IV

Erőtan.

Előadta:

Dr Farkas Gyula
e. ny. r. tanár

1913–14. tanév II. felében.

Azokat a szabaderőket fogjuk tanulmányozni ezekben az előadásokban, amelyek ismeretéhez közvetlen megfigyelés, kisérletezés alapján jutott el a fizika tudománya, illetőleg híveb-ben szólva, ezeknek az erőknek egyszerű határfogalmait fogjuk tanulmányozni, amelyek nem födik teljesen a valóságot a kiszabandó föltételek alatt sem, de annyira megközelítik, hogy e föltételek alatt a közönséges alkalmazásokban eléggé megfelelnek.

Előzményül főbb mérőeszközeikkel fogunk foglalkozni, mint kisérleti segédeszközökkel, majd a Newton-féle potenciállal, mint matematikai segédeszközzel.

Egyfonalú torziómérleg.

1. Ha földhöz rögzitett tengelyrendszerünkben a torziómérleg lengője csak forgó mozgást végez a fonál, vagy drót körül, akkor – mint a mekanikából tudjuk már – mozgásának az egyenlete

$$J\ddot{\Theta} = \Phi + F$$

ahol az J a lengő inerciamomentuma, Θ a torzió szöge, Φ a torzióból származó skaláris forgató momentum, F a szabaderők forgatómomentuma, mindannyi a forgástengely körül. J konstans és a forgató momentumok ugyanazon tengelyirány körül számítandók, mint a Θ elfordulási szög. Φ arányos Θ-val, arányos pedig negatív együttható szerint, ami azt jelenti, hogy a Φ mindig ellenkező értelemben törekszik fordítani a lengőt, mint amely értelemben a fonál vagy drót elcsavarodott s így a torzió a Θ szög nagyságát mindig kisebbíteni törekszik. A nehézségi szabaderő hatásainak forgató momentuma vertikális tengely körül zérus lévén, az F mindig két olyan forgató momentum F_1 és F_2 összege gyanánt tekinthető, amelyek egyike F_1 a környezettel való érintkezésből származik, a másika F_2 pedig ezen érintkezéstől független, s éppen a vizsgálandó szabaderők forgató momentuma, ami a mérés tárgyát képezi. Amig a $\dot{\Theta}$ szögsebesség igen kicsiny, addig F_1 vele arányosnak számíthat éspedig negatív együttható szerint, ami azt jelenti, hogy F_1 mindig ellenkező értelemben törekszik fordítani a lengőt, mint amely értelemben forgásban van az és így F_1 a szögsebesség nagyságát mindig csökkenteni törekszik. Az F_2 mérendő forgató momentum rendszerint olyan, hogy az idővel csupán a Θ szög által változik és így függ ezen szögtől, hogy a hatása alatt egy bizonyos Θ_0 torziószögön, (amelyet $\Phi + \mathfrak{F}_2 = 0$ határoz meg), nyugalomban lehet a lengő. Ezt most majd mindig föltegyük. Továbbá $\mathfrak{F}_2$ rendszerint egyenletesen deriválható függvénye Θ-nak s az ilyen $\mathfrak{F}_2$-re szorítkozunk, minélfogva addig, amig a $\Theta-\Theta_0$ szög igen kicsiny, tárgyalásunkban az $\mathfrak{F}_2$ lineáris egész függvénye nagy megközelités szerint Θ-nak, mert ilyenkor nagy megközelités szerint

$$\mathfrak{F}_2(\Theta) = \mathfrak{F}_2(\Theta_0) + \frac{d\,\mathfrak{F}_2(\Theta_0)}{d\,\Theta_0}(\Theta - \Theta_0)$$

tehető. Mindig elég kicsinynek fogjuk pedig gondolni a $\Theta-\Theta_0$ szöget arra, hogy ezt kielégitő pontossággal tehessük. Ehhez képest azt irjuk, hogy:

$$\mathfrak{F}_2 = \mathfrak{F}_0 - f\,\Theta$$

ahol most az $\mathfrak{F}_0$ és f konstansok s ezek a mérendő mennyiségek. Az $\mathfrak{F}_2$-nek $\mathfrak{F}_0$ része a maga előjele szerint folyvást pozitiv vagy folyvást negativ értelemben ható forgató momentum. Az $\mathfrak{F}_2$-nek $-f\Theta$ része pozitiv f esetén a torzió szögét kisebbiteni, negativ f esetén nagyobbitani törekszik abszolut érték szerint.

Minden emlitett föltételünk teljesültével igy van mozgás egyenletünk:

$$(1) \qquad J\ddot{\Theta} + 2\varkappa\dot{\Theta} + (\mathfrak{L} + f)\Theta = \mathfrak{F}_0$$

ahol $(-\mathfrak{L})$ a torzió forgató momentumának, $(-2\varkappa)$ a környezettel való érintkezés forgató momentumának az együtthatója.

Nyugalomban:

(2) $(\mathcal{D} + f)\Theta_0 = \mathcal{F}_0$

Beirva innen $\mathcal{F}_0$ kifejezését az előbbi egyenletbe:

$$J\ddot{\Theta} + 2\varkappa\dot{\Theta} + (\mathcal{D} + f)(\Theta - \Theta_0) = 0$$

Ha pedig a torzió szöge helyett a nyugalmi helyzetből való elfordulás szögét

(3) $\Theta - \Theta_0 = \omega$

vezetjük be, akkor az

(4) $J\ddot{\omega} + 2\varkappa\dot{\omega} + (\mathcal{D} + f)\omega = 0$

homogén lineáris differenciálegyenlethez jutunk konstans együtthatókkal. Igaz, némileg a készülék valamennyi együtthatója (J, $\varkappa$, $\mathcal{D}$) változik az idővel a legszorgosabb ügyelés mellett is, főkép a hőmérséklet változása miatt. De egy mérés tartamában kellő gondosság mellett állandóknak tekinthetők.

2. Most oldjuk meg ezt az egyenletet. Nyilvánvaló, hogy t-nek egy ekszponenciális függvényével:

$$\omega = e^{\rho t}$$

függvénnyel meg lehet oldani. Vagyis van olyan ρ konstans, amely szerint ez a függvény kielégíti egyenletünket. Valóban beirva ω helyett az egyenletbe, azt kapjuk, hogy:

$$\left[J\varrho^2 + 2\varkappa\varrho + (\mathcal{L} + f)\right] e^{\varrho t} = 0$$

Tehát megfelel a ϱ, ha olyan, hogy:

$$J\rho^2 + 2\varkappa\rho + \mathcal{L} + f = 0$$

Ilyen ρ pedig kettő van:

$$\left.\begin{matrix}\rho_1\\ \rho_2\end{matrix}\right\} = -\frac{\varkappa}{J} \pm \sqrt{\frac{\varkappa^2}{J^2} - \frac{\mathcal{L}+f}{J}}$$

Használjuk ezt a jelölésmódot:

$$(5) \qquad \frac{\varkappa}{J} \equiv p \; ; \; \sqrt{\frac{\mathcal{L}+f}{J} - \frac{\varkappa^2}{J^2}} \equiv q$$

akkor, mint (4) megoldásai adódnak:

$$e^{(-p+iq)t} \quad \text{és} \quad e^{(-p-iq)t} \qquad (i = \sqrt{-1})$$

Az általános megoldás tehát:

$$\omega = \left(A e^{iqt} + B e^{-iqt}\right) e^{-pt}$$

ahol A és B az integráció határozatlanai.

Abban a föltevésünkben, hogy van nyugalmi helyzet, kezdjük el nyugalmi helyzetből számítani az időt. Ha úgy tetszik, mindig könnyen áttérhetünk más kezdeti időre, amely e kezdeti idő elé, vagy utána esik. E végből csak a

$$t - t_0 \quad \text{vagy} \quad t + t_0$$

írandó t helyett, midőn is t_0 jelenti azt az időt, amellyel előbb, vagy utóbb akarjuk kezdeni időszámításunkat. Nyugalmi helyzetből kezdve az időszámításunkat: amikor $t=0$, akkor $\Theta = \Theta_0$, azaz $\omega = 0$, tehát ω mostani kifejezéséből:

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} = 0$$

Irjuk, hogy: $$\mathcal{A} = \frac{\omega_0}{2i},$$

akkor $$\mathcal{B} = -\frac{\omega_0}{2i}$$

és következőleg:

$$(6) \qquad \omega = \omega_0 \, e^{-pt} \sin qt$$

Abban az esetben, hogy

$$\lambda + f > \frac{\varkappa^2}{J^2}$$

reális a q, tehát ω_0 is reális. A szögsebesség ez:

$$(7) \qquad \dot{\omega} = \omega_0 \, e^{-pt} (q \cos qt - p \sin qt)$$

Itt majd mindig föltesszük, hogy a q reális. Ebben az esetben alkalmas mérésekre az eszközünk, mert ebben az esetben van „lengő mozgással" dolgunk, mint majd meglátjuk.

A (7)-ből az kezdeti időre vonatkoztatásával megkapjuk ω_0 jelentményét is, nevezetesen a kezdeti szögsebesség és a q hányadosa gyanánt:

$$\omega_0 = \frac{\dot{\omega}_0}{q}$$

Akkép válasszuk pedig meg a forgástengely irányát, hogy a kezdeti mozgás jobbra forduló legyen és úgy a kezdeti szögsebesség $\dot{\omega}_0$ pozitiv legyen. Ekkor ω_0 is pozitiv.

3. Az ω-nak vannak szélsőértékei, éspedig végtelen sok, természetesen időrend szerint felváltva maximumok és minimumok; mégpedig amazok mindig pozitivok, emezek mindig negativok. Valóban (7) szerint t-nek oly t' értékeinél, amelyek szerint

$$(8) \qquad \operatorname{tang} q t' = \frac{q}{p},$$

az ω első deriváltja eltünik. Azonban, amint (4)-ből közvetlenül látható, ω második deriváltja a t' mellett:

$$\ddot{\omega}_{t'} = -\frac{\lambda + f}{J}\,\omega_{t'} \quad (\text{mert } \dot{\omega}_{t'} = 0)$$

vagyis (6)-ból folyólag:

$$(9) \qquad \ddot{\omega}_{t'} = -\frac{\lambda + f}{J}\,\omega_0\, e^{-pt'} \sin q t'$$

De $\sin q t'$ nem zérus, mint (8)-ból látható, mert (5) elárulja, hogy p nem végtelen és abban a föltevésünkben, hogy:

$$\lambda + f > \frac{\varkappa^2}{J} \quad a \quad q \neq 0$$

-ából folyólag $\ddot{\omega}_{t'}$ nem zérus és következőleg $\omega_{t'}$ szélső érték.

Jelölje pedig $\mathcal{T}'$ azt a legkisebb pozitív értéket, amely (8)-nak elegettesz. Akkor a t' értékek rendre ezek:

$$(10)_1 \qquad \mathcal{T}',\ \mathcal{T}'+\frac{\pi}{q},\ \mathcal{T}'+\frac{2\pi}{q},\ \mathcal{T}'+\frac{3\pi}{q},\ \dots$$

és mivel (8)-ból folyólag $q\,\mathcal{T}'$ kisebb mint π fele:

$$(10)_2 \qquad \mathcal{T}' < \frac{\pi}{2q}$$

Mindezen időpontokban szélső értéket vesz fel az ω. Mivel pedig a_0 pozitív, úgy $\ddot{\omega}$ ez időpontokban rendre negatív, pozitív, negatív, pozitív s i.t., mint (9) mutatja 's az egymásután következő szélső ω értékek felváltva pozitívok és negatívok mint (6) mutatja. A szélső ω értékek nagyságai tehát – amelyeket amplitudóknak nevezünk – mindig maximumok. Mint látjuk, mindig ugyanakkora:

$$(11) \qquad \mathcal{T} \equiv \frac{\pi}{q}$$

idő múlva következnek egymásután ezek a szélső értékek.

4. Vegyük észre ω kifejezésén (6), hogy a lengő a maga ($\omega=0$) nyugalmi helyzetében is egyenlő időközök múlva fordúl meg, éspedig ezek az időközök is $\mathcal{T}$-vel egyenlők. Minthogy a szélső helyzetek

véges mekkoraságú időközök multán követik egymást, u. n. lengőmozgást végez a lengő. Ezt a T időt lengésidőnek nevezzük.

5. Az amplitudók időrendjük szerint egyre kisebbek és kisebbek, mégpedig egyszerű geometriai haladvány szerint, melynek arányszáma e^{-pT}. Jelölje ugyanis rendre:

$$\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3,\ \dots$$

az amplitudókat, úgy, hogy:

$$\omega_1 = |\omega_{T'}|,\quad \omega_2 = |\omega_{T+T'}|,\ \omega_3 = |\omega_{2T+T'}|;\dots$$

akkor:

$$\omega_1 = \omega_0\, e^{-pT'} \cdot \sin qT'$$
$$\omega_2 = \omega_0\, e^{-p(T+T')} \cdot \sin qT'$$
$$\omega_3 = \omega_0\, e^{-p(2T+T')} \cdot \sin qT$$

. . . . . .

Ezekből folyólag:

$$(12)\qquad \omega_2 = e^{-pT} \cdot \omega_1;\ \omega_3 = e^{-2pT} \cdot \omega_1;\ \omega_4 = e^{-3pT} \cdot \omega_1;\dots$$

Az $\omega_n : \omega_{n+1}$ hányados naturális logaritmusát, u. m. a pT kitevőt logaritmusi dekrementumnak nevezzük.

Tegyük még azt az észrevételt, hogy a nyugalmi helyzet bárhányadik elérése után ugyanakkora T idő mulva következik a szélső helyzet. Ugyanis a nyilakkal időtartamot jelölve:

$$(0 \rightarrow \omega_1) + (\omega_1 \rightarrow \omega_2) \equiv (0 \rightarrow \omega_1 \rightarrow 0) + (0 \rightarrow \omega_2),$$

de

$$(\omega_1 \rightarrow \omega_2) = (0 \rightarrow \omega_1 \rightarrow 0) = \frac{\pi}{q}$$

tehát

$$(0 \rightarrow \omega_1) = (0 \rightarrow \omega_2) \text{ s.i.t.}$$

6. Lássuk már most, hogy a mérendő forgató momentum $(F_0 - f\Theta)$ kifejezésében az f és F_0 konstánsok miképp határozhatók meg.

Ha a mérleg konstánsai, u. m. $J, \varkappa, L$ ismeretesek, akkor (5) és (11) alapján f a lengési időnek T-nek megfigyeléséből kiadódik. (2) alapján pedig most már F_0 a Θ_0 nyugalmi szög megfigyeléséből adódik ki. Azonban T megfigyelésére nem alkalmasak a szélső helyzetek, mert ezek közelében, számottevő ideig tartózkodik a lengő t. i. annálfogva, hogy a közelükben a szögsebesség igen kicsiny, már pedig annak a fölismerése, hogy mikor van pontosan a szélső helyzetben a lengő, nem biztos. Ámde nyugalmi helyzetében is $T = \dfrac{\pi}{q}$ időközönként fordul meg a lengő s ez a helyzet már alkalmas a T megfigyelésére, mert a közelében elfoglalt helyzetek időpontjai kicsit különböznek az ő saját időpontjától.

Ami pedig a Θ_0 nyugalmi szög meghatározását illeti, arra általában nem alkalmas a nyugalom bevárása, részint azért, mert megközelítőleges nyugalom bevárása is sok időbe kerülhet, részint azért, mert teljes nyugalom nem is jő létre. Jól meghatározható Θ_0 azonban (12) alapján a szélső helyzetek megfigyeléséből. Pl. számbavesszük, hogy

$$(12)' \qquad \omega_{n-1} \cdot \omega_{n+1} = \omega_n^2$$

Mivel a fölső vagy alsó előjel szerint

$$\omega_{n-1} = \pm(\Theta_{n-1} - \Theta_0), \quad \omega_n = \mp(\Theta_n - \Theta_0), \quad \omega_{n+1} = \pm(\Theta_{n+1} - \Theta_0),$$

úgy

$$(\Theta_{n-1} - \Theta_0)(\Theta_{n+1} - \Theta_0) = (\Theta_n - \Theta_0)^2$$

tehát

$$(13) \qquad \Theta_0 = \frac{\Theta_{n-1}\Theta_{n+1} - \Theta_n^2}{\Theta_{n-1} - 2\Theta_n + \Theta_{n+1}}$$

amely kifejezés három egymásután következő Θ-ból határozza meg a nyugalmi szöget. Arra az esetre, hogy p oly kicsiny, hogy valamely h egész szám mellett e^{-hpT} hatványsorából elég a h első tagot tartani meg, fejezzük ki ily megközelítéssel az

$$\omega_{n+1} = e^{-pT}\omega_n, \quad \omega_{n+2} = e^{-2pT}\omega_n, \ldots, \omega_{n+h+1} = e^{-(1+h)pT}\cdot\omega_n$$

amplitudókat, azután rendre $\binom{h}{0}$, $-\binom{h}{1}$, $\binom{h}{2}$, $-\binom{h}{3}$, stb.-vel szorozva összeadjuk, midőn is a jobboldalon zérust kapunk. Minthogy rendre a fölső vagy alsó előjel szerint

$$\omega_{n+1} = \pm(\Theta_{n+1} - \Theta_0), \quad \omega_{n+2} = \mp(\Theta_{n+2} - \Theta_0)$$
$$\omega_{n+3} = \pm(\Theta_{n+3} - \Theta_0), \quad \omega_{n+4} = \mp(\Theta_{n+4} - \Theta_0) \text{ s i t.},$$

azt kapjuk a helyettesítések és Θ_0 kiszámitása után, hogy

$$(13)' \qquad \Theta_0 = \left(\tfrac{1}{2}\right)^h \sum_{i=0}^{i=h} \binom{h}{i} \Theta_{n+i+1}$$

Ha a mérendő $(\mathfrak{F}_0 - f\Theta)$ forgató momentumnak csak arra az értékére van szükségünk, amellyel a nyugalmi-helyzetben bír, azaz $\mathfrak{F}_0 - f\Theta_0$ értékére, akkor (2) alatti egyenletünket így írjuk fel:

$$\mathfrak{F}_0 - f\Theta_0 = \lambda\,\Theta_0$$

Mostani célunkra tehát csak a Θ_0 határozandó meg, ha már λ ösmeretes.

7. Föltettük, hogy a mérleg konstánsai J, κ, λ ismeretesek. Ezek azonban előbb külön meghatározandók. Lássunk a meghatározásukra vezető valamely eljárásokat. Ilyenek a következők:

A λ torziós együttható meghatározása végett a lengőt oly testtel cseréljük fel, amelynek az inerciamomentumóit a forgás tengelyére nézve ismerjük és amely csak a torzió és a környezettel való érintkezés forgató hatását viseli, úgy hogy most

$$\mathfrak{F}_0 = 0, \quad f = 0$$

Ennek a lengőnek a mozgásán meghatározzuk az ő nyugalmi helyzetét, azután ennek a segítségével megfigyeljük annak a lengésidejét a már előadott módon, és azonkivül meghatározzuk logaritmusi dekrementumát azáltal, hogy megfigyeljük mozgásának két amplitudóját pl. az ω_n és ω_{n+h} amplitudókat. Az (5) és (11)-ből folyólag

$$\frac{L}{J} - \frac{k^2}{J^2} = \frac{\pi^2}{\tau^2} \tag{14}$$

Ennek a baloldala a τ megfigyeléséből ismeretes. Ebben a L ugyanaz, mint eredeti lengőnk esetében, legalább ugyanaz, ha a helyébe tett testnek a környezetben mért súlya az övétől nem különbözik.

Továbbá (12)-ből:

$$\log \omega_n - \log \omega_{n+h} = h\, p\, \tau$$

s így (5) első kifejezése szerint

$$\frac{\varkappa}{J} = \frac{\log \omega_n - \log \omega_{n+h}}{h\, \tau} \tag{15}$$

tehát az új lengőhöz tartozó $\frac{\varkappa}{J}$ kiszámitható. – Beírva $\frac{\varkappa}{J}$ ezen értékét (14)-be, megkapjuk ebből a L együttható értékét, amely ugyanaz, mint eredeti lengőnk esetében, tehát L már eredeti lengőnkhöz is ismeretes.

Most T és $\varkappa$ meghatározása végett visszatérve eredeti lengőnkhöz, tegyük föl, hogy ez az $F_2 = F_0 - f(\Theta)$ forgató momentum hatása alól felsza–

badítható. Akkor felszabadítva ezen hatás alól, ugyanazt az eljárást követjük, mint az imént, csakhogy most $\mathcal{J}$, $\varkappa$, $\mathcal{L}$ három konstáns sorában nem $\mathcal{J}$, hanem $\mathcal{L}$ az ismeretes. Ámde (14) és (15)-ből $\mathcal{J}$ és $\varkappa$ kiszámítható, mert $\mathcal{L}$ és a többi menynyiségek ismeretesek egyenletünkben.

Ha lengőnket nem szabadíthatnók fel az $\mathcal{F}_2$ forgató hatás alól, akkor más eljárást kell követnünk. Pl. egy harmadik lengőhöz fordulunk, amelynek alakja, simasága, nagysága s a környezetben mért súlya egyezik a mienkével, amely azonban csak a torziónak és a környezeti érintkezésnek a forgató hatását viselje. Ehhez (14)- és (15)-ből $\mathcal{J}$ eliminálásával a már ismeretes $\mathcal{L}$ alapján meghatározzuk a $\varkappa$ értékét, amely ehhez ugyanaz, mint eredeti lengőnkhöz. Most eredeti lengőnkhöz térve, (15) alapján eljutunk annak $\mathcal{J}$ inerciamomentumához is.

Azonban $\mathcal{J}$ ilyetén meghatározása igen kicsiny $\varkappa$ esetén számottevő hibával járhat. Ezen esetben eredeti lengőnket megterheljük oly testtel, amelynek az inerciamomentumát ösmerjük a testszálra nézve és amelynek a jelenléte számottevően nem változtatja meg a $\mathcal{L}$, f, $\varkappa$ értékeket. Ha most $\mathcal{T}_0$ a lengési idő, és $\mathcal{J}+\mathcal{J}_0$ az inerciamomentum ($\mathcal{J}_0$ a tekeré), akkor

$$\frac{\lambda+f}{J+J_0}-\frac{\varkappa^2}{(J+J_0)^2}=\frac{\pi^2}{T_0^2}$$

Ebből és az eredeti

$$\frac{\lambda+f}{J}-\frac{\varkappa^2}{J^2}=\frac{\pi^2}{T^2}$$

egyenletből $\lambda+f$ eliminálásával eljutunk J értékéhez, mi mellett jelenleg számot nem tevő hibával $\varkappa^2$ helyett zérus tehető.

Esetről esetre egyáltalán más eljárások követése célszerű.

Mindig föltettük, hogy

$$\lambda+f>\frac{\varkappa^2}{J^2}$$

és azért jutottunk szélső ω illetőleg szélső Θ értékek közt váltakozó mozgáshoz, szóval lengéshez, melyet csillapodó lengésnek nevezünk amiatt, hogy amplitudói egyre kisebbek, mikor jár-il, hogy ugyanazokban a helyzetekben úgy a pozitiv, mint a negativ szögsebességek is egyre kisebbek, amiről (6) és (7) alapján a kétféle (pozitiv és negativ) szögsebesség megkülönböztetésével könnyű meggyőződést szerezni, kérdezvén, hogy ha t_1 és t_2 időpontban az ω helyzetben van a lengő és mindkét időpontban pozitiv, vagy mindkettőben negativ a szögsebesség és $t_1 < t_2$, akkor az $\dot{\omega}$ abszolut értéke melyik időpontban kisebb, tekintettel t. i. arra, hogy ω értéke mindkét időpontban ugyanaz

8. Jegyezzük még meg, hogy a torzió szögének a meghatározása végett tudnunk kell, hogy a lengő mely helyzetében nincs torziója a fonálnak vagy drótnak. Ezt a helyzetet külön előre meg kell határoznunk. Ha a lengőt felszabadíthatjuk az F_2 forgató momentum hatása alól, akkor felszabadítván e hatás alól, meghatározzuk a nyugalmi helyzetét, t.i. abban nincs torziója a testszálnak. E helyzet meghatározása végett pedig egyelőre tetszésszerint választott helyzetből számítsunk szögeket. Jelölje ezeket Ψ és jelölje az ösmeretlen nyugalmi Ψ szöget Ψ_0 a most föltételezett $F_2 = 0$ esetben. Akkor a torzió szöge

$$\Psi - \Psi_0 = \Theta$$

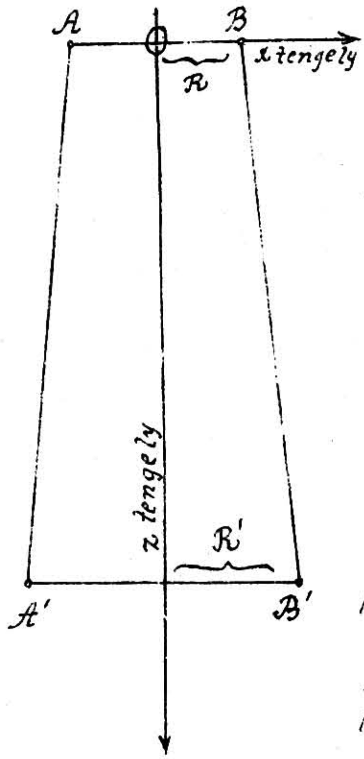
és egyben (3)-ból $= \omega$, mert most $\Theta_0 = 0$. Három egymásután következő szélső értékből (13) módjára következik:

$$(13)' \qquad \Psi_0 = \frac{\Psi_{n-1}\Psi_{n+1} - \Psi_n^2}{\Psi_{n-1} - 2\Psi_n + \Psi_{n+1}}$$

Ezen a szögön nincs torziója a testszálnak. A hozzá tartozó helyzetből számítandók tehát a Θ szögek. Ha lengőnket nem szabadíthatnók fel az F_2 forgató momentum hatása alól, akkor más eljárást kell követnünk. Pl. kicseréljük más lengővel, amely csak a torziónak és a környezeti érintkezésnek a hatását viselje és ennek a segélyével állapítjuk meg, hogy mely helyzetben nincs torziója a testszálnak.

Kétfonalú torziómérleg.

1.) Két nyújthatatlan, de hajlítható és passziv fonálon csüng a levegőben egy test a földhöz rögzitett állványról, amelyhez a fonalak egy horizontális egyenes vonal két pontjában erősitvék A és B helyen. Most is



lengőnek nevezzük a felfüggesztett testet. Föltesszük, hogy tömegéhez képest a fonalak tömege nem tesz számot. A fonaluk egyenlő hosszúak és midőn feszült állapotban olyan a helyzetük, hogy van közös sikjuk, akkor végpontjaik egy trapezion csúcsai. Jelölje A' és B' a lengőhöz erősitett végeket. Az imént mondott helyzetben A, B, A', B' egy trapezion. Gondoljuk most ezt a trapeziont függőlegesnek és gondoljunk $\overline{A.B}$ felező pontján át egy lefelé mutató vertikális tengelyt (T)-t. Az eszköz alkalmazásaiban a lengő mozgása ebből a sik helyzetből a fonalak feszült állapota mellett az (T) szimmetria-tengely körül forgó mozgásból és ezzel szükségképen együttjáró fel- vagy leszállásból áll a földhöz rögzitett koordinóta rendszerben.

2, A mozgás meghatározása végett forduljunk az energia-tételhez, amely a földhöz rögzített tengelyrendszerben nyilván alkalmazható az eszközre.

$$(16) \qquad \frac{1}{2}\frac{d}{dt} S\, \dot{s}^2 \mathfrak{D}m = S(\dot{x}\,\mathfrak{D}X + \dot{y}\,\mathfrak{D}Y + \dot{z}\,\mathfrak{D}Z)$$

Az x tengelyt AB-be, a z tengelyt a forgás T tengelyébe helyezzük úgy, hogy amaz AB irányú legyen, emez vertikálisan lefelé mutasson. A trapezion helyzetből való elfordulás szögét Θ jelölje, mely pozitiv, vagy negativ az elfordulás értelme szerint. A Θ a lengő minden helyzetét meghatározza annak feltételezett mozgásában. Mégpedig egy elemi rész két első koordinátája mint Θ függvénye így van:

$$(17) \qquad \begin{cases} x = r\cos(\varepsilon + \Theta) \\ y = r\sin(\varepsilon + \Theta) \end{cases}$$

ahol r és ε függetlenek az időtől, nevezetesen r az (x, y, z) pont távola az T forgástengelytől és az ε az elemi rész T tengelyű vektorának és az A'B' iránynak a szöge, de pozitivnak vagy negativnak számitva aszerint, hogy pozitiv vagy negativ forditással származtatható-e az A'B' irányból. Különösen pedig, ha a lengő B' pontjának a koordinátái: x', y', z' a t pillanatban és távola a forgás tengelyétől R', akkor a (17) erre a pontra vonatkoztatva:

$$(18) \qquad x' = R'\cos\Theta \quad , \quad y' = R'\sin\Theta$$

Egy elemi rész harmadik koordinátáját illetőleg mindenekelőtt vegyük észre, hogy

$$(19) \qquad z = z' + \text{const.}$$

mert a z csak szálló mozgás következtében változván, minden z egy módon változik, mind úgy, mint z'. A z' meghatározására pedig az szolgál, hogyha a fonalak hossza $\mathcal{L}$ és az AB távolság fele $\mathcal{R}$, úgy:

$$\mathcal{L}^2 = (x' - \mathcal{R})^2 + y'^2 + z'^2$$

mert $\mathcal{L}$ az $(\mathcal{R}, 0, 0)$, és az (x', y', z') pont távola. Innen (18) szerint z' számára:

$$(20) \qquad z'^2 = \mathcal{L}^2 - (\mathcal{R}^2 + \mathcal{R}'^2) + 2\mathcal{R}\mathcal{R}'\cos\Theta$$

következik, ahol $\mathcal{L}, \mathcal{R}, \mathcal{R}'$ függetlenek az időtől.

A (17), (19) és (20) deriválásával előálló kifejezésekből rögtön látható az is, hogy:

$$\dot{x} = -y\dot{\Theta}, \quad \dot{y} = x\dot{\Theta}, \quad \dot{z} = -\frac{\mathcal{R}\mathcal{R}'}{z'}\sin\Theta\,\dot{\Theta}$$

Minthogy (16)-ban:

$$\dot{s}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2,$$

ennélfogva (16) csekély rendezéssel ezt az alakot ölti:

$$(21) \qquad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\mathcal{J} + \mathcal{M}\frac{\mathcal{R}^2\mathcal{R}'^2}{z'^2}\sin^2\Theta\right)\dot{\Theta}^2 =$$

$$= \left[S(x\mathcal{D}Y - y\mathcal{D}X) - \frac{\mathcal{R}\mathcal{R}'}{z'}\sin\Theta\, S\mathcal{D}Z\right]\dot{\Theta}$$

ahol J a lengő inerciamomentuma a forgás tengelye körül és M a lengő tömege.

3) Egyenletünk jobboldalán a zárójel tartalmának első tagja a szabaderők z tengelyű forgató hatása $= W$; a második tag integráltényezője pedig a szabaderők vertikális toló hatása $= C$. A W fordgató hatás két olyan forgató hatásnak az összege gyanánt tekinthető, amelyek egyike a környezet ellenállásából származik és igen kis szögsebesség esetén ezzel negativ konstáns együttható $-2\varkappa$ szerint arányos: $= -2\varkappa\dot{\Theta}$. A másika pedig a mérendő forgató momentum és rendszerint olyan, hogy a hatása alatt bizonyos Θ_0 szögön nyugalomban lehet a lengő és igen kis $\Theta - \Theta_0$ szögökön a Θ lineáris egész függvénye $= F_0 - f\Theta$, ahol F_0 és f állandó. A C tolóhatás közönségesen két olyan tolóhatás összege gyanánt tekinthető, amelyek egyike a környezet ellenállásából származik és a vertikális sebesség számot nem tévő csekélysége miatt a másika mellől elhanyagolható, amely utóbbi a nehézségi erőtől származik és $= (M - M')g$, ahol M' a lengő helyéből kiszorult környezet tömege, ha tehát a lengőnek a levegőben mért súlya P, úgy ez a tolóhatás $= P$. Mindezeket a föltételeket valóban teljesülőkül fogadjuk el. Mégpedig mind a $\Theta - \Theta_0 = \omega$ szöget, mind a $\dot{\Theta} = \dot{\omega}$ szögsebességet fizikai végtelen kicsinyeknek tételezzük fel, úgy, hogy ha azt írjuk, hogy:

$$(22) \qquad L^2 - (R^2 + R'^2) + 2RR'\cos\Theta_0 \equiv L_0^2 ,$$

$$(23)\qquad \mathfrak{J} + \mathcal{M}\,\frac{\mathcal{R}^2\mathcal{R}'^2}{\mathcal{L}_0^2}\sin^2\Theta_0 \equiv \mathfrak{J}_0$$

akkor

$$\mathfrak{J}_0\ddot{\omega} + 2\varkappa\dot{\omega} + \left(\frac{\mathcal{R}\mathcal{R}'}{\mathcal{L}_0}\mathcal{P}\cos\Theta_0 + f\right)\omega = \mathcal{F}_0 - f\Theta_0 - \frac{\mathcal{R}\mathcal{R}'}{\mathcal{L}_0}\mathcal{P}\sin\Theta_0$$

Minthogy pedig nyugalomban $\omega = 0$, ennélfogva:

$$(24)_1\qquad \mathcal{F}_0 = f\Theta_0 + \frac{\mathcal{R}\mathcal{R}'}{\mathcal{L}_0}\mathcal{P}\sin\Theta_0$$

és következőleg

$$(24)_2\qquad \mathfrak{J}_0\ddot{\omega} + 2\varkappa\dot{\omega} + \left(\frac{\mathcal{R}\mathcal{R}'}{\mathcal{L}_0}\mathcal{P}\cos\Theta_0 + f\right)\omega = 0$$

Olyan differenciálegyenlet ez, mint az egyfonalú torzió-mérleg (4) alatti egyenlete, amelytől csak abban különbözik, hogy benne az $\mathfrak{J}_0$ konstans és az f-hez adandó konstans:

$$\frac{\mathcal{R}\mathcal{R}'}{\mathcal{L}_0}\mathcal{P}\cos\Theta_0$$

mást jelent, mint (4)-ben és függ a Θ_0 nyugalmi szögtől, mégpedig $\mathcal{L}_0$ által is. Az $\mathcal{F}_0$ meghatározására pedig most (2) helyett a $(24)_1$ egyenletünk van.

4, Ha a fonalakat csak a trapezionhelyzetben lehetne passzívnak tekinteni, akkor az f konstanshoz még egy konstanst kellene adni, a fonalak torziójából és ridegségéből származót. Ilymódon lehet egyszerűen számontartani a fonalak aktivitását, de csak akkorigy, ha a trapezionhelyzetben passzívok azok. A mérés módjai ezzel az eszközzel olyszerűek, mint az egyfonalú torziómérleggel, de némi módositást kivánnak amiatt, hogy az előforduló konstansok függenek a Θ_0 nyugalmi szögtől. Azonban közönségesen oly kicsiny az R és R', hogy (22)-ben és (23)-ban a Θ_0 tartalmú tagok mellőzhetők.

Legyen itt megjegyezve, hogy a lengés csillapitására nem mindig egyedül a környezettel való érintkezés szolgál, hanem némely eszközökben indukált elektromos áramlás is, ámde akkor is érvényesek differenciálegyenleteink, csak $\varkappa$ jelent bennük más konstanst.

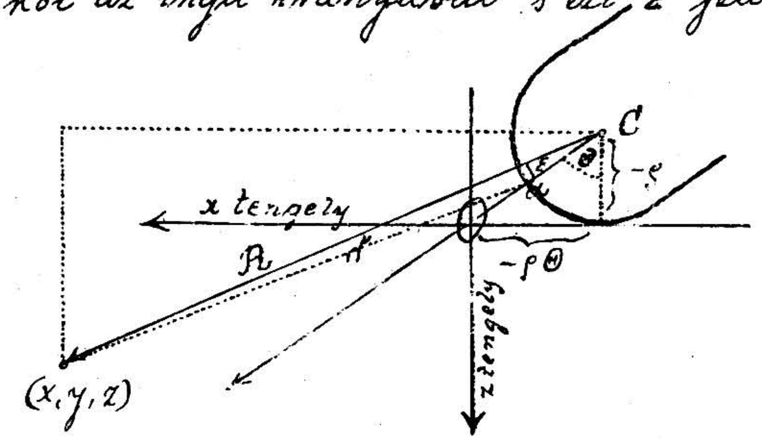
Az inga mint mérőeszköz.

1) A legközönségesebb elrendezésben egy inga a földhöz rögzitett tengely körül forgó mozgást végez. Ha azonban biztossággal akarunk mérni, akkor prizmatikus felfüggesztést alkalmazunk. Itt most mindig a földhöz rögzitett sik alapzaton gondoljuk ezt a felfüggesztést. Erre a tárgyalás pontossága végett figyelembeveendő, hogy a prizmának soha sincs igazi éle. Csak igen kis sugarú hengeres görbülése van, s a prizmának az inga nyugalmi helyzetéhez tartozó érintkezési vonalát nevezzük a prizma élének. Föltesszük a prizmáról, hogy élének a közelében rotációs hengernek tekinthető. Az ingát pedig mindig igen kis szög alatt lengetjük

úgy a prizma mindig oly vonalban érintkezik az alapzattal, amely a rotációs henger alkotója. A prizmának és az alapzatnak az anyagát olyannak föltételezzük, hogy az inga mozgását tiszta gördülő mozgásnak tekinthessük. Ez sem oly egyszerű mozgás, mint a közönséges ingáé. Ezen mozgásban is van mindig oly pontsora az ingának, amelynek az állványhoz viszonyított sebessége zérus, de az ingának változó pontsora ez, ugyanis mindenkor a prizma azon pontjainak a sebessége zérus, amelyek éppen az alapzattal érintkeznek. Pillanatnyi forgástengelyt képeznek ezek, amely úgy koordinátarendszerünkben, mint a testben folyvást változtatja a helyét. Azonban ez esetben is egy parametrum határozza meg az inga mindenkori helyzetét földhöz rögzített koordinátarendszerünkben. Ilyen az inga egy materiális vektorának a vertikálissal képezett szöge.

2. Erősítsük koordinátarendszerünket az alapzathoz, éspedig úgy, hogy az x és y tengely az alapzaton legyen és mikor az inga nyugalomban van, az y tengely a prizmának az alapzattal érintkező vonalában, a prizma „élében" feküdjék. A z tengely vertikálisan lefelé mutasson.

Az élen a görbülési tengelyből merőlegesen áthaladó irányt az inga irányának nevezzük. Mint majd kitűnik, az élnek és a görbülési tengelynek a síkja szükségképen nem tartalmazza az inga tömegcentrumát. Húzzuk meg az inga (x, y, z) pontjának a görbülési tengelyből való vektorát. Ennek a nagysága R legyen; az iránya konstans szöget alkot az inga irányával s ezt ε jelölje, amelyet pozitívnak vagy negatívnak számítunk aszerint, amint az ingairány felől pozitív vagy negatív elfordulással származtatható. Az



ingairány pedig Θ szög alatt fordult légyen el a nyugalmi helyzete felől, amely szög pozitív vagy negatív az elfordulás értelme szerint. — Egy elemi rész koordinátái a Θ szög által kifejezve

$$(25) \qquad x = R\sin(\varepsilon+\Theta) - \rho\Theta; \; y = \text{const}; \; z = R\cos(\varepsilon+\Theta) - \rho$$

ha ρ jelöli a görbülés sugarát.

Ezekből a sebességi komponensek

$$(25)' \quad \begin{cases} \dot{x} = [R\cos(\varepsilon+\Theta) - \rho]\,\dot{\Theta} = z\,\dot{\Theta} \\ \dot{y} = 0 \\ \dot{z} = -R\sin(\varepsilon+\Theta)\,\dot{\Theta} = -(x+\rho\Theta)\,\dot{\Theta} \end{cases}$$

A Θ meghatározása végett az energiaegyenlethez forduljunk, amely nyilvánképen érvényes itt:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} S(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)\,\mathfrak{D}m = S(\dot{x}\,\mathfrak{D}X + \dot{y}\,\mathfrak{D}Y + \dot{z}\,\mathfrak{D}Z)$$

Azonban (25)' szerint

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = [R^2 - 2R\rho\cos(\varepsilon + \Theta) + \rho^2]\dot{\Theta}^2$$

Ezt majd deriválni is kell, de feltegyük, hogy Θ és $\dot{\Theta}$ folyvást oly kicsinyek, hogy kihagyhatjuk a zárójelből a Θ-t. Ezt megtéve a $\dot{\Theta}^2$ szorzója nem más, mint az (x, y, z) pont s a prizmaél távolának a négyzete. Ha tehát ezt a konstáns távolságot r jelöli, akkor

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = r^2\dot{\Theta}^2$$

$$\frac{1}{2} S(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)\mathfrak{D}m = \frac{1}{2}\dot{\Theta}^2 S r^2 \mathfrak{D}m$$

Itt $S r^2 \mathfrak{D}m$ az ingának az élre tartozó inerciamomentuma. – Jelölje J ezt a konstáns inerciamomentumot. Akkor energiaegyenletünk baloldala kielégítő megközelitésben:

$$(26) \qquad J\dot{\Theta}\ddot{\Theta}$$

A jobboldala (25)' értelmében ez:

$$(27) \qquad \dot{\Theta} S [x\mathfrak{D}Y - (x + \rho\Theta)\mathfrak{D}Z]$$

Itt $\dot{\Theta}$ szorzója a szabaderők forgató momentuma a pillanatnyi tengely körül, vagyis a pillanatnyi érintkezési vonal körül, mert ezen vonal egyik irányának az iránykoszinuszai 0, 1, 0 és egy pontjának, nevezetesen az x tengelyen levőnek a koordinátái $-\rho\Theta, 0, 0$. – Ez a forgató momentum három részben fogható fel egyszerü módon abban a föltevésben, hogy a környezeti érintkezésből származó erökön kivül még csak a nehézségi szabaderö hat az ingára számottevöen. Mégpedig egy része az egész forgató momentumnak a környezeti ellenállásból származik és ez a Θ szögsebességgel arányosnak számithat állandó negativ $-2\varkappa$ arányossági együttható szerint, úgy, hogy $= -2\varkappa\dot{\Theta}$. – Más része a

$$\mathfrak{D}X = 0, \ \mathfrak{D}Y = 0, \ \mathfrak{D}Z = g\,\mathfrak{D}m$$

nehézségi szabaderötöl származik. $\mathcal{E}_z =$

$$-g\,S(x+\rho\Theta)\,\mathfrak{D}m = -\,mg(\xi+\rho\Theta)$$

ha m az inga tömege és ξ az ö tömegcentrumának első koordinátája. Az inga tömegcentrumának a görbülési tengelytől való távolságát jelölje R_0 és ezen tömegcentrumnak a görbülési tengelyből való vektora, meg az inga iránya közt foglalt szöget jelölje ε_0. Akkor (25) értelmében:

$$\xi = R_0 \sin(\varepsilon_0+\Theta) - \rho\,\Theta$$

tehát a forgató momentum második része:

$$-\,m R_0 g \sin(\varepsilon_0+\Theta)$$

A harmadik része az Archimedesi felhajtásból származik és olyan, mintha az inga térfogatát a környezet is kitöltené, de erre a nehézségi erő nem lefelé, hanem fölfelé hatna. Következőleg m', R', ε'-nek megfelelő jelentménye mellett ez a része a forgató momentumnak $= m'R'g\sin(\varepsilon'+\Theta)$

Mindezek rendén a (27) részletesen írva így van:

$$-\dot{\Theta}\left[2\varkappa\dot{\Theta} + mR_0\,g\sin(\varepsilon_0+\Theta) - m'R'g\sin(\varepsilon'+\Theta)\right]$$

Egyenlőnek írva ezt az energiaegyenlet (26) alatt talált baloldalával, azután az egyenletet $\dot{\Theta}$-tal átosztva, azt kapjuk, hogy:

$$\mathfrak{J}\ddot{\Theta} + 2\varkappa\dot{\Theta} + mR_0\,g\sin(\varepsilon_0+\Theta) - m'R'g\sin(\varepsilon'+\Theta) = 0$$

Nyugalomban $\Theta = 0$, mert épen a nyugalmi helyzetből számítjuk a Θ szöget; ennélfogva

$$(28)\qquad mR_0\sin\varepsilon_0 - m'R'\sin\varepsilon' = 0$$

és következőleg abban a föltevésben, hogy Θ mindig igen kicsiny, magasabbrendű kicsinyek mellőzésével:

$$(29)\qquad \mathfrak{J}\ddot{\Theta} + 2\varkappa\dot{\Theta} + (mR_0\cos\varepsilon_0 - m'R'\cos\varepsilon')\,g\Theta = 0$$

Közönségesen $\varepsilon' = \varepsilon_0$ és $mR_0 > m'R'$, tehát (28)-ból folyólag

$$(30)\qquad \varepsilon_0 = 0\ ,\quad \varepsilon' = 0$$

mihez képest:

$$(31)\qquad \mathfrak{J}\ddot{\Theta} + 2\varkappa\dot{\Theta} + (mR_0 - m'R')\,g\Theta = 0,\ (mR_0 > m'R')$$

Mindig oly kicsiny Θ és $\dot{\Theta}$ értékekre szorítkozzunk, ame-lyek mellett elhanyagolásaink megengedhetők, to-vábbá mindig föltételezzük (30)-t. Eszerint (31) ér-vényesnek számítható és minden együtthatója pozitív. Ne feledjük, hogy J a prizmaélre szóló inerciamo-mentum, azonban R_0 és R' a görbülési tengelyből szá-mított távolságok. Olyan egyenlet ez, mint (4) alatt az egyfonalú torziómérleg egyenlete azzal, hogy itt ε és ω összeesik és hogy a $(\Lambda + f)$ konstans helyett $(mR_0 - m'R')\,g$ konstans áll.

3. Azzal a föltevésünkkel, hogy a környe-zeti érintkezésből származó erőkön kívül csak a nehézségi szabaderő hatása tesz számot: ingánk kiválóan alkalmas a nehézségi gyorsulás megha-tározására. Lássunk egy meghatározási módot.

Jelenleg (5) és (11) mintája szerint a követ-kező kifejezésünk van $\mathcal{T}$ lengésidő számára:

$$\mathcal{T} = \pi : \sqrt{\frac{mR_0 - m'R'}{J}\,g - \frac{\varkappa^2}{J^2}}$$

Ha ugyan lengő mozgást végez az inga, aminek föl-tétele, hogy a gyökjel alatt pozitív legyen a kifejezés. De gondunk van rá, hogy ez a föltétel teljesüljön, sőt hogy $\varkappa^2 : J^2$ igen kicsiny legyen az előtte álló taghoz képest úgy, hogy jó megközelítéssel

$$(32) \qquad \mathcal{T} = \pi \sqrt{\frac{J}{(mR_0 - m'R')\,g}}$$

tehető. Azonban másfelől Bessel nyomán korrekcióul figyelembe vesszük, hogy az ingával a környezet egy része együtt leng és ezt is az ingához kell számítanunk, mihez képest most már az összes előforduló mennyiségeket az ily módon értett ingára vonatkozókul gondoljuk.

Oly matematikai inga lengésideje a T, amelynek a hossza

$$(33) \qquad L = \frac{J}{mR_0 - m'R'}$$

Ezt ingánk redukált hosszának nevezzük. Ha ezt ismernők, akkor a lengésidő megfigyelésével a (32)-ből eljutnánk g ösmeretéhez. Csakhogy az L kifejezésében foglalt mennyiségeket nem tudjuk megmérni, mert az inga látható testéhez számitandó környezetnek a határát nem ismerjük. Azonban ezt a mérést fölöslegessé is teszi az u.n. reverziós inga alkalmazása. Két prizmóval fölszerelt inga ez, amelyen a prizmák úgy vannak elhelyezve, hogy éleik párhuzamosak és közös sikjukban közöttük van az ingának a tömegcentruma, a lengésidő pedig mindkettőjükön ugyanakkora. Emellett az inga látható teste a két élre nézve kielégitő megközelitéssel egyező alakú úgy, hogy bármelyik élén helyezzük az ingát az állványra, ugyanazt a tért foglalja el az és ennélfogva az ingához tartozó környezet is egyező alakúnak föltételezhető a két élre nézve.

A két él mindegyikén ugyanaz lévén a lengésidő, ugyanaz rajtuk a redukált hossz is. Ha tehát $\mathfrak{I}$, R_0, R' értéke az egyik élen $\mathfrak{I}_1$, R_1, R_1', a másikon $\mathfrak{I}_2$, R_2, R_2', akkor:

$$\mathcal{L} = \frac{\mathfrak{I}_1}{mR_1 - m'R_1'} = \frac{\mathfrak{I}_2}{mR_2 - m'R_2'}$$

A prizmák görbülési sugarait ρ_1, ρ_2, éleinek a teljes inga tömegcentrumától való távolait r_1, r_2, és éleiknek a teljes inga helyébe tartozó környezet tömegcentrumától való távolait r_1', r_2' jelölje. A két utóbbi az inga föltételezett alakja miatt egyenlőnek számíthat. E jelölések szerint:

$$R_1 = r_1 + \rho_1 \quad , \quad R_2 = r_2 + \rho_2 \ ,$$
$$R_1' = r_1' + \rho_1 \quad , \quad R_2' = r_2' + \rho_2 \ ,$$
$$r_2' = r_1'$$

Ha továbbá a teljes ingának a tömegcentrumán áthaladó és az élekkel párhuzamos tengely körül a teljes inga inerciamomentuma $\mathfrak{I}_0$, akkor (mint hogy m a teljes tömeg):

$$\mathfrak{I}_1 = \mathfrak{I}_0 + mr_1^2 \ , \quad \mathfrak{I}_2 = \mathfrak{I}_0 + mr_2^2$$

Ezek segélyével a redukált hossz kétféle kifejezé-

-sén, amelyeket most így írunk föl:

$$(mR_1 - m'R_1')\mathcal{L} = \mathfrak{I}_1 \text{ és } (mR_2 - m'R_2')\mathcal{L} = \mathfrak{I}_2$$

egyiküknek a másikukból való kivonása által, a redukált hossz következő kifejezése származtatható:

$$\mathcal{L} = \frac{r_1 + r_2}{1 + n}$$

ahol

$$n = \frac{m - m'}{m} \frac{\rho_2 - \rho_1}{r_2 - r_1}$$

Az n mérése is akadályokba ütközik. Azonban a két prizma felcserélhető. Felcserélésük után más a redukált hossz, és pedig

$$\mathcal{L}^* = \frac{r_1 + r_2}{1 - n}$$

Az $\mathcal{L}$ és $\mathcal{L}^*$ kifejezéséből eliminálván az n számot,

$$\frac{1}{\mathcal{L}} + \frac{1}{\mathcal{L}^*} = \frac{2}{r_1 + r_2}$$

egyenlethez jutunk. Ámde $\mathcal{T}$ és $\mathcal{T}^*$ jelölvén a két redukált hossznak megfelelő lengésidőt,

$$\mathcal{T} = \pi\sqrt{\frac{\mathcal{L}}{g}}, \quad \mathcal{T}^* = \pi\sqrt{\frac{\mathcal{L}^*}{g}},$$

minek rendén előbbi egyenletünkből

$$g = \frac{\pi^2}{2}\left(\frac{1}{\mathcal{T}^2} + \frac{1}{\mathcal{T}^{*2}}\right)(r_1 + r_2)$$

Itt $(r_1 + r_2)$ a két él egymástól való távola. Ennek és a kétféle lengésidőnek a meghatározásával egyenletünk eljuttat q ösmeretéhez.

Tömegmérleg.

1, Három prizma úgy van a rúdhoz erősitve, hogy éleik párhuzamosak és van közös síkjuk; emellett mindegyik prizma élén azt az ő pontsorát értjük, amely a normális helyzetben az ő érintkezésének a vonala. Normális helyzeten pedig az üres mérleg nyugalmi helyzetét értjük a mérleg állványához és egyszersmind a földhöz rögzitett koordinátarendszerben. E koordinátarendszert úgy helyezzük el, hogy a normális helyzetben a középső prizmaélen legyen az y tengely s a z tengely vertikálisan lefelé mutasson. A már megterhelt mérleg rúdja t pillanatig Θ szög alatt gördült légyen el a normális helyzetből. A csészerendszerek pedig (a két csésze a maga szárával és terhével) Θ' illetőleg Θ'' szög alatt gördültek légyen el; tehát teljesen

$$\Theta_1 = \Theta + \Theta' \quad \text{illetőleg} \quad \Theta_2 = \Theta + \Theta''$$

szög alatt fordúltak légyen el a t pillanatig a normális helyzetből. Föltesszük, hogy csupán a három gördülő mozgás teszi a mérleg mozgását. A szögeket pozitivnak vagy negativnak számitjuk aszerint, amint az y tengely irányára nézve pozitiv vagy negativ elfordulásból származnak. A szélső prizmák élei L_1 illetőleg L_2 távolban legyenek a középső prizma élétől. Továbbá az egyik csészerendszer egy pontjának távolsága a csészerendszer azon pontsorától, amely a normális helyzetben a csészerendszert tartó prizma élén van, r_1 legyen és a megfelelő jelentménye legyen r_2-nek a másik csészerendszerben. A rúd egy pontjának a középső prizmaéltől mért távolságát pedig r_0 jelölje. Végül a normális helyzetben az r_1, r_2, r_0 távolsági vonalak a vertikálissal $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_0$ szöget zárjanak ugyanazon értelemben pozitivokat vagy negativokat, amelyben Θ_1, Θ_2, Θ előjele számít. Egyszerű geometriai szemlélődésből folyólag a mozgás tartamában egyik és másik csészerendszer egy pontjának a koordinátái, ha az egyes számú csészerendszer van az (yz) sík pozitiv oldalán és úgy a 2-es számú az (yz) sík negativ oldalán van:

$$(35)\quad \begin{cases} x_1 = r_1 \sin(\varepsilon_1 + \Theta_1) + L_1 \cos\Theta + f_1(\Theta, \Theta_1) \\ y_1 = \text{const.} \\ z_1 = r_1 \cos(\varepsilon_1 + \Theta_1) - L_1 \sin\Theta + h_1(\Theta, \Theta_1) \end{cases}$$

$$(36)\quad \begin{cases} x_2 = r_2 \sin(\varepsilon_2 + \Theta_2) - L_2 \cos\Theta + f_2(\Theta, \Theta_2) \\ y_2 = \text{const} \\ z_2 = r_2 \cos(\varepsilon_2 + \Theta_2) + L_2 \sin\Theta + h_2(\Theta, \Theta_2) \end{cases}$$

a rúd egy pontjának a koordinátái pedig:

$$(37)\quad \begin{cases} x_0 = r_0 \sin(\varepsilon+\Theta) + f_0(\Theta) \\ y_0 = \text{const.} \\ z_0 = r_0 \cos(\varepsilon+\Theta) + h_0(\Theta) \end{cases}$$

amely kifejezésekben az r-ek és ε-ok függetlenek az ia-tól s

$$f_1 = \rho_1\{\Theta_1\cos\Theta_1 - \sin\Theta_1 + (1-\cos\Theta_1)\Theta\} + (\rho_0+\rho_1)(\sin\Theta -$$

$$h_1 = \rho_1\{1-\cos\Theta_1 - \Theta_1\sin\Theta_1 + \Theta\sin\Theta_1\} + (\rho_0+\rho_1)(\cos\Theta - 1)$$

és f_2-ben és h_2-ben az (1) index helyett (2) index, f_0-ben és h_0-ban a ρ_1 helyett zérus fordul elő; miher odaértendő, hogy a középső prizma siklapon gördül s hogy a szélső prizmákon sík lapok gördülnek elég közelítéssel és hogy ρ_0 a középső prizma, ρ_1 és ρ_2 a két szélső prizma görbülési sugara és ezek konstansok. Mindhárom Θ szöget folyvást igen kicsinynek tételezzük fel s ekkor az f és h függvények másodrendű igen kicsinyek, amelyek kicsiségét az a körülmény is fokozza, hogy a prizmák kis görbülési sugarainak homogén egész függvényeik. Mindazonáltal elsőrendű igen kicsiket juttatnak a mozgás meghatározásába.

2, A virtuális munka törvényében, u. m.

$$S\{(\ddot{x}\mathfrak{D}m - \mathfrak{D}X)\delta x + (\ddot{y}\mathfrak{D}m - \mathfrak{D}Y)\delta y + (\ddot{z}\mathfrak{D}m - \mathfrak{D}Z)\delta z\} \geqq 0$$

jelenleg a baloldalt három részre osztjuk fel, t. i. a két csészerendszert és a rudat illető részekre.

Virtuális gördítések rendén: az első részben (35) értelmében

$$\delta x = \delta x_1 = \frac{\partial x_1}{\partial \Theta}\delta\Theta + \frac{\partial x_1}{\partial \Theta_1}\delta\Theta_1, \text{ stb.}$$

a másodikban (36) értelmében

$$\delta x = \delta x_2 = \frac{\partial x_2}{\partial \Theta}\delta\Theta + \frac{\partial x_2}{\partial \Theta_2}\delta\Theta_2, \text{ stb.}$$

a harmadikban (37) értelmében

$$\delta x = \delta x_0 = \frac{\partial x_0}{\partial \Theta}\delta\Theta, \text{ stb.}$$

amelyekben $\delta\Theta$, $\delta\Theta_1$, $\delta\Theta_2$ tetszésszerinti virtuális megváltozások. Nem ezek ugyan az egyedüli virtuális elmozdulások, mert az állvány és a rúd, meg a csészerendszerek és a rúd, meg a csészék és terheik el is válhatnak egymástól s a csészéken a terheik csúsztathatók, pörgethetők, gördíthetők is virtuálisan. De céljainkra elég az itt számított virtuális elmozdulásokat venni figyelembe azzal a hozzáadással, hogy $\delta\Theta$, $\delta\Theta_1$, $\delta\Theta_2$ tetszésszerintiek. Ily módon három határozott egyenlethez jutunk. Kettő tisztán a csészerendszerekre vonatkozik, a harmadik a rúd és a csészerendszerek összességére terjed ki. Oly kis szögekre, szögsebességekre és szöggyorsulásokra szorítkozva, hogy a szerintük nem lineáris tagokat a differenciálegyenletekből mellőzhetjük: három lineáris másodrendű differenciál-egyenlethez jutunk konstans együtthatókkal. Ezen egyenletek szerint lehetséges, hogy Θ_1 és Θ_2 tetemesen kisebb határok közt maradjanak, mint Θ. Innen az a gyakorlati következtetést vonjuk, hogy igen kielégítő megközelítéssel lehetséges az olyan mozgás, amelyben a csészerendszerek megtartják azt az irányukat, amellyel a nyugalmi helyzetben bírnak. A mérést pedig úgy intézzük, hogy ez föltehető legyen. Csak az kell hozzá, hogy kezdetben Θ_1 és $\dot{\Theta}_1$, Θ_2 és $\dot{\Theta}_2$ zérus legyen, és hogy megközelítőleg a tehertelen csészeszerkezetek mindegyikének a szimmetria tengelyében legyen a megterheltnek a tömegcentruma. Akkor a rúd és a csészerendszerek összességére előkerült egyenlet számottevően csak a Θ-t és a Θ deriváltjait tartalmazza, amiatt t. i., hogy abban már mindig deriváltjaival együtt a másik két szög Θ_1 és Θ_2 zérusnak írható. Jelölje a rúd inerciamomentumát a középső prizmaélre J_0 s a rúdnak a levegőben mért súlyát P_0, a teljes csészerendszerek tömegét M_1, M_2 s a levegőben mért súlyát P_1, P_2. Jelölje továbbá a rúd tömegcentrumának a középső prizmaéltől való távolságát R_0. Továbbá írjuk, hogy:

$$
(38)\quad \begin{cases} R_0 + \rho_0 + \dfrac{P_1}{P_0}(\rho_0+\rho_1) + \dfrac{P_2}{P_0}(\rho_0+\rho_2) \equiv R \\[2ex] J_0 + M_1 L_1^2 + M_2 L_2^2 \equiv J \end{cases}
$$

akkor a következő differenciálegyenletünk van Θ számára:

$$(39) \qquad J\ddot{\Theta} + 2\varkappa\dot{\Theta} + R P_0 \Theta = L_2 P_2 - L_1 P_1$$

ahol a második tag a levegőtől, éspedig főkép a csészék vertikális mozgása folytán származik. Ez az egyenlet is lengő mozgást jelent, ugyanis benne $R P_0$ van az (1) alatti egyenlet $(\lambda + f)$ együtthatója helyett, márpedig mindig áll, hogy

$$\frac{R P_0}{J} - \frac{\varkappa^2}{J^2} > 0$$

Sőt e kifejezés második tagja mellőzhető is, mihez képest a lengésidő:

$$(40) \qquad T = \pi \sqrt{\frac{J}{R P_0}}$$

Ha a nyugalmi helyzet szöge Θ_0, akkor (39) alatti egyenletünkből

$$(41) \qquad R P_0 \Theta_0 = L_2 P_2 - L_1 P_1$$

és Θ meghatározását épúgy végezhetjük, mint a torziómérlegekben, pl. három egymásután következő szélső Θ megfigyelésével.

3.) Ha p_2 a mérendő tömegnek, p_1 a mérő tömegnek, P_1' és P_2' az üres csészeszerkezeteknek a súlya a levegőben, akkor

$$(42) \qquad \begin{cases} P_1 = P_1' + p_1 \\ P_2 = P_2' + p_2 \end{cases}$$

miért is (41)-ből:

$$\mathcal{R}\,\mathcal{P}_0\,\Theta_0 = \mathcal{L}_2(\mathcal{P}_2' + p_2) - \mathcal{L}_1(\mathcal{P}_1' + p_1)$$

De az üres ($p_1 = 0$, $p_2 = 0$) mérleg nyugalmában (a normális helyzetben) $\Theta_0 = 0$, mikez képest

$$\mathcal{L}_2\,p_2 - \mathcal{L}_1\,p_1 = 0$$

és következőleg:

$$(43) \qquad \mathcal{R}\,\mathcal{P}_0\,\Theta_0 = \mathcal{L}_2\,\mathcal{P}_2 - \mathcal{L}_1\,\mathcal{P}_1$$

ahol azonban (38) és (42) szerint még $\mathcal{R}$ is tartalmazza a p_1 és p_2 súlyt. Ezeken kivül implicite $\mathcal{P}_0$, $\mathcal{P}_1'$, $\mathcal{P}_2'$, $\mathcal{R}_0$, ρ_0, ρ_1, ρ_2, ekszplicite $\mathcal{P}_0$, $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ fordúlnak elő az egyenletben, mely mennyiségek elég pontos ismeretének a hiányában egyenletünk közvetlenül nem alkalmas a mérendő tömeg meghatározására. Azért ha pontosságra törekszünk, oly módszerhez kell folyamodnunk, amelyben e mennyiségek ismerete fölösleges. Ilyen a helyettesítési módszer, amelyben a mérendő tömeg helyébe oly mérő tömeget teszünk, hogy ismét Θ_0 lesz a nyugalmi szög. Ennek a mérő tömegnek a levegőbeli súlyával egyenlő a mérendőnek a levegőbeli p_2 súlya, mint (43)-ból (38) és (42) nyomán következik.

Ilyen a felcserélési módszer is, amelyben oly mérő tömeget alkalmazunk, hogy $\Theta_0 = 0$ legyen. Azután felcserélvén a mérő és mérendő tömeget, a mérő tömeget addig változtatjuk, mignem Θ_0 ismét zé–

rus. Most már p_1' legyen a mérő tömeg súlya a levegőben. A következő két egyenletünk van:

$$L_2 p_2 = L_1 p_1 \; ; \; L_2 p_1' = L_1 p_2$$

Ezekből:

$$p_2 = \sqrt{p_1 p_1'}$$

4.) Nevezetes kellékei a mérlegnek az érzékenység és a stabilitás és az elsőnek a megterheléstől való függetlensége.

Annál érzékenyebbnek mondjuk a mérleget, minél kisebb

$$p_2 - p_1$$

túlterhelés mellett tart adott Θ_0 szögön nyugalmat; illetőleg minél nagyobb Θ_0 szögön tart adott $p_2 - p_1$ túlterhelés mellett nyugalmat, mihez képest legegyszerűbben a

$$\frac{\Theta_0}{p_2 - p_1}$$

hányados az érzékenység jellemzője és matematikai értelemben ezt nevezzük a mérleg érzékenységének.

Továbbá annál stabilisabbnak mondjuk a mérleget, minél többször keresi fel adott idő alatt a nyugalmi helyzetet, tehát minél kisebb a lengésideje, mihez képest a stabilitás egyszerű jellemzője: $\frac{\pi^2}{\tau^2}$ s ezt nevezzük matematikai értelemben a mérleg stabilitásának. Mindig igen kis szögekre gondolva, a mérleg érzékenysége tehát (43) szerint:

$$\mathcal{E}' = \frac{\mathcal{L}_2 p_2 - \mathcal{L}_1 p_1}{R\, P_0 (p_2 - p_1)}$$

A mérleg stabilitása pedig (40) szerint:

$$\mathcal{S} = \frac{R\, P_0}{\mathcal{J}}$$

A (38)-ból folyólag addig, amíg $\frac{P_1}{P_0}$ és $\frac{P_2}{P_0}$ nem nagy, R megközelítőleg $= R_0$. De $\frac{P_1'}{P_0}$ és $\frac{P_2'}{P_0}$ rendszerint nem nagy, tehát amíg a p_1 és p_2 a P_0-hoz képest nem nagy, addig R megközelítőleg közönségesen $= R_0$. Tegyük fel továbbá, hogy megközelítőleg $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_1$. Ezek szerint addig, amíg p_1 és p_2 a P_0-hoz képest nem nagy, az érzékenység a megterheléstől megközelítőleg független, mert megközelítőleg:

$$\mathcal{E}_0' = \frac{\mathcal{L}_1}{R_0\, P_0}.$$

Ennek a függetlenségnek a követelménye azon előzetes föltevésünk is, hogy a három prizmaélnek közös síkja legyen.

A stabilitás hasonló megközelítéssel

$$\mathcal{S}_0 = \frac{R_0\, P_0}{\mathcal{J}_0 + (M_1 + M_2)\mathcal{L}_1^2}$$

Összehasonlítva ezt az $\mathcal{E}_0$ érzékenység kifejezésével, azt látjuk, hogy

$$\mathcal{S}_0 = \frac{1}{\mathcal{E}_0} \cdot \frac{\mathcal{L}_1}{\mathcal{J}_0 + (M_1 + M_2)\mathcal{L}_1^2}$$

Ez M_1 és M_2 révén a terhelésektől is függ. Különben adott megterhelés meg adott érzékenység mellett a stabilitás az L_1 változtatásával csak bizonyos határig fokozható, amely határ L_1-nek

$$\sqrt{\frac{J_0}{M_1+M_2}}$$

értékével áll elő, amelynél t. i. S_0 maksimum. Hogy azonban L_1 változtatásával E_0 változatlan maradhasson, avégből – mint E_0 kifejezése mutatja – R_0-nak változtathatónak kell lennie.

A tömegmérlegen adott Θ_0 nyugalmi szög elérése végett mindenekelőtt addig változtatjuk a mérő súlyt, míg lehető megközelitéssel Θ_0-nak mindkét oldala felé egyenlő a Θ_0-ból számitott két egymásután következő kilengés, midőn is a Θ_0-ból számitott amplitudókon lehető megközelitéssel teljesül az

$$\omega_{n+1} - \omega_{n+2} = 0$$

egyenlet. Azután addig változtatjuk a mérő súlyt, míg a Θ_0-ból számitott három egymásután következő kilengés középsője lehető megközelitéssel a másik kettő összegének a fele, midőn is a Θ_0-ból számitott amplitudókon lehető megközelitéssel teljesül az

$$\omega_{n+1} - 2\,\omega_{n+2} + \omega_{n+3} = 0$$

egyenlet, s i. t. a szükséges és elérhető pontosságig.

A Newton-féle potenciál alaptulajdonságai.

A Newton-féle potenciál fogalma.

1.- Tegyük föl, hogy ebben a geometriai integrálban:

$$\int_\omega \frac{\rho}{r}\, D\omega \equiv J$$

ρ a $D\omega$ elemi rész (a, b, c) helyének egyértékű folytonos függvénye az ω geometriai alakban, térben, fölületben vagy vonalban, vagy ilyenek rendszerében és r az alak (a, b, c) pontjának és egy változtatható (x, y, z) ponthelynek a távolsága $(r^2 \equiv (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2)$.

Integrálunk az (x, y, z) hely függvénye:

$$J = J(x, y, z)$$

Newton-féle potenciálnak nevezzük.

Nagy jelentőségűek az ilyen integrálok, még pedig különösen, mint gradienseknek a skaláris potenciáljai és mint rotációk vektorpotenciáljainak a komponensei. Nevük onnan van, hogy a Newton-féle tömeghatás ily térintegrállal, mint potenciállal meghatározott gradiens, amidőn is a ρ tömöttséget jelent. Tömöttségnek vagy sürüségnek is nevezzük a hely ϱ függvényét.

A Newton-féle potenciál folytonossága és egyenletes deriválhatósága.

2. Az ω alakon kivül ω egy pontjához sem ∞ közel fekvő (x, y, z) pontokban mindenütt egyértékű, folytonos és bárhányszor deriválható függvény a Newton-féle potenciál, mert az integrálandó $\frac{\varrho}{r}$ függvény maga akárhányszor deriválható függvénye az (x, y, z) helynek az (a, b, c) hely környezetén kivül és deriváltjai, mint (a, b, c) függvényei, folytonosak. Az ω alakban a $\frac{\varrho}{r}$ függvénynek, mint (a, b, c) függvényének különös helye az (x, y, z) pont. Ebben első rendű végtelen az, ha tehát az (ω) alak tér vagy fölület, akkor az J mindenütt egyértékű folytonos függvénye a helynek és, ha az (ω) tér, akkor az J legalább elsőrendüen mindenütt deriválható függvény és deriváltjai folytonosak, mert $\frac{1}{r}$-nek az x, vagy y, vagy z szerint való első deriváltja csak másodrendű végtelen az $(a, b, c) = (x, y, z)$ helyen.

A Newton-féle potenciál és deriváltjai a végtelenben.

3. Az (ω) alakot véges kiterjedésünek tételezve

föl, az J potenciál és deriváltjai a végtelenben eltűnnek, éspedig ő maga legalább elsőrendűen s bármely irány szerint képezett első deriváltja legalább másodrendűen és i. t. tűnik el, azaz J maga olyrendűen tűnik el, mint a végtelen távolságnak a fordított értéke, első deriváltjai oly rendűen tűnnek el, mint a végtelen távolság négyzetének a fordított értéke s i. t. Ezekről fogunk most meggyőződni.

4. Az (x, y, z) pont távolsága az alaknak egy bizonyos (a_0, b_0, c_0) pontjától R_0 legyen és nézzük, hogy $R_0 J$ miképen viselkedik, midőn az (x, y, z) pontot a végtelenbe távolítjuk az (a_0, b_0, c_0) ponttól.

$$R_0 J = \int_\omega \rho(a, b, c) \frac{R_0}{r} D\omega$$

Ha (x, y, z) pontot végtelenül távolítjuk az (a_0, b_0, c_0) ponttól és úgy (ω) többi pontjaitól is, akkor az $\frac{R_0}{r}$ hányados értéke végtelenül közeledik az egységhez, tehát:

$$\lim_{R_0 \to \infty} R_0 J = \int_\omega \rho(a, b, c) D\omega$$

Ezzel állításunk első része be van bizonyítva.

5. Nézzük most, hogy miként viselkedik R_0^2-nek és az J potenciál i irányú deriváltjának a szorzata, midőn az (x, y, z) pontot a végtelenbe távolítjuk.

Ha már az (x, y, z) pont az ω alakzaton kivül van, akkor bizonyosan írható, hogy:

$$R_0^2 \frac{\partial J}{\partial i} = R_0^2 \int_\omega \rho(a,b,c) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial i} D\omega$$

Ámde:

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial i} = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\alpha + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\beta + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\gamma = -\frac{\lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma}{r^2}$$

ha t. i. α, β, γ az i irány iránykoszinuszai és ha λ, μ, ν az (a, b, c) pontból az (x, y, z) pontba mutató irány iránykoszinuszai, mihez képest Θ-val jelölvén a két irány szögét:

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial i} = -\frac{\cos\Theta}{r^2}$$

Ezerint:

$$R_0^2 \frac{\partial J}{\partial i} = -\int_\omega \rho(a,b,c) \cos\Theta \frac{R_0^2}{r^2} D\omega$$

Ha az (a_0, b_0, c_0) kiválasztott pontból az (x, y, z) pontba mutató irány és az i irány szöge Θ_0, akkor R_0 végtelen növelése mellett a Θ szög a Θ_0 szögbe konvergál. Mivel pedig $\frac{R_0}{r}$ az egységbe konvergál, ennélfogva

$$\lim_{R_0 \to \infty} R_0^2 \frac{\partial J}{\partial i} = -\cos\Theta_0 \int_\omega \rho(a,b,c) D\omega$$

Ezzel állításunk második része is be van bizonyítva. Igy folytatható ez tovább.

A térfogati Newton-féle potenciál kétszeres derivábhatósága.

6. Most az (ω) geometriai alakon tért értünk, amelyet (τ)-val jelöljünk. A Newton-féle

potenciált ezen(τ) térből jelölje $\mathfrak{J}_\tau$, mihez képest a (τ) térben folytonos egyértékű ρ függvény szerint

$$\mathfrak{J}_\tau \equiv \int_\tau \frac{\rho}{r} \mathfrak{D}\tau, \; (\rho = \rho(a, b, c), \; r^2 \equiv (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2)$$

A 2. artikulus végének értelmében az egész végetlen térben folytonos és legalább egyszer egyenletesen derivがあtható függvénye ez a helynek és a (τ) téren kívül a (τ) fölületéhez nem ∞ közel akárhányszor is deriválható. Koordinátaderiváltjai, úgymint:

$$\frac{\partial \mathfrak{J}_\tau}{\partial x} = \int_\tau \rho \, \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \mathfrak{D}\tau = \int_\tau \frac{\rho}{r^2} \cdot \frac{a-x}{r} \mathfrak{D}\tau \text{ stb.}$$

azon esetben a (τ) tér belsejében is mindig egyenletesen deriválhatók egyszer, ha a ρ függvény az (a, b, c) koordináták egyenletesen deriválható függvénye a (τ) térben. Első tekintetre meglepő lehet ezen állítás, mert az

$$\frac{1}{r^2} \cdot \frac{a-x}{r}, \quad \frac{1}{r^2} \cdot \frac{b-y}{r}, \quad \frac{1}{r^2} \cdot \frac{c-z}{r}$$

szorzók oly deriváltakat szolgáltatnak, amelyek az $(a, b, c) = (x, y, z)$ pontban harmadrendűen végtelenek. Azonban

$$\frac{\partial \mathfrak{J}_\tau}{\partial x} = \int_\tau \rho \, \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \mathfrak{D}\tau = -\int_\tau \rho \, \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial a} \mathfrak{D}\tau$$

Részleges redukcióval élve:

$$\frac{\partial \mathfrak{J}_\tau}{\partial x} = \int_\tau \frac{\partial \rho}{\partial a} \cdot \frac{1}{r} \mathfrak{D}\tau + \int_\sigma \frac{\rho \cos(a, n)}{r} \mathfrak{D}\sigma \text{ stb.}$$

ahol (σ) a (τ) tér határát jelenti, n pedig a $d\sigma$ befelé mutató normálisának az iránya.

A jobboldalon levő integrálok az x, y, z koordinátáik mindegyikére (bizonyosan) deriválhatók a (τ) tér belsejében (s a τ téren kívül nem végtelen közel τ fölületéhez), tehát a baloldalak is és a deriváltjaik folytonos függvényeik a helynek.

7. Tudunk már annyit, hogy a (τ) határától véges távolban mindenütt kétszer deriválható J_τ és deriváltjai folytonosak midőn ρ egyenletesen deriválható (τ)-ban. Egy alább következő artikulusból pedig ki fog tünni, hogy a (τ) tér határához σ-hoz végtelen közel is léteznek és folytonosak annak mindkét oldalán J_τ második deriváltjai, vagyis az egész (τ) térben és a (τ) téren kívül fekvő egész térben léteznek és folytonosak úgy, hogy más különösségük nem lehet a teljes végtelen térben, mint hogy a (τ) tér határán keresztül közönséges folytonosságszakadást szenvednek.

A térfogati potenciál Laplace-féle egyenlete.

8. Minthogy

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2} \equiv 0$$

azaz szimbolikus jelöléssel

$$\Delta \frac{1}{r} \equiv 0$$

és minthogy a (τ) téren kivül az $\mathfrak{I}_\tau$ potenciálon a deriválások az integrálás jele alatt végezhetők, ennélfogva a (τ) téren kivül mindenütt

$$\Delta \mathfrak{I}_\tau = 0$$

Ezt a differenciálegyenletet Laplace-féle egyenletnek nevezzük. De mihelyt oly tulajdonságú a helynek egy térben kétszer deriválható függvénye, hogy a Δ-ja eltünik abban a térben, ebbeli egyenletét Laplace-féle egyenletnek nevezzük.

A térfogati potenciál Poisson-féle egyenlete.

9. Ha ρ olyan folytonos függvény a (τ) térben, hogy $\mathfrak{I}_\tau$ mind a (τ) téren kivül, mind a (τ) térben kétszer egyenletesen deriválható függvény, akkor a (τ) térben

$$\Delta \mathfrak{I}_\tau = -4\pi\rho$$

Részletesebben írva:

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{I}_\tau}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{I}_\tau}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{I}_\tau}{\partial z^2} = -4\pi\rho(x,y,z)$$

Ugyanis tekintsük a Green-féle redukciót, u. m.:

$$\int_T \frac{\Delta\Phi}{r} \partial\tau = -4\pi\Phi_0 + \int_S \left(\Phi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right) \partial\sigma$$

ahol ξ, η, ζ jelentsék $\mathfrak{D}\tau$, illetőleg $\mathfrak{D}\sigma$ koordinátáit és r egy belső x, y, z pont távolsága a $\mathfrak{D}\tau$, illetőleg $\mathfrak{D}\sigma$ elemtől úgy, hogy

$$\Phi_0 \equiv \Phi(x, y, z)$$

Ezen redukcióban Φ függvény gyanánt használható az $\mathfrak{T}_\tau$, mint most ξ, η, ζ függvénye (x, y, z helyett), bármely tért jelentsen is T, mert más különössége nem fordúlhat elő ezen redukció rendén, mint hogy második deriváltjainak a (τ) tér határán (σ)-án közönséges folytonosságszakadása legyen.

Ha pedig a (τ) tér tetszésszerinti része (τ'), nemkülönben használható $\mathfrak{T}_{\tau'}$ a Φ helyett a Green-féle redukcióban, bármely tért jelentsen (T), mert $\mathfrak{T}_{\tau'}$-nek más különössége nem fordúlhat elő ezen redukcióban, mint hogy második deriváltjainak a (τ') tér határán közönséges folytonosságszakadása legyen.

A (T) most oly tért jelentsen, amelynek egészen a belsejében van a τ' tér. Minthogy a τ' téren kivül:

$$\Delta \mathfrak{T}_{\tau'} = 0$$

így

$$\int_{T} \frac{\Delta \mathfrak{T}_{\tau'}}{r} \mathfrak{D}\tau = \int_{\tau'} \frac{\Delta \mathfrak{T}_{\tau'}}{r} \mathfrak{D}\tau$$

(T) tér gyanánt speciálisan válasszunk gömbtért, amelynek a centruma a τ' térben van. A gömb sugara mindig megválasztható oly nagynak, hogy mihelyt még nagyobb, már a Green – féle redukcióban a felületi integrál abszolut értéke tetszésszerint előre adott kicsinynél kisebb, mert az integrálás fölülete a sugár négyzetével arányosan nő, az integrálandó függvény pedig olyszerűen kisebbedik, mint a sugár harmadik hatványának fordított értéke. Eszerint a Green – féle redukcióból folyólag a gömb sugarának határtalan növelésével

$$\int_{\tau'} \frac{\Delta J_{\tau'}}{r} \mathcal{D}\tau = -4\pi\, J_{\tau'}(x,y,z)$$

Ámde

$$J_{\tau'}(x,y,z) = \int_{\tau'} \frac{\rho}{r} \mathcal{D}\tau$$

Ennek következtében:

$$\int_{\tau'} \frac{\Delta J_{\tau'} + 4\pi\rho}{r} \mathcal{D}\tau = 0$$

A (τ') tér a (τ) térnek egy része. Ha (τ) másik részét $(\tau - \tau')$ jelöli, akkor

$$J_{\tau'} = J_{\tau} - J_{\tau-\tau'}$$

és (τ') - ben:

$$\Delta J_{\tau-\tau'} = 0$$

mert a (τ') tér a $(\tau - \tau')$ - re nézve külső tér, következőleg (τ') - ben

$$\Delta J_{\tau'} = \Delta J_{\tau}$$

Ekként utolsó integrálegyenletünk helyett ez írható:

$$\int_{\tau'} \frac{\Delta J_{\tau} + 4\pi\rho}{r} \mathcal{D}\tau = 0$$

Minthogy ΔJ_τ és ρ előzetes föltevéseink szerint mindenütt folytonos a (τ)-ban, így (τ') megválasztható abban mindenütt oly módon, hogy a $\Delta J_\tau + 4\pi\rho$ összeg minden pontjában ugyanazon előjelű legyen benne. Ebből folyólag a τ bármely pontja legyen (x, y, z), tényleg:

$$\Delta J_\tau + 4\pi\rho = 0$$

Ezt Poisson-féle egyenletnek nevezzük.

Általánosabban, mihelyt oly tulajdonságú a helynek egy térben kétszer egyenletesen deriválható függvénye, hogy Δ-ja azon térben a helynek egy adott függvényével egyenlő, ebbeli egyenletét Poisson-féle egyenletnek nevezzük.

10. Ha ρ a hely egyenletesen deriválható egyértékű függvénye a (τ)-ban, akkor – mint láttuk – J_τ második deriváltjai léteznek és folytonosak a (τ) tér határától véges távolságokban mindenütt. Alább majd látni fogjuk, hogy léteznek és folytonosak bármi közel is a (τ) határához, annak mindkét oldalán. Ekkor tehát bizonyosan eleget tesz az J_τ potenciál a (τ) térben a Poisson-féle egyenletnek (és így még ΔJ_τ is egyenletesen deriválható a (τ) térben.). De levezetésénél fogva áll (τ)-ban ez az egyenlet, mihelyt oly folytonos egyértékű függvény a ρ, hogy J_τ kétszer egyenletesen deriválható a (τ)-ban.

A (τ) téren kivül a ρ függvény tetszésszerint szabható meg, mert az integrál a ρ-nak csak a (τ)-ban lévő értékeivel van meghatározva. Úgy szabjuk meg a (τ) téren kivül, hogy mindenütt zérus legyen. Ekkor aztán a Poisson-féle egyenlet nyilvánképen a Laplace-félét is magában foglalja.

Radiális tömöttségű gömbhéj Newton-féle potenciálja.

11. Radiális tömöttségűnek mondunk egy gömbhéjat, ha a tömöttsége a centrumától egyenlő távolokban mindenütt ugyanaz, tehát csak a centrumtól való távolsággal változik. Ezt a tömöttséget jelölje most a ρ. Föltesszük róla, hogy hely egyenletesen deriválható egyértékű függvény a (τ) térben. Most az

$$J_\tau = \int_\tau \frac{\rho}{r} D\tau$$

integrálban (τ) a gömbhéj térfogatát jelenti, két koncentrikus gömbfelület közt foglalt tért.

A ρ tulajdonságainál fogva alkalmazható J_τ-ra (τ)ban a Poisson-féle egyenlet, (τ)-n kivül a Laplace-féle.

Mindenekelőtt vegyük észre, hogy a szimmetriából folyólag a centrumtól egyenlő távolságokban a potenciálunk is mindenütt ugyanaz, ez is csak a centrumtól való távolsággal változik, mint a hely függvénye, azaz:

$$\mathfrak{I}_\tau = \mathfrak{I}_\tau(R)$$

ha R a centrumtól mért távolság.

Több egyszerű módszer van ennek a meghatározására. A legegyszerűbb a Laplace-féle és a Poisson-féle egyenleten alapszik.

12. Először a gömbhéj belső fölületétől körülfogott tér pontjaira, a gömbhéj üregének a pontjaira lássuk a meghatározást.

A gömbhéjon kívül mindenütt áll, hogy

$$\Delta \mathfrak{I}_\tau = 0$$

Ha tehát S a gömbhéj üregében levő R sugarú koncentrikus gömbfelület, és Γ a befogta tér és n a befelé mutató normálisait jelenti

$$0 = \int_\Gamma \Delta \mathfrak{I}_\tau \, \mathfrak{D}\tau = -\int_S \frac{\partial \mathfrak{I}_\tau}{\partial n} \mathfrak{D}\sigma = \int_S \frac{\partial \mathfrak{I}_\tau}{\partial R} \mathfrak{D}\sigma$$

de a $\partial \mathfrak{I}_\tau : \partial R$ derivált, mivel csak R függvénye, az S gömbfelület minden pontjában ugyanaz lévén,

$$\int \frac{\partial \mathfrak{I}_\sigma}{\partial R} \mathfrak{D}\sigma = \frac{\partial \mathfrak{I}_\tau}{\partial R} \int_S \mathfrak{D}\sigma = 4\pi R^2 \frac{\partial \mathfrak{I}_\tau}{\partial R}$$

és következőleg

$$\frac{\partial \mathfrak{I}_\tau}{\partial R} = 0$$

vagyis $\mathfrak{I}_\tau$ az üregben mindenütt ugyanaz. A gömbhéj üregében mindenütt az az értéke van tehát, ami a centrumban. A centrumbeli értékét pedig nyilván-kép megadja:

$$4\pi \int_{R_1}^{R_2} R\,\rho(R)\,\mathfrak{D}R$$

közönséges integrál, amelyben R_1, R_2 a gömbhéj belső, illetőleg külső határának a sugara.

13. Most a gömbhéj külső határán túl lévő végtelen térben keressük $\mathfrak{I}_\tau$ kifejezését. A tömöttség és potenciál Poisson-féle összefüggése:

$$\Delta \mathfrak{I}_\tau = -4\pi\rho$$

Ha most S a gömbhéjat körülfogó koncentrikus gömbfelület s a befogta tér T, úgy:

$$-4\pi \int_T \rho\,\mathfrak{D}\tau = \int_T \Delta \mathfrak{I}_\tau\,\mathfrak{D}\tau = -\int_S \frac{\partial \mathfrak{I}_\tau}{\partial n}\mathfrak{D}\sigma =$$

$$= \int_S \frac{\partial \mathfrak{I}_\tau}{\partial R}\mathfrak{D}\sigma = \frac{\partial \mathfrak{I}_\tau}{\partial R}\int_S \mathfrak{D}\sigma = 4\pi R^2 \frac{\partial \mathfrak{I}_\tau}{\partial R}$$

De

$$\int_T \rho\,\mathfrak{D}\tau = \int_\tau \rho\,\mathfrak{D}\tau$$

nem más, mint a gömbhéj tömege. Ha tehát ezt M jelöli, úgy:

$$\frac{\partial \mathfrak{I}_\tau}{\partial R} = -\frac{M}{R^2}$$

Integrálás rendén

$$J_\tau = \frac{M}{R} + \text{const.}$$

A konstans azonban zérus, mert a végtelenben úgy az J_τ, mint $\frac{M}{R}$ is $= 0$ és következőleg

$$J_\tau = \frac{M}{R}$$

14. A gömbhéjnak egy belső (saját) pontjára azzal a megfontolással jutkatunk el a potenciál kifejezéséhez, hogy egy belső pont a gömbhéj egy részének a külső határán, egy részének a belső határán van, mihez képest a két rész potenciáljának összege teszi ily pontban a gömbhéj potenciálját.

A Newton-féle fölületi potenciál derivaltjai a fölület környezetében.

15. A (σ) fölületre szóló integrálással J_σ jelölje a Newton-féle potenciált a (σ) fölületen folytonos egyértékű ρ függvény szerint:

$$J_\sigma = \int \frac{\rho}{r}\, \mathcal{D}\sigma .$$

Mint már az általánosságokból tudjuk a σ fölületen kivül, attól véges távolokban mindenütt folytonos, sőt bárhányszor deriválható egyértékű függvénye J_σ az (x, y, z) helynek, és mivel a σ fölületen levő (x, y, z) pontban az integrálandó $\frac{\rho}{r}$ mint a, b, c függvénye elsőrendűen válik végtelenné, úgy a σ fölülethez bármi közel és annak a saját pontjaiban is folytonos függvénye $\mathfrak{J}_\sigma$ az (x, y, z) helynek.

Ezentúl mindig oly σ fölületre gondoljunk, amelynek mindenütt határozott s a hellyel folytonosan változó normálisa van. Élek helyett nagy görbületű keskeny öveket, csúcsok helyett nagy görbületű apró szakaszokat gondolunk a fölületen.

16. Legközelebb arról fogunk meggyőződni, hogy ha σ zárt fölület, akkor $\mathfrak{J}_\sigma$ bármily irányú első deriváltja véges, végtelen közel is a σ fölülethez és rajta is és csak az a különössége van, hogy a fölület egyik oldalán általában végesen más a deriváltjainak az értéke mint a másikon, akármi közel is ugyanegy fölületi ponthoz, szóval a fölületen át közönséges folytonosságszakadása van; mégpedig ha a fölületi normális iránya a fölület O pontjában a fölület $(-)$ nevű oldaláról a $(+)$ nevű oldala felé n, akkor bármely irányt jelentsen i:

$$\left(\frac{\partial \mathfrak{J}_\sigma}{\partial i}\right)_+ - \left(\frac{\partial \mathfrak{J}_\sigma}{\partial i}\right)_- = -4\pi\rho\cos(i,n)$$

ahol a $(+)$ index a pozitiv, a $(-)$ index a negativ fölületi oldalra utalja a függvény értékét, mindkét oldalon végtelen közel ugyanazon fölületi ponthoz O-hoz.

16_1. Állításunk levezetése végett gondoljuk az (x, y, z) pontot az O helyü normálison. Az O

hely körül a σ fölület olyan kis σ_0 darabját nézzük, amely síknak tekinthető és amelyen a ρ egyenletesnek tekinthető. Mégpedig ez a σ_0 fölületdarab O centrumú körlap legyen R_0 sugárral. A σ többi részét $\sigma-\sigma_0$ jelölje úgy, hogy:

$$J_\sigma = J_{\sigma-\sigma_0} + J_{\sigma_0}$$

Azt vizsgáljuk, hogy a normálison végtelen közel az O helyhez miként viselkedik potenciálunk valamely deriváltja. Az $J_{\sigma-\sigma_0}$ deriváltjai véges, sőt folytonos egyértékű függvények a normális mentén, még az O helyen is, mert a $\sigma-\sigma_0$ fölületre nézve a normális pontjai (véges távolságú) külső helyek és az (x, y, z) pontnak a normálison való csúsztatásával a (σ_0) nem változik.

Elégséges tehát csak az J_{σ_0}-nak a deriváltjával foglalkoznunk. – Az i irány iránykoszinuszait α, β, γ-val jelölve

$$\frac{\partial J_{\sigma_0}}{\partial i} = \alpha \frac{\partial J_{\sigma_0}}{\partial x} + \beta \frac{\partial J_{\sigma_0}}{\partial y} + \gamma \frac{\partial J_{\sigma_0}}{\partial z}$$

ahol a deriválásokat az integráljel alatt végezve

$$\frac{\partial J_{\sigma_0}}{\partial x} = \int_{\sigma_0} \rho \frac{a-x}{r^3} \partial\sigma = \rho \int_{\sigma_0} \frac{a-x}{r^3} \partial\sigma \text{ stb.}$$

ugyanis egyelőre még az (x, y, z) pontot véges kis távolban gondoljuk az O fölületi ponttól. Válasszuk úgy egy pillanatra koordinátarendszerünket, hogy origója az O helyen legyen és harmadik tengelye az n normálisba essék. – Akkor σ_0-ban minden (a, b, c) pont harmadik koordinátája zérus, $c = 0$, mert σ_0 minden pontja az (x, y) síkban van. Továbbá az n normális áthaladván az (x, y, z) ponton, ez a pont most a z tengelyben van és következőleg $x = 0$, $y = 0$. Vezessünk továbbá be a körlapon poláris koordinátákat úgy, hogy

$$a = R\cos\Theta\,, \quad b = R\sin\Theta$$

legyen. A $D\sigma$ fölületelemeket pedig akként válaszszuk meg, hogy az R, Θ poláris koordináták rendén

$$D\sigma = R\,DR\,D\Theta$$

legyen. Mindezek alkalmazásával a koordinátaderiváltak kifejezései a következőkké alakúlnak:

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial \mathfrak{T}_{\sigma_0}}{\partial x} &= \rho\int_0^{R_0}\int_0^{2\pi}\frac{R^2 DR}{\sqrt{(R^2+z^2)^3}}\cos\Theta\, D\Theta\\
\frac{\partial \mathfrak{T}_{\sigma_0}}{\partial y} &= \rho\int_0^{R_0}\int_0^{2\pi}\frac{R^2 DR}{\sqrt{(R^2+z^2)^3}}\sin\Theta\, D\Theta\\
\frac{\partial \mathfrak{T}_{\sigma_0}}{\partial z} &= -\rho z\int_0^{R_0}\int_0^{2\pi}\frac{R\,DR}{\sqrt{(R^2+z^2)^3}}\, D\Theta
\end{aligned}\right.$$

A két első kettős integrál a Θ-ra szóló integrációban eltűnik. A harmadik pedig teljesen kifejtve =

$$2\pi\rho\left(\frac{z}{\sqrt{R_0^2+z^2}}-\frac{z}{\sqrt{z^2}}\right)$$

ahol a zárójelben a kivonandó tag (+1) vagy (−1), aszerint, amint z pozitív vagy negatív, tehát aszerint, amint az (x, y, z) pont a fölület pozitív vagy negatív oldalán van, mert a gyökkifejezések pozitívok, mint távolságot jelentő mennyiségek. Ezek szerint:

$$\frac{\partial J_{\sigma_0}}{\partial x}=0\ ,\quad \frac{\partial J_{\sigma_0}}{\partial y}=0\ ,$$

$$\left(\frac{\partial J_{\sigma_0}}{\partial z}\right)_+=2\pi\rho\left(\frac{z}{\sqrt{R_0^2+z^2}}-1\right)_{z>0}\ ,$$

$$\left(\frac{\partial J_{\sigma_0}}{\partial z}\right)_-=2\pi\rho\left(\frac{z}{\sqrt{R_0^2+z^2}}+1\right)_{z<0}$$

Következőleg, tekintettel arra is, hogy az i irányú derivált föntebbi kifejezésében γ az i irány és a mostani z tengely szögének a koszinusza, tehát az i irány és az n normális szögének a koszinusza:

$$\left(\frac{\partial J_{\sigma_0}}{\partial i}\right)_+=2\pi\rho\left(\frac{z}{\sqrt{R_0^2+z^2}}-1\right)_{z>0}\cos(i,n)$$

$$\left(\frac{\partial J_{\sigma_0}}{\partial i}\right)_-=2\pi\rho\left(\frac{z}{\sqrt{R_0^2+z^2}}+1\right)_{z<0}\cos(i,n)$$

bármekkora a z.

16_2. Mihelyt azonban az (x, y, z) pont oly közel van a fölülethez, hogy z az R_0-hoz képest ele –

nyésző kicsiny, már akkor az ezekben elő-fordúló tört elenyésző kicsiny, tehát vég-telen közel a fölülethez a végesség iga-zolására:

$$\left(\frac{\partial J_{\sigma_0}}{\partial i}\right)_+ = -2\pi\rho \cos(i,n)\,,\quad \left(\frac{\partial J_{\sigma_0}}{\partial i}\right)_- = 2\pi\rho\cos(i,n)$$

Ebből továbbá:

$$\left(\frac{\partial J_{\sigma_0}}{\partial i}\right)_+ - \left(\frac{\partial J_{\sigma_0}}{\partial i}\right)_- = -4\pi\rho\cos(i,n)$$

De $J_{\sigma-\sigma_0}$ deriváltjai a normális mentén O-ban is folytonos egyértékű függvények lévén, a két zárójel-ben szabad J_{σ_0}-hoz $J_{\sigma-\sigma_0}$-at adni, miáltal a leg-elől állított

$$\left(\frac{\partial J_\sigma}{\partial i}\right)_+ - \left(\frac{\partial J_\sigma}{\partial i}\right)_- = -4\pi\rho\cos(i,n)$$

egyenlet is igazolva van. Ezt is Poisson-féle egyen-letnek nevezzük, de megkülönböztetésül az előbb így nevezett egyenletet térfogati, ezt fölületi Poisson-féle egyenletnek nevezzük. Mihelyt pedig egy fölü-let közelében egy deriválható függvény oly talaj-donságú, hogy valamely adott fölületi ρ függvény szerint ily egyenletnek tesz eleget, egyenletét fölü-leti Poisson-féle egyenletnek mondjuk.

Könnyű fölismerni, hogy a tangenciális deriváltak nem szenvednek folytonosságszaka-dást a fölületen keresztül. Az n normális irányá-ban képzett derivált folytonosságszakadása pedig $-4\pi\rho$

16_3. A 16_1. végéről azt is megláthatjuk, hogy J_σ első deriváltjai nemcsak végesek, de egyben folytonosak végtelen közel is a (σ) fölülethez, külön a fölület egyik és másik oldalán úgy, hogy semmi más különösségük nincs, mint a közönséges folytonosság-szakadás a fölületen keresztül (mindig föltéve azt, hogy a fölületi normálisnak az iránykoszinuszai és a ρ függvény folytonosan változnak a hellyel a fölületen). Elég lesz ennek belátására a fölület egyik oldalát tekinteni. Legyen ez a fölületnek a pozitív oldala. Az (x, y, z) függvényhelyet tetszésszerinti koordinátarendszerben a fölület O helyű normálisán O-tól n távolban gondolva, 16_1 végének értelmében:

$$\frac{\partial J_\sigma}{\partial i} = \frac{\partial J_{\sigma-\sigma_0}}{\partial i} + 2\pi\rho \cos(i,n)\left(\frac{n}{\sqrt{R_0^2+n^2}} - 1\right)$$

A R_0 igen kis sugarat változatlan hosszúságúnak választhatjuk meg és ilyenül is választjuk. Emellett természetesen oly kicsinynek válasszuk, hogy a σ_0 fölületdarab előre megadott kicsinynél kisebb hibával legyen körös síklap mindenütt és rajta a ρ állandónak számíthasson. Kifejezésünk második tagjában $4\pi\rho\cos(i,n)$ az n normális távolsággal nem változik, tangenciális irányokban pedig folytonosan változik. A zárjeles faktor meg csak az n távolsággal változik és ennek folytonos függvénye. Kifejezésünk második tagja a hely folytonos függvénye tehát s igy van ez bármi kicsiny is az n távolság. Ami már most kifejezésünk első tagját illeti, mozdulatlan (σ_0) mellett egyáltalán folytonos ő az O hely környezetében is. Ámde a normálisra merőlegesen (tangenciálisan) mozduló (x, y, z) hellyel együtt mozdul az O hely és (σ)-nak a (σ_0) körös darabja is, amelynek az O a centruma. Azonban (σ_0) végtelen kis eltolódásával a $(\sigma - \sigma_0)$ geometriai alak végtelen kis (sarló alakú) részt veszit és végtelen kis (sarló alakú) résszel gyarapodik, s ez által az $J_{\sigma - \sigma_0}$ integrál deriváltjainak értéke is végtelen kicsinnyel változik meg. Folytonosan változik tehát $J_{\sigma - \sigma_0}$ deriváltja a (σ_0) eltolódásával is. Ezek szerint $\partial J_\sigma : \partial i$ kifejezésének mindkét tagja és igy ő maga is folytonosan változik bármi közel is a fölülethez annak a pozitiv oldalán. Hasonlóan következik a folytonosság a fölület negativ oldalán.

Csak a fölület egyik oldaláról a másikra lehet a deriváltaknak folytonosságszakadása és ahol ρ nem zérus a fölületen, ott a nem tangenciális deriváltaknak tényleg van is folytonosságszakadásuk, amelyet a Poisson-féle fölületi egyenlet határoz meg.

17. Most tegyük fel, hogy σ nem zárt fölület, azonban minden belső (a széléhez nem végtelen közel fekvő) pontja mint centrum körül

megválasztható rajta egy körös rész oly véges kicsinynek, hogy a körös részben ρ egyenletesnek számíthasson. Nyilvánképen a fölület minden belső pontjára ráillik így mint O pontra a 16, 16_1, 16_2, 16_3 artikulus. Tehát a belső pontjaihoz végtelen közel is folytonos egyértékű a $\frac{\partial J_\sigma}{\partial i}$ külön a (σ) egyik és másik oldalán s a fölületen keresztül a Poisson-féle fölületi egyenletnek tesz eleget:

$$\left(\frac{\partial J_\sigma}{\partial i}\right)_+ - \left(\frac{\partial J_\sigma}{\partial i}\right)_- = -4\pi\rho\cos(i,n)$$

úgy, hogy ha az O helyen i tangenciális irány, vagy $\rho = 0$, akkor egyáltalán nincs $\frac{\partial J_\sigma}{\partial i}$-nek folytonosság szakadása, ellenkező esetben közönséges folytonossóg szakadása van a fölületen keresztül, amely a fölület negatív oldaláról a pozitívra $= -4\pi\rho\cos(i,n)$.

Azonban végtelen közel (σ)-nak a széléhez és (σ)-nak a szélén már az eddigi tárgyalás alkalmazhatósága nyilvánvalóan elesik. Mink itt arra a föltevésre fogunk szorítkozni, hogy a ρ sűrűség a (σ)-nak a szélén mindenütt eltűnik, még pedig legalább is olyrendűen tűnik el, mint az (a, b, c) fölületi pontnak a (σ) szélétől való távolsága, amelyet λ-val jelöljünk. Ki fog tűnni, hogy ezen megszorításban $\frac{\partial J_\sigma}{\partial i}$ véges, sőt folytonos végtelen közel a (σ)-nak a széléhez és (σ)-nak a szélén.

17₁. A σ fölületen gondolt belső O pontot s a körülötte írt σ_0 igen kis kört is, csúsztassuk most a σ fölületen ennek a széle felé úgy, hogy a σ_0 kör és σ-nak a széle metsződjenek s az O pont végtelen közel legyen σ-nak a széléhez mi mellett vagy rajta van még az O pont a σ fölületen, vagy lecsúszott arról, tehát a σ fölületen kivül van már.

A σ_0 kis körlapot ezúttal két részre osztva gondoljuk. Az egyik rész a σ szélét érintő végtelen kis koncentrikus körlap, amelyet σ_0' jelöljön. A másik részt $\sigma_0 - \sigma_0'$ jelölje. Ha az O pont a fölületen kivül van, akkor σ_0' pontjaiban $\rho = 0$, tehát $J_{\sigma_0'}$ deriváltjai eltűnnek. De végtelen pontossággal akkor is eltűnnek $J_{\sigma_0'}$ deriváltjai (végtelen közel is σ széléhez), ha az O pont rajta van a fölületen, mert σ_0' végtelen kicsiny lévén, rajta ρ végtelen pontosan egyenletesnek számíthat, márpedig ott ahol σ-nak a szélét érinti a σ_0', a ρ zérus. Hátra van $J_{\sigma_0 - \sigma_0'}$ deriváltjainak a vizsgálata.

A 16₁ jelöléseivel a koordinátarendszer ottani speciális megválasztásában, az ottani integrálkifejezések hasonlatára

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial J_{\sigma_0-\sigma_0'}}{\partial x} &= \int_{R_0'}^{R_0}\int_0^{2\pi} \rho \frac{R^2 DR}{\sqrt{R^2+z^2}^{\,3}} \cos\Theta\, D\Theta \\
\frac{\partial J_{\sigma_0-\sigma_0'}}{\partial y} &= \int_{R_0'}^{R_0}\int_0^{2\pi} \rho \frac{R^2 DR}{\sqrt{R^2+z^2}^{\,3}} \sin\Theta\, D\Theta, \quad \frac{\partial J_{\sigma_0-\sigma_0'}}{\partial z} = -\int_{R_0'}^{R_0}\int_0^{2\pi} \rho \frac{zR\, DR}{\sqrt{R^2+z^2}^{\,3}} D\Theta
\end{aligned}\right.$$

ahol R_0' a végtelen kis σ_0' sugara. Itt a ρ nem írható az integráljelek elé, mert általában a σ széle felé rohamosan változhatik a hellyel, márpedig az R_0 sugár nem matematikai végtelen kicsiny.

Ha $|\rho| \equiv h\lambda$ írjuk (ahol λ az a, b, c fölületi pontnak a σ szélétől való távolsága), akkor előzetes föltevésünk értelmében h minden helyen kisebb egy véges pozitív skalárisnál, amelyet h_0 jelöljön. Könnyű továbbá belátni, hogy ha $\lambda \equiv NR$ írjuk, akkor a $\sigma_0 - \sigma_0'$ területen N mindenütt kisebb egy véges pozitív számnál, amelyet N_0 jelöljön. A három integrál abszolút értékét nyilvánvalóan megnöveljük, ha azokban $\cos\Theta$ és $\sin\Theta$ helyett az egységet, ρ helyett $h_0 N_0 R$-et, azután

$$\frac{R^3}{\sqrt{R^2+z^2}^{\,3}} \quad \text{és} \quad \frac{zR^2}{\sqrt{R^2+z^2}^{\,3}}$$

helyett is az egységet írjuk és R_0' helyett zérust írunk. Mindhárom integrál abszolútértéke kisebb tehát mint $4\pi N_0 h_0 R_0$. Minthogy R_0 akármily kicsiny véges mekkoraságú sugarat jelenthet, $J_{\sigma_0-\sigma_0'}$ deriváltjai számot nem tévő kicsinyeknek tekinthetők, s úgy J_σ deriváltjai a ρ-ra kirótt föltevésünk mellett σ széléhez végtelen közel a hely folytonos függvényei gyanánt tekinthetők. De ilyenekül számíthatnak σ szélén is, mert ha σ szélén van az O pont, akkor itteni tárgyalásunk R_0-nek zérus értékével érvényes.

A Newton-féle fölületi potenciál Laplace-féle egyenlete.

18. Ezen potenciál a σ fölületről

$$J_\sigma \equiv \int_\sigma \frac{\varrho}{r} D\sigma$$

A σ fölületen kivül mindenütt akárhányszor egyenletesen deriválható ez nem végtelen közel a fölülethez és deriválásai az integrál jel alatt végezhetők. Minthogy tehát $\Delta \frac{1}{r}$ identikusan eltünik, úgy J_σ nem végtelen közel a σ fölülethez bizonyosan teljesiti mindenütt a Laplace-féle egyenletet:

$$\Delta J_\sigma = 0.$$

A Newton-féle térfogati potenciál második deriváltjai végtelen közel a tér fölületéhez.

19. Most módunkban van belátni, hogy amidőn egy térbeli Newton-féle potenciál kifejezésében a ϱ tömöttségi függvény egyenletesen deriválható egyértékü az integrálás terében, akkor ezen tér határához végtelen közel is léteznek és folytonosak a potenciál második deriváltjai. Ugyanis a 6. artikulusban a térbeli Newton-féle potenciál deriváltjait, mint

egy térbeli és egy fölületi Newton-féle potenciál összegét állítottuk elő. Az összegben a térbeli potenciál a teljes végtelen tér minden pontjában deriválható és deriváltjai folytonosak. A fölületi potenciál deriváltjai pedig a jelen cikkrész szerint azon fölülethez végtelen közel is léteznek és folytonosak annak mindkét oldalán, amely fölület ott (a 6.-ban) a térfogati Newton-féle potenciál határát teszi, amelyről mindig föltehetjük a 16-ban kikötött tulajdonságokat. Következőleg a térfogati Newton-féle potenciál deriváltjai léteznek és folytonosak ama fölület végtelen közelében is.

A Newton-féle vonalas potenciál.

20. A (s) vonalra szóló integrálással J_s jelölje a Newton-féle potenciált a (s) vonalon folytonos egyértékű ρ függvény szerint

$$J_s = \int_s \frac{\rho}{r} \mathfrak{D} s$$

Mint már az általánosságokból tudjuk, a (s) vonalon kívül, ahhoz nem végtelen közel, mindenütt folytonos, sőt bárhányszor egyenletesen deriválható függvénye ez az (x, y, z) helynek.

Föltévén a (s) vonalról, hogy mindenütt határozott normális síkja van, könnyen kimutatható e potenciálról, hogy a vonalhoz végtelen közel általában logaritmusi végtelen nagy, első deriváltjai pedig általában elsőrendű algebrai végtelenek végtelen közel a vonalhoz. Meggyőződünk erről, ha csak (ς)-nak oly (ς_0) igen kis darabját tekintjük amely egyenesnek számíthat s amelyen ϱ mindenütt ugyanannak tekinthető. A vonal többi részét $(\varsigma - \varsigma_0)$-val jelölvén

$$J_\varsigma = J_{\varsigma - \varsigma_0} - J_{\varsigma_0}$$

Az $J_{\varsigma - \varsigma_0}$ folytonos, akárhányszor egyenletesen deriválható (ς_0) centrumában is, mert ez a $(\varsigma - \varsigma_0)$-ra nézve külső (véges távolú) hely. Elégséges tehát ezen hely végtelen kis környezetét illetőleg J_{ς_0} vizsgálata. Az J_{ς_0} potenciálon pedig az integrációt a (ς_0) vonaldarabon kívül véges távolságokban explicite végrehajthatjuk, mégpedig egészen tetszésszerint gondolt (x, y, z) pontok számára.

Helyezzük evégből, egyszerűség kedvéért (ς_0) egyik határpontjába koordinátarendszerünk origóját s irányítsuk x tengelyét a (ς_0) másik határpontja felé. Ha (ς_0) hossza λ, az x, y, z pont távola az origótól r_1 s a (ς_0) másik végétől r_2 és merőleges távola a (ς_0)-tól vagy (ς_0) meghosszabbításától r, akkor:

$$J_{\varsigma_0} = \varrho \int_0^\lambda \frac{ds}{\sqrt{(x-s)^2 + y^2 + z^2}} = \varrho \log \frac{r_2 + \lambda - x}{r_1 - x} =$$

$$\equiv \int \log \frac{r_1 + x}{r_2 + x - l} \equiv \int \log \frac{r_2 + l - x}{r_0} \cdot \frac{r_1 + x}{r_0} \equiv$$

$$\equiv \int \log \frac{r_0}{r_2 + x - l} \cdot \frac{r_0}{r_1 - x}$$

Állításaink (ς_0) végtelen kis környezetére ezekből könnyen kiadódnak és részletesen is kifejlenek részint magukon ezen identikus kifejezéseken, részint a deriváltjaikon, amely utóbbiak sorában az x szerint való a (ς_0)-hoz tangenciális derivált, az y vagy z szerint való a (ς_0)-ra nézve merőleges derivált és ezen deriváltak viselkedésével más irányú deriváltak viselkedése is meg van határozva.

A Newton-féle vonalas potenciál Laplace-féle egyenlete.

21. Minthogy az J_ς potenciál bárhányszor deriválható a (ς) vonalon kívül, ahhoz nem végtelen közel lévő (x, y, z) pontokban és deriválásai az integrál jele alatt végezhetők, úgy amiatt, hogy $\Delta(1:r)$ zérus, az J_ς potenciál a (ς) vonalon kívül, ahhoz nem végtelen közel bizonyosan mindenütt eleget tesz a Laplace-féle egyenletnek:

$$\Delta J_\varsigma = 0.$$

A nehézkedési erő.

A Newton-féle erő elemi definiciója.

1. Két testről, vagy két testrészről, vagy egy testről és egy testrészről azt mondjuk, hogy aránylag távol vannak egymástól, ha távolsági vonalaik átmérőikhez képest igen nagyok. Ilyenek tömegüknél fogva közelítő hatást viselnek egymás felé, amely_nek a nagysága Newton szerint arányos a tömegük szorzatával és fordítva arányos a távolságuk négyzetével.

Ha tehát DM tömegű (DM) elemi rész nincs végtelen közel a Dm tömegű (Dm) elemi részhez s távolságuk r, akkor Newton szerint a tömegüknél fogva mindegyik elemi rész

$$\frac{DM \cdot Dm}{r^2}$$

mekkoraságggal arányos közelítő hatást visel a másik felé; képesen mondva a tömegüknél fogva ekkora erővel vonzzák egymást és e hatást Newton-féle hatásnak, a foganatát (effektusát) az elemi részek kölcsönös nehézkedésének, gravitációjának nevezzük. Az arányossági együtthatót ν-vel jelölvén,

$$\gamma \frac{\mathfrak{D}M . \mathfrak{D}m}{r^2}$$

két elemi rész közt a Newton-féle hatás nagysága, amelyben γ értéke csupán az egységek megválasztásától függ; de a két elemi rész méreteitől, helyzetétől, mekanikai állapotától, minőségétől, belső állapotától, szóval a két elemi résztől független. Röviden, γ egy univerzális konstans. Gravitációs konstansnak nevezzük.

Jelöljék $(\mathfrak{D}m)$ koordinátáit a, b, c és $(\mathfrak{D}M)$ koordinátáit x, y, z. A $(\mathfrak{D}m)$-nek a Newton-féle hatása a $(\mathfrak{D}M)$-en $(\mathfrak{D}m)$ felé irányulván, iránykoszinuszai ezek:

$$\frac{a-x}{r}, \quad \frac{b-y}{r}, \quad \frac{c-z}{r}$$

Következőleg $(\mathfrak{D}m)$ Newton-féle hatása $(\mathfrak{D}M)$-en

$$\gamma \frac{\mathfrak{D}M . \mathfrak{D}m}{r^2}\left(\frac{a-x}{r}, \frac{b-y}{r}, \frac{c-z}{r}\right)$$

A $(\mathfrak{D}M)$ hatása a $(\mathfrak{D}m)$-en pedig az ellentétes vektor.

2. Azonban a tömegektől föltételezett szabaderők csak bizonyos koordinátarendszerekben ilyenek, azaz Newton-félék. Kitűnik ez már abból, hogyha eddigi koordinátarendszerünkben $(\mathfrak{D}m)$-nek és $(\mathfrak{D}M)$-nek csakis a Newton-féle egymásra hatása teszi a reájuk ható erőt és most eddigi koordinátarendszerünkről speciálisan olyanra térünk át, amelynek a tengelyei egyező-irányúak folyvást az eddigi tengelyekkel, de az origója

mozog eddigi rendszerünkben s a gyorsulása folyvást egyezik $(\mathfrak{D}m)$ gyorsulásával, u. m. az $(\ddot{a}, \ddot{b}, \ddot{c})$ gyorsulással, akkor új rendszerünkben $(\mathfrak{D}m)$-nek nincs gyorsulása, a $(\mathfrak{D}m)$-re ható erő zérus; a $(\mathfrak{D}M)$-ből reá ható Newton-féle erőn kívül egy ezzel ellentétesen egyenlő erő hatását is viseli $(\mathfrak{D}m)$ az új koordinátarendszerben.

3. Irjuk, hogy

$$\frac{\mathfrak{D}m}{r} = \mathfrak{D}\Phi$$

akkor $(\mathfrak{D}m)$ Newton-féle hatása $(\mathfrak{D}M)$-en nyilvánkép így is előállítható:

$$\gamma\,\mathfrak{D}M\left(\frac{\partial\,\mathfrak{D}\Phi}{\partial x}, \frac{\partial\,\mathfrak{D}\Phi}{\partial y}, \frac{\partial\,\mathfrak{D}\Phi}{\partial z}\right)$$

ami vektornyelven =

$$\gamma\,\mathfrak{D}M \operatorname{grad} \mathfrak{D}\Phi$$

odaértve, hogy a gradiensben a deriválások a $\mathfrak{D}M$ koordinátái szerint végzendők. Minthogy pedig $\gamma\,\mathfrak{D}M$ állandó, úgy ez a grad. jelvény után is írható. Eszerint egy elemi rész Newton-féle hatása egy másik elemi részen gradiens. E gradiens potenciálja

$$\gamma\,\mathfrak{D}M\,\mathfrak{D}\Phi, \text{ azaz } \gamma\,\frac{\mathfrak{D}M.\mathfrak{D}m}{r}$$

A Newton-féle erő általános definiciója.

4. Egy folytonos m tömegű (m) anyagi rendszer elemi részeitől valamely külső (DM) elemi részre háramló Newton-féle hatások vektori összege (eredője), ha ugyan (DM) nincs végtelen közel (m) határához, a 3. artikulus értelmében =

$$\nu\, \mathfrak{D}M \int_m \operatorname{grad} \mathfrak{D}\Phi = \nu\, \mathfrak{D}M \operatorname{grad} \int_m \mathfrak{D}\Phi$$

Ámde:

$$\int \mathfrak{D}\Phi \equiv \int \frac{\mathfrak{D}m}{r} \equiv \int_\tau \frac{\varrho}{r}\, \mathfrak{D}\tau$$

ha ϱ a ($\mathfrak{D}m$) elemi rész tömöttsége és (τ) az anyagi rendszer térfogata. Amellett ϱ a hely folytonos egyértékű függvényének tekinthető. Newton-féle térfogati potenciál határozza meg tehát azoknak a hatásoknak az eredőjét, melyek Newton szerint egy anyagi rendszer tömegelemeitől egy külső tömegelemre háramlanak, midőn nincs az végtelen közel az anyagi rendszer határához. Jelölje ezuttal is J_τ a Newton-féle térfogati potenciált a (τ) térből, ekkor a ($\mathfrak{D}M$) elemi részen az anyagi rendszer tömegelemeitől származó Newton-féle hatások rezultánsa (midőn ($\mathfrak{D}M$) az anyagi rendszer határain túl, attól véges nagy távolságban van):

$$\nu\, \mathfrak{D}M \operatorname{grad} J_\tau$$

vagy részletesebben írva:

$$\gamma \mathfrak{D} M \left(\frac{\partial \mathfrak{J}_\tau}{\partial x}, \frac{\partial \mathfrak{J}_\tau}{\partial y}, \frac{\partial \mathfrak{J}_\tau}{\partial z} \right).$$

Minthogy pedig $\gamma \mathfrak{D} M$ állandó, ennélfogva közvetlenül $\mathfrak{J}_\tau$ mellé is írható. Eszerint egy anyagi rendszer elemi részeitől származó Newton-féle hatásoknak rezultánsa a $(\mathfrak{D} M)$ elemi részen gradiens és ezen gradiens potenciálja

$$\gamma \mathfrak{J}_\tau \mathfrak{D} M$$

A tapasztalás pedig nagy pontossággal arra utal, hogy a koordinátarendszer megválasztható úgy, hogy abban a $(\mathfrak{D} M)$ elemi rész, ha szabad volna, (más elemi részekkel nem érintkeznék) a maga tömege révén tisztán ezt a hatást viselné a (τ) térben foglalt anyagi rendszer m tömegétől, úgy, hogy van oly koordinátarendszer, amelyben az elemi részre ható szabaderő mindig két olyan erő vektori összegére bontható, amelyek egyike:

$$\gamma \mathfrak{D} M \operatorname{grad} \mathfrak{J}_\tau$$

másika pedig független a tömegektől.

5. Ámde, mint tudjuk, $\mathfrak{J}_\tau$-nak első deriváltjai nemcsak a τ téren kívül s véges nagy távolban τ határától, hanem egyáltalán a végtelen tér minden pontjában határozott értékkel léteznek. Ezt tekintve, azzal a föltevéssel élünk, hogy bizonyos

koordinátarendszerekben a (DM) elemi rész a maga tömege révén a (τ)-ban foglalt tömegtől a szabaderők sorában akkor is a $\gamma DM \operatorname{grad} J_\tau$ hatást viseli, ha végtelen közel van a (τ) téren kívül az m tömegű anyagi rendszer határához; sőt akkor is, ha érintkezik ezen anyagi rendszerrel, vagy éppen annak magának egy elemi része. Föltesszük tehát, hogy akárhol levő elemi rész a maga tömege révén bizonyos koordinátarendszerekben tisztán ennek a szabad erőnek a hatását viseli a τ tért kitöltő m tömegtől. A legáltalánosabb értelemben ezt az erőt nevezzük Newton-féle erőnek és ezen erő foganatát nevezzük az m-re nézve a (DM) elemi rész gravitációjának.

6. Vegyük észre, hogy több anyagi rendszertől egy elemi részre ható Newton-féle erő egyenlő az egyes anyagi rendszerektől reáható Newton-féle erők rezultánsával. Ha ugyanis az egyes anyagi rendszerek τ_1, τ_2 stb tért foglalnak el s e terek összessége τ, akkor

$$J_\tau = J_{\tau_1} + J_{\tau_2} + \dots$$

tehát azon anyagi rendszerek összességétől a (DM) elemi részre ható Newton-féle erő =

$$\gamma DM . \operatorname{grad} J_\tau = \gamma DM . \operatorname{grad} (J_{\tau_1} + J_{\tau_2} + \dots) =$$

$$= \nu\, \mathfrak{D}M\,(\operatorname{grad} \mathfrak{I}_{\tau_1} + \operatorname{grad} \mathfrak{I}_{\tau_2} + \dots) =$$

$$= \nu\, \mathfrak{D}M \operatorname{grad} \mathfrak{I}_{\tau_1} + \nu\, \mathfrak{D}M \operatorname{grad} \mathfrak{I}_{\tau_2} + \dots$$

Anyagi rendszer Newton-féle toló és forgató hatása önmagán.

7. Egy anyagi rendszernek önmagán nincs Newton-féle toló és forgató hatása. Ugyanis most $\mathfrak{D}M = \mathfrak{D}m = \rho\, \mathfrak{D}\tau$ lévén, a (τ) térben foglalt anyagi rendszeren a tőle magától származó Newton-féle toló hatás komponensei ezek:

$$\nu \int_\tau \rho \frac{\partial \mathfrak{I}_\tau}{\partial x} \mathfrak{D}\tau, \quad \nu \int_\tau \rho \frac{\partial \mathfrak{I}_\tau}{\partial y} \mathfrak{D}\tau, \quad \nu \int_\tau \rho \frac{\partial \mathfrak{I}_\tau}{\partial z} \mathfrak{D}\tau$$

s ugyancsak a rendszertől önmagára háramló Newton-féle forgató hatás komponensei ezek:

$$\nu \int_\tau \rho \left(y \frac{\partial \mathfrak{I}_\tau}{\partial z} - z \frac{\partial \mathfrak{I}_\tau}{\partial y} \right) \mathfrak{D}\tau, \quad \nu \int_\tau \rho \left(z \frac{\partial \mathfrak{I}_\tau}{\partial x} - x \frac{\partial \mathfrak{I}_\tau}{\partial z} \right) \mathfrak{D}\tau, \quad \nu \int_\tau \rho \left(x \frac{\partial \mathfrak{I}_\tau}{\partial y} - y \frac{\partial \mathfrak{I}_\tau}{\partial x} \right)$$

De mindig föltehető, hogy oly folytonos függvény a ρ, hogy $\mathfrak{I}_\tau$ második deriváltjai is határozott értékkel léteznek és folytonosak a τ térben, tehát:

$$\rho = -\frac{1}{4\pi} \Delta \mathfrak{I}_\tau$$

Ezt beírva és számbavéve, hogy a τ téren kívül $\Delta \mathfrak{I}_\tau = 0$. Terjesszük ki az integrálásokat oly gömbtérre, amelynek a belsejében van a (τ) tér. Azután végezzünk parciális integrációkat éspedig az integrálokban levő második deriváltakról. Ennek megtörténtével az új térintegrálokon totális redukciókat végezhetünk. Ámde a gömb sugarának határtalan növelésével a fölületi integrálok zérusba konvergálnak (az J_τ potenciál deriváltjainak a végtelenben való viselkedése miatt), tehát az eredeti integrálok is eltünnek. Csak az origói forgató hatást tekintettük ugyan, de az origó megválasztására semmi kikötést nem tettünk, tehát bármely centrumú Newton-féle forgató hatásról áll a tétel és így bármely tengelyűről is áll.

Két anyagi rendszer Newton-féle toló és forgató hatása egymáson.

8. A most megállapitott tantételnek nevezetes folyománya, hogy két anyagi rendszernek egymáson ellentétesen egyenlő a Newton-féle toló és forgató hatása, utóbbit ugyanazon centrum vagy tengely körül gondolva. Ugyanis egyik rendszernek sincs önmagán ilyen hatása; hogy tehát a kettőnek a maga teljes rendszerén se lehessen, szükségképen való, hogy egymáson ellentétesen egyenlő legyen.

Egy radiális tömöttségű gömbhéjnak és valamely más testnek a Newton-féle toló és forgató hatása egymáson.

9. A τ tért kitöltő (m) testtől (M) testnek DM tömegű (x, y, z) helyű elemi része:

$$\nu \, DM \left(\frac{\partial \mathfrak{T}_\tau}{\partial x}, \frac{\partial \mathfrak{T}_\tau}{\partial y}, \frac{\partial \mathfrak{T}_\tau}{\partial z} \right)$$

Newton-féle hatást visel. Következőleg az egész (M) testen az (m) test Newton-féle toló, illetőleg origói forgató hatásának a komponensei:

$$\nu \int_{(M)} \frac{\partial \mathfrak{T}_\tau}{\partial x} DM, \text{stb., illetőleg } \nu \int_{(M)} \left(y \frac{\partial \mathfrak{T}_\tau}{\partial z} - z \frac{\partial \mathfrak{T}_\tau}{\partial y} \right) DM, \text{stb.}$$

10. Tegyük fel most, hogy az (m) test egy radiális tömöttségű gömbhéj, amelynek a külső határán is kívül van az (M) test. Ha az (m) gömbhéj centrumának és (DM)-nek a távola R, akkor a Newton-féle potenciálról előadottak 13. artikulusa szerint az x, y, z helyen:

$$\mathfrak{T}_\tau = \frac{m}{R}$$

Jelölje most a, b, c a gömbhéj centrumának a koordinátáit. Akkor:

$$R^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2,$$

tehát

$$\frac{\partial I_r}{\partial x} = m \cdot \frac{a-x}{R^3}, \text{ stb.}$$

Ebből folyólag

$$\frac{\partial I_r}{\partial x} = -m \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial a}, \text{ stb.}$$

$$y \frac{\partial I_r}{\partial z} - z \frac{\partial I_r}{\partial y} = -m \left(b \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial c} - c \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial b} \right), \text{ stb.}$$

s következőleg az (M) testen a gömbhéj Newton-féle toló, illetőleg origói forgató hatásának a komponensei:

$$-\gamma m \frac{\partial}{\partial a} \int_{(M)} \frac{DM}{R}, \text{ stb.}$$

illetőleg:

$$-\gamma m \left(b \frac{\partial}{\partial c} \int_{(M)} \frac{DM}{R} - c \frac{\partial}{\partial b} \int_{(M)} \frac{DM}{R} \right), \text{ stb.}$$

vagyis ha az (M) rendszer a T tért foglalja el és így (M) Newton-féle potenciálját az a, b, c centrumban I_r jelöli, akkor

$$-\gamma m \frac{\partial I_r}{\partial a}; \text{ stb. illetőleg: } -\gamma m \left(b \frac{\partial I_r}{\partial c} - c \frac{\partial I_r}{\partial b} \right); \text{ stb.}$$

teszik az (M) testen a gömbhéj Newton-féle toló, illetőleg origói forgató hatásának a komponenseit.

A 8. artikulusból folyólag az ezekkel ellentétesen egyenlő vektorok teszik a gömbhéjon az (M) test Newton-féle toló illetőleg origói forgató hatását. (Vegyük észre, hogy a centruma körül se nem művel, se nem visel Newton-féle forgató hatást a gömbhéj, mert ha az origót a gömbhéj centrumába helyezzük, akkor $a=0$, $b=0$, $c=0$)

11. A gömbhéj üregében a gömbhéj potenciálja független lévén a helytől, koordinátaderiváltjai zérusok, tehát a gömbhéj üregében lévő tömegelem a gömbhéjtól Newton-féle hatást nem visel. Következőleg a gömbhéj üregében lévő testen a gömbhéjnak egyáltalán nincs Newton-féle hatása.

Két radiális tömöttségű gömbhéj Newton-féle toló és forgató hatása egymásra.

12. Tegyük föl most, hogy (M) test szintén radiális tömöttségű gömbhéj s az (m) tömegű gömbhéj külső felületén is egészen kívül van. A két centrum távolságát R_0 jelölje. Akkor az (M) Newton-féle potenciálja az (m) centrumában, a, b, c helyen

$$T_p = \frac{M}{R_0}$$

Következőleg a 10. artikulus vége szerint az (M) gömbhéj Newton-féle toló, illetőleg origói forgató hatásának komponensei az (m) gömbhéjon, ezek:

$$\nu m M \frac{\partial \frac{1}{R_0}}{\partial a}, \text{ stb. illetőleg: } \nu m M\left(b\frac{\partial \frac{1}{R_0}}{\partial c} - c\frac{\partial \frac{1}{R_0}}{\partial b}\right), \text{ stb.}$$

Egy (m) tömegű p centrumú gömbhéj oly Newton-féle toló és origói forgató hatást visel tehát egy (M) tömegű P centrumú radiális tömöttségű külső gömbhéjtól, amenőt p helyen (m) tömegű igen kis test viselne P helyen levő (M) tömegű igen kis testtől, oly kicsinyeket gondolva, amelyeknek a méretei a pP távolhoz képest elenyészőek.

Alkalmazás az égi testekre.

13. Égi testek egymástól viselt Newton-féle toló hatását, midőn aránylag nincsenek távol azok egymástól, annyiban lehet megközelitőleg úgy számitani, mintha aránylag távol volnának egymástól, amenynyiben megközelitőleg radiális tömöttségű gömböknek tekinthetők. Amennyiben pedig ilyenekül tekinthetők, annyiban a 10. artikulus befejező észrevétele szerint a tömegcentrumuk körül számottevő Newton-féle forgató hatást sem viselnek. Ezekhez a megismerésekhez fűződik Newton óta a bolygók megközelitőleges mozgástana. Hogy pedig ebből a mozgástanból vont következtetések nem egészen egyeznek a bolygók tényleges mozgásával, azt az égi mekanika művelői nem abban találják, hogy nem pontosan radiális tömöttségű gömbök azok és abban sem találják, hogy más eredetű erők is hatnak az égi testek között, amelyek mágneses és elektromos állapotuktól származnak; és még abban sem, hogy

talán az éterben ellenállásra talál a mozgásuk, hanem a tömeghatás Newton-féle meghatározásának a pontatlanságában keresik.

A fizikai vizsgálódásokban azonban egyelőre mindig föltesszük, hogy megválasztható úgy a koordinátarendszer, hogy abban egy elemi részre ható szabaderő a Newton-féle erőnek és egy olyan erőnek az összetétele, amely független a tömegektől úgy, hogy tisztán a Newton-féle erő jelenti benne a tömegektől függő erőt, a tömegerőt.

A koordinátarendszer mozgásából származó erők.

14. Egy elemi részre ható Newton-féle erő magának az elemi résznek a tömegétől is függ, amelyet, mint egy faktorát tartalmazza. De egy esetlegesen választott koordinátarendszerben általában az elemi részre ható teljes szabaderőnek a másik összetevője is függ az elemi rész tömegétől és csak az elemi részen kívül létező tömegektől nem függ az szükségképen. Azonban a tapasztalás szerint megválasztható úgy a koordinátarendszer, hogy abban ez a másik összetevő az elemi rész saját tömegétől is független, bármely elemi rész legyen is az. Egy ilyen koordinátarendszert, valamint a reá nézve nyugvó koordinátarendszereket is abszolút koordinátarend

szernek, a bennök ható erőket abszolút erőknek, a bennök végbemenő mozgást abszolút mozgásnak nevezzük. (Ilyenek közelítőleg az égi testeknek oly alakzataihoz rótt koordinátarendszerek, amelyek hosszú idő óta változatlanoknak látszanak). Más koordinátarendszerekben általában az ő abszolut mozgásuktól függő erők csatlakoznak, mint összetevők az abszolút szabaderőkhöz (az abszolút koordinátarendszerekben ható szabaderőkhöz) és ezeknek az összetevőknek egyik faktora, a hatásukat viselő elemi részek tömege.

15. Jelöljék ugyanis egy abszolut koordinátarendszerben t pillanatban x', y', z' egy elemi rész koordinátáit és egy abszolút mozgásban levő koordinátarendszerben ugyanannak x, y, z legyenek a koordinátái. Ha az utóbbi (mozgó) rendszer origójának a koordinátái az előbbiben t pillanatban a, b, c, tengelyeinek iránykoszinuszai pedig rendre: $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, illetőleg $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$, illetőleg $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ és ha azt írjuk, hogy

$$\ddot{a} + \ddot{\alpha}_1 x + \ddot{\alpha}_2 y + \ddot{\alpha}_3 z + 2(\dot{\alpha}_1 \dot{x} + \dot{\alpha}_2 \dot{y} + \dot{\alpha}_3 \dot{z}) \equiv -\mathcal{A}$$
$$\ddot{b} + \ddot{\beta}_1 x + \ddot{\beta}_2 y + \ddot{\beta}_3 z + 2(\dot{\beta}_1 \dot{x} + \dot{\beta}_2 \dot{y} + \dot{\beta}_3 \dot{z}) \equiv -\mathcal{B}$$
$$\ddot{c} + \ddot{\gamma}_1 x + \ddot{\gamma}_2 y + \ddot{\gamma}_3 z + 2(\dot{\gamma}_1 \dot{x} + \dot{\gamma}_2 \dot{y} + \dot{\gamma}_3 \dot{z}) \equiv -\mathcal{C}$$

akkor

$$\ddot{x}' = \alpha_1 \ddot{x} + \alpha_2 \ddot{y} + \alpha_3 \ddot{z} - \mathcal{A}, \text{ stb., tehát}$$

$$\ddot{x} = (\alpha_1 \ddot{x}' + \beta_1 \ddot{y}' + \gamma_1 \ddot{z}') + (\alpha_1 \mathcal{A} + \beta_1 \mathcal{B} + \gamma_1 \mathcal{C}), \text{ stb.}$$

ahol $\alpha_1 \ddot{x}' + \beta_1 \ddot{y}' + \gamma_1 \ddot{z}'$, stb. az x', y', z' rendszerbe tartozó gyorsulásnak az x, y, z rendszerbe tartozó komponensei. Eszerint az elemi résznek az absolute mozdulatlan x', y', z' koordinátarendszerbe tartozó szabadgyorsulásához az absolute mozgó x, y, z koordinátarendszerben oly gyorsulás csatlakozik, amelynek a komponensei éppen a mozgó rendszerben:

$$A\alpha_1 + B\beta_1 + C\gamma_1$$
$$A\alpha_2 + B\beta_2 + C\gamma_2$$
$$A\alpha_3 + B\beta_3 + C\gamma_3$$

Az elemi rész szabad gyorsulásához csatlakozik ez, vagyis totális gyorsulásának a szabad részéhez, mert szabad gyorsulás, ugyanis teljesen független az elemi rész kényszerétől. Ha mármost az elemi rész tömege $\mathfrak{D}m$, akkor az elemi részre a nyugvó koordinátarendszerben ható szabaderőhöz a mozgóban oly erő csatlakozik, amelynek a komponensei magában a mozgó rendszerben számítva:

$$(A\alpha_1 + B\beta_1 + C\gamma_1)\,\mathfrak{D}m$$
$$(A\alpha_2 + B\beta_2 + C\gamma_2)\,\mathfrak{D}m$$
$$(A\alpha_3 + B\beta_3 + C\gamma_3)\,\mathfrak{D}m$$

Ezeket hozzá kell adnunk a nyugvó rendszerben ható szabaderőnek a mozgó rendszerbe tartozó komponenseihez, hogy megkapjuk a mozgó rendszerben ható szabaderő komponenseit a mozgó rendszerben.

A földünkhöz rött koordinátarendszerben a föld abszolut mozgásából származó erő.

16. Most ezeket a kifejezéseket a földhöz rögzített koordinátarendszerre fogjuk alkalmazni, de csak bizonyos megközelitőleges számitás rendén. Ugyanis földünk tömegcentrumának az abszolút gyorsulását 0-nak fogjuk számitani. Továbbá úgy fogunk számitani, mintha földünk a „sarkain" s egyben a tömegcentrumán is átvonuló s állandó abszolút irányú tengely körül állandó szögsebességgel forogna. A földhöz rögzitett x, y, z koordinátarendszer origóját a föld tömegcentrumába, z tengelyét a föld forgásának a tengelyébe és pedig délről északnak helyezzük, midőn aztán reá nézve a forgás pozitiv értelmű, mert mindig „jobbra forduló" tengelyrendszert használunk. Most:

$$\ddot{a}=0, \quad \ddot{b}=0, \quad \ddot{c}=0$$

és úgy gondolva az x', y', z' abszolút koordinátarendszert, hogy z' tengelyének az iránya egyezzék a z tengely irányával és kezdetben x' tengelyének az iránya egyezzék az x tengelynek az irányával, a forgás szögsebességét pedig ω-vel jelölve.

$$\alpha_1 = \cos \omega t \qquad \beta_1 = \sin \omega t \qquad \gamma_1 = 0$$
$$\alpha_2 = -\sin \omega t \qquad \beta_2 = \cos \omega t \qquad \gamma_2 = 0$$
$$\alpha_3 = 0 \qquad \beta_3 = 0 \qquad \gamma_3 = 1$$

Ezek behelyettesítése után némi összevonások rendén odajutunk, hogy

$$A\alpha_1 + B\beta_1 + C\gamma_1 = \omega^2 x + 2\omega\dot{y}$$
$$A\alpha_2 + B\beta_2 + C\gamma_2 = \omega^2 y - 2\omega\dot{x}$$
$$A\alpha_3 + B\beta_3 + C\gamma_3 = 0$$

Tehát a földhöz rögzített koordinátarendszerünkben a $\mathfrak{D}m$ tömegű x, y, z helyű $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ sebességű elemi részre

$$(\omega^2 x + 2\omega\dot{y},\ \omega^2 y - 2\omega\dot{x},\ 0)\,\mathfrak{D}m$$

szabaderő is hat azon a szabaderőn kivül, amely egy abszolút koordinátarendszerben hat reá. Ezt a föld forgásából származó erőnek mondjuk. „Abszolúte" nem létezik, mert egy abszolút koordinátarendszerben nem létezik, csupán csak relative létező erő, mint toldaléka az abszolút szabaderőnek a földhöz viszonyított mekanikai állapotokban és épúgy megilleti egy más égi test elemi részeit, mint magának a földnek, illetőleg a földhöz tartozó testeknek az elemi részeit. — Nem egészen pontos, mert kiszámításában oly mozgást tulajdonítottunk a földnek, amely eltér annak a valóságos mozgásától, de földünk tömegcentrumának az abszolút gyorsulása igen kicsiny lévén a talált szabadgyorsuláshoz mérten és földünk igen nagy megközelítéssel állandó szögsebességgel forogván oly tengely körül, amely abszolút irányát igen lassan változtatja, igen jól megközelítettük a valóságot.

A föld abszolút forgásából származó erő elemzése.

17. Ezen erő mindig merőleges a föld forgásának a tengelyére, mert e tengelyre tartozó komponense zérus. Két egyszerűbb erő összetétele, amelyek maguk is merőlegesek a föld forgás-tengelyére. Az egyik egyszerűbb összetevő

$$(x, y, 0)\, w^2 \mathfrak{D}m$$

a másik pedig

$$(\dot{y}, -\dot{x}, 0)\, 2w \mathfrak{D}m$$

Az elsőnek nagysága:

$$\sqrt{x^2+y^2}\, w^2 \mathfrak{D}m$$

azaz, ha az x, y, z pont távola a forgástengelytől r_0, úgy a nagysága

$$r_0 w^2 \mathfrak{D}m$$

iránykoszinuszai pedig:

$$\left(\frac{x}{r_0}, \frac{y}{r_0}, 0\right)$$

vagyis a nagysága az (x, y, z) pont tengelytávolának a szögsebesség négyzetének és a tömegelemnek a szorzata; az iránya pedig a forgás tengelyéből e tengelyre merőlegesen az (x, y, z) pontba mutató irány. Ezt centrifugális erőnek nevezzük. Vegyük észre, hogy gradiens, amelynek a potenciálja:

$$\frac{x^2+y^2}{2} w^2 \mathfrak{D}m$$

Dacára a w szögsebesség, kivált pedig négyzete kicsiségének, a földteke nagy részén tesz számot ez a centrifugális erő r_0 nagysága miatt.

A föld forgásából származó erő másik összetevőjének a nagysága

$$\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2} \cdot 2 w \mathfrak{D}m$$

Ez tehát a hely egyenlítői síkjába tartozó $(\dot{x}, \dot{y}, 0)$ sebességi komponens nagyságának, a föld kétszeres szögsebességének és a tömegelemnek a szorzata. Az iránykoszinuszai pedig, ha a sebesség egyenlítői összetevőjének $(\dot{x}, \dot{y}, 0)$-nak a nagyságát $\dot{s}_0$ jelöli, a következők:

$$\left(\frac{\dot{y}}{\dot{s}_0}, -\frac{\dot{x}}{\dot{s}_0}, 0\right)$$

Eszerint amellett, hogy a hely egyenlítői síkjában van ez az erő, merőleges a teljes sebesség egyenlítői összetevőjére $(\dot{x}, \dot{y}, 0)$-ra, mégpedig oly értelemben, merőleges reá, mint jelenlegi koordinátarendszerünkben az x tengely az y tengelyre (ne feledjük: a z tengely földünk déli sarka felől az északi sarka felé mutat és koordinátarendszerünk jobbra forduló rendszer). Nyilvánképen a teljes sebességre is merőleges ez az erő. Ezt az erőt Clairaut- vagy Coriolis-féle erőnek nevezzük. Ha nem nagy a sebesség, illetőleg ennek az egyenlítői összetevője, akkor igen kicsiny ezen erő, úgy hogy közönségesen figyelmen kívül hagyhatjuk.

18. Nyugalomban (t. i. földünkre nézve relatív nyugalomban) nyilvánképen kimarad ez az erő. Továbbá oly kényszerekben, amelyekben érvényes a kinetikus energia tétele s az elemi részek lehetséges helyzetei egy független változó segélyével határozhatók meg, szintén kimarad a Clairaut-féle erő. A kinetikus energia egyenlete ugyanis így van:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int \dot{s}^2 \mathfrak{D}m = \int(\dot{x}\,\mathfrak{D}X + \dot{y}\,\mathfrak{D}Y + \dot{z}\,\mathfrak{D}Z)$$

Ha érvényes ez, és egyetlen parametrum meghatározza a mozgást, akkor ezen egyenlet meghatározza a mozgást, mert a parametrum kezdeti értékéhez és kezdeti változási sebességéhez meghatározza a parametrumot, mint az idő függvényét, a parametrum pedig meghatározza a koordinátákat. – Ámde most az egyenletből a $(\mathfrak{D}X, \mathfrak{D}Y, \mathfrak{D}Z)$ szabaderőnek Clairaut-féle része kiesik amiatt, hogy merőleges a sebességre.

19. A centrifugális erő a forgástengelytől

nagy r_0 távolságokban számot tesz w kicsiségének dacára is. Ilyenkor pedig akkora térben, amelynek a méretei r_0-hoz képest nem tesznek számot, mindig ugyanannak számithat úgy irány, mint nagyság szerint. Ennek és a földtől származó Newton-féle erőnek eredőjét nevezzük nehézségi erőnek és a tömegelemmel való osztatát nehézségi gyorsulásnak. Akkora térben, amekkorában a centrifugális gyorsulás mindenütt ugyanannak számithat, a földtől származó Newton-féle gyorsulás is mindenütt ugyanannak számithat, tehát a nehézségi gyorsulás is.

A nehézségi gyorsulás viszonya a hold gyorsulásához.

20. Hogy az ingával meghatározott nehézségi gyorsulás nagysága az előbbi artikulusban definiált nehézségi gyorsulás nagyságával közelitőleg egyezésben van, épen, mint döntő tény szerepelt a Newton-féle erő történetében kapcsolatosan azzal a föltevéssel, hogy a föld közelitőleg radiális tömöttségű gömbnek tekinthető a tőle származó Newton-féle erők számitásában és, hogy földünk abszolút mozgását illető föltevéseink közelitőleg helyesek. A holdnak a földhöz viszonyitott mozgásából ugyanis megköze-

litőleg kiadódik a hold haladó mozgásának a földtől származó abszolut gyorsulása, t. i. a föld Newton-féle hatásából származó gyorsulása. Jelölje ennek a nagyságát G' midőn a hold és a föld tömeg centrumának a távola R'. A föld légkörének O pontjában pedig a nehézségi gyorsulásnak és a földtől származó centrifugális gyorsulásnak a különbsége az inga meghatározás és a centrifugális gyorsulás kiszámítása szerint G legyen. Ennek az O pontnak a föld tömegcentrumától való távolát R jelölje. Ha az egész föld tömege M, akkor

$$G' = \gamma \frac{M}{R'^2}$$

és, ha a légkörünknek az R sugarú gömbfelületen túl lévő része m tömegű, úgy

$$G = \gamma \frac{M-m}{R^2}$$

mert a légkörünknek ettől a részétől származó Newton-féle hatás az O helyen közelítőleg zérus. De m az M-hez képest elhanyagolható, tehát amennyiben föltevéseink közelítőleg helyesek, kell, hogy még közelítőleg:

$$R'^2 G' = R^2 G$$

legyen. Hogy még Newton idejében végzett mérések eléggé egyeztek ezzel a posztulátummal, abból merített bizalmat Newton a ma róla nevezett tömegerők általánossága iránt.

A Clairaut-féle erő mérő eszközeinkben.

21, Midőn valamely erő mérésében nagy pontosságra törekszünk, akkor figyelemmel kell lennünk azon legkisebb más erőkre is, amelyek eszközünkben mutatkoznak. Első sorban meg kell vizsgálnunk, hogy nincsen-e számot tévő befolyásuk mérésünkre. Ami e tekintetben a Clairaut-féle erőt illeti, azon eszközökben, amelyeknek nem az a föladatuk, hogy mint a Foucault-féle inga, épen magát a Clairaut-féle erőt segítsenek tanulmányozni, a Clairaut-féle erőt nem is szokás számbavenni. Más erők vizsgálatára berendezett eszközeinkben általában nem is szükséges ennek a számbavétele, jóllehet a bennük lehetséges mozgások függenek a Clairaut-féle erőtől. Ezen erő ugyanis arra igen kicsiny, hogy a hatásánál fogva számottevően másféle mozgásfaj fejlődjék ki eszközeinkben a mérések folyamán mint az, amelyet a mérések céljaira kivánunk, milyen pl. az egyfonalú torziós mérlegben a tiszta forgó mozgás vertikálisan feszülő testszál körül, vagy amilyen egy merev inga puszta gördülő mozgása s i.t. megpedig csupa lengési mozgások. De, hogy a kivánt mozgásfaj esetről esetre mely speciális mozgásban valósul meg a kezdeti helyzetnek, kezdeti sebességeknek s az épen mérendő erőnek megfelelően, közönségesen erre sincs számot tévő befolyása a Clairaut-féle erőnek. Egyébiránt rendszerint egy lineáris differenciál egyenlet jellemzi mérőeszközeinkben a mozgást, nevezetesen olyankor, hogy igen kis amplitudós és igen kis szögsebességű lengésekkel van dolgunk azokban, amelyek folyamán a környezeti ellenállás forgató momentuma nagy pontosság szerint a szögsebességgel arányos állandó negativ együttható szerint. Ilyenkor a Clairaut-féle erő forgató momentuma is nagy pontosság szerint a szögsebességgel arányos állandó együttható szerint és következőleg a környezet ellenállásában foglalt együttható megváltoztatásának, mégpedig csak igen kis megváltoztatásának felel meg.

A Clairaut-féle erő a szabadesésben.

22.) Másképpen van a dolog a Foucault-féle ingával, amelynek vertikális tengely körül való forgását a Clairaut-féle erő okozza és nem különben másképen vagyunk egy elejtett test szabadesésével midőn is ezen erő a tömegcentrumnak a vertikális iránytól eltérő mozgását okozza, amelynek a pályája nagy megközelítés szerint keletre hajló harmadrendű algebrai síkgörbe. Különös példaként győződjünk meg az utóbbi állításról oly koordinátarendszerben, amelynek a z tengelye vertikális lefelé, x tengelye a hely délköri síkjában van, y tengelye nyugatról keletre mutat. A Clairaut-féle gyorsulás komponensei ebben a tengelyrendszerben, ha a hely geografiai szélességének a koszinusza $= \alpha$ és a szinusza $= \beta$:

$$-2w\beta\dot{y},\quad 2w(\beta\dot{x}+\alpha\dot{z}),\quad -2w\alpha\dot{y}$$

Ebből folyólag egy szabadon eső test (ξ, η, ζ) tömegcentrumának a gyorsulási komponensei ama koordinátarendszerben:

$$\ddot{\xi} = -2w\beta\dot{\eta}$$

$$\ddot{\eta} = 2w(\beta\dot{\xi}+\alpha\dot{\zeta})$$

$$\ddot{\zeta} = -2w\alpha\dot{\eta}+g$$

Ha tehát kezdetben nem volt sebessége a tömegcentrumnak, akkor egy első integráció szerint:

$$\dot{\xi} = -2w\beta\eta$$

$$\dot{\eta} = 2w(\beta\xi+\alpha\zeta)$$

$$\dot{\zeta} = -2w\alpha\eta+gt$$

Ezek elseje és harmadika szerint $\ddot{\eta}$ kifejezése a w^2 tartalmú tagok elhagyásával:

$$\ddot{\eta} = 2wg\alpha t$$

tehát

$$\dot{\eta} = wg\alpha t^2$$

és ha kezdetben az origóban volt a tömegcentrum, akkor

$$\eta = \frac{1}{3} w g \alpha t^3$$

Ellenben innen ugyanoly megközelitéssel, $\dot{\xi}$ és $\dot{\zeta}$ egyenletéből:

$$\dot{\xi} = 0 \quad , \quad \xi = 0$$

$$\dot{\zeta} = gt, \quad \zeta = \frac{1}{2} g t^2$$

Az utóbbiak megközelitésünkben olyanok, mintha a Clairaut-féle erő nem is léteznék.

Az η és ζ kifejezéséből eliminálván az időt:

$$\eta = \frac{2}{3} w \alpha \sqrt{\frac{2\zeta^3}{g}}$$

Ezen egyenlet és $\xi = 0$ a pálya koordináta egyenlete. Minthogy η pozitiv, az y tengely pedig kelet felé mutat, a görbe kelet felé hajlik el a vertikális iránytól.

A gravitációs konstans meghatározása Cavendich kisérletével (1798).

23. A háromszögű gerenda () egy kerék segélyével a róla lecsüngő nagy golyókkal egyetemben elforditható. A két nagy és két kis golyó centruma közös horizontális sikban körvonalon van. Eleinte a két kis golyót tartó fenyűpálca merőleges a két nagy golyó centrumát összekapcsoló egyenesre s ilyenkor nincs torziója a fonálnak (vékony drótnak) és egyik nagy golyónak sincs forgató hatása a kis golyópáron meg

a fenyüpálcán, amelyek itt a lengőt alkotják.

Más helyzetbe fordítván azonban a gerendát, a Newton-féle erő a fonál körül forgató hatást fejt ki a lengőn. A fenyüpálca el kezd fordúlni a fonál körül és a nagy golyók új helyzetéhez a kis golyóknak is bizonyos új nyugalmi helyzete fog tartozni. Ha a torzió együtthatója: $\varkappa$, és nyugalomban a lengőn a nagy golyók forgató momentuma a fonál körül: $\mathfrak{F}^{(0)}$, a torzió szöge pedig Θ_0, akkor

$$\mathfrak{F}^{(0)} = \varkappa\,\Theta_0$$

mert a torzió mérleg általános mozgásegyenletében, úgymint az

$$\mathfrak{T}\ddot{\Theta} = \Phi + \mathfrak{F}$$

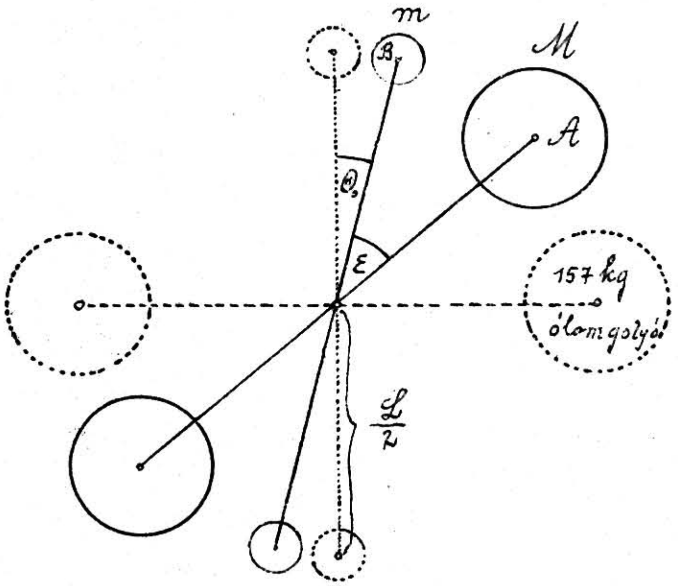
egyenletben

$$\Phi = -\varkappa\,\Theta \quad \text{és} \quad \mathfrak{F} = -2\kappa\dot{\Theta} + \text{a nagy golyók forgató momentuma}$$ és nyugalomban

$$\ddot{\Theta} = 0\,,\ \dot{\Theta} = 0\,,\ \Theta = \Theta_0\,,\ \mathfrak{F} = \mathfrak{F}^{(0)}$$

Első közelítésben a fenyüpálcától viselt forgató hatás elhanyagolható s abban a föltevésben, hogy a kis golyók centrális átlója, meg a nagy golyók centrális átlója kis szögön hajlik egymáshoz, elég mindegyik kis golyón csak azt a hatást számítani, amely a közelebbi nagy golyótól származik. Ha az említett átlóknak, u. m. a kis golyók centrumát összekötő egyenesnek és a nagy golyók centrumát összekötő egyenesnek a hegyes szöge ε, ez egyenesek hossza pedig $\mathcal{L}$, akkor mindegyik kis golyó centrumának a közelebbi nagy golyó centrumától mért távolsága:

$$\mathcal{L}\sin\frac{\varepsilon}{2}$$



Mivel tehát a golyók homogéneknek tekinthetők, úgy a két szomszédos golyó közt a Newton-féle hatás nagysága:

$$\nu\frac{\mathcal{M}m}{\mathcal{L}^2\sin^2\frac{\varepsilon}{2}}$$

odaértve, hogy $\mathcal{M}$ illetőleg m a tömegük. Következőleg a nagy golyóktól származó forgató hatás első megközelítésben:

$$\mathcal{F}^{(0)} = 2\nu\frac{\mathcal{M}m}{\mathcal{L}^2\sin^2\frac{\varepsilon}{2}}\cdot\frac{\mathcal{L}}{2}\cos\frac{\varepsilon}{2} \equiv \nu\frac{\mathcal{M}m}{\mathcal{L}}\frac{\cos\frac{\varepsilon}{2}}{\sin^2\frac{\varepsilon}{2}} \equiv \kappa\Theta_0$$

Ebből kiadódik a ν.

A lengés felhasználásával is meghatározhatjuk pedig a nyugalmi szöget. Ugyanis azzal a föltétellel állapitottuk meg a torziómérleg használatát, hogy addig, amig $\Theta-\Theta_0$ igen kicsiny, a mérendő forgató momentum a Θ lineáris függvénye $= \mathcal{F}_0 - f\Theta$ és hogy $\kappa + f > \frac{\varkappa^2}{J}$.

Most a mérendő forgató momentum a nyugalmi helyzettől ω szögnyire, azaz $\Theta = \Theta_0 + \omega$ teljes szögön ez:

$$\gamma \frac{Mm}{L} \frac{\cos\frac{\varepsilon-\omega}{2}}{\sin^2\frac{\varepsilon-\omega}{2}}$$

mert amidőn a Θ_0 megváltozik ω-val, akkor az ε megváltozik $-\omega$-val. Ez a forgató momentum másodrendű megközelitésben lineáris függvénye ω-nak és egyben Θ-nak. Benne a kiszámitás szerint f ($-\omega$ együtthatója) ugyan negativ, de oly kicsiny, hogy a fonál gyanánt alkalmazott fémszál λ együtthatójával $\lambda + f$ mégis nagyobb, mint $\frac{\varkappa^2}{J}$, tehát lengő mozgás létesül. Eddigi mérések szerint, amelyeket ujabban kisebb méretű eszközökkel és másfélékkel is (kettős inga, mérleg) végeztek:

$$\gamma = 6675.\ 10^{-11} cm^3 sec^{-2} gr^{-1}$$

Elektrosztatikai erők.

A Coulomb-féle elemi erő a levegőben.

24. Ezentúl mindig a földhöz rögzitett koordinátarendszerre gondoljunk. Mozgást, nyugvást mindig ilyenhez viszonyitva értsünk.

Coulombnak az egyfonalú torziómérleggel végzett vizsgálatai szerint két nyugvó elektromos test (1) és (2) száraz, portalan, számottevően nem ionizált nyugvó levegőben egymástól aránylag távol, elektromossága révén közelítőleg vagy távolítólag hat egymásra, mindegyike közelítőleg, vagy mindegyike távolítólag a másikra és egyenlő nagyságú erővel, amelynek a nagysága fordítva arányos a távolságuk négyzetével és csakis ezáltal függ a helyzetüktől; mégpedig a távolságok reciprok négyzete oly pozitív p_1, p_2 faktorpárral tezi a hatás nagyságát, amelyben az egyik faktor p_1 az egyik test, a másik faktor p_2 a másik test elektromos állapotától függ, mihez képest az egyik faktor az egyik test elektromosságához, a másik a másik testéhez tartozik úgy, hogy, ha (1) és (2) közt elektromosságaik révén

$$\frac{p_1 p_2}{r_{12}^2}$$

a hatás nagysága, (1) és (3) között pedig elektromosságaik révén

$$\frac{p_1 p_3}{r_{13}^2}$$

a hatás nagysága, akkor (2) és (3) között elektromosságaik révén

$$\frac{p_2 p_3}{r_{23}^2}$$

a hatás nagysága, odaértve, hogy r_{12}, r_{13}, r_{23} rendre a kölcsönös távolságot jelentik. De a hatás közelítő, vagy távolító voltát is egyszerű matematikai rendelkezéssel lehet jellemezni: a testek elektromos állapotához rendelt előjel által lehet azt jellemezni azzal a kikszabással, hogy ellenkező előjelek közelítő, azonos előjelek távolító hatást jelentsenek, mert ha elektromossága révén (1) meg (2) távolítólag hat egymásra és (1) meg (3) is távolítólag hat egymásra, akkor (2) meg (3) is távolítólag hat egymásra; ha (1) meg (2) távolítólag hat, (1) meg (3) közelitőleg hat egymásra, akkor (2) meg (3) közelitőleg hat egymásra; ha (1) meg (2) közelitőleg hat egymásra és (1) meg (3) szintén közelitőleg, akkor (2) és (3) távolítólag hat egymásra, épen miként az előjelek kiszabása kivánja.

A pozitiv p faktorokkal és az előjelekkel művelt jellemzést összekapcsoljuk. Ha a Coulomb-féle hatásban egy test elektromosságához p faktor és $(+)$ előjel tartozik, akkor mármost $(+p)$ skalárist rendelünk hozzá; ha azonban p faktor és $(-)$ előjel tartozik az elektromossághoz, akkor $(-p)$ skalárist rendelünk hozzá. Jelölje ezt a $(+)$ vagy $(-)$ skalárist q, úgy az elektromossága révén (1)-nek a hatását (2)-re

$$\left(\frac{x_2 - x_1}{r_{12}}, \frac{y_2 - y_1}{r_{12}}, \frac{z_2 - z_1}{r_{12}}\right) \frac{q_1\, q_2}{r_{12}^2}$$

vektor határozza meg bármilyen q_1-ben és q_2-ben az előjel; mert egyező előjelek esetén távolítást, ellenkezők esetén közelítést jelent ez a vektor nyilvánképen.

A Coulomb-féle elemi erő homogén, izotrop, egyenletes állapotú, nyugvó környezetben.

25. Coulomb óta szerzett tapasztalások szerint bármely efféle közegben legyen két nyugvó elektromos test egymástól aránylag nagy távolságban, ha egész állapotuk változatlan, akkor elektromosságuk révén közönségesen az imént kifejezett módon hatnak egymásra távolítólag vagy közelítőleg. Ha pedig e módon hatnak, akkor speciálisan „egyszerűen elektromosnak" mondjuk azokat és egymásra hatásukat Coulomb-féle hatásnak mondjuk, egyébiránt valahányszor minden megszorítás nélkül elektromosoknak mondunk valamely testeket, amelyek aránylag távol vannak egymástól, mindig egyszerűen elektromosokat fogunk gondolni. De a hatásuk nagysága ugyanazon állapotuk és ugyanazon távolságuk mellett különböző közegben általában különböző, tehát a $q_1 q_2$ szorzat nagysága különböző környezetben általában különböző. A vákuumban (tiszta éterben) $q_1 \equiv e_1$, $q_2 \equiv e_2$ legyen. Ha egy más közegben $q_1 q_2 = e_1 e_2 : \varepsilon$, akkor a közegtől való függés azzal van jellemezve, hogy ε csak a közeg minőségétől és állapotától függ s egyetlen materiális közegben sem kisebb, mint a vakuumban, az-az $\geqq 1$. A közeg dielektromos együtthatójának mondjuk az ε skalárist. Az e_1, e_2 stb. skaláris csupán az illető test elektromos állapotától függő (+) vagy (–) tényező, ame-

lyet az illető test elektromos töltésének, vagy elektromossága kvantumának nevezzük. Ehhez képest a Coulomb-féle hatás nagysága arányos az „e" elektromos töltések abszolút szorzatával és fordítva arányos a távolság négyzetével oly ε arányossági osztó szerint, amely csupán a homogén és izotrop környezet minőségétől s állapotától függ: éspedig az e' töltésű test Coulomb-féle hatása az e töltésű testen, midőn aránylag nagy r távolban vannak egymástól, igen pontosan:

$$\left(\frac{x-x'}{r}, \frac{y-y'}{r}, \frac{z-z'}{r}\right)\frac{ee'}{\varepsilon r^2}$$

s az e töltésű testé az e' töltésűn az ellentétes vektor.

26. Az elektromos töltésnek, vagy az ε osztónak a jellegét nyilvánképen tetszésszerint szabhatjuk meg, mert az alapjellegekkel csupán azáltal szoríttvák meg, hogy

$$\frac{ee'}{\varepsilon r^2}$$

erőt jelent, illetőleg, hogy:

$$\frac{|ee'|}{\varepsilon} = (\text{erő}) \times (\text{hossz})^2 = \mathcal{L}^3 \mathcal{T}^{-2} \mathcal{M}^1$$

Elterjedt szokás az ε dielektromos együtthatót jellegtelennek tenni meg. Ezen szokásnak hódolva, az elektromos töltések jellege formulánk értelmében $\mathcal{L}^{3/2} \mathcal{T}^{-1} \mathcal{M}^{1/2}$. Az ε egységét már megszabtuk azzal, hogy a vakuumban $= 1$. Ezáltal az elektromos töltések egysége is meg van határozva: egységnyi azon elektromos töltés, amelynek a Coulomb féle hatása egységnyi távolban ugyanakkora töltésen a vákuumban az erő-egységgel egyenlő. Használatban van azonban az ε más egysége is, midőn aztán természetesen a vákuumban már nem eggyel egyenlő. Ez a más egység az előbbi egység 4π-ed része. Ha azonban ε helyett $4\pi\varepsilon$ szorzatot irunk a Coulomb-féle erő kifejezésében, akkor a vákuumban az új ε értéke is $= 1$. Most az $\underline{e}'$ töltés Coulomb-féle hatása az $\underline{e}$ töltésű testen

$$\left(\frac{x-x'}{r}, \frac{y-y'}{r}, \frac{z-z'}{r}\right)\frac{ee'}{4\pi\varepsilon r^2}$$

Ezen szokáshoz csatlakozzunk a következendőkben, midőn is az új ε skalarist nevezzük dielektromos együtthatónak. Most természetesen a töltések egysége más, mint az előbbi meghatározásban, éspedig egységnyi azon elektromos töltés, amelynek a Coulomb-féle hatása egységnyi távolban ugyanakkora töltésen a vákuumban az erőegység 4π-ed része.

Homogén és izotrop környezetről lévén szó, ε független a helytől, tehát a koordinátaderiváltjai zérusok s következőleg a Coulomb-féle hatás a Newton-féléhez hasonló gradiens. Ugyanis az $\underline{e}'$ töltésű testnek a Coulomb-féle hatása az $\underline{e}$ töltésűn így irható:

$$-\frac{e}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{e'}{r}, \frac{\partial}{\partial y}\frac{e'}{r}, \frac{\partial}{\partial z}\frac{e'}{r}\right) \equiv$$

$$\equiv \operatorname{grad}\left(-\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{ee'}{r}\right)$$

Elektromos test valóságos, szabad, látszatos töltése homogén és izotrop közegben.

27. Írjuk, hogy:

$$\frac{e'}{\varepsilon} = \bar{e}'$$

akkor a 26-ban meghatározott erő $= -e \operatorname{grad} \frac{\bar{e}'}{4\pi r}$, tehát azzal az erővel egyenlő, amelynek a hatását a vákuumban e töltésű test r távolból $\bar{e}'$ töltésűtől viseli, és mivel e' abszolut értéke nagyobb, mint $\bar{e}'$ abszolut értéke, ez a hatás kisebb, mint az, amelyet a vakuumban e töltésű test r távolból e' töltésűtől visel.

Később kifejtendő okon úgy magyarázzuk ezt, hogy a 25-ben gondolt föltételek alatt minden elektromos test határán igen vékony rétegben a környezet is szükségképen elektromos és a töltése ellentétes előjelű a testével, mégpedig az e töltésű test határán:

$$\frac{e}{\varepsilon} - e = -\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) e$$

és az e' töltésűnek a határán:

$$\frac{e'}{\varepsilon} - e' = -\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) e'$$

ez a töltés, mihez képest a vakuumban érvényes Coulomb-féle hatás szerint az e töltésű test az

$$e' - \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) e' = \frac{e'}{\varepsilon} \equiv \bar{e}'$$

töltésből származó hatást visel; az e' töltésű pedig az

$$e - \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) e = \frac{e}{\varepsilon} \equiv \bar{e}$$

töltésből származó hatást visel. Ehhez neveket is fűzünk. Az e és e' töltéseket a testek valóságos töltésének, az $\frac{e}{\varepsilon}=\bar{e}$ és $\frac{e'}{\varepsilon}=\bar{e}'$ töltéseket a testek teljes töltésének, vagy szabad töltésének nevezzük s a kétféle töltések különbségét u. m.:

$$\bar{e}-e=-\left(1-\frac{1}{\varepsilon}\right)e$$

$$\bar{e}'-e'=\left(1-\frac{1}{\varepsilon}\right)e'$$

az ő látszatos töltésüknek mondjuk.

Coulomb-féle elemi hatások összetétele s a Coulomb-féle potenciál.

28. Ha változatlan egyenletes állapotú, nyugvó, homogén és izotrop közegben $e_1, e_2 \ldots$ valóságos töltésű testek vannak, és ezek szabad töltése $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots$, és ha ezek a testek az e valóságos töltésű testtől aránylag nagy $r_1, r_2 \ldots$ távolságokban vannak, akkor a tapasztalás szerint az utóbbi testre elektromosságánál fogva, az előbbiek a

$$-\frac{1}{4\pi}e\,\mathrm{grad}\,\frac{\bar{e}_1}{r_1},\ -\frac{1}{4\pi}e\,\mathrm{grad}\,\frac{\bar{e}_2}{r_2},\ \ldots$$

egyes Coulomb-féle erők eredőjével hatnak nagy pontosság szerint, vagyis a

$$-\frac{e}{4\pi}\mathrm{grad}\left(\frac{\bar{e}_1}{r_1}+\frac{\bar{e}_2}{r_2}+\frac{\bar{e}_3}{r_3}+\ldots\right)$$

tömegmozgató erővel hatnak reája.

Az $$\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\bar{e}_1}{r_1}+\frac{\bar{e}_2}{r_2}+\ldots\right)$$

potenciál jellemzi tehát a testektől egy tőlük aránylag távollevő testre az ő elektromos állapotuk következtében háramló hatást változatlan egyenletes állapotú, nyugvó, homogén és izotrop közegben. A ható testektől ezen potenciál által, illetőleg e potenciál deriváltjai által függ az elektromosságuk-ból származó hatás.

Ennek nyomán általános nézetet alkotunk magunknak, azt: hogy tetszésszerinti változatlan állapotú és nyugvó környezetben levő tetszésszerinti változatlan állapotú és nyugvó elektromos anyagi rendszer elemi részeinek az elektromos állapotához oly $D\bar{e}$ pozitiv vagy negativ skaláris tartozik, hogy az anyagi rendszer elektromosságából származó tömegmozgató hatás egy nyugvó s egyáltalán változatlan állapotú elemi részen, az anyagi rendszerre kiterjesztendő:

$$\Phi \equiv \frac{1}{4\pi}\int\frac{D\bar{e}}{r}$$

összeg által, illetőleg ennek a koordinátaderiváltjai által függ valami módon az anyagi rendszertől, amely összegben r a hatást viselő elemi rész távolsága az anyagi rendszer $D\bar{e}$ skalárisú elemi részétől, minél fogva ezen Φ összeg, mint a hatást viselő elemi rész x, y, z koordinátáinak a függvénye jelentkezik. Arra utalnak pedig igen pontosan a tapasztalásaink, hogy föltételeink alatt valóban ilyen hatás háramlik az elemi részekre az anyagi rendszer elektromos állapotából.

29. A $D\bar{e}$ skalárisok jellegét és egységét egészen általánosan úgy szabjuk meg, mint előbb az e elektromos töltések jellegét és egységét s ezen $D\bar{e}$ skalárisokat az elemi részek szabad töltésének vagy elektromosságuk szabad kvantumának nevezzük.

A jelleg és egység e megválasztása mellett homogén, izotrop, változatlan egyenletes állapotú, nyugvó közegben gondolt nyugvó és változatlan állapotú elemi rész, midőn a valóságos töltése De:

$$-De \cdot \mathrm{grad}\, \Phi$$

tömegmozgató hatást visel az elektromosságoktól. Azonban más föltételek alatt általában komplikáltabb módon függ az elektromosságok tömegmozgató hatása a Φ-től, illetőleg Φ deriváltjaitól, aminek majd később fontos példáját látjuk.

30. A $D\bar{e}$ szabad töltésű elemi rész térfogatát jelölje $D\tau$ és írjuk, hogy:

$$D\bar{e} = \bar{\rho}\, D\tau$$

A $\bar{\rho}$ skalárist, mely (+), vagy (–), amint $D\bar{e}$ (+) vagy (–), az elektromosság szabadsűrűségének nevezzük. Fölteheto róla, hogy a helynek folytonos, sőt egyenletesen deriválható függvénye. Szerinte, a szabad elektromosságok T térfogatára kiterjedő integrálással:

$$\Phi = \frac{1}{4\pi} \int_T \frac{\bar{\rho}}{r}\, D\tau$$

Ezt a Newton-féle potenciált a T térben foglalt szabad elektromosságok potenciáljának és még Coulomb-féle potenciálnak is nevezzük. Ha ez, mint a hely függvénye adva van, akkor már a T térben a szabad sűrűség is mindenütt adva van, t. i. Poisson egyenletével, amely szerint a T térben

$$\bar{\rho} = -\Delta\Phi$$

mindenütt. Innen pedig a T tér összes szabad töltése:

$$\bar{e} = \int_T \bar{\rho}\, \mathfrak{D}\tau = -\int_T \Delta\Phi\, \mathfrak{D}\tau$$

Fölületi integrállá alakítva, Φ-nek a T tér S fölületén lévő normális deriváltjai határozzák ezt meg, és pedig, ha mindenütt befelé számít az n normális, akkor

$$\bar{e} = \int_S \frac{\partial\Phi}{\partial n}\, \mathfrak{D}\sigma$$

Szintúgy a T tér bármely T' részében a szabad töltés:

$$\bar{e}' = \int_{T'} \bar{\rho}\, \mathfrak{D}\tau = \int_{S'} \frac{\partial\Phi}{\partial n}\, \mathfrak{D}\sigma$$

31. Azt már nem kell külön levezetnünk, hogy ha $\bar{\rho}$ egy gömbhéjban való radiális sűrűség, akkor ezen gömbhéj Coulomb-féle potenciálja a gömbhéj belső határán is belül mindenütt ugyanaz; a gömbhéj külső határán is kivül pedig R távolban a centrumtól:

$$\frac{\bar{e}}{4\pi R}$$

Ezen kifejezésen alapúlnak a számítások Coulomb alapvető kisérletében, mert az alkalmazott golyók aránylagos távolsága nem nagy az eszközében. A Coulomb-féle meghatározásokhoz fűződő számítások tehát részben már előre föltételezik a Coulomb-féle hatást. Megjegyzendő még az is, hogy Coulomb kisérletében csak hozzávetőlegesen tekinthető radiális sürüségünek a golyók töltése és az eszköz üvegburkolata is mindig tartalmaz elektromosságot, amely hibaforrások a később tárgyalandó indukció következményei.

A Coulomb-féle fölületi potenciál.

32_1. Gyakori eset, hogy egy határrétegben igen nagy az elektromosság szabadsürüsége úgy, hogy a határrétegből számottevő hatások származnak, jóllehet szertelenül vékony a határréteg. Ilyenkor az olyan helyeken, amelyek a réteg vastagsági átmérőihez képest aránylag távol vannak a réteg legközelebbi pontjától is: a rétegből származó elektromos hatásokat nagy pontossággal fölületi potenciál által lehet kifejezni. A rétegtől elfoglalt igen vékony térközt ugyanis τ-val jelölvén, a rétegből származó potenciál:

$$\Phi_\tau = \frac{1}{4\pi}\int_\tau \frac{\bar{\rho}}{r}\,\mathfrak{D}\tau$$

Nézzük ezen potenciálnak azt az elemi részét, amely a rétegnek egy hasáb alakú normális fekvésü végtelen vékony gerezdjéből származik egy aránylag távol fekvő pontban. Ilyen elemi potenciálok összege adja a réteg egész potenciálját azon pontban.

Jelölje τ' a végtelen vékony gerezd térfogatát. Ha a gerezd alapjának a területe $\mathfrak{D}\sigma$ és a gerezd egy elemi részének hossza $\mathfrak{D}n$, akkor írhatjuk, hogy

$$\mathfrak{D}\tau = \mathfrak{D}\sigma\,\mathfrak{D}n,$$

tehát

$$\Phi_{\tau'} = \frac{1}{4\pi}\int_{\tau'} \frac{\bar{\varrho}\,\mathfrak{D}\sigma\,\mathfrak{D}n}{r} = \frac{\mathfrak{D}\sigma}{4\pi r}\int_{\tau'} \bar{\varrho}\,\mathfrak{D}n$$

mert a gerezdtől aránylag távol a gerezdből minden r ugyanannak számítható. Az

$$\int_{\tau'} \bar{\varrho}\,\mathfrak{D}n = \bar{\omega}$$

skalárist fölületi szabadsűrűségnek nevezzük, mert a $\mathfrak{D}$ fölületelemmel szorozva szolgáltatja a gerezd szabadtöltését; ugyanis a gerezd szabadtöltése =

$$\int_{\tau'} \bar{\varrho}\,\mathfrak{D}\tau = \int_{\tau'} \bar{\varrho}\,\mathfrak{D}\sigma\,\mathfrak{D}n = \mathfrak{D}\sigma\int_{\tau'} \bar{\varrho}\,\mathfrak{D}n = \bar{\omega}\,\mathfrak{D}\sigma$$

Eszerint

$$\Phi_{\tau'} = \frac{1}{4\pi}\;\frac{\bar{\omega}\,\mathfrak{D}\sigma}{r}$$

és a rétegből származó potenciál = a $\Phi_{\tau'}$-féle elemi potenciálok összege ≡

$$\Phi_{\tau} = \frac{1}{4\pi}\int_{\sigma} \frac{\bar{\omega}}{r}\,\mathfrak{D}\sigma$$

ugyanis a határréteg valamelyik oldalfölületére, vagy a térközében elterülő σ fölületre vonatkoztatott integrálás szerint. Minthogy nem pontosan egyezik a Φ_{τ} valódi értékével, ezentúl Φ_{σ}-val jelöljük:

$$\Phi_{\sigma} \equiv \frac{1}{4\pi}\int_{\sigma} \frac{\bar{\omega}}{r}\,\mathfrak{D}\sigma$$

Azonban Φ_{τ}-val minden olyan helyen eléggé egyezik, amely a réteg vastagsági átmérőihez képest a réteg minden pontjától nagy távolban van és általában csak az oly helyekre nem alkalmazhatjuk számításainkban a Φ_σ potenciált Φ_τ helyett, amelyek a réteg pontjaitól annak vastagsági átmérőihez képest nincsenek nagy távolságban.

32_2. Mindazonáltal bizonyos tekintetben hasznát vehetjük még a fölületen is a fölületi potenciálnak. Nevezetesen a Poisson-féle fölületi egyenlet Φ_σ normális deriváltjára alkalmazva:

$$\left(\frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial n}\right)_+ - \left(\frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial n}\right)_- = -\bar{\omega}$$

amely szerint a fölületi potenciállal határozhatjuk meg a réteg egy merőleges elemi részének a szabad töltését, amely $= \bar{\omega}\,\mathfrak{D}\sigma$, mint láttuk, ha $\mathfrak{D}\sigma$ az elemi rész alapjának a területe.

De ebben a Poisson-féle fölületi egyenletben a fölületi potenciál helyett igen pontosan az igazi potenciált is írhatjuk, ha a (+) indexszet a réteg egy vastagsági átmérőjének a (+) oldali végére, a (−) indexszet a negativ oldali végére vonatkoztatjuk. Ennek a belátása végett fejezzük ki az $\bar{\omega}$ fölületi sürüséget Φ_τ segedelmével:

$$\bar{\omega} \equiv \int_{\tau'} \bar{\rho}\,\mathfrak{D}n = -\int_{\tau'} \Delta\,\Phi_\tau\,\mathfrak{D}n$$

ahol az integráció a τ' hasáb hosszmentére szól, tehát egy vastagsági átmérőre szól, éspedig annak a (−) oldali végétől a (+) oldali vége felé. Oly koordinátarendszert használjunk egy pillanatra, amelynek a z tengely az n normálissal egyező irányú. Az ily rendszerre vonatkoztatott

$$\Delta\Phi_\tau = \frac{\partial^2\Phi_\tau}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi_\tau}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi_\tau}{\partial z^2}$$

kifejezésben csak a harmadik tag lehet oly nagy, hogy az integrálban számot tegyen, mert csak a normális irányú

$$\frac{\partial\Phi_\tau}{\partial z}$$

derivált változhatik rohamosan a rétegben, s ez is csa a rétegen keresztül mutató irányokban. Tangenciális irányban pedig általában egyik derivált sem. Irható t hát nagy pontossággal

$$\Delta\Phi_\tau = \frac{\partial^2\Phi_\tau}{\partial z^2}, \text{ ami } = \frac{\partial^2\Phi_\tau}{\partial n^2}$$

honnan

$$\bar{\omega} = -\int_{\tau'} \frac{\partial^2\Phi}{\partial n^2}\,\partial n = -\left[\left(\frac{\partial\Phi_\tau}{\partial n}\right)_+ - \left(\frac{\partial\Phi_\tau}{\partial n}\right)_-\right]$$

midőn is a (+) index egy vastagsági átmérő (+) oldalú végére, a (–) index ugyanannak a (–) oldalú végére szól bármelyik oldalt válasszuk is meg pozitiv oldalnak, mert az n normálist mindig a (–) oldaltól a (+) oldal felé számítjuk.

Konduktorok és izolátorok általános definiciója

33. Midőn a kétféle (pozitiv és negativ) elektromosság egyenlő mennyiségben van és egyenlően van el.

osztódva a testekben, akkor neutrális állapotban levők-nek mondjuk a testeket; és akkor mondjuk azokat elek-tromosoknak, ha nem egyenlő bennük a kétféle kvantum vagy nem egyenlő az elosztódásuk, vagy sem maguk nem egyenlők, sem elosztódásuk nem egyenlő.

Kétféle szélsőleges eszményi közegnek a képze-tét alkotjuk magunknak: a konduktorét és izolatorét.

Konduktoron olyan testet értünk, amelyben egészen szabadon mozoghatnak az elektromosságok úgy, hogy annak bármely egyéni részéből bármely egyéni részébe eljuthatnak elektromosságok közbülső részeken keresztül

Izolátornak olyan testet nevezünk, amelyben csak igen kis elmozdulásokat tehetnek az elektromossá-gok úgy, hogy annak egyetlen egyéni részéből sem juthat egy másiknak a belsejébe elektromosság. Ezeket a teste-ket nevezzük dielektrikumoknak is.

Más testek oly anyagi komponensek összetételei gyanánt foghatók föl, amelyek részint konduktorok, ré-szint izolátorok.

Izolátor elektromossága Kettős töltés és valóságos töltés az elemi részeiben.

34. Ha egy konduktor, vagy egy materiális izolátor neutrális állapotban köröskörül csak izolátorral érintke-zik és valamely külső behatásra a neutrális állapotból elektromos állapotba jut, akkor egy része pozitive, a má-

sik része negative elektromos, úgy, hogy ilyenkor a kétféle kvantum összege mindig zérus. Természetszerűleg ugyanaz gondolandó egy izolátor minden egyéni részéről is, mert környezetük izolátor. Az egyéni részek azonban sohasem geometriai osztásokkal meghatározott részek, mert a szomszédaikkal nem fölületeken, hanem határrétegekben összefüggő részek és egy izolátor egyéni elemi részei, mint ilyenek őrzik meg a töltéseiket, az izolátor definiciójának értelmében. Eszerint úgy kell fölfognunk egy izolátortól környezett és eleve neutrális izolátornak külső behatásokra létrejött elektromos állapotát, hogy minden individuális elemi része annyi (+), mint (−) elektromosságot tartalmaz most is, ámde elemi részeiben a (+) és (−) elektromosság elosztódása nem azonos, meg vannak azok oszolva. Ilyenkor elektromos állapotukat kettős elektromos állapotnak, elektromos töltésüket kettős töltésnek mondjuk. Megjegyzendő, hogy az egyéni elemi részen csak fizikailag végtelen kicsiny rész érthető, amely elég nagy arra, hogy lehessen határrétege, amelynek a vastagsági átmérői fizikailag végtelen kicsinyek az ő átmérőihez képest.

35. Most mindig föltettük az izolátorról, hogy eleve neutrális állapotban volt, tehát föltettük, hogy lehet neutrális állapotban.

Ámde általában egy izolátor nem minden elemi részének az összes töltése zérus. Nem az kiváltképen, ha előzőleg elektromos konduktorral voltak érintkezésben valamely elemi részei. Sőt egy izolátor határán levő egyéni elemi részek mindegyikének az összes töltése aránylag nagy is lehet. Az izolátor egy individuális elemi részének azt a pozitív vagy negatív külön töltését, amelyet a maga kettős töltésén felül tartalmaz, valóságos töltésének nevezzük. Ennek a pozitív vagy negatív mennyisége teszi benne az elektromosságok mennyiségének az összegét s ezért mondjuk valóságos töltésének.

Izolátor egyéni elemi részének elektromos potenciálja.

36. Egy izolátor egy egyéni elemi részében kiszemelt pontnak, pl. az elemi rész tömegcentrumának a koordinátái a, b, c legyenek s az elemi rész többi pontjainak koordinátáit $a+\xi,\ b+\eta,\ c+\zeta$ jelöljék, amelyekben $\xi,\ \eta,\ \zeta$ legfeljebb fizikai végtelen kicsinyek. Az elemi rész méreteihez képest fizikai végtelen nagy távolban legyen az (x, y, z) pont úgy, hogy az $(a+\xi,\ b+\eta,\ c+\zeta)$ pont és az (x, y, z) pont $r=\sqrt{(a+\xi-x)^2+\cdot+\cdot}$ távolságának a reciprokját ξ, η, ζ pozitív egész hatványai szerint haladó sorba bonthassuk s ebben a lineáris tagokra szorítkozhassunk.

Ha az (a, b, c) pont és az (x, y, z) pont távola R, akkor

$$r_{\xi=0,\ \eta=0,\ \zeta=0} = R$$

tehát a magasabb rendű kicsinyek mellőzésével

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} + \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial a}\xi + \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial b}\eta + \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial c}\zeta$$

Az elemi részből származó potenciált mármost három részben írjuk fel, amelyek kettője a megoszlott egyenlő nagy (+) és (–) töltéstől (a kettős elektromosságtól), egyike pedig attól az esetleges (+) vagy (–) többlettől (a valóságos töltéstől) származik, amely valamikor különös körülmények közt jutott be esetleg az elemi részbe. Ha a megoszlásból eredt (+), illetőleg (–) töltés ρ_1, illetőleg ρ_2 sűrűség szerint van eloszolva az elemi részben, a (+) vagy (–) külön töltés pedig ρ_0 sűrűség szerint, akkor az elemi rész elektromos potenciálja ez:

$$\frac{1}{4\pi}\left\{\int_{\mathfrak{D}\tau}\frac{\rho_1}{r}\mathfrak{D}\mathfrak{D}\tau + \int_{\mathfrak{D}\tau}\frac{\rho_2}{r}\mathfrak{D}\mathfrak{D}\tau + \int_{\mathfrak{D}\tau}\frac{\rho_0}{r}\mathfrak{D}\mathfrak{D}\tau\right\}$$

ahol is $\mathfrak{D}\tau$ jelenti az elemi rész térfogatát és e térfogatnak ő hozzá magához képest is végtelen kis részét jelenti $\mathfrak{D}\mathfrak{D}\tau$. A harmadik integrál helyett:

$$\frac{1}{R}\int_{\mathfrak{D}\tau}\rho_0\,\mathfrak{D}\mathfrak{D}\tau = \frac{\hat{\rho}\,\mathfrak{D}\tau}{R}$$

írható, ha $\hat{\rho}$ a valóságos töltés átlagos sűrűsége, amelyről föltehető, hogy a hely folytonos, sőt egyenletesen deriválható függvénye.

A másik két integrálba beírjuk $\frac{1}{r}$-nek az előbb kifejtett kifejezését. Ennek a megtétele után vegyük figyelembe, hogy

$$\int_{\mathfrak{D}\tau} \rho_1 \mathfrak{D}\mathfrak{D}\tau + \int_{\mathfrak{D}\tau} \rho_2 \mathfrak{D}\mathfrak{D}\tau = 0$$

Továbbá használjuk a következő jelölésmódot:

$$\int_{\mathfrak{D}\tau} \rho_1 \xi \mathfrak{D}\mathfrak{D}\tau \equiv \xi_1 \int_{\mathfrak{D}\tau} \rho_1 \mathfrak{D}\mathfrak{D}\tau \equiv \xi_1 \mathfrak{D}e \, ; \cdots ; \cdots$$

$$\int_{\mathfrak{D}\tau} \rho_2 \xi \mathfrak{D}\mathfrak{D}\tau \equiv \xi_2 \int_{\mathfrak{D}\tau} \rho_2 \mathfrak{D}\mathfrak{D}\tau \equiv - \xi_2 \mathfrak{D}e \, ; \cdots ; \cdots$$

ahol (ξ_1, η_1, ζ_1) nyilvánkép ugyanaz a megoszlott (+) töltésre nézve (ξ_2, η_2, ζ_2) pedig a megoszlott (−) töltésre nézve, mint a tömegcentrum egy tömegre nézve. E pontokat pólusoknak nevezzük. Az elsőt az elemi rész pozitiv pólusának, a másodikat az ő negativ pólusának mondjuk. Ezek szerint a fentírt teljes potenciálban a két első tag összege:

$$\frac{1}{4\pi}\left[(\xi_1 - \xi_2)\frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial a} + (\eta_1 - \eta_2)\frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial b} + (\zeta_1 - \zeta_2)\frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial c}\right] \mathfrak{D}e$$

és jóllehet $(\xi_1 - \xi_2)$, stb. fizikai végtelen kicsiny, mégis a potenciálnak ez a része is számot tehet, amiből az következik, hogy $\mathfrak{D}e$ általában alacsonyabb rendű kicsiny, mint $\mathfrak{D}\tau$, mégpedig oly fokon alacsonyabb rendű, hogy a pólusok távolával képezett szorzata azon rendű, mint $\mathfrak{D}\tau$ úgy, hogy a

$$(\xi_1 - \xi_2 \, , \, \eta_1 - \eta_2 \, , \, \zeta_1 - \zeta_2) \, \mathfrak{D}e$$

vektor kicsiségi rendje egyezik a $\mathfrak{D}\tau$ kicsiségi rendjével. Ezen vektort röviden $\mathfrak{P}.\mathfrak{D}\tau$-val jelölvén, a $\mathfrak{P}$ vektor általában számottevő függvénye a, b, c-nek. Az izolátor a, b, c helyű elektromos momentumának nevezzük ezt.

$$\mathfrak{P} = (\xi_1 - \xi_2, \eta_1 - \eta_2, \zeta_1 - \zeta_2)\, \frac{\mathfrak{D}e}{\mathfrak{D}\tau}$$

Minthogy $\mathfrak{D}e$ pozitiv kvantum, úgy a $\mathfrak{P}$ nagysága a $\frac{\mathfrak{D}e}{\mathfrak{D}\tau}$ átlagos sürüségnek és a polusok távolának a szorzata:

$$\frac{\mathfrak{D}e}{\mathfrak{D}\tau}\sqrt{(\xi_1-\xi_2)^2+(\eta_1-\eta_2)^2+(\zeta_1-\zeta_2)^2}$$

$\mathfrak{P}$ iránya pedig a (−) polusból a (+) polusba mutató irá[ny]

Föltehetjük erről a $\mathfrak{P}$ vektorról, hogy folytonos [é]s kétszer egyenletesen deriválható függvénye a helynek, mert e föltevésünk tapasztalásba nem ütközik. Az[on]ban az izolátor határrétegében, annak vastagsági [mé]rőiben általában igen rohamosan változik a hely[lyel], mert a $\frac{\mathfrak{D}e}{\mathfrak{D}\tau}$ sürüség rohamosan fogy az izolátor hat[á]ra felé. Ebből folyólag $\mathfrak{P}$-nek a koordinátader[i]váltjai a határrétegben általában igen nagyok, ugyanis a határréteg normálisa szerint képezett der[i]váltja igen nagy. Ezen $\mathfrak{P}$ elektromos momentum ál[tal] kifejezve ki a kettős elektromosság fentirt potenci[ál]ját, ez nyilvánképen =

$$\frac{1}{4\pi}\,\mathfrak{P}\,\mathrm{grad}_0\,\frac{1}{R}\,\mathfrak{D}\tau$$

ha t.i. a grad_0 gradienst az elemi rész a, b, c [ko]ordinátái szerint képezve gondoljuk és a két vec[k]tor ($\mathfrak{P}$ és $\mathrm{grad}_0 \frac{1}{R}$) szorzatán azok skaláris szorzatá[t] értjük. Ezen potenciálhoz hozzájárul a valóságos t[ölt]ésnek $\frac{\mathfrak{S}}{4\pi R}\mathfrak{D}\tau$ potenciálja.

A következőkben az (a, b, c) és (x, y, z) pont

A távolát jelölvén r-rel, az elemi résznek a külső (x, y, z) pontra háramló teljes elektromos potenciálja =

$$\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\hat{\varrho}}{r} + \mathfrak{P}\,\mathrm{grad.}\,\frac{1}{r}\right) D\tau$$

a $D\tau$ koordinátái szerint képezett gradienssel.

Izolátor elektromos potenciálja.

37. Az izolátort egyéni elemi részekre osztva gondolván, valamennyi elemi részét oly kifejezés illeti meg, aminőt a 36 végén jegyeztünk mint az elemi résztől származó potenciált, fölteve, hogy az (x, y, z) pont az izolátoron kivül s ahhoz sehol sem igen közel van, mert lefejtésünk oly x, y, z helyeken érvényes, amelyek aránylag távol vannak az elemi részektől. Az egyéni elemi részek $D\tau$ térfogata helyett pedig az izolátor térfogatának geometriai osztásokkal keletkező fizikai végtelen kis részeit tehetjük az elemi potenciálokban, mert egy oly potenciál elenyésző kis mértékben változik csak meg, ha az ő $D\tau$ szorzója helyett oly $D\tau$ szorzót használunk, amelynek a fölülete az elemi rész határrétegében van.

Eszerint az egész izolátortól egy külső s az izolatorhoz igen közel sehol sem levő (x, y, z) pontra ez az elektromos potenciál háramlik:

$$\Phi = \frac{1}{4\pi}\int_{\tau}\left(\frac{\hat{\varrho}}{r} + \mathfrak{P}\,\mathrm{grad.}\,\frac{1}{r}\right) D\tau$$

Ha pedig a második tagon parciális integrálást végezünk, azután számbavesszük, hogy a T határán a $\mathfrak{P}$ momentum mindenütt zérus, akkor Φ-nek

$$\Phi = \frac{1}{4\pi}\int_T \frac{\hat{\varrho} - \operatorname{div}\mathfrak{P}}{r}\, D\tau$$

kifejezéséhez jutunk, amelyben a div művelet a $D\tau$ koordinátái (a, b, c) szerint végezendő, lévén $\mathfrak{P}$ csakis a, b, c hely függvénye az integrálban. Egyébiránt itt $-\operatorname{div}\mathfrak{P}$ nyilvánképen mint valamely sűrűség szerepel. A (T) természetesen az izolátor teljes térfogata és a $D\tau$ térelemek a T-nek geometriai osztásokból származó elemi részeit jelentik.

Levezetésünkben lényeges föltétel volt, hogy az (x, y, z) pont külső pont s az izolátorhoz sehol sem igen közel legyen. De már ezuttal $D\tau$-val mathematikai végtelen kis térrészt jelölve a potenciál elmélet szerint nyilvánképen az izolátorhoz bármily közel, és abban magában és a fölületén is határozott jelentménye van a levezetett integrálnak s az izolátoron kivül bárhányszor egyenletesen deriválható, sőt a második alakja szerint még a (T) téren belül is határozott első és második deriváltjai vannak és folytonosak azok bármi közel is az izolátor határához, mert föltevéseink értelmében div $\mathfrak{P}$ egyenletesen deriválható függvénye a helynek. A tapasztalással nem jutunk összeütközésbe, ha föltesszük, hogy mindenütt Φ az izolátor elektromos potenciálja úgy, hogy mindenütt ezáltal a Φ által, illetőleg ennek a derivált jai által határozzák meg az izolátor elektromos állapotának hatásai.

Izolátor szabad és látszatos elektromossága.

38. Az izolátornak a

$$\bar{\Phi} = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathfrak{T}} \frac{\hat{\rho} - \operatorname{div}\mathfrak{P}}{r} D\tau$$

potenciálja olyan, mint egyszerü elektromosság Coulomb-féle potenciálja, amely a $\mathfrak{T}$ térből

$$\hat{\rho} - \operatorname{div}\mathfrak{P} \equiv \bar{\rho}$$

sürüségü elektromosságtól származik. Épen ezt a $\bar{\rho}$ sürüséget nevezzük szabad elektromos sürüségnek. A $\hat{\rho}$ valóságos sürüségnek és a $-\operatorname{div}\mathfrak{P}$-vel egyenlő sürüségnek az összege az. Az utóbbi sürüséget látszatos elektromos sürüségnek mondjuk t. i. ~~mint olyant,~~ amely a valóságossal együtt teszi a potenciál meghatározására szolgáló teljes sürüséget, a $\bar{\rho}$ „szabad" sürüséget. A $\bar{\rho}$ szabad sürüségnek és a $D\tau$ térelemnek a szorzatát szabad töltésnek ~~neve~~ nevezzük, a $\bar{\rho} - \hat{\rho}$ látszatos sürüségnek és a $D\tau$ térelemnek a szorzatát látszatos töltésnek mondjuk. $\hat{\rho}D\tau$ a valóságos töltése a $D\tau$ térelemnek.

39. A szabad sürüség betüjével kifejezve:

$$\bar{\Phi} = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathfrak{T}} \frac{\bar{\rho}}{r} D\tau .$$

Innen Poisson térfogati egyenlete szerint:

$$\text{(a)} \qquad \bar{\rho} = -\Delta\bar{\Phi} = -\operatorname{div}\operatorname{grad}\bar{\Phi}$$

Innen pedig $\bar{\rho}$ föntebb írt definiciójából:

$$\hat{\rho} - \operatorname{div} \mathfrak{P} = -\Delta\Phi = -\operatorname{div}\operatorname{grad}\Phi$$

tehát

$$(b) \qquad \hat{\rho} = \operatorname{div}(\mathfrak{P} - \operatorname{grad}\Phi)$$

Végül (a) és (b)-ből ugyanezen $\bar{\rho}$ definiciójából

$$(c) \qquad \bar{\rho} - \hat{\rho} = -\operatorname{div}\mathfrak{P}$$

Ezek rendén (a) alatt a „szabad" sűrűség az elektromos potenciál által, a (b) alatt a valóságos sűrűség az elektromos momentum és elektromos potenciál által fejezvék ki Poisson térfogati egyenlete nyomán. A (c) alatt pedig a látszatos sűrűség kifejezése van.

40. Az izolátor látszatos töltéseinek az összege mindig zérus. Ugyanis ez az összes látszatos töltés =

$$\int_{\tau}(\bar{\rho} - \hat{\rho})\,D\tau = -\int_{\tau}\operatorname{div}\mathfrak{P}\,D\tau = \int_{S}\mathfrak{P}_n\,D\sigma$$

Ha t. i. (S) jelenti a (τ) tér határát és $\mathfrak{P}_n$ a befelé mutató normálison jelenti $\mathfrak{P}$ értékét. A határon $\mathfrak{P}$ már mindenütt zérus, tehát

$$\int_{\tau}(\bar{\rho} - \hat{\rho})\,D\tau = 0$$

tényleg. Szükséges föltétele ez annak, hogy $\bar{\rho} - \hat{\rho}$ látszatos sűrűség.

41. Megjegyzendő, hogy a határrétegben (a), (b), (c) csak úgy jelentik az egész szabad, valóságos, látszatos sűrűséget, ha az izolátort a tiszta éter környezi. Ha matéria környezi, akkor a közös határrétegben az utóbbihoz tartozó szabad, valóságos, látszatos sűrűség amazokkal együtt (amazokhoz hozzáadva) teszik az

egész szabad, valóságos, látszatos sűrűséget.

Izolátor határrétegének elektromos potenciálja mint fölületi potenciál.

42. Az izolátor általánosan érvényes

$$\Phi = \frac{1}{4\pi}\int_{\tau} \frac{\hat{\varrho} - \operatorname{div} \mathfrak{P}}{r} D\tau$$

elektromos potenciálját más hasznos alakban is előállíthatjuk, amely azonban oly helyeken, amelyek a határrétegtől annak a vastagsági átmérőihez képest nincsenek távol, általában nem érvényes.

Írjuk fel Φ kifejezését két részben, amelyek egyike az izolátor határrétegének ($D\tau$) térfogatából, másika az izolátor többi részének (belsejének) ($\tau - D\tau$) térfogatából származik:

$$\Phi = \frac{1}{4\pi}\int_{\tau - D\tau} + \int_{D\tau}$$

Ha a határrétegből a $\hat{\varrho}$ valóságos térfogati sűrűségnek a határréteg belső fölületén $\hat{\omega}$ fölületi sűrűség felel meg, akkor a határrétegtől azö vastagsági átmérőihez képest távol

$$\int_{D\tau} \frac{\hat{\varrho}}{r} D\tau \text{ helyett } \int_{S_0} \frac{\hat{\omega}}{r} D\sigma$$

használható, ahol S_0 a határréteg belső fölületét jelenti. Ha pedig S a határréteg külső fölülete, akkor parciális integrálással

$$\int_{D\tau} \frac{\operatorname{div} \mathfrak{P}}{r} D\tau = -\int_{D\tau} \mathfrak{P} \operatorname{grad.} \frac{1}{r} D\tau + \int_{S_0 + S} \frac{\mathfrak{P}_n}{r} D\sigma$$

ahol $\mathfrak{P}_n$ a rétegből kifele mutató fölületi normálisokon jelenti $\mathfrak{P}$ értékét. Ámde a határréteg átmérőihez képest a határrétegtől távol a jobboldali térintegrál mellőzhető, mert $\mathfrak{P}$ maga a határrétegben sem igen nagy (csak a deriváltjai lehetnek igen nagyok a határrétegben) és a határréteg átmérőihez képest a határrétegtől távol $\operatorname{grad}_0 \frac{1}{r}$ sem igen nagy, $\mathfrak{D}\tau$ pedig igen kicsiny. Továbbá az S (külső) fölületen már $\mathfrak{P}$ mindenütt zérus, tehát a fölületi integrációt csak a S_0 fölületre kell kiterjeszteni. Ezek szerint részletesen írva, Φ helyett

$$\Phi_0 = \frac{1}{4\pi}\int_{\tau - \mathfrak{D}\tau} \frac{\hat{\varsigma} - \operatorname{div}\mathfrak{P}}{r}\,\mathfrak{D}\tau + \frac{1}{4\pi}\int_{S_0} \frac{\hat{\omega} - \mathfrak{P}_n}{r}\,\mathfrak{D}\sigma$$

tehető oly x, y, z helyeken, amelyek a határréteg pontjaitól annak vastagsági átmérőihez képest távol vannak. Itt a fölületi integrál $\times \frac{1}{4\pi}$, a határrétegből származó potenciál, a térfogati integrál $\times \frac{1}{4\pi}$ az izolátor belsejéből származó potenciál. Az n normális az izolátor belsejébe mutat.

Izolátor fölületi elektromos sűrűségei.

43. A Φ_0 (42. art.) potenciál-kifejezést is megilleti érvényességének körében a Poisson-féle térfogati egyenlet, mert a fölületi potenciál Δ-ja a fölületen kívül lévő pontokban zérus. Ezen Φ_0 potenciálkifejezés fölületi részében szereplő $\hat{\omega} - \mathfrak{P}_n$ sűrűséget szabad fölületi sűrűségnek és ennek a $-\mathfrak{P}_n$ részét látszatos fölületi sűrűségnek nevezzük. Ha az előbbit $\overline{\omega}$ jelöli, úgy Poisson

fölületi egyenlete szerint

$$(a') \qquad \bar{\omega} = -\left\{\left(\frac{\partial \bar{\Phi}_0}{\partial n}\right)_+ - \left(\frac{\partial \bar{\Phi}_0}{\partial n}\right)_-\right\}$$

mert a térfogati potenciál deriváltjai a fölületen keresztül is folytonosak.

Ebből és $\bar{\omega}$ definiciójából ($\bar{\omega} = \hat{\omega} - \mathcal{P}_n$):

$$(b') \qquad \hat{\omega} = \mathcal{P}_n - \left[\left(\frac{\partial \bar{\Phi}_0}{\partial n}\right)_+ - \left(\frac{\partial \bar{\Phi}_0}{\partial n}\right)_-\right]$$

Ugyancsak $\bar{\omega}$ definiciójából

$$(c') \qquad \bar{\omega} - \hat{\omega} = -\mathcal{P}_n$$

44. Vegyük észre, hogy

$$+\int_{S_0} (\bar{\omega} - \hat{\omega})\, \mathfrak{D}\sigma = -\int_{S_0} \mathcal{P}_n\, \mathfrak{D}\sigma = \int_{T-\mathfrak{D}\tau} \operatorname{div} \mathcal{P}\, \mathfrak{D}\tau = -\int_{T-\mathfrak{D}\tau} (\bar{\varrho} - \hat{\varrho})\, \mathfrak{D}\tau$$

tehát a látszatos fölületi kvantum mindig ellentétesen egyenlő az izolátor belsejében foglalt látszatos kvantummal. Abból is következik ez, hogy az izolátor összes látszatos töltése zérus (40. art.)

45. Már most (a') alatt a szabad fölületi sűrűséget az elektromos potenciál által, (b') alatt a valóságos fölületi sűrűséget az elektromos momentum és elektromos potenciál által fejeztük ki Poisson fölületi egyenletéből, (c') alatt pedig a látszatos fölületi sűrűség kifejezése van.

A 39. cikk alapján a 32. cikk vége szerint az is kitűnik, hogy ha az igazi Φ potenciált gondoljuk (a')-ben és (b')-ben, de pozitiv és negativ oldali deriváltját úgy értjük, hogy a határréteg egy vastagsági átmérőjének pozitiv, illetőleg negativ oldali végére vonatkoznak, akkor is érvényes (a') és (b') és úgy (c') is, mert a határrétegben is érvényes a 39. cikk (a), (b), (c) egyenlete.

46. Azonban mindezek a fölületi sűrűségek csak abban az esetben felelnének meg a határréteg egész töltésének, ha a tiszta éter környezné az izolátort. Ha egy másik izolátor környezi azt, akkor ezen izolátor elektromosságának a szabad, valóságos, látszó fölületi sűrűségét hozzá kell adnunk az $\bar{\omega}$, $\hat{\omega}$, $\bar{\omega}-\hat{\omega}$ sűrűséghez, hogy az egész fölületi sűrűségeket kapjuk, midőn aztán az egész szabad, valóságos és látszatos sűrűségek kifejezései gyanánt (a'), (b'), (c') jobboldalai is megtoldandók a másik izolátorhoz tartozó jobboldalakk-

A szabad és a látszatos sűrűség magyarázata.

47. Hogy egy izolátor elektromos potenciálja oly alakra vezethető, amilyen az alakja egy közönséges Coulomb-féle potenciálnak a $\bar{\rho} \equiv \hat{\rho} - \operatorname{div} \mathfrak{P}$ szabad sűrűségek szerint, ezen lehetőségről képet is alkothatunk magunknak. Gondoljuk most, hogy egy izolátornak minden egyes individuális elemi részében épen egyenlő pozitiv s negativ elektromos kvantum van, két igen nagy kvantum az elemi részek mekkoraságához képest s eleve egyenlően vannak eloszolva, úgy hogy az elemi részek nem elektromosak, neutrális állapotban vannak. Tegyük föl aztán, hogy valamely külső elektromos hatás következtében

megzavarodik a két féle kvantum egyenlő elosztódása, ugyanis egy elemi résznek hozzája képest is végtelen kicsiny részeiből pozitiv és negativ töltések különböző irányokban végtelen kis útakon eltolódnak, végtelen kis utakon az elemi rész átmérőihez képest, minélfogva az elemi rész határrétegének egy része pozitive, más része negative, igen nagy sűrűség szerint elektromos lesz, az elemi rész belseje pedig pozitive vagy negative lesz elektromos aszerint, amint a határrétegbe a pozitiv vagy negativ elektromosságból tolódott el kevesebb és végtelen pontossággal egyenletes pozitiv vagy negativ sűrűséggel lesz az elemi rész belseje elektromos, akkora kvantummal, amelynek a kicsiségi rendje egyezik az elemi rész térfogatának kicsiségi rendjével. Az elemi rész határrétege, amelyben az elemi rész más elemi részek határrétegével kapcsolódik össze, egy szakaszában igen nagy sűrűségű (+), másik szakaszában igen nagy sűrűségű (–) töltést tartalmaz mint az elemi részhez tartozót, olyant azonban, hogy a vele érintkező elemi részek ugyanezen határrétegben foglalt töltésének s az övének az összege végtelen pontosság szerint az ő belsejében valamint amazok belsejében levő töltéssel egyenlő sűrűségű, amiatt t.i., hogy az elemi résznek az ő határrétegében lévő igen nagy sűrűségű (+), illetőleg (–) töltése a szomszédos részekhez tartozó igen nagy sűrűségű (–) illetőleg (+) töltésseleesik össze. A rezultans sűrűséget mondjuk mindenütt az izolátorban lévő elektromosság látszatos sűrűségének. Ha, mint most föltettük, eredetileg neutrális volt az izolátor, akkor benne a szabad sűrűség egyenlő a látszatos sűrűséggel. Látszatosnak mondjuk ezt, egy egyéni elemi rész elektromosságainak az átlagos sűrűsége mindig zérus, ha eredetileg neutrális állapotban volt. Ha azonban valóságos töltést is tartalmaz az izolátor, akkor a látszatos töltése a valóságossal együtt teszi a szabad töltését. A valóságos elemi töltés mindig egyéni testelem összes elektromos töltése, ellenben a szabad elemi töltés mindig egyéni testelem belsejének az összes elektromos töltése, tehát térelem összes elektromos töltése. Mindazonáltal testelem szabad töltéséről és térelem valóságos töltéséről is beszélünk, de mindig csak az itt megadott értelemben.

Kettős elektromos réteg definíciója.

48. Két heterogén testnek az érintkezési rétegében, sőt nem két heterogén, de különböző állapotú testnek az érintkezési rétegében is mindig van az érintkezés következtében a testekből kiválott valóságos töltés, egyenlő mennyiségű pozitív és negatív töltés, amelyek a rétegben egymás mellett helyezkednek el és egyikük az egyik testhez, a másikuk a másik testhez tartozik, két egymás mellett elterülő, ellentétes előjelű elektromos réteg, a pozitív az egyik testnek, a negatív a másik testnek a két test érintkezéséből származó töltése. Ezt az elektromos réteg párt kettős elektromos rétegnek nevezzük.

Abból pedig, hogy az érintkező testek materiális minőségének, állapotának különbözősége a föltétele ezen elektromos állapotnak Helmholtz azt következtette, hogy a materiális minőségnek és állapotnak egyenletlenségei a testek belsejében is a kétféle elektromosság szétválasztásával járnak, minek folytán ezen egyenletlenségekkel meghatározott valóságos töltések létesülnek a testek belsejében is, csakhogy sokkalta kisebb sürüségűek a testek belsejében, mint a határrétegeiben, mert a határrétegeken keresztül a materiális minőség, vagy legalább a materiális állapot általában igen rohamosan változik a hellyel. Ehhez képest az izolatorok fogalma is kiegészítendő, ugyanis oly értelemben, hogy érintkezési rétegeikben, éspedig egymással való érintkezésük rétegeiben is számottevő mértékben fejlődhetik ki kettős elektromos réteg, amelynek a keletkezése pedig föltételezi, hogy az érintkezési rétegben az egyik test ottlévő pozitív elektromosságának egy része s a másik test ottlévő negatív elektromosságának egy része kicserélődik, illetőleg egyik testtől a másik testhez szegődik s annak a töltésévé válik. Kivált észrevehető módon nyilvánul ez izolátorok között akkor, ha egymáshoz dörzsöljük azokat.

A folytonosság elve szerint úgy gondoljuk a kettős elektromos réteget, hogy elektromos töltésének a sürüsége folytonosan, sőt deriválhatóan változik a hellyel és deriváltja is folytonos függvénye a helynek, még a (+) és (−) réteg közös határán is, amelyen mindenütt zérus mindkét réteg töltésének sürüsége, de a vastagsági átmérő mentén igen rohamos a sürüségük változása. Oly rohamos, hogy összeségben szertelenül nagy különvált pozitiv és negativ töltést tartalmaz az érintkezési réteg, úgy, hogy jóllehet ellentétes előjelü töltések ezek, elektromos potenciáljuk oly helyeken is számot tehet, amelyek a rétegtől annak vastagsági átmérőihez képest távol vannak.

Kettős elektromos réteg potenciálja.

49. A rétegtől annak a vastagsági átmérőihez képest távol, igen pontosan új alakú fölületi integrállal fejezhetjük ki a kettős réteg potenciálját (amely definiciónk értelmében a kettős réteg pozitiv és negativ töltésének a Coulomb-féle potenciálja). Gondoljunk ugyanis a kettős rétegben normális irányban egy végtelen vékony teljes hasábot, amelynek a hossza a kettős réteg vastagsága. Föltehető, hogy az ilyenben mindig egyenlő a megoszlott (+) és (—) töltés mennyisége, tehát e töltések potenciálja aránylag távol levő helyeken olyan, mint egy izolator valamely elemi részének a kettős elektromosságától származó potenciál. Létezik tehát oly vektor (az izolátor tárgyalásában elektromos momentumnak neveztük), amelynek $\frac{1}{4\pi r}$ gradiensével és a hasáb térfogatával képezett skaláris szorzata a hasáb kettős töltésének a potenciálja igen pontosan aránylag távoli helyeken s ama vektor iránya a hasáb (—) töltésének kvázi tömegcentrumá-

ból a hasáb (+) töltésének a kvázi tömegcentrumába mutató irány, tehát a réteg negatív felétől a pozitív fele felé mutató normális irány; a nagysága pedig a hasáb pozitív töltésének átlagos sűrűségéből és a két kvázi tömegcentrum távolságából képezett szorzat.- Jelölje most ezt a vektort $(\alpha, \beta, \gamma)J$, ahol α, β, γ a (–) rétegrészből a (+) felé mutató főlületi normális irány-koszinuszai és J a hasáb pozitív töltésének az átlagos sűrűségéből s a két kvázi tömegcentrumnak a távolságából képezett szorzat. A hasáb térfogata pedig $\lambda D\sigma$ legyen, amelyben λ a kettős réteg vastagsága a hasáb helyén, tehát a hasáb hossza és $D\sigma$ a hasáb keresztmetszetének a területe. Végül a hasáb egy volumenely speciális pontjának a koordinátáit a, b, c jelöljék. Ezek értelmében a hasáb kettős töltésének a potenciálja aránylag távol =

$$\frac{1}{4\pi}\left(\alpha\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial a}+\beta\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial b}+\gamma\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial c}\right)J\lambda D\sigma.$$

De ha számottesz a kettős réteg potenciálja aránylag távol lévő helyeken is, akkor J általában szükségképp oly nagy, hogy $J\lambda$ számottevő érték. Ezt a λJ szorzatot j-vel jelölve:

$$\frac{1}{4\pi}\left(\alpha\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial a}+\beta\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial b}+c\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial c}\right)J\lambda D\sigma \equiv \frac{j}{4\pi}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}D\sigma$$

ahol az n a negatív kvázi tömegcentrumból a pozitív felé mutató normális irány. Ez a kifejezés a hasáb kettős töltésének a potenciálja aránylag távoli helyeken. A j skaláris a kettős töltés pozitív részének átlagos sűrűségéből, a hasáb hosszából (= rétegvastagságából) és a kvázi tömegcentrumok távolából képezett szorzat. Az $(\alpha, \beta, \gamma)j$ vektort s nemkülönben a j skalárist is a kettős réteg fölületi momentumának mondjuk az (a, b, c) helyen. Nem ütközünk tapasztalásba, ha föltesszük, hogy a j momentum folytonosan változik a hellyel a σ fölületen.

Az egész kettős réteg potenciáljának a kifejezése végett úgy választottuk légyen meg a hasáb a, b, c pontját, hogy a hasáb egyik végének a helyét jelentse, mihez képest a $\mathfrak{D}\sigma$ vagy minden ilyen hasábnak az egyik, vagy minden ilyen hasábnak a másik testben levő alapja. Mármost a határréteg egyik vagy másik oldali fölületére, σ-ra kiterjedő integrációval eljutunk az egész kettősréteg potenciáljához:

$$\Phi_{\sigma\sigma} = \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} j\, \mathfrak{D}\sigma$$

oly r távolok számára, amelyek igen nagyok a réteg vastagsági átmérőihez képest.

50. Ez a potenciál a maga alakjánál fogva nem Newton-féle illetőleg nem Coulomb-féle potenciál, mert benne $\frac{1}{r}$ deriválva fordúl elő, de a σ fölületen kivül ahhoz nem végtelen közel mindenütt bárhányszor egyenletesen deriválható s teljesiti a Laplace-féle egyenletet, amit azonnal beláthatunk, ha figyelembe veszük, hogy

$$4\pi\Phi_{\sigma\sigma} = \int_\sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} j\,\mathfrak{D}\sigma = \int_\sigma \left(\alpha \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial a} + \beta \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial b} + \gamma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial c}\right) j\,\mathfrak{D}\sigma$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x}\int_\sigma \frac{\alpha j}{r}\mathfrak{D}\sigma - \frac{\partial}{\partial y}\int_\sigma \frac{\beta j}{r}\mathfrak{D}\sigma - \frac{\partial}{\partial z}\int_\sigma \frac{\gamma j}{r}\mathfrak{D}\sigma$$

A következőkben nemcsak a j skaláris momentumot, de az (α, β, γ) j momentumot is a hely folytonos egyértékű függvényének gondoljuk a σ fölületen, tehát ezen zárt fölület normálisát a fölület mentén folytonosan változónak tesszük fel. Ennélfogva az utolsó kifejezésről azt is észrevehetjük, hogy $\Phi_{\sigma\sigma}$ még a σ fölülethez végtelen közel is folytonos egyértékű függvénye a helynek és a σ fölületen keresztül közönséges folytonosságszakadása van, éspedig

$$(\Phi_{\sigma\sigma})_+ - (\Phi_{\sigma\sigma})_- = j$$

Ugyanis $4\pi\Phi_{\sigma\sigma}$ utolsó kifejezésében az egyes tagok Newton-féle fölületi potenciálok deriváltjai és a „Newton-féle potenciálok alaptulajdonságai" 16. cikke szerint $\Phi_{\sigma\sigma}$ három tagjának nincs más különössége, mint, hogy rendre a következő folytonosságszakadásuk van a σ fölület $(-)$ oldaláról, annak a $(+)$ oldalára:

$$-(-\alpha j)\alpha \;;\; -(-\beta j)\beta \;;\; -(-\gamma j)\gamma$$

amelyek összege $= j$. A $\Phi_{\sigma\sigma}$ potenciált kettős fölületi potenciálnak nevezzük.

51. Az igazi potenciálnak a kettős réteg $(+)$ és $(-)$ oldalán átellenes pontokba tartozó értéke igen pontosan szintén j-vel különbözik. Ugyanis ha a 49.-ben gondolt elemi hasáb $(-)$ végébe helyezzük az origót és a z tengelyt a $(+)$ vége felé irányítjuk és ha $(0, 0, z)$ helyen a kettős rétegben az elektromos sűrűséget ρ-val jelöljük, különösen pedig a pozitivot ρ_1-el a negativot

ρ_2-vel, s ha a hasábban a pozitív kvázi tömegcentrum harmadik koordinátája ζ_1 s a negatívé ζ_2, úgy a hasáb $\tau(=\lambda\mathcal{D}\sigma)$ térfogatára szóló integrálással:

$$\int_\tau \rho z \mathcal{D}\tau = \int_\tau \rho_1 z \mathcal{D}\tau + \int_\tau \rho_2 z \mathcal{D}\tau = \zeta_1 \int_\tau \rho_1 \mathcal{D}\tau + \zeta_2 \int_\tau \rho_2 \mathcal{D}\tau$$

$$=(\zeta_1-\zeta_2)\int_\tau \rho_1 \mathcal{D}\tau = J\lambda\mathcal{D}\sigma = j\mathcal{D}\sigma.$$

Nemkülönben:

$$\int_\tau \rho z \mathcal{D}\tau = \mathcal{D}\sigma \int_0^\lambda \rho z \mathcal{D}z$$

és ebből, ha a kettős réteg igazi potenciálja Φ:

$$\int_\tau \rho z \mathcal{D}\tau = -\mathcal{D}\sigma \int_0^\lambda z \Delta\Phi \mathcal{D}z$$

Összehasonlítva ezt az előbbi egyenletsorozat két szélső oldalával, látjuk, hogy

$$j\mathcal{D}\sigma = -\mathcal{D}\sigma \int_0^\lambda z \Delta\Phi \mathcal{D}z$$

Amde $\Delta\Phi$-ben csak a z szerinti második derivált lehet igen nagy, mihez képest igen pontosan

$$j = -\int_0^\lambda z \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\mathcal{D}z \equiv \int_0^\lambda \frac{\partial}{\partial z}\left(\Phi - z\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)\mathcal{D}z =$$

$$= \Phi_+ - \Phi_- - \lambda\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)_+$$

ahol a + index a réteg (+) oldalára, a − index a réteg (−) oldalára utalja átellenes pontokba az értékeket. De a jobboldali utolsó kifejezésben a harmadik tag igen kicsiny a λ kicsisége miatt, ugyanis $\frac{\partial\Phi}{\partial z}$ a réteg határán már nem igen nagy, mert Φ csak a réteg belsejében változik rohamosan a hellyel. Valóban igen pontosan áll tehát, hogy

$$j = \Phi_+ - \Phi_-$$

A kettős réteg a maga származásánál fogva az érintkező testek materiális minőségétől és materiális állapotától függő (+) és (–) töltést tartalmaz, mint kettős töltést, mihez képest a j és úgy a $(\Phi_+ - \Phi_-)$ potenciál különbség is az érintkező testek materiális minőségével és állapotával van meghatározva.

52. Tegyük föl mindig, hogy a j momentum folytonosan változik a hellyel a σ zárt fölületben s hogy ezen fölület normálisa is folytonosan változtatja az irányát a fölület mentén és most az alkalmazások érdekében a fölülethez vegtelen közel vegyük figyelembe a $\Phi_{\sigma\sigma}$ potenciálnak a normális irányú derivaltját. Meg fogunk látni annyit, hogy ez a derivált véges nagy s a normális mentén még a σ fölületen keresztül is folytonosan változik.

Tekintsük oly kicsiny körös részét (σ)-nak, amely siknak s amelyen a j momentum, tehát az (α, β, γ) j momentum is konstansnak számíthat. Ezt a kis fölületdarabot (σ_0)-val jelölve, az 50. artikulus szerint

$$-4\pi\Phi_{\sigma\sigma} = \frac{\partial}{\partial x}\int_{\sigma-\sigma_0}\frac{\alpha j}{r}\mathfrak{D}\sigma + \frac{\partial}{\partial y}\int_{\sigma-\sigma_0}\frac{\beta j}{r}\mathfrak{D}\sigma + \frac{\partial}{\partial z}\int_{\sigma-\sigma_0}\frac{\gamma j}{r}\mathfrak{D}\sigma +$$

$$+\frac{\partial}{\partial x}\int_{\sigma_0}\frac{\alpha j}{r}\mathfrak{D}\sigma + \frac{\partial}{\partial y}\int_{\sigma_0}\frac{\beta j}{r}\mathfrak{D}\sigma + \frac{\partial}{\partial z}\int_{\sigma_0}\frac{\gamma j}{r}\mathfrak{D}\sigma$$

A jobboldalnak az első sorban lévő része a $(\sigma - \sigma_0)$ fölület kettős töltésének a -4π-vel szorzott potenciálja, tehát

$$-4\pi\Phi_{\sigma\sigma} = -4\pi\Phi_{(\sigma-\sigma_0)(\sigma-\sigma_0)} + \frac{\partial}{\partial x}\int_{\sigma_0}\frac{\alpha j}{r}\,\partial\sigma + \cdot + \cdot$$

Azonban „A Newton-féle potenciál alaptulajdonságai" 16. artikulusából (amelyben most i helyett rendre x, y, z, aztán ϱ helyett rendre $\alpha j, \beta j, \gamma j$, továbbá $\cos(1, n)$ helyett rendre α, β, γ teendő) azon artikulus végéről

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\int_{\sigma_0}\frac{\alpha j}{r}\,\partial\sigma\right)_{\pm} = 2\pi\alpha j\left(\frac{z}{\sqrt{R_0^2+z^2}} \mp 1\right)\alpha, \text{ stb.}$$

ahol az egyik előjel σ_0 pozitív oldalára, a másik σ_0 negatív oldalára vonatkozik s a z tengely a normálisba van irányítva. Ezek beírásával azt kapjuk, hogy

$$\Phi_{\sigma\sigma\pm} = \Phi_{(\sigma-\sigma_0)(\sigma-\sigma_0)\pm} - \frac{1}{2}j\left(\frac{z}{\sqrt{R_0^2+z^2}} \mp 1\right)$$

A normális irányú derivált most z szerint való derivált, tehát mivel j független z-től:

$$\left(\frac{\partial\Phi_{\sigma\sigma}}{\partial n}\right)_{\pm} = \left(\frac{\partial\Phi_{(\sigma-\sigma_0)(\sigma-\sigma_0)}}{\partial n}\right)_{\pm} - \frac{R_0^2}{2\sqrt{R_0^2+z^2}^{\,3}}\,j$$

A jobboldal első tagja folytonos a σ_0 centrumán áthaladó normális mentén, mert ezen normális pontjai $(\sigma-\sigma_0)$-ra nézve véges nagy távolú külső pontok és mert e normálison (σ_0) nem változik. Midőn tehát z végtelen kicsiny, akkor ezen tag + oldalú és − oldalú értéke végtelen kicsit különbözik. Ugyanez áll a jobboldal második tagjáról is, amely végtelen pontosság szerint $= \frac{j}{2 R_0}$ midőn z végtelen kicsiny. Ezzel a fönt kimondott tétel igazolva van.

53. Az előbbi artikulus alapján gondolható, hogy a kettős elektromos rétegen keresztül a réteg igazi potenciáljának a normális irányú deriváltja csak igen kis értékkel változik meg. Valóban, ha (τ) egy végtelen vékony normális hasáb a kettős rétegben, amely a réteg egyik oldalától egészen a másik oldaláig nyúlik, akkor (τ') pozitív töltésének és negatív töltésének a fölületi sűrűsége nagy pontosság szerint ellentétesen egyenlő, tehát $\Delta\Phi$-nek (τ')-ban képezett integrálja (τ') keresztmetszetével elosztva is igen pontosan eltűnik ámde igen pontosan áll, hogy

$$\int_{\tau'} \Delta\Phi\, \mathfrak{D}\tau = \mathfrak{D}\sigma \int_{\tau'} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial n^2} \mathfrak{D}n$$

ahol $\mathfrak{D}\sigma$ a hasáb átmetszete, n a normálisnak az iránya és $\mathfrak{D}n$ a normális vonal végtelen kis darabja, — mert Φ-nek a normális irányú deriváltjai oly nagyok csak, hogy számot tehessenek. Minthogy a baloldalnak és $\mathfrak{D}\sigma$-nak a hányadosa helyett nagy pontosság szerint zérus írható, ennélfogva igen pontosan áll, hogy

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right)_+ - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right)_- = 0$$

ahol a $(+)$ index a $(\mathfrak{D}\tau')$ hasáb egyik végére, a $(-)$ index a másik végére vonatkozik.

Latszatos és egyszerű töltések a kettős elektromos rétegben.

54. Vegyük különös figyelembe, hogy a réteg kettős töltése valóságos töltés, a pozitív az egyik testhez, a ne-

gativ a másikhoz tartozó valóságos töltés. De ezek általában nem a szabad töltések is egyszersmind, éspedig nem azok izolátorok határrétegében. Két egymással érintkező izolátor mindegyikéből származik látszatos töltés is érintkezésük rétegében s úgy a kettős rétegben, mégpedig általában két különböző mekkoraságú látszatos töltés. Konduktor és izolátor érintkezési rétegében az izolator révén szintén van látszatos töltés, amely az izolátorhoz tartozik. Úgy az egyik, mint a másik esetben a valóságos kettős elektromosságokból meg a látszatos elektromosságokból rezultálódik a szabad töltés. Azonfelül általában egyéb egyszerű töltés is van a határrétegekben, amely szintén hozzájárul a szabad töltéshez. A réteg teljes potenciálja természetesen a kettős szabad réteg potenciáljának és az egyszerű szabad töltések potenciáljának az összege. Az utóbbi potenciál maga nem változik rohamosan az érintkezési rétegen keresztül sem, mint tudjuk. Ha tehát most Φ az érintkezési réteg teljes igazi potenciálja és ha a kettős réteg skaláris momentuma egy helyen j, úgy igen pontosan most is

$$j = \Phi_+ - \Phi_-$$

Egy kettős réteg potenciáljának a normalis irányú deriváltjai a réteg két oldalán az átellenes pontokban számottevően nem különböznek, mint láttuk az 53. artikulusban. Csak a rétegben a kettős töltésen fölül jelen lévő egyszerű elektromos töltés potenciáljának a normalis irányú deriváltjai lehetnek számottevően mások a két oldalon. Ebből folyólag a réteg teljes Φ elektromos potenciálja a maga normális irányú derivált jával a Poisson-féle fölületi egyenletnek az egyszerű $\bar{\omega}$ sűrűség szerint tesz igen pontosan eleget most is:

$$-\bar{\omega} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right)_{+} - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right)_{-}$$

ahol a (+) és (–) index jelentménye az előbbi.

Az általános potenciál alkalmazása.

55. Az előzőkben az elektromosságnak mindazon megjelenési módjai elésoroltvák, amelyekkel elektrosztatikai állapotokban, azaz változatlan elektromos állapotokban találkozunk. A határrétegek töltéseiből származó potenciálokat előállítottuk mint fölületi potenciálokat is, amelyek azonban a határrétegekben és ezek közelében nem helyettesíthetik közelítőleg sem minden tekintetben az igazi potenciálokat; valamint az izolátorok kettős elektromos állapotától származó potenciáloknak azon Φ_0 alakjai sem, amelyek fölületi integrált tartalmaznak (42. art.) Éppen azért általános elméleti vizsgálódásokban rendszerint az igazi, általánosan érvényes potenciált használjuk, amely az egész végtelen térben legalább kétszer egyenletesen deriválható függvénye a helynek s az izolátorokban mindenütt teljesíti a 39. cikk (a) és (b) egyenletét, még a határrétegek közelében s azokban magukban is. Az (a), (b), (c) egyenletek pedig nemcsak

az izolátorokban, de a konduktorokban is alkalmaz-hatók. Ugyanis konduktorokban látszatos töltések nincsenek, bennük a szabad töltés nem különbözik a valóságostól:

$$\hat{\varrho} = \bar{\varrho} = -\Delta\Phi$$

miből folyólag egy konduktor pontjaiban a $\mathfrak{P}$ momentumot általánosan zérusnak írva a konduktor egyenleteivé válnak az (a), (b), (c) egyenletek.

Tetszésszerinti izolátorok és konduktorok rendszerében jelölve most Φ-vel az általános potenciált, elektrosztatikai állapotban mindenütt ezen egyenleteink vannak:

$$(\mathrm{I}) \qquad \bar{\varrho} = -\Delta\Phi, \quad \hat{\varrho} = \mathrm{div}(\mathfrak{P} - \mathrm{grad}\,\Phi), \quad \bar{\varrho} - \hat{\varrho} = -\mathrm{div}\,\mathfrak{P}$$

Két izolátor érintkezési rétegében itt $\mathfrak{P}$ a teljes elektromos momentumot jelenti, azaz az egyik és másik izolátorhoz tartozónak az összegét.

Ezekből az egyenletekből a 32_2. és az 51. meg 53. artikulus alapján pedig következik, hogy ha egy határréteg két átellenes (pozitív és negatív oldali) pontjára vonatkoztatjuk a + illetőleg − indexet, igen pontosan áll, hogy

$$(\mathrm{II}) \quad \begin{cases} \bar{\omega} = -\left\{\left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial n}\right)_+ - \left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial n}\right)_-\right\} \\[2ex] \hat{\omega} = \left(\mathfrak{P}_n - \dfrac{\partial\Phi}{\partial n}\right)_+ - \left(\mathfrak{P}_n - \dfrac{\partial\Phi}{\partial n}\right)_- \\[2ex] \bar{\omega} - \hat{\omega} = -(\mathfrak{P}_n)_+ + (\mathfrak{P}_n)_- \end{cases}$$

ahol $\bar{\omega}$, $\hat{\omega}$, $\bar{\omega}-\hat{\omega}$ a fölületi szabad, valóságos, látszatos sűrűség azoknak az

$$\bar{\omega} \equiv \int \bar{\varrho}\, \mathfrak{D}n \;,\quad \hat{\omega} \equiv \int \hat{\varrho}\, \mathfrak{D}n \;,\quad \bar{\omega}-\hat{\omega} \equiv \int \bar{\varrho}\, \mathfrak{D}n - \int \hat{\varrho}\, \mathfrak{D}n$$

definíciója szerint, amelyekben $\mathfrak{D}n$ vastagsági átmérőnek az elemi része és az integrációk a vastagsági átmérőre terjednek ki. A tiszta éterben és a konduktorokban $\mathfrak{P} = 0$

Végül a kettős réteg skaláris momentuma igen pontosan teljesíti a

$$(\text{III}) \qquad j = \Phi_{+} - \Phi_{-}$$

egyenletet, ahol j a kettős rétegben egy teljes végtelen vékony normális hasáb kettős töltésével úgy van meghatározva, hogy az abban foglalt pozitív töltés átlagos sűrűségének, a két kvázi tömegcentrum távolságának s a hasáb hosszának (réteg vastagságának) a szorzata.

Elektromos térerősség, elektromos gerjesztés, elektromos tér.

56. Jelölje állandóan Φ izolátorok és konduktorok elektrosztatikai állapotában az igazi elektromos potenciált és mindig csak elektrosztatikai állapotokra, azaz változatlan elektromos állapotokra gondoljunk nyugvó és változatlan izolátorok és konduktorok rendszerében a földhöz rött koordinátarendszerünkben.

A Φ potenciál gradiensét ellentétes előjellel elektromos térerősségnek nevezzük és röviden $\mathfrak{E}$ betűvel jelöljük

(1) $$-\operatorname{grad}\Phi = \mathfrak{E}$$

Az előbbi cikk (I) alatt írt egyenletei szerint

(2) $$\operatorname{div}\mathfrak{E} = \bar{\varrho}$$

(3) $$\operatorname{div}(\mathfrak{E}+\mathfrak{P}) = \hat{\varrho}$$

Az utóbbi egyenlet értelmében az

(4) $$\mathfrak{E}+\mathfrak{P} \equiv \mathfrak{D}$$

vektor olyan a valóságos sürüségre nézve, mint az $\mathfrak{E}$ vektor a szabad (totális) sürüségre nézve. Ezt a $\mathfrak{D}$ vektort elektromos gerjesztésnek nevezzük

Jelöljék az elektromos térerősség komponenseit röviden $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ és az elektromos gerjesztés komponenseit $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}$, azaz legyen

(5) $$-\operatorname{grad}\Phi \equiv \mathfrak{E} \equiv (\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$$

(6) $$-\operatorname{grad}\Phi + \mathfrak{P} \equiv \mathfrak{E}+\mathfrak{P} \equiv \mathfrak{D} \equiv (\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R})$$

Akkor

(7) $$\mathfrak{X} \equiv -\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \quad \mathfrak{Y} \equiv -\frac{\partial\Phi}{\partial y}, \quad \mathfrak{Z} \equiv -\frac{\partial\Phi}{\partial z}$$

(8) $$\mathfrak{P} \equiv -\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \mathfrak{P}_x \equiv \mathfrak{X} + \mathfrak{P}_x, \text{ stb.}$$

(9) $$\operatorname{div}\mathfrak{E} \equiv \frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial z} = \bar{\varrho}$$

(10) $$\operatorname{div}\mathfrak{D} \equiv \frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial x} + \frac{\partial\mathfrak{Q}}{\partial y} + \frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial z} = \hat{\varrho}$$

Az előbbi cikk (II) alatti egyenletei szerint érintkezési retegek fölületi sürüségeire:

$$(9)' \qquad (\mathfrak{E}_n)_+ - (\mathfrak{E}_n)_- = \bar{\omega}$$

$$(10)' \qquad (\mathfrak{D}_n)_+ - (\mathfrak{D}_n)_- = \hat{\omega}$$

Konduktorban $\mathfrak{P}=0$, tehát konduktorban

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{E}\ , \quad \bar{\rho} = \hat{\rho} = div\,\mathfrak{E} = div\,\mathfrak{D}$$

Azolyan tért, amelyben az elektromos térerősség ($\mathfrak{E}$) általában nem zérus, elektromos térnek nevezzük akkor is, ha azon térben $div\,\mathfrak{E}$ $(=\bar{\rho})$ mindenütt zérus.

Az elektrosztatikai állapot föltétele izolátor belsejében.

57. Egy izotrop izolátor elektrosztatikai állapotában úgy gondoljuk annak a lehetőségét, hogy belsejében az egyéni elemi részekben egyenlő mennyiségű pozitiv és negativ elektromosság különböző eloztódásban van nyugalomban, hogy az elektromosságoknak is van tömegük, minélfogva azokra is hatnak erők a közönséges mekanikai értelemben s az elektromos térerősség a pozitiv elektromosságot folyvást a maga irányában, a negativot az ellenkező irányban törekszik mozditani az izotrop izolátorban, de a materiális elemi részektől maguktól visszatérítő erő hatását viselik, amely nagyságra arányos az eltolódásaikkal és megakadályozza, hogy az elemi részekből más elemi részek belsejébe jussanak úgy, hogy elektrosztatikai állapot létesültével a kétféle erő összege (rezultánsa) zérus.

Jelentse mármost egy materiális elemi részben $\mathfrak{D}D\tau$ azon elemi rész térfogatának egy magasabb rendű végtelen kis részét $\mathfrak{r}$ helyen az izotrop izolátor belsejében s tegyük föl, hogy ebből $\mathfrak{r}_1$ helyre tolódott $\mathfrak{D}D\tau_1$ térelembe a ϱ_1 sűrűségű pozitiv töltés és $\mathfrak{r}_2$ helyre tolódott $\mathfrak{D}D\tau_2$ térelembe a ϱ_2 sűrűségű negativ töltés. Úgy véljük, hogy ezek az elektromos tértől a $\varrho_1 \mathfrak{E}_1 \mathfrak{D}D\tau_1$ illetőleg $\varrho_2 \mathfrak{E}_2 \mathfrak{D}D\tau_2$ azaz a

$$-\varrho_1 \operatorname{grad} \Phi_1 \mathfrak{D}D\tau_1 \quad \text{illetőleg} \quad -\varrho_2 \operatorname{grad} \Phi_2 \mathfrak{D}D\tau_2$$

hatást viselik, ahol Φ_1 az $\mathfrak{r}_1$ helyre, Φ_2 az $\mathfrak{r}_2$ helyre vonatkozó Φ érték. De a materiától is viselnek hatást s föltesszük, hogy a materiától az ő $\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}$ illetőleg $\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}$ eltolódásukkal és a $\mathfrak{D}D\tau_1$ illetőleg $\mathfrak{D}D\tau_2$ térelemmel, meg a ϱ_1 illetőleg ϱ_2 sűrűség négyzetével ellentétesen arányos hatást viselnek oly együttható szerint, amely csak a materiális minőségtől és állapottól függ. A materiától ezen $\frac{2}{\varkappa}$ pozitiv együttható szerint

$$2\,\frac{\varrho_1^2}{\varkappa}(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_1)\,\mathfrak{D}D\tau_1 \quad \text{illetőleg} \quad 2\,\frac{\varrho_2^2}{\varkappa}(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_2)\,\mathfrak{D}D\tau_2$$

visszatérítő hatást viseli föltevésünk értelmében a két eltolódott töltés. Elektrosztatikai állapotban a kétféle erőnek mindegyik eltolódott töltésen ellensúlyoznia kell egymást, tehát kell, hogy

$$\frac{2\varrho_1^2}{\varkappa}(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_1)\,\mathfrak{D}D\tau_1 - \varrho_1 \operatorname{grad} \Phi_1\, \mathfrak{D}D\tau_1 = 0$$

$$\frac{2\varrho_2^2}{\varkappa}(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_2)\,\mathfrak{D}D\tau_2 - \varrho_2 \operatorname{grad} \Phi_2\, \mathfrak{D}D\tau_2 = 0$$

legyen. Viszont, ha ezen egyenletek teljesülnek, akkor már olyan az elemi rész elektromos állapota, hogy változatlan maradhat.

58. Osszuk át ezeket az egyenleteket a $\frac{2\varrho_1}{\varkappa}$, illetőleg $\frac{2\varrho_2}{\varkappa}$ faktorral, azután adjuk össze és integráljuk a testelem $D\tau$ térfogatára. Minthogy $\varrho_1 DD\tau_1 = -\varrho_2 DD\tau_2$ és minthogy $\varkappa$ a testelem belsejében egyenletesnek számíthat, a testelem határrétegét pedig az integrációban figyelmen kivül hagyhatjuk, azt kapjuk, hogy

$$\int_{D\tau}\varrho_1 w_1 DD\tau_1 + \int_{D\tau}\varrho_2 w_2 DD\tau_2 = -\frac{\varkappa}{2}\left\{\int_{D\tau}\operatorname{grad}\Phi_1 DD\tau_1 + \int_{D\tau_0}\operatorname{grad}\Phi_2 DD\tau_2\right\}$$

ahol $\varkappa$ a materiától függő együtthatónak az elemi rész egy bizonyos belső pontjába tartozó értéke, $D\tau$ pedig az elemi rész térfogata.

Azonban, ha De jelöli az eltolódott pozitiv töltések összegét, akkor a baloldal a 36. cikk értelmében nem más, mint a

$$(\xi_1-\xi_2,\ \eta_1-\eta_2,\ \zeta_1-\zeta_2)\,De \equiv \mathfrak{P}D\tau$$

vektor, tehát

$$\mathfrak{P}D\tau = -\frac{\varkappa}{2}\left\{\int_{D\tau}\operatorname{grad}\Phi_1 DD\tau_1 + \int_{D\tau}\operatorname{grad}\Phi_2 DD\tau_2\right\}$$

Itt pedig a jobboldalon végtelen nagy pontosság szerint minden $DD\tau_1$ és $DD\tau_2$ térelemben Φ-nek ugyanazon gradiensét használhatjuk, a testelem ugyanazon pontjára vonatkozót, mert a különböző gradiens értékek csak végtelen kicsinnyel különböznek egymástól. A jobboldal helyett tehát $-\varkappa \operatorname{grad}\Phi D\tau$ irható. Ezerint a

$$(11)\qquad \mathfrak{P} = -\varkappa \operatorname{grad}\Phi = \varkappa\mathfrak{E}$$

egyenletünk van. Ez szükséges föltétele egy izotrop izolátor belsejében az elektrosztatikai állapotnak.

59. Most meg fogjuk látni, hogy a folytonosság elvén elégséges föltétele is (11) annak, hogy az eltolódott elektromosságok az izotrop izolátorban nyugalomban lehessenek. Ugyanis 57. végső egyenletei nemcsak szükséges, de elégséges föltételei is ennek, u. m. kissé másként írva, különben a testelem bármely magasabb rendű kis részére alkalmazva

$$2\varrho_1(w_1 - w) = -\varkappa \operatorname{grad} \Phi_1$$

$$2\varrho_2(w_2 - w) = -\varkappa \operatorname{grad} \Phi_2$$

Az itteni jobboldalok a térbeli folytonosság következtében végtelen nagy pontosság szerint mindenütt ugyanazok a testelemben s következőleg benne a baloldalak is végtelen nagy pontosság szerint mindenütt ugyanazok. Következőleg a testelem egyetlen magasabb rendű végtelen kis részére vonatkoztatott ily egyenlet nemcsak szükséges, de elégséges föltétele is annak, a folytonosság elvén, hogy az eltolódott elektromosságok nyugalomban lehessenek s úgy nem különben az is elégséges föltétele ennek, hogy egy elemi részből az ilyen egyenletek bal- és jobboldalának pozitív együtthatókkal képezett összege egyenlő legyen. Márpedig épen efféle egyenlőséget állít a (11). Hozzávéve azt is, hogy egy izolátor esetleg előforduló valóságos töltései oly szoros összeköttetésben vannak az elemi részekkel, hogy azokból nem mozdulhatnak, a (11) egyáltalán szükséges és elégséges föltétele annak, hogy az izotrop izolátor belsejének az elektromos állapota változatlan lehessen.

60. Anizotrop izolátorok számára módosítanunk kell a (11) alatti vonatkozást. Anizotrop izolatorban annak a belsejében sem tehető föl a materiától származó hatásról, hogy arányos az eltolódással, hanem az a föltevés kinálkozik s a belsejükben be is válik, hogy anizotrop izolátorban a materiától származó hatás komponensei általánosabb egyszerű függvényei (homogén, lineáris egész függvényei) az eltolódás komponenseinek és következőleg anizotrop izolátor belsejében viszont az eltolódás komponensei általánosabb egyszerű függvényei a térerősség komponenseinek s az eltolódott elemi töltéseknek. Ebből a megelőzőkhöz hasonló eljárással az következik, hogy oly $\varkappa_{11}$, $\varkappa_{12}$, $\varkappa_{13}$, stb. együtthatók szerint, amelyek csak a materiális minőség és állapot függvényei az (5) és (7) értelmében:

$$
(12)\quad \begin{cases}
\mathfrak{P}_x = \varkappa_{11}\mathfrak{X} + \varkappa_{12}\mathfrak{Y} + \varkappa_{13}\mathfrak{Z} = -\left(\varkappa_{11}\dfrac{\partial\Phi}{\partial x} + \varkappa_{12}\dfrac{\partial\Phi}{\partial y} + \varkappa_{13}\dfrac{\partial\Phi}{\partial z}\right) \\
\mathfrak{P}_y = \varkappa_{21}\mathfrak{X} + \varkappa_{22}\mathfrak{Y} + \varkappa_{23}\mathfrak{Z} = -\left(\varkappa_{21}\dfrac{\partial\Phi}{\partial x} + \varkappa_{22}\dfrac{\partial\Phi}{\partial y} + \varkappa_{23}\dfrac{\partial\Phi}{\partial z}\right) \\
\mathfrak{P}_z = \varkappa_{31}\mathfrak{X} + \varkappa_{32}\mathfrak{Y} + \varkappa_{33}\mathfrak{Z} = -\left(\varkappa_{31}\dfrac{\partial\Phi}{\partial x} + \varkappa_{32}\dfrac{\partial\Phi}{\partial y} + \varkappa_{33}\dfrac{\partial\Phi}{\partial z}\right)
\end{cases}
$$

61. Minthogy (4)-ből $\mathfrak{P} = \mathfrak{D} - \mathfrak{E}$, ennélfogva (11) helyett

$$(11)' \qquad \mathfrak{D} = (1+\varkappa)\mathfrak{E} = \varepsilon\mathfrak{E} = -\varepsilon \operatorname{grad}\Phi, \quad (1+\varkappa \equiv \varepsilon)$$

és ha

$$1+\varkappa_{11} = \varepsilon_{11}, \quad \varkappa_{12} = \varepsilon_{12}, \quad \varkappa_{13} = \varepsilon_{13}, \quad \text{stb.}$$

írjuk, úgy (12) helyett (8) számba vételével:

$$(12)' \begin{cases} \mathfrak{P} = \varepsilon_{11} \mathfrak{X} + \varepsilon_{12} \mathfrak{Y} + \varepsilon_{13} \mathfrak{Z} = -\left(\varepsilon_{11} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \varepsilon_{12} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \varepsilon_{13} \frac{\partial \Phi}{\partial z}\right) \\ \mathfrak{Q} = \varepsilon_{21} \mathfrak{X} + \varepsilon_{22} \mathfrak{Y} + \varepsilon_{23} \mathfrak{Z} = -\left(\varepsilon_{21} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \varepsilon_{22} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \varepsilon_{23} \frac{\partial \Phi}{\partial z}\right) \\ \mathfrak{R} = \varepsilon_{31} \mathfrak{X} + \varepsilon_{32} \mathfrak{Y} + \varepsilon_{33} \mathfrak{Z} = -\left(\varepsilon_{31} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \varepsilon_{32} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \varepsilon_{33} \frac{\partial \Phi}{\partial z}\right) \end{cases}$$

ahol az ε együtthatók csak a materiális minőség és állapot függvényei.

Izotrop eszményi izolátorok belsejében (11) illetőleg (11)' anizotrópok belsejében pedig (12) illetőleg (12)' tekinthetők az elektrosztatikai állapot föltételének kiegészitve azzal, hogy az izolátorok elemi részeivel azok valóságos töltése oly szorosan összefügg, hogy a belső elemi részek változatlanul őrzik valóságos töltésüket. Az ε együtthatókat dielektromos együtthatóknak nevezzük. A tapasztalás szerint

$$\varepsilon_{32} = \varepsilon_{23}\,,\quad \varepsilon_{13} = \varepsilon_{31}\,,\quad \varepsilon_{21} = \varepsilon_{12}$$

Izotrop izolátor belsejében

$$(\mathfrak{F}\,\mathfrak{D}) = \varepsilon\,\mathfrak{F}^2$$

tehát $(\mathfrak{F}\,\mathfrak{D})$ egy forma definita pozitiva. De anizotrop izolátorok belsejében is mindig az a tapasztalás szerint, mert mindig található oly koordinátarendszer egy testelemhez, hogy abban csak ε_{11}, ε_{22}, ε_{33} nem zérus és ezek pozitivok, söt nagyobbak az egységnél.

Ha materiális minőség vagy legalább materiális állapot szerint nem homogén az izolátor, akkor ugyan föl kellene tennünk, hogy oly hatása is van az elektromosságokra, amely az inhomogénségéből származik. Ez azonban eszményi izolátor belsejében nem levőnek tekinthető, mert a valóságos izolátorok belsejében mindig igen kicsiny. Számba kell azonban vennünk ezt a hatást az izolátorok határrétegében.

Az elektrosztatikai állapot föltétele izolátorok határrétegeiben.

62. Oly izolátorokra szorítkozunk, amelyeknek az inhomogén voltából az elektromosságokra háramló hatás az elektromos kvantumok egységére vonatkoztatva a materiális minőségtől függő potenciál gradiense. Jelölje ezt a potenciált p. Akkor izolátorok határrétegeiben (más izolátorokkal vagy konduktorokkal érintkezés ~~rétegeiben~~ egyaránt) az elektromos momentum kifejezéseiben (11) és (12) alatt $-\Phi$ helyett $-\Phi+p$, illetőleg $\mathfrak{E}$ helyett $\mathfrak{E}+\operatorname{grad} p$, X, Y, Z helyett $X+\frac{\partial p}{\partial x}$, stb. használandó. A p gradiensét a matéria elektromótoros erejének nevezzük.

Írjuk, hogy $\Phi - p \equiv \mathfrak{F}$. Ekkor $\mathfrak{P}$-nek (11) és (12)-ben lévő potenciálos kifejezése helyett az izolátorok határrétegeiben, ha izotrópok:

$$(11)_1 \qquad \mathfrak{P} = -\varkappa \operatorname{grad} \mathfrak{F} = \varkappa(\mathfrak{E}+\operatorname{grad} p)$$

ha anizotropok:

$$(12)_1 \quad \begin{cases} \mathfrak{P}_x = -\left(\varkappa_{11}\dfrac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x} + \varkappa_{12}\dfrac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y} + \varkappa_{13}\dfrac{\partial \mathfrak{F}}{\partial z}\right) = \\ \qquad = \varkappa_{11}\left(X+\dfrac{\partial p}{\partial x}\right) + \varkappa_{12}\left(Y+\dfrac{\partial p}{\partial y}\right) + \varkappa_{13}\left(Z+\dfrac{\partial p}{\partial z}\right) \text{ stb.} \end{cases}$$

mert most Φ helyett $\Phi - p$ tehát $\mathfrak{F}$ irandó.

63. Mivel a $\mathfrak{P}$ dielektromos momentum a határrétegekben sem igen nagy soha, úgy ezen kifejezésekből az következik, hogy $\mathfrak{F}$ nem változik rohamosan a határrétegeken keresztül sem, ugyanis ezen kifejezések szerint $\mathfrak{F}$ első deriváltjai nem lehetnek igen nagyok. A $(11)_1$ esetében közvetlenül látható ez, a $(12)_1$ esetében pedig abból ösmerhető föl, hogy van oly koordinátarendszer, amelyben csak $\varkappa_{11}, \varkappa_{22}, \varkappa_{33}$ nem zérus a $\varkappa$ együtthatók sorában. Ennek nevezetes folyománya, hogy Φ-nek a határrétegeken keresztül való értékváltozása: $(\Phi_+ - \Phi_-)$ nagy megközelítés szerint p értékváltozásával egyenlő, tehát a kettős elektromos rétegek skaláris momentuma

$$(13) \qquad j = p_+ - p_-$$

nagy pontossággal, miből ugyancsak látható, hogy j a materiális minőség és állapot egyenetlenségének a következménye.

A $(11)'$ és $(12)'$ helyett izolatorok határrétegében $(11)_1'$ és $(12)_1'$ alól (6) értelmében izotrop illetőleg anizotrop érintkezésekre:

$$(11)_1' \qquad \mathfrak{D} = \varepsilon \mathfrak{E} + (\varepsilon - 1)\,\mathrm{grad}\, p$$

$$(12)_1' \qquad \mathfrak{D}_x = \varepsilon_{11} X + \varepsilon_{12} Y + \varepsilon_{13} Z + (\varepsilon_{11} - 1)\frac{\partial p}{\partial x} + \varepsilon_{12}\frac{\partial p}{\partial y} + \varepsilon_{13}\frac{\partial p}{\partial z}, \text{ stb.}$$

tehát az elektromos gerjesztés a $(11)'$ illetőleg $(12)'$ alatti kifejezésnek s egy oly vektornak az eredője, amely a materiális minőség és állapot függvénye.

64. Izolátorok belsejében vagy saját érintkezési rétegeiben lévő valóságos töltések materiális székhelyükhöz vannak kötve, materiális székhelyükből nem távozhatnak. Ellenben izolátor és konduktor érintkezési rétegében lévő egyszerű valóságos töltés szabadon helyezkedhetik el a rétegben, ámde a $\Phi - p$ potenciáltól származó hatáson kívül (amely a határrétegen keresztül sem változik rohamosan) azt a kirovást viseli, hogy az izolátor belsejébe nem hatolhat. Az egyszerű elektromos rétegben egy végtelen vékony teljes merőleges hasáb egyszerű töltését jelölje most $\mathfrak{De}$. Ez a töltés a $-\operatorname{grad}(\Phi - p).\mathfrak{De}$ erő hatásán kívül még kényszererő hatását is viseli, amely meggátolja abban, hogy az izolátor belseje felé mozdulhasson. Hogy tehát nyugalomban lehessen, annak szükséges és elégséges föltétele a virtuális munka törvénye szerint, hogy $\mathfrak{D}\hat{e}$ valóságos egyszerű elemi töltésen

$$(\operatorname{grad}(\Phi - p)\,\mathfrak{D}\hat{e}\,.\,\delta w) \geqq 0$$

legyen mindazon δw vektorokkal, amelyek nem irányúlnak az izolátor belseje felé. Ha tehát az izolátor belseje felé mutató normálisnak az iránykoszinuszai α, β, γ és δw olyan, hogy ($\delta x, \delta y, \delta z$ jelentvén a komponenseit)

$$-(\alpha\delta x + \beta\delta y + \gamma\delta z) \geqq 0$$

akkor már azon elvi egyenlőtlenség a keresett föltétel. Következőleg a multiplikátorok tétele szerint nem különben

$$(14) \qquad -\mathfrak{D}\hat{e}\operatorname{grad}(\Phi - p) = (\alpha, \beta, \gamma)\lambda \quad , \quad \lambda \geqq 0$$

is azon föltétel, vagyis az, hogy úgy legyen elhelyezkedve az egyszerű elektromos töltés az izolátor határrétegében, hogy a $-\mathfrak{D}e\,\mathrm{grad}(\Phi - p)$ hatásnak az iránya a rétegre merőlegesen az izolátorba mutasson.

65. A $(11)_1$ vagy $(12)_1$ és épúgy a $(11)_1'$ vagy $(12)_1'$ az elektrosztatikai állapot föltétele az eltolódott töltésekre az érintkezési rétegekben, (13) a kettős valóságos töltésekre és konduktornak meg izolátornak az érintkezési rétegében, még (14) az egyszerű valóságos töltésekre.

Az elektrosztatikai állapot föltétele konduktorok belsejében és konduktorok érintkezési rétegében.

66. Ha egy izolátornak a belsejében is számba akarnók venni azt a hatást, amely a materiális minőség és állapot egyenletlenségéből háramlik az elektromosságokra, akkor a (11) és (12) alatt Φ helyett az izolátor belsejében is $\Phi - p$ volna használandó. Izolátor belsejében azonban $p = 0$ tehető. Ellenben egy konduktornak a belsejében is számot tévő pontatlanságot követhetnénk el ezen elhanyagolással, másfelől pedig konduktor belsejében és konduktoroknak sajót érintkezési rétegében $\mathfrak{D} = 0$ írható mindenütt. Elektrosztatikai állapotban egy konduktorban tényleg minden elektromos kvantumelemecnyén az elektrosztatikai tértől és a materiális minőség és állapot egyenetlenségétől származó hatást visel.

Az utóbbit szintén gradiensnek gondolva most is és potenciálját $p\,\mathfrak{De}$-vel jelölve

$$\mathfrak{F}\,\mathfrak{De} + \mathrm{grad}\ p\,\mathfrak{De} = (-\,\mathrm{grad}\,\Phi + \mathrm{grad}\,p)\,\mathfrak{De}$$

a $\mathfrak{De}$ töltésen a mozgató hatás, tehát ennek az eltűnése jelenti konduktorokban az elektrosztatikai állapot lehetőségének szükséges és elégséges föltételét:

$$\mathfrak{F} + \mathrm{grad}\ p = -\,\mathrm{grad}(\Phi - p) = 0$$

honnan $\mathfrak{G}$ integrációs konstans szerint

$$\Phi = \mathfrak{G} + p \tag{15}$$

Konduktorok belsejében és konduktorok saját érintkezési rétegében egyaránt ez a föltétele elektrosztatikai állapot lehetőségének, a hol $\mathfrak{G}$ egy konduktorban s nem különben egymással érintkező konduktorok összefüggő csoportjában minden helyen ugyanaz egy valamely elektrosztatikai állapotban, de más-más izolált konduktorban vagy konduktorcsoportban és más-más elektrosztatikai állapotban más lehet.

67. Az elektromos kvantum egységére ható grad p erőt, mint a materiális minőség és állapot egyenetlenségéből származót a matéria elektromótoros erejének mondjuk. Izolátorral érintkezés rétegében a konduktori oldalon 62-ből $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}$, tehát igen pontosan az egész rétegben is $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}$, t. i. amiatt, hogy $\mathfrak{F}$ a rétegen keresztül sem változik rohamosan. A (15) alatti egyenlet tehát

izolátor és konduktor érintkezési rétegét mindenütt igen pontosan megilleti.

68. Minthogy (15)-ből $\Delta\Phi = \Delta p$, ennélfogva konduktorban elektrosztatikai állapotban lévő töltéseket tisztán a materiális minőség és állapot határozza meg, mert

$$\bar{\rho} = \hat{\rho} = -\Delta\Phi = -\Delta p \tag{16}$$

Amely terekben pedig egyenletes egy konduktor materiális minősége és állapota, azokban nem lehet töltése elektrosztatikai állapotban, mert azokban a p deriváltjai zérusok.

Két konduktor érintkezési rétegében a kettős töltés skaláris elektromos momentuma (15)-ből folyólag:

$$j = p_+ - p_-$$

tehát csak az érintkező konduktorok materiális minőségének és állapotának a függvénye

Elektrosztatikai állapotok meghatározása.

69. A valóságos elektromos sűrűségek adott anyagi rendszer adott materiális állapotában meghatározzák az elektrosztatikai állapotot. Sőt csakis az izolátorok belsejéből és egymással érintkezésük rétegeiből szükségesek maguk a valóságos elektromos sűrűségek, de ezeken kívül az egyes izolált konduktoroknak vagy konduktor csoportoknak meg a környező izolátoroknak az érintkezési rétegből való valóságos elektromos kvantum szük

sége még csupán az elektrosztatikai állapot meghatározására, ugyanis az izolátorok belsejében és saját érintkezési rétegeiben a valóságos töltések adott sűrűségeihez és az egyes izolált konduktorok, vagy összefüggő konduktorcsoportok meg a környező izolátorok érintkezési rétegeiben a valóságos töltések adott kvantumához egy bizonyos elektrosztatikai potenciál tartozik az izolátorok és konduktorok adott helyzetében és adott materiális minőségében és állapotában.

Tegyük ugyanis föl, hogy ez adatok mellett úgy a Φ, mint a Φ' potenciál szerint való elektrosztatikai állapot lehetséges. Ki fog tűnni, hogy $\Phi' = \Phi$.

A valóságos elektromos sűrűség kifejezéséből indulunk ki, hogy t. i. a Φ potenciál esetében (x, y, z) helyen $\operatorname{div} \mathfrak{D} = \hat{\rho}$, azaz

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \hat{\rho}$$

és a Φ' potenciál szerint ugyanazon helyen $\operatorname{div} \mathfrak{D}' = \hat{\rho}'$, azaz:

$$\frac{\partial P'}{\partial x} + \frac{\partial Q'}{\partial y} + \frac{\partial R'}{\partial z} = \hat{\rho}'$$

Érvényesek pedig ez egyenletek mindenütt, azaz konduktorokban is, amennyiben konduktorokban $P = X$, $Q = Y$, $R = Z$; $P' = X'$, $Q' = Y'$, $R' = Z'$.

Vonjuk ki egymásból a két egyenletet:

$$\frac{\partial (P' - P)}{\partial x} + \frac{\partial (Q' - Q)}{\partial y} + \frac{\partial (R' - R)}{\partial z} = \hat{\rho}' - \hat{\rho}$$

és ez újabb egyenletet szorozzuk meg mindkét oldalon $(\Phi' - \Phi)D\tau$-val azután integráljuk végtelen nagy sugarú gömbre:

$$\int_{(\infty)}(\Phi'-\Phi)\left[\frac{\partial(P'-P)}{\partial x}+\frac{\partial(Q'-Q)}{\partial y}+\frac{\partial(R'-R)}{\partial z}\right]\mathfrak{D}\tau=\int_{(\infty)}(\Phi'-\Phi)(\hat{\varrho}'-\hat{\varrho})\,\mathfrak{D}\tau$$

A baloldali integrálon végezzünk parciális redukciót. Az ebből származó fölületi integrál eltűnik. Ha tehát számbavesszük, hogy

$$\frac{\partial(\Phi'-\Phi)}{\partial x}\equiv\frac{\partial\Phi'}{\partial x}-\frac{\partial\Phi}{\partial x}\equiv-(X'-X)\text{, stb.}$$

azt kapjuk, hogy:

$$\int_{(\infty)}\left[(X'-X)(P'-P)+(Y'-Y)(Q'-Q)+(Z'-Z)(R'-R)\right]\mathfrak{D}\tau=\int_{(\infty)}(\Phi'-\Phi)(\hat{\varrho}'-\hat{\varrho})\,\mathfrak{D}\tau$$

A jobboldali integrációt elégséges a konduktorok és az izolátorok kölcsönös érintkezési rétegére terjeszteni ki, mert egyebütt $\hat{\varrho}'=\hat{\varrho}$; nevezetesen az izolátorok belsejében és saját érintkezési rétegeiben azért, mert azokban a valóságos elektromos sűrűség adva van; konduktorok belsejében és saját érintkezési rétegében pedig az elektrosztatikai állapot föltételeinél fogva $\hat{\varrho}'=\hat{\varrho}$ azért, mert a valóságos sűrűség a konduktorok materiális minőségével és állapotával meg van határozva. Ha tehát az egyes konduktorok vagy összefüggő konduktorcsoportok s a környező izolátorok érintkezési rétegének térfogatát rendre $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots$ jelöli, akkor a jobboldali integrálást elégséges ezekre a τ_i térközökre terjeszteni ki:

$$\int_{(\infty)}\left[(X'-X)(P'-P)+(Y'-Y)(Q'-Q)+(Z'-Z)(R'-R)\right]\mathfrak{D}\tau=\sum_i\int_{\tau_i}(\Phi_i'-\Phi_i)(\hat{\varrho}_i'-\hat{\varrho})\,\mathfrak{D}\tau_i$$

Azonban az elektrosztatikai állapot föltételeiből folyólag a jobboldalon minden egyes integrál igen nagy pontosság szerint eltűnik. Ugyanis a 67 cikk értelmében izolátor és konduktor határrétegében igen pontosan $\Phi = \mathcal{G} + p$, ahol $\mathcal{G}$ független a helytől. Hasonlóképen $\Phi' = \mathcal{G}' + p'$, ámde $p' = p$, mert ezeket meghatározza a matériális minőség és állapot. Következőleg

$$\Phi_i' - \Phi_i = \mathcal{G}_i' - \mathcal{G}_i$$

Minthogy $\mathcal{G}_i$ és nemkülönben $\mathcal{G}_i'$ független a helytől az egész τ_i-ban, ennélfogva

$$\int_{\tau_i} (\Phi' - \Phi)(\hat{\varrho}' - \hat{\varrho}) \mathfrak{D}\tau = (\mathcal{G}_i' - \mathcal{G}_i) \int_{\tau_i} (\hat{\varrho}' - \hat{\varrho}) \mathfrak{D}\tau = (\mathcal{G}_i' - \mathcal{G}_i)\left(\int_{\tau_i} \hat{\varrho}' \mathfrak{D}\tau - \int_{\tau_i} \hat{\varrho} \mathfrak{D}\tau\right)$$

Zérus ez amiatt, hogy a valóságos töltés nekkorasága τ_i-ban adva van. Ezek értelmében igen nagy pontossággal áll, hogy

$$\int_{(\infty)} \{(X' - X)(\mathfrak{P}' - \mathfrak{P}) + (Y' - Y)(\mathfrak{Q}' - \mathfrak{Q}) + (Z' - Z)(\mathfrak{R}' - \mathfrak{R})\} \mathfrak{D}\tau = 0$$

úgy, de $(\mathfrak{P}' - \mathfrak{P}, \mathfrak{Q}' - \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}' - \mathfrak{R})$ az elektrosztatikai állapot föltételeiből folyólag a 63. cikk $(11)_1'$ és $(12)_1'$ kifejezései szerint olyanok, mintha $p = 0$ volna, mert az ε együtthatók és p mindkét esetben ugyanaz, miher képest izotropiában:

$$\mathfrak{P}' - \mathfrak{P} = \varepsilon (X' - X), \text{ stb.}$$

anizotropiában:

$$\mathfrak{P}' - \mathfrak{P} = \varepsilon_{11} (X' - X) + \varepsilon_{12} (Y' - Y) + \varepsilon_{13} (Z' - Z), \text{ stb.}$$

Következőleg a 61. cikk szerint az itt írt integrál minden eleme forma definita pozitiva, amiből folyólag

$$X' = X, \quad Y' = Y, \quad Z' = Z$$

mindenütt a végtelen térben, vagyis

$$\frac{\partial \Phi'}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \Phi'}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \Phi'}{\partial z} = \frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

mindenütt, tehát egyszersmind $\Phi' = \Phi +$ const., és mivel a végtelenben $\Phi' = 0$, $\Phi = 0$, úgy az integráció konstánsa zérus, tehát $\Phi' = \Phi$.

A közönséges elektrosztatika föltevései.

70. Az elektrosztatika nagyon megegyszerüsödik, ha izolátorok és konduktorok oly rendszerére szorítkozik, amelyben a matéria elektromótoros ereje nem tesz számot. Ilyenkor az elektrosztatikai állapot lehetőségének föltétele gyanánt izotrop izolátoroknak nemcsak a belsejében, de az ő érintkezési rétegeikben is mindenütt a (11) vagy a vele egyetmondó (11)', anizotrop izolátoroknak nemcsak a belsejében, de az ő érintkezési rétegeikben is mindenütt a (12) vagy a vele egyetmondó (12)' szolgál, amely egyenletekben a $\varkappa$, illetőleg ε együtthatók a materiális minőség és állapot függvényei. Konduktoroknak, valamint konduktorok összefüggő csoportjainak belsejében (amihez a konduktorok saját érintkezési rétegei is tartoznak) az elektrosztatikai állapot lehetőségének föltétele (15) szerint arra redukálódik, hogy az elektromos potenciál értéke mindenütt ugyanaz, mert midőn nem tesz számot bennük a matéria elektromótoros ereje, akkor $p = 0$ tehető. Konduktorok és izolátorok érintkezési rétegében (14) ugyancsak $p = 0$ rendén csatlakozik (11)'-höz vagy (12)'-höz föltétel gyanánt ugyanis (14) az egyszerű valóságos töltésre.

De a közönséges elektrosztatika azzal a megszorítással is él, hogy csak izotrop izolátorokkal és konduktorokkal foglalkozik. Ehhez a megszorításhoz is hozzá szegődve, izolátorokban azok érintkezési rétegeiben is mindenütt (11), valamint a vele ekvivalens (11)' az elektrosztatikai állapot lehetőségének szükséges és elégséges föltétele:

$$(18) \qquad \mathfrak{P} = \varkappa\,\mathfrak{E} \text{ valamint } \mathfrak{D}(=\mathfrak{E}+\mathfrak{P}) = \varepsilon\,\mathfrak{E}, \quad (\varepsilon = 1+\varkappa)$$

amihez izolátor és konduktor érintkezési rétegében (14) szerint (amelyben most $\rho = 0$):

$$(18)_0 \qquad \mathfrak{E}\,\mathfrak{D}\hat{e} = (\alpha, \beta, \gamma)\,\Lambda \quad (\Lambda \gtreqless 0)$$

járul a valóságos egynemű töltések számára. Végül konduktoroknak vagy konduktorok összefüggő csoportjainak belsejében

$$(19) \qquad \mathfrak{P} = \mathfrak{E} = \mathfrak{D} = 0$$

A Φ elektromos potenciállal kifejezve, izolátorokban a

$$(18)_1 \qquad \mathfrak{P} = -\varkappa \operatorname{grad} \Phi$$

valamint

$$\mathfrak{D}(= \operatorname{grad} \Phi + \mathfrak{P}) = -\varepsilon \operatorname{grad} \Phi \quad , (\varepsilon = 1+\varkappa)$$

konduktoroknak s konduktorok összefüggő csoportjainak belsejében a

$$(19)_1 \qquad \Phi = const.$$

határozott egyenleteink vannak (mindig szem előtt tartva, hogy konduktorok összefüggő csoportjának a belsejéhez számítandó két-két konduktor érintkezési rétege is). Emellett izolátorok érintkezési rétegében $\mathfrak{P}$ mindig a teljes elektromos momentumot jelenti.

71. Ezentúl következő vizsgálódásainkra kikötjük, hogy izolátoraink és konduktoraink izotrópok és egyúttal olyanok, hogy bennük (sem a belsejükben, sem

a határrétegeikben) a matéria elektromótoros ereje nem tesz számot. E szerint most már majd mindig az előbbi, 70. artikulus egyenletei lesznek az elektrosztatikai állapot lehetőségének a föltételei, így pl. a valóságos sűrűségnek, u.m.

$$(20)\qquad \hat{\rho} = \operatorname{div} \mathfrak{D}$$

sűrűségnek az $\mathfrak{E}$ térerősséggel vagy a Φ potenciállal való kifejezése elektrosztatikai állapotban (18) illetőleg $(18)_1$ szerint

$$(20)_1\qquad \hat{\rho} = \operatorname{div} \varepsilon\mathfrak{E} = -\operatorname{div}(\varepsilon \operatorname{grad} \Phi)$$

mindenütt (konduktorokban is, amelyekben ez $(19)_1$ értelmében $=0$).

Vegyük észre, hogy homogén izolátor belsejében az elektrosztatikai állapotban

$$\hat{\rho} = \varepsilon \Delta\Phi = \varepsilon\bar{\rho}$$

tehát a $\bar{\rho}$ szabadsűrűség homogén izolátor belsejében mindig olyan előjelű, mint a $\hat{\rho}$ valóságos sűrűség és abszolút értékre sohasem nagyobb, mint $\hat{\rho}$, mert $\varepsilon \geqq 1$. A hol pedig $\hat{\rho}=0$ a homogén izolátor belsejében, ott nyilván képp $\bar{\rho}$ is $=0$.

72. Két izolátor érintkezésében a fölületi valóságos sűrűséget az 56. cikk $(10)'$ egyenletében az elektromos gerjesztés fejezi ki:

$$(20)'\qquad \hat{\omega} = (\mathfrak{D}_n)_+ - (\mathfrak{D}_n)_-$$

tehát (18) szerint és $(18)_1$ szerint

$$(20)_1'\qquad \hat{\omega} = (\varepsilon\mathfrak{E}_n)_+ - (\varepsilon\mathfrak{E}_n)_- = -\left(\varepsilon\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right)_+ + \left(\varepsilon\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right)_-$$

ugyanezek egy konduktor és egy izolátor érintkezési rétegében is érvényesek, amidőn pedig a konduktori oldalon (19)$_1$ következtében $\partial\Phi : \partial n = 0$. Ha tehát a konduktori oldalt választjuk negatív oldalnak, akkor az izolátor és konduktor érintkezéséhez tartozó valóságos fölületi sűrűség elektrosztatikai állapotban

$$(20)'_2 \qquad \hat{\omega} = (\varepsilon \mathfrak{E}_n)_+ = -\left(\varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial n}\right)_+$$

Ugyancsak ehhez az érintkezéshez a szabad fölületi sűrűség az 56. cikkből (9)' alól most, hogy $(\mathfrak{E}_n)_-$ eltűnik:

$$\bar{\omega} = (\mathfrak{E}_n)_+ = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right)_+$$

ennélfogva konduktor és izolátor érintkezési rétegében az elektrosztatikai állapotban

$$(20)'_3 \qquad \hat{\omega} = \varepsilon\,\bar{\omega}$$

odaértve, hogy ε az izolátor dielektromos együtthatóját az érintkezési réteg izolátori oldalán jelenti.

Két konduktor érintkezési rétegét is megilleti (20)$'_1$, midőn is (mindkét $\varepsilon = 1$ és) (19$_1$) következtében mindkét derivált eltűnik, tehát két konduktor érintkezési rétegében $\hat{\omega} = \bar{\omega} = 0$.

73. A jelenleg gondolt egyszerű rendszerben számot tévő kettős rétegek nem fordulnak elő, mert ezek csak a matéria elektromótoros erejének a következményei lehetnek, márpedig mostani föltevéseinkhez tartozik, hogy a matéria elektromótoros ereje nem tesz számot. Ennélfogva az elektromos potenciál csupa egyszerű szabad töltések potenciálja gyanánt szerepel most és következőleg az érintke-

zési rétegeken keresztül sem változik rohamosan, úgy, h amennyiben nem kell deriválni, annyiban az érintkezési rétegek vastagsági átmérőin egyenletesnek számíthat a Φ potenciál.

Elektromos állapot létezésének föltétele a közönséges elektrosztatikában.

74. A közönséges elektrosztatika keretében az elektromos (azaz nem-neutrális) állapot létezésének szükséges és elégséges föltétele valóságos töltések létezése: ha nincs valóságos töltés, akkor nincs szabad töltés sem, és ha van valóságos töltés, akkor van szabad töltés is.

Bebizonyítása annak, hogy ha nincs $\bar{\rho}$, akkor nincs $\bar{\rho}$ sem. Ha $\bar{\rho} = 0$, akkor $\operatorname{div} \mathfrak{D} = 0$. Szorozzuk ezen egyenletet a Φ potenciállal és $D\tau$ térelemmel, azután integráljuk végtelen nagy sugarú gömbtérben. Részletesen írva

$$\int_\infty \Phi\left(\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial z}\right) D\tau = 0$$

ahol $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}$ a $\mathfrak{D}$ elektromos gerjesztés komponenseit jelentik. Végezzünk parciális redukciót. A fölületi integrálban $\Phi\mathfrak{P}$, $\Phi\mathfrak{Q}$, $\Phi\mathfrak{R}$ szorzók fordulnak elő. Azonban Φ elsőrendűen, és ennek rendén $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}$ másodrendűen zérussá válik a végtelenben, tehát a fölületi integrálban a fölületelemek harmadrendű végtelen kicsinyekkel szorozvák, minélfogva a fölületi integrál eltűnik. Minthogy pedig $-\operatorname{grad} \Phi = \mathfrak{E}$ és $(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}) = \mathfrak{D} = \varepsilon \mathfrak{E}$, a redukció után csak ez marad egyenle

gyanánt:
$$\int_{\infty} \varepsilon \mathfrak{E}^2 D\tau = 0$$

Ebből $\mathfrak{E} = 0$ következik, tehát div $\mathfrak{E} = 0$, azaz $\bar{\varrho} = 0$. $\bar{\Phi} = 0$ is következik.

Bebizonyitása annak, hogy, ha van valóságos töltés, akkor van szabad töltés is, igen egyszerű. Ugyanis azt kell csak kimutatni hogy, ha nincs szabad töltés, akkor valóságos sincs. Ez pedig igaz, mert ha nincs szabad töltés, akkor $\bar{\Phi} = 0$ mindenütt, tehát (20), szerint $\hat{\varrho}$ is $= 0$ mindenütt.

Elektrosztatikai energia.

75. Térjünk vissza most a Coulomb-féle elemi hatásokhoz, amelyek abban nyilvánulnak, hogy koordinátarendszerünkben nyugvó, változatlan állapotú homogén és izotrop izolátorban $\hat{e}$ valóságos töltésű nyugvó test a tőle aránylag nagy $r_1, r_2, r_3 \ldots$ távolban levő $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \ldots$ szabad töltésű nyugvó testektől a

$$-\frac{\hat{e}}{4\pi}\,\mathrm{grad}\left(\frac{\bar{e}_1}{r_1} + \frac{\bar{e}_2}{r_2} + \frac{\bar{e}_3}{r_3} + \cdots\right)$$

tömegmozgató hatást viseli az ő elektromos töltésénél fogva odaértve, hogy egészen változatlan állapotban vannak mindezen testek is, megjegyzendő itt, hogy a dielektromos együtthatónak s a valóságos és a szabad töltéseknek a Coulomb-féle elemi hatásokban definiált fogalma és később máskép általános módokon definiált fogalma egyezésben van, hacsak az itt gondolt testek mindegyikéhez hozzászámítjuk a környezettel való érintkezésük teljes rétegét tehát még a környezetnek velük érintkező határrétegét is. Valóban, mivel általánosan $\hat{\varrho} = \operatorname{div} \varepsilon \mathfrak{E}$ és $\bar{\varrho} = \operatorname{div} \mathfrak{E}$, úgy

$$\hat{e} = \int_\tau \operatorname{div} \varepsilon \mathfrak{E}\, \mathfrak{D}\tau \;, \quad \bar{e} = \int_\tau \operatorname{div} \mathfrak{E}\, \mathfrak{D}\tau$$

ahol τ valamely test teljes térfogatát jelenti, amely a test és a környezet érintkezésének a rétegét is egészen magában foglalja. Redukáljuk ezeket az integrálokat a (τ) tér fölületére σ-ra vonatkozó fölületi integrálokká. Ha a σ fölület befelé mutató normálisainak irányát n jelöli, és $\mathfrak{E}$-nek egy ilyen normálisra tartozó komponense $\mathfrak{E}_n$, akkor a redukció után

$$\hat{e} = -\int_\sigma \varepsilon \mathfrak{E}_n\, \mathfrak{D}\sigma \;, \quad \bar{e} = -\int_\sigma \mathfrak{E}_n\, \mathfrak{D}\sigma$$

Azonban a σ fölület már mint határfölület a környezet belsejéhez is tartozik, tehát az ε dielektromos együttható σ minden pontjában ugyanaz, t.i. amiatt, hogy homogén és egyenletes állapotú a környezet belseje, következőleg ε az első integrálból az integráció jele elé tehető. Ennélfogva:

$$\bar{e} = \frac{\hat{e}}{\varepsilon}$$

egyezésben a Coulomb-féle elemi hatásokhoz fűzött definicióval.

76. Ha az előforduló testek száma N, akkor
75. Bevezetésében
($\hat{e} = \hat{e}_\nu$ téve, s úgy általánosan $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3, \dots$ -vel jelölve

az egyes testek valóságos töltését és r_{hk} jelölvén a h-adik és k-adik test távolságát, az 1, 2, 3,... számú test rendre a

$$-\mathrm{grad}_1\left(\frac{\bar{e}_2}{r_{12}}+\frac{\bar{e}_3}{r_{13}}+\frac{\bar{e}_4}{r_{14}}+\cdots\right)\frac{\hat{e}_1}{4\pi}$$

$$-\mathrm{grad}_2\left(\frac{\bar{e}_1}{r_{21}}+\frac{\bar{e}_3}{r_{23}}+\frac{\bar{e}_4}{r_{24}}+\cdots\right)\frac{\hat{e}_2}{4\pi}$$

$$-\mathrm{grad}_3\left(\frac{\bar{e}_1}{r_{31}}+\frac{\bar{e}_2}{r_{32}}+\frac{\bar{e}_4}{r_{34}}+\cdots\right)\frac{\hat{e}_3}{4\pi}$$

Coulomb-féle hatást viseli a többitől, amely kifejezésekben a gradiensek indexe azt jelenti, hogy a gradiensek képzésében az indexhez tartozó test koordinátái szerint kell végezni a deriválást. – Ha pedig azt írjuk, hogy

$$\frac{\hat{e}_1}{4\pi}\left(\frac{\bar{e}_2}{r_{12}}+\frac{\bar{e}_3}{r_{13}}+\frac{\bar{e}_4}{r_{14}}+\cdots\right)+\frac{\hat{e}_2}{4\pi}\left(\frac{\bar{e}_1}{r_{21}}+\frac{\bar{e}_3}{r_{23}}+\frac{\bar{e}_4}{r_{24}}+\cdots\right)+\cdots\equiv 2W.$$

akkor $-\mathrm{grad}_1 W$, $-\mathrm{grad}_2 W$, $-\mathrm{grad}_3 W$, ... rendre szintén az egyes testekre háramló Coulomb-féle hatás. Elég lesz ezt az egyik testen igazolni. Legyen ez az (1)-es számú test. $2W$ azon tagjainak az x_1, y_1, z_1 szerinti deriváltja, amelyekben az r egyik indexe sem 1, nyilvánképen zérus, mert ezek a tagok az x_1, y_1, z_1 koordinátákat nem tartalmazzák. Eszerint a grad_1 kifejezésben a $2W$-nek csupán az itt következő része számít, u. m.:

$$\frac{1}{4\pi}\left\{\hat{e}_1\left(\frac{\bar{e}_2}{r_{12}}+\frac{\bar{e}_3}{r_{13}}+\frac{\bar{e}_4}{r_{14}}+\cdots\right)+\left(\hat{e}_2\frac{\bar{e}_1}{r_{21}}+\hat{e}_3\frac{\bar{e}_1}{r_{31}}+\cdots\right)\right\}$$

Ámde $r_{21}=r_{12}$, $r_{31}=r_{13}$, stb. és $\hat{e}_1=\varepsilon\bar{e}_1$, $\hat{e}_2=\varepsilon\bar{e}_2$, stb. lévén

$\hat{e}_2\bar{e}_1 = \hat{e}_1\bar{e}_2$, $\hat{e}_3\bar{e}_1 = \hat{e}_1\bar{e}_3$; $\hat{e}_4\bar{e}_1 = \hat{e}_1\bar{e}_4$, stb

következőleg a két kerek zárójel tagjai rendre egyenlők és így W-nek az a része, amely a $grad_1 W$ értékét szolgáltatja =

$$\frac{\hat{e}_1}{4\pi}\left(\frac{\bar{e}_2}{r_{12}} + \frac{\bar{e}_3}{r_{13}} + \frac{\bar{e}_4}{r_{14}} + \cdots\right).$$

Ez a föntebb írt gradiensek elsejének a potenciálja, tehát csakugyan $(-grad_1 W)$ az 1-es számú testre a többiekből ható Coulomb-féle erő. Hasonlóan következik, hogy $(-grad_2 W)$ a 2-es számú testre a többiektől ható Coulomb-féle erő s így tovább.

77. Ebből az is látható, hogy a testek bármely képzelt elemi tolódását jelentse $\delta w_1, \delta w_2, \delta w_3, \ldots$ a testek Coulomb-féle egymásra hatásának a munkája ez elmozdulásokon =

$$-(grad_1 W \cdot \delta w_1 + grad_2 W \cdot \delta w_2 + \cdots)$$

ahol a vektorok skaláris szorzatai értendők. – Nem más ez, mint $-W$-nek oly $-\delta W$ elemi megváltozása, amely a valóságos elektromos töltések folytonos megtartása és ε-nak a változatlansága mellett a testeknek $\delta w_1, \delta w_2, \delta w_3, \ldots$ eltolásával származik, mert $\delta\hat{e} = 0$, $\delta\bar{e} = \delta\frac{\hat{e}}{\varepsilon} = 0$ lévén, a variálásnak csupán az r távolságokra vonatkoztatásával

$$-\delta W = -\sum_i\left(\frac{\partial W}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial W}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial W}{\partial z_i}\delta z_i\right) \equiv -\sum_i grad_i W \cdot \delta w_i$$

78. Ezek után vegyük figyelembe, hogy ha az 1-es számú test egy pontjában a többi testek szabad elektromosságának a potenciálja Φ_1, a 2-es számú test egy pontjában a többiek szabad elektromosságának a potenciálja Φ_2 és i. t., akkor az aránylagos nagy távolságok miatt az 1-es számúnak minden pontjában is Φ_1 s a 2-es számúnak minden pontjában is Φ_2 stb. jelentheti a többi test szabad töltésének a potenciálját s részletesen írva

$$\Phi_1 = \left(\frac{\bar{e}_2}{r_{12}} + \frac{\bar{e}_3}{r_{13}} + \cdots \right) \frac{1}{4\pi}$$

$$\Phi_2 = \left(\frac{\bar{e}_1}{r_{21}} + \frac{\bar{e}_3}{r_{23}} + \cdots \right) \frac{1}{4\pi}$$

. . . . . .

Ezerint

$$W = \frac{1}{2} \left(\hat{e}_1 \Phi_1 + \hat{e}_2 \Phi_2 + \hat{e}_3 \Phi_3 + \cdots \right)$$

Ennek a kifejezésnek pedig akkor is határozott érték felel meg, ha $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3, \ldots$ mint térelemek valóságos töltései tetszésszerinti testekben folytonos térbeli sokaságot, térbeli kontinuumot alkotnak és Φ_1, Φ_2, Φ_3, stb az összes szabad elektromosságok potenciáljának, Φ-nek értékei az $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3, \ldots$ most végtelen kis térfogatú valóságos töltéseknek a helyén, amidőn

$$(21) \qquad W = \frac{1}{2} \int \hat{\varrho}\, \Phi \, \partial\tau$$

kiterjesztendő lévén az integráció legalább arra a térre, amely a valóságos töltéseket tartalmazza. De nagyobb térre is kiterjeszthető az integrálás, mert egyebütt $\hat{\varrho}$ úgy is

$= 0$. Ezt az elektrosztatikai állapot energiájának, vagy elektrosztatikai energiának nevezzük.

79. Más egyszerű alakban is előállítható ez, illetőleg más egyszerű alakba transformálható.

Eme más W alak előállítása végett beírjuk az integrálba $\hat{\rho}$ helyett ennek a div $\mathfrak{D}$ vagyis a

$$\hat{\rho} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

értékét, azután végtelen nagy sugarú gömbre vonatkoztatjuk az integrált (amit tehetünk, mert ahol nincs valóságos töltés, ott zérus $\hat{\rho}$-nak ez a kifejezése is.) azután parciális redukciót végezünk rajta, de az ebből származó fölületi integrált mellőzzük, mint olyat, amelyben az integrálandó függvény harmadrendű végtelen kicsiny. Ha végül a redukció után $-\Phi$, derivaltjai helyett az X, Y, Z írjuk be, akkor ez az új kifejezésünk lesz az elektrosztatikai energia W számára:

$$(22) \qquad W = \frac{1}{2}\int_{\infty}(XP + YQ + ZR)\,d\tau = \frac{1}{2}\int_{\infty}(\mathfrak{E}\,\mathfrak{D})\,d\tau$$

amiből azt is látjuk, hogy W mindig pozitiv, mert $\mathfrak{D} = \varepsilon\mathfrak{E}$ mindig és mindenhol mostani tárgyalásunkban, mihez képest

$$(23) \qquad W = \frac{1}{2}\int_{\infty}\varepsilon\,\mathfrak{E}^2\,d\tau = \frac{1}{2}\int_{\infty}\varepsilon\left\{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2\right\}d\tau$$

Az elektrosztatikai energia virtuális megváltozása.

80. A W-nek (21) és (23) alatt lévő alakjából új alakját származtatjuk az által, hogy a (23)-at kivonjuk (21)

kétszereséből. W ilyképen előálló (Helmholtz-féle) kifejezése:

$$(24)\qquad W=\int_\infty \hat{\varrho}\,\Phi\,\mathfrak{D}\tau-\frac{1}{2}\int_\infty \varepsilon\,\mathfrak{F}^2\mathfrak{D}\tau\equiv\int_\infty \hat{\varrho}\,\Phi\,\mathfrak{D}\tau-\frac{1}{2}\int_\infty \varepsilon\left\{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2\right\}\mathfrak{D}\tau$$

Ennek pedig az a nevezetes tulajdonsága van, hogy rajta egyszerű módon számítható W-nek azon elemi megváltozása, amely a testelemek képzelt végtelen kis elmozdításaiból származik. Ugyanis az integráljelek alatt elégséges a $\hat{\varrho}$ sűrűségnek és az ε dielektromos együtthatónak a megfelelő variációját számítani a térelemekben, mert a két integráltagnak a Φ potenciál megváltozásával járó megváltozása ellentétesen egyenlő. Valóban a második integráltagnak $\delta\Phi$-vel járó megváltozása $=$

$$-\int_\infty \varepsilon\left\{\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial\delta\Phi}{\partial x}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial\delta\Phi}{\partial y}+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{\partial\delta\Phi}{\partial z}\right\}\mathfrak{D}\tau$$

Végezzünk itt $\delta\Phi$ deriváltjaira parciális redukciót. A fölületi integrál eltűnik, a térfogati pedig $=$

$$\int_\infty\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\varepsilon\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)+\cdot+\cdot\right\}\delta\Phi\,\mathfrak{D}\tau=-\int_\infty \operatorname{div}\mathfrak{D}\,\delta\Phi\,\mathfrak{D}\tau=-\int_\infty\hat{\varrho}\,\delta\Phi\,\mathfrak{D}\tau$$

tehát (24) első integráltagjának $\delta\Phi$ szerint való megváltozásával ellentétesen egyenlő: W teljes megváltozásához jutunk, jóllehet (24)-ben az integráljelek alatt csak $\hat{\varrho}$-nak és ε-nak a térelemekben előidézett megváltozását számítjuk:

$$(25)\qquad \delta W=\int_\infty \Phi\,\delta\hat{\varrho}\,\mathfrak{D}\tau-\frac{1}{2}\int_\infty \mathfrak{F}^2\,\delta\varepsilon\,\mathfrak{D}\tau$$

81. A $\hat{\varrho}$ sűrűség megváltozásának a számításában fölösleges $\hat{\varrho}$-nak azon megváltozását is számbavenni, amely a konduktorokban és határrétegeikben a valóságos elemi töltéseknek a matériára nézve relatív elmozdulásaiból

származik, mert ha $\tilde{\delta}\hat{\rho}$ jelenti $\delta\hat{\rho}$-nak ebből származó részét, akkor egy izolált konduktorra vagy összefüggő konduktorcsoportra kiterjesztve

$$\int_T \Phi\,\tilde{\delta}\hat{\rho}\,\mathfrak{D}\tau = \Phi\int_T \tilde{\delta}\hat{\rho}\,\mathfrak{D}\tau = \Phi\,\delta'\int_T \hat{\rho}\,\mathfrak{D}\tau$$

ahol T azon konduktornak vagy összefüggő konduktorcsoportnak és határrétegének a térfogata. Minthogy a valóságos töltés egy izolált konduktorban vagy összefüggő konduktorcsoportban (a határréteg odaértésével) a variálásban változatlan, úgy

$$\delta'\int_T \hat{\rho}\,\mathfrak{D}\tau = 0\,, \quad \text{tehát} \quad \int_T \Phi\,\tilde{\delta}\hat{\rho}\,\mathfrak{D}\tau = 0$$

Megmarad csak (25)-ben a $\delta\hat{\rho}$ megváltozásnak $\delta\hat{\rho} - \tilde{\delta}\hat{\rho}$ része, amely a testelemek valóságos töltéseinek a testelemekkel együtt való elmozdulásából származik a végtelen tér elemi részeiben. A következőkben ezt fogjuk a puszta δ jellel jelölni, tehát $\delta\hat{\rho}$ egy testelemben lévő valóságos elektromos töltés sűrűségének azon megváltozását fogja jelenteni, amely a testelemek valóságos töltéseinek a testelemekkel együtt való elmozdulásából származik. Mint majd más előadásokban bizonyítva látjuk, ebből a $\hat{\rho}$ sűrűségnek a megváltozása =

$$(25)_1 \qquad \delta\hat{\rho} = -\left(\frac{\partial\hat{\rho}\,\delta x}{\partial x} + \frac{\partial\hat{\rho}\,\delta y}{\partial y} + \frac{\partial\hat{\rho}\,\delta z}{\partial z}\right)$$

Ezzel változnék meg a $\hat{\rho}$ sűrűség akkor is a testelemek végtelen kis elmozdulásai által, ha a konduktorokban s a konduktorok határrétegeiben is minden testelem megtartaná a maga valóságos töltését. A W elektrosztatikai energia megváltozásának a számitásában elég ezt venni figyelembe, mert $\delta\hat{\rho}$ által a W nem változik meg.

82. Megváltozása az ε dielektromos együtthatónak a $\mathfrak{D}\tau$ térelemben főkép abból származik, hogy más testelem foglalja el a $\mathfrak{D}\tau$ térelemet, u. m. azon testelem, amely előbb $x-\delta x$, $y-\delta y$, $z-\delta z$ helyen volt, ahonnan aztán a $(\delta x, \delta y, \delta z)$ elmozdulással az x, y, z helyen lévő $\mathfrak{D}\tau$ térelembe jutott. Az ε-nak ebből származó megváltozása

$$\varepsilon(x-\delta x,\, y-\delta y,\, z-\delta z) - \varepsilon(x, y, z) = -\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\varepsilon}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\varepsilon}{\partial z}\delta z\right)$$

Mindig kis mérvű ε-nak a testelemek deformációjából (méretváltozásaiból) származó megváltozása. Itt mi ezt figyelmen kivül hagyjuk, mihez képest

$$(25)_2 \qquad \delta\varepsilon = -\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\varepsilon}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\varepsilon}{\partial z}\delta z\right)$$

tesszük.

83. Behelyettesitvén mármost (25), és $(25)_2$ alól $\delta\hat{\rho}$ és $\delta\varepsilon$ kifejezését (25)-be, azután az első integrálon parciális redukciót végezvén, azt kapjuk, hogy

$$\delta W = \int_\infty \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\delta z\right)\hat{\rho}\,\mathfrak{D}\tau + \frac{1}{2}\int_\infty \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\varepsilon}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\varepsilon}{\partial z}\delta z\right)\mathfrak{F}^2\,\mathfrak{D}\tau$$

mert a parciális redukcióból származó fölületi integrál eltűnik. Kissé máskép irva (tekintettel arra, hogy $\operatorname{grad}\Phi = -\mathfrak{F}$):

$$(25)' \quad \delta W = \int_\infty \left\{\left(-\hat{\rho}\,X + \frac{1}{2}\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}\mathfrak{F}^2\right)\delta x + \left(-\hat{\rho}\,Y + \frac{1}{2}\frac{\partial\varepsilon}{\partial y}\mathfrak{F}^2\right)\delta y + \left(-\hat{\rho}\,Z + \frac{1}{2}\frac{\partial\varepsilon}{\partial z}\mathfrak{F}^2\right)\delta z\right\}\mathfrak{D}\tau$$

Megközelitőleg ez az elektrosztatikai energiának azon elemi megváltozása, amely a testelemek $(\delta x, \delta y, \delta z)$ elmozditásainak felel meg.

Természetesen a $(\delta x, \delta y, \delta z)$ elemi vektoron lehetséges elemi elmozdulások értendők. Ezek itt egyben virtuális elmozdulások is, mert a testelemek nyugalmából lehetséges elemi elmozdulások. A testelemek lehetséges és egyben virtuális elmozdításából származó megváltozása a W energiának a δW.

Elektrosztatikai ponderomotoros hatás.

84. A Coulomb-féle hatások elemi munkájának (77. art.) a hasonlatára most általánosabban is föltesszük, hogy koordinátarendszerünkben nyugvó változatlan testrendszer elektrosztatikai állapotában a testelemek virtuális elmozdításain az elektromosságok munkája a W elektrosztatikai energia ellentétesének $-W$-nek épen a virtuális elmozdítások következtében való $-\delta W$ megváltozása. Ez a megváltozás pedig $(25)'$ értelmében oly tömegmozgató erők virtuális munkája, amelyek általános kifejezése x, y, z helyen térfogategységre számítva:

$$(26) \qquad \mathfrak{F} = \rho\mathfrak{E} - \frac{1}{2}\mathfrak{E}^2 \operatorname{grad} \varepsilon$$

mert $(25)'$ ennek a komponenseit tartalmazza térelemmel és a $(\delta x, \delta y, \delta z)$ virtuális elmozdulás komponenseivel szorozva. Tényleg első megközelitésben ezt a vektort tartjuk az elektrosztatikai állapottól az x, y, z helyü testelemre ható ponderomotoros erő sürüségének (térfogategységre számitott értékének). A komponensei részletesen irva:

$$(26)' \quad \mathfrak{f}_x \equiv \hat{\varrho} X - \frac{X^2+Y^2+Z^2}{2}\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \equiv -\left(\hat{\varrho}\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2}{2}\cdot\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}\right), \text{stb.}$$

Mint látjuk, ezen ponderomótoros hatás létezésének föltétele, hogy vagy valóságos töltés, vagy egyenetlen dielektromos együttható, vagy mindkettő legyen az x, y, z hely környezetében. Konduktorokban $\varepsilon = 1$ irandó.

85. Maxwell nyomán ezeket a komponenseket mint három vektor három divergenciáját is elő tudjuk állítani. Irjuk, hogy

$$(27) \quad \begin{cases} \frac{1}{2}(X\mathfrak{P} - Y\mathfrak{Q} - Z\mathfrak{R}) \equiv X_x & \frac{1}{2}(Y\mathfrak{R} + Z\mathfrak{Q}) \equiv Y_z \equiv Z_y \\ \frac{1}{2}(-X\mathfrak{P} + Y\mathfrak{Q} - Z\mathfrak{R}) \equiv Y_y & \frac{1}{2}(Z\mathfrak{P} + X\mathfrak{R}) \equiv Z_x \equiv X_z \\ \frac{1}{2}(-X\mathfrak{P} - Y\mathfrak{Q} + Z\mathfrak{R}) \equiv Z_z & \frac{1}{2}(X\mathfrak{Q} + Y\mathfrak{P}) \equiv X_y \equiv Y_x \end{cases}$$

Akkor a megállapitott tömegmozgató hatás komponensei térfogategységre számitva így is irhatók:

$$(28) \quad \operatorname{div}(X_x, X_y, X_z), \ \operatorname{div}(Y_x, Y_y, Y_z), \ \operatorname{div}(Z_x, Z_y, Z_z)$$

azaz:

$$(28)' \quad \begin{cases} \mathfrak{f}_x \equiv \dfrac{\partial X_x}{\partial x} + \dfrac{\partial X_y}{\partial y} + \dfrac{\partial X_z}{\partial z} \\ \mathfrak{f}_y \equiv \dfrac{\partial Y_x}{\partial x} + \dfrac{\partial Y_y}{\partial y} + \dfrac{\partial Y_z}{\partial z} \\ \mathfrak{f}_z \equiv \dfrac{\partial Z_x}{\partial x} + \dfrac{\partial Z_y}{\partial y} + \dfrac{\partial Z_z}{\partial z} \end{cases}$$

Erről az X_x, stb. mennyiségek (u. n. tenszorkomponensek) jelentménye és a valóságos elektromos sürüségnek ismé–

telten használt kifejezése alapján utólagosan könnyen meggyőződést lehet szerezni.

Közelítőleg anizotrop testeket is megilletnek ezen kifejezések. A ponderomótoros hatás tenszoros kifejezéseinek nevezzük ezeket, tenszornak mondjuk ugyanis az X_x, X_y, X_z, stb. kilenc skaláris rendszerét.

86. Maxwell ilyetén kifejezések rendén jutott el az elektrosztatikai állapotok oly fölfogásának a matematikai formulázásához, amelyet előtte Faraday alkotott magának, aki azonban nem rendelkezvén a szükséges matematikai eszközökkel, eszméinek matematikai kifejtésébe nem bocsátkozhatott. Némi fogalmat szerzendők Faraday fölfogásáról, vagy inkább annak matematikai képéről, tekintsük azt a toló hatást, amelyet tetszésszerint választott τ tér materiális tartalma visel az elektrosztatikai állapottól. Látni fogjuk, hogy ezt a τ tér fölületén ható nyomásokkal is ki lehet fejezni, azaz oly vektorokkal, amelyek a τ tér határán sorakoznak s ezen τ tér (σ) fölületének $D\sigma$ elemi részeivel szorozva jelentenek tömegmozgató erőket vagyis olyan erőket, amelyek hatását közvetetlenül a τ tér fölületéhez simuló testelemek viselnek. Ugyanis a τ tér materiális tartalma az elektrosztatikai állapottól oly toló hatást visel, amelynek a komponensei:

$$\int_\tau \left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}\right) D\tau, \text{ stb.}$$

De ezeket fölületi integrálokra lehet redukálni. Mégpedig, ha a τ tért határoló σ fölület $D\sigma$ elemén a befelé mutató normális iránykoszinuszai α, β, γ, akkor

$$-\int_\sigma (X_x\alpha + X_y\beta + X_z\gamma)\, \mathfrak{D}\sigma\,, \text{stb.}$$

ezek a komponensek.

Olyan tehát az a toló hatás, mintha a τ tér materiális tartalma a határán nyomást viselne, amelynek komponensei a $\mathfrak{D}\sigma$ fölületelemen

$$X_n \equiv -(X_x\alpha + X_y\beta + X_z\gamma), \text{stb.}$$

és a τ térből kifelé, vagy abba befelé ható nyomás ez, aszerint, amint az n normálison lévő komponense, azaz

$$X_n\alpha + Y_n\beta + Z_n\gamma$$

negativ vagy pozitiv, mihez képest, mint feszítő, vagy, mint szorító hatás jelentkezik. Az ilyen feszítő vagy szorító hatás pedig általában oly τ tér határán is létezik, amelynek a materiális tartalma nem visel toló hatást az elektrosztatikai állapottól, sőt általában ez oly τ tér határán is létezik, amelynek nincs is materiális tartalma; azaz általában a tiszta éterben is létezik. Ezen tények fölismeréséhez fűződik az elektrosztatikai állapotok Faraday-féle fölfogása, amely szerint az egész végetlen tér természeti tartalmában létrejött feszítő s szorító nyomások teszik az elektrosztatikai állapotot, amelyben az elektromos töltések fogalmai csak segédfogalmak. Ma ezt a fölfogást nem követjük, mert változó elektromos állapotokra mai ismereteink rendszerében nem alkalmazhatjuk.

Elektrosztatikai tömegmozgató hatás merev testen homogén folyós izolátorban.

87. Az elektrosztatikai ponderomótoros hatás merev testen (akár konduktor, akár izotrop izolátor az), ha a környezete izotrop és homogén folyós izolátor (lég vagy folyadék) egyszerű kifejezésekben adható meg az előbbi cikk (26) alatt foglalt erőkifejezése alapján.

Idevágó számításainkban a merev test és a folyós környezet érintkezési rétegét egészen a merev testhez soroljuk, még akkor is, midőn a folyós környezet nem tapad a merev testhez, mert az egész érintkezési rétegtől viselt toló és forgató hatás reá háramlik a merev testre az érintkezés következtében.

A környező izolátor belsejében ε_0 legyen a dielektromos együttható. Most a merev testnek a $\mathfrak{D}\tau$ térelemben foglalt részére úgy írjuk föl (26)' alól a hatás komponenseit, hogy ε helyett $\varepsilon - \varepsilon_0$ különbséget használunk:

$$\mathfrak{F}_x \mathfrak{D}\tau = -\left\{ \rho \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2}{2} \cdot \frac{\partial(\varepsilon - \varepsilon_0)}{\partial x} \right\} \mathfrak{D}\tau, \text{ stb.}$$

Minthogy ε_0 deriváltjai zérusok, úgy jogos ez az írásmód, de hasznos is azért, mert a merev test térfogatára kiterjesztendő integrálokon parciális redukciókat fogunk végezni, amelyek alkalmából a térfogat határára vonatkozó integrálok el fognak tűnni amiatt, hogy ama határon $\varepsilon = \varepsilon_0$ mindenütt.

88. A merev testtől viselt toló hatás komponensei, ha (a teljes érintkezési réteg hozzászámításával) a testnek a tér-

forgatát τ jelöli:

$$\int_\tau \mathfrak{f}_x \mathfrak{D}\tau = -\int_\tau \hat{\varrho}\, \frac{\partial \Phi}{\partial x} \mathfrak{D}\tau - \int_\tau \frac{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2}{2} \frac{\partial(\varepsilon - \varepsilon_0)}{\partial x} \mathfrak{D}\tau, \text{ stb.}$$

Az itteni második integrálon kétszer egymásután végezzünk parciális redukciót, amelyek elsejében a $\frac{\partial(\varepsilon-\varepsilon_0)}{\partial x}$ szabadúl föl a deriválástól, másodikában pedig mind a három új tagban a $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ deriváltnak egy deriváltja szabadúl föl. Tekintettel arra, hogy a valóságos elektromos sűrűség ≡

$$\hat{\varrho} = -\left\{ \frac{\partial}{\partial x}\left(\varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial z}\right) \right\}$$

és a szabad elektromos sűrűség ≡

$$\bar{\varrho} = -\left\{ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right\}$$

a parciális redukciók végeztével azt kapjuk, hogy a toló hatás komponensei a következők:

$$-\varepsilon_0 \int_\tau \bar{\varrho}\, \frac{\partial \Phi}{\partial x} \mathfrak{D}\tau \ ; \ -\varepsilon_0 \int_\tau \bar{\varrho}\, \frac{\partial \Phi}{\partial y} \mathfrak{D}\tau \ ; \ -\varepsilon_0 \int_\tau \bar{\varrho}\, \frac{\partial \Phi}{\partial z} \mathfrak{D}\tau$$

Hasonló eljárással adódnak az origói forgató momentum komponensei gyanánt:

$$-\varepsilon_0 \int_\tau \bar{\varrho}\left(y \frac{\partial \Phi}{\partial z} - z \frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) \mathfrak{D}\tau, \text{ stb.}$$

89. A Φ teljes potenciál helyett pedig elégséges ezekben a külső elektromos rendszerek potenciálját alkalmazni, mert magából a testből reá magára nem háramlik sem toló, sem forgató elektrosztatikai hatás, ami a 7. cikk módjára ezeken a kifejezéseken is következik. Úgy viseli tehát az elektrosztatikai állapot ponderomótoros hatását a merev test,

mintha csak a külső szabad elektromosságok hatnának rá és mintha ε_0 együtthatós homogén izolátor volna $\varepsilon_0 \bar{\varrho}$ sűrűség szerint elrendezett valóságos töltéssel.

90. Most speciálisan tegyük föl, hogy a merev test aránylag oly távol van a külső elektromos rendszer minden pontjától, hogy ily pontból minden pontja egyazon irányban és egyazon távolban lévőnek számíthat. Minthogy Φ helyett a külső elektromosságok potenciálját alkalmazhatjuk, ha ezt Φ_0 jelöli, akkor $\frac{\partial \Phi_0}{\partial x}$, stb. első megközelítés szerint a test minden pontjában ugyanannak számíthat. Bármely pontja legyen tehát (x, y, z) a testnek, első megközelítésben a viselete toló, illetőleg origói forgató hatás komponensei így írhatók:

$$-\varepsilon_0 \frac{\partial \Phi_0}{\partial x}\int_\tau \bar{\varrho}\, \mathcal{D}\tau, \text{ stb. } ; \quad -\varepsilon_0 \left\{ \frac{\partial \Phi_0}{\partial z}\int_\tau \bar{\varrho}\, y\, \mathcal{D}\tau - \frac{\partial \Phi_0}{\partial y}\int_\tau \bar{\varrho}\, z\, \mathcal{D}\tau \right\}, \text{ stb.}$$

Ha a test szabad töltésének összes mennyisége $\bar{e}$, és ha a benne lévő (+), meg (−) szabad töltésnek abszolúte egyenlő mennyisége $(\bar{e}^*)$, illetőleg $(-\bar{e}^*)$; e három töltésnek pólusa (kvázi tömegcentruma) pedig rendre az (x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) helyen van, úgy a testtől viselt toló, illetőleg origói forgató hatásnak komponensei nyilvánképen ezek:

$$-\varepsilon_0\, \bar{e}\, \frac{\partial \Phi_0}{\partial x}, \text{ stb}$$

illetőleg:

$$-\varepsilon_0 \bar{e} \left(y_0 \frac{\partial \Phi_0}{\partial z} - z_0 \frac{\partial \Phi_0}{\partial y} \right) - \varepsilon_0 \bar{e}^* \left[(y_1 - y_2) \frac{\partial \Phi_0}{\partial z} - (z_1 - z_2) \frac{\partial \Phi_0}{\partial y} \right]; \text{ stb.}$$

91. Az $\varepsilon_0 \bar{e}^*(x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$ vektort a test elektromos momentumának nevezzük. Iránya nyilvánképen a

$(-\bar{e}^*)$ töltés pólusából a $(+\bar{e}^*)$ töltés pólusába mutató irány. Nagysága pedig a két pólus távolának és az $(\varepsilon_0\bar{e}^*)$ kvantumnak a szorzata. Jelöljék röviden $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ ennek a vektornak a komponenseit. Akkor az origói forgató momentum komponensei ezek:

$$-\varepsilon_0\bar{e}\left(y_0\frac{\partial\Phi_0}{\partial z}-z_0\frac{\partial\Phi_0}{\partial y}\right)-\left(\mathcal{B}\frac{\partial\Phi_0}{\partial z}-\mathcal{C}\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right);\dots;\dots$$

azonban $\varepsilon_0\bar{e}$ nem más, mint a test összes valóságos töltése odaértvén a testhez mindig annak a teljes érintkezési rétegét is. Látható ez a 75. artikulus végéről. Ha, tehát a teljes érintkezési réteggel együtt gondolt test összes valóságos töltése $\hat{e}$, akkor a külső elektromos rendszer pontjaitól aránylag igen nagy távolságban lévő test a

$$-\hat{e}\frac{\partial\Phi_0}{\partial x}\,,\quad -\hat{e}\frac{\partial\Phi_0}{\partial y}\,,\quad -\hat{e}\frac{\partial\Phi_0}{\partial z}$$

komponensű toló és

$$-\left[(\hat{e}y_0+\mathcal{B})\frac{\partial\Phi_0}{\partial z}-(\hat{e}z_0+\mathcal{C})\frac{\partial\Phi_0}{\partial y}\right]$$

$$-\left[(\hat{e}z_0+\mathcal{C})\frac{\partial\Phi_0}{\partial x}-(\hat{e}x_0+\mathcal{A})\frac{\partial\Phi_0}{\partial z}\right]$$

$$-\left[(\hat{e}x_0+\mathcal{A})\frac{\partial\Phi_0}{\partial y}-(\hat{e}y_0+\mathcal{B})\frac{\partial\Phi_0}{\partial x}\right]$$

komponensű origói forgató hatást viseli az elektrosztatikai állapottól.

92. Ha a külső elektromos rendszer térfogatának a méreteit is igen kicsinynek vesszük föl pontjainak a merev testből számított távolaihoz képest, úgy a toló hatásban eljutunk oda, ahonnan kiindultunk, a Coulomb-

féle elemi hatáshoz. Ha pedig nincs valóságos töltés a testben, sem a belsejében, sem a határrétegében, vagy ha van ugyan, de az összes kvantuma zérus, akkor elsőrendű megközelítésünk szerint toló hatást nem visel a test, a reá ható origói forgató momentum komponensei pedig ezek:

$$-\left(B\frac{\partial \Phi_0}{\partial z}-C\frac{\partial \Phi_0}{\partial y}\right),\ -\left(C\frac{\partial \Phi_0}{\partial x}-A\frac{\partial \Phi_0}{\partial z}\right),\ -\left(A\frac{\partial \Phi_0}{\partial y}-B\frac{\partial \Phi_0}{\partial x}\right).$$

Tantételek a konduktorokról.

Üreges konduktorok.

93. Üregesnek mondunk egy izolált konduktort, ha a határrétegét két vagy több egymással össze nem függő határréteg teszi, mint a konduktornak és izolátoroknak érintkezési rétege. A konduktor azon határrétegét amely a többit körülfogja külsőnek, a többieket belsőknek mondjuk. Egy belső határréteget és a körülfogta tér tartalmát együttvéve a konduktor üregének nevezzük. Az ily képen gondolt üreg határrétege a konduktornak belső határrétege, az üreg és a konduktor érintkezési rétege. A konduktor üregeinek a belsejét általában izolátorok és konduktorok rendszere alkotja.

Itt üregen mindig egy izolált konduktornak az üregét fogjuk érteni.

94. Tantétel: elektrosztatikai állapotban egy üregnek az összes valóságos töltése és nemkülönben az összes szabad töltése zérus.

Jelentsen ugyanis S_0 olyan fölületet, amely egészen körülfog egy üreget és egészen a konduktor belsejében van. Az S_0 fölülettől körülzárt egész tért T_0 jelölje. Az üreg összes valóságos töltése:

$$\int_{T_0} \operatorname{div} \mathfrak{D}\, D\tau = \int_{S_0} \mathfrak{D}_n\, D\sigma$$

és összes szabad töltése

$$\int_{T_0} \operatorname{div} \mathfrak{E}\, D\tau = \int_{S_0} \mathfrak{E}_n\, D\sigma$$

ahol $\mathfrak{D}_n$, $\mathfrak{E}_n$ a $D\sigma$ fölületelem kifelé mutató normálisán jelenti $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$ értékét. A konduktor belsejében $\mathfrak{D} = \mathfrak{E} = 0$ mindenütt, tehát S_0 pontjaiban is és ezzel a kimondott tétel igazolva van

95. Ezen tantételnek közvetlen folyománya, hogy egy üreg határrétegében lévő valóságos, illetőleg szabad töltés ellentétesen egyenlő az üreg belsejében lévővel. Ebből pedig egyenesen látható, hogy ha a konduktor határrétegeiben lévő összes valóságos töltés zérus, akkor a konduktor külső határrétegében lévő valóságos töltés egyenlő az üregeinek belsejében lévők összegével. Ha speciálisan a konduktor határrétegeinek külső fölületén mindenütt ugyanaz a dielektromos konstans $= \varepsilon_0$, és a konduktor határrétegeinek összes valóságos töltése zérus, akkor vegyük számba, hogy a konduktor határrétegeinek összes szabad töltése is zérus, mert a valóságosnak ε_0-od része (72. cikk $20_3'$), tehát ekkor a konduktor külső határrétegében lévő szabad töltés ugyancsak egyenlő az üregei belsejében lévők összegével.

96. Tantétel: elektrosztatikai állapotban egy üreg szabad elektromosságainak a potenciálja az üregen kivül lévő egész végtelen térben egyenletes, és pedig mindenütt zérus; az üregen kivül lévő szabad elektromosságok potenciálja pedig a konduktor belsejében és üregeiben, szóval a konduktor külső határrétegétől körülfogott egész térben egyenletes, de általában nem zérus.

Ha ugyanis T_0 oly tér, amelynek a belsejében van egy üreg és amelynek az S_0 fölülete a konduktor belsejében van, ha továbbá az üreg szabad elektromosságainak a potenciálját U s a többi szabad elektromosságok potenciálját V jelöli, akkor a T_0 térben $\Delta V = 0$, a T_0 téren kivül pedig $\Delta U = 0$ és következőleg

$$\int_{T_0} V \Delta V \, D\tau = 0 \,, \quad \int_{\infty - T_0} U \Delta U \, D\tau = 0$$

ahol $\infty - T_0$ azt az egész végtelen tért jelöli, amely a T_0 téren kivül van. Parciális integrálásból

$$\int_{T_0} (\operatorname{grad} V)^2 D\tau = -\int_{S_0} V \frac{\partial V}{\partial n} D\sigma \,, \quad \int_{\infty - T_0} (\operatorname{grad} U)^2 D\tau = \int_{S_0} U \frac{\partial U}{\partial n} D\sigma$$

ahol n a T_0 tér belsejébe mutató normálisa $D\sigma$-nak. Adjuk össze ezen egyenleteket. Az eredmény így irható föl:

$$\int_{T_0} (\operatorname{grad} V)^2 D\tau + \int_{\infty - T_0} (\operatorname{grad} U)^2 D\tau = \int_{S_0} U \frac{\partial (U+V)}{\partial n} D\sigma - \int_{S_0} (U+V) \frac{\partial V}{\partial n} D\sigma.$$

A jobboldalon lévő két fölületi integrál mindegyike zérus. Ugyanis $U + V$ a teljes Φ potenciál, amely a konduktor belsejében egyenletes. Az első fölületi integrál tehát zérus azért, mert a konduktor belsejében lévő S_0 fölület pontjaiban $\mathcal{U}+\mathcal{V}\,(=\Phi)$ deriváltját tartalmazza. A második fölületi integrál

$$-\int_{S_0}(\mathcal{U}+\mathcal{V})\,\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial n}\,\partial\sigma=-(\mathcal{U}+\mathcal{V})\int_{S_0}\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial n}\,\partial\sigma=(\mathcal{U}+\mathcal{V})\int_{\tau_0}\Delta \mathcal{V}\,\partial\tau$$

zérus azért, mert τ_0-ban $\Delta\mathcal{V}=0$. Az következik tehát egyenletünkből, hogy

$$\int_{\tau_0}\left\{\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z}\right)^2\right\}\partial\tau+\int_{\infty-\tau_0}\left\{\left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial z}\right)^2\right\}\partial\tau=0$$

Eszerint a $(\infty-\tau_0)$ térben, vagyis a τ_0 téren kívül $\operatorname{grad}\mathcal{U}=0$, tehát $\mathcal{U}$ egyenletes τ_0-on kívül, de a végtelenben zérus az, tehát a τ_0 téren kívül mindenütt is zérus az $\mathcal{U}$: egy üreg szabad elektromosságainak a potenciálja az üregen kívül mindenütt zérus. Továbbá a τ_0 térben $\operatorname{grad}\mathcal{V}=0$ mindenütt, azaz $\mathcal{V}$ egyenletes; de $\mathcal{V}$-nek minden egyes üregtől származó része zérus a τ_0 pontjaiban, tehát csakis az üregeken kívül lévő szabad elektromosságok potenciálja az. Minthogy egyenletes $\mathcal{V}$ a τ_0-ban akármely üreget körülfogó fölület legyen is S_0 a konduktor belsejében s a konduktor belsejének akármely pontján menjen is keresztül, úgy $\mathcal{V}$ a konduktor külső határrétegétől övezett egész téren egyenletes. Amennyiben pedig nem kell deriválni ezen $\mathcal{V}$ potenciált, annyiban a konduktor külső határrétegében is mindenütt akkorának számíthat, mint a konduktor belsejében, mert föltevésünk szerint a külső határréteg materiájának nincs számottevő elektromótoros ereje, tehát nem változik rajta keresztül rohamosan a $\mathcal{V}$ potenciál.

Konduktorokban a potenciálérték leszállítása.

97. Tegyük föl, hogy anyagi rendszerünkben egy minden irány felé igen nagy kiterjedésű üreges vagy üregtelen K^* konduktor is van. Azon föltevésünk rendén, hogy a matéria elektromotoros ereje anyagi rendszerünkben sehol sem tesz számot: elektrosztatikai állapotban a K^* külső határrétegében és azon is túl lévő szabad elektromosságok potenciálja a K^* belsejében (és esetleges üregeiben), sőt igen pontosan K^*-nak a külső, S^* fölületétől határolt egész T^* térben mindenütt egyenlő értékű (96. cikk vége). De a T^* azon pontjai, amelyek igen távol vannak S^*-nek a pontjaitól, azok a külső elektromosságok pontjaitól is igen távol vannak. A T^* ilyen pontja legyen O. Ha a külső szabad elektromosságoknak és K^* külső határrétegében lévőknek sem a pozitív, sem a negatív mennyisége nem nagy, akkor tehát O-ban igen kicsiny a kívülről származó potenciálérték az elektrosztatikai állapotban és következőleg a K^* konduktor többi pontjaiban is, minélfogva az összes létező szabad elektromosságok potenciálja is mindenütt igen kicsiny K^*-ban, mert a K^* esetleges üregeiben lévőké zérus (96. cikk).

Ebből folyólag módunkban van minden olyan K konduktorban nagy megközelítéssel zérussá tenni az elektrosztatikai potenciált, amely nincsen más konduktornak az üregében, föltéve, hogy nem igen nagy a töltése és a kívülötte lévő töltéseknek sem pozitiv, sem negativ menynyisége nem igen nagy. Elérhetjük pedig ezt azáltal, hogy egy pillanatra egy konduktorszál (vékony drót) egyik végét hozzá, másik végét a K^* konduktorhoz érintjük. Ekkor K^* K és a konduktorszál egy összefüggő konduktorcsoport, amelyben az új elektrosztatikai állapot beálltával közelítőleg mindenütt zérus a potenciálérték. Ha azután a konduktorszálat el is távolitjuk: K-ban megközelitőleg mégis zérus marad a potenciálérték, mert a konduktorszálban is mindenütt az volt, ami csak úgy volt lehetséges, hogy a beállott elektrosztatikai állapotban számot nem tevő kicsiny a konduktorszál határrétegének a töltése, mert ellenkező esetben szükségkép számot tenne a konduktorszálban az elektrosztatikai potenciál amiatt, hogy a konduktorszál minden pontja igen közel van a konduktorszál határához; a konduktorszál eltávolitásával oly kicsiny töltést kapcsolunk ki a rendszerből, hogy ezáltal nem zavarodik meg számottevően a többi testek elektrosztatikai állapota, tehát nagy pontosság szerint zérus marad K-ban a potenciálérték.

Elektrosztatikai állapotok szuperpoziciója.

98. Elektrosztatikai állapotban a potenciált meghatározza (69. cikk) az izolátorok belsejéből és saját érintkezési rétegeiből a valóságos elektromos sűrűség és minden izolált konduktorból meg összefüggő konduktor-

csoportból a határrétegeiben lévő valóságos elektromos töltés. aőn tehát izotróp testek alkotják az elektromos anyagi rendszert s a matériának nincs bennük sehol sem elektromótoros je (amiket most mindig fölteszünk), akkor a következő egyenletek szolgálnak az elektromos potenciálnak Φ-nek és egyben elektrosztatikai állapotnak a meghatározására: az izolátorok belsejében és saját érintkezési rétegeiben, amelyeket együtt (J) jelöljön

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial z}\right) = -\hat{\rho}$$

minden egyes izolált konduktor vagy összefüggő konduktorcsoport határrétegében $(\mathcal{H})$-ban, mint valóságos töltésének az ellentétese:

$$\int_{\mathcal{H}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x}\left(\varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial x}\right) + \cdot + \cdot \right\} \mathcal{D}\tau = \left(-\int_{\mathcal{H}} \hat{\rho}\, \mathcal{D}\tau = \right) - \hat{e},$$

és a belsejében, $(\mathcal{B})$-ben

$$\Phi = const. = C.$$

Ezen egyenletek egy következménye, hogy ha egy elektrosztatikai állapotban (J)-ben $\hat{\rho} = \hat{\rho}_I$, valamelyik $(\mathcal{H})$-ban, akármelyik legyen az, $\hat{e} = \hat{e}_I$ és valamelyik $(\mathcal{B})$-ben, akármelyik legyen az, $\Phi = C_I$ és ha ezen elektrosztatikai állapotban általánosan $\Phi = \Phi_I$; egy más elektrosztatikai állapotban pedig (J)-ben $\hat{\rho} = \hat{\rho}_{II}$, ama $(\mathcal{H})$-ban $\hat{e} = \hat{e}_{II}$ és amaz $(\mathcal{B})$-ben $\Phi = C_{II}$ és ha ezen elektrosztatikai állapotban általánosan $\Phi = \Phi_{II}$ s i. t., akkor: amely elektrosztatikai állapotban (J)-ben $\hat{\rho} = \hat{\rho}_I + \hat{\rho}_{II}^{+\dots}$, $(\mathcal{H})$-ban pedig $\hat{e} = \hat{e}_I + \hat{e}_{II} + \cdots$, azon elektrosztatikai állapotban (B)-ben $\Phi = C_I + C_{II} + \cdots$ és általánosan $\Phi = \Phi_I + \Phi_{II} + \cdots$ Ugyanis háromféle egyenletünket rendre az I, II, stb. állapotra alkalmazva, aztán az egyféle egyenleteket összeadva, látjuk, hogy a $\Phi = \Phi_I + \Phi_{II} + \cdots$ potenciál kielégíti azokat. Minthogy pedig J-ből a $\hat{\varrho} = \hat{\varrho}_I + \hat{\varrho}_{II} + \cdots$ és a (H)-kból az $\hat{e} = \hat{e}_I + \hat{e}_{II} + \cdots$ töltések teljesen meghatározzák a potenciált, szükségképen oly elektrosztatikai állapotot határoznak meg, amelyben a potenciál (a szabad elektromosságok potenciálja) $\equiv \Phi = \Phi_I + \Phi_{II} + \cdots$ Ezen elektrosztatikai állapot az I, II, stb. elektrosztatikai állapotok szuperpozituma, mert mindenütt nemcsak oly valóságos, de egyben oly szabad sűrűség is tartozik hozzá, amely az I, II, stb. állapotokhoz tartozók összege, t. i.:

$$\bar{\varrho} = -\Delta\Phi = -(\Delta\Phi_I + \Delta\Phi_{II} + \cdots) = \bar{\varrho}_I + \bar{\varrho}_{II} + \cdots$$

Könnyen fölismerhető most már az is, hogy ha egy elektrosztatikai állapotban (J)-ben $\hat{\varrho} = \hat{\varrho}_0$ és valamelyik (H)-ban, bármelyik legyen is az, $\hat{e} = \hat{e}_0$ és ha most $\Phi = \Phi_0$; egy más elektrosztatikai állapotban pedig (J)-ben $\hat{\varrho} = n\hat{\varrho}_0$ és (H)-ban $\hat{e} = n\hat{e}_0$: akkor most $\Phi = n\Phi_0$ akármely pozitiv vagy negativ szám is az n.

Ha az (J)-ben nincsenek valóságos töltések, hanem csak a konduktorok határrétegeiben vannak és egy elektrosztatikai állapotban valamely izolált konduktor vagy összefüggő konduktorcsoport határrétegében $\hat{e}_I$ a valóságos töltés, egy más elektrosztatikai állapotban $\hat{e}_{II}$ s i. t. és a potenciál az első elektrosztatikai állapotban általánosan Φ_I, a másodikban Φ_{II} s i.t.: akkor az $\hat{e}_I + \hat{e}_{II} +$ féle töltésekhez $\Phi_I + \Phi_{II} + \cdots$ elektrosztatikai potenciál tartozik. Különösen pedig az izolált konduktorok és összefüggő konduktorcsoportok határrétegeinek n-szeres töltéseihez az n-szeres elektrosztatikai potenciál tartozik.

Konduktorokban és összefüggő konduktorcsoportokban tetszés szerint való elektrosztatikai potenciálértékek előállítása.

99. Jelöljék rendre $(K_1), (K_2), (K_3), \ldots$ az izolált konduktorokat és összefüggő konduktorcsoportokat. De tegyük föl róluk, hogy egyik sincs egy másiknak az üregében, úgy, hogy ha egyáltalán vannak üregek, ezek csak izolátorokat tartalmaznak s következőleg módunkban van akármely (K)-ban zérussá tenni (közelítőleg) a potenciált a 97. cikk szerint.

Most különféle elektrosztatikai állapotokat gondolunk. Egy elektrosztatikai állapotban az izolátorok belsejében és sajátérintkezési rétegeiben, (J)-ben nincs sehol valóságos elektromosság, (K_1)-nek a határrétegében adva van $\hat{e}_1$ valóságos töltés, a többi (K)-ban zérussá van téve a potenciál. Ekkor (K_1)-ben nem zérus a potenciál. Tegyük föl ugyanis, hogy (K_1)-ben is zérus. Akkor a

$$\frac{1}{2}\int \hat{\varepsilon}\,\Phi\, D\tau$$

elektrosztatikai energia eltűnik, mert mostani föltevésünk szerint az összes konduktorokban (igen nagy pontossággal a határrétegeikben is) $\Phi = 0$, egyebütt pedig $\hat{\varrho} = 0$. Eltűnik tehát ezen energiának

$$\frac{1}{2}\int_{\infty} \varepsilon \left\{ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2 \right\} D\tau$$

kifejezése is. Következőleg $\bar{\Phi}$ a végtelen tér minden pontjában ugyanaz (éspedig $= 0$). Ez azonban lehetetlen, mert akkor $\hat{\varrho}$ mindenütt zérus volna, aminek pedig ellentmond (K_1) határrétegének az $\hat{e}$ valóságos töltése. (K_1)-ben nem zérus tehát a $\bar{\Phi}$. Minthogy pedig nem zérus, mindig módunkban van tetszésszerint szabni meg $\hat{e}$ megfelelő megadása által. Ha ugyanis (K_1) határrétegében $n\hat{e}$ valóságos töltés van elhelyezve és a többi (K) határrétegében is n-szeressé tesszük a valóságos töltést, akkor az új elektrosztatikai állapotban a potenciál is mindenütt n-szeres lesz. Ily módon (K_1)-ben bármekkora pozitív vagy negatív elektrosztatikai potenciálérték $\bar{\Phi}_1$ állítható elő, mi mellett a többi (K)-ban zérus marad a potenciálérték. Egy más elektrosztatikai állapotban is föltevén, hogy az izolátorok belseje és saját érintkezési rétegei nem tartalmaznak valóságos elektromosságot, (K_2)-ben tetszésszerintivé tehetjük a potenciált, mi mellett a többi (K)-ban zérus és így tovább. Ezen egyes elektrosztatikai állapotok szuperpozitumában minden (K)-ban tetszés szerint megszabott értéke van a potenciálnak. Ezek után tekintsünk még egy elektrosztatikai állapotot, olyant, amelyben az izolátorok tartalmaznak valóságos elektromosságokat, a (K) konduktorokban pedig mindannyiban zérus az elektrosztatikai potenciál. Ezen elektrosztatikai állapotnak és az előbbieknek a szuperpozitumában ugyanaz minden egyes (K)-ban a potenciálérték, ami volt. Tetszésünk szerint szabhatjuk meg tehát akkor is minden (K)-ban a potenciálértéket, ha az izolátorok belsejében, valamint saját érintkezési rétegeiben is vannak valóságos töltések.

Potenciálegyütthatók és kapacitási együtthatók.

100. Tegyük föl, hogy minden irány felé igen nagy kiterjedésű, egyenletes minőségű és állapotú izolátorban vannak izolált konduktorok K_1, K_2, K_3, stb., amelyek vagy üregtelenek, vagy az üregeikben konduktort nem tartalmaznak, hanem csak izolátort éspedig ugyan olyan egyenletes minőségűt és állapotút, mint amilyen kívülről környezi őket. Tegyük föl most azt is, hogy az izoláló rendszer belsejében, I-ben sehol sincs valóságos töltés, tehát az elektrosztatikai állapotban csak a K_1, K_2, K_3, stb. konduktorok határrétegeiben vannak valóságos töltések, amelyeket majd egyszerűen e konduktorok töltésének fogunk mondani, a K_1, K_2, K_3, stb. töltésének. Az I belsejében ε jelölje a dielektromos együtthatót. Ez egyenletes, mert I minősége és állapota egyenletes.

Most arról fogunk majd meggyőződni, hogy az izoláló rendszer belsejében, I-ben nem lévén sehol sem valóságos töltés, az elektrosztatikai állapotban a Φ

elektromos potenciálnak az egyes izolált konduktorokba tartozó értékei e konduktorok töltéseinek lineáris homogén függvényei és viszont. (Ugyanaz áll a szabadtöltésekről is.)

Az elektrosztatikai állapotban az egyes izolált konduktorok töltései azoknak az izoláló rendszerrel határos érintkezési rétegeikben vannak, mert a konduktorok belsejében Φ egyenletes. De szabad töltések is csak ezen érintkezési rétegekben vannak anyagi rendszerünkben, mert az izolátorrendszerünk belsejében sehol sem lévén valóságos töltés, sehol sincs szabad töltés sem annak a belsejében az elektrosztatikai állapotban (71. art.); a konduktorok belsejében pedig Φ egyenletes.

A bejelentett vonatkozások megállapitása végett úgy tekintjük az elektrosztatikai állapotot, mint annyi egyszerűbb elektrosztatikai állapot szuperpozitumát, ahány a konduktor, éspedig ezek az egyszerűbb elektrosztatikai állapotok azzal vannak meghatározva, hogy az egyikben csak a K_1 konduktornak van zérustól különböző töltése, a másikban csak a K_2 konduktornak van s i.t.

101. Midőn csak K_1-nek van zérustól különböző töltése $= \hat{e}_1$ akkor jelöljük az elektrosztatikai állapotban az egyes konduktorokban az elektromos potenciálértékét rendre:

$$\Phi_{11}, \quad \Phi_{12}, \quad \Phi_{13}, \ldots$$

és írjuk, hogy:

$$(A)_1 \qquad \Phi_{11} \equiv \frac{c_{11}}{\varepsilon}\hat{e}_1 \;, \quad \Phi_{12} \equiv \frac{c_{12}}{\varepsilon}\hat{e}_2 \;, \ldots$$

Az itt szereplő c_{11}, c_{12}, stb. együtthatók csak a konduktorok ge-

-metriai konfigurációjától függenek. Ugyanis bármely helyen egyen értelműnek a Φ potenciál ($\bar{\xi}\,\mathcal{D}\tau$ szabad töltések potenciálja) a dielektromos együtthatóval szorozva, igen pontosan a valóságos töltések ($\hat{\xi}\,\mathcal{D}\tau$ töltések) potenciáljával egyenlő, amely potenciált $\hat{\Phi}$ jelöljön. Ennan következik ez, hogy T-ben szabad töltés sem lévén (71. vége!):

$$4\pi\bar{\Phi} \equiv \int_\tau \frac{\bar{\xi}}{r}\,\mathcal{D}\tau = -\int_\tau \frac{\frac{\partial^2\bar{\Phi}}{\partial x^2}+\cdots}{r}\,\mathcal{D}\tau, \quad 4\pi\hat{\Phi} \equiv \int_\tau \frac{\hat{\xi}}{r}\,\mathcal{D}\tau = -\int_\tau \frac{\frac{\partial}{\partial x}\left(\varepsilon\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial x}\right)+\cdots}{r}\,\mathcal{D}\tau$$

amelyekben τ az összes érintkezési rétegek térfogata. Ezen τ összes külső föllületét σ-val jelölve, parciális redukció szerint

$$4\pi\bar{\Phi} = \int_\tau\left(\frac{\partial\Phi}{\partial a}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial a}+\cdots\right)\mathcal{D}\tau + \int_\sigma \frac{\partial\Phi}{\partial n}\frac{\mathcal{D}\sigma}{r}, \quad 4\pi\hat{\Phi} = \int_\tau \varepsilon\left(\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial a}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial a}+\cdots\right)\mathcal{D}\tau + \int_\sigma \varepsilon\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial n}\frac{\mathcal{D}\sigma}{r}$$

mert az érintkezési rétegek belső föllületén már Φ deriváltjai a konduktorok belsejében lévén eltünnek. Ezen kifejezésekben, miután nem deriválandók azok, a térintegrálok nem tesznek számot még τ belsejében lévő x, y, z helyeken sem, mert föltevésünk szerint a matériának nincs számottevő ponderomótoros ereje az érintkezési rétegekben sem, tehát Φ-nek a változása ezen rétegekben sem rohamos s úgy a deriváltjai ezekben sem igen nagyok, a τ tér pedig igen kicsiny. Eszerint igen pontosan áll mindenütt, hogy

$$4\pi\bar{\Phi} = \int_\sigma \frac{\partial\Phi}{\partial n}\frac{\mathcal{D}\sigma}{r}, \quad 4\pi\hat{\Phi} = \varepsilon\int_\sigma \frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial n}\cdot\frac{\mathcal{D}\sigma}{r}$$

Ezekből folyólag $\varepsilon\bar{\Phi} = \hat{\Phi}$ és speciálisan $\varepsilon\bar{\Phi}_{11} = \hat{\Phi}_{11}$, $\varepsilon\bar{\Phi}_{12} = \hat{\Phi}_{12}$, stb. tehát identitásaink sorából akármely k számra igen pontosan

$$c_{1k} = \hat{\Phi}_{1k} : \hat{E}_1$$

A $\hat{\Phi}$ potenciált egyáltalában az egyetlen $\hat{e}_1$ töltés és a vonatkoztatás x, y, z helyének meg a konduktoroknak a geometriai konfigurációja határozza meg, mert csak K_1-nek a valóságos töltése ($\hat{e}_1$) nem zérus most föltevéseink szerint, tehát a konduktorok adott helyzetében meghatározza ez (a 69. art. értelmében) az elektrosztatikai állapotot és úgy minden konduktor határrétegében meghatározza a valóságos sűrűséget (természetesen a K_2, K_3, stb. konduktorokban olymódon, hogy ezek mindegyikének az összes töltése zérus), mivpedig $\hat{\Phi}$ a valóságos sűrűségekkel és helyeik távolságaival meghatározott függvény, következőleg $\hat{e}_1$ és a konduktorok alakjai, méretei, helyzete meghatározzák minden helyen a $\hat{\Phi}$ függvényt. A szuperpozició tételéből (98. art. vége) azonban az következik, hogy a konduktorok valóságos töltéseinek n-szereséhez az elektrosztatikai Φ potenciál n-szerese tartozik. Ez a tétel most a $\hat{\Phi}$ potenciálra is igen pontosan átháramlik amiatt, hogy $\hat{\Phi} = \varepsilon\Phi$ igen pontosan. A $\hat{\Phi} : \hat{e}_1$ hányados tehát minden helyen már a konduktoroknak azon helyhez viszonyított konfigurációjával meg van határozva. Ha a hely egy konduktorban van, akkor egyszerűen a konduktorok geometriai konfigurációjával van a $\hat{\Phi} : \hat{e}_1$ hányados és úgy minden c_{1k} együttható is meghatározva.

101_2. Másodízben csak K_2-nek legyen zérustól különböző töltése $= \hat{e}_2$ és az elektrosztatikai állapotban jelöljék ekkor az egyes konduktorokban az elektrosztatikai potenciál értékét rendre: Φ_{21}, Φ_{22}, Φ_{23}, … Írván, hogy

$$(A)_2 \qquad \Phi_{21} = \frac{c_{21}}{\varepsilon}\hat{e}_2 \ , \quad \Phi_{22} = \frac{c_{22}}{\varepsilon}\hat{e}_2 \ , \quad \Phi_{23} = \frac{c_{23}}{\varepsilon}\hat{e}_2 \ , \dots$$

a $c_{21}, c_{22}, c_{23}, \dots$ faktorok csak a geometriai konfiguráció függvényei.

Harmadízben megfelelö föltevés és jelölések mellett azt irván, hogy

$$(A)_3 \qquad \Phi_{31} = \frac{c_{31}}{\varepsilon}\hat{e}_3 \ , \quad \Phi_{32} = \frac{c_{32}}{\varepsilon}\hat{e}_3 \ , \quad \Phi_{33} = \frac{c_{33}}{\varepsilon}\hat{e}_3 \ , \dots$$

a c_{31}, c_{32}, stb. faktorok csak a konduktorok konfigurációjától függenek. S.i.t.

101_3. Ha már most egyidejüleg van K_1-nek $\hat{e}_1$, K_2-nek $\hat{e}_2$ töltése s.i.t., akkor az elektrosztatikai állapot beálltával az egyes konduktorokban rendre:

$$\Phi_1 = \Phi_{11} + \Phi_{21} + \Phi_{31} + \cdots \ , \quad \Phi_2 = \Phi_{12} + \Phi_{22} + \Phi_{32} + \cdots$$

az elektromos potenciál ~~értéke~~ értéke a szuperpozició tétele szerint. Ebböl folyólag:

$$(29)_1 \quad \begin{cases} \Phi_1 = \frac{1}{\varepsilon}(c_{11}\hat{e}_1 + c_{21}\hat{e}_2 + \cdots) \\ \Phi_2 = \frac{1}{\varepsilon}(c_{12}\hat{e}_1 + c_{22}\hat{e}_2 + \cdots) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{cases}$$

ahol a c együtthatók csak a konduktorok geometriai konfigurációjától függenek. A $\frac{c_{11}}{\varepsilon_1}$, $\frac{c_{12}}{\varepsilon_2}, \dots$ együtthatókat potenciálegyütthatóknak nevezzük. A determinánsuk sohasem zérus. Ugyanis, ha zérus volna, akkor a $\Phi_1, \Phi_2, \dots$ potenciálértékek közt legalább egy általános homogén lineáris vonatkozásnak kellene fönnállani, ami pedig a 99. cikk értelmében nem lehetséges, mert ezen cikk szerint valamennyi konduktorban tetszésszerinti potenciálérték állítható elő.

102. Látjuk márnost azt is, hogy $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, ... kifejezhetők mint $\varepsilon\Phi_1$, $\varepsilon\Phi_2$, ... homogén lineáris függvényei oly C együtthatók szerint, amelyek csak a konduktorok geometriai konfigurációjától függenek:

$$(29)_2 \quad \begin{cases} \bar{e}_1 = \varepsilon(C_{11}\Phi_1 + C_{21}\Phi_2 + \cdots) \\ \bar{e}_2 = \varepsilon(C_{12}\Phi_1 + C_{22}\Phi_2 + \cdots) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{cases}$$

Ezekben az egyenletekben előforduló εC_{11}, εC_{22}, ... együtthatókat rendre az 1-es, 2-es ... számú konduktor elektromos kapacitásának, a többi együtthatókat: εC_{12}, εC_{21}, ... pedig indukciós együtthatóknak, mindannyit kapacitási együtthatónak nevezzük.

Nyilvánvaló, hogy εC_{kk} számértéke egyenlő azon töltés számértékével, amely $\Phi_k = 1$ és $\Phi_1 = \Phi_2 = \cdots = \Phi_{k-1} = \Phi_{k+1} = \cdots = 0$ esetén (K_k) töltése; εC_{ik} számértéke egyenlő azon töltés számértékével, amely $\Phi_i = 1$ és $\Phi_1 = \Phi_2 = \cdots = \Phi_{i-1} = \Phi_{i+1} = \cdots = 0$ esetén (K_k) töltése.

103. A c és C együtthatóknak számos általános tulajdonságuk van. Itt következik némely tulajdonságuk kimutatása.

103_1. Kimutatása annak, hogy $C_{hk} = C_{kh}$ és $c_{hk} = c_{kh}$

Gondoljunk két elektrosztatikai állapotot, amelyek egyikében $\bar{\omega}$, másikában $\bar{\omega}'$ jelentse a fölületi szabadsűrűséget egy konduktor határának valamely pontjában. Identikusan áll, nyilvánvalólag, az integráloknak az összes konduktorok fölületére való kiterjesztésével, hogy

$$\int\left(\bar{\omega}\int\frac{\bar{\omega}'}{r}\,\mathfrak{D}\sigma\right)\mathfrak{D}\sigma = \int\left(\bar{\omega}'\int\frac{\bar{\omega}}{r}\,\mathfrak{D}\sigma\right)\mathfrak{D}\sigma$$

Mostpedig ε-nal mindkét oldalt megszorozva a 72. cikk szerint

$$\int\left(\hat{\omega}\int\frac{\bar{\omega}'}{r}\mathfrak{D}\sigma\right)\mathfrak{D}\sigma=\int\left(\hat{\omega}'\int\frac{\bar{\omega}}{r}\mathfrak{D}\sigma\right)\mathfrak{D}\sigma$$

t. i. a valóságos fölületi sűrűséget $\hat{\omega}$, $\hat{\omega}'$ jelentvén. Mindkét oldalt az egyes konduktorok szerint rendezve és tekintetbe véve, hogy 101_1 potenciálkifejezésének értelmében itt a fölületi potenciálok az igazi potenciálokat mindenütt jelenthetik, azt kapjuk, hogy

$$\hat{e}_1\,\Phi_1'+\hat{e}_2\,\Phi_2'+\dots=\hat{e}_1'\Phi_1+\hat{e}_2'\,\Phi_2+\dots$$

De lehetséges a 99. cikk szerint, hogy Φ_1 és Φ_2' kivételével minden Φ és minden Φ' zérus leggyen. Ennek $\hat{e}_2\Phi_2'=\hat{e}_1'\Phi_1$ a következménye legújabb egyenletünk szerint, azonban $(29)_2$-ből egyszersmind $\hat{e}_1'=\varepsilon\,C_{21}\,\Phi_2'$, $\hat{e}_2=\varepsilon\,C_{12}\,\Phi_1$, tehát $C_{12}=C_{21}$. Ha pedig $\hat{e}_1$ és $\hat{e}_2'$ kivételével minden $\hat{e}$ és $\hat{e}'$ zérus, akkor legújabb egyenletünkből $\hat{e}_1\Phi_1'=\hat{e}_2'\Phi_2$. De $(29)_1$-ből most $\Phi_1'=\frac{1}{\varepsilon}c_{21}\hat{e}_2'$, $\Phi_2=\frac{1}{\varepsilon}c_{12}\,\hat{e}_1$. Következőleg $c_{21}=c_{12}$.

103_2. Kimutatása annak, hogy $C_{hh}>0$, $c_{hh}>0$:

Tudjuk, hogy az elektrosztatikai energia mindig pozitiv, mikor csak létezik:

$$W=\frac{1}{2}\left(\hat{e}_1\,\Phi_1+\hat{e}_2\,\Phi_2+\dots\right)>0$$

De lehetséges, hogy csak Φ_1 ne leggyen zérus. Ekkor $W=\frac{1}{2}\hat{e}_1\Phi_1$ és $(29)_2$-ből $\hat{e}_1=\varepsilon\,C_{11}\,\Phi_1$, tehát $W=\frac{\varepsilon}{2}C_{11}\,\Phi_1^2$, tehát $C_{11}>0$. Most $\hat{e}_1$ kivételével minden $\hat{e}$ zérus leggyen, mihez képest $W=\frac{1}{2}\hat{e}_1\,\Phi_1$ most is, de a $(29)_1$ szerint $\Phi_1=\frac{1}{\varepsilon}c_{11}\,\hat{e}_1$, tehát $W=\frac{1}{2\varepsilon}c_{11}\,\hat{e}_1^2$, tehát $c_{11}>0$.

103_3. Kimutatása annak, hogy ha h és k különböző is, c_{kk} pozitív, ellenben ekkor C_{kk} negatív, de $C_{11}+C_{12}+$ $+C_{13}+\dots \geqq 0$, $C_{11}+C_{21}+C_{31}+\dots \geqq 0$.

Midőn $\Phi_2=0$, $\Phi_3=0$, stb. vagy $\hat{e}_2=0$, $\hat{e}_3=0$, stb., akkor ahol $\Phi\neq 0$, ott Φ előjele mindenütt egyezik Φ_1 előjelével. Tegyük föl ugyanis, hogy ez nem áll. Akkor Φ előjele oly térben vagy terekben ellenkezik Φ_1 előjelével, amelyeknek a határán Φ zérus és amelyek nem tartalmazzák a K_1 konduktort és más konduktort vagy nem tartalmaznak, vagy egészen tartalmazzák. Legyen ilyen tér a (Γ) és a K_a, K_b stb. konduktorokat tartalmazza. Ekkor a konduktorok szerint rendezve

$$\int_\Gamma \Phi\hat{\rho}\,\mathfrak{D}\tau = \Phi_a\hat{e}_a + \Phi_b\hat{e}_b + \dots$$

ez $=0$, mert $a>1$, $b>1$ stb., tehát vagy Φ vagy $\hat{e}$ minden tagban zérus, t. i. aszerint, amint K_2, K_3, stb.-ben a potenciálokat vagy a valóságos töltéseket választottuk zérusoknak. Ha pedig nem tartalmaz konduktort a Γ tér, akkor is eltűnik az integrálunk, mert akkor $\hat{\rho}=0$ azon tér minden pontjában. Írjuk be az integrálba, hogy

$$\hat{\rho} = -\operatorname{div}(\varepsilon \operatorname{grad}\Phi)$$

azután végezzünk parciális redukciót. A fölületi integrál eltűnik, mert a határon $\Phi=0$, tehát

$$\int_\Gamma \varepsilon(\operatorname{grad}\Phi)^2\,\mathfrak{D}\tau = 0$$

tehát Φ deriváltjai eltűnnek a (Γ) térben, tehát Φ konstans a (Γ)-ben, tehát $=0$, mert a (Γ) határán zérus. Sehol sem lehet más előjelű tehát a Φ potenciál, mint Φ_1 (midőn t.i. $\Phi_2 = 0$, $\Phi_3 = 0$, stb. vagy $\hat{e}_2 = 0$, $\hat{e}_3 = 0$, stb.)

De ha csak $\hat{e}_1$ nem zérus, akkor $(29)_1$-ből $\Phi_1 = \frac{c_{11}\hat{e}_1}{\varepsilon}$, $\Phi_2 = \frac{c_{12}\hat{e}_1}{\varepsilon}$, stb. Mivel $c_{11} > 0$, ennélfogva Φ_1 olyan előjelű, mint $\hat{e}_1$, tehát Φ_2 is olyan előjelű, mint $\hat{e}_1$, tehát $c_{12} > 0$. Ha pedig csak Φ_1 nem zérus és ha Φ_1 pozitiv, akkor Φ a (K_2), (K_3), stb. konduktorban kivülről csak kisebbedéssel válhatik zérussá (mint Φ_1-vel egyező jelű érték), tehát $(K_{h>1})$ határán (n a befelé mutató normális irányát jelentvén)

$$\hat{\omega}_h = \varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial n} < 0$$

mindenütt, tehát $\hat{e}_h < 0$; ámde most $(29)_2$-ből $\hat{e}_h = \varepsilon C_{1h} \Phi_1$, tehát $C_{1h} < 0$.

Továbbá most $(29)_2$-ből $\hat{e}_1 + \hat{e}_2 + \cdots = \varepsilon(C_{11} + C_{12} + \cdots)\Phi_1$. De igen nagy R távolságokban $\varepsilon\Phi$ értéke közelitőleg $= (\hat{e}_1 + \hat{e}_2 + \cdots) : R$. Ez nem lehet más előjelű, mint Φ_1, tehát $C_{11} + C_{12} + \cdots \geqq 0$.

Homogén és egyenletes állapotú izolatorban lévő konduktorok elektromos energiája.

104. Az előbbi artikulusoknak egy fontos következménye, hogy az elektrosztatikai energia az $\hat{e}_1$, $\hat{e}_2 \cdots$ valóságos kvantumok négyzetes homogén kifejezése gyanánt állitható elő oly együtthatók szerint, amelyek forditva arányosak az ε dielektromos együtthatóval és különben csak a konduktorok geometriai konfigurációjától függenek.

Ugyanis az elektrosztatikai energiának a

$$\mathfrak{W} = \frac{1}{2}\int \hat{\varrho}\, \Phi\, \mathfrak{D}\tau$$

kifejezése a konduktorok szerint rendezve =

$$(30) \qquad \mathfrak{W} = \frac{1}{2}\left(\Phi_1 \hat{e}_1 + \Phi_2 \hat{e}_2 + \cdots \right)$$

Már ez is nevezetes kifejezése elektromos rendszerünk elektrosztatikai energiájának.

Ha most ebbe belehelyettesítjük $(29)_1$ alól a $\Phi_1, \Phi_2, \dots$ potenciálértékek kifejezéseit, azt kapjuk, hogy:

$$(31) \qquad \mathfrak{W} = \frac{1}{2\varepsilon}\sum c_{hk}\, \hat{e}_h\, \hat{e}_k$$

A (30) alól $(29)_2$ segítségével pedig a potenciálok négyzetes homogén függvénye gyanánt is előállítható a $\mathfrak{W}$ s ezen előállításában az együtthatók egyenesen arányosak ε-nal és különben csak a geometriai konfigurációtól függenek:

$$(32) \qquad \mathfrak{W} = \frac{\varepsilon}{2}\sum C_{hk}\, \Phi_h \Phi_k$$

A (31) alatt a potenciálegyütthatók, (32) alatt a kapacitási együtthatók szerepelnek.

Az elektrosztatikai állapot ponderomótoros hatása folyós izolátorrendszerben merev konduktorokon.

105. Az előző artikulus energiakifejezéseiből fogunk most ponderomótoros erőket határozni meg, természetesen, csatlakozva most is a 100. cikk föltevéseihez.

Minthogy az izolátorrendszer belsejének a dielektromos együtthatója egyenletes és mivel a belsejében sehol sincs valóságos töltés, a konduktorokban pedig az elektromos potenciál értéke egyenletes, ennélfogva csak az izolátorrendszernek a konduktorokkal határos érintkezési rétegeiben van ponderomótoros hatás. Hogyha mármost az izolátorrendszer lég vagy folyadék s a konduktorok szilárd testek, akkor ezen hatás egészen átháramlik a konduktorokra. Amennyiben pedig az utóbbiak merev testekül számíthatnak, a helyzetük minden megváltozásával úgy változik meg érintkezési rétegeik helyzete, mintha azok a konduktorok merev testéhez tartoznának (materiális állapotuk pedig nem változik meg az izolátorrendszer belsejének a változatlansága mellett). Ennélfogva változatlan belsejű folyós izolátorrendszerben merev testekül számítható konduktorokon pusztán ezeknek a virtuális helyzetváltozása megadja az elektrosztatikai állapot ponderomótoros munkáját, ugyanis az $\frac{1}{2\varepsilon}\sum c_{hk}\,\hat{e}_h\,\hat{e}_k$ energia ellentétesének a variációjában, ami azon helyzetváltozásnak a c_{hk} potenciálegyütthatókat illető következménye, mert az egyes konduktorok valóságos töltése változatlan és ε az izolátorrendszer belsejében jelentvén a dielektromos együtthatót, szintén változatlan. Következésképen

$$(33)\qquad -\delta W = -\frac{1}{2\varepsilon}\sum \hat{e}_h\,\hat{e}_k\,\delta c_{hk}$$

az elektromos állapot ponderomótoros elemi munkája a konduktorokon, ha t. i. c_{11}, c_{12}, ... a virtuális helyzetváltozások által δc_{11}, δc_{12}, ... értékkel változnak meg, mint a geometriai konfigurráció függvényei.

106. Különösen pedig, ha egy konduktor valamely kiszemelt pontjának pl. a tömegcentrumának a koordinátái x_0, y_0, z_0, és ha az egész virtuális helyzetváltozás abból származik, hogy ezt az egy konduktort eltoljuk összes pontjainak $(0, 0, \delta z_0)$ elemi elmozditásával, akkor

$$\delta c_{hk} = \frac{\partial c_{hk}}{\partial z_0} \delta z_0$$

Beírva az ilyeneket $(-\delta W)$ kifejezésébe, elénk áll azon ponderomótoros munka, melyet ezen konduktor virtuális eltolásán végez az elektrosztatikai állapot. Ebből folyólag annak a toló hatásnak a komponensei, amit az a konduktor visel az elektrosztatikai állapottól, a következők:

$$(34) \qquad 0,\ 0,\ -\frac{\partial W}{\partial z_0} = -\frac{1}{2\varepsilon} \sum \hat{e}_h \hat{e}_k \frac{\partial c_{hk}}{\partial z_0}$$

107. Ha pedig abból származnék az egész virtuális helyzetváltozás, hogy az egyik konduktort elforditjuk $\delta\Theta$ szöggel a z tengely körül, akkor Θ szöggel jellemezvén a z tengely körül a konduktor helyzetét,

$$\delta c_{hk} = \frac{\partial c_{hk}}{\partial \Theta} \delta \Theta$$

Ezeket írva most be $(-\delta W)$ kifejezésébe, megkapjuk azt a ponderomótoros munkát, amelyet az elektrosztatikai állapot a konduktor $\delta\Theta$ szögű elforditásán végez, és ebből a konduktoron az elektrosztatikai állapot forgató momentuma a z tengely körül $\equiv$

$$(35) \qquad -\frac{\partial W}{\partial \Theta} = -\frac{1}{2\varepsilon} \sum \hat{e}_h \hat{e}_k \frac{\partial c_{hk}}{\partial \Theta}$$

mert a $\delta\Theta$ szögü elforditáson végzett elemi munka kifejezésében mindig $\delta\Theta$ szorzója az elforditás tengelye körül a forgató momentum.

108. Az is kimutatható, hogy ha a W energiát nem a töltések, hanem a $\Phi_1, \Phi_2, \ldots$ potenciálok kvadratikus kifejezése gyanánt állitjuk elö (32), akkor a puszta c_{hk} együtthatók variálásával W-böl a variált kifejezés a maga elöjelével teszi a $-\delta W$ virtuális munkát. Ugyanis a (30)-ból

$$\delta W = \frac{1}{2}\left(\bar{e}_1\,\delta\Phi_1 + \bar{e}_2\,\delta\Phi_2 + \cdots\right)$$

Helyettesitsük be ide $(29)_2$-böl $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, stb. értékét, azután rendezzük a kifejezést Φ_1, Φ_2, stb. szerint. Azután vegyük figyelembe, hogy a $(29)_2$ jobboldalainak a variációja zérus, mert baloldalainak a variációja zérus. Ebböl az következik, hogy δW új kifejezésében Φ_h szorzója u. m. $\varepsilon(c_{h1}\,\delta\Phi_1 + c_{h2}\,\delta\Phi_2 + \cdots)$, helyett $-\varepsilon(\Phi_1\,\delta c_{h1} + \Phi_2\,\delta c_{h2} + \cdots)$ irható, miáltal aztán

$$(36) \qquad -\delta W = \frac{\varepsilon}{2}\sum \Phi_h \Phi_k\, \delta c_{hk}$$

adódik. Ez is kifejezi a (33) alatt gondolt virtuális munkát. Innen pedig (34) helyettese gyanánt ez adódik:

$$(37) \qquad 0,\ 0,\ -\frac{\partial W}{\partial z_0} = \frac{\varepsilon}{2}\sum \Phi_h \Phi_k \frac{\partial c_{hk}}{\partial z_0}$$

és (35) helyettese gyanánt ez:

$$(38) \qquad -\frac{\partial W}{\partial \Theta} = \frac{\varepsilon}{2}\sum \Phi_h \Phi_k \frac{\partial c_{hk}}{\partial \Theta}\,.$$

Sík kondenzátor

109. Foglalkozzunk a konduktorelmélet alkalmazása gyanánt a sík kondenzátorral, amelyben két kongruens konduktorlemez K_1 és K_2 párhuzamosan és egyező fekvésben van egymás mellé helyezve úgy, hogy egymás felé fordított lapjaik igen közel egymáshoz, igen vékony térköznek az oldalfölületei. Ebből a két konduktor lemezből és az őket tartalmazó egyenletes minőségű és állapotú nagy kiterjedésű izotróp izolátorból álljon most az anyagi rendszer s az izolátor belsejében sehol se legyen valóságos töltés, minélfogva az elektrosztatikai állapotban sehol sincs a belsejében szabad töltés sem, hanem csak a határrétegeiben s a külső fölületének a pontjait a lemezektől oly nagy távolban lévőnek gondoljuk, hogy a külső határrétegében és azon túl lévő elektromosságoknak ne legyen számot tévő hatásuk a lemezekben és azok közelében. A két lemeznek (K_1) és (K_2) konduktornak egymás felé fordúlt (S_1) és (S_2) lapját majd kondenzátori fölületeknek mondjuk. A területük, valamint alakjuk is egyenlő. Most $(29)_2$ - ből

$$\hat{e}_1 = \varepsilon\left(C_{11}\Phi_1 + C_{21}\Phi_2\right)$$

$$\hat{e}_2 = \varepsilon\left(C_{12}\Phi_1 + C_{22}\Phi_2\right)$$

Minthogy a két lemez kongruens és egymáshoz viszonyított helyzetük is egyező, úgy nemcsak $C_{12} = C_{21}$ (mint mindig), de C_{11} és C_{22} is egyenlő. Amazokat (amelyek negatívok) egyszerűen $-B$, emezeket (amelyek pozitívok) C jelölje

$$\hat{e}_1 = \varepsilon(C\Phi_1 - B\Phi_2), \quad \hat{e}_2 = \varepsilon(-B\Phi_1 + C\Phi_2)$$

110. A B és C pozitív faktorok közelítőleg könnyen meghatározhatók. A valóságos sűrűség az izolátor belsejében zérus lévén: elektrosztatikai állapotban az izolátor belsejében

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\varepsilon\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\varepsilon\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\varepsilon\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right) = 0$$

vagy mivel ε értéke mindenütt ugyanaz: $\Delta\Phi = 0$.

Ebből az egyenletből és abból, hogy az elektrosztatikai állapotban a konduktorokban $\Phi = \text{const}$, el fogunk jutni B és C közelítő értékéhez. Előbb azonban a valóságos elektromos sűrűségek és valóságos elektromosítések számára állapítunk meg hasznos kifejezéseket.

111. Koordinátarendszerünket úgy válasszuk meg, hogy annak a z tengelye merőleges legyen az (S_1) és (S_2) kondenzátori fölületekre és $(S_1) \rightarrow (S_2)$ irányban mutasson, az (x, y) sík pedig a térköz felező síkja legyen. Ha tehát a térköz kis vastagsága l, akkor (S_1), illetőleg (S_2) síkjának az egyenlete

$$z = -\frac{l}{2}, \text{ illetőleg } z = \frac{l}{2}$$

A $\Delta\Phi = 0$ egyenlet érvényes az izolátor minden belső pontjában, tehát a kondenzátori térköz belsejében is. A konduktorokban pedig:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0 \,,\quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \,,\quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0$$

De ezek elseje és másodika közelítőleg alkalmazható a z tengelyre merőleges érintkezési rétegekben is, sőt a kondenzátori térköz belsejében is, mert, mint tudjuk, az érintkezési rétegeken keresztül csak a normális irányú deriváltak változnak rohamosan, de a tangenciálisok nem, úgy, hogy a tangenciális deriváltak az érintkezési rétegekben még megközelítőleg zérusnak számíthatók és a kondenzátori térköz vékonysága miatt, ezen térköz belsejében is. Nagyon közel a térköz pereméhez már nem, mert ott az érintkezési rétegek érintő síkja már eltér az x,y síkkal való párhuzamosságtól és kifelé rohamosan változtatja a fekvését.

A térközt ezentúl csakis azon terjedelmében számítsuk, és nevezzük térköznek, amelyben még $\partial\Phi : \partial x$ és $\partial\Phi : \partial y$ közelítőleg zérusnak számíthat abban. Föltegyük pedig, hogy (S_1) és (S_2) méretei elég nagyok arra, hogy elhanyagolt részük s úgy a térköz elhanyagolt részei is figyelmen kívül maradhasson. Eszerint a $\Delta\Phi$ kifejezése a térközben $= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$ tehető. Azonban, mivel $\Delta\Phi$ maga zérus, úgy közelítőleg ez is köteles eltűnni a térközben, tehát

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = const.$$

térközben.

De a $\frac{\partial \Phi}{\partial z}$ számára más kifejezést is tudunk föllítani. Nevezetesen a valóságos fölületi sűrűség kifejezéséből, hogy t. i.

$$\hat{\omega} = -\left(\varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial n}\right)_+ + \left(\varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial n}\right)_-$$

Ezt egyszer az (S_1), egyszer az (S_2) lapon lévő érintkezési rétegre alkalmazzuk. Pozitiv oldalnak számitsuk mindig azt az oldalt, amely a z tengely iránya szerint a pozitiv oldal. Akkor (S_2)-nek a $(+)$ oldalán van a konduktor és a $(-)$ oldalán van az izolátor. Mivel tehát az n helyett z irható, az (S_2)-re tartozó valóságos fölületi sürüség:

$$\hat{\omega}_2 = \left(\varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_- \equiv \left(\varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_2$$

ha a $-$ indexet a 2-es indexxel váltjuk föl. Hasonlólag kapjuk, hogy az (S_1)-re tartozó valóságos fölületi sürüség:

$$\hat{\omega}_1 = -\left(\varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_+ \equiv -\left(\varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_1$$

A jobboldalakon az indexek a két érintkezési rétegnek a térközben lévő oldalára szólanak, tehát bennük az ε már az izolátor belsejének a dielektromos együtthatóját jelenti. Minthogy pedig a térközben $\frac{\partial \Phi}{\partial z} = const.$ (mint láttuk), úgy irhatjuk, hogy

$$\hat{\omega}_2 = \varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial z} = const.$$

$$-\hat{\omega}_1 = \varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial z} = const.$$

Ezekből az egyenletekből látjuk, hogy a valóságos fölületi sürüség a térköznek úgy az egyik, mint a másik oldalán mindenütt ugyanaz és a két oldalra tar–

tozók ellentétesen egyenlők. Írjuk, hogy $\hat{\omega}_2 \equiv \hat{\omega}$, minélfogva $\hat{\omega}_1 = -\hat{\omega}$ és két potenciálegyenletünk akármelyikéből, a térközön keresztül végzett integrációval:

$$\Phi_2 - \Phi_1 = \hat{\omega}\,\frac{z_2 - z_1}{\varepsilon} = \hat{\omega}\,\frac{l}{\varepsilon}$$

Ilyképen a két konduktorba tartozó két potenciálérték különbségét kifejeztük az (S_2)-re tartozó valóságos fölületi sürüséggel, a térköz vastagságával és a dielektromos együtthatóval. Mint látjuk adott potenciálkülönbség mellett annál nagyobb az $\hat{\omega}$ valóságos sürüség, és nemkülönben az $\frac{\hat{\omega}}{\varepsilon}$ szabad sürüség a kondenzátori fölületeken, minél kisebb ezen fölületek l távolsága.

112. De a valóságos sürüségek helyett könnyen bevezethetjük a valóságos töltéseket, ha a konduktorlemezek szélén és elfordúlt határán lévő töltések a kondenzátori fölületeken levőkhöz viszonyítva nem tesznek számot. Utolsó egyenletünk az (S_2) fölület $D\sigma$ elemével szorozva és azután integrálva a fölületre, azt kapjuk, hogy – ha a kondenzátori fölületek területe egyszerüen S és K_2 valóságos töltése $\hat{e}$ – akkor:

$$(\Phi_2 - \Phi_1)\,S = \frac{l}{\varepsilon}\,\hat{e}$$

Innen K_2 valóságos töltése =

$$\hat{e} = \frac{\varepsilon S}{l}(\Phi_2 - \Phi_1)$$

s a K_1 konduktor töltése

$$-\hat{e} = \frac{\varepsilon S}{l}(\Phi_1 - \Phi_2)$$

113. Összehasonlítva ezeket a 109. artikulus végével, azt kapjuk, hogy

$$\mathcal{B} = \mathcal{C} = \frac{S}{l}$$

De csak közelítőleg érvényes ez amiatt, hogy számításaink csak közelítőek voltak. Pontosan csupán annyi állítható, hogy $\mathcal{B}$ és $\mathcal{C}$ aránylag kicsit különböznek az $S : l$ értéktől. Valóban, ha pontosan $\mathcal{B} = \mathcal{C}$ volna, akkor a két lemeznek egyáltalában csak ellentétesen egyenlő töltése lehetne, ami pedig abszurdum.

114. Kondenzátorunk elektromos energiája bármely $\hat{e}_1$ és $\hat{e}_2$ töltésre

$$W = \frac{1}{2}(\Phi_1 \hat{e}_1 + \Phi_2 \hat{e}_2)$$

Azonban

$$\hat{e}_1 = \varepsilon(\mathcal{C}\Phi_1 - \mathcal{B}\Phi_2)$$

$$\hat{e}_2 = \varepsilon(-\mathcal{B}\Phi_1 + \mathcal{C}\Phi_2)$$

tehát az energia a potenciálokkal kifejezve:

$$W = \frac{\varepsilon}{2}\mathcal{C}(\Phi_1^2 + \Phi_2^2) - \varepsilon\mathcal{B}\Phi_1\Phi_2$$

Irjuk most, hogy $\mathcal{B} = (1+\nu)\mathcal{C}$, akkor

$$W = \frac{\varepsilon}{2}\mathcal{C}(\Phi_2 - \Phi_1)^2\left(1 - 2\nu\frac{\Phi_1\Phi_2}{(\Phi_2 - \Phi_1)^2}\right)$$

A ν igen kicsiny, ha tehát itt 2ν szorzója nem nagy, akkor közelítőleg

$$W = \frac{\varepsilon}{2}\mathcal{C}(\Phi_2 - \Phi_1)^2 = \frac{\varepsilon S}{2l}(\Phi_2 - \Phi_1)^2$$

115. Nem általános kifejezése ez a két kon-

duktorlemez elektromos energiájának, mert a konduktorlemezek speciális jellegű helyzetét föltételezi, ugyanis a lemezek párhuzamosságát és a párhuzamosságban födözködő szemközt állásukat föltételezi. De, ha folyós az izolátor, akkor a két konduktorlemez még e speciális jellegű helyzet megóvása mellett is mozdítható relative, ugyanis a térközre merőleges eltolással, miáltal a térköz l vastagsága változik meg. Mégpedig (K_2)-nek $(0, 0, \delta z_0)$ virtuális eltolásával l megváltozása $\delta l = \delta z_0$, úgy hogy $\partial l : \partial z_0 = 1$. Ebből a 108. artikulus 37. formuláján az következik, hogy a (K_2) a térközre merőlegesen az elektrosztatikai állapottól:

$$-\frac{\varepsilon S}{2\,l^2}(\Phi_2 - \Phi_1)^2$$

ponderomótoros hatást visel, mely az ő elő-jele szerint a z tengellyel ellenkező irányú, tehát a (K_1) konduktorlemez felé irányult hatás. Ezen a kifejezésen alapszik W. Thomson abszolút elektrometrona. Ha a toló hatás nagysága h, akkor a potenciálkülönbség meghatározására:

$$\Phi_2 - \Phi_1 = \pm\, l \sqrt{\frac{2h}{\varepsilon S}}$$

a fölső vagy alsó előjellel aszerint, amint a 112. cikk értelmében $\hat{e} \gtrless 0$.

Alkalmazás W. Thomson kvadrans elektrometronára.

116. Ebben az eszközben három konduktorlemez K_1,

K_2, K_3 van elhelyezve ösmeretes módon homogén egyenletes állapotú izotróp izolátorban, u. m. a két kvadranspár és a lengő, tehát

$$\hat{e}_1 = \varepsilon(C_{11}\Phi_1 + C_{21}\Phi_2 + C_{31}\Phi_3)$$

$$\hat{e}_2 = \varepsilon(C_{12}\Phi_1 + C_{22}\Phi_2 + C_{32}\Phi_3)$$

$$\hat{e}_3 = \varepsilon(C_{13}\Phi_1 + C_{23}\Phi_2 + C_{33}\Phi_3)$$

$$W = \frac{\varepsilon}{2}(\hat{e}_1\Phi_1 + \hat{e}_2\Phi_2 + \hat{e}_3\Phi_3) = \frac{\varepsilon}{2}\Big\{C_{11}\Phi_1^2 + C_{22}\Phi_2^2 + C_{33}\Phi_3^2 +$$
$$+ (C_{23} + C_{32})\Phi_2\Phi_3 + (C_{31} + C_{13})\Phi_3\Phi_1 + (C_{12} + C_{21})\Phi_1\Phi_2\Big\}$$

A lengőre ható forgató momentum a 108. cikk vége szerint =

$$\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{\partial C_{11}}{\partial\Theta}\Phi_1^2 + \cdot + \cdot + \frac{\partial(C_{23} + C_{32})}{\partial\Theta}\Phi_2\Phi_3 + \cdot + \cdot\right)$$

Láttuk, hogy a C együtthatók közt a $C_{ik} \equiv C_{ki}$ vonatkozások vannak mindig. Ezen eszköz szerkezete pedig olyan, hogy ha K_3 a lengője s ennek a széle nincs közel a kvadranspárok széléhez, akkor a C együtthatók a következő egyenleteket is teljesitik:

$$\frac{\partial C_{11}}{\partial\Theta} = \frac{\partial C_{23}}{\partial\Theta} \equiv \frac{\partial C_{32}}{\partial\Theta} = -\frac{\partial C_{22}}{\partial\Theta} = -\frac{\partial C_{31}}{\partial\Theta} \equiv \frac{-\partial C_{13}}{\partial\Theta} = \text{const.}$$

$$\frac{\partial C_{33}}{\partial\Theta} = \frac{\partial C_{12}}{\partial\Theta} \equiv \frac{\partial C_{21}}{\partial\Theta} = 0$$

Ha a konstanst C jelölé, akkor ezek rendén

$$C\varepsilon(\Phi_2 - \Phi_1)\left(\Phi_3 - \frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2}\right)$$

a forgató momentum.

Mikor Φ_3 igen nagy Φ_1-hez és Φ_2-höz képest, akkor tehát

$$C\varepsilon\,\Phi_3\,(\Phi_2 - \Phi_1)$$

a forgató momentum. Ha emellett Φ_1 zérus értéken van tartva, akkor $C\varepsilon\,\Phi_3\,\Phi_2$ a forgató momentum. Meghatározván a torzió segélyével és adott potenciálok segélyével az elektrometron $C\varepsilon$ együtthatóját, az utolsó esetben egy adott Φ_3-hoz Φ_2-nek s az előbbi esetben $(\Phi_2 - \Phi_1)$-nek meghatározásához jutunk a torzió segítségével.

Elektromos hatások nagyon lassú mozgásokban jó megközelítés szerint elektrosztatikai hatásoknak számíthatók; minél fogva a kvadrans elektrometron lengőjének lassú mozgásaiban ugyancsak az itt meghatározott forgató momentum tulajdonitható jó megközelítés szerint az elektromosságoknak és következőleg ezen forgató momentum szerint alkalmazható a torziómérlegek elmélete a kvadrans elektrometronra.

Magnetosztatikai erők.

Az elektromos és mágneses állapotok összehasonlítása.

117. Földhöz rótt koordinátarendszerünkben, nyugalomban és változatlan állapotban gondoljunk

mágneses testeket. Ezek az u. n. „mágneses kvantumok" szerint ugyanoly tömegmozgató erőkkel hatnak az elemi részeikre, aminők az elektrosztatikai tömegmozgató erők az elektromos kvantumok szerint, ugyanis elektromos sűrűségek helyett „mágneses" sűrűségek Coulomb-féle potenciálja által. Azonban a „magnetosztatikai" állapotok némely tekintetben máskép függnek a matériától mint az elektrosztatikai állapotok mégpedig a következő különbözések rendén, amelyeket a magnetosztatika megalkotásában explicite is számon kell tartanunk:

1.) „Valóságos" mágnesség a valóságos elektromosság értelmében nincs, mert a mágneses testek bármi kis egyéni részei mindig egyenlő (+) és (−) mágneses kvantumot tartalmaznak, úgy hogy minden egyéni testrészben állandóan zérus az összes mágneses kvantum.

2.) Jóllehet „valóságos" mágnesség nincs, önállóan létező mágnesség még is van, azzaz van olyan, amely a létrejötte után a külső mágneses hatások megszüntével sem szünik meg, t. i. annálfogva, hogy bizonyos testekben a mágnességnek az egyéni testrészekben foglalt egyenlő (+) és (−) kvantuma, a testrészek materiális tulajdonságaiból folyólag különböző eloszlódásban marad. Ezt a mágnességet remanens mágnességnek nevezzük. Ezen remanens mágnességnek a térelemekben foglalt kvantumai szerepelnek a magnetosztatikában az elektrosztatika valóságos kvantumainak a szerepében és Hertz óta ezt a mágnességet némely fizikusok valóságosnak is nevezik. A mágnességnek azt a részét, amely a külső hatások megszüntével megszűnik, időleges (vagy indukált) mágnességnek mondjuk. A legtöbb testben csak időleges mágnesség lehetséges számottevő mértékben.

3.) Az egyéni testrészek nemcsak mindig egyenlő (+) és (–) mágneses kvantumot tartalmaznak, de ezeket a kvantumokat meg is tartják állandóan és soha egy egyéni testrészből nem szegődik egy másikhoz mágneses kvantum, hanem materiális székhelyét állandóan megtartja, legalább semmi oly jelenséget nem ismerünk, amely az ellenkező nézetet tenné szükségessé, mihez képest a mágnességnek elméletünkben egyáltalán nincsenek konduktorai és a matériának nincsen magnetomótorikus ereje az elektromótorikus erő hasonlatára, aztán az elektromos momentum módjára definiált mágneses momentumnak az időleges része van csak oly összefüggésben a mágnesség potenciáljának a gradiensével, mint az egész elektromos momentum az elektromosság potenciáljának a gradiensével. Ehhez járul, hogy némely szilárd testekben, az u.n. ferromagnetikus testekben az időleges mágnesség momentuma oly együtthatók szerint függ a mágneses potenciál gradiensétől, amely együtthatók nemcsak a materiális minőségtől és állapottól függenek számottevő mértékben (mint a dielektromos együtthatók), hanem ama gradiens nagyságától, söt a testek múltjától is függenek (hiszterézis), ami az elektromosság körében csak figyelmen kivül hagyható mértékben fordúl elö. Másfelöl vannak oly remanens mágnességü szilárd testek (aminö például egy kemény acélpálca lehet, vagy aminö átlagával a földünk szilárd állománya), hogy „idöleges" mágnességeik nem tesznek számot kész remanens mágnességükhöz képest. Ezeket permanens mágneseknek nevezzük és itt csakis ezeket a ferromagnetikus testeket vesszük föl tárgyalásunk keretébe, ellenben a többieket a „szuszceptibilis" ferromagnetikus testeket kizárjuk a tárgyalásunkból, anyagi rendszerünktöl oly távolságokban lévöknek föltételezzük, hogy egészen figyelmen kivül hagyhatók legyenek. Kizárjuk már csak azért is, mert még igen fejletlen is az elméletünk. Egyáltalán oly mágneses anyagi rendszerre szoritkozunk, amely csak permanens mágneseket és ezeken kivül, csakis idöleges mágnességre eléggé képes testeket tartalmaz. (E kétféle testek permanens mágnesek és idöleges mágnességü testek érintkezési rétegeiben együtt van permanens és idöleges mágnesség.)

Magnetosztatikai fogalmak s vonatkozásaik.

118. Az elörebocsájtottak értelmében elektrosztatikai elméletünkböl könnyen kifejthetjük a mag-

netosztatika elméletét. A „közönséges" elektrosztatika elméletét egyenesen átterjeszthetjük a magnetosztatikára. Majd a következő elnevezéseket és jelöléseket fogjuk pedig használni:

1, Permánens mágneses sűrűség ≡ a permánens mágnesség sűrűsége $\equiv \hat{\varrho}$, a valóságos elektromos sűrűség helyett.

2, Teljes mágneses sűrűség ≡ az összes mágnesség sűrűsége $\equiv \bar{\varrho}$, a teljes (= szabad) elektromos sűrűség helyett.

3, Időleges (indukált) mágneses sűrűség $\equiv \bar{\varrho} - \hat{\varrho} \equiv \varrho^{(i)}$, a látszatos elektromos sűrűség helyett.

4, Mágneses potenciál ≡ a teljes mágneses kvántumok Coulomb-féle potenciálja $\equiv \frac{1}{4\pi}\int \frac{\bar{\varrho}}{r} D\tau = \Psi$, kiterjesztve az integrációt az egész végtelen térre, vagy legalább azon terekre, amelyekben $\bar{\varrho}$ sehol sem zérus.

5, Permánens mágneses momentum ≡ a permánens mágnességnek az elektromos momentum mintájára definiált momentuma $\equiv \hat{\mathfrak{M}}$.

6, Teljes mágneses momentum ≡ a teljes mágnességnek az elektromos momentum módjára definiált momentuma $\equiv \bar{\mathfrak{M}}$.

7, Időleges (indukált) mágneses momentum $\equiv \bar{\mathfrak{M}} - \hat{\mathfrak{M}} \equiv \mathfrak{M}^{(i)}$.

8, Mágneses térerősség $\equiv -\mathrm{grad}\, \Psi \equiv \mathfrak{H} \equiv (\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N})$.

9, Teljes mágneses gerjesztés $\equiv \mathfrak{H} + \bar{\mathfrak{M}} \equiv \mathfrak{B}$.

10, Időleges mágneses gerjesztés $\equiv \mathfrak{H} + \mathfrak{M}^{(i)} \equiv \mathfrak{B}^{(i)} \equiv (\mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W})$.

11, Mágnetosztatikai energia $\equiv \frac{1}{2}\int \hat{\varrho}\, \Psi\, D\tau$, az integrációnak az egész végtelen térre vagy legalább azon térekre való kiterjesztésével, amelyekben $\hat{\varrho}$ sehol sem zérus.

119. Az elektrosztatika tárgyalásából egyszerű megfontolások nyomán látható, hogy az 1,; 2,; 3,, 5,, 6,, 7, alatt definiált mennyiségek a következő vonatkozásban vannak egymással:

$$(39)\quad \hat{\varrho} = -\operatorname{div}\hat{\mathfrak{M}},\ \bar{\varrho} = -\operatorname{div}\mathfrak{M},\ \bar{\varrho}-\hat{\varrho} \equiv \varrho^{(i)} = -\operatorname{div}\mathfrak{M}^{(i)}$$

Ezekből a vonatkozásokból pedig 8,, 9,, 10,, 11, számára a következők adódnak:

$$(40)\quad \begin{cases} \operatorname{div}\mathfrak{H} \equiv (-\Delta\Psi) = \bar{\varrho},\ \operatorname{div}\mathfrak{B}(\equiv \operatorname{div}\mathfrak{H} + \operatorname{div}\mathfrak{M}) = 0 \\ \operatorname{div}\mathfrak{B}^{(i)}(\equiv \operatorname{div}\mathfrak{H} + \operatorname{div}\mathfrak{M}^{(i)}) = \hat{\varrho} \end{cases}$$

$$(41)\quad \frac{1}{2}\int_{\infty} \hat{\varrho}\, \Psi\, D\tau = -\frac{1}{2}\int_{\infty} (\hat{\mathfrak{M}}\,\mathfrak{H})\, D\tau = \frac{1}{2}\int_{\infty} (\mathfrak{H}\,\mathfrak{B}^{(i)})\, D\tau$$

120. Tegyük azt az észrevételt is, hogy véges térben lévő mágnesség potenciálja a végtelenben mindig elsőnél magasabb rendűen, térerőssége másodiknál magasabbi rendűen tűnik el. Kivilágl**ik** ez a Newton-féle potenciál elméletéből, ha figyelembe vesszük, hogy egy anyagi rendszer összes mágneses kvantuma mindig zérus értékű.

$$(42)\quad \left(\operatorname{Lim} R\Psi\right)_{R=\infty} = 0,\ \left(\operatorname{Lim} R^2\mathfrak{H}\right)_{R=\infty} = 0$$

121. A mágnetosztatikában is használjuk a fölületi sűrűségek fogalmát ugyanoly értelem szerint, mint az elektrosztatikában. A permánens mágnesség fölületi sűrűségét $\hat{\omega}$-val, a teljes mágnesség fölületi sűrűségét $\bar{\omega}$-val, az időleges (indukált) mágnességét $\omega^{(i)}$-vel jelölvén, az elektrosztatika mintájára a következő kifejezéseink vannak az érintkezési rétegekben:

$$(43)\quad \begin{cases} \hat{\omega} = -(\hat{\mathfrak{M}}_n)_+ + (\hat{\mathfrak{M}}_n)_- = (\mathfrak{B}_n^{(i)})_+ - (\mathfrak{B}_n^{(i)})_- \\ \bar{\omega} = -(\bar{\mathfrak{M}}_n)_+ + (\bar{\mathfrak{M}}_n)_- = -\left(\frac{\partial \Psi}{\partial n}\right)_+ + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial n}\right)_- = (\mathfrak{H}_n)_+ - (\mathfrak{H}_n)_- \\ \bar{\omega} - \hat{\omega} \equiv \omega^{(i)} = -(\mathfrak{M}_n^{(i)})_+ + (\mathfrak{M}_n^{(i)})_- \\ 0 = (\mathfrak{B}_n)_+ - (\mathfrak{B}_n)_- \end{cases}$$

122. Ezekhez az elektrosztatika analogiájára, mint a magnetosztatikai állapotok föltételeit csatoljuk $\mathfrak{H}$ és $\mathfrak{B}^{(i)}$ komponenseinek 8. és 10. alatt írt jelölése szerint:

$$(44)\quad \begin{cases} \mathcal{U} = \mu_{11}\mathcal{L} + \mu_{12}\mathcal{M} + \mu_{13}\mathcal{N} \\ \mathcal{V} = \mu_{21}\mathcal{L} + \mu_{22}\mathcal{M} + \mu_{23}\mathcal{N} \\ \mathcal{W} = \mu_{31}\mathcal{L} + \mu_{32}\mathcal{M} + \mu_{33}\mathcal{N} \end{cases}$$

illetőleg izotrop testek számára:

$$(45)\qquad \mathfrak{B}^{(i)} = \mu\,\mathfrak{H}$$

azzal a megjegyzéssel, hogy csupán permánens mágne –

sekről és időleges mágnességü testekről lévén szó, a μ együtthatók csak a materiális minőségtől és állapottól függenek. A μ együtthatókat mágneses permeabilitásoknak, vagy a mágneseződés együtthatóinak nevezzük. $\mu - 1$ neve mágneses szuszceptibilitás. Az indukált mágneses momentumokra irva föl ezeket t. i. a 10., értelmében:

$$(44)' \quad \begin{cases} \mathfrak{M}_x^{(i)} = (\mu_{11} - 1)\mathcal{L} + \mu_{12}\mathcal{M} + \mu_{13}\mathcal{N} \\ \mathfrak{M}_y^{(i)} = \mu_{21}\mathcal{L} + (\mu_{22} - 1)\mathcal{M} + \mu_{23}\mathcal{N} \\ \mathfrak{M}_z^{(i)} = \mu_{31}\mathcal{L} + \mu_{32}\mathcal{M} + (\mu_{33} - 1)\mathcal{N} \end{cases}$$

illetőleg

$$(45)' \qquad \mathfrak{M}^{(i)} = (\mu - 1)\mathfrak{H}$$

123. Mint az elektrosztatikában az ε együtthatók, úgy itt a μ együtthatók jellegtelenek, mert a $\mathfrak{B}^{(i)} \equiv$ $\equiv (\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W})$ vektor a maga definiciója szerint olyan jellegü, mint a $\mathfrak{H} \equiv (\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N})$ vektor. Valamint pedig az elektrosztatikában izotróp testben az együttható egységét úgy választottuk meg, hogy tiszta éterben $= 1$ legyen, hasonlóan izotrop testben a μ együttható egységét úgy választjuk meg, hogy a tiszta éterben $= 1$ legyen. A mágneseződés együtthatóinak ezen egységérték szerint számos izotrop testben az egységnél kisebb pozitiv szám a μ és ezeket diamágnetikus testeknek nevezzük, ellentétben azokkal az izotrop testekkel, amelyekben $\mu > 1$ és amelyeket paramagnetikus

testeknek nevezünk. (Ezzel szemben, eddigi tapasztalataink szerint minden izotrop test dielektromos együtthatója nagyobb az egységnél). Továbbá, némely anizotrop testekben oly koordinátarendszerben, amelyben valamely helyen μ_{12}, μ_{21} stb. zérusok (s minden helyhez tartozik ily koordinátarendszer), a μ_{11} μ_{22}, μ_{33} együtthatók egyike, vagy kettője, vagy mindahárom, az egységnél kisebb pozitiv szám, (holott az oly koordinátarendszerben, amelyben valamely helyen $\varepsilon_{12}, \varepsilon_{21}$, stb. zérusok, az ε_{11}, ε_{22}, ε_{33} együtthatók sohasem kisebbek eddigi tapasztalásaink szerint az egységnél). Ezek is eltérések az elektrosztatika és magnetosztatika között, azonban az általános elméletre nézve jelentéktelenek éspedig legfőkép azért, mert $(\mathfrak{H}\,\mathfrak{B}^{(i)})$ mindig definit négyzetes alak, ami kitűnik abból, ~~hogy ha~~ úgy választjuk meg valamely hely számára a koordinátarendszert, hogy azon a helyen μ_{12}, μ_{21}, stb. eltűnjék, akkor

$$(\mathfrak{H}\,\mathfrak{B}^{(i)}) = \mu_{11}\mathfrak{L}^2 + \mu_{22}\mathfrak{M}^2 + \mu_{33}\mathfrak{N}^2$$

márpedig $\mu_{11}, \mu_{22}, \mu_{33}$ pozitivok.

Magnetosztatikai állapot létezésének a föltétele.

124. Magnetosztatikai állapot létezésének föltétele (szuszceptibilis remánens mágnességű testek kizártával) permanens mágnesség létezése. Tegyük föl ugyanis, hogy nincs permanens mágnesség. Ki fog tűnni,

hogy akkor mágnetosztatikai állapotban időleges mágnesség sem lehet. Ugyanis föltevésünk értelmében $\hat{\varrho} = 0$, tehát a mágnetosztatikai energia a (41) alatti első kifejezése szerint eltűnik s úgy (41) harmadik kifejezése szerint:

$$\int_{\infty} (\mathfrak{H}\, \mathfrak{B}^{(i)})\, \mathfrak{D}\tau = 0$$

Minthogy $(\mathfrak{H}\, \mathfrak{B}^{(i)})$ a $\mathfrak{H}$ térerősség komponenseinek definit négyzetes függvénye, ennélfogva egyenletünkből általánosan $\mathfrak{H} = 0$ következik, tehát (40) első egyenletén $\bar{\varrho} = 0$ következik.

Magnetosztatikai állapotok meghatározása.

125. Abban a föltevésünkben, hogy szuszceptibilis remánens mágnességű testek nincsenek jelen, látni fogjuk, hogy a permanens mágnesség meghatározza az elektrosztatikai állapotot. Tegyük föl ugyanis, hogy a $\hat{\varrho}$ sürüségű permanens mágnességnek valamely $\bar{\varrho}'$ sűrüségű teljes mágnesség is megfelel mágnetosztatikai állapotban. Jelölje Ψ' ennek a potenciálját. Látni fogjuk, hogy $\Psi' = \Psi$ (tehát $\bar{\varrho}' = \bar{\varrho}$).

A (40) harmadik egyenlete szerint

$$\hat{\varrho} = \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial z}$$

és nem különben:

$$\hat{\varrho} = \frac{\partial \mathfrak{U}'}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{V}'}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{W}'}{\partial z}$$

ha t.i. $\mathfrak{U}', \mathfrak{V}', \mathfrak{W}'$ épen úgy van meghatározva $(\mathfrak{L}', \mathfrak{M}', \mathfrak{N}')$

illetőleg Ψ' által, mint U, V, W van az $(\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N})$ illetőleg Ψ által. Eszerint kivonás rendén:

$$\frac{\partial(U'-U)}{\partial x} + \frac{\partial(V'-V)}{\partial y} + \frac{\partial(W'-W)}{\partial z} = 0$$

Szorozzuk meg ezt $(\Psi'-\Psi)\mathfrak{D}\tau$-val s azután integráljunk végtelen nagy sugarú gömbre és végezzünk parciális redukciót, amelyen vegyük figyelembe, hogy a fölületi integrál eltűnik. Azt kapjuk, hogy

$$\int_\infty \left[(\mathcal{L}'-\mathcal{L})(U'-U)+(\mathcal{M}'-\mathcal{M})(V'-V)+(\mathcal{N}'-\mathcal{N})(W'-W)\right]\mathfrak{D}\tau=0$$

Ámde szuszceptibilis ferromágnetikus testek nem lévén a rendszerben, $\mu'_{11}=\mu_{11}$, $\mu'_{12}=\mu_{12}$ stb. stb. tehát az $(U'-U)$ stb. ugyanaz a függvénye az $(\mathcal{L}'-\mathcal{L})$, $(\mathcal{M}'-\mathcal{M})$, $(\mathcal{N}'-\mathcal{N})$ különbségeknek, mint U, stb. az $\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}$-nek, tehát az itt integrálandó kifejezés definit négyzetes alak az $(\mathcal{L}'-\mathcal{L})$, $(\mathcal{M}'-\mathcal{M})$, $(\mathcal{N}'-\mathcal{N})$ különbségekre nézve. Következőleg:

$$\mathcal{L}'=\mathcal{L}, \quad \mathcal{M}'=\mathcal{M}, \quad \mathcal{N}'=\mathcal{N}$$

azaz

$$\frac{\partial\Psi'}{\partial x}=\frac{\partial\Psi}{\partial x}, \ldots, \ldots, \text{ azaz } \Psi'=\Psi+\text{const.}$$

és amiatt, hogy a végtelenben Ψ is Ψ' is eltűnik, $\Psi'=\Psi$ és mivel $\Delta\Psi'=\Delta\Psi$, úgy $\bar{\varrho}'=\bar{\varrho}$.

Tömegmozgató hatás.

Mindig szemmel tartsuk, hogy permanens mágnesek és időleges mágnességű testek rendszerére szorítkozunk.

126. Az elektrosztatika analógiájára a mágnetosztatikai állapotok energiája gyanánt a (40) alatt írt kifejezések jelentkeznek nevezetesen az első és harmadik alakban írva fel:

$$\frac{1}{2}\int_{\infty}\hat{\varrho}\,\Psi\,\mathfrak{D}\tau = \frac{1}{2}\int_{\infty}(\mathcal{L}\mathcal{U}+\mathcal{M}\mathcal{V}+\mathcal{N}\mathcal{W})\,\mathfrak{D}\tau$$

ahol $\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}$ a komponensei $\mathfrak{H}$-nak és $\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}$ a komponensei $\mathfrak{B}^{(i)}$-nek. Ugyancsak az elektrosztatika analógiája szerint a mágnetosztatikai energia negatív értékének oly variációja jelenti közelítőleg a mágnetosztatikai munkát, amely variációban a $\hat{\varrho}\,\mathfrak{D}\tau$ permanens mágneses kvántum és a mágneses permeabilitás is változatlanul együtt mozdúl az eltolódott testelemekkel. Valósággal jól meg is felel a tapasztalásnak ez az analógon úgy, ~~hogy~~ izotróp testek rendszerében a $\mathfrak{D}\tau$ térelem ~~materiális~~ tartalmára a mágnetosztatikai állapot tömegmozgató hatása kielégitően =

$$(46)\quad \left(\hat{\varrho}\,\mathfrak{H}-\frac{1}{2}\mathfrak{H}^2\,\mathrm{grad}\,\mu\right)\mathfrak{D}\tau \equiv \left\{\hat{\varrho}(\mathcal{L},\mathcal{M},\mathcal{N})-\frac{1}{2}(\mathcal{L}^2+\mathcal{M}^2+\mathcal{N}^2)\,\mathrm{grad}\,\mu\right\}\mathfrak{D}\tau$$

Ha pedig azt írjuk, hogy:

$$(47)_1\quad \frac{1}{2}(\mathcal{L}\mathcal{U}-\mathcal{M}\mathcal{V}-\mathcal{N}\mathcal{W}) \equiv \mathcal{L}_x,\quad \frac{1}{2}(\mathcal{M}\mathcal{W}+\mathcal{N}\mathcal{V}) \equiv \mathcal{M}_z \equiv \mathcal{N}_y,\ \text{stb.}$$

akkor ugyanazon hatás kifejezése ez is:

$$(47)_2\quad \left(\frac{\partial\mathcal{L}_x}{\partial x}+\frac{\partial\mathcal{L}_y}{\partial y}+\frac{\partial\mathcal{L}_z}{\partial z},\ \frac{\partial\mathcal{M}_x}{\partial x}+\frac{\partial\mathcal{M}_y}{\partial y}+\frac{\partial\mathcal{M}_z}{\partial z},\ \frac{\partial\mathcal{N}_x}{\partial x}+\frac{\partial\mathcal{N}_y}{\partial y}+\frac{\partial\mathcal{N}_z}{\partial z}\right)\mathfrak{D}\tau$$

és ez már anizotrop testek rendszerében is érvényes.

Magnetosztatikai tömegmozgató hatás merev testen.

127. Különös jelentősége van izotrop és egyenletes minőségű és állapotú folyós környezetben lévő merev mágneses test hatásviselésének. A merev testhez számítva a test teljes érintkezési rétegét, elektrosztatikai tárgyalásunk hasonlatára a 88. és 89. cikk értelmében a testen a szállító, illetőleg az origói forgató hatás komponensei ezen alakban állíthatók elő:

$$(48)\qquad -\mu_0 \int_\tau \bar{\varrho}\, \frac{\partial \Psi_0}{\partial x}\, \mathfrak{D}\tau, \text{ stb. illetőleg } -\mu_0 \int_\tau \bar{\varrho} \left(y \frac{\partial \Psi_0}{\partial z} - z \frac{\partial \Psi_0}{\partial y} \right) \mathfrak{D}\tau, \text{ stb.}$$

ahol μ_0 a testet övedző érintkezési réteg külső határán a környezet egyenletes mágneseződési együtthatója, τ a testnek s a hozzá számított érintkezési rétegnek a térfogata, Ψ_0 pedig a külső mágnességek potenciálja.

128. A merev testnek és érintkezési rétegének a teljes pozitív mágnességétől elfoglalt tért (τ_1), a teljes negatív mágnességétől elfoglalt tért (τ_2) jelölje és most tegyük föl, hogy (τ_1) és (τ_2) aránylag igen távol van a külső mágnességek minden pontjától. Ekkor a testtől viselt szállító illetőleg origói forgató hatás komponensei nyilvánképen így is írhatók:

$$(48)'\qquad -\mu_0 \left\{ \left(\frac{\partial \Psi_0}{\partial x} \right)_1 \int_{\tau_1} \bar{\varrho}\, \mathfrak{D}\tau + \left(\frac{\partial \Psi_0}{\partial x} \right)_2 \int_{\tau_2} \bar{\varrho}\, \mathfrak{D}\tau \right\}, \text{ stb.}$$

illetőleg

$$(48)''\qquad -\mu_0 \left\{ \left(\frac{\partial \Psi_0}{\partial z} \right)_1 \int_{\tau_1} \bar{\varrho}\, y\, \mathfrak{D}\tau - \left(\frac{\partial \Psi_0}{\partial y} \right)_1 \int_{\tau_1} \bar{\varrho}\, z\, \mathfrak{D}\tau + \left(\frac{\partial \Psi_0}{\partial z} \right)_2 \int_{\tau_2} \bar{\varrho}\, y\, \mathfrak{D}\tau - \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)_2 \int_{\tau_2} \bar{\varrho}\, z\, \mathfrak{D}\tau \right\}, \text{ stb.}$$

a (τ_1) tér akármely pontjának a koordinátáit jelentsék Ψ_0-nak 1 indexes deriváltjaiban x, y, z és a (τ_2) tér akármely pontjának a koordinátáit jelentsék Ψ_0-nak 2 indexes deriváltjaiban, mert a Ψ_0 potenciál deriváltjai úgy τ_1-nek, mint τ_2-nek minden pontjában ugyanazokúl számíthatók, t. i. a föltételezett aránylagos nagy távolságok miatt. Az illető pólusokra (kvázi tömegcentrumokra) vonatkoztassuk pedig ezeket. A mágneses test teljes pozitív kvantuma (beleszámítva az érintkezési rétegét is) $\bar{m}$ legyen s a két pólus koordinátáit (x_1, y_1, z_1) illetőleg (x_2, y_2, z_2) jelentse. Ekkor a testtől viselt toló, illetőleg origói forgató hatás komponensei ezek:

$$(49)' \qquad -\mu_0 \bar{m}\left[\left(\frac{\partial \Psi_0}{\partial x}\right)_1 - \left(\frac{\partial \Psi_0}{\partial x}\right)_2\right], \text{ stb.}$$

illetőleg:

$$(49)'' \quad -\mu_0 \bar{m}\left\{\left[y_1\left(\frac{\partial \Psi_0}{\partial z}\right)_1 - z_1\left(\frac{\partial \Psi_0}{\partial y}\right)_1\right] - \left[y_2\left(\frac{\partial \Psi_0}{\partial z}\right)_2 - z_2\left(\frac{\partial \Psi_0}{\partial y}\right)_2\right]\right\}, \text{ stb.}$$

mert a testben (és érintkezési rétegében) lévő teljes negatív kvantum $= -\bar{m}$, ugyanis a 75. cikk módjára való következés a teljes mágnesség és a permanens mágnesség viszonyára, hogy a testnek és érintkezési rétegének összes mágneses kvantuma egyenlő összes permanens mágneses kvantumának és μ_0-nak a hányadosával, tehát zérus, tehát

$$\int_{\tau_1} \bar{\varrho}\, \mathfrak{D}\tau + \int_{\tau_2} \bar{\varrho}\, \mathfrak{D}\tau = 0$$

Olyan tehát aránylagos nagy távolságokból a toló és forgató hatás a mágneses merev testen, mintha úgy volna mágneses a test, hogy összes pozitív mágnességének μ_0-szerese az ő pozitív polusában s összes negatív mágnességének μ_0-szerese az ő negatív polusában volna. Gyakorlatilag pedig egy mágneses test olyan két pontját nevezzük épen a pólusainak, amelyek révén nagy messzeségekből jó megközelítés szerint ily módon viseli a hatást a mágneses test, ugyanis a benne foglalt pozitív, valamint a benne foglalt negatív mágnesség térfogatának a méreteihez képest nagy messzeségekből.

129. Ha az egész merev test méretei kicsinyek a külső mágnességek pontjaitól való távolságokhoz képest, akkor bármely pontja legyen (x, y, z) a testnek, elsőrendű megközelítésben írható, hogy:

$$\left(\frac{\partial \Psi_0}{\partial x}\right)_2 = \left(\frac{\partial \Psi_0}{\partial x}\right)_1 = \frac{\partial \Psi_0}{\partial x}, \text{ stb.}$$

vagyis a mágneses térerősségnek a kivülről származó része $(-\operatorname{grad} \Psi_0)$ a testben egyenletesnek tekinthető. Ekkor elsőrendű megközelítés szerint toló hatás nincs, az origói forgató hatás komponensei pedig, a test akármely pontjának a koordinátái legyenek x, y, z:

$$-\mu_0 \overline{m} \left[(y_1 - y_2)\frac{\partial \Psi_0}{\partial z} - (z_1 - z_2)\frac{\partial \Psi_0}{\partial y}\right], \text{ stb.}$$

De bármely centrumú forgató hatásnak is ezek a komponensei és a koordinátatengelyekkel bármely párhuzamos tengelyek körül is ezek jelentik rendre a forgató hatást, mert úgy Ψ_0 deriváltjai, mint az $x_1 - x_2$, stb. különbségek változatlanok maradnak, ha a koordinátarendszerünket eltoljuk, bárhova kerüljön is az origója. Ugyanis, ha régi helyzetére nézve új origója a, b, c helyen van, akkor $x, y, z; x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2$ helyett $x-a, y-b, z-c; x_1-a, y_1-b, z_1-c; x_2-a, y_2-b, z_2-c$ a koordináták. Ezt a vektort:

$$\mu_0 \bar{m}(x_1-x_2, y_1-y_2, z_1-z_2)$$

a test mágneses momentumának nevezzük. Iránya nyilvánképen a test teljes negativ mágnességének a polusából a teljes pozitiv mágnességének a polusába mutató irány. Nagysága pedig a két pólus távolságának és a $\mu_0 \bar{m}$ mennyiségnek a szorzata. Jelöljék röviden $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ a komponenseit, azaz legyen

$$\mu_0 \bar{m}(x_1-x_2) = \mathcal{A}, \text{stb.}$$

Akkor bármely centrumú forgató hatás komponensei (aránylagos nagy távolságokból a test méreteihez képest) ezek:

$$-\left(\mathcal{B}\frac{\partial \Psi_0}{\partial z} - \mathcal{C}\frac{\partial \Psi_0}{\partial y}\right), -\left(\mathcal{C}\frac{\partial \Psi_0}{\partial x} - \mathcal{A}\frac{\partial \Psi_0}{\partial z}\right), -\left(\mathcal{A}\frac{\partial \Psi_0}{\partial y} - \mathcal{B}\frac{\partial \Psi_0}{\partial z}\right)$$

t.i. elsőrendő megközelitésben, midőn a kivülről származó mágneses térerősség a test térfogatában egyenletesnek számit. Az $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ vektort a test mágneses momentumának nevezzük. Toló hatás ezuttal elsőrendű megközelités szerint nincs, amint láttuk, de azt könnyü megállapitani, hogy a test bármely kiszemelt pontjának a koordinátáit jelentsék x, y, z, másodrendü megközelités szerint (49)'-ből

$$-\mu_0 \overline{m}\left\{\left(\frac{\partial \Psi_0}{\partial x}\right)_1-\left(\frac{\partial \Psi_0}{\partial x}\right)_2\right\} = -\mu_0 \overline{m}\left\{\frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial x^2}(x_1-x_2)+\frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial x\,\partial y}(y_1-y_2)+\frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial x\,\partial z}(z_1-z_2)\right\}$$

$$= -\left(\frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial x^2}\mathcal{A}+\frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial x\,\partial y}\mathcal{B}+\frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial x,\partial z}\mathcal{C}\right),\ \text{stb.},$$

tehát a toló hatás másodrendű pontossággal =

$$-\operatorname{grad}\left(\frac{\partial \Psi_0}{\partial x}\mathcal{A}+\frac{\partial \Psi_0}{\partial y}\mathcal{B}+\frac{\partial \Psi_0}{\partial z}\mathcal{C}\right),$$

mert $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ független az x, y, z helytől.

Ha már most a mágneses térerősségnek $\mathfrak{H}$-nak a külső mágnességektől származó részét $\mathfrak{H}_0 \equiv (\mathcal{L}_0\, \mathcal{M}_0\, \mathcal{N}_0)$ jelöli, akkor ezek szerint a mágnesség szállító hatása másodrendű megközelítéssel

$$(50)' \qquad \operatorname{grad}(\mathcal{A}\mathcal{L}_0 + \mathcal{B}\mathcal{M}_0 + \mathcal{C}\mathcal{N}_0)$$

a forgató hatás pedig elsőrendű megközelítéssel bármely centrum körül

$$(50)'' \qquad (\mathcal{B}\mathcal{N}_0 - \mathcal{C}\mathcal{M}_0,\ \mathcal{C}\mathcal{L}_0 - \mathcal{A}\mathcal{N}_0,\ \mathcal{A}\mathcal{M}_0 - \mathcal{B}\mathcal{L}_0)$$

a testen t. i. azzal a kikötéssel, hogy a test környezete legalább a test határrétegének a közelében egyenletes minőségű és állapotú izotróp folyós közeg és hogy a testben a külső mágnességek $\mathfrak{H}_0$ térerőssége közelítőleg egyenletesnek számítható.

Ha pedig permanens mágnes a test, és a környezetének igen kicsiny a szuszceptibilitása (pl. levegő a környezet), akkor $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ nagyon pontosan a permanens mágnesség momentuma.

130. Földünk messze lévő részeinek az összes mágnességét földmágnességnek nevezzük. Ez nagy megközelités szerint változatlan s a tőle származó mágneses térerősség olyan testekben, amilyen méretűeket fizikai kutatások alá szokunk fogni, nagy megközelités szerint egyenletesnek is számithat. A gyakorlatban a földmágnesség térerősségét (negativ potenciáljának a gradiensét) a földmágnesség intenzitásának nevezzük s horizontális meg vertikális összetevőre bontva, horizontális összetevőjét a földmágnesség horizontális intenzitásának, vertikális összetevőjét a földmágnesség vertikális intenzitásának mondjuk.

Magnetometron.

131. Egy fonálon felfüggesztett permanens mágnes a nehézségi erőnek és a földmágnesség intenzitásának a hatása alatt légnemű környezetben bizonyos föltételek teljesültével úgy tart nyugalmat a fonál bármely elcsavarásával, hogy mágneses momentuma horizontális. Ezek a föltételek könnyen levezethetők az egyfonalú torziómérleg általános mekanikai egyenleteiből és abból állanak, hogy a fonál oly helyen legyen a mágneshez erősitve, hogy a fonálnak a vertikális, a mágneses momentumnak a horizontális helyzetében a fonálnak a mágneses momentumra merőleges síkjától ellenkező oldalra essék a mágnes

tömegcentruma, mint amerre a mágneses momentum mutat és távolsága ettől a síktól $\mathfrak{M}\mathfrak{H}_v : \mathfrak{P}$ legyen, ahol $\mathfrak{M}$ a mágneses momentum nagysága, $\mathfrak{H}_v$ a földmágnesség vertikális intenzitása, $\mathfrak{P}$ a mágnes súlya. Onnan vannak ezek a föltételek, hogy a föld mágnességének a mágnesen horizontális tengelyek körül is van forgató hatása, ugyanis a maga vertikális intenzitásánál fogva.

A gyakorlatban pedig oly rideg fölfüggesztést alkalmaznak, amelynek következtében a nyugalmi helyzetéből a fonál körül kilendített mágnes úgy mozog a nehézségi erőnek és a föld mágneses intenzitásának a hatása alatt, hogy a mozgása igen pontosan tiszta forgó mozgás a fonál körül, miközben a mágneses momentuma folyvást horizontális. Ekkor tehát jó megközelítés szerint csupán a földmágnesség horizontális intenzitásának, a fonál torziójának és a környezeti ellenállásnak a forgató hatását viseli. Állítsuk a fonál tengelyébe a z tengelyt s irányítsuk a földmágnesség horizontális intenzitásába az x tengelyt, amely felől φ jelölje a pillanatnyi elfordulás szögét (jobbrafordulásban pozitivnak, balrafordulásban negativnak számítva), a mágneses momentum nagyságát pedig $\mathfrak{M}$, a földmágnesség horizontális intenzitásának a nagyságát $\mathcal{H}$ jelölje. Most (50)" harmadik kompmense a mágneses forgató momentum, amelyben $\mathcal{M}_0 = 0$, $\mathcal{L}_0 = \mathcal{H}$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{M} \sin\varphi$, tehát most a mágneses forgató momentum =

$= - \mathcal{H}\,\mathfrak{M} \sin\varphi$. Ehhez általában még valamely speciális külső mágnesség forgató hatása csatlakozik.

A magnetometronokban mindig legalább háromféle jellegzetes szöget kell megkülönböztetnünk, ezek: a földmágnesség horizontális intenzitásának az irányától számított szög (φ), a nyugalmi helyzetből való szög (ω), a torzió szöge (Θ).

A diamagnetizmus és paramagnetizmus összehasonlítása.

132. Magnetosztatikai állapotban izotrop testben a (45)' egyenlet szerint

$$(51) \qquad \mathfrak{M}^{(i)} = (\mu - 1)\,\mathfrak{H} = (1 - \mu)\,\mathrm{grad}\,\Psi$$

Ebből folyólag a paramagnetikus ($\mu > 1$) izotrop testekben indukált mágneses momentum mindenütt egyező irányú a mágneses térerősséggel, ellentett irányú a mágneses potenciál gradiensével, ellenben a diamagnetikus ($\mu < 1$) testekben indukált mágneses momentum mindenütt ellenkező irányú a mágneses térerősséggel, egyező irányú a mágneses potenciál gradiensével.

Gondoljunk speciálisan egy egyenletes minőségű és állapotú izotrop merev testre, éspedig olyanra, amelynek nincs permanens mágnessége s tegyük föl, hogy a környezete, legalább az ő közelségében szintén egyenletes minőségű és állapotú, amelynek magának szintén nincs permánens mágnessége.

Minthogy nincs e testben permánens mágnesség, éspedig az érintkezési rétegében sincs, úgy a (40)-nek a harmadik egyenletsora szerint div $\mathfrak{B}^{(i)} = 0$ a testben és a (43) első egyenletsora szerint az érintkezési réteg számára

$$(\mathfrak{B}_n^{(i)})_+ - (\mathfrak{B}_n^{(i)})_- = 0$$

Az előbbiből s (45)-ből a test belsejében, (ahol μ egyenletes) div $\mathfrak{H} = 0$, tehát (40) első egyenleténél fogva $\bar{\varrho}$ is $= 0$ a test belsejében. Fölületi egyenletünkből pedig és (45)-ből

$$(\mu \mathfrak{H}_n)_- = (\mu \mathfrak{H}_n)_+$$

következik. Másfelől (43) második egyenletsorából

$$\bar{\omega} = (\mathfrak{H}_n)_+ - (\mathfrak{H}_n)_-$$

Vonatkoztassuk a (+) indexet az érintkezési rétegnek a belső (a testben lévő) oldalára és a (−) indexet az érintkezési réteg külső (a környezetben lévő) oldalára és a belső oldalán mellőzzük az indexet, a külső oldalán pedig (−) index helyett k indexet használjunk:

$$\mu_k \mathfrak{H}_{nk} = \mu \mathfrak{H}_n \quad , \quad \bar{\omega} = \mathfrak{H}_n - \mathfrak{H}_{nk}$$

Az n normális most a test belseje felé mutat. Ezekből $\mathfrak{H}_{nk}$ eliminálásával

$$(52) \qquad \bar{\omega} = \frac{\mu_k - \mu}{\mu_k} \mathfrak{H}_n = \frac{\mu - \mu_k}{\mu_k} \frac{\partial \Psi}{\partial n}$$

Ezen teljes fölületi sürüség szerint van csak mágnesség a test érintkezési rétegében s a belsejében mint láttuk nincs mágneses sürüség. A testtől viselt szállító illetőleg origói forgató hatás komponensei tehát (48) értelmében:

$$(53) \quad \begin{cases} (\mu_k - \mu) \int_\sigma \frac{\partial \Psi}{\partial n} \frac{\partial \Psi_0}{\partial x} \mathfrak{D}\sigma \text{, stb., illetőleg} \\ (\mu_k - \mu) \int_\sigma \frac{\partial \Psi}{\partial n} \left(y \frac{\partial \Psi_0}{\partial z} - z \frac{\partial \Psi_0}{\partial y} \right) \mathfrak{D}\sigma \text{, stb.} \end{cases}$$

ahol a σ a test fölületét jelenti. Ugyanis Ψ_0 csupán a külső mágnességek potenciálját jelentvén, a deriváltjai nem változnak rohamosan a test érintkezési rétegén keresztül, minélfogva az érintkezési rétegnek egy teljes merőleges elemi részében minden pontban ugyanannak számithatnak Ψ_0 deriváltjai, miből folyólag (48)-ban a (τ) határán $\bar{\varrho}\, \mathfrak{D}\tau$ az érintkezési rétegben egy teljes merőleges elemi résznek az $\bar{\omega}\, \mathfrak{D}\sigma$ mágneses kvantumát jelentheti.

Most tegyük föl, hogy $\mu_k - \mu$ igen kicsit különbözik zérustól. Akkor (52) szerint $\bar{\omega}$ az érintkezési réteg minden pontjában igen kis fölületi sürüséget jelent még akkor is, amidőn $\mathfrak{H}_n$-nak $\mathfrak{H}_{0n}$ része nem kicsiny, amit általában föltegyünk. Ennek következtében az érintkezési rétegből származó mágneses térerősség igen kicsiny és elsőrendű megközelitésben

Ψ helyett Ψ_0 használható (52)-ben és (53)-ban. Ekkor tehát $\bar{\omega}$ előjele egyezik, vagy ellenkezik $\frac{\partial \Psi_0}{\partial n}$ előjelével aszerint, amint $\mu_k < \mu$, vagy $\mu_k > \mu$ és a mágnességnek a testtől viselt szállító és forgató hatása (53) az egyik esetben ellenkező előjelű, mint a másikban. Különösen pedig a vákuumban ($\mu_k = 1$) egy homogén izotrop test, ha diamagnetikus ($\mu < 1$) közelítőleg ellenkezően mágneseződik, mintha paramgnetikus ($\mu > 1$) és közelítőleg ellenkező irányú hatásokat visel, mintha paramagnetikus.

Ha úgy választanók meg a mágneseződési együtthatók egységét, hogy a létező legkisebb μ érték legyen azon egység, akkor a paramagnetizmus és diamagnetizmus megkülönböztetés tárgytalan volna, vagy csak relatív paramagnetizmusról és diamagnetizmusról lehetne szó. Ekkor azonban a tiszta éter is mágnesezhető közeg gyanánt szerepelne.

Az állandó elektromos áramlás magnetosztatikai definiciója.

133 A koordinátarendszerünkben nyugvó és változatlan materiális rendszerről (kizárásával a szuszceptibilis remanens mágnességű testeknek) eddig mindig föltettük, hogy abban a mágneses hatások tisztán mágnességektől származnak úgy, hogy skaláris kvantumok skaláris potenciáljának a gradiense ha–

tározza meg mind a mágnesező, mind a tömegmozgató mágneses hatásokat. Ez a föltevés azonban általában nem teljesül. Általában földhöz rótt koordinátarend-szerünkben nyugvó és változatlan anyagi rendszerekben is oly mágnesező és mágneses tömegmozgató hatások nyilvánúlnak a tapasztalás szerint, - amelyek csak némely véges téreken kivül mutatkoz-nak mágnesességektől származókúl. Tapasztalásaink arra utalnak, hogy változatlan állapotok rendén ekkor is létezik afféle egyenletesen deriválható hatá-rozott $(\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}) = \mathfrak{H}$ vektor, amely szerint mindenütt olyanok az igazán létező időleges mágneses momentumok kifejezései és az igazán létező mágneses sűrűségek kifejezései, mint puszta mágnesség esetén és nem különben épen olyan a tömegmozgató hatás tenszoros kifejezése is mindenütt. Amde a $\mathfrak{H}$ vek-tor általában nemcsak hogy nem Coulomb-féle gradiens, de általában nem is gradiens; másszóval a $\mathfrak{H}$ rotációja nem mindenütt zérus, és csak bizonyos téreken kivül jelentkezik ez a $\mathfrak{H}$ vektor gradiens gyanánt. Mindazonáltal most is mágneses, meg mágnetosztatikai térerősségnek nevezzük a $\mathfrak{H}$ vektort és mágneses, illetőleg időleges mágneses gerjesztésnek ne-vezzük a

$$\mathfrak{H} + \mathfrak{M} \equiv \mathfrak{B}, \text{ illetőleg } \mathfrak{H} + \mathfrak{M}^{(i)} \equiv \mathfrak{B}^{(i)}$$

vektort.

134. Ott, ahol nem gradiens a $\mathfrak{H}$ mágneses

térerősség, ahol tehát a rotációja nem zérus, jelölje a rotációját $\frac{1}{\nu}(u, v, w)$, ahol ν egyelőre határozatlan pozitív konstanst jelent. Eszerint:

$$(54) \qquad \nu\left(\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}\right) \equiv u, \; \nu\left(\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) \equiv v, \; \nu\left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}\right) \equiv w$$

Mégpedig föltehető, – anélkül, hogy tapasztalásba ütköznénk –, hogy az (u, v, w) vektor legalább egyszer egyenletesen deriválható egyértékű függvénye a koordinátáknak. E tulajdonságánál fogva olyan rotáció az, hogy a divergenciája mindenütt zérus, azaz:

$$(54)_0 \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

mindenütt. Föltesszük, hogy (u, v, w) csak véges terekben nem zérus úgy, hogy (L, M, N) csak véges térekben nem gradiens.

135. Minthogy a $\mathfrak{H}$ most is úgy határozza meg a tényleg létező mágneses sűrűségeket, mint puszta mágnesség esetében, úgy

$$(55) \qquad \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} = \bar{\varrho}$$

Minthogy továbbá a $\mathfrak{H}$ valamely véges téreken kívül olyan, mintha tisztán mágnességektől származnék, a végtelenben másodnál magasabb rendűen tűnik el (42). Ebből az következik, az (u, v, w) vektorra, hogyha legalább mindazon térekre kiterjesztjük az integrálást, amelyekben nem zérus, akkor

$$(54)' \quad \int u\, \mathfrak{D}\tau = 0, \quad \int v\, \mathfrak{D}\tau = 0, \quad \int w\, \mathfrak{D}\tau = 0$$

Ugyanis (54)-ből való helyettesités után redukciót végezvén, de most végtelen nagy sugarú gömbre alkalmazva az integrálást, az eredmény zérus, mert a gömbfölületen $\mathfrak{H}$ mindenütt másodnál magasabb rendű végtelen. Végül $\bar{\varrho}$ definiciójából egyenesen következik, hogyha legalább azon térekre alkalmazzuk az integrálást, amelyekben $\bar{\varrho}$ nem zérus:

$$(55)' \qquad \int \bar{\varrho}\, \mathfrak{D}\tau = 0$$

136. Az (u, v, w) vektort elektromos áramlásnak nevezzük, mégpedig állandó elektromos áramlásnak. Állandónak, mert jelen tárgyalásunkban mindig változatlan állapotokat tételezünk föl, mihez képest az időtől az (u, v, w) vektor is független. Az állandó elektromos áramlás nevű vektor oly függvény tehát, amely a mágneses térerősség rotációjával arányos mindenütt ugyanazon ν arányossági együttható szerint, csak némely véges térekben nem zérus, az időtől független, a helynek legalább egyszer egyenletesen deriválható egyértékű függvénye.

A mágneses térerősség tapasztalati tulajdonságainak összeférése.

137. Az előbbi cikkek szerint a $\mathfrak{H}$ térerősség-

nek tapasztalás szerint a következő általános tulajdonságai vannak:

I. $\mathfrak{H}$ a helynek legalább elsőrendűen mindenütt deriválható egyértékű függvénye és parciális deriváltjai folytonosak mindenütt;

II. div $\mathfrak{H}$ csak némely véges terekben nem zérus és legalább elsőrendűen deriválható függvénye a helynek és parciális deriváltjai folytonosak mindenütt;

III. rot $\mathfrak{H}$ csak némely véges terekben nem zérus és legalább elsőrendűen deriválható függvénye a helynek és parciális deriváltjai folytonosak mindenütt;

IV. valamely véges tereken kívül mágnességektől származó Coulomb-féle gradiens gyanánt viselkedik a $\mathfrak{H}$.

Kérdés, hogy valóban összeférnek-e ezen tulajdonságok. Látni fogjuk, hogy összeférnek, mégpedig tényleg elő fogunk állítani egy olyan $\mathfrak{H}$ vektort, amely az I–IV alatt elősorolt összes tulajdonságokat egyesíti magában.

138. Nem tekintve (54)-et és (55)-öt, jelentsen (u, v, w) oly rotációt, és ξ oly skalárist, amelyek csak némely véges terekben nem zérusok, a helynek legalább elsőrendűen deriválható függvényeik és parciális deriváltjaik folytonosak mindenütt és teljesítik a következő posztulátumokat is

$$(54)' \quad \int u\,\mathfrak{D}\tau = 0\,, \quad \int v\,\mathfrak{D}\tau = 0\,, \quad \int w\,\mathfrak{D}\tau = 0$$

$$(55)' \qquad \int \bar{\varrho}\,\mathfrak{D}\tau = 0$$

az integrációknak legalább azokra a térekre való kiterjesztésével, amelyekben (u, v, w), illetőleg $\bar{\varrho}$ nem zérus. Azután írjuk, hogy

$$(56)\begin{cases} \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int \dfrac{\bar{\varrho}}{r}\,\mathfrak{D}\tau \equiv \Psi\,; \\ \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int \dfrac{u}{r}\,\mathfrak{D}\tau \equiv \mathcal{F}\,; \quad \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int \dfrac{v}{r}\,\mathfrak{D}\tau \equiv \mathcal{G}\,; \quad \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int \dfrac{w}{r}\,\mathfrak{D}\tau \equiv \mathcal{H} \end{cases}$$

Akkor az I–IV alatt elésorolt összes tulajdonságokat egyesíti magában azon $\mathfrak{H}$ vektor, amelynek a komponensei ezek:

$$(57)\quad \begin{cases} \mathcal{L} \equiv -\dfrac{\partial \Psi}{\partial x} + \dfrac{1}{V}\left(\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} - \dfrac{\partial \mathcal{G}}{\partial z}\right) \\ \mathcal{M} \equiv -\dfrac{\partial \Psi}{\partial y} + \dfrac{1}{V}\left(\dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial z} - \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}\right) \\ \mathcal{N} \equiv -\dfrac{\partial \Psi}{\partial z} + \dfrac{1}{V}\left(\dfrac{\partial \mathcal{G}}{\partial x} - \dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial y}\right) \end{cases}$$

úgy, hogy

$$(57)_0 \qquad \mathfrak{H} \equiv -\operatorname{grad}\Psi + \frac{1}{V}\operatorname{rot}(\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H})$$

Az I. nyilvánképen teljesül. Könnyen kimutatható, hogy II. és III. is teljesül. Előbb (III)-ról fogjuk látni. Az (57) két utolsó kifejezéséből rot $\mathfrak{H}$ első komponense

$$\frac{\partial \mathcal{N}}{\partial y} - \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial z} = \frac{1}{V}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z}\right) - \frac{1}{V}\Delta \mathcal{F}$$

Ámde (56)-ból

$$4\pi\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}+\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y}+\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z}\right)=\int\left(u\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}+v\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}+w\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right)\mathcal{D}\tau =$$

$$=-\int\left(u\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial a}+v\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial b}+w\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial c}\right)\mathcal{D}\tau$$

ha ugyanis ($\mathcal{D}\tau$) koordinátái a, b, c. Parciális integrációval, figyelembe véve, hogy a határon (u, v, w) zérus és így a fölületi integrál elmarad:

$$4\pi\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}+\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y}+\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z}\right)=\int\frac{\frac{\partial u}{\partial a}+\frac{\partial v}{\partial b}+\frac{\partial w}{\partial c}}{r}\mathcal{D}\tau$$

A jobboldalban írt divergencia mindenütt zérus, mert u, v, w rotáció (föltevésünk szerint), marad tehát $\frac{\partial \mathcal{N}}{\partial y}-\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial z}$ kifejezésére

$$\frac{\partial \mathcal{N}}{\partial y}-\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial z}=-\frac{1}{\nu}\Delta\mathcal{F}$$

Tekintettel azonban $\mathcal{F}$ definiciójára: $\Delta\mathcal{F}=-u$ és így:

$$\text{(58)}\qquad \nu\left(\frac{\partial \mathcal{N}}{\partial y}-\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial z}\right)=u\text{, stb.}$$

E szerint az (u, v, w) vektor funkcionális tulajdonságainál fogva III teljesül. De II is teljesül, mert $\mathfrak{H}$-nak a divergenciája

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}+\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial y}+\frac{\partial \mathcal{N}}{\partial z}=-\Delta\Psi$$

márpedig (56) szerint $\Delta\Psi=-\bar{\varrho}$, s következőleg:

$$\text{(59)}\qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}+\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial y}+\frac{\partial \mathcal{N}}{\partial z}=\bar{\varrho}$$

Az (58) és (59) elárulja, hogy az itt bevezetett (u, v, w) az (54) alatt definiált áramlásnak s az itt bevezetett $\bar{\rho}$ (55) szerint a teljes mágneses sűrűségnek felel meg.

139. Hátra van még a IV. tulajdonság kiderítése.

Amely térben $(u, v, w) = 0$, abban (58) szerint gradiens a $\mathfrak{H}$. Most minden előtt arról győződünk meg, hogy az (u, v, w) áramlások téreit egyszeresen összefüggő S_1, S_2, stb. fölületekkel fogva körül, e fölületektől határolt T_1, T_2, stb. téreken kivül az egész végetlen térben egyértékű a $\mathfrak{H}$ gradiensnek a potenciálja, amelyet $-\Omega$ jelöljön. Akármely kétszeresen összefüggő ágatlan analitikus vonalon képezzük ugyanis $-\Omega$ gradiensének ($\mathfrak{H}$-nak) az integrálját, eltűnik ez a vonalas integrál, mert Stokes redukciója szerint oly fölületi integrállal fejezhető ki, amely $\mathfrak{H}$ rotációjának a fölületi normálisra tartozó értékére szól, ámde a T_1, T_2, stb. téreken kivül $\mathrm{rot}\,\mathfrak{H} = 0$ (58). (A T_1, T_2,... téreken kivül lévő végtelen tér egyszeresen összefüggő tér amiatt, hogy T_1, T_2,... egyszeresen összefüggő terek, következőleg a T_1, T_2,... téreken kivül lévő végtelen térben bármely kétszeresen összefüggő ágatlan vonal úgy tekinthető, mint ezen térben lévő fölületdarab kerülete, a fölületdarab pedig emellett végtelen sokféle módon megválasztható úgy, hogy teljesítse a Stokes-féle redukció föltételeit.)

Minthogy $\mathfrak{P}$ egyértékű a T_1, T_2, stb. tereken kivül, a gradiense pedig, azaz $-\mathfrak{H}$, azaz $-(\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ az (57) alatt lévő kifejezéseinél fogva (50), (54)', (55)' értelmében a végtelenben másodnál magasabb rendűen eltűnik, úgy az $\mathfrak{P}$-ban additive foglalt tetszésszerinti konstáns megválasztható úgy, hogy $\mathfrak{P}$ is eltűnjék a végtelenben.

Tekintve mármost, hogy a T_1, T_2, ... téreken kivül $\mathfrak{P}$ egyértékű s hogy a végtelenben eltűnik, az első koordinátaderiváltjai pedig másodrendűnél is magasabb rendűen tűnnek el a végtelenben, és tekintve, miképp $\mathfrak{H}$ egyenletesen deriválható függvénye lévén a helynek, az $\mathfrak{P}$ kétszer egyenletesen deriválható függvénye a helynek, forduljunk a Green-féle redukcióhoz, amelyet az $\mathfrak{P}$ függvényre az S_1, S_2, ... fölületek és egy végtelen nagy sugarú gömbfölület közt lévő térben alkalmazzunk. A gömbfölületre szóló integrál eltűnik $\mathfrak{P}$-nak a végtelenben való viselkedése miatt. A redukcióból származó térintegrál pedig a T_1, T_2, ... stb. téreken kivül lévő mágnességek potenciálja, mert $-\Delta\mathfrak{P} = \operatorname{div}\mathfrak{H} = -\Delta\Psi$. Van tehát, mint a Green-féle redukció eredménye a T_1, T_2, stb. téreken kivül gondolható tetszésszerinti pontban:

$$\mathfrak{P} = \Psi_0 + \frac{1}{4\pi}\int_{S_1+S_2+\cdots}\left(\mathfrak{P}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial n}\frac{1}{r}\right)\mathfrak{D}\sigma$$

ahol Ψ_0 jelenti a T_1, T_2, stb. téreken kivül lévő mágnesség potenciálját és n a $D\sigma$ fölületelemnek az illető S zárt fölületből kifelé mutató normálisát jelenti. Ezen normális iránykoszinuszait α, β, γ-val jelölve s az integrál második részében

$$-\frac{\partial\Omega}{\partial n} = \mathfrak{H}_n = \alpha\mathfrak{L} + \beta\mathfrak{M} + \gamma\mathfrak{N}$$

irva, ezen második részt a T_1, T_2, stb. térekre kiterjedő integrállá alakítsuk; az eredményes térintegrál két oly térintegrál összege gyanánt jelentkezik, amelyek egyike a T_1, T_2, stb. terekben foglalt mágnesség potenciálja. Hozzá adva ezt a Ψ_0-hoz, megkapjuk az összes előforduló mágnességek Ψ potenciálját s most Ω kifejezése így van:

$$\Omega = \Psi + \frac{1}{4\pi}\int_{T_1+T_2+\cdots}\left(\mathfrak{L}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial a} + \mathfrak{M}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial b} + \mathfrak{N}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial c}\right)D\tau + \frac{1}{4\pi}\int_{S_1+S_2+\cdots}\Omega\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}D\sigma$$

ahol a, b, c koordinátái $D\tau$ térelemnek. Itt Ψ az összes mágnességek potenciálja. A térintegrál olyan, mintha T_1, T_2, stb. terekben $(\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ momentumú mágnességnek a potenciálja volna (t. i. ezeken a téreken kivül lévő pontokra vonatkoztatva), ami könnyen fölismerhető a 36. cikk nyomán az egyéni elemi rész kettős elektromosságának a tárgyalásából. A harmadik tag pedig olyan, mintha oly mágnesség potenciálja volna, amely a T_1, T_2, stb. terek határrétegein

$|\mathfrak{R}|$ nagyságú és $\mathfrak{R}$ előjele szerint merőlegesen kifelé, vagy befelé irányult fölületi momentumot alkot, ami kitűnik a 49. cikkből a kettős elektromos réteg tárgyalásán. – Most már a IV. tulajdonság is ki van mutatva. De tegyük még azt az észrevételt, hogy $\mathfrak{R}$ itteni kifejezésében $\mathfrak{V}$ jelentvén a tényleges mágnességek potenciálját, a másik két tag jelenti (a T_1, T_2, stb. téreken kivül lévő pontokban) az elektromos áramlástól származót, amelynek a negativ jelű gradiense teszi tehát a $\mathfrak{H}$ térerősségnek az áramlástól származó összetevőjét, azaz 57-ben az $\frac{1}{V}(\mathfrak{F}, \mathfrak{G}, \mathfrak{H})$ vektor rotációját (a T_1, T_2, stb. téreken kivül).

Változatlan mágnesség és állandó elektromos áramlás térerősségének meghatározása.

140. Az utóbbi két cikkből látható, hogy a 133. cikkben posztulált s I – IV alatt a 137. cikkben elésorolt tapasztalatszerű tulajdonságokkal valóban lehetséges a $\mathfrak{H}$ térerősség.

Most arról fogunk meggyőződni, hogy ha mindenütt adva van az (u, v, w) elektromos áramlás és a $\mathfrak{J}$ permanens mágnesség, akkor már a $\mathfrak{H}$ térerősség a maga általános tulajdonságai által teljesen meg van határozva.

Természetesen abból indulunk ki, hogy

$$(60) \qquad \nu \operatorname{rot} \mathfrak{H} = (u, v, w), \quad \operatorname{div} \mathfrak{B}^{(i)} = \hat{\varrho},$$

mert (u, v, w) és $\hat{\varrho}$ vannak adva. (A $\mathfrak{B}^{(i)}$ izotrop testben $= \mu\mathfrak{H}$, anizotrop testben $\mathfrak{H}$ komponenseivel homogén lineáris módon fejezvék ki $\mathfrak{B}^{(i)}$ komponenseivel együtthatók μ_{ij} szerint, amelyek csak a materiális minőség és állapot függvényei, valamint μ is az izotrop testekben és $\mathfrak{H}\mathfrak{B}^{(i)}$ definit kvadratikus forma $\mathfrak{H}$-nak a komponensei szerint).

Ha adataink mellett más $\mathfrak{H}$ is lehetséges volna, akkor azt $\mathfrak{H}_1$-val jelölve:

$$\nu \operatorname{rot} \mathfrak{H}_1 = (u, v, w), \quad \operatorname{div} \mathfrak{B}_1^{(i)} = \hat{\varrho}$$

volna, tehát

$$\nu \operatorname{rot}(\mathfrak{H}_1 - \mathfrak{H}) = 0, \quad \operatorname{div}(\mathfrak{B}_1^{(i)} - \mathfrak{B}^{(i)}) = 0$$

Ezek elseje szerint $\mathfrak{H}_1 - \mathfrak{H}$ egy gradiens. Jelölje χ a potenciálját és most a második egyenletet szorozzuk meg χ-vel és $D\tau$ térelemmel, azután integráljuk végtelen nagy sugarú gömbre:

$$\int_\infty \chi \operatorname{div}(\mathfrak{B}_1^{(i)} - \mathfrak{B}^{(i)})\, D\tau = 0$$

Parciális redukciót végezve pedig és számbavéve, hogy $\operatorname{grad} \chi = \mathfrak{H}_1 - \mathfrak{H}$, azt kapjuk, hogy

$$\int_\infty (\mathfrak{H}_1 - \mathfrak{H})(\mathfrak{B}_1^{(i)} - \mathfrak{B}^{(i)})\, D\tau = 0$$

mert a fölületi integrál eltűnik, t.i. annálfogva, hogy másodnál (sőt harmadnál) magasabb rendű-en eltűnő függvény integrálja. Minthogy $\mathfrak{B}^{(i)}$ és $\mathfrak{h}$ vonatkozásának az együtthatói a materiális minőséggel és állapottal meg vannak határozva, úgy $\mathfrak{B}_1^{(i)}$ és $\mathfrak{h}_1$ vonatkozása ugyanazon együtthatók szerint való lineáris homogén vonatkozás, mint $\mathfrak{B}^{(i)}$ és $\mathfrak{h}$ vonatkozása, tehát $\mathfrak{B}_1^{(i)} - \mathfrak{B}^{(i)}$ és $\mathfrak{h}_1 - \mathfrak{h}$ vonatkozása is ugyanazon együtthatók szerint való, miből folyólag újabb integrálunk definit négyzetes alakra szól $\mathfrak{h}_1 - \mathfrak{h}$ komponensei szerint. Következésképen

$$\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h}$$

mindenütt: adott (u, v, w) és $\hat{\varrho}$ egyetlen $\mathfrak{h}$ függvényt határoz meg. (Hasonlóképp mutatható ki ez (u, v, w)-és $\hat{\varrho}$-ról.) Mivel pedig az (57) alatt definiált $\mathfrak{h}$ függvény (u, v, w) és $\hat{\varrho}$ által van meghatározva, ennélfogva maga (57) jelenti mindig az elektromos áramlás és a mágnesség tér-erősségét.

Mágnességek mint elektromos áramlások.

141. Minden egyéni testrész mágnességének a térerőssége úgy is fölfogható, a testrészen kivül, mintha elektromos áramlásoktól származnék, olyanoktól, amelyeknek a testrész a székhelye

Jelölje most ugyanis $\mathfrak{M}$ mindig csupán az egyéni testrész pontjaiban a teljes mágneses momentumot, amelybe a testrész érintkezési rétegében a környezet mágneses momentumát nem számítjuk bele úgy, hogy a most gondolt $\overline{\mathfrak{M}}$ momentum az egyéni testrész határán, vagyis az érintkezési rétegnek külső fölületén, valamint azon túl is mindenütt zérus.

A testrész teljes mágnességének a sűrűsége az (a, b, c) helyen:

$$\bar{\varrho} = -\operatorname{div} \overline{\mathfrak{M}} = -\left(\frac{\partial \overline{\mathfrak{M}}_x}{\partial a} + \frac{\partial \overline{\mathfrak{M}}_y}{\partial b} + \frac{\partial \overline{\mathfrak{M}}_z}{\partial c}\right)$$

nem értvén hozzá a határrétegben a környezethez tartozó sűrűséget.

Eszerint az egyéni testrész saját mágnességének a 4π-vel szorzott potenciálja (x, y, z) helyen

$$\int_\tau \frac{\bar{\varrho}}{r} \mathfrak{D}\tau = -\int_\tau \frac{\operatorname{div} \overline{\mathfrak{M}}}{r} \mathfrak{D}\tau = \int_\tau \left(\overline{\mathfrak{M}}_x \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial a} + \overline{\mathfrak{M}}_y \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial b} + \overline{\mathfrak{M}}_z \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial c}\right) \mathfrak{D}\tau$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x}\int_\tau \frac{\overline{\mathfrak{M}}_x}{r} \mathfrak{D}\tau - \frac{\partial}{\partial y}\int_\tau \frac{\overline{\mathfrak{M}}_y}{r} \mathfrak{D}\tau - \frac{\partial}{\partial z}\int_\tau \frac{\overline{\mathfrak{M}}_z}{r} \mathfrak{D}\tau$$

ha t.i. τ jelenti a testrésztől és érintkezési rétegétől elfoglalt tért, amelynek a határán $\overline{\mathfrak{M}}$ (valamint $\bar{\varrho}$ is) mindenütt zérus. Az első sor harmadik kifejezése parciális redukcióval ered a másodikból, annak a számbavételével, hogy $\overline{\mathfrak{M}}$ a határon eltűnik. Ezen 4π-szeres potenciál negatív grádiensének első komponense az (x, y, z) helyen ez:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\int\frac{\bar{\varrho}}{r}\mathfrak{D}\tau=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_\tau\frac{\overline{\mathfrak{M}}_x}{r}\mathfrak{D}\tau+\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\int_\tau\frac{\overline{\mathfrak{M}}_y}{r}\mathfrak{D}\tau+\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}\int_\tau\frac{\overline{\mathfrak{M}}_z}{r}\mathfrak{D}\tau\equiv$$

$$\equiv\Delta\int_\tau\frac{\overline{\mathfrak{M}}_a}{r}\mathfrak{D}\tau+\frac{\partial}{\partial y}\int_\tau\left(\overline{\mathfrak{M}}_y\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}-\overline{\mathfrak{M}}_x\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\right)\mathfrak{D}\tau-\frac{\partial}{\partial z}\int_\tau\left(\overline{\mathfrak{M}}_x\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}-\overline{\mathfrak{M}}_z\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\right)\mathfrak{D}\tau$$

A második sorban az első tag a testrészben $=-4\pi\overline{\mathfrak{M}}_x$, a testrészen kivül $=0$. A második és harmadik tagban az integrál jel alatt $\frac{\partial}{\partial x}$ helyett $\left(-\frac{\partial}{\partial a}\right)$, stb. tévén, azután ismét parciális redukciót végezvén s újra számon tartva, hogy τ határán eltünik az $\overline{\mathfrak{M}}$ momentum, kapjuk, hogy az egyéni testrész mágnességétől származó potenciál negatív grádiensének első komponense így is írható:

$$(61)\quad \frac{\partial}{\partial y}\int_\tau\frac{\frac{\partial\overline{\mathfrak{M}}_y}{\partial a}-\frac{\partial\overline{\mathfrak{M}}_x}{\partial b}}{4\pi r}\mathfrak{D}\tau-\frac{\partial}{\partial z}\int_\tau\frac{\frac{\partial\overline{\mathfrak{M}}_x}{\partial c}-\frac{\partial\overline{\mathfrak{M}}_z}{\partial a}}{4\pi r}\mathfrak{D}\tau-\overline{\mathfrak{M}}_x$$

odaértve, hogy a testrészen kivül $\overline{\mathfrak{M}}=0$ teendő. Hasonló kifejezés illeti meg az egyéni testrész mágnességétől származó térerősség másik két komponensét.

A testrészen kivüli térben (ahol $\overline{\mathfrak{M}}=0$) olyan tehát a testrész saját teljes mágnességének a térerőssége, mintha $v\,\overline{\mathfrak{M}}$ rotációjával egyenlő elektromos áramlásoktól származnék, mert olyan (57) második része szerint, mintha

$$(62)\quad v\left(\frac{\partial\overline{\mathfrak{M}}_z}{\partial b}-\frac{\partial\overline{\mathfrak{M}}_y}{\partial c}\right);\ v\left(\frac{\partial\overline{\mathfrak{M}}_x}{\partial c}-\frac{\partial\overline{\mathfrak{M}}_z}{\partial a}\right);\ v\left(\frac{\partial\overline{\mathfrak{M}}_y}{\partial a}-\frac{\partial\overline{\mathfrak{M}}_x}{\partial b}\right)$$

komponensű elektromos áramlásoktól származnék. Ezt mágnesség helyettesítő elektromos áramlásnak nevezzük, meg látszatos elektromos áramlásnak is és ettől való megkülönböztetés kedvéért az (u, v, w) áramlást valóságosnak mondják.

Mindezekben soha se feledjük, hogy itt az $\overline{\mathfrak{M}}$ vektor csak a testrész belső pontjaiban jelenti az összes mágnesség momentumát; ellenben a testrész érintkezési rétegében nem jelenti az összes mágnességét, hanem csak az egyéni testrészhez tartozóét.

Ma valóban elektromos áramlásokkal értelmezzük a mágnességet, a mágneses testek elemi részeiben (62) szerint foglalt elektromos áramlásokkal, mint régebben már Ampêre gondolta.

Magnetosztatikai fogalmak és vonatkozásaik állandó elektromos áramlásban

142. Valamint a Ψ skaláris potenciált mágneses potenciálnak, azonképen az $\frac{1}{\nu}(\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H})$ vektorpotenciált áramlásos potenciálnak mondjuk. Ezt röviden $\hat{\mathfrak{N}}$ betűvel, az (u, v, w) áramlást $\mathfrak{I}$ betűvel jelöljük:

$$(67),(68)\quad (u, v, w) \equiv \mathfrak{I}\,, \quad \frac{1}{4\pi\nu}\int \frac{\mathfrak{I}}{r}\,\mathfrak{D}\tau \equiv \frac{1}{\nu}(\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}) \equiv \hat{\mathfrak{N}}$$

Alkalmazzuk még az

$$(69)\quad \frac{1}{4\pi\nu}\int \frac{\mathfrak{I} + \nu \operatorname{rot} \overline{\mathfrak{M}}}{r}\,\mathfrak{D}\tau \equiv \mathfrak{N}\,, \quad \frac{1}{4\pi\nu}\int \frac{\mathfrak{I} + \nu \operatorname{rot} \overline{\mathfrak{M}}^{(i)}}{r}\,\mathfrak{D}\tau \equiv \mathfrak{N}$$

jelölést is. Ezek értelmében (57) szerint

$$(70)\qquad \mathfrak{H} = -\operatorname{grad}\Psi + \operatorname{rot}\hat{\mathfrak{N}}$$

és (61) szerint, ha ezt az összes előforduló mágnességre vonatkoztatjuk (midőn aztán $-\operatorname{grad}\Psi$-nek az első komponense)

$$(71)\qquad \mathfrak{B} \equiv \mathfrak{H} + \overline{\mathfrak{M}} = \operatorname{rot}\mathfrak{N}$$

Nemkülönben (69) második definicióján könnyen igazolható, hogy

$$(72)\qquad \mathfrak{B}^{(i)} \equiv \mathfrak{H} + \mathfrak{M}^{(i)} = -\operatorname{grad}\hat{\Psi} + \operatorname{rot}\mathfrak{N}^{(i)}$$

A Ψ, illetőleg $\hat{\Psi}$ jelentménye (70)-ben, illetőleg (72)-ben magától értődőleg ez:

$$(73)\qquad \Psi = \int \frac{\bar{\varrho}}{r}\, D\tau\ , \quad \hat{\Psi} = \int \frac{\hat{\varrho}}{r}\, D\tau$$

143. Levezethetők mindezekből a mi eredeti definicióink, hogy t. i.

$$(70)'\qquad \operatorname{div}\mathfrak{H} = \bar{\varrho}\ , \quad v \operatorname{rot}\mathfrak{H} = \mathfrak{J} \equiv (u, v, w)$$

Levezethetők továbbá könnyen (71) és (72) alól:

$$(71)'\qquad \operatorname{div}\mathfrak{B} = 0\ , \quad v \operatorname{rot}\mathfrak{B} = \mathfrak{J} + v \operatorname{rot}\overline{\mathfrak{M}}\ ,$$

$$(72)'\qquad \operatorname{div}\mathfrak{B}^{(i)} = \hat{\varrho}\ , \quad v \operatorname{rot}\mathfrak{B}^{(i)} = \mathfrak{J} + v \operatorname{rot}\mathfrak{M}^{(i)}$$

144. Azzal a módositással, hogy most $\mathfrak{H}$ nem a Ψ potenciál negatív gradiense, hanem ennek és $\hat{\mathfrak{N}}$ rotációjának az összege (70), az utolsón

kivül a 118. cikk összes definiciói érvényesek most is és (41) kivételével a 119–123. cikksor összes egyenletei érvényesek.

Most azonban, tekintettel az áramlásokra, általánosabb energia fogalmat definiálunk. A 119. cikk (41) alatti egyenletei szerint puszta mágneses állapotok esetén

$$(74) \qquad \mathcal{E} = \frac{1}{2}\int_\infty \left(\mathfrak{H}\,\mathfrak{B}^{(i)}\right) \mathfrak{D}\tau$$

is kifejezi a 118. cikk 11, pontjában definiált $\frac{1}{2}\int \hat{\varrho}\,\Psi\,\mathfrak{D}\tau$ energiát. Abból következett ez, hogy puszta mágneses állapotok esetén $\mathfrak{H}$ a Ψ potenciál negatív gradiense. Jelenleg $\mathfrak{H}$ ezen gradiensnek és egy rotációnak az összege (70) és egyúttal $\mathfrak{B}^{(i)}$ is más, mert $\mathfrak{B}^{(i)}$ most is $= \mathfrak{H} + \mathfrak{M}^{(i)}$. Ennélfogva jelenleg (74) nem egyenlő a 118. cikk 11. pontjában definiált $\frac{1}{2}\int \hat{\varrho}\,\Psi\,\mathfrak{D}\tau$ energiával, hanem az áramlásoktól is függ. Írjuk be valóban (74)-be $\mathfrak{H}$-nak és $\mathfrak{B}^{(i)}$-nek (70) és (72) alatt lévő kifejezését. Azután vegyük figyelembe, hogy (parciális redukcióból folyólag):

$$\int_\infty \left(\operatorname{grad}\Psi \cdot \operatorname{rot}\mathcal{N}^{(i)}\right)\mathfrak{D}\tau = 0, \quad \int_\infty \left(\operatorname{grad}\hat{\Psi}\,\operatorname{rot}\hat{\mathcal{N}}\right)\mathfrak{D}\tau = 0$$

úgy azt kapjuk, hogy

$$(74)' \quad \mathcal{E} = \frac{1}{2}\int_\infty \operatorname{grad}\Psi \cdot \operatorname{grad}\hat{\Psi}\,\mathfrak{D}\tau + \frac{1}{2}\int_\infty \left(\operatorname{rot}\hat{\mathcal{N}} \cdot \operatorname{rot}\mathcal{N}^{(i)}\right)\mathfrak{D}\tau$$

Ezeken is végezzünk parciális redukciót, mégpedig olyant, hogy Ψ és $\mathcal{N}^{(i)}$ szabaduljon meg a deriválástól

Minthogy (72), illetőleg (70) alól, (72)', illetőleg (70)' szerint

$$-\operatorname{div}\operatorname{grad}\hat{\Psi} = \operatorname{div}\mathfrak{B}^{(i)} = \hat{\varrho}$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\hat{\mathfrak{A}} = \operatorname{rot}\mathfrak{H} = \frac{1}{v}\mathfrak{J}$$

odajutunk, hogy

$$(75) \qquad \mathcal{E} = \frac{1}{2}\int_\infty \hat{\varrho}\,\Psi\,\mathfrak{D}\tau + \frac{1}{2v}\int_\infty (\mathfrak{J}\mathfrak{A}^{(i)})\,\mathfrak{D}\tau$$

mert a fölületi integrálok eltünnek.

145. Állandó elektromos áramlás jelenlétében ezt nevezzük mágneses energiának. A (74) alatti kifejezése alakilag egyezik a puszta mágneses állapotok energiájával, de, hogy tartalom szerint különbözik attól, az nyilvánvaló, mert a puszta mágnességekre alkalmazva a (75) alatti kifejezés első tagját tartalmazza csak.

Ponderomótoros hatások tekintetében pedig épenséggel nem analogonja ezen energia a magnetosztatikai energiának s az elektrosztatikai energiának. Variálása nem vezet a tapasztalással egyező ponderomótoros hatáshoz. Kitűnik ez már abból, hogy, ha nincs számottévő mágneseződés, akkor (75) első tagja (amelyben most Ψ helyett $\hat{\Psi}$ írható), csak a $\hat{\varrho}$ sűrűségektől, s második tagja, (amelyben most $\mathfrak{A}^{(i)}$ helyett $\hat{\mathfrak{A}}$ írható) csak az $\mathfrak{J}$ áramlásoktól függ, minélfogva (75) variációja nem szolgáltat oly tömegmozgató hatásokat, amelyeket az áramlásoktól a permánens mágnességek révén s a permánens mágnességektől az áramlások révén visel a matéria. Hogy ennek ellenére is az állandó elektromos áramlás és mágnesség energiájának nevezzük (75) alatti kifejezésünket, ennek az oka az, hogy az áramos és mágneses állapot mekanikai munkájának a $-\mathcal{E}$ variációjából hiányzó része, épen a tapasztalással egyezőleg hőbeli és kemiai változásokkal van szoros összefüggésben.

Elektromos áramlások mint elektromosságok áramlásai

146. Minthogy az (u, v, w) áramlás folytonos egyértékű függvénye a helynek, úgy amely pontban nem zérus, abban az iránykoszinuszai is folytonos egyértékű függvényei a helynek. Tekintsünk oly tért, amelyben sehol sem zérus az (u, v, w) áramlás, még a határán sem. Az ily térben mindenütt egyetlen határozott iránya van az (u, v, w) áramlásnak és mindenütt folytonosan változik iránya a hellyel. Az ily térben tehát az (u, v, w) áramlás irányával meghatározott vonalak egymást sehol sem metsző és sehol el nem ágazó folytonos sokaságot alkotnak. Áramlási vonalaknak nevezzük azokat. Az oly csőalakú tért pedig, amelyet oldalaslag áram-

lási vonalak határolnak, áramlási csőnek nevezzük.

147. Gondoljunk egy darab végtelen vékony áramlási csövet és válasszuk meg mindenütt ezen csőnek az egyik irányulását (mindenütt ugyanazon értelem szerint következőt) a cső iránya gyanánt. Bárhol és bármiként fekvő metszete legyen $\mathfrak{D}\sigma$ a csőnek, azt a normálisát tekintsük, amely a cső lokális irányával hegyes szöget alkot. Jelöljék $\mathfrak{D}\sigma$ ezen normálisának az iránykoszinuszait α, β, γ. A $\mathfrak{D}\sigma$ helyű áramlásnak $\mathfrak{D}\sigma$ normálisára tartozó értéke jelöléseink szerint $= \alpha u + \beta v + \gamma w$. Ennek és $\mathfrak{D}\sigma$-nak a szorzata állandó a csőben, nem függ $\mathfrak{D}\sigma$-nak sem a helyétől sem a fekvésétől. Ugyanis a cső két tetszésszerinti metszetétől és az oldalfölületétől határolt tért τ-val és ennek a fölületét σ-val jelölve,

$$\int_\tau \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\mathfrak{D}\tau = -\int_\sigma (Au + Bv + \Gamma w)\,\mathfrak{D}\sigma$$

ha t.i. $\mathfrak{D}\sigma$ befelé mutató normálisának iránykoszinuszai A, B, Γ. Azonban a térfogatilag integrálandó függvény mindenütt eltűnik (54). Továbbá a fölületileg integrálandó függvény a cső oldalfölületén mindenütt eltűnik, mert a cső oldalfölületén az áramlás mindenütt merőleges a normálisra. Ha tehát a cső egyik és másik metszetéhez tartozó értékeket 1 illetőleg 2 index jelöli:

$$(Au + Bv + \Gamma w)_1\,\mathfrak{D}\sigma_1 + (Au + Bv + \Gamma w)_2\,\mathfrak{D}\sigma_2 = 0$$

Ha pedig $\mathfrak{D}\sigma_1$ és $\mathfrak{D}\sigma_2$ fönt megválasztott normálisának $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, illetőleg $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ az iránykoszinuszai, akkor

$$(\alpha u+\beta v+\gamma w)_2 \mathfrak{D}\sigma_2 = (\alpha u+\beta v+\gamma w)_1 \mathfrak{D}\sigma_1$$

Ezzel állításunk igazolva van: ha (u, v, w)-nek a $\mathfrak{D}\sigma$ metszet normálisára tartozó komponense i_n, akkor bárhol és bármily fekvésben lévő keresztmetszet is $\mathfrak{D}\sigma$ a csőben,

$$i_n \mathfrak{D}\sigma = \text{const. a csőben.}$$

Az $i_n \mathfrak{D}\sigma$ skaláris szorzatot áramintenzitásnak, a csőben lévő $\mathfrak{I}$ elektromos áramlások áramintenzitásának mondjuk. Pozitív vagy negatív ez aszerint, hogy a cső megválasztott iránya egyezik-e vagy ellenkezik az áramlás irányával, mert az n normálist úgy szabtuk meg, hogy a cső irányulásával hegyes szöget alkosson. Különösen pedig, ha (u, v, w) nagysága i és, ha $\mathfrak{D}\sigma$ merőleges metszet s mint ilyent $\mathfrak{D}\sigma_0$ jelöli, akkor

$$i\,\mathfrak{D}\sigma_0 \equiv |i_n \mathfrak{D}\sigma| = \text{const.}$$

148. Minthogy $i\,\mathfrak{D}\sigma_0$ mindenütt ugyanakkora a végtelen vékony csőben, úgy az áramlás a cső mentén nem konvergálhat zérusba, mert ellenkező esetben (azaz i-nek zérusba konvergálása esetén) a $\mathfrak{D}\sigma_0$ merőleges metszetnek a cső mentén alacsonyabb rendű végtelen kicsinnyé kellene nőlnie, ami pedig csak úgy volna lehetséges, hogy véges vastagságú áramlási cső végtelen vastaggá váljék,

ami ellentmond azon föltevésünknek, hogy az áramlások csak véges terekben léteznek. Csak végtelen vékony áramlási csövek nyalábján keresztül válhat zérussá az áramlás. Ebből folyólag minden rendű áramlási cső vagy kétszeresen összefüggő cső, vagy egy kétszeresen összefüggő áramlási csőnek a része, vagy áramlási csövek többszörösen összefüggő rendszerének egy része, mert minden áramlási csődarabnak szükségképen van mindkét végén folytatása, egyszerű, vagy ágazatos összefüggésben a teljes áramlási rendszerrel s az elágazások helyein szükségképen végtelen kis intenzitású végtelen vékony áramlási csövek húzódnak el egymástól, úgy hogy az elágazások helyeinél már zérus az áramlás, mert különben e helyeken többértékűvé válnék.

Az áramlásnak, mint a hely függvényének a folytonosságánál fogva az áramlási terek határán mindenütt zérus az áramlás, tehát ezek a terek elágazók maguk is lehetnek.

149. Az elektromos áramlások mágneses hatását mozgó elektromosságoknak tulajdonítjuk, úgy, hogy az (u, v, w) vektorok székhelyét mozgásban lévő elektromosságok székhelyének gondoljuk. Oly módon képzeljük pedig ezt, hogy az áramlási vonalak (146. cikk) mentén mozognak elektromosságok az „állandó elektromos áramlások" esetén, pozitív és negatív elektromosság ellenkező irányban, vagy csakis

negatív elektromosság az áramlási vonalak valamelyik irányulása szerint, amennyiben tapasztalásaink rendén vélhető, hogy a pozitív elektromosság általában szorosabb összefüggésben van a materiával, mint a negatív, minélfogva a mozoghatósága korlátoltabb s oly kis mérvű is lehet, hogy nyugvó materiában mozdulatlannak tekinthető. Az észlelhető jelenségek magyarázatára közömbös, hogy mindkétféle elektromosságot mozgónak gondoljuk-e, vagy csak az egyiket. Egyszerűség kedvéért csakis a negatív elektromosságot tekintsük mozgónak az állandó elektromos áramlás rendén.

Abban a föltevésben, hogy vagy nincsenek szabad elektromos töltések anyagi rendszerünkben, vagy ha vannak is, változatlanok mindenütt, föl kell tennünk, hogy tetszés szerint gondolt végtelen vékony áramlási cső keresztmetszetén egyidejűleg egyenlő elektromos mennyiség és egyező irányulás szerint megy át; s már most azt, hogy egy végtelen vékony áramlási csőből mely mágneses térerősség származik, a cső vezérvonalának a hosszán, az alakján és helyzetén kivül abban keressük, hogy egyenlő időelemekben mekkora elektromos kvantum és melyik irányulás szerint megy át a cső keresztmetszetein; mivel pedig a mágneses térerősséget most állandónak tételezzük föl, azt is föl kell tennünk, hogy az idő egyenlő elemi részeiben egyenlő elektromos kvantum megy át a csövön és hogy mindig ugyanazon irányulás szerint megy át. Jelölje $-d\,\mathfrak{De}$ azon (negatív) kvantumot, amely dt időelemben megy át a cső keresztmetszetein. Minthogy $d\,\mathfrak{De} : dt$ a cső mentén hely és idő szerint állandó pozitív skaláris és a fentebb definiált $i\mathfrak{D}\sigma_0$ intenzitás szintén: az „állandó elektromos áramlás" felől alkotott képünket akkép bővítjük, hogy

$$\frac{d\,\mathfrak{De}}{dt} = i\,\mathfrak{D}\sigma_0\ , \quad \text{azaz} \quad d\,\mathfrak{De} = i\,\mathfrak{D}\sigma_0\,dt$$

tesszük és egyben az elektromosságnak a csőben mozgását az (u, v, w) vektorral mindig ellenkező irányúnak gondoljuk amiatt, hogy negatív elektromosság az. Egyenletünk nem ellenkezhetik a tapasztalással, mert bal és jobboldalának az arányos volta matematikailag lehetséges és (u, v, w) definiciójába határozatlan (γ) arányossági faktort is vettünk föl (54) alatt.

150. Egyenletünkből az áramlás $(\mathfrak{I})$ jellege gyanánt a 26. cikk alapján $M^{1/2} L^{-1/2} T^{-2}$ következik. Minthogy továbbá a mágneses kvantum jellege egyezik magnetosztatikai definiciónk szerint az elektromos kvantum jellegével és $(70)'$ első egyenlete szerint $\mathfrak{H}$ koordinátaderiváltjai oly jellegűek, mint $\bar{\varrho}$, ennélfogva $(70)'$ második egyenlete szerint $\mathfrak{I} : \gamma$ olyan jellegű, mint $\bar{\varrho}$, tehát térfogattal szorozva olyan jellegű, mint az elektromos kvantumok, azaz térfogattal szorozva $M^{1/2} L^{3/2} T^{-1}$ jellegű, tehát maga $(\mathfrak{I} : \gamma)$ pedig $M^{1/2} L^{-3/2} T^{-1}$ jellegű. E jellegnek s az

előbb megállapitottnak összehasonlításából γ számára LT^{-1}, azaz sebesség jellege következik.

151. Ha a dt időelemben a $(\mathfrak{D}\sigma_0)$ merőleges metszetén átmozgó $-d\mathfrak{D}e$ elektromos kvantum sürüsége $-\varrho$ és ds nagyságú úton tolódik el, ez a kvantum, a csőben dt idő alatt, akkor $d\mathfrak{D}e = \varrho\,\mathfrak{D}\sigma_0\,ds$, tehát $i = \varrho\dot{s}$, ahol $\dot{s}$ a kvantum sebességének a nagysága a $(\mathfrak{D}\sigma_0)$ helyen; ezen kvantum sebességének az iránya pedig meghatározásunk szerint épen ellentétes (u, v, w) irányával. Mármost $\mathfrak{w}$-val jelölvén a sebességét, hipotéziseink összesége a

$$\varrho\,\mathfrak{w} = -(u, v, w)$$

egyenletbe van foglalva, mert ha a $\varrho\dot{s} = i$ egyenletet rendre megszorozzuk $-(u, v, w)$ iránykoszinuszaival, a jobboldalon a $-u$, stb. komponenseket, a baloldalon pedig ϱ-nak és $\mathfrak{w}$ komponenseinek a szorzatát kapjuk.

152. A $\mathfrak{D}\sigma$ fölületelem valamelyik oldala mint pozitív oldal felé ezen fölületelem normálisának irányát n betűvel jelölve, $i_n\mathfrak{D}\sigma\,dt$ vagy a maga jelével, vagy ellenkező jellel azon $-i\,\mathfrak{D}\sigma_0\,dt = -\,d\mathfrak{D}e$ negatív elektromos mennyiség, amely dt időelemben a $\mathfrak{D}\sigma$ fölületelemen átmozog. A maga jelével, ha i_n negatív, s az ellenkezővel, ha i_n pozitív. Ha már most σ egy kétoldalú analitikus fölületdarab, amelynek valamelyik oldala mint pozitív oldal felé n jelenti általánosan a normális irányt, akkor

$$dt\int_\sigma i_n\, \mathfrak{D}\sigma \equiv de$$

nyilvánképen a σ fölületdarab pozitiv oldaláról annak a negativ oldala felé és negativ oldaláról a pozitiv oldala felé a σ fölületdarabon dt idöelemben átmozgó elektromos mennyiségek különbsége. Ezt a mágneses térerösség vonalas integráljával is ki lehet fejezni. Ha ugyanis az n normális iránykoszinuszai α, β, γ, akkor

$$i_n = (u\alpha + v\beta + w\gamma) = \gamma\left\{\left(\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}\right)\alpha + \cdot + \cdot\right\}$$

A σ fölület kerületét S betüvel jelölve, Stockes redukciója szerint

$$de = \gamma\, dt \int_S (L\,\mathfrak{D}x + M\,\mathfrak{D}y + N\,\mathfrak{D}z)$$

ahol a $(\mathfrak{D}x, \mathfrak{D}y, \mathfrak{D}z)$ vektor oly eleme a S kerületnek mindenütt, hogy σ-nak az ö mellette lévö normálisaira nézve jobbra fordulással származik.

Tömegmozgató hatások.

153. A magnetosztatikai ponderomótoros hatásnak a 126. cikkben $(47)_1$, $(47)_2$ alatt irt tenszoros kifejezéseiben $(L, M, N) \equiv \mathfrak{H}$ most a (70) alatt gondolt vektort jelentse és $(U, V, W) \equiv \mathfrak{B}^{(i)}$ a (70) alatt gondolt $\mathfrak{H}$ szerint jelentse a $\mathfrak{H} + \mathfrak{M}^{(i)}$ vektort. Kérdezzük: beválnak-e azon Maxwell-féle kifejezé-

sek most is, tehát beválnak-e mint állandó elektromos áramlások és változatlan mágnességek ponderomótoros hatásainak a kifejezései (kizárásával a szuszceptibilis remanens mágnességű testeknek) A tapasztalás mellettük szól. Átvesszük tehát azokat, u. m. a tömegmozgató erő sűrűségének a komponensei gyanánt

$$(76) \qquad \operatorname{div}(\mathcal{L}_x, \mathcal{L}_y, \mathcal{L}_z),\ \operatorname{div}(\mathcal{M}_x, \mathcal{M}_y, \mathcal{M}_z),\ \operatorname{div}(\mathcal{N}_x, \mathcal{N}_y, \mathcal{N}_z)$$

amelyekben

$$(77) \qquad 2\mathcal{L}_x = \mathcal{L}\mathcal{U} - \mathcal{M}\mathcal{V} - \mathcal{N}\mathcal{W},\ 2\mathcal{M}_z = 2\mathcal{N}_y = \mathcal{M}\mathcal{W} + \mathcal{N}\mathcal{V}, \text{ stb.}$$

De most is izotrop testekre szorítkozzunk, mihez képest

$$\mathcal{U} = \mu\mathcal{L}\,, \quad \mathcal{V} = \mu\mathcal{M}\,, \quad \mathcal{W} = \mu\mathcal{N}$$

Behelyettesítve ezeket (77)-be és azután (77) alól $\mathcal{L}_x$, $\mathcal{L}_y$, $\mathcal{L}_z$, stb. kifejezését (76)-ba, alkalmas rendezés után tekintettel (70)' második egyenletére és (72)' első egyenletére (ahol $\mathfrak{B}^{(i)}$ komponensei $\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}$, azaz $\mu\mathcal{L}$, $\mu\mathcal{M}$, $\mu\mathcal{N}$), azt kapjuk, hogy az izotrop test (x, y, z) pontjában:

$$(78) \quad \left\{ \begin{aligned} \operatorname{div}(\mathcal{L}_x, \mathcal{L}_y, \mathcal{L}_z) &= \hat{\rho}\mathcal{L} - \frac{\mathcal{L}^2+\mathcal{M}^2+\mathcal{N}^2}{2}\frac{\partial\mu}{\partial x} + \frac{\mu}{v}(\mathcal{N}v - \mathcal{M}w) \\ \operatorname{div}(\mathcal{M}_x, \mathcal{M}_y, \mathcal{M}_z) &= \hat{\rho}\mathcal{M} - \frac{\mathcal{L}^2+\mathcal{M}^2+\mathcal{N}^2}{2}\frac{\partial\mu}{\partial y} + \frac{\mu}{v}(\mathcal{L}w - \mathcal{N}u) \\ \operatorname{div}(\mathcal{N}_x, \mathcal{N}_y, \mathcal{N}_z) &= \hat{\rho}\mathcal{N} - \frac{\mathcal{L}^2+\mathcal{M}^2+\mathcal{N}^2}{2}\frac{\partial\mu}{\partial z} + \frac{\mu}{v}(\mathcal{M}u - \mathcal{L}v) \end{aligned} \right.$$

Ez a térfogategységre számított tömegmozgató hatás három komponense. Vektorjelvényekben írva:

$$(78)' \qquad \hat{\varrho}\mathfrak{H} - \frac{1}{2}\mathfrak{H}^2 \operatorname{grad}\mu + \frac{\mu}{V}[\mathfrak{J}\mathfrak{H}]$$

154. A $\mathfrak{D}\tau$ térelemmel szorozva három oly mozgató hatás eredője ez, amelyek egyikét az ő permanens mágnességénél fogva, egyikét az ő permeabilitásának egyenetlenségénél fogva, egyikét a benne foglalt elektromos áramlásnál fogva visel a $\mathfrak{D}\tau$ térelem materiális tartalma a mágnességtől és az állandó elektromos áramlástól. Rendre:

$$(78)'' \quad \begin{cases} (\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N})\hat{\varrho}\,\mathfrak{D}\tau \equiv \mathfrak{H}\hat{\varrho}\,\mathfrak{D}\tau, \\ -\dfrac{\mathfrak{L}^2+\mathfrak{M}^2+\mathfrak{N}^2}{2}\operatorname{grad}\mu\,\mathfrak{D}\tau \equiv -\dfrac{\mathfrak{H}^2}{2}\operatorname{grad}\mu\,\mathfrak{D}\tau, \\ \dfrac{\mu}{V}(\mathfrak{N}v-\mathfrak{M}w;\ \mathfrak{L}w-\mathfrak{N}u;\ \mathfrak{M}u-\mathfrak{L}v)\,\mathfrak{D}\tau \equiv \dfrac{\mu}{V}[\mathfrak{J}\mathfrak{H}]\,\mathfrak{D}\tau \end{cases}$$

Az első és harmadik mint a mágneses térerősség lineáris függvénye két-két még egyszerűbb hatásra bontható, amelyek egyike az összes mágnességtől, másika az összes áramlástól származik, t. i. a $\mathfrak{H}$ (57) alatti (illetőleg (57)$_0$ alatti) kifejezésének értelmében. Mégpedig e fölbontás szerint (67) és (68) alkalmazásával

$$(79) \quad \begin{cases} \hat{\varrho}\,\mathfrak{H}\,\mathfrak{D}\tau = -\hat{\varrho}\operatorname{grad}\Psi\,\mathfrak{D}\tau + \hat{\varrho}\operatorname{rot}\hat{\mathfrak{N}}\,\mathfrak{D}\tau, \\ \dfrac{\mu}{V}[\mathfrak{J}\mathfrak{H}] = -\dfrac{\mu}{V}[\mathfrak{J}\operatorname{grad}\Psi]\mathfrak{D}\tau + \dfrac{\mu}{V}[\mathfrak{J}\operatorname{rot}\hat{\mathfrak{N}}] \end{cases}$$

Oly testben amelyben μ deriváltjai nem tesznek számot – és ez gyakori eset, a (78)'' alatt írt összetevők második elmarad; tehát a most fölírt kettőnek az eredője teszi a tömegmozgató hatást.

155. A (79) két jobbján lévő, összesen négy összetevő sorában az első, u. m.

$$(\mathcal{A}) \qquad -\hat{\varrho}\, \mathrm{grad}\, \Psi\, \mathfrak{D}\tau$$

a mágnességek ponderomótoros hatása a térelem permanens mágnességének a révén. A második, u. m.

$$(\mathcal{B}) \qquad \frac{\hat{\varrho}}{V}\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y}-\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial z},\ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z}-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x},\ \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x}-\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y}\right)\mathfrak{D}\tau$$

az áramlások ponderomótoros hatása a térelem permanens mágnességének a révén. A harmadik, u. m.

$$(\mathcal{C}) \qquad \frac{\mu}{V}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}w-\frac{\partial \Psi}{\partial z}v,\ \frac{\partial \Psi}{\partial z}u-\frac{\partial \Psi}{\partial x}w,\ \frac{\partial \Psi}{\partial x}v-\frac{\partial \Psi}{\partial y}u\right)\mathfrak{D}\tau$$

a mágnességek ponderomótoros hatása a térelem elektromos áramlásának a révén. A negyediknek az első komponense, u. m., kissé más alakban írva ez:

$$(\mathcal{D}) \qquad \frac{\mu}{V^2}\left\{\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}u+\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x}v+\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}w\right)-\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}u+\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y}v+\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z}w\right)\right\}\mathfrak{D}\tau$$

amely mintára a másik két komponens egyenesen fölírható. Ez az elektromos áramlások ponderomótoros hatása a térelem elektromos áramlásának a révén.

Az $(\mathcal{A})$ alatt írt kifejezés közönséges mágneses hatást határoz meg. A $(\mathcal{B})$, $(\mathcal{C})$, $(\mathcal{D})$ alattiak tárgyalásunkban új erők kifejezései. A legközelebbi három cikk rendre ezen három erő közelebbi vizsgálatával foglalkozik.

Állandó elektromos áramlás tömeg-mozgató hatása permanens mágnesség révén.

156. A (B) alatt írt kifejezés azt a tömegmozgató erőt jelenti, amelynek a hatását az (x, y, z) helyen lévő $D\tau$ térelem materiális tartalma a maga $\hat{\varrho}\, D\tau$ permanens mágneses kvantuma révén az állandó elektromos áramlásoktól viseli.

Ha egy tetszésszerinti más térelem $D\tau'$ és az ő koordinátái x', y', z', a benne lévő áramlás pedig (u', v', w'), úgy a (B) erőnek az első komponense a 138. cikk (56) definiciója szerint részletesen írva =

$$\frac{\hat{\varrho}\, D\tau}{4\pi V}\left(\frac{\partial}{\partial y}\int \frac{w'}{r} D\tau' - \frac{\partial}{\partial z}\int \frac{v'}{r} D\tau'\right) =$$

$$= \frac{\hat{\varrho}\, D\tau}{4\pi V}\int\left(w'\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} - v'\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right)D\tau' = \frac{\hat{\varrho}\, D\tau}{4\pi V}\int \frac{1}{r^2}\left(v'\frac{z-z'}{r} - w'\frac{y-y'}{r}\right)D\tau'$$

ahol r természetesen a $D\tau$ és $D\tau'$ térelem távolsága és az integráció az áramlások egész terére kiterjesztendő.

157. Jelölje az (u', v', w') áramlás nagyságát i' és jelöljék az iránykoszinuszait: i'_1, i'_2, i'_3. A $D\tau'$ térelemből a $D\tau$ térelembe mutató irány $(D\tau' \rightarrow D\tau)$ koszinuszai r_1, r_2, r_3 legyenek. Akkor:

$$(80)\quad \begin{cases} u' = i' i'_1, \quad v' = i' i'_2, \quad w' = i' i'_3, \\ \dfrac{x-x'}{r} = r_1, \quad \dfrac{y-y'}{r} = r_2, \quad \dfrac{z-z'}{r} = r_3. \end{cases}$$

E jelölések értelmében a $\hat{\varrho}\, D\tau$ mágneses kvantum révén az állandó elektromos áramlások összeségének tömegmozgató hatása ez:

$$(81)\qquad \frac{\hat{\varrho}\,\mathfrak{D}\tau}{4\pi\nu}\left(\int\frac{i_2' r_3 - i_3' r_2}{r^2}\,i'\mathfrak{D}\tau_1';\ \int\frac{i_3' r_1 - i_1' r_3}{r^2}\,i'\mathfrak{D}\tau_1';\ \int\frac{i_1' r_2 - i_2' r_1}{r^2}\,i'\mathfrak{D}\right.$$

az integrációknak az áramlások egész terére való kiterjesztésével.

158. Nyilvánképsen olyan ez a tömegmozgató hatás, mintha a $\mathfrak{D}\tau'$ térelemben lévő áramlástól a $\mathfrak{D}\tau$ térelem materiális tartalmára az ő permánens mágnessége révén:

$$(82)\quad \left(\frac{i_2' r_3 - i_3' r_2}{r^2},\ \frac{i_3' r_1 - i_1' r_3}{r^2},\ \frac{i_1' r_2 - i_2' r_1}{r^2}\right)\frac{i'\hat{\varrho}}{4\pi\nu}\,\mathfrak{D}\tau'\,\mathfrak{D}\tau$$

tömegmozgató hatás háramlanék. De végtelen sokféle más elemi hatást is definiálhatunk olyant, amely kiadja az állandó áramlásoknak egy testelemen művelt téljes mozgató hatását, annak a permánens mágnessége révén.

Ha ugyanis $(\varphi_1', \varphi_2', \varphi_3')$ mindenütt egyenletesen derivált egyértékű függvénye a helynek, akkor a (81) alatt lévő integrálok jele alatt az integrálandó függvényhez rendre hozzáadva az i' irányú deriválisból származó

$$\left(\frac{\partial\varphi_1'}{\partial i'}, \frac{\partial\varphi_2'}{\partial i'}, \frac{\partial\varphi_3'}{\partial i'}\right)i' \equiv \left(\frac{\partial\varphi_1'}{\partial x'}u' + \frac{\partial\varphi_1'}{\partial y'}v' + \frac{\partial\varphi_1'}{\partial z'}w';\right.$$

$$\left.\frac{\partial\varphi_2'}{\partial x'}u' + \cdot + \cdot;\ \frac{\partial\varphi_3'}{\partial x'}u' + \cdot + \cdot\right)$$

vektor komponenseit, az integrálok értékét nem változtatjuk meg, söt még akkor sem, ha φ' deriváltjai a harmadiknál alacsonyabb rendben egyes pontokban végtelenné válnak, mert ezeknek a becsatolt kifejezéseknek az áramlás terére szóló integrálja zérus. Kitűnik ez, ha parciális integrációt végezünk e becsatolt tagokon, mihez képest:

$$\int\left(\frac{\partial\varphi'_k}{\partial x'}u'+\frac{\partial\varphi'_k}{\partial y'}v'+\frac{\partial\varphi'_k}{\partial z'}w'\right)\mathfrak{D}\tau'=-\int\varphi'_k\,\mathrm{div}(u',v',w')\,\mathfrak{D}\tau+$$

$$k=(1,\ 2,\ 3)\qquad\qquad -\int\varphi'_k\,i'_n\,\mathfrak{D}\sigma'$$

ahol i'_n az áramlásnak a $\mathfrak{D}\sigma'$ fölületelem befelé mutató normálisán képezett értéke. De: $\mathrm{div}\,(u',v',w')=0$, mindenütt, mint tudjuk, és az áramlások terének a határán már maga az áramlás is zérus.

Egy testelemben foglalt áramlás tömegmozgató hatása permanens mágnesség révén nemcsak azon elemi vektor gyanánt fogható föl tehát, amelyet (82) alatt egyenesen kiírtunk (81) alól az integrálokból, de bármely fönt jellemzett φ' függvények mellett ilyenül tekinthető a:

$$\left(\frac{i'_2 r_3-i'_3 r_2}{r^2}+\frac{\partial\varphi'_1}{\partial i'},\ \frac{i'_3 r_1-i'_1 r_3}{r^2}+\frac{\partial\varphi'_2}{\partial i'},\ \frac{i'_1 r_2-i'_2 r_1}{r^2}+\frac{\partial\varphi'_3}{\partial i'}\right)\frac{i'\varrho}{4\pi\gamma}\mathfrak{D}\tau'\mathfrak{D}\tau$$

vektor is. Szükséges követelés azonban, hogy olyan legyen a φ' függvényekkel meghatározott járulékos elemi hatás, hogy független legyen a mi földhöz rótt koordinátarendszerünk választásától úgy, hogy a két térelemnek és az i' iránynak koordinátarendszerünkbe tartozó határozóitól a

$$\frac{\partial}{\partial i'}(\varphi_1', \varphi_2', \varphi_3')$$

vektor csak az i' iránynak és a $\mathfrak{D}\tau'$ térelemnek a $\mathfrak{D}\tau$ térelemhez viszonyított helyzete által függjön.

159. Közönségesen magát a (82) alatti elemi vektort használják az állandó elektromos áramlásnak a permánens mágnesség révén való elemi tömegmozgató hatása gyanánt.

Ha az r távolsági iránynak ($\mathfrak{D}\tau' \rightarrow \mathfrak{D}\tau$) iránynak és az i' iránynak a szöge Θ', a tengelyük iránykoszinuszai pedig α', β', γ' (tengely, amely körül az i' irány a Θ' szögön fordítható az r irányba,) akkor, a vektortan útmutatása szerint

$$i_2' r_3 - i_3' r_2 = \alpha' \sin \Theta'$$
$$i_3' r_1 - i_1' r_3 = \beta' \sin \Theta'$$
$$i_1' r_2 - i_2' r_1 = \gamma' \sin \Theta'$$

és a (82) alatt kiválasztott elemi hatás így is írható:

$$(\alpha', \beta', \gamma') \frac{i' \sin \Theta' \cdot \hat{\varrho}}{4\pi\nu r^2} \mathfrak{D}\tau' \mathfrak{D}\tau$$

Tehát ha $\hat{\varrho}$ pozitiv, akkor ezen hatás iránya $(\alpha', \beta', \gamma')$, ha $\hat{\varrho}$ negativ, akkor az ellenkező (Ampère szabálya); nagysága pedig ennek az elemi hatásnak =

$$\frac{i' \sin \Theta' \cdot |\hat{\varrho}|}{4\pi\nu r^2} \mathfrak{D}\tau' \mathfrak{D}\tau$$

(Biot és Savart szabálya).

Mágnesség tömegmozgató hatása állandó elektromos áramlás révén.

160. A 155. cikkben a (C) alatt irt kifejezés azt a tömegmozgató erőt jelenti, amelynek a hatását az (x, y, z) helyen lévő $D\tau$ térelem materiális tartalma a maga (u, v, w) áramlása révén a mágnességektől viseli. Ha egy tetszészerinti más térelem $D\tau'$ és az ő koordinátái (x', y', z'), a benne lévő szabad mágneses sürüség pedig $\bar{\rho}'$, akkor a (C) erőnek az első komponense részletesen irva =

$$\frac{\mu D\tau}{4\pi\gamma}\left(w\frac{\partial}{\partial y}\int\frac{\bar{\rho}'}{r}D\tau' - v\frac{\partial}{\partial z}\int\frac{\bar{\rho}'}{r}D\tau'\right) = \frac{\mu D\tau}{4\pi\gamma}\int\left(w\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y} - v\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right)\bar{\rho}'D\tau'$$

$$= \frac{\mu D\tau}{4\pi\gamma}\int\frac{\bar{\rho}'}{r^2}\left(v\frac{z-z'}{r} - w\frac{y-y'}{r}\right)D\tau'$$

Jelölje (u, v, w) nagyságát i és iránykoszinuszait i_1, i_2, i_3; és jelöljék ismét r_1, r_2, r_3 a $D\tau' \rightarrow D\tau$ iránynak a koszinuszait, úgyhogy

$$(83)\quad \begin{cases} u \equiv i\,i_1\;;\quad v \equiv i\,i_2\;;\quad w \equiv i\,i_3 \\[2ex] \dfrac{x-x'}{r} \equiv r_1\;;\quad \dfrac{y-y'}{r} \equiv r_2\;;\quad \dfrac{z-z'}{r} \equiv r_3 \end{cases}$$

E jelölések értelmében az (u, v, w) áramlás révén a $D\tau$ térelem materiális tartalmán a mágnességek tömegmozgató hatása ez :

$$(84)\quad \frac{\mu i D\tau}{4\pi\gamma}\left(\int\frac{i_2r_3 - i_3r_2}{r^2}\bar{\rho}'D\tau'\;;\;\int\frac{i_3r_1 - i_1r_3}{r^2}\bar{\rho}'D\tau'\;;\;\int\frac{i_1r_2 - i_2r_1}{r^2}\bar{\rho}'D\tau'\right)$$

az integrációknak a mágnességek egész terére való kiterjesztésével.

161. Nyilvánképen olyan ez a tömegmozgató hatás, mintha a $D\tau'$ térelemben lévő szabad mágnességtől a $D\tau$ térelem materiális tartalmára az ő állandó áramlása révén

$$(85)\quad \left(\frac{i_2 r_3 - i_3 r_2}{r^2},\ \frac{i_3 r_1 - i_1 r_3}{r^2},\ \frac{i_1 r_2 - i_2 r_1}{r^2}\right) \frac{\mu i \bar{\varrho}'}{4\pi\gamma} D\tau D\tau'$$

tömegmozgató hatás háramlanék.

162. Ahol μ deriváltjai nem tesznek számot, ott

$$\mu\bar{\varrho}' = \hat{\varrho}'.$$

Ha tehát $D\tau$ környezetében μ egyenletesnek számíthat, akkor $D\tau$ materiális tartalmán olyan az elemi hatás (a 158. cikk (82) kifejezése szerint), mintha a $D\tau$ térelemben $\hat{\varrho}'$ permánens mágneses sűrűség, a $D\tau'$ térelemben pedig (u, v, w) állandó áramlás volna, fordítva, mint ahogy tényleg vannak. Vagyis ez az elemi hatás a 159. cikkben tárgyaltnak egyenletes permeabilitás határai közt épen a megfordítottja úgy, hogy a (82) és (85) egyenletes permeabilitás terében oly elemi hatások, amelyekre illik Newton reakció törvénye (Ampère, Biot és Savart): amely térben a mágneses permeabilitás egyenletes, azon térben mágnességeknek az áramlások révén és viszont, összevéve nincs toló hatása (forgató azonban általában van).

Állandó elektromos áramlás tömegmozgató hatása állandó elektromos áramlás révén.

163. A 155. cikkben a ($\mathcal{D}$) alatti kifejezés azon tömegmozgató erő első komponensét jelenti, amelynek a hatását az (x, y, z) helyen lévő $\mathcal{D}\tau$ térelem materiális tartalma a maga (u, v, w) áramlása révén az állandó áramlásoktól visel. Ha egy tetszéses más térelem $\mathcal{D}\tau'$ és az ő koordinátái (x', y', z') a benne lévő áramlás pedig (u', v', w'), akkor a ($\mathcal{D}$) alatt kiírt komponens F, G, H definiciójának (138. cikk) tekintetbevételével =

$$= \frac{\mu}{4\pi V^2}\mathcal{D}\tau\Big[\Big(u\frac{\partial}{\partial x}\int\frac{u'}{r}\mathcal{D}\tau' + v\frac{\partial}{\partial x}\int\frac{v'}{r}\mathcal{D}\tau' + w\frac{\partial}{\partial x}\int\frac{w'}{r}\mathcal{D}\tau'\Big) +$$

$$-\Big(u\frac{\partial}{\partial x}\int\frac{u'}{r}\mathcal{D}\tau' + v\frac{\partial}{\partial y}\int\frac{u'}{r}\mathcal{D}\tau' + w\frac{\partial}{\partial z}\int\frac{u'}{r}\mathcal{D}\tau'\Big)\Big] =$$

$$= \frac{\mu\mathcal{D}\tau}{4\pi V^2}\int\Big[(uu'+vv'+ww')\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x} - \Big(u\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x} + v\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y} + w\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\Big)u'\Big]\mathcal{D}\tau'$$

$$= \frac{\mu\mathcal{D}\tau}{4\pi V^2}\int\Big[\Big(u\frac{x-x'}{r} + v\frac{y-y'}{r} + w\frac{z-z'}{r}\Big)\frac{u'}{r^2} - \frac{uu'+vv'+ww'}{r^2}\cdot\frac{x-x'}{r}\Big]\mathcal{D}\tau'$$

A (80) és (83) alatt foglalt jelölések alkalmazásával =

$$= \frac{\mu i\mathcal{D}\tau}{4\pi V^2}\int i'\,\frac{(i_1r_1+i_2r_2+i_3r_3)\,i_1' - (i_1i_1'+i_2i_2'+i_3i_3')\,r_1}{r^2}\mathcal{D}\tau'$$

Ha tehát a $\mathcal{D}\tau'$-ből $\mathcal{D}\tau$-ba mutató $(r_1 r_2, r_3)$ irány és a $\mathcal{D}\tau$-ban lévő áramlás (i_1, i_2, i_3) iránya közt lévő szöget (i, r) jelöli, a két térelemben, a $\mathcal{D}\tau$-ban és $\mathcal{D}\tau'$-ben foglalt áramlás (i_1, i_2, i_3), illetőleg (i_1', i_2', i_3') irányának a szögét pedig (i, i') jelöli, akkor a $D\tau$ térelem materiális tartalma a benne lévő áramlás révén az állandó elektromos áramlástól a:

$$(86)\quad \begin{cases} \dfrac{\mu i D\tau}{4\pi r^2}\displaystyle\int \dfrac{i_1'\cos(i,r) - r_1\cos(i,i')}{r^2}\, i' D\tau' \\[2ex] \dfrac{\mu i D\tau}{4\pi r^2}\displaystyle\int \dfrac{i_2'\cos(i,r) - r_2\cos(i,i')}{r^2}\, i' D\tau' \\[2ex] \dfrac{\mu i D\tau}{4\pi r^2}\displaystyle\int \dfrac{i_3'\cos(i,r) - r_3\cos(i,i')}{r^2}\, i' D\tau' \end{cases}$$

komponensü hatást viseli.

164. Olyan ez, mintha a $D\tau$ térelem materiális tartalma a benne foglalt áramlás révén a $D\tau'$ térelemben lévőtől az

$$(87)\quad \frac{(i_1', i_2', i_3')\cos(i,r) - (r_1, r_2, r_3)\cos(i,i')}{r^2}\,\frac{\mu i i'}{4\pi r^2}\, D\tau' D\tau$$

tömegmozgató hatást viselné (Ampère). Nyilvánképen merőleges eme vektor az i irányra; mert, ha a komponenseit rendre i_1, i_2, i_3 által szorozva összeadjuk, zérust kapunk. Másfelől két oly vektor rezultánsa (87) nyilvánvalólag, amelyek egyike az i' iránnyal, másika az r iránnyal párhuzamos. Mindkét tulajdonságát tekintve olyan vektor, amelynek az iránya párhuzamos az (r, i') síkkal és merőleges az i irányra.

165. A hely bármely egyenletesen deriválható függvényei legyenek $\varphi_1', \varphi_2', \varphi_3'$, beválik a (87)

alatt kifejezett elemi hatás helyett az is, amelynek a komponensei:

$$(87)' \quad \left(\frac{i_1' \cos(i,r) - r_1 \cos(i,i')}{r^2} + \frac{\partial \varphi_1'}{\partial i'}\right) \frac{\mu i i'}{4\pi V^2} D\tau' D\tau \text{; stb.}$$

De használható ez elemi hatásul akkor is, ha $\varphi_1', \varphi_2', \varphi_3'$ elsőrendű deriváltjai egyes pontokban harmadiknál alacsonyabb rendű végtelen nagyok. A 158. cikkben kifejtett módon következik ez, azonban azzal a természetes kikötéssel, hogy a becsatolt: $\left(\frac{\partial \varphi_1'}{\partial i'}, \frac{\partial \varphi_2'}{\partial i'}, \frac{\partial \varphi_3'}{\partial i'}\right)$ vektor a két térelemnek s az i és i' iránynak a mi földhöz rögzített koordinátarendszerünkbe tartozó határozóitól csak a két térelem és a két áramlási irány viszonylagos helyzete által függjön.

166. Kiválóképp hasznos ilyetén vektort szolgáltat a $(\varphi_1', \varphi_2', \varphi_3')$ következő meghatározása:

$$(\varphi_1', \varphi_2', \varphi_3') = \frac{(r_1, r_2, r_3) \cos(i,r)}{r}$$

Részletesen írva:

$$\varphi_1' = \left(i_1 \frac{x-x'}{r} + i_2 \frac{y-y'}{r} + i_3 \frac{z-z'}{r}\right) \frac{x-x'}{r^2} \text{, stb.}$$

Elvégezve rajtuk a

$$\frac{\partial}{\partial i'} = i_1' \frac{\partial}{\partial x'} + i_2' \frac{\partial}{\partial y'} + i_3' \frac{\partial}{\partial z'}$$

operációt, becsatolásuk után (87)'-ből ezt kapjuk a föntebb (87) alatt írt elemi hatás egy helyettese gyanánt:

$$(88) \quad \frac{(r_1, r_2, r_3) f}{r^2} \cdot \frac{\mu i i'}{4\pi V^2} D\tau D\tau' \text{, ahol } f \equiv 3\cos(r,i)\cos(r,i') - 2\cos(i,i').$$

Ez is beválik, mint oly tömegmozgató hatás, amelyet $D\tau$ materiális tartalma a benne lévő áramlás révén visel a $D\tau'$ térelemben lévő áramlástól (Ampère). Ennek a relatív iránya azonban egyszerűbb mondású, mint a (87)-é, mert épen egyezik vagy ellenkezik az (τ_1, τ_2, τ_3) távolsági iránnyal t.i. aszerint, amint f pozitív vagy negatív. A nagysága az (τ_1, τ_2, τ_3) egységvektor teljes szorzójának az abszolut értéke.

Ha a két térelemben a permeabilitás egyenlőnek számíthat, akkor (88) teljesíti nyilvánképen Newton reakció törvényét. A (88) ezen tulajdonságánál és iránybeli tulajdonságánál fogva gyakorlati célokra rendszerint különösen alkalmas, éspedig már csak azért is, mert oly izotróp anyagi rendszerben, testben, testrészben, amelyben a μ egyenletesnek tekinthető (éspedig remanens mágnességű szuszceptibilis testek ki lévén zárva, többnyire mindenütt jó közelítéssel $\mu = 1$ tehető), az áramlásnak önmaga révén, (88) szerint számítva sem toló, sem forgató hatása nincsen, mihez képest a külső áramlások toló és forgató hatását kell csak a (88) alapján számítani, mint olyant, amelyet az anyagi rendszer, test, testrész a benne lévő áramlások révén visel. Könnyen fölismerhető ez azon, hogy a (88) alatt definiált hatás a maga kifejezésének az alakja szerint a Coulomb-féle hatáshoz hasonló.

Alkalmazás galvanometronokra.

167. Tekintettel alkotó részeik viszonylagos méreteire, kétféle galvanometront különböztetünk meg: távolba és közelbehatót.

Távolbahatónak mondjuk a galvanometront, midőn olyan a szerkezete, hogy a lengőjét képező mágnes vagy áramtartó aránylag távol van azon áramlásoktól, amelyek forgató hatását számot tevően viseli.

Közelbehatónak mondjuk, midőn ez a föltétel nem teljesül.

Az utóbbinak a használati módja korlátoltabb. Mindkétfélének a használatában rendszerint a föld mágnessége és az eszközben lévő áramlások és még legfeljebb a torzió hat számot tevően, a nyugalom beállása után forgató erővel a lengőre úgy, hogy elégséges ezeknek a forgató hatását venni tekintetbe a lengő nyugalmában. De a lengő lassú mozgásaira is alkalmazhatjuk meghatározásainkat, midőn aztán még legföljebb a környezeti ellenállás forgató hatását kell figyelembe vennünk.

A legközelebbi címek alatt egy-egy galvanometronról lesz a szó. A bennük alkalmazott anyagokat illetőleg megjegyzendő, hogy szuszceptibilis permanens mágnességű testekre erőelméletünk nem terjedvén ki, ilyenek jelenlétét kizárjuk. Sőt pusztán permanens mágnesek és számot tevően nem mágnesezhető testek jelenlétére szorítkozunk, mihez képest $\mu = 1$ tesszük.

A lengő környezetéről is mindig föltegyük tehát, hogy a szuszceptibilitása figyelmen kivül maradhat. Ily környezet a levegő.

168. A z tengelyt helyezzük a lengő forgástengelyébe.

Ha a lengő permanens mágnes, de áramlást nem tartalmaz, akkor a (82) alatt jegyzett elemi hatás értelmében

$$(89)\quad \left(x\,\frac{i_3' r_1 - i_1' r_3}{r^2} - y\,\frac{i_2' r_3 - i_3' r_2}{r^2}\right)\frac{\hat{\rho}\, i'}{4\pi r}\,\mathfrak{D}\tau\,\mathfrak{D}\tau'$$

forgató hatást visel a lengőnek a ($\mathfrak{D}\tau$) térelemben foglalt elemi része a mágnessége révén a ($\mathfrak{D}\tau'$) térelemben lévő áramlástól.

Ha a lengő nem mágnes (és számot tevően nem is mágnesezhető), hanem állandó elektromos áramlásokat tartalmaz, akkor pedig a (88) alatt jegyzett elemi mozgató hatás értelmében az

$$(90)\quad \begin{cases} \dfrac{x r_2 - y r_1}{r^2}\, f\, \dfrac{i\, i'}{4\pi r^2}\,\mathfrak{D}\tau\,\mathfrak{D}\tau' \\[2ex] \left[f \equiv 3\cos(r, i)\cos(r, i') - 2\cos(i, i')\right] \end{cases}$$

forgató hatást viseli a lengőnek a $\mathfrak{D}\tau$ térelemben foglalt elemi része a benne lévő áramlás révén a ($\mathfrak{D}\tau'$) térelemben lévő áramlástól és csakis a lengőn kivül lévő áramlások hatását szükséges számítanunk (90) alapján a 161. cikk második felében foglaltak sze—

rint, minélfogva a lengőben lévő áramlásokat nem is soroljuk az (i_1', i_2', i_3') i' áramlásokhoz, illetőleg a lengőben gondolt $(D\tau)$ térelemeket nem soroljuk a $(D\tau')$ térelemekhez.

169. Másrészt a lengőre az elektromos áramlásoktól háramló forgató momentum számításában közönségesen elégséges az eszközben magában foglalt áramlások hatására szorítkozni, mert az eszközön kivül lévő áramlások zöme rendszerint távol van az eszköztől, csak egyes drótok útján függve össze az eszközben lévő áramlásokkal s e drótok áramai vagy csekélységüknél fogva hanyagolhatók el, vagy azért, mert szorosan egymás mellett fekszik két, ellentétesen egyenlő áramlásokat tartalmazó drót.

170. Az eszköz áramtartói a határukon mindig két igen kis fölületdarabon és mindig ugyanazon kis fölületdarabokon keresztül függenek össze a külső áramtartókkal az összekötő drótok által. Ebből folyólag az eszköz áramtartóiban az állandó elektromos áramlások (u, v, w) elosztódásának a módja mindig ugyanannak tekinthető, úgy, hogy a külső áramlások rendszerének a különböző megadásaiban az eszközben lévő áramlások rendszere csak abban különbözhetik számot tevően, hogy (89) esetén az eszközben minden (i_1', i_2', i_3') i' vektor valamely közös pozitiv vagy negativ arányszám szerint más és más a külső áramlásoknak más és más megadásában; a (90) esetén pedig az ilyen

különbözés az $(i_1, i_2, i_3)\, i$ vektorokon is fordulhat elő, de egyéb számot tevő különbözés az eszközben foglalt állandó áramlásokra nem háramolhat.

Ezek rendén mindig van olyan pozitív vagy negatív J' és J skaláris, függetlenek a helytől, hogy, ha így írjuk a (89), illetőleg (90) alatt jegyzett elemi forgató hatást:

$$(91)\quad \frac{J'}{4\pi r}\left(x\,\frac{i'_3 r_1 - i'_1 r_3}{r^2} - y\,\frac{i'_2 r_3 - i'_3 r_2}{r^2}\right)\frac{i'}{J'}\,\rho\,\mathfrak{D}\tau\,\mathfrak{D}\tau';$$

$$(92)\qquad \frac{JJ'}{4\pi r^2}\cdot\frac{x r_2 - y r_1}{r^2}\,f\cdot\frac{i\,i'}{JJ'}\,\mathfrak{D}\tau\,\mathfrak{D}\tau'$$

akkor (91)-ben J' szorzója, (92)-ben JJ' szorzója független már az áramlásoktól, hanem csak a geometriai konfigurációtól függenek.

171. Föltegyük majd, hogy az $(i'_1, i'_2, i'_3)\, i'$ áramlások székhelye egy szál vékony drótból készített tekercs, és, ha a lengő nem mágnes, hanem áramtartó, ez is egy szál vékony drótból való tekercs. A vékony drótok pedig jó megközelítéssel oly áramlási csöveknek tekinthetők, amelyekben egy merőleges metszet minden pontjában egyező irányú az áramlás, tehát a cső vezérvonalával minden metszet minden pontjában ugyanazon értelem szerint párhuzamos. Egy ily áramlásos drótnak bárhol megválasztott merőleges átmetszését jelölje σ_0 vagy σ'_0 az J, illetőleg J' skaláris abszolút értéke gyanánt nyilvánképen használhatók

$$(93)\qquad |J| = \int_{\sigma_0} i\,\mathfrak{D}\sigma_0\;,\quad |J'| = \int_{\sigma'_0} i'\,\mathfrak{D}\sigma'_0$$

Az J, illetőleg J' skaláris előjelet pedig az áramlások irányultságához alkalmazzuk. Így értve az J, J' skalárisokat, áramintenzitásoknak nevezzük azokat, az illető drótokban lévő elektromos áram intenzitásának. Ha pedig a (93) alatt lévő kifejezéseket megszorozzuk dt időelemmel, akkor a 149. cikk értelmében a σ_0, illetőleg σ_0'-féle keresztmetszeteken dt idő alatt átmozgó elektromos kvantumok abszolút értékeit kapjuk. Ezszerint ugyancsak a (93) alattiak az időegységgel szorozva: az egységnyi időben a keresztmetszeteken átmozgó kvantumok abszolut értékeit jelentik.

172. A 164. értelmében a lengőnek a $\mathfrak{D}\tau$ térelemben foglalt elemi része a lengő tengelye körül (91) esetében közönségesen az

$$(94)\quad \frac{J'}{V}\left\{x\int_{\tau'}\frac{i_3't_1-i_1't_3}{4\pi r^2}\,\frac{i'}{J'}\,\mathfrak{D}\tau'-y\int_{\tau'}\frac{i_2't_3-i_3't_2}{4\pi r^2}\,\frac{i'}{J'}\,\mathfrak{D}\tau'\right\}\hat{\varrho}\,\mathfrak{D}\tau$$

és (92) esetében az

$$(95)\quad \frac{JJ'}{V^2}\left\{x\int_{\tau'}\frac{t_2 f}{4\pi r^2}\,\frac{i'}{J'}\,\mathfrak{D}\tau'-y\int_{\tau'}\frac{t_1 f}{4\pi r^2}\,\frac{i'}{J'}\,\mathfrak{D}\tau'\right\}\frac{i}{J}\,\mathfrak{D}\tau$$

forgató hatást viseli nagyon pontosan az elektromos áramlásoktól, ahol τ' az eszközben ható (i_1', i_2', i_3') i' áramlások székhelyének a térfogata.

Tangensgalvanometron.

173. Ez távolbaható galvanometron. A lengője kis mágnes, tehát (94) illeti meg. Minthogy pedig

ez a kis mágneslengő aránylag távol van a (T') tér pontjaitól, úgy benne az integrálok értékei egyenleteseknek számíthatók. Írjuk, hogy

$$(96)\quad \int_{T'} \frac{i_2' r_3 - i_3' r_2}{4\pi r^2}\frac{i'}{J'}D\tau' \equiv O_1\,,\quad \int_{T'} \frac{i_3' r_1 - i_1' r_3}{4\pi r^2}\frac{i'}{J'}D\tau' \equiv O_2$$

Ezek a kis mágnes minden pontjában ugyanannak számíthatók, mert a kis mágnes aránylagos nagy távolsága miatt az (r_1, r_2, r_3) irány és az r távolság a kis mágnesben a helytől függetlennek tekinthető. Így írható tehát (94) szerint az áramlások forgató hatása a mágnesen, a mágnes mint lengő tengelye körül:

$$\frac{J'}{v}\left(O_2\int_T x\hat{\varrho}\,D\tau - O_1\int_T y\hat{\varrho}\,D\tau\right)$$

ha t.i. T a mágnes térfogata. De az itteni integrálok nem mások, mint a lengő mágneses momentumának a két első komponense. Ha tehát $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})$ a lengő mágneses momentuma, akkor az

$$(\mathfrak{A}O_2 - \mathfrak{B}O_1)\frac{J'}{v}$$

forgató hatást viseli a lengő az áramlásoktól.

Ehhez szükségképp hozzácsatlakozik a földmágnesség forgató momentuma. Irányítsuk az x tengelyt a földmágnesség horizontális intenzitásába, amelynek a nagyságát már egyszer H-val jelöltük. Akkor a földmágnesség forgató momentuma a lengőn

$-\mathcal{B}\mathcal{H}$. Ha a torzióból származó hatás oly kicsiny, hogy figyelmen kivül maradhat és ha egyáltalán nem visel egyéb számot tevő forgató hatást a mágnes, akkor a reá háramló teljes forgató momentum =

$$(\mathcal{A}O_2 - \mathcal{B}O_1)\frac{J'}{r} - \mathcal{B}\mathcal{H}$$

Jelölje ε a mágnes elfordulásának a szögét a nyugalomban a z tengely körül (fonál körül) az x tengely felől (a földmágnesség horizontális intenzitásának iránya felől). Ha a lengő mágneses momentuma horizontális és $\mathcal{M}$ nagyságú, akkor

$$\mathcal{A} = \mathcal{M}\cos\varepsilon \quad , \quad \mathcal{B} = \mathcal{M}\sin\varepsilon$$

tehát a lengőtől viselt forgató momentum =

$$(96)' \quad (O_2\cos\varepsilon - O_1\sin\varepsilon)\frac{J'}{r}\mathcal{M} - \mathcal{H}\mathcal{M}\sin\varepsilon$$

174. Nyugalomban ez $=0$, és következőleg nyugalomban

$$(96)'' \qquad J' = \frac{r\,\mathcal{H}\,\mathrm{tang}\,\varepsilon}{O_2 - O_1\,\mathrm{tang}\,\varepsilon}$$

Az O_1 és O_2 az eszközben lévő áramtartó drót alakzatával van meghatározva igen pontosan, tehát a változása csak az eszköz materiális állapotának, nevezetesen a hőmérsékletének változásából eredhet. Az O_1 és O_2 az ε szögtől azért tekinthető függetlennek, mert a mágnes aránylag távol van az áramtartó pontjaitól. Ezek rendén a mágneses momentumnak a mágneses délkörből való ε elfordulása a maga tangensével határozza meg az áramintenzitást, az eszköz materiális állapota által meghatározott O_1, O_2 együtthatók s a H együttható szerint.

Vegyük észre, hogy a mágneses momentum nagyságától független az J kifejezése. Független, mert a két ellentétesen ható forgató momentum – u. m. az elektromos áramé, meg a földmágnességé – mindegyik arányos a mágneses momentummal.

Ha olyan a tangensgalvanometron berendezése, hogy O_1 zérusnak számítható, akkor egyszerűen arányos az áramintenzitás az elfordulás szögének a tangensével s ekkor csak egy konstans ismerete szükséges az absolút méréshez, u. m: $\frac{\nu H}{O_2}$ ismerete; különben pedig kettőé, u. m: $\frac{\nu H}{O_2}$ és $\frac{O_1}{O_2}$ konstansé, amelyek valamely más módon megmért J értékek alapján jól meghatározhatók magával az eszközzel. Az O_1 integrál igen kicsiny például, ha az áramtartó a kis mágnes centruma körül aránylag igen nagy körbe tekert vékony drót a mágneses meridiánban; ekkor ugyanis r_2 és i_2' igen kicsinyek az O_1 integrál minden tagjában; sőt mihelyt a kis mágnesnek és a körnek a viszonylagos helyzete olyan, hogy a körre merőleges vertikális felező sík átszeli a kis mágnest, már az eleve kirótt távolsági viszonyok fenntartásával igen kicsiny az O_1, ugyanis kimutatható, hogy az O_1 integrálnak a kör vízszint átellenes elemeiből való tagjai ellentétesen egyenlőkül számíthatnak.

Szinuszgalvanometron.

175. Ha a mágnes arámylag sem tekinthető távol lévőnek a drótttekercs pontjaitól, akkor már a forgató momentum előbbeni meghatározása nem érvényes. A földmágnességtől származó része természetesen most is $-MH \sin \varepsilon$, ámde az elektromos áramlástól származó részének a meghatározása végett vissza kell térnünk (94)-hez. Ebből a lengő térfogatára szólló integrálással az elektromos áramlások forgató hatása a mágneslengőn =

$$\frac{J'}{v}\int \hat{\varrho}\,(x\,\mathcal{O}_2 - y\,\mathcal{O}_1)\,D\tau$$

ahol $\mathcal{O}_1$ és $\mathcal{O}_2$ a (96) alatti integrálok, azonban most bennük az r_1, r_2, r_3 és r nem számíthatók a mágnes mindenegyes pontjához ugyanazok gyanánt, hanem a mágnesnek az eszköz dróttekercséhez viszonyított fekvésével számot tevöen változnak, ámde csakis ezzel és így $(J':v)$ szorzója a mágnesnek a dróttekercshez viszonyított fekvésével változik csupán.

Jelölje ezt a szorzót $\varkappa$, vagyis legyen

$$\int \hat{\varrho}\,(x\,\mathcal{O}_2 - y\,\mathcal{O}_1)\,D\tau \equiv \varkappa$$

Akkor az elektromos áramlások forgató hatása a lengőn $J'\varkappa : v$, ahol $\varkappa$ csak a lengő és dróttekercs relatív helyzetétől függ. A lengőtől számottevően viselt teljes forgató hatás =

$$\frac{J'\varkappa}{\gamma} - \mathfrak{M} H \sin \varepsilon$$

176. Következőleg nyugalomban (midőn a torzió hatása elhanyagolható)

$$J' = \frac{\gamma H \mathfrak{M}}{\varkappa} \sin \varepsilon$$

ahol azonban a $\varkappa$ nevező függ a lengőnek a dróttekercshez viszonyított helyzetétől, éspedig általában kiszámíthatatlan módon függ attól. Azért is úgy szerkesztjük az eszközt, hogy az, vagy legalább a dróttekercse a lengő tengelye körül forgatható legyen és úgy használjuk, hogy mikor már a lengő az elektromos áram hatása alatt kitért, utána fordítjuk az eszközt, illetőleg az ő dróttekercsét mindaddig, míg a lengőnek a dróttekercshez viszonyított nyugalmi helyzete ugyanazzá válik, amely kezdetben volt, vagyis amely akkor volt, amikor még áram a tekercsben nem volt. Az alkalmazás e módjában a $\varkappa$ nevező értéke mindig ugyanaz s az eszköz $\frac{\gamma H \mathfrak{M}}{\varkappa}$ állandója valamely ismeretes J intenzitások segélyével kísérletileg jól meghatározható magával az eszközzel. Természetesen egy távolbaható galvanometront is használhatunk szinuszgalvanometron gyanánt, ha legalább a tekercse fordítható a lengő tengelye körül. Ha a lengő függesztékének az elcsavarodásából számottevő forgató momentum származhatik, akkor egyenletünk érvényességéhez szükséges, hogy amidőn nincs áramlás a tekercsben, a lengő nyugalmában ne legyen elcsavarodva a függeszték úgy, hogy a lengő mágneses momentuma a földmágnesség meridiánjában legyen; továbbá szükséges, hogy midőn már áramlás hatása alatt előidéztük a lengőnek azon nyugalmi helyzetét, amelyben a $\varkappa$ kezdeti értéke visszatért, ekkor se legyen elcsavarodva a függeszték, minégből az egész eszköznek kell fordíthatónak lennie a lengő tengelye körül.

Elektrodinamometron.

177. Ha a lengő nem mágnes, hanem ő maga is dróttekercs (szintén egy száb drótból), amely a beléje vezetett állandó elektromos áramlás révén viseli a forgató hatást, akkor elektrodinamometronnak nevezik. Ezuttal a (95) szerint számítjuk az áramlás forgató hatását. A (95)-ből megalkotva $JJ':v^2$ szorzójának a lengő térfogatára szólló integrálját, jelölje ezen integrált K. A lengő tekercsre a másik tekercsből háramló forgató momentum =

$$\frac{JJ'}{v^2}K$$

ahol a K együttható csupán a két tekercs kölcsönös helyzetével változik. A lengő tekercsben magában lévő áramlásoknak a forgató hatása a (95) értelmében zérus, tehát erre nincs gondunk. – Számítanunk kellene még a lengő tekercsen a földmágnesség forgató hatását is. De most tegyük föl, hogy a függeszték elcsavarodásából jelentékeny forgató hatás származik a lengőre, és hogy egy gomb segélyével mindig úgy csavarjuk el a függesztéket, hogy a nyugalom beálltával a lengő tekercse a földmágnességtől nem visel forgató hatást a maga árama révén (valamint akkor sem, midőn nincs benne áramlás, tehát akkor nincs torzió). Ezen eljárás rendén mindig egy bizonyos helyzetben van nyugalomban a lengő az eszközben s következőleg egy bizonyos helyzetben a másik tekercshez viszonyítva is.

178. Ha pl. unifilumos a fölfüggesztés és $\mathcal{L}$ a torzió együtthatója, akkor a torzió Θ szögén az

$$\frac{JJ'}{r^2}K = \mathcal{L}\Theta$$

egyenletünk van, honnan

$$JJ' = \frac{r^2\mathcal{L}}{K}\Theta$$

ahol pedig $\frac{r^2\mathcal{L}}{K}$ konstans együtthatót jelent.

Közönségesen úgy van berendezve az eszköz, hogy a lengő tekercse a másik tekercsel összeköttetésben van olykép, hogy a két tekercs egymás folytatása, minélfogva:

$$J' = J$$

tehát

$$J = r\sqrt{\frac{\mathcal{L}}{K}\Theta}$$

A $\frac{r^2\mathcal{L}}{K}$ együttható meghatározásához ismét kisérleti úton, magának az eszköznek a segélyével juthatunk el biztosan, t. i. valamely ismeretes J értékek alkalmazásával.

Bifilumos fölfüggesztésben $\mathfrak{L}$ más konstanst jelent és, ha nem igen kicsi a Θ szög, $\sin\Theta$ irandó Θ helyett a képletben a bifilumos fölfüggesztés elmélete szerint, midőn is $\frac{v^2\mathfrak{L}}{K}$ biztos meghatározása ismét csak magának az eszköznek segélyével adódik.

Állandó vonalas áramok mágneses térerőssége és ponderomótoros hatása.

179. A mágneses térerősségnek az elektromos áramlásoktól származó összetevője $= \mathrm{rot}\,\mathfrak{A}$. Ennek a komponensei:

$$\frac{1}{v}\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y}-\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial z}\right),\ \frac{1}{v}\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z}-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}\right),\ \frac{1}{v}\left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x}-\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y}\right),$$

ahol legalább az áramlások térfogatára kiterjedő integrálással

$$\mathcal{F}=\frac{1}{4\pi}\int\frac{u}{r}\,\mathfrak{D}\tau=\frac{1}{4\pi}\int\frac{i_1}{r}\,i\,\mathfrak{D}\tau,\ \mathcal{G}=\frac{1}{4\pi}\int\frac{i_2}{r}\,i\,\mathfrak{D}\tau,\ \mathcal{H}=\frac{1}{4\pi}\int\frac{i_3}{r}\,i\,\mathfrak{D}\tau$$

odaértve, hogy i jelenti a $\mathfrak{D}\tau$-ban lévő áramlás nagyságát és i_1, i_2, i_3 jelentik annak az iránykoszinuszait.

Most tegyük föl, hogy az áramlások székhelye kétszeresen összefüggő ágatlan vékony drót, amelyben egyazon merőleges keresztmetszetnek a pontjain át egyező irányúaknak tekinthetők az áramlások. Azt is tegyük föl, hogy a drót vastagsága sehol sem tesz számot azon r távolságokhoz képest, amelyekben a hatásokat figyelembe vesszük. Ilyenkor a drótban foglalt áramlások összeségét egyszerű vonalas áramnak mondjuk.

A $\mathfrak{D}\tau$ térelem koordinátáit a, b, c fogja jelölni; a drótnak az a, b, c helyű merőleges keresztmetszetét σ_0, ennek egy elemi részét $\mathfrak{D}\sigma_0$ jelölje és a drót vezérvonalát s (Ez kétszeresen összefüggő ágatlan vonal). Minthogy $\mathfrak{F}, \mathfrak{G}, \mathfrak{H}$ kifejezésében i_1, i_2, i_3 valamint r is a σ_0 keresztmetszet minden pontjában ugyanannak számítható, úgy:

$$\mathfrak{F} = \frac{1}{4\pi}\int \frac{i_1}{r}\left(\int_{\sigma_0} i\,\mathfrak{D}\sigma_0\right)\mathfrak{D}s \text{, stb.}$$

írható. A σ_0-ra szólló integrál, az u. n. áramintenzitás, minden σ_0 merőleges metszeten ugyanaz, tehát a vonalas integráció jele elé tehető. Jelölje J ezt az áramintenzitást, mihez képest

$$\mathfrak{F} = \frac{J}{4\pi}\int_s \frac{i_1}{r}\,\mathfrak{D}s = \frac{J}{4\pi}\int_s \frac{\mathfrak{D}a}{r},\quad \mathfrak{G} = \frac{J}{4\pi}\int_s \frac{\mathfrak{D}b}{r},\quad \mathfrak{H} = \frac{J}{4\pi}\int_s \frac{\mathfrak{D}c}{r}$$

t. i. az s vezérvonal elemi részének, mint (i_1, i_2, i_3) irányú elemi vektornak a komponenseit $\mathfrak{D}a, \mathfrak{D}b, \mathfrak{D}c$-vel jelölve. (Ha azonban az s vonal irányulását ellenkezően szabnók meg, akkor az J skalárison a σ_0-ra szólló integrál negatívját kellene értenünk. Tényleg, áramintenzitáson általánosabban az $\int_{\sigma_0} i\,\mathfrak{D}\sigma_0$ integrált pozitív, vagy negatív jellel értjük aszerint, hogy az s vezérvonalnak kedvünkre tulajdonított irányulás egyezik-e vagy nem az áramlások irányulásával.)

Mármost a rot $\mathfrak{A}$ térerősség első komponense a drót vastagságaihoz képest nagy távolságokban a szál pontjaitól =

$$\frac{J}{4\pi v}\left(\frac{\partial}{\partial y}\int_S \frac{\mathfrak{D}c}{r} - \frac{\partial}{\partial z}\int_S \frac{\mathfrak{D}b}{r}\right) = \frac{J}{4\pi v}\int_S\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\mathfrak{D}c - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\mathfrak{D}b\right) = \frac{J}{4\pi}\int_S\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial c}\mathfrak{D}b - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial b}\mathfrak{D}c\right)$$

Hasonlók a többi komponensek. Röviden úgy mondjuk, hogy a dróton kívüli térben ilyen a benne lévő elektromos áram mágneses térerőssége.

180. Abban a föltevésben, hogy az s vezérvonal analitikus vonal, válasszunk tetszés szerint az s vonaltól övedzett S analitikus fölületet. Módunkban van rot $\vec{\mathfrak{A}}$ itt megalkotott komponenseit úgy transformálni, hogy rot $\vec{\mathfrak{A}}$ az S fölületen és a dróton kívül lévő helyeken mint gradiens jelentkezzék, amely gradiens pedig olyan, mintha az S fölület két oldalán egyenletesen elterülő pozitív, illetőleg negatív mágnességtől (egyenletes kettős mágneses kvantumtól) származnék. Röviden szólva olyan ez a grádiens, mint abszolút érték szerint egyenletes momentumú mágneshéj térerőssége. Levezetését természetesen a Stockes-féle redukció szolgáltatja. E redukció szerint, az S fölület környezetében egyenletesen deriválható $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ egyértékű függvények esetén

$$\int_s (\mathfrak{A}\,\mathfrak{D}a + \mathfrak{B}\,\mathfrak{D}b + \mathfrak{C}\,\mathfrak{D}c) = \int_S \left\{\left(\frac{\partial\mathfrak{C}}{\partial b} - \frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial c}\right)\alpha + \left(\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial c} - \frac{\partial\mathfrak{C}}{\partial a}\right)\beta + \left(\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial a} - \frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial b}\right)\gamma\right\}\mathfrak{D}\sigma$$

ahol α, β, γ a $\mathfrak{D}\sigma$ fölületelem ismeretes módon gondolandó normálisának iránykoszinuszai. Összehasonlítva ezt rot $\hat{\mathfrak{A}}$ első komponensének az integrálszorzójával,

$$\mathcal{A} = 0, \quad \mathcal{B} = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial c}, \quad \mathcal{C} = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial b}$$

tesszük. Az S fölületen kivül (attól véges távolban) fekvő pont r távolságaira tehetjük ezt, mert az ilyen r-ek mellett $1:r$ bárhányszor deriválható egyértékű függvénye az S környezetébe tartozó a, b, c koordinátáknak. A behelyettesitések után figyelembe véve, hogy

$$\frac{\partial^2}{\partial a^2}\frac{1}{r} + \frac{\partial^2}{\partial b^2}\frac{1}{r} + \frac{\partial^2}{\partial c^2}\frac{1}{r} = 0,$$

ezt kapjuk mint rot $\vec{\mathcal{A}}$ első komponensét:

$$\frac{J}{4\pi v}\iint_S\left(\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial a^2}\alpha + \frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial a\,\partial b}\beta + \frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial a\,\partial c}\gamma\right)\mathcal{D}\sigma = -\frac{J}{4\pi v}\frac{\partial}{\partial x}\iint_S\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial a}\alpha + \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial b}\beta + \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial c}\gamma\right)\mathcal{D}\sigma$$

Az utóbbi integrálban a zárjeles kifejezés az $1:r$ hányados normális irányú deriváltja. Hogyha tehát n a normális irány, akkor az S fölületen kivül és a dróton is kivül

$$\text{rot}\,\vec{\mathcal{A}} = \text{grad}\left(-\frac{*}{4\pi}\int_S \frac{J}{v}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\mathcal{D}\sigma\right)$$

Olyan itt a jobboldal, mintha $J:v$ egyenletes skaláris momentum szerint mágneses S héj térerőssége volna, amelyben a zárójel tartalma a potenciál.

181. Minthogy a mágneses tömegmozgató hatásokat teljesen meghatározza a mágneses térerősség, úgy tehát tetszésre választható (s szélű) S analitikus fölületen képezve, olyan alakban állitható elő a ponderomótoros hatás kivül az S fölületen és a dróton, mintha egyenletes nekkoraság szerint mágneses S héjtól eredne.

Ha a drót összefüggése kétszeresnél is többszörös, akkor a benne foglalt áramlások összesége, – az áramlási csövek elmélete szerint, – úgy jelentkezik, mint véges számú egyszerű (kétszeresen összefüggő) vonalas elektromos áramok rendszere. Most ugyanannyi mágneshéj szubsztituálható a drótón és a héjakon kivül lévő pontok számára, mint ható állomány.

Forgató hatás vonalas áramon.

182. Mindig izotrop testeket gondoljunk, mégpedig olyanokat, amelyekben a mágneses permeábilitás (μ) mindenütt $=1$ tehető. Ilyképen az x, y, z helyen $D\tau$ térelemben lévő (u, v, w) áramlás révén a $D\tau$ materiális tartalma Ψ potenciálú mágnességektől az

$$\frac{1}{V}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} w - \frac{\partial \Psi}{\partial z} v\right) D\tau \text{, stb.}$$

komponensű mozgató hatást viseli (155. cikk C). Ha az (u, v, w) áramlás nagysága i, iránykoszinuszai pedig i_1, i_2, i_3, akkor

$$\frac{1}{V}\left(i_3 \frac{\partial \Psi}{\partial y} - i_2 \frac{\partial \Psi}{\partial z}\right) i\, D\tau \text{, stb.}$$

ezen mozgató hatás komponensei.

Ezt most egyszerű vonalas áramra alkalmazzuk, amelynek az intenzitását J-vel jelöljük. Föltesszük, hogy az áram székhelyének, egy kétszeresen összefüggő vékony drótnak pontjai a drót vastagságaihoz képest a mágnesség minden pontjától távol vannak és, hogy a drót merőleges metszetén az áramlás iránya egyenletesnek számitható. Akkor a drótnak $\mathfrak{D}s$ hosszúságú merőlegesen kimetszett $\sigma_0 \mathfrak{D}s$ térfogatú darabján a mágneses hatás komponensei igy irhatók:

$$\frac{1}{v}\left(i_3\frac{\partial\Psi}{\partial y}-i_2\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)\int_{\sigma_0 \mathfrak{D}s} i\,\mathfrak{D}\tau=\frac{1}{v}\left(i_3\frac{\partial\Psi}{\partial y}-i_2\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)\mathfrak{D}s\int_{\sigma_0} i\,\mathfrak{D}\sigma=\frac{J}{v}\left(i_3\frac{\partial\Psi}{\partial y}-i_2\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)\mathfrak{D}s, \text{stb.}$$

A drót irányulását az áramlások irányai szerint válaszszuk meg s ekkor a drót s vezérvonalán a $\mathfrak{D}s$ hosszúságú elemi vektor komponenseit $\mathfrak{D}x$, $\mathfrak{D}y$, $\mathfrak{D}z$ jelölje, úgy, hogy $i_1 \mathfrak{D}s = \mathfrak{D}x$, stb. Következőleg a mágnesség ponderomótoros hatása a drótnak $\sigma_0 \mathfrak{D}s$ térben foglalt elemi részén az

$$\frac{J}{v}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\mathfrak{D}z-\frac{\partial\Psi}{\partial z}\mathfrak{D}y\right),\ \frac{J}{v}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\mathfrak{D}x-\frac{\partial\Psi}{\partial x}\mathfrak{D}z\right),\ \frac{J}{v}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\mathfrak{D}y-\frac{\partial\Psi}{\partial y}\mathfrak{D}x\right)$$

komponensü vektor. Forgató hatása a z tengely körül tehát =

$$\frac{J}{v}\left\{x\left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\mathfrak{D}x-\frac{\partial\Psi}{\partial x}\mathfrak{D}z\right)-y\left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\mathfrak{D}z-\frac{\partial\Psi}{\partial z}\mathfrak{D}y\right)\right\}$$

Integráljuk ezt az s kétszeresen összefüggő vezérvonal mentén és megkapjuk a mágnességeknek az egész drótra háramló forgató hatását =

$$\frac{J}{v}\int_s\left\{x\frac{\partial\Psi}{\partial z}\mathfrak{D}x+y\frac{\partial\Psi}{\partial z}\mathfrak{D}y-\left(x\frac{\partial\Psi}{\partial x}+y\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)\mathfrak{D}z\right\}\mathfrak{D}s.$$

183. Az s-en analitikus vonalat értve, a Stockes-féle redukció által az s-től övedzett $\mathfrak{S}$ analitikus fölületre szóló integrállal is kifejezhetjük vonalas in-

tegrálunkat, hacsak úgy választjuk meg az S fölületet, hogy ne érje sehol a ható mágnességeket, midőn is Ψ bárhányszor deriválható egyértékű függvény az S környezetében. Ha az eredményeken fölhasználjuk a $\Delta\Psi = 0$ Laplace-féle egyenletet, ezt kapjuk a z tengelyű forgató hatás gyanánt:

$$f = -\frac{J}{\nu}\int_S \frac{\partial}{\partial n}\left(x\frac{\partial\Psi}{\partial y} - y\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right) D\sigma$$

ahol n a $D\sigma$ fölületelemeknek mindenütt ugyanazon szabott értelemben irányuló normálisa és így, ha α, β, γ az iránykoszinuszai, akkor

$$\frac{\partial}{\partial n} \equiv \alpha\frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial y} + \gamma\frac{\partial}{\partial z}$$

Olyan tehát az f forgató hatás, mintha az S fölületen elterülő mágneses héj viselné, amelynek a $D\sigma$ fölületelemen $JD\sigma : \nu$ nagyságú és n irányú a momentuma. (Még egyszerűbben állapítható meg, hogy a toló hatást is így viseli az áramtartó drót).

184. Ha az S fölület egy kiválasztott pontjának z tengelyű vektora Θ szögön van elfordulva pozitív értelemben az x tengely irányától; az S fölület $D\sigma$ elemének a z tengelyű vektora pedig $\Theta_0 + \Theta$ szögön és ezen vektor hossza r_0, akkor $x = r_0 \cos(\Theta_0 + \Theta)$, $y = r_0 \sin(\Theta_0 + \Theta)$. E kifejezéseken rögtön fölismerhető, hogy Θ-tól független z koordináták mellett

$$x\frac{\partial\Psi}{\partial y} - y\frac{\partial\Psi}{\partial x} = \frac{\partial\Psi}{\partial\Theta}$$

ugyanis

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\Theta} = \frac{\partial\Psi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\Theta} + \frac{\partial\Psi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\Theta} + \frac{\partial\Psi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial\Theta}$$

és a koordináták Θ-ás kifejezéseiből

$$\frac{\partial x}{\partial \Theta} = -y, \quad \frac{\partial y}{\partial \Theta} = x, \quad \frac{\partial z}{\partial \Theta} = 0$$

Igy is irhatjuk tehát a z tengelyű forgató momentumot:

$$f = -\frac{J}{\gamma}\frac{\partial}{\partial \Theta}\int_{\mathfrak{S}} \frac{\partial \Psi}{\partial n}\, \mathcal{D}\sigma$$

odaértve természetesen, hogy a

$$\frac{\partial \Psi}{\partial n} = \alpha \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \beta \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \gamma \frac{\partial \Psi}{\partial z}$$

kifejezésben az α, β, γ iránykoszinuszokra is kiterjesztendő a Θ szög szerint követelt deriválás. Mégpedig, ha az (α, β, γ) egységvektor elejének a koordinátái x_1, y_1, z_1 s a végének a koordinátái x_2, y_2, z_2, akkor a fönntebbi mintára

$$\frac{\partial x_1}{\partial \Theta} = -y_1, \quad \frac{\partial y_1}{\partial \Theta} = x_1, \quad \frac{\partial z_1}{\partial \Theta} = 0$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial \Theta} = -y_2, \quad \frac{\partial y_2}{\partial \Theta} = x_2, \quad \frac{\partial z_2}{\partial \Theta} = 0$$

Rendre kivonván az alsókból a fölsőket, aztán számba vévén, hogy $x_2 - x_1 = \alpha$, stb., látjuk, hogy

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \Theta} = -\beta, \quad \frac{\partial \beta}{\partial \Theta} = \alpha, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial \Theta} = 0.$$

Ezek értelmében tényleg közömbös, hogy milyen sorrendben műveljük f kifejezésében a Θ és n szerint való deriválást, tehát szabad volt az eredeti n, Θ sorrendet Θ, n sorrendre változtatni át, aminek a megtörténte után pedig a Θ szerint való deriválást az integráció jele előtt lehetett posztulálni, mert a Θ szög $\mathfrak{S}$-nek egyetlen pont-jával van definiálva.

Minthogy az f kifejezésében írt integrál csak a mágnességek és az $\mathfrak{S}$ fölület konfigurációjától függ, ennélfogva a Θ szög megfelelő értelmezése mellett bármely tengely körül is f jelenti J révén a mágnességek forgató momentumát.

185. Most tegyük föl, hogy egyszerű vonalas áram is van, mint ható áram a rendszerben. Intenzitását J', vezérvonalát s' és egy ettől övedzett analitikus fölületet $\mathfrak{S}'$ jelölje. Kirójjuk, hogy az J és J' áramokat tartó, kétszeresen összefüggő drótok nem ölelkeznek és pontjaik vastagságaikhoz képest távol vannak egymástól, továbbá úgy választjuk meg az $\mathfrak{S}'$ fölületet, hogy sehol hozzá ne érjen az $\mathfrak{S}$ fölülethez. Ekkor a 180. cikk értelmében J' ponderomótoros hatásait J-nek az áramtartóján

$$\frac{J'}{4\pi V}\int_{\mathfrak{S}'}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n'}\,\mathfrak{D}\sigma'$$

skaláris potenciál segélyével lehet kifejezni, amely olyan, mintha mágneses héjtól származnék. Ezt most az előbbi cikkben f-nek a kifejezésében $\mathfrak{V}$-hez kell adnunk, hogy az J' áram forgató hatása is benne legyen az f-ben. Az f forgató momentumnak tőle származó része tehát $=$

$$-\frac{JJ'}{4\pi V^2}\frac{\partial}{\partial\Theta}\iint_{\mathfrak{S}\,\mathfrak{S}'}\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial n\,\partial n'}\,\mathfrak{D}\sigma'\mathfrak{D}\sigma$$

r-en $\mathfrak{D}\sigma'$-nek és $\mathfrak{D}\sigma$-nak a távola, a Θ szerint $\mathfrak{D}\sigma$ koordinátáinak és normálisának a deriválása értetvén. Az itt lévő

$$\mathfrak{P} \equiv \frac{JJ'}{4\pi\gamma^2}\iint\limits_{SS'} \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial n\,\partial n'}\,\mathfrak{D}\sigma'\mathfrak{D}\sigma$$

skalárist elektrodinamikai potenciálnak nevezik (F. Newmann). A forgató hatás =

$$-\frac{\partial\mathfrak{P}}{\partial\Theta}.$$

186. A két áram s, s' vezérvonalára vonatkozó integrállal is egyszerű módon lehet ezt kifejezni, mégpedig

$$\mathfrak{P} = -\frac{JJ'}{4\pi\gamma^2}\iint\limits_{s\,s'} \frac{\cos(s,s')}{r}\,\mathfrak{D}s'\mathfrak{D}s$$

ahol r a vonalelemek távolságát, (s,s') a vonalelemek szögét jelenti, úgy hogy ha s_1, s_2, s_3, illetőleg s_1', s_2', s_3' a vonalelemek iránykoszinuszai, akkor

$$\cos(s,s') = s_1 s_1' + s_2 s_2' + s_3 s_3'$$

Kitűnik ez, ha kettős vonalas integrálunkon kétszer egymás után alkalmazzuk Stockes tételét és figyelembe vesszük, hogy a vesszős és vesszőtlen koordináták szerint való deriváltak ellentétesen egyenlők és $\Delta\frac{1}{r} = 0$ mindkét féle koordináták szerint.

187. Más egyszerű alakban is előállítható ez a két vonalú kifejezés. Nyilvánvaló, hogy s irányú deriválás szerint:

$$r\frac{\partial r}{\partial s} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial(r^2)}{\partial s} \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial(r^2)}{\partial x}s_1 + \frac{\partial(r^2)}{\partial y}s_2 + \frac{\partial(r^2)}{\partial z}s_3\right) = (x-x')s_1 + (y-y')s_2 + (z-z')s_3$$

és ebből s' irányú deriválással

$$\frac{\partial r}{\partial s'}\frac{\partial r}{\partial s}+r\frac{\partial^2 r}{\partial s'\partial s}\equiv s_1'\frac{\partial}{\partial x'}\left(r\frac{\partial r}{\partial s}\right)+s_2'\frac{\partial}{\partial y'}\left(r\frac{\partial r}{\partial s}\right)+s_3'\frac{\partial}{\partial z'}\left(r\frac{\partial r}{\partial s}\right)$$

$$=-(s_1's_1+s_2's_2+s_3's_3)$$

Ennélfogva így is írható az $\mathfrak{R}$ potenciálban lévő integrál:

$$-\int_S\int_{S'}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'}+\frac{\partial^2 r}{\partial s\partial s'}\right)\mathfrak{D}s\,\mathfrak{D}s'$$

A második tagja azonban eltűnik, mert zárt vonalakon totális differenciálokat integrál. Ezerint nem különben áll, hogy

$$\mathfrak{R}=\frac{JJ'}{4\pi v^2}\int_S\int_{S'}\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'}\,\mathfrak{D}s\,\mathfrak{D}s'.$$

Mivel pedig

$$\frac{\partial r}{\partial s}=\frac{\partial r}{\partial x}s_1+\frac{\partial r}{\partial y}s_2+\frac{\partial r}{\partial z}s_3=\frac{x-x'}{r}s_1+\frac{y-y'}{r}s_2+\frac{z-z'}{r}s_3$$

$=\cos(r,s)$, ha t. i. a $\mathfrak{D}s'$-ből a $\mathfrak{D}s$-be mutató irányt jelöli itt r, továbbá

$$\frac{\partial r}{\partial s'}=\frac{\partial r}{\partial x'}s_1'+\frac{\partial r}{\partial y'}s_2'+\frac{\partial r}{\partial z'}s_3'=\frac{x'-x}{r}s_1'+\frac{y'-y}{r}s_2'+\frac{z'-z}{r}s_3'$$

$=-\cos(r,s)$, ha t. i. most is a $\mathfrak{D}s'$-ből a $\mathfrak{D}s$-be mutató irányt jelöli r. Ezek szerint így is kifejezhető $\mathfrak{R}$:

$$\mathfrak{R}=-\frac{JJ'}{4\pi v^2}\int_S\int_{S'}\frac{\cos(r,s)\cos(r,s')}{r}\,\mathfrak{D}s\,\mathfrak{D}s'$$

188. Az J áramot tartalmazó drótnak egy tengely körül $\delta\Theta$ szögű elfordulásán az J' áram a $-\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial\Theta}\delta\Theta$ munkát végzi, mert $-\partial\mathfrak{R}:\partial\Theta$ a forgató hatása. Ha tehát $\mathfrak{R}$-nak a $\delta\Theta$ szögű elfordulásból származó elemi megváltozása $\delta\mathfrak{R}$, úgy $-\delta\mathfrak{R}$ ez a munka.

Az J áramot tartalmazó drótnak λ irányban $\delta\lambda$ távolú eltolásán pedig az J' áram a $-\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial\lambda}\delta\lambda$

munkát végezi, mert $-\partial\mathfrak{R} : \partial\mathcal{L}$ a toló hatása (amihez még egyszerűbb módon jutunk, mint a forgató hatáshoz). Ha tehát most $\mathfrak{R}$-nak az elemi eltolásból származó megváltozása a $\delta\mathfrak{R}$, úgy J'-nek az eltoláson végzett munkája $-\delta\mathfrak{R}$.

Könnyű belátni ezek után, hogyha $\delta\mathfrak{R}$ az $\mathfrak{R}$-nak azt a megváltozását jelenti, amely az J áram székhelyének valamely elemi eltolásából és elfordításából származik, akkor az J' áram elemi munkája e helyzetváltozáson $-\delta\mathfrak{R}$. De kimutatható, hogy az J áramot tartalmazó drótnak nemcsak elemi eltolásán és elforditásán, de elemi hajlitásból származó alakváltozásán is képezve $\mathfrak{R}$ megváltozását s most ezt jelölve $\delta\mathfrak{R}$-val, ugyancsak $-\delta\mathfrak{R}$ az J' áramnak az J áram révén végzett munkája azon helyzet- és alakváltozáson.

A mágneses térerősség rotációjának és az elektromos áramlásnak az arányossági konstansa.

189. Az elektromos áramlásnak a 149. cikkben adott értelmezése miatt a v sebesség értékét nem választhatjuk meg tetszésünkre, mert azon értelmezést nem puszta arányossághoz, hanem a 149. cikk vége felé határozott egyenlőséghez kötöttük, miáltal implicite a v sebesség értékét is megszabtuk már: ezen értéknek az elektromos áramlás kettős definiciójából, u.m. a 134. cikk mágneses definiciójából és a

149. cikkben foglalt elektromos definiciójából, a pondemomótoros hatások révén ki kell adódnia.

Először R. Kohlrausch és W. Weber határozták meg. Eljárásuk alapelve olyszerü volt, amelynek a leírása itt következik.

A levegőben egy elektromos kondenzátor egyik fegyverzetét összekötjük a földdel; a másikba pedig elektromos töltést vezetünk. Azután ezt a töltést egy tangens galvanometron áramvezető tekercsén keresztül a földbe kisütjük. A kisülés áramának a mágneses hatása lökést közöl a galvanometron lengőjével, amely számot tevő szögsebességre tesz szert úgy, hogy jóllehet a kisülés igen rövid időtartama alatt alig mozdult a lengő, azon túl tovább mozdulva, jól észlelhető mértékben tér ki, miközben már csak a földmágnesség, a torzió és a környezeti ellenállás hatását viseli. A kitérés szögének, vagy más utána következő amplitudónak a megfigyelésén, a kondenzátor töltésének előzetes meghatározásán, a földmágnesség horizontális intenzitásának ismeretén és az eszköz ismeretén alapszik a v megmérése.

190. A kondenzátor kisülése a galvanometron tekercsén át épenséggel nem állandó elektromos áramlás rendén történik. Azonban megadható bizonyosan oly állandó elektromos áramlás a tekercsben és megadható oly igen kicsiny t' időtartam, hogy azon állandó áramlásban és azon igen kis t' idő alatt egy

keresztmetszeten összesen absolute annyi elektromosság mozogna át, amennyi itt kisült s amellett a lengő ugyanazon szögsebességre tenne szert, amelyre szert tesz a kisülés alatt. Ha a lengő inerciamomentuma $\mathcal{K}$, a környezeti ellenállás együtthatója 2κ és ha unifilumos a fölfüggesztés $\mathcal{L}$ torziós együtthatóval; ha továbbá a képzelt állandó áramlásban az áramintenzitás J'; ha végre a galvanometronhoz tartozó O_1 integrál (96) nem tesz számot, úgy tekintetbe véve a torziót és a környezeti ellenállást is, mozgás-egyenletünk (96)' szerint a t' idő tartamában ez:

$$(97) \quad \begin{cases} \mathcal{K}\ddot{\varepsilon} + 2\kappa\dot{\varepsilon} + \mathcal{L}\varepsilon = \frac{1}{\gamma} O_2 \mathfrak{M} J' \cos\varepsilon - \mathfrak{M}\mathcal{H}\sin\varepsilon \\ (0 \leqq t \leqq t') \end{cases}$$

A t' pillanaton túl pedig, midőn már csak a környezeti ellenállás, a torzió és a földmágnesség forgató hatását viseli a lengő:

$$(98) \quad \begin{cases} \mathcal{K}\ddot{\varepsilon} + 2\kappa\dot{\varepsilon} + \mathcal{L}\varepsilon = -\mathfrak{M}\mathcal{H}\sin\varepsilon \\ t \geqq t' \end{cases}$$

191. A (97)-ben még a t' idő végén is oly kicsiny az ε, hogy a t' idő tartamára ő maga zérusnak írható, tehát:

$$(97)' \qquad \mathcal{K}\ddot{\varepsilon} + 2\kappa\dot{\varepsilon} = \frac{1}{\gamma} O_2 \mathfrak{M} J' \quad (0 \leqq t \leqq t')$$

És ha most a t' időponthoz tartozó ε, illetőleg $\dot{\varepsilon}$ értéket ε', illetőleg $\dot{\varepsilon}'$ jelöli, úgy integráció rendén:

$$(97)'' \qquad \mathcal{K}\dot{\varepsilon}' + 2\kappa\varepsilon' = \frac{1}{\gamma} O_2 \mathfrak{M} J' t'$$

De ε értéke zérusnak tekinthető, továbbá a 149. cikk és a (93) kifejezése szerint $J't'$ egyenlő a kondenzátor kisült töltésével. Ha tehát ezen e töltést, a K inerciamomentumot, az M mágneses momentumot, az O_2 integrált és az $\dot{\varepsilon}'$ szögsebességet ismerjük, akkor a v sebességet megadja:

$$v = \frac{M O_2 e}{K \dot{\varepsilon}'}$$

(A tangensgalvanometronról szólló előadásnak a végén említett berendezésben az O_2 integrál jó megközelítés szerint kiszámítható, mert igen egyszerű vonalas integrálra redukálható, amelyből pedig az $i' : J'$ hányados kiesik.)

192. Ami $\dot{\varepsilon}'$ meghatározását illeti, az a második differenciálegyenletünk (98) alapján lehetséges, amely egyenlet a kisülés után következő időben érvényes. Ebben az egyenletben már nem tekinthető oly kicsinynek az ε, hogy mellőzni lehessen, de oly kicsinynek ebben is tekinthető, hogy a szinusza helyett őt magát lehessen írni. Mihez képest:

$$K \ddot{\varepsilon} + 2\kappa \dot{\varepsilon} + (\Lambda + M H)\varepsilon = 0$$

Röviden szólva

$$\frac{\kappa}{K} \equiv p \text{ és } \sqrt{\frac{\Lambda + M H}{K} - \frac{\kappa^2}{K^2}} \equiv q$$

írjuk és T-vel jelöljük a lengésidőt, τ'-vel azt a legkisebb t értéket, amely szerint

$$\text{tang}\, q t = \frac{q}{p}$$

Minthogy $\dot{\varepsilon}'$ számot nem tévő kicsiny, úgy új differenciál-egyenletünk integrálásán is zérusnak vehetjük a kezdeti ε szöget, de a kezdeti szögsebességet $= \dot{\varepsilon}'$ kell most tennünk. Ekként az unifilumos torzió mérleg elméletéből folyólag az $(n+1)$-edik amplitudó annyi, mint:

$$\frac{\dot{\varepsilon}'}{q}\, e^{-p(T+nT)} \sin qT'$$

(Az elmélet 4. pontjában lévő egyenletsor értelmében azon elmélet 2. pontjának a vége szerint.)

Bárhányadik amplitudó megfigyeléséből kiszámítható e kifejezés segítségével $\dot{\varepsilon}'$, ha t. i. már p, q, T, T' előre meghatároztuk.

Weber és Kohlrausch méréseiből (a Voigttól igazított számítások szerint) abszolut egységekben $v = 10^{10}. 3,1114$ következik. Azóta végzett másszerű mérések is nagy megközelítéssel a fénynek a vákuumban való terjedési sebességét eredményezték v értéke gyanánt. Hogy v ennek a sebességnek tekinthető, ez a nevezetes Weber–Kohlrausch-féle fölfedezés szolgált inditóúl a fény elektromágneses elméletének a megalkotásához (Maxwell).

Mozgató hatás a „lassú" katódsugarakon.

193. A katódsugarakat, minden tapasztalásunk eredményei szerint, igen apró elektromos állományok, az u. n. elektronok áradata teszi, amelyek mind állandó

és majdnem mind egyenlő negatív elektromos töltést tartalmaznak, és tömegük is van, de igen elterjedt fölfogás szerint változó tömegük van, nevezetesen pedig a mozgásuktól függő tömegük. Ez a fölfogás azonban nem szükségszerű. Igen kis állandó és egyenlő tömeget tulajdoníthatunk nekik, mint majd más előadások kifejtik, csakhogy ekkor másként kell meghatároznunk azt az erőt, amelynek a mozgató hatását viselik. Ha pedig oly katódsugarakra szorítkozunk, amelyekben az elektrónok sebessége sokszorta kisebb, mint a fénysebesség, akkor közelítőleg az első fölfogásban is állandó és egyenlő tömegűeknek tekinthetjük a katódsugarak elektrónjait s a reájuk háramló elektromos és mágneses ponderomótoros hatások, a töltésük, illetőleg (a töltésükkel és mozgásukkal meghatározott) áramlásuk révén a (26) alatti formula szerint (84. art.), illetőleg a (78)″ harmadik formulája szerint (154. art.) számíthatók. Most majd tényleg ilyen katódsugarakra szorítkozunk, midőn is lassúaknak mondjuk azokat.

Továbbá tegyük föl a következendőkben, hogy kívülről akkora elektrosztatikai, vagy magnetosztatikai, vagy mindkétféle erő hatását viselik katódsugarainkban az elektrónok, amelyhez képest más reájuk ható erő nem tesz számot, sem a nehézségi erő, sem a csőben lévő ritkított gáz ellenállásának az ereje, sem a reájuk tőlük magukból háramló erő.

194. Már most $-\varrho$-val jelölve egy elektron töltésének az átlagos sűrűségét, τ-val az elektron térfo-

gatát, $\mathfrak{w}$-rel az ő mindenkori origói vektorát, az áramlása a 151. cikk egyenlete szerint $= -\rho\dot{\mathfrak{w}}$, az elektromos töltése pedig $-\rho\tau$. Minthogy a környezete ritka gáz, amelyben ε és μ az egységgel egyenlőnek számithat, így az idézett formulák értelmében közelitőleg a

$$-\left(\rho\mathfrak{E} + \frac{[\rho\dot{\mathfrak{w}}\mathfrak{H}]}{\gamma}\right)\tau$$

erő hatása alatt mozog az elektron, lévén e kifejezésben $-\mathfrak{E}\rho\tau$ a kivülről ható elektrosztatikai erő és $-\frac{1}{\gamma}[\rho\dot{\mathfrak{w}}\mathfrak{H}]\tau$ a kivülről ható magnetosztatikai erő csupán, amelyek elsejének a hatását a maga $-\rho\tau$ töltésénél fogva a kivülről származó $\mathfrak{E}$ elektrosztatikai térerősségtől viseli az elektron (a 84. cikk (26) kifejezése szerint), másodikának a hatását pedig a maga $-\rho\dot{\mathfrak{w}} = \mathfrak{J} = (u, v, w)$ áramlásánál fogva a kivülről származó $\mathfrak{H}$ magnetosztatikai térerősségtől (a 154. cikk (78)" alatt irt harmadik kifejezésének értelmében), miközben a környezete igen ritka gáz, amelynek a dielektromos együtthatója és mágneseződési együtthatója mindenütt az egységgel egyenlőnek számithat.

Legyen m az elektron tömege és legyen $-e$ az ő elektromos töltése, midőn is $m > 0$, $e > 0$ és $\rho\tau = e$. Ehhez képest az elektron mozgásának az egyenlete így van:

$$(99) \qquad m\ddot{\mathfrak{w}} = -e\left(\mathfrak{E} + \frac{[\dot{\mathfrak{w}}\mathfrak{H}]}{\gamma}\right)$$

195. Ez egyenlet alapján végezték katódsugarakon az első behatóbb méréseket. A használt berendezé-

sek egyike olyan volt, hogy a katódból kiözönlő elektronok a kisülési cső első felében viselték csak számottevő elektrosztatikai hatást és a második felében csak magnetosztatikai erő hatását viselték számottevő mértékben.

Az elektronok sebességének nagyságát pusztán a ható elektromosságok potenciálja szabja meg, a mágneses hatásoktól független a csőben az elektronok sebességének a mekkorasága, ugyanis megszorozván skaláris módon az $\dot{w}$ sebességgel itteni egyenletünket, azt találjuk, hogy, ha $\dot{s}$ az elektron sebességének a nagysága és az elektronban Φ az elektrosztatikai potenciál értéke, a t pillanati w helyen, akkor

$$(\dot{w}\ddot{w}) = \frac{d}{dt}\frac{\dot{w}^2}{2} = \frac{d}{dt}\frac{\dot{s}^2}{2} = -\frac{e}{m}(\dot{w}\mathfrak{E}) = \frac{e}{m}(\dot{w}\,\mathrm{grad}\,\Phi) = \frac{e}{m}\frac{d\Phi}{dt}$$

ahol $\frac{d\Phi}{dt}$ az elektrosztatikai potenciálnak az elektron helyével való változásából származó változási sebessége, ellenben minden adott helyen változatlan a Φ, úgy, hogy $\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$. Ha tehát a katódban ott, ahol még nincs az elektronnak sebessége, Φ_0 az elektrosztatikai potenciál értéke, akkor másutt, ahol Φ az értéke:

$$\dot{s}^2 = 2\frac{e}{m}(\Phi - \Phi_0) \tag{100}$$

196. Különösen pedig a cső első felének a végén $\dot{s}_1$ és Φ_1 jelentvén a megfelelő értékeket

$$\dot{s}_1 = \sqrt{2\frac{e}{m}(\Phi_1 - \Phi_0)} \tag{100$_1$}$$

De a Φ_0 a katód határára is vonatkoztatható, mert a katód határán még aránylag kicsiny az elektron sebessége és Φ_0 a katód határán, Φ_1 pedig a cső első felének a végén minden pontban, tehát minden elektronra ugyanannak számíthat. A cső első felében ezt a $(100)_1$ alatti egyenletet használták föl az első mérésekben.

197. A cső második felében csak magnetosztatikai erő hatott számottevően, mégpedig olyan, amelynek a térerőssége e csőrészben úgy irány, mint nagyság szerint egyenletesnek volt tekinthető és merőleges volt arra az $\dot{\mathfrak{r}}_1$ sebességre, amellyel az elektronok a cső első felét elhagyták, úgy, hogy $(\dot{\mathfrak{r}}_1\mathfrak{H}) = 0$. Más szóval a cső második felében nemcsak állandó, de egyenletes is volt a mágneses tér és az irányára merőlegesen rohantak be a cső második felébe az elektronok, elektromos tér pedig nem volt (számottevő mértékben).

Egy elektron mozgásának az egyenlete most ez:

$$(99)' \qquad \ddot{\mathfrak{r}} = -\frac{e}{\gamma m}[\dot{\mathfrak{r}}\mathfrak{H}]$$

Minthogy szerinte $(\dot{\mathfrak{r}}\ddot{\mathfrak{r}}) = 0$, azaz $\frac{d}{dt}\frac{\dot{s}^2}{2} = 0$, ennélfogva most $\dot{s}$ = konstans és következőleg folyvást áll, hogy

$$(100)_2 \qquad \dot{s} = \dot{s}_1$$

198. Minthogy ugyancsak $(99)'$ következtében $(\mathfrak{H}\ddot{\mathfrak{r}}) = 0$, ennélfogva, tekintve, hogy $\mathfrak{H}$ = const, integrálás rendén: $(\mathfrak{H}\dot{\mathfrak{r}})$ = const. Ámde mivel föltevésünk szerint $(\mathfrak{H}\dot{\mathfrak{r}}_1) = 0$, ennélfogva az egyenleti konstans értéke zéris, tehát:

$(100)_3$ $$(\dot{w}\,\mathfrak{H}) = 0$$

azaz folyvást merőleges az elektron sebessége a $\mathfrak{H}$ egyenletes és állandó térerősségre, miből folyólag az elektron erre merőleges síkban végzi mozgását. Valóban, további integrálás rendén $(w\,\mathfrak{H}) = const.$, azaz részletesen írva:

$$\mathcal{L}x + \mathcal{M}y + \mathcal{N}z = const.$$

ami pedig az $(\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N})$ vektorra merőleges sík egyenlete.

199. A $(100)_2$ és $(100)_3$ alatti skaláris egyenlet két elsőrendű integrálos egyenlete a $(99)'$ alatti vektoregyenletnek. Egy harmadik elsőrendű integrálos egyenletéhez eljutunk, most már integráció nélkül is. Minthogy $(100)_2$ szerint $\ddot{s} = 0$, ennélfogva az elektron teljes gyorsulása az ő radiális gyorsulásával egyenlő. Ha tehát a pálya görbületi sugara a t pillanati helyen R, akkor a gyorsulás nagysága

$$|\ddot{w}| = \frac{\dot{s}^2}{R} = \frac{\dot{s}_1^2}{R}$$

Ámde H-val jelölvén a $\mathfrak{H}$ vektor nagyságát, a vektortan szerint az $[\dot{w}\,\mathfrak{H}]$ derékszögű vektorszorzat nagysága $\dot{s}H$. Következőleg $(99)'$-ből

$$|\ddot{w}| = \frac{e}{\gamma m}\dot{s}\,H = \frac{e}{\gamma m}\dot{s}_1 H$$

Ennek és az előbbi egyenletnek az összehasonlításából:

$(100)_4$ $$R = \frac{\gamma m \dot{s}_1}{e H},$$

mely egyenlet elárulja, hogy a pálya görbületi sugara a pálya minden pontján ugyanaz. Mivel tehát síkpálya ez, amint láttuk, ennélfogva szükségképen körpálya: az elektron állandó nagyságú sebességgel az egyenletes mágnesestér irányára merőleges körvonalon mozog a cső második felében. Habár a körvonal R sugara minden kisérletben igen nagy, úgy, hogy a körpályának aránylag igen kis része fér el csak a csőben, Kaufmann legelső mérései igazolták már (1897, 1898), hogy tényleg ilymódon mozognak az elektronok a cső második felében lassú katódsugarakban, azaz körös pályán, állandó nagyságú sebességgel.

200. A $(100)_4$ alatt és $(100)_1$ alatt írt kifejezésből az $\dot{s}_1$ sebesség eliminálásával:

$$R = \frac{\gamma}{H}\sqrt{2\,\frac{m}{e}(\Phi_1 - \Phi_0)}$$

E vonatkozás szerint a pálya $\frac{1}{R}$ görbülete arányos a mágneses térerősséggel és fordítva arányos a cső első felében létesített potenciál különbség négyzetgyökével. Igen jól igazolták ezen mennyiségi vonatkozást is Kaufmann kisérletei, amelyekből $\frac{e}{m}$ értéke is kiadódott éspedig másoknak más módon végzett meghatározásaival kielégítő egyezésben

$$\frac{e}{m} = 10^{17}\cdot 5{,}6\left(M^{-\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1}\right)$$

(Az első meghatározások J. J. Thomsontól származnak).