Fișă

Analytikus mechanika.

Dr. Farkas Gyula r. ny. r. tanár
előadása után.

Kolozsvárt, 1907/8 I. félév.

Kiadja: a „Tanárjelöltek segélyegylete."

12

I. Testek és anyagi rendszerek.

A végtelen tér természeti tartalmában folytonosság szakadási felületeket tapasztalunk, vagyis oly felületeket, melyeknek egyik oldalán számottevően mások a természeti tartalom tulajdonságai, mint a másik oldalán, bármily közel is ugyanahhoz a felületi ponthoz. E felületek a végtelen tért részekre osztják; amely ilyetén térrésznek érzékelhető természeti tartalma van, annak ezt az érzékelhető természeti tartalmát nevezzük közönségesen testnek. A tudományos vizsgálodás azonban arra a fölfogásra utal bennünket, hogy ezek a folytonosság szakadási felületek csak látszólagosak és valójában igen vékony térközök jelvényei csupán, amely térközökön keresztül folytonosan változik minden természeti tulajdonság, csakhogy igen rohamos a változásuk e térközök vastagsági vonalain. Ezeknek a térközöknek a természeti tartalmát érintkezési vagy határrétegeknek nevezzük és úgy fogjuk föl azokat, hogy úgy az egyik, mint a másik oldalukon tul lévő természeti tartalom ő bennük elegyedve folytatódik. Egy ilyen határréteg mindkét oldalán tul lévő természeti tartalomhoz általában hozzászámítjuk annak a határrétegben lévő folytatását is. Némely tanulmányainkban azonban külön kell számon tartani a határrétegeket és külön a rajtuk kivül lévő természeti tartamat. Midőn egy testrészt külön akarunk tekintetbe venni, ehhez is számítunk határréteget, mint egyéni testrészhez, amely a retegben a többi résszel elegyedve van jelen.

Mechanikai céljainkra közönségesen úgy fogható fel egy test vagy testrész, mint folytonosságban egymásmellé sorakozó tömegpontok sokasága. Általánosabban pedig ilyen módon felfogott testeknek, testrészeknek, mint közös térben együttlévőknek összetétele fogandó föl egy test vagy testrész. Amely efféle alkotóknak az összetétele egy test vagy testrész, azokat anyagi componenseknek nevezzük, mihez képest egy test vagy testrész általában közös térben együttlévő anyagi componensekből áll, amely utóbbiak egyenkint folytonosságban egymásmellé sorakozó tömegpontok összetételének tekinthetők. Testet, testrészt, anyagi componenst és ilyenek rendszerét közönségesen anyagi rendszernek mondjuk.

A testek határain tul a végtelenbe terjedő tér természeti tartalmát éternek nevezzük. Föltesszük erről, hogy a testekben folytatódik úgy, hogy a testektől elfoglalt tért is kitölti, de közönségesen nem számítjuk a testekhez, illetve nem számítjuk a testek anyagi componensei közé, és közönségesen az elektromosságokat sem számítjuk azok közé, illetve a mai fölfogás szerint az utóbbiakat tévő elektronokat nem soroljuk az anyagi componensek közé.

Azt az anyagi rendszert, amelynek a mechanikai állapotával, vagyis nyugalmi vagy mozgási állapotával foglalkozni akarunk, röviden az anyagi rendszernek vagy a mi anyagi rendszerünknek nevezzük. Megjegyzendő még, hogy itt a mechanikában az anyagi rendszer componenseit általában nem chemiai értelemben gondoljuk; amely chemiai összetevők az adott viszonyok közt nem mozoghatnak különbözőképen egy testben, azokat egynek vesszük.

II. A helyhatározó rendszer választása.

Helyhatározó rendszerünket vagy valamely változatlan anyagi rendszerhez rögzítjük, vagy úgy választjuk, hogy oly helyhatározó rendszerre nézve, mely változatlan anyagi rendszerhez van kötve, transformátiójának együtthatói legalább kétszer differentiálható függvényei legyenek az időnek. Különös kijelentés hiányában minden definitionk és állításunk ilyen coordináta rendszerben értendő és általában csak ilyenben érvényesek. Változatlan anyagi rendszer ugyan voltaképen nem létezik, minden anyagi rendszer folyvást változik és csak annyi lehet igaz, hogy változatlannak látszik egy némely rendszer, másszóval, hogy megközelítőleg változatlan. Ehhez képest fentebbi meghatározásunkat így corrigáljuk: hogy mindig megválasztható úgy a coordináta rendszer, hogy benne gondolt definitioink körében állításaink helyesek és közönségesen olyan az, hogy benne valamely anyagi rendszer megközelítőleg változatlan és mozdulatlan. Az ilyen rendszer helyett olyat is használhatunk, amely amarra nézve mozog ugyan, de úgy, hogy transformátiójának együtthatói az időnek legalább kétszer differentiálható függvényei. Midőn esetleg másféle helyhatározó rendszert akarunk használni, ezt mindig különösen megemlítjük.

III. Elemi rész és annak elemi elmozdulása, sebessége, gyorsulása.

Egy anyagi componens végtelen kis részét elemi részének mondjuk. Ha egy elemi rész egy pontja t pillanatban A helyen, ugyanazon elemi rész egy pontja pedig dt idővel később B helyen van, és az AB távolság végtelenszerte nagyobb, mint az elemi rész bármely átmérője a dt idő alatt, akkor azt mondjuk, hogy az elemi résznek a dt időközben elmozdulása van, illetve, hogy az elemi rész a dt idő alatt A helyből B-be mozgott, és az AB vectort az ő dt időközi elemi elmozdulásának mondjuk. Ha az elemi rész az A pont körül nem lehet oly kicsiny, hogy a dt időközben elmozdulása legyen, azt mondjuk, hogy az anyagi componens A pontja nyugalomban van a dt időközben. Ha ez nem így van, akkor bármi kicsiny is legyen a dt, bizonyosan megválasztható oly kicsinynek az elemi rész az A pont körül, hogy elmozdulása legyen a dt időközben. Midőn egy anyagi rész egy pontja nincs nyugalomban, akkor a következendőkben mindig úgy gondoljuk megválasztva egy dt időelemnek és annak pont körüli elemi rész méreteinek viszonyát, hogy legyen az elemi résznek elemi elmozdulása a dt időközben. Így értendő mindig az elemi rész a következendőkben. Elemi elmozdulásának és a dt időnek a hányadosáról feltehető, hogy az a hely és idő folytonos, sőt differentiálható függvénye az anyagi rendszerben, s az elemi rész sebességének nevezzük. Totális idődeiváltját pedig az elemi rész gyorsulásának nevezzük. Ezek a fogalmak nyilvánvalóan egybeesnek a pont-kinematika azonos nevű fogalmaival s azért az ezekhez fűzött megállapítások reájuk is alkalmazhatók.

IV. Kényszer.

Az elemi részek sohasem mozoghatnak bármi módon; mozgásuk szabadsága mindig korlátozott. Bármily módon gondoljunk is elemi részekre osztva egy anyagi rendszert, illetőleg annak az anyagi komponenseit, elemi részeinek egyidejűleg lehetséges elemi elmozdulásai sohasem egészen tetszésszerintiek. Az elemi részek összefüggésük által mindig korlátok közt tartják valamiképen egymás mozgási szabadságát és ha az anyagi rendszer más anyagi rendszerrel érintkezik, többé-kevésbbé általában ezek is korlátozzák elemi részeinek a mozgási szabadságát. A korlátozás első módját belső kényszerből, második módját külső kényszerből származónak mondjuk. Ha az anyagi rendszer oly anyagi rendszerrel vagy olyannal is érintkezik, amelynek a tömege az ő benne foglalt testek mindenikének a tömegéhez képest elenyésző kicsiny, úgy ezt a korlátozó rendszert kapcsoló rendszernek s egyben tömegtelennek mondjuk; amennyiben pedig az anyagi rendszer oly anyagi rendszerrel, vagy olyannal is érintkezik, amelynek mechanikai állapota az övétől függetlennek számítható, úgy ezt az anyagi rendszert teleprendszernek mondjuk. Ha a kapcsoló rendszer oly anyagi rendszerrel is érintkezik, amelynek a mechanikai állapota független a mi anyagi rendszerünktől, ezt is teleprendszernek fogjuk nevezni, illetőleg a teleprendszerhez fogjuk számítani akkor is, ha a mi rendszerünkkel nem érintkezik. Ha az anyagi rendszer oly anyagi rendszerrel, vagy olyannal is érintkezik, amely nem korlátozza határos elemi részeinek a mozgási szabadságát, akkor anyagi rendszerünk határfelületét, illetve határfelületének azt a részét, ~~amely~~ a nem korlátozó rendszerrel határos, szabad felületnek nevezzük. Amit tehát szabad felületnek nevezünk, azon nincs külső kényszer. A következőkben mindig oly anyagi rendszerre gondoljunk, amelynek a külső kényszere csak kapcsoló, vagy csak telep rendszertől vagy kapcsoló és telep rendszertől származik; tehát olyanra gondoljunk mindig, amely az ő határán csak kapcsoló rendszerrel, teleprendszerrel és nem korlátozó rendszerrel érintkezik. Ha az anyagi rendszer, amelynek a mechanikájával foglalkozni akarunk, másféle rendszerekkel is érintkezik, mint ilyenekkel, akkor tehát oly anyagi rendszert választunk ki a végetlen tér természeti tartalmából, amely egyfelől magában foglalja azt a bizonyos anyagi rendszert, mellyel foglalkozni akarunk, másfelől vagy nem visel külső kényszert, vagy csak kapcsoló rendszertől és telep rendszertől visel külső kényszert.

Egy-egy anyagi componens elemi részeinek lehetséges elemi elmozdulásairól feltehető, hogy az a hely differentiálható függvénye, és már ezzel is korlátozva van. Azonfelül a belső kényszer kifejezésére még közönségesen határozott linearis elsőrendű partialis differentiális relatiók, egyenletek és egyenlőtlenségek szolgálnak az anyagi componensek egy helyben lévő elemi részeinek lehetséges sebességei között, mi mellett azonban algebrai linearis relatiók, egyenletek és egyenlőtlenségek is állhatnak fenn közöttük. A relatiók együtthatói általában az idő, a hely és a tényleges sebességek folytonos függvényei; sebességeken az anyagi componenseknek az illető pontban és pillanatban lévő sebességei értetvén.

Ha legalább egy relatiónk együtthatói az elemi részek tényleges sebességétől is függenek, akkor azt mondjuk, hogy belső surlódása van az anyagi rendszernek. Ha egyetlen relatió együtthatói sem függenek az elemi részek sebességétől, hanem legfeljebb csak a helytől és időtől függenek /: ami csak megközelíthető eset lehet:/, akkor azt mondjuk, hogy rendszerünkbe kell beszámítanunk úgy, hogy a mi anyagi rendszerünk egy kiegészítő részét képezze.

V. Szabad gyorsulás és szabad erő, teljes erő, kényszer erő.

Az anyagi rendszer egy componensének egy belső elemi részéből és annak a környezetéből, ép úgy az anyagi rendszer szabad felületén lévő elemi részből és annak környezetéből eltávolítva gondoljuk igen kis időre az anyagi rendszer összes többi részeit úgy, hogy egy végtelen kis zárt felületen belül az anyagi rendszernek csupán azon egyetlen elemi része legyen meg. Amely gyorsulással ekkor birna az a belső vagy az a szabad felületen lévő elemi rész, azt szabad gyorsulásának nevezzük; szabad gyorsulásának a tömegével képzett szorzatát a reá ható szabad erőnek mondjuk. Nem szabad felületen lévő elemi részből és annak a környezetéből eltávolítva gondoljuk nem csak az anyagi rendszer elemi részeit, hanem a kapcsoló vagy telep rendszer elemi részeit is igen kis időre s amely gyorsulással ekkor bir az elemi rész azt nevezzük az ő szabad gyorsulásának; ennek és tömegének szorzatát a reá ható szabad erőnek. Figyelembe veendő, hogy sem az éternek, sem az elektromosságoknak a részeit nem gondoljuk eltávolítva az elemi részből és környezetéből. Az anyagi rendszer belsejében csakis magának az anyagi rendszernek a részeit annak az egynek a kivételével, az anyagi rendszer határán pedig erőket és még csak a határos kapcsoló vagy telep rendszer részeit gondoljuk eltávolítva, de sohasem az étert és az elektromosságokat.

Ha az elemi rész szabad gyorsulása γ, tömege: Dm, úgy a reá ható szabad erő:

$$\gamma . Dm$$

Ha pedig az elemi rész térfogata $D\tau$ és ha $Dm = k . D\tau$, úgy a k együttható neve az elemi rész tömöttsége lévén az elemi részre ható szabad erő egyszersmind az elemi rész szabad gyorsulásának, tömöttségének és térfogatának a szorzata minden időpontban $= \quad \gamma . k . D\tau$.

Feltehető, hogy γ és k minden anyagi componens belsejében folytonos, sőt differentiálható függvénye a helynek és időnek.

Az elemi rész tömegének és tényleges gyorsulásának a szorzatát a reá ható teljes erőnek nevezzük; ennek és a szabad erőnek a külömbségét az elemi részre ható kényszererőnek mondjuk.

A szabad erő transformatiója más coordináta rendszerekbe most a folytonos testek esetében ép úgy történik, mint tömegpontok esetében, mert szabad erők definitiója a folytonos testek esetében hasonló a tömegpontok esetében adott definitiójához.

VI. A kapcsoló rendszer passivitása.

Legyen, hogy t pillanattól kezdve kis időre a kapcsoló rendszernek és a teleprendszernek a mi anyagi rendszerünktől független mozgását, ha van ilyen, meggátoljuk, továbbá anyagi rendszerünket ezektől a rendszerektől oly módon megszabadítjuk, hogy velük határos elemi részeinek környezetéből ezek elemi részeit eltávolítjuk, továbbá, hogy oly szabad erőket hattatunk anyagi rendszerünkre, hogy a t pillanat után következő kis időre nyugalomban legyen az. Ha akkor is nyugalomban volna, hogyha a kapcsoló rendszertől nem szabadítottuk volna meg, és ha így van ez, bármikép válasszuk is meg a t pillanatot és bármilyen is a mi anyagi rendszerünknek abban lehetséges helyzete és állapota, így azt mondjuk, a kapcsoló rendszerről, hogy passio. E mellett soha se feledjük azokat a megszorításokat se, amelyeket a kényszerről szoló articulus végén tettünk a kapcsoló rendszert illetőleg. A következőkben, ha csak az ellenkezőt kifejezetten nem állítjuk, mindig felfogjuk tenni, hogy a kapcsoló rendszer passio, ami különben, mint minden rideg fizikai feltevésünk, állításunk, valóságban csak megközelítőleg fordulhat elő, már csak azért is, mert nyugalom a szószoros értelme szerint soha sem létezik, ugy-hogy amit nyugalomnak mondunk, voltaképen az elemi részeknek igen kis terekben veszteglő mozgása; ámde oly kis terekben veszteglő mozgása lehet, hogy észlelése legfeljebb mesterséges módon igen finom eszközök segítségével lehetséges.

VII. Munka fogalmak.

Azon félék, mint a tömegpontok mechanikájában. Egy elemi részre ható $\mathfrak{v}.Dm$ szabad erőnek és az elemi rész $d\mathfrak{r}$ elemi elmozdulásának skaláris szorzatát

$$\mathfrak{v}.Dm . d\mathfrak{r} = \mathfrak{v}.d\mathfrak{r}.Dm$$

„a $\mathfrak{v}Dm$ szabad erőtől az elemi rész $d\mathfrak{r}$ elmozdulásán dt idő alatt végzett munka", vagy „a szabad erőnek az elemi részen dt időelemben végzett elemi munkája." Az anyagi rendszerre vagy annak egy részére kiterjedő összegeléssel:

$$S\,\mathfrak{v}.d\mathfrak{r}.Dm$$

„a szabad erőknek az anyagi rendszeren, illetőleg annak egy részén végzett elemi munkája"; természetesen az összegben foglalt $d\mathfrak{r}$ elemi elmozdulásokon egyidejű elemi elmozdulások értendők.

Ha a Dm tömegű rész coordinátái: x, y, z, úgy részletesen írva:

$$S(\mathfrak{v}_x.dx + \mathfrak{v}_y.dy + \mathfrak{v}_z.dz).Dm$$

ez az elemi munka. Továbbá az

$$(\ddot{\mathfrak{r}} - \mathfrak{v})Dm.d\mathfrak{r} = (\ddot{\mathfrak{r}} - \mathfrak{v}).d\mathfrak{r}.Dm$$

„a kényszererőnek az elemi részen dt idő alatt végzett elemi munkája" és

$$S(\ddot{\mathfrak{r}} - \mathfrak{v}).d\mathfrak{r}.Dm$$

„a kényszererőknek az anyagi rendszerünkön vagy annak egy részén dt idő alatt végzett elemi munkája." Részletesen írva:

$$S[(\ddot{x}-\varphi_x)dx+(\ddot{y}-\varphi_y)dy+(\ddot{z}-\varphi_z)dz].Dm$$

az egész anyagi rendszerünkön vagy annak egy részén végzett elemi munkája a kényszernek, aszerint, amint az összegelést az egész rendszerre vagy egy részére vonatkoztatjuk.

Ha mindezekben a kifejezésekben a dr tényleges elmozdulások helyett a ∂r lehetséges elemi elmozdulásokat írjuk, akkor a megfelelő „lehetséges elemi munkákat" kapjuk. Természetesen az összegekben mindig egyidejűleg lehetséges elemi elmozdulások értendők.

VIII. Általános tapasztalati törvény.

Az előre bocsátott definitiók és feltevések értelmében, mint tapasztalati törvény állítható, hogy egy anyagi rendszer tényleges mechanikai állapotában a reá ható kényszererők minden időelemben a lehető legkisebb munkát végzik a használt helyhatározó rendszerben. A dt időelemben egyidejűleg lehetséges, különben bármiféle elemi elmozdulásokat $(\partial x, \partial y\ \partial z) \equiv \partial r$, ugyanazon dt időelemben valósággal létesülőket $(dx, dy, dz) \equiv dr$ jelölvén, a kimondott tapasztalati törvény általános kifejezése ez:

$$S(\ddot{r}-\varphi)\partial r.Dm \geqq S(\ddot{r}-\varphi).dr.Dm$$

illetőleg részletesen:

$$S[(\ddot{x}-\varphi_x)\partial x+(\ddot{y}-\varphi_y)\partial y+(\ddot{z}-\varphi_z)\partial z]Dm \geqq S[(\ddot{x}-\varphi_x)dx+(\ddot{y}-\varphi_y)dy+(\ddot{z}-\varphi_z)dz]Dm.$$

Nyilvánképen így is írható ezen egyenlőtlenség:

$$S[(\ddot{x}-y_x)(\partial x-dx)+(\ddot{y}-y_y)(\partial y-dy)+(\ddot{z}-y_z)(\partial z-dz)]\mathfrak{D}m \geqq 0$$

A $(\partial w-dw)=(\partial x-dx, \partial y-dy, \partial z-dz)$ vectorokat virtuális elmozdulásoknak nevezzük és $(\delta x, \delta y, \delta z)$ jelvénnyel jelöljük. E jelölés szerint

$$S[(\ddot{x}-y_x)\delta x+(\ddot{y}-y_y)\delta y+(\ddot{z}-y_z)\delta z].\mathfrak{D}m \geqq 0.$$

A baloldali kifejezést a kényszererők virtuális munkájának mondjuk. Tapasztalati tételünk így is kimondható tehát: A kényszererők virtuális munkája sohasem negatív. Röviden a virtuális munka törvényének mondjuk tapasztalati törvényünket s mégrövidebben alaptörvénynek nevezzük.

A virtuális elmozdulások, u. mint: $(\delta x, \delta y, \delta z) \equiv (\partial x-dx, \partial y-dy, \partial z-dz)$ nyilvánvalóan egyszersmind azok az elemi elmozdulások, amelyek, végtelen nagy sebességekkel lehetségesek az anyagi rendszerben; ugyanis ha $(\partial x, \partial y, \partial z)$ végtelen nagy sebességgel lehetséges elemi elmozdulás, akkor hozzá képest (dx, dy, dz) nem tesz számot, mert ez mindig véges sebességgel létrejövő elemi elmozdulás. Ennélfogva $\delta x=\partial x$, stb teendő, mihelyt $(\partial x, \partial y, \partial z)$ végtelen nagy sebességgel lehetséges elemi elmozdulást jelent. E végtelen nagy sebességgel lehetséges elemi elmozdulások létrejöttének ideje alatt az anyagi rendszer reájuk nézve nyugalomban lévőnek tekinthető, valamint a kapcsoló és telep rendszer is. Ennek a tekintetbe vételével sokszor egyenesen megtudjuk szerkeszteni a virtuális elmozdulások relatióit. Kiváltpedig sokszor tudjuk felismerni a virtuális elmozdulások értéktartományának valamely részét.

Vegyük még figyelembe, hogy egy-egy anyagi componensben a virtuális elmozdulások is differentiálható függvényei a helynek, t.i. annak következtében, hogy az egyidejüleg lehetséges elmozdulások azok és egyuttal a valóságos elemi elmozdulások is azok. Már most vegyük észre azt is, hogy a virtuális elmozdulásoknak más tengelyrendszerekbe való transformátiója ugyanazon szabály alá esik itt a folytonos testek körében, mint tömegpontok körében. E szerint, ha egy coordináta transformatió egyenletei ezek:

$$x' = a + \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z$$
$$y' = b + \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z$$
$$z' = c + \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z,$$

úgy:

$$\delta x' = \alpha_1 \delta x + \beta_1 \delta y + \gamma_1 \delta z$$
$$\delta y' = \alpha_2 \delta x + \beta_2 \delta y + \gamma_2 \delta z$$
$$\delta z' = \alpha_3 \delta x + \beta_3 \delta y + \gamma_3 \delta z.$$

akkor is, ha az a, b, c origói coordináták és az α, β, γ kilenc iránycosinus változik az idővel.

A következőkben a szabad gyorsulások helyett gyakran fogjuk használni majd a szabad erőket. Irjuk, hogy:

$$\varphi_x \cdot Dm = DX, \quad \varphi_y \cdot Dm = DY, \quad \varphi_z \cdot Dm = DZ,$$

akkor (DX, DY, DZ) a szabad erő, és pedig az a szabad erő, amely t pillanatban x, y, z helyen Dm tömegü elemi részre hat. Ennek az alkalmazásával a virtuális munka törvénye igy van:

$$S[(\ddot{x}Dm-DX)\delta x+(\ddot{y}Dm-DY)\delta y+(\ddot{z}Dm-DZ)\delta z]\geqq 0.$$

Ne feledjük, hogy a kapcsoló rendszer passiv; ha activ volna, a kapcsoló rendszer, akkor már ez az egyenlőtlenség általában nem állana; azonban bizonyosan lehet olyan (DX', DY', DZ') vectort adni a (DX, DY, DZ) vectorhoz, hogy ekkor is álljon. Ezt a kapcsoló rendszertől származó erőnek nevezzük. Némely gyakran előforduló kapcsoló rendszerek esetében külön kisérletekkel megtudjuk határozni ez értéket. Pl. midőn a kapcsoló rendszer nyujthatatlan, de a torzio ellenében rugalmas testszál.

IX. Az egyszerübb particuláris alkalmazások jellemzése.

Ritkán ismerjük annyira anyagi rendszerünket, hogy összes virtuális elmozdulásait megtudjuk határozni; vagyis, hogy oly relatiókat tudjunk szerkeszteni a rendszer elemi részeinek virtuális elmozdulásai közt, amelyeknek az összes virtuális elmozdulások eleget tesznek s amellett, amely elemi elmozdulások eleget tesznek neki, azok mind virtuális elmozdulások legyenek igy, hogy ezek összességét képezzék. De gyakran megtudjuk határozni a virtuális elmozdulások egy részét, esetleg különböző fajú részeit. Legyenek erre példakép emlitve a következő speciális egyszerü esetek:

1.)

Az anyagi rendszer egy-vagy több irányban virtuálisan eltolható, vagyis úgy mozdítható virtuálisan, hogy minden elemi része egyenlő virtuális elmozdulást végezzen, vl. valamennyi $(\delta a, \delta b, \delta c)$ virtuális elmozdulást v. gezzen midőn is ezt a $(\delta a, \delta b, \delta c)$ elmozdulást a rendszer virtuális eltolásának nevezzük. Vagy általánosabban egy vagy több testből álló anyagi rendszerben az egyes testek u. m.:

$$\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \mathcal{T}_3, \ldots \mathcal{T}_n,$$

egyszerre virtuálisan eltolhatók

$(\delta a_1, \delta b_1, \delta c_1)$ $(\delta a_2, \delta b_2, \delta c_2)$, ... $(\delta a_n, \delta b_n, \delta c_n)$, virtuális eltolásokkal, amelyek közt általában egyszerű relátiók állanak fenn.

2.) Van egy vagy több oly tengely, amely körül az anyagi rendszer virtuálisan elfordítható vagyis úgy mozdítható virtuálisan, hogy minden elemi része változatlan távolban marad a tengelytől, és egyenlő szöget egyező értelemben ír le virtuálisan a tengely körül, a tengelyre merőleges mozdulással; vagy általánosabban: egy több testből álló anyagi rendszerben az egyes testek egyszerre elfordíthatók, mindenik valamely tengely körül virtuálisan.

3.) A virtuális elmozdulások közt vannak a valóságos elmozdulásokkal arányos elmozdulások.

E három eset különös fontossággal bír; amellett előfordulhat, hogy egyszerre kettő is beválik a háromból, vagy mindenik beválik. Általában igen speciális csoportjai a három esetben foglaltak a virtuális elmozdulásoknak, de így ezek alapján, mint más speciális csoportok alapján is nem ritkán vonhatók érdekkel biró következtetések a mechanikai állapotra, amelynek a teljes tárgyalására pedig az összes virtuális elmozdulások volnának szükségesek és azonfelül még általában hátani ismeretek is. Most majd egyenként az elésorolt három esettel fogunk foglalkozni. Tárgyalásuk bizonyos fogalmak ismeretét kivánja, ilyenek: a tömegcentrum, a forgató momentum, inertia momentum, stb. Legközelebb az első esetről legyen szó. Ehhez meg kell ismerkednünk a tömegcentrum fogalmával és mindenek előtt ezzel ismerkedünk meg.

X. A tömegcentrum fogalma.

Két elemi rész, testelem, tömegcentrumán azt a pontot értjük, amely a két test elem távolsági vonalát a két tömeg forditott arányában osztja két részre. Ha tehát Dm_1 az egyik testelem tömege, Dm_2 a másiké, és ha a kettőnek a távolsági vonalán az O oly pont, hogy Dm_1-től való távola úgy aránylik a Dm_2-től való távolához, mint $Dm_2 : Dm_1$, akkor az O pont a Dm_1 tömegű és Dm_2 tömegű test tömegcentruma. Az első távolságot jelölje r_1, a másikat r_2, akkor a távolsági vonalon a tömegcentrum az 0. pont, ha $\frac{r_1}{r_2} = \frac{\mathfrak{D}m_2}{\mathfrak{D}m_1}$

Három testelem tömegcentrumán azt a pontot értjük, amely két testelem tömegcentrumának és a harmadik testelemnek távolsági vonalát a két testelem összes tömegének és a harmadik testelem tömegének forditott arányában osztja két részre.

Négy testelem tömegcentrumán azt a pontot értjük, amely három testelem tömegcentrumának és a negyedik testelemnek távolsági vonalát a háromtestelem összes tömegének és a negyedik testelem tömegének forditott arányában osztja két részre, s.i.t..

Akárhány testelemhez egy tömegcentrum tartozik, vagyis a tömegcentrum mindig teljesen meghatározott pont. Ez két testelem esetén világos, azonban három testelem esetén már kétségesnek látszik, mert azt a két testelemet, amelynek tömegcentrumára támaszkodik a három testelem tömegcentrumának a definitiója, háromféleképen lehet megválasztani; négy testelem esetén 12, öt testelem esetén 60 féleképen határozható meg a tömegcentrum definitionk szerint. Ámde mindig bármely meghatározási mód ugyanahhoz a ponthoz vezet. Most majd meggyőződést fogunk erről szerezni, minek rendjén azt is megfogjuk tudni, hogy miképp lehet adott testelemnek coordinátáival és tömegével azok tömegcentrumának coordinátáit kifejezni.

Két testelem esetén egyik testelem tömegét Dm_1, coordinátáit: $x_1 y_1 z_1$, a másik testelem tömegét, illetőleg coordinátáit: Dm_2, $x_2 y_2 z_2$ jelölje; a két testelem tömegcentrumának a coordinátáit pedig ξ_2, η_2, ζ_2 jelölje. Könnyű felismerni, hogy az 1-es számú testelemből a tömegcentrumba nyuló vector és a tömegcentrumból a 2ös számú testelembe nyuló vector egyező irányúak. Az első vector componensei azonban ezek:

$$\xi_2 - x_1, \quad \eta_2 - y_1, \quad \zeta_2 - z_1$$

a másik vector componensei pedig:

$$x_2 - \xi_2, \quad y_2 - \eta_2, \quad z_2 - \zeta_2.$$

Igy tehát a két vector közös irányának iránycosinusai: $\frac{\xi_2 - x_1}{r_1} = \frac{x_2 - \xi_2}{r_2}$, stb.

Ebből folyólag:

$$\frac{\xi_2 - x_1}{x_2 - \xi_2} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{Dm_2}{Dm_1}, \text{ tehát}$$

$$\xi_2 = \frac{x_1 Dm_1 + x_2 Dm_2}{Dm_1 + Dm_2};$$ hasonlóképen találjuk, hogy

$$\eta_2 = \frac{y_1 Dm_1 + y_2 Dm_2}{Dm_1 + Dm_2}; \quad \zeta_2 = \frac{z_1 Dm_1 + z_2 Dm_2}{Dm_1 + Dm_2}.$$

Három testelem esetén a harmadiknak a tömegét jelölje Dm_3, a coordinátáit pedig jelöljék $x_3 y_3 z_3$; a három testelem tömegcentrumának a coordinátái legyenek: ξ_3, η_3, ζ_3. Ezt a pontot a definitió értelmében úgy kell meghatározni, mintha a Dm_1 és Dm_2 tömegű testelem a maga tömegcentrumában volna. E szerint tehát:

$$\xi_3 = \frac{\xi_2 (\mathfrak{D}m_1 + \mathfrak{D}m_2) + x_3 \mathfrak{D}m_3}{(\mathfrak{D}m_1 + \mathfrak{D}m_2) + \mathfrak{D}m_3}$$

vagyis ξ_2 kifejezésének helyettesítése után:

$$\xi_3 = \frac{x_1 \mathfrak{D}m_1 + x_2 \mathfrak{D}m_2 + x_3 \mathfrak{D}m_3}{\mathfrak{D}m_1 + \mathfrak{D}m_2 + \mathfrak{D}m_3}.$$

Hasonlóképen találjuk, hogy:

$$\eta_3 = \frac{y_1 \mathfrak{D}m_1 + y_2 \mathfrak{D}m_2 + y_3 \mathfrak{D}m_3}{\mathfrak{D}m_1 + \mathfrak{D}m_2 + \mathfrak{D}m_3}$$

$$\zeta_3 = \frac{z_1 \mathfrak{D}m_1 + z_2 \mathfrak{D}m_2 + z_3 \mathfrak{D}m_3}{\mathfrak{D}m_1 + \mathfrak{D}m_2 + \mathfrak{D}m_3}.$$

Négy testelem esetén a tömegcentrum definitiója értelmében úgy határozható meg a tömegcentrum, hogy háromtestelem tömegcentrumában gondoljuk a három testelemet és az így egyesített három testelemhez, mint egyhez, és a negyedikhez keressük a tömegcentrumot. E szerint, ha a négy test elem tömegcentrumának a koordinátái ξ_4, η_4, ζ_4, és a negyedik testelem tömege $\mathfrak{D}m_4$, koordinátái $x_4 y_4 z_4$, akkor:

$$\xi_4 = \frac{\xi_3 (\mathfrak{D}m_1 + \mathfrak{D}m_2 + \mathfrak{D}m_3) + x_4 \mathfrak{D}m_4}{(\mathfrak{D}m_1 + \mathfrak{D}m_2 + \mathfrak{D}m_3) + \mathfrak{D}m_4}, \text{ stb.}$$

Ezekből helyettesítés rendjén:

$$\xi_4 = \frac{x_1 \mathfrak{D}m_1 + x_2 \mathfrak{D}m_2 + x_3 \mathfrak{D}m_3 + x_4 \mathfrak{D}m_4}{\mathfrak{D}m_1 + \mathfrak{D}m_2 + \mathfrak{D}m_3 + \mathfrak{D}m_4}, \text{ stb.}$$

Nyilvánvaló, hogy n testelem tömegcentrumának koordinátái ezek:

$$\xi = \frac{x_1 \mathfrak{D}m_1 + x_2 \mathfrak{D}m_2 + \dots + x_n \mathfrak{D}m_n}{\mathfrak{D}m_1 + \mathfrak{D}m_2 + \dots + \mathfrak{D}m_n},$$

$$\eta = \frac{y_1 \mathfrak{D}m_1 + y_2 \mathfrak{D}m_2 + \dots + y_n \mathfrak{D}m_n}{\mathfrak{D}m_1 + \mathfrak{D}m_2 + \dots + \mathfrak{D}m_n},$$

$$\zeta = \frac{z_1 Dm_1 + z_2 Dm_2 + \dots + z_n Dm_n}{Dm_1 + Dm_2 + \dots + Dm_n}.$$

Minthogy ezek a kifejezések az indexekre nézve symmetrikusak, ennélfogva határozott pontot jelölnek, vagyis bármely combinatió szerint is válaszuk a testeknek sorrendjét, mindig ugyanahhoz a ponthoz jutunk el.

Vegyük észre, hogy a coordináta rendszertől független a tömegcentrum amiatt, hogy eredeti definitiói függetlenek attól.

Azonban eredeti definitióinknak csak úgy van értelme, hogyha a rendre tekintetbe vett elemi részek méretei a rendre tekintetbe veendő távolságokhoz képest számot nem tévő kicsinyek.

Kérdés tehát, hogy folytonos anyagi rendszerre, illetőleg ilyet alkotó elemi részekre alkalmazható-e? mellőzve e kérdés vizsgálatát, fordítsuk figyelmünket az n elemi rész tömegcentrumát meghatározó analytikus kifejezéseinkre; világos, hogy ezeknek akkor is van értelmük, hogyha folytonos anyagi rendszer elemi részeinek tekintjük benne az elemi részeket, mikor is $n = \infty$, ugyanis a nevező mindig a teljes tömeget jelenti; ez határozott érték; a számláló pedig a különböző anyagi componensek szerint rendezve minden egyes anyagi componensre nézve határozott értelmű térintegrálokat képeznek azáltal, hogy a tömegelemeket térelemekkel és a tömöttségekkel fejezzük ki azokban. S nyilvánképen úgy is eljárhatunk, hogy minden térelem teljes anyagi tartalmát számítjuk egy testelemnek, amidőn minden számláló egyetlen térintegrált képez, t.i. a térelemek teljes anyagi tartalmának a teljes tömöttsége szerint; az utóbbi eljárást követve legyen $D\tau$ anyagi tartalmának teljes tömege Dm, teljes tömöttsége k, akkor

$$\xi = \frac{S x Dm}{S Dm} = \frac{S x k D\tau}{S Dm}$$

$$\eta = \frac{S y . Dm}{S Dm} = \frac{S y k D\tau}{S Dm}.$$

$$\zeta = \frac{S z Dm}{S Dm} = \frac{S z k D\tau}{S Dm}.$$

Ezek a tömegcentrum coordinátái. Előre gondolható, hogy most is független a tömegcentrum a coordináta rendszertől, de coordináta transformatio által directe is meggyőződhetünk erről.

Mindenekelőtt áttérnénk a tömegcentrumok mechanikájának megállapítására, célszerű lesz megismerkednünk egy tétellel, mely sokszor nagyon hasznos tömegcentrumok helyének a megállapításában.

Ha egy anyagi rendszert tetszésszerinti módon véges részekre osztva gondolunk, azután minden egyes véges rész helyett annak tömegcentrumában az ő tömegével biró végtelen kis testet gondolunk, az így keletkező rendszer tömegcentruma mindig egyezik az eredeti rendszer tömegcentrumával. Lássuk, hogy ez csakugyan így van. Az anyagi rendszer egyes részeinek a tömege legyen m_1, m_2, .. stb.; e részek tömegcentrumának a coordinátái legyenek rendre: ξ_1, η_1, ζ_1, ξ_2, η_2, ζ_2, ..., ha most az egész m_1 tömeget ennek tömegcentrumában (ξ_1, η_1, ζ_1) ben, az egész m_2 tömeget annak tömegcentrumában (ξ_2, η_2, ζ_2) ben gondoljuk, stb., az így előállott rendszer tömegcentrumának coordinátái a következők:

$$\xi = \frac{\xi_1 m_1 + \xi_2 m_2 + \cdots}{m_1 + m_2 + \cdots}, \text{ stb.}$$

Ámde az eredeti valóságos anyagi rendszerben:

$$\xi_1 = \frac{S_1\, x . Dm}{S_1\, Dm}, \text{ stb.}$$

$$\xi_2 = \frac{S_2\, x . Dm}{S_2\, Dm}, \text{ stb.}$$

ahol a summa indexek az kívánják, hogy az összegelés a rendszernek csak az illető indexxel jelölt részére terjedjen ki. Minthogy

$$S_1\, Dm = m_1, \text{ stb.}$$

ennélfogva

$$\xi_1 m_1 = S_1\, x\, Dm, \text{ stb}$$

Helyettesítsük be az ilyeneket azon kifejezésekbe, melyeket előbb állítottunk elé, akkor kapjuk, hogy

$$\xi = \frac{S_1\, x\, Dm + S_2\, x\, Dm + \cdots}{S_1\, Dm + S_2\, Dm + \cdots}, \text{ stb.}$$

ezek azonban igy is irhatók:

$$\xi = \frac{S x Dm}{S Dm} \quad , \text{stb.}$$

ha az indextelen összegelések az egész anyagi rendszerre kiterjednek. Már pedig ezek a kifejezések nem egyebek, mint az eredeti anyagi rendszer tömegcentrumának a coordinátái.

XI. A tömegcentrum mozgásáról.

A.) Legyen, hogy az anyagi rendszer virtuálisan minden irányban eltolható. Akkor bármely virtuális eltolást jelentsen $(\delta a, \delta b, \delta c)$, egyebek közt valamennyi virtuális elmozdulás helyébe irható ez a $(\delta a, \delta b, \delta c)$ vector, tehát az alapegyenlőtlenségben is, u.m.:

$$S[(\ddot{x} Dm - DX)\delta x + (\ddot{y} Dm - DY)\delta y + (\ddot{z} Dm - DZ)\delta z] \geqq 0$$

meg van engedve, hogy valamennyi $(\delta x, \delta y, \delta z)$ helyett $(\delta a, \delta b, \delta c)$ irassék, amidőn azután alapegyenlőtlenségünk ezt az alakot ölti:

$$\delta a . S(\ddot{x} Dm - DX) + \delta b . S(\ddot{y} Dm - DY) + \delta c . S(\ddot{z} Dm - DZ) \geqq 0$$

uhol $\delta a, \delta b, \delta c$ egyenként mindahárom tetszésszerinti és következőleg:

$$S(\ddot{x} Dm - DX) = 0$$
$$S(\ddot{y} Dm - DY) = 0$$
$$S(\ddot{z} Dm - DZ) = 0$$

Világosan kitűnik ez, hogyha egyszer $\delta b = 0, \delta c = 0,$

és Sa helyett egyszer positivot, egyszer negativot gondolunk, és i. tb.

Ámde

$$S\ddot{x}Dm = \frac{d^2}{dt^2}\cdot SxDm = \frac{d^2}{dt^2} m\xi = m\ddot{\xi} \;,$$

ha t. i. az egész rendszer tömege m és tömegcentrumának coordinátái ξ, η, ζ. Vannak tehát a következő egyenleteink:

$$m\ddot{\xi} = SDX \;, \quad m.\ddot{\eta} = SDY, \quad m\ddot{\zeta} = SDZ.$$

Nyilvánvalóan azt mondják ezek az egyenletek, hogy az anyagi rendszer tömegcentruma így mozog, mintha m tömegű szabad tömegpont volna és az anyagi rendszerre ható összes szabad erők reája hatnának.

A (SDX, SDY, SDZ) vectort a szabad erők toló hatásának nevezzük. Ha ennek a componensei u.m. SDX, stb. csak (ξ, η, ζ)-ának, ezek időderiváltjainak, és az időnek a függvényei, akkor három határozott differentiál egyenletünk van a tömegcentrum számára.

1. példa.

Naprendszerünk nem visel külső könyszert, tehát eltolható minden irányban virtuálisan és így megilletik a levezetett egyenletek. Továbbá elemi részei megközelítőleg oly szabad erők hatását viselik, amelyek hatását viselnék, ha csak a benne foglalt anyagi rendszer léteznék, vagyis, amint mondani szokás, csak belső szabad erők hatását viselik. Továbbá a szabad erők ~~köz~~ egy Newtontól kimondott tapasztalati törvény, az actio-reactio törvénye szerint olyanok, hogy összegük, vagyis tolt hatásuk zérus. Ma ezt a törvényt nem tarthatjuk pontosan igaznak, de közelitőleg beválik. Ehhez képest naprendszerünket illetőleg megközelitőleg:

$$\ddot{\xi}=0,\ \ddot{\eta}=0,\ \ddot{\zeta}=0$$

Ebből pedig:

$$\dot{\xi}=\text{const.},\ \dot{\eta}=\text{const.},\ \dot{\zeta}=\text{const.}$$

azaz naprendszerünk tömegcentruma megközelitőleg állandó sebességgel mozog.

2. példa.

Egy kidobott test a szabad levegőben visel ugyan külső kényszert, ugyanis surlódási kényszert visel, azonban, amig határpontjainak a sebessége nem ~~n~~ nagy, addig ezt a kényszert figyelmen kivül hagyhatjuk, illetőleg jó közelitéssel tehetjük föl, hogy nincs külső kényszer; e szerint csak jó közelitéssel tehetjük föl azt is, hogy minden irányban eltolható virtuálisan a test s következőleg megilletik az

$$m\,\ddot{\xi}=\mathcal{S}\,\mathfrak{D}\mathfrak{X},\quad m.\ddot{\eta}=\mathcal{S}\,\mathfrak{D}\mathfrak{Y},$$

$$m.\ddot{\zeta}=\mathcal{S}\,\mathfrak{D}\mathfrak{Z}$$

egyenletek. Ezekben a $(\mathfrak{D}\mathfrak{X},\ \mathfrak{D}\mathfrak{Y},\ \mathfrak{D}\mathfrak{Z})$ szabad erő egy részét, azaz egy összetevőjét belső szabad erők tesik, vagyis azok a szabad erők, melyek akkor hatnának a testben, ha más anyagi rendszer nem léteznék, mint maga a test. Ezek összege, toló hatása, az actió és reactió Newton féle törvénye szerint zérus, közelítőleg valóban az. Maradnak az SDX, stb. összegekben csupán a többi u.n. külső szabad erők componensei; ezek az erők a földhöz rögzített coordináta rendszerben közönséges viszonyok közt két-két egyszerűbb erő összetételeként foghatók fel, amelyek egyike a nehézségi erő, másika pedig onnan van, hogy levegő környezi a testet, s ezt az erőt a levegő ellenállásának, általánosabban környezeti ellenállásnak nevezik. A test határpontjainak lassú mozgásában az utóbbi erőt tekinteten kivül hagyhatjuk és akkor

$$S(DX, DY, DZ)$$

pusztán az előbbi erőt jelenti, melynek iránycosinusai a földhöz rögzített coordináta rendszerben α, β, γ legyenek, a nagysága: $g.Dm$, Eszerint, ha feltevéseink teljesülnek,

$$m\ddot{\xi} = S\alpha g Dm \quad , \quad m\ddot{\eta} = S\beta g Dm$$

$$m\ddot{\zeta} = S\gamma g Dm$$

vagyis

$$\ddot{\xi} = g.\alpha \ , \ \ddot{\eta} = g\beta \ , \ \ddot{\zeta} = g\gamma.$$

és ha a z tengelyt verticálisan lefelé állítjuk, úgy

$$\ddot{\xi} = 0 \ , \ \ddot{\eta} = 0 \ \ \ddot{\zeta} = g$$

Ily módon mozog tehát megközelítőleg a test tömegcentruma, mint egy szabad tömegpont, mely csak a nehézségi szabad erő hatását viseli. Könnyű észrevenni, hogy ugyanez áll több test rendszerének tömegcentrumára is, hogyha a kirott feltevések teljesülnek.

De mi értendő azon, hogy „a határpontok sebessége nem nagy” vagy azon, hogy „a határpontok lassú mozgásában”? Az ilyenféle szólásmód úgy értendő, hogy mindig meglehet jelölni akkora sebességet, hogy mihelyt a mondott sebességek kisebbek, a kívánt elhanyagolások előreadott kicsinynél kisebbek. Ehhez hozzátoldható még, hogy az első szólásmódban a megjelölt sebesség akkora is lehet, amekkoráról közönségesen nem szoktuk mondani, hogy kicsiny; ellenben a második szólásban megjelölt sebesség akkora, amekkorát közönségesen kicsinynek mondunk. De ez a hozzátoldás már bizonytalan állításokat tartalmaz és csak hozzávetőleges becslésekre támaszkodik. Fő az értelmezésben az előbb mondott meghatározás, amihez hozzáértendő, hogy a második szólásmódban kisebb sebesség értendő, mint az első szólásmódban.

A levegő ellenállásának általános számbavétele lehetetlen. Ha az anyagi rendszer szilárd és gömb alakú és a tömegcentruma a geometriai centrumában van, akkor addig amig nem igen nagy a haladási sebesség, a lég ellenállását jó közelítéssel úgy lehet számon-tartani, mint a mechanika alaptanaiban láttuk. Itt a nem igen nagy pedig az előbbi meghatározás szerint értendő azzal a hozzá gondolással, hogy jóval nagyobb sebességekre vonatkozik, mint az első szólásmódban.

B.) Legyen most, hogy az anyagi rendszer nem tolható el minden irányban virtuálisan, de van olyan irány egy, vagy több, esetleg végtelen sok, amelyben virtuálisan eltolható; és legyen, hogy amely irányokban eltolható virtuálisan, azokat a virtuális eltolások componensei közt fennálló egyszerű relatiók fejezik ki. Ha most is $(\delta a, \delta b\ \delta c)$ a virtuális eltolás, úgy a virtuális munka általános törvényéből most is:

$$\delta a . S(\ddot{x}\, Dm - DX) + \delta b . S(\ddot{y}\, Dm - DY) +$$
$$+ \delta c . S(\ddot{z}\, Dm - DZ) \geqq 0.$$

De most $(\delta a, \delta b, \delta c)$ nem tetszésszerintiek, hanem feltevésünk értelmében egyszerű relatióknak tesznek eleget, linearis homogén egész egyenleteknek vagy egyenlőtlenségeknek úgy, hogy előbbi egyenlőtlenségünk mindazokkal és csak azokkal a virtuális eltolásokkal áll fenn, melyek ez egyszerű relatiókat kielégítik, ezek következményese tehát, mihez képest ugyanolyan mathematikai eljárás juttat bennünket a tömegcentrumra vonatkozó határozott vonatkozásokhoz, mint egy tömegpont mechanikájában. Ha az $(\tilde{S}DX, SDY, SDZ)$ toló hatás csak ξ, η, ζ-ának, vagyis a tömegcentrum coordinátáinak és ezek idöderiváltjainak, meg az idönek a függvényei és ha a kényszer relatiók együtthatói is csak ezek függvényei és ha úgy, mint surlódástalan tömegpontok esetén a virtuális kényszer relatióihoz kellő számban csatlakoznak a tömegcentrum valóságos mozgásának határozott kényszerbeli egyenletei, akkor teljes egyenletrendszerünk van a tömegcentrum mechanikai állapotjának a tárgyalására. Ellenkező esetben csak részleges ismeretekre tehetünk szert, de ezek is becsesek lehetnek.

1. példa.

Az anyagi rendszer sík lejtőre van helyezve, amelynek belsejébe nem hatolhat és amelylyel számottevően nem surlódik s levegő környezi. A lejtő a telep rendszer, kapcsoló rendszer nincs. Gondoljuk a lejtő befelé mutató normalisát; az anyagi rendszer mindazon irányokban eltolható virtuálisan, amelyek e normalissal nem alkotnak hegyes szöget, akár nyugodjék, akár mozogjon a lejtő a coordináta rendszerünkben. Ha tehát a normális iránycosinusai: α, β, γ, úgy:

$$-(\alpha\delta a+\beta\delta b+\gamma\delta c)\geqq 0$$

most a virtuális eltolások relatiója. Ha nyugszik a lejtő coordináta rendszerünkben, akkor α, β, γ constansok, ha mozog, akkor α, β, γ az idő függvénye. Kell léteznie oly nem negatív λ multiplicatornak, hogy

$$S(\ddot{x}\, Dm - DX) = -\alpha\lambda, \quad \text{stb.}$$

azaz

$$m\ddot{\xi} = SDX - \alpha\lambda$$
$$m\ddot{\eta} = SDY - \beta\lambda$$
$$m\ddot{\zeta} = SDZ - \gamma\lambda$$

Belőlük λ eliminálásával két független határozott egyenlet, λ kiszámításával egy határozott egyenlőtlenség adódik. Az egyenletek ezek:

$$m(\beta\ddot{\zeta} - \gamma\ddot{\eta}) = \beta . SDZ - \gamma . SDY$$
$$m(\gamma . \ddot{\xi} - \alpha . \ddot{\zeta}) = \gamma . SDX - \alpha . SDZ$$
$$m(\alpha\ddot{\eta} - \beta\ddot{\xi}) = \alpha . SDY - \beta . SDX .$$

amelyek közül kettő független egymástól. Az egyenlőtlenség egész rat. alakban így van:

$$\lambda = (SDX - m\ddot{\xi})\alpha + (SDY - m\ddot{\eta})\beta + (SDZ - m\ddot{\zeta})\gamma \geqq 0.$$

A valóságos mozgás kényszerbeli egyenletei részint a belső kényszerből, részint a lejtővel való érintkezésből származnak és általában nem olyanok, hogy belőlük a tömegcentrum számára még egy egyenletet tudjunk felállítani. Ha tehát SDX, stb. csak ξ, η, ζ-ának és ezek deriváltjainak és az időnek a függvényei volnának is, akkor sincs általában oly relatió rendszerünk, mint egy tömegpont lejtős kényszerének esetében, amely esetben a tömegpontnak a lejtőn volta szolgáltat egy határozott egyenletet. De ha általában nem is juthatunk annyi megismeréshez, mint egy tömegpont lejtős kényszerében, mégis érdekkel biró megállapitást tehetünk relatióinkból; Könnyen megláthatjuk ezt oly coordináta rendszerben, melyben a lejtő nyugszik és amelynek a z tengelye merőleges a lejtő sikra és attól a lejtő belseje felé mutat, midőn is $\alpha=0$, $\beta=0$, $\gamma=1$; tehát

$$m\ddot{\xi}=\mathfrak{S}D\mathfrak{X}\,,\quad m.\ddot{\eta}=\mathfrak{S}D\mathfrak{Y}\,,\quad \mathfrak{S}D\mathfrak{Z}-m\ddot{\zeta}\geqq 0.$$

E relatiók szerint, amig a lejtős kényszer tart, a tömegcentrumnak a lejtőn lévő merőleges vetülete (ξ, η, const) úgy mozog, ha mozog, mint oly tömegpont, amely a lejtőre van helyezve, ezzel nem surlódik és $\mathfrak{S}D\mathfrak{X}$, $\mathfrak{S}D\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{S}D\mathfrak{Z}$ ($\geqq 0$) componensü szabad erő hatását viseli. E vetület nyugalmának szükséges feltételei pedig, hogy

$$\mathfrak{S}D\mathfrak{X}=0\,,\quad \mathfrak{S}D\mathfrak{Y}=0$$

legyen. De elégséges feltétele is azzal, hogy kezdetben megvolt a nyugalom, mert addig, amig tart a lejtős kényszer és az A.) szerint azután is: áll, hogy

$$m\ddot{\xi}=\mathfrak{S}D\mathfrak{X}\,,\quad m\ddot{\eta}=\mathfrak{S}D\mathfrak{Y}\,,$$

tehát ama feltétel szerint

$$\ddot{\xi}=0,\ \ddot{\eta}=0\,;\quad \dot{\xi}=\text{const.},\ \dot{\eta}=\text{const.}$$

mindig. Végül a tömegcentrumnak a lejtőre merőleges gyorsulásáról is tudunk annyit, hogy amig a kényszer tart, ez a gyorsulás $\leqq \frac{\mathfrak{S}D\mathfrak{Z}}{m}$, azontut pedig az A.) szerint $= \frac{S\,0t}{m}$.

2. példa.

Levegőben egy horizontális sík alapzatra legy[en] helyezve két test s tegyük fel, hogy a testek és az alapzat közt surlódás nincs. A két test eleinte ne éri[nt]kezzék, de mozogva utóbb találkozzanak, ütközze[nek,] majd ismét különválban mozogjanak. Midőn nem érintkezik a két test, mindegyik test elemi részeire ható szabad erő részint a nehézségi erőből részint olyan erőkből álljon, amelyek toló hatása, azaz összege zérus, tehát a nehézségi erőn kívül még csak olyan erők hassanak úgy az egyik, mint a másik testre, amelyeknek nincs tolo[ó] hatása. De az ütközés alatt is az egész rendszerre ható toló hatás csak a nehézségi erő toló hatásá[ból] álljon. Ezek rendjén feltettük azt is, hogy a levegő ellenállása nem tesz számot.

A sík alapzat telep rendszert képez, amely a coordináta rendszerünkben nyugodjék és más külső kényszert, mint az ettől származót, ne viseljenek a testek. Mielőtt érintkeznék egymással a két test, mindenik test tömegcentrumána[k] a gyorsulása szükségkép olyan az előbbi példa szerint, hogy horizontális összetevője zérus. Jelöljék az egyik test tömegcentrumának a coordinátáit ξ_1, η_1, ζ_1, a másikét ξ_2, η_2, ζ_2; a coordináta rendszer xy síkját helyezzük az alapzatra; a két test ütközése előtt

$$\ddot{\xi}_1 = 0, \quad \ddot{\eta}_1 = 0; \quad \ddot{\xi}_2 = 0, \quad \ddot{\eta}_2 = 0\,.$$

Nemkülömben érvényesek ezek az egyenletek azután is, hogy a két test megszűnt ütközni egymással. Jelöljék most már az 1.ső számú tömegcentrum sebességének a componenseit az ütközés előtt u_1, v_1, w_1, az ütközés után U_1, V_1, W_1; a másik tömegcentrum sebességének a componensei az ütközés előtt u_2, v_2, w_2, az ütközés után U_2, V_2, W_2 legyenek. Mindezeknek a vectoroknak az alapzaton lévő vetületi értéke állandó, azaz a tömegcentrumoknak az alapzaton lévő merőleges vetülete az ütközés előtt és után állandó sebességgel mozog, t.i. differentiál egyenleteink szerint, azaz

$$(u_1, v_1, 0) = \text{const.}\ ,\ (U_1, V_1, 0) = \text{const.}$$
$$(u_2, v_2, 0) = \text{const.}\ ,\ (U_2, V_2, 0) = \text{const.}$$

A két test rendszere, mint egyetlen anyagi rendszer, szintén az elsőbbi példa tárgyalásába tartozik, és pedig az ütközés alatt is, mert feltettük, hogy a két test találkozásának időtartalmában is egyedül a nehézségi szabad erő toló hatása nyilvánul a két test rendszerén. Jelölje meg a két test rendszerének a tömegcentrumát ξ, η, ζ. Akkor tehát: $\ddot{\xi} = 0$, $\ddot{\eta} = 0$, úgy az érintkezés előtt, mint az érintkezés tartalmában és az érintkezés után, szóval mindig. E szerint az egész rendszer tömegcentrumának az alapzaton lévő vetülete folyvást, a találkozás tartamában is állandó sebességgel mozog. E tömegcentrum sebességének a componenseit jelöljék (U, V, W); ezek után módunkban van két egyenletet szerkesztoni a két test tömegcentrumának az ütközés előtti és az ütközés utáni sebességére nézve;

a tömegcentrumok fogalmából folyólag:

$$(m_1+m_2)\xi = m_1\xi_1 + m_2\xi_2$$
$$(m_1+m_2)\eta = m_1\eta_1 + m_2\eta_2$$
$$(m_1+m_2)\zeta = m_1\zeta_1 + m_2\zeta_2$$

ha t.i. m_1 az 1es számú, m_2 pedig a 2-es számú testnek a tömege. Ezek az egyenletek a mozgás egész tartamában érvényesek. Ebből a két egyenletből folyólag

$$(m_1+m_2)\dot{\xi} = m_1\dot{\xi}_1 + m_2\dot{\xi}_2$$
$$(m_1+m_2)\dot{\eta} = m_1\dot{\eta}_1 + m_2\dot{\eta}_2$$
$$(m_1+m_2)\dot{\zeta} = m_1\dot{\zeta}_1 + m_2\dot{\zeta}_2$$

a mozgás egész tartamában.

Helyettesitsük be a két első egyenletbe egyszer az ütközés előtti, máskor az ütközés utáni sebességek componenseit; a két baloldal mindkét esetben ugyanaz, ennélfogva a két jobb oldal is mindkét esetben ugyanaz köteles lenni. Következésképen:

$$m_1u_1 + m_2u_2 = m_1U_1 + m_2U_2$$
$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1V_1 + m_2V_2.$$

Van tehát valóban két egyenletünk a két tömegcentrumnak az ütközés előtti és utáni sebességére vonatkozólag. Két test ütközésében fő érdekességgel az bir, hogy meghatározzuk az ütközés előtti sebességek horizontális componensével az ütközés utáni sebességek horizontális componensét. Minthogy most evégből két egyenletünk van négy ismeretlenre nézve, úgy nem jutottunk el teljesen ehhez a célhoz; még valamelyes módszerek segélyével szert kell tennünk két egyenletre, hogy célt érjünk. Ezt a mechanikai módszert itt még nem tárgyalhatjuk, de egy tapasztalati esetét elintézhetünk és pedig azt, midőn két test tömegcentruma az ütközés után egyenlő sebességgel mozog, ami az u.n. rugalmatlan testek esetében fordulhat elő. Ebben az esetben $U_1 = U_2$, $V_1 = V_2$, minélfogva az ütközés utáni horizontális sebesség componensei ezek:

$$U_1 = U_2 = \frac{m_1 u_1 + m_2 u_2}{m_1 + m_2}.$$

$$V_1 = V_2 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}.$$

XII. Tömegcentrumok rendszerének mechanikája.

Az anyagi rendszer n számú testből álljon, melyek különbözően legyenek eltolhatók vagy különbözően is eltolhatók legyenek virtuálisan. Egyidejű virtuális eltolásukat rendre: $(\delta a_1, \delta b_1, \delta c_1)$, $(\delta a_2, \delta b_2, \delta c_2)$, ... $(\delta a_n, \delta b_n, \delta c_n)$ jelöljék. Az elvi relátióban, u.m. a

$$S[(\ddot{x}\mathfrak{D}m - \mathfrak{D}X)\delta x + (\ddot{y}\mathfrak{D}m - \mathfrak{D}Y)\delta y + (\ddot{z}\mathfrak{D}m - \mathfrak{D}Z)\delta z] \geqq 0.$$

amely így is írható:

$$S(\ddot{x}\mathfrak{D}m - \mathfrak{D}X)\delta x + S(\ddot{y}\mathfrak{D}m - \mathfrak{D}Y)\delta y + S(\ddot{z}\mathfrak{D}m - \mathfrak{D}Z)\delta z \geqq 0.$$

A summákat az n test szerint n részre bontva gondoljuk úgy, hogy:

$$S(\ddot{x}\mathfrak{D}m - \mathfrak{D}X)\delta x = S_1(\ddot{x}\mathfrak{D}m - \mathfrak{D}X)\delta x + S_2(\ddot{x}\mathfrak{D}m - \mathfrak{D}X)\delta x + \dots + S_n(\ddot{x}\mathfrak{D}m - \mathfrak{D}X)\delta x.$$

$$S(\ddot{y}\,Dm - DY)\delta y = S_1(\ddot{y}\,Dm - DY)\delta y + S_2(\ddot{y}\,Dm - DY)\delta y + \dots + S_n(\ddot{y}\,Dm - DY)\delta y.$$
$$S(\ddot{z}\,Dm - DZ)\delta z = S_1(\ddot{z}\,Dm - DZ)\delta z + S_2(\ddot{z}\,Dm - DZ)\delta z + \dots + S_n(\ddot{z}\,Dm - DZ)\delta z.$$

A három kifejezés i-dik summmájában irható egyabek közt minden δx helyett δa_i, minden δy helyett δb_i és minden δz helyett δc_i, bármilyen szám legyen is az i. E szerint elvi egyenlőtlenségünk a virtuális eltolásokra alkalmazva így van:

$$\delta a_1 S_1(\ddot{x}\,Dm - DX) + \delta b_1 S_1(\ddot{y}\,Dm - DY) + \delta c_1 . S_1(\ddot{z}\,Dm - DZ) +$$
$$+ \delta a_2 S_2(\ddot{x}\,Dm - DX) + \delta b_2 S_2(\ddot{y}\,Dm - DY) + \delta c_2 . S_2(\ddot{z}\,Dm - DZ) +$$
$$+ \dots \quad +$$
$$+ \delta a_n S_n(\ddot{x}\,Dm - DX) + \delta b_n S_n(\ddot{y}\,Dm - DY) + \delta c_n S_n(\ddot{z}\,Dm - DZ) \geqq 0.$$

És ha az egyes testek saját tömegcentrumának a coordinátái rendre $\xi_1 \eta_1 \zeta_1$; ξ_2, η_2, ζ_2; … ξ_n, η_n, ζ_n, a tömegük pedig $m_1, m_2, \dots m_n$, akkor így is van ez az egyenlőtlenség:

$$\sum_{i=1}^{n}\Big[(m_i\ddot{\xi}_i - S_i DX)\delta a_i + (m_i\ddot{\eta}_i - S_i DY)\delta b_i +$$
$$+ (m_i\ddot{\zeta}_i - S_i DZ)\delta c_i\Big] \geqq 0.$$

Ha már most ismerjük a virtuális eltolások relatióit, melyeknek minden megoldásában teljesülni tartozik ez az egyenlőtlenség, így a tömegpontok mechanikájából ismert eljárások juttatnak bennünket következtetésekhez. Még pedig abban a speciális esetben, hogy a szabad erők componenseinek előforduló összegei, vagyis az u. n. toló hatásaik componensei és a most említett relatiók együtthatói csak a tömegcentrumok coordinátáinak és ezek idöderiváltjainak és az időnek a függvényei, és hogy kellő számban állanak-e rendelkezésünkre a tömegcentrumok valóságos mozgásának határozott kényszerbeli egyenletei; ebben az esetben teljes egyenletrendszerünk van az n számú tömegcentrum mechanikájának a tárgyalására. Ellenkező esetben csak részleges ismeretekre tehetünk szert, de ezek is becsesek lehetnek.

Példa.

Két merev test a levegőben fel van fűzve egy merev szögletes pálcára. A két test tömegcentrumának távolsági vonala párhuzamos a pálcával. A pálcát a két testtől független módon oly tengely körül forgatjuk, amely átmegy ezen távolsági vonalon és arra merőleges. A két test egy nyujthatatlan, de hajlítható fonállal össze van kapcsolva, amely fonál tömege egyik test tömege mellett sem tesz számot. A pálcán tehát csak haladó mozgást végezhetnek a testek, de surlódás köztük és a pálca közt ne legyen; a levegővel való surlódás se tegyen számot. Az egyik testhez tartozó mennyiségeket 1-es indexxel, a másik testhez tartozó mennyiségeket 2-es indexxel jelöljük. A pálca irányát az 1-es tömegcentrumtól a 2-es felé számoljuk. A z tengelyt a forgás tengelyébe helyezzük. Ekkor a pálca iránya a t pillanatban az x tengellyel positív fordulás szerint ϑ szöget képezzen. Az 1-es számú tömegcentrumnak a tengelytől mért távolsága legyen $|\varrho_1|$, a másiké: $|\varrho_2|$, hol úgy ϱ_1, mint ϱ_2 positionak vagy negationak számít aszerint, amint a tömegcentrum a pálcán ennek iránya szerint a Z tengely pozitiv vagy negativ oldalán van. A két tömegcentrum kölcsönös távolát jelölje: r, mihez képest

$$r = \varrho_2 - \varrho_1$$

Mindenek előtt kifejezzük azt, hogy a két tömegcentrum csak a pálcával párhuzamosan mozditható virtuálisan, vagy is, hogy a pálca nyugalmában csak a pálcával párhuzamosan mozdithatók. A tömegcentrumok coordinátái a következők:

$$\xi_1 = \varrho_1 \cdot \cos\theta\ ,\ \eta_1 = \varrho_1 \sin\theta\ ,\ \zeta_1 = \text{const.}$$

$$\xi_2 = \varrho_2 \cdot \cos\theta\ ,\ \eta_2 = \varrho_2 \sin\theta\ ,\ \zeta_2 = \text{const.}$$

Ha már most a tömegcentrum virtuális elmozdulásának a componenseit keressük, akkor ezeket az egyenleteket úgy kell variálnunk, hogy a variálás alatt a θ változatlan legyen; eszerint tehát:

$$\delta\xi_1 = \cos\theta . \delta\varrho_1\ ,\ \delta\eta_1 = \sin\theta . \delta\varrho_1\ ,\ \delta\zeta_1 = 0$$

$$\delta\xi_2 = \cos\theta . \delta\varrho_2\ ,\ \delta\eta_2 = \sin\theta . \delta\varrho_2\ ,\ \delta\zeta_2 = 0$$

Ezek egyszersmind a virtuális eltolás componensei. Van tehát

$$\delta a_1 = \cos\theta . \delta\varrho_1\ ,\ \delta b_1 = \sin\theta . \delta\varrho_1\ ,\ \delta c_1 = 0$$

$$\delta a_2 = \cos\theta . \delta\varrho_2\ ,\ \delta b_2 = \sin\theta . \delta\varrho_2\ ,\ \delta c_2 = 0 .$$

Azonban most azt a mechanikai állapotot vizsgáljuk majd, amelynek folyamán a fonál feszült állapotban van, minélfogva a két tömegcentrum kölcsönös távola nem nagyobbodhatik, tehát

$$\delta r \leqq 0$$

Van tehát még a következő egyenlőtlenségünk is a virtuális eltolások componenseinek a meghatározására:

$$\delta\varrho_1 - \delta\varrho_2 \geqq 0.$$

Az utóbbi egyenlőtlenség minden megoldásában teljesülni köteles a $\delta\varrho_1$ és $\delta\varrho_2$ bevezetésével előálló elvi egyenlőtlenség most két testre vonatkoztatva a következő:

$$(m_1\ddot{\xi}_1 - S_1 DX)\delta a_1 + (m_1\ddot{\eta}_1 - S_1 DY)\delta b_1 + (m_1\ddot{\zeta}_1 - S_1 DZ)\delta c_1 +$$
$$+ (m_2\ddot{\xi}_2 - S_2 DX)\delta a_2 + (m_2\ddot{\eta}_2 - S_2 DY)\delta b_2 + (m_2\ddot{\zeta}_2 - S_2 DZ)\delta c_2 \geqq 0.$$

Beirva ide a variatiók megállapitott kifejezéseit, a következő egyenlőtlenség áll elő:

$$[(m_1\ddot{\xi}_1 - S_1 DX).\cos\theta + (m_1\ddot{\eta}_1 - S_1 DY)\sin\theta].\delta\varrho_1 +$$
$$+ [(m_2\ddot{\xi}_2 - S_2 DX)\cos\theta + (m_2\ddot{\eta}_2 - S_2 DY)\sin\theta].\delta\varrho_2 \geqq 0.$$

Ez mindazzal a $\delta\varrho_1$ és $\delta\varrho_2$ értékkel teljesülni tartozik, amely eleget tesz a

$$\delta\varrho_1 - \delta\varrho_2 \geqq 0$$

egyenlőtlenségnek. Kell tehát léteznie olyan λ nem negatív multiplicatornak, hogy

$$(m_1\ddot{\xi}_1 - S_1 DX).\cos\theta + (m_1\ddot{\eta}_1 - S_1 DY).\sin\theta = \lambda$$
$$(m_2\ddot{\xi}_2 - S_2 DX).\cos\theta + (m_2\ddot{\eta}_2 - S_2 DY).\sin\theta = -\lambda$$

Innen nyerhetünk egy határozott egyenletet és egy határozott egyenlőtlenséget; határozott egyenletet azáltal, hogy λ-át elimináljuk, aminek az a módja, hogy a két egyenletet összeadjuk; határozott egyenlőtlenséget azáltal, hogy a λ-át kiszámitjuk, amit célszerű lesz úgy végezni, hogy az első kifejezést elosszuk m_1-el a másodikat m_2-vel is [illegible] az elsőből a másodikat kivonjuk. Van tehát egyfelől a következő egyenletünk:

$$(m\ddot{\xi} - SDX).\cos\theta + (m\ddot{\eta} - SDY).\sin\theta = 0.$$

ha ξ, η, ϱ jelöli a két test rendszerének a tömegcentrumát, m a tömegét és ha a summajel a két test egész rendszerére ható szabad erők összegére vonatkozik. Van továbbá másfelől a következő egyenlőtlenségünk:

$$\left(\ddot{\xi}_1 - \ddot{\xi}_2 + \frac{S_2 DX}{m_2} - \frac{S_1 DX}{m_1}\right).\cos\theta +$$
$$+\left(\ddot{\eta}_1 - \ddot{\eta}_2 + \frac{S_2 DY}{m_2} - \frac{S_1 DY}{m_1}\right).\sin\theta \geqq 0.$$

De ha az egész rendszer tömegcentrumának a forgási tengelytől való távolsága: $|\varrho|$, ahol ϱ positiv vagy negativ aszerint, amint a tömegcentrum a pálca iránya értelmében a tengely positiv vagy negativ oldalán van, akkor

$$\xi = \varrho.\cos\theta, \qquad \eta = \varrho.\sin\theta$$
$$\dot{\xi} = \dot{\varrho}\cos\theta - \varrho.\sin\theta.\dot{\theta}, \qquad \dot{\eta} = \dot{\varrho}\sin\theta + \varrho.\cos\theta.\dot{\theta}$$
$$\ddot{\xi} = \ddot{\varrho}\cos\theta - 2\dot{\varrho}.\dot{\theta}.\sin\theta - \varrho.\dot{\theta}^2.\cos\theta - \varrho.\ddot{\theta}.\sin\theta$$
$$\ddot{\eta} = \ddot{\varrho}\sin\theta + 2\dot{\varrho}.\dot{\theta}.\cos\theta - \varrho.\dot{\theta}^2.\sin\theta + \varrho.\ddot{\theta}.\cos\theta$$

Ezek számbavételével egyenletünk ilyen alakban jelentkezik:

$$m(\ddot{\varrho} - \varrho.\dot{\theta}^2) = \cos\theta.SDX + \sin\theta.SDY.$$

Az egyenlőtlenségünk pedig $\ddot{\xi}_1, \ddot{\eta}_1, \ddot{\xi}_2, \ddot{\eta}_2$ hasonló egyenletei alapján a következő alakú lesz:

$$[\ddot{\varrho}_1 - \ddot{\varrho}_2 + (\varrho_2 - \varrho_1)\dot{\theta}^2] + \left[\frac{S_2 DX}{m_2} - \frac{S_1 DX}{m_1}\right]\cos\theta + \left[\frac{S_2 DY}{m_2} - \frac{S_1 DY}{m_1}\right].\sin\theta \geqq 0$$

De a két tömegcentrum kölcsönös távola

$$r = \varrho_2 - \varrho_1$$

lévén, $\varrho_1 - \varrho_2 = -r$, $\ddot{\varrho}_1 - \ddot{\varrho}_2 = -\ddot{r}$; minthogy feltevésünk szerint a fonál feszült állapotban van, ennélfogva állandóan eltűnik az $\ddot{r}$; ennek tekintetbe vételével egyenlőtlenségünk a következő alakot ölt:

$$r.\dot{\theta}^2 + \left(\frac{S_2 DX}{m_2} - \frac{S_1 DX}{m_1}\right).\cos\theta + \left(\frac{S_2 DY}{m_2} - \frac{S_1 DY}{m_1}\right).\sin\theta \geqq 0$$

Ez szükséges feltétele annak, hogy a mozgás az egyenlettől meghatározott módon menjen végbe, vagyis, hogy a fonál feszült állapotban maradjon. Mivel pedig most a virtuális elmozdulás egyáltalán csak is a pálca mentén való eltolásból állhat, elégséges feltétele is ez a fonál feszültségének s következőleg az egyenlet helyességének.

Tegyük föl most, hogy a két test csupán a nehézségi szabad erő teló hatását viseli számottevő mértékben, és hogy a forgási tengely verticalisan áll. Akkor

$$SDX = 0, SDY = 0, S_1 DX = 0, S_1 DY = 0, S_2 DX = 0, S_2 DY = 0.$$

Ennélfogva a mozgás egyenlete a következő:

$$\ddot{\varrho} - \varrho.\dot{\theta}^2 = 0$$

Ennek a szükséges és elégséges feltétele pedig, vagyis hogy az egyenlőtlenségünk mindig teljesül, mert ez a feltétel jelenleg a következő:

$$r.\dot{\theta}^2 \geqq 0$$

Ami az egyenletet illeti, azt a forgatás módjának az ismeretével lehet csak megoldani; ha pl. a pálcát állandó szögsebességgel forgatjuk, akkor $\dot{\vartheta}$=const és az egyenlet könnyű szerrel megoldható.

Keressük most még csak annak a feltételét, hogy a testek a pálcán, vagyis a pálcához viszonyítva nyugalomban legyenek; vagyis, hogy ϱ=const legyen. Ha ϱ=const., úgy $\ddot{\varrho}=0$, tehát

$$\varrho \cdot \dot{\vartheta}^2 = 0$$

ez az egyenlet pedig úgy teljesül, hogy

$$\varrho \cdot \dot{\vartheta} = 0.$$

Ha tehát $\dot{\vartheta}$ nem zérus, azaz, ha forgatjuk a pálcát, úgy $\varrho=0$, vagyis a pálcán való nyugalom lehetőségének az a feltétele, hogy a két test rendszerének a tömegcentruma a forgás tengelyében legyen.

XIII. Forgató momentum vagy forgató hatás, vagy emeltyűi hatás.

Mielőtt a virtuális elfordíthatóságok esetére térünk, ismerkedjünk meg a címiratban megnevezett fogalommal. Gondoljunk egy testelemet és egy rajta át nem haladó tengelyt; gondoljuk továbbá ezek közös síkjának a normálisát a positiv fordulás értelmében. A testelemre ható (DX, DY, DZ) szabad erőnek e normálisra tartozó componensét szorozzuk meg a testelem tengely távolával; e szorzatot a (DX, DY, DZ) szabad erőnek a tengely körüli forgató momentumának vagy forgató hatásának, vagy emeltyűi hatásának mondjuk; s ha a tengely neve J, akkor ezt a szorzatot a szabad erő J tengelyű forgató momentumának vagy forgató hatásának vagy emeltyűi hatásának mondjuk.

Legyenek a tengely egy pontjának a coordinátái: a, b, c, a tengely iránycosinusai: λ, μ, ν, a testelem coordinátái: x, y, z. A ezában lévő normális iránycosinusait könnyen meghatározhatjuk ez adatok segélyével; ugyanis e normális iránya egyszerű az $(x-a, y-b, z-c)$ vector és az J tengely tengelyének az irányával. Ha tehát e vector hossza r és az J tengellyel képzett szöge ω, úgy a normális iránycosinusai ezek:

$$\frac{\mu\frac{z-c}{r}-\nu\frac{y-b}{r}}{\sin\omega}, \text{ stb} \qquad \text{azaz:}$$

$$\frac{\mu(z-c)-\nu(y-b)}{r.\sin\omega}, \text{ stb.}$$

ahol r és $\sin\omega$ ismeretes módon fejezhetők ki adatainkkal, de erre nem lesz szükség. Most ezeket az iránycosinusokat rendre megszorozva a DX, DY, DZ erő componensekkel, azután e szorzatokat összeadva, megkapjuk a szabad erőnek a normálisra tartozó értékét, amely mégcsak megszorzandó a testelem tengely távolával; ez utóbbi azonban nem más, mint $r.\sin\omega$. e szerint:

$$[\mu(z-c)-\nu(y-b)]DX+[\nu(x-a)-\lambda(z-c)]DY+[\lambda(y-b)-\mu(x-a)]DZ=$$
$$=[(y-b)DZ-(z-c)DY]\lambda+[(z-c)DX-(x-a)DZ]\mu+[(x-a)DY-(y-b)DX]\nu.$$

a szabad erő $\mathfrak{I}$ tengelyű forgató momentuma.

A λ, μ, ν szorzóival, mint componensekkel meghatározott vectort, vagyis a

$$((y-b)DZ-(z-c)DY,\ (z-c).DX-(x-a)DZ,\ (x-a)DY-(y-b)DX)$$

vectort is forgató momentumnak nevezzük, de ezt a szabad erő a, b, c ponti forgató momentumának nevezzük. Ennek a componensei rendre nyilvánképen nem mások, mint az a, b, c origós coordináta rendszerben az x tengelyű, y tengelyű, z tengelyű forgató momentum.

Egy anyagi rendszer elemi részeire ható szabad erők $\mathfrak{I}$ tengelyű, avagy a, b, c ponti forgató momentumainak az összegét az erők $\mathfrak{I}$ tengelyű, illetőleg a, b, c ponti forgató momentumának, forgató hatásának, emeltyű hatásának mondjuk.

Hasonló értelemben beszélünk másféle erők $\mathfrak{I}$ tengelyű vagy a, b, c ponti forgató momentumáról. Az $(\ddot{x}Dm, \ddot{y}Dm, \ddot{z}Dm)$ inertia erő a, b, c ponti forgató momentuma:

$$[(y-b)\ddot{z}-(z-c)\ddot{y},\ (z-c)\ddot{x}-(x-a)\ddot{z},\ (x-a)\ddot{y}-(y-b)\ddot{x}].Dm$$

ha a, b, c nem változik az idővel, akkor így is írható ez:

$$\frac{d}{dt}[(y-b)\dot{z}-(z-c)\dot{y},(z-c)\dot{x}-(x-a)\dot{z},(x-a)\dot{y}-(y-b)\dot{x}].Dm$$

Ha pedig az $(x-a, y-b, z-c)$ vectort $\mathfrak{r}$ jelenti, akkor a zárójelben foglalt vector nem más, mint $\ddot{\mathfrak{r}}$ és $\mathfrak{r}$ vectornak a vectori szorzata:

$$[\mathfrak{r}.\ddot{\mathfrak{r}}]=\frac{[\mathfrak{r}.d\dot{\mathfrak{r}}]}{dt}.$$

A jobb oldal számlálója a vectori szorzat definitiója szerint oly vector, melynek a nagysága a $d\mathfrak{r}$ elemi elmozdulás és az $\mathfrak{r}$ távolsági vector parallelogrammjának a területe, iránya pedig a $d\mathfrak{r}$ elemi elmozdulás és $\mathfrak{r}$ távolsági vector tengelyének az iránya úgy, hogy dt-vel képzett osztata ennek a vectornak, azaz $[\dot{\mathfrak{r}}.\mathfrak{r}]$ nem más, mint annak a vectornak, amit a mechanika alaptanaiban az x, y, z pont a, b, c centrumú területi sebességének neveztünk el, a kétszerese. E szerint Dm szorzója az a, b, c centrumú területi gyorsulás kétszerese.

Ha a λ, μ, ν iránycosinusok is állandók, akkor az inertia erő J tengelyű forgató momentumát, vagyis az

$$\{\lambda[(y-b)\ddot{z}\,Dm-(z-c)\ddot{y}\,Dm]+\mu[(z-c)\ddot{x}\,Dm-(x-a)\ddot{z}.Dm]+$$
$$+\nu[(x-a)\ddot{y}\,Dm-(y-b)\ddot{x}\,Dm]\}.$$

forgató momentumot így is írhatjuk:

$$\frac{d}{dt}\{[(y-b)\dot{z}-(z-c)\dot{y}]\lambda+[(z-c)\dot{x}-(x-a)\dot{z}]\mu+$$
$$+[(x-a)\dot{y}-(y-b)\dot{x}].\nu\}.Dm.$$

Ami itt a főzárójelben van, az az a, b, c ponti területi sebesség kétszeresének a λ, μ, ν irányra tartozó értéke. Ha a területi sebesség iránya ezzel a λ, μ, ν iránnyal φ szöget képez, akkor az $\mathfrak{r}$ és a $d\mathfrak{r}$ vector síkja és az oly sík, amely merőleges az J tengelyre, φ szög alatt vagy $\pi-\varphi$ szög alatt hajlik egymáshoz aszerint, amint a φ szög 0 és $\frac{\pi}{2}$

közt, vagy $\frac{\pi}{2}$ és π közt van. Ennélfogva, ha az w és dw vector parallelogrammját $\mathfrak{I}$ normálisú síkra merőlegesen vetítjük, a vetületi területet dt időelemmel osztva s a két eset szerint positiv vagy negativ jellel véve, ez szintén a fő zárójel tartalma. Ennek a felét neveztük a mechanika alaptanaiban az x,y,z pont $\mathfrak{I}$ tengelyű területi sebességének, mihez képest $\mathfrak{D}m$ itteni szorzója az x,y,z pont $\mathfrak{I}$ tengelyű területi gyorsulásának a kétszerese

XIV. A forgató momentumok tétele.

Tegyük föl, hogy minden pillanatban létezik oly tengely, legalább egy, amely körül az anyagi rendszer virtuálisan és pedig mind két értelemben elfordítható. Legyen t pillanatban a,b,c a tengely egy pontja és legyenek ugyanekkor λ,μ,ν a tengely iránycosinusai. Ha a virtuális elfordítás szöge $\delta\theta$, az a,b,c pontból az x,y,z pontba nyuló távolsági vector componensei pedig ξ,η,ζ, akkor az x,y,z pont s egyben a (ξ,η,ζ) vector elfordítása következtében ennek a vectornak a componensei megváltoznak

$$\delta\xi = (\mu\zeta - \nu\eta).\delta\theta$$
$$\delta\eta = (\nu\xi - \lambda\zeta).\delta\theta$$
$$\delta\zeta = (\lambda\eta - \mu\xi)\delta\theta$$

értékekkel, mint a vectortanból tudjuk.

Emellett $\delta\theta$ positiónak vagy negatiónak számít a szerint, amint jobbra vagy balra fordításból származik; ámde

$$\xi = x-a, \quad \eta = y-b, \quad \zeta = z-c$$

s következőleg:

$$\delta\xi = \delta x, \quad \delta\eta = \delta y, \quad \delta\zeta = \delta z,$$

tehát az (x, y, z) helyű elemi rész a virtuális elfordítás következtében

$$(\delta x, \delta y, \delta z) = (\delta\xi, \delta\eta, \delta\zeta)$$

virtuális elmozdulást végez, vagyis az a, b, c ponton λ, μ, ν irányban átmenő tengely körül $\delta\theta$ szög alatt való virtuális elfordításból

$$\delta x = (\mu\zeta - \nu\eta)\delta\theta = [\mu(z-c) - \nu(y-b)].\delta\theta$$

$$\delta y = (\nu\xi - \lambda\zeta).\delta\theta = [\nu(x-a) - \lambda(z-c)].\delta\theta$$

$$\delta z = (\lambda\eta - \mu\xi).\delta\theta = [\lambda(y-b) - \mu(x-a)].\delta\theta$$

componensű virtuális elmozdulás háramlik az elemi részre. E kifejezésekben λ, μ, ν meg $\delta\theta$ valamennyi elemi részhez ugyanaz. Továbbá a, b, c is valamennyihez ugyanaz lehet a tengelyen. Ha $\delta\theta$ három szorzóját rendre: $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$. jelölik, akkor a virtuális munka törvénye, u. m.

$$S[(\ddot{x}Dm - DX)\delta x + (\ddot{y}Dm - DY)\delta y + (\ddot{z}Dm - DZ)\delta z] \geqq 0$$

ezzel az általában speciális virtuális elmozdulással így van:

$$\delta\theta . S[(\ddot{x}Dm - DX)\mathcal{A} + (\ddot{y}Dm - DY)\mathcal{B} + (\ddot{z}Dm - DZ)\mathcal{C}] \geqq 0$$

Minthogy $\delta\theta$ positiv is meg negativ is lehet, ebből az következik, hogy

$$S[(\ddot{x}Dm - DX)\mathcal{A} + (\ddot{y}Dm - DY).\mathcal{B} + (\ddot{z}Dm - DZ)\mathcal{C}] = 0.$$

Helyettesítjük ide be A, B, C értékét, azután rendezzük λ, μ, ν szerint a baloldalt, és azt kapjuk, hogy

$$\lambda . S[(y-b)(\ddot{z}Dm - DZ) - (z-c)(\ddot{y}Dm - DY)] +$$
$$+ \mu . S[(z-c)(\ddot{x}Dm - DX) - (x-a)(\ddot{z}Dm - DZ)] +$$
$$+ \nu . S[(x-a)(\ddot{y}Dm - DY) - (y-b)(\ddot{x}Dm - DX)] = 0.$$

vagyis az előbbi cikk szerint azt, hogy az

$$(\ddot{x}Dm - DX,\ \ddot{y}Dm - DY,\ \ddot{z}Dm - DZ)$$

úgynevezett kényszererőknek az $\binom{a,b,c}{\lambda,\mu,\nu}$ tengely körüli forgató momentuma eltűnik. Ebben az alakban pedig:

$$\lambda . S[(y-b)\ddot{z} - (z-c)\ddot{y}].Dm + \mu . S[(z-c)\ddot{x} - (x-a)\ddot{z}]Dm +$$
$$+ \nu . S[(x-a)\ddot{y} - (y-b)\ddot{x}]Dm =$$
$$= \lambda S[(y-b).DZ - (z-c).DY] + \mu . S[(z-c).DX - (x-a)DZ] +$$
$$+ \nu . S[(x-a).DY - (y-b).DX].$$

Azt látjuk, hogy az inertia erőknek és szabad erőknek az $\binom{a,b,c}{\lambda,\mu,\nu}$ tengelyű forgató momentuma egyenlő. Ezt a tételt a forgató momentumok vagy területek tételének nevezzük. Az utóbbi elnevezést az előbbi cikk vége igazolja. Határozott egyenletünk van, amelyből sokszor lehet jelentőset tudni meg a mechanikai állapotra. Midőn $a, b, c, \lambda, \mu, \nu$ constans, akkor többnyire hasznos számba venni, hogy

$$\lambda . S[(y-b)\ddot{z} - (z-c)\ddot{y}].Dm = \frac{d}{dt}\lambda . S[(y-b)\dot{z} - (z-c)\dot{y}],$$

stb.

miknek képest így is írható a forgató momentumok egyenlete:

$$\frac{d}{dt}\cdot\left\{\lambda S[(y-b)\dot{z}-(z-c)\dot{y}].Dm+\mu.S[(z-c)\dot{x}-(x-a)\dot{z}].Dm+\right.$$
$$\left.+\nu.S[(x-a)\dot{y}-(y-b)\dot{x}].Dm\right\}=$$
$$=\lambda.S[(y-b).DZ-(z-c)DY]+\mu.S[(z-c).DX-(x-a)DZ]+$$
$$+\nu.S[(x-a).DY-(y-b).DX].$$

1. példa. A közönséges fizikai inga.

Abban a feltevésben bármely merev testet így nevezünk, hogy egy telep rendszerhez tartozó tengely körül surlódás nélkül mindkét értelemben foroghat és más virtuális mozgást, mint e tengely körüli virtuális fordulást nem végezhet és csupán a nehézségi szabad erőnek a hatását, meg a coordináta rendszer földhöz viszonyított mozgásából származó erő hatását viseli. Erre a tengelyre nézve nyilvánképen érvényes a forgató momentumok egyenlete. Egyszerüség kedvéért helyezzük pedig ebbe a tengelybe coordináta rendszerünk x tengelyét úgy, hogy ez legyen a forgási tengely és válasszuk az origót az a,b,c pont gyanánt. Akkor $\lambda=1$, $\mu=0$, $\nu=0$, $a=0$, $b=0$, $c=0$, és egyenletünk így van:

$$\frac{d}{dt}S(y\dot{z}-z\dot{y})Dm=S(y.DZ-zDY)$$

A tengelyből reá merőlegesen a tömegcentrumba mutató irányt az inga irányának nevezzük. Legyen, hogy ez t pillanatban θ szöget képez a z tengellyel, amely ϑ szöget positivnak vagy negativnak számítunk aszerint, amint positiv vagy negativ fordulásból származtattuk. A mozgás teljes ismeretéhez eljutottunk, ha ezt a ϑ szöget minden időpillanatra meghatároztuk. De ennek a XIV cikknek $\delta x, \delta y, \delta z$ kifejezéseihez hasonlóan:

$$dy = [\nu(x-a) - \lambda(z-c)] . d\vartheta$$
$$dz = [\lambda(y-b) - \mu(x-a)] . d\vartheta$$

tehát mivel $\lambda = 1, \mu = 0, \nu = 0$:

$$\dot{y} = -z.\dot{\vartheta} \quad , \quad \dot{z} = y.\dot{\vartheta}.$$

Ha tehát egy elemi rész tengely távola: ϱ, úgy fenti egyenletünk bal oldala

$$\frac{d}{dt} . S(y\dot{z} - z\dot{y}) Dm \equiv \frac{d}{dt} . S(y^2 + z^2) . \dot{\vartheta} . Dm \equiv$$
$$\equiv \frac{d}{dt} . \dot{\vartheta} . S . \varrho^2 . Dm .$$

Az itt szereplő összeget: $S\varrho^2 Dm$, az inga saját tengelyű inertia momentumának nevezzük és J betűvel jelöljük meg. Ez constans, mert ϱ és Dm constansok, következőleg:

$$\frac{d}{dt} S(y\dot{z} - z\dot{y}) . Dm \equiv J . \ddot{\vartheta}$$

ahol J constans. Ha arra az esetre szorítkozunk, hogy az inga tengelye a földhöz van rögzítve és horizontális, úgy egyenletünk jobb oldalát is könnyen meghatározhatjuk, még pedig az z tengelyt vertikálisan lefelé állítva $DY = 0$ és $DZ = g . Dm$ tehát

$$. S(y . DZ - z DY) \equiv S g . y . Dm \equiv g . S y . Dm \equiv m . g . \eta$$

ha ugyanis η az inga tömegcentrumának a második coordinátája. Ámde r-el jelölve a tömegcentrum tengely távolát, a θ szög fentebbi definitiója szerint $\eta = -r.\sin\theta$. Most már eredeti egyenletünk bal és jobb oldalának a kifejezéseit egyenlítve ez az egyenlet áll elő:

$$J.\ddot{\theta} = -m.r.g.\sin\theta.$$

Egy első integrált $\dot{\theta}$-al való szorzás után directe felírhatunk; az eredmény:

$$\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 = m.r.g.\cos\theta + \text{const.}$$

Ha pedig rövidség kedvéért $\frac{J}{mr}$ azaz $\frac{S\varrho^2 Dm}{mr} = l$ írjuk, akkor

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{l}.\cos\theta + \text{constans}.$$

Épenilyen egyenletet kaptunk a mechanika alaptanaiban egy l hosszúságú mathematikai inga számára. Úgy fordul tehát a közönséges fizikai inga a földhöz rögzített tengely körül, mint egy $l = \frac{S\varrho^2 Dm}{mr}$ hosszúságú mathematikai inga. Ezt a hosszúságot a közönséges fizikai inga redukált hosszának nevezzük.

Ha már most úgy, mint a mechanika alaptanaiban, az integratio constansát $-\frac{2g}{l}\cos\varepsilon$ alakban fejezzük ki és φ új változót vezetünk be a $\sin\frac{\theta}{2} = \sin\frac{\varepsilon}{2}\cdot\sin\varphi$ egyenlet által és

$$\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\varepsilon}{2}\cdot\sin^2\varphi}} = F\left(\sin\frac{\varepsilon}{2}, \varphi\right)$$

írjuk és a kezdeti pillanathoz tartozó értékeket 0 indexxel jelöljük, akkor úgy, mint azokban az alaptanokban:

$$\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot\left[\mathfrak{F}\left(\sin\frac{\varepsilon}{2},\varphi\right)-\mathfrak{F}\left(\sin\frac{\varepsilon}{2},\varphi_0\right)\right]=t$$

azaz

$$\varphi=\mathrm{am.}\left(\mathfrak{F}_0+\sqrt{\frac{g}{l}}\cdot t\right),\quad \left(\mathrm{mod.}=\sin\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

kifejezéshez jutunk. Ehhez képest

$$\sin\frac{\theta}{2}=\sin\frac{\varepsilon}{2}\cdot\sin.\mathrm{am.}\left(\mathfrak{F}_0+\sqrt{\frac{g}{l}}\cdot t\right)$$

egyenletünk van θ-nak, mint az idő függvényének a meghatározására.

Vizsgáljuk azt az esetet, amelyben a kezdeti θ_0 szög $-\frac{\pi}{2}$ és $+\frac{\pi}{2}$ közt van, a $\dot{\theta}_0$ kezdeti szögsebesség pedig $-\frac{2g}{l}\cdot\cos\theta_0$ és $+\frac{2g}{l}\cdot\cos\theta_0$ közt van. Akkor, mint a mechanika alaptanaiban láttuk, megválasztható úgy az ε constans, hogy az $\frac{\pi}{2}$ és $|\theta_0|$ közt legyen és ekkor a $-\varepsilon$ és $+\varepsilon$ szélső értékek intervallumában fog változni a θ, midőn is az inga mozgását lengésnek, az ε szöget a lengés amplitudójának, a $\varphi=\mathrm{am.}\left(\mathfrak{F}_0+\sqrt{\frac{g}{l}}\cdot t\right)$ szöget pedig a lengés fázisának nevezzük. Egyenletünk szerint periodusos mozgás ez, amelynek a fél idő periodusa, vagyis azon idő, amely alatt egyik szélső helyzetből a másikba jút el az inga, vagyis az, amely alatt a θ szög $-\varepsilon$-tól ε-ig vagy ε-tól $-\varepsilon$-ig változik, vagyis az, amely alatt a φ fázis $-\frac{\pi}{2}$-től $+\frac{\pi}{2}$-ig vagy $\frac{\pi}{2}$-től $-\frac{\pi}{2}$-ig változik.

A t fentebbi kifejezése szerint ez az idő:

$$T=\sqrt{\frac{l}{g}}\left[\mathfrak{F}\left(\sin\frac{\varepsilon}{2},\frac{\pi}{2}\right)-\mathfrak{F}\left(\sin\frac{\varepsilon}{2},-\frac{\pi}{2}\right)\right]=$$

$$\mathcal{T} = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot\mathcal{F}\left(\sin\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\pi}{2}\right) =$$
$$= \pi\cdot\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\sin^2\frac{\varepsilon}{2}+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)^2\sin^4\frac{\varepsilon}{2}+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\right)^2\sin^6\frac{\varepsilon}{2}+\dots \text{in inf}\right].$$

Ezt nevezzük lengés időnek; két oly tényező szorzata, amelyek egyike csak az ε amplitudó függvénye, másika pedig u.m. $\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = \pi\sqrt{\frac{S\varrho^2 Dm}{r\cdot m\cdot g}}$, az inga tömegének a lengés tengelye körüli eloszlásától, e tömeg nagyságától és a g nehézségi gyorsulástól függ.

Nem vettük számba a surlódást és a környezeti ellenállást, és ebből folyólag egyenleteink bármely kezdeti pillanattól számítva a valóságban megközelítőleg is csak rövid időre tekinthetők helyesnek.

2. példa. **Közönséges torziós mérleg.**

Ebben anyagi rendszerünk egy merev test, amely egy tömegtelen és nyujthatatlan, de bármiképen hajlitható és csavarható vékony fonálon csüng egy állványról, amely telep rendszert képez s a kapcsoló rendszer, vagyis a fonál nem passiv, vagyis mihelyt elcsavarodott, már is visszacsavarni törekszik a merev testet, amelyet lengőnek nevezzük. Most tehát a szabad erőnket megtoldva gondoljuk majd oly erőkkel, amelyek a fonál activitásának a következményei és ezeknek az erőknek a fonál körüli forgató momentumát a torzió forgató momentumának nevezzük. Most tehát $(\mathfrak{D}X, \mathfrak{D}Y, \mathfrak{D}Z)$ a szabad erőnek és a fonál activitásából származó erőnek az összetétele és a fonál körüli forgató momentuma a szabad erő forgató momentumának és a torzió forgató momentumának az összege. Tegyük fel, hogy olyan a kezdeti mechanikai állapot és olyanok a szabad erők a telep rendszerhez rögzített coordináta rendszerben, hogy a lengő mozgása ebben a coordináta rendszerben a fonál körüli forgásból áll; ez legyen a mi coordináta rendszerünk. Válasszunk most a lengőben tetszésre egy materialis vectort, amely azonban átmesse a fonál hossztengelyét és arra merőleges legyen. Ennek az irányát nevezzük a lengő irányának. Az x tengelyt úgy helyezzük el, hogy amidőn a fonál nincs elcsavarva, a lengő irányával bírjon, a lengő iránya pedig t pillanatban θ szög alatt legyen elfordulva az x tengely irányától és a θ positiv vagy negativ legyen aszerint, amint az elfordulás positiv vagy negativ értelemben történt a z tengely körül, amely a fonálban legyen. Most a folyó cikk elején $\delta x, \delta y, \delta z$ számára írt kifejezések mintájára

$$\dot{x} = [\mu(z-c) - \nu(y-b)].\dot{\theta} = -y.\dot{\theta}$$

$$\dot{y} = [\nu(x-a) - \lambda(z-c)].\dot{\theta} = x.\dot{\theta}$$

mert most $\lambda=0$, $\mu=0$, $\nu=1$, és $a=0$, $b=0$, $c=0$ teheto. Ha tehát a Dm tömegű elemi rész távola a fonál hossztengelytől: ϱ, úgy

$$\frac{d}{dt}\cdot S(x\dot{y} - y\dot{x}).Dm \equiv \frac{d}{dt} S(x^2+y^2).\dot{\theta}.Dm \equiv \frac{d}{dt}\cdot\dot{\theta} S\varrho^2.Dm$$

ahol a $\sum \varrho^2 Dm$ a lengő u.n. inertia momentuma a fonálra vonatkozólag; jelölje ezt J, akkor egyenletünk bal oldala: $J.\ddot{\theta}$. A jobb oldalt két részben fogjuk föl; egyik a fonál torziójából, másik a szabad erőtől származik; amazt Φ, ezt F jelölje, mihez képest

$$J.\ddot{\theta} = \Phi + F$$

Nyugalomban $\Phi + F = 0$, tehát $\Phi = -F$. Ha tehát ismerjük nyugalomban a szabad erők z tengelyű forgató momentumát, úgy megkapjuk a nyugalom számára Φ-t, vagyis a torzióból származó z tengelyű forgató hatást. Ezen a módon ehhez az eredményhez jutunk, hogy Φ megközelítőleg arányos az elfordulás szögével, θ-ával, arányos legalább addig, míg nem nagy és pedig negativ együtthotó szerint, amely a fonál minőségétől, méreteitől és állapotától függ, amelyeket itt változatlannak gondolunk. $-k$-ával jelölve ezt az arányossági faktort

$$\Phi = -k.\theta$$

Igy van ez nyugalomban. Kérdés azonban, vajjon mozgásban is ilyen-e a Φ. Bármely ismeretes F mellett használjuk ezt a Φ kifejezést, mindig oly mozgás következik differentiál egyenletünkből eddigi tapasztalásunk szerint, amely egyezik a valósággal; biztvást feltehetjük tehát, hogy mindig ilyen a Φ. Legyen pl. hogy csak a nehézségi szabad erő és a környezet ellenállásából származó szabad erő tesz számot. Akkor F egészen az utóbbitól származik, mert az előbbinik egy verticális tengely körüli forgató momentuma mindig zérus. Még pedig az ellenállásból származó forgató momentum addig, amig a $\dot{\theta}$ szögsebesség kicsiny, megközelitőleg arányos ezzel és pedig negativ arányossági tényező szerint, amely a környezettől, a lengő alakjától, terjedelmétől és a forgási tengelyhez viszonyitott helyzetétől függ. Jelölje $-2\varkappa$ ezt az arányossági tényezőt, mihez képest

$$\mathcal{F} = -2\varkappa . \dot{\theta} .$$

Van tehát most, mint mozgási egyenletünk, a következő:

$$\mathcal{J} . \ddot{\theta} = -\lambda . \theta - 2\varkappa . \dot{\theta}$$

azaz:

$$\ddot{\theta} + \frac{2\varkappa}{\mathcal{J}} \cdot \dot{\theta} + \frac{\lambda}{\mathcal{J}} \cdot \theta = 0 .$$

ahol $\mathcal{J}, \varkappa, \lambda$ constansok. Ezen egyenlet adott kezdeti θ_0 és $\dot{\theta}_0$ értékekhez a θ elfordulási szöget az idő oly függvényeként határozza meg, amely addig, amig θ és $\dot{\theta}$ kicsiny, a valóságos mozgással jól egyezik.

Használjuk ezeket a rövidítéseket:

$$\frac{\varkappa}{\mathcal{J}} \equiv p \quad , \sqrt{\frac{\lambda}{\mathcal{J}} - \left(\frac{\varkappa}{\mathcal{J}}\right)^2} = q$$

Akkor, mint majd a második félévben meglátjuk, egyenletünk általános megoldása, hogy

$$\theta = A . e^{-pt} . \sin q (t - B),$$

ahol A és B az integrátio határozatlanai, amelyek θ_0 és $\dot{\theta}_0$ alapján határozandók meg. Ha $\frac{\varkappa^2}{\mathcal{J}} < \lambda$ akkor reális A és B constansok mellett θ kifejezése is reális, még pedig, ha $\varkappa$ ellenállási együttható nagyon kicsiny és emiatt zérusnak írjuk, akkor egyszerű harmonikus változást kapunk a θ számára. Azonban vegyük most észre, hogy bármi kicsiny legyen is a $\varkappa$ ellenállási együttható, ha csak nem pontosan zérus, már igen hosszú időtartamára nem válik be az egyszerű harmonikus mozgás, mert az exponentiális értéke számottevően el fog ütni igen nagy idő mulva az egységtől, mely érték akkor illetné meg az exponentiálist, ha a $\varkappa$ zérus volna. Ugyanis folyvást kisebbedik ez az exponentiális és idő haladtával 0-ba convergál.

Kimaradt: 2 példa. 1. fonalas fizikai inga 2. a kettős inga (hermig)

XV. A mozgási energia tétele.

Most a IX. cikk harmadik speciális tételével foglalkozunk, azzal az esettel, hogy (dx, dy, dz) valóságos elemi elmozdulásokkal arányos elmozdulások a virtuálisok közé tartoznak úgy, hogy egyebek közt beválik

$$\delta x = N.dx,\quad \delta y = N dy,\quad \delta z = N dz.$$

ahol N minden elemi részhez ugyanaz a skaláris, amely positiv is negativ is lehet. Előfordulhat, hogy ezzel ki is vannak merítve a virtuális elmozdulások, de általában csak egy faja ez a virtuális elmozdulásoknak, ha ugyan valóban közéjük tartozik. Következőleg a virtuális munka egyenlőtlenségének u.m. a

$$S[(\ddot{x}Dm - DX)\delta x + (\ddot{y}Dm - DY)\delta y + (\ddot{z}Dm - DZ)\delta z] \geq 0$$

egyenlőtlenségnek megfelelnek most az előbb írt kifejezések, vagy mint egyedül helyesek, vagy, mint egyebek közt szintén helyesek. E kifejezésekkel:

$$N.S[(\ddot{x}\mathfrak{D}m-\mathfrak{D}X)\cdot dx+(\ddot{y}\mathfrak{D}m-\mathfrak{D}Y)dy+(\ddot{z}\mathfrak{D}m-\mathfrak{D}Z)dz]\gtreqless 0$$

Ebből pedig annak következtében, hogy N pozitív is negatív is lehet, az összeg eltűnni tartozik, azaz:

$$S[(\ddot{x}\mathfrak{D}m-\mathfrak{D}X)\cdot dx+(\ddot{y}\mathfrak{D}m-\mathfrak{D}Y)dy+(\ddot{z}\mathfrak{D}m-\mathfrak{D}Z)dz]=0$$

Ha dt-vel átosztunk és azután a szabad erőktől függő részt a jobb oldalra írjuk:

$$S(\ddot{x}\dot{x}+\ddot{y}\dot{y}+\ddot{z}\dot{z})\cdot\mathfrak{D}m=S(\dot{x}\mathfrak{D}X+\dot{y}\mathfrak{D}Y+\dot{z}\mathfrak{D}Z)$$

$$\frac{d}{dt}S\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}{2}\cdot\mathfrak{D}m=S(\dot{x}\mathfrak{D}X+\dot{y}\mathfrak{D}Y+\dot{z}\mathfrak{D}Z)$$

Van tehát egy határozott egyenletünk s ennek a tartalmát nevezzük a mozgási energia tételének; ugyanis a baloldalon lévő

$$S\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}{2}\cdot\mathfrak{D}m=\frac{1}{2}S\dot{s}^2\mathfrak{D}m.$$

összeget az anyagi rendszer t pillanati mozgási energiájának nevezzük. Itt $\dot{s}$ nyilvánképen a $\mathfrak{D}m$ tömegű elemi rész t pillanati sebességének a nagyságát akarja jelenteni. Tehát minden elemi résznek a tömegét megszorozván az ő t pillanati sebességének a négyzetével, e szorzatok összegének a felét nevezzük az anyagi rendszer t pillanati mozgási energiájának; a t pillanati kinetikus energiájának vagy eleven erejének is nevezik, honnan a tétel más nevei: a kinetikus energia vagy eleven erő tétele.

Egyenletünk jobb oldala:

$$S(\dot x\mathfrak{D}X+\dot y\mathfrak{D}Y+\dot z\mathfrak{D}Z)\equiv\frac{S(\mathfrak{D}X.dx+\mathfrak{D}Y.dy+\mathfrak{D}Z.dz)}{dt}$$

nem más, mint a szabad erők dt időelemben végzett munkájának és a dt időelemnek a hányadosa, azt a szabad erőktől végzett munka t pillanati sebességének mondjuk. Midőn tehát a valóságos elemi elmozdulásokkal arányos elmozdulások a virtuálisok közé tartoznak, akkor elnevezésünk értelmében a mozgási energia változási sebessége egyenlő a szabad erő munkájának a sebességével. Minthogy pedig

$$d\tfrac{1}{2}S\dot s^2\mathfrak{D}m=S(\mathfrak{D}X.dx+\mathfrak{D}Y.dy+\mathfrak{D}Z.dz)$$

úgy ama feltétel alatt, a mozgási energia elemi megváltozása egyenlő a szabad erő egyidejű elemi munkájával.

Abban a különös esetben, hogy a szabad erőknek van skaláris potenciálja $\mathfrak{D}\Phi$ és ez csakis a hellyel változik,

$$S(\mathfrak{D}X dx+\mathfrak{D}Y.dy+\mathfrak{D}Z.dz)\equiv S\left(\frac{\partial\mathfrak{D}\Phi}{\partial x}dx+\frac{\partial\mathfrak{D}\Phi}{\partial y}dy+\frac{\partial\mathfrak{D}\Phi}{\partial z}dz\right)$$
$$=d.S\mathfrak{D}\Phi.$$

Ha tehát $\frac{1}{2}S\dot s^2\mathfrak{D}m\equiv T$ és $S\mathfrak{D}\Phi=\Phi$ írjuk, úgy

$$dT=d\Phi$$

tehát általánosan elvégezhetünk egy integratiot

$$T=\Phi+\text{constans}.$$

És ha a t_0 pillanati értékeket 0 indexxel jelöljük, úgy

$$T-T_0=\Phi-\Phi_0$$

Ebben a baloldal a mozgási energiának t_0 pillanattól t pillanatig való megváltozása, a jobb oldal pedig a szabad erőknek ez idő alatt végzett munkája; ez a kettő tehát feltételünk alatt egyenlő. A Φ skaláris ellentétesét jelöljük meg Ω-val úgy, hogy

$$\Omega \equiv -\Phi$$

legyen; ezt az anyagi rendszer potentiális energiájának nevezzük. Vele

$$T + \Omega = T_0 + \Omega_0$$

egyenletünk van, mely azt mondja ki, hogy az anyagi rendszer mozgási energiájának és potentiális energiájának összege állandó; egyik a másik rovására nő, egyik a másik javára fogy mindig, mikor változik. Különben vegyük észre, hogy a Φ skaláris és egyben az Ω potentiális energia egy additiv constans határozatlanságával van definiálva. Nevezetesen az Ω potentiális energia nem lévén egyéb, mint oly függvény, amelynek a megváltozása ellentétesen egyenlő a szabad erő munkájával, nyilvánképen egy additiv constans határozatlanságával van definiálva.

Midőn specialiter a nehézségi erőből állana minden elemi részen a szabad erő és annak iránycosinusai: α, β, γ, úgy az egész anyagi rendszerben bevális, mint a szabad erők potentiálja:

$$D\Phi = (\alpha x + \beta y + \gamma z) . g . Dm$$

amelyhez még egy tetszésszerinti constanst lehetne adni, amit azonban egyszerűség kedvéért 0-nak szoktunk megválasztani, és szorosabban ezt a kifejezést nevezzük a $\mathfrak{D}m$ tömegű elemi részre ható nehézségi erők potentiáljának. /: Voltaképen $\mathfrak{D}\Phi$ kifejezéséhez az idő tetszésszerinti függvényét is lehetne adni, de ezt annál kevésbbé tesszük, mert akkor kifejezésünk megszünnék pusztán a coordináták függvénye lenni:/. Most

$$\Phi = \mathfrak{S}\mathfrak{D}\Phi = \mathfrak{S}(\alpha x + \beta y + \gamma z).g.\mathfrak{D}m =$$
$$= \alpha.g.\mathfrak{S}x\mathfrak{D}m + \beta.g.\mathfrak{S}y\mathfrak{D}m + \gamma.g.\mathfrak{S}z\mathfrak{D}m =$$
$$= (\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta).g.m.$$

ha m az anyagi rendszer tömege és ξ, η, ζ az ő tömegcentrumának coordinátái. Eszerint olyankor, hogy az anyagi rendszerben ható szabad erők a nehézségi erőből állanak; azok munkája:

$$\Phi - \Phi_0 = [\alpha(\xi - \xi_0) + \beta(\eta - \eta_0) + \gamma(\zeta - \zeta_0)].g.m.$$

Vagy ha a tömegcentrum magasságának a megváltozását h jelöli,

$$\Phi - \Phi_0 = g.m.h$$

ahol h positiv vagy negativ aszerint, amint mélyedt vagy emelkedett a tömegcentrum. Világos, hogy akkor is ez a nehézségi erők munkája, ha más szabad erők is hatnak, mert ezeké additive csatlakozik az övéhez. De ha más szabad erők nem hatnak, akkor

$$T - T_0 = gmh = [\alpha(\xi - \xi_0) + \beta(\eta - \eta_0) + \gamma(\zeta - \zeta_0)].g.m.$$

1. példa. A közönséges fizikai inga.

Ha az inga állványa a földhöz van rögzitve, úgy a földhöz rögzitett coordináta rendszerben és elhanyagolható surlódás esetén nyilvánképen alkalmazhatjuk e példában a mozgási energia tételét; még pedig, mivel csak a nehézségi szabad erő hat, a legutolsó egyenletünk alakjában. Egyszerüség kedvcért válaszuk úgy coordináta rendszerünket, mint az előbbi cikk első példájában, v. is az x tengelyt tegyük meg forgási tengelynek, a z tengelyt pedig irányitsuk verticálisan lefelé. Most $\alpha=0, \beta=0, \gamma=1$, tehát

$$T-T_0 = mg.(\zeta-\zeta_0)$$

és részletesebben:

$$\frac{1}{2}S\dot{s}^2\mathfrak{D}m-\frac{1}{2}S\dot{s}_0^2\mathfrak{D}m = mg(\zeta-\zeta_0)$$

vagy rövidebben

$$\frac{1}{2}S\dot{s}^2\mathfrak{D}m = mg\zeta + const.$$

De a tömegcentrumnak az x forgási tengely verticális síkjából származó elfordulását most is θ szög mérje /: positiv vagy negativ értékkel aszerint, amint az x tengely körül jobbra vagy balra fordulásból származtatjuk:/. Továbbá a $\mathfrak{D}m$ tömegű elemi rész tengely távola: ϱ s a tömegcentrum tengely távola r legyen most is. Akkor $\dot{s}=\varrho|\dot{\theta}|$ és $\zeta = r.\cos\theta$, tehát

$$\frac{1}{2}S\varrho^2.\dot{\theta}^2.\mathfrak{D}m = mgr\cos\theta + const.$$

vagyis, ha a $\int \varrho^2 Dm$ inertia momentumot is J jelöli:

$$\frac{1}{2} J.\dot{\theta}^2 = mgr\cos\theta + const.$$

Az előbbi cikk első példájában is ehhez az egyenlethez jutottunk az első integratió után. A folytatás ott megtalálható.

Ha az inga állványa mozogna a földre nézve, akkor a földhöz rögzitett coordinata rendszerben nem alkalmazhatnók a mozgási energia tételét, mert érvényességének a feltétele nem teljesülne; de az állványhoz rögzitett coordináta rendszerben most is alkalmazhatnók, csakhogy akkor a nehézségi erőhöz hozzá kellene csatolni az állványnak és egyben a coordináta rendszernek a földhöz viszonyitott mozgásából származó szabad erőket.

2. példa. Atwood ejtőgépe.

A kerék és a sulyok képezik az adott anyagi rendszert. Az állvány, amelyhez tartozó tengely körül a kerék foroghat, a telep rendszer. Ez a földdel változatlan kapcsolatban van és ehhez rögzitjük coordináta rendszerünket. A nyujthatatlan, de hajlitható fonál, mely a kerék peremén átvetve feszülten a sulyokat tartja, kapcsoló rendszer. Csak a nehézségi szabad erő hat számottevően. Használatban a fonál két szabad ága folyvást feszülve és verticálisan csüng a kerékről, miközben az egyik suly lefelé, a másik felfelé haladó mozgást végez; a kerék pedig forgó mozgást végez a saját tengelye körül oly módon, hogy a fonálnak í hozzá simuló elemeivel teljesen együtt fordul, mert a fonál nem csúszhat rajta. Egyéb iránt pedig számottevő surlódás nincs. Könnyű észrevenni, hogy a valóságos elemi elmozdulásokkal arányos elmozdulások is a virtuális elmozdulások közt vannak, tehát alkalmazható a mozgási energia tétele. Mivel pedig csak a nehézségi szabad erő hat, azért:

$$T-T_0=[\alpha(\xi-\xi_0)+\beta(\eta-\eta_0)+\gamma(\zeta-\zeta_0)]g.m.$$

De ezt most differentiálva alkalmazzuk. Így egyszerűbb lesz a dolgunk, kivált, ha az egyik coordináta tengelyt verticálisan állítjuk. A ζ tengely álljon verticálisan lefelé, midőn is

$$dT=d(mg\zeta)=g.d(m\zeta)$$

Bontsuk most a mozgási energia kifejezését és /: a tömegcentrumok elmélete szerint:/ az $m.\zeta$ szorzatot is három részre, mely három rész közül egy az egyik sulyra, egy a másik sulyra és egy a kerékre vonatkozzék. Ehhez képest így írjuk egyenletünket:

$$d(T_1+T_2+T_3)=g.d(m_1\zeta_1+m_2\zeta_2+m_3\zeta_3)=$$
$$=g(m_1.d\zeta_1+m_2.d\zeta_2+m_3.d\zeta_3).$$

ahol m_1, m_2, m_3 rendre a három tömeg, $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ rendre a három tömegcentrum harmadik coördinátája és $T_1 = \frac{1}{2} S_1 \dot{s}^2 \mathfrak{D}m$, $T_2 = \frac{1}{2} S_2 \dot{s}^2 \mathfrak{D}m$ vonatkoznak a sulyokra. Minthogy e sulyok haladó mozgást végeznek, ennélfogva minden pontjuknak a sebessége ugyanaz s ha a 2-ős suly mozog lefelé, az 1-es felfelé, úgy a T_1ben minden $\dot{s}$ értéke $-\dot{\xi}_1$, és T_2ben minden $\dot{s}$ értéke $\dot{\xi}_2$, tehát:

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 \dot{\xi}_1^2 \quad \text{és} \quad T_2 = \frac{1}{2} m_2 \dot{\xi}_2^2$$

Mivel pedig amekkora sebességgel halad az egyik suly lefelé, akkorával halad a másik felfelé, ennélfogva

$$-\dot{\xi}_1 = \dot{\xi}_2$$

de jelöljük a sebesség közös nagyságát egyszerűen $\dot{s}$-al és akkor

$$-\dot{\xi}_1 = \dot{\xi}_2 = \dot{s}$$

honnan

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 \dot{s}^2, \quad T_2 = \frac{1}{2} m_2 \dot{s}^2.$$

$$d\xi_1 = -\dot{s}\,dt, \quad d\xi_2 = \dot{s}\,dt.$$

A kerékre vonatkozik a

$$T_3 = \frac{1}{2} S_3 \dot{s}^2 \mathfrak{D}m,$$

de ha a kerék kezdet óta θ nagyságú szöggel fordult, úgy a forgás tengelyétől ϱ távolban lévő elemi része dt idő alatt $\varrho . d\theta$ hosszúságú utat tett meg s következőleg sebességének nagysága:

$$\frac{\varrho . d\theta}{dt} = \varrho . \dot{\theta}$$

A kerék mozgási energiájának a kifejezése tehát:

$$T_3 = \frac{1}{2} S_3 \varrho^2 \dot{\theta}^2 \mathfrak{D}m = \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 S_3 \varrho^2 \mathfrak{D}m = \frac{1}{2} \mathfrak{J} . \dot{\theta}^2,$$

ha t.i. J jelöli a kerék saját tengelyű inertia momentumát. Ámde mekkora utat tettek meg dt idő alatt a sulyok, ugyanakkorát tettek meg a kerék peremének a pontjai is. Hogyha tehát a kerék peremének a sugara r, akkor

$$\dot{s} = r\dot{\vartheta}, \quad \dot{\vartheta} = \frac{\dot{s}}{r}.$$

Ennek behelyettesítésével a kerék mozgási energiája gyanánt azt találjuk, hogy az

$$T_3 = \frac{1}{2}\,\frac{J}{r^2}\cdot \dot{s}^2$$

Végül $d\xi_3 = 0$, mert a kerék tömegcentruma az ő tengelyében van, tehát nem mozdul, tehát coordinátái constansok. Mindezt összefoglalva fenti egyenletünkben

$$d\,\frac{1}{2}\left(m_1 + m_2 + \frac{J}{r^2}\right)\cdot\dot{s}^2 = (m_2 - m_1)\,g\cdot\dot{s}\cdot dt.$$

ámde a baloldalon $\dot{s}^2$ szorzója constans és

$$d(\dot{s}^2) = 2\,\ddot{s}\cdot\dot{s}\cdot dt$$

Következőleg:

$$\left(m_1 + m_2 + \frac{J}{r^2}\right)\cdot\ddot{s}\cdot\dot{s}\cdot dt = (m_2 - m_1)\cdot g\cdot\dot{s}\cdot dt,$$

$$\ddot{s} = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \frac{J}{r^2}}\cdot g$$

Eszerint a sulyok haladó mozgásának a gyorsulása állandó és pedig $\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \frac{J}{r^2}}$ arányban kisebb, mint a szabad esés gyorsulása.

.—.

$\frac{J}{r^2} = \frac{\sum m\varrho^2}{r^2}$ = a kerék redukált tömege

XVI. Lagrange parametrumos egyenletei.

A virtuális munka törvényéből folyó határozott egyenletekhez úgy is eljuthatunk, hogy csak azokat a virtuális elmozdulásokat veszszük számba, amelyekben a virtuális kényszer minden relatiójának a baloldala eltünik. Ha ezek a relatiók csupa egyenletek, akkor különben is eltünik mindeniknek a baloldala minden virtuális elmozdulással; ha azonban a kényszer relatiói között olyanok is vannak, amelyek baloldala $\geqq 0$, vagy ha csupa ilyenek vannak, akkor baloldalaiknak zérussal való egyenlítésével már a virtuális elmozdulások egy részét veszszük csak számba. Hogy azonban az alaptörvényből folyó határozott egyenleteket mind megkapjuk most is, az kitünik például a multiplicatorok módszeréből. Midőn ugyanis minden virtuális elmozdulást számba veszünk, az ennek rendjén keletkező multiplicatoros kifejezések abban különböznek azoktól, amelyeket akkor kapunk, midőn a virtuális kényszer relatióinak a baloldalát mind zérussal egyenlősítjük, hogy az utóbbi előállitásban tetszésszerintiek a multiplicatorok, míg az előbbiben egy részök vagy valamennyi nem negativ. Ámde ez a multiplicatorok eliminálására nézve közömbös, pedig azok eliminálásával származnak az egyenletek. Most különben arra a speciális esetre fordítsuk figyelmünket, hogy ha a lehetséges sebességek relatioinak bal oldalát mind zérussal egyenlősítjük, az ekkép előálló egyenletrendszert független parametrumok segélyével lehet integrálni; megoldani, úgy, hogy

$$x = \varphi(t, x_0, y_0, z_0, p_1, p_2, \dots)$$
$$y = \psi(t, x_0, y_0, z_0, p_1, p_2, \dots)$$
$$z = \chi(t, x_0, y_0, z_0, p_1, p_2, \dots)$$

ahol x_0, y_0, z_0 constansok, például az illető elemi rész kezdeti helyének coordinátái, és $p_1, p_2, \dots$ a parametrumok, amelyek a lehetséges mozgásban egészen tetszésszerintiek; φ, ψ, χ pedig határozott függvény alakok, amelyekről tegyük föl, hogy legalább kétszer differentiálható függvényeik $t, p_1, p_2, \dots$ változóknak. Ilyenkor a kényszert holonomnak nevezzük. Addig, amíg a kényszer tart, a valóságos elemi elmozdulásokkal a kényszer összes relatioinak a baloldala eltűnik, tehát a (φ, ψ, χ) lehetséges speciális helyek mindig a valóságosakat is tartalmazzák.

Ha dt időelemben a p-nek bármely gondolt elemi megváltozása ∂p, úgy lehetséges elmozdulások azok, amelyek componensei a következők:

$$\begin{cases} \partial x = \dfrac{\partial \varphi}{\partial t} dt + \dfrac{\partial \varphi}{\partial p_1} \cdot \partial p_1 + \dfrac{\partial \varphi}{\partial p_2} \cdot \partial p_2 + \dots \\ \partial y = \dfrac{\partial \psi}{\partial t} dt + \dfrac{\partial \psi}{\partial p_1} \partial p_1 + \dfrac{\partial \psi}{\partial p_2} \cdot \partial p_2 + \dots \\ \partial z = \dfrac{\partial \chi}{\partial t} dt + \dfrac{\partial \chi}{\partial p_1} \cdot \partial p_1 + \dfrac{\partial \chi}{\partial p_2} \cdot \partial p_2 + \dots \end{cases}$$

Ha ..utóm a valóságos mozgásban dt időelemben dp jelöli a paramétrumok elemi megváltozásait, úgy

$$dx = \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt + \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} dp_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial p_2} dp_2 + \cdots$$

$$dy = \frac{\partial \psi}{\partial t} dt + \frac{\partial \psi}{\partial p_1} dp_1 + \frac{\partial \psi}{\partial p_2} dp_2 + \cdots$$

$$dz = \frac{\partial \chi}{\partial t} dt + \frac{\partial \chi}{\partial p_1} dp_1 + \frac{\partial \chi}{\partial p_2} dp_2 + \cdots$$

Ha tehát $\partial p_1 - dp_1 = \delta p_1$, $\partial p_2 - dp_2 = \delta p_2$, stb. írjuk, úgy a virtuális elmozdulások componensei, azaz $\partial x - dx$, $\partial y - dy$, $\partial z - dz$, a következők:

$$\delta x = \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} \cdot \delta p_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial p_2} \delta p_2 + \cdots$$

$$\delta y = \frac{\partial \psi}{\partial p_1} \cdot \delta p_1 + \frac{\partial \psi}{\partial p_2} \cdot \delta p_2 + \cdots$$

$$\delta z = \frac{\partial \chi}{\partial p_1} \cdot \delta p_1 + \frac{\partial \chi}{\partial p_2} \cdot \delta p_2 + \cdots$$

ahol $\delta p_1, \delta p_2, \ldots$, bármik legyenek is $(\delta x, \delta y, \delta z)$, virtuális elmozdulást jelent. Más írásmóddal:

$$\delta x = \frac{\partial x}{\partial p_1} \delta p_1 + \frac{\partial x}{\partial p_2} \cdot \delta p_2 + \cdots$$

$$\delta y = \frac{\partial y}{\partial p_1} \cdot \delta p_1 + \frac{\partial y}{\partial p_2} \cdot \delta p_2 + \cdots$$

$$\delta z = \frac{\partial z}{\partial p_1} \cdot \delta p_1 + \frac{\partial z}{\partial p_2} \delta p_2 + \cdots$$

Tegyezzük be ezeket a kifejezéseket a virtuális munka egyenlőtlenségébe, amely velük teljesülni tartozik s kapjuk, hogy:

$$S\Big[(\ddot{x}\,\mathfrak{D}m-\mathfrak{D}X)\cdot\Big(\frac{\partial x}{\partial p_1}\cdot\delta p_1+\frac{\partial x}{\partial p_2}\delta p_2+\dots\Big)+$$
$$+(\ddot{y}\,\mathfrak{D}m-\mathfrak{D}Y)\cdot\Big(\frac{\partial y}{\partial p_1}\cdot\delta p_1+\frac{\partial y}{\partial p_2}\cdot\delta p_2+\dots\Big)+$$
$$+(\ddot{z}\,\mathfrak{D}m-\mathfrak{D}Z)\Big(\frac{\partial z}{\partial p_1}\cdot\delta p_1+\frac{\partial z}{\partial p_2}\cdot\delta p_2+\dots\Big)\Big]\geqq 0$$

azaz:

$$\delta p_1\,S\Big[(\ddot{x}\,\mathfrak{D}m-\mathfrak{D}X)\frac{\partial x}{\partial p_1}+(\ddot{y}\,\mathfrak{D}m-\mathfrak{D}Y)\frac{\partial y}{\partial p_1}+(\ddot{z}\,\mathfrak{D}m-\mathfrak{D}Z)\cdot\frac{\partial z}{\partial p_1}\Big]+$$
$$+\delta p_2\cdot S\Big[(\ddot{x}\,\mathfrak{D}m-\mathfrak{D}X)\cdot\frac{\partial x}{\partial p_2}+(\ddot{y}\,\mathfrak{D}m-\mathfrak{D}Y)\frac{\partial y}{\partial p_2}+(\ddot{z}\,\mathfrak{D}m-\mathfrak{D}Z)\frac{\partial z}{\partial p_2}\Big]+$$
$$+\;\dots\dots\dots\dots\qquad\geqq 0$$

Ez az egyenlőtlenség teljesülni tartozik $\delta p_1, \delta p_2, \dots$ minden gondolható értékével, mert $p_1, p_2, \dots$ teljesen független paraméterumok. Feltevéseink szerint a következő egyenletek vannak tehát:

$$\begin{cases} S\Big(\ddot{x}\frac{\partial x}{\partial p_1}+\ddot{y}\frac{\partial y}{\partial p_1}+\ddot{z}\frac{\partial z}{\partial p_1}\Big)\cdot\mathfrak{D}m = S\Big(\frac{\partial x}{\partial p_1}\mathfrak{D}X+\frac{\partial y}{\partial p_1}\cdot\mathfrak{D}Y+\frac{\partial z}{\partial p_1}\cdot\mathfrak{D}Z\Big) \\ S\Big(\ddot{x}\frac{\partial x}{\partial p_2}+\ddot{y}\frac{\partial y}{\partial p_2}+\ddot{z}\frac{\partial z}{\partial p_2}\Big)\cdot\mathfrak{D}m = S\Big(\frac{\partial x}{\partial p_2}\cdot\mathfrak{D}X+\frac{\partial y}{\partial p_2}\mathfrak{D}Y+\frac{\partial z}{\partial p_2}\cdot\mathfrak{D}Z\Big) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Annyi határozott differentiál egyenletünk van itt, ahány a független p paraméterum, ha ugyan $(\mathfrak{D}X, \mathfrak{D}Y, \mathfrak{D}Z)$ mint az időnek, a paraméterumoknak és ezek idő-deriváltjainak a függvényei állíthatók elő. Meghatározván ilyenkor az egyenletekből a p paraméterumokat, megismerjük a coordinátákat azoknak a paraméterumos kifejezéseiből. Azonban célszerű az egyenletek baloldalát más alakra vezetni. Vegyük figyelembe, hogy:

(Identitás) $\frac{\partial x}{\partial p_1}\cdot\ddot{x} \equiv \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial p_1}\cdot\dot{x}\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial p_1}\right)\cdot\dot{x}$; de

$$\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial p_1}\cdot\dot{p}_1 + \frac{\partial x}{\partial p_2}\cdot\dot{p}_2 + \cdots$$

tehát $\frac{\partial x}{\partial p_1} = \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{p}_1}$, $\frac{\partial x}{\partial p_1}\cdot\dot{x} = \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{p}_1}\cdot\dot{x} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial(\dot{x}^2)}{\partial \dot{p}_1}$

és így identitásunk első tagja:

$$\frac{d}{dt}\cdot\left(\frac{\partial x}{\partial p_1}\cdot\dot{x}\right) = \frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial}{\partial \dot{p}_1}\left(\frac{\dot{x}^2}{2}\right).$$

Továbbá identitásunk második tagjában:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial p_1}\right) = \frac{\partial^2 x}{\partial t\cdot\partial p_1} + \frac{\partial^2 x}{\partial p_1^2}\cdot\dot{p}_1 + \frac{\partial^2 x}{\partial p_2\,\partial p_1}\cdot\dot{p}_2 + \cdots$$

ami pedig $\dot{x}$ fennebbi kifejezése szerint $= \frac{\partial \dot{x}}{\partial p_1}$.

Tehát identitásunk második tagjában

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial p_1}\right)\cdot\dot{x} = \frac{\partial}{\partial p_1}\cdot\left(\frac{\dot{x}^2}{2}\right).$$

Ezek nyomán identitásunk így van:

$$\frac{\partial x}{\partial p_1}\cdot\ddot{x} \equiv \frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial}{\partial \dot{p}_1}\left(\frac{\dot{x}^2}{2}\right) - \frac{\partial}{\partial p_1}\left(\frac{\dot{x}^2}{2}\right)$$, etc., miher képest

$$\left(\frac{\partial x}{\partial p_1}\cdot\ddot{x} + \frac{\partial y}{\partial p_1}\cdot\ddot{y} + \frac{\partial z}{\partial p_1}\cdot\ddot{z}\right)\mathfrak{D}m = \frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial}{\partial \dot{p}_1}\left(\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}{2}\,\mathfrak{D}m\right) - \frac{\partial}{\partial p_1}\left(\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}{2}\,\mathfrak{D}m\right).$$

Van tehát a következő egyenletrendszerünk:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial T}{\partial \dot{p}_1} - \frac{\partial T}{\partial p_1} = S\left(\frac{\partial x}{\partial p_1}\cdot\mathfrak{D}X + \frac{\partial y}{\partial p_1}\cdot\mathfrak{D}Y + \frac{\partial z}{\partial p_1}\cdot\mathfrak{D}Z\right) \\ \frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial T}{\partial \dot{p}_2} - \frac{\partial T}{\partial p_2} = S\left(\frac{\partial x}{\partial p_2}\mathfrak{D}X + \frac{\partial y}{\partial p_2}\mathfrak{D}Y + \frac{\partial z}{\partial p_2}\cdot\mathfrak{D}Z\right) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

ahol T a mozgási energiát jelenti. Ezek Lagrange paraméteres egyenletei.

1. példa. A közönséges fizikai inga a földre nézve nyugvó horizontális tengelyen.

E példában a surlódás kizáratván az elemi részek lehetséges helyzeit egyáltalában egyetlen és független paraméterum határozza meg; és pedig, ha a forgás tengelyéből erre a tengelyre merőlegesen egy pontba húzott vectort a pont radius vectorának mondjuk; és ha x, y, z pont radius vectora a tömegcentrum radius vectorával ε szöget képez; a tömegcentrum radius vectora pedig, vagyis az inga iránya a verticálisan lefelé mutató iránnyal t pillanatban θ szöget képez, amely szöget positiónak vagy negatiónak számítunk aszerint, amint a forgási tengelynek tulajdonított irányra nézve jobbra vagy balra fordulásból származik, akkor az oly coordináta rendszerben, amelynek x tengelye a forgási tengely, z tengelye pedig verticálisan lefelé áll:

$$x = \text{const.}, \quad y = -\varrho \cdot \sin(\varepsilon + \theta), \quad z = \varrho \cdot \cos(\varepsilon + \theta)$$

ahol ϱ a pont tengely távola. Speciálisan a tömegcentrumot illetőleg:

$$\xi = \text{const.}, \quad \eta = -r \cdot \sin\theta, \quad \zeta = r \cdot \cos\theta$$

ha r annak a tengely távola.

Az x, y, z kifejezése elárulja, hogy alkalmazható itt Lagrange paraméterumos módszere a mozgás meghatározására. Most a mozgási energia kifejezésében, u. m.:

$$T = \frac{1}{2} S s^2 \mathfrak{D}m = \frac{1}{2} S(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2).\mathfrak{D}m$$

kifejezésben $\dot{x} = 0,\ \dot{y} = -\varrho.\cos(\varepsilon+\theta).\dot{\theta} = -z.\dot{\theta}$

$\dot{z} = -\varrho.\sin(\varepsilon+\theta).\dot{\theta} = y.\dot{\theta}$ teendő, tehát:

$$T = \frac{1}{2} S(y^2+z^2).\dot{\theta}^2 \mathfrak{D}m = \frac{1}{2}.\dot{\theta}^2.S\varrho^2 \mathfrak{D}m = \frac{1}{2}\mathfrak{J}.\dot{\theta}^2$$

ha $\mathfrak{J}$ az inga saját tengelyre inertia momentuma. Mivel pedig jelenleg csak egy paraméterünk van, a θ, tehát $p_1 = \theta$, $p_2 = 0$, $p_3 = 0$, ... $= 0$ tehető, és csak egy egyenletünk van, u. m.:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta} = S\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\mathfrak{D}X + \frac{\partial y}{\partial \theta}\mathfrak{D}Y + \frac{\partial z}{\partial \theta}\mathfrak{D}Z\right).$$

ámde tekintettel T imént megállapitott kifejezésére:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = \mathfrak{J}\dot{\theta} \quad \text{és} \quad \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = 0,\ \frac{\partial y}{\partial \theta} = -\varrho.\cos(\varepsilon+\theta) = -z.,\ \frac{\partial z}{\partial \theta} = -\varrho\sin(\varepsilon+\theta) = y$$

és amennyiben csak a nehézségi szabad erő hat,

$$\mathfrak{D}X = 0,\ \mathfrak{D}Y = 0,\ \mathfrak{D}Z = g.\mathfrak{D}m.$$

Ezek nyomán egyenletünk így van:

$$\mathfrak{J}.\ddot{\theta} = S y g \mathfrak{D}m = g.S y \mathfrak{D}m = m.g.\eta.,$$

azaz

$$\mathfrak{J}\ddot{\theta} = -m.g.r.\sin\theta$$

ha t. i. az inga egész tömege: m.

A XIV cikk első példájában ugyanahhoz a másodrendű differentiál egyenlethez jutottunk, a folytatás ott megtalálható.

2. példa. A közönséges fizikai inga azzal a változtatással, hogy tengelye horizontális fekvésének megtartásával verticális síkban surlódás nélkül szabadon <u>mozoghat</u>.

A coordináta rendszert a földhöz rögzítjük. Az x tengelye horizontális legyen, párhuzamos az inga tengelyével, a z tengelye verticálisan lefelé mutasson. Ha az inga tengely pontjainak harmadik coordinátáját c jelöli, úgy az ε és θ szög, meg ϱ és r előbbi definitiója szerint:

$$x = \text{const.},\quad y = -\varrho\cdot\sin(\varepsilon+\theta),\quad z = c+\varrho\cdot\cos(\varepsilon+\theta).$$

Most $p_1=\theta$, $p_2=c$ független paraméterek szerint alkalmazható Lagrange paraméteres módszere a mozgás meghatározására. Írjuk fel most is külön a tömegcentrum coordinátáinak paraméteres kifejezéseit:

$$\xi = \text{const.},\quad \eta = -\overset{r}{\cancel{\varrho}}\cdot\sin\theta,\quad \zeta = c+\overset{r}{\cancel{\varrho}}\cdot\cos\theta.$$

A mozgási energia kifejezésében, t. i. a

$$T=\frac{1}{2}S(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2).Dm$$

kifejezésben beirandók:

$$\dot{x}=\overset{0}{\cancel{\text{const.}}},\quad \dot{y}=-\varrho.\cos(\varepsilon+\theta).\dot{\theta}=(c-z)\dot{\theta},\quad \dot{z}=\dot{c}-\varrho.\sin(\varepsilon+\theta)\dot{\theta}=\dot{c}+y\dot{\theta}$$

mihez képest adódik:

$$T=\frac{1}{2}.J.\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}m.\dot{c}^2-m.r.\dot{c}.\dot{\theta}.\sin\theta$$

ahol m az inga egész tömege és J az ő saját tengelyű inertia momentuma. Ez használandó a $p_1=\theta$-ára és $p_2=c$-re vonatkoztatott Lagrange féle két egyenlet baloldalában, a jobb oldalán pedig tekintetbe veendő, hogy:

$$\mathfrak{D}X=0,\ \mathfrak{D}Y=0,\ \mathfrak{D}Z=g.\Sigma m.$$

Ezek szerint fejtendő ki a

$$\frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial T}{\partial \dot{p}_1}-\frac{\partial T}{\partial p_1}=S\left(\frac{\partial x}{\partial p_1}\mathfrak{D}X+\frac{\partial y}{\partial p_1}\cdot\mathfrak{D}Y+\frac{\partial z}{\partial p_1}\cdot\mathfrak{D}Z\right) \text{ és}$$

$$\frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial T}{\partial \dot{p}_2}-\frac{\partial T}{\partial p_2}=S\left(\frac{\partial x}{\partial p_2}\cdot\mathfrak{D}X+\frac{\partial y}{\partial p_2}\cdot\mathfrak{D}Y+\frac{\partial z}{\partial p_2}\cdot\mathfrak{D}Z\right)$$

két egyenlet, amelyekben $p_1=\theta$, $p_2=c$. Kapjuk, hogy:

$$\frac{d}{dt}(J\dot{\theta}-m.r.\dot{c}.\sin\theta)+m.r.\dot{c}\dot{\theta}.\cos\theta=-mgr.\sin\theta$$

$$\frac{d}{dt}(m\dot{c}-m.r.\dot{\theta}.\sin\theta)=m.g$$

Az utóbbi egyenleten egy integratió közetlenül elvégezhető; az eredmény:

$$\dot{c}-r.\dot{\theta}.\sin\theta=gt+A \quad \ldots\ldots \quad (1.)$$

hol A az integratio constansa. Ezt az egyenletet pedig szintén lehet közetlenül integrálni; az eredmény:

$$c+r.\cos\theta=\frac{1}{2}.gt^2+A.t+A_0 \quad \ldots\ldots \quad (2.)$$

ahol A_0 az újabb integratiós constans. Itt legyen megjegyezve, hogy ugyanezekhez az egyenletekhez a tömegcentrum mozgásáról szóló tan alapján is eljuthatunk.

Ami fentebbi első egyenletünket illeti, az részletesen írva így van:

$$J.\ddot{\theta}-m.r.\ddot{c}.\sin\theta=-m.r.g.\sin\theta.$$

Itt pedig megjegyzendő, hogy ugyanehhez az egyenlethez vezet a forgató momentumok tétele, s nem különben a mozgási energia tétele. Kissé másképp írva:

$$J.\ddot{\theta} = m.r(\ddot{c}-g).\sin\theta.$$

de az (1.) alatti egyenletből:

$$\ddot{c}-g = \frac{d}{dt}\left(r.\dot{\theta}.\sin\theta\right)$$

tehát

$$J.\ddot{\theta} = m.r^2.\sin\theta.\frac{d}{dt}.(\dot{\theta}.\sin\theta)$$

$$J.\dot{\theta}.\ddot{\theta} = m.r^2.\dot{\theta}.\sin\theta.\frac{d}{dt}(\dot{\theta}.\sin\theta)$$

ahonnan egyszerű integrációval:

$$J.\dot{\theta}^2 = m.r^2.\dot{\theta}^2.\sin^2\theta + J.B.$$

ahol $J.B$ az integratio constansa. Kissé másképp írva:

$$\left(1-\frac{m.r^2}{J}.\sin^2\theta\right).\dot{\theta}^2 = B \quad \ldots\ldots \quad (3.)$$

Feltűnő, hogy $\dot{\theta}$ független a nehézségi erőtől, különben pedig, mint látjuk, másodfajú elliptikus integrál szerint függ $\dot{B}$ a θ-ától. Mint majd alább meglátjuk, J mindig nagyobb, mint $m.r^2$, tehát $B \geqq 0$. Vegyük észre, hogy ha $\dot{\theta}$ kezdeti értéke zérus, akkor $\dot{\theta}$ mindig zérus, mert $B=0$. Ha azonban $\dot{\theta}$ kezdeti értéke nem zérus, akkor $\dot{\theta}$ soha sem zérus, és tekintve, hogy egyenleteinkből

$$\dot{\theta}\sqrt{1-\frac{m.r^2}{J}.\sin\theta} = C \quad \ldots \quad (3.)'$$

ahol $C=\sqrt{B}$ vagy $=-\sqrt{B}$, látjuk, hogy $\dot{\theta}$ vagy mindig positiv, vagy mindig negativ, tehát az inga folytonosan ugyanazon értelemben fordul a tengely körül, ugyanis a θ szög vagy folytonosan nő, vagy folyvást fogy. Úgy feküdjék az x tengely (amely párhuzamos az inga tengelyével), hogy reá nézve kezdetben jobbra fordulásban volt légyen az inga. Akkor C positiv s az inga folyvást jobbra fordul. Mivel pedig a négyzetgyök általában $<\frac{1}{1}$, úgy általában $d\theta > C\,dt$. Ha tehát θ kezdeti értéke θ_0, úgy:

$$\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta > C\int_0^t dt$$

azaz

$$\theta > \theta_0 + Ct$$

folyvást. Következőleg az idő multával a θ a végtelenbe nő, miből folyólag az inga in infinitum körülforgásokat végezne a tengely körül ha in infinitum tartana a föltételezett kényszer. Legkisebb a szögsebesség az inga irány vertikális állásában, $=C$, legnagyobb az inga irány horizontális állásaiban $=\frac{C}{\sqrt{1-\frac{mr^2}{J}}}$; egyébiránt az inga irány egyenlő állásaiban egyenlő; tehát ismétlődő körülforgásokat végez az inga. Az (1.) alatti egyenlet a forgási tengely haladási sebességét határozza meg, amennyiben θ, mint t függvénye már elő van állítva. Még pedig tekintettel (3)'-re:

$$\dot{c} = gt + rC\frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\frac{mr^2}{J}\sin^2\theta}} + A.$$

Vegyük észre ezek, hogy C lehet oly nagy, hogy ha a kezdeti $\dot{c}$ positiv volt is, a tengely egy vagy több izben fölfelé is mozogjon.

Inertia momentum; deviatio momentum.

Mielőtt a merev testek mechanikájához fognánk, ismerkedjünk meg tüzetesen e két fogalommal, melyek elseje(?)vel már példákban ismételten találkoztunk.

Legyen adva egy tengely, melyet T tengelynek nevezünk; adva legyen pedig ez a tengely a, b, c ponttal, amelyen áthalad és α, β, γ iránycosinusokkal, mint irányának az iránycosinusaival. Legyen továbbá adva egy testelem, tömege Dm, és helye: x, y, z. A test elem tömegének és a tengelytől való távola négyzetének szorzatát nevezzük a testelem T tengelyű inertia momentumának. Ha tehát r jelöli a test elemnek T tengelytől való távolát, úgy az $r^2 Dm$ szorzatot nevezzük a test elem T tengelyű inertia momentumának.

Egy anyagi rendszer T tengelyű inertia momentumán az ő elemi részeinek T tengelyű inertia momentumaiból képezett összeget értjük. $S r^2 Dm$ tehát egy anyagi rendszer T tengelyű inertia momentuma, ha az összegelés az anyagi rendszer valamennyi elemi részére kiterjed. Elmélete könnyen elintézhető a vectortan segélyével. Minthogy a, b, c ponttal, α, β, γ iránycosinusokkal és x, y, z ponttal meg van határozva az r távolság, ennélfogva az $r^2 Dm$ inertia momentum is szükségképen kifejezhetők ezekkel a mennyiségekkel és a tömegelemmel. Ez a kifejezés pedig nagyon hasznos. Alkossuk meg tehát: az a,b,c pontból húzzunk vectort az x,y,z pontra s ez képezzen ε szöget az J tengellyel; ha a hosszát ϱ jelöli, úgy

$$r = \varrho . \sin \varepsilon$$

Azonban $\sin \varepsilon$ kifejezhető a tengelynek és a vectornak az irányeosinusaival, amint tudjuk, és pedig:

$$\sin^2 \varepsilon = \left(\beta \frac{z-c}{\varrho} - \gamma \frac{y-b}{\varrho}\right)^2 + \left(\gamma \frac{x-a}{\varrho} - \alpha \frac{z-c}{\varrho}\right)^2 + \left(\alpha \frac{y-b}{\varrho} - \beta \frac{x-a}{\varrho}\right)^2$$

miből folyólag:

$$r^2 = [\beta(z-c) - \gamma(y-b)]^2 + [\gamma(x-a) - \alpha(z-c)]^2 + [\alpha(y-b) - \beta(x-a)]^2.$$

Eszerint az J tengelyre inertia momentum ekképen irható:

$$J = S\{[\beta(z-c) - \gamma(y-b)]^2 + [\gamma(x-a) - \alpha(z-c)]^2 + [\alpha(y-b) - \beta(x-a)]^2\} Dm.$$

Erre a kifejezésre vonatkozólag hasznos tételekkel fogunk majd megismerkedni. Előbb azonban vegyük számba ezen kifejezést néhány speciális tengelyre vonatkozólag.

Legyen, hogy az J tengely átmegy az origón. Akkor a,b,c pont gyanánt az origó is szolgálhat, következőleg az origón átmenő tengelyre az inertia momentum kifejezése ekkép irható:

$$J = S[(\beta z - \gamma y)^2 + (\gamma x - \alpha z)^2 + (\alpha y - \beta x)^2] Dm.$$

Különösen pedig, ha az J tengely rendre összeesik a három coordináta tengellyel, akkor ez a kifejezés rendre a következő:

$$J_x = S(y^2 + z^2) Dm$$

$$J_y = S(z^2 + x^2) Dm$$

$$J_z = S(x^2 + y^2) Dm.$$

Azokat a tételeket, amelyeket megakarunk állapitani, oly coordináta rendszerre vonatkoztatjuk, amelynek az origója benne van az adott $\mathcal{I}$ tengelyben, amidőn aztán $a=0$, $b=0$, $c=0$ tehetjük és tesszük, mihez képest $\mathcal{I}$-nek a fönt kifejezése érvényes.

1.) Ennek az $\mathcal{I}$ inertia momentumnak a kifejezését rendezzük a tengely irányczinusai szerint s kapjuk, hogy

$$\mathcal{I}=\alpha^2 \cdot S(y^2+z^2)\mathfrak{D}m+\beta^2 \cdot S(z^2+x^2)\mathfrak{D}m+\gamma^2 S(x^2+y^2) \cdot \mathfrak{D}m+$$
$$-2\beta\gamma S y.z\,\mathfrak{D}m-2\gamma.\alpha\, S z x\,\mathfrak{D}m-2\alpha\beta.S\, xy.\mathfrak{D}m$$

Ebben a kifejezésben az első három összeg v. is a három quadratikus alak nem más, mint rendre az x tengelyű, y tengelyű, z tengelyű inertia momentum: $\mathcal{I}_x, \mathcal{I}_y, \mathcal{I}_z$; a másik három összeget deviatio momentumnak nevezzük, és pedig az első bilinearis alakot az x tengelyű, a másodikat az y tengelyű, a harmadikat a z tengelyű deviatio momentumnak és röviden $\mathfrak{D}_x$, $\mathfrak{D}_y$, $\mathfrak{D}_z$ jelvényekkel írjuk. Jelöléseink használatával

$$\mathcal{I}=\alpha^2 \mathcal{I}_x+\beta^2 \mathcal{I}_y+\gamma^2 \mathcal{I}_z-2\beta\gamma\mathfrak{D}_x-2\gamma.\alpha\,\mathfrak{D}_y-2\alpha\beta\,\mathfrak{D}_z.$$

E kifejezés arra tanít, hogy ha ismerjük a coordináta rendszer három tengelyére az inertia momentumot és a deviatio momentumot, akkor az inertia momentumot akármely origói tengelyre megtudjuk határozni a feltüntetett rationalis egész müveletekkel. De a nyert kifejezésből még egy más, hasznos megismeréshez is jutunk. Képzeljük az összes origói tengelyeket és minden ilyen tengelyen tűzzünk ki az origótól positiv irányban egy pontot úgy, hogy annak origói távolsága megszabott arányossági tényező szerint fordított arányban legyen a tengelyre tartozó inertia momentum négyzetgyökével. Jelölje az arányossági tényezőt: K^2, jelölje egy origói tengelyen a kitűzött pont origói távolságát: R, s jelölje a tengelyre az inertia momentumot: J; akkor úgy van tehát kitűzve a pont a tengelyen ennek a positiv irányában, hogy

$$R = \frac{K^2}{\sqrt{J}}.$$

Ha minden origói tengelyen megjelöljük az ilyen pontot, akkor e pontok összessége ellipsoidot alkot, amelynek centruma az origóban van, s amelyet felfedezője után Poinsot-féle ellipsoidnak, más néven inertia ellipsoidnak nevezzük. Lássuk, hogy csakugyan ellipsoid e pontok geometriai helye, amelynek centruma az origóban van. Az arányossági egyenletből folyólag $J = \frac{K^4}{R^2}$, tehát J előbb talált kifejezése szerint:

$$R^2\left[\alpha^2 J_x + \beta^2 J_y + \gamma^2 J_z - 2\beta\gamma . D_x - 2\gamma\alpha D_y - 2\alpha\beta . D_z\right] = K^4$$

Vagyis, ha $R\alpha \equiv \xi$, $R\beta \equiv \eta$, $R\gamma \equiv \zeta$ írjuk, úgy

$$J_x . \xi^2 + J_y \eta^2 + J_z \zeta^2 - 2 D_x \eta\zeta - 2 D_y \zeta . \xi - 2 D_z . \xi\eta = K^4.$$

ahol ξ, η, ζ a tengelyeken kitűzött pontok coordinátái. Akármelyik origói tengelyen kitűzött pontra vonatkoztassuk ezt az egyenletet, az $J_x, J_y, J_z, D_x, D_y, D_z$ és K értékek mindig ugyanazok abban;

következőleg ez az egyenlet másodrendű felületet határoz meg azoknak a pontoknak a geometriai helye gyanánt, amelyeknek a coordinátái: ξ, η, ζ, még pedig nyilván oly ellipsoidot határoz meg, amelynek az origóban van a centruma. Hogyha tehát ismerni akarjuk az origón átmenő összes tengelyekre vonatkozólag az inertia momentumot, elégséges az u.n. inertia ellipsoidot és egyik origói tengelyre az inertia momentumot ismerni, mert azokból az R hosszúságokból, melyeket az origó és az inertia ellipsoid az origói tengelyekből kivág, a K^2 constans segélyével mindegyik tengelyre szóló inertia momentumot kiszámíthatjuk, a K^2 constans pedig kiadódik az ismert inertia momentumból. De egyenletünk még arra is megtanít, hogy a coordináta rendszer fekvését mindig meg lehet határozni úgy a maga origója körül, hogy a deviatio-momentumok eltűnjenek. Ez onnan következik, hogy coordináta transformátióval mindig el lehet érni, hogy az ellipsoid egyenletében csak a quadratikus rész fordul elő, a bilinearis rész pedig nem. Megjegyzendő, hogy az origó megválasztására nézve semmi kikötést sem tettünk. Ennélfogva a Poinsot féle ellipsoid tétele akármely pontra nézve áll, mint centrumra nézve. Tegyük még azt az észrevételt, hogy mindig az ellipsoid legkisebb tengelyére esik a legnagyobb inertia momentum és a legnagyobbra a legkisebb, mint azt az $J = \dfrac{K^4}{R^2}$ kifejezés mutatja.

2) Még egy tételt fogunk megismerni az inertia momentumra vonatkozólag. Ha egy anyagi rendszernek a tömegcentrumán keresztül egy adott tengellyel párhuzamos tengelyt húzunk, az erre vonatkozó inertia momentum megnagyobbítva a két tengely távolának a quadrátumából meg az egész tömegből képzett szorzattal, egyenlő az adott tengelyre vonatkozó inertia momentummal.

Bizonyítás: Az adott tengely iránycosinusai: α, β, γ, és egy pontjának a coordinátái a, b, c legyenek, akkor egy fentebbi kifejezésünk értelmében a reá vonatkozó inertia momentum:

$$J = S\{[\beta(z-c)-\gamma(y-b)]^2+[\gamma(x-a)-\alpha(z-c)]^2+[\alpha(y-b)-\beta(x-a)]^2\}Dm$$

Válasszuk úgy coordináta rendszerünket, hogy annak a z tengelye egyirányú legyen az adott J tengellyel, akkor $\alpha=0$, $\beta=0$, $\gamma=1$ s következőleg

$$J = S[(x-a)^2+(y-b)^2].Dm$$

$$= S(x^2+y^2).Dm + (a^2+b^2)m - 2(a\xi + b\eta)m$$

ha m jelöli az egész tömeget és ξ, η, ζ a tömegcentrum coordinátáit. Egyben úgy választottuk légyen azonban a z tengely helyét, hogy benne legyen az anyagi rendszer tömegcentruma. Ez esetben:

$$J = S(x^2+y^2)Dm + (a^2+b^2)m.$$

A $S(x^2+y^2)Dm$ nem más, mint a tömegcentrumon átmenő és az adott tengellyel párhuzamos tengelyre az inertia momentum, $\sqrt{a^2+b^2}$ pedig az adott tengelynek és ennek a ten-

gelynek a távolsága; a kimondott tétel tehát csak-
ugyan áll. Ha tehát egy tengelyre szóló inertia
momentum J, a tömegcentrumon át vele pár-
huzamosan vont tengelyre szóló pedig J_0, és ha
a két tengely távolsága ϱ és az anyagi rendszer
egész tömege m, úgy

$$J = J_0 + m.\varrho^2.$$

Eszerint valahányszor ismerjük az egész tömeget,
és ismerjük a tömegcentrumon átmenő tengelyek-
re az inertia momentumokat, már egyszerű mó-
dón számithatjuk ki bármely más tengelyre az i-
nertia momentumot. Láthatjuk azt is kifejezésünk-
ből, hogy párhuzamos tengelyekre szóló inertia mo-
mentumok közül azok a nagyobbak, melyek a
tömegcentrumtól távolabb eső tengelyekre szól-
nak; és azok a párhuzamos tengelyek, melyekre
egyenlő inertia momentumok szólnak, $J=$konst. forgási
hengert $\varrho=$konst. alkotnak, melynek tengelye áthalad a
tömegcentrumon.

3.) Hogy egy coordináta tengelyre szóló i-
nertia momentum más coordináta rendszer-
be transformálva milyen alakot ölt, közvetle-
nül mutatja az inertia momentum álta-
lános kifejezése. Ha pl. az x tengely iránycosinusai
egy új rendszerben $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, és a két rendszer
origója összeesik, úgy:

$$J_x = \alpha_1^2 J_{x'} + \alpha_2^2 J_{y'} + \alpha_3^2 J_{z'} - 2\alpha_2\alpha_3 D_{x'} - 2\alpha_3\alpha_1 D_{y'} - 2\alpha_1\alpha_2 D_{z'}$$

ahol $J_{x'}$, stb, meg $D_{x'}$, stb. az új tengelyekre szóló momentumot.

Szükséges még megismernünk, hogy valamely coordináta tengelyre szóló deviatio momentum miképen transformálódik egy más coordináta rendszerbe, ha az origó összeesik. Vegyük tekintetbe a z tengelyre szóló deviatio momentumot:

$$D_z = S\,xy\,Dm.$$

Az új coordináta rendszerben a coordináták legyenek x', y', z'; a rendszer origója essék össze a régi origóval, tengelyeinek az iránycosinusai pedig a régi rendszerben rendre legyenek: $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$; $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$, akkor:

$$x = \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z'.$$

$$y = \beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3 z'.$$

Eszerint:

$$x \cdot y = \alpha_1\beta_1 x'^2 + \alpha_2\beta_2 y'^2 + \alpha_3\beta_3 z'^2 + $$
$$+ (\alpha_2\beta_3 + \beta_2\alpha_3) y'z' + (\alpha_3\beta_1 + \beta_3\alpha_1) z'x' + (\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2) x'y'.$$

De x'^2, stb. kifejezhetők $y'^2+z'^2$, $z'^2+x'^2$, $x'^2+y'^2$ által, és pedig:

$$x'^2 = \frac{1}{2}\left[-(y'^2+z'^2) + (z'^2+x'^2) + (x'^2+y'^2)\right]$$

$$y'^2 = \frac{1}{2}\left[(y'^2+z'^2) - (z'^2+x'^2) + (x'^2+y'^2)\right]$$

$$z'^2 = \frac{1}{2}\left[(y'^2+z'^2) + (z'^2+x'^2) - (x'^2+y'^2)\right]$$

Ezeknek a számbavételével azonnal feltűnik, hogy ha az új tengelyekre szóló inertia momentumokat, illetőleg deviatio momentumokat rendre $J_{x'}, J_{y'}, J_{z'}$, $D_{x'}, D_{y'}, D_{z'}$ jelölik, akkor

$$D_z = \frac{1}{2}\alpha_1\beta_1(-J_{x'} + J_{y'} + J_{z'}) + \frac{1}{2}\alpha_2\beta_2(J_{x'} - J_{y'} + J_{z'}) + \frac{1}{2}\alpha_3\beta_3(J_{x'} + J_{y'} - J_{z'}) +$$
$$+ (\alpha_2\beta_3 + \beta_2\alpha_3) D_{x'} + (\alpha_3\beta_1 + \beta_3\alpha_1) D_{y'} + (\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2) D_{z'}.$$

vagy kissé másként írva:

$$\mathfrak{D}_z = \tfrac{1}{2}(-\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3)\,\mathfrak{J}_{x'} + \tfrac{1}{2}(\alpha_1\beta_1-\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3)\,\mathfrak{J}_{y'} + \tfrac{1}{2}(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2-\alpha_3\beta_3)\,\mathfrak{J}_{z'} +$$
$$+ (\alpha_2\beta_3+\beta_2\alpha_3)\,\mathfrak{D}_{x'} + (\alpha_3\beta_1+\beta_3\alpha_1)\,\mathfrak{D}_{y'} + (\alpha_1\beta_2+\beta_1\alpha_2)\,\mathfrak{D}_{z'}.$$

De $\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3=0$, tehát

$$\mathfrak{D}_z = -\alpha_1\beta_1\,\mathfrak{J}_{x'} - \alpha_2\beta_2\,\mathfrak{J}_{y'} - \alpha_3\beta_3\,\mathfrak{J}_{z'} +$$
$$+(\alpha_2\beta_3+\beta_2\alpha_3)\,\mathfrak{D}_{x'} + (\alpha_3\beta_1+\beta_3\alpha_1)\,\mathfrak{D}_{y'} + (\alpha_1\beta_2+\beta_1\alpha_2)\,\mathfrak{D}_{z'}.$$

Hasonlókép fejezhetjük ki a régi rendszer első és második tengelyére szóló deviatio momentumot az új rendszerre szóló inertia és deviatio momentumokkal. 1909. XI/12. 3

Surlódástalan merev testek mechanikája.

Egy testet merevnek mondunk, ha elemi részei kölcsönös helyzetüket nem változtathatják, ha tehát két-két elemi részének az egymástól való távola nem változhatik. Első feladatul tűzzük ki úgy határozni meg a test elemi részeinek a coordinátáit paramétrumok segélyével, hogy ezáltal a merevségi kényszer, vagyis a test merev volta jelemezve legyen. E végből egy második tengely rendszert a merev testhez rögzítünk. Világos, hogy az új rendszernek a régiben elfoglalt helyzetével teljesen megvan határozva a merev test helyzete. Mihelyt tehát a régi rendszerbe tartozó coordinátákat kifejezzük az új rendszerbe tartozókkal és az új rendszer helyhatározóival, akkor már úgy határoztuk meg a test elemi részeinek a coordinátáit, hogy azok csakis a merev test elemi részei lehetnek, oda értve, hogy az elemi részeknek az új coordinátái változhatatlanok. Az új rendszer origójának coordinátái a régi rendszerben legyenek: a', b', c', továbbá az új tengelyeknek a régi rendszerbe tartozó iránycosinusai rendre $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \alpha_2, \beta_2, \gamma_2; \alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ legyenek. Az iránycosinusok kifejezésére bevezetjük az Euler féle szögeket; a régi rendszerbe tartozó coordináták legyenek: x, y, z, az új coordináták pedig: x', y', z'; már most ϑ jelölje a z és z' tengely szögét, φ legyen az a szög, amely alatt az x tengely a z tengely körül positiv értelemben fordulva a ϑ szög síkjával párhuzamossá lesz és φ' azt a szöget jelentse, amely alatt az x' tengely a z' tengely körül positiv értelemben fordulva a ϑ szög síkjával párhuzamossá válik. E definitiók értelmében, mint a geométriából ismeretes:

$$(1.)\quad \begin{cases} \alpha_1 = -\cos\vartheta.\cos\varphi.\cos\varphi' - \sin\varphi.\sin\varphi' \\ \alpha_2 = -\cos\vartheta.\cos\varphi.\sin\varphi' + \sin\varphi.\cos\varphi' \\ \alpha_3 = \sin\vartheta.\cos\varphi \\ \beta_1 = -\cos\vartheta.\sin\varphi.\cos\varphi' + \cos\varphi.\sin\varphi' \\ \beta_2 = -\cos\vartheta.\sin\varphi.\sin\varphi' - \cos\varphi.\cos\varphi' \\ \beta_3 = \sin\vartheta.\sin\varphi \\ \gamma_1 = \sin\vartheta.\cos\varphi' \\ \gamma_2 = \sin\vartheta.\sin\varphi' \\ \gamma_3 = \cos\vartheta \end{cases}$$

lásd a 141. oldalt

Miután már az iránycosinusokat a három Euler féle szöggel kifejeztük, implicite elő vannak állítva a régi coordinátak, mint az ujaknak és oly paraméteremoknak a függvényei, amelyek jellemzik a test merevségét; u.is

$$(2.)\quad\begin{cases} x = a' + \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z' \\ y = b' + \beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3 z' \\ z = c' + \gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3 z' \end{cases}$$

a merevséget meghatározó kifejezések, oda értve, hogy x', y', z' változhatatlan és csak a', b', c' és az iránycosinusok változhatnak, még pedig az utóbbiak az Euler féle szögek szerint az (1.) alatt felírt kifejezések értelmében. Egy merev test pontjainak a coordinátái szükségképen a most meghatározott megszorítások alatt állanak, ennélfogva a merev test elemi részeinek elmozdulásai csak a felírt kifejezések szerint jöhetnek létre az a', b', c' coordinátáknak és $\vartheta, \varphi, \varphi'$ szögeknek a megváltozásai által. Különösen pedig a δ jel akár lehetséges, akár valóságos, akár virtuális elemi megváltozást jelentsen:

$$\delta x = \delta a' + x'\delta\alpha_1 + y'\delta\alpha_2 + z'\delta\alpha_3$$
$$\delta y = \delta b' + x'\delta\beta_1 + y'\delta\beta_2 + z'\delta\beta_3$$
$$\delta z = \delta c' + x'\delta\gamma_1 + y'\delta\gamma_2 + z'\delta\gamma_3$$

Most tehát részt vettünk egy coordináta rendszerrel a lehetséges és virtuális elmozdulásokban is, de ez nem oly rendszer, amelyben a mechanikai állapotot kutatjuk (most bizon ebben ismerjük is a mechanikai állapotot). Előállításunkban:

$$\delta\alpha_1 = \frac{\partial\alpha_1}{\partial\vartheta}\cdot\delta\vartheta + \frac{\partial\alpha_1}{\partial\varphi}\cdot\delta\varphi + \frac{\partial\alpha_1}{\partial\varphi'}\,\delta\varphi' \text{, stb.}$$

az (1.) alatt felírt kifejezések értelmében. Részletesen kifejtve az iránycosinusok elemi megváltozásait, a $\delta x, \delta y, \delta z$ számára reductiók után a következő kifejezéseket találjuk:

$$\delta x = \delta a' + (y-b')(\gamma_3\,\delta\varphi' - \delta\varphi) - (z-c')(\beta_3\,\delta\varphi' - \cos\varphi\cdot\delta\vartheta).$$
$$\delta y = \delta b' + (z-c')(\alpha_3\,\delta\varphi' + \sin\varphi\cdot\delta\vartheta) - (x-a')(\gamma_3\,\delta\varphi' - \delta\varphi).$$
$$\delta z = \delta c' + (x-a')(\beta_3\,\delta\varphi' - \cos\varphi\cdot\delta\vartheta) - (y-b')(\alpha_3\,\delta\varphi' + \sin\varphi\cdot\delta\vartheta).$$

Most már az elemi elmozdulások kivannak fejezve a', b', c' és $\vartheta, \varphi, \varphi'$ helyzethatározók elemi megváltozásával. Vezessük be a következő jelöléseket:

$$(3)_1 \begin{cases} \delta a' + c'(\beta_3\,\delta\varphi' - \cos\varphi\cdot\delta\vartheta) - b'(\gamma_3\,\delta\varphi' - \delta\varphi) \equiv \delta a \\ \delta b' + a'(\gamma_3\,\delta\varphi' - \delta\varphi) - c'(\alpha_3\,\delta\varphi' + \sin\varphi\cdot\delta\vartheta) \equiv \delta b \\ \delta c' + b'(\alpha_3\,\delta\varphi' + \sin\varphi\cdot\delta\vartheta) - a'(\beta_3\,\delta\varphi' - \cos\varphi\cdot\delta\vartheta) \equiv \delta c \end{cases}$$

azután:

$$(3)_2 \begin{cases} -(\alpha_3\cdot\delta\varphi' + \sin\varphi\cdot\delta\vartheta) \equiv \delta u \\ -(\beta_3\cdot\delta\varphi' - \cos\varphi\cdot\delta\vartheta) \equiv \delta v \\ -(\gamma_3\cdot\delta\varphi' - \delta\varphi) \equiv \delta w \end{cases}$$

Ezeknek a behelyettesítésével $\delta x, \delta y, \delta z$ számára a következő három kifejezés adódik:

$$(4.) \begin{cases} \delta x = \delta a + z\,\delta v - y\,\delta w \\ \delta y = \delta b + x\,\delta w - z\,\delta u \\ \delta z = \delta c + y\,\delta u - x\,\delta v \end{cases}$$

E (4) alatti kifejezések jellemzik a merevséget differentiál alakban. A bennük előforduló hat differentiális paramétrumnak pedig közvetlenül felfogható kinematikai értelme van. Tekintsük a $(\delta x, \delta y, \delta z)$ vectort úgy, mint két vector összegét, amelyek egyike $(\delta a, \delta b, \delta c)$, másika pedig:

$$(z\,\delta v - y\,\delta w,\ x\,\delta w - z\,\delta u,\ y\,\delta u - x\,\delta v)$$

és most vizsgáljuk, hogy mi a jelentése az egyik és másik összetevőnek. Az első, vagyis $(\delta a, \delta b, \delta c)$ a test minden pontjában ugyanaz, mint a (3), mutatja. Következőleg ez a vector a test minden pontjának egyenlő nagyságú és egyező irányú úton való elmozdulását, azaz a test eltolódását jelenti. Ami a másik összetevőt illeti, tudjuk a vectortanból, hogyha egy vectort $\delta\theta$ szög alatt positiv értelemben elfordítunk oly tengely körül, amely átmegy az elején és amelynek az iránycosinusai: $\frac{\delta u}{\delta\theta}$, $\frac{\delta v}{\delta\theta}$, $\frac{\delta w}{\delta\theta}$, akkor ennek a vectornak a ξ, η, ζ componensei megváltoznak

$$\zeta\,\delta v - \eta\,\delta w,\ \xi\,\delta w - \zeta\,\delta u,\ \eta\,\delta u - \xi\,\delta v$$

értékekkel. Már most, ha a vector eleje az origóban van, akkor a componensei nem mások, mint végének a coordinátái, a következő megismerésünk van tehát: Ha x, y, z pont elfordul positiv értelemben $\delta\theta = \sqrt{\delta u^2 + \delta v^2 + \delta w^2}$ nagyságú szög alatt oly tengely körül, amely átmegy az origón, és amelynek az iránycosinusai $\frac{\delta u}{\delta\theta}$, $\frac{\delta v}{\delta\theta}$, $\frac{\delta w}{\delta\theta}$, akkor a pontnak a coordinátái megváltóknak

$$z\delta v - y\delta w,\quad x\delta w - z\delta u,\quad y\delta u - x\delta v$$

értékekkel. Látjuk tehát, hogy a $(\delta x, \delta y, \delta z)$ elemi elmozdulás második összetevője azáltal keletkezik, hogy az x, y, z pont elfordul $\delta\theta = \sqrt{\delta u^2 + \delta v^2 + \delta w^2}$ nagyságú szög alatt pozitív értelemben oly tengely körül, amely átmegy az origón, és amelynek iránycosinusai:

$$\frac{\delta u}{\delta\theta}, \frac{\delta v}{\delta\theta}, \frac{\delta w}{\delta\theta}.$$

De $\delta u, \delta v, \delta w$ a test minden pontjában ugyanaz, mint a $(3)_2$ mutatja, következőleg a $(\delta x, \delta y, \delta z)$ féle elemi elmozdulások második componensei a test valamennyi pontjának elfordulását jelentik a $\delta\theta$ szög alatt pozitív értelemben oly tengely körül, amelynek iránycosinusai

$$\frac{\delta u}{\delta\theta}, \frac{\delta v}{\delta\theta}, \frac{\delta w}{\delta\theta}.$$

Az elemi elmozdulások második összetevője tehát az egész testnek a mondott módon való elfordulását jelenti. De $\delta a, \delta b, \delta c, \delta u, \delta v, \delta w$ hat mennyiségnek egyenkint is van kinematikai értelme.

$$(\delta a, \delta b, \delta c) = (\delta a, 0, 0) + (0, \delta b, 0) + (0, 0, \delta c)$$

következőleg úgy fogható fel a test elemi eltolódása, mint három elemi eltolódás összege, amelyek egyike párhuzamos az x tengellyel, másika az y tengellyel, harmadika a z tengellyel, és ezeknek az iránya egyezik vagy ellenkezik aszerint, amint δa illetőleg δb, illetőleg δc pozitív vagy negatív. Továbbá:

$$(z\delta v - y\delta w, x\delta w - z\delta u, y\delta u - x\delta v) = (0, -z\delta u, y\delta u) +$$
$$+ (z\delta v, 0, -x\delta v) + (-y\delta w, x\delta w, 0)$$

ahol a jobboldalon az első vector elfordulást jelent az x tengely körül $|\delta u|$ nagyságú szög alatt, positiv vagy negativ értelemben aszerint, amint a δu positiv vagy negativ; a második vector elfordulást jelent az y tengely körül $|\delta v|$ mekkoraságú szög alatt positiv vagy negativ értelemben δv előjele szerint; és a harmadik vector elfordulást jelent $|\delta w|$ mekkoraságú szög alatt a z tengely körül positiv vagy negativ értelemben δw előjele szerint. Minthogy pedig $\delta u, \delta v, \delta w$ a test minden pontjában ugyanaz, ennélfogva az egész test elfordulását jelentik ezek $|\delta u|$ illetőleg $|\delta v|$, illetőleg $|\delta w|$ nagyságú szög alatt az x, illetőleg y, illetőleg z tengely körül positiv vagy negativ értelemben a δu, illetőleg δv, illetőleg δw előjele szerint, és az egyenlőségből folyólag a három elforditásból eredő elmozdulások összege egyezik a fent jellemzett elforditásból eredő elmozditással. Ha a három elemi eltolódás és a három elemi elfordulás bármely sorrend szerint folytatólag egymás után következik, akkor is $(\delta x, \delta y, \delta z)$ (4.) alatti kifejezése az eredmény, mert csak másodrendü végtelen kicsinyekkel különbözik a pontos kifejezéstől.

Ezek után vonatkoztassuk most egy merev testre a virtuális munka relatióját, vagyis az alaptörvényt. Más szóval egy merev test legyen mostan az anyagi rendszerünk. Minthogy a merevség szükségképen maga után vonja a variatiós relatióknak (4) alatti alakját, ennélfogva a (4.) alatti kifejezések irhatók be most az elvi relatióba, és a beirásuk után az elvi relatió egy merev testnek az elvi relatiójává válik. Az elvi relatió ez:

$$S[(\ddot{x}Dm-DX)\delta x+(\ddot{y}Dm-DY)\delta y+(\ddot{z}Dm-DZ)\delta z]\geqq 0$$

ahol Dm egy elemi rész tömege és (DX, DY, DZ) a reá ható szabad erő. Feltétele ennek az elvi relatiónak, mint tudjuk, hogy a kapcsoló rendszer passiv és nincs surlódás. Behelyettesitvén ide a variatiók (4) alatti kifejezéseit és azután a hat differential parametrum szerint rendezvén az egyenlőtlenség bal oldalát, továbbá a (DX, DY, DZ) szabad erő toló hatását (A, B, C)-vel, origói forgató hatását pedig (U, V, W)-vel jelölvén, elvi relationk a következő alakban jelenik meg:

$$5.\quad\left\{\begin{aligned}&(m\ddot{\xi}-A)\delta a+(m\ddot{\eta}-B)\delta b+(m\ddot{\zeta}-C)\delta c+\\&+\left[\frac{d}{dt}S(y\dot{z}-z\dot{y})Dm-U\right].\delta u+\\&+\left[\frac{d}{dt}S(z\dot{x}-x\dot{z})Dm-V\right].\delta v+\\&+\left[\frac{d}{dt}S(x\dot{y}-y\dot{x})\cdot Dm-W\right]\delta w\ \geqq 0\end{aligned}\right.$$

Ha t.i. szokás szerint ξ, η, ζ jelölik a test tömegcentrumának a coordinátáit és m a test egész tömegét. A mellett:

$$A\equiv SDX\ ,\quad B\equiv SDY\ ,\quad C\equiv SDZ\ ,$$

$U \equiv S(y\mathfrak{D}Z - z\mathfrak{D}Y)$, $V \equiv S(z\mathfrak{D}X - x\mathfrak{D}Z)$, $W \equiv S(x\mathfrak{D}Y - y\mathfrak{D}X)$.

Ha a merev test a merevségi kényszeren kivül még egyéb kényszert is visel, akkor a virtuális elmozdulások kényszerrelatiójába vagy kényszerrelatióiba is beirandók az elemi elmozdulások (4.) alatti kifejezései, amidőn máraztán a virtuális kényszer relatiói is a merev testre lesznek vonatkoztatva és csakis a hat differentiál paramétrumot: $\delta a, \delta b, \delta c, \delta u, \delta v, \delta w$ tartalmazzák, mint vezérmennyiségeket, amelyekkel homogén linearis egész alakban határozvák meg. E relatiók minden megoldásában köteles teljesülni az elvi relatió, aminek a számbavételével határozott egyenletekhez és egyenlőtlenségekhez jutunk. Hogy különben elvi relatiónk egészen explicite vonatkozzék a merev testre, evégből szükséges még, hogy a benne előforduló coordinátákat és azok differential hányadosait kifejezzük az új origó coordinátái és az Euler féle szögek segitségével. Végül a meghatározások céljaira felhasználandók még a valóságos mozgás kényszerbeli egyenletei is. Mindezekre a célokra vegyük figyelembe, hogy a (4.) alatti kifejezések mindenféle elemi elmozdulást megilletnek, megilletik a valóságos elemi elmozdulásokat is, mihez képest:

$$dx = da + z\,dv - y\,dw, \text{ stb.}$$

Következőleg:

$$\dot{x} = \frac{da}{dt} + z\frac{dv}{dt} - y\frac{dw}{dt}, \text{ stb.}$$

$\frac{da}{dt}$, stb, differential quotiensek, de egész általánosság szerint nem jelentkeznek így, mint a, stb. u, stb. mennyiségek idöderiváltjai, mert a, stb., u, stb jelvények maguk általában véve nem birnak semmi jelentéssel, mindamellett rövidités céljából $\frac{da}{dt}$, stb., $\frac{du}{dt}$, stb. helyett $\dot{a}$, stb, $\dot{u}$, stb. jelvényeket irjuk. Ebben a jelölésben:

$$(6.)_1 \begin{cases} \dot{x} = \dot{a} + z\dot{v} - y\dot{w} \\ \dot{y} = \dot{b} + x\dot{w} - z\dot{u} \\ \dot{z} = \dot{c} + y\dot{u} - x\dot{v} \end{cases}$$

és nem külömben:

$$(6.)_2 \begin{cases} \dot{\xi} = \dot{a} + \zeta\dot{v} - \eta\dot{w} \\ \dot{\eta} = \dot{b} + \xi\dot{w} - \zeta\dot{u} \\ \dot{\zeta} = \dot{c} + \eta\dot{u} - \xi\dot{v} \end{cases}$$

Tehát egyszersmind:

$$(6.)_3 \begin{cases} \dot{x} = \dot{\xi} + (z-\zeta)\dot{v} - (y-\eta)\dot{w} \\ \dot{y} = \dot{\eta} + (x-\xi)\dot{w} - (z-\zeta)\dot{u} \\ \dot{z} = \dot{\zeta} + (y-\eta)\dot{u} - (x-\xi)\dot{v} \end{cases}$$

ahol is

$$(6.)_4 \begin{cases} \dot{a} = \dot{a}' + c'(\beta_3\dot{\varphi}' - \cos\varphi.\dot{\vartheta}) - b'(\gamma_3.\dot{\varphi}' - \dot{\varphi}) \\ \text{stb} \\ \dot{u} = -(\alpha_3\dot{\varphi}' + \sin\varphi\,\dot{\vartheta}) \\ \dot{v} = -(\beta_3\dot{\varphi}' - \cos\varphi\,\dot{\vartheta}) \\ \dot{w} = -(\gamma_3\dot{\varphi}' - \dot{\varphi}) \end{cases}$$

a $(3.)_1$ és $(3.)_2$ mintájára. Továbbá:

$$(6.)_5 \begin{cases} \dot{x} = \dot{a}' + (y - b')(\gamma_3 \dot{\varphi}' - \dot{\psi}) - (z - c')(\gamma_2 \dot{\varphi}' - \cos\varphi\, \dot{\vartheta}) \\ \text{stb} \end{cases}$$

a $(\delta x, \delta y, \delta z)$ $(3)_1$ előtt irt kifejezéseinek mintájára. Hasonló kifejezéseink vannak a tömegcentrum sebessége számára.

Ha most még kifejtenők a második derivaltakat is, ami az előttünk lévő kifejezésekből explicite megtörténhetik, azután a coordinátákat kifejeznők a (2.) alatti egyenletekből, amelyekben az iránycosinusokat kifejezzük az Euler-féle szögekkel, akkor teljesen explicite transformáltuk volna elvi relatiónkat a merev test elvi relatiójába. Azonban ezeknek a műveleteknek a végrehajtása nagyon complicált kifejezésekhez juttat, ennélfogva azoknak az általános kifejtésétől tartózkodunk. Esetről-esetre a mozgás egyes példáiban egyszerűbb kifejezésekhez jutunk, miért is ezeknek a műveleteknek a végrehajtását az egyes példák számára tartjuk fenn.

Azt lássuk most még, hogy milyen elvi relatiónk lesz, ha anyagi rendszerünk egynél több merev testből áll. Ebben az esetben általános elvi relatiónk bal oldalát annyi részben irjuk fel, ahány a merev test:

$$\begin{aligned} &S_1 [(\ddot{x}\, \mathfrak{D}m - \mathfrak{D}X) . \delta x + \cdot + \cdot] + \\ &+ S_2 [(\ddot{x}\, \mathfrak{D}m - \mathfrak{D}X) . \delta x + \cdot + \cdot] + \\ &+ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad \overline{\gtrless}\ 0 \end{aligned}$$

ahol az 1 indexes összegelés a merev testek egyikére, a 2 indexes egy másikára, és i. tb. terjed ki.

Már most mindegyik merev testre alkalmazzuk a merevségi kényszer relatióit. Az 1-es számú testre vonatkozólag:

$$\delta x = \delta a_1 + z\,\delta v_1 - y\,\delta w_1 \quad , \text{stb.}$$

a 2-es számú testre vonatkozólag:

$$\delta x = \delta a_2 + z\,\delta v_2 - y\,\delta w_2 \, , \quad \text{stb.}$$

és i. tb.

Természetesen itt az első kifejezésben a coordinaták az első test pontjainak, a második kifejezésben a második test pontjainak a coordinatáit jelentik. Ehhez képest alaprelatiónk több merev test rendszerére alkalmazva a következő alakot ölti:

$$(7.)\quad \left\{ \begin{aligned} \sum \Big\{ & (m\ddot{\xi} - A)\,\delta a + (m\ddot{\eta} - B)\,\delta b + (m\ddot{\zeta} - C)\,\delta c + \\ & + \left[\frac{d}{dt} S(y\dot{z} - z\dot{y}).\mathfrak{D}m - U\right].\,\delta u + \\ & + \left[\frac{d}{dt} S(z\dot{x} - x\dot{z}).\mathfrak{D}m - V\right].\,\delta v + \\ & + \left[\frac{d}{dt} S(x\dot{y} - y\dot{x}).\mathfrak{D}m - W\right].\,\delta w \Big\} \geqq 0 \end{aligned} \right.$$

ahol a Σ jel a különböző merev testek szerint való összegelést jelenti. Behelyettesítendők még a virtuális elmozdulások parametrumos kifejezései az esetleg még előforduló kényszerrelatiókba is, amidőn azután ezek is a differentiál parametrumokra fognak vonatkozni.

Ilyen alakúak lesznek pedig ezek:

$$\sum L.\delta a + \sum M\delta b + \sum N.\delta c +$$
$$+ \sum P.\delta u + \sum Q\,\delta v + \sum R\,\delta w = 0$$

vagy:

$$\sum L'\delta a + \sum M'\delta b + \sum N'\delta c +$$
$$\sum P'\delta u + \sum Q'\delta v + \sum R'\delta w \gtreqless 0$$

melyeknek a száma végtelen nagy is lehet. Minden megoldásunkban köteles teljesülni az alaprelatió, minek rendjén határozott egyenletek és egyenlőtlenségek következnek a mechanikai problémák megoldására, de e megoldásra felhasználandók még a valóságos mozgás kényszerbeli relatiói is

A tapasztalás szerint pedig nemcsak annyi mondható a (7.) alatti elvi relatióról, hogy mindig áll az, ha surlódástalan a merev testek rendszere és ha a kapcsoló rendszer passiv, de ugyane feltételek alatt az is állítható róla a tapasztalás szerint, hogy a merev testek elemi részeinek minden olyan külön-külön lehetséges tömege, szabad gyorsulása, kényszere és mechanikai állapota lehetséges együttesen is, amelyek mellett ez a relatió teljesül.

Példák.

1. példa.

Anyagi rendszerünk egyetlen merev test

amely egészen szabad vagyis a merevségi kényszeren kivül semmi más kényszert nem visel. Az elvi relatió egyetlen merev test esetén így van:

$$(7.)_0 \begin{cases} (m\ddot{\xi}-A)\delta a+(m\ddot{\eta}-B)\delta b+(m\ddot{\zeta}-C)\delta c+ \\ +\left[\frac{d}{dt}\cdot S(y\dot{z}-z\dot{y})\,\mathfrak{D}m-U\right]\delta u + \\ +\left[\frac{d}{dt}\cdot S(z\dot{x}-x\dot{z}).\mathfrak{D}m-V\right].\delta v + \\ +\left[\frac{d}{dt}\cdot S(x\dot{y}-y\dot{x}).\mathfrak{D}m-W\right].\delta w \geqq 0 \end{cases}$$

A jelen példában a hat differentiál paramétrum tetszésszerinti; $\delta a, \delta b, \delta c, \delta u, \delta v, \delta w$, bármit jelenthet; ebből folyólag:

$$(7.)_1 \quad m\ddot{\xi}=A \;,\; m\ddot{\eta}=B \;,\; m\ddot{\zeta}=C$$

$$(7.)_2 \begin{cases} \frac{d}{dt}\cdot S(y\dot{z}-z\dot{y}).\mathfrak{D}m = U \\ \frac{d}{dt}\cdot S(z\dot{x}-x\dot{z}).\mathfrak{D}m = V \\ \frac{d}{dt}\cdot S(x\dot{y}-y\dot{x}).\mathfrak{D}m = W \end{cases}$$

Ez a hat határozott egyenletünk van. Keressük első sorban a nyugalom tartás szükséges és elégséges feltételeit. E feltétel gyanánt kapjuk, hogy

$$A=0,\ B=0,\ C=0,\ U=0,\ V=0,\ W=0.$$

legyen. Tehát a nyugalom tartás szükséges és elégséges feltétele, hogy a $(\mathfrak{D}X, \mathfrak{D}Y, \mathfrak{D}Z)$ szabad erőknek ne legyen se toló, se forgató hatás.

Ha ez teljesül, akkor és csak akkor kitart a megkezdett nyugalom.

Most vizsgáljuk a mozgásnak azt az esetét, amelyben csak a nehézségi szabad erő hat. Ha coordináta rendszerünket a földhöz rögzítjük és amellett z tengelyét verticálisan lefelé állítjuk, akkor

$$\mathfrak{D}X = 0, \quad \mathfrak{D}Y = 0, \quad \mathfrak{D}Z = g.\mathfrak{D}m$$

következőleg:

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = m.g$$

a toló hatás componensei. Így tehát $(7)_1$ szerint

$$\ddot{\xi} = 0, \quad \ddot{\eta} = 0, \quad \ddot{\zeta} = g$$

vagyis a test tömegcentruma úgy mozog, mint egy szabad tömegpont, amidőn csak a nehézségi szabad erő hatását viseli az.

Hogy a test mozgását egészen megismerjük, avégből tudnunk kell még, hogy miképp mozog a test a maga tömegcentruma körül. Eszerint még csak oly Coordináta rendszerben kell ismernünk a test mozgását, amelynek origója a test tömegcentrumában van s a tengelyei párhuzamosak a régi tengelyekkel. De ha egyenletainket ilyen coordináta rendszerre vonatkoztatjuk, akkor jelen példánkban azt találjuk, hogy a forgató momentum zérus. Ugyanis ebben a coordináta rendszerben a $\mathfrak{D}m$ tömegű elemi részre ható szabad erő Componensei ezek:

$$-\ddot{\xi}Dm\,, -\ddot{\eta}Dm, (g-\ddot{\zeta})Dm$$

tehát az előbbi egyenletek következtében eltűnnek. Ebből folyólag, ha most is x, y, z jelentik a coordinátákat, $(7)_2$ szerint

$$S(y\dot{z}-z\dot{y})=\text{Const.}, S(z\dot{x}-x\dot{z})=\text{Const.}; S(x\dot{y}-y\dot{x})=\text{Const.}$$

(mert hiszen $\ddot{\xi}=0, \ddot{\eta}=0, \ddot{\zeta}=g$, mint láttuk).

Ha a z tengelyt eleve nem állítottuk volna verticálisan, akkor is ezekhez az egyenletekhez jutottunk volna, és a következőkben tegyük is fel, hogy coordináta rendszerünk orientatiója nem visel előzetes megszorítást. Később majd úgy szorítjuk meg, hogy tárgyalásunk egyszerűbben folyhassék tovább. Vezessük be az egyenletekbe $(6)_3$ alól az

$$\dot{x}=\dot{\xi}+(z-\zeta)\dot{v}-(y-\eta)\dot{w}, \quad \text{stb.}$$

kifejezéseket. Ezekben jelenleg $(\dot{\xi},\dot{\eta},\dot{\zeta})=0$, mert jelenleg az origó a tömegcentrumban van. E szerint:

$$\dot{x}=z\dot{v}-y\dot{w}, \; \dot{y}=x\dot{w}-z\dot{u}, \; \dot{z}=y\dot{u}-x\dot{v}$$

Ha a constansokat rendre F, G, H jelöli, úgy egyenleteink e kifejezések behelyettesítése után a következő alakban jelennek meg:

$$J_x\dot{u}-D_z\dot{v}-D_y\dot{w}=F$$
$$-D_z\dot{u}+J_y\dot{v}-D_x\dot{w}=G$$
$$-D_y\dot{u}-D_x\dot{v}+J_z\dot{w}=H$$

hol J_x, J_y, J_z az egyes coordináta tengelyekre szóló inertia és $\mathfrak{D}_x, \mathfrak{D}_y, \mathfrak{D}_z$ az egyes coordináta tengelyekre szoló deviatio momentum. Ezek a momentumok az idővel változó mennyiségek, mert az idővel változó coordinátákat tartalmazzák. Fejezzük ki őket azonban a constans momentumokkal, melyek a merev testhez rögzített rendszerhez tartoznak; természetesen az igy előálló kifejezésekben az együtthatók fognak változni az idővel. Ha a merev testhez rögzített tengelyekre az inertia- illetőleg deviatio momentumot rendre $\mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}_2, \mathfrak{J}_3, \mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \mathfrak{D}_3$ jelölik, és ha egyszerüség kedvéért úgy választottuk a merev testhez rögzített tengelyrendszert, hogy origója szintén a tömegcentrumban legyen és tengelyei az origói inertia ellipsoid főtengelyei legyenek, amidőn is $\mathfrak{D}_1 = 0$, $\mathfrak{D}_2 = 0$, $\mathfrak{D}_3 = 0$ úgy, mint már tudjuk, a következő kifejezéseink vannak:

$$\mathfrak{J}_x = \mathfrak{J}_1 \alpha_1^2 + \mathfrak{J}_2 \alpha_2^2 + \mathfrak{J}_3 \alpha_3^2 \quad , \text{ stb.}$$

$$\mathfrak{D}_x = -(\mathfrak{J}_1 \beta_1 \gamma_1 + \mathfrak{J}_2 \beta_2 \gamma_2 + \mathfrak{J}_3 \beta_3 \gamma_3), \text{ stb.}$$

Helyettesitsük be ezeket a kifejezéseket az egyenletekbe s azután rendezzük az egyenleteket az inertia momentumok szerint, akkor a következő alakban jelennek meg az egyenletek:

$$\mathfrak{J}_1 \alpha_1 (\alpha_1 \dot{u} + \beta_1 \dot{v} + \gamma_1 \dot{w}) + \mathfrak{J}_2 \alpha_2 (\alpha_2 \dot{u} + \beta_2 \dot{v} + \gamma_2 \dot{w}) +$$
$$+ \mathfrak{J}_3 \alpha_3 (\alpha_3 \dot{u} + \beta_3 \dot{v} + \gamma_3 \dot{w}) = \mathfrak{F}, \text{ stb.}$$

De jelöljük meg a zárjelek tartalmát röviden u', v', w'-el, azaz irjuk, hogy:

$$(*) \begin{cases} u' \equiv \alpha_1 \dot{u} + \beta_1 \dot{v} + \gamma_1 \dot{w} \\ v' \equiv \alpha_2 \dot{u} + \beta_2 \dot{v} + \gamma_2 \dot{w} \\ w' \equiv \alpha_3 \dot{u} + \beta_3 \dot{v} + \gamma_3 \dot{w} \end{cases}$$

Ezeknek a használatba vételével egyenleteink ily alakúak:

$$(*)' \begin{cases} J_1 u'\alpha_1 + J_2 v'\alpha_2 + J_3 w'\alpha_3 = F \\ J_1 u'\beta_1 + J_2 v'\beta_2 + J_3 w'\beta_3 = G \\ J_1 u'\gamma_1 + J_2 v'\gamma_2 + J_3 w'\gamma_3 = H \end{cases}$$

Ha (F, G, H) = zérus, akkor $(J_1 u', J_2 v', J_3 w')$ is zérus, tehát (u', v', w') is zérus, tehát a $(*)$ szerint $(\dot{u}, \dot{v}, \dot{w})$ is zérus, tehát nincs mozgás a tömegcentrum körül. Tegyük fel most már, hogy (F, G, H) nem zérus. Válasszuk meg azonban úgy Coordináta rendszerünk orientatióját, hogy a z tengely egyező irányú legyen az (F, G, H) vectorral; akkor $F=0$, $G=0$, $H>0$, mihez képest egyenleteink a következő alakban jelentkeznek:

$$J_1 u'\alpha_1 + J_2 v'\alpha_2 + J_3 w'\alpha_3 = 0$$
$$J_1 u'\beta_1 + J_2 v'\beta_2 + J_3 w'\beta_3 = 0$$
$$J_1 u_1 \gamma_1 + J_2 v'\gamma_2 + J_3 w'\gamma_3 = H > 0$$

Ezekből egyszerűbbeket kapunk azáltal, hogy rendre megszorozzuk őket egyizben $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$-el, másizben $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$-el s ismét más izben $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$-al s azután összeadjuk őket. E módon a következő három egyenlet származik:

$$J_1 u' = H.\gamma_1 \quad , J_2 v' = H.\gamma_2 \quad , J_3 w' = H.\gamma_3 .$$

Fejezzük ki ez egyenletekben a $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ iránycosinusokat az Euler féle szögekkel (1) alól és kapjuk, hogy:

$$(A.) \begin{cases} J_1 u' = H.\sin\vartheta.\cos\varphi' \\ J_2 v' = H.\sin\vartheta.\sin\varphi' \\ J_3 w' = H.\cos\vartheta \end{cases}$$

Továbbá az (u', v', w') vectornak a $(*)$ alatti kifejezéseibe is vezessük be az Euler féle szögeket; célszerűen előbb csak $\mathring{u}, \mathring{v}, \mathring{w}$ (6_4) alatti kifejezéseit és erre következő reductio után az iránycosinusok kifejezéseit helyettesítjük; ezáltal a következő három kifejezést kapjuk:

$$(B.) \begin{cases} u' = \sin\varphi.\dot\vartheta + \sin\vartheta.\cos\varphi.\dot\varphi \\ v' = -\cos\varphi.\dot\vartheta + \sin\vartheta.\sin\varphi.\dot\varphi \\ w' = -\dot\varphi' + \cos\vartheta.\dot\varphi \end{cases}$$

Ha $\sin\vartheta = 0$ volna állandóan, akkor $(A.)$ szerint $u' = 0$, $v' = 0$, $w' = \text{const.}$, tehát $(*)$ szerint és $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ (1) alatti kifejezései szerint $(\mathring{u}, \mathring{v}, \mathring{w})$ constans, vagyis állandó sebességgel forog a test állandó tengely körül, még pedig ez a tengely a z' tengely. Ez meglévén állapitva a következőkben a $\sin\vartheta = 0$ esetet kizárjuk.

Ha a $(B.)$ alatti értékeket bevezetjük az $(A.)$ alatti egyenletekbe, akkor három első rendű totális differential egyenletünk lesz az Euler féle szögekre nézve, amely egyenletek megoldása már elvezet bennünket a tömegcentrum körüli mozgás ismeretéhez. Azonban ezek az egyenletek kissé nehezen tekinthetők át, ezért célszerű lesz más eljárást követni. Módunkban van, hogy az $(A.)$ és $(B.)$ egyenletekből infinitesimális úton elimináljuk az Euler féle szögeket. Hogyha ugyanis az (A.) alattiakat deriváljuk, kapunk még három egyenletet; lesz összesen kilenc egyenletünk, amelyekből $\vartheta, \varphi, \psi, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi}, \dot{\psi}$ hat mennyiség három független módon eliminálható. Ezáltal három egyenlethez jutunk u', v', w' számára, amelyekben ezeken a változókon kívül más változó nem lesz. Meghatároztatván pedig a három differential egyenletből u', v', w', már az (A.) alatti egyenletekből cyklometrikus úton következik ψ és ϑ s a (B.) alatti egyenletekből quadraturral a φ. Ama három differential egyenlet pedig mindig könnyen megoldható.

Lássunk most mindent részletesen. Az eliminálást igen egyszerűen így végezzük, hogy legelsőbb az (A.) deriválásával nyert egyenletekből elimináljuk a (B.) egyenletek segélyével a szögek deriváltjait, mire a kínálkozó összevonások után már (A.) figyelembe vételével nyomban felirhatjuk az eliminálás végső eredményét, és pedig:

$$
(\mathrm{I.})\left\{\begin{array}{l}
J_1 \dfrac{du'}{dt} = (J_2 - J_3) . v' w' \\[2ex]
J_2 \dfrac{dv'}{dt} = (J_3 - J_1) . w' u' \\[2ex]
J_3 \dfrac{dw'}{dt} = (J_1 - J_2) u' v'
\end{array}\right.
$$

amelyekhez (A) alól egy integral egyenletet is kapunk, u. m.:

$$
(\mathrm{I.})' \ldots . J_1^2 \cdot u'^2 + J_2^2 \cdot v'^2 + J_3^2 \cdot w'^2 = H^2
$$

Megoldván ezeket az egyenleteket, azután a következőkép határozhatók meg az Euler féle szögek:

Az (A) alatti egyenletekből következik, hogy:

$$(\mathrm{II.})\quad \begin{cases} \cos\vartheta = \dfrac{J_3}{H}\cdot w' \\ \cos\varphi' = \dfrac{J_1}{H}\cdot\dfrac{u'}{\sin\vartheta} \\ \sin\varphi' = \dfrac{J_2}{H}\cdot\dfrac{v'}{\sin\vartheta} \end{cases} \qquad (\mathrm{N.B.}\ \sin\vartheta > 0)$$

amely egyenletek elseje ϑ-ának a meghatározására, s azután a másik kettője φ'-nek a meghatározására szolgál. φ-nek a meghatározása végett a (B) alatti első egyenletet szorozzuk meg $\cos\varphi'$-el, a másikat $\sin\varphi$-el s adjuk össze ezeket, ezáltal azt kapjuk, hogy

$$u'\cdot\cos\varphi' + v'\cdot\sin\varphi' = \sin\vartheta\cdot\dot{\varphi}$$

innen a φ már quadraturral meghatározható.

De $\dot{\varphi}$-ot előállíthatjuk magának u'-nek és v'-nek a segélyével is szorozzuk meg e célra egyenletünk mindkét oldalát $H^2\cdot\sin\vartheta$-val s vegyük aztán tekintetbe az (A.) alatti egyenleteket; azonnal látjuk, hogy:

$$(\mathrm{III.})\ \ldots\quad \dot{\varphi} = H\cdot\frac{J_1 u'^2 + J_2 v'^2}{J_1^2 u'^2 + J_2^2 v'^2}$$

Az egész probléma megoldása az (I) és (I)' alatti egyenletek megoldásán fordul meg. Ezeknek a tárgyalása végett célszerű három esetet különböztetni meg aszerint, amint mind a három inertia momentum egyenlő, vagy két-tő egyenlő, vagy mind a három különböző.

1.) $J_1 = J_2 = J_3$.

Ez esetben az (I.) alatti egyenletek szerint:

$$u' = const., \; v' = const., \; w' = const.$$

Lássuk már most, minő mozgás felel meg ennek az esetnek. A (II.) alatti egyenletek szerint most ϑ és φ szintén constansok. ϑ azt a szöget jelentvén, amelyet a két z tengely képez egymással, constans volta arra mutat, hogy a z' tengely z tengelyű körös kúpfelületen mozog. A φ szög az x' tengelynek és ϑ szögsíknak a szöge lévén, hogy constans, ez azt jelenti, hogy az x' tengely a ϑ szögsíkkal, tehát egyben a z' tengellyel együtt végez forgást a z tengely körül, amiből már következik, hogy az y' tengely hasonlóképp viselkedik. Ennélfogva az egész test csupán a z tengely körül való forgó mozgást végez. Most csak az a kérdés, hogy milyen ez a forgó mozgás. Erről felvilágosítást ad a (III.) alatti egyenletet, amely szerint $\psi = const.$ De ψ az a szög, amelyet az x tengely képez a ϑ szögsíkkal; ennek a szögnek a változásával forog tehát a ϑ szögsík a z tengely körül és így az egész test ennek a szögnek a változásával forog a z tengely körül. Minthogy egyenletünk szerint e szög változási sebessége constans, így a merev test állandó szögsebességgel forog a z tengely körül.

Ebből áll annak mozgása a tömegcentrum körül, midőn az J_1, J_2, J_3 három momentum egyenlő egymással. Még tegyük azt az észrevételt, hogy (III) szerint $\dot{\varphi}$ nagyobb, mint zérus, tehát a forgás szabott értelemben történik a z tengely körül; annak az a magyarázata, hogy a z tengely irányát az (F, G, H) vectorba fordítottuk; ez a vector bármi lehet, de constans lévén mindig az, ami kezdetben volt így, hogy tetszésszerinti előzetes adatot szolgáltat.

2.) $J_1 = J_2 \equiv J, \quad J_3 \gtrless J.$

Az (I.) alatti harmadik egyenlet szerint w' most is constans, tehát (II.) szerint ϑ nem különben most is constans, tehát a z' tengely most is körös kúpfelületen mozog a z tengely körül, mint a kúpfelület tengelye körül. Használjuk a következő jelölést:

$$\frac{J_3 - J}{J} w' = \varkappa.$$

Akkor az (I.) alatti két első egyenlet így írható:

$$\frac{du'}{dt} = -\varkappa v' \quad , \quad \frac{dv'}{dt} = \varkappa . u'$$

ahol a $\varkappa$ = const. Ezeknek az általános megoldása pedig a következő:

$$(4.) \begin{cases} u' = r . \cos \varkappa (t - t_0) \\ v' = r . \sin \varkappa (t - t_0) \end{cases}$$

ahol r és t_0 az integratió constansai és r positivot jelenthet, mert az előjelet t_0 segélyével tetszésre kaphatjuk. Írjuk be ezekbe az egyenletekbe (II.) ahol u' és v' kifejezését s találjuk, hogy

$$\frac{H}{J}\cdot\sin\vartheta\cdot\cos\varphi' = r\cdot\cos\varkappa(t-t_0)$$

$$\frac{H}{J}\cdot\sin\vartheta\cdot\sin\varphi' = r\cdot\sin\varkappa(t-t_0)$$

Világos, hogy

$$r = \frac{H}{J}\cdot\sin\vartheta$$

$$(N.B.\ \sin\vartheta > 0)$$

mihez képest

$$\cos\varphi' = \cos\varkappa(t-t_0) \quad , \quad \sin\varphi' = \sin\varkappa(t-t_0)$$

ami pedig azt mutatja, hogy

$$\varphi' = \varkappa(t-t_0) \pm 2n\pi.$$

ahol n valamely egész szám. Ebből folyólag:

$$\dot{\varphi}' = \varkappa.$$

A most nyert egyenlet szerint a ϑ szögsíknak és az x' tengelynek a szöge (t.i. a φ') állandó sebességgel változik s így a test állandó szögsebességgel forog a z' tengely körül, mialatt, mint fent láttuk, a z' tengely z tengelyű körös kúpfelületen mozog. Az még a kérdés, hogy az utóbbi mozgás milyen.

A (III.) alatti egyenletekből most, hogy $J_1 = J_2 = J$ (4) szerint

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{H}{J}$$

tehát az x tengelynek és a ϑ szögsíknak a szöge ismét állandó sebességgel változik, vagyis a z' tengely ismét állandó szögsebességgel forog a z tengely körül. A test tehát jelenleg a következő képen mozog: Egy benne lévő egyenes pontsor, és pedig a z' pontsor állandó szögsebességgel forog a z tengely körül, mialatt a test maga állandó szögsebességgel forog ama pontsor körül.

3). $J_1 < J_2 < J_3$.

Azt a mozgást, amely ebbe az esetbe tartozik, már nem lehet oly könnyen átkepinteni, mint a másik két esetbe tartozót. Lássuk azonban differentiál egyenleteinknek ebbe az esetbe tartozó megoldását is. Éljünk evégből a következő jelölésekkel:

$$\frac{J_3 - J_2}{J_1} \equiv N_1\,, \quad \frac{J_1 - J_3}{J_2} \equiv -N_2\,; \quad \frac{J_2 - J_1}{J_3} \equiv N_3$$

mikez képest $N_1 > 0$, $N_2 > 0$, $N_3 > 0$. Akkor aztán az (I.) alatti egyenletekből u', v', w' számára a következő három egyenlet adódik:

$$\left.\begin{aligned} u' &= \frac{\varkappa}{T\sqrt{N_2 \cdot N_3}} \cdot \mathrm{cn}\,\frac{t-t_0}{T} \\ v' &= \frac{\varkappa}{T\sqrt{N_3 \cdot N_1}} \cdot \mathrm{sn}\,\frac{t-t_0}{T} \\ w' &= \frac{1}{T\sqrt{N_1 N_2}} \cdot \mathrm{dn}\,\frac{t-t_0}{T} \end{aligned}\right\}\ (\text{modulo } \varkappa.)$$

ahol $\varkappa$, T és t_0 az integratio constansai. Hogy ez valóban így van, arról utólagosan könnyű meggyőződni. Most azonban még meghatározandók volnának az Euler féle szögek.

Kimaradt: Egy merev test mozgása, hogy valamelyik pontja rögzítve van a koordinátarendszerhez.

2. példa.

Egy merev test sík lejtőn <u>sikló</u> mozgást végez, azaz olyképp mozog, hogy felületének folyvást ugyanazon elemeiben érinti a lejtőt. Az érintő elemek száma pedig végtelen nagy legyen úgy, hogy véges kiterjedésű folytonos felületet alkossanak. A lejtő a földhöz legyen rögzítve; ez a telep rendszer; kapcsoló rendszer nincs. Kérdezzük, hogy milyen a test mozgása a lejtőhöz rögzitett tengely rendszerben, ha csupán a nehézségi szabad erő tesz számot és a surlódás is tekinteten kivül hagyható. Kérdezzük továbbá, hogy melyek a mozgás szükséges és elégséges feltételei:

Egy merev test mechanikai állapotának az elvi relatiója, mikor nincs surlódás és a kapcsoló rendszer passiv, a következő:

$$(7_0)' \quad \left\{ \begin{aligned} &(m\ddot{\xi}-A)\delta a+(m\ddot{\eta}-B)\delta b+(m\ddot{\zeta}-C)\delta c+ \\ &+\left[\frac{d}{dt}S(y\dot{z}-z\dot{y})\,Dm-U\right]\delta u+ \\ &+\left[\frac{d}{dt}S(z\dot{x}-x\dot{z})\,Dm-V\right]\delta v+ \\ &+\left[\frac{d}{dt}S(x\dot{y}-y\dot{x})\,Dm-W\right]\delta w \geqq 0 \end{aligned} \right.$$

Az xy síkot a lejtő síkjára tegyük úgy pedig, hogy az x tengely horizontális legyen, az y tengely lefelé mutasson a lejtőn, s a z tengely, amely egyuttal a sík normálisa, a sík azon oldala felé mutasson, amelyen a merev test van. Az érintkezési felületet elemi részekre osztva gondoljuk. Egy ily elemi rész coordinátái legyenek x_0, y_0, z_0. Akkor a merevségi kényszeren kivül még az a kényszer is van, hogy $\delta z_0 \geqq 0$, mely egyenlőtlenségek száma egyenlő az érintkezési felület felvett elemeinek a számával. Foglaljuk össze az egyenlőtlenségeket nem negativ multiplicatorokkal, amelyeknek jelvénye legyen: $\lambda . D\sigma$, ahol $D\sigma$ egy felület elem területét jelentse. Az összefoglalásból származó egyenlőtlenség a következő:

$$S \lambda . \delta z_0 . D\sigma \geqq 0$$

De $\delta z_0 = \delta c + y_0 \delta u - x_0 \delta v$, tehát az összefoglalásból származó egyenlőtlenség így is irható:

$$\delta c . S \lambda D\sigma + \delta u . S \lambda y_0 D\sigma - \delta v . S \lambda x_0 D\sigma \geqq 0.$$

Az egyenlőtlenségek tana szerint bizonyára léteznek oly $\lambda D\sigma$ nem negativ multiplicatorok, hogy ezen egyenlőtlenség bal oldala identicusan egyenlő az elvi relatio bal oldalával. Eszerint a következő egyenleteink vannak:

$$m \ddot{\xi} = A, \quad m \ddot{\eta} = B, \quad m \ddot{\zeta} = C + S \lambda . D\sigma.$$

$$\frac{d}{dt} S(y \dot{z} - z \dot{y}) Dm = U + S \lambda y_0 . D\sigma$$

$$\frac{d}{dt} S(z \dot{x} - x \dot{z}) Dm = V - S \lambda . x_0 . D\sigma.$$

$$\frac{d}{dt} S(x \dot{y} - y \dot{x}) Dm = W.$$

Ha a nehézségi szabad erő iránya a z tengellyel $\bar{\omega}$ szöget képez, akkor $DY = g.\sin\bar{\omega}.Dm$, $DZ = g.\cos\bar{\omega}.Dm$, amelyekhez járul, hogy $DX=0$. Így van ez akár a test legyen felül, a lejtő alul, akár a lejtő legyen felül, a test alul. Ezeknek tekintetbe vételével:

$$A \equiv SDX = 0, \quad B \equiv SDY = mg.\sin\bar{\omega}.$$

$$C \equiv SDZ = mg.\cos\bar{\omega}.$$

$$U \equiv S(yDZ - zDY) = mg(\eta.\cos\bar{\omega} - \zeta.\sin\bar{\omega})$$

$$V \equiv S(zDX - xDZ) = -mg\xi.\cos\bar{\omega}$$

$$W \equiv S(xDY - yDX) = mg.\xi.\sin\bar{\omega}.$$

ha t.i. ξ, η, ζ jelentik a test tömegcentrumának a coordinátáit. Ezek tekintetbe vételével egyenleteink így alakulnak:

$$(7_1)' \begin{cases} m\ddot{\xi} = 0, \quad m\ddot{\eta} = mg.\sin\bar{\omega} \\ m\ddot{\zeta} = mg\cos\bar{\omega} + S\lambda.D\sigma \end{cases}$$

$$(7_2)' \begin{cases} \frac{d}{dt} S(y\dot{z} - z\dot{y})Dm = mg(\cos\bar{\omega}.\eta - \sin\bar{\omega}.\zeta) + S\lambda y_0 D\sigma \\ \frac{d}{dt} S(z\dot{x} - x\dot{z}).Dm = -mg\cos\bar{\omega}.\xi - S\lambda.x_0 D\sigma \\ \frac{d}{dt} S(x\dot{y} - y\dot{x}).Dm = mg.\sin\bar{\omega}.\xi \end{cases}$$

amelyekhez hozzá járul még, hogy

$$(7_3)'. \quad \text{minden } z = \text{constans}$$

ami a feladat előzetes feltételeiből következik. Ezek vannak csak. Ezek szolgálnak tehát részint a sikló mozgás meghatározására, részint e mozgás feltételeinek a meghatározására.

A határozott (multiplicatort nem tartalmazó) egyenletek megismertetik velünk a mozgást. A tömegcentrumot illetőleg részint $(7_1)'$ alol, részint $(7_3)'$ alol, azaz onnan, hogy minden z constans, a következő egyenleteink vannak:

$$(7_1)'' \qquad \ddot{\xi} = 0, \quad \ddot{\eta} = g \sin\bar{\omega}, \quad \zeta = \text{const.}$$

Ez egyenletek szerint a test tömegcentruma úgy mozog, mint egy $z = \zeta$ (= const.) síkú lejtőre helyezett tömegpont, ha csupán a nehézségi szabad erő hatását viseli és ha nem surlódik.

Még egy határozott egyenletünk van és ez $(7_2)'$ harmadik egyenlete. Minthogy a tömegcentrum mozgását már ismerjük, ennélfogva a mozgás teljes megismerésére elégséges még csak a testnek a maga tömegcentruma körül való mozgását ismerni meg s ehhez juttat el $(7_2)'$ harmadik egyenlete. A feltételezett érintkezés mellett pedig ez a tömegcentrum körüli mozgás nem lehet más, mint forgás a tömegcentrumon átmenő s a lejtő síkra merőleges tengely körül, mint a z = const. Rényszerbeli egyenletek is elárulják. Hogy már most megismerjük ezt a forgó mozgást, válasszunk evégből egy másik coordináta rendszert, melynek origója a test tömegcentrumában van, a tengelyei pedig egyező irányúak a régi tengelyekkel. Ebbe a coordináta rendszerbe transformáljuk $(7_2)'$ harmadik egyenletét, mivégből x helyett $\xi+x$, y helyett $\eta+y$ írjuk; ily módon az új rendszerben is x, y, z jelölik a coordinátákat, minélfogva ebben a rendszerben

$$S x \mathfrak{D}m = 0 \quad , \quad S y \mathfrak{D}m = 0$$

Tekintettel erre és $(7_1)''$-re, a transformatio eredménye a következő:

$$\frac{d}{dt} S(x\dot{y} - y\dot{x})\mathfrak{D}m = 0$$

Most válasszunk még a testhez rögzített x', y', z' coordináta rendszert is, melynek origója szintén a tömegcentrumban legyen s a z' tengelye összeessék a z tengellyel. Legyen pedig, hogy az x' tengely kezdetben benne volt az x tengelyben és t idő alatt θ szöggel fordult el ettől a tengelytől, amely szög positivnak vagy negativnak számítson aszerint, amint az elfordulás a z tengely körül positiv vagy negativ értelemben történt; akkor aztán, mint ismeretes:

$$x = x'\cos\theta - y'\sin\theta,$$
$$y = x'\sin\theta + y'\cos\theta$$
$$z = z'$$

és következőleg:

$$\dot{x} = -(x'\sin\theta + y'\cos\theta).\dot{\theta}$$
$$\dot{y} = (x'\cos\theta - y'\sin\theta)\dot{\theta}$$
$$\dot{z} = 0$$

Behelyettesitvén ezeket az egyenletbe, találjuk, hogy

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{\vartheta}\cdot S(x'^2+y'^2)\,Dm\right)=0$$

tehát

$$\dot{\vartheta}=\mathrm{const.}$$

ami azt jelenti, hogy a test állandó szögsebességgel forog oly tengely körül, mely átmegy a tömegcentrumán és a lejtő síkra merőleges.

Lássuk már most, hogy mik a megállapitott mozgásnak szükséges és elégséges feltételei. Ennek a kifejtésére a három multiplicatoros egyenlet szolgál; ezek elsejéből

$$(0)\qquad mg\cos\omega=-S\lambda\,D\sigma$$

következik amiatt, hogy $(7_1)''$ szerint a ξ constans. Ez pedig azt követeli, hogy az ω szög tompa szög legyen, tehát hogy a merev test legyen a lejtő fölött (nem pedig forditva). Ami a másik két multiplicatoros egyenletet illeti, ezeket is transformáljuk a második tengely rendszerbe. Transformationkat természetesen az x_0 és y_0 coordinátákra is ki kell terjeszteni. Ebbe a második tengely rendszerbe tartozó egyenletek tekintettel $(7_1)''$ és az iménti (0) alatti egyenletre, a következők:

$$\frac{d}{dt}S(y\dot{z}-z\dot{y})\,Dm=S\lambda\,y_0\,D\sigma$$

$$\frac{d}{dt}S(z\dot{x}-x\dot{z})\,Dm=-S\lambda\,x_0\,D\sigma$$

ha t.i. most is csak x, y, z jelölik a coordinátákat. Azonban számba véve, hogy minden z constans, ezek az egyenletek igy is irhatók:

$$\frac{d^2}{dt^2} S zy Dm = - S \lambda y_0 D\sigma$$

$$\frac{d^2}{dt^2} S xz Dm = - S \lambda x_0 D\sigma$$

Ezek után térjünk át a testhez rögzített coordináta rendszerre. Behelyettesitvén az összegelési jelek alá x-nek és y-nak fentebbi θ-ás kifejezéseit és z helyett z'-öt irván, a baloldali summák a következőkép alakulnak:

$$S zy Dm \equiv \sin\theta . S z'x' Dm + \cos\theta . S z'y' Dm$$

$$S xz Dm \equiv \cos\theta . S x'z' Dm - \sin\theta . S y'z' Dm$$

Ha pedig a testhez rögzített tengelyrendszerben az y tengelyű deviatio momentum $\mathfrak{D}_1$, akkor rövidebben:

$$S zy Dm \equiv \mathfrak{D}_2 . \sin\theta + \mathfrak{D}_1 . \cos\theta$$

$$S zx Dm \equiv \mathfrak{D}_2 . \cos\theta - \mathfrak{D}_1 . \sin\theta$$

Tekintetbe véve pedig, hogy $\dot\theta$ constans, ezekből a kifejezésekből az is következik, hogy

$$\frac{d^2}{dt^2} S zy Dm \equiv - (\mathfrak{D}_2 \sin\theta + \mathfrak{D}_1 \cos\theta) . \dot\theta^2$$

$$\frac{d^2}{dt^2} . S zx Dm \equiv - (\mathfrak{D}_2 . \cos\theta - \mathfrak{D}_1 \sin\theta) . \dot\theta^2$$

Másfelől

$$S \lambda y_0 D\sigma \equiv \sin\theta . S \lambda x_0' D\sigma + \cos\theta . S \lambda y_0' D\sigma$$

$$S \lambda x_0 D\sigma \equiv \cos\theta . S \lambda x_0' D\sigma - \sin\theta . S \lambda y_0' D\sigma$$

Bejegyezvén mindezeket a két differential egyenletbe, kapjuk, hogy:

$$(\mathfrak{D}_2 . \dot\theta^2 - S \lambda x_0' D\sigma) . \sin\theta + (\mathfrak{D}_1 . \dot\theta^2 - S \lambda y_0' D\sigma) \cos\theta = 0$$

$$(\mathfrak{D}_2 \dot\theta^2 - S \lambda x_0' D\sigma) . \cos\theta - (\mathfrak{D}_1 \dot\theta^2 - S \lambda y_0' D\sigma) . \sin\theta = 0$$

Szorozzuk meg az első egyenletet $\sin\theta$-ával, a másodikat $\cos\theta$-val, azután adjuk össze őket; máskor pedig az első egyenletet szorozzuk meg cosθ-ával, a másodikat sinθ-val s azután vonjuk ki őket egymásból. Ily módon a következő két egyenletet kapjuk:

$$\theta''.D_2 = S \lambda x_0' D\sigma$$

$$\theta''.D_1 = S \lambda y_0'.D\sigma$$

Ezek az egyenletek is kötelesek teljesülni, hogy valóban a meghatározott mozgást végezze a test. Ezeknek az egyenleteknek a kellő felfogása végett célszerű lesz a multiplicatoros kifejezések alkalmas értelmezése. Ha $\lambda.D\sigma$ tömegelemet jelentene, akkor $S\lambda x_0' D\sigma$ nem volna egyéb, mint az $S\lambda D\sigma$ tömegnek és az ő tömegcentruma első coordinatájának szorzata, és $S\lambda y_0' D\sigma$ nem volna más, mint a $S\lambda D\sigma$ tömegnek és az ő tömegcentruma második coordinatájának szorzata; emellett a $S\lambda D\sigma$ tömegnek a tömegcentrumán természetesen a $\lambda.D\sigma$ tömegű elemek összességének a tömegcentruma értendő. Ezt a tömegcentrumot quasi tömegcentrumnak nevezvén, ha coordinátái a, b, c úgy

$$S x_0' \lambda D\sigma \equiv a.S\lambda D\sigma$$

$$S y_0' \lambda D\sigma \equiv b.S\lambda D\sigma.$$

Ha minden érintkező pontot minden más érintkező ponttal egyenes által összekapcsolunk, az így keletkező idom szélső határától befogott sík felület egy pontjának az első és második coordinátája az a és b. E felület keletkezésének a módja ugyanis egyenesen elárulja, hogy a mondott quasi tömegcentrum benne van és benne bármely pont lehet. Számba véve pedig a (0) egyenletet is, fentebbi két multiplicatoros egyenletünk most már a következő alakban jelenik meg:

$$a = \frac{\mathfrak{D}_2 \, \delta^2}{-mg \cos\bar{\omega}} \;, \quad b = \frac{\mathfrak{D}_1 . \delta^2}{-mg . \cos\bar{\omega}} .$$

Eszerint a mozgás leirt módjának a feltétele az is, hogy a két jobb oldali kifejezés oly pont első és második coordinátáját jelentse, amely benne fekszik a jellemzett sik felületben. Ekkor és csak akkor meg, ha a test a lejtő felett van, történhetik a mozgás a megszabott módon.

3. példa.

A támasz rendszer egy állvány, amely a földhöz van rögzitve. Az adott rendszer három merev testből áll, amelyeket Q_0, Q_1, Q_2 jelöljön. A Q_0 testnek egy egyenes pontsora az állványhoz van rögzitve, Q_1-nek, valamint Q_2-nek egy egyenes pontsora pedig az előbbivel párhuzamosan a Q_0 testhez van rögzitve. E rendelkezés mellett a Q_0 test bárminemű forogjasson az állványhoz rögzitett pontsora körül; a Q_1 valamint a Q_2 test bárminemű foroghasson a Q_0 hoz rögzitett pontsora körül. Coordináta rendszerünket az állványhoz rögzitsük, továbbá x tengelyét tegyük a Q_0 test forgás tengelyébe és az egyes testekhez tartozó mennyiségeket a megfelelő indexxel jelöljük. Ha a Q_0 test saját tengelyének a coordinátái x_0', y_0', z_0', úgy:

$$\delta x_0' = \delta a_0 + z_0' \delta v_0 - y_0' \delta w_0 = 0$$
$$\delta y_0' = \delta b_0 + x_0' \delta w_0 - z_0' \delta u_0 = 0$$
$$\delta z_0' = \delta c_0 + y_0' \delta u_0 - x_0' \delta v_0 = 0$$

a tengely minden pontjában. De a tengelyben $y_0'=0$, $z_0'=0$, ellenben x_0' bármi lehet; ebből folyólag:

$$\text{1.}\quad\left\{\begin{array}{l}\delta a_0=0,\ \delta b_0=0,\ \delta c_0=0,\ \delta v_0=0,\ \delta w_0=0\\ \delta u_0 \text{ pedig bármi lehet.}\end{array}\right.$$

A Q_1 saját tengelyének a pontjaiban legyenek x_1', y_1', z_1' a coordinatáák. A Q_0 testnek e tengelyen lévő pontjaiban pedig x_{01}', y_{01}', z_{01}' legyenek a coordinátáák. Eszerint:

$$x_1' = x_{01}',\quad y_1' = y_{01}',\quad z_1' = z_{01}'.$$

Következésképen: $\delta x_1' = \delta x_{01}'$, $\delta y_1' = \delta y_{01}'$, $\delta z_1' = \delta z_{01}'$, vagyis:

$$\begin{aligned}
\delta a_1 + z_1'\delta v_1 - y_1'\delta w_1 &= \delta a_0 + z_{01}'\delta v_0 - y_{01}'\delta w_0 \quad \text{tehát 1. miatt} &&= 0\\
\delta b_1 + x_1'\delta w_1 - z_1'\delta u_1 &= \delta b_0 + x_{01}'\delta w_0 - z_{01}'\delta u_0 &&= -z_{01}'\delta u_0 = -z_1'\delta\\
\delta c_1 + y_1'\delta u_1 - x_1'\delta v_1 &= \delta c_0 + y_{01}'\delta u_0 - x_{01}'\delta v_0 &&= y_{01}'\delta u_0 = y_1'
\end{aligned}$$

Az itteni második és harmadik egyenlet minden x_1' mellett köteles teljesülni minden pillanatban. Ebből folyólag: $\delta v_1=0$, $\delta w_1=0$; a következő kényszeregyenleteink is vannak tehát:

$$\text{2.}\quad\left\{\begin{array}{l}\delta a_1=0,\ \delta b_1=z_1'(\delta u_1-\delta u_0),\ \delta c_1=y_1'(\delta u_0-\delta u_1)\\ \qquad\delta v_1=0,\ \delta w_1=0\end{array}\right.$$

Hasonlóképen kapjuk a Q_2-re vonatkozólag, hogy

$$\text{3.}\quad\left\{\begin{array}{l}\delta a_2=0,\ \delta b_2=z_2'(\delta u_2-\delta u_0),\ \delta c_2=y_2'(\delta u_0-\delta u_2)\\ \qquad\delta v_2=0,\ \delta w_2=0\end{array}\right.$$

A három merev test a merevségi kényszeren kívül még azt a kényszert is viseli, amelyet az 1., 2., 3. alatti egyenletek fejeznek ki. Bevezetve ezeket a kifejezéseket a (7.) alatti elvi egyenlőtlenségbe, amely most három merev testre szól, három határozott egyenlethez jutunk amiatt t. i., hogy $\delta u_0, \delta u_1, \delta u_2$ egészen tetszésszerinti három incrementum.

Azonban egyszerűbb módon is eljuthatunk a három ide tartozó egyenlethez, olyképen t. i., hogy a forgató momentumok tételét alkalmazzuk:

$$\lambda . S[(y-b)\ddot{z}-(z-c)\ddot{y}]\mathfrak{D}m+\mu . S[\cdots]\mathfrak{D}m+\nu . S[\cdots]\mathfrak{D}m=$$
$$=\lambda . S[(y-b)\mathfrak{D}Z-(z-c)\mathfrak{D}Y]+\mu . S[\cdots]+\nu . S[\cdots].$$

(λ, μ, ν iránycosinusai a tengelynek, a, b, c pedig egy pontjának a coordinátái). Alkalmazzuk pedig ezt a tételt egyszer a rendszer egészére a Q_0 test tengelyét illetőleg, egyszer a Q_1 testre az ő tengelyét illetőleg, és egyszer a Q_2 testre az ő tengelyét illetőleg. Mindhárom tengely iránycosinusai: $\pm 1, 0, 0$, tehát a forgási egyenletünk mindkét oldalán egy tag marad csak, mindkét esetben a két első tag, továbbá most b és c értéke egyszer 0 és 0, egyszer y_1' és z_1', egyszer pedig y_2' és z_2'. Szorítkozzunk arra az esetre, hogy a forgási tengelyek horizontálisak és hogy csupán a nehézségi szabad erő hat. Feladatunkul tűzzük pedig csupán meghatározni a nyugalom szükséges és elégséges feltételeit. Most forgási egyenleteinkben minden derivált eltűnik, mihez képest a következő három egyenletünk van:

$$S(y\mathfrak{D}Z-z\mathfrak{D}Y)=0$$
$$S[(y_1-y_1')\mathfrak{D}Z_1-(z_1-z_1').\mathfrak{D}Y_1]=0$$
$$S[(y_2-y_2').\mathfrak{D}Z_2-(z_2-z_2').\mathfrak{D}Y_2]=0$$

ahol y_1' és z_1' a Q_1 test saját forgási tengelyének egy pontjában, y_2' és z_2' pedig a Q_2 test saját forgási tengelyének egy pontjában a második és harmadik coordináta. Jelenleg, ha a z tengelyt vertikálisan lefelé irányítjuk:

$$\mathfrak{D}Y = \mathfrak{D}Y_1 = \mathfrak{D}Y_2 = 0$$

$$\mathfrak{D}Z = g\mathfrak{D}m, \quad \mathfrak{D}Z_1 = g\mathfrak{D}m_1, \quad \mathfrak{D}Z_2 = g.\mathfrak{D}m_2.$$

így tehát három egyenletünk a következőre redukálódik:

$$\eta = 0, \quad \eta_1 - y_1' = 0, \quad \eta_2 - y_2' = 0$$

ahol η jelenti az egész rendszer tömegcentrumának második coordinátáját. Ezek az egyenletek azt mondják, hogy jelen esetben a nyugalom szükséges és elégséges feltétele abból áll, hogy az egész rendszer tömegcentruma az állványhoz rögzített tengely vertikális síkjában legyen. A Q_1 test tömegcentruma az l tengelyének vertikális síkjában legyen, a Q_2 test tömegcentruma pedig e test tengelyének vertikális síkjában legyen. Ezek egy közönséges mérleg nyugalmának szükséges és elégséges feltételei.

Merev testek surlódásáról.

I.

Az elvi relatió egyáltalában érvényes surlódás esetén is, ha számba vesszük a surlódásból származó virtuális kényszert is. Ennek a számbavétele azonban rendszerint nem oly egyszerü, mint a surlódástól független kényszernek számbavétele.

A surlódáson alapuló rögzítést mindigigen egyszerüen tudjuk virtuális kényszerrel fejezni ki, mert nem külömbözik az az egyébféle, pl. összeforrasztásból eredő rögzítés kényszerétől, de csak addig, amig a szó szoros értelmében rögzítésnek tekinthető, aminek föltétele van, az t.i., hogy a rögzített elemi részekre a rögzítéstől függetlenül ható erők nagysága valamely határon alul maradjon. Emellett a rögzítéstől függetlenül ható erőn azon erő értendő, amely akkor hatna az elemi részre, ha környezetéből a rögzítő test elemi részeit eltávolítanók.

De nem külömben egyszerü módon lehet virtuális kényszerrel fejezni ki azt a surlódást is, amely meggátolja az adott anyagi rendszerben egy merev testnek merev teleprendszeren vagy két érintkező merev testnek egymáson való siklását, amidőn is az a test a teleprendszeren, illetőleg ez a két test egymáson csak gördülhet. Természet szerint ennek is meg van a maga föltétele, az pedig, hogy a csúsztató erők nagysága bizonyos határon alul maradjon.

Példa a tiszta gördülésből álló mozgásra: Merev test merev teleprendszeren csak gördülhet és folyvást csak egy pontjában (voltaképen felület elemében) érinti azt.

Coord. rendszerünket rögzítsük a teleprendszerhez és e coordináta rendszerben t pillanatban x_0, y_0, z_0 legyenek az érintkező pont coordinátái. Ez a pont csak a felületi normális mentén és azon is csak a teleprendszertől távolodva mozdulhat tényleg és virtuálisan is. Ha tehát a felületi normálist a teleprendszertől kifelé irányítjuk, és ekkor α, β, γ az iránycosinusai, úgy $(\delta x_0, \delta y_0, \delta z_0)$ akár tényleg lehetséges, akár virtuális elmozdulás, csak (α, β, γ) irányú lehet. Ha tehát a nagysága δn, úgy

$$\delta x_0 = \alpha\,\delta n\,, \quad \delta y_0 = \beta . \delta n\,, \quad \delta z_0 = \gamma . \delta n \quad ; \quad \delta n \geqq 0$$

vagyis

$$1. \quad \begin{cases} \delta a + z_0 \delta v - y_0 \delta w = \alpha\,\delta n \\ \delta b + x_0 \delta w - z_0 \delta u = \beta\,\delta n \\ \delta c + y_0 \delta u - x_0 \delta v = \gamma . \delta n \\ \qquad \delta n \geqq 0 \end{cases}$$

Számítsuk ki innen $(\delta a, \delta b, \delta c)$ értékét, aztán írjuk be a merev test elvi relatiójába. Minthogy $\delta u, \delta v, \delta w$ bármi lehet, és δn bármi nem negatív lehet, a következő egyenletekhez jutunk:

$$2. \quad \begin{cases} m(z_0 \ddot{\eta} - y_0 \ddot{\zeta}) + \dfrac{d}{dt} S (y\dot{z} - z\dot{y}) \mathfrak{D}m = z_0 S \mathfrak{D}\mathfrak{Y} - y_0 S \mathfrak{D}\mathfrak{Z} + S(y \mathfrak{D}\mathfrak{Z} - z \mathfrak{D}\mathfrak{Y}) \\ m(x_0 \ddot{\zeta} - z_0 \ddot{\xi}) + \dfrac{d}{dt} S (z\dot{x} - x\dot{z}) \mathfrak{D}m = x_0 S \mathfrak{D}\mathfrak{Z} - z_0 S \mathfrak{D}\mathfrak{X} + S(z \mathfrak{D}\mathfrak{X} - x \mathfrak{D}\mathfrak{Z}) \\ m(y_0 \ddot{\xi} - x_0 \ddot{\eta}) + \dfrac{d}{dt} S (x\dot{y} - y\dot{x}) \mathfrak{D}m = y_0 S \mathfrak{D}\mathfrak{X} - x_0 S \mathfrak{D}\mathfrak{Y} + S(x \mathfrak{D}\mathfrak{Y} - y \mathfrak{D}\mathfrak{X}) . \end{cases}$$

és a következő egyenlőtlenséghez:

$$3. \quad (m\ddot{\xi} - S\mathfrak{D}\mathfrak{X}) . \alpha + (m\ddot{\eta} - S\mathfrak{D}\mathfrak{Y}) . \beta + (m\ddot{\zeta} - S\mathfrak{D}\mathfrak{Z}) \gamma \geqq 0$$

Az egyenletekhez csatolandók a mozgás kényszerbeli egyenletei, amelyek 1. alól (amelyek a valósággal lehetséges elemi elmozdulások kifejezései is.), így erednek, hogy δ helyett d jegyet irunk és megfontoljuk, hogy $dn = 0$:

$$da + z_0 dv - y_0 dw = 0$$
$$db + x_0 dw - z_0 du = 0$$
$$dc + y_0 du - x_0 dv = 0$$

Azonban tekintettel arra, hogy

$$d\xi = da + \zeta dv - \eta dw \quad , \text{stb.}$$

célszerűbb lesz így irni ezeket az egyenleteket

$$\underline{4.} \quad \begin{cases} \dot{\xi} + (z_0 - \zeta)\dot{v} - (y_0 - \eta)\dot{w} = 0 \\ \dot{\eta} + (x_0 - \xi)\dot{w} - (z_0 - \zeta)\dot{u} = 0 \\ \dot{\zeta} + (y_0 - \eta)\dot{u} - (x_0 - \xi)\dot{v} = 0 \end{cases}$$

Kilenc a meghatározandó mennyiségek száma. Ugyanis a tömegcentrumba (ξ, η, ζ) helyezvén a testhez rögzített coord. rendszer origóját, a tömegcentrum (ξ, η, ζ) coordinátái, az Euler féle szögek és az érintkező pont (x_0, y_0, z_0) coordinátái a meghatározandó ismeretlenek. Egyenletet csak hatot irtunk ugyan, de hozzájuk csatlakoznak geometriai egyenletek, amelyek a test és a talap rendszer felületére vonatkoznak.

Sokszor hasznos oly coord. rendszerre térni, amelynek origója a tömegcentrumban van, tengelyei pedig egyező irányúak a régi tengelyekkel. Ha ebben az új coord. rendszerben is x, y, z jelölik a coordinátákat, úgy $\underline{2.}$ és $\underline{4.}$ alatt x, y, z helyett $\xi + x, \eta + y, \zeta + z$ (x_0, y_0, z_0 helyett $\xi + x_0, \eta + y_0, \zeta + z_0$) teendő az átszámítás végett. Ily módon a következő egyenleteket kapjuk:

$$(2)_1 \left\{ m(z_0\ddot{\eta} - y_0\ddot{\zeta}) + \frac{d}{dt} S(y\dot{z} - z\dot{y}) Dm = z_0 S DY - y_0 S DZ + S(y DZ - z DY) \right.$$
stb.

$$(4)_1 \left\{ \begin{array}{l} \dot{\xi} + z_0 \dot{v} - y_0 \dot{w} = 0 \\ \dot{\eta} + x_0 \dot{w} - z_0 \dot{u} = 0 \\ \dot{\zeta} + y_0 \dot{u} - x_0 \dot{v} = 0 \end{array} \right.$$

Az első három épen olyan alakú, mint a régi rendszerben, csakhogy (DX, DY, DZ) nem az új rendszerben ható, hanem a régi rendszerben ható szabad erőket jelentik bennük is.

Lássunk egy igen egyszerű konkrét esetet. Gömb guruljon sík lejtőn egyenesen le vagy fölfelé. Tömegcentruma a geometriai centrumában legyen.

A coord. rendszer x, y síkját a lejtő síkkal párhuzamossá tegyük és pedig úgy, hogy az x tengely horizontális legyen, az y tengely lefelé mutasson, a z tengely pedig a lejtő felé mutasson. Könnyű észrevenni, hogy az új rendszerben:

$\underline{A.}$ $x_0 = 0, y_0 = 0, z_0 = R$ = a gömb sugara.

továbbá:

$$\dot{x} = z\dot{v} - y\dot{w}, \quad \dot{y} = x\dot{w} - z\dot{u}, \quad \dot{z} = y\dot{u} - x\dot{v}$$

úgy, hogy az újban is $\dot{u}, \dot{v}, \dot{w}$ az egyes tengelyek körül a szögsebességek. Ámde föltevésünk szerint csakis az x tengely körül van szögsebessége a gömbnek, tehát

B. $\dot{v} = 0, \quad \dot{w} = 0$

és következőleg

C. $\dot{x} = 0, \dot{y} = -z\dot{u}, \dot{z} = y\dot{u}$

Most u-nak magának is van értelme: a kezdet óta létrejött elfordulás szöge az.

Az A., B. és C. alattiak figyelembe vételével (4.) alól azt kapjuk, hogy

D. $\dot{\xi} = 0, \quad \dot{\eta} = R.\dot{u}, \quad \dot{\zeta} = 0$

A $(2)_1$ alól pedig abban a föltevésben, hogy csak a nehézségi szabad erő tesz számot és ez a z tengellyel ε szöget zár, azt kapjuk, hogy

E. $$\begin{cases} m R \ddot{\eta} + J_x \ddot{u} = m g R \sin\varepsilon & (J_x \text{ az } x \text{ tengelyű inertia momentum}) \\ \frac{d}{dt}(\dot{u} D_z) = 0, \quad \frac{d}{dt}(\dot{u} D_y) = 0 \\ (D_z \text{ és } D_y \text{ deviatio momentumok}). \end{cases}$$

Már a D. alattiak és az E. alatti első egyenlet meghatározzák a kívánt mozgást. Az E. alatti második és harmadik egyenlet föltétele e mozgásnak. Ha homogén a gömb, akkor nyilvánképen teljesül e két föltételi egyenlet, mert akkor a deviatio momentumok eltűnnek. A D. alatti második és E. alatti első egyenletből η számára:

F. $$\ddot{\eta} = \frac{g.\sin\varepsilon}{1 + \frac{J_x}{mR^2}}$$

adódik. Mivel $\dot{\xi} = 0, \dot{\zeta} = 0$, ezszerint úgy mozog a tömegcentrum le- vagy fölfelé, amint surlódás nélkül egy tömegpont mozogna ε hajlású lejtősíkon, ha $g:(1+\frac{J_z}{mR^2})$ nagyságú volna a nehézségi gyorsulás és csak ebből állana a szabad gyorsulása. A (D.) alatti második egyenlet (F.) alapján az $\dot{u}$ szögsebességet határozza most már meg.

De még egy föltétele van a kívánt mozgásnak, u. m. a (3.) alatti egyenlőtlenség. Most $\alpha=0$, $\beta=0$, $\gamma=-1$, tehát, mivel $\ddot{\zeta}=0$, és $S\mathfrak{D}_z = mg.\cos\varepsilon$, azt követeli a (3.), hogy

$$\cos\varepsilon \geqq 0$$

legyen, ami azt jelenti, hogy a gömb legyen fölül és a lejtő alul.

II.

Ha a merev testek elvi relatiójában (F.)ben a virtuális eltolásokon és elfordításokon mindazokat értjük, amelyek akkor volnának érvényesek, ha nem volna surlódás, szóval ha csak a közönséges (surlódástól független) virtuális kényszert vesszük tekintetbe, de tényleg van surlódás, akkor megszűnik helyes lenni azon elvi relatio. Azonban mindenesetre vannak oly $(\mathfrak{A}', \mathfrak{B}', \mathfrak{C}')$ és $(\mathfrak{U}', \mathfrak{V}', \mathfrak{W}')$ vectorok, hogy ha $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})$ helyett $(\mathfrak{A}+\mathfrak{A}', \mathfrak{B}+\mathfrak{B}', \mathfrak{C}+\mathfrak{C}')$ és $(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W}')$ helyett $(\mathfrak{U}+\mathfrak{U}', \mathfrak{V}+\mathfrak{V}', \mathfrak{W}+\mathfrak{W}')$ vectorokat használjuk (F.) ben, helyes lesz az, jóllehet a közönséges virtuális kényszerre szoritkoznak:

$$(7)' \quad \sum\left[(m\ddot{\xi}-A-A')\delta a+\dots+\left(\frac{d}{dt}\sum(y\dot{z}-z\dot{y})Dm-U-U'\right)\delta u+\dots\right]\geqq 0$$

ámbár $(\delta a, \delta b, \delta c)$ illetőleg $(\delta u, \delta v, \delta w)$ mindazokat a virtuális eltolásokat, illetőleg elfordításokat jelentik, amelyeket a közönséges kényszer megenged.

Az ilyetén (A', B', C') és (U', V', W') vectorokat a surlódás toló illetőleg forgató hatásainak nevezzük. Gyakran hozzájuk juthatunk külön tapasztalások alapján és ilyenkor célszerű is (7.)'nek, mint pusztán a közönséges kényszerbe tartozó egyenlőtlenségnek a használata. Különben maga a (7.)' szolgál arra is, hogy azokat a külön tapasztalásokat kellően megszerezzük. Ebben jó segítségünkre van, hogy a surlódás toló és forgató hatásait összetevőkre bontjuk, melyek egy-egy érintkező felület elem surlódásából származnak, minden egyes felületelem surlódásának forgató hatását pedig két forgató hatásra bontjuk, amelyek egyike a gördülés ellen hat és tisztán tapadás következménye (a tapadás is a surlódás ~~fogal~~ma alá tartozik), másikon pedig a perdülés ~~gördülés~~ ellen, vagyis az érintkező felület elem normálisa körüli fordulás ellen hat.

Mielőtt erre is ~~látnánk~~ valamely egyszerű példát, vizsgáljuk meg, hogy a ~~tisz~~ta gördülésből álló mozgás előbbi példájában milyen a surlódás toló és forgató hatása. Evégből az (1.) alatt parametrumosan kifejezett teljes kényszert határozott relatiókkal fejezzük ki, ami δn kiszámítása és kiküszöbölése által történik:

$$1.' \quad \alpha(\delta a + z_0\delta v - y_0\delta w) + \beta(\delta b + x_0\delta w - z_0\delta u) + \gamma(\delta c + y_0\delta u - x_0\delta v) \geqq 0$$

$$1.'' \quad \begin{cases} \beta(\delta c + y_0\delta u - x_0\delta v) - \gamma(\delta b + x_0\delta w - z_0\delta u) = 0 \\ \gamma(\delta a + z_0\delta v - y_0\delta w) - \alpha(\delta c + y_0\delta u - x_0\delta v) = 0 \\ \alpha(\delta b + x_0\delta w - z_0\delta u) - \beta(\delta a + z_0\delta v - y_0\delta w) = 0 \end{cases}$$

Itt (1.') (rövidebben: $\alpha\delta x_0 + \beta\delta y_0 + \gamma\delta z_0 \geqq 0$) a közönséges virtuális kényszernek, (1.'') a surlódási virtuális kényszernek a kifejezése. Minthogy most (1.'')-et is tekintetbe fogjuk venni, az eredeti (7.) alatti elvi relatiót alkalmazzuk egyetlen testre vonatkoztatva. Az (1.') alatti egyenlőtlenséghez λ_0 nem negatív multiplicátort rendelve, az (1.'') alatti egyenletekhez pedig $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ multiplicatorokat rendelve, az eredeti (7.)ből azt kapjuk, hogy

$$2.' \quad \begin{cases} m\ddot{\xi} = A + \lambda_0\alpha + \lambda_2\gamma - \lambda_3\beta, \text{ stb.} \\ \dfrac{d}{dt} S(y\dot{z} - z\dot{y})Dm = U + \lambda_0(\gamma y_0 - \beta z_0) + \\ \qquad + \lambda_1(\beta y_0 + \gamma z_0) - \alpha(\lambda_2 y_0 + \lambda_3 z_0) \\ \text{stb.} \end{cases}$$

A közönséges kényszerből

$(\lambda_0\alpha,\ \lambda_0\beta,\ \lambda_0\gamma)$

toló hatás és

$$(\lambda_0(\gamma y_0-\beta z_0),\ \lambda_0(\alpha z_0-\gamma x_0),\ \lambda_0(\beta x_0-\alpha y_0))$$

forgató hatás ered, tehát a surlódásból származó toló hatás ez:

$$(\lambda_2\gamma-\lambda_3\beta\ ,\lambda_3\alpha-\lambda_1\gamma\ ,\lambda_1\beta-\lambda_2\alpha)$$

és a surlódásból származó forgató hatás componensei ezek:

$$\lambda_1(\alpha x_0+\beta y_0+\gamma z_0)-\alpha(\lambda_1 x_0+\lambda_2 y_0+\lambda_3 z_0),$$
$$\lambda_2(\alpha x_0+\beta y_0+\gamma z_0)-\beta(\lambda_1 x_0+\lambda_2 y_0+\lambda_3 z_0),$$
$$\lambda_3(\alpha x_0+\beta y_0+\gamma z_0)-\gamma(\lambda_1 x_0+\lambda_2 y_0+\lambda_3 z_0)$$

Valóban, ha a $2'$ alatti multiplicatoros egyenleteket rendre $\delta a, \delta b, \delta c, \delta u, \delta v, \delta w$ -vel szorozva összeadjuk és azután tekintettel vagyunk $1'$-re, de csakis erre, ellenben $1''$-re nem, oly relatiót kapunk, mint $(7)'$, azzal, hogy

$$\mathfrak{A}' = \lambda_2\gamma-\lambda_3\beta \quad , \text{stb.}$$
$$\mathfrak{U}' = \lambda_1(\alpha x_0+\beta y_0+\gamma z_0)-\alpha(\lambda_1 x_0+\lambda_2 y_0+\lambda_3 z_0), \text{ stb.}$$

A teljes meghatározáshoz még természetesen szükséges a multiplicatorok kiszámítása, amit azonban itt mellőzünk.

Lássuk most annak a példáját, hogy tapasztalás alapján egyenesen a surlódás hatását veszzük számba, mimellett már a közönséges kényszer figyelembe vételére szorítkozunk, vagyis a surlódási kényszert tekintetén kívül hagyjuk.

1. példa.

Egy homogén merev kerék egy körös mero henger körül surlódással foroghat, más mozgást nem végezhet. A kerék s a henger geometriai tengelye közös tengely legyen. Ez a forgás tengelye.

Coordináta rendszerünket a hengerhez rögzitsük, ugy pedig, hogy x tengelye a forgás tengelyében legyen.

Most a (7.)' egyetlen testre, a kerékre alkalmazandó, tehát a Σ jegy elmarad. Továbbá jelenleg

$$\delta a = 0,\ \delta b = 0,\ \delta c = 0$$
$$\delta \vartheta = 0,\ \delta \varphi = 0$$

a közönséges kényszer kifejezései. Van tehát a mozgás meghatározására

$$\frac{d}{dt} S(y\dot{z} - z\dot{y})Dm = U + U'$$

Hogyha pedig kezdet óta θ az elfordulás szöge, ugy, mint már többször láttuk:

$$\dot{y} = -z\dot{\theta},\ \dot{z} = y\dot{\theta}$$

tehát:

$$S(y\dot{z} - z\dot{y})Dm = \dot{\theta}.S(y^2 + z^2)Dm = J.\dot{\theta}$$

ahol az J inertia momentum constans.

Legyen, hogy a henger a földhöz van rögzitve és csak a nehézségi szabad erő hat. Akkor $U = 0$, bármilyen legyen is a henger helyzete, mert $S y Dm = m.\eta = 0$, $S z Dm = m\zeta = 0$. E szerint

$$J.\ddot{\theta} = U'.$$

egyenletünk van, ahol U' a surlódás x tengelyű forgató momentuma.

A tapasztalás szerint addig, míg a $\dot\theta$ szögsebesség nagysága valamely határon alul van, U' megközelítőleg Constansnak számítható. Az előjele pedig mindig ellentétes a $\dot\theta$ szögsebesség előjelével. Ha tehát

$$U' = \pm J\varkappa \ , \quad \varkappa > 0$$

írjuk, úgy $\ddot\theta = \pm\varkappa$, ahol a felső vagy alsó előjel érvényes aszerint, amint $\dot\theta$ negatív vagy positív. Legyen, hogy kezdetben positív a $\dot\theta$ és kezdeti értéke $\dot\theta_0$ legyen. Akkor mindaddig $-\varkappa$ használandó, ammig csak $\dot\theta$ el nem tűnik, úgy, hogy e pillanatig egyenletünkből

$$\dot\theta = \dot\theta_0 - \varkappa t \ , \quad (\varkappa > 0)$$

tehát folyvást fogy a $\dot\theta$ és fogyása arányos az idővel. Eltűnik $t = \dot\theta_0 : \varkappa$ időpontban. Mi történik ezen túl? Ezentúl egyenletünk egyáltalán megszűnik érvényes lenni, a kerék nyugalomban marad.

A $\varkappa$ együttható, valamint a $\dot\theta_0$ kezdeti szögsebesség értékét könnyen meghatározhatjuk még egy integratió nyomán. A θ alatt a kezdet óta létrejött szöget értvén:

$$\theta = \dot\theta_0 t - \frac{\varkappa}{2} t^2$$

Két idő ponthoz megfigyelvén a létrejött θ szöget, kiszámíthatjuk innen $\varkappa$ és $\dot\theta_0$ értékét.

2. példa. Az előbbi cikk második példája azzal a hozzáadással, hogy a merev test surlódik a lejtővel.

Csak a közönséges kényszert tartva számon, az ott talált egyenletek helyett a következő egyenleteink lesznek:

$$m\ddot{\xi} = A + A', \quad m.\ddot{\eta} = B + B'$$

$$m\ddot{\zeta} = C + C' + S\lambda . D\sigma$$

$$\frac{d}{dt} S(y\dot{z} - z\dot{y}) Dm = U + U' + S\lambda . y_0 \, D\sigma$$

$$\frac{d}{dt} S(z\dot{x} - x\dot{z}) Dm = V + V' - S\lambda \, x_0 \, D\sigma$$

$$\frac{d}{dt} S(x\dot{y} - y\dot{x}) Dm = W + W'$$

amelyekhez járul, hogy minden z constans.

Ezekben a surlódás toló, illetőleg forgató hatásának a harmadik, illetőleg a két első componense arra az esetre, hogy nincs tapadás, zérus. Ezt tegyük fel. Ezáltal a három multiplicatoros egyenlet megszabadul a surlódás befolyásától, de a három határozott egyenlet nem. A két első elvezet a tömegcentrum mozgásához, a harmadik a tömegcentrumon átmenő és a lejtő síkra merőleges tengely körüli forgáshoz, ha A', B', W' ismeretes.

Szorítkozzunk arra az esetre, hogy az érintkező felületek homogén határrétegeknek a jelvényei. Egyuttal szorítkozzunk arra az esetre, hogy csak sikló mozgást végez a test egyenesen le vagy felfelé a lejtőn. Feltehető, hogy a surlódás most is állandó nagyságú. Az iránya ellentétes a haladás irányával. Eszerint azt írván, hogy

$$\mathcal{B}' = \pm m\varkappa \quad , \quad \varkappa > 0 ,$$

a positiv vagy negativ előjel érvényes aszerint, amint $\dot{\eta}$ negativ vagy positiv

A mozgás meghatározására szolgáló egyenletünk pedig ez:

$$\ddot{\eta} = g.\sin\varepsilon \pm \varkappa$$

Ebből a felfelé mozgásban, ha $\dot{s}_0$ a kezdeti sebesség nagysága:

$$\dot{\eta} = (g.\sin\varepsilon + \varkappa)t - \dot{s}_0$$

Olyan tehát a felfelé mozgás, mintha surlódás nem volna, a nehézségi gyorsulás nagysága azonban:

$$g + \frac{\varkappa}{\sin\varepsilon}$$

volna.

A lefelé mozgásban

$$\dot{\eta} = \dot{s}_0 + (g.\sin\varepsilon - \varkappa)t$$

ha most is $\dot{s}_0$ jelöli a kezdeti sebesség nagyságát. Ha már most $g.\sin\varepsilon - \varkappa > 0$, akkor olyan a lefelé mozgás, mintha surlódás nem volna, a nehézségi gyorsulás nagysága azonban

$$g - \frac{\varkappa}{\sin\varepsilon}$$

volna.

Ha pedig $g.\sin\varepsilon - \varkappa < 0$, akkor úgy mozog a test lefelé, mintha nem surlódnék, de a nehézségi gyorsulás helyett

$$\varkappa - g.\sin\varepsilon$$

nagyságú és a lejtő mentén felfelé irányult szabad gyorsulása volna. Ha végül $\varkappa = g.\sin\varepsilon$, akkor $\dot{\eta} = \dot{s}_0$, tehát állandó sebességgel mozog lefelé a test.

Megállapitandók volnának még e mozgásnak föltételei.

A nyugalom föltételei pedig és a nyugalomon kezdődő mozgás megindulása külön tanulmány föladatát képezik.

. — .

Pótlás.

91. old. (1.) után:

Megjegyzendő, hogy negatív szög alatt positív értelemben fordulni annyit jelent, mint az ellentétes (positív) szög alatt negatív értelemben fordulni és a ϑ szögsík egyik oldalán positív, a másikon negatív szögek számítandók.

Tartalom.

. — .

1907 XII/28 Csizhegyi L.