'_2$, $\beta_3\beta'_3$ polárissíkjai kapcsoltak a $F^{(2)}$-re vonatkozólag. Ugy az egyik, mint a másik hat pont két társhármasra $A_1A_2A_3$, $A'_1A'_2A'_3$-ra és $B_1B_2B_3$, $B'_1B'_2B'_3$-ra, azaz oly hármasokra bontható, hogy bármelyik hármasnak két-két pontja a harmadikat a másik hármasnak egy pontjától harmónikusan választja el."

4. Tekintsük az előbbi $g_1g_2g_3$ és $h_1h_2h_3$ sugarakat az $I_g^{(3)}$ és az $I_h^{(3)}$ köbös involucziò sugárhármasainak és jelöljük ezeknek hármassugarait $g_jg_k$ és $h_jh_k$-val. A $(g_jh_j)$, $(g_kh_k)$, $(g_jh_k)$, $(g_kh_j)$ pontok egy tetraedernek szögpontjai; ennek két szemben fekvő élpárja a $g_jg_k$, $h_jh_k$, a harmadik pedig a már talált

$$p \equiv (g_jh_j)(g_kh_k) \qquad q \equiv (g_jh_k)(g_kh_j)$$

egyenespár, mely az $I_g^{(3)}$, $I_h^{(3)}$ köbös involucziókhoz $g_ig'_i$ és $h_ih'_i$ kapcsolt sugarait harmónikusan választja el.

Ha az $I_g^{(3)}$ és $I_h^{(3)}$-ban a $(g_1g_2g_3)$ és $(h_1h_2h_3)$ sugárhármasokat változtatjuk, akkor ezzel a $pq$ egyenespár nem változik. De változni fognak azok az $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$, $\alpha'_1\alpha'_2\alpha'_3$ és $\beta_1\beta_2\beta_3$, $\beta'_1\beta'_2\beta'_3$ társsíkhármasok, melyekben az $I_g^{(3)}$-nek társsugárhármasai az $I_h^{(3)}$-nak társsugárhármasait metszik. Ezek az új síkhármaspárok szintén a $p$, illetve a $q$ egyeneseken mennek keresztül és a $p$ és $q$ síksorban $\bar{I}_p^{(3)}$ és $\bar{I}_q^{(3)}$ köbös involucziókat képeznek, míg e síkhármasoknak változó pólusai, a változó $A_1A_2A_3$, $A'_1A'_2A'_3$ $B_1B_2B_3$, $B'_1B'_2B'_3$ ponthármasok, a $q$, illetve $p$ egyeneseken az $\dot{I}_q^{(3)}$, $\dot{I}_p^{(3)}$ köbös involucziókhoz ponthármasai lesznek.

Az $\bar{I}_p^{(3)}$, $\bar{I}_q^{(3)}$ köbös síkinvolucióknak hármassíkpárjai egymást a $g_j g_k h_j h_k$ négyszög oldalaiban metszik, melynek szemben fekvő szögpontjai az $\dot{I}_p^{(3)}$, $\dot{I}_q^{(3)}$ köbös pontinvolucióknak hármaspontjai.

Ugy az $I_g^{(3)}$-nek, mint az $I_h^{(3)}$-nak $\infty^1$ társsugárhármasa van. Amazok ezeket $\infty^2$ oly 36 pontban metszik, melyek hatával az $\bar{I}_p^{(3)}$ és az $\bar{I}_q^{(3)}$ involuciók társsíkhármasaiban feküsznek. Egy köbös involucionak azonban csak $\infty^1$ társhármasa van, ezért kell, hogy az $\bar{I}_p^{(3)}$ és az $\bar{I}_q^{(3)}$ minden társsíkhármasában az $I_g^{(3)}$ és az $I_h^{(3)}$-nak $\infty^1$ társsugárhármasa messe egymást.

Ehhez képest:

„Ha az $I_g^{(3)}$ és az $I_h^{(3)}$ két köbös-involucziós sugársereg az $F^{(2)}$ hyperboloidon van, akkor

az $I_g^{(3)}$-nek minden társsugárhármasa az $I_h^{(3)}$-nak minden társsugárhármasát 36 pontban metszi, melyek hatával egy $p$ síksornak és hatával egy $q$ síksornak hat-hat síkjában vannak. E síkhatosok a $p$ és $q$ síksorban egy $\bar{I}_p^{(3)}$ és egy $\bar{I}_q^{(3)}$ köbös involucionak társsíkhármasait képezik úgy, hogy e társsíkhármasok mindenikében az $I_g^{(3)}$-nek $\infty^1$ társsugárhármasa metszi az $I_h^{(3)}$-nak $\infty^1$ társsugárhármasát.

A $pq$ egyenespár, mely az $I_g^{(3)}$ és az $I_h^{(3)}$ involuciók hármassugarainak négy metszőpontján megy keresztül, polárispár, az $\bar{I}_p^{(3)}$ és $\bar{I}_q^{(3)}$ involucióknak társsíkjai pedig kapcsolt polárissíkok az $F^{(2)}$-re vonatkozólag.“

az $I_g^{(3)}$-nak minden társsugárhármasát az $I_h^{(3)}$-nak minden társsugárhármasával 36 sík által lehet összekötni, mely síkok hatával egy $p$ egyenesnek és hatával egy $q$ egyenesnek hat-hat pontjában találkoznak. E ponthatosok a $p$ és $q$ pontsorban egy $\dot{I}_p^{(3)}$ és egy $\dot{I}_q^{(3)}$ köbös involucionak társponthármasait képezik úgy, hogy e társponthármasok mindenikén $\infty^1$-szer megy oly hatszorhat sík keresztül, mely az $I_g^{(3)}$-nek társsugárhármasait az $I_h^{(3)}$-nak társsugárhármasaival összeköti.

A $pq$ egyenespár, melyben az $I_g^{(3)}$ és az $I_h^{(3)}$ involuciók sugárhármasait összekötő síkok egymást metszik, polárispár, az $\dot{I}_p^{(3)}$ és $\dot{I}_q^{(3)}$ involucióknak kapcsolt pontjai pedig kapcsolt pólusok az $F^{(2)}$-re vonatkozólag.“

5. *) Említettük volt, hogy az $F^{(2)}$ hyperboloid sugárseregeiben levő $I_g^{(3)}$ és $I_h^{(3)}$ köbös involuciók társsugarai az $F^{(2)}$-nek egy $pq$ polárispárjától harmónikusan vannak elválasztva. Ebből az következik, hogy a $g_1 g'_1 pq$, $g_2 g'_2 pq$ és $g_3 g'_3 pq$ sugárnégyesek egy $H_1^{(2)}$,

*) E §-nak 5. és 6. pontja az első olvasáskor kihagyható.

$H_2^{(2)}$ és $H_3^{(2)}$ hyperboloid egyik sugárseregében; és az $I_h^{(3)}$-nak $h_j h_k$ hármassugarai, melyek amazokat metszik, a másik sugárseregben vannak úgy, hogy a három hyperboloid a $pqh_jh_k$ négyszögön megy keresztül. Ha a $g_1g_2g_3$, $g'_1g'_2g'_3$ társsugárhármasokat változtatjuk az $I_g^{(3)}$ köbös involuczióban, akkor változni fognak a $H_1^{(2)}H_2^{(2)}H_3^{(2)}$ hyperboloid hármasok is, melyek a $pqh_jh_k$ négyszögön és $I_g^{(3)}$-nek változó társsugarain mennek keresztül. Ezek a hyperboloid hármasok egy $I_H^{(3)}$ köbös involucziós sort képeznek abban a $[pqh_jh_k] \equiv [H^{(2)}]$ *hyperboloid sorban*, melynek elemei a $pqh_jh_k$ négyszögön mennek keresztül. Ép így képezhetünk egy $[pqg_jg_k] \equiv [G^{(2)}]$ hyperboloidsort és ebben egy $I_G^{(3)}$ köbös involucziót. Ennek változó $G_1^{(2)}G_2^{(2)}G_3^{(2)}$ hyperboloidhármasai a $pq$-n és az $I_g^{(2)}$-nek $g_jg_k$ hármassugarain, tehát a $pqg_jg_k$ négyszögön, és az $I_h^{(3)}$-ban változó $h_1h_2h_3$, $h'_1h'_2h'_3$ társhármasok $h_ih'_i$ társsugarain mennek keresztül.

Az $I_H^{(3)}$-nak $H_1^{(2)}H_2^{(2)}H_3^{(2)}$ hyperboloid-hármasait metszeni fogjuk az $I_G^{(3)}$-nek $G_1^{(2)}G_2^{(2)}G_3^{(2)}$ hyperboloid hármasaival.

A $G_i^{(2)}$ és $H_i^{(2)}$ hyperboloidokon, leszármaztatások folytán, rajta feküsznek a következő sugarak:

$$G_1^{(2)} \equiv pqg_jg_kh_1h'_1 \quad G_2^{(2)} \equiv pqg_jg_kh_2h'_2 \quad G_3^{(2)} \equiv pqg_jg_kh_3h'_3$$
$$H_1^{(2)} \equiv pqh_jh_kg_1g'_1 \quad H_2^{(2)} \equiv pqh_jh_kg_2g'_2 \quad H_3^{(2)} \equiv pqh_jh_kg_3g'_3$$

Ebből látható, hogy az első hyperboloid sornak, $[G^{(2)}]$-nek, minden hyperboloidja a második hyperboloidsornak, $[H^{(2)}]$-nek, minden hyperboloidját a $pq$ egyenespáron metszi, mely már az előbbiekben ismert pont- és síkpároknak összekötő egyenese, illetve metszővonala.

Így, a $G_1^{(2)}$ és $H_1^{(2)}$ egymást a $pq$-on kívül az $l_1l'_1$ egyenespárban metszi, hol $l_1$ a $(g_1h_1)(g'_1h'_1)$ pontpárnak összekötő egyenese és egyszersmind a $[g_1h'_1][g'_1h_1]$ síkpárnak metszővonala. Mint az előbbi táblázatokból látható, ama pontpár az $\alpha_1\beta_1$ síkokban van, a síkpár pedig az $A'_1B'_1$ pontokon megy keresztül; tehát

$$l_1 \equiv (g_1h_1)(g'_1h'_1) \equiv [g_1h'_1][g'_1h_1] \equiv \alpha_1\beta_1 \equiv A'_1B'_1.$$
$$l'_1 \equiv (g_1h'_1)(g'_1h_1) \equiv [g_1h_1][g'_1h'_1] \equiv \alpha'_1\beta'_1 \equiv A_1B_1.$$

A következő táblázatba fel van írva mind a kilencz egyenespár, melyben a $G_i^{(2)}$ $H_i^{(2)}$ hyperboloidpárok a $pq$ egyenespáron kívül egymást metszik:

$$G_1^{(2)}H_1^{(2)} \begin{cases} l_1 \equiv (g_1h_1)(g'_1h'_1) = \alpha_1\beta_1 \equiv A'_1B'_1 \\ l'_1 \equiv (g_1h'_1)(g'_1h_1) \equiv \alpha'_1\beta'_1 = A_1B_1 \end{cases}$$

$$G_1^{(2)}H_2^{(2)}\begin{cases} l_2 \equiv (g_2h_1)(g'_2h'_1) \equiv \alpha_2\beta_3 \equiv A'_2B'_3 \\ l'_2 \equiv (g'_2h_1)(g_2h'_1) \equiv \alpha'_2\beta'_3 \equiv A_2B_3 \end{cases}$$

$$G_1^{(2)}H_3^{(2)}\begin{cases} l_3 \equiv (g_3h_1)(g'_3h'_1) \equiv \alpha_3\beta_2 \equiv A'_3B'_2 \\ l'_3 \equiv (g_3h'_1)(g'_3h_1) \equiv \alpha'_3\beta'_2 \equiv A_3B_2 \end{cases}$$

$$G_2^{(2)}H_1^{(2)}\begin{cases} m_1 \equiv (g_1h_2)(g'_1h'_2) \equiv \alpha_3\beta_3 \equiv A'_3B'_3 \\ m'_1 \equiv (g_1h'_2)(g'_1h_2) \equiv \alpha'_3\beta'_3 \equiv A_3B_3 \end{cases}$$

$$G_2^{(2)}H_2^{(2)}\begin{cases} m_2 \equiv (g_2h_2)(g'_2h'_2) \equiv \alpha_1\beta_2 \equiv A'_3B'_3 \\ m'_2 \equiv (g_2h'_2)(g'_2h_2) \equiv \alpha'_1\beta'_2 \equiv A_3B_3 \end{cases}$$

$$G_2^{(2)}H_3^{(2)}\begin{cases} m_3 \equiv (g_3h_2)(g'_3h'_2) \equiv \alpha_2\beta_1 \equiv A'_2B'_1 \\ m'_3 \equiv (g_3h'_2)(g'_3h_2) \equiv \alpha'_2\beta_1' \equiv A_2B_1 \end{cases}$$

$$G_3^{(2)}H_1^{(2)}\begin{cases} n_1 \equiv (g_1h_3)(g'_1h'_3) \equiv \alpha_2\beta_2 \equiv A'_2B'_2 \\ n'_1 \equiv (g_1h'_3)(g'_1h_3) \equiv \alpha'_2\beta'_2 \equiv A_2B_2 \end{cases}$$

$$G_3^{(2)}H_2^{(2)}\begin{cases} n_2 \equiv (g_2h_3)(g'_2h'_3) \equiv \alpha_3\beta_1 \equiv A'_3B'_1 \\ n'_2 \equiv (g_2h'_3)(g'_2h_3) \equiv \alpha'_3\beta'_1 \equiv A_3B_1 \end{cases}$$

$$G_3^{(2)}H_3^{(2)}\begin{cases} n_3 \equiv (g_3h_3)(g'_3h'_3) \equiv \alpha_1\beta_3 \equiv A'_1B'_3 \\ n'_3 \equiv (g_3h'_3)(g'_3h_3) \equiv \alpha'_1\beta'_3 \equiv A_1B_3 \end{cases}$$

Ebből látható, hogy a

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $G_1^{(2)}$-nek | $\begin{cases} l_1l_2l_3 \\ l'_1l'_2l'_3 \end{cases}$ | | $\begin{cases} \alpha_1\alpha_2\alpha_3, \beta_1\beta_2\beta_3 \\ \alpha'_1\alpha'_2\alpha'_3, \beta'_1\beta'_2\beta'_3 \end{cases}$ | $\begin{cases} A'_1A'_2A'_3, B'_1B'_3B'_2 \\ A_1A_2A_3, B_1B_3B_2 \end{cases}$ |
| $G_2^{(2)}$ | „ $\begin{cases} m_1m_2m_3 \\ m'_1m'_2m'_3 \end{cases}$ | sugárhármasai az | $\begin{cases} \alpha_3\alpha_1\alpha_2, \beta_3\beta_2\beta_1 \\ \alpha'_3\alpha'_1\alpha'_2, \beta'_3\beta'_2\beta'_1 \end{cases}$ | síkhármasoknak metszővonalai és az $\begin{cases} A'_3A'_1A'_2, B'_3B'_2B'_1 \\ A_3A_1A_2, B_3B_2B_1 \end{cases}$ ponthármasoknak összekötő egyenesei |
| $G_3^{(2)}$ | „ $\begin{cases} n_1n_2n_3 \\ n'_1n'_2n'_3 \end{cases}$ | | $\begin{cases} \alpha_2\alpha_3\alpha_1, \beta_2\beta_1\beta_3 \\ \alpha'_2\alpha'_3\alpha'_1, \beta'_2\beta'_1\beta'_3 \end{cases}$ | $\begin{cases} A'_2A'_3A'_1, B'_2B'_1B'_3 \\ A_2A_3A_1, B_2B_1B_3 \end{cases}$ |
| $H_1^{(2)}$ | „ $\begin{cases} l_1m_1n_1 \\ l'_1m'_1n'_1 \end{cases}$ | | $\begin{cases} \alpha_1\alpha_3\alpha_2, \beta_1\beta_3\beta_2 \\ \alpha'_1\alpha'_3\alpha'_2, \beta'_1\beta'_3\beta'_2 \end{cases}$ | $\begin{cases} A'_1A'_3A'_2, B'_1B'_3B'_2 \\ A_1A_3A_2, B_1B_3B_2 \end{cases}$ |
| $H_2^{(2)}$ | „ $\begin{cases} l_2m_2n_2 \\ l'_2m'_2n'_2 \end{cases}$ | | $\begin{cases} \alpha_2\alpha_1\alpha_3, \beta_3\beta_2\beta_1 \\ \alpha_2\alpha'_1\alpha'_3, \beta'_3\beta'_2\beta'_1 \end{cases}$ | $\begin{cases} A'_2A'_1A'_3, B'_3B'_2B'_1 \\ A_2A_1A_3, B_3B_2B_1 \end{cases}$ |
| $H_3^{(2)}$ | „ $\begin{cases} l_3m_3n_3 \\ l'_3m'_3n'_3 \end{cases}$ | | $\begin{cases} \alpha_3\alpha_2\alpha_1, \beta_2\beta_1\beta_3 \\ \alpha'_3\alpha'_2\alpha'_1, \beta'_2\beta'_1\beta'_3 \end{cases}$ | $\begin{cases} A'_3A'_2A'_1, B'_2B'_1B'_3 \\ A_3A_2A_1, B_2B_1B_3 \end{cases}$ |

Minthogy a $G_1^{(2)}$ hyperboloidnak $(l_1l_2l_3)$, $(l'_1l'_2l'_3)$ sugárhármasai a $p$-ből az $(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)$, $(\alpha'_1\alpha'_2\alpha'_3)$ társsíkhármasokkal és a $q$-ből a $(\beta_1\beta_3\beta_2)$,

$(\beta'_1\beta'_3\beta'_2)$ társsíkhármasokkal pojicziáltatnak, és hasonlókép a $q$-t és a $p$-t az $(A'_1A'_2A'_3)$, $(A_1A_2A_3)$, illetve a $(B'_1B'_3B'_2)$ $(B_1B_3B_2)$ társponthármasokban metszik, maguk az $(l_1l_2l_3)$, $(l'_1l'_2l'_3)$ sugárhármasok a $G_1^{(2)}$ hyperboloid egyik sugárseregében levő köbös involucziónak társsugárhármasai. De mert e sugárhármasok a $H_1^{(2)}H_2^{(2)}H_3^{(2)}$ hyperboloidhármasoknak metszései a $G_1^{(2)}$-vel, azért arra lehet következtetni, hogy a $G_1^{(2)}G_2^{(2)}G_3^{(2)}$, $H_1^{(2)}H_2^{(2)}H_3^{(2)}$ hyperboloidhármasok bármelyike a másiknak minden hypeboloidját egy köbös involucziónak egy társsugárhármasában metszi.

Ennélfogva:

„Az $F^{(2)}$ hyperboloid két sugárseregében levő $I_g^{(3)}$, $I_h^{(3)}$ köbös involuczióknak $g_jg_k$, $h_jh_k$ képzetes hármassugarai egy tetraedernek szemben fekvő élpárjai, melynek harmadik élpárja $pq$ valós.

Azok a hyperboloidhármasok, melyek az $I_g^{(3)}$ társhármasainak társsugarain és a $pqh_jh_k$ négyszögön mennek keresztül egy $I_H^{(3)}$ köbös involucziót képeznek a $[pqh_jh_k] \equiv [H^{(2)}]$ hyperboloidsorban, és azok a hyperboloidhármasok, melyek az $I_h^{(3)}$ társhármasainak társsugarain és a $pqg_jg_k$ négyszögön mennek keresztül egy $I_G^{(3)}$ köbös involucziót képeznek a $(pqg_jg_k) \equiv [G^{(2)}]$ hyperboloidsorban.

Az $I_G^{(3)}$ involuczió hyperboloidhármasai a $[H^{(2)}]$ sor minden hyperboloidját a $pq$-n kivül egy-egy köbös sugárinvoluczióban metszik, melyeknek hármassugarai a $h_jh_k$. Ezt a $\infty^1$ sugárinvolucziót a $p$ és $q$-ból az $\overline{I}_p^{(3)}$, illetve az $\overline{I}_q^{(3)}$ síkinvolucziók projicziálják, és a $p$ és $q$ egyenesek az $\dot{I}_p^{(3)}$, illetve $\dot{I}_q^{(3)}$ pontinvolucziókban metszik.

Hasonlóképen az $I_H^{(3)}$ involuczió hyperboloidhármasai a $[G^{(2)}]$ sor minden hyperboloidját a $pq$-n kívül egy-egy köbös sugárinvoluczióban metszik, melyeknek hármassugarai a $g_jg_k$, és ezt a $\infty^1$ sugárinvolucziót a $p$ és a $q$-ból ugyancsak az $\overline{I}_p^{(3)}$ és $\overline{I}_q^{(3)}$ síkinvolucziók projicziálják, és a $p$ és $q$ egyenesek ugyanazokban az $\dot{I}_p^{(3)}$ és $I_q^{(3)}$ pontinvolucziókban metszik.“

E tételt még kiegészíthetjük a következőkkel:

A $g_jg_kh_jh_k$ négyszögön keresztül menő hyperboloidok egy $[g_jg_kh_jh_k] \equiv [F^{(2)}]$ hyperboloidsort képeznek. Az $I_G^{(3)}$ és az $I_H^{(3)}$ köbös involucziók hyperboloidhármasai az $F^{(2)}$ sornak minden $F_i^{(2)}$ hyperboloidját, ennek egyik és másik sugárseregében levő köbös sugárinvolucziót társsugárhármasaiban metszik, és ezeknek az $F_i^{(2)}$-n levő involuczióknak hármassugarai szintén a $h_jh_k$, illetve a $g_jg_k$.

Az $[F'^{(2)}]$ sor hyperboloidjai szintén egybefoglalhatók hármasával akkép, hogy azok egy $I_F^{(3)}$ köbös involucziót képezzenek, melynek hyperboloidhármasai a $[G^{(2)}]$ és a $[H^{(2)}]$ sornak hyperboloidjait oly köbös-involucziós sugárseregek társsugaraiban messék, hogy

ezeknek hármassugarai a $pq$ valós egyenesek legyenek. De minthogy ezeknek a köbös-involucziós sugárseregeknek hármassugarai valósak, azért azok sugárhármasainak csak egyik sugara valós, a másik kettő képzetes. Ebből látható, hogy az $I_F^{(3)}$ köbös involuczió hyperboloidhármasainak csak egy hyperboloidja valós, a másik kettő mindig képzetes.

6. Messe a $\pi$ sík az $F^{(2)}$ hyperboloidot a $k^{(2)}$ kúpszeletben és az $F^{(2)}$-ön levő sugárseregekben az $I_g^{(3)}$ és $I_h^{(3)}$ sugárinvolucziók $g_1g_2g_3$, $g'_1g'_2g'_3$ és $h_1h_2h_3$, $h'_1h'_2h'_3$ társsugárhármasait a $k^{(2)}$-n fekvő $I_1^{(3)}$ és $I_2^{(3)}$ pontinvolucziók $G_1G_2G_3$, $G'_1G'_2G'_3$ és $H_1H_2H_3$, $H'_1H'_2H'_3$ társponthármasaiban.

A

$$\begin{array}{ll} G_1H_3G_2H_1G_3H_2 & G_1H_2G_2H_1G_3H_3 \\ G_1H_2G_2H_3G_3H_1 & G_1H_1G_2H_3G_3H_2 \\ G_1H_1G_2H_2G_3H_3 & G_1H_3G_2H_2G_3H_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} G'_1H_3G'_2H_1G'_3H_2 & G'_1H_2G'_2H_1G'_3H_3 \\ G'_1H_2G'_2H_3G'_3H_1 & G'_1H_1G'_2H_3G'_3H_2 \\ G'_1H_1G'_2H_2G'_3H_3 & G'_1H_3G'_2H_2G'_3H_1 \end{array}$$

Pascalhatszögek szögpontjai az $F^{(2)}$-n fekvő

$$\begin{array}{ll} g_1h_3g_2h_1g_3h_2 & g_1h_2g_2h_1g_3h_3 \\ g_1h_2g_2h_3g_3h_1 & g_1h_1g_2h_3g_3h_2 \\ g_1h_1g_2h_2g_3h_3 & g_1h_3g_2h_2g_3h_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} g'_1h_3g'_2h_1g'_3h_2 & g'_1h_2g'_2h_1g'_3h_3 \\ g'_1h_2g'_2h_3g'_3h_1 & g'_1h_1g'_2h_3g'_3h_2 \\ g'_1h_1g'_2h_2g'_3h_3 & g'_1h_3g'_2h_2g'_3h_1 \end{array}$$

hatszögek oldalainak metszőpontjai a $\pi$ síkkal. Ezekben a szemben fekvő lapoknak metszővonalai az

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \quad \beta_1\beta_2\beta_3 \qquad \alpha'_1\alpha'_2\alpha'_3 \quad \beta'_1\beta'_2\beta'_3$$

síkokban vannak (mert pl. az első hatszögben a $[g_1h_3][g_3h_1]$, $[g_2h_3][g_3h_2]$, $[g_2h_1][g_1h_2]$ lapoknak metszővonalai az $\alpha_1$ síkban vannak), míg ama Pascalhatszögek szemben fekvő oldalainak metszőpontjai azokban a Pascalegyenesekben

$$a_1a_2a_3 \quad b_1b_2b_3 \qquad a'_1a'_2a'_3 \quad b'_1b'_2b'_3$$

-ban vannak, melyekben a $\pi$ sík az $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$, $\beta_1\beta_2\beta_3$, $\alpha'_1\alpha'_2\alpha'_3$, $\beta'_1\beta'_2\beta'_3$ síkokat metszi.

Az $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$, $\alpha'_1\alpha'_2\alpha'_3$ és a $\beta_1\beta_2\beta_3$, $\beta'_1\beta'_2\beta'_3$ síkok a $p$, illetve a $q$ egyenesen mennek keresztül, tehát az $a_1a_2a_3$, $a'_1a'_2a'_3$ és a $b_1b_2b_3$,

$b'_1b'_2b'_3$, Pascalegyenesek azokban a $PQ$ Steiner-ellenpontpárban találkoznak, melyekben a $\pi$ sík a $p$, $q$ egyeneseket metszi.

A $pq$ egyenespár polárispár az $F^{(2)}$-re vonatkozólag, tehát a $PQ$ Steiner-ellenpontpár kapcsolt póluspárja a $k^{(2)}$ kúpszeletnek. Minthogy az $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$, $\alpha'_1\alpha'_2\alpha'_3$ és a $\beta_1\beta_2\beta_3$, $\beta'_1\beta'_2\beta'_3$ síkhármasok két-két síkja a harmadikat a másik hármasnak egy síkjától harmónikusan választja el, azért az $a_1a_2a_3$, $a'_1a'_2a'_3$ és a $b_1b_2b_3$, $b'_1b'_2b'_3$ Pascalegyenesek is oly hármasok, melyeknek két-két egyenese a harmadikat a másik hármasnak egy egyenesétől harmónikusan választja el.

Ha a $g_1g_2g_3$, $h_1h_2h_3$ sugárhármasokat változtatjuk az $I_g^{(3)}$ és $I_h^{(3)}$ sugárinvolucziókban, akkor ezzel az $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$, $\beta_1\beta_2\beta_3$ síkok is változnak az $\bar{I}_p^{(3)}$, $\bar{I}_q^{(3)}$ síkinvolucziókban, továbbá a $G_1G_2G_3$, $H_1H_2H_3$ ponthármasok változnak a $k^{(2)}$ kúpszeleten levő $I_1^{(3)}$, $I_2^{(3)}$ pontinvolucziókban és az $a_1a_2a_3$, $b_1b_2b_3$ Pascalegyenes hármasok változnak azokban az $I_P^{(3)}$, $I_Q^{(3)}$ sugárinvolucziókban, melyekben a $\pi$ sík az $I_p^{(3)}$ és $I_q^{(3)}$-t metszi. Ezért:

„Ha $I_1^{(3)}$, $I_2^{(3)}$ két köbös-involucziós pontsor a $k^{(2)}$ kúpszeleten, akkor az egyiknek bármely ponthármasa, a másiknak bármely ponthármasával együtt hat oly Pascalhatszögnek szemben fekvő szögpontja, melyeknek Pascalegyenesei egymást hármasával egy $PQ$ Steiner-ellenpontpárban metszik. Az összes ily módon származtatható Pascalegyenes-hármasok egy $I_P^{(3)}$ és egy $I_Q^{(3)}$ köbös-involucziót képeznek a $P$ és $Q$ sugársorokban. Az $I_1^{(3)}$, $I_2^{(3)}$ egyikének egy társhármasából és a másiknak egy hármasából leszármaztatott Pascalegyenes-hármasok szintén társhármasok az $I_P^{(3)}$ és $I_Q^{(3)}$-ban.“ *)

## 24. §. A kollineáczió különös esetei és elfajulása.

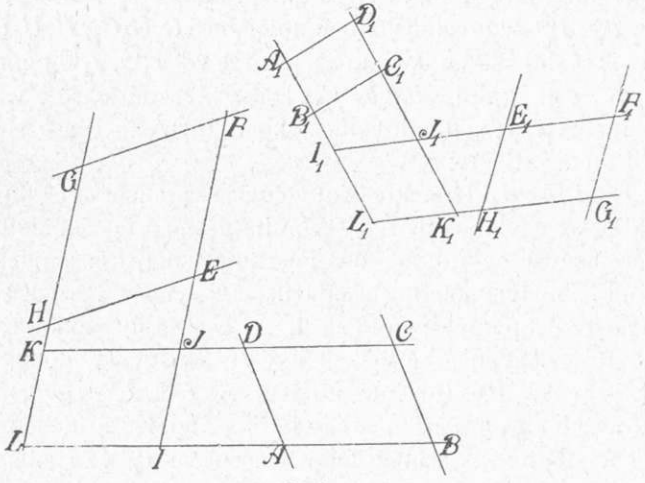
1. Két síkmezőt, a $\mu$ és $\mu_1$-et, akkép lehet egymásra kollinear vonatkoztatni, hogy a mezőknek $e$ és $e_1$ végtelen távol fekvő egyenesei megfelelők legyenek. A kollinear vonatkozás e különös esetét *affinitásnak*, vagy affin vonatkozásnak, a megfelelő mezőket és alakzatokat affin mezőknek és affin alakzatoknak nevezzük.

Minthogy az affin mezők minden megfelelő egyenespárján, pl. az $a$ és $a_1$-en, a végtelen távol fekvő $(ae)$, $(a_1e_1)$ pontok megfelelők,

*) Ennek részletesebb kifejtése szerzőnek „*A köbös involutióról*“ (Orvos-Természettudományi Értesitő 1898. évi XX. kötet; Kolozsvár) irt értekezése 25. pontjában olvasható.

azért egyrészt *párhuzamos egyeneseknek az egyik mezőben, párhuzamos egyenesek felelnek meg a vele affin mezőben*, tehát parallelogrammáknak parallelogrammák, másrészt *az affin mezők megfelelő egyenesein a megfelelő pontsorok hasonlóan projektivek.* E két tulajdonságból következik, hogy párhuzamos vonaldaraboknak viszonya az egyik mezőben egyenlő az ezeknek megfelelő párhuzamos vonaldaraboknak viszonyával a másik mezőben. Ebből folyólag kimutatható, hogy az affin mezőkben bármily két megfelelő zárt idom területének viszonya állandó.

Vegyünk fel (Reye-vel) az egyik mezőben (43. ábra) két parallelogrammát $ABCD$ és $EFGH$-t, melynek a másik mezőben az




43. ábra.

$A_1B_1C_1D_1$ és $E_1F_1G_1H_1$ parallelogrammák felelnek meg. Az $AB, DC$ párhuzamosokat messe az $EF$ egyenes az $IJ$ pontokban, az $EF$-fel párhuzamos $GH$ az $LK$ pontokban; az $IJKL$ parallelogrammának megfelel az ugyanez úton szerkesztett $I_1J_1K_1L_1$ parallelogramma. Ha most a három megfelelő parallelogramma-pár területét összehasonlítjuk, nyerjük:

$$ABCD : IJKL = DC : IL = D_1C_1 : I_1L_1 = A_1B_1C_1D_1 : I_1J_1K_1L_1$$
$$IJKL : EFGH = IJ : EF = I_1J_1 : E_1F_1 = I_1J_1K_1L_1 : {}_1E_1F_1G_1H_1$$

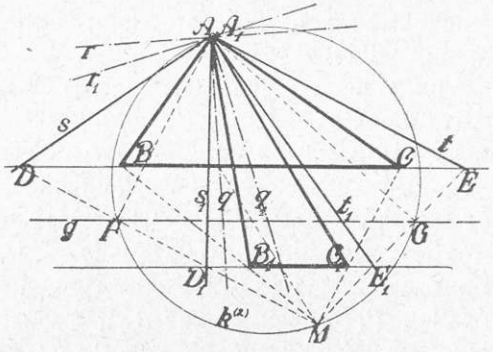
miből összeszorzás által következik:

$$ABCD : EFGH = A_1B_1C_1D_1 : E_1F_1G_1H_1.$$

A parallelogrammákat az átlók két egyenlő háromszögre osztják, tehát az $ABC, EFG$ háromszögek területei is ugyanoly viszony-

ban vannak, mint a megfelelő $A_1B_1C_1$, $E_1F_1G_1$ háromszögek területei, s minthogy minden zárt idomot vagy egész pontosan, vagy tetszésszerinti megközelítéssel háromszögek összegének tekinthetünk, azért általában: affin mezőkben két idom területének viszonya megegyezik a megfelelő idomok területeinek viszonyával. Ezt még ekképen is kifejezhetjük: *affin mezőkben a megfelelő idomok területeinek viszonya állandó.*

Ha két mezőt, a $\mu$ és $\mu_1$-et, affin vonatkozásba akarunk hozni, akkor az $ABC$ háromszögnek a $\mu$-ben, a megfelelő $A_1B_1C_1$ háromszögét a $\mu_1$-ben tetszésszerint vehetjük fel, mert az $ABC$ háromszög oldalai és síkjának végtelen távol fekvő $e$ egyenese egy négyoldalt határoz meg, melynek a másik mezőben az $A_1B_1C_1$ háromszögtől és a sík $e_1$ végtelen távol fekvő egyenesétől képezett négyoldal felel meg; két megfelelő négyoldal pedig megállapítja a kollinear vonatkozást. Ha az $ABC$, $A_1B_1C_1$ háromszögeknek területeit egyenlőknek vesszük fel, akkor ezekben az affin mezőkben a megfelelő területek mind egyenlők lesznek.



44. ábra.

2. Minthogy két affin mező megfelelő egyenesein a megfelelő pontsorok hasonlóan projektivek, felmerül az a kérdés, hogy *vannak-e ezek között egyenlően projektiv pontsorok is?* Ehhez csak egyenlő megfelelő vonaldarabok szükségesek, mert ha az $AD$, $A_1D_1$ megfelelő vonaldarabok egyenlők, akkor nemcsak az $AD$, $A_1D_1$ egyeneseken, hanem az ezekkel párhuzamos egyeneseken is a megfelelő pontsorok egyenlően projektivek lesznek. Ha a $\mu$ és $\mu_1$ mezők affinitását az $ABC$, $A_1B_1C_1$ megfelelő háromszögek határozzák meg, úgy megfelelő egyenlő vonaldarabokat találunk e mezőkben, ha a $BC$, $B_1C_1$ megfelelő egyeneseken van oly két megfelelő pont $D$ és $D_1$, mely az $A$ és $A_1$ pontokból egyenlő távolságra is van, azaz ha

$$BD : DC = B_1D_1 : D_1C_1 \text{ és } AD = A_1D_1.$$

Helyezzük a két háromszöget úgy egymáshoz (44. ábra), hogy az $A$ pont az $A_1$-gyel egybeessék és a $BC$ oldal a $B_1C_1$ oldalhoz párhuzamos legyen (a mi négyfélekép lehetséges). A $BB_1$, $CC_1$ egye-

nesek metszőpontját $M$-mel jelölvén, írjuk az $AM$ átmérő fölé a $k^{(2)}$ kört. A $k^{(2)}$ kör azt a $g$ egyenest, mely a | $BC$, $B_1C_1$ | párhuzamos szalag szélességét felezi az $F$, $G$ pontokban, az $MF$ és $MG$ pedig a $BC$, $B_1C_1$ egyeneseket a megfelelő $D$, $D_1$ illetve az $E$, $E_1$ pontokban akkép metszi, hogy

$$BD : DC = B_1D_1 : D_1C_1 \text{ és } AD = A_1D_1$$
$$BE : EC = B_1E_1 : E_1C_1 \text{ és } AE = A_1E_1.$$

Az $\mu$ mezőben tehát az $A$ ponton két egyenes $AD \equiv s$ és $AE \equiv t$ vezethető keresztül, melynek a $\mu_1$ mezőben oly két egyenes $A_1D_1 \equiv s_1$ és $A_1E_1 \equiv t_1$ felel meg, hogy az affinitás folytán az $s$, $s_1$ és $t$, $t_1$ megfelelő egyeneseken levő pontsorok egyenlően projektivek. Ugyanígy egyenlően projektiv pontsorok tartói lesznek a mezők bármily megfelelő pontpárján keresztül vezetett és az $s$ és $s_1$-gyel, valamint a $t$ és $t_1$-gyel párhuzamosan haladó megfelelő egyenesek.

Tekintetbe véve a 44. ábrát, a $k^{(2)}$ kör a $g$ egyenest 2, 1 vagy 0 számú valós pontban metszheti, és ez eseteknek megfelelőleg *két affin mezőben 2, 1 vagy 0 számú oly párhuzamos sugaru sor van, mely sugarakon a megfelelő pontsorok egyenlően projektivek.*

A 44. ábrában az $st$ és $s_1t_1$ egyenesek hajlásszögeinek felezői, a $qr$ és $q_1r_1$ egyenesek, megfelelők. Ugyanis az $ADE$ háromszögben az $A$ szög felezője $q$, a $DE$ oldalt az $AD$, $AE$ oldalak viszonya szerint osztja; az $A_1D_1E_1$ háromszögben pedig az $A_1$ szög felezője $q_1$ osztja a $D_1E_1$ oldalt az $A_1D_1$, $A_1E_1$ oldalak viszonya szerint. Minthogy e viszonyok egyenlők, azért a $qq_1$ szögfelezők és ép így az $rr_1$ külső szögfelezők megfelelők.

A $qr$ és $q_1r_1$ megfelelő egyenespárok azonban derékszögeknek szárai, tehát *ha a $\mu$ és $\mu_1$ mezők affinek, akkor az egyik mezőnek bármely pontján oly derékszögű egyenespár vezethető keresztül, melynek a másik mezőben szintén derékszögű egyenespár felel meg. E megfelelő derékszögek szárai egyenlő szögek alatt hajlanak annak a két sugársornak sugaraihoz, melyeken az egyenlően projektiv pontsorok vannak.*

Affin mezőkben a megfelelő derékszögek akkor is valósak, ha az egyenlően projektiv pontsorok tartói képzetesek. Ez utóbbiaktól függetlenül a megfelelő derékszögeket következőkép szerkeszthetjük az $A$, $A_1$ pontokon keresztül. Annak az orthogonalis sugársornak az egyik mezőben, melynek középpontja az $A$, megfelel a másikban egy elliptikus involucziós sugársor, melynek középpontja az $A_1$ pont. Az elliptikus involucziós sugársornak derékszögű társsugárpárja már olyan lesz, melynek az orthogonalis sugársor-

ban, $A$-ban, szintén derékszögű társsugárpár felel meg, — és ezek lesznek az affin mezőkben az $A$, $A_1$ pontokon keresztül menő megfelelő derékszögek szárai. — Ha azonban az elliptikus sugársor maga is orthogonalis volna, akkor az affin mezők *hasonló* mezőkké válnak és ezekről alább fogunk szólani.

Ha $BA$, $AC$ és $B_1A_1$, $A_1C_1$ két megfelelő vonaldarab a megfelelő $BAC$, $B_1A_1C_1$ derékszögek szárain, úgy a

$$\varkappa = \frac{AB}{A_1B_1} \text{ és } \lambda = \frac{AC}{A_1C_1}$$

viszonyok értékétől függ, hogy vannak-e a mezőkben egyenlő megfelelő vonaldarabok, tehát egyenlően projektiv pontsorok. Ugyanis ha úgy a $\varkappa$, mint a $\lambda$ egyidejüleg kisebb vagy nagyobb az 1-nél, akkor nincsen a $BC$, $B_1C_1$ egyeneseken oly $D$, $D_1$ megfelelő pont, mely az $A$, $A_1$ pontoktól egyenlő távolságra volna; ha pedig a $\varkappa$ nagyobb, a $\lambda$ pedig kisebb volna, mint 1, vagy fordítva, akkor a $BC$, $B_1C_1$-en két oly megfelelő pontot lehet találni, hogy $AD$ és $A_1D_1$ egyenlő legyen. Ennélfogva: *ha az affin mezőkben a megfelelő derékszögek szárain a megfelelő vonaldarabok viszonya* $\varkappa$ és $\lambda$, *akkor a szerint, a mint* $(1-\varkappa)(1-\lambda) \gtrless 0$; *2, 1, illetve 0 számu oly irányú egyenesek vannak, melyeken a megfelelő pontsorok egyenlően projektivek. Az affin mezőkben a megfelelő zárt idomok területeinek viszonya pedig* $\varkappa . \lambda$, mert a megfelelő $ABC$, $A_1B_1C_1$, derékszögű háromszögek területeinek viszonya $AB . AC : A_1B_1 . A_1C_1 = \varkappa . \lambda$.

Ha a $\mu$ és $\mu_1$ affin mezőkben két egyenlően projektiv pontsort, pl. az $s$ és $s_1$ egyeneseken levőket úgy egyesítünk, hogy a megfelelő pontok egybeessenek, akkor az affin mezők perspektiv helyzetbe jutnak és $s \equiv s_1$ egyenes a mezők „affinitási tengelye". Ebben a helyzetben a mezők megfelelő pontjait összekötő egyenesek az „affinitási sugarak", feküdjenek a mezők ugyanegy síkban vagy nem, párhuzamosak. A midőn két perspektiv helyzetű affin mező ugyanegy síkban van, azt mondjuk róluk, hogy *czentrikusan affin helyzetűek*. Az $s$ és $s_1$ megfelelő egyenlően projektiv pontsorok egyesítésével az affin mezők *kétféleképp* hozhatók czentrikusan affin helyzetbe.

Két czentrikusan affin mező meg van határozva, ha ismeretes az affinitási tengely $s$ és két megfelelő pont $A$, $A_1$. Ugyanis a megfelelő egyenesek metszőpontjai az $s$ affinitási tengelyen vannak és a megfelelő pontok összekötő egyenesei, az affinitási sugarak, az $AA_1$-gyel párhuzamosak. Ha az $AA_1$ vonaldarab felező pontjában a vonal-

darabra merőleges egyenes az $s$-et a $T$ pontban metszi, akkor az $AT \equiv t$ és $A_1T \equiv t_1$ megfelelő egyeneseken, valamint a $t$ és $t_1$-gyel párhuzamos megfelelő egyeneseken végre az $s$-sel párhuzamos megfelelő egyeneseken a megfelelő pontsorok egyenlően projektivek. Az $st$ és $st_1$ szögeknek $qr$ és $q_1r_1$ felezői pedig a két affin rendszerben levő megfelelő derékszögek szárai. Ha az $AA_1$ megfelelő pontokat összekötő egyenes az $s$ affinitási tengelyt az $A_s$ pontban metszi, akkor a két affin mezőben a megfelelő zárt idomok területeinek viszonya $AA_s : A_1A_s$.

Két, tetszésszerint egy síkba fektetett affin mezőnek a végtelen távol fekvő $e$, $e_1$ egyenesei egybeesnek; ez az $ee_1$ tehát az affin mezők kettősegyenese. A mezőknek van tehát egy valós kettőspontjuk, melyet az általános eljárás szerint akkép nyerünk, ha az $ab$, $cd$ két különböző irányú párhuzamos sugarakat a nekik megfelelő $a_1$, $b_1$, illetve $c_1d_1$ párhuzamos sugarakkal metszük; az $aa_1$, $bb_1$ pontoknak és a $cc_1$, $dd_1$ pontoknak összekötő egyenesei egymást az affin mezők $O$ kettőspontjában metszik. A végtelen távol fekvő $e$ $e_1$ kettős egyenesen lehet még a mezőknek 2, 1, 0 számú valós kettőspontja, és az $O$ sugársorban ugyanennyi valós kettősegyenese; ha azonban a mezőknek véges távolban még egy kettőspontjuk volna, akkor ennek összekötő egyenese az $O$-val egy önmagának megfelelő vonaldarab lenne és így az affin mezők már czentrikusan affin helyzetűek lennének.

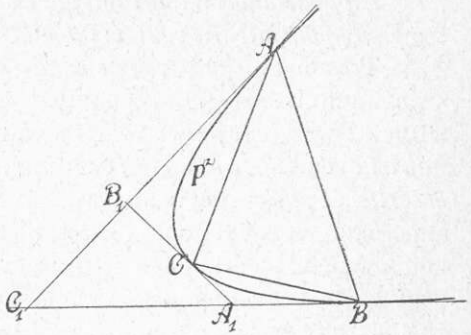
3. Affin mezőkben ép úgy, mint a kollinear mezőkben kúpszeleteknek ismét kúpszeletek felelnek meg. Ámde az affin mezőkben a megfelelő kúpszeleteknek végtelen távol fekvő pontjai egyenlő számban valósak, tehát ellipsisnek, parabolának, hyperbolának és ez utóbbi asymptótájának megfelel ellipsis (vagy kör), parabola, hyperbola és ennek asypmtótája. Ha két ellipsist $k^{(2)}$ és $k_1^{(2)}$-őt, vagy egy ellipsist és egy kört affin akarunk egymásra vonatkoztatni, akkor az egyik ellipsis egy kapcsolt átmérőpárjához, $AB$, $CD$-hez, megfelelőnek a másik ellipsis egy tetszésszerinti kapcsolt átmérőpárját $A_1B_1$, $C_1D_1$-et választhatjuk. Ugyanis az $ABC$, $A_1B_1C_1$ háromszögek meghatározzák az affinitást; ebben az $AB$, $A_1B_1$ átmérők $M$, $M_1$ felezőpontjai tehát a $DMC$, $D_1M_1C_1$ átmérők, és az $AB$, $A_1B_1$ pontoknak ezekkel párhuzamos érintői megfelelők. Az $ABCD$ parallelogramma területének viszonya a $k^{(2)}$ ellipsis területéhez ugyanaz, mint az $A_1B_1C_1D_1$-é a $k_1^{(2)}$-höz, minthogy azonban a $k_1^{(2)}$-nek az $A_1C_1$, $B_1D_1$ kapcsolt átmérői helyett bármily más kapcsolt átmérőpárt is felvehetünk, azért az $A_1B_1C_1D_1$ parallelogrammának és a $k_1^{(2)}$ ellipsisnek területi viszonya állandó, vagy más szóval: az ellipsisbe írt

parallelogrammák, melyeknek átlói az ellipsisnek kapcsolt átmérői egyenlő területűek.

Ha tehát $2a$, $2b$ egy ellipsisnek két tengelye, $2a'$, $2b'$ annak egy kapcsolt átmérőpárja, melynek hajlásszöge $\varphi$, akkor $a.b = a'.b'.\sin\varphi$. Ha továbbá egy az ellipsissel affin körnek radiusa $r$, akkor e körbe írt négyzet területe $2r^2$, és a kör területe $\pi r^2$ ugyanoly viszonyban van egymáshoz, mint az ellipsis csúcsait összekötő egyenesektől alkotott rombusnak területe $2ab$, az ellipsis területéhez. Ebből következik, hogy az ellipsis területe $\pi.ab$. —

Igen egyszerűen lehet (Reye szerint) az affinitásból folyólag a parabola-segmentum területének kiszámítását (mely Archimedestől ered) bemutatni.

Ha a $p^{(2)}$ és $p_1^{(2)}$ parabolákat affin akarjuk egymásra vonatkoztatni, akkor a $p^{(2)}$-nek $AB$ pontjához és e pontok érintőinek $C$ metszőpontjához, a $p_1^{(2)}$ parabola két tetszésszerinti $A_1B_1$ pontját és azok érintőinek $C_1$ metszőpontját rendelhetjük, mely $ABC$, $A_1B_1C_1$ háromszögek az affin vonatkozást meghatározzák. Annak a kúpszeletnek, mely az $ABC$ sík végtelen távol fekvő $e$ egyenesét és az $ABC$ háromszögnek $AC$, $BC$ oldalait az $A$, $B$ pontokban érinti s mely tehát a $p^{(2)}$ parabola megfelel egy kúpszelet, mely az $A_1B_1C_1$ sík végtelen távol fekvő egyenesét $e_1$-et, és az $A_1B_1C_1$ háromszög $A_1C_1$, $B_1C_1$ oldalait az $A_1$, $B_1$ pontokban érinti, mely tehát a $p_1^{(2)}$ parabola.



45. ábra.

Minthogy az affin idomok területei állandó viszonyban vannak, azért az $(AB)$ és $(A_1B_1)$ parabola segmentumoknak és az $ABC$, $A_1B_1C_1$ háromszögnek területi viszonya ugyanaz, a miből következik, hogy az $ABC$ háromszög és az $(AB)$ parabola segmentum viszonya állandó, mert az $A_1B_1$ pontokat a $p_1^{(2)}$ parabolán bárhol felvehetjük. Ebből folytatólag következik, hogy egy parabola segmentum területe és a segmentumhoz tartozó ívtől, valamint az ív végpontjainak érintőitől bekerített idomnak (arbelos-nak) területe állandó viszonyban vannak. E viszonyszámot, $\nu$-t, kiszámítandó, vegyük fel (45. ábra) a $p^{(2)}$ parabola $AB$ ívén a $C$ pontot és jelöljük az $ABC$ pontok érintőitől bekerített háromszögnek szögpontjait

$A_1B_1C_1$-gyel, az $AB$ segmentum és az $AC_1B$ arbelos területeit $(AB)_s$ és $(AC_1B)_a$-val és a hasonlókép a többiekét.

Minthogy

$$\begin{aligned} \nu.(AC_1B)_a &= (AB)_s, \\ \nu.(AB_1C)_a &= (AC)_s, \\ \nu.(BA_1C)_a &= (BC)_s \\ ABC &= (AB)_s - (AC)_s - (BC)_s \\ &= \nu.[(AC_1B)_a - (AB_1C)_a - (BA_1C)_a] \\ ABC &= \nu.A_1B_1C_1. \end{aligned}$$

E vonatkozás igaz marad, bárhol vegyük fel a $C$ pontot a parabola $AB$ ívén, tehát akkor is, ha a $C$ pont érintője párhuzamos az $AB$ húrhoz. Minthogy azonban ebben az esetben az $ABC$ háromszög területe kétakkora, mint az $A_1B_1C_1$ háromszögé, tehát általában a $\nu$ viszonyszám = 2. Ezért:

*A parabolába írt háromszög területe kétakkora, mint a háromszög szögpontjaiban vont érintőktől bekerített háromszög területe.*

Továbbá: Egy parabolasegmentum területe kétakkora, mint a segmentum íve és ez ív végpontjainak érintőitől bekerített idomnak területe: vagy *egy parabolasegmentumnak területe két harmada annak a háromszögnek, melyet az ív húrja és az ív végpontjainak érintői bekerítenek*; vagy végre: ha egy parabola két pontján keresztül átmérőket, az egyik ponton keresztül a parabolához érintőt, a másikon keresztül az érintőhöz párhuzamos egyenest húzunk, akkor e négy egyenes egy parallelogrammát kerít be, mely a parabola ívétől 1 : 2 viszony szerint osztatik.

4. Két affin mezőben, a $\mu$ és $\mu_1$-ben, a végtelen távol fekvő $e$ és $e_1$ egyeneseken a megfelelő pontsorok egyenlően projektivek is lehetnek, a mi abban nyilvánul, hogy bármily két egyenestől képezett szög az egyik mezőben, egyenlő a megfelelő egyenesektől képezett szöggel a másikban. Az ily különös affin mezőket és azokban a megfelelő alakzatokat *hasonlóknak* nevezzük. Hasonló mezőkben tehát minden sokszögnek egy hozzá hasonló, minden ellipsisnek oly ellipsis felel meg, melynek kapcsolt átmérő rendszere amazéval kongruens; minden hyperbolának oly hyperbola felel meg, melynek asymptótái abban a részben, melyben a görbe ágai vannak, ugyanoly hegyes, tompa vagy derékszöget képez, végre minden körnek és parabolának egy tetszésszerinti kör, illetve parabola felel meg.

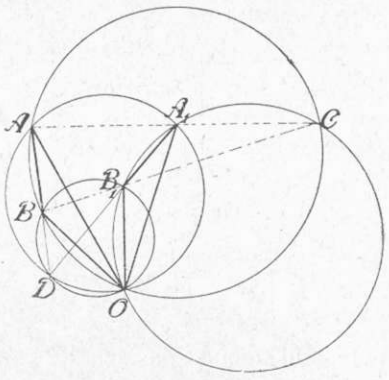
A hasonló mezők meghatározására csak két megfelelő pontpár $AA_1$, $BB_1$, vagy a mi ugyanaz, két megfelelő vonaldarab $AB$, $A_1B_1$ szükséges. A két hasonló mezőnek lényegileg három különböző helyzetet adhatunk egy síkban:

1-ször olyant, hogy a végtelen távol fekvő egyenesen a megfelelő pontok mind egyesüljenek, mely esetben a mezők *perspektivek*, vagy mint még mondani szokás, *hasonló fekvésűek;*

2-szor olyant, hogy a végtelen távol fekvő kettősegyenesen a megfelelő egyenlően projektiv pontsorok ugyanegy értelműek legyenek, és ekkor a mezőket *ugyanegy értelműen hasonlóknak* nevezzük; végre

3-szor olyant, hogy a végtelen távol fekvő kettősegyenesen a megfelelő egyenlően projektiv pontsorok ellenkező értelműek legyenek, tehát egy egyenoldalú hyperbolikus pontsort képezzenek, és ekkor a mezőket *ellenkező értelműen hasonlóknak* nevezzük.

Az 1-ső esetben a megfelelő pontokat összekötő egyenesek egy pontban, a mezők *hasonlósági pontjában* találkoznak, s e ponton keresztül menő egyenesek mind megfelelők.

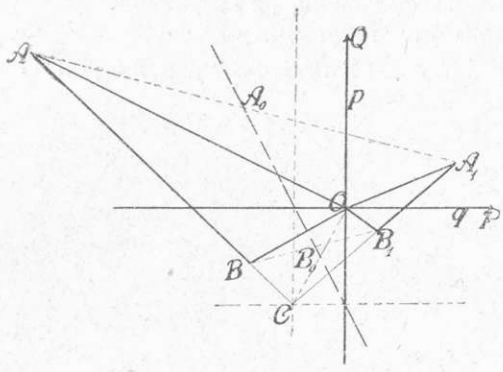


46. ábra.

A 2-ik esetben a mezőknek csak egy valós kettőspontjuk van, és a végtelen távol fekvő egyenes a valós kettősegyenesük. E végtelen távol fekvő egyenesen a képzetes körpontok, és a valós kettőspontból e körpontokhoz vezetett képzetes egyenesek a mezők képzetes kettőspontjai és kettősegyenesei. Ha $AA_1$ és $BB_1$ (46. ábra) a mezőknek két megfelelő pontja és a $D$ az $AB$, $A_1B_1$ egyeneseknek metszőpontja, akkor az $AA_1D$, $BB_1D$ pontokon keresztül menő körök egymást másodízben az $O$ kettőspontban metszik, mert az $ABO$, $A_1B_1O$ háromszögek egyértelműen hasonlók. Ha az $AA_1$ és $BB_1$ egyeneseknek metszőpontja a $C$, akkor az $O$ pont az $ABC$ és $A_1B_1C$ háromszögek körül írt köröknek is metszőpontja. Mert minden négyoldal oldalai négy háromszögnek oldalai, és e háromszögek körül írt körök egymást annak a parabolának gyujtópontjában metszik, mely a négyoldal oldalait érinti. E négy körre vonatkozó tétel különben egészen elemi úton is kimutatható a kör ugyanegy íve fölött nyugvó kerületi szögeinek egyenlőségéből.

A 3-ik esetben, a midőn a mezők ellenkező értelműen hasonlóak, a végtelen távol fekvő kettősegyenesen a megfelelő egyenoldalúan hyperbolikus pontsoroknak $PQ$ kettőspontjai egyszersmind a mezők kettőspontjai; és ezen kivül van még a mezőknek véges távolban egy $O$ kettőspontjuk.

Ha $AA_1$ és $BB_1$ a mezők két megfelelő pontja, akkor az $AB$, $A_1B_1$ egyenes hajlásszögeinek felezőin vannak a végtelen távoli $PQ$ kettőspontok. Az $AA_1PQ$ és a $BB_1PQ$ pontokon keresztülmenő $a^{(2)}$ és $b^{(2)}$ egyenoldalú hyperbolák, melyeknek átmérői az $AA_1$, illetve a $BB_1$, és melyek tehát az $A, A_1$, illetve $B, B_1$ ellenkező értelmű egyenlően projektiv sugársoroknak képződményei, egymást az $AB$, $A_1B_1$ egyeneseknek $C$ metszőpontján kívül még egy $O$ pontban metszik. Minthogy $\sphericalangle OAC = \sphericalangle OA_1C$ vagy $180^0 - \sphericalangle OA_1C$, és $\sphericalangle OBC = \sphericalangle OB_1C_1$ vagy $180^0 - \sphericalangle OB_1C$, azért az $ABO$, $A_1B_1O$ haromszögek ellenkező értelmüen hasonlók, és így az $O$ pont a mezőknek végesben fekvő kettőspontja, $OQ \equiv p$ és $OP \equiv q$ azoknak kettősegyenese.



47. ábra.

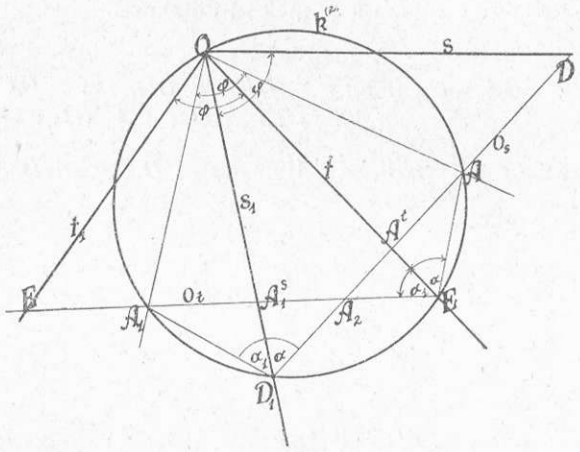
Az $O$ pontot megkaphatjuk a nélkül, hogy az $a^{(2)} \equiv AA_1PQC$ és a $b^{(2)} \equiv BB_1PQC$ hyperbolákat meg kellene rajzolnunk. Ugyanis (47. ábra) ha az $AA_1$ és $BB_1$ vonaldaraboknak felezőpontjai, tehát az $a^{(2)}$ és $b^{(2)}$ hyperboláknak középpontjai $A_0$ és $B_0$, akkor a $C$ ponton keresztül menő és az $A_0B_0$ átmérőhöz kapcsolt húr, mindkét hyperbolára nézve a $CO$ egyenes. E végből csak a $C$ ponton keresztül vezetjük azt az egyenest, mely a $CP$ és $CQ$ egyenesekhez ugyanoly szög alatt hajlik, mint az $A_0B_0$; ezen az egyenesen van már az $O$ pont, az $A_0B_0$ egyenestől ép oly távolságra, mint a $C$. —

Az ellenkező értelmű hasonló mezők és sokszögek speciálisabb helyzetűek az ugyanegy értelmüeknél, amennyiben azoknak a végtelen távol fekvő kettősegyenesén a megfelelő pontsorok mindig involuciósak, emezeknek pedig csak akkor involuciósak, ha a megfelelő egyenesek egymásra merőlegesek és ekkor is a mezőknek végtelen távol fekvő kettőspontjai a képzetes körpontok lesznek.

A hasonló mezők végesben fekvő $O$ kettőspontjának pedig a következő tulajdonsága van: Ha a mezők ugyanegy értelmüen hasonlók és az egyik mezőt az $O$ körül addig forgatjuk, míg egy, tehát valamennyi sugár az $O$ sugársorban a megfelelőbe nem jut, akkor a forgatott mező a másikkal hasonló fekvésű lesz. Ha pedig a mezők ellenkező értelmüen hasonlók, akkor az egyik mezőnek tükörképe

bármelyik kettősegyenesre (a $p$-re, vagy a $q$-ra) vonatkozólag hasonló fekvésű a másik mezővel és az $O$ a hasonlósági pont.

5. Mikép két kollinear mezőből (223. old.), a $\mu$ és $\mu_1$-ből, melyeknek egyik kettőspontja az $O$ és a másik kettőnek összekötő egyenese az $o$, egy új $\mu_2$ mezőt lehet leszármaztatni, mely a $\mu$ mezővel az $o$ egyenesnek egy $O^s$ pontjára és az $O$ pontnak egy $t$ sugarára, a $\mu_1$ mezővel pedig az $o$ egyenesnek egy másik pontjára, $O^t$-re, az $O$ pontnak pedig egy $s_1$ sugarára, mint kollineacció-középpontra, illetve kollineacció - tengelyre perspektiv: a $\mu$ és $\mu_1$ hasonló mezőkből is lehet egy oly $\mu_2$ mezőt leszármaztatni, mely amazokkal a végtelen távol fekvő kettős-egyenesnek egy $O^s$ és egy $O^t$ pontjára, és az $O$ kettőspontnak egy $t$ és egy $s_1$ sugarára mint affinitási tengelyre vonatkozólag perspektiv.




48. ábra.

Ha a $\mu$ és $\mu_1$ hasonló mezőkben két megfelelő zárt sokszögnek területe $\Delta$ és $\Delta_1$, és a belőlük leszármazott sokszögnek területe $\Delta_2$, úgy a $\Delta_2$ a $\Delta$ és $\Delta_1$-ből és a sokszögek kölcsönös helyzetét jellemző állandókból meghatározható.

Vegyük fel *először, hogy a $\mu$ és $\mu_1$ hasonló mezőkben az $ABC\ldots, A_1B_1C_1\ldots$ megfelelő sokszögek ugyanegy értelműek* és messük az első sokszögnek szögpontjain keresztül menő és egy $o_s$ egyenessel párhuzamos egyeneseket a második sokszög megfelelő szögpontjain keresztül menő és egy $o_t$ egyenessel párhuzamos egyenesekkel; e metszőpontok a $\mu_2$ mező $A_2B_2C_2\ldots$ sokszögének szögpontjai.

Az $OAA_1$ háromszög körül írt $k^{(2)}$ kör (48. ábra) az $A$ ponton keresztül menő $o_s$ egyenest még egyszer a $D_1$ pontban és az $A_1$ ponton keresztül menő $o_t$ egyenest az $E$ pontban metszi. Az $OD_1 \equiv s_1$ egyenes a $\mu_1$ $\mu_2$ mezőknek és az $OE \equiv t$ egyenes a $\mu\mu_2$ mezőknek affinitási tengelye.

Ugyanis az $OA_1D_1$ háromszögnek megfelel a $\mu$ mezőben egy ehhez hasonló $OAD$ háromszög, melynek az $A$-nál levő szöge az

$OAD_1$-nek kiegészítő szöge, tehát a $D$ pont a $D_1A$ egyenesben van; ezért az $OD_1 \equiv s_1$ és az $OD \equiv s$ egyeneseknek megfelelő pontjai az $o_s$-sel párhuzamos sugarakkal egymásba projicziáltatnak, s így $s_1$ a $\mu_1\mu_2$ mezők affinitási tengelye. Hasonlókép az $OAE$ háromszögnek megfelel a $\mu_1$-ben az $OA_1E_1$ háromszög, melynek $A_1$-nél levő szöge az $OA_1E$-nek kiegészítő szöge, tehát az $E_1$ pont az $EA_1$ egyenesen van, és az $OE \equiv t$, $OE_1 \equiv t_1$ egyeneseknek megfelelő pontjai az $o$-vel párhuzamos sugarakkal egymásba projicziáltatnak. A $t$ egyenes tehát a $\mu_1\mu_2$ mezőknek affinitási tengelye.

Ha

$$AOA_1 = \varphi,\ (o_s o_t) = \psi,\ OEA = OD_1A = \alpha,\ OEA_1 = OD_1A_1 = \alpha_1$$
$$(AA_2, OE) \equiv A^t,\ (A_1A_2, OD_1) \equiv A^s{}_1,$$

akkor az $A_2EA^t$, $AEA^t$ és az $A_2D_1A_1{}^s$, $A_1D_1A_1{}^s$ háromszögekből következik:

$$A_2A^t = A^tE\frac{\sin\alpha_1}{\sin\psi},\quad AA^t = A^tE\frac{\sin\alpha}{\sin(\varphi-\psi)}$$

$$A_2A_1{}^s = A_1{}^sD_1\frac{\sin\alpha}{\sin\psi}\quad A_1A_1{}^s = A_1{}^sD_1\frac{\sin\alpha_1}{\sin(\varphi-\psi)}$$

tehát

$$\frac{A_2A^t}{AA^t}\cdot\frac{A_2A_1{}^s}{A_1A_1{}^s} = \frac{\sin^2(\varphi-\psi)}{\sin^2\psi} = \frac{\sin^2(\varphi-[o_so_t])}{\sin^2(o_so_t)}.$$

Az $A_2B_2C\ldots$, $ABC\ldots$ és az $A_2B_2C_2\ldots$, $A_1B_1C_1\ldots$ sokszögek $\Delta_2$, $\Delta$ és $\Delta_2$, $\Delta_1$ területeink viszonya $A_2A^t : AA^t$, illetve $A_2A_1{}^s : A_1A_1{}^s$, ennélfogva mondhatjuk:

*Ha két sokszög ugyanegy értelműen hasonló, tehát az első sokszög $\varphi$ szöggel egy pont körül forgatva a másodikkal hasonló fekvésbe hozható és ha az első sokszögnek szögpontjain keresztül egy $o_s$ sugárral párhuzamosan menő sugarakat, a másodiknak megfelelő szögpontjain keresztül egy $o_t$ sugárral párhuzamosan menő sugarakkal metszszük, akkor e metszőpontok egy harmadik sokszögnek szögpontjai lesznek. Ha az első, második és harmadik sokszögnek területe $\Delta$, $\Delta_1$, $\Delta_2$, úgy*

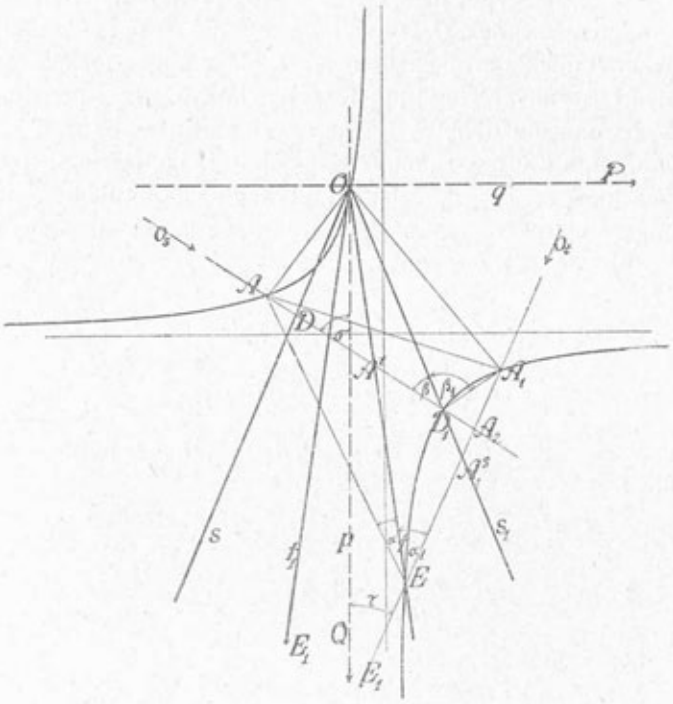
$$\Delta_2{}^2 = \Delta\Delta_1\cdot\frac{\sin^2(\varphi-[o_so_t])}{\sin^2(o_so_t)}.$$

Ha az első sokszögnek szögpontjain keresztül az $o_t$ sugárral párhuzamosan menő sugarakat, a második sokszögnek megfelelő szögpontjain keresztül az $o_s$-sel párhuzamosan menő sugarakkal

metszszük, úgy a metszőpontok egy új $\Delta_3$ sokszögnek szögpontjai lesznek. Ha ennek területe $\Delta_3$, akkor

$$\Delta_3^2 = \Delta\Delta_1 \cdot \frac{\sin^2(\varphi - [o_t o_s])}{\sin^2(o_t o_s)} = \Delta\Delta_1 \cdot \frac{\sin^2(\varphi + [o_s o_t])}{\sin^2(o_s o_t)}.$$

$\Delta_2$ és $\Delta_3$ általában nem egyenlő, de egyenlő lesz, ha $\varphi = 0$, tehát az eredeti sokszögek hasonló fekvésűek, vagy ha $\varphi = 90^0$;




49. ábra.

továbbá ha $(o_s o_t) = 0$, tehát $\Delta_2$ és $\Delta_3$ végtelen nagy, vagy ha $(o_s o_t) = 90^0$. — Ha $\varphi = (o_s o_t) = 90^0$, akkor $\Delta_2 = \Delta_3 = 0$.

6. Térjünk ezután *az ellenkező értelmű hasonló mezőkhöz* és használjuk a sokszögek szögpontjainak, területeinek, a mezők kettőspontjának az $o_s$, $o_t$ sugarak jelölésére ugyanazokat a betűket, mint előbb és nevezzük e mezőknek végesben fekvő valós kettősegyeneseit $p$ és $q$-nak.

Az $OAA_1$ háromszög körül írt $a^{(2)}$ egyenoldalú hyperbola (49. ábra), melynek egyik átmérője $AA_1$ és asymptótái a $p$, $q$-val párhuzamosak, az $A$ ponton keresztül az $o_s$-sel párhuzamosan menő egye-

nest a $D_1$ pontban és az $A_1$ ponton keresztül az $o_t$-vel párhuzamosan menő egyenest az $E$ pontban metszi. $OD_1 \equiv s_1$ a $\mu_1\mu_2$ mezőknek és $OE \equiv t$ a $\mu_1\mu_2$ mezőknek affinitási tengelye.

Ugyanis az $OA_1D_1$ háromszögnek megfelel a $\mu$-ben egy véle hasonló, de ellenkező értelmű $OAD$ háromszög, tehát $\sphericalangle OA_1D_1 = \sphericalangle OAD$, és mert a $D_1$ pont az $a^{(2)}$ hyperbolán van, azért $AD$ keresztül megy a $D_1$ ponton. Minthogy továbbá az $AOA_1$ szög felezőjéhez, a $p$ kettősegyeneshez, egyenlő szög alatt hajló $OD_1 \equiv s_1$ és $OD \equiv s$ egyeneseknek $D_1D$ megfelelő pontjai az $o_s$-sel párhuzamos sugárral egymásba projicziáltatnak: $s_1$ lesz a $\mu_1\mu_2$ mezők affinitási tengelye. Ugyanígy bizonyítjuk, hogy az $OAE$-nek a $\mu_1$-ben megfelelő $OA_1E_1$ háromszög $A_1E_1$ oldala az $o_t$-vel párhuzamos $A_1E$ egyenesen van, tehát a $p$-hez egyenlő szög alatt hajló $OE \equiv t$, $OE_1 \equiv t_1$ egyeneseknek az $EE_1$ és valamennyi megfelelő pontja az $o_t$-vel párhuzamos sugarakkal egymásba projicziáltatik, és így a $\mu_1\mu_2$ mezők affinitási tengelye a $t$ egyenes.

Ha

$$\sphericalangle OEA = \alpha, \quad OEA_1 = \alpha_1, \quad OD_1A = \beta, \quad OD_1A_1 = \beta_1$$
$$(o_sp) = \sigma, \quad (po_t) = \tau, \quad (o_so_t) = \sigma + \tau = \psi,$$
$$(AD_1, OE) = A^t, \quad (A_1E_1, OD_1) = A_1^s,$$

akkor az $A_2EA^t$, $AEA^t$ és az $A_2D_1A_1^s$, $A_1D_1A_1^s$ háromszögekből következik:

$$A_2A^t = A^tE \cdot \frac{\sin\alpha_1}{\sin\psi} \qquad AA^t = A^tE \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin(\sigma - \tau)}$$

$$A_2A_1^s = A_1^sD_1 \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\psi} \qquad A_1A_1^s = A_1^sD_1 \cdot \frac{\sin\beta_1}{\sin(\sigma - \tau)},$$

ezekből pedig

$$\frac{A_2A^t}{AA^t} \cdot \frac{A_2A_1^s}{A_1A_1^s} = \frac{\sin^2(\sigma - \tau)}{\sin^2\psi} \cdot \frac{\sin\alpha_1 \sin\beta}{\sin\alpha \sin\beta_1}.$$

A jobboldalon álló kifejezés második faktora $= 1$, mert ha az $a^{(2)}$ hyperbola $p$-vel párhuzamos asymptólájának végtelen távol fekvő pontja a $Q$, úgy az

$$E(AA_1OQ) \overline{\wedge} D_1(AA_1OQ)$$

-ból következik, mert $\sphericalangle AEQ = \sphericalangle QEA_1$ és $\sphericalangle AD_1Q = \sphericalangle QD_1A_1$, hogy

$$\sin\alpha : \sin\alpha_1 = \sin\beta : \sin\beta_1.$$

Ha végre meggondoljuk, hogy az előbbi egyenlet baloldalán az első és a második faktor értéke $\Delta_2 : \Delta$, illetve $\Delta_2 : \Delta_1$, továbbá,

hogy $\sigma - \tau = (o_s p) - (p o_t) = (o_s p) + (o_t p)$, úgy felírhatjuk a következő tételt:

*Ha két sokszög ellenkező értelműen hasonló és az elsőnek szögpontjain keresztül egy $o_s$ sugárral párhuzamosan menő sugarakat, a második sokszögnek megfelelő szögpontjain keresztül egy $o_t$-vel párhuzamosan menő sugarakkal metszszük, akkor a metszőpontok egy harmadik sokszögnek szögpontjai. Ha az első és második sokszög két megfelelő oldalának egyik szögfelezője a $p$, és a három sokszög területe rendre $\Delta$, $\Delta_1$, $\Delta_2$, akkor*

$$\Delta_2^2 = \Delta\Delta_1 \cdot \frac{\sin^2([o_s p] + [o_t p])}{\sin^2(o_s o_t)}.$$

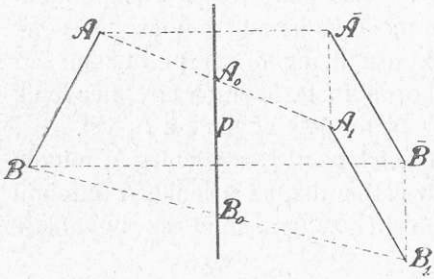
Ebből következik, hogy ha az első sokszögnek szögpontjain keresztül az $o_t$-vel párhuzamosan menő sugarakat a második sokszögnek megfelelő szögpontjain keresztül az $o_s$-sel párhuzamosan menő sugarakkal metszszük, akkor a metszőpontok egy negyedik sokszögnek szögpontjai, melynek $\Delta_3$ területe egyenlő a $\Delta_2$-vel.

Összehasonlítva az előbbi esettel, azért lesz jelenleg $\Delta_2$ mindig egyenlő a $\Delta_3$-mal, mert, mint már említettük, az ellenkező értelmű hasonló sokszögek speczialisabb helyzetűek, mint az ugyanegy értelműek.

7. Ha a $\mu$ és $\mu_1$ hasonló mezőkben két végesben fekvő megfelelő vonaldarab $AB$, $A_1B_1$ egyenlő, ha tehát két kollinear mezőben nemcsak a két végtelen távol fekvő, hanem két végesben fekvő megfelelő egyenesen a megfelelő pontsorok egyenlően projektivek, akkor a kollinear mezőket *kongruens*eknek nevezzük. Ugyanis minden $ABC$ háromszög, melynek egyik oldala az $AB$, kongruens (a szögek és az $AB$, $A_1B_1$ oldalak egyenlőségénél fogva) a megfelelő $A_1B_1C_1$-gyel, tehát minden idom, melyet a $C$ pont leír, kongruens a neki megfelelő $C_1$ ponttól leírt idommal, és így a $\mu$ és $\mu_1$ kongruens mezőkben minden megfelelő pontsor egyenlően projektiv.

Két kongruens mezőnek, a $\mu$ és $\mu_1$-nek, mely ugyanegy síkban van, következő kölcsönös helyzete lehet: 1. a megfelelő pontokat összekötő egyenesek párhuzamosak, tehát a mezők perspektiv helyzetűek, és úgy a kollineaczió-középpont, mint a – tengely végtelen távol van. Ekkor az egyik mező a kollineaczió-középpont irányában bizonyos vonaldarabbal eltolva a másikkal födésbe jut. — 2. A kongruens mezők ugyanegy értelműek, de a megfelelő pontokat összekötő egyenesek nem párhuzamosak. Ekkor ez utóbbi egyenesekre a felező pontokban merőlegesen álló egyenesek egymást a mezőknek egyedüli valós kettőspontjában, $O$-ban, metszik, mely

körül az egyik mező egy bizonyos $\varphi$ szöggel forgatva, a másik mezővel födésbe jut. A mezők képzetes kettőspontjai a képzetes körpontok lesznek. — 3. A kongruens mezők ellenkező értelműek, de a megfelelő pontoknak összekötő egyenesei párhuzamosak, tehát a mezők perspektiv helyzetűek, vagy közelebbről meghatározva involucziósak. A megfelelő pontok összekötő egyeneseinek felezőpontjai ekkor egy $p$ egyenesen (az involuczió- vagy symmetria-tengelyen) feküsznek, melyre vonatkozólag az egyik mezőnek tükörképe a másikkal födésbe jut. — 4. A kongruens mezők ellenkező értelműek, de a megfelelő $AA_1$, $BB_1$, ... pontoknak összekötő egyenesei nem párhuzamosak, a mezők tehát nem perspektivek. De ekkor is azok az $A_oB_o$, ... pontok, melyek a megfelelő $AA_1$, $BB_1$, ... pontoknak összekötő egyenesét felezik egy egyenesen, a mezők kettősegyenesén feküsznek.



50. ábra.

Ugyanis a $\mu$-nek tükörképe az $A_oB_o \equiv p$ egyenesre vonatkozólag egy $\mu_1$ mező, mely a $\mu$ és a $\mu_1$-gyel kongruens.

Ha a $\mu$ mező $AB$ egyenesének tükörképe az $A_oB_o \equiv p$ egyenesre vonatkozólag a $\mu_1$ mezőnek $\bar{A}_1\bar{B}_1$ egyenese, akkor az $\bar{A}_1\bar{B}_1$ az $A_oB_o$ egyenes irányában párhuzamosan eltolva az $A_1B_1$-be jut s így az egész $\mu_1$ mező a $\mu_1$-be kerül. (50. ábra.)

Minthogy a $\mu$ mező pontjait a tükörképeivel összekötő egyeneseknek felező pontjai az elmozdítás után a $p$ egyenesen maradnak és a $\mu$, $\mu_1$ mezők megfelelő pontjait összekötő egyeneseknek felezőpontjaiba jutnak, azért utóbbi felezőpontok is a $p$ egyenesen feküsznek. A $\mu$, $\mu_1$ mezőknek ekkor véges távolságban nincs kettőspontjuk, hanem a $p$-nek és az erre merőleges egyenesnek végtelen távol fekvő pontja a két kettőspont; a $p$ és a végtelen távol fekvő egyenes pedig a két kettősegyenes.

8. A $\mu$ és $\mu_1$ kollinear és konplanar mezőkből új mezőket szerkeszthetünk. Azok a pontok, melyek a $\mu$, $\mu_1$ mezők megfelelő pontpárjait azoknak egyik kettősegyenesétől harmónikusan választják el, az adottakkal kollinear mezőt, $\mu_o$-t, képeznek. Ugyanis a $\mu$ $\mu_1$ mezők minden megfelelő pontpárjának, pl. az $AA_1$-nek megfelel egy $A_o$ pont, mely t. i. az $AA_1$ pontpárt a mezők $o$ kettősegyenesétől harmónikusan elválasztja. Ha az $A$ pont a $\mu$-ben a $g$ egyenest, tehát az $A_1$ pont a $\mu_1$-ben a $g$-nek megfelelő $g_1$ egyenest írja le, akkor a

megfelelő $AA_1$ pontpároknak összekötő egyenesei egy kúpszeletet burkolnak, melynek a $g$, $g_1$ és $o$ egyenesek is érintői. Ennélfogva azok a pontok, melyek a $g$, $g_1$-en változó $A$, $A_1$ pontokat az $o$-tól harmónikusan elválasztják, az előbbi kúpszeletnek azon érintőjén lesznek, mely a $g$, $g_1$ érintőket az $o$-tól harmónikusan választja el. Minthogy tehát a $\mu$ bármely pontjának és e ponton keresztül menő egyenesnek a $\mu_o$-ban egy pont és e ponton keresztül menő egyenes felel meg, azért a $\mu$ és $\mu_o$ mezők kollineárok. A $\mu_o$ mező származásából következik, hogy a $\mu$, $\mu_1$ és $\mu_o$ mezők közül bármely kettőnek ugyanazon három kettősegyenese és kettőspontja van, mint a két első mezőnek.

Úgy, mikép a $\mu$, $\mu_1$ mezők és azoknak $o$ kettősegyenese segélyével a $\mu_o$ mezőt nyertük, a többi két kettősegyenest felhasználva, hasonló úton két új mezőt lehet leszármaztatni; továbbá a dualis szerkesztés alapján a három kettőspont segélyével még három mezőt találunk, mely az adottakkal szintén kollinear.

Ugyanis a $\mu$, $\mu_1$ mezők $A$, $A_1$ megfelelő sugársorainak képződménye egy kúpszelet, mely a mezők $OPQ$ kettőspontjain és az $A$, $A_1$ pontokon megy keresztül; tehát az a $g'_o$ egyenes, mely az $A$, $A_1$ pontokból kisugárzó $g$, $g_1$ megfelelő egyeneseket az $O$ ponttól harmónikusan elválasztja, ama kúpszeletet egy $A'_o$ állandó pontban metszi. A $\mu$, $\mu'_o$ mezőkben tehát az $A$, $A'_o$ pontok és a $g$, $g'_o$ egyenesek megfelelők, és ezért ama mezők kollineárok. Ennélfogva mondhatjuk:

*Azok a pontok (egyenesek), melyek a $\mu$ és $\mu_1$ kollinear mezők megfelelő pontjait (egyeneseit) a mezők $o$ kettősegyenesétől ($O$ kettőspontjától) harmónikusan elválasztják, az adottakkal oly kollinear mezőt képeznek, melynek az adott mezőkkel együtt ugyanaz a három kettőspontja és kettősegyenese van.*

Ebből következik:

*Két ugyanegy síkban fekvő affin, hasonló, vagy kongruens mező megfelelő pontjait összekötő vonaldaraboknak felezőpontjai az adottakkal affin mezőt képeznek.*

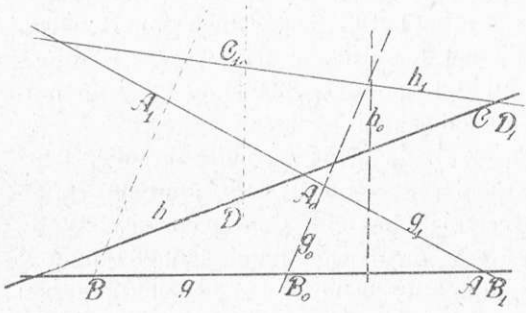
*Ha azonban a hasonló vagy kongruens mezők még ugyanegy értelműek is, akkor azok megfelelő pontjait összekötő vonaldaraboknak felezőpontjai az adottakkal hasonló mezőt képeznek.*

Hogy e tétel második részét kimutassuk, vegyünk fel a $\mu$ mezőben két egyenest, $gh$-t (51. ábra), melyeknek a $\mu_1$-ben megfelel a $g_1h_1$, és a föltétel szerint a $gg_1$ és $hh_1$ szögek egyenlők. Ha a $gg_1$ metszőpontja az $AB_1$, és a $hh_1$ metszőpontja a $CD_1$, akkor az $AB_1$ pontnak a $g$ és $g_1$-en megfelel a $B$, illetve az $A_1$ pont, míg a $CD_1$

pontnak a $h$ és $h_1$-en megfelel a $D$, illetve a $C_1$ pont. Minthogy $AB : A_1B_1 = CD : C_1D_1$, azért az $A_1AB$ és $C_1CD$ háromszögek hasonlók, és így az $A_1B$, $C_1D$ oldalak hajlásszöge egyenlő a $gh$ egyenesek hajlásszögével. Az $A_oB_oC_oD_o$ pontok felezik az $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$, $DD_1$ vonaldarabokat és ezért $A_oB_o \parallel A_1B$, $C_oD_o \parallel C_1D$; tehát az $A_oB_o \equiv g_o$ és a $C_oD_o \equiv h_o$ egyenesek, melyek a $\mu_o$ mezőben a $g$ és a $h$ egyeneseknek megfelelnek, a $g$ és $h$-val egyenlő szöget képeznek és így a $\mu$-vel affin $\mu_o$ mező a $\mu$-vel hasonló.

*

9. Kollinear mezők azonkívül, hogy *különösek*, t. i. affinek, hasonlók, vagy kongruensek lehetnek, még *el is korcsosulhatnak* úgy, mikép a projektiv pont- vagy sugársorok. Hogy ez elkorcsosulásokat lássuk, induljunk ki a különböző síkban fekvő $\mu$, $\mu_1$ mezők perspektiv helyzetéből. És pedig: projicziáljuk először a $\mu$ és $\mu_1$ mezők pontjait és egyeneseit a $\mu$ mezőnek valamely $M$ pontjából, mely nincs a $\mu_1$ síkban a másik mezőnek síkjára és nevezzük e projekcziókat megfelelő elemeknek.




51. ábra.

A $\mu$ mező pontjainak és egyeneseinek megfelelnek a $\mu_1$-ben a $\mu\mu_1$ síkok $ss_1$ metszővonalának pontjai és az $s_1$ egyenes; magának az $M$ pontnak és az $M$ sugársor sugarainak megfelel a $\mu_1$-nek bármely pontja, illetve azok az egyenesek a $\mu_1$ síkban, melyek ama sugársor illető sugarait metszik. Az $M$ pont a $\mu$-ben *singularis pont* és az $s_1$ egyenes a $\mu_1$-ben *singularis egyenes*.

Ha másodszor az $M$ pontot a $\mu\mu_1$ mezők $ss_1$ metszővonalában vesszük fel és így az $M$ pontot $M_1$-gyel is jelöljük, akkor a pontok és egyenesek megfelelése a két mezőben teljesen symmetrikus. T. i. a $\mu$ mező minden pontjának és minden egyenesének, mely nem megy az $M$-en keresztül, megfelel a $\mu_1$-ben az $M_1$ pont és az $s_1$ egyenes; és a $\mu_1$ minden pontjának s minden egyenesének, mely nincs az $M_1$ sugársorban, megfelel a $\mu$-ben az $M$ pont, illetve az $s$ egyenes; az $M$ sugársornak a $\mu$-ben megfelel egy vele projektiv $M_1$ sugársor a $\mu_1$-ben. Az $M$ pont és a rajta keresztül menő $s$ egyenes a $\mu$-ben, ugyszintén az $M_1$ pont és a rajta keresztül menő $s_1$ egyenes

a $\mu_1$-ben, az illető mezők singularis pontja és singularis egyenese.

Mindkét elkorcsosulást a perspektiv helyzettől függetlenül is leszármaztathatjuk, ha a $\mu\mu_1$ mezők kollineacziójának megállapítására szolgáló $U$, $U_1$ és $V$, $V_1$ projektiv sugársorokat (20. §. 2. p.) a mezőkben vagy különös kölcsönös helyzetben, vagy pedig már mint elkorcsosult sorokat vesszük fel.

Hogy ezt kimutassuk, tételezzük fel, hogy az $U$, $V$ sugársoroknak $UV$ középpontjai a $\mu$-ben egybeesnek, a vélök projektiv $U_1$, $V_1$ sugársoroknak középpontjai a $\mu_1$ mezőben nem esnek ugyan egybe, de abban a különös helyzetben vannak, hogy az $UV$ sugársorok $aa'$, $bb'$, $cc'$, ... egyesült sugarainak oly $a_1a'_1$, $b_1b'_1$, $c_1c'_1$, ... sugarak felelnek meg az $U_1$, $V_1$ sorokban, melyek egymást egy $s_1$ egyenesben metszik.

Ekkor a $\mu$ mező egy tetszésszerinti $A$ pontjának, mely pl. az $aa'$ két egyesült sugáron van s melyet ezek metszőpontjának tekinthetünk, megfelel egy $A_1$ pont az $s_1$ egyenesen, mely az $a_1a'_1$ sugaraknak metszőpontja; ellenben az $UV$ pontnak, melyet az $U$, $V$ sugársorok két tetszésszerinti sugara metszőpontjának tekinthetünk, megfelel a $\mu_1$-ben ama két sugárnak metszőpontja, azaz a $\mu_1$-nek bármely pontja. Valamely $g$ egyenesnek a $\mu$-ben, mely nincs az $UV$ sugársorban, megfelel a $\mu_1$-ben az $s_1$ egyenes, mert a $g$ egyenes pontjainak megfelelő pontok az $s_1$-ben vannak; ellenben az $UV$ sugársor egy sugarának, pl. az $aa'$-nak, megfelel a $\mu_1$-ben az $a_1$, az $a'_1$, és minden egyenes, mely az $a_1a'_1$ egyeneseknek metszőpontján megy keresztül, mert az $aa'$ egyenesen egy oly $UV$ pont van, melynek a $\mu_1$ mező bármely pontja megfelelhet. Az $UV$ lesz tehát a $\mu$-nek singularis pontja és az $s_1$ a $\mu_1$-nek singularis egyenese.

A második elkorcsosulást tárgyalandó, tételezzük fel, hogy az $UV$ sugársoroknak középpontjai a $\mu$-ben és az $U_1V_1$ sugársoroknak középpontjai a $\mu_1$-ben egybeesnek. Az $UV$ sugársorok egyesült sugarainak, $aa'$, $bb'$, $cc'$, ...-nek megfelelnek az $U_1V_1$-ben az $a_1a'_1$, $b_1b'_1$, $c_1c'_1$ ... sugarak, melyek nem egyesültek, de mert $abc \ldots \overline{\wedge} a_1b_1c_1 \ldots$ és $a'b'c' \ldots \overline{\wedge} a'_1b'_1c'_1 \ldots$, azért $a_1b_1c_1 \ldots \overline{\wedge} a'_1b'_1c'_1 \ldots$ Ez utóbbi projektiv sugársorokat olyanoknak választjuk, hogy azoknak csak egy kettőssugaruk, $s_1s'_1$ legyen, melynek tehát az $UV$ sugársorban egy $ss'$ sugár felel meg. Ez az $ss'$ sugár pedig az $U_1V_1$ sugársorok egybeeső sugarainak megfelelő sugaraitól képezett $UV$ projektiv sugársoroknak szintén egyedüli kettőssugara.

Ha a $\mu$, $\mu_1$ mezők kollineacziójáť ily két pár projektiv sugársor $U \overline{\wedge} U_1$ és $V \overline{\wedge} V_1$ állapítja meg, akkor a $\mu$ mező minden $A$ pontjá-

nak, mely pl. az $aa'$ sugáron van, megfelel a $\mu_1$-ben az $U_1 V_1$ pont, mint az $a_1$, $a'_1$ sugarak metszőpontja, s viszont a $\mu_1$ minden pontjának, mely egy közös $d_1 d'_1$ sugáron van, megfelel a $\mu$-ben a $d$, $d'$ különvált sugarak $UV$ metszőpontja. Továbbá minden $g$ egyenesnek a $\mu$-ben, mely az $ss'$-t az $UV$ pontban metszi, megfelel bármely az $U_1 V_1$ ponton keresztül menő egyenes, és olyannak, mely az $ss'$-et nem az $UV$ pontban metszi, megfelel az $s_1$ sugár; ugyanez áll viszont a $\mu_1$-re vonatkozólag. Az $UV$, $U_1 V_1$ pontok és az $ss'$, $s_1 s'_1$ egyenesek a $\mu$, $\mu_1$ mezők singularis pontjai és egyenesei és ha ezek még végtelenbe távoznak, úgy az elkorcsosulások még különösek is lesznek. —

Végezetül megemlítjük, hogy a kollinear mezők különös esetei (affinitás, hasonlóság és kongruenczia) közül a sugárnyalábokná csak a kongruenczia van meg, ellenben az elkorcsosult mezőket projicziáló sugárnyalábok szintén elkorcsosultak lesznek.

Két kongruens és konczentrikus kollinear sugárnyalábnak egy valós kettőssugara $o$, és egy erre merőleges $\omega$ kettőssíkja van. Ha az $aa_1$ és $bb_1$ sugarak a kongruens nyalábokban megfelelők, akkor az $aa_1$ és $bb_1$ sugarak egyik szögének felezőjén keresztül menő és az illető $[aa_1]$, $[bb_1]$ síkra merőleges síkok egymást az $o$ kettőssugárban metszik. Ha a második nyalábot az $o$ körül addig forgatjuk, míg az $a_1$ az $a$-ba nem jut, akkor a második nyalábnak minden sugara a neki megfelelővel egyesül. A két kollinear nyaláb két képzetes kettőssugara, az $\omega$ kettőssíknak képzetes körpontjain megy keresztül.

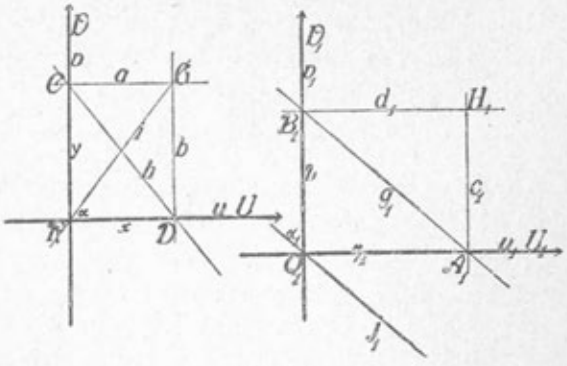
## 25. §. Korrelativ mezők és nyalábok.

1. Tudjuk az előbbiekből, hogy ha két mező korrelativ vonatkozású, akkor az egyik mező minden pontjának, egyenesének, pontsorának, sugársorának, involucziós pont- vagy sugársorának a másik mezőben egy egyenes, egy pont, egy sugársor, egy pontsor, illetve egy involucziós sugár- vagy pontsor felel meg. A megfelelő egyszerű sorok mindig projektivek; a megfelelő involucziós sorok kettőselemeinek pedig valós vagy képzetes mivolta szintén megegyező. Ebből következik, hogy az egyik mezőben fekvő $k^{(2)}$ kúpszelet pontjainak, melyek két projektiv sugársor megfelelő sugarainak metszőpontjai, a másik mezőben egy II. o. sugársor felel meg, mely ama sugársoroknak megfelelő pontsorok képződménye. És viszont a $k^{(2)}$ érintőinek megfelelnek ama II. o. sugársortól beburkolt $k_1^{(2)}$ kúpszeletnek pontjai. A $k^{(2)}$ kúpszelettől indukált polárisrendszerben az összetar-

tozó pólus és polárisoknak megfelelnek a $k_{1(2)}$-nek összetartozó polárisai és pólusai.

A $\mu$ sík végtelen távol fekvő $q$ egyenesének megfelel a $\mu_1$-ben általában a végesben fekvő $Q_1$ pont, mely a $\mu_1$ mező *középpontja*, és viszont a a $\mu_1$ sík $r_1$ végtelen távol fekvő egyenesének megfelelő $R$ pont a $\mu$-ben, e mezőnek középpontja. Az egyes mezőkben a középpontokon keresztül menő egyeneseket *átmérőknek*, és oly két átmérőt, melyek közül az egyiknek, tehát bármelyiknek, végtelen távol fekvő pontja a másiknak megfelel, *kapcsolt*nak nevezünk.

Az $\mu$ mezőben valamely orthogonalis sugársor a $q$-t egy involucziós pontsorban metszi, melynek a $\mu_1$-ben egy $Q_1$ középpontú (elliptikus) involucziós sugársor felel meg. E sugársor $u_1v_1$ tengelyei olyanok, hogy a nekik megfelelő $UV$ pontok a $\mu$ mező bármely pontjából derékszögű sugarakkal projicziáltatnak. Az $u_1, v_1$ végtelen távol fekvő $U_1 = (u_1r_1)$, $V_1 = (v_1r_1)$ pontjainak megfelelnek az $UR = u$, $VR = v$ egyenesek, melyek tehát egymásra merőleges átmérők. Az $u, u_1$ és $v, v_1$ kapcsolt átmérők különösek, mert $u \perp v$, és $u_1 \perp v_1$ és ezeket a különös átmérőket a korrelativ mezők *tengelyeinek* nevezzük.



52. ábra.

2. A $\mu$ és $\mu_1$ mezők korrelativ vonatkozását akképen határozhatjuk meg, hogy a $\mu$-ben az $u \perp v$ egyeneseken fekvő pontsorokkal projektiv $U_1$, $V_1$ sugársoroknak középpontjait két egymásra merőleges egyenes végtelen távol fekvő pontjában vesszük fel a $\mu_1$ mezőben. Ekkor az $uv$ egyenesek (52. ábra) a $\mu$-ben tengelyek, és ezek $UV$ végtelen távol fekvő pontjainak megfelelő, tehát az $U_1V_1$ pontokon keresztül menő, $u_1v_1$ egyenesei a $\mu_1$-ben a tengelyek. Az $u$, $U_1$ és a $v$, $V_1$ sorok projektivitásának meghatározására czélszerű az $U_1$, $V_1$ párhuzamos sugarú sorokat a reájuk merőleges $v_1, u_1$ tengelyekkel metszeni, vagy a $v_1$, $V$ és $u_1$, $U$ sorok projektivitásának meghatározására a $V$, $U$ párhuzamos sugarú sorokat az $u$, $v$-vel

metszeni, és az $u$, $v_1$ ; $v$, $u_1$ pontsorokat egymásra projektiv vonatkoztatni. Úgy a két első, mint a két második projektiv pontsornak ellenpontjai a mezőknek $R \equiv (uv)$ és $Q_1 \equiv (u_1 v_1)$ középpontjai lesznek.

Ha tehát az $u$ és $v_1$ projektiv pontsoroknak hatványa $\varkappa^2$, az $u_1$ és $v$ projektiv pontsoroknak hatványa pedig $\lambda^2$, és a $\mu$ mező egy $G$ pontján keresztül az $u$-val párhuzamos $a$ egyenest húzunk, mely az $R$-től $y$ távolságra van, és a $v$-vel párhuzamos $b$ egyenest húzunk, mely az $R$-től $x$ távolságra van, akkor az $a$ egyenesnek megfelel az $u_1$-en egy $A_1$ pont, mely a $Q_1$-től $\xi_1$ távolságra van, a $b$ egyenesnek pedig megfelel a $v_1$-en egy $B_1$ pont, mely a $Q_1$-től $\eta_1$ távolságra van, végre a $G \equiv (ab)$ pontnak megfelel a $g_1 \equiv A_1 B_1$ egyenes, és

$$x\eta_1 = \varkappa^2, \quad y\xi_1 = \lambda^2.$$

Hasonlókép, ha a $\mu_1$ mező egy pontjának távolsága az $u_1$, $v_1$ tengelyektől $y_1$, $x_1$ és a megfelelő egyenes a $\mu$-ben az $u$, $v$ tengelyekről a $\xi$, $\eta$ vonaldarabokat metszi le, akkor

$$\xi y_1 = \varkappa^2, \quad \eta x_1 = \lambda^2.$$

A $GR \equiv i$ átmérőhez a $g_1$-gyel párhuzamos $j_1$ átmérő kapcsolt; és ha az $i$-nek hajlásszöge az $u$-hoz $\alpha$, a $j_1$-nek hajlásszöge a $v_1$-hez $\alpha_1$, akkor

$$tg\alpha . tg\alpha_1 = \frac{y}{x} . \frac{\xi_1}{\eta_1} = \frac{\lambda^2}{\varkappa^2}.$$

3. Ha a $\mu$, $\mu_1$ mezőket akkép helyezzük egymásra, hogy az $uv_1$ és $u_1 v$ tengelyek, tehát egyszersmind a síkok végtelen távol fekvő $qr_1$ egyenesei egyesüljenek, a mi négyféleképen történhetik, akkor a mezők „involucziós“ vagy „poláris“ helyzetbe jutnak. Ugyanis a $G$ pontnak, ha azt a $\mu_1$ mezőhöz tartozónak tekintjük és $H_1$-gyel jelöljük, megfelel a $\mu$-ben egy $h$ egyenes, mely az előbbi relácziók folytán a $g_1$-ben van; és ugyanígy egyesülnek a mezők minden pontjának megfelelő egyenesei. A korrelativ mezők ekkor egy *polárismezőt* képeznek, melynek középpontja az $RQ_1$ pont, tengelyei az $uv_1$ és $u_1 v$ egyenesek, kapcsolt átmérőinek rendszere az előbbi kapcsolt átmérők, az összetartozó pólusok és polárisok a korrelativ mezők megfelelő pontjai és egyenesei.

Figyeljük meg, hogy a $\mu$ mező tengelyein kívül fekvő $G$ pontjának megfelelő $g_1$ egyenese a $\mu$-vel korrelativ $\mu_1$ mezőben hova jut, ha a $\mu\mu_1$ mezőket poláris helyzetbe hozzuk. Az $uv$ tengelyek a $\mu$ mezőt és az $u_1 v_1$ tengelyek a $\mu_1$ mezőt négy negyedre osztják; az előbbi negyedek egyikében van a $G$ pont, az utóbbiak egyikében a megfelelő $g_1$ egyenes véges hosszúságú darabja. Az $uv_1$ és $u_1 v$

tengelyek négyféle egyesítésénél a $\mu\mu_1$ mezők negyedei is négyféleképen egyesülhetnek, még pedig akképen, hogy a $G$ pont és a $g_1$ egyenesnek véges hosszuságú darabja

1) ugyanegy negyedben legyen;
2) hogy azok az $uv_1$-től el legyenek választva;
3) hogy azok az $u_1v$-től el legyenek választva, végre
4) hogy azok az $uv_1$-től és az $u_1v$-től el legyenek választva.

Mind e négy esetben a $\mu\mu_1$ polárismezők vezető kúpszeleteinek tengelyei az $uv_1$ és $u_1v$ tengelyek lesznek, de e kúpszeletek tengelyei hosszúságainak négyzetei az egyes eseteknek megfelelőleg $\varkappa^2$, $\lambda^2$; $\varkappa^2$, $-\lambda^2$; $-\varkappa^2$, $\lambda^2$; $-\varkappa^2$, $-\lambda^2$ úgy, hogy e kúpszeletek e négy esetben rendre: ellipsis, hyperbola az $uv_1$ főtengelylyel, hyperbola az $u_1v$ főtengelylyel, végre képzetes kúpszelet.

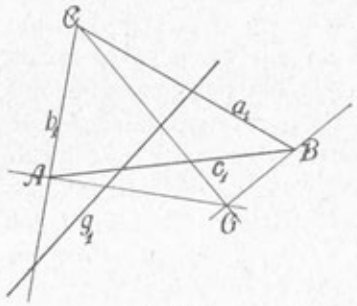
Ha a $g_1$ egyenesnek helyzetét a négy közül bármily két esetben megfigyeljük, azt látjuk, hogy azok egymásnak tükörképei az $uv_1$, vagy az $u_1v$, vagy végre az $uv_1$ és az $u_1v$ tengelyekre vonatkozólag. Ezért: a $\mu_1$ mezőnek bármelyik két helyzete, a midőn a $\mu$-vel poláris mezőt képez olyan, hogy az egyik a másiknak tükörképe az $uv_1$, vagy az $u_1v$, vagy végre az $uv_1$ és az $u_1v$ tengelyekre vonatkozólag. Ebből pedig következik: *ha egy* A *ábrának polárisábrája ama négy polárismezö vezető kúpszeletére vonatkozólag, a melybe két korrelativ mezö hozható,* $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$, *akkor az* $A_1A_2$ *és az* $A_3A_4$ *egymásnak tükörképe a mezők közös* $uv_1$ *tengelyére vonatkozólag; az* $A_1A_4$ *és az* $A_2A_3$ *egymásnak tükörképe a mezők másik közös tengelyére,* $u_1v$*-re, vonatkozólag; végre az* $A_1$ *és az* $A_2$-nek *tükörképe előbb az* $uv_1$-re *és aztán e tükörképnek tükörképe az* $u_1v$ *tengelyre vonatkozólag az* $A_3$ *illetve az* $A_4$.

A midőn $\varkappa = \lambda$, a korrelativ mezőknek $\infty^1$ tengelypárjai vannak, és így a mezők $\infty^1$-szer helyezhetők polárisan egymásra; az ebből származó polárismezők vezető kúpszeletei között van egy valós és egy képzetes kör és $\infty^1$ egyenoldalú hyperbola, melyeknek csúcsai a valós kör pontjai. Ebből következik, *ha a* $\mu$, $\mu_1$ *korrelativ mezők olyanok, hogy poláris helyzetben a polárismezők egyik vezető kúpszelete valós vagy képzetes kör, akkor ebben a helyzetben a* $\mu_1$ *mezönek tükörképe ama kör bármely átmérőjére vonatkozólag, a* $\mu$*-vel szintén poláris mezőt képez; ennek vezető kúpszelete egy egyenoldalú hyperbola, melynek valós, illetve képzetes tengelye az előbbi tükröző kör-átmérő. Ha folytatólag a* $\mu_1$ *mező ebből a helyzetből a hyperbola középpontja körül annak síkjában* $2\varphi$ *szöggel elfordíttatik, akkor* $\mu_1$ *ebben az új helyzetében is poláris mezőt képez a* $\mu$*-vel, mely-*

*nek vezető kúpszelete az előbbi hyperbolának középpontja körül $\varphi$ szöggel elforgatott helyzete.*

Ha tehát valamely A ábrának valamely egyenoldalú hyperbolára vonatkozó poláris ábrája az $A_1$, és $A_1$-et a hyperbola síkjában annak középpontja körül $2\varphi$ szöggel elforgatjuk, akkor az elforgatott $A_1$ szintén poláris ábrája az A-nak egy oly egyenoldalú hyperbolára, mely az előbbinek a középpont körül $\varphi$ szöggel elforgatott helyzete. Másrészt az $A_1$-nek tükörképe az első hyperbola fő- vagy melléktengelyére vonatkozólag az A-nak szintén poláris ábrája egy oly valós, illetve képzetes körre vonatkozólag, mely a hyperbolával közös középpontú és annak fő-, illetve melléktengelyén fekvő pontjain megy keresztül.

4. Azonban nemcsak a tengelyekből kiindulva határozhatók meg a korrelativ mezők akképen, hogy azok poláris fekvésűek legyenek, hanem általában, *ha két korrelativ mezőben, a $\mu$ és $\mu_1$-ben, van egy oly háromszög, hogy szögpontjainak, mint a $\mu$-hez tartozóknak a szemben fekvő oldalak felelnek meg a $\mu_1$-ben, tehát egyszersmind szögpontjainak, mint a $\mu_1$-hez tartozóknak szintén a szemben fekvő oldalak felelnek meg a $\mu$-ben, akkor a korrelativ mezők polárisok, azaz minden pontnak, bármelyik mezőhöz számítsuk is azt, ugyanaz az egyenes felel meg a másikban, és megfelelő pontok és egyenesek egy poláris mezőt képeznek.*



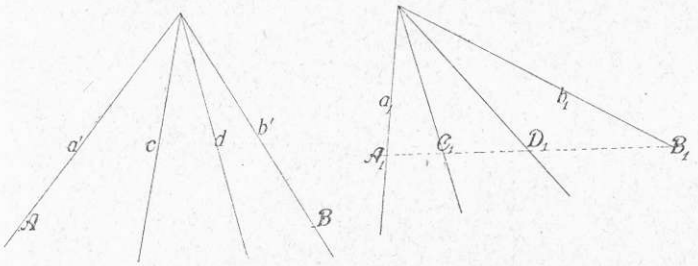
53. ábra.

Ugyanis ha (53. ábra) az $ABC$ háromszög $A$, $B$, $C$ szögpontjainak, mint a $\mu$-höz tartozóknak, az $a_1 \equiv BC$, $b_1 \equiv CA$, $c_1 \equiv AB$ szemben fekvő oldalak felelnek meg $\mu_1$-ben, akkor a $(b_1c_1)$, $(c_1a_1)$, $(a_1b_1)$ szögpontoknak, mint a $\mu_1$-hez tartozóknak a $BC$, $CA$, $AB$ oldalak felelnek meg a $\mu$-ben. Minthogy az $ABC$ háromszög egyik oldalán levő szögpontoknak e szögpontokkal szemben fekvő oldalak felelnek meg mindkét mezőben, azért azon oldalon levő pontsornak egy vele involucziós sugársor felel meg. Ha továbbá a korrelaczió meghatározására az $ABC \equiv a_1b_1c_1$ háromszög oldalain kívül még egy $G$ pont és egy $g_1$ egyenes van adva úgy, hogy $ABCG$ egy négyszög, $a_1b_1c_1g_1$ pedig egy négyoldal legyen, akkor ezek mint megfelelő alakzatok meghatározzák a két mező korrelacziójá̀t. Annak a három pontnak, melyben a $g_1$ az $ABC$ háromszög oldalait metszi, mint a

$\mu$ mezőhez tartozónak is az a három sugár fog megfelelni, mely a szemben fekvő szögpontokat a $G$ pontból projicziálja, tehát a $g_1$ egyenesnek a $\mu$-ben is a $G$ pont felel meg a $\mu_1$-ben, s minthogy ez minden pontra és egyenesre igaz marad, mely egyféle vonatkozásban egymásnak megfelel, azért a korrelativ mezők egy poláris mezőt képeznek.

5. Térjünk vissza a két tetszésszerinti helyzetű korrelativ mezőhöz és bizonyítsuk be a következő tételt :

*A $\mu$ mezőben két pontnak valamely egyenestől mért távolságai viszonya osztva ugyanannak a két pontnak egy másik egyenestől mért távolságai viszonyával, egyenlő a $\mu$-hez korrelativ $\mu_1$ mezőben az első egyenes megfelelő pontjának a pontoknak megfelelő egyenesektől mért távolságai viszonya osztva a második egyenes megfelelő*




54. ábra.

*pontjának az előbbi egyenesektől mért távolságai viszonyával.* Ha tehát a $\mu$-ben (54. ábra) az $AB$ pontoknak és a $cd$ egyeneseknek a $\mu_1$-ben az $a_1b_1$ egyenesek és a $C_1D_1$ pontok felelnek meg, és két egymás mellé írt betü, mely egy pontot és egy egyenest jelez, a pontnak távolát jelenti az egyenestől, akkor a tétel azt fejezi ki, hogy :

$$\frac{Ac}{Bc} : \frac{Ad}{Bd} = \frac{C_1a_1}{C_1b_1} : \frac{D_1a_1}{D_1b_1}.$$

Ugyanis ha az $a'$, $b'$ egyenesek a $(cd)$ pontot az $A$, $B$ pontokkal kötik össze és így az ezeknek megfelelő $A'_1$, $B'_1$ pontok az $a_1$, $b_1$ egyeneseknek metszőpontjai a $C_1D_1$ egyenessel, akkor

$$(a'b'cd) \overline{\wedge} (A'_1B'_1C_1D_1)$$

tehát

$$\frac{sin(a'c)}{sin(a'd)} : \frac{sin(b'c)}{sin(b'd)} = \frac{A'_1C_1}{A'_1D_1} : \frac{B'_1C_1}{B'_1D_1} = \frac{C_1A'_1}{D_1A'_1} : \frac{C_1B'_1}{D_1B'_1}$$

vagy

$$\frac{Ac}{Ad} : \frac{Bc}{Bd} = \frac{C_1a_1}{D_1a_1} : \frac{C_1b_1}{D_1b_1}$$

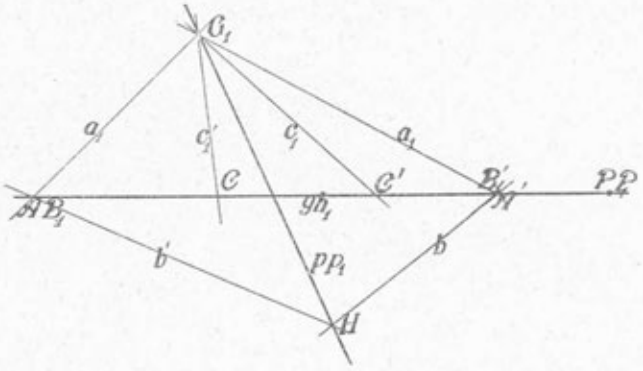
vagy végre

$$\frac{Ac}{Bc} : \frac{Ad}{Bd} = \frac{C_1a_1}{C_1b_1} : \frac{D_1a_1}{D_1b_1}.$$

Föltételezvén, hogy a $B$ és $D_1$ pontok a $\mu$ és $\mu_1$ mezőknek $R$ és $Q_1$ középpontjai, tehát a $b_1$ és $d$ egyenesek a mezők végtelen távol fekvő egyenesei, következik ez előbbi általános tételből:

$$Ac : C_1a_1 = Rc : Q_1a_1.$$

Tehát: „Valamely pontnak távolsága egy egyenestől az egyik mezőben úgy viszonylik a megfelelő egyenes és pont távolságához a másik mezőben, mint az első mező középpontjának távolsága az első egyenestől viszonylik a második mező középpontjának távol-




55. ábra.

ságához a második egyenestől.“ És ha az utóbbi távolságok ($Rc$ és $Q_1a_1$) egyenlők, akkor a tétel ekkép egyszerüsbül:

*Ha két korrelativ mezőben oly két egyenest veszünk fel, mely az illető mezők középpontjától egyenlő távolságra van, akkor az ezeknek megfelelő pontok is, az illető mezőben fekvő egyenesektől egyenlő távolságra lesznek.*

Fordítva: Ha valamely pontnak távolsága valamely egyenestől egy sík mezőben oly nagy, mint az ezeknek megfelelő egyenes és pont távolsága az előbbi mezővel korrelativ mezőben, akkor a két egyenes a mezők középpontjától egyenlő távolságra van.

6. Vegyünk fel ezután két korrelativ mezőt, $\mu$ és $\mu_1$-et, mely nem poláris helyzetű, hanem tetszésszerint van egy síkban elhelyezve, és vizsgáljuk meg mily különös pontok, egyenesek, pont- és sugársorok vannak e mezőkben.

Az $AB_1$ pontnak (55. ábra) két egyenes $a_1$ és $b$ felel meg, mely egymást egy $(a_1b)$ pontban metszi; ennek a pontnak, mert

az $a_1$-en és a $b$-n van, oly két egyenes fog megfelelni, mely az $AB_1$ ponton megy keresztül. Az $AB_1$ és $(a_1 b)$ pont tehát azt a kölcsönös tulajdonságot mutatja, hogy bármelyiknek megfelelő egyenesei egymást a másikban metszik. A mezők ily két-két pontjáról, melyeknek száma $\infty^2$, azt mondjuk, hogy a $\mu\mu_1$ korrelativ mezőkben *egymáshoz vannak rendelve.* Ugyanígy minden egyenesnek, $cd_1$-nek, két pont $C_1$, $D$ felel meg, melyek összekötő egyenesének, $C_1D$-nek, megfelelő pontok a $cd_1$ egyenesen vannak, s mely $C_1D$ egyenest a $cd_1$-hez rendeltnek nevezünk.

Mialatt az $AB_1$ pont valamely $gh_1$ egyenesen egy pontsort ír le, a megfelelő $a_1$, $b$ egyenesek a $gh_1$-nek a megfelelő $G_1$, $H$ pontok körül két projektiv sugársort, és így az $AB_1$-hez rendelt pontok általában egy kúpszeleten az adott pontsorral projektiv pontsort írnak le. (Ugyanígy egy I. o. sugársor sugaraihoz rendelt egyenesek, azzal a sugársorral projektiv II. o. sugársort képeznek.) De ha az $AB_1$ ponttól leírt pontsor $gh_1$ tartója az $AB_1$-hez rendelt $(a_1 b)$ ponton megy keresztül, akkor a $G_1$, $H$ sugársorok perspektiv helyzetűek, és az $AB_1$-hez rendelt pontsor azzal involucziós helyzetű.

Ugyanis jelöljük az $AB_1$ ponthoz rendelt $(a_1 b)$ pontot $A'B'_1$-gyel, az ennek megfelelő egyeneseket $a'_1$ $b'$-sel. Minthogy a $\mu$ mező $A$, $A'$ pontjainak megfelelő $a_1$, $a'_1$ egyenesek az $A'$, $A$ pontokon mennek illetőleg keresztül, az $A$-tól leírt $g$ pontsor involucziós fekvésű a $\mu_1$-ben levő megfelelő $a_1$ egyeneseitől leírt sugársorral. Ha tehát a $g$ egyenes valamely $C$ pontjának megfelel a $c_1$ egyenes, és a $(gc_1) = C'$ pontnak mint a $\mu$-hez tartozónak megfelel a $c'_1$ egyenes, akkor ez a $C$ ponton megy keresztül. A $C$ pont a $c'_1$ $h_1$ egyeneseknek metszőpontja; ennek mint a $\mu_1$-hez tartozónak a $C'H$ egyenes felel meg; tehát a $C$ pontnak mindkét mezőben megfelelő egyenesek egymást a $C'$ pontban metszik, mely a $C$-hez rendelt pont.

Ennélfogva: „Oly egyenesnek, mely a $\mu$, $\mu_1$ korrelativ mezők egy tetszésszerinti pontját a megfelelő egyeneseknek metszőpontjával összeköti, az a tulajdonsága van, hogy a rajta fekvő pontsornak megfelelő sugársorok egymást a pontsorral involucziós fekvésű pontsorban metszik."

Ebből következik, hogy az ily tulajdonságú $gh_1$ egyenes $G_1$, $H$ pontjait összekötő $pp_1$ egyenesnek ugyanegy $PP_1$ pont felel meg mindkét mezőben a $gh_1$ egyenesen, mely a $pp_1$ és $gh_1$ egyenesek metszőpontjának társpontja a $gh_1$-en levő involuczióssorban. A $PP_1$ *tehát oly különös pontja a* $\mu$, $\mu_1$ *korrelativ mezőknek, hogy a neki megfelelő* $pp_1$ *egyenesek egybeesnek, azaz: a* $PP_1$ *pontnak a* $pp_1$ *egyenes „involucziósan" felel meg.* Csupán egy ily pontja van a mezők-

nek, hogy a neki involucziósan megfelelő egyenes nem megy az illető ponton keresztül, mert ha az $SS_1$ pont is ilyen volna, és az ennek involucziósan megfelelő $ss_1$ egyenes a $pp_1$-et a $TT_1$ pontban metszené, akkor $TT_1$-nek megfelelő egyenesek is egybeesnének a $PS \equiv P_1S_1 \equiv t \equiv t_1$ egyenesbe, mely a $pp_1$-et a $KK_1$ pontban metszi. De ekkor a korrelativ mezők már poláris helyzetűek lennének, mert a $PTK$ háromszög szögpontjainak mindkét mezőben a szemben fekvő oldalak felelnének meg. —

Minden a $PP_1$ ponton keresztül menő egyenesnek az a tulajdonsága van, hogy a rajta fekvő pontsornak mindkét mezőben megfelelő sugársorok egymást a pontsorral involucziós pontsorban metszik; és minden pontnak a $pp_1$ egyenesen az a tulajdonsága van, hogy a rajta keresztül menő sugársor sugarainak mindkét mezőben megfelelő pontok, a felvett sugársorral involucziós sugársor sugarain feküsznek.

A $PP_1$ sugársornak, mint a $\mu$ mezőhez tartozónak megfelel a $pp_1$-en egy vele projektiv pontsor; ama sugársorban tehát két oly valós vagy képzetes $l$, $n$ sugár van, mely a neki megfelelő $L_1$, illetve $N_1$ ponton megy keresztül. Az $L_1P_1 \equiv l$, $N_1P_1 \equiv n$ sugaraknak, mint a $\mu_1$-hez tartozóknak az $(lp) \equiv L_1$, $(np) \equiv N_1$ pontok felelnek meg a $\mu$-ben; tehát ezek az $L_1 \equiv L$, $N_1 \equiv L$ pontok is oly tulajdonságúak, mint a $PP_1$ pont, t. i. hogy a nekik megfelelő egyenesek egybeesnek az $ll_1$- és $nn_1$-be, csakhogy ez utóbbi pontok az illető megfelelő egyeneseken feküsznek és képzetesek is lehetnek.

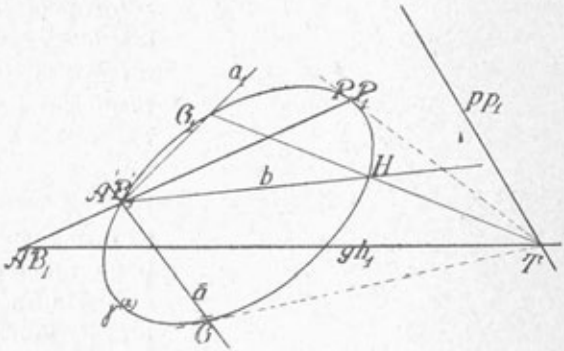
A $\mu$ mező egy tetszésszerinti egyeneséhez végtelen sok oly egyenest lehet találni a $\mu$-hez korrelativ $\mu_1$ mezőben, hogy a mezőknek és az egyeneseknek egyesítése után az egyenesek involucziósan feleljenek meg egy pontnak, mely vagy magában az egyenesben van (mint az előbb talált $ll_1$ egyenes és $LL_1$ pont), vagy pedig az egyenesen kívül van (mint az előbbi $pp_1$ egyenes és $PP_1$ pont).

Ugyanis ha először az egyik mezőt akkép mozdítjuk el a másik síkjában, hogy a $p$ egyenes a neki megfelelő $P_1$ ponton menjen keresztül és a $P_1$ pontnak, mint a $\mu$ mezőhöz tartozó $S$ pontnak az $s_1$ egyenes felel meg a $\mu_1$-ben, úgy még az egyik mezőt az $SP_1 \equiv (s_1p)$ pont körül akkép forgathatjuk, hogy az $s_1$ és $p$ egyesüljön, tehát az $SP_1$ pontnak az $s_1p$ egyenes involucziósan feleljen meg. Minthogy a $P_1$ pontnak a $p$-ben $\infty^1$ helyzetet adhatunk, azért a művelet is ugyanennyiszer végezhető.

Ha másodszor a $\mu_1$ síkban felkeresünk egy oly $t_1$ egyenest, mely a $\mu_1$ mezőnek $Q_1$ középpontjától ép oly távolságra van, mint a $p$ egyenes a $\mu$ mezőnek $R$ középpontjától, akkor a $t_1$-nek a $\mu$-ben

megfelelő $T$ pont is a $p$-től ép oly távolságra van, mint a $P_1$ pont a $t_1$-től (5. p.). Most már a $\mu$, $\mu_1$ mezőket és ezekben a $p$ és $t_1$ egyeneseket, valamint a $P$ és $T_1$ pontokat egyesíthetjük és ekkor a $PT_1$ pontnak a $p_1 t$ egyenes involucziósan fog megfelelni. Minthogy $\infty^1$ oly $t_1$ egyenest vehetünk fel a $\mu_1$-ben, mely a $Q_1$ ponttól ugyanoly távolságra van, mint a $p$ az $R$-től, azért ezt a műveletet is $\infty^1$-szer végezhetjük.

7. A későbbiekre nézve fontossággal bir tudni, hogy mi a geometriai helye azoknak a pontoknak a konplanar és korrelativ $\mu\mu_1$ mezőkben, melyek a nekik megfelelő egyeneseken feküsznek és ez utóbbi egyeneseknek, melyek tehát a nekik megfelelő pontokon mennek keresztül. Könnyű belátni, hogy ha egy pont, mint az első mezőhöz tartozó, a neki megfelelő egyenesen van, akkor egyszersmind, mint a másik mezőhöz tartozó is, a neki megfelelő egyenesen lesz.



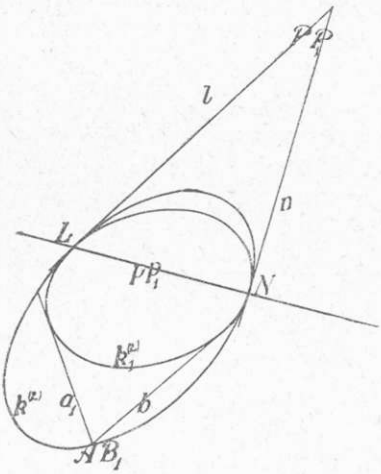

56. ábra.

Az előbbiekből (6. p.) tudjuk, hogy ha a $gh_1$ egyenes nem megy keresztül az involuciós tulajdonságú $PP_1$ ponton (56. ábra), akkor a $gh_1$ egyenesen mozgó $AB_1$ ponthoz rendelt $A'B'_1$ pont, mely az $AB_1$ pontnak megfelelő és a $G_1$, $H$ ponton keresztül menő $a_1$, $b$ egyeneseknek metszőpontja, egy $\gamma^{(2)}$ kúpszeletet ír le. Az $A$, $A'$ egymáshoz rendelt pontoknak összekötő egyenesei pedig, mint láttuk, a $P$ ponton mennek keresztül, tehát az $AP$ egyenes a $\gamma^{(2)}$ kúpszeletet az $A'P$ pontokban metszi. Az $A$ ponthoz rendelt $A'$ pont egybeesik a $P$-vel, ha az $A$ pont a $P$-nek involuciósan megfelelő $p$ egyenesébe jut; ebből látható, hogy a $P$ pontot a $g$ és $p$-nek $T$ metszőpontjával összekötő egyenes a $\gamma^{(2)}$-t érinti a $P$ pontban. Ez a $T$ pont a $G_1H$ egyenesen is rajta van, mert ez utóbbi a $gh_1$ egyeneshez van rendelve és két egymáshoz rendelt egyenes egymást mindig a $p$ egyenesben metszi.

Jelöljük a $T$ pontból a $\gamma^{(2)}$-höz huzható második érintőnek érintőpontját $\overline{G}$-vel. Minthogy ez a $\overline{G}$ pont a $G_1$ és $H$ pontokat a $P$-től harmónikusan választja el: az $A'\overline{G} \equiv \bar{a}$ egyenes is harmónikusan

fogja elválasztani az $A'G \equiv a_1$, $A'H \equiv b$ egyeneseket az $AA'P$ egyenestől, vagy, ami ugyanazt mondja, az $A$ ponttól. Másrészt a $\gamma^{(2)}$-be írt $A'P\overline{G}$ háromszögnek $A'P$, $A'\overline{G}$ oldalai a $g$ egyenest a $\gamma^{(2)}$-re nézve kapcsolt pólusokban metszik, mert $g$ a $P\overline{G}$ harmadik oldalnak $T$ pólusán megy keresztül. Ennélfogva:

*Ha a $\mu$ és $\mu_1$ korrelativ mezők ugyanegy síkban vannak, akkor azok az $\bar{a}$ egyenesek, melyek egy tetszésszerinti $g$ egyenesen mozgó $AB_1$ pontnak mindkét mezőben megfelelő $a_1$, $b$ egyeneseit az $A$ ponttól harmónikusan választják el, az $A$-val involucziós fekvésű $\overline{G}$ sugársort írnak le, miből már következik, hogy a $\mu$ mezőben tetszésszerint változó $A$ pontok és az ezekhez tartozó $\bar{a}$ egyenesek egy póláris mezőnek pólusai és polárisai. E póláris mezőnek vezető kúpszelete $k^{(2)}$ oly tulajdonságú, hogy minden pontjának a $\mu$ és $\mu_1$-ben megfelelő egyenesei az illető ponton mennek keresztül.* Ez utóbbi tulajdonság abból látható, hogy ha az $A$ pont az $\bar{a}$-be kerül, akkor az $a_1, b$ egyenesek is azon az $A$ ponton mennek keresztül.




57. ábra.

Ha még visszagondolunk a $\mu$ és $\mu_1$ korrelativ mezők involucziósan megfelelő $P$ pontjának és $p$ egyenesének arra a tulajdonságára, hogy a $P$ ponton keresztül menő minden egyenesen az egymáshoz rendelt pontok oly involucziós sort képeznek, melyben a $P$-nek társpontja a $p$ egyenesnek metszőpontja az illető egyenessel és ez involucziós soroknak kettőspontjai, melyek tehát a $P$ és $p$-től harmónikusan vannak elválasztva, a $k^{(2)}$ kúpszeleten feküsznek, következik, hogy a $P$ pontnak polárisa a $k^{(2)}$-re nézve a $p$ egyenes. A $k^{(2)}$ és a $p$ egymást azokban a (valós vagy képzetes) $L, N$ pontokban metszik, melyeknek mindkét mezőben, azaz involucziósan, megfelelő egyenesei a $PL \equiv l$ és a $PN \equiv n$; tehát a $k^{(2)}$ kúpszelet az $l$ és $n$ egyenest az $L$ és $N$ pontokban érinti.

A $k^{(2)}$ pontjainak, mint a $\mu$ mezőhöz tartozóknak, megfelelnek a $\mu_1$-ben egy $k_1^{(2)}$ kúpszeletnek érintői (57. ábra); tehát az előbbi $l$, $n$ egyenesek a $k_1^{(2)}$-et is érintik; s mert a $P$ és $p$ úgy, mint a $k^{(2)}$-re, a $k_1^{(2)}$-re is pólus és póláris, azért a $k_1^{(2)}$ is keresztül megy az $L$, $N$

pontokon, azaz a $k^{(2)}$ és $k_1^{(2)}$ egymást az $L, N$ pontokban érinti. Másrészt a $k^{(2)}$ minden $AB_1$ pontjából a $k_1^{(2)}$-hez két érintő : $a_1$ és $b$ húzható ; ezek az $AB_1$ pontnak megfelelő egyenesei. S viszont a $k_1^{(2)}$-nek minden érintője $cd_1$ a $k^{(2)}$-őt két pontban, $C_1D$-ben metszi, melyek az illető érintőnek megfelelő pontjai. — Amidőn a $\mu$ és $\mu_1$ korrelativ mezők polárisok, a $k^{(2)}$ kúpszelet pontjainak ($AB_1$-nek), mint a $\mu$ és $\mu_1$-hez tartozóknak megfelelő két egyenes ($ab_1$) egyesül és így a $k_1^{(2)}$ kúpszelet is egyesül a $k^{(2)}$-vel és $k^{(2)}k_1^{(2)}$ egybeeső kúpszelet a polárismezőnek vezető kúpszelete lesz.

Két egymást kettősen érintő kúpszelet, $k^{(2)}$ és $k_1^{(2)}$, közös síkjukban oly két korrelativ mezőt, $\mu$ és $\mu_1$-et, határoz meg, melyben a $k^{(2)}$ pontjainak azok az egyenesek felelnek meg, melyek az illető pontokból a $k_1^{(2)}$ kúpszelethez vezethetők.

Ugyanis ha a $k^{(2)}$ és $k_1^{(2)}$ kúpszeleteknek érintőpontjai $LN$, e pontok érintői $ln$, az $LN$ egyenes $p$, az $ln$ pont $P$, végre a $k^{(2)}$ kúpszelet valamely $A$ pontjából a $k^{(2)}$-hez vezetett egyik érintő $a_1$, akkor az $APLN$ négyszög és az $a_1pln$ négyoldal mint megfelelő alakzat korrelativ vonatkozást létesít az első és a második mezőben, $\mu$ és $\mu_1$-ben. Minthogy e vonatkozásban a $PLN$ pontoknak a $pln$ egyenesek involucziósan felelnek meg, azért annak a $k^{(2)}$ kúpszeletnek, mely az $A$ ponton megy keresztül és az $ln$ egyeneseket az $LN$ pontokban érinti, az a kúpszelet felel meg, mely az $LN$ pontokon megy keresztül és az $a_1$ és $ln$ egyeneseket érinti, azaz a $k_1^{(2)}$. —

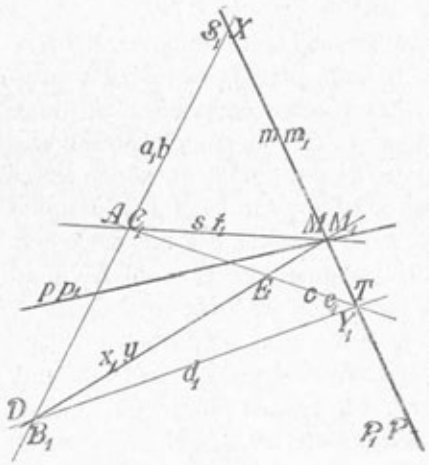
Ha valamely sík mezőben oly korrelativ vonatkozást akarunk létesíteni, hogy valamely $k^{(2)}$ megadott kúpszelet pontjainak, mint az egyik mezőhöz $\mu$-hez tartozónak, e kúpszelet illető pontjain keresztül menő egyenesek feleljenek meg, akkor még a $k^{(2)}$-nek három pontjához, $AB$ és $C$-hez, a megfelelő $a_1b_1$ és $c_1$ egyeneseket ama pontokon keresztül tetszésszerint vehetjük fel, csak az kivántatik, hogy az $a_1b_1c_1$ egyenesek ne messék egymást ugyanegy pontban. Négy kúpszelet létezik ugyan, mely az $a_1b_1c_1$ háromoldalba be van írva és a $k^{(2)}$ kúpszeletet kettősen érinti, ámde ezek közül csak az egyiknek, $k_1^{(2)}$-nek, van az a szerepe a $k^{(2)}$ irányában, hogy a $k^{(2)}$ pontjainak megfelelő egyenesek a $k_1^{(2)}$-et érintik és *egyszersmind az illető pontokon mennek keresztül*. Ha az $a_1$, $b_1$, $c_1$ egyenesek a $k^{(2)}$ kúpszeletet az $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ pontpárokban metszik, akkor a kivánt $k_1^{(2)}$ kúpszelet a $k^{(2)}$-őt abban a két pontban, $L$ és $N$-ben érinti, melyben az $AB_1CA_1BC_1$ Pascal-hatszögnek Pascal-egyenese $p$ a $k^{(2)}$-t metszi. Ezzel a $k_1^{(2)}$ kúpszelet, valamint a $p$-nek a $k^{(2)}$ és $k_1^{(2)}$-re vonatkozó pólusa $P$ meg van határozva és a $k^{(2)}$ és $k_1^{(2)}$-ből, vagy az $ABCP$ és $a_1b_1c_1p$ megfelelő négyszög és négyoldalból a korrelativ mezők szer-

keszthetők. A $C$ pont és a $c_1$ egyenes helyett az $AB$ egyenesnek valamely $D$ pontját és egy az $(a_1 b_1)$ ponton keresztül menő $d_1$ egyenest is felvehetünk, azaz: két mezőben akképen is létesíthetünk korrelativ vonatkozást, hogy valamely $k^{(2)}$ kúpszelet pontjainak, mint az egyik mezőhöz tartozóknak, a másik mezőben e pontokon keresztül menő egyenesek és a mellett a $k^{(2)}$ kúpszelet két pontjának, $A$ és $B$-nek, e két ponton keresztül menő megadott $a_1$ és $b_1$ egyenes, az $AB$ egyenesen fekvő $D$ pontnak pedig egy az $(a_1 b_1)$ pontból kisugárzó oly $d_1$ egyenes feleljen meg, mely nem tartja magán a $D$ pontot.

Az $a_1 b_1$ egyenesek egymást a $T_1$-ben, a $k^{(2)}$ kúpszeletet másodízben az $A_1 B_1$ pontokban metszik; az $AB$, $A_1 B_1$ egyeneseknek metszőpontja a $H$, a $T_1 H = g_1$. Ha az $AB$ egyenesen a $G$ pontot akkép határozzuk meg, hogy

$$a_1 b_1 d_1 g_1 \curlywedge ABDG,$$

akkor a $G$ pont a $g_1$-nek megfelelő. Ezen a $G$ ponton és az $AB_1$, $A_1 B$ egyeneseknek metszőpontján megy keresztül az a $p$ egyenes, melynek a két korrelativ mezőben involucziósan megfelel a $P$ pont és mely a $p$-nek pólusa a $k^{(2)}$ kúpszeletre vonatkozólag. Ez a $p$ egyenes a $k^{(2)}$-őt az $LN$ pontokban metszi; a $k_1^{(2)}$ kúpszelet pedig a $k^{(2)}$-őt az $LN$ pontokban érinti és a mellett érinti az $a_1 b_1$ egyeneseket is. A $k^{(2)}$ és $k_1^{(2)}$ kúpszeletekkel a mezők korrelativ vonatkozása már meg van határozva.




58. ábra.

8. A $k^{(2)}$ kúpszelet elkorcsosulhat két különvált vagy két egybeeső egyenessé és ugyanekkor a $k_1^{(2)}$ kúpszelet elkorcsosul két különálló ponttá, illetve két egybeeső ponttá. Ezek az esetek bekövetkeznek, ha a $\mu$ mezőben valamely $s$ pontsor perspektiv a $\mu_1$ mezőben neki megfelelő $S_1$ sugársorral; és pedig az első vagy a második eset áll be a szerint, amint az $s$ nek, mint a $\mu_1$-hez tartozó $t_1$ egyenesnek megfelelő pontja $T$, az $S_1$-gyel nem egyesül, vagy pedig egyesül.

Ugyanis az *első* esetben (58. ábra) az $S_1$-nek, mint a $\mu$-hez tartozó $X$ pontnak a $\mu_1$-ben egy $x_1$ egyenes felel meg; ezt a $\mu$-ben $y$-nal és az ennek megfelelő pontot a $\mu_1$-ben $Y_1$-gyel akarjuk jelölni.

A föltétel szerint az $s$ egyenes valamely $A$ pontjának megfelel a $\mu_1$-ben az $a_1 \equiv S_1A \equiv XA$ egyenes, mely az $x_1$-et a $B_1$ pontban metszi; a $B_1 \equiv (x_1a_1)$ pontnak megfelel a $\mu$-ben az $XA \equiv b$ egyenes; tehát az $S_1$ sugársor, mint a $\mu_1$-hez tartozó, a neki megfelelő $s$ pontsorral és ugyanez az $S_1(X)$ sugársor, mint a $\mu$-hez tartozó, a neki megfelelő $x_1$ pontsorral perspektiv. Az $s$ és $x_1$ egyenesek egymást egy $MM_1$ pontban metszik, melynek mindkét mezőben ugyanaz az $M_1S_1 \equiv m_1$ és $MX \equiv m$ egyenes felel meg; tehát az $MM_1$ pont involucziósan felel meg az $mm_1$ egyenesnek. Ezen az $mm_1$ egyenesen fekszik a $T$ és az $Y_1$ pont, mert a $t_1$ az $M_1$-en, az $y$ pedig az $M$-en megy keresztül.

A $B_1$ pontnak, mint a $\mu$-hez tartozó $D \equiv (by)$ pontnak megfelel a $\mu_1$-ben a $B_1Y_1 \equiv d_1$ egyenes, tehát az $y$ pontsornak a $\mu$-ben megfelel a véle perspektiv sugársor $Y_1$ a $\mu_1$-ben. E szerint az $AY_1 \equiv e_1$ sugárnak, mint a $\mu_1$-hez tartozónak megfelel a $\mu$-ben az $e_1$ és $x_1$ metszőpontja $E$. Az $AY_1 \equiv e_1 \equiv AE \equiv c$ egyenesnek a $\mu$-ben, megfelel az $a_1$ és $e_1$ metszőpontja $C_1$ a $\mu_1$-ben, amely az $A$ pontban van és mert a $C_1$ a $t_1$-ben van, azért az $AEY_1 \equiv c$ egyenes a $T$ ponton megy keresztül. Ebből pedig az következik, hogy az $Y_1$ pont egybeesik a $T$-vel, és a $t_1$ pontsor a $\mu_1$-ben perspektiv a neki megfelelő $T$ sugársorral a $\mu$-ben.

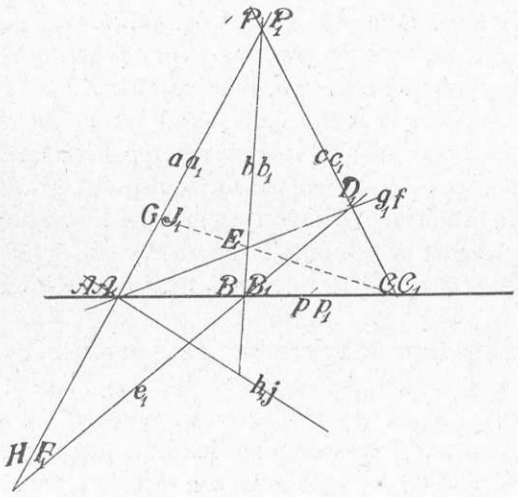
Ha még azt a pontot, mely az $MM_1$-et harmónikusan elválasztja az $XT$ pontpártól, tehát egyszersmind az ezekben fekvő $S_1Y_1$ pontpártól, $PP_1$-gyel jelöljük, akkor a $P$ pontnak a $\mu$-ben megfelel az a $p_1$ egyenes, mely az $m_1$-et az $x_1t_1$ egyenespártól harmónikusan választja el, és a $P_1$ pontnak a $\mu_1$-ben megfelel az a $p$ egyenes, mely az $m_1$-gyel közös $m$ egyenest az $x_1t_1$ egyenespárban levő $ys$ egyenespártól harmónikusan választja el, — tehát az előbbi $p_1$ egyenes.

Ebből látható, hogy a $PP_1$ pontnak a $pp_1$ egyenes, úgy, mikép az $MM_1$ pontnak az $mm_1$ egyenes, involucziósan felel meg; továbbá, hogy az általános esetben a $k^{(2)}$ és $k_1^{(2)}$-gyel jelölt kúpszeletek az $sy \equiv t_1x_1$ egyenespárrá, illetve az $S_1Y_1 \equiv TX$ pontpárrá korcsosulnak el; végre minthogy egy végesben fekvő pontsor mindig perspektiv helyzetbe hozható egy vele projektiv sugársorral, melynek középpontja szintén véges távolban van: *a $\mu$, $\mu_1$ korrelativ mezők $\infty^2$-szer hozhatók oly helyzetbe, hogy az a $k^{(2)}$ kúpszelet, melynek pontjai a megfelelő egyeneseken vannak, egyenespárrá, és így az a $k_1^{(2)}$ kúpszelet, melynek érintői a megfelelő pontokon mennek keresztül, pontpárrá korcsosuljon el.*

Térjünk ezután a *második* esethez, a melyben a $pp_1$ pontsornak mindkét mezőben egy véle perspektiv sugársor, $PP_1$ felel meg

tehát nemcsak a pontsor tartójának a sugársor középpontja, hanem a pontsor minden pontjának a sugársor egy-egy sugara involucziósan felel meg.

A $PP_1$ sugársor valamely $aa_1$ sugarának (59. ábra) kétszeresen megfelel a $pp_1$-nek az az $A_1A$ pontja, melyben az $a$ a $p$-t metszi; tehát az $a$ két pontjának, a $G$ és $H$-nak, mely a $P$ és $p$-t harmónikusan választja el, megfelel a $\mu_1$-ben az a két — az $A_1$ ponton keresztül menő — egyenes, $g_1$ és $h_1$, mely a $P_1$ és $p_1$-től szintén harmónikusan van elválasztva. A $G$ ponton keresztül vezetett egyenes a $g_1$-et egy $E$ pontban, a $p$-t egy $CC_1$ pontban metszi; a $PE \equiv bb_1$ egyenes a $p$-t a $BB_1$-ben, a $PC \equiv cc_1$ egyenes a $g_1$-et a $D_1$-ben, végre a $B_1D_1$ egyenes az $a_1$-et a $PGAH$ harmónikus pontnégyes miatt a $H$ pontban metszi, melyet még $F_1$-gyel jelölünk.

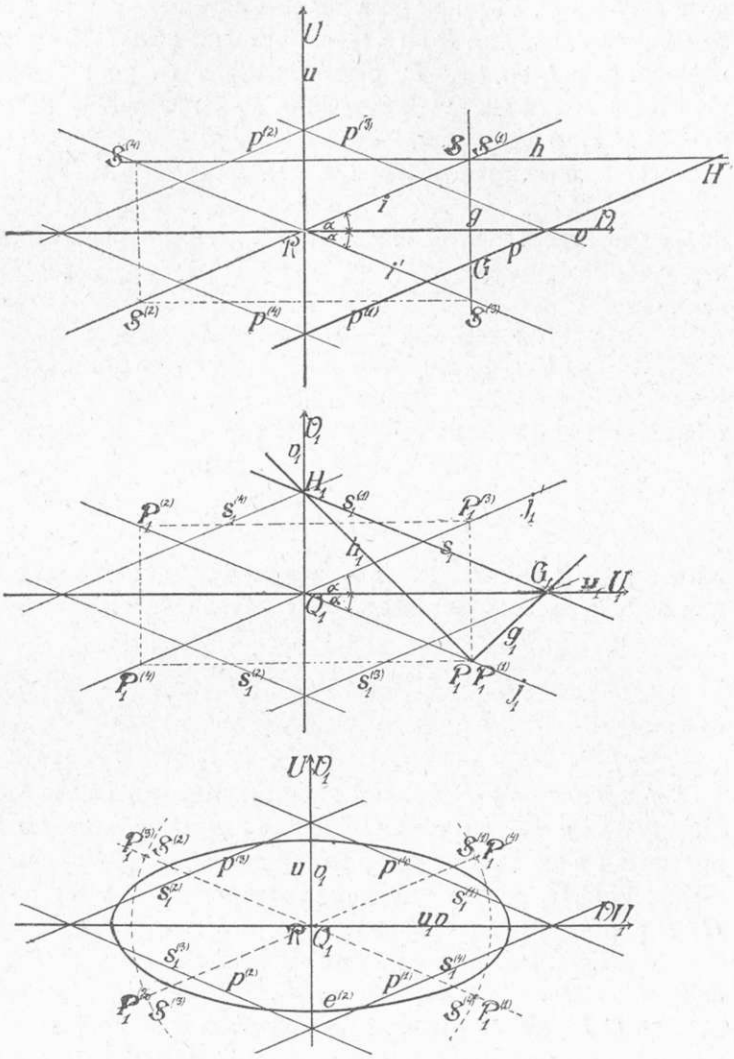


59. ábra.

A $GC$, $PB$ egyeneseknek a $\mu$-ben megfelelnek a $(g_1c_1) \equiv D_1$, $(p_1b_1) \equiv B_1$ pontok a $\mu_1$-ben, amazok $E$ metszőpontjának megfelel ezeknek összekötő egyenese $B_1D_1 \equiv e_1$, tehát az $AE \equiv f$ egyenesnek a $\mu$-ben, megfelel az $a_1$, $B_1D_1$ egyeneseknek $F_1$ metszőpontja a $\mu_1$-ben. E szerint ha a $G$ pontnak a $\mu$-ben megfelel a $g_1$ egyenes a $\mu_1$-ben, akkor a $g_1$-nek, mint a $\mu$-hez tartozónak az a pont fog megfelelni a $\mu_1$-ben, mely a $G$ pontot a $P$ és $p$-től harmónikusan választja el. A mezőkben tehát az említetteken kívül nincsen más olyan pont és egyenes, mely egymásnak involucziósan felelne meg és így az általános esetnek $k^{(2)}$ és $k_1^{(2)}$ kúpszeletei jelenleg a $pp_1$ egyenessé és a $PP_1$ ponttá korcsosulnak el.

A tárgyalásból kitűnik, hogy hogyan kell ebben az esetben, ha egy $pp_1$ pontsornak egy $PP_1$ sugársor involucziósan felel meg és a korrelacziő meghatározására még egy $G$ pontnak megfelelő $g_1$ egyenes adva van, egy tetszésszerinti $E$ pontnak megfelelő egyenesét, $e_1$-t, szerkeszteni.

9. Vizsgáljuk most meg, hogy lehet-e és hogyan kell két általánosan adott korrelativ mezőt, $\mu$ és $\mu_1$-et, ebbe a különös helyzetbe hozni, hogy egy sugársornak, mint az egyik vagy másik mezőhöz



60. ábra.

tartozónak, ugyanaz a vele perspektiv helyzetű pontsor feleljen meg a másik mezőben. (60. ábra.)

Jelentse a $\varkappa$ és $\lambda$ a $\mu$ és $\mu_1$ korrelativ mezőkre ugyanazt, mint már előbb a 266. oldalon és legyen $tg\alpha = \varkappa : \lambda$.

Húzzunk a mezők $R$, $Q_1$ középpontjain keresztül a mezőkben két egyenest, $i$ és $i'$-et, mely az első mező $v$ tengelyéhez, és két egyenest, $j_1$ és $j'_1$-et, mely a második mezőnek $u_1$ tengelyéhez $\alpha$ szög alatt hajlik. Vegyünk fel a két első egyenes egyikén, pl. az $i$-n egy $S$ pontot, mely az $R$-től $\rho$ távolságra van, az utóbbi két egyenes egyikén, pl. a $j_1$-en, egy $P_1$ pontot, mely a $Q_1$ ponttól szintén $\rho$ távolságra van és feleljenek meg az $S$, $P_1$ pontoknak a korrelacció folytán az $s_1$, $p$ egyenesek.

Ha az $S$ pont távolsága az $u$, $v$ tengelyektől $y, x$,

a $P_1$ „ „ „ $u_1, v_1$ „ $y_1, x_1$,

az $s_1$ egyenes által az $u_1, v_1$ tengelyekről lemetszett vonaldarabok $\xi_1, \eta_1$,

a $p$ „ „ „ $u, v$ „ „ „ $\xi, \eta$,

akkor az

$$x = y_1 = \rho \sin\alpha, \quad y = x_1 = \rho \cos\alpha,$$
$$x\eta_1 = y_1\xi = \varkappa^2, \quad x_1\eta = y\xi_1 = \lambda^2, \quad tg\,\alpha = \varkappa : \lambda$$

relacziókból következik:

$$\xi = \eta_1 = \frac{\varkappa^2}{\rho \sin\alpha}, \quad \eta = \xi_1 = \frac{\lambda^2}{\rho \cos\alpha}, \quad \frac{\xi}{\eta} = \frac{\eta_1}{\xi_1} = \frac{\varkappa}{\lambda},$$

tehát a $p \parallel SR$ és az $s_1 \parallel P_1Q_1$ egyenesek az $R$, illetve $Q_1$ középpontoktól is egyenlő távolságra, $\rho'$-re, vannak, és mert

$$\xi = \eta_1 = \frac{\rho'}{\cos\alpha}, \quad \eta = \xi_1 = \frac{\rho'}{\sin\alpha},$$

azért

$$\rho\rho' = \varkappa\lambda.$$

Az $S$ ponton két egyenest vezetünk keresztül; az első, $g$, párhuzamos az $u$-val és a $p$-t a $G$ pontban metszi; a második, $h$, párhuzamos a $v$-vel és a $p$-t a $H$ pontban metszi. A $gh$ egyeneseknek megfelelő $G_1H_1$ pontok az $s_1$-nek metszőpontjai az $u$ és $v_1$-gyel; a $G$, $H$ pontoknak megfelelő egyenesek $S_1G_1 = g_1$, $P_1H_1 = h_1$.

Az $SGH$ derékszögű háromszög kongruens a $Q_1H_1G_1$-gyel, — de ha azt akarjuk, hogy az még a $P_1G_1H_1$-gyel is kongruens legyen, akkor a $G_1H_1Q_1P_1$ trapeznek egyenszárúnak kell lenni. Minthogy a trapez két párhuzamos oldalának távolsága $\rho'$, a trapez hegyesszöge $90^0 - \alpha$, és $\rho' = \varkappa\lambda : \rho$, $tg\alpha = \varkappa : \lambda$, azért

$$P_1Q_1 = \rho = \pm(\rho' cotg\alpha - \rho' tg\alpha) = \pm\rho'\left(\frac{\lambda}{\varkappa} - \frac{\varkappa}{\lambda}\right),$$

végre

$$\rho^2 = \pm(\lambda^2 - \varkappa^2).$$

Ha tehát az $S$ és $P_1$ pontokat akkép vesszük fel az előbbi $i$, $i'$ és $j_1$, $j'_1$ egyeneseken, hogy azoknak $\rho$ távolsága a mezők középpontjától a $\rho^2 = \pm(\lambda^2 - \varkappa^2)$ relacziónak eleget tegyen, úgy az $SGH$, $P_1G_1H_1$ háromszögeket egymásra boríthatjuk; ekkor a két mező $p$ és $s_1$ egyenesei és az ezeknek megfelelő $P_1$ és $S$ pontok egyesülnek, és a $ps_1$-en nemcsak a $GG_1$, $HH_1$ pontoknak megfelelő $gg_1$, $hh_1$ sugarak, hanem a $p$ és $s_1$ végtelen távol fekvő pontjainak megfelelő $Q_1P_1$, $RS$ sugarak is egymásra kerülnek és így a $ps_1$ pontsor a neki mindkét mezőben megfelelő $P_1S$ sugársorral perspektiv.

Ha $\lambda \gtrless \varkappa$, akkor az $i$, $i'$ egyeneseken négy $S$ pontot ($S^{(1)}$ $S^{(2)}$ $S^{(3)}$ $S^{(4)}$-et) és az ezekkel kapcsolatos $j_1$, $j'_1$ egyeneseken szintén négy $P_1$ pontot ($P_1^{(1)}P_1^{(2)}P_1^{(3)}P_1^{(4)}$-et) lehet a föltételnek megfelelőleg fölvenni; de mindegyik $S$ pontot csak egy $P_1$ ponttal lehet akkép egyesíteni, hogy a kívánt helyzet elérhető legyen, azaz a művelet csak négyszer végezhető. Vagy szavakba foglalva:

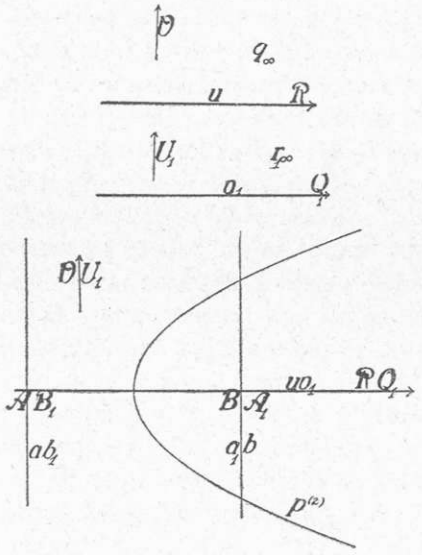
*Két korrelativ mezőt, melynek középpontjai véges távolban vannak, általában négyfélekép lehet úgy egymásra borítani, hogy egy pontsor a neki mindkét mezőben megfelelő sugársorokkal perspektiv legyen.*

Ugyanis ha a két korrelativ mezőt előbb poláris helyzetbe hozzuk úgy, hogy e poláris mezőnek vezető kúpszelete az $e^{(2)}$ ellipsis legyen, mely ellipsisnek főtengelyei $\varkappa$, $\lambda$ hosszúságúak, és az ellipsis egyenlő hosszuságú kapcsolt átmérőit a $RQ_1$ középpontból a $\rho = \sqrt{\pm(\lambda^2 - \varkappa^2)}$ exczentriczitással leírt körrel négy pontban, még pedig az egyik átmérőt az $S^{(1)} = P_1^{(4)}$ és $S^{(3)} = P_1^{(2)}$ pontban, a másikat az $S^{(2)} = P_1^{(3)}$ és $S^{(4)} = P_1^{(1)}$ pontban metszszük, mely pontok közül az $S^{(1)}$ és $S^{(2)}$, valamint az $S^{(3)}$ és $S^{(4)}$ az ellipsis melléktengelyétől el van választva, ha továbbá e metszőpontoknak polárisai az $e^{(2)}$-re vonatkozólag az $s_1^{(1)} \equiv p^{(4)}$, $s_1^{(3)} \equiv p^{(2)}$, $s_1^{(2)} \equiv p^{(3)}$, $s_1^{(4)} \equiv p^{(1)}$, akkor a mezőket újból akkép egyesíthetjük, hogy az $S^{(i)}$, $P_1^{(i)}$ pontok és az $s_1^{(i)}p^{(i)}$ egyenesek egyesüljenek. Az egyesülés után az $S^{(i)}P_1^{(i)}$ sugársor a neki mindkét mezőben megfelelő $s_1^{(i)}p^{(i)}$ pontsorral perspektiv lesz (a 60. alsó ábra). De ha $\varkappa = \lambda$, akkor az $e^{(2)}$ ellipsis körré fajul el, és az egyesítés csak egyféleképen történhetik, mert az $S^{(i)}$ $P_1^{(i)}$pontok az $RQ_1$ középpontba jutnak.

10. Az eddigi tárgyalásban, ha a korrelativ mezők $R$ és $Q_1$ középpontjáról volt szó mindig, föltételeztük, hogy azok nincsenek végtelen távol. Vizsgáljuk most meg azt az esetet, a melyben a $\mu$, $\mu_1$ korrelativ mezőknek $R$, $Q_1$ középpontjai, mint a $\mu_1$, $\mu$ mezők végtelen távol fekvő $r_1$, $q$ egyeneseinek megfelelő pontjai, maguk is végtelen távol vannak, tehát az $R$ a $q$-n és a $Q_1$ az $r_1$-en. Az $R$ ponthoz, valamint a $Q_1$ ponthoz (61. ábra) futó párhuzamos egyenesekre,

a mezők átmérőire, egy-egy merőlegest emelünk; ezeknek végtelen távol fekvő pontját a $\mu$-ben $V$-vel, a $\mu_1$-ben $U_1$-gyel, és az ezeknek megfelelő egyeneseket $v_1$, $u$-val jelöljük, és a *mezők tengelyeinek* nevezzük. Minthogy a $V$ pont a $q$-n, az $U_1$ pont az $r_1$-gyen van, azért a $v_1$ tengely a $Q_1$-en és az $u$ az $R$-en megy keresztül. Minden átmérőn fekvő pontsornak megfelelő sugársor párhuzamos sugarú; ha a pontsor az egyik tengelyen van, akkor a neki megfelelő sugársor a másik tengelyre merőleges.

Egyesítsük az $u$, $v_1$ tengelyeket és a $\mu$, $\mu_1$ mezők síkjait. Az $u$ pontsornak megfelelő sugársor a $v_1$-et az előbbivel hasonlóan projektiv pontsorban metszi. Ha ezek a sorok ugyanegy értelműek, úgy az $RQ_1$ végtelen távol fekvő ponton kívül nincs kettőspontjuk; ha pedig ellenkező értelműek, akkor még véges távolságban is van egy kettőspontjuk. Ez utóbbi változik, ha a sorok tartóit egymásba eltoljuk, *de involucziós helyzetbe nem hozhatók, hacsak a pontsorok nem egyenlően projektivek.* Föltételezvén, hogy az $u$ tengelyen fekvő pontsornak megfelelő sugársor a $v_1$ tengelyt az előbbivel ugyanegy értelmű egyenlően projektiv pontsorban metszi, úgy e pontsorok *mindig involucziósak*, tehát a közös $uv_1$ tengely minden pontjának, mint az egyik vagy a másik mezőhöz tartozónak megfelelő egyenesei egybeesnek, és a két mező *poláris* helyzetben van.

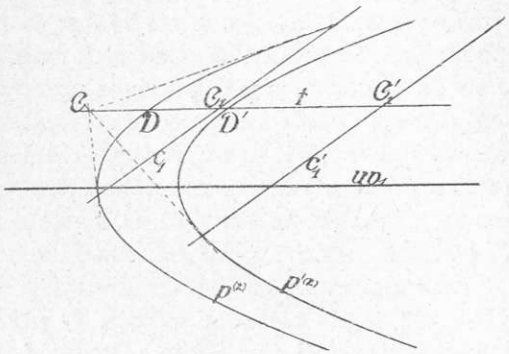



61. ábra.

Ugyanis ekkor az $uv_1$ egyenes valamely $A$ pontjának a $\mu$-ben, megfelel egy az $uv_1$ tengelyre merőleges $a_1$ egyenes a $\mu_1$-ben, mely az $uv_1$-et a $BA_1$ pontban metszi; a $B$ pontnak a $\mu$-ben, megfelel egy $b_1$ egyenes a $\mu_1$-ben, mely a föltétel következtében az $uv_1$-re az $A \equiv B_1$ pontban áll merőlegesen; az $A_1$, $B_1$ pontoknak pedig a $\mu$-ben megfelelő egyenesei az $a \equiv b_1$, és a $b \equiv a_1$. Minthogy az $ABV \equiv A_1B_1U_1$ háromszög szögpontjainak mindkét mezőben a szemben fekvő oldalak felelnek meg, azért a $\mu$, $\mu_1$ mezők egy $\mu\mu_1$ poláris mezőt képez nek és mert ebben az $uv_1$ tengely $RQ_1$ végtelen távol fekvő pontjá-

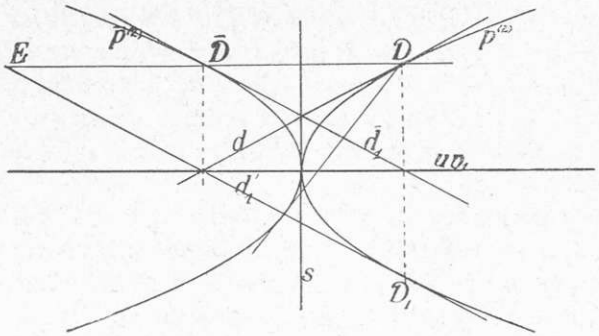
nak a megfelelő $r_1q$ egyenes végtelen távolban van, azért a poláris mezőnek vezető kúpszelete az $uv_1$ tengelylyel biró $p^{(2)}$ parabola.

Ha a $\mu_1$ mezőt ebből a helyzetből az $uv_1$ tengely mentén egy $2\delta$ vonaldarabbal eltoljuk (62. ábra), akkor az eltolt $\mu_1$ ebben az új helyzetben, $\mu'_1$-ben is, ugyanazon oknál fogva mint előbb, a $\mu$-vel egy polárismezőt képez; ennek vezető kúpszelete egy a $p^{(2)}$-vel kongruens és attól $\delta$ vonaldarabbal ugyanabban az értelemben eltolt $p'^{(2)}$ parabola. Hogy ezt belássuk, nevezzük a $\mu\mu_1$ polárismező egy tetszésszerinti $C$ pontjának a $p^{(2)}$-re vonatkozó polárisát $c_1$-nek; a $p^{(2)}$-nek és a $c_1$-nek metszőpontját a $C$ ponton keresztül menő $t$ parabola-átmérővel $D$ és $C_1$-nek, a $2\delta$-val eltolt $c_1$ és $C_1$-et pedig $c'_1$ és $C'_1$-nek. A $D$ pont felezi a $CC_1$ vonaldarabot és a $CC'_1$ vonaldarab $D'$ felezőpontja, mely a $p'^{(2)}$ parabolának pontja a $D$-től $\delta$ távolságra van a $t$ átmérőn, — a mi állításunkat igazolja.




62. ábra.

A $\mu_1$ mező azonban még akkép is poláris helyzetbe hozható a $\mu$-vel, hogy a $\mu_1$-et az előbbi $\mu\mu_1$ poláris helyzetből az $uv_1$ tengely




63. ábra.

körül 180°-kal forgatjuk, vagy a mi ugyanazt eredményezi, a $\mu_1$ mezőnek az $uv_1$ egyenesre vonatkozó $\mu'_1$ tükörképét képezzük s mely a $\mu_1$-gyel kongruens. A $\mu\mu'_1$ polárismezőnek pedig vezető

vonala egy $\overline{p}^{(2)}$ parabola, mely a $\mu\mu_1$ helyzetből származó $p^{(2)}$ parabolának tükörképe ennek az $s$ csúcsérintőjére vonatkozólag (63. ábra).

Hogy ekkor a $\mu$, $\mu'_1$ mezők poláris helyzetűek, ép úgy igazolható, mint az, hogy a $\mu_1$ mező a forgatás előtt a $\mu$-vel poláris helyzetben van, tehát állításunknak csak második részét kell kimutatni. Jelöljük e végből a $p^{(2)}$ parabola egy pontját és annak érintőjét, melyek a $\mu$, $\mu_1$ korrelativ mezőkben megfelelő elemek, $D$ és $d_1$-gyel; a $d_1$-nek tükörképét az $uv_1$-re vonatkozólag $d'_1$-gyel; a $D$ és $d_1$-nek tükörképét a $p^{(2)}$-nek $s$ csúcsérintőjére vonatkozólag, mint a $\overline{p}^{(2)}$ parabola pontját és érintőjét, $\overline{D}$, $\overline{d}_1$-sel. A $D\overline{D}$ egyenes a $d'_1$-et oly $E$ pontban metszi, hogy a $DE$ vonaldarab felezőpontja a $\overline{D}$, tehát a $D$ pont polárisa a $\overline{p}^{(2)}$-re vonatkozólag, a $\overline{d}$-vel párhuzamos $d'_1$, s minthogy a $p^{(2)}$ parabola minden $D$ pontjának polárisa a $\overline{p}^{(2)}$-re vonatkozólag a $D$ pont $p^{(2)}$-hez tartozó $d_1$ érintőjének $d'_1$ tükörképe az $uv_1$-re vonatkozólag, állításunk második része is igazolva van.

Vizsgálódásunk eredményét ezután a következő tételekben foglalhatjuk egybe:

*Ha a $\mu$ és $\mu_1$ oly két korrelativ mező, hogy a végtelen távol fekvő $q$ és $r_1$ egyeneseinek megfelelő $Q_1$ és $R$ pontjai szintén végtelen távol vannak, úgy a két mező csak akkor hozható poláris helyzetbe, ha az $R$ és $Q_1$ irányra merőleges $V$ és $U_1$ sugársoroknak megfelelő $v_1$ és $u$ pontsorok ama sugársorokkal involucziós helyzetbe hozhatók.*

*Ha ez egyszer bekövetkezik, tehát a $\mu$ és $\mu_1$ mezők egy $\mu\mu_1$ polárismezőt képeznek, és az egyik mezőt, pl. a $\mu_1$-et, az $uv_1$ egyenes mentén tetszésszerint eltoljuk, vagy az $uv_1$ körül $180^0$-kal elfordítjuk, akkor a $\mu_1$ ezekben az új helyzetekben is polárismezőt képez a $\mu$-vel. Mindezeknek a $(\infty^1)$ polárismezőknek vezető kúpszeletei kongruens parabolák; ezeknek közös tengelye az $uv_1$ egyenes, csúcsuk az $uv_1$-nek bármely pontja, és kettő-kettő egymásnak tükörképe a közös csúcsérintőjükre vonatkozólag.*

*Ebben az esetben (a midőn t. i. a $\mu$, $\mu_1$ mezők polárismezőt képezhetnek) a $\mu$ és $\mu_1$ mezők még abba a különös helyzetbe is hozhatók, hogy az $uv_1$ egyenesen fekvő pontsor a neki megfelelő mindkét sugársorral $U_1$ és $V$-vel egyidejüleg perspektiv legyen.*

Ennek következménye:

*Ha egy $A$ sokszögnek egy $p^{(2)}$ parabolára vonatkozó poláris sokszöge az $A_1$ sokszög, és ez utóbbit a $p^{(2)}$ parabola tengelye mentén $2\delta$ vonaldarabbal tovamozdítjuk, az $A'_1$-be, vagy $A_1$-nek ama tengelyre vonatkozó $\overline{A}_1$ tükörképét szerkesztjük, akkor az $A'_1$, $\overline{A}_1$ sok-*

*szögek szintén poláris ábrái az A-nak a $p^{(2)}$-vel kongruens parabolákra. Ezek közül az első, a $p^{(2)}$-nek a tengely mentén $\delta$ vonaldarabbal eltolt helyzete, a második a $p^{(2)}$-nek tükörképe a csúcsérintőjére vonatkozólag.*

11. *A $\mu$ és $\mu_1$ mezők elkorcsosult korrelaczióit* a mezők erkorcsosult kollineaczióiból származtathatjuk le. Tételezzük fel, hogy a $\mu$ és $\mu'$ mező kollineacziója elkorcsosult, és pedig a $\mu$-nek egy $M$ singularis pontja, a $\mu'$-nek egy $s'$ singularis egyenese van, és nevezzük a $\mu'$ mezővel polárismezőt egy $k^{(2)}$ kúpszeletre vonatkozólag $\mu_1$-nek. A $\mu$, $\mu_1$ mezők ekkor korrelativek és az elsőben az $M$ pont, a másodikban pedig az $s'$ egyenesnek $S_1$ pólusa a singuláris pont.

Az $\mu$ mező $M$ pontjának, az $M$ sugársor egy sugarának, a $\mu$ mező más pontjainak és más egyeneseinek rendre megfelelnek: a $\mu'$ sík bármely pontja, az $M$ sugársorral projektiv $s'$ pontsorban ama sugárnak megfelelő ponton keresztül menő sugarak, az $s'$-nek pontjai, végre az $s'$ egyenes, — tehát a $\mu_1$-ben megfelelnek: a mező bármely egyenese, az $S_1$ sugársorban a projektivitás folytán megfelelő sugárnak bármely pontja, az $S_1$ sugársor sugarai, végre az $S_1$ pont. E szerint:

*Ha a $\mu$ és $\mu_1$ korrelativ mezőkben az*

*$M$, illetve az $S_1$ pont singuláris, akkor ezeknek a másik mező összes egyenesei, és az $M$, $S_1$ projektiv sugársorok egyik sugarának a másik sugársorban a megfelelő sugár bármely pontja felel meg.*

*$m$, illetve az $s_1$ egyenes singuláris, akkor ezeknek a másik mező összes pontjai, és az $m$, $s_1$ projektiv pontsorok egyik pontjának a másik pontsorban megfelelő pontnak bármely sugara felel meg.*

Ha a $\mu$ és $\mu'$ kollinear mezőkben az $M$, $M'$ pontok és az ezeken keresztül menő $s$, $s'$ egyenesek singularisok, akkor a $\mu'$-sel poláris $\mu_1$ mezőben az $M'$ és $s'$-nek az $m_1$ egyenes és az $S_1$ pont felel meg, melyek a $\mu_1$ mezőnek singularis elemei. Könnyen belátható, hogy most, *a midőn a $\mu$ és $\mu_1$ elkorcsosult korrelativ mezőkben az $M$ singularis pont az $s$ singularis egyenesben van, és az azoknak megfelelő $m_1$ singularis egyenes az $S_1$ singularis ponton megy keresztül: az egyik mező minden pontjának és egyenesének, a másik mező singularis egyenese, illetve singularis pontja, és a singularis egyenes minden pontjának a megfelelő singularis pont bármely sugara felel meg.*

Tekintsük ezután a $\mu$ és $\mu_1$ mezőt oly poláris mezőnek, melynek vezető kúpszelete egy kettősegyenes $ss_1$, vagy egy kettőspont $SS_1$. Ha ezeket a poláris helyzetből kimozdítjuk, két még jobban

elkorcsosult korrelativ mezőt nyerünk, mint az előbbiek voltak, s melyekben az $s$ és $s_1$ singularis egyenesnek minden pontja singularis, illetve a második esetben az $S$, $S_1$ singularis pontoknak minden sugara singularis. Ezért mondhatjuk:

*Ha a $\mu$, $\mu_1$ elkorcsosult korrelativ mezőkben két pontsor minden pontja singularis, akkor az egyik mező minden pontjának és egyenesének, a másik mező singularis egyenese, illetve ennek bármely pontja megfelelő.*

*sugársor minden sugara singularis, akkor az egyik mező minden egyenesének és pontjának a másik mező singularis pontja, illetve ennek bármely sugara megfelelő.*

12. A korrelativ mezőknek tárgyalt tulajdonságaiból általában következtetni lehet a sugárnyalábоknak dualisan megfelelő tulajdonságaira, nevezetesen a projektiv tulajdonságokra. De mint különállónak kell tekintenünk ezt a kérdést, „van-e az $M$ sugárnyalábban egy oly derékszögű háromél, melynek a vele korrelativ $M_1$ sugárnyalábban egy derékszögű háromél lapjai felelnek meg, és hogyan lehet e különös hároméleket szerkeszteni?“ bár a korrelativ mezők tengelyei és a végtelen távol fekvő egyenesei ezekkel analogus alakzatoknak tekinthetők.

Emeljünk az $M_1$ nyaláb minden sugarára és síkjára az $M_1$ pontban merőleges síkot és sugarat; ezek egy $\overline{M}_1$ sugárnyalábot képeznek, mely az $M$-mel kollinear. Az $M$, $\overline{M}_1$ kollinear nyalábokban azonban lehet egy megfelelő derékszögű háromélpárt $qrs$, $q_1r_1s_1$-et szerkeszteni; tehát a $qrs$ éleknek az $\overline{M}_1$-ben, a $q_1r_1s_1$ élek és az $M_1$-ben az $[r_1s_1]$, $[s_1q_1]$, $[r_1q_1]$ lapok felelnek meg úgy, hogy az $M$, $M_1$ korrelativ sugárnyalábоknak $qrs$, $q_1r_1s_1$ háromélei, a megfelelő derékszögű háromélek.

Ha az $M$, $M_1$ sugárnyalábok $qq_1$, $rr_1$, $ss_1$ éleit egyesítjük, a mi négyféleképen történhetik, akkor a nyalábok poláris helyzetbe jutnak, vagyis együttvéve egy polárisnyalábot képeznek. De ha az $M$, $\overline{M}_1$ kollinear sugárnyalábokban $\infty^1$ derékszögű megfelelő háromél van, akkor az $M$, $M_1$ korrelativ nyalábokban is ugyanennyi derékszögű megfelelő háromél lesz, és ekkor ezek $\infty^1$-féleképen hozhatók poláris helyzetbe.

VI. FEJEZET.

# Harmadrendű térgörbék.

## 26. §. Két kollinear sugárnyaláb képződményei.

1. Két kollinear sugárnyalábnak, az $M$ és $M_1$-nek, mely nem konczentrikus és nem perspektiv helyzetű, következő kölcsönös helyzete lehet:

1. A nyalábóknak egy megfelelőleg közös sugaruk van.

2. A nyalábóknak egy megfelelőleg közös síkjuk van, de nincsen megfelelőleg közös sugaruk.

3. A nyalábóknak nincsen megfelelőleg közös sugaruk vagy megfelelőleg közös síkjuk, azaz *általános helyzetűek*.

A nyalábok megfelelő sugarai egymást általában nem metszik, de vannak oly megfelelő sugárpárok, melyek találkoznak. Vizsgáljuk meg e találkozó sugárpárok metszőpontjainak geometriai helyét az egyes esetekben.

Az 1. esetben a megfelelőleg közös $MM_1$ sugár két projektiv síksornak tengelye. E síksoroknak mindenik kettőssíkja $\mu$ és $\nu$, a sugárnyalábóknak két megfelelő projektiv sugársorát tartja; ezek perspektiv helyzetűek lévén, a nyalábok megfelelő sugarai egymást a $\mu$ síknak egy $m$ egyenesében és a $\nu$ síknak egy $n$ egyenesében metszik. Az $MM_1$ sugárnak minden pontját két megfelelő pontnak tekinthetjük, tehát az 1. esetben a sugárnyalábok megfelelő sugarai egymást három egyenesben: $MM_1$, $m$ és $n$-ben metszik, melyeknek egyike $MM_1$, a másik kettőnek szelője. —

A 2. esetben a megfelelő közös síknak, $\mu$-nek, az $M$ és $M_1$ pontokon kell keresztül menni. E sík jelen esetben is a nyalábok két megfelelő projektiv sugársorát tartja, mely azonban most nem perspektiv helyzetű, tehát képződményük egy a $\mu$ síkban fekvő és az $MM_1$ pontokon keresztül menő $m^{(2)}$ kúpszelet. A nyalábok megfelelő sugarai egymást az $m^{(2)}$ kúpszeleten kívül is metszik. Ugyanis ha az $\alpha$ és $\alpha_1$ két tetszésszerinti megfelelő sík, akkor az $\alpha$ és $\alpha_1$ az $m^{(2)}$ kúpszeletnek ugyanegy $A$ pontján megy keresztül. Az $\alpha$, $\alpha_1$ síkokban levő megfelelő sugársorok az $\alpha\alpha_1$ egyenest két

projektiv pontsorban metszik; ezeknek egyik kettőspontja az $A$, a másik pedig egy a $\mu$ síkon kívül levő $A'$ pont, melyben a nyaláboknak két megfelelő $a'$ és $a'_1$ sugara találkozik. Hasonlókép ha $\beta$ és $\beta_1$ a nyaláboknak más két megfelelő síkja, akkor azoknak $\beta\beta_1$ metszővonala az $m^{(2)}$ kúpszeletet egy $B$ pontban metszi; ezenkívül van a $\beta\beta_1$ metszővonalon egy $B'$ pont, melyben a nyalábok $b'$, $b'_1$ megfelelő sugarai találkoznak. A $\gamma \equiv [a'b']$ és $\gamma_1 \equiv [a'_1 b'_1]$ síkok megfelelők lévén, az $m^{(2)}$-nek egy $C$ pontján mennek keresztül és így egymást az $A'B'C \equiv g$ egyenesben metszik. Minthogy a $g$-ben három oly pont van, melyben a nyalábok megfelelő sugarai találkoznak, azért a $g$-nek minden pontja ily tulajdonságú lesz.

Az $m^{(2)}$ kúpszeleten és a $g$ egyenesen kívül nincsen oly pont, melyben a nyalábok megfelelő sugarai találkoznának. Mert ha a $P$ egy ily pont volna, és egy rajta keresztül menő tetszésszerinti $\pi$ sík a kúpszeletet a $QR$ pontokban, a $g$ egyenest az $S$ pontban metszené, akkor a két kollinear nyaláb a $\pi$ síkot oly két kollinear mezőben metszené, mely, mert a $PQRS$ négyszög szögpontjai megfelelők, egybeesne, és így a nyaláboknak perspektiveknek kellene lenniök feltevésünk ellenében. —

A 3. esetben, a midőn a nyalábok kölcsönös helyzete általános, szintén vannak egymást metsző megfelelő sugarak. E sugarak metszőpontjai egy $k^{(3)}$ görbén vannak, a melynek nem fekszik minden pontja ugyanegy síkban, hanem a melynek minden síkkal három közös pontja van. E $k^{(3)}$ görbét e tulajdonsága miatt *harmadrendű térgörbének* nevezzük.

2. Jelöljük az $MM_1$ sugarat, mint az $M$ nyalábhoz tartozót $f$-fel, mint az $M_1$ nyalábhoz tartozót $e_1$-gyel; az ezeknek megfelelő sugarakat pedig $f_1$ és $e$-vel. Minthogy az $e$ és $e_1$ egymást az $M$-ben, az $f$ és $f_1$ egymást az $M_1$-ben metszi, azért az $M$ és az $M_1$ pont a $k^{(3)}$ görbén van.

Vegyük most fel először, hogy az a sík $\alpha$, melylyel a $k^{(3)}$ görbét metszszük, az $MM_1$ egyenesen megy keresztül. Ennek az $\alpha$ síknak, mint az $M$ nyalábhoz tartozónak, megfelel az $M_1$-ben az $\alpha_1$ sík, mely $a$-t az $M_1$ nyaláb $\alpha\alpha_1 \equiv a_1$ egyenesében metszi. Az $a_1$-nek megfelelő $a$ sugár az $\alpha$ síkban lévén az $a_1$-et az $(aa_1) \equiv A$ pontban találja úgy, hogy az $\alpha$ síkban a $k^{(3)}$ görbének $M$, $M_1$ és $A$ pontja van.

Ha másodszor oly $\beta$ síkot veszünk fel, az egyik, pl. az $M$ nyalábban, mely nem megy keresztül a másik nyalábnak $M_1$ középpontján, akkor a $\beta$-nak megfelelő $\beta_1$ sík a $\beta$-át egy $\beta\beta_1 \equiv b$ egyenesben metszi. A $\beta$ és $\beta_1$ síkban fekvő megfelelő sugársoroknak nyomai a $b$-n projektiv pontsorok lesznek, melyeknek két valós vagy képze-

tes kettőspontjában a nyalábok megfelelő sugarai jutnak metszéshez. Ezért a $k^{(3)}$ görbének a $\beta$ síkban az $M$-en kívül még két valós vagy képzetes pontja van.

Ha végre a $\gamma$ egy tetszésszerinti sík, mely az egyik nyaláb középpontján sem megy keresztül, úgy ez a nyalábokat két kollinear mezőben metszi, és ezeknek szintén három megfelelő közös pontjuk van, melyeknek egyike mindig valós, a másik kettő pedig kapcsolt képzetes is lehet.

Ezért mondhatjuk:

*Két kollinear, de nem konczentrikus és nem perspektiv sugárnyaláb megfelelő sugarai egymást a nyalábok középpontján keresztül menő harmadrendű térgörbében metszik, mely abban az esetben, a midőn a nyalábóknak egy megfelelőleg közös sugaruk van három egyenessé, a midőn azoknak egy megfelelőleg közös síkjuk van egy kúpszeletté és ennek egy pontján keresztül menő és síkján kivül fekvő egyenessé fajul el.* (220. oldal.)

A III. r. térgörbének három végtelen távol fekvő pontja van, melyek közül egyik mindig valós, a másik kettő képzetes is lehet, mert a végtelen távoli sík a görbét szintén három pontban metszi.

Ha a két kollinear sugárnyaláb megfelelő sugarai egymást egy III. r. térgörbében metszik, akkor a nyalábokat *általános helyzetűeknek*, a III. r. térgörbét pedig azok *képződményének* nevezzük. A következőkben mindig általános helyzetű sugárnyalábok képződményével foglalkozunk, mert a nyert eredmények könnyen átvihetők különös helyzetű kollinear nyalábok képződményeire is.

3. Két általános helyzetű kollinear sugárnyalábnak a III. r. térgörbén kívül, mely *pontképződmény*, van még egy *sugárképződménye is*, mely *sugárkongruenczia*. Ugyanis az $M$ és $M_1$ nyalábok megfelelő síkjai egymást $\infty^2$ sugárban metszik, mert ennyi megfelelő síkpárja van a két nyalábnak. E kongruenczia elsőrendű és harmadosztályú. Ugyanis, ha a $P$ egy tetszésszerinti pont, akkor az $MP$ síksornak az $M$ nyalábban megfelel egy vele projektiv síksor az $M_1$-ben, mely utóbbinak a $P$ ponton általában csak egy síkja megy keresztül. Ez a sík az $M$ nyalábban levő megfelelő síkját már a $P$ ponton keresztül menő egyedüli kongruenczia-sugárban metszi. Ha továbbá tekintetbe vesszük, hogy az $M$, $M_1$ nyalábok a tetszésszerinti $\pi$ síkot két kollinear mezőben metszik, melyeknek általában három megfelelő közös sugaruk van, és a melyekben tehát az $M$ és $M_1$ nyalábóknak három megfelelő síkpárja jut metszéshez, következtetni lehet, hogy a kongruenczia elsőrendű és harmadosztályú. Ezért mondhatjuk:

*Két általános helyzetű kollinear sugárnyalábnak pontképződménye egy harmadrendű térgörbe $k^{(3)}$,*) és sugárképződménye egy elsőrendű és harmadosztályú kongruenczia $K_3^{(1)}$.*

Az $M$, $M_1$ kollinear sugárnyalábok sugárképződményének, a $K_3^{(1)}$ kongruenczianak, egy tetszésszerinti ponton csak egy sugara megy keresztül. Ha azonban az $M_2$ pontot a nyalábok pontképződményén, a $k^{(3)}$ görbén, vesszük fel, tehát $MM_2$, $M_1M_2$ a nyalábok két megfelelő sugara, akkor a nyalábokhoz tartozó $MM_2$, $M_1M_2$ tengelyű projektiv síksorok képződményének, az $M_2^{(2)}$ II. r. kúpnak, minden alkotója a $K_3^{(1)}$-hoz tartozik. Ezért a $k^{(3)}$ görbe $M_2$ pontja, és minden pontja a $K_3^{(1)}$-ra nézve *singularis* lesz, és ezt a $k^{(3)}$ görbét a $K_3^{(1)}$ kongruenczia *rendi-görbéjének* nevezzük.

A $K_3^{(1)}$ kongruenczianak sugarai az $M$ és $M_1$ nyalábok megfelelő síkjainak metszővonalai; e síkokban fekvő projektiv sugársorok pedig az illető metszővonalat két projektiv pontsorban metszik, melyeknek valós vagy képzetes kettőspontjai a $k^{(3)}$-nak pontjai. A $K_3^{(1)}$ kongruenczia sugarai tehát a $k^{(3)}$-mat két pontban metszik, és mint ilyeneket a $k^{(3)}$ *görbe húrjainak* (vagy bisekansainak) nevezhetjük. Ezért: *A III. r. térgörbe húrrendszere egy $K_3^{(1)}$ kongruenczíát képez.*

4. Az előbbi $M_2^{(2)}$ II. r. kúp, mely az $MM_2$, $M_1M_2$ projektiv síksorok képződménye keresztül megy a $k^{(3)}$ III. r. térgörbén. Mert ha az $A$ a $k^{(3)}$-nak tetszésszerinti pontja, akkor az $MA$, $M_1A$ sugarak a nyalábóknak megfelelő sugarai, az $MAM_2$, $M_1AM_2$ síkok pedig azoknak megfelelő síkjai, és így ezek egymást az $M_2^{(2)}$ kúp $M_2A$ alkotójában metszik. Ebből látható, hogy az $M$, $M_1$ kollinear sugárnyalábok pontképződménye, *a $k^{(3)}$ III. r. térgörbe, annak minden pontjából egy II. r. kúp alkotóival projicziáltatik.*

A $k^{(3)}$ görbe pontjait a nyalábok $M$ és $M_1$ középpontjaiból projicziáló sugarak szintén egy-egy II. r. kúpnak, $M^{(2)}$ és $M_1^{(2)}$-nek alkotói. Az $MM_1 \equiv e_1f$ közös sugárnak megfelelő sugarakat, mint előbb $e$ és $f_1$-gyel jelölvén: az $M^{(2)}$ és az $M_1^{(2)}$ kúp képződménye az $e$, $e_1$ és az $f$, $f_1$ tengelyű projektiv síksoroknak.

Minden az $MM_1$-en keresztül fektetett $\pi$ sík az $M^{(2)}$ és $M_1^{(2)}$ kúpot még egy-egy alkotóban metszi, melyek a $k^{(3)}$ görbe egy $M_2$ pontjában találkoznak, és ezért a $k^{(3)}$ görbe az $MM_1$ közös alkotóval biró $M^{(2)}$ és $M_1^{(2)}$ II. r. kúpoknak metszővonala. Ha a $\pi$ sík az $MM_1$-en és az $f_1$-en megy keresztül, akkor az ebben levő megfelelő $f$, $f_1$ sugaraknak $M_2$ metszőpontja az $M_1$-gyel egyesül; ez a $\pi$ sík az $M_1^{(2)}$ kúpot az $ff_1$ alkotókban metszi; az $M^{(2)}$ kúpot pedig az $f$

*) *Seydewitz:* Archiv der Mathematik und Physik (1847); 10. kötet, 208. old.

alkotóban érinti és az $f_1$ *érintője* a $k^{(3)}$-nak az $M_1$ pontban. Hasonlókép az $MM_1$ en és az $e$-n keresztül menő sík az $M^{(2)}$ kúpot az $e$, $e_1$ alkotókban metszi, az $M_1{}^{(2)}$ kúpot pedig az $e_1$-ben érinti, és az $e$ érintője a $k^{(3)}$-nak az $M$ pontban. Minthogy a nyalábok általános helyzete miatt az $e$, $e_1$, $f$, $f_1$ egyenesek nincsenek ugyanegy síkban, az $M^{(2)}$, $M_1{}^{(2)}$ kúpoknak az $MM_1$ alkotó mentén különböző érintősíkjai vannak, azaz e kúpok egymást az $MM_1$ közös alkotóban nem érintik, hanem metszik. Ezért:

*Két II. r. kúp, melynek egy közös alkotója, de ennek mentén különböző érintősíkja van, egymást ez alkotón kivül még egy III. r. térgörbében metszi.**)

Ebből arra lehet következtetni, hogy *a III. r. térgörbe egyágú*, mert bármely pontjából kiindulva, egy másik pontjához juthatunk, a nélkül, hogy a görbéről letérnénk, minthogy az első ponton keresztül menő két kúpalkotót is a másik ponthoz futó két kúpalkotóba vezethetjük az illető kúpokon.

Az $e$ egyenes, mint az $M_1M \equiv e_1$-nek megfelelő sugár az $M^{(2)}$ kúpnak oly alkotója, mely a $k^{(3)}$ görbét az $M$ pontban érinti, azaz az $M$-ben és az ehhez igen közel fekvő pontban metszi. Oly síkot, mely a görbe egy érintőjén megy keresztül, *a görbe érintősíkjának* nevezzük. Az $M$ pontnak minden érintősíkja az $M^{(2)}$ kúpot még egy alkotóban, a $k^{(3)}$ görbét pedig még egy pontban metszi. Ha az $e$ érintő körül forgó érintősík az $M^{(2)}$ kúpnak $\mu$ érintősíkjává válik, akkor a másik alkotó, melyben e sík az $M^{(2)}$ kúpot metszi, az $e$-vel egyesül, és a $\mu$ síknak harmadik metszőpontja a $k^{(3)}$-mal is egyesül az $M$ pontban. Az oly síkot, mely a térgörbének három szomszéd pontján megy keresztül, a térgörbe *simulósíkjának* és az egy ponttá egyesült három szomszéd pontot a simulósík *simulópontjának* nevezzük. Az előbb talált $\mu$ sík tehát a $k^{(3)}$ térgörbe simulósíkja az $M$ pontban. De a $\mu$ síknak, mint az $M$ nyalábhoz tartozónak, az $M_1$ nyalábban az $e_1e$ sík felel meg; ezért:

*Az $M$ és $M_1$ kollinear sugárnyalábok pontképződményének, a $k^{(3)}$ III. r. térgörbének, simulósíkja az $M$ pontban annak a síknak felel meg az $M_1$ nyalábban, mely a $k^{(3)}$-mat az $M$ pontban érinti.*

5. Két kollinear sugárnyaláb $M$ és $M_1$ meghatároz mint pontképződményt egy $k^{(3)}$ III. r. térgörbét, továbbá két II. r. kúpot $M^{(2)}$ és $M_1{}^{(2)}$-őt, mely a $k^{(3)}$-mat az $M$ és $M_1$ pontokból projicziálja, és mely a két nyalábban egymásnak megfelelő alakzat, végre meghatá-

*) *Staudt:* Beiträge zur Geometrie der Lage; 462. pont. A többire vonatkozólag a 462—507. pontok.

roz $\infty^1$ számú II. r. kúpot $M_i^{(2)}$-őt, mely a $k^{(3)}$-mat annak tetszésszerinti $M_i$ pontjából projicziálja, és mely a nyalábok $MM_i$, $M_1M_i$ megfelelő síksorainak képződménye. Nemcsak az $M^{(2)}$, $M_1^{(2)}$, hanem egyszersmind az $M^{(2)}$, $M_i^{(2)}$ kúpok alkotói is a $k^{(3)}$ görbe által egymásra projektiv lesznek vonatkoztatva; e vonatkozásban a kúpoknak azok az alkotói felelnek meg, melyek a $k^{(3)}$ pontjaiban találkoznak.

Ugyanis az $M^{(2)}$, $M_1^{(2)}$ kúpok alkotóinak sora az $MM_1$ tengelyű síksorral, az $M^{(2)}$, $M_i^{(2)}$ kúpok alkotóinak sora pedig az $MM_i$ tengelyű síksorral perspektivek, és ezért a kúpok alkotóinak sorai projektivek. Ezt röviden ekkép fejezhetjük ki:

*A III. r. térgörbét annak pontjaiból projicziáló kúpok egymással projektivek* úgy, mikép a II. r. görbét annak pontjaiból projicziáló sugársorok is egymással projektivek.

Minden II. r. kúpról, mely a III. r. térgörbét annak egyik pontjából projicziálja, azt mondjuk, hogy a *görbével perspektiv helyzetű*. Ha a görbe pontjait a rajtuk keresztül menő kúpalkotókra vonatkoztatjuk, akkor a görbéről (azaz pontjainak soráról) azt mondjuk, hogy a vele perspektiv kúppal (azaz az alkotók sorával) projektiv. A III. r. térgörbén fekvő pontsorok tehát a görbével perspektiv II. r. kúpok segélyével projektiv vonatkoztathatók egymásra.

A $k^{(3)}$ III. r. térgörbét, mint az $M$, $M_1$ kollinear nyalábok képződményét, annak $M_i$, $M_j$ pontjaiból projicziáló és így egymásra projektiv vonatkoztatott $M^{(2)}$, $M^{(2)}$ kúpok kollinear vonatkozást létesítenek az $M_i$, $M_j$ nyalábokban, melyekben épen e kúpok egymásnak megfelelők. Az $M_i$, $M_j$ kollinear sugárnyalábok pontképződménye a $k^{(3)}$ térgörbe lévén, látható, hogy az eredeti nyalábok $M$, $M_1$ középpontjai, nem különös pontjai a $k^{(3)}$-nak, mert a $k^{(3)}$ térgörbe az $M_i$, $M_j$ kollinear nyalábóknak is képződménye. A III. r. térgörbe tehát $\infty^2$-félekép tekinthető két kollinear sugárnyaláb pontképződményének; a görbe két tetszésszerinti pontja középpontja lehet e kollinear nyalábóknak, melyekben a görbe pontjait projicziáló sugarak mindig megfelelők. Ezt tekintve ép úgy, mint az eredeti nyalábok $M$ és $M_1$ középpontjainak, a III. r. térgörbe bármely pontjának érintőjét és simulósíkját megszerkeszthetjük.

6. Vegyünk fel a $k^{(3)}$ III. r. térgörbén négy pontot, az $M$, $M_1$, $M_2$ és $M_3$-mat. Minthogy azok közül a síksorok közül, melyek a görbe pontjait az $MM_1$, $M_1M_2$, $M_2M_3$ tengelyekből projicziálják az első és a másodiknak, valamint a második és a harmadiknak képződménye egy-egy II. r. kúp, azért e síksorok közül, nemcsak két egymásra következő, hanem az első és az utolsó is projektiv. Ebből következik, ha

most csak oly húrokat tekintünk, melyek a görbét valós pontokban metszik:

„A III. r. térgörbe pontjait, annak két tetszésszerinti húrjából projicziáló síksorok projektivek".

A III. r. térgörbe pontjait, annak húrjaiból projicziáló síksorokról azt mondjuk, hogy a görbével perspektiv helyzetűek, és mert ezek a síksorok projektivek is, azért e görbe pontjainak sorát e síksorokkal projektivnek és perspektivnek értelmezhetjük.

Tekintsük a $k^{(3)}$ III. r. térgörbét, mint képződményét az $M$ és $M_1$ kollinear nyalábokna k, és legyen a $g$ és $g_1$ oly két húrja a $k^{(3)}$-nak, mely ezt két-két valós pontban metszi. A $k^{(3)}$ pontjait a $g$ és $g_1$ tengelyekből projicziáló projektiv síksorok képződménye egy $h_j$ sugársereg, melyet a $k^{(3)}$-mal perspektivnek nevezünk. E sugársereget tartó $H^{(2)}$ hyperboloidon rajta van a $k^{(3)}$ görbének minden pontja.

Minthogy a $g, g_1$ húrok a $k^{(3)}$-mat két-két pontban metszik, a $h_j$ sugárseregnek sugarai a $k^{(3)}$-mat csak egy-egy pontban metszhetik, és így a sugársereg támasztó seregének minden $g_i$ sugara, úgy mint a $g$ és $g_1$, a $k^{(3)}$-mat két pontban metszi, azaz a $k^{(3)}$-nak egy-egy húrja. A $g_i$ sugarak között lehetnek olyanok is, melyeknek a $k^{(3)}$-mal képzetes közös pontpárjuk van, de mert a $k^{(3)}$-nak minden pontja a $H^{(2)}$-n fekszik, és a $H^{(2)}$ hyperboloid $g_i$ alkotóján keresztül menő minden $[g_i h_j]$ sík három metszőpontja közül a $k^{(3)}$-mal, csak egy lehet a $h_j$-n, azért a másik két valós vagy kapcsolt-képzetes metszőpont a $g_i$-n van.

Minthogy a $h_j$ sugársereg a támasztó sugárseregnek, $g_i$-nek, bármily két sugarából, messék ezek a görbét akár két valós, akár két kapcsolt-képzetes pontban, projektiv síksorokkal projicziáltatik, azért a $k^{(3)}$ görbe pontjai ama sugárseregnek bármily két $g_i$ sugarából projektiv síksorokkal projicziáltatnak. Ezek a $g_i$ sugarak pedig mind sugarai annak a $K_3^{(1)}$ kongruenczának, mely az $M$, $M_1$ kollinear nyalábokna k sugárképződménye.

Hogy ezt belássuk, jelöljük a $H^{(2)}$-nek az $M$ és $M_1$ ponton keresztül menő és a $h_j$ rendszerhez tartozó alkotóit $h$ és $h_1$-gyel. A $g_i$ sugársereget a $h$ és $h_1$-ből projicziáló síksorok projektivek, és minthogy e síksorok oly $g_i$ alkotókat is projicziálnak, melyek a $k^{(3)}$-mat valós pontokban metszik: e projektivitás olyannak tekinthető, mely az $M$ és $M_1$ nyalábok kollineacziójából származik. Ebből következik, hogy a $h$ és $h_1$ projektiv síksoroknak minden megfelelő síkpárja egymást a $K_3^{(1)}$ kongruenczának sugaraiban metszi, tehát a $g_i$ sugárseregnek minden sugara a $K_3^{(1)}$-hoz tartozik.

A $k^{(3)}$ görbe és annak a $g$ és $g_1$ húrja meghatározta a $H^{(2)}$ hyper-

boloidot. De ha a görbének egy $A$ pontján keresztül egy tetszésszerinti $h$ egyenest vezetünk keresztül, mely a görbét csak az $A$ pontban metszi, akkor a $h$-nak két síkja a görbét még két-két pontban vágja úgy, hogy azoknak összekötő egyenese a görbének két húrja. A görbe pontjait e húrokból projicziáló projektiv síksorok képződménye egy sugársereg, melynek sugarai mind metszik a $h$-t.

*Ha tehát a h egyenes a $k^{(3)}$ III. r. térgörbének csak egy pontján megy keresztül, akkor a $k^{(3)}$-nak a h-t metsző húrjai oly sugársereget képeznek, mely sugársereget tartó hyperboloid a $k^{(3)}$-mon megy keresztül.* A $h$ egyenest úgy vehetjük fel, hogy az a $K_3^{(1)}$ kongruenczián ak egy sugarát messe; ennélfogva ez a sugár a $k^{(3)}$ görbe és a $h$ egyenestől meghatározott $H^{(2)}$ hyperboloidon van, azaz: a $K_3^{(1)}$ kongruenczián sugarai egyik rendszerbeli alkotói a $k^{(3)}$ görbén keresztül menő összes hyperboloidoknak.

7. Fektessünk most a $k^{(3)}$ III. r. térgörbén két hyperboloidot $H^{(2)}$ és $H'^{(2)}$-őt keresztül. Egy tetszésszerinti sík a $k^{(3)}$-mat három pontban, a két hyperboloidot pedig két kúpszeletben metszi, mely utóbbiak ama három ponton mennek keresztül és így még egy negyedik pontban is találkoznak. E negyedik ponton keresztül csak egy húr vezethető a $k^{(3)}$-hoz, mely minthogy mindkét hyperboloiddal még két valós vagy képzetes közös ponttal bir: mindkét hyperboloidon rajta van. Ezért: „A III. r. térgörbén keresztül fektetett két hyperboloidnak mindig van egy közös alkotója, mely a térgörbének húrja".

De fordítva is kimutatható, hogy *két hyperboloid $H^{(2)}$ és $H'^{(2)}$, melynek csak egy közös g alkotója van és egymást nem érinti a g minden pontjában, egymást még egy III. r. térgörbében metszi.*

Ugyanis a $g$-nek síkjai a $H^{(2)}$-őt és a $H'^{(2)}$-őt még egy-egy $h$ és $h'$ alkotókban metszik; ezek nem tartoznak ahhoz a rendszerhez, mint a $g$, és metszőpontjaik a $H^{(2)}$ és $H'^{(2)}$ hyperboloidoknak $k$ metszővonalán vannak. E metszőpontok közül csak kettő lehet a $g$-n, mert különben a $H^{(2)}$ és $H'^{(2)}$ egymást a $g$ minden pontjában érintené. Legyen a $k$ metszővonalon az $M$ egy ily pont, és jelöljük a rajta keresztül menő és a $g$ rendszerhez tartozó alkotókat a hyperboloidokon $g_1$ és $g'_1$-gyel. A $H^{(2)}$ és $H'^{(2)}$ hyperboloidoknak azok a $h$ és $h'$ rendszerbeli alkotói, melyek egymást a $k$-nak pontjaiban metszik, melyek tehát a $g$-vel egy-egy síkban vannak, a $g_1$-ből, illetve a $g'_1$-ből a $g$ síksorral projektiv síksorokkal projicziáltatnak, és így a $g_1$ és $g'_1$ síksorok egymással is projektivek. Ezeknek képződménye tehát egy a $k$ metszővonalat projicziáló II. r. kúp. Minthogy pedig a

$k$-t annak bármely $M$ pontjából projicziáló kúp II. r., azért a $k$ görbe III. r. térgörbe.

E bizonyításból következik még: *Valamely hyperboloid és véle csak egy közös alkotóval biró II. r. kúp egymást az alkotón kivül még egy III. r. térgörbében metszi. Továbbá: három projektiv síksornak, valamint egy II. r. kúpnak vagy egy sugárseregnek és egy ezzel projektiv síksornak, mely síksornak egyik síkja sem megy a megfelelő kúpalkotón, illetve a sugársereg megfelelő sugarán keresztül, képződménye egy III. r. térgörbe.* Az első esetben a közös alkotó, a többiekben pedig mindenik síksornak tengelye, húrja a III. r. térgörbének.

Oly sugárseregről, melynek sugarai valamely III. r. térgörbét egy-egy pontban metszik, azt mondjuk, hogy a görbével perspektiv helyzetű. Az előbbiekből következik, hogy két sugársereg, mely a III. r. térgörbével perspektiv, egyszersmind projektiv egymással, ha oly sugarak tekintetnek megfelelőknek, melyek egymást a térgörbén metszik. Ez oknál fogva a III. r. térgörbéről is azt mondhatjuk, hogy projektiv minden véle perspektiv sugársereggel; minden pontnak a görbén megfelel a rajta keresztül menő sugár a seregben.

Számláljuk meg a $k^{(3)}$ III. r. térgörbén keresztül menő hyperboloidokat. Fektessünk a végből a $k^{(3)}$-on keresztül egy $H^{(2)}$ hyperboloidot, jelöljük ennek alkotóit, melyek a $k^{(3)}$-nak húrjai $g_i$-vel, és legyen a $g$ a $k^{(3)}$-nak a $H^{(2)}$-n kívül levő húrja. A $k^{(3)}$ pontjait a $g$-ből és egy $g_i$-ből projicziáló síksorok képződménye a $k^{(3)}$-mon keresztül menő $H_i^{(2)}$ hyperboloid. Minthogy a $H^{(2)}$-n $\infty^1$ $g_i$ alkotó van, mely tehát a $g$-vel egy $H_i^{(2)}$ hyperboloid meghatározására szolgál, minthogy továbbá minden hyperboloid, mely a $k^{(3)}$-mon és a $g$ húron keresztül megy, a $H^{(2)}$-őt egy $g_i$ alkotóban metszi, tehát egy $H_i^{(2)}$ hyperboloid: a $k^{(3)}$-mon és a $g$-n keresztül menő hyperboloidok száma $\infty^1$. Ezeken vannak a $k^{(3)}$-nak összes húrjai, azaz a $K_3^{(1)}$ kongruenczianak összes sugarai. Ha még tekintetbe vesszük azt, hogy a $k^{(3)}$-nak $\infty^2$ húrja van és minden húron és $k^{(3)}$-mon $\infty^1$ hyperboloid megy keresztül, melyeknek azonban mindenikén $\infty^1$ húr van, következik: *a $k^{(3)}$ III. r. térgörbén keresztül menő hyperboloidok száma ugyanannyi, mint a $k^{(3)}$ húrjainak száma, azaz $\infty^2$; minden húron $\infty^1$ hyperboloid vezethető keresztül.*

8. Láttuk előbb, hogy ha az $M_2$ pont az $M$ és $M_1$ kollinear sugárnyalábok képződményének, a $k^{(3)}$ III. r. térgörbének egy pontja, akkor az $M$ és $M_2$ sugárnyalábok között is lehet oly kollinear vonatkozást létesíteni, hogy képződményük szintén a $k^{(3)}$ görbe legyen. E kollineacziában a görbét az $M$ és $M_2$ pontokból projicziáló II.

kúpok, tehát a görbe pontjait projicziáló sugarak megfelelők. Vizsgáljuk most meg, hogy az $M$ és $M_2$ nyaláboknak e kollineaczióból származó $K_3^{(1)}$ sugárképződménye szintén ugyanaz-e, mint az $M$ és $M_1$ nyalábóké?

Legyen e végből a $g$ valamely sugara a $K_3^{(1)}$-nak, a $H^{(2)}$ pedig a $k^{(3)}$-mon és annak $g$ húrján keresztül fektetett hyperboloid, végre a $h$, $h_1$ és $h_2$ a $H$ -nek az a három alkotója, mely a $k^{(3)}$-mat csak az $M$, $M_1$ és $M_2$ pontokban metszi, tehát $[hg]$, $[hg_1]$ egy megfelelő síkpár az $M$, $M_1$ nyalábokban. A $H^{(2)}$-nek összes $g_i$ alkotói a $h$, $h_1$ és $h_2$-ből projektiv síksorokkal projicziáltatnak. A $g_i$ alkotók között elegendő számban lesznek olyanok, melyek a $k^{(3)}$-mat valós pontpárokban metszik. De ezek a $h$ és $h_2$ tengelyekből oly síkpárokkal projicziáltatnak, melyek az $M$ és $M_2$ kollinear nyalábokban megfelelők. Ezért az $M$ és $M_2$ nyaláboknak a $k^{(3)}$ görbe által létesített kollineacziója olyan, hogy abban a $H^{(2)}$ hyperboloidnak minden $g$ rendszerbeli alkotóját a $h$ és $h_2$-ből projicziáló síkok megfelelők, tehát a $K_3^{(1)}$ kongruencziában tetszésszerint felvett $g$ sugár az $M$ és $M_2$ nyalábok sugárképződményéhez is tartozik, azaz: az $M$ és $M_2$ nyalábok sugárképződménye szintén a $K_3^{(1)}$.

Lássuk már most egybefoglalva, mily helyzeti viszonyban van egymással egy $k^{(3)}$ III. r. térgörbe és annak húrkongruencziája $K_3^{(1)}$.

A $k^{(3)}$-nak $\infty^1$ $M$ pontja és a $K_3^{(1)}$-nak $\infty^2$ $g$ sugara van. Az $M$ pontok $\infty^1$ sugárnyaláboknak középpontjai, a $g$ sugarak $\infty^2$ síksoroknak tengelyei. A $k^{(3)}$ görbe e síksorok között projektiv vonatkozást létesít; ebben a megfelelő síkok azok, melyek a $k^{(3)}$-nak egy-egy pontján mennek keresztül, s mint ilyenek, $\infty^1$ síknyalábot képeznek. Viszont a $K_3^{(1)}$ kongruenczia ama nyalábokkal létesít kollinear vonatkozást, melyeknek középpontjai a $k^{(3)}$-nak pontjai; ezekben a megfelelő síkok a $K_3^{(1)}$-nak egy-egy sugarában metszik egymást és mint ilyenek $\infty^2$ síksort képeznek. *A* $\infty^1$ nyaláb megfelelő sugarai vagy egy II. r. kúpot, vagy pedig egy sugársereget képeznek, a szerint, a mint egymást (a $k^{(3)}$ görbén) metszik, vagy nem metszik. Ugy a kúp, mint a sugársereg perspektiv helyzetű és projektiv vonatkozású a $k^{(3)}$-hoz; a kúp alkotóinak, illetve a sugársereg sugarainak ama nyalábok középpontjai felelnek meg a $k^{(3)}$ görbében. E sugársereget támasztó sugárseregnek sugarai, és mint ilyenek, az előbbi $\infty^2$ síksor közül $\infty^1$ síksornak, mely egy *síksor-sereget* képez, tengelyei. Ha ama $\infty^1$ nyalábban a megfelelő sugarakat változtatjuk, megkapjuk az összes, azaz $\infty^1$ II. r. kúpot és az összes, azaz $\infty^2$ sugársereget, mely a $k^{(3)}$-mal perspektiv. Ez utóbbiak támasztó seregének sugarai, tehát $\infty^2$ síksor-seregnek tengelyei, egy úgynevezett *síksor-*

*kongruenczíát* képeznek. Két síksor e kongruenczíában meghatároz egy síksor-sereget, melynek tengelyei a $k^{(3)}$-nak húrjai és a $k^{(3)}$-mon keresztül menő hyperboloidoknak alkotói; három nem ugyanegy seregben levő projektiv síksornak megfelelő síkjai egymást a $k^{(3)}$ pontjaiban metszik és úgy a $k^{(3)}$-mat, mint a $K_3^{(1)}$-mat meghatározzák.

## 27. §. A harmadrendű térgörbe helyzete a másodrendű kúp és a hyperboloid irányában.

1. Az előbbi tárgyalásból következik, hogy oly hat ponton, mely közül háromnál több nincsen ugyanegy síkban, csak egy III. r. térgörbe fektethető keresztül. Ha a hat pontot $ABCDE$ és $F$-fel jelöljük, akkor a $k^{(3)}$-mat, vagy mint az $A(CDEF\ldots)$, $B(CDEF\ldots)$ kollinear sugárnyalábok képződményének, vagy az $AB(DEF\ldots)$, $BC(DEF\ldots)$ és $CA(DEF\ldots)$ projektiv síksorok képződményének, vagy, a mi külömben az utóbbival megegyezik: az $A(BCDEF)$ és $B(ACDEF)$ alkotókon keresztül menő II. r. kúpok metszésének tekinthetjük. Ebből pedig arra következtethetünk:

*Ha a $k^{(3)}$ III. r. térgörbe a $K^{(2)}$ II. rendü kúpnak $M$ csúcsán megy keresztül, úgy az a kúpot a csúcsán kivül még négy pontban metszheti.*

Ugyanis annak az $M^{(2)}$ II. r. kúpnak, mely a $k^{(3)}$-mat az $M$ pontból projicziálja, a $K^{(2)}$-vel csak négy alkotója lehet közös, és a $k^{(3)}$ görbe a $K^{(2)}$ kúpot csak e négy alkotó egy-egy pontjában metszheti. — Ha tehát egy III. r. térgörbének, mely valamely II. r. kúp csúcsán megy keresztül, a kúppal a csúcson kívül még öt közös pontja van, akkor a görbének minden pontja a kúpon lesz.

A $k^{(3)}$ III. r. térgörbének a $K^{(2)}$ II. r. kúppal hat közös pontja lehet a nélkül, hogy a görbe minden pontja a kúpon volna, mert a $k^{(3)}$ meghatározására szolgáló hat pontot a $K^{(2)}$-ön akkép vehetjük fel, hogy azok egyikét a többi öttel összekötő sugaraktól, mint alkotóktól, meghatározott II. r. kúp ne menjen a $K^{(2)}$-nek a csúcsán keresztül. De ha a $k^{(3)}$-nak a $K^{(2)}$-vel hét közös pontja van, akkor a $k^{(3)}$-nak minden pontja a $K^{(2)}$ kúpon lesz. Ugyanis a $k^{(3)}$-mon és a $K^{(2)}$ kúpnak a hét pont egyikéhez vezetett alkotóján keresztül menő $H^{(2)}$ hyperboloid a $K^{(2)}$ kúpot egy $k_1^{(3)}$ III. r. térgörbében metszi, mely a $k^{(3)}$-mal azért esik egybe, mert véle hat közös pontja van.

2. *Ha két III. r. térgörbe, a $k^{(3)}$ és a $k_1^{(3)}$ ugyanegy II. r. kúpon, $K^{(2)}$-n van, akkor azok a görbék egymást a csúcsban levő $M$ közös*

*ponton kívül még legfeljebb négy pontban metszhetik. De ha a* $k^{(3)}$ *és a* $k_1^{(3)}$ *III. r. térgörbéknek az M pontban egy közös érintőjük van, akkor azok egymást az M ponton kívül már csak két pontban metszhetik.*

Ugyanis ha a $k^{(3)}$ és $k_1^{(3)}$-nak nincs közös érintője a $K^{(2)}$ kúpnak $M$ csúcsában és az $A$, $A_1$ a $K^{(2)}$ kúp egy $a$ alkotójának második metszőpontja a $k^{(3)}$, $k_1^{(3)}$ görbékkel, akkor annak a két kúpnak $A \,.\, k^{(3)}$ és $A_1 \,.\, k_1^{(3)}$-nak, mely a $k^{(3)}$-mat az $A$-ból, a $k_1^{(3)}$-mat pedig az $A_1$-ből projicziálja, nincs közös érintősíkja az $a$ alkotó mentén. Ez a két kúp tehát egymást az $M$ ponton keresztül menő $k_2^{(3)}$ III. r. térgörbében metszi, melynek négy közös pontja a $K^{(2)}$ kúppal, az e kúpon fekvő $k^{(3)}$ és $k_1^{(3)}$ görbéknek metszőpontja. De ha a $k^{(3)}$ és $k_1^{(3)}$ egymást az $M$ csúcsban érinti, akkor az előbbi két kúp $A \,.\, k^{(3)}$ és $A_1 \,.\, k_1^{(3)}$is egymást az $AA_1$ alkotóban érinti és egy, az $M$-en keresztül menő $k^{(2)}$ kúpszeletben metszi. Az $M$ csúcson keresztül menő $k^{(2)}$ kúpszeletnek a $K^{(2)}$ kúppal még csak két közös pontja lehet és ezek az $M$-en kívül a $k^{(3)}$ és $k_1^{(3)}$ görbéknek egyedüli közös pontjai. Ez utóbbi jelenség különben még onnan is kimagyarázható, hogy ha valamely II. r. kúpon fekvő két III. r. térgörbének a kúp $M$ csúcsában közös érintője van, akkor azoknak az $M$ pontban egyszersmind közös simulósíkjuk is lesz.

3. *Ha a* $k^{(3)}$ *III. r. térgörbének a* $H^{(2)}$ *hyperboloiddal hét pontja közös, akkor a* $k^{(3)}$ *a* $H^{(2)}$*-n van.*

Ugyanis annak a $K^{(2)}$ kúpnak, mely a $k^{(3)}$-mat a hét pont egyikéből, pl. az $M$ pontból projicziálja, nem lehet a $H^{(2)}$-vel két közös alkotója, mert ekkor a $K^{(2)}$ és $H^{(2)}$ metszése e két alkotó és egy kúpszelet. De a hét pont közül a két alkotón, az $M$-en kívül csak egy-egy pont lehet, tehát a többi négy pontnak egy kúpszeleten és így egy síkon kellene feküdni, a mi, mert a $k^{(3)}$ *III. r.* térgörbe, lehetetlen.

De ha a $H^{(2)}$ hyperboloidon van egy olyan alkotó, a mely az $M$ ponton megy keresztül és nem fekszik a $K^{(2)}$ kúpon, tehát a $k^{(3)}$-mat nem metszi két pontban, akkor ezen az alkotón és a $k^{(3)}$-mon egy $H'^{(2)}$ hyperboloid fektethető keresztül. Ez a $H'^{(2)}$ a $H^{(2)}$ hyperboloidot egy $k_1^{(3)}$ III. r. térgörbében metszi, melynek a $k^{(3)}$-mal hat pontja közös, tehát a $k^{(3)}$-mal egybeesik.

4. *Valamely hyperboloidnak öt pontján két III. r. térgörbe fektethető keresztül a hyperboloidon; ennek egyik alkotó-rendszere az egyik görbének, a másik alkotó-rendszere pedig a másik görbének húrrendszeréhez tartozik.*

Ugyanis az $ABCDE$ öt pont közül hatfélekép lehet kettőt, pl.

az $A$ és $B$-t úgy kiválasztani, hogy azoknak összekötő egyenese $AB$ ne legyen alkotója a hyperboloidnak. Ha az $AB$ tengelyű síksort akkép vonatkoztatjuk projektiv a hyperboloidnak egyik vagy másik alkotó-rendszerére, hogy a $CDE$ pontokon keresztül menő síkok a sorban és alkotók az egyes sugárseregekben megfelelők legyenek, akkor a síksornak és mindenik sugárseregnek képződménye egy III. r. térgörbe, mely a hyperboloidon van és a felvett öt ponton megy keresztül. —

*Ha két III. r. térgörbe $k$ és $k_1^{(3)}$ ugyanegy $H^{(2)}$ hyperboloidon fekszik és ennek egyik sugárserege a $k^{(3)}$-nak, a másik sugárserege a $k_1^{(3)}$-nak húrrendszeréhez tartozik, akkor a $k^{(3)}$ és $k_1^{(3)}$ görbék egymást öt pontban metszik, mely közül egyik mindig valós.*

A $H^{(2)}$-nek egy $g$ alkotója a $k^{(3)}$-mat az $AB$ pontokban metszi; e pontok úgy a $g$-t, mint a $k^{(3)}$-mat egy véges és egy, a végtelenen átvonuló, tehát végtelen hosszú vonaldarabokra osztják. A két véges vonaldarab, valamint a két végtelen vonaldarab egy-egy zárt területet, $T_1$ és $T_2$-őt, határol a hyperboloidon; a hyperboloidnak pedig ezeken kívül fekvő része a $T$.

A $k_1^{(3)}$ görbe a $g$-t csak egy pontban, $C$-ben, metszi. Egy a $k_1^{(3)}$-mon haladó pont a $C$ ponton keresztül jut a $T$ részből a $T_1$ részbe vagy a $T_2$ részbe és hogy innen ismét a $T$-be kerüljön, kell hogy a $T_1$ vagy a $T_2$-nek a $k^{(3)}$-tól határolt kerületét páratlan számú (1, 3 vagy 5) pontban messe. Ha a $D$ egy ily metszőpont, akkor a többi négy, mely páronként kapcsolt képzetes is lehet, annak a két II. r. kúpnak négy közös alkotóján fekszik, mely a $k^{(3)}$ és $k_1^{(3)}$ görbét a $D$ pontból projicziálja, — és így ennek a négy kúpalkotónak második metszőpontja a $H^{(2)}$-vel.

A tárgyalt tételnek fordítottja:

*Két, egymást öt pontban metsző III. r. térgörbén mindig fektethető keresztül egy hyperboloid.*

Ugyanis vezessük az első görbének, $k^{(3)}$-nak, egy tetszésszerinti pontjából a második görbéhez, $k_1^{(3)}$-hoz, a $g$ húrt. Ez nem lesz húrja a $k^{(3)}$ görbének, mert különben a $k^{(3)}$-nak a $g$ és $k_1^{(3)}$ vonalakon keresztül menő minden hyperboloidot vagy két pontban kellene metszenie, vagy pedig e hyperboloidokon kellene rajta feküdnie. Az első eshetőség, mint előbb kimutattuk, lehetetlen; a másik szintén, mert különben e hyperboloidoknak egyik sugárserege, az egymást öt pontban metsző $k^{(3)}$és $k_1^{(3)}$ görbék húrrendszeréhez tartoznék. A $g$ tehát nem húrja a $k^{(3)}$-nak és így a $g$-n és a $k^{(3)}$-mon csak egy $H^{(2)}$ hyperboloid fektethető keresztül, a melyen a $k_1^{(3)}$ is rajta van, minthogy véle hét pontot bir közösen. Ebből következik:

*Ha két III. r. térgörbének öt közös pontja van, akkor az első görbének pontjaiból a másodikhoz vezethető húrok, a másodiknak pontjaiból az elsőhöz vezethető húrokat metszik.*

5. *Ha két III. r. térgörbe valamely $H^{(2)}$ hyperboloidon fekszik és ennek ugyanegy alkotó-rendszere mindkét görbének húrja, akkor e görbék egymást csak négy pontban metszik, mely páronkent kapcsolt képzetes is lehet.*

Ugyanis ha a $H^{(2)}$-n levő $k^{(3)}$ és $k_1^{(3)}$ III. r. térgörbéknek egy közös $g$ húrja az elsőt az $A$ pontban, a másodikat az $A_1$ pontban metszi, akkor annak a két II. r. kúpnak, mely a $k^{(3)}$-mat az $A$-ból a $k_1^{(3)}$-mat az $A_1$-ből projicziálja, nincsen közös érintősíkja a $g$ alkotó mentén és így egymást egy oly $k_2^{(3)}$ III. r. térgörbében metszi, mely a $k^{(3)}$ és $k_1^{(3)}$ görbéknek közös pontjain megy keresztül. De mert a $k_2^{(3)}$ az első kúpon van, azért annak a $k^{(3)}$-mal az $A$ csúcson kívül még négy közös pontja lehet, mely egyszersmind a $k^{(3)}$ és $k_1^{(3)}$-nak közös pontja. Ebből következik:

*Ha négy projektiv síksor általános helyzetű, akkor négy oly pont létezik, melyben a síksoroknak megfelelő síkjai egymást metszik.*

Ugyanis két projektiv síksornak képződménye egy II. r. kúp, vagy egy sugársereg; ez projektiv lévén vonatkoztatva a harmadik és negyedik síksorra, ezekkel egy, a sugársereget tartó hyperboloidon két III. r. térgörbét határoz meg, melynek ama sugársereg közös húrrendszeréhez tartozik. E két III. r. térgörbe metszőpontja már oly négy pont, melyben a négy projektiv síksornak megfelelő síkjai egymást metszik. — E tételnek folyománya:

Ha egy III. r. térgörbe és egy síksor, melynek tengelye nem húrja a görbének, egymásra projektiv van vonatkoztatva, akkor a síksorban négy oly sík van, mely a térgörbén a neki megfelelő négy ponton megy keresztül.

*Egy hyperboloid négy pontján $\infty^1$ oly III. r. térgörbét fektethetünk keresztül, melyeknek húrrendszerében a hyperboloid egyik sugárserege benn foglaltatik.* E III. r. térgörbékről azt mondjuk, hogy azok egy *sort* képeznek és a négy pont a sornak *alappontja*. A hyperboloid minden $M$ pontján keresztül csak egy görbe vezethető a sorban. Ez a görbe metszővonala a hyperboloidnak azzal a II. r. kúppal, melynek csúcsa az $M$ és mely a hyperboloidnak az $M$-en keresztülmenő és a húrrendszerhez tartozó alkotóján, valamint a négy alapponton helyezhető át.

## 28. §. A harmadosztályú síksor.

1. Hogy a III. r. térgörbének még egyéb tulajdonságaival megismerkedjünk, alkalmazni fogjuk a *Pascal*-tételt a $k^{(3)}$ III. r. térgörbét projicziáló II. r. kúpokra.

Legyen e végből $ABCDEF$ a $k^{(3)}$ III. r. térgörbébe írt hatszög, az $M$ pont a görbének tetszésszerinti pontja, az $M^{(2)}$ pedig a görbét az $M$ pontból projicziáló II. r. kúp. Az $M^{(2)}$-be írt $M(ABCDEF)$ hatoldalú gúlára alkalmazott Pascal-tétel következtében az

$$MAB,\ MDE;\ MBC,\ MEF;\ MCD,\ MFA$$

síkpárok három metszővonala $g$, $h$ és $i$ ugyanegy $\xi \equiv [ghi]$ síkban van.

Ez a $\xi$ sík, mialatt az $M$ a $k^{(3)}$-mat befutja, egy $p$ egyenes körül forog, mely a $k^{(3)}$ görbének húrja. Ugyanis a $g$, $h$ és $i$ egyenesek az $M$ pontból a $k^{(3)}$ görbe $AB$, $DE$; $BC$, $EF$ és $CD$, $FA$ húrjaihoz vezethető szelők. Ha az $M$ pont befutja a $k^{(3)}$-mat, akkor a $g$ egyenes egy $H_g^{(2)}$ hyperboloidot, a $h$ egy $H_h^{(2)}$ hyperboloidot, végre az $i$ egy $H_i^{(2)}$ hyperboloidot ír le. E hyperboloidok a $k^{(3)}$-mon mennek keresztül és így a $H_g^{(2)}$ és $H_h^{(2)}$ egy közös $p$ alkotóval bir, mely a $k^{(3)}$-nak húrja. Ez a $p$ húr metszi a változó $g$ és $h$ szelőket és mert mindig a változó $\xi$ síkban van, metszi a változó $i$-t is, tehát a $H_i^{(2)}$ hyperboloid szintén keresztül megy a $p$ húron. Az $ABCDEF$ hatszög nem egymásra következő $ABC$, $CDE$, $EFA$ lapjainak $J$ és a szintén nem egymásra következő $BCD$, $DEF$, $FAB$ lapjainak $K$ metszőpontja mind a három hyperboloidon rajta van, tehát a $JK$ egyenes lesz a $p$ húr. Ezért:

*Ha valamely $k^{(3)}$ III. r. térgörbébe egy hatszöget írunk be, akkor azok a szelők, melyek a görbe egyes pontjaiból a hatszög három szemben fekvő oldalpárjához vezethetők, ugyanegy síkban vannak. Ez a sík, mialatt a pont, melyből a szelők kiindulnak, a görbét befutja, a görbének egy húrja körül forog. E húr közös alkotója annak a három hyperboloidnak, mely a $k^{(3)}$ görbén és ama hatszög szemben fekvő oldalpárjain megy keresztül és összeköti azokat a pontokat, melyben a hatszögnek három nem egymásra következő lapja és a másik három nem egymásra következő lapja egymást metszi.*

2. Alkalmazzuk e tételt egy háromszöggé elkorcsosult hatszögre.

Legyen e végből $A$, $B$ és $C$ a $k^{(3)}$ III. r. térgörbének három pontja; $a$, $b$ és $c$ e pontoknak érintője. Az $A$, $B$, $C$ pontokban az előbbi $ABCDEF$ hatszögnek $AB$, $CD$, $EF$ pontjai egyesülnek és ezek az oldalak az $a$, $b$, $c$ érintőkké válnak. A hatszög $ABC$, $CDE$, $EFA$ és $BCD$, $DEF$, $FAB$ nem egymásra következő lapjainak most megfelelnek az $aB$, $bC$, $cA$ és $aC$, $bA$, $cB$ síkok, melyek a $J$ és $K$ pontokban találkoznak. Ha az $M$ a $k^{(3)}$-nak egy változó pontja, akkor az $Ma$, $Mb$, $Mc$ síkok a $k^{(3)}$-nak érintősíkjai az $A$, $B$, $C$ pontokban és az $M^{(2)}$ kúpnak érintősíkjai az $MA$, $MB$, $MC$ alkotók mentén.

Az $M$ pontból az $a, BC$; $b, CA$; $c, AB$ egyenesekhez vezethető $g$, $h$, $i$ szelőknek, vagy, a mi ugyanaz, az $M^{(2)}$ kúphoz az $MA$, $MB$, $MC$ alkotók mentén vezetett érintősíkoknak metszővonalai az $MBC$, $MCA$, $MAB$ síkokkal egy $\xi$ síkban vannak. E $\xi$ sík a $k^{(3)}$-nak egy $p$ húrja körül forog, mialatt az $M$ a $k^{(3)}$-mat befutja. Ez a $p$ húr nem metszheti a $k^{(3)}$ görbét valós pontokban, mert a változó $\xi$ síkok egyike sem metszheti az illető $M^{(2)}$ kúpot valós alkotókban, míg a $k^{(3)}$-mon felvett $ABC$ pontok valósak.

A $p$ húr nem lehet az $ABC$ síkban, mert a $p$ húr az $aB$, $bC$, $cA$ és az $aC$, $bA$, $cB$ síkoknak metszőpontjain, $J$ és $K$-n megy keresztül, melyek az $ABC \equiv \pi$ síkon kívül vannak; a $p$ húr tehát a $\pi$ síkot egy $P$ pontban metszi.

A midőn a változó $M$ pont az $A$ pontba jut: az $Ma$ sík az $A$ pontnak $\alpha \equiv Aa$ simulósíkja lesz és az $A$-ból az $a$ és $BC$ egyenesekhez vezetett $g$ szelő az $Aa \equiv \alpha$ és az $ABC$ síknak metszővonala. De ez a $g$ szelő metszi a $p$ húrt, tehát a $P$ ponton megy keresztül és így az $A$ pontnak $\alpha$ simulósíkja szintén a $P$ ponton fog keresztül menni.

A midőn a változó pont a $B$-be vagy a $C$-be jut, a $B$ és $C$ pontokból a $b$ és $CA$-hoz, illetve a $c$ és $AB$-hez vezetett $h$, illetve $i$ szelő szintén a $P$ ponton fog keresztül menni. De ezek a szelők a $B$ és $C$ pontnak $\beta$, illetve $\gamma$ simulósíkjaiban vannak, tehát az $ABC$ pontok $\alpha\beta\gamma$ simulósíkjai egymást az $ABC$ sík $P$ pontjában metszik.

Ennélfogva:

*Valamely III. r. térgörbe három pontjának simulósíkja egymást a három ponton keresztül menő sík egy pontjában metszi. Az a húr pedig, mely e metszőpontból a III. r. térgörbéhez vezethető, a görbét két kapcsolt-képzetes pontban vágja, ha a görbén felvett három pont valós volt.*

E nevezetes tételnek első része *Chasles*-tól, a második rész pedig *Joachimsthal*-tól ered.

A Chasles-féle tételnek következménye:

1) *Egy tetszésszerinti ponton keresztül a III. r. térgörbéhez csak három simulósík vezethető*, mert ha abból a pontból, $P$-ből, négy simulósíkot lehetne a görbéhez vezetni, akkor azoknak símulópontjai egy tetraedernek volnának csúcsai és a $P$ pontnak e tetraeder mindenik lapjában kellene feküdni. — A III. r. térgörbét, azért, mert egy tetszésszerinti pontból ahhoz három simulósík vezethető, *harmadosztályúnak* és a görbe símulósíkjainak rendszerét *harmadosztályú síksornak* nevezzük.

2) *Egy tetszésszerinti egyenesen keresztül a III. r. térgörbéhez csak két simulósík vezethető*, mert ha három simulósík menne azon az egyenesen keresztül a görbéhez, akkor annak az egyenesnek a három simulópont síkjában kellene lenni, azaz a három pont simulósíkja egybeesnék, a mi lehetetlen.

3) *Egy III. r. térgörbe négy pontja egy tetraedernek csúcsa; e pontoknak négy simulósíkja egy másik tetraedernek négy lapja. E két tetraeder bármelyike a másikba és a másik körül van írva, azaz* Möbius-*féle.* Ugyanis a III. r. térgörbe $ABCD$ pontjainak $\alpha\beta\gamma\delta$ simulósíkjai közül $\beta\gamma\delta$, $\gamma\delta\alpha$, $\delta\alpha\beta$ és $\alpha\beta\gamma$ egymást a $BCD$, $CDA$, $DAB$ és $ABC$ sík $A_1$, $B_1$, $C_1$ és $D_1$ pontjában metszi és a $B_1C_1D_1 \equiv \alpha$, $C_1D_1A_1 \equiv \beta$, $D_1A_1B_1 \equiv \gamma$ és $A_1B_1C_1 \equiv \delta$ síkok az $A$, $B$, $C$ és $D$ pontokon mennek keresztül. E harmadik következményben kifejezett tétel Möbius-tól ered. —

Ha valamely $k^{(3)}$ III. r. térgörbébe írt $ABCD$ tetraeder $A, B, C, D$ csúcsainak $a, b, c, d$ érintőit a szemben fekvő lapokkal metszszük az $A'$, $B'$, $C'$, $D'$ pontokban, akkor az $ABCD$, $A'B'C'D'$ tetraederek is Möbius-félék.

Ugyanis egyrészt a szerkesztés szerint az $A'BCD$, $AB'CD$, $ABC'D$, $ABCD'$ pontok egy-egy síkban vannak, másrészt az $AB'C'D'$, $A'BC'D'$, $A'B'CD'$, $A'B'C'D$ pontok is egy-egy síkban vannak, mert pl. az $AB'C'D'$ sík Pascalsíkja a $k^{(3)}$ görbét az $A$ pontból projicziáló II. r. kúpba írt $A(BCD)$ háromélre vonatkozólag.

3. A III. r. térgörbéről előbb talált Möbius-féle tétel segélyével kimutatható, hogy *a III. r. térgörbe simulósíkjai annak bármelyik simulósíkját II. o. sugársor szerint metszik.**)

Tartsuk meg az előbbi jelölést, tehát legyenek a $k^{(3)}$ görbébe írt $T$ tetraedernek csúcsai $ABCD$, ezeknek simulósíkjai $\alpha\beta\gamma\delta$, melyek egy $A_1B_1C_1D_1 \equiv T_1$ tetraedernek lapjai. A $T_1$ tetraedernek ekkép felírt három éléből

$$\beta\gamma \equiv D_1A_1, \quad \gamma\alpha \equiv D_1B_1, \quad \alpha\beta \equiv D_1C_1,$$

*) *Möbius:* Der barycentrische Calcul; 120. oldal.

látható, hogy ezeknek helyzete független a $\delta$ simulósíktól és annak $D$ simulópontjától.

Ha a $D$ befutja a $k^{(3)}$ görbét, akkor a $BCD$, $CAD$, $ABD$ tetraederlapok projektiv síksorokat írnak le a $BC$, $CA$, $AB$ tengelyek körül, melyek a $D_1A_1$, $D_1B_1$, $D_1C_1$ szilárd egyeneseket megfelelőleg az $A_1$, a $B_1$ és a $C_1$ projektiv pontsorokban metszik. Ebből pedig már következik, hogy a változó $\delta$ símulósík az $\alpha$, $\beta$ és $\gamma$ szilárd simulósíkokat II. r. sugársorokban metszi, mert a $D_1$ pont nem megfelelőleg közös pontja ama projektiv pontsoroknak.

A tételnek folyománya, hogy a III. r. térgörbe hat símulósíkjából annak többi simulósíkja szerkeszthető.

Ugyanis öt símulósík a hatodikat egy II. o. sugársor öt sugarában metszi, mely annak többi sugarát is meghatározza és két ily módon szerkesztett sugársornak egymást metsző sugarain mennek keresztül a III. r. térgörbe simulósíkjai.

A két sugársor a két simulósík mezején kollinear vonatkozást létesít, melyben az egymást metsző sugarak megfelelők. Ezért a III. r. térgörbe simulósíkjainak rendszere, *a III. o. siksor*, két simulósíkban levő kollinear mező síkképződményének tekinthető.

És most fordítva kimutatjuk, hogy *két különböző síkban fekvő általános helyzetű kollinear mezőnek síkképződménye egy* $\varkappa^{(3)}$ *III. o. siksor, s mint ilyen egy* $k^{(3)}$ *III. r. térgörbe simulósíkjainak rendszere.*

Jelöljük a $\mu$ és $\mu_1$ kollinear mezők metszővonalát $e_1f$-fel; ennek a $\mu$ és $\mu_1$ síkban megfelelő egyeneseit $e$ és $f_1$-gyel. Az $e$, $e_1$ projektiv pontsorok képződménye II. o. sugársor, mely egy $k^{(2)}$ kúpszeletet burkol; az $f$, $f_1$ projektiv pontsorok képződménye szintén egy $k_1^{(2)}$ kúpszeletet burkoló II. o. sugársor. Az $e_1f$ egyenes a $k^{(2)}$ és $k_1^{(2)}$ kúpszeleteket az $E_1 \equiv (ee_1)$, illetve az $F \equiv (ff_1)$ pontban érinti, míg az $e$ és az $f_1$ egyenes a $k^{(2)}$ és $k_1^{(2)}$ kúpszeleteket az $E$, illetve az $F_1$ pontban érinti.

A $k^{(2)}$, $k_1^{(2)}$ kúpszeletek megfelelő kollinear alakzatok; és pedig megfelelők azok a $t$, $t_1$ kúpszelet-érintők, melyek egymást az $e_1f$ egyenesen metszik és megfelelők ezeknek $T$, $T_1$ érintőpontjai. A megfelelő $t$, $t_1$ érintőkön keresztül menő $\tau \equiv [tt_1]$ síkok a $\varkappa^{(3)}$ III. o. síksornak síkjai; a $TT_1$ egyenes pedig, mint a $\tau$ síknak és a sorban hozzá szomszéd $\tau$ síknak metszővonala: *a* $\tau$ *síknak* úgynevezett *érintősugara*. A $TT_1$ érintősugárnak metszőpontja a $\tau$-hez szomszéd síknak érintősugarával: *a* $\tau$ *síknak símulópontja*; e símulópontoknak geometriai helye pedig a $\varkappa^{(3)}$ síksor *élvonala* vagy *éle*. Az élvonal pontjainak érintői a síksor síkjainak érintősugarai; az élvonal pontjainak simulósíkjai pedig a síksor síkjai.

A midőn a $t$ érintő az $e$-vel, tehát a $t_1$ az $e_1$-gyel egyesül: a $\tau$ sík a $\mu$-be jut; ennek érintősugara az $e$ és simulópontja az $E$. Ugyanígy a $\mu_1$ sík érintősugara az $f_1$ és simulópontja az $F_1$.

A $\varkappa^{(3)}$ síksor $\tau$ síkjainak $TT_1$ érintősugarait az $E$ pontból projicziáló $ETT_1$ síkok egy II. r. kúpnak érintősíkjai.

Ugyanis, ha a változó $T$ pontoknak projekczióit az $E$ pontból az $e_1 f$ egyenesre $T'$-sel jelöljük, akkor a $T'$ pontsor projektiv a $T$ pontsorral a $k^{(2)}$ és így a $T_1$ pontsorral a $k_1^{(2)}$ kúpszeleten. A $T'$ és $T_1$ projektiv pontsorokban az $E_1$ megfelelőleg közös pont, továbbá az $F$ pontnak megfelel az $F_1$. A $T'$ és $T_1$ projektiv pontsoroknak képződménye egy I. o. vagy egy II. o. sugársor*); ennek $T'T_1$ sugarait az $E$ pontból projicziáló $ET'T_1$ síkok, melyek egyszersmind a $TT_1$ érintősugarakat is projicziálják, egy I. o. vagy II. o. síksort képeznek. I. o. síksort e síkok nem képezhetnek, mert ennek tengelye az $EF_1$ egyenes volna, mely minden $TT_1$ sugarat metszene. Ámde az egymásra következő $TT_1$ érintősugarak metszik egymást, tehát valamennyinek egy síkban kellene lenni, a mi lehetetlen. Ezért a $\varkappa^{(3)}$ síksor $TT_1$ érintősugarait az $E$ pontból projicziáló síkok egy $E^{(2)}$ II. r. kúpnak érintősíkjai és ezen a II. r. kúpon vannak a síksor simulópontjai.

Ugyanígy kimutatható, hogy a $\varkappa^{(3)}$ síksor simulópontjait az $F_1$ pontból projicziáló $F_1^{(2)}$ kúp is II. r. és mert az $E^{(2)}$ és $F_1^{(2)}$ kúpnak az $EF_1$ közös alkotó mentén különböző érintősíkja van, azért *a* $\varkappa^{(3)}$ *III. o. síksor élvonala egy* $k^{(3)}$ *III. r. térgörbe, melynek simuló síkjai a síksor síkjai.*

4. A III. r. térgörbe simulósíkjai, mint láttuk, egy III. o. síksort és a III. o. síksor simulópontjai egy III. r. térgörbét képeznek. A III. r. térgörbe két-két pontján keresztül menő egyenesek, a görbe húrjai egy $K_3^{(1)}$ elsőrendű és harmadosztályú kongruenczíát, a III. o. sík-

---

*) Valamely $c^{(2)}$ kúpszeleten fekvő két projektiv pontsor megfelelő pontjait összekötő egyenesek, mint ismeretes (Klug: *Projektiv Geometria El.*; 103. oldal), egy $\varkappa^{(2)}$ kúpszeletet burkolnak, mely a $c^{(2)}$-őt a projektiv pontsorok két kettős pontjában, $M$ és $N$-ben érinti. Ha az $AA_1$ és $XX_1$ a két projektiv pontsornak két pár megfelelő pontja és az $AA_1$, $XX_1$ egyenesek a $\varkappa^{(2)}$-őt az $A_0$, $X_0$ pontokban érintik, akkor az $AX_1$, $A_1X$, $A_0X_0$ egyenesek egymást az $MN = p$ egyenesnek egy $X$ pontjában metszik. És ha az $AA_1$ pontpár változatlan marad, az $XX_1$ pontpár pedig a $c^{(2)}$ kúpszeletet befutja, úgy az $X$ pont a $p$ egyenesen, az $X_0$ pont pedig a $\varkappa^{(2)}$ kúpszeleten az adott $X$ és $X_1$ pontsorokkal projektiv pontsort ír le. Az $M$ és $N$ pontoknak megfelelő pontok ezekben az új pontsorokban az $M$ és $N$ pontok maradnak.

Fordítva is következik: Ha két kúpszelet $\varkappa^{(2)}$ és $c^{(2)}$ egymást két pontban, $M$ és $N$-ben érinti, akkor az egyik kúpszeletnek érintői a másikat két, egy-

sor két-két síkjának metszővonalai, vagy, ami ugyanegy, *a III. r. térgörbe két-két simulósíkjának metszővonalai, mint a dualis tárgyalásból látható, egy* $K_1^{(3)}$ *harmadrendű és első osztályú kongruenciát képeznek.* E $K_1^{(3)}$ kongruenczia sugarait a *III. r. térgörbe és a III. o. síksor tengelyeinek* nevezzük.

A $\varkappa^{(3)}$ III. o. síksor síkjainak metszővonalai nem adják meg a $K_1^{(3)}$ kongruenczianak összes sugarait, mert vannak a $K_1^{(3)}$-ben oly sugarak is, a melyekből nem vezethető a $\varkappa^{(3)}$ síksor $k^{(3)}$ élvonalához valós simulósík.

Ezekről fogalmat nyerünk, ha arra gondolunk, hogy a $\varkappa^{(3)}$ két *általános* helyzetü kollinear sík mezőnek $\mu$ és $\mu_1$-nek síkképződménye, a $K_1^{(3)}$ pedig azoknak sugárképződménye. Ha az $A$ és $A_1$ e mezőkben két megfelelő pont, akkor az $AA_1$ sugara a $K_1^{(3)}$-nak, és a $\mu$, $\mu_1$ mezők megfelelő $A$, $A_1$ projektiv sugársorait az $AA_1$ tengelyből projicziáló siksoroknak valós vagy képzetes kettőssíkjai az $AA_1$ tengelyből a $k^{(3)}$-hoz vezethető simulósíkok.

(Ha a $\mu$ és $\mu_1$ mezők nem általános helyzetüek, hanem síkjuknak $\mu\mu_1$ metszővonala, de annak nem minden pontja, megfelelőleg közös, akkor azoknak síkképződménye három síksor, sugárképződménye pedig egy lineáris kongruenczia. Ugyanis a $\mu\mu_1$ metszővonalban két (valós vagy képzetes) megfelelő pont, $M$ és $N$, van. Az $(M, \mu)$ és $(M, \mu_1)$, ugyszintén az $(N, \mu)$ és $(N, \mu_1)$ megfelelő sugársoroknak képződménye, mert a $\mu\mu_1$ megfelelő sugár, egy-egy síksor; a harmadik síksornak tengelye a $\mu\mu_1$ metszővonal. A mi pedig a sugárképződményt illeti, csak vissza kell gondolnunk a lineáris kongruenczianak Sylvester-féle képzésére (194. old.) és a kollinear mezők meghatározására szolgáló két-két projektiv sugársorra (205. old.)).

Még máskép is fogalmat nyerünk a $K_1^{(3)}$ kongruenczia sugarairól. Ha a $g$ és $g_1$ a $\varkappa^{(3)}$ síksor két valós síkpárjának metszővonala, akkor a $\varkappa^{(3)}$-nak összes síkjai a $g$ és $g_1$-et projektiv pontsorokban

---

mással és az érintőpontokkal projektiv pontsorban metszik; úgy az $M$, mint az $N$ pont mind a három pontsorban megfelelő.

Vegyünk fel ezután három kúpszeletet, $\varkappa^{(2)}$, $c^{(2)}$ és $c'^{(2)}$-őt, melyek egymást az $M$ és $N$ pontokban érintik. A $\varkappa^{(2)}$-nek egy változó $x$ érintője azt az $X_0$ pontban érinti, a $c^{(2)}$-őt egy változó $XX_1$, a $c'^{(2)}$-őt egy változó $X'X'_1$ pontpárban metszi; az $X, X_1$; $X', X'_1$ pontsorok mind projektivek az $X_0$ pontsorral és az $M$, valamint az $N$ pont mind az öt pontsorban megfelelő. Fordítva:

*Ha két egymást kettősen érintő kupszeleten két projektiv pontsor* ($X$ *és* $X'$) *van és ezekben a kúpszeletek* ($M$ *és* $N$) *érintőpontjai megfelelők, akkor a pontsorok képződmenye II. o. sugársor.* Ez két esetben korcsosulhat el első osztályú sugársorrá:

metszik, melyeknek képződménye a $H^{(2)}$ hyperboloidnak egyik sugársereg e. Ennek minden $h$ sugarán keresztül csak egy, míg a támasztó seregének $g$ sugarain keresztül két sík vezethető a $\varkappa^{(3)}$ sorhoz és mindezek a síkok a $H^{(2)}$-nek érintősíkjai. A $\varkappa^{(3)}$ síksor $\infty^2$ ily $H^{(2)}$ hyperboloidot határoz meg és mindezen, páronként egy-egy közös alkotóval biró hyperboloidoknak közös érintősíkjai a $\varkappa^{(3)}$-hoz tartoznak. E hyperboloidok egyik sugárseregéből a $\varkappa^{(3)}$-hoz mindig két valós vagy képzetes sík vezethető és ezek a sugarak képezik a $K_1^{(3)}$ kongruenciának összes sugarait, a $\varkappa^{(3)}$ síksor $k^{(3)}$ élgörbéjének tengelyeit; a hyperboloidok másik sugárseregének sugaraiból csak egy-egy sík vezethető a $\varkappa^{(3)}$ sorhoz és ez utóbbi sugársereget *a* $\varkappa^{(3)}$ *síksorhoz perspektivnek* nevezzük.

Megjegyezzük még e helyen, hogy oly két hyperboloidnak közös érintősíkjai, melynek egy közös $g$ alkotója van és egymást ez alkotónak legföljebb két pontjában érintik, egy I. o. és egy III. o. $\varkappa^{(3)}$ síksort képeznek. Az I. o. síksornak $g$ tengelye a $\varkappa^{(3)}$ tengelyrendszeréhez tartozik és a $\varkappa^{(3)}$-nak síkjai, a hyperboloidoknak a $g$ alkotó egyes pontjaiból kiinduló és másik rendszerhez tartozó két-két alkotóján mennek keresztül.

5. A $k^{(3)}$ III. r. térgörbe húrjai és tengelyei általában különböznek egymástól, de a $k^{(3)}$ érintői, a húrok és a tengelyek rendszereihez számíthatók; ezek tehát a $k^{(3)}$ görbével kapcsolatos $K_3^{(1)}$ és $K_1^{(3)}$ kongruenciáknak közös sugarai. Ezek a sugarak a $k^{(3)}$ görbe úgynevezett *kifejthető felületének* $F^{(4)}$-nek alkotói, míg a $k^{(3)}$-nak simulósíkjai az $F^{(4)}$-nek érintősíkjai. Állapítsuk meg az $F^{(4)}$-nek rendjét, azaz határozzuk meg, hogy valamely $g$ egyenes hány pontban metszi az $F^{(4)}$ felületet?

Induljunk ki két II. o. projektiv sugársorból, mely ugyanegy síkban levő $c^{(2)}$ és $c'^{(2)}$ kúpszeletnek érintője és vizsgáljuk meg, hogy ezeknek képződménye ama kúpszeletek síkjában fekvő $g$ egyenest hány pontban metszi?

---

1. ha egy, tehát valamennyi sugár a két kúpszelet egyik vagy másik érintőpontján megy keresztül;

2. ha egy, tehát valamennyi sugár a kúpszeletek közös érintőhúrjának ($MN$-nek) pólusán megy keresztül.

Ebből következik, ha a két kúpszelet egyike a másiknak két érintőjévé korcsosul el:

*Ha valamely kúpszeleten és ennek egyik érintőjén egy-egy projektiv pontsor van és e két pontsorban az érintőpont megfelelő, akkor a két projektiv pontsor képződménye vagy egy I. o. vagy pedig egy II. o. sugársor a szerint, amint két pár megfelelő pont összekötő egyenese egymást a kúpszeleten vagy azon kívül metszi.*

A $g$-n mozgó $X_o$ pontnak polárisai a $c^{(2)}$-re vonatkozólag az $X_o$ ponttal projektiv I. o. sugársort, $T_x$-et képeznek, mely a $c^{(2)}$-őt az $X_o$ pontsorral projektiv $XX_1$ involucziós pontsorban metszi. Minthogy az adott II. o. sugársorok érintőpontjai a $c^{(2)}$-vel és a $c'^{(2)}$-vel szintén projektivek, azért e projektivitásból folyólag a $c^{(2)}$-őn levő $XX_1$ involucziós pontsornak megfelel a $c'^{(2)}$-őn egy $X'X'_1$ involucziós pontsor és ennek $X'X'_1$ társpontjait összekötő sugarak az $X_o$ pontsorral projektiv I. o. sugársort $T'_x$-et képeznek.

Az $X_o$ pontnak a $c'^{(2)}$-re vonatkozó polárisai ismét az $X_o$ pontsorral projektiv $T_y$ sugársort képeznek, melynek sugarai a $c'^{(2)}$-őt az $X_o$-val projektiv $YY_1$ involucziós pontsorban metszik. Az $X'X'_1$ és $YY_1$ projektiv involucziós pontsoroknak megfelelőleg közös pontjaik ott lesznek, a hol a $T'_x$ és $T_y$ projektiv sugársoroknak képződménye, a $\varkappa^{(2)}$ kúpszelet, a $c'^{(2)}$-őt metszi. Egy ily megfelelőleg közös pontnak, pl. az $X'Y$-nak az a tulajdonsága, hogy a $c'^{(2)}$-nek érintője e pontban és a $c^{(2)}$-nek érintője az ennek megfelelő $X$ pontban, egymást a $g$ egyenes ugyanegy $X_o$ pontjában metszi. Minthogy a $\varkappa^{(2)}$ és $c'^{(2)}$-nek négy közös pontja van, azért az eredeti II. o. sugársoroknak négy megfelelő sugárpárja metszi egymást a $g$-n, azaz a *két II. o. projektiv sugársornak képződménye IV. r. síkgörbe.*

Ha ezután áttérünk a $k^{(3)}$ III. r. térgörbéhez, melyet, mint két, egy közös alkotóval biró $M^{(2)}$ és $M_1{}^{(2)}$ II. r. kúp metszővonalának tekintünk és mely kúpok a görbe által projektiv vannak egymásra vonatkoztatva, akkor a $k^{(3)}$-nak kifejthető felületét, $F^{(4)}$-et, mint két projektiv II. o. síksor $M^{(2)}$ és $M_1{}^{(2)}$ képződményének lehet tekinteni. E két II. o. síksornak nincsen megfelelőleg közös síkja, tehát minden sík, mely nem megy keresztül az $M$ vagy $M_1$ ponton, azokat oly II. o. sugársorokban metszi, melyeknek képződménye IV. r. görbe. Ezt pedig a $g$ egyenes csak négy pontban metszheti. Ebből következik, hogy *a $k^{(3)}$ III. r. térgörbe kifejthető felülete negyedrendű.*

6. A III. r. térgörbét hat pontjából, és a III. o. síksort hat síkjából, a már említetten kivül (27. §. 1. p.), *Chasles* következő tétele alapján is szerkeszthetjük.

Ha a III. r. térgörbébe egy háromszöget és egy tetraedert irunk be, úgy a háromszögnek oldalai és a tetraeder lapjainak metszővonalai a háromszög síkjával ugyanegy kúpszeletnek érintői.

A III. o. síksornak három síkja egy háromélnek, négy más síkja pedig egy tetraedernek négy lapja. A tetraeder csúcsai és ama háromélnek élei, ugyanegy II. r. kúpon vannak.

Legyen $ABC$ és $EFGH$ valamely $k^{(3)}$ III. r. térgörbének hét pontja. Az $E(ABC)$, $E(FGH)$ háromeléknek élei és az $F(ABC)$, $F(EGH)$ háromeléknek élei egy-egy II. r. kúpon vannak és ezért ama háromélpárokba egy-egy II. r. kúp irható be. Az $ABC$ sík ez utóbbi kúpokat két kúpszeletben metszi, melynek közös érintői az $ABC$ háromszögnek oldalai, és az $ABC$ síknak metszővonala az $EFG$ és az $EFH$ síkkal; a két kúpszelet tehát egybeesik, és így az $ABC$ síknak metszővonala az $EGH$ és $FGH$ síkkal szintén érintője e kúpszeletnek. Ezzel a baloldali tétel igazolva van.

A $k^{(3)}$ III. görbének hetedik pontja, az $ABEFGH$ pontokból a tétel alapján ekkép szerkeszthető: Az $AB$-n keresztül menő tetszésszerinti $\mu$ sík az $EFGH$ tetraeder lapjait egy négyoldalban metszi; ez a négyoldal és az $AB$ egyenes egy $k^{(2)}$ kúpszeletnek érintője. Az $A$ és $B$ pontokból e kúpszelethez vezethető uj érintők egymást a $k^{(3)}$-nak egy $C$ pontjában metszik. —

Legyen $\mu_1$ az $AB$-n keresztül menő más sík, mely az $EFGH$ tetraeder lapjait egy négyoldalban metszi. Ha az $A$ és $B$ pontból meghúzzuk a második érintőket ahhoz a $k_1^{(2)}$ kúpszelethez, mely e második négyoldalt és az $AB$ egyenest érinti, akkor ezek egymást a $k^{(3)}$ görbének egy $D$ pontjában metszik.

A $\mu$ és $\mu_1$ síkban fekvő $k^{(2)}$ és $k_1^{(2)}$ kúpszeletnek az $AB$ közös érintője és ezért az $AB$-nek egyes pontjaiból e kúpszeletekhez vezethető érintőpároknak sikjai, vagy egy II. o., vagy pedig egy III. o. síksorhoz tartoznak. Az $EFGH$ tetraedernek lapjai szintén síkjai e síksornak, tehát a síksor III. o. lesz és ehhez tartoznak az $ACD$, $BCD$ síkok is. valamint maguk a $\mu$, $\mu_1$ sikok, azaz az $ABCD$ tetraedernek lapjai. Ezért mondhatjuk:

*Ha a $k^{(3)}$ III. r. térgörbébe oly két tetraedert irunk be, melynek nincs közös csúcsa, akkor azoknak lapjai egy másik III. r. térgörbének simulósikjai.* (Staudt, Beitr. z. G. d. L. 588. p.)

## 29.*) §. A harmadrendű térgörbén fekvő négyzetes és köbös pontinvoluczió.

1. Az előbbiekben láttuk, hogy a III. r. térgörbe $k^{(3)}$ és annak simulósíkjaiból álló III. o. síksor $\varkappa^{(3)}$ egymásnak dualis alakzata. Minden a III. r. térgörbe pontjaira, érintőire, húrjaira, simulósíkjaira, a görbével perspektiv sugárseregre és II. r. kúpra vonatkozó tételnek

*) E §-nak nehezebben érthető része a könyv első olvasásakor elhagyható.

dualisan megfelel egy a görbe simulósíkjaira, érintőire, tengelyeire, pontjaira, a simulósíkok sorával perspektiv sugárseregre és II. o. sugársorra vonatkozó tétel. Igy:

A III. r. térgörbén levő involucziós pontsor

| | |
|---|---|
| társpontjait összekötő húrok egy sugársereget képeznek. | társpontjainak simulósíkjai egymást egy sugársereg sugaraiban metszik. |

A $k^{(3)}$ III. r. térgörbén egy közönséges, azaz *négyzetes* involucziós pontsort $I^{(2)} \equiv A_1A'_1 \,.\, A_2A'_2 \ldots$ akkép nyerünk, hogy a görbét annak egy $M$ pontjából projicziáló $M^{(2)}$ II. r. kúpnak alkotói között involucziót létesítünk; ennek társalkotói a görbét az $I^{(2)}$ involucziós pontsor $A_iA'_i$ társpontjaiban metszik.

Az $M^{(2)}$ involucziós kúp társalkotóit összekötő síkok egy síksort képeznek, melynek $h$ tengelye (*involuczió-sugár*) a $k^{(3)}$ görbének csak az $M$ pontján megy keresztül, míg az $I^{(2)}$ involucziós pontsor $A_iA'_i$ társpontjait összekötő $g_i$ húrok metszik a $h$-t s mint ilyenek egy $H^{(2)}$ hyperboloidnak egyik sugárseregét képezik. A $h$ egyenesnek az $M^{(2)}$ kúpra vonatkozó polárissíkja, az *involuczió-sík*, a kúpon levő alkotóinvolucziót a kettősalkotókban, a $k^{(3)}$ görbét pedig az $I^{(2)}$ pontinvolucziónak $JK$ kettőspontjaiban metszi. A $k^{(3)}$ görbén az $M^{(2)}$ kúp segélyével létesített $I^{(2)}$ involucziós pontsor független az $M^{(2)}$ kúptól, mert e pontsor a $k^{(3)}$ görbe és a görbével perspektiv II. r. kúpok projektivitása folytán, a görbének minden pontjából involucziós kúpokkal projicziáltatik. Mindezen involucziós kúpokhoz tartozó $h$ involuczió-sugarak az előbbi $H^{(2)}$ hyperboloidnak második $h$ sugárseregét adják, míg e $h$ sugaraknak polárissíkjai az illető kúpokra vonatkozólag egymást a $k^{(3)}$ görbének $JK \equiv p$ húrjában metszik. A $H^{(2)}$ hyperboloid $h$ sugárseregében az $I^{(2)}$ pontsor $A_iA'_i$ társpontjain keresztül menő $h_ih'_i$ sugarak az $I^{(2)}$-vel és a $k^{(3)}$ görbével perspektiv involucziós sugársereget képeznek.

A $k^{(3)}$ görbén levő $I^{(2)} \equiv A_1A'_1 \,.\, A_2A'_2 \ldots$ pontinvolucziót $JK$ kettőspontjainak összekötő egyenese $p$, mely a $k^{(3)}$-nak egy húrja, mindig valós, még ha a $JK$ kettőspontok képzetesek is; az $I^{(2)}$ pontinvolucziót a görbe két pontjából projicziáló involucziós kúpoknak involucziósíkjai egymást e $p$ húrban metszik. Viszont a $k^{(3)}$ III. r. térgörbének egy $p$ húrjával a $k^{(3)}$-mon egy $I^{(2)}$ involuczió van meghatározva, melynek $JK$ kettőspontjai a $p$ húrnak valós vagy képzetes metszőpontjai a $k^{(3)}$-mal. A $k^{(3)}$ görbét annak $M$ pontjából projicziáló $M^{(2)}$ kúpon az $Mp$ involuczió-sík által, a kúp alkotói involucziósan lesznek párosítva; ennek az involucziós kúpnak társalkotói projicziálják már a $k^{(3)}$ görbén keresett $I^{(2)}$ involucziónak társpontjait.

2. Mint ismeretes, minden involucziós sor projektiv vonatkoztatható egy egyszerű sorra, nevezetesen: egy involucziós kúpnak társalkotóit összekötő síkok soráról azt mondjuk, hogy az, az involucziós kúppal projektiv. A $g_i$ sugársereg az előbbi $H^{(2)}$ hyperboloidon projektiv az $M^{(2)}$ kúpon levő involucziós alkotósorral, tehát az $I^{(2)}$ involucziós pontsorral a $k^{(3)}$-mon és így a $h_i h'_i$ involucziós sugársereggel a $H^{(2)}$ hyperboloidon.

A $k^{(3)}$ III. r. térgörbe tehát bármely rajta keresztül menő $H^{(2)}$ hyperboloid sugárseregei között projektiv vonatkozást létesít és pedig: az a sugársereg, mely $k^{(3)}$-nak húrrendszeréhez tartozik, projektiv a görbével perspektiv másik sugársereggel, mely involucziós; az előbbi sereg egy sugarának az a két sugár felel meg az utóbbiban, mely az elsőt a $k^{(3)}$ görbén metszi.

Ugyanis ha a $k^{(3)}$ görbét és a $H^{(2)}$-nek első sugárseregét a $k^{(3)}$-nak tetszésszerinti $M$ pontjából projicziáljuk: egy $M^{(2)}$ II. r. kúpot és egy síksort nyerünk, mely a kúpot a síksorral projektiv involucziós alkotósorban, a $k^{(3)}$-mat pedig egy $I^{(2)}$ involucziós pontsorban metszi. Ez az $I^{(2)}$ pontsor pedig perspektiv és projektiv a $H^{(2)}$-nek második sugárseregével. *Ha tehát valamely síksornak tengelye egy III. r. térgörbének csak egy pontján megy keresztül, akkor a síksor projektiv azzal az involucziós pontsorral, $I^{(2)}$-vel, a melyben a síksor síkjai a görbét metszik és így projektiv mindazokkal az involucziós síksorokkal, melyek az $I^{(2)}$-t a $k^{(3)}$-nak bármely húrjából projicziálják.*

Vagy:

*A $k^{(3)}$ III. r. térgörbe egy pontján keresztül menő egyenesnek síkjai a görbét egy $I^{(2)}$ involucziós pontsorban metszik.*

3. A III. r. térgörbe hat pontja által meg van határozva. De ha a hat pontot tetszésszerint veszszük fel egy hyperboloidon, akkor ez még nem megy a görbén keresztül. Ellenben:

*Ha valamely $H^{(2)}$ hyperboloid egyik sugárseregének, g-nek, három sugarán akkép veszünk fel három pontpárt $A_1A'_1$, $A_2A'_2$ és $A_3A'_3$-mat, hogy azok e sugárseregnek egyik $g_i$ sugarából involucziós síkpárokkal projicziáltatnak, akkor a hat ponton keresztül menő III. r. térgörbe $k^{(3)}$ a hyperboloidon fekszik.*

Ugyanis az első öt ponton keresztül menő és a $H^{(2)}$ hyperboloidon fekvő $k_1^{(3)}$ III. r. térgörbét a $H^{(2)}$-nek $g$ sugársereg olyan pontinvoluczióban metszi, melynek társpontjait a $g_i$-ből projicziáló síkpárok involucziót képeznek. Minthogy e síkpárok az előbbi involucziós síkpárokkal egybeesnek: a $k_1^{(3)}$ görbe keresztül megy az adott pontok hatodikán és így $k_1^{(3)}$ azonos a $k^{(3)}$-mal.

Ebből következik:

Ha valamely involucziós síksornak tengelye (vagy pontsornak tartója) egy sugárseregnek egyik sugara és e sugársereg a síksorra (illetve a pontsorra) projektiv van vonatkoztatva, úgy képződményük egy III. r. térgörbe (illetve III. o. síksor).

Továbbá:

*Ha valamely involucziós sugársereg projektiv van vonatkoztatva annak támasztó sugárseregére, akkor a két sugársereg pontképződménye egy* $k^{(3)}$ *III. r. térgörbe, síkképződménye pedig egy* $\varkappa^{(3)}$ *III. o. síksor. A támasztó sugársereg sugarai a térgörbének húrjai, a síksornak pedig tengelyei.*

Tekintsük a $k^{(3)}$ III. r. térgörbét, mint pontképződményét a $H^{(2)}$ hyperboloidon fekvő $hh'$ involucziós sugárseregnek és az evvel projektiv támasztó sugárseregnek, $g$-nek. Ha az első sugársereg $h_j$, $h_k$ kettőssugarainak a másikban a $g_j$, $g_k$ sugarak felelnek meg, akkor ez utóbbiak érintői a $k^{(3)}$-nak, a $(g_j h_j) \equiv J$, $(g_k h_k) \equiv K$ pontokban, míg a $[g_j h_j] = \iota$, $[g_k h_k] = \varkappa$ síkok, minthogy a $k^{(3)}$-mat csak a $J$, illetve $K$ pontokban metszhetik, e pontoknak simulósíkjai. A $JK$ pontok pedig kettőspontjai annak az $I^{(2)}$ involucziónak a $k^{(3)}$-mon, melyben a $hh'$ involucziós sugársereg a vele projektiv egyszerű sugárseregnek, $g$-nek, megfelelő sugarát metszi. A $J,K$ pontok $\iota$ $\varkappa$ simulósíkjainak $q$ metszővonala, mely a $k^{(3)}$ görbének tengelye, polárisa a $p \equiv JK$ húrnak a $H^{(2)}$ hyperboloidra vonatkozólag és a $q$ ennek segélyével a $p$ húrból még akkor is megszerkeszthető, ha a $JK$ pontok és a $\iota\varkappa$ síkok képzetesek.

A $g$ sugárseregnek $g_j g_k$ sugarai, amennyiben valósak, a $g$ sugársereget két részre osztják; az egyik rész sugarai a $k^{(3)}$-mat valós pontpárokban, a másik résznek sugarai pedig kapcsolt-képzetes pontpárokban metszik. Ha pedig az $I^{(2)}$ involucziónak a $k^{(3)}$ görbén két képzetes kettőspontja van, tehát a $g_j g_k$ sugarak is képzetesek, akkor a $g$ sugárseregnek minden sugara valós pontokban metszi a $k^{(3)}$-mat.

Ha a $g_1$ sugár a $k^{(3)}$-mat az $A_1 A'_1$ pontpárban metszi és e pontokon keresztül menő sugarak a másik seregben $h_1 h'_1$, akkor az $A_1 A'_1$, $JK$ pontpárok a $k^{(3)}$ görbén és a $h_1 h'_1$, $h_j h_k$ sugárpárok a $H^{(2)}$ hyperboloidon, végre ez utóbbi sugárpároknak metszőpontjai a $g_1$-gyel, harmónikusan vannak elválasztva. Ebből következik, hogy az $A_1 A'_1$ pontpár a $J,K$ pontoknak $\iota\varkappa$ simulósíkpárjától harmónikusan van elválasztva, vagy általánosabban kifejezve:

*Ha valamely III. r. térgörbén oly két pontpárt veszünk fel, mely egymást harmónikusan választja el, akkor bármelyik pont-*

*párnak simulósíkpárja szintén harmónikusan választja el a másik pontpárt.*

Továbbá:

*Ha két (valós) pontpár egymást egy $k^{(3)}$ III. r. térgörbén harmónikusan választja el, akkor a $k^{(3)}$ rajta fekszik azon a két hyperboloidon, mely keresztül megy az első pontpár érintőpárján és a második pontpár összekötő egyenesén, illetve a második pontpár érintőpárján és az első pontpár összekötő egyenesén. A két hyperboloid egymást a $k^{(3)}$-mon kívül ennek még egy húrjában metszi, melynek (képzetes) közös pontjai a görbével az adott pontpárokat harmónikusan választják el.*

Ez utóbbi tulajdonság onnan következik, hogy egy III. r. térgörbén keresztül menő két hyperboloid egymást annak egy húrjában metszi; ez pedig úgy az egyik, mint a másik hyperboloidnak ahhoz a sugárseregéhez tartozik, melynek két sugara a görbét érinti és ezek az érintőpontok ama húr és a görbe metszőpontjaitól harmónikusan vannak elválasztva. —

Vegyünk fel egy $k^{(3)}$ III. r. térgörbe $J$ pontjának $\iota$ símulósíkjában a $J$-n keresztül egy $h_j$ egyenest. A $h_j$-nek síkjai a $k^{(3)}$-mat egy $I^{(2)}$ involucióban metszik, melynek egyik kettőspontja a $J$ és melynek társpontjait összekötő $g$ húrok egy $H^{(2)}$ sugárseregnek sugarai. A $H^{(2)}$ másik sugárseregének az $I^{(2)}$ társpontjain keresztül menő sugarai egy $I_H^{(2)}$ involucziós sugársereget képeznek, melynek egyik kettőssugara a $h_j$, a másik $h^k$ pedig a $k^{(3)}$-nak egy $K$ pontján megy keresztül és szintén ennek $\varkappa$ simulósíkjában van. Minthogy az $I_H^{(2)}$-nak társsugarai, tehát az $I^{(2)}$-nek a $g$ húrokon fekvő társpontjai a $h_j h_k$ kettőssugaraktól harmónikusan vannak elválasztva, mondhatjuk:

*Ha a $k^{(3)}$ III. r. térgörbe egy pontján keresztül ennek simuló síkjában egy $h_j$ egyenest veszünk fel, akkor azok a pontok, melyek a $h_j$-nek pontjain keresztül a $k^{(3)}$-hoz vezetett húrok végpontjait a $h_j$ egyenes pontjaitól harmónikusan választják el, egy $h_k$ egyenesen vannak, mely a $k^{(3)}$-mat szintén egy pontban metszi és e metszőpontnak simulósíkjában van.*

E tételt alább (a 30. §. 1. p. végén) általánosítani fogjuk.

4. Valamely sugárseregnek csak két sugara érinthet egy olyan III. r. térgörbét, mely a sugársereget tartó hyperboloidon van. Ezért a III. r. térgörbe nem fekhetik azon a hyperboloidon, mely a görbe három pontjának érintőin megy keresztül. Azonban:

*A III. r. térgörbe három pontjának érintőin keresztül menő hyperboloid abban az összefüggésben áll a térgörbével, hogy a hyper-*

*boloid érintősíkjai és a görbe simulósíkjai a három pont bármelyikében, a másik két ponttól harmónikusan vannak elválasztva.* (Staudt.)

Ugyanis legyen $A_1A_2A_3$ egy $k^{(3)}$ III. r. térgörbének három pontja, $a_1a_2a_3$ és $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ ezeknek érintője és simulósíkja. Legyen továbbá $H^{(2)}$ az $a_1a_2a_3$-mon keresztül menő hyperboloid, $b_1b_2b_3$ ennek az $A_1A_2A_3$ pontokon keresztül menő másik rendszerbeli alkotója, végre az $A^{i(2)}$ az a kúp, mely a $k^{(3)}$-mat az $A_i$ pontból projicziálja.

Az $A_1^{(2)}$ kúp $a_1$, $A_1A_2$, $A_1A_3$ alkotóinak $\alpha_1$, $A_1a_2$, $A_1a_3$ érintősíkjai közül a két utóbbi egymást a $b_1$-ben metszi, s mert az $[a_1b_1]$ sík polárissíkja az $\alpha_1$ és $\alpha \equiv A_1A_2A_3$ síkok metszővonalának az $A_1^{(2)}$ kúpra vonatkozólag, azért ez az $[a_1b_1]$ (mely a $H^{(2)}$-nek érintősíkja az $A_1$ pontban) és az $\alpha_1$ sík harmónikusan választja el az $A_1A_2$, $A_1A_3$ kúpalkotókat, és így egyszersmind az $A_2$, $A_3$ pontokat.

A tétel következménye:

*Ha $A_1A_2A_3$ a $k^{(3)}$ III. r. térgörbének három pontja, akkor az $A_1$ pont $a_1$ érintőjén és az $A_1$ pontból az $A_2A_3$ pontok érintőihez vezetett $b_1$ szelőn keresztül menő sík a $k^{(3)}$-mat abban az $A_1^*$ pontban metszi, mely az $A_1$ pontot az $A_2A_3$ pontoktól harmónikusan választja el.*

Az $\alpha \equiv A_1A_2A_3$ sík az előbbi $H^{(2)}$ hyperboloidot egy $k^{(2)}$ kúpszeletben, az $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ simulósíkok pedig, melyek az $\alpha$-nak $A$ pontjában találkoznak, a hyperboloidot az $a_1b'_1$, $a_2b'_2$, $a_3b'_3$ sugárpárokban metszik.

Az előbbi bizonyítás folytán az $[a_1b_1]$, $[a_1b'_1]$ síkok harmónikusan választják el az $A_2$, $A_3$ pontokat, tehát a $b_1b'_1$, $b_2b_3$ sugárpárok, és hasonlókép a $b_2b'_2$, $b_3b_1$; $b_3b'_3$, $b_1b_2$ sugárpárok harmónikusan vannak elválasztva. Ebből pedig az következik, hogy a $b'_1b'_2b'_3$ sugarak közül kettő-kettő a harmadikat a $b_1$, $b_2$, $b_3$ sugaraktól, és így az ezeken fekvő $A_1$, $A_2$, $A_3$ pontoktól is harmónikusan választja el. Ennélfogva mondhatjuk:

*Ha valamely hyperboloid három pontja mindegyik sugárseregének három különböző sugarán van, akkor az egyik sereghez tartozó három sugarat e három pontban érintő III. r. térgörbének simulósíkjai e három pontban, a hyperboloidot a másik sugársereg-nek oly három sugarában metszik, mely közül kettő-kettő a harmadikat az egyes felvett pontoktól harmónikusan választja el.*

E tétel alapján *a III. r. térgörbe annak három pontjából, e pontoknak simulósíkjaiból és e pontok egyikének érintőjéből a következőkép szerkeszthető*:

Ha a három pont $A_1A_2A_3$, a három simulósík $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$, az $A_1$ pontnak érintője $a_1$, akkor kell, hogy az $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ síkok metszőpontja

$A$ az $\alpha \equiv A_1A_2A_3$ síkban, az $a_1$ pedig az $\alpha$ síkon kívül az $\alpha_1$ síkban legyen.

Az $A$ pontnak az $A_1A_2A_3$ háromszögre vonatkozó harmónikus polárisa $q$, az $A_2A_3$, $A_3A_1$, $A_1A_2$ oldalakat három pontban metszi, melynek összekötő egyenesei az $A_1$, $A_2$, $A_3$ pontokkal, a $A_1A_2A_3$ háromszög körül írható $k^{(2)}$ kúpszeletnek érintői. E kúpszeletet az $AA_1$, $AA_2$, $AA_3$, egyenesek másodízben az $A'_1$, $A'_2$, $A'_3$ pontokban metszik.

Ha most az $A'_2$, $A'_3$ pontokon keresztül az $a_1$-hez $b'_2$, $b'_3$ szelőket vezetünk, melyek közül az első az $\alpha_2$ síkban, a második az $\alpha_3$ síkban van, akkor az $A_2$ és $A_3$ pontokból a $b'_2$, $b'_3$ egyenesekhez vezetett $a_2$, $a_3$ szelők, már a keresett $k^{(3)}$ III. r. térgörbének érintői az $A_2$, $A_3$ pontokban, melyekből $k^{(3)}$ már tovább szerkeszthető.

Ugyanis, ha $b'_1$ az $A'_1$ pontból az $a_2$ és $a_3$-hoz vezetett szelő, akkor az $a_1a_2a_3b'_1b'_2b'_3$ hyperboloidon levő $A_1$, $A_2$, $A_3$ pontok, az $A'_1$, $A'_2$, $A'_3$ pontokon keresztül menő $b'_1$, $b'_2$, $b'_3$ szelők mindegyikét, a másik kettőtől harmónikusan választják el. De az $A_2b'_2$, $A_3b'_3$ síkok egybeesnek az $\alpha_2$, $\alpha_3$ síkokkal és a hyperboloidot még az $a_2$, $a_3$ egyenesekben metszik; az $A_1b'_1$ sík pedig, mely a hyperboloidot az $a_1$-ben metszi, keresztül megy az $A_1A'_1$ egyenesen és így egyszersmind az $A$ ponton, tehát egybeesik az $\alpha_1$ síkkal. —

Ez utóbbi tárgyalásban egy $k^{(3)}$ III. r. térgörbének három pontját, $A_1A_2A_3$-mal, ezeknek érintőit és simulósíkjait $a_1a_2a_3$ és $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$-mal, az $a_1a_2a_3$-mon keresztül menő hyperboloidot $H^{(2)}$-vel, ennek az $A_1A_2A_3$ pontjain keresztül menő és a másik sugársereghez tartozó alkotóit $b_1b_2b_3$-mal, az $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ simulósíkoknak második metszési alkotóit a $H^{(2)}$-vel $b'_1b'_2b'_3$-mal, az $A_1A_2A_3$ síkot $\alpha$-val, az $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ síkok metszőpontját $A$-val, a $H^{(2)}$ és az $\alpha$ metszővonalát $k^{(2)}$-vel, végre az $A$ pontnak az $A_1A_2A_3$ háromszögre vonatkozó harmónikus polárisát, mely egyszersmind az $A$ pontnak a $k^{(2)}$-re vonatkozó polárisa, $q$-val jelöltük.

Az $A$ pontnak a $H^{(2)}$-re vonatkozó polárissíkja $\alpha'$, a $q$ egyenesen és az $[a_1b_1][a_2b_2][a_3b_3]$ síkoknak $A'$ metszőpontján, valamint az $(a_1b'_1)(a_2b'_2)(a_3b'_3)$ pontokon megy keresztül. Az $A'$ pontnak az $(a_1b'_1)(a_2b'_2)(a_3b'_3)$ háromszögre vonatkozó harmónikus polárisa szintén a $q$ egyenes, tehát az $AA' \equiv p$ egyenesnek harmónikus polárissíkja az $\alpha_1 \equiv [a_1b'_1]$, $\alpha_2 \equiv [a_2b'_2]$, $\alpha_3 \equiv [a_3b'_3]$ lapoktól képezett háromélre vonatkozólag, az $Aq \equiv \alpha$ sík.

Az $[a_1b_2][a_2b_3][a_3b_1]$ és az $[a_1b_3][a_2b_1][a_3b_2]$ síkoknak metszőpontjai szintén a $p$ egyenesen vannak (23. §. 3. p.), és mert ama síkok az $[a_1A_2][a_2A_3][a_3A_1]$ és $[a_1A_3][a_2A_1][a_3A_2]]$ síkokkal esnek egybe,

azért (28. §. 2. p.) a $p$ egyenes a $k^{(3)}$ görbének húrja. Ez a $p$ húr pedig, mely a $q$-nak a $H^{(2)}$-re vonatkozó polárisa, nem metszheti a $H^{(2)}$ hyperboloidot, és a $k^{(3)}$ görbét valós pontokban, mert a $q$ sem metszi a $H^{(2)}$-őt valós pontokban, ha az $A_1A_2A_3$ pontok valósak.

Ennélfogva:

Valamely III. r. térgörbe három simulósíkja egy oly három élnek háromlapja, melynek csúcsa a simulósíkok simulópontjaival ugyanegy síkban van. E síknak harmónikus polárissugara ama háromélre vonatkozólag, a háromél csúcsából a III. r. térgörbéhez vezethető húr.

Valamely III. r. térgörbe három pontja egy oly háromszögnek három szögpontja, melynek síkja a három pont simulósíkjának metszőpontján megy keresztül. E metszőpontnak a háromszögre vonatkozó harmónikus polárisa a III. r. térgörbének a háromszög síkjában levő tengelye.

5. Vegyünk fel ezután egy $k^{(3)}$ III. r. térgörbén ismét három pontot, $A_1A_2A_3$-mat, és legyenek a $k^{(3)}$-mon az $A'_1A'_2A'_3$ pontok azok, melyek az előbbieknek első, második és harmadik pontját a másik kettőtől harmónikusan elválasztják. Minthogy az $A_1A'_1$, $A_2A'_2$, $A_3A'_3$ pontpárok egy involucziónak társpontjai, azért a pontpároknak $g_1$, $g_2$, $g_3$ összekötő egyenesei egy a $k^{(3)}$-mon keresztül menő $F^{(2)}$ hyperboloidnak alkotói.

Az $A_1A_2A_3$, $A'_1A'_2A'_3$ ponthármasokon keresztül menő és az $F^{(2)}$-nek másik rendszeréhez tartozó $h_1h_2h_3$, $h'_1h'_2h'_3$ alkotóhármasai is olyanok, hogy két-két alkotó a harmadikat a másik hármasnak egy alkotójától harmónikusan választja el, azaz társhármasok a $h$ sugárseregnek egy $I_h^{(3)}$ köbös involucziójában.

Az $\alpha \equiv A_1A_2A_3$ és $\alpha' \equiv A'_1A'_2A'_3$ síkok az $F^{(2)}$-őt a $k^{(2)}$ és $k'^{(2)}$ kúpszeletben, a $h'_1h'_2h'_3$ és $h_1h_2h_3$ alkotókat ama kúpszeleteknek $\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3$, illetve $\bar{A}'_1\bar{A}'_2\bar{A}'_3$ pontjaiban metszik. Minthogy az $\alpha\alpha'$ síkok kapcsolt polárissíkok (23. §. 2. p.), azért ezeknek $A'A$ pólusai megfelelőleg az $\alpha\alpha'$ síkban vannak és az $\alpha\alpha' \equiv p$, $AA' \equiv q$ egyenesek polárisok az $F^{(2)}$-re vonatkozólag.

Az $A$ pont harmónikus pólusa a $q$-nak az $A_1A_2A_3$, $\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3$ háromszögekre vonatkozólag, és a $k^{(2)}$ kúpszeletnek érintői e háromszögek $A_1\bar{A}_1$, $A_2\bar{A}_2$, $A_3\bar{A}_3$ szögpontjaiban, a szemben fekvő oldalakat a $q$-nak $Q_1Q_2Q_3$ pontjaiban, míg ama szögpontpároknak az $A$-n keresztül menő összekötő egyenesei a $q$-t a $Q'_1Q'_2Q'_3$ pontokban metszik.

Hasonlóképen az $A'$ pontnak harmónikus pólusa a $q$-nak, az $A'_1A'_2A'_3$, $\bar{A}'_1\bar{A}'_2\bar{A}'_3$ háromszögekre vonatkozólag, és a $k'^{(2)}$-nek érintői e háromszögek szögpontjaiban a szemben fekvő oldalakat a

$q$-nak $Q'_1Q'_2Q'_3$ pontjaiban, míg ama szögpontpároknak az $A'$-n keresztül menő egyenesei a $q$-t a $Q_1Q_2Q_3$ pontokban metszik. Ezek a $Q_1Q_2Q_3$, $Q'_1Q'_2Q'_3$ hármasok társhármasok egy $I_q^{(3)}$ köbös involuczióban (27. §., 4. p.).

Mert a $k^{(3)}$ görbe $A_2A_3$, $A'_2A'_3$ pontpárjai harmónikusan választják el az $A_1'A_1$ pontpárt, azért a $k^{(3)}$ görbét az $A_1$ pontból projicziáló $A_1^{(2)}$ kúpnak $A_1A_2$, $A_1A_3$ és $A_1A'_2$, $A_1A'_3$ alkotópárjai a kúpon szintén harmónikusan választják el az $A_1A'_1 \equiv g_1$ egyenest és a $k^{(3)}$-nak $a_1$ érintőjét az $A_1$ pontban. Ebből következik, hogy az $A_1^{(2)}$ kúpra vonatkozólag az $[a_1g_1]$ sík polárissíkja az $A_1A_2A_3$, $A_1A'_2A'_1$ síkok $A_1Q'_1$ metszővonalának, és az $A_1^{(2)}$ kúp $a_1$ alkotójának érintősíkja, mely az $A_1$ pontnak $\alpha_1$ simulósíkja, az $A_1Q'_1$ egyenesen megy keresztül.

Ugyanígy kimutatható, hogy az $A_2A_3$ pontoknak $\alpha_2\alpha_3$ simulósíkjai a $Q'_2Q'_3$ pontokon mennek keresztül, a miből már látható, hogy a $k^{(3)}$ görbe $A_1A_2A_3$ pontjainak simulósíkjai egymást az $A_1Q'_1$, $A_2Q'_2$, $A_3Q_3'$ egyeneseknek közös $A$ pontjában, és hasonlókép következtetve az $A'_1A'_2A'_3$ pontoknak $\alpha'_1\alpha'_2\alpha'_3$ simulósíkjai egymást az $A'$ pontban metszik.

Az előbbi tétel szerint az $A$ pontnak harmónikus polárisa az $A_1A_2A_3$ háromszögre vonatkozólag, tengelye a $k^{(3)}$ görbének; tehát az $A_1A_2A_3 \equiv \alpha$, $A'_1A'_2A'_3 \equiv \alpha'$ síkoknak $q$ metszővonala, tengelye, az $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$, $\alpha'_1\alpha'_2\alpha'_3$ síkok $A$, $A'$ metszőpontjait összekötő egyenes pedig, a dualitás folytán, húrja a $k^{(3)}$ görbének.

Ennélfogva:

*Ha valamely $k^{(3)}$ III. r. térgörbén oly két ponthármast veszünk fel, hogy az egyiknek minden pontja a másik kettőt, a másik hármasnak egy pontjától harmónikusan választja el, akkor a két ponthármasnak síkjai egymást a $k^{(3)}$-nak tengelyében metszik, és a két ponthármas simulósíkjainak két metszőpontján keresztül menő egyenes a $k^{(3)}$-nak húrja. E tengely és húr polárispár, a két ponthármas síkpárja pedig polárissíkja a simuló-síkhármasok két metszőpontjának arra a hyperboloidra vonatkozólag, mely ama ponthármasok társpontjait összekötő három egyenesen megy keresztül és a mely hyperboloidon a $k^{(3)}$-nak minden pontja rajta van.*

Vagy részletezve:

A $k^{(3)}$ III. r. térgörbének egyik tengelyén keresztül menő sík a görbét három pontban metszi; az a három pont, mely e metszőpontok közül kettőt-

Egy pontból a III. r. térgörbéhez három simulósík vezethető; az a három pont, mely e síkok simulópontjai közül kettőt-kettőt a harmadiktól har-

kettőt a harmadiktól harmónikusan választ el, a felvett tengelylyel ugyanegy síkban van. Ez a sík a másik síkot harmónikusan választja el, a felvett tengelyből a görbéhez vezethető simuló síkoktól.

mónikusan választ el, oly tulajdonságu, hogy simulósíkjai egymást a felvett pontból a görbéhez vezethető húron metszik. E metszőpont és a felvett pont, a görbének a húron fekvő pontjaitól harmónikusan van elválasztva.

Ha az előbbi tárgyalást folytatandó a $k^{(3)}$ görbét a $q$ tengelynek az $F^{(2)}$-re vonatkozó kapcsolt polárissíkjaival metszük, társponthármasokat, azaz oly ponthármaspárokat nyerünk, melyek mindegyikében egy pont a másik kettőt a másik hármasnak egy pontjától harmónikusan választja el, és mely ponthármasok simulósíkjainak metszőpontpárjai a $q$-nak az $F^{(2)}$-re vonatkozó $p$ polárisán kapcsolt pólusok lesznek. E ponthármasok társpontjait összekötő húrhármasok az $F^{(2)}$-nek $g$ rendszerbeli alkotói, míg e társ-ponthármasokon keresztül menő másik rendszerbeli alkotók társ-alkotóhármasok. A társhármasok pedig oly háromszögpároknak szögpontjai, melynek oldalai a $q$ tengelyt társ-ponthármasokban metszik.

A $q$ tengelyből az $F^{(2)}$-hez vezetett $\iota$ érintősik $J$ érintőpontjában, a $k^{(3)}$ egy ponthármasának és társ-ponthármasának pontjai egyesülnek; maga a $\iota$ érintősík, a $J$ érintőpontnak simulósíkja. Ugyanez mondható a $q$-ból az $F^{(2)}$-hez vezetett másik érintősíkról, $\varkappa$-ról, melynek érintőpontja $K$. A $p$ húr tehát a $k^{(3)}$ görbét és az $F^{(2)}$ hyperboloidot a $JK$ pontokban metszi.

A változó társponthármasok a $k^{(3)}$ görbén, mint $A_1A_2A_3$ és $A'_1A'_2A'_3$ és a változó társ-alkotóhármasok az $F^{(2)}$ hyperboloidon, mint $h_1h_2h_3$ és $h'_1h'_2h'_3$, végre a $q$ tengelyen levő társ-ponthármasok, mint $Q_1Q_2Q_3$ és $Q'_1Q'_2Q'_3$ egy $I^{(3)}$, $I_h^{(3)}$ és egy $I_q^{(3)}$ köbös involucziót képeznek; az elsőnek hármaspontjai $JK$, a másodiknak hármasalkotói a $JK$ pontokon keresztül menő $h_jh_k$ alkotók, végre a harmadik köbös involucziónak $Q_jQ_k$ hármaspontjai, a $q$ és $F^{(2)}$-nek metszőpontjai.

Ezért mondhatjuk:

*Valamely $k^{(3)}$ III. r. térgörbe q tengelyén keresztül menő síkok a görbét egy $I^{(3)}$ köbös involuczió ponthármasaiban metszik, melynek hármaspontjai a q-ból a $k^{(3)}$-hoz vezethető $\iota$ $\varkappa$ simulósíkoknak JK simulópontjai. Az $I^{(3)}$ társhármasainak síkjai egy $I_q^{(2)}$ négyzetes involucziót képeznek a q síksorban, melynek kettőssíkjai szintén $\iota$ és $\varkappa$. E társhármasok pontjainak simulósíkjai egymást a $k^{(3)}$ térgörbe $JK \equiv p$ húrjának pontpárjaiban metszik és e pontpároktól képezett $I^{(2)}$ négyzetes involucziónak kettőspontjai szintén J és K.*

*Az $I^{(3)}$ társ-hármasainak pontjai háromszögpároknak szögpontjai; ezeknek oldalai a $q$-t egy $I_q^{(3)}$ köbös involuczió társhármasaiban metszik, melynek hármaspontjai $Q_j Q_k$. Az $I^{(3)}$ társhármasainak simulósíkjai háromélpároknak lapjai; ezeknek élei a $p$-ből az $I_q^{(3)}$-val perspektiv $I_p^{(3)}$ köbös involucziónak társ-síkhármasaival projicziáltatnak, és igy ennek $\pi_j\ \pi_k$ hármassíkjai, a $Q_j\ Q_k$ pontokon mennek keresztül.*

*Az $I^{(3)}$ társpontjait összekötő húrok egy $F^{(2)}$ hyperboloid egyik sugárseregének sugarai, és ennek a társ-ponthármasokon keresztül menő sugarai egy $I_g^{(3)}$ köbös involucziót képeznek, melynek $g_j g_k$ hármassugarai a $k^{(3)}$-nak érintői a $JK$ hármaspontokban. A $k^{(3)}$ társponthármasain keresztül menő és $F^{(2)}$-nek másik sugárseregéhez tartozó sugarai társ-sugárhármasai az $I^{(3)}$-mal perspektiv $I_h^{(3)}$ köbös involucziós sugárseregnek; ennek $h_j h_k$ hármassugarai szintén a $JK$ pontokon mennek keresztül és ép úgy, mint $g_j g_k$ a $\varkappa$ síkokban vannak.*

*A $pq$ egyenespár polárispárja, az $I^{(3)}$ társ-ponthármasainak síkpárja kapcsolt polárissíkpárja, és e társ-ponthármas simulósíkjainak metszőpontpárja kapcsolt póluspárja az $F^{(2)}$-nek, tehát az $I_q^{(3)}$-nak hármaspontjai, a $(g_j h_k)\ (g_k h_j)$ pontpárral és az $I_p^{(3)}$-nak hármassíkjai a $[g_j h_k]\ [g_k h_j]$ síkpárral esnek egybe.*

E tétel alapján a köbös involuczió minden tulajdonságából tételeket származtathatunk le a III. r. térgörbére vonatkozólag.

Igy ismeretes, hogy a köbös involucziónak két ponthármasa háromfélekép képez oly négyzetes involucziót, melyben amannak hármaspontjai társpontok.

Ebből következik:

„Ha valamely $k^{(3)}$ III. r. térgörbe egyik tengelyén, $q$-n, keresztül két síkot vezetünk, mely a görbét az $A_1 A_2 A_3$, $B_1 B_2 B_3$ ponthármasokban metszi, és a jelölésben a ponthármasok ugyanegy értelmüek, akkor az

$$\begin{array}{lll} A_1 B_1, & A_2 B_3, & A_3 B_2 \\ A_1 B_3, & A_2 B_2, & A_3 B_1 \\ A_1 B_2, & A_2 B_1, & A_3 B_3 \end{array}$$

pontpárok egy-egy négyzetes involucziónak társpontjai, tehát e társpontokat összekötő húrok a $k^{(3)}$-mal együtt egy-egy hyperboloidon feküsznek. Ez a három hyperboloid keresztül megy a $k^{(3)}$-nak azon a $p$ húrján, mely a $q$-ból a $k^{(3)}$-hoz vezetett $\varkappa$ simulósíkok $JK$ simulópontjait összeköti.

A három négyzetes involucziő $J_1 K_1$, $J_2 K_2$, $J_3 K_3$ kettőspont-

párjait összekötő húrok a $k^{(3)}$-mal együtt egy oly hyperboloidon vannak, melynek egyik polárispárja a $pq$. A $J_1q$ sík még két kettősponton, pl. a $J_2J_3$-mon, a $K_1q$ sík pedig a hátralevő kettőspontokon $K_2K_3$-mon megy keresztül.

De ha a $q$-n keresztül vezetett két sík a $k^{(3)}$ görbét társ-hármaspontokban metszi, tehát a $\iota\,\varkappa$ síkokat harmónikusan választja el, akkor még az $A_1B_1$, $A_2B_2$, $A_3B_3$ húrok is a $k^{(3)}$-mal egy negyedik hyperboloidon vannak, melyre vonatkozólag a $pq$ szintén polárispár.“ stb.

## 30. §. A harmadrendü térgörbére vonatkozó kapcsolt pontok. A nullarendszer rendigörbéi.

1. Valamely $A$ pontból a $k^{(3)}$ III. r. térgörbéhez vezethető $p$ húron az az $A'$ pont, mely az $A$-t a $k^{(3)}$ és a $p$ húr metszőpontjaitól harmonikusan választja el, az $A$-hoz *kapcsolt pontnak* neveztetik. Ez értelmezésből következik, hogy az $A'$-hoz az $A$ pont is kapcsolt; továbbá, hogy ha az $A$ pont a $k^{(3)}$-nak valamelyik érintőjén van, akkor az $A$-nak kapcsolt pontja az érintőnek érintőpontja; végre, hogy a $k^{(3)}$ valamely $A$ pontjának kapcsolt pontja, az $A$ pont érintőjének minden pontja, beleértve magát az $A$-t is.

Ez értelmezésnek dualisan megfelel egy másik, mely a III. o. síksor *kapcsolt síkjaira* vonatkozik. T. i.: a $k^{(3)}$ III. r. térgörbe valamelyik tengelyén keresztül menő oly két sík, mely a tengelyből a görbéhez vezetett két simulósíkot harmónikusan választja el, kapcsolt síkpárja a III. r. térgörbe simuló síkjaitól képezett III. o. síksornak és a III. r. térgörbének. A görbe minden érintősíkjához az érintőpont simulósíkja kapcsolt; és viszont egy simulósíkhoz minden érintősík kapcsolt, mely a görbének a simulósíkban levő érintőjén megy keresztül.

Az előbbi § utolsó tételében a következő tulajdonságát láttuk már a III. r. térgörbe kapcsolt pontjainak és kapcsolt síkjainak:

Minden kapcsolt pontpárból a III. r. térgörbéhez vezethető simulósíkok simulópontjai társ-ponthármasok,

A III. r. térgörbe minden kapcsolt síkpárjának metszőpontjai a görbével társ-ponthármasok,

(azaz olyanok, hogy minden hármasban két-két pont a harmadikat, a másik hármasnak egy pontjától harmónikusan választja el), mert e társ-ponthármasoktól meghatározott köbös involucziónak $JK$ hármaspontjai, a kapcsolt pontpárt összekötő húron vannak és

azoknak simulósíkjai, a kapcsolt síkpár metszővonalán mennek keresztül.

A III. r. térgörbe minden kapcsolt

pontpárjának az a tulajdonsága van, hogy a III. r. térgörbén keresztül menő minden hyperboloidra vagy II. r. kúpra vonatkozólag kapcsolt póluspár.

síkpárjának az a tulajdonsága van, hogy a III. r. térgörbe simuló síkjaitól képezett III. o. síksorba írt minden hyperboloidra vagy kúpszeletre vonatkozólag kapcsolt polárissíkpár.

Ugyanis, ha az $AA'$ kapcsolt pontpárokat összekötő egyenes érintője a $k^{(3)}$-nak, akkor az $A$ (vagy az $A'$) pont érintőpontja annak, és az $AA'$ érintő a $k^{(3)}$-mon keresztül menő $F^{(2)}$ hyperboloidnak vagy II. r. kúpnak az $A$-hoz tartozó érintősíkjában van, és így az $AA'$ kapcsolt póluspárja az $F^{(2)}$-nek.

Ha pedig az $AA'$ egyenes húrja a $k^{(3)}$-nak, tehát azt a $JK$ valós vagy képzetes pontpárban metszi, akkor az $AA'$ szintén kapcsolt póluspárja az $F^{(2)}$-nek, mert az $AA'$ egyenes az $F^{(2)}$-t is a $JK$ pontpárban metszi és az $AA'$ pontpár ezektől harmónikusan van elválasztva.

De ha egy külön bizonyítást kivánnánk arra az esetre, a melyben az $AA'$ egyenes a $k^{(3)}$-mat, és az $F^{(2)}$-t képzetes pontpárban metszi, akkor Reye szerint ekkép járhatunk el:

A $k^{(3)}$-mon keresztül egy tetszésszerinti $F^{(2)}$ hyperboloidot és egy $M^{(2)}$ II. r. kúpot fektetünk, mely utóbbinak csúcsa a $k^{(3)}$-nak $M$ pontja. A $k^{(3)}$-mon és az $MA \equiv g$ egyenesen keresztül menő $H^{(2)}$ hyperboloid egyik sugárseregét, $S$-et, $k^{(3)}$-nak az $MA \equiv g$ pontjain keresztül menő húrok képezik; ennek sugarain vannak a $g$ egyenes pontjainak a $k^{(3)}$-ra vonatkozó kapcsolt pontjai. A $g$ egyenes pontjainak polárissíkjai az $F^{(2)}$-re vonatkozólag, a $g$ pontsorral projektiv síksort képeznek, melynek $g_1$ tengelye a $g$-nek polárisa; míg a $g$ pontjainak polárissíkjai az $M^{(2)}$ kúpra vonatkozólag egy $\gamma$ síkban vannak.

A $\gamma$ síknak és az $S$ sugársereg $H^{(2)}$ tartójának $c$ metszésében vannak a $g$ pontjainak a $k^{(3)}$-ra vonatkozó kapcsolt pontjai. A $c$ vonalban (mely kúpszelet vagy egyenespár) levő pontsor, a $g$ pontsorral és ennek az $F^{(2)}$-re vonatkozó polárissíkjai sorával $g_1$-gyel projektiv. A $g$ pontjain keresztül a $k^{(3)}$-hoz vezetett húrok között végtelen sok van, mely a $k^{(3)}$-mat valós pontpárban metszi. A $g$-nek mind e pontjaihoz tartozó kapcsolt pontok a $c$ pontsorban, és egyszersmind a $g_1$ síksorban a pontoknak megfelelő síkokon vannak. A $g_1$ síksor tehát perspektiv a $c$ pontsorral, és így a $g$ minden pont-

jához, még az $A$-hoz is kapcsolt pont $A'$, a $g_1$ síksorban neki megfelelő síkban van; azaz: $AA'$ kapcsolt póluspárja a tetszésszerinti $F^{(2)}$ hyperboloidnak. —

A $\gamma$ sík a $H^{(2)}$ hyperboloidot egy egyenespárban metszi, ha érintősíkja a $H^{(2)}$-nek, azaz ha $\gamma$ az $S$ sugárseregnek egy sugarán megy keresztül. A $g$-nek $M$ pontja a $\gamma$ síkban van, és ha az $S$ seregnek az $M$ ponton keresztül menő $m$ sugara, mely a $k^{(3)}$-nak érintője, a $\gamma$ síkban van, akkor $\gamma$ a $H^{(2)}$-őt az $m$-ben és még egy másik egyenesben, $g'$-ben, metszi. Az $m$ érintőn vannak az $M$-hez kapcsolt pontok, $g'$-ön pedig a $g$ többi pontjaihoz kapcsolt pontok. Minthogy ez a $g'$ egyenes a $H^{(2)}$-nek abban a sugárseregében van, mely a $k^{(3)}$-mal perspektiv, azért $g'$ a $k^{(3)}$-nak oly $M'$ pontján megy keresztül, melynek $m'$ érintője, mint az $S$-nek egyik sugara, metszi a $g$-t. Az $[mg]$ sík simulósíkja a $k^{(3)}$-nak az $M$ pontban, mert az $M$ pontnak $m$ érintőjén megy keresztül és érintősíkja a $H^{(2)}$-nek az $M$ pontban. Ugyanezért az $[m'g']$ sík is simulósíkja a $k^{(3)}$-nak az $M'$ pontban.

Egy oly $g$ egyenes pontjainak kapcsolt pontjai a $k^{(3)}$ III. r. térgörbére vonatkozólag, mely a $k^{(3)}$-mat nem metszi, egy $k_1^{(3)}$ III. r. térgörbén vannak; a $k_1^{(3)}$ a $k^{(3)}$-nak négy pontján megy keresztül.

Ugyanis ha a $k^{(3)}$-mon keresztül három hyperboloidot fektetünk, akkor a $g$ pontjainak polárissíkjai a három hyperboloidra vonatkozólag, a $g$ pontsorral projektiv három síksort képeznek, melynek képződménye a $k_1^{(3)}$ III. r. térgörbe. A $g$ egyenes a $k^{(3)}$-nak kifejthető felületét négy pontban metszi; e pontokhoz kapcsolt pontok a $k^{(3)}$-mon vannak.

Egybefoglalva utóbbi tárgyalásunk eredményeit, mondhatjuk:

*Valamely g egyenes pontjainak a $k^{(3)}$ III. r. térgörbére vonatkozó kapcsolt pontjai általában egy $k_1^{(3)}$ III. r. térgörbén vannak, mely a $k^{(3)}$-mat négy pontban metszi; e metszőpontok közül kettő-kettő egybeesik és a $k_1^{(3)}$ érinti a $k^{(3)}$-mat ekét pontban, ha a g tengelye a $k^{(3)}$-nak. De ha a g-nek és a $k^{(3)}$-nak egy közös M pontja van, akkor a $k_1^{(3)}$ az M pont m érintőjévé és még egy kúpszeletté vagy $g'$ egyenessé esik szét, a szerint a mint a g az M pont simulósíkján kívül, vagy a simulósíkban van. A $g'$ egyenes a $k^{(3)}$-nak szintén egyik simulósíkjában fekszik és annak $M'$ simulópontján megy keresztül és az M, $M'$ pontoknak m, $m'$ érintői metszik a $gg'$ egyenespárt. Ha végre a g egyenes a $k^{(3)}$ görbét két pontban metszi, akkor a $k_1^{(3)}$ a g egyenessé és a két metszőpont érintőivé korcsosul el* (29. §. 3. p. végén).

2. *Valamely $\varphi$ sík pontjainak a $k^{(3)}$ III. r. térgörbére vonatkozó kapcsolt pontjai egy $F^{(3)}$ III. r. felületen vannak*, azaz oly felületen, melyet minden $g$ egyenes három pontban metsz.

Ugyanis a $g$ pontjainak a $k^{(3)}$-ra vonatkozó kapcsolt pontjai egy $k_1^{(3)}$ III. r. térgörbén vannak; ennek és $\varphi$ síknak három metszőpontjához kapcsolt pontok pedig a $g$ egyenesnek metszőpontjai az $F^{(3)}$ felülettel.

Minthogy a $\varphi$ síkban $\infty^2$ egyenes van, azért az $F^{(3)}$-mat $\infty^2$ III. r. térgörbe vonja be; az $F^{(3)}$ minden pontján $\infty^1$, két pontján pedig egy ily III. r. térgörbe megy keresztül a felületen. Maga a $k^{(3)}$ is az $F^{(3)}$ felületen van, mert a $k^{(3)}$-nak érintői a $\varphi$-t metszik és e metszőpontoknak kapcsolt pontjai a $k^{(3)}$-hoz tartoznak.

Ha a $\varphi$ síknak és a $k^{(3)}$ görbének metszőpontjait $A_1A_2A_3$-mal, azokat a pontokat, melyek e metszőpontok közül kettőt-kettőt a harmadiktól harmónikusan választanak el $A'_1A'_2A'_3$-mal, az $A_1A_2A_3$, $A'_1A'_2A'_3$ társhármasok simulósíkjait $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$, $\alpha'_1\alpha'_2\alpha'_3$-mal, e simuló síkhármasok metszőpontjait $A$, $A'$-sel, az $A_1A_2A_3$ pontok érintőit $a_1a_2a_3$-mal, és e pontokból a másik két pont érintőihez vezetett szelőket $b_1b_2b_3$-mal jelöljük, akkor az $F^{(3)}$ keresztül megy az $A_1A_2A_3$ háromszög oldalain, az $a_1a_2a_3$ érintőkön, az $A'A'_1$, $A'A'_2$, $A'A'_3$ egyeneseken, valamint a $b_1b_2b_3$ szelőkön. A hat első egyenest illetőleg ez közvetlen belátható; a következő három egyenes pedig az $AA_1$, $AA_2$, $AA_3$ egyenesek pontjaihoz kapcsolt pontokat tartja; végre a $b_1b_2b_3$ szelők azért vannak az $F^{(3)}$ felületen, mert a $b_i$ szelőnek polárissíkja arra az $A_i^{(2)}$ II. r. kúpra vonatkozólag, mely a $k^{(3)}$-mat az $A_i$ pontból projicziálja, a $\varphi$ sík, és a $b_i$ pontjaiból a $k^{(3)}$-hoz vezetett húrok, mint egy $H_i^{(2)}$ hyperboloid egyik sugárseregének sugarai, e $\varphi$ síkot egy kúpszeletben metszik, melynek pontjaihoz kapcsolt pontok a $b_i$-n vannak. Az $A'$ ponton keresztül menő három $[a_ib_i]$ sík és a $\varphi' \equiv [A'_1A'_2A'_3]$ sík tehát az $F^{(3)}$ felületet az $a_i$, $b_i$, $A'A'_i$ illetve az $A'A'_i$ egyenesekben metszi. Az $F^{(3)}$ felületen vannak végre a $\varphi$ síknak pólusai a III. r. térgörbén keresztül fektethető összes hyperboloidokra vonatkozólag.

Ha a $\varphi$ sík a $k^{(3)}$ térgörbének simulósíkja az $A_1$ pontban, akkor az $F^{(3)}$ felületen végtelen sok egyenes van, mely az $(A_1, \varphi)$ sugársor sugarainak pontjaihoz kapcsolt pontokat tartja. Ezek az egyenesek a $k^{(3)}$ görbe egyes pontjain mennek keresztül, e pontoknak simulósíkjaiban feküsznek és az $A_1$ pontnak érintőjét metszik.

E szerint: *a $k^{(3)}$ III. r. térgörbe változó pontjait azokkal a pontokkal összekötő egyenesek, melyekben e változó pontoknak simulósíkjai a $k^{(3)}$-nak egy szilárd érintőjét metszik egy $F^{(3)}$ III. r. felületen vannak; a szilárd érintő érintőpontjának simulósíkja $\varphi$, tartója az $F^{(3)}$ pontjaihoz kapcsolt pontoknak.*

3. A III. r. térgörbe alaptulajdonsága, hogy valamely pont-

nak a görbére vonatkozó kapcsolt pontja, egyszersmind kapcsolt pólusa a pontnak mindazokra a hyperboloidokra és II. r. kúpokra nézve, melyeken a III. r. görbe rajta van. Ebből következik, hogy valamely pontnak polárissíkjai a III. r. térgörbén keresztül menő II. r. kúpokra vonatkozólag egymást a ponthoz kapcsolt pontban metszik. E polárissíkoknak helyzetét még közelebbről meghatározza a következő tétel:

*Valamely pontnak polárissíkjai a III. r. térgörbével perspektiv II. r. kúpokra vonatkozólag egy II. o. síksort képeznek, melynek középpontja a pontnak a III. r. térgörbére vonatkozó kapcsolt pontja.*

Ugyanis az $A$ pontot az $A'$ kapcsolt pontjával összekötő $p$ húr a $k^{(3)}$ III. r. térgörbét a $JK$ valós vagy képzetes pontpárban metszi, mely kettőspontja egy a $k^{(3)}$-mon levő $I^{(2)}$ involucziós pontsornak. (Az $A$ pont már meghatározza a $k^{(3)}$-mon levő $I^{(2)}$-őt, mert az $A$-n keresztül menő $p$ húr az előbbiek szerint csupán valós elemek alkalmazásával szerkeszthető (26. §., 6. p. végén). Ha ez a $p$ húr a $k^{(3)}$-mat a $JK$ valós pontpárban metszi, és a $k^{(3)}$ minden $A_i$ pontjához felkeressük azt az $A'_i$ pontot, mely $A_i$-t a $JK$-tól harmónikusan elválasztja, akkor az $A_iA'_i$ társpontpárja az $I^{(2)}$-nek. Ha pedig a $p$ húr nem metszi a $k^{(3)}$-mat valós pontpárban, akkor az $A$-ból a $k^{(3)}$-hoz vezethető három valós simulósík simulópontja $A_1A_2A_3$, és e ponthármasnak $A'_1A'_2A'_3$ társhármasa olyan, hogy ezeknek $A_1A'_1, A_2A'_2, A_3A'_3$ társpontjai egyszersmind az $I^{(2)}$-nek is társpontjai. Az $I^{(2)}$ tehát ez utóbbi esetben is csupán valós elemek alkalmazásával szerkeszthető.)

Az $I^{(2)}$ involucziós pontsort a $k^{(3)}$ tetszésszerinti $M$ pontjából projicziáló $M^{(2)}$ involucziós kúp társalkotóinak síkjai egymást egy $h$ egyenesben metszik, mely az $MJK \equiv MAA'$ involuczió-síknak involuczió sugara. Az $AA'$ pontok kapcsolt pólusok, tehát az $MA$, $MA'$, $h$ sugarak az $M^{(2)}$ kúp egy polárisháromélének élei és így az $A$ pontnak az $M^{(2)}$-re vonatkozó polárissíkja az $A'h$ sík.

Az $I^{(2)}$ társpontjait összekötő $g$ sugarak egy $H^{(2)}$ hyperboloid egyik seregének sugarai; a $h$ metszi mindezeket a sugarakat, tehát a $H^{(2)}$-nek másik seregéhez tartozik. Ha ezután az $M$ pontot változtatjuk a $k^{(3)}$-mon, akkor ezzel az $M.k^{(3)} \equiv M^{(2)}$ kúp is változni fog és a $h$ leírja a $H^{(2)}$-nek egész sugársereget, az $A'h$ sík pedig, mely az $A$ pontnak polárissíkja a változó $M^{(2)}$ kúpokra, leír egy $A'^{(2)}$ II. r. síksort.

Ép így az $A'$ pontnak polárissíkjai a $k^{(3)}$-mat projicziáló II. r. kúpokra nézve egy $A^{(2)}$ síksort képeznek, melynek síkjai a $h$ sugársereget az $A$ pontból projicziálják.

Ha az $A$ és $A'$ pontból a $k^{(3)}$-hoz vezethető síkok simulópontjait $A_1A_2A_3$, $A'_1A'_2A'_3$-mal jelöljük, akkor e társhármasok $\alpha$ és $\alpha'$ síkjai az $A'$ és $A$ pontoknak polárissíkjai a $H^{(2)}$ hyperboloidra vonatkozólag. Az $\alpha$, $\alpha'$ síkok egymást a $k^{(3)}$-nek $q$ tengelyében, a $H^{(2)}$ hyperboloidot a $k^{(2)}$, $k'^{(2)}$ kúpszeletekben metszik, mely utóbbiak az $A_1A_2A_3$, $A'_1A'_2A'_3$ háromszögek körül vannak írva, és az $A$, $A'$ pontoknak e kúpszeletekre és háromszögekre vonatkozó polárisa, illetve harmónikus polárisa a $q$. Minthogy pedig az $A'^{(2)}$ síksor a $H^{(2)}$ hyperboloidot abban a kúpszeletben érinti, melyben azt az $A'$ pontnak polárissíkja metszi, azért a $k^{(2)}$ kúpszelet rajta fekszik azon az $A'^{(2)}$ II. r. kúpon, melyet az $A'^{(2)}$ II. o. síksor burkol.

Ugyanezért az $A^{(2)}$ kúp, melynek érintősíkjai az $A'$ pontnak polárissíkjai a $k^{(3)}$-mal perspektiv II. r. kúpokra nézve, szintén keresztül megy a $k'^{(2)}$ kúpszeleten. Az $A^{(2)}$, $A'^{(2)}$ kúpok egymást és a $H^{(2)}$ hyperboloidot abban a két pontban érintik, melyben a $q$ tengely azokat metszi; e két közös érintősík egyszersmind érintősíkja annak a két $J^{(2)}$, $K^{(2)}$ kúpnak az $AA' \equiv p$ húr mentén, mely a $k^{(3)}$-mat a $p$ húron levő $J$, $K$ pontjaiból projicziálja.

Ily két kúpot, mint az $A^{(2)}$, $A'^{(2)}$, a $k^{(3)}$-ra vonatkozólag *kapcsolt kúpnak* nevezhetünk.

Ha az $AA'$ kapcsolt pontokat az $AA' \equiv p$ húron változtatjuk, akkor ezzel a $H^{(2)}$ hyperboloid, valamint a $q$ tengely nem változik, de változnak az előbbi $\alpha\alpha'$ síkok, $k^{(2)}$ $k'^{(2)}$ kúpszeletek és az $A^{(2)}$ $A'^{(2)}$ kúpok. Mindezen kúpoknak a $q$ egyenesen közös pontpárjuk van, melyben a $p(A_1A'_1 . A_2A'_2 . A_3A'_3)$ involucziós síksor kettőssíkjai, azaz a $J^{(2)}$ $K^{(2)}$ kúpoknak érintősíkjai a $p$ húr mentén, azokat érintik.

Egybefoglalva a talált eredményeket így fejezzük ki:

*Az $A$ és $A'$ kapcsolt pontoknak polárissíkjai a $k^{(3)}$ III. r. térgörbével perspektiv II. r. kúpokra vonatkozólag egy $A'^{(2)}$ és egy $A^{(2)}$ II. r. kúpnak érintősíkjai, melyeknek csúcsa az $A'$, illetve az $A$.*

*Az $A'^{(2)}$ és $A^{(2)}$ kúpok perspektivek azokkal a $k^{(2)}$, illetve $k'^{(2)}$ kúpszeletekkel, melyek közül az első az $A$ pontból a $k^{(3)}$-hoz vezethető simulósíkoknak $A_1A_2A_3$ simulópontjain, a másik az $A'$ pontból a $k^{(3)}$-hoz vezethető simulósíkoknak $A'_1A'_2A'_3$ simulópontjain megy keresztül és melyekre vonatkozólag az $A_1A_2A_3$, $A'_1A'_2A'_3$ síkok $q$ metszővonalának, a $k^{(3)}$ tengelyének pólusai az $A$, illetve az $A'$ pont.*

*E két kapcsolt kúp $A'^{(2)}$, $A^{(2)}$ egymást a $q$ tengelyen az $AA_1A_2A_3$ (és $A'A'_1A'_2A'_3$) négyszög oldalaitól kimetszett involucziónak kettőspontjaiban érinti, és a kúpoknak e két közös érintősíkja, érintősíkja egyszersmind annak a két kúpnak a közös $AA' \equiv p$ húr mentén,*

*mely a $k^{(3)}$-mat a p húrnak és a $k^{(3)}$-nak közös JK pontjaiból projicziálja.*

Hogy ennek duális tételét egyszerűen kifejezhessük: értsük egy síknak valamely kúpszeletre vonatkozó pólusán, a sík és a kúpszelet síkja metszővonalának pólusát a kúpszeletre vonatkozólag. E szerint az előbbinek duális tétele így szól:

*Az $\alpha$ és $\alpha'$ kapcsolt síkoknak pólusai a $k^{(3)}$ III. r. térgörbe simulósíkjai sorába, $\varkappa^{(3)}$-ba, beirt kúpszeletekre vonatkozólag egy $\alpha'^{(2)}$ és egy $\alpha^{(2)}$ kúpszeletnek pontjai, melyeknek síkja $\alpha'$, illetve $\alpha$.*

*Az $\alpha'^{(2)}$ kúpszelet be van irva abba a háromszögbe, melyben az $\alpha$ sík és a $k^{(3)}$ görbe közös pontjainak $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ simulósíkjai metszik az $\alpha'$ síkot, az $\alpha^{(2)}$ pedig be van irva abba a háromszögbe, melyben az $\alpha'$ sík és a $k^{(3)}$ görbe közös pontjainak $\alpha'_1\alpha'_2\alpha'_3$ simulósíkjai metszik az $\alpha$ síkot, és az $\alpha\alpha' \equiv q$ tengelynek pólusa e két kúpszeletre vonatkozólag az $A' \equiv (\alpha'_1\alpha'_2\alpha'_3)$, illetve az $A \equiv (\alpha_1\alpha_2\alpha_3)$ pont.*

*E két kapcsolt kúpszelet $\alpha'^{(2)}$ és $\alpha^{(2)}$ egymást a q tengelynek két pontjában metszi; ezek a q tengelyen keresztül menő $\varkappa$ simulósíkokba irt kúpszeleteknek érintőpontjai a q-val.* —

4. *Minden $k^{(3)}$ III. r. térgörbe egy nullarendszert határoz meg, melyben a görbe pontjainak nullasíkjai a pontok simulósíkjai.* A $k^{(3)}$ görbét a nullarendszer *rendigörbéjének* nevezzük.

Ugyanis a $k^{(3)}$ görbe $ABC$ pontjai és e pontoknak $\alpha\beta\gamma$ simulósíkjai egy nullarendszert határoznak meg (16. §., 9. p. elején), melyben az $ABC$ pontoknak nullasíkjai az $\alpha\beta\gamma$ síkok, mert ezek egymást az $ABC \equiv \pi$ síknak egy $P$ pontjában metszik. Ebben a nullarendszerben a $BC, \beta\gamma$; $CA, \gamma\alpha$; $AB, \alpha\beta$ egyenespárok polárispárok, tehát a $k^{(3)}$ görbe tetszésszerinti $D$ pontjának nullasíkja $\delta$, az a sík, mely a $D$ pontból a $BC, \beta\gamma$; $CA, \gamma\alpha$ és az $AB, \alpha\beta$ polárispárokhoz vezetett szelőkön megy keresztül. A $\delta$ sík tehát keresztül megy azokon a pontokon, melyekben a $\beta\gamma, \gamma\alpha, \alpha\beta$ egyenesek a $BCD, CAD, ABD$ síkokat metszik és ezért a $\delta$ simulósíkja a $k^{(3)}$ görbe $D$ pontjának. Az $ABCD, \alpha\beta\gamma\delta$ tetraederek pedig, mint az előbbiekből tudjuk, Möbius-félék.

Ebben a $k^{(3)}$ III. r. térgörbétől meghatározott nullarendszerben a $k^{(3)}$ görbének megfelel ennek simulósíkjaitól képezett $\varkappa^{(3)}$ III. o. síksor; a görbe húrjainak polárisai, annak tengelyei; a görbe érintőinek maguk az érintők, mint komplexussugarak, felelnek meg. Minden $P$ pontnak nullasíkja $\pi$ keresztül megy a $P$ pontból a $k^{(3)}$ görbéhez vezetett három simulósík simulópontján; és minden síknak az lesz a nullapontja, melyben a sík és a $k^{(3)}$ metszőpontjainak simulósíkjai találkoznak. A görbét valós vagy képzetes pontpárokban

metsző húroknak oly tengelyek lesznek a polárisai, melyekből valós, illetve képzetes simulósíkok vezethetők a görbéhez; és ha valamely pontból a görbéhez vezetett húr a görbét képzetes pontpárban metszi, akkor a pont nullasíkjában fekvő tengelyből szintén képzetes simulósíkpár vezethető a görbéhez.

Mindezekből az látszik, hogy a III. r. térgörbe az iránt a nullarendszer iránt, melynek rendigörbéje a III. r. térgörbe úgy viselkedik, mint a kúpszelet a tőle meghatározott polárismező irányában. E vonatkozás egy részről tényleg megegyezőnek mondható, de másrészt annyiban különböző, hogy a polárismező csak *egy* kúpszeletet, mint rendigörbét, határoz meg, melynek pontjai a polárismezőben, a nekik megfelelő egyeneseken (polárisokon) vannak: ellenben a nullarendszernek $\infty^7$ rendigörbéje van, azaz $\infty^7$ számú oly III. r. térgörbe található, melynek pontjaihoz tartozó simulósíkok ugyanegy nullarendszerben ama pontoknak nullasíkjai. Míg tehát a polárismezőnek csak egy rendigörbéje (vezető kúpszelete) van, addig *a nullarendszer $\infty^7$ számú III. r. térgörbét, mint rendigörbét, határoz meg.*

Ezt beláthatjuk a következőkből:

Vegyünk fel egy $N$ nullarendszert és egy $\pi$ síkot. A $\pi$ síkban vegyünk fel három pontot, $A_1A_2A_3$-mat, melynek nullasíkjai az $N$-ben $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$, és vezessünk az $\alpha_1$ síkban az $A_1$ ponton keresztül egy $a_1$ egyenest.

Az $A_1A_2A_3$ ponton keresztül csak egy oly $k^{(3)}$ III. r. térgörbe vezethető, melynek simulósíkjai ama pontokban $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ és mely az $a_1$-et érinti (29. §., 4. p.). A $k^{(3)}$ már rendigörbéje az $N$-nek, mert a görbe $A_1A_2A_3$ pontjainak simulósíkjai, az $N$-ben nullasíkok.

Ha az $a_1$ sugarat az $(A_1, \alpha_1)$ sugársorban változtatjuk $\infty^1$ oly III. r. térgörbét nyerünk, mint a $k^{(3)}$ volt, t. i. mely rendigörbéje az $N$-nek. A $\pi$ síkban azonban $\infty^6$-szor vehetünk fel oly három-három pontot, mint az $A_1A_2A_3$; ezért az $N$ nullarendszernek $\infty^7$ rendigörbéje van.

E számot még úgy is megkapjuk, ha meggondoljuk, hogy a térben $\infty^{12}$ III. r. térgörbe és $\infty^5$ nullarendszer van; minden nullarendszernek tehát $\infty^7$ III. r. görbe a rendigörbéje. A térben pedig azért van $\infty^{12}$ III. r. térgörbe, mert hat ponton általában csak egy III. r. térgörbe fektethető keresztül, és hat pont a térben $\infty^{3\cdot6}$-szor, a görbén pedig $\infty^{1\cdot6}$-szor vehető fel.

## 31. §. A harmadrendű térgörbék osztályozása.

1. A III. r. térgörbéket ép úgy, mint a kúpszeleteket, a végtelen távolban fekvő pontjaik minősége és helyzete szerint osztályozhatjuk.

A végtelen távol fekvő $\varepsilon_\infty$ sík a $k^{(3)}$ III. r. térgörbét három pontban, $E_1$, $E_2$ és $E_3$-ban metszi: ezek közül vagy csak az $E_1$ valós a másik kettő $E_2E_3$ kapcsolt képzetes, vagy mind a három valós. A valós $E_1E_2$ és $E_3$ pontok pedig vagy mind különbözők, vagy kettő egyesül, tehát a görbének egy érintője van végtelen távol, vagy végre mind a három egybeesik, azaz a görbének simulósíkja e pontban a végtelen távol levő $\varepsilon_\infty$ sík.

Ha a $k^{(3)}$ III. r. térgörbének csak egy valós végtelen távoli pontja van, akkor az *köbös ellipsis*; ha pedig a görbe végtelen távol fekvő pontjai mind valósak, akkor az *köbös hyperbola*, *köbös hyperbolikus parabola*, vagy *köbös parabola* a szerint, a mint ama pontok különbözők, vagy kettő egybeeső, vagy mind a három egybeeső. Általában a III. r. térgörbéket *köbös térgörbéknek*, vagy *köbös kúpszeleteknek* is nevezik.

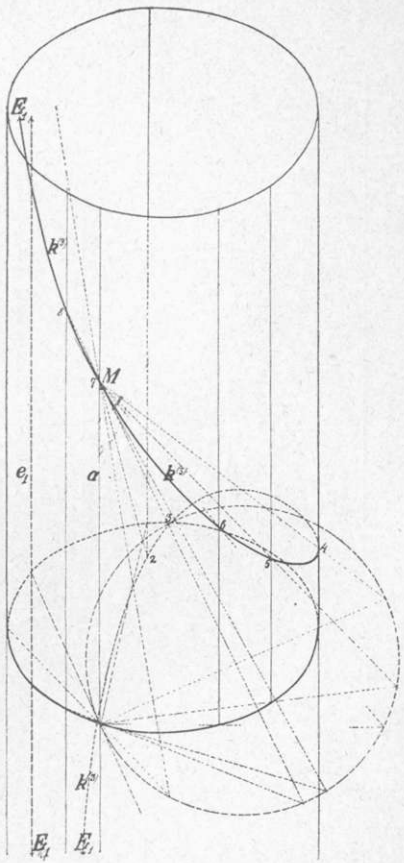
E főosztályozás mellett még alosztályokat is lehet megkülömböztetni. Nevezetesen: a köbös ellipsis egy sík képzetes körpontjain és e síkra merőleges egyenesnek végtelen távol fekvő pontján mehet keresztül. A köbös ellipsist ez esetben *köbös körnek* nevezzük.

Ép így egy köbös hyperbola *egyenoldalú*, ha az egy orthogonalis háromél éleinek végtelen távol fekvő pontjain megy keresztül; végre a köbös hyperbolikus parabola *egyenoldalú*, ha a végtelen távol fekvő egyszerű és kétszeres pontját valamely pontból projicziáló egyenes és sík egymásra merőleges.

A III. r. térgörbék végtelen távol fekvő pontjainak érintőit *asymptótáknak*, simulósíkjait pedig asymptótikus síkoknak nevezzük. A köbös ellipsisnek egy, a köbös hyperbolának pedig három asymptótája és ugyanennyi asymptótikus síkja van; a köbös hyperbolikus parabolának egy asymptótája és két asymptótikus síkja nyúlik a végesbe; végre a köbös parabolának nincs sem asymptótája, sem asymptótikus síkja a végesben.

A III. r. térgörbét annak végtelen távol levő pontjából projicziáló kúp hengerbe megy át. A köbös ellipsisen csak egy II. r. henger fektethető keresztül; ez elliptikus- vagy forgáshenger, mert a hengernek egyik alkotója sem lehet végtelen távol. A köbös parabolán keresztül menő II. r. henger parabolikus, mert végtelen távol levő

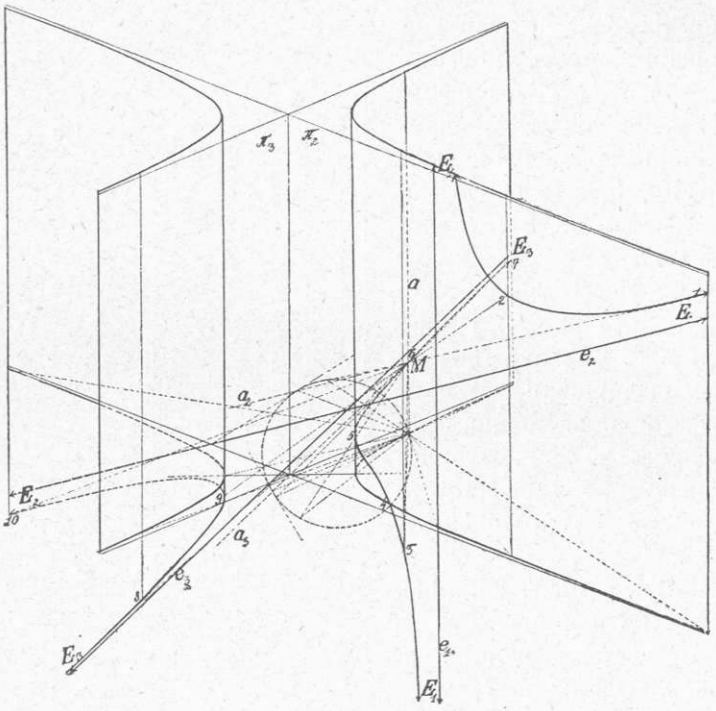
pontjának simulósíkja, mely a henger érintősíkja, végtelen távol van. A köbös hyperbolikus parabolán egy hyperbolikus és egy parabolikus hengert, a köbös hyperbolán pedig három hyperbolikus hengert lehet keresztül fektetni. A köbös hyperbolikus parabolát az $E_1$ egyszerű pontjából és nem a kétszeres $E_2(E_3)$ pontjából projicziáló henger a parabolikus, mert e henger $E_1E_2$ alkotójának érintősíkja végtelen távol van. Ellenben az $E_2(E_3)$ pontból projicziáló henger hyperbolikus, melynek egyik asymptótikus síkja párhuzamos a parabolikus henger fősíkjával és melynek állása $E_1E_2$, a másik asymptótikus síkja pedig az $E_2(E_3)$ kétszerespont simulósíkja. A köbös hyperbolát pl. az $E_1$ pontjából projicziáló hyperbolikus henger asymptótikus síkjai az $E_2$ és $E_3$ pontok érintőin, tehát e pontoknak $e_2$ és $e_3$ asymptótáin mennek keresztül párhuzamosan az $E_1$ pontnak $e_1$ asymptótájával.




64. ábra.

2. Ha a III. r. térgörbét, mint két II. r. kúp metszővonalát akarjuk előállítani, felveszünk két kúpot, $M^{(2)}$ és $M_1^{(2)}$-et, melynek egy közös $a$ alkotója, de ennek mentén két különböző érintősíkja van. Hogy megtudjuk, mily III. r. térgörbék szerint metszik ezek egymást az $a$ alkotón kívül, az $M^{(2)}$ kúpot az $a$ alkotó irányában eltoljuk, míg $M$ csúcsa nem egyesül az $M_1^{(2)}$ kúpnak $M_1$ csúcsával. Az eltolt kúp $N^{(2)}$, az $M_1^{(2)}$-et az $a$ alkotón kívül még három alkotóban, $a_1a_2a_3$-ban, metszi. A szerint, a mint ez alkotók közül csak egyik valós, vagy mind a három valós, de különböző, vagy kettő egybeeső, vagy mind a három egybeeső: az $M^{(2)}$, $M_1^{(2)}$ kúpok egymást az $a$ alkotón kívül még megfelelőleg egy köbös ellipsis, köbös hyperbola, köbös hyperbolikus parabola, vagy köbös parabola szerint metszik.

Ha az $a_1 a_2 a_3$ alkotók közül kettő képzetes, akkor azoknak síkja meghatározható; e síkban fekvő és az $M_1^{(2)}$ kúpra vonatkozó kapcsolt polárissugaraktól képezett involucziónak kettőssugarai a köbös ellipsisnek végtelen távol fekvő képzetes pontjai. Ha pedig ama alkotók közül kettő egybeesik, akkor az $M_1^{(2)}$ kúpnak érintősíkja ez egyesült alkotók mentén, a végtelen távol fekvő síkot a



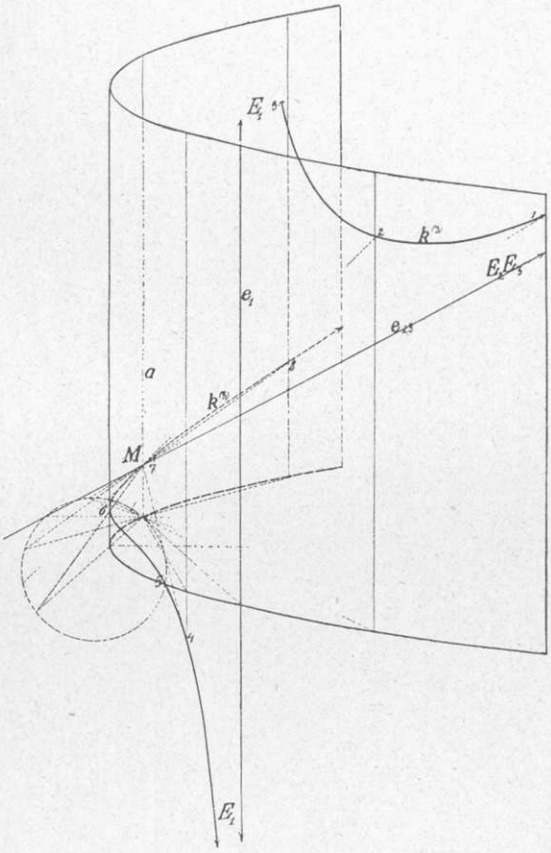

65. ábra.

köbös hyperbolikus parabola végtelen távol fekvő érintőjében metszi. —

A III. r. térgörbe egy II. r. kúpnak és egy II. r. hengernek is lehet metszővonala. Az $M^{(2)}$ II. r. kúp a véle közös $a$ alkotóval biró II. r. hengert, melynek érintősíkja az $a$ alkotó mentén különbözik a kúp érintősíkjától, az $a$ alkotón kívül még köbös ellipsisben (64. ábra), vagy köbös hyperbolában (65. ábra), vagy köbös hyperbolikus parabolában (66. ábra), mely utóbbi még köbös parabolába is átmehet (67. ábra), metszi, a szerint, a mint a henger elliptikus, hyperbolikus vagy parabolikus. A kúp érintősíkja az $a$ alkotó mentén a hengert mind a három esetben még egy $e_1$ alkotóban metszi, mely

asymptótája a görbe és a henger végtelen távol fekvő $E_1$ pontjának. A henger érintősíkja $\varepsilon_1$ az $e_1$ alkotó mentén az $E_1$ pont simulósíkja, tehát az $E_1$ pont asymptótikus síkja.

Ha az *első esetben* a kúp és a henger közös $a$ alkotóján keresztül a henger kapcsolt átmérősíkjaival párhuzamos síkpárokat vezetünk, akkor ezek a kúpot egy alkotóinvolucióban metszik, melynek $a_2a_3$ képzetes kettőssugarai a köbös ellipsisnek $E_2E_3$ végtelen távoli képzetes pontjait projicziálják. — Ezért az alkotó-involuciónak projekcziója annak involuczió-síkjára a kúp tetszésszerinti alkotójából egy oly sugárinvolucció, mely a végtelen távoli síkot egy pontinvolucióban metszi; és ennek az involuciónak kettőspontjai az $E_2$, $E_3$.



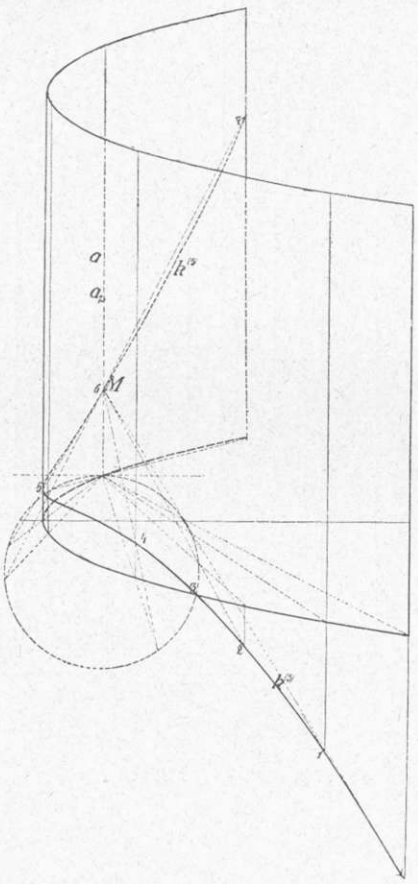

66. ábra.

Ha továbbá a *második esetben* a kúp és a hyperbolikus henger közös $a$ alkotóján keresztül a hengernek $\pi_2$, $\pi_3$ asymptótikus síkjaival párhuzamos síkokat vezetünk, úgy ezeknek a kúppal még $a_2a_3$ közös alkotójuk van, melyeknek $E_2E_3$ végtelen távol levő pontjai a köbös hyperbolán feküsznek. A kúpnak $\alpha_2$, $\alpha_3$ érintősíkjai az $a_2$, $a_3$ alkotók mentén, a $\pi_2$, illetve $\pi_3$ asymptótikus síkokat a köbös hyperbola $E_2$, $E_3$ pontjainak $e_2$, $e_3$ asymptótáiban metszik.

De ha az $a_2$, $a_3$ alkotóknak egyike a közös $a$ alkotóba kerül, tehát a közös $a$ alkotónak a kúphoz tartozó érintősíkja párhuzamos

a henger egyik asymptótikus síkjával, akkor az $E_2$, $E_3$ pontoknak egyike szintén egybeesik az $E_1$-gyel és a köbös hyperbola, köbös hyperbolikus parabolává válik.

A *harmadik esetben* a kúp és a parabolikus henger közös *a* alkotóján keresztül menő és a henger fősíkjával párhuzamos sík a kúpot abban az $a_2$ alkotóban metszi, melynek végtelen távol levő $E_2E_3$ pontja a köbös hyperbolikus parabolának két egybeeső pontja. De ha az $a_2$ alkotó egybeesik az *a*-val, tehát a kúp és a parabolikus henger *a* alkotójának a kúphoz tartozó érintősíkja párhuzamos a henger fősíkjával, akkor a köbös hyperbolikus parabola *köbös parabolába* megy át.




67. ábra.

3. *Ha két orthogonalis kúpnak különböző csúcsa és egy közös alkotóban különböző érintősíkja van és a kúpok egyik cziklikus síkjának állása egyező, akkor azok egymást a közös alkotón kívül még egy $k^{(3)}$ köbös körben metszik.*

Ugyanis ama párhuzamos cziklikus síkokkal párhuzamos $\pi$ síkok a kúpokat körökben metszik, melyek ép úgy, mint a $k^{(3)}$ III. r. térgörbe a cziklikus síkoknak képzetes körpontjain mennek keresztül. E mellett mindegyik orthogonalis kúpnak ama cziklikus síkokra merőleges alkotója van, melyek egymást a $k^{(3)}$-nak végtelen távol levő valós pontjában metszik, amiből már következik, hogy a $k^{(3)}$ köbös kör. — Könnyen belátható még, hogy *a köbös körrel perspektiv II. r. kúpok mind orthogonalisak és a köbös körrel perspektiv II. r. henger forgáshenger.* —

*Az egyenoldalú köbös hyperbolával perspektiv II. r. kúpok mind egyenoldalúak és a hengerek mind egyenoldalúan hyperboli-*

*kusok*, mert pl. e perspektiv kúpok mindegyikébe egy, tehát végtelen sok orthogonalis háromél írható be.

Ezért fordítva mondhatjuk:

*Két egyenoldalú kúp, melynek különböző csúcsa, közös alkotója és ebben különböző érintősíkja van és mely két, párhuzamos élekkel biró orthogonalis háromél körül van írva, egymást még egy egyenoldalú köbös hyperbolában metszi.* —

Az egyenoldalú köbös hyperbolikus parabolát olyannak értelmeztük, melynek az $E_1$ egyszerű végtelen távol fekvő pontja és az $E_2$ kétszeres végtelen távol fekvő pontjának $t_2$ érintője minden pontból, tehát a görbének $M$ pontjából is, egymásra merőleges egyenessel és síkkal projicziáltatik. Ebből következik:

*Ha az* $M(aa_1a_2)$, $M'(aa'_1a'_2)$ *háromeleknek* $a_1a_2$, $a'_1a'_2$ *élei derékszöget képeznek, továbbá az* $a_1a'_1$ *és* $a_2a'_2$ *élei párhuzamosak, akkor e háromélek körül írt II. r. kúpok, melyek az a élben két különböző síkot, az* $a_2$ *és* $a'_2$ *élekben pedig két párhuzamos (tehát az* $a_1$ *és* $a'_1$*-re merőleges) síkot érintenek, egymást az a-n kívül még egy egyenoldalú köbös hyperbolikus parabolában metszik.*

Egyenoldalú köbös hyperbolikus parabolában metszik egymást: egy II. r. kúp és egy parabolikus henger, ha egy közös alkotóban különböző érintősíkjuk van és a henger alkotói a kúpnak egyik érintősíkjára merőlegesek; továbbá egy egyenoldalúan hyperbolikus és egy parabolikus henger, ha amannak egyik asymptótikus síkja ennek alkotóira merőleges.

## 32. §. A harmadrendű térgörbéken keresztül menő hyperboloidok; e térgörbék simulósíkjaiba írt kúpszeletek. A harmadrendű térgörbék átmérői.

1. Minden $k^{(3)}$ III. r. térgörbén általában négy forgáshyperboloid fektethető keresztül, mely vagy mind valós, vagy közülök csak kettő valós a szerint, a mint a $k^{(3)}$ köbös hyperbola vagy más III. r. térgörbe.

Hogy egy ily forgáshyperboloidot megszerkeszthessünk, jelöljük a $k^{(3)}$ térgörbének $M$ pontján keresztül a görbe $E_1E_2E_3$ végtelen távol fekvő pontjaihoz vezetett félsugarakat $a_1a_2a_3$-mal, az $M(a_1a_2a_3)$ háromél körül írható $M_1^{(2)}$ forgáskúpnak tengelyét $t_1$-gyel, végre a $k^{(3)}$-mat az $M$ pontból projicziáló és így szintén az $M(a_1a_2a_3)$ háromél körül írt kúpot $M^{(2)}$-vel.

Az $M^{(2)}$ kúp az $M_1^{(2)}$ forgáskúpot az $a_1a_2a_3$ alkotókon kívül még egy $g$ alkotóban metszi, mely húrja a $k^{(3)}$-nak, és mely a $t_1$ forgástengelyhez ép oly szög alatt hajlik, mint az $M(a_1a_2a_3)$ háromélnek élei.

Ha az $M$ pontot a $k^{(3)}$ görbén változtatjuk, akkor a változó $M(a_1a_2a_3)$ háromélek éleinek és az azok körül írt forgáskúpok $t_1$ tengelyeinek iránya nem változik, és ezért a $k^{(3)}$ görbe minden pontján keresztül vezethető oly $g$ húr, mely a $t_1$ tengelylyel ép oly szöget képez, mint az $M(a_1a_2a_3)$ háromélnek élei. Ha $gg'$ két ily tulajdonságú húrja a $k^{(3)}$-nak, akkor ezeknek az $a_1a_2a_3$ élekkel párhuzamos $h_1h_2h_3$ szelői már a $k^{(3)}$-mal perspektiv sugárseregnek sugarai; és mert a $h_1h_2h_3gg'$ egyenesek a $t_1$ tengelylyel egyenlő szöget képeznek, azért ama sugársereg egy $t_1$ tengelyű forgáshyperboloidon van.

Négy forgáskúp írható egy $M(a_1a_2a_3)$ háromél körül, ha ennek élei valósak és különbözők és az éleket egész sugaraknak veszszük; csak kettő, ha az $a_2a_3$ élek képzetesek, vagy ha valósak és egy $M^{(2)}$ II. r. kúp $a$ alkotójában egyesülnek, és a forgáskúpok az $M^{(2)}$-őt az $a$ alkotóban érintik; végre szintén két forgáskúp írható az $M(a_1a_2a_3)$ háromél körül, ha ennek élei egy $M^{(2)}$ II. r. kúp $a$ alkotójában egyesülnek és a forgáskúpok az $M^{(2)}$-őt az $a$ alkotóban kétszeresen érintik (oscullálják). Ez utóbbi két esetben a forgáskúpok tengelyei az $M^{(2)}$ kúp $a$ alkotójának normalis síkjában vannak és egymásra merőlegesek (8. §. 2., 3., 4. és 5. p.).

Ezért mondhatjuk:

*A köbös hyperbolán négy, a köbös ellipsisen, a köbös hyperbolikus parabolán és a köbös parabolán pedig csak két valós forgáshyperboloid fektethető keresztül.*

Megtörténhetik, hogy a III. r. térgörbén keresztül menő forgáshyperboloidok közül egyik vagy másik forgáskúppá válik. Ehhez csak az kivántatik, hogy a forgáshyperboloidon a görbe húrjait képező sugárseregnek két sugara messe egymást, és pedig szükségkép a görbének egy pontjában. Ugyanis ily két húr azon a forgáskúpon van, mely a húrok $M$ metszőpontjából a görbe $E_1E_2E_3$ végtelen távol fekvő pontjaihoz vezetett $a_1a_2a_3$ sugarakon megy keresztül; és ez a forgáskúp a görbének öt, tehát valamennyi pontját projicziálja az $M$ pontból. E szerint:

Ha a $k^{(3)}$ III. r. térgörbe egy tetszésszerinti $N$ pontjából az $E_1E_2E_3$ végtelen távol fekvő pontjaihoz $a_1a_2a_3$ sugarakat vezetünk, és az $N(a_1a_2a_3)$ háromél körül írható $N_1^{(2)}$, $N_2^{(2)}$, $N_3^{(2)}$, $N_4^{(2)}$ forgáskúpokat metszéshez hozzuk azzal az $N^{(2)}$ kúppal, mely a $k^{(3)}$-mat az

$N$ pontból projicziálja, akkor a negyedik metszésalkotók $g_1$, $g_2$, $g_3$, $g_4$ a $k^{(3)}$-mat az $M_1$, $M_2$, $M_3$, $M_4$ pontokban metszik. Csak ennek a négy pontnak *lehet* az a tulajdonsága, hogy azokból a $k^{(3)}$ forgáskúppal projicziáltatik. Ezért: *Általában a III. r. térgörbén nem lehet forgáskúpot áthelyezni; de lehetséges, hogy a görbén keresztül menő négy vagy két forgáshyperboloid, részben vagy valamennyi forgáskúppá fajul el.*

2. *A III. r. térgörbén* $\infty^1$ *hyperbolikus paraboloid megy keresztül*; a görbe bármely asymptótájával párhuzamos síkrendszer a görbét egy hyperbolikus paraboloidon fekvő húrrendszerben metszi; ép így a görbének bármelyik végtelen távol fekvő húrja vagy érintője és egy végesben fekvő húrja vagy érintője már meghatározza az ezeken és a görbén keresztül menő hyperbolikus paraboloidot. Kérdés, van-e ezek között egyenoldalú?

Legyen az $E_1E_2$ a $k^{(3)}$ III. r. térgörbének végtelen távol fekvő húrja, a $\varphi$ egy azon keresztül menő, tehát az $E_1E_2$ pontok asymptótáival párhuzamos sík. A $k^{(3)}$-nak van egy oly $g$ húrja, mely a $\varphi$-re merőleges egyenesnek végtelen távol fekvő pontján megy keresztül, azaz a $\varphi$ síkra merőleges. A $k^{(3)}$ pontjaiból a $g$ és az $E_1E_2$-hez vezethető szelők már egy egyenoldalú hyperbolikus paraboloidnak egyik sugárseregét képezik, mert a másik sugárseregnek egy $g$ sugarára merőlegesek. Ebből következik, hogy *köbös hyperbolán 3, a köbös hyperbolikus parabolán 2, a köbös parabolán és a köbös ellipsisen pedig csak egy egyenoldalú hyperbolikus paraboloid fektethető keresztül.*

3. Vizsgáljuk ezután meg, hogy milyenek a III. r. térgörbe simulósíkjaiban levő és a simulósíkoktól beburkolt kúpszeletek, melyeket röviden a *simulósíkokba beírt kúpszeleteknek* akarunk nevezni. E kúpszeleteknek pontjai és érintői a III. r. térgörbe érintőinek és simulósíkjainak metszőpontjai, illetve metszővonalai, egy-egy simulósíkkal. A III. r. térgörbének e kúpszeletek mindegyikével van egy közös pontja és egy közös érintője, mely a kúpszelet síkjában, mint a térgörbe simulósíkjában levő simulópont, illetve érintő.

Legegyszerűbb a köbös parabolán megállapítani, hogy milyenek a simulósíkjaiba írt kúpszeletek. Ugyanis a köbös parabola végtelen távol fekvő $\varepsilon_\infty$ simulósíkja a többi simulósíkot a beírt kúpszeletek végtelen távol fekvő érintőiben metszi; az $\varepsilon_\infty$ simulósíkba írt kúpszeletnek pontjai és érintői pedig a köbös parabola érintőinek és simulósíkjainak végtelen távol fekvő pontjai és egyenesei. Ezért:

*A köbös parabola simulósíkjaiba beírt kúpszeletek mindannyian*

*parabolák; és a köbös parabola érintői és simulósíkjai egy II. r. kúp alkotóival és érintősíkjaival párhuzamosak.* —

A köbös ellipsisnek egy $E_1$ valós és két kapcsolt-képzetes pontja, $E_2E_3$, van végtelen távol az $\varepsilon_\infty$ síkban. A köbös ellipsisnek az $\varepsilon_\infty$ síkban levő $q_\infty$ tengelyéből tehát két valós simulósík vezethető a görbéhez, azaz: *a köbös ellipsisnek két párhuzamos simulósíkja van.*

E párhuzamos simulósíkok a köbös ellipsis többi simulósíkját párhuzamos egyenesekben metszik, és mert ezek az egyenesek a simulósíkokba írt kúpszeleteknek érintői, azért e kúpszeleteknek végesben fekvő középpontjuk van, tehát czentrálisok. A párhuzamos simulósíkok simulópontjai a köbös ellipsist egy $c$ véges és egy $c_\infty$ végtelen nagy részre osztják, mely utóbbin van a görbének $E_1$ végtelen távoli pontja. Egy czentrális kúpszelet pedig ellipsis vagy hyperbola a szerint, a mint annak két párhuzamos érintőjétől határolt szalagon belől vagy kívül van egy, tehát valamennyi pontja. Minthogy pedig a III. r. térgörbe pontjai az illető pontok simulósíkjaiba írt kúpszeletekben vannak, következik:

*A köbös ellipsis simulósíkjaiba írt kúpszeletek ellipsisek vagy hyperbolák, a szerint, a mint a simulósíkok simulópontjai a görbe két párhuzamos simulósíkjának simulópontjától határolt véges vagy végtelen hosszú ívén vannak; a két párhuzamos simulósíkba írt kúpszelet mindenike parabola.* —

A köbös hyperbolikus parabolának egy $E_1$ pontja és egy $E_2$ pontjának $t_2$ érintője van végtelen távol. Ez a $t_2$ a görbe minden simulósíkját végtelen távol metszi, tehát a görbe simulósíkjaiba írt kúpszeletek hyperbolák vagy parabolák. De mert a $t_2$ csak az $E_2$ pont $\varepsilon_2$ simulósíkjába írt kúpszeletnek lehet érintője, azért csak az $\varepsilon_2$ asymptótikus síkba írt kúpszelet parabola, a többi pedig mind hyperbola. Azaz:

*A köbös hyperbolikus parabola simulósíkjaiba írt kúpszeletek mind hyperbolák, kivévén azt az egy simulósíkot, mely a kétszeres végtelen távol fekvő pontnak asymptótikus síkja, és a melybe beírt kúpszelet parabola.* —

A köbös hyperbola az $\varepsilon_\infty$ síkot három valós pontban metszi; az $\varepsilon_\infty$ síkban levő $q_\infty$ tengelyből tehát nem vezethetők valós simulósíkok a görbéhez, azaz: *a köbös hyperbolának nincsenek párhuzamos simulósíkjai.* Egyik simulósíkjába sincsen tehát parabola beírva, hanem vagy ellipsis, vagy pedig hyperbola.

A köbös hyperbolának egy tetszésszerinti $\pi$ simulósíkja a $q_\infty$ tengelyt a $Q_\infty$ pontban metszi. Minthogy a $Q_\infty$ pontból a köbös

hyperbolához a $\pi$-n kívül nem vezethető valós simulósík, azért a $\pi$ simulósíkba beírt kúpszelethez a $Q_\infty$ pontból nem vezethető valós érintőpár. E kúpszeletnek ezért hyperbolának kell lenni, mert ellipsishez, síkjának minden egyenesével vezethetünk párhuzamos érintőket. Így tehát:

*A köbös hyperbolának minden simulósíkjába beírt kúpszelete hyperbola.* —

A III. r. térgörbék simulósíkjaiba beírt hyperboláknak egyes végtelen távol fekvő pontja vagy abból származik, hogy a simulópont maga van végtelen távol, tehát a simulósík asymptótikus, vagy a térgörbének egy érintője van végtelen távol, vagy végre a térgörbének ama simulósíkkal párhuzamos érintője van, mely tehát a simulósíkot végtelen távol metszi: Ebből következik, hogy eltekintve az asymptótikus síkoktól: *a köbös hyperbola minden simulósíkja a görbe két érintőjével, a köbös hyperbolikus parabola minden simulósíkja pedig a görbének csak egy érintőjével párhuzamos. A köbös ellipsisnek vannak simulósíkjai, melyek a görbe egy érintőjével sem párhuzamosak és olyanok, melyek a görbe két érintőjével párhuzamosak; az átmenetet a két fajta simulósík között pedig a két párhuzamos simulósík képezi, melylyel a görbének csak egy-egy érintője párhuzamos. Végre a köbös parabolának nincsen olyan simulósíkja, mely annak egy érintőjével párhuzamos volna.*

4. A $k^{(3)}$ III. r. térgörbe simulósíkjaiba beírt kúpszeletek középpontjainak geometriai helyét, a végtelen távol fekvő $\varepsilon_\infty$ síknak e kúpszeletekre vonatkozó pólusai képezik. A 30. §. 3. p. utolsó tétele alapján e geometriai hely egy $c^{(2)}$ kúpszelet, melynek síkja $\gamma$ harmónikusan választja el az $\varepsilon_\infty$-t az ebben fekvő $q_\infty$ tengelyből a görbéhez vezethető $\iota\varkappa$ simulósíkoktól. Maga a $c^{(2)}$ kúpszelet keresztül megy azokon az $E'_1E'_2E'_3$ pontokon, melyek a görbe $E_1E_2E_3$ végtelen távol fekvő pontjai közül kettőt-kettőt a harmadiktól harmónikusan választanak el; érinti annak a háromszögnek oldalait a felezőpontokban, melyekben az $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$ asymptótikus síkok a $\gamma$ síkot metszik; metszi a $q_\infty$ tengelyt a $\iota\varkappa$ simulósíkokba beírt kúpszeleteknek végtelen távol fekvő pontjaiban, végre középpontja, tehát a $q_\infty$ tengelynek arra vonatkozó pólusa, az $E'_1E'_2E'_3$ pontok simulósíkjainak $C$ metszőpontja.

*A $k^{(3)}$ III. r. térgörbe simulósíkjaiba beírt kúpszeletek középpontjai tehát egy $c^{(2)}$ vonalon feküsznek, mely ellipsis, hyperbola, parabola vagy egyenes, a szerint, a mint a $k^{(3)}$ köbös hyperbola, köbös ellipsis, köbös hyperbolikus parabola, vagy köbös parabola. A $c^{(2)}$ síkja $\gamma$, az első esetben, egyenlő távolságra van a köbös ellipsis*

*párhuzamos simulósíkjaitól és $c^{(2)}$ a görbét egy pontban metszi; a második esetben $\gamma$ a köbös hyperbolát abban a $c^{(2)}$-n fekvő három pontban metszi, mely a végtelen távol fekvő pontok közül kettőt-kettőt a harmadiktól harmónikusan választ el; a harmadik esetben a $\gamma$ egybeesik a köbös hyperbolikus parabola kétszeres végtelen távoli pontjának asymptótikus síkjával, és $c^{(2)}$ érinti a végtelen távol fekvő érintőt a görbe pontjában; végre a köbös parabola esetében a $c^{(2)}$ annak végtelen távol fekvő érintője.*

5. Az $\varepsilon_\infty$ végtelen távol fekvő sík pontjaihoz kapcsolt pontok a $k^{(3)}$ III. r. térgörbére vonatkozólag egy $F^{(3)}$ III. r. felületen vannak, mely egyszersmind geometriai helye a $k^{(3)}$-mon keresztül menő hyperboloidok középpontjainak. Ha a $k^{(3)}$ végtelen távol fekvő pontjait $E_1E_2E_3$-mal, ezeknek asymptótáit és asymptótikus síkjait $e_1e_2e_3$ és $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$-mal, az $E_1E_2E_3$ ponthármas társhármasát $E'_1E'_2E'_3$-mal, ezeknek síkját $\gamma$-val, simulósíkjainak metszőpontját $C$-vel, végre az egyes asymptótákkal párhuzamos és a másik két asymptótát metsző egyeneseket $f_1f_2f_3$-mal jelöljük, akkor a 30. §. 2. p. szerint, az $F^{(3)}$ felület keresztül megy az $E_1E_2E_3$ háromszög oldalain, az $e_1e_2e_3$ asymptótákon, a $CE'_1 \equiv d_1$, $CE'_2 \equiv d_2$, $CE'_3 \equiv d_3$ egyeneseken, végre az $f_1f_2f_3$ egyeneseken.

A $d_1d_2d_3$ egyenesek származásuknál fogva a $k^{(3)}$ térgörbe $\varepsilon_1$ illetve $\varepsilon_2\varepsilon_3$ asymptótikus síkkal párhuzamos húrjait, melyek egy-egy hyperbolikus paraboloidon vannak, felezik és ezért a $k^{(3)}$ *átmérőinek* neveztetnek. Az $f_1f_2f_3$ egyenesek szintén felezik a pontjaiból a $k^{(3)}$-hoz vezethető húrokat, melyek két-két asymptótán keresztül menő hyperbolikus paraboloidon vannak, és mint ilyenek a $k^{(3)}$*-nak szintén átmérői.*

Mint általánosan kimutattuk, a $d_1e_1f_1$, $d_2e_2f_2$, $d_3e_3f_3$ egyenesek egy-egy síkban vannak, tehát minden $d$ átmérő egy $f$ átmérőt metsz, és minden ilyen metszőpont, SCHRÖTER*) szerint, a *görbe középpontjának* nevezhető.

Mindezekből az egyes III. r. térgörbékre vonatkozólag következik:

*A köbös hyperbolának három valós átmérője van: $d_1d_2d_3$; ezek az asymptótikus síkokkal párhuzamos húrokat felezik, és az asymptótákat metsző átmérői annak a $c^{(2)}$ kúpszeletnek, mely a görbe simulósíkjaiba beírt kúpszeleteknek középpontjait tartja, és a görbének azon pontjain mennek keresztül, melyek a görbe végtelen távol fekvő pontjai közül kettőt-kettőt a harmadiktól harmónikusan választanak el.*

*) Theorie d. Oberfl. zw. Ord. 340. old.

*Van ezeken kívül a köbös hyperbolának még három valós átmérője $f_1 f_2 f_3$, mely a görbén keresztül menő hyperbolikus hengereknek tengelye; ezek egyenként két-két asymptótát és egy-egy d átmérőt metszenek és a harmadik asymptótával párhuzamosak.*

*A köbös ellipsisnek csak egy valós d és egy valós f átmérője van; az első metszi a görbét és annak asymptótáját és átmérője a $c^{(2)}$ kúpszeletnek; az f átmérő pedig metszi a d-t és tengelye a görbén keresztül menő elliptikus hengernek.*

*A köbös hyperbolikus parabolának három d átmérője közül egyik egybeesik a három f átmérő egyikével, mely a görbén keresztül menő hyperbolikus hengernek tengelye; a többi négy átmérő határozatlanná válik.*

*A köbös parabolának $\infty^1$ átmérője van; ezek a görbe pontjain mennek keresztül, e pontoknak simulósíkjaiban feküsznek és metszik a végtelen távol fekvő érintőt, azaz: párhuzamosak a görbén keresztül menő parabolikus henger fősíkjával.*

A köbös parabolának e tulajdonsága a 30. §. 2. p. végén levő tételből következik, mert az $\varepsilon_\infty$ sík simulósíkja a görbének a végtelen távol fekvő pontjában.

---

# FOGLALAT.

## I. FEJEZET.


Lap

**Az elsőfokozatu alapalakzatoknak projektiv vonatkozása és képződményei** ... 1—16

1. §. *A síksornak projektiv vonatkozása a pont-, sugár- és síksorra* ... 1—7

1. A pont- vagy sugársorral perspektiv helyzetü, projektiv vonatkozású síksor ... 1

2. Két sugársorral, vagy pont- és sugársorral perspektiv síksor 2

3. A síknégyes kettősviszonya; kettőssíkok, hatványsíkok ... 3

4. Involuciós síksorok ... 5

5. Síkpártól harmónikusan elválasztott elemek ... 6

2. §. *Síksorokból kimetszhető különös sugársorok és pontsorok* ... 7—12

1. Projektiv sugár- és síksor perspektiv helyzetbe hozandó ... 7

2. Involuciós sugársoron keresztül különös involuciós síksort vezetni és involuciós síksort különös involuciós sugársor szerint metszeni ... 8

3. Projektiv sík- és pontsorok perspektiv helyzetbe hozandók 10

3. §. *Az alapalakzatok képződményei* ... 12—17

1. Projektiv sorok képződményeiről általában ... 12

2. Két projektiv sugársor képződménye, melynek közös középpontja van. A II. o. síksor ... 13

3. Két projektiv síksor képződménye, melynek tengelyei egymást metszik. A II. r. kúp ... 14

4. Két projektiv pontsornak és két projektiv síksornak képződménye, melynek tartói, illetőleg tengelyei nem metszik egymást. A sugársereg ... 15

5. Az előbbiek összefoglalása. A pontok, sugarak és síkok száma a térben ... 15


## II. FEJEZET.


**A másodrendű kúp** ... 17—81

4. §. *A másodrendű kúp származtatása és poláris tulajdonságai* ... 17—26

1. A II. r. kúp, mint a kúpszeletet egy pontból projicziáló felület ... 17

Lap

2. A II. r. kúpra vonatkozó Pascal- és Brianchon-tételek ... 17
3. A polárisnyaláb fogalma ... 18
4. A II. r. kúp poláris tulajdonságai ... 20
5. A II. r. kúp poláris háromléle ... 21
6. Hesse tétele a polárisnyalábban ; a poláris négyél és négylap fogalma ... 22
7. Reye tételei a poláris négyélről ... 23
8. Két polárisnyaláb közös poláris háromléle ... 24
9. Az orthogonális nyaláb és a reciprókus kúp fogalma ... 25

5. §. *A polárisnyaláb főtengelyei és fősíkjai* ... 26—34

1. A rotatórikus polárisnyaláb ... 26
2. A polárisnyaláb tengelyeinek szerkesztésére vonatkozó segédtételek ... 27

3—5. A polárisnyaláb tengelyeinek meghatározása ... 29—32

6. A II. r. kúp fősíkjaiban levő kapcsolt polárissugarak képezte involuczióknak hatványai. A II. r. kúp egyenlete ... 33

6. §. *A polárisnyaláb fokális sugarai és cziklikus síkjai* ... 34—39

1. A fokális sugár és a cziklikus sík fogalma ... 34
2. A fokális sugarak és cziklikus síkok helyzete. Tétel a II. r. kúp körmetszéseiről ... 36
3. A II. kúp fokális sugaraira és cziklikus síkjaira vonatkozó tételek ... 38
4. A II. r. kúp fokális sugarainak és cziklikus síkjainak szerkesztésére alkalmas képletek ... 41
5. Általános tételek a II. r. kúpról a fokális sugarakra és cziklikus síkokra vonatkozólag ... 42
6. Metrikus reláczió ama szögek között, melyeket a kúp fokális sugarai annak érintősíkjaival képeznek. Ennek duális tétele ... 43
7. A fokális sugaraknak derékszögű projekczióí a kúp érintősíkjaira egy II. r. kúpon vannak. A duális tétel ... 44
8. A II. r. kúpot derékszögű alkotópárokban metsző síkok geometriai helye. A duális tétel ... 46

7. §. *Különös másodrendű kúpok* ... 49—70

1. A II. r. henger; az orthogonális nyaláb és a forgáskúp ... 49

2—3. A parabolikus kúp ... 51—54

4. Az orthogonális kúp ... 54
5. A Pappus-féle kúp ... 57
6. A Hachette-féle kúp ... 59
7. Oly kúpok, melyeknek cziklikus síkjai vagy fokális sugarai merőlegesek ... 60

8—10. Az egyenoldalú kúp és annak reciprokus kúpja ... 61—66

11. Adott kúpszeleten keresztül menő forgáskúpok. Összefoglaló táblázat a különös kúpokról ... 66

8. §. *A másodrendű kúpok szerkesztése* ... 70—81

1. Az általános II. r. kúp szerkesztése pontokból ... 70
2. Egy valós háromél körül irható forgáskúpok ... 72

3—4. Egy képzetes háromél körül irható forgáskúpok ... 74—78

Lap
5. Egy II. r. kúpot érintő és osculáló forgáskúpok ... ... 78
6. A II. r. kúpokra vonatkozó számlálógeometriai meghatározások ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... 79

## III. FEJEZET.

**A hyperboloid** ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... 81—158
9. §. *A hyperboloidon fekvő sugársereget* ... ... ... ... ... ... ... 81— 88
1. A hyperboloidon fekvő sugársereget ... ... ... ... ... 81
2. A hyperboloid érintősikjai és metszőpontjai egy egyenessel 83
3. A hyperboloid síkmetszése és érintőkúpja ... ... ... ... 85
4. A hyperboloidon fekvő involucziós sugársereg; a II. fajú kapcsolt-képzetes egyenesek ... ... ... ... ... ... 86
10. §. *Hyperboloidikus fekvésű egyenesekről* ... ... ... ... ... ... 88—105
1. A tetraeder magasságaira vonatkozó Steiner-tétel ... ... 88
2. Annak duális tétele ... ... ... ... ... ... ... ... ... 89
3—4. Döhlemann tétele hyperboloidikus egyenesekről... ... ... 91—94
5. Chasles tétele hyperboloidikus fekvésű tetraederekről ... 94
6—10. A Möbius-féle tetraederek; a velük kapcsolatos hyperboloidikus egyenesek; a Möbius-féle tetraederek síkmetszései és tengelyeinek transversálisai ... ... ... ... 96—105
11 §. *A hyperboloid poláris tulajdonságai* ... ... ... ... ... ... 105—119
1. A hyperboloid pólusai és polárissíkjai; a térbeli poláris rendszer; a kapcsolt pólusok és polárissíkok ... ... 105
2. A polárispár; a kapcsolt polárisok ... ... ... ... ... 107
3. A polárispárra vonatkozó tételek ... ... ... ... ... ... 109
4. A poláristetraeder ... ... ... ... ... ... ... ... ... 111
5. A poláristetraeder metszése a hyperboloiddal ... ... ... 112
6. Oly tetraederek, melyek közül az egyik a másiknak poláris alakzata. Ezeknek specialitásaira vonatkozó Reye-féle tételek ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... 114
. A hyperboloid polárispárjainak helyzete a térben ... ... 116
12. §. *A hyperboloid fősikjai és tengelyei* ... ... ... ... ... ... ... 119—124
1—2. A hyperboloid asymptótikus kúpja, középpontja, átmérői és átmérősikjai ... ... ... ... ... ... ... ... 119—121
3. A hyperboloid tengelyei, fősikjai és egyenlete ... ... ... 121
13. §. *Különös hyperboloidok* ... ... ... ... ... ... ... ... ... 124—136
1—2. Különös hyperboloidok; az orthogonális hyperboloid ... 124—128
3. Az orthogonális hyperboloidra vonatkozó metrikus relációk ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... 128
4. Orthogonális síksort képező kapcsolt poláris síkpárok az orthogonális hyperboloidra nézve ... ... ... ... ... 129
5. Az egyenoldalu hyperboloid és a rajta levő derékszögű hatoldalak ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... 131
6. A forgáshyperboloid; két egyenesen keresztül menő forgáshyperboloidok tengelyei ... ... ... ... ... ... 133
14 §. *A hyperbolikus paraboloid származtatása, tengelye és fősikjai* 136—149
1—2. A hyperbolikus paraboloid; annak vezetősikjai, tengelye, fősikjai, főmetszései ... ... ... ... ... ... ... ... 136—139

Lap

3. A hyperbolikus paraboloid, mint egyenlően projektiv pontsorok képződménye ... 139
4. A hyperbolikus paraboloidnak parabolikus metszései ... 139
5. A hyperbolikus paraboloidnak hyperbolikus metszései ... 141
6. A hyperbolikus paraboloidnak egyenoldaluan hyperbolikus metszései és e metszősíkokkal párhuzamos érintősíkoktól beburkolt parabolikus kúp ... 142
7. A hyperbolikus paraboloid egyik sugárseregének merőleges sugárpárjai a támasztó sugársereg sugarait involuczióban metszik ... 145
8. A hyperbolikus paraboloid strikczió-vonalai ... 146
9. A hyperbolikus paraboloid egyenlete ... 147
10. A tetraeder élein keresztülmenő hyperboloid a tetraedert felezi ... 148

15. §. *Az egyenoldalu hyperbolikus paraboloid* ... 149—158

1. Az egyenoldalu hyperbolikus paraboloid fogalma, sokasági száma. A hyperboloid és hyperbolikus paraboloid normálisai egy alkotó pontjaiban egy egyenoldalu hyperbolikus paraboloidon vannak ... 149
2. Az egyenoldalu hyperbolikus paraboloidra vonatkozó méretes relácziók ... 150
3. Oly polárispárok, melyektől az egyenoldalu hyperbolikus paraboloid pontjai egyenlő távolságra vannak ... 152
4. E polárisok geometriai helye Plücker-féle Konoida ... 154
5. E polárispárokon keresztülmenő kapcsolt poláris síkok orthogonális sort képeznek ... 157

## IV. FEJEZET.

**A linearis komplexus és a linearis kongruenczia** ... 158—202

16. §. *A nullarendszer és a linearis komplexus* ... 158—172

1. A nullarendszer fogalma és Chasles-féle képzése ... 158
2. A pont síkjainak nullapontjai ... 160
3. A polárispárok. A nullarendszertől meghatározott projektiv vonatkozás ... 160
4. A nullarendszer vezetősugarai; a linearis komplexus fogalma ... 162

5—6. A nullarendszerben előforduló sugárseregek ... 163—165

7. A nullarendszernek Sylvester-féle képzése két projektiv sugársorból ... 165
8. A nullarendszer meghatározása öt vezetősugárból Reye szerint és a Sylvester-féle képzés alapján ... 167

9—11. A nullarendszer meghatározása három pontnak nullasíkjával; Staudt szerint egy térötszögből; Sturm szerint két projektiv sík- vagy pontsorból ... 169—172

17. §. *Méretes vonatkozások a nullarendszerben* ... 172—180

1. A nullarendszer átmérői, átmérősíkjai, főtengelye ... 172
2. A nullarendszer (komplexus) csavarodása ... 174

Lap

3—4. A komplexus parametere és azzal kapcsolatos méretes relációk ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... 175—177
5. Hogyan képzeljük el a linearis komplexust (sugárcsavart) 177
6. A sugárbokor, mint különös komplexus ... ... ... ... 180
18. §. *A linearis kongruenczia és a kéttengelyű involucziò* ... ... ... 180—195
1. Két linearis komplexus metszése a linearis kongruenczia 180
2. A linearis kongruenczia, mint két valós egyenes szelőrendszere ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... 181
3. Oly linearis kongruenczia, melynek sugarai két képzetes egyenes szelői ... ... ... ... ... ... ... ... ... 182
4. A kéttengelyű involucziós rendszer fogalma ... ... ... 185
5. A benne előforduló sugárseregek ... ... ... ... ... 187
6. A kéttengelyű involucziós rendszer meghatározása három megfelelő pontpárból ... ... ... ... ... ... ... ... 189
7. A kéttengelyű involucziós rendszer meghatározása két egyenes párból ... ... ... ... ... ... ... ... ... 190
8. A linearis kongruenczia meghatározása négy sugárból 193
9. Mikor tartozik öt sugár egy linearis kongruencziához 195
19. §. *A linearis komplexussor* ... ... ... ... ... ... ... ... 195—202
1. A linearis komplexussor fogalma ... ... ... ... ... 195
2. A linearis komplexussor projektiv vonatkozása más sorra 196
3. Az egymást támasztó komplexusok a sorban ... ... ... 198
4. A komplexussor komplexusainak tengelyei ... ... ... 199
5. Három és négy linearis komplexus metszése ... ... ... 201

## V. FEJEZET.

**A másodfokozatu alapalakzatok** ... ... ... ... ... ... ... 202—287
20. §. *A másodfokozatu alapalakzatok projektiv vonatkozása* ... ... 202—209
1. A másodfokozatu alapalakzatok és azoknak projektiv vonatkozása ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... 202
2. A kollineacziò megállapítása két megfelelő elsőfokozatu alapalakzatból ... ... ... ... ... ... ... ... 204
3—4. A korrelacziò fogalma és annak megállapítása két elsőfokozatu alapalakzatból ... ... ... ... ... ... ... 206—209
21. §. *Perspektiv helyzetű kollinear mezők és sugárnyalábok* ... ... 209—219
1. A kollinear mezők (nyalábok) perspektiv helyzetben ... 209
2. A konplanar kollinear mezők perspektiv helyzetben ... 210
3. Miképen lehet két kollinear mezőt perspektiv helyzetbe hozni; a kollineacziò karakteristikája ... ... ... ... 211
4. Czentrikusan-involucziós mezők ... ... ... ... ... ... 213
5. Miképen lehet két kollinear sugárnyalábot perspektiv helyzetbe hozni ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... 215
6. Kollinear mező és nyaláb általában nem hozható perspektiv helyzetbe ... ... ... ... ... ... ... ... ... 219
22. §. *Konplanar kollinear mezők kettős elemei. Cziklikus mezők* ... 219—232
1. A kollinear és konplanar mezők kettős elemeinek meghatározása ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... 219

Lap

2. Két kollinear és konplanar mezőből leszármaztatható perspektiv mezők ... 220
3. Két kollinear és konplanar mezővel perspektiv mezők 221
4. Ternär cziklikus kollinear mezők ... 224
5. Quaternär cziklikus kollinear mezők ... 229
6. Mily kollinear vonatkozásokat határoznak meg valamely négyszög szögpontjai, mint egymásnak megfelelő pontok különböző kombinaczióban ... 231

23. §. *A köbös involuczió* ... 232—245
1. A köbös involuczió fogalma; a kúpszeleten fekvő köbös pont- és sugárinvoluczió ... 232
2. A kúpszeleten levő köbös involuczió hármasainak tulajdonságai ... 234
3. Két egymást támasztó sugárseregben levő két társsugárhármasnak tulajdonsága ... 236
4. Két egymást támasztó sugárseregben levő köbös sugárinvolucziónak tulajdonsága ... 239
5. Az előbbi köbös sugárinvolucziótól meghatározott hyperboloid-hármasoknak tulajdonsága ... 240
6. A hyperboloidon fekvő hatszögek, és az ezekből leszármaztatható tétel a Steiner-féle ellenpontokról. Tétel a köbös involuczióval kapcsolatos Pascal-egyenesekről 244

24. §. *A kollineaczió különös esetei és elfajulása* ... 245—264
1. Affin mezők; ezekben a megfelelő területek viszonya állandó ... 245
2. Affin mezőkben az egyenlően projektiv pontsorokat tartó párhuzamos sugársorok. Czentrikusan affin helyzetü mezők ... 247
3. Az ellipsis területének kiszámítása a véle affin kör területéből. A parabola segmentumának területe, és más ezzel kapcsolatos területek ... 250
4. Hasonló mezők; azoknak kettőspontjai és kettősegyenesei 252
5. Két ugyanegyértelmüleg hasonló mezővel czentrikusan affin helyzetü mezők területei ... 255
6. Két, ellenkező értelmű mezővel czentrikusan affin helyzetü mezők területei ... 257
7. Kongruens mezők ... 259
8. Két kollinear mezőből leszármaztatott uj kollinear mező, melynek amazokkal közös kettős eleme van ... 260
9. A kollinear mezők elkorcsosulása ... 262

25. §. *Korrelativ mezők és nyalábok* ... 264—286
1. Korrelativ mezők átmérői, középpontjai, tengelyei ... 264
2. Két korrelativ mező tengelyein fekvő pontsorokhoz projektiv sugársorok ... 265
3. Két korrelativ mező involucziós (poláris) helyzetben ... 266
4. Poláris háromszögek a poláris helyzetü korrelativ mezőkben ... 268
5. Metrikus relacziók két korrelativ mezőről ... 269

Lap

6. Két korrelativ mezőnek involucziósan megfelelő pontjai és egyenesei ... 270
7. Azok a pontok, melyek megfelelő egyenesein vannak és azok az egyenesek, amelyek megfelelő pontjain mennek keresztül, egy-egy kúpszeleten vannak ... 273
8. Az előbbi két kúpszelet elkorcsosulása ... 276
9. Hogyan lehet két korrelativ mezőt oly helyzetbe hozni, hogy az előbbi kúpszeletek elkorcsosuljanak ... 279
10. Korrelativ mezők, melyeknek középpontjai végtelen távol vannak ... 281
11. Korrelativ mezőknek elkorcsosulásai ... 285
12. Korrelativ sugárnyalábok megfelelő orthogonális háromélei 286

VI. FEJEZET.

**Harmadrendű térgörbék** ... 287—339

26. §. *Két kollinear sugárnyaláb képződményei* ... 287—297
1. Különös és általános helyzetű kollinear sugárnyalábok pontképződményei ... 287
2. A III. r. térgörbének metszőpontjai egy síkkal ... 288
3. Két kollinear sugárnyaláb sugárképződménye egy elsőrendü és harmadosztályu kongruenczia ... 289
4. A III. r. térgörbe, mint két II. r. kúp metszővonalának egy része ... 290
5. A III. r. térgörbét projicziáló II. r. kúpok projektivek ... 291
6. A III. r. térgörbén keresztül menő hyperboloid sugársereg einek helyzete a térgörbe irányában ... 292
7. A III. r. térgörbe, mint két hyperboloid metszővonalának egy része ... 294
8. A III. r. térgörbéből és annak húrkongruencziájából származó projektiv alakzatok ... 295

27. §. *A harmadrendű térgörbe helyzete a másodrendű kúp és a hyperboloid irányában* ... 297—301
1. Egy II. r. kúp és egy III. r. térgörbe metszőpontjai ... 297
2. Két III. r. térgörbe ugyanegy II. r. kúpon ... 297
3. A hyperboloid és a III. r. térgörbe metszőpontjai ... 298
4—5. Két III. r. térgörbe ugyanegy hyperboloidon ... 298—302

28. §. *A harmadosztályu síksor* ... 301—309
1. A III. r. térgörbébe irt Pascal-féle hatszög ... 301
2. A III. r. térgörbére vonatkozó Chasles-tétel és Joachimsthal-tétel ... 301
3. A III. r. térgörbe simulósikjai, két kollinear sík mezőnek síkképződménye ... 303
4. A III. r. térgörbe tengelyei; két kollinear sík mező sugárképződménye ... 305
5. A III. r. térgörbe kifejthető felülete ... 307
6. Chasles-nek egy tétele és Staudt-nak egy tétele ... 308

29. §. *A harmadrendű térgörbén fekvő négyzetes és köbös pontinvolucziő* ... 309—320

Lap

1—2. A III. r. térgörbén levő négyzetes involuczió meghatározása 309—311
3. A III. r. térgörbe képződménye egy sugárseregnek és a támasztó sugárseregben levő vele projektiv involucziós sugárseregnek ... ... ... ... ... ... ... ... ... 311
4. A III. r. térgörbe szerkesztése három pontjából, ezeknek simulósíkjából, és e pontok egyikének érintőjéből ... 313
5. A III. r. térgörbén levő köbös pontinvolucziő ... ... ... 316
30. §. *A harmadrendű görbére vonatkozó kapcsolt pontok. A nullarendszer rendigörbéi* ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... 320—328
1. A III. r. térgörbére vonatkozó kapcsolt pontok és kapcsolt síkok. Egy egyenes pontjaihoz kapcsolt pontok 320
2. A sík pontjaihoz kapcsolt pontok a III. r. térgörbére vonatkozólag ... ... ... ... ... ... ... ... ... 322
3. Egy pontnak polárissíkjai a III. r. térgörbével perspektiv kúpokra vonatkozólag. Kapcsolt kúpok ... ... ... 323
4. A III. r. térgörbe által meghatározott nullarendszer ... 326
31. §. *A harmadrendű térgörbék osztályozása* ... ... ... ... ... 328—333
1. A III. r. térgörbék osztályozása a végtelen távol fekvő pontjaik minéműsége szerint ... ... ... ... ... ... 328
2. A különböző III. r. térgörbék, mint II. r. kúpok metszővonalai ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... 329
3. A III. r. térgörbék, mint különös II. r. kúpok metszővonalai 332
32. §. *A harmadrendű térgörbéken keresztül menő hyperboloidok; e térgörbék simulósíkjaiba írt kúpszeletek. A harmadrendű térgörbék átmérői* ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... 333—339
1. A III. r. térgörbén átfektethető forgáshyperboloidok ... 333
2. A III. r. térgörbén átfektethető egyenoldalu hyperbolikus paraboloid ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... 335
3. A III. r. térgörbe simulósíkjaiba beírt kúpszeletek nemei 335
4. E kúpszeletek középpontjainak geometriai helye ... ... 337
5. A III. r. térgörbék átmérői ... ... ... ... ... ... ... 338
**Foglalat** ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... ... 341—348

13.

BOLYAI TUD. EGYETEM
KÖNYVTÁRA II r.
4200/8307-1938
KOLOZSVÁR

M. 413

KOLOZSVÁRI BOLYA
TUDOMÁNYEGYETEM
MATEMATIKAI INTÉZET
KÖNYVTÁRA

Szakl. sz.: 413