II

A Mekanika Alaptanai.

Előadta
Dr. Farkas Gyula
e. ny. r. tanár.

az 1913/14 tanév
második felében.

Egyenlőtlenségek. (Matematikai előzmény.)

1.) Az egyszerű egyenlőtlenségek fogalma és jelölésmódja.

Az $u_1, u_2, \ldots, u_n$ változók valamely homogén lineáris függvényét jelöljük θ-val, úgy, hogy

$$\theta = A_1 u_1 + A_2 u_2 + \cdots + A_n u_n,$$

ahol az A együtthatók függetlenek az u-któl. Ha az u változók értéktartományát azzal korlátozzuk, hogy a θ ne lehessen negatív ($\theta \geqq 0$ legyen), vagy azzal, hogy a θ ne lehessen pozitív ($\theta \leqq 0$ legyen), vagy azzal, hogy a θ se pozitív se negatív ne lehessen ($\theta = 0$ legyen), akkor azt mondjuk, hogy egyszerű reláció áll fenn az u változók között. És pedig a két első korlátozásban azt mondjuk, hogy egyszerű egyenlőtlenség áll fenn az u változók között, a harmadik esetben azt, hogy egyszerű egyenlet áll fenn közöttük. Ha pedig úgy szorítjuk meg az u-k értéktartományát, hogy egynél több egyszerű relációt rovunk ki reájuk, akkor ezen relációrendszert egyszerű relációrendszernek mondjuk.

Azt a követelést, hogy az u változók valamely függvénye ne lehessen pozitív, mindig azzal a követeléssel helyettesíthetjük, hogy az u

változók ellenkező előjelű függvénye ne lehessen nega- tív: legyen ugyanis kiróva, hogy az ü változók Φ függ- vénye ne lehessen pozitív, $\Phi \leqq 0$ legyen. Adjuk mind- két oldalhoz a $-\Phi$ függvényt s azt kapjuk, hogy $-\Phi \geqq 0$ legyen. Viszont ebből az egyenlőtlenségből az előbbi kö- vetkezik az által, hogy mindkét oldalához a Φ függ- vényt adjuk. A két egyenlőtlenség tehát ekvivalens. Eszerint minden egyenlőtlenséget azzal a követelé- sel fejezhetünk ki, hogy a változók bizonyos függvénye ne legyen negatív. Minden egyszerű egyenlőtlenség is így fejezhető tehát ki és majd rendszerint ezt a kife- jezésmódot követsük.

2.) A független egyenlőtlenségek száma.

Valamely változók közt fennálló relációkat akkor mondunk egymástól függetleneknek, vagy röviden függetleneknek, hogyha bármelyikük elhagyása enyhít- bé teszi a változók értéktartományának megszorítá- sát; a meghagyottak rendszere kevesebbet követel, mint az összesek rendszere.

Állítható, hogyha a változók száma nagyobb, mint 2, akkor közöttük akárhány független egyen- lőtlenség lehetséges. E tétel belátása végett nyilván- képen elég lesz, arról győződni meg, hogy ha a vál- tozók száma 3, akkor már akárhány független egyszerü egyenlőtlenség róható ki reájuk.

Gondoljunk egy gúlát, amelynek a csúcsa köze-
lünkben van, oldalai a végtelenbe terjeszkednek s csupa
kiszögellő élei vannak. Legyen most, hogy egy pont azt
a kirovást viseli, hogy a gúla belsejében, vagy annak
a fölületén foglaljon helyet. E követelés korlátai közt
bárhol lehessen, egyebütt sehol.

Nyilvánvaló, hogy ez a követelés a következő-
vel helyettesíthető: a pont mindegyik gúlalap sík-
jának azon az oldalán lehessen csak, amelyen a
gúla van, mi mellett magukon a lapokon is le-
het; egyen, vagy kettőn, vagy valamennyin, a má-
sodik esetben élen, a harmadik esetben a csúcs-
ban. Ha most a gúla csúcsából a mi pontunk-
ba vektort húzunk, ez a vektor egyetlen gúlalap
befelé mutató normálisával sem fog $\pi:2$-nél
nagyobb szöget képezni. Ez szükséges és elégséges
föltétele annak, hogy a pont mindegyik lapnak
a gúlás oldalán, vagy magán a lapon le-
hessen, tehát a vektor ξ, η, ζ komponensei közt
annyi egyenlőtlenségünk van, ahány a gúla-
lap. Ha a gúla n oldalú, úgy n számú egyen-
lőtlenségünk vagyon. Ugyanis $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$-val jelöl-
ve az i-dik gúlalapnak a gúlás oldal felé mutató

normálisát, az

$$\alpha_1\xi+\beta_1\eta+\gamma_1\zeta\geqq 0$$
$$\alpha_2\xi+\beta_2\eta+\gamma_2\zeta\geqq 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\alpha_n\xi+\beta_n\eta+\gamma_n\zeta\geqq 0$$

egyenlőtlenségeink vannak. Ezek függetlenek egymástól. Valóban: elhagyni egy egyenlőtlenséget annyit jelent, mint elhagyni a gúla képzésében egy ~~lap~~ síkot. Az ekképen keletkező $n-1$ oldalú gúlának a térfogata egy három oldalú gúla térfogatával nagyobb, mint a régi (n oldalú) gúla térfogata, tehát most a pont ~~egy~~ ezen három oldalú gúlában is helyt foglalhat, a csúcsból ezen három oldalú gúla pontjaiba nyúló vektorok komponensei is kielégítik az eggyel megkevesbült egyenlőtlenségeket.

Tegyük azt az észrevételt, hogy végtelen sok független egyenlőtlenségnek csak úgy van határozott értelme, ha az tetszésre adott pontosság szerint véges számú egyenlőtlenséggel helyettesíthető. Itt pedig mindig csak határozott értelmű relációrendszereket fogunk számon tartani, s más félékre nem is gondolunk.

3.) Az egyszerű egyenlőtlenségek alaptétele.

Ha az $u_1, u_2, \ldots, u_n$ változókat az

$$1\quad \begin{cases} A_{11}u_1 + A_{12}u_2 + \cdots + A_{1n}u_n \equiv \Theta_1 \geqq 0, \\ A_{21}u_1 + A_{22}u_2 + \cdots + A_{2n}u_n \equiv \Theta_2 \geqq 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

egyenlőtlenségek szorítják meg és ha ezen egyenlőtlenségek minden megoldásával teljesül az

$$2\qquad A_1u_1 + A_2u_2 + \cdots + A_nu_n \equiv \vartheta \geqq 0$$

egyenlőtlenség, akkor ezt az egyenlőtlenséget amazok következményének mondjuk.

Az a fontos tételünk van róla, hogy mindig léteznek olyan nem negatív $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ multiplikátorok, függetlenek az u-któl, hogy ha adott Θ_1, $\Theta_2, \ldots$ egyszerű függvényeket ezen multiplikátorokkal rendre megszorozva összeadjuk, akkor identikusan a ϑ egyszerű függvényt kapjuk:

$$3\qquad \vartheta \equiv \lambda_1\Theta_1 + \lambda_2\Theta_2 + \cdots$$

Ezt a tételt nevezzük az egyszerű egyenlőtlenségek alaptételének.

Mielőtt ezen tétel kimutatásához fognánk, tegyük azt az észrevételt, hogy, ha oly Θ is van, amely pozitív együtthatóval szorozva $\equiv \vartheta$, akkor már a többi Θ egyenlőtlenségének is következménye a ϑ egyenlőtlensége, mert ha a többi θ nem negatív értéke mellett ϑ negatív is lehetne, akkor a teljes $\mathfrak{I}$ alatti rendszer is megengedné, hogy ϑ negatív lehessen.

4.) Az egyszerű egyenlőtlenségek alaptételének kimutatása.

A 2.) végén tett észrevétel értelmében elég, hogy véges számú független egyenlőtlenségekre szorítkozzunk az $\mathfrak{I}$ alatt. A 3.) végén tett észrevétel értelmében pedig elég, hogy oly egyenlőtlenségekre szorítkozzunk $\mathfrak{I}$ alatt, amelyek egyikének a baloldala sem olyan, hogy valamely negatív együtthatóval szorozva a következményes egyenlőtlenség baloldalával legyen azonos. Nyilvánképen azt is kiköthetjük, hogy az $\mathfrak{I}$ csupa egymástól független egyenlőtlenségeket tartalmazzon.

Bizonyításunkat kisebb számú változóról nagyobb számúra vont következtetéssel végezzük. Mivel arra az esetre, hogy csak egy változónk van, közvetlenül felismerhető a tétel helyessége, úgy ama következtetéssel teljesen elintéztük lesz a bizonyítást.

E következtetés érdekében tekintsük speciálisan az $\mathfrak{I}$-nek azon megoldásait, amelyekben θ_1

eltűnik. Ezekben a megoldásokban is teljesül 2), mert 6-nek minden megoldásában teljesül. Most elimináljuk a $\Theta_1=0$ egyenlet segélyével az egyik u változót a Θ_2, Θ_3, stb. meg a ϑ függvényből. Ez által a $\Theta_1=0$ egyenletet már figyelembe vettük. Az eliminálást akkép intézzük, hogy úgy választunk meg az u-któl független μ_2, μ_3 stb. meg μ faktorokat, hogy a

$$\Theta_2+\mu_2\Theta_1, \quad \Theta_3+\mu_3\Theta_1 \text{ stb. meg a } \vartheta+\mu\Theta_1$$

függvények már legfeljebb csak $n-1$ számú u változót tartalmazzanak. Mivel $\Theta_1=0$, úgy 6 szerint

$$\Theta_2+\mu_2\Theta_1 \geqq 0, \quad \Theta_3+\mu_3\Theta_1 \geqq 0, \dots$$

és ezek minden megoldásában:

$$\vartheta+\mu\,\Theta_1 \geqq 0.$$

Megpedig a $\Theta_1=0$ egyenlet már a puszta eliminálás rendén mindezekben számon van tartva.

Mindezen egyenlőtlenségek legfeljebb $n-1$ számú változókat tartalmaznak. Föltévén tehát, hogy n-nél kevesebb változóra áll a tételünk: vannak olyan $\alpha_2, \alpha_3, \dots$ nem negatív szorzók, – az u-któl függetlenek –, hogy

$$\vartheta+\mu\,\Theta_1 \equiv \alpha_2(\Theta_2+\mu_2\Theta_1)+\alpha_3(\Theta_3+\mu_3\Theta_1)+\dots$$

tehát valamely A faktor szerint

$$\textcircled{\small 4}_1 \qquad \vartheta \equiv A\Theta_1 + a_2\Theta_2 + a_3\Theta_3 + \dots$$

ahol az a_2, a_3 stb. faktorok az u-któl független nem negatívok, de az A felöl csak annyit tudunk, hogy az u-któl ö is független. Hasonlóan következik az u-któl független, nem negatív $b_3, b_4 \dots$ szerint és az u-któl független B-k szerint, hogy

$$\textcircled{\small 4}_2 \qquad \vartheta \equiv b_1\Theta_1 + B\Theta_2 + b_3\Theta_3 + b_4\Theta_4 + \dots,$$

továbbá megfelelő értelmezéssel

$$\textcircled{\small 4}_3 \qquad \vartheta \equiv c_1\Theta_1 + c_2\Theta_2 + C\Theta_3 + c_4\Theta_4 + \dots$$

stb.

Mármost vagy van ezek között olyan identitás, amelyben a nagy betű nem negatívot jelent, vagy nincs. Ha van, akkor a $\textcircled{\small 3}$ ezen identitással elő van állítva, ha nincs ($A, B, C, \dots$ mind negatívok), akkor járjunk el így: Válasszunk olyan nem negatív b_1^0, c_1^0, stb. az u-któl független értékeket, hogy $b_1^0 A + b_1 = 0$, $c_1^0 A + c_1 = 0$, stb. legyen és akkor a

$$\frac{b_1^0 \textcircled{\small 4}_1 + \textcircled{\small 4}_2}{b_1^0 + 1}, \quad \frac{c_1^0 \textcircled{\small 4}_1 + \textcircled{\small 4}_3}{c_1^0 + 1}, \quad \dots$$

kapcsolásokkal ilyen, eggyel kevesebb azonosságot kapunk:

$$\vartheta \equiv B'\theta_2 + b_3'\theta_3 + b_4'\theta_4 + \dots$$
$$\vartheta \equiv c_2'\theta_2 + C'\theta_3 + c_4'\theta_4 + \dots$$
$$\vartheta \equiv d_2'\theta_2 + d_3'\theta_3 + D'\theta_4 + \dots,$$

amelyekben minden faktor független az u-któl és a kis betűs faktorok nem negatívok.

Ha ezek között nincs olyan, amelyben a nagy betű nem negatívot jelent, akkor ezekből épen olyan módon képezzünk olyanokat, amelyekben nincs θ_2, amily módon ezeket képeztük az előbbiekből. Így folytatva, egyszer csak szükségképen akad oly azonosság, amelyben a nagy betű nem negatívot jelent, mert ha végig egy sem akadna, akkor az utolsó θ mint a ϑ-val negatív együttható szerint arányos állana elő, már pedig az ilyen θ előfordulását eleve kizártuk. Ezzel a tétel be van bizonyítva.

6) Az egyszerű relációk alaptétele.

Tegyük fel, hogy az $u_1, u_2, \dots, u_n$ változók értéktartományának megszorítására egyszerű egyenlőtlenségek és egyszerű egyenletek szolgának:

$$
5 \quad \begin{cases}
A_{11}u_1 + \dots + A_{1n}u_n \equiv \theta_1 \geqq 0 \\
A_{21}u_1 + \dots + A_{2n}u_n \equiv \theta_2 \geqq 0 \\
\dots\dots\dots\dots \\
A'_{11}u_1 + \dots + A'_{1n}u_n \equiv \theta'_1 = 0 \\
A'_{21}u_1 + \dots + A'_{2n}u_n \equiv \theta'_2 = 0 \\
\dots\dots\dots\dots
\end{cases}
$$

és tegyük fel, hogy ezek minden megoldásában teljesül az

$$
6 \qquad A_1u_1 + \dots + A_nu_n \equiv \vartheta \geqq 0
$$

egyszerű egyenlőtlenség. Akkor az utóbbit az előbbiek következményesének mondjük. Az a tantételünk van róla, hogy mindig léteznek olyan nem negatív h_1, h_2, stb, multiplikátorok és olyan $h'_1, h'_2, \dots$ stb multiplikátorok, mindannyian függetlenek az u-któl, hogy

$$
7 \qquad \vartheta \equiv h_1\theta_1 + h_2\theta_2 + \dots + h'_1\theta'_1 + h'_2\theta'_2 + \dots,
$$

azaz, hogy megszorozván a nem negatív h multiplikátorokkal rendre az adott egyenlőtlenségek baloldalait és megszorozván a többi multiplikátorokkal rendre az egyenletek baloldalait, a szorzatok összege minden gondolható u érték mellett a következményes egyenlőtlenség baloldalával egyenlő." Ezt a tételt nevezzük az egyszerű relációk alaptételének.

6.) Az egyszerű relációk alaptételének kimutatása.

Az egyenleteket két-két ellentétes egyenlőtlenség alakjában írjuk fel. Akkor az adott relációrendszer S a következő:

$$
\begin{array}{lll}
\theta_1 \geqq 0, & \theta_2 \geqq 0, & \theta_3 \geqq 0, \; \dots \\
\theta_1' \geqq 0, & \theta_2' \geqq 0, & \theta_3' \geqq 0, \; \dots \\
-\theta_1' \geqq 0, & -\theta_2' \geqq 0, & -\theta_3' \geqq 0, \; \dots
\end{array}
$$

Itt most már csupa egyenlőtlenségeink vannak, úgy az egyszerű egyenlőtlenségek alaptétele 3.) szerint: vannak oly λ_1, λ_2, stb. μ_1, μ_2, stb. ν_1, ν_2 stb. nem negatív multiplikátorok, függetlenek az u-któl, hogy

$$\vartheta \equiv \lambda_1\theta_1 + \lambda_2\theta_2 + \dots + \mu_1\theta_1' + \mu_2\theta_2' + \dots - \nu_1\theta_1' - \nu_2\theta_2' \dots$$

azaz

$$\vartheta \equiv \lambda_1\theta_1 + \lambda_2\theta_2 + \dots + (\mu_1-\nu_1)\theta_1' + (\mu_2-\nu_2)\theta_2' + \dots$$

Ezen azonosságban a λ multiplikátorok nem negatívok, azonban a $(\mu-\nu)$-féle multiplikatorokról ez nem állítható; amellett, hogy μ és ν nem negatívok, előfordulhat, hogy egy-egy $(\mu-\nu)$ féle multiplikátor szükségképen negatív.

Tegyük azt az észrevételt, hogyha $\vartheta=0$ volna $\mathfrak{S}$ minden megoldásában, akkor is állítható, hogy $\vartheta \geqq 0$ az $\mathfrak{S}$ minden megoldásában, mert ha eltűnik a ϑ, akkor szükségkép nem negatív az.

7.) Összefüggés egy egyszerű relációrendszernek és valamely következményének az együtthatói között.

A $\mathfrak{Z}$ alatt állított azonosság részletesen írva ez:

$$
\begin{aligned}
&A_1 u_1 + A_2 u_2 + \cdots + A_n u_n \equiv \\
\equiv\, & h_1 (A_{11} u_1 + A_{12} u_2 + \cdots + A_{1n} u_n) + \\
+\, & h_2 (A_{21} u_1 + A_{22} u_2 + \cdots + A_{2n} u_n) + \\
+\, & \cdots\cdots\cdots\cdots \\
+\, & h'_1 (A'_{11} u_1 + A'_{12} u_2 + \cdots + A'_{1n} u_n) + \\
+\, & h'_2 (A'_{21} u_1 + A'_{22} u_2 + \cdots + A'_{2n} u_n) + \\
+\, & \cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

Minthogy ez az u változók minden gondolható értéke mellett érvényes egyenlet, ennél fogva minden egyes u változó baloldali e-

együtthatója szükségképen a jobboldali együttha-
tóinak az összegével egyenlő. Valóban, szabad
például $u_i = 1$ írni és a többi u változót zérus-
sá tenni, miáltal már egyenesen az

$$A_i = h_1 A_{1i} + h_2 A_{2i} + \dots + h'_1 A'_{1i} + h'_2 A'_{2i} + \dots$$

vonatkozáshoz jutunk, s ez minden i indexre
vonatkoztatva, nyilvánképen szükséges és elégsé-
ges az identitás kielégítésére: akkor, hogy a 6
következménye lehessen az 5-nek, szükséges
és elégséges, hogy létezzenek olyan h nem ne-
gatív multiplikátorok és olyan h' multiplikā-
torok, – függetlenek az u-któl, hogy

$$\begin{cases} A_1 = h_1 A_{11} + h_2 A_{21} + \dots + h'_1 A'_{11} + h'_2 A'_{21} + \dots \\ A_2 = h_1 A_{12} + h_2 A_{22} + \dots + h'_1 A'_{12} + h'_2 A'_{22} + \dots \\ \dots \end{cases}$$

legyen.

8) Egyszerű relációrendszer para- metrumos megoldása.

Egy egyszerű relációrendszer mindig
megoldható oly paramétrumok egyszerű
függvényeivel, amely paramétrumok vagy

mind egészen tetszésszerintiek, vagy mind tetszésszerinti nem negatívok, vagy némelyeik egészen tetszésszerintiek, a többiek tetszésszerinti nem negatívok; általánosan a v és w változóktól független L és M együtthatók rendén

$$\begin{cases} u_1 = L_{11} v_1 + L_{12} v_2 + \dots + M_{11} w_1 + M_{12} w_2 + \dots \\ u_2 = L_{21} v_1 + L_{22} v_2 + \dots + M_{21} w_1 + M_{22} w_2 + \dots \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{cases}$$

féle függvényekkel, amelyekben a v változók egészen tetszésszerintiek, a w változók tetszésszerinti nem negatívok, esetleg az M együtthatók, vagy az L együtthatók mind zérusok, egyébként pedig mindig olyanok az L és M együtthatók, hogy ezen függvények az adott egyszerü relációkat, pl. az 5 alatt gondoltakat és csakis ezeket s következményeiket identikusan kielégitik.

Ezen előadásokon csak olyan esetekben fogjuk alkalmazni ezt a tételt, amely esetekben az adott relációrendszer baloldalai függetlenek egymástól, mikor is az adott relációk száma legfeljebb akkora, mint az u változók száma.

Erre az esetre szorítkozunk tehát a tétel kimutatásában, ami ebben az esetben igen egyszerü. Az adott egyenlőtlenségek baloldalát egészen határozatlanul hagyott nem negatív skalárisokkal egyenlőknek írjuk. Most már csupa egyenletünk van. Az u-kra, mint ismeretlenekre nézve előállítjuk ezen egyenletek parametrumos megoldását, u. i. az u változók mint egyszerü függvények gyanánt, amit általában egészen tetszés szerinti parametrumokkal tehetünk. Az u-knak ily módon előkerülő kifejezései egyszerü függvényeik az adott egyenlőtlenségek baloldalaival egyenlített nem negatív határozatlanoknak is, amelyek ugyancsak mint parametrumok jelentkeznek az u változók kifejezéseiben. Ezen kifejezések nyilvánvalóan identikusan kielégítik az adott relációrendszert, mert az adott egyenlőtlenségek baloldalait a határozatlan nem negatívokkal teszik egyenlővé, az adott egyenletek baloldalait pedig zérussal teszik egyenlővé. De csakis az adott relációrendszert és annak a következményeit elégítik ki identikus módon és más egyszerü relációkat nem, mert bármely egyszerü reláció identikus kielégítése abban állhat csak, hogy a baloldala a nem negatív paramétru-mok nem negatív együtthatós egyszerű függvényévé váljék, ami pedig az adott rendszer baloldalainak nem negatív együtthatós egyszerű függvénye egyaránt követeli azon egyszerű reláció baloldalát, tehát következményes relációt feltételez.

Helyhatározórendszer és időszámítás.

1.) Közönségesen derékszögű koordinátarendszert használunk helyhatározására és rendszerint valamely változatlan materiális alakzathoz rögzítjük midőn aztán természetes koordinátarendszernek mondjuk. Különös megjegyzés híján koordinátarendszeren mindig természetes koordinátarendszert fogunk érteni és pedig mindig jobbra fordulót.

2.) Közönségesen minden jelenség vizsgálatában attól az időhatártól számítjuk az elmult időt, amely időhatáron vizsgálni kezdjük a jelenséget s ezen elmult idő mekkoraságát általánosan mindig t betűvel jelöljük. E szerint a jelenség vizsgálatának a kezdetén $t=0$, azután folyvást nől a t és úgy szakadatlanul növekedő skalárisaz. De a t betűt a t időtartam végének, tehát időhatárnak a jelölésére is használjuk. Hogy melyik értelemben gondoljuk, kitűnik az beszédünk módjából. Továbbá majd időhatár helyett többnyire pillanatot mondunk, ámbár ez a szó a maga eredete szerint igen rövid időtartamot jelent.

Az idő valamely függvényének (vektornak, vagy skalárisnak) az idő szerint való változásán, deriválhatóságán, deriváltján mindig csupán a növő idő értelmében való egyoldalú változását, deriválhatóságát, deriváltját fogjuk érteni.

3.) Ezen előadásokban minden helyhatározó rendszerünkben ugyanazt az időszámítást fogjuk használni és egy pontnak a helyén mindig minden helyhatározó rendszerünkben ugyanazon egyéni ponthelyet fogjuk érteni. Ha tehát (K) koordinátarendszerben t pillanatban (K') koordinátarendszer origójának a koordinátái a, b, c és tengelyeinek az iránykoszinuszai rendre $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, meg $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$, meg $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ és ha egy pont koordinátái t pillanatban a (K) rendszerben x, y, z és a (K') rendszerben

x', y', z'; akkor

$$x' = \alpha_1(x-a)+\beta_1(y-b)+\gamma_1(z-c)$$

$$y' = \alpha_2(x-a)+\beta_2(y-b)+\gamma_2(z-c)$$

$$z' = \alpha_3(x-a)+\beta_3(y-b)+\gamma_3(z-c)$$

Ha a (K) és (K') koordinátarendszer viszonylagos helyzete változik az idővel, akkor transzformációjuk együtthatóinak a rendszere (legalább egy együttható) nyilvánvalóképen változik az idővel. Emellett két természetes koordinátarendszerről mindig föltehető, hogy transzformációjuk együtthatói a múló időnek legalább kétszer egyenletesen deriválható függvényeik.

Pontmozgás.

4.) Állapodjunk meg abban, hogy akkor mondunk itt regulárisnak egy vonalat, ha vagy folytonos egyenes vonal, vagy folytonos görbe vonal, amelynek mindenütt határozott normális síkja, határozott görbületi síkja és határozott görbületi sugara van s amelynek a mentén az ő normális síkja és görbületi síkja a fekvését, görbületi sugara pedig nemcsak a fekvését, de a hosszát is csak folytonos módon változtatja.

5.) Egy természetes koordinátarendszerben a testek mozgását mindig oly pontok mozgásaival jellemezhetjük a tapasztalás szerint, amely pontok minden időtartamban reguláris vonalat, vagy reguláris vonalakból álló folytonos vonalat írnak le a térben és ha egy pont egy vonalat, vagy annak egyes részeit egyszerinél többször írná le, akkor véges nagy időben az ismétlések száma is véges. Ezen felül még olyanokul is megválaszthatók mindig ezek a pontok, hogy bármely pillanatig megtett utjaik hossza (egy-egy ponttól rendre leírt vonalelemek összes hosszúsága) folytonos módon változva nő a múló idővel, egyenletesen deriválható és általában legalább kétszer egyenletesen deriválható a múló idő szerint. Mindig ezen tulajdonságok rendén való pontmozgásokkal fogunk itt foglalkozni s az ilykép mozgó pontokat materiális pontoknak, az általuk leírt vonalakat pályájuknak fogjuk mondani.

Elmozdulás.

6.) Egy materiális pont t_1 pillanati helyéből annak későbbi t_2 pillanati helyébe nyiló vektort a $t_2 - t_1$ idő alatt létesült elmozdulásának nevezzük. A mozgó pontnak kezdet óta t pillanatig létesült elmozdulását, azaz t-0 idő alatt létesült elmozdulását speciálisan t pillanati totális elmozdulásának mondjuk.

Az 5.) artikulusból következő matematikai tétel, hogy a minden pillanatban számba vett totális elmozdulás a múló időnek egyértékű, folytonos és általában legalább kétszer egyenletesen deriválható függvénye, ugyanis a pálya reguláris részein (4. ar.) általában szükségkép legalább kétszer egyenletesen deriválható függvénye annak. A legközelebbiekben ezekről fogunk meggyőződést szerezni.

7.) A totális elmozdulás egyértékű folytonos függvénye a múló időnek. Hogy egyértékű az kitűnik abból, hogy minden pillanatban határozott helyből határozott helybe nyiló vektor az, t. i. t pillanatban a pont kezdeti helyéből a pont t pillanati helyébe nyiló vektor, amely helyek pedig mindig teljesen határozottak.

De folytonos függvénye is a múló időnek a totális elmozdulás, mert kis idő alatt a mozgó pont utjának a hossza mindig csak kicsivel változhatik meg (az 5. ar. szerint): a totákis elmozdulásának a végs a kis idő mulva a közel van az előbbi helyéhez, tehát a totális elmozdulás a kis idő alatt a kis vektorral változik meg.

8.) A totális elmozdulás általában egyenletesen deriválható függvénye a múló időnek. Olyan időtartamot jelentsen $t_2 - t_1$, amely alatt valamely reguláris pályarészen folyvást előrehaladva mozog a pont, úgy hogy ezen idő alatt minden helyen csak egyszer mozog át. Nyilvánvalóképen elég lesz annak a kimutatása, hogy a t_1-től t_2-ig terjedő időközben egyenletesen deriválható a totális elmozdulás.

Most a t pillanat t_1 és t_2 közötti pillanat legyen, s ezen pillanatban O jelölje a mozgó pont helyét a reguláris vonalrészen és dt időelemmel későbbi $(t+dt)$ pillanatban O' jelölje.

A dt időelemben létesült OO' elmozdulás a kicsiny (7. sz.) és meghatározott O helyből pontosan, vagy a pontosan határozott irányú elemi vektor az (az 5. sz. értelmében), mert a pálya O helyi főérintőjének egyik irányában mutat vagy pontosan, vagy a pontosság szerint, ugyanis a főérintő azon irányában, amelyben a pont tovább mozdul. Ugyanilyen irányú az $\frac{\overline{OO'}}{dt}$ vektor, mert $dt > 0$. Az OO' elemi vektor nagysága pedig pontosan, vagy ∞ nagy pontosság szerint az O helytől az O' helyig megtett elemi út hossza. Ha tehát a reguláris pályarész O helyű fő érintőjének az iránykoszinuszai arra felé, amerre tovább mozdul a pont, α, β, γ, ha továbbá a pont útjának a t pillanati hossza s és ennek az elemi megváltozása dt időelemben ds, akkor

$$\frac{\overline{OO'}}{dt} = (\alpha, \beta, \gamma)\frac{ds}{dt}$$

∞ nagy pontosság szerint. Azonban OO' nem más, mint a t pillanati totális elemi elmozdulás megváltozása dt időelemben. Ha tehát a mozgó pont t pillanati totális elmozdulását $\mathfrak{r}$ és ennek az elemi megváltozását $d\mathfrak{r}$ jelöli a dt időelemben, akkor

$$\frac{d\mathfrak{r}}{dt} = (\alpha, \beta, \gamma)\frac{ds}{dt}$$

Minthogy a $\frac{ds}{dt}$ differenciálhányados és a $t_2 - t_1$ időben az (α, β, γ) egységvektor is minden pillanatban folytonos határozott függvénye (az 5. az. szerint) a múló időnek, ennélfogva a $t_2 - t_1$ idő folyamán a totális elmozdulás egyenletesen deriválható függvénye a múló időnek, tehát legalább általában szükségképp egyenletesen deriválható függvénye a múló időnek a mozgó pont pályáján.

9. A totális elmozdulás általában kétszer egyenletesen deriválható függvénye a múló időnek. Most is azt jelentse t_2-t_1, O, O' és t, mint az előbbi artikulusban, de kikötve még (t_2-t_1)-re azt is, hogy abban $\frac{d^2s}{dt^2}$ folytonos. Elég kimutatnunk, hogy a t_2-t_1 időkörben kétszer egyenletesen deriválható a totális elmozdulás.

A t pillanati s totális elmozdulás idő deriváltjának az előbbeni artikulusban talált kifejezéséből látjuk, hogy ha az (α,β,γ) tangenciális egységvektor vagy állandó, vagy egyenletes deriválhatósággal változik a múló idővel a t_2-t_1 időkörben leírt pályarész mentén, akkor a $\frac{ds}{dt}$ derivált is így változik, mert $\frac{ds}{dt}$ az egész pályarészen egyenletesen deriválható függvénye a múló időnek. Az O' helyen (α',β',γ')-vel jelölve a pálya tangenciális egységvektorát (a továbbmozdulás értelmében): azt kell vizsgálnunk, hogy az

$$\frac{(\alpha',\beta',\gamma')-(\alpha,\beta,\gamma)}{dt}$$

hányados vagy pontosan, vagy végtelen nagy pontosság szerint a múló idővel folytonosan változó határozott vektor-e a pályarészen? Ha ez a reguláris pályarész egyenes, akkor $(\alpha',\beta',\gamma')=(\alpha,\beta,\gamma)$ annak a mentén, tehát hányadosunk állandó vektor $=0$.

Tegyük fel, már most, hogy a reguláris pályarész görbe-vonal. Húzzuk ki mindkét egységvektort az O helyből, midőn is $(\alpha,\beta,\gamma)\equiv OA$, $(\alpha',\beta',\gamma')\equiv OB$ legyen. Akkor

$$(\alpha',\beta',\gamma')-(\alpha,\beta,\gamma)\equiv AB.$$

s az AB vektor egyenlőszárú háromszög harmadik oldalát teszi. A materiális pontok mozgásának az általános tulajdonságaiból (5. art.) folyólag az AOB szög végtelen kicsiny s az AB vektor ∞ nagy pontosság szerint határozott irányú, mert az iránya ∞ nagy pontosság szerint az O helyből az O helyhöz tartozó görbületi centrumba mutató iránnyal egyezik. Különbségi hányadosunk iránya azonos AB irányával, tehát ∞ nagy pontosság szerint ugyancsak határozott irány, az O helyből az O hoz tartozó görbületi centrumba mutató irány ∞ pontosan. Az AB vektor nagysága ∞ pontosság szerint az OA és OB egységvektorok ∞ kis szögüknek a hossza. Ha tehát az O helyhöz tartozó görbületi sugár hossza R, és az OO' vonalelem hossza ds, akkor AB nagysága ∞ pontosan $\frac{ds}{R}$. Ezek szerint ∞ nagy pontossággal áll, hogy ha az O helyből a hozzá tartozó görbületi centrumba mutató egységvektor (λ,μ,ν), akkor

$$\frac{AB}{dt}=(\lambda,\mu,\nu)\frac{ds}{R\,dt}$$

azaz
$$\frac{d(\alpha,\beta,\gamma)}{dt}=\frac{(\lambda,\mu,\nu)}{R}\,\frac{ds}{dt}$$
a pontosan. A $\frac{ds}{dt}$ az úthossz deriváltja, mindenütt folytonos határozott függvénye a múló időnek és a reguláris pályarészen az R görbületi sugár és a (λ,μ,ν) egységvektor is az (5. sz.), tehát az (α,β,γ) tangenciális egységvektor deriváltja is. Következik az előrebocsátottak értelmében, hogy $\frac{dv}{dt}$ a t_2-t_1 időtartamban a múló idő egyenletesen deriválható függvénye. Mégpedig az előbbi artikulus végéről, utolsó egyenletünk figyelembevételével:
$$\frac{d^2v}{dt^2}=(\alpha,\beta,\gamma)\frac{d^2s}{dt^2}+\frac{(\lambda,\mu,\nu)}{R}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$$
((α,β,γ) a tangenciális irány egységvektora a továbbmozdulás értelmében, (λ,μ,ν) a görbületi centrumba mutató egységvektor, R a görbületi sugár hossza, s az úthosszúság, minden t pillanatban.)
Szerint tényleg, általában kétszer deriválható egyenletesen a totális elmozdulás a pálya mentén.

Pontok sebessége.

10.) A totális elmozdulás első időderiváltját a mozgó pont sebességének nevezzük. Szerint $\frac{dv}{dt}$ a mozgó pont sebessége t pillanatban. Rövidebben az $\mathfrak{v}$ betű fölé helyezett pont által jelöljük:

$$\frac{d\mathfrak{r}}{dt} \equiv \dot{\mathfrak{r}}$$

Ha a pálya t pillanati fő érintője arra felé, amerre a pont tovább mozdul (α, β, γ) irányú, a t pillanatig megtett út hossza pedig s és ennek az időderiváltját röviden ugyancsak egy föléje tett pont által jelöljük, akkor a 8. artikulus végéről

$$\dot{\mathfrak{r}} = (\alpha, \beta, \gamma)\dot{s}$$

Az $\dot{s}$ differenciálhányadost az út növekedési sebességének mondjuk. Mivel $dt > 0$, $ds \geqq 0$, úgy $\dot{s} \geqq 0$. Ezerint a mozgó pont sebessége oly vektor, amelynek a nagysága mindig az út növekedési sebessége, az iránya pedig tangenciális a pályához a továbbmozdulás értelmében.

11.) Minthogy az $(\alpha, \beta, \gamma)ds$ elemi vektor pontosan a mozgó pontnak a dt időelemben létesült elemi elmozdulása, mondhatjuk, hogy a mozgó pont sebessége a dt időelemben létrejött elemi elmozdulásának és a dt időelemnek a hányadosa, mert

$$\dot{\mathfrak{r}} = (\alpha, \beta, \gamma)\dot{s} = \frac{(\alpha, \beta, \gamma)ds}{dt} = \frac{(\alpha ds, \beta ds, \gamma ds)}{dt}.$$

12.) Ha a mozgó pont kezdeti helye x_0, y_0, z_0 és a t pillanati helye x, y, z, akkor a t pillanati totális elmozdulás [ának] komponensei: $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$, úgy, hogy

$$v = (x - x_0, y - y_0, z - z_0).$$

Mivel tehát x_0, y_0, z_0 konstansok, úgy

$$\frac{dv}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right),$$

ami azt jelenti, hogy a pont t pillanati sebességének a komponensei a pont t pillanati koordinátáinak az időderiváltjai. Ezeket is a betű fölé írt pont által jelölve meg röviden:

$$\dot{v} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$$

Mint látjuk a mozgó pont sebessége az ő origói vektorának az időderiváltja is, mert a pont origói vektora $= (x, y, z)$.

13.) Úgy is eljuthatunk ezen kifejezéshez, hogy az $\dot{v}$ sebességet, mint elemi elmozdulásnak és időelemnek a hányadosát tekintjük (11. az.) és számbavesszük, hogy az elemi elmozdulásnak az αds, βds, γds komponensei a pont $t + dt$ pillanati és t pillanati koordinátáinak a különbségei t.i. annálfogva, hogy a pont t pillanati helyéből, annak a $t+dt$ pillanati helyébe nyúló vektor az elemi elmozdulás. Azon koordináta különbségek rendre dx, dy, dz, tehát

$$\alpha ds = dx, \beta ds = dy, \gamma ds = dz$$

Következőleg (11. az.!):

$$v = \frac{(dx, dy, dz)}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$$

Az $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ deriváltakat a koordináták változási sebességének mondjuk.

14.) A 10. és 12. artikulus értelmében a mozgó pont sebességének a nagysága

$$\mathrm{abs}\, v \equiv \dot{s} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2},$$

az iránykoszinuszai pedig

$$\alpha = \frac{\dot{x}}{\dot{s}}, \quad \beta = \frac{\dot{y}}{\dot{s}}, \quad \gamma = \frac{\dot{z}}{\dot{s}}$$

15.) Minthogy (5. az.) az $\dot{s}$ a múló idő folytonos függvénye, ennélfogva a sebesség irányának lehetnek csak folytonosságszakadásai, mint az idő függvényének, nevezetesen olyankor, amidőn a pálya vonal megtörik, vagy amidőn a mozgó pont vissza felé kezd mozogni a pályáján. Nem jutunk azonban ellenkezésbe a tapasztalással, ha feltesszük a materiális pontokról, hogy ilyenkor a sebességük nagysága mindig zérus. Ezt tényleg szintén mindenkorra tesszük fel. Ezszerint a vektortan definicióinak értelmében (VT. 46. sz.) a sebesség minden pillanatban folytonos függvénye a múló időnek s így a komponensei is folytonos függvényei a múló időnek. Valóban, ha t' pillanatban vesszővel írjuk az előforduló mennyiségeket akkor

$$v' - v = (\alpha', \beta', \gamma')\dot{s}' - (\alpha, \beta, \gamma)\dot{s}$$

Ha t'-t végtelen kicsiny és dt-vel jelöljük, akkor

$$\dot{s}' = \dot{s} + \frac{d\dot{s}}{dt}dt$$

és következőleg

$$v' - v = (\alpha' - \alpha, \beta' - \beta, \gamma' - \gamma)\dot{s} + (\alpha', \beta', \gamma')\frac{d\dot{s}}{dt}dt.$$

Ha tehát folytonossághiánya van is valamely t pillanatban az (α, β, γ) egységvektornak, de ha az ily pillanatban $\dot{s} = 0$, akkor is végtelen kicsiny a sebességnek ∞ kis idő alatt való $v' - v$ megváltozása, mert $\frac{d\dot{s}}{dt}$ soha sem ∞ nagy.

Pontok gyorsulása.

16.) A sebesség időderiváltját a mozgó pont gyorsulásának nevezzük. Szerint $\frac{d\dot{v}}{dt}$ a mozgó pont gyorsulása t pillanatban. Egyszersmind a t pillanati totális elmozdulás második időderiváltja ez s röviden az v betű fölé sor mentén írt kettős pont által jelöljük.

$$\frac{d\dot{v}}{dt} \equiv \frac{d^2 v}{dt^2} \equiv \ddot{v}$$

Ha a pálya fő érintőjének az egységvektora a t pillanati helyen arra felé, amerre a pont tovább mozdul (α, β, γ), a t pillanatig megtett út hossza pedig s és ennek az első időderiváltját $\dot{s}$, második időderiváltját $\ddot{s}$ jelöli, ha továbbá a t pillanati görbületi centrumba mutató irány egységvektora (λ, μ, ν) s a t pillanati görbületi sugár hossza R, akkor a 9. artikulus végéről

$$\ddot{v} = (\alpha, \beta, \gamma)\,\ddot{s} + (\lambda, \mu, \nu)\,\frac{\dot{s}^2}{R}.$$

A mozgó pont gyorsulása tehát két oly vektor összetétele, amelyeknek a következő tulajdonságai vannak. Az egyiknek az

$$(\alpha, \beta, \gamma)\,\ddot{s} \equiv \ddot{v}_T$$

összetevőnek az iránya tangenciális egyezőn, vagy ellenkezően a tovább mozdulásnak (α, β, γ)

irányával aszerint, amint $\ddot{s}$ pozitív, vagy negatív és úgy aszerint, amint a sebesség nagysága ($\dot{s}$) növőben, vagy fogyóban van a dt időelemben (mert $\ddot{s} = \frac{d\dot{s}}{dt}$); a nagysága pedig az s úthossz második időderiváltjának abszolút értéke. Az $\ddot{v}$ másik összetevőjének, a

$$(\lambda, \mu, \nu)\frac{\dot{s}^2}{R} \equiv \ddot{v}_R$$

összetevőnek az iránya egyezik a (λ, μ, ν) radiális iránnyal és a nagysága a sebesség négyzetének s a görbületi sugárnak a hányadosa. Irányukra való tekintettel az elsőt a gyorsulás tangenciális összetevőjének, a másodikat a gyorsulás radiális, vagy centrális, vagy centripetális összetevőjének nevezzük. Röviden amazt a mozgó pont tangenciális gyorsulásának, emezt a mozgó pont radiális, vagy centrális, vagy centripetális gyorsulásának is mondjuk.

17.) A mozgó pont totális gyorsulásának tangenciális, meg radiális (egymásra merőleges) összetevőjén könnyű felismerni a totális gyorsulás következő tulajdonságait: Amikor $R = \infty$, akkor tangenciális a mozgó pont gyorsulása, ugyanis a tangenciális összetevőjével egyenlő; amikor pedig görbül a pont pályája, akkor a pont gyorsulása, mint a pontból kinyúló vektor, mindig a görbülés síkjában van és mindig a görbülés öble (homorúsága) felé mutat, mert egy tangenciális, meg egy radiális vektornak csak ilyen irányú eredője (összege) lehet; annálfogva továbbá, hogy a tangenciális gyorsulás iránya aszerint egyezik, vagy ellenkezik a sebesség irányával, amint a sebesség növőben, vagy fogyóban van, az is könnyen belátható, hogy a pont totális gyorsulása a pont sebességével hegyes, vagy tompa szöget fog be aszerint, amint a sebesség épen növőben, vagy fogyóban van s amikor sem növőben sem fogyóban nincs (tehát $\ddot{s}=0$) akkor a pont gyorsulása radiális, ugyanis a radiális komponensével egyenlő.

18.) A sebességek az

$$\dot{v} = (\alpha, \beta, \gamma)\, \dot{s}$$

kifejezésén végzett deriválással a

$$\frac{d\dot{v}}{dt} = (\alpha, \beta, \gamma)\frac{d\dot{s}}{dt} + \dot{s}\,\frac{d(\alpha, \beta, \gamma)}{dt}$$

alakban jelentkezik a mozgó pont gyorsulása, amiből látható, hogy a tangenciális gyorsulás a sebesség nagyságának a változásából származik, a radiális gyorsulás pedig a sebesség irányának a változásából ered: midőn a sebesség nagysága nem változik, akkor a totális gyorsulás a radiálissal egyenlő" midőn a sebesség iránya nem változik, akkor a totális gyorsulás a tangenciálissal egyenlő".

19.) Minthogy (12. sz.)

$$\frac{dv}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$$

úgy

$$\frac{d^2v}{dt^2} = \left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}\right).$$

rövidített írásmóddal:

$$\ddot{v} = (\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}).$$

A mozgó pont gyorsulásának a komponensei a mozgó pont koordinátáinak második időderiváltjaival egyenlők tehát és maga a gyorsulás az origói vektor második időderiváltja is: a gyorsulás nagysága pozitív négyzetgyöke az $\ddot{x}^2+\ddot{y}^2+\ddot{z}^2$ quadratikus összegnek, s az iránykoszinuszai az ezen négyzetgyökkel osztott $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$ deriváltak.

20.) Az úthossz második idő deriváltját, azután a (totális) gyorsulás tangenciális és radiális összetevőjét is explicite kifejezhetjük a koordinátáki–

dő deriváltjaival, de ehhez az első időderiváltak is szükségesek.

Abból, hogy $\dot{s}^2 = \dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2$ (14. sz.) deriválással $\dot{s}\ddot{s} = \dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y}+\dot{z}\ddot{z}$ következik, tehát az úthossz második időderiváltja

$$\ddot{s} = \frac{\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y}+\dot{z}\ddot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}}$$

A 16-ból a 14 számbavételével, ha $\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2$ pozitív négyzetgyökét egyszerűen az $\dot{s}$-al jelöljük, a tangenciális gyorsulás

$$\ddot{r}_T = \frac{\ddot{s}}{\dot{s}}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$$

Tekintettel $\dot{s}$ és $\ddot{s}$ kifejezésére $\ddot{r}_T$ is elő van állítva a koordináták deriváltjaival.

A radiális gyorsulás $\ddot{r}_R = \ddot{r} - \ddot{r}_T$, tehát az $\ddot{r}_T$ mostani kifejezése ~~és~~ $\ddot{r}$-nak 19-ben írt kifejezése által

$$\ddot{r}_R = (\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}) - \frac{\ddot{s}}{\dot{s}}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \left(\ddot{x} - \frac{\ddot{s}}{\dot{s}}\dot{x}, \ddot{y} - \frac{\ddot{s}}{\dot{s}}\dot{y}, \ddot{z} - \frac{\ddot{s}}{\dot{s}}\dot{z}\right).$$

Tekintettel $\ddot{s}$ és $\dot{s}$ kifejezésére, most már $\ddot{r}_R$ is elő van állítva a koordináták deriváltjaival.

21.) A gyorsulásnak 16.-ban írt

$$\ddot{r} = (\alpha, \beta, \gamma)\ddot{s} + (\lambda, \mu, \nu)\frac{\dot{s}^2}{R}$$

kifejezésében egyes időpontokban folytonosság szakadása lehet a további mozdulás értelmében gondolt (α, β, γ) tangenciális vektornak, a (λ, μ, ν) radiális vektornak, az s úthossz $\ddot{s}$ kétszeres deriváltjának és a görbületi sugár, R hosszúságának. Mégsem ütközik az semmi biztos tapasztalásba, ha feltesszük, hogy a materiális pontoknak a totális gyorsulása mindig folytonosan változik a múló idővel, úgy hogy a nagysága folytonosan változik s irányának a folytonossága legfeljebb olyankor szakad meg, midőn a nagysága eltűnik.

Előfordulhat azonban emellett, hogy egy-egy figyelmen kívül hagyható kis idő közben is számottevően változik meg az $\ddot{u}$ gyorsulás, úgy hogy vagy számottevően változik meg a nagysága, vagy el nem tűnő nagysága mellett számottevően változik meg az iránya, vagy mind a nagysága, mind az iránya számottevően változik meg oly rövid időközökben, amiknek az elejét és végét esetleg összeesőnek tekinthetjük. Ilyenkor közönségesen úgy számítunk, mintha folytonosság szakadása volna a gyorsulásnak. Ez az észrevétel a sebességet is megilleti.

Különféle sebességek és gyorsulások.

22.) A mozgó pontnak a sebességét a totális elmozdulás változási sebességének is mondjuk s a mozgó pontnak a gyorsulását a totális elmozdulása változási gyorsulásának is mondjuk: az $\dot{v}$ deriváltat az v változási sebességének s az $\ddot{v}$ deriváltat az v változási gyorsulásának. Az s úthossz $\dot{s}$ deriváltját az s változási sebességének, az s-nek $\ddot{s}$ deriváltját az s változási gyorsulásának is mondjuk. A mozgó pont egy-egy koordinátájának idő deriváltját a koordináta változási sebességének, második idő deriváltját a koordináta változási gyorsulásának is mondjuk. Általánosan bármely mennyiségnek (vektornak vagy skalárisnak) első idő deriváltját az ő változási sebességének, második idő deriváltját az ő változási gyorsulásának is mondjuk feltéve azon deriváltak, mint határozott mennyiségek létezését. Rövid jelölésükre pedig mindig a mennyiség betűje fölé írt pontot, illetőleg kettős pontot használjuk.

Ha például a koordinátarendszerünkben O valamely állandóponthelyzet jelöl és ezen O helyből a mozgó pontba nyíló vektort r-val jelöljük, akkor ezt a vektort a mozgó pont O centrumú vektorának mondva r-nak az első időderiváltja $\dot{r}$ a pont O centrumú vektorának változási sebessége s r-nak a második időderiváltja $\ddot{r}$ a pont O

centrumú vektorának változási gyorsulása. Ezek mindig határozott értékkel léteznek, mert nem egyebek, mint a mozgó pont sebessége és gyorsulása. Ha továbbá a q vektortól kezdet óta leírt kúpszög θ és ha a q vektortól kezdet óta leírt kúpterület σ, akkor deriválhatóságaik föltételével írásmódunk és beszédmódunk szerint $\dot\theta$ a kúpszögnek, $\dot\sigma$ a kúpterületnek változási sebessége és $\ddot\theta$ a kúpszögnek, $\ddot\sigma$ a kúpterületnek változási gyorsulása.

23.) Még általánosabban végtelen kis dt idő alatt kelt (létrejött) bármiféle végtelen kis mennyiségnek (vektornak vagy skalárisnak) a végtelen kis idővel képezett hányadosát, hacsak végtelen pontosan határozott érték az, a végtelen kis mennyiség kelte (létrejötte) sebességének mondjuk s azon sebesség időderiváltját, ha az pontosan határozott értékkel létezik, a végtelen kis mennyiség kelte (létrejötte) gyorsulásának mondjuk. A viszonyokhoz képest valamely speciális nevet is adunk az így módon definiált sebességeknek és gyorsulásoknak.

Ha például a mozgó pontnak 22-ben definiált O centrumú vektora t pillanatban q nagyságú és (a, b, c) irányú, akkor (a, b, c) alatt egységvektort értve $\mathfrak{q} = (a, b, c)q$, tehát deriválhatónak gondolva az a, b, c iránykoszinuszokat és a q hosszúságot:

$$\dot{\mathfrak{q}} = (a, b, c)\dot{q} + (\dot{a}, \dot{b}, \dot{c})q$$

Az 22 értelmében a $\mathfrak{q}$ vektor változási sebessége és $\dot{q}$, $(\dot{a}, \dot{b}, \dot{c})$ pedig a q hosszúságnak, illetőleg az (a, b, c) egységvektornak a változási sebessége. De $\dot{\mathfrak{q}}$-nak az itt előállott két összetevője külön-külön tekintve nem úgy jelentkezik, mint változási sebesség, hanem mindkettő úgy jelentkezik, mint egy dt időelemben kelt elemi mennyiségnek és dt-nek a hányadosa:

$$(a, b, c)\dot{q} = \frac{(a, b, c)dq}{dt}, \qquad (\dot{a}, \dot{b}, \dot{c})q = \frac{q\,d(a, b, c)}{dt}.$$

Az első az $(a, b, c)dq$ elemi vektor keltének a sebessége, a második a $q\,d(a, b, c)$ elemi vektor keltének a sebessége szólásmódunk szerint, s az elsőt, $(a, b, c)\dot{q}$ vektort a $\mathfrak{q}$ vektor növekedési sebességének, a másodikat, $(\dot{a}, \dot{b}, \dot{c})q$ vektort a $\mathfrak{q}$ vektor elfordulási sebességének is mondjuk, mert az első a $\mathfrak{q}$ vektor nagyságának q-nak a változásán származik s a második a $\mathfrak{q}$ vektor irányának a változásán ered. Az időn határozott vektorokra derivábható vektorok ezek, akkor azután az elsőnek az idő deriváltja az $(a, b, c)dq$ elemi vektor keltének a gyorsulása, a másodiknak az idő deriváltja a $q\,d(a,b,c)$ elemi vektor keltének a gyorsulása.

Ha továbbá a q vektor elemi elfordulásának a tengelye (l, m, n) irányú, a szöge pedig $d\bar{\omega}$ nagyságú, akkor (l, m, n) alatt egységvektort értve, tekintsük az $(l, m, n)d\bar{\omega}$ elemi vektort. Ezen elemi vektor létrejöttének a sebessége

$$(l, m, n)\frac{d\bar{\omega}}{dt}$$

s ezt a vektort a mozgó pont O centrumú szögsebességének is mondjuk. Az iránya az elemi elfordulás tengelyének az iránya, a nagysága pedig a 22-ben gondolt θ kúpszög változási sebességének $\dot{\theta}$-nak a nagysága: $\frac{d\bar{\omega}}{dt} = \text{abs}\,\dot{\theta}$. Azt a vektort pedig, amelynek az iránya ugyanez (az elemi elfordulás tengelyének az iránya), de a nagysága a 22-ben említett σ kúpterület változási sebességének $\dot{\sigma}$-nak a nagysága, a mozgó pont O centrumú területi sebességének mondjuk. A mozgó pont O centrumú szögsebességének idő deriváltját az ő O centrumú szöggyorsulásának, a mozgó pont O centrumú területi sebességének idő deriváltját az ő O centrumú területi gyorsulásának mondjuk, midőn t.i. határozott értékkel léteznek ezen deriváltak.

Ha most a mozgó pontnak nem az O centrumi vektorát jelöli a $\eta = (a, b, c)\varrho$ vektor, hanem valamely adott I-tengelyű vektorát jelenti (olyan vektort, amelynek az eleje folyvást az I tengelyben van, a vége folyvást a mozgó pontban van és amely folyvást merőleges az I-tengelyre) és, ha ezen η vektor dt időelemben $d\varepsilon$ szögön fordul az I tengely körül, akkor a

$$\frac{d\varepsilon}{dt}, \text{ illetőleg az } \frac{1}{2}\varrho^2\frac{d\varepsilon}{dt}$$

skalárist a mozgó pont I tengelyű szögsebességének, illetőleg I tengelyű területi sebességének mondjuk. Midőn pedig határozott értékbe deriválhatók ezek, akkor időderiváltjukat a mozgó pont I tengelyű szög, illetőleg területi gyorsulásának mondjuk. Megjegyzendő, hogy itt a $d\varepsilon$ szöget pozitívnak vagy negatívnak számítjuk aszerint, amint az I tengely körül jobbra, vagy balra fordulással származott.

24.) Ha valamely vektor változási gyorsulása oly vektorok rezultánsa gyanánt áll elénk, amely vektorok nem úgy jelentkeznek, mint változási gyorsulások, valami jelzőnek a használatával mégis gyorsulásoknak mondjuk magukat ezen összetevőket is. Ide tartoznak a 16. artikulusból a „tangenciális gyorsulás és a radiális gyorsulás."

A mozgás meghatározásáról.

25.) Arra az esetre tekintjük ismeretesnek egy pont mozgását valamely időtartam folyamán valamely helyhatározó rendszerben, ha annak az időtartamnak minden pillanatára tudjuk, hogy hol van a pont azon helyhatározó rendszerben. Eszerint akkor tekintjük ismeretesnek egy pont mozgását valamely időtartam folyamán valamely helyhatározó rendszerben, ha a pontnak ebben a helyhatározó rendszerben lévő koordinátáit, mint az idő függvényeit, arra az időtartamra ismerjük. Akkor már nyilvánvalóképen ismerjük a pályavonalnak arra az időtartamra eső szakaszát is. Valóban, ha x, y, z a mozgó pont koordinátái és az

$$x = \varphi(t), \; y = \psi(t), \; z = \chi(t)$$

kifejezésekben a φ, ψ, χ, függvények $t = t_0$ pillanattól $t = t_1$ pillanatig ismeretesek, akkor már e kifejezések parametrumosan a t_0 és t_1 pillanat közt leírt pályavonalat is előállítják; t. i. a t parametrum körben-jártával. Ennek két módon való eliminálása pedig két független egyenletet szolgáltat a koordinátákközött, mint a pályavonalnak t_0 és t_z pillanat közt érvényes egyenleteit. Maguk a paramétrumos kifejezések egyenesen azt határozzák meg, hogy t_0 és t_z között mely pillanatban a pályavonalnak mely helyén van a pont. E kifejezések deriválásával pedig a pont sebességének, kétszeres deriválásukkal a pont gyorsulásának az ismeretéhez jutunk el. Továbbá a gyorsulásnak a sebesség irányára tartozó vektorértékében megismerjük a pont tangenciális gyorsulását és magának a gyorsulásnak, meg ennek a tangenciális gyorsulásnak a különbségében, vagy a gyorsulásnak a radiális irányra tartozó vektorértékében megismerjük a pont radiális gyorsulását is minden oly időpillanatra, amely t_0 és t_z közé esik.

26.) Legközönségesebb célunk egy vagy több test minél több pontjáról előre megállapitani, hogy adott viszonyok között mikor hol lesznek? De esetről esetre más elérendő célok is kerülnek elő.

Egyenlőre csak az itt említett célra szorítkozunk. Sőt most még ezt is megszorítjuk és bevezetőül csupán egy-egy test egy valamely pontjának mindenkori helyét akarjuk valamely időtartamra meghatározni. Rendszerint e nagyon korlátott célunk követésében is oly általános természeti ismeretekre van ugyan szükségünk, amelyekkel még nem rendelkezünk; mielőtt azonban ez ismeretek megszerzéséhez csak hozzá is fognánk, hasznunkra lesz, ha némi betekintést szerzünk oly föladatok elintézésébe, amelyek amaz általános ismeretek nélkül is megközelíthetők. Ezek a föladatok pedig arra irányulnak, hogy egyes egyszerű tapasztalatok alapján differenciálegyenleteket szerkesszünk meg valamely időtartamon a számbavett pontok koordinátái, mint az idő függvényei számára, s aztán ezen egyenletek megoldásával jussunk el a mozgásuk meghatározásához. Az ugyanis igen ritkán van módunkban, hogy közvetlen tapasztalásból egyenesen meg tudjuk adni a koordinátákat, mint az idő függvényeit, s legspeciálisabb tapasztalataink is a maguk közvetlenségében többnyire az idő, koordináták, sebességek és gyorsulások valamely vonatkozásaihoz juttatnak csak el, tehát differenciális vonatkozásokhoz vezetnek. Egyébiránt midőn tapasztalataink egyenesen a φ, ψ, χ-féle függvényeket engedik is meghatározni, akkor is sokszor igen értékes bizonyos differenciális vonatkozásoknak az előállítása azért, mert azok valamely más meghatározandó mozgásokat is szolgáltatnak.

Áttérés más helyhatározó rendszerre.

27.) Némelykor más természetes koordinátarendszerben jutunk el a mozgás differenciálegyenleteihez, mint amelyben ismerni akarjuk a mozgást. Ilyenkor koordináta transzformációval kell élnünk, aminek természetes föltétele, hogy a két koordinátarendszer viszonylagos helyzetét minden pillanatra ismerjük. Lássuk ezt föltéve, hogy miként számíthatjuk át a mozgást egy helyhatározó rendszerből egy másikba.

Mindig derékszögű egyenes vonalú helyhatározó rendszerre gondolva a régiben "x, y, z, az újban" x', y', z' legyenek a mozgó pont koordinátái. Az új rendszer origójának a koordinátái a régi rendszerben a, b, c legyenek s az új tengelyek iránykoszinuszai: $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$; $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ legyenek a régi rendszerben, mikezképest a régi tengelyek iránykoszinuszai az új rendszerben: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$; $\beta_1, \beta_2, \beta_3$; $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. Eszerint

$$x = a + \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z'$$

$$y = b + \beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3 z'$$

$$z = c + \gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3 z'$$

27.)$_1$ Egyelőre tegyük fel, hogy a régi és az új rendszer kölcsönös helyzete változatlan. Akkor a, b, c és α, β, γ mind konstansok, következőleg:

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha_1 \dot{x}' + \alpha_2 \dot{y}' + \alpha_3 \dot{z}' \\ \dot{y} = \beta_1 \dot{x}' + \beta_2 \dot{y}' + \beta_3 \dot{z}' \\ \dot{z} = \gamma_1 \dot{x}' + \gamma_2 \dot{y}' + \gamma_3 \dot{z}' \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{x} = \alpha_1 \ddot{x}' + \alpha_2 \ddot{y}' + \alpha_3 \ddot{z}' \\ \ddot{y} = \beta_1 \ddot{x}' + \beta_2 \ddot{y}' + \beta_3 \ddot{z}' \\ \ddot{z} = \gamma_1 \ddot{x}' + \gamma_2 \ddot{y}' + \gamma_3 \ddot{z}' \end{cases}$$

Mindezeket behelyettesítvén a régi rendszerbe tartozó mozgásegyenletekbe, megkapjuk az új rendszerbe tartozó mozgásegyenleteket.

Tegyük itt azt az észrevételt, hogy elmozdulás, sebesség, gyorsulás az új és a régi rendszerben ugyanaz a vektor. A sebesség és gyorsulás itt írt kifejezéseiből e két vektorról közvetlenül látható ez. Az elmozdulást illetően legyen x_0, y_0, z_0 a mozgó pont t_0 pillanati helye a régi tengelyrendszerben; x_0', y_0', z_0' pedig az új tengelyrendszerben legyen a mozgó pont t_0 pillanati helye. Akkor a t_0 és t pillanat közti elmozdulást a régi rendszerben

$$x - x_0, \; y - y_0, \; z - z_0 ;$$

az újban

$$x'-x_0', \; y'-y_0', \; z'-z_0'$$

határozzák meg, mint komponensek. Ámde mivel a t_0 pillanatot is megilletik a legelől írt összefüggések:

$$x_0 = a + \alpha_1 x_0' + \alpha_2 y_0' + \alpha_3 z_0'$$
$$y_0 = b + \beta_1 x_0' + \beta_2 y_0' + \beta_3 z_0'$$
$$z_0 = c + \gamma_1 x_0' + \gamma_2 y_0' + \gamma_3 z_0' \; ;$$

tehát a legelől írtakból kivonva:

$$x - x_0 = \alpha_1 (x'-x_0') + \alpha_2 (y'-y_0') + \alpha_3 (z'-z_0')$$
$$y - y_0 = \beta_1 (x'-x_0') + \beta_2 (y'-y_0') + \beta_3 (z'-z_0')$$
$$z - z_0 = \gamma_1 (x'-x_0') + \gamma_2 (y'-y_0') + \gamma_3 (z'-z_0') \; ;$$

amin már látható, hogy a két tengelyrendszerben az elmozdulás is ugyanaz a vektor.

27_2 Ha a két helyhatározó rendszer viszonylagos helyzete változik az idővel, akkor az $a, b, c, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ együtthatók sorában legalább egy változik az idővel.

Természetes helyhatározó rendszerekről lévén a szó, ezen együtthatók legalább kétszer egyenletesen deriválható függvényeik az időnek, minek rendén elvégezve a deriválásokat:

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha_1 \dot{x}' + \alpha_2 \dot{y}' + \alpha_3 \dot{z}' + \dot{a} + \dot{\alpha}_1 x' + \dot{\alpha}_2 y' + \dot{\alpha}_3 z' \\ \dot{y} = \beta_1 \dot{x}' + \beta_2 \dot{y}' + \beta_3 \dot{z}' + \dot{b} + \dot{\beta}_1 x' + \dot{\beta}_2 y' + \dot{\beta}_3 z' \\ \dot{z} = \gamma_1 \dot{x}' + \gamma_2 \dot{y}' + \gamma_3 \dot{z}' + \dot{c} + \dot{\gamma}_1 x' + \dot{\gamma}_2 y' + \dot{\gamma}_3 z' \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{x} = \alpha_1 \ddot{x}' + \alpha_2 \ddot{y}' + \alpha_3 \ddot{z}' + 2(\dot{\alpha}_1 \dot{x}' + \dot{\alpha}_2 \dot{y}' + \dot{\alpha}_3 \dot{z}') + \ddot{a} + \ddot{\alpha}_1 x' + \ddot{\alpha}_2 y' + \ddot{\alpha}_3 z' \\ \ddot{y} = \beta_1 \ddot{x}' + \beta_2 \ddot{y}' + \beta_3 \ddot{z}' + 2(\dot{\beta}_1 \dot{x}' + \dot{\beta}_2 \dot{y}' + \dot{\beta}_3 \dot{z}') + \ddot{b} + \ddot{\beta}_1 x' + \ddot{\beta}_2 y' + \ddot{\beta}_3 z' \\ \ddot{z} = \gamma_1 \ddot{x}' + \gamma_2 \ddot{y}' + \gamma_3 \ddot{z}' + 2(\dot{\gamma}_1 \dot{x}' + \dot{\gamma}_2 \dot{y}' + \dot{\gamma}_3 \dot{z}') + \ddot{c} + \ddot{\gamma}_1 x' + \ddot{\gamma}_2 y' + \ddot{\gamma}_3 z' \end{cases}$$

(Ezeket kell most $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$ helyett beírni a régi mozgásegyenletekbe és x, y, z helyett azok fentebbi kifejezéseit, hogy megkapjuk az új rendszerbe tartozó differenciálegyenleteket. Ha azonban a régi egyenletek egyszerűbbek, akkor célszerűbb a régieket oldani meg s aztán végezni csak transzformációt, midőn is az $x' = (x-a)\alpha_1 + (y-b)\beta_1 + (z-c)\gamma_1$ stb. vonatkozások kiadják az új koordinátákat, mint az idő függvényeit.)

Most már nyilvánvalóképen más vektor általában a sebesség és a gyorsulás az új rendszerben, mint a régiben. Nem különben más vektor általában valamely t_0 és t pillanat közti elmozdulás is az új rendszerben, mint a régiben, mert a t_0 pillanathoz tartozó a, b, c és α, β, γ mennyiségek általában mások, mint a t pillanathoz tartozók.

28.) Tegyük a következő észrevételt: ha

$$2(\dot\alpha_1 \dot x' + \dot\alpha_2 \dot y' + \dot\alpha_3 \dot z') + \ddot a + \ddot\alpha_1 x' + \ddot\alpha_2 y' + \ddot\alpha_3 z' \equiv -A', \text{ stb.}$$

írjuk, akkor három gyorsulási egyenletünk értelmében, amelyeket rendre egyszer $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$-val szorozva, egyszer $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$-val szorozva, egyszer $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$-val szorozva összeadunk:

$$\ddot x' = \alpha_1 \ddot x + \beta_1 \ddot y + \gamma_1 \ddot z + \alpha_1 A' + \beta_1 B' + \gamma_1 C', \text{ stb.}$$

Következőleg az új gyorsulásnak és az új rendszerben számított régi gyorsulásnak a különbsége az új rendszerben számított $\alpha_1 A' + \beta_1 B' + \gamma_1 C'$ stb. komponensű vektor.

<u>1. Példa</u>. Egy materiális pont egyenletes mozgása. Ha a földünkhöz rótt horizontális lapon mozgásba hozunk egy súlyos golyót, akkor ennek a golyónak a centruma a laphoz viszonyítva közönségesen úgy mozog, hogy folytonos előrehaladással egyenes vonalat ír le és valamely $T - t_0$ időközben egyenlő idők alatt igen pontosan egyenlő utakat tesz meg, bármi kis egyenlő idők alatt is egyenlőket. Most ilyen mozgásban gondoljuk azt. Koordinátarendszerünket a laphoz rögzítjük, mert a laphoz viszonyított mozgással kívánunk foglal-

kozni.

Ha tudjuk, hogy hol van koordinátarendszerünkben a golyó centruma a t_0 pillanatban, és a t_0 és T pillanat közti t_1 pillanatban, akkor igen pontosan előre meghatározhatjuk a laphoz viszonyított mozgását a t_1-től T-ig terjedő időre ezen mozgásnak a föltételezett tulajdonságaiból.

Jelöljük ugyanis a mozgó pont t_0 pillanati koordinátáit x_0, y_0, z_0-vel, t_1 pillanati koordinátáit x_1, y_1, z_1-vel. Ki fog tűnni, hogy bármely pillanatlegyen t_0 és T között t, igen pontosan áll, hogy

$$x=x_0+\frac{x_1-x_0}{t_1-t_0}(t-t_0),\; y=y_0+\frac{y_1-y_0}{t_1-t_0}(t-t_0),\; z=z_0+\frac{z_1-z_0}{t_1-t_0}(t-t_0)$$

A t_0 pillanatra következő dt időelemben a mozgó pont elemi elmozdulásának a nagyságát ds_0-el, iránykoszinuszait $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$-al jelölve, ezen elemi elmozdulásnak a komponensei ezek:

$$dx_0=\alpha_0 ds_0,\quad dy_0=\beta_0 ds_0,\quad dz_0=\gamma_0 ds_0.$$

A t pillanatra következő dt időelemben a pont elemi elmozdulásának az iránykoszinuszai szintén $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ és a nagysága igen pontosan szintén ds_0 (előzetes föltevésünk értelmében) úgy, hogy ha dx, dy, dz a komponensei, akkor

$$dx = \alpha_0 ds_0,\ dy = \beta_0 ds_0,\ dz = \gamma_0 ds_0$$

Következőleg $dx = dx_0$ stb. és dt-vel osztva aztán $\frac{dx_0}{dt}$ helyett $\dot{x}_0$ stb. irva, igen pontosan áll, hogy

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}_0,\ \frac{dy}{dt} = \dot{y}_0,\ \frac{dz}{dt} = \dot{z}_0,$$

ahol $\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$ konstansok, t.i. a t_0 pillanati sebesség komponensei. Ezen differenciál egyenletekhez jutottunk, mint igen pontos egyenletekhez első sorban a mozgás mostani speciális tulajdonságai

Ezen egyenletekből integrálás rendén

$$x = \dot{x}_0 t + a,\ y = \dot{y}_0 t + b,\ z = \dot{z}_0 t + c,$$

ahol a, b, c az integrálás konstansai. Minthogy a t_0 és t_1 pillanatban is érvényesek ezek és a t_0 és t_1 pillanatban adva van a mozgó pont helye (x_0, y_0, z_0 és x_1, y_1, z_1), úgy ezen két pillanatra külön is felirva három egyenletünket eljutunk az $\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$ és a, b, c konstansoknak adatainkkal való meghatározásához, mert az

$$x_0 = \dot{x}_0 t_0 + a, \text{ stb, meg } x_1 = \dot{x}_0 t_1 + a \text{ stb.}$$

egyenletekből

$$\dot{x}_0 = \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0},\ a = \frac{t_1 x_0 - t_0 x_1}{t_1 - t_0}, \text{ stb.}$$

Beirván ezeket magának az x, y, z-nek integrálással előállított egyenleteibe, tényleg a legelől bejelentett egyenleteket kapjuk.

Mivel egyenlő dt időelemekben a laphoz viszonyítva csak igen pontosan, de nem pontosan tesz meg egyenlő utakat a pont a t_0-tól T-ig terjedő időben, így meghatározásunk is csak igen pontosan, de nem pontosan érvényes, mert arra támaszkodott, hogy egyenlő időelemeknek egyenlő utak felelnek meg koordinátarendszerünkben.

Az itt meghatározott mozgást a materiális pont egyenletes mozgásának mondjuk. Legelől részletesen felírt egyenleteinkből e mozgás sebessége ≡

$$(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \left(\frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0}, \frac{y_1 - y_0}{t_1 - t_0}, \frac{z_1 - z_0}{t_1 - t_0} \right),$$

tehát konstans és így a gyorsulása pedig állandóan zérus. Viszont, midőn egy pontnak a gyorsulása valamely koordinátarendszerben valamely időközben állandóan zérus, akkor a pont mozgása egyenletes azon koordinátarendszerben és azon időközben, mert a sebessége konstans, tehát állandó irányban mozog s egyenlő időelemekben egyenlő nagyságú utakat ír le.

<u>2. Példa.</u> A szabad esés. Galileinek a „Dialoghi

delle nuove Scenze" cimű művében a beszélgetés harmadik napján mondja Salviati: „12 rőfnyi hosszú, félrőfnyi széles, 3 ujjnyi vastag falapba hüvelyknyi széles igen egyenes vályú volt bevájva és ebbe igen sima és tiszta pergamen volt beragasztva. A vályúban egészen gömbölyű és simára csiszolt sárgaréz golyót futtattunk. A falap egyik végét felemeltük, majd egy, majd két rőf magasságba, aztán a vályúban esni engedtük a golyót és a végig futás idejét alább leirandó módon feljegyezgettük. Sokszor megismételtük az egyes kisérleteket, hogy az esés időtartama pontosan meg legyen határozva és nem találtunk egy tized érverésnyi különbségeket sem. Azután a pálya negyedrészén engedtük végig futni a golyót és az előbbi esési időnek mindig pontosan a felét találtuk. Más pályarészeken is végrehajtva a kisérleteket és az egész hosszúsághoz szükséges időtartamot összehasonlítva az $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots$ és más résznyi hosszúságokhoz tartozó időtartammal jó százszor ismételt kisérletek rendén mindig azt találtuk, hogy a befutott pályahosszak azokban az arányokban vannak, mint az idő négyzetei. Mégpedig a lejtő, vagyis a vályú minden hajlásán így volt ez. Egyszersmind azt is észleltük, hogy a lejtő különböző hajlásaihoz tartozó idők úgy arány-lottak egymáshoz, amint azt alább az Autoretől (Galilei) kijelentve és bebizonyítva találand-juk.

Ami az időknek meghatározását illeti, e-végre egy vízzel telt mérőnyi edény volt felállít-va, amelyből a fenekébe illesztett vékony csövön vé-kony sugárban víz folydogált. Ezt a vizet az alatt az idő alatt, hogy a golyó a vályún, vagy annak e-gyes részein végigszaladt, kis serlegbe eresztettük. Az ilyképen összegyűjtött vizet mindannyiszor i-gen pontos mérlegen megmérve, a súlyainak különbségei és arányai kiadták az idők különb-ségeit és arányait, még pedig oly szabatossággal, hogy a számtalanszor ismételt műveletek e-redményei számottevő mértékben nem tértek el egymástól." Salviati ezen előadásában a falap mindenegyes kísérletben a földhöz rögzít-ve s vályúja a levegőben és minden mozgás a földhöz viszonyítva gondolandó.

Ezekből a kísérletekből az következik, hogy a földhöz kötött helyhatározó rendszerben a golyó cent-ruma mindenegyes kísérletben állandó gyorsulás szerint mozgott. Jelölje ugyanis egy kísérletben a

t idő alatt befutott út hosszát s. Akkor a kisérletleírása szerint

$$s = f t^2,$$

ahol f a vályú adott hajlása mellett állandó pozitív skaláris. Ebből folyólag

$$\dot{s} = 2ft \quad , \ddot{s} = 2f \ , \quad (f > 0)$$

A tangenciális gyorsulás tehát mindenegyes kisérletben állandó, mert a nagysága $2f$, az iránya pedig ($\ddot{s} > 0$ lévén) a vályú lefelé mutató iránya, ugyanis folyvást ez a tovább mozdulás iránya.

Abból pedig, hogy a mozgó pont pályája ezen kisérletekben egyenes vonal, az következvén, hogy a radiális gyorsulás zérus, mindenegyes kisérletben a tangenciális gyorsulás teszi a totális gyorsulást. Tényleg állandó gyorsulás szerint mozog ebből folyólag a golyó centruma mindenegyes kisérletben s gyorsulásának az iránya mindig a vályú lefelé mutató iránya; gyorsulásának a $2f$ nagyságáról pedig Galilei más kisérletei azt derítették ki, hogy a lejtő hajlásszögének a szinuszával oly arányossági együttható szerint arányos, amely független a hajlásszögtől:

$$2f = g \sin \varepsilon,$$

ahol ε a hajlásszöget jelenti és g az ε-tól független pozitiv konstanst jelent. Azon kisérletek eredménye ez, amelyeket Salviati az Autore-ra hivatkozva emlit.

~~Midőn~~ Mikor a vályu vertikális helyzetben van, akkor olyképen mozog a golyó centruma, mint egy a levegőben szabadon elejtett golyóé; ekkor a szabadjára engedett golyó u. n. szabadesésével van dolgunk, midőn is a földhöz rött helyhatározó rendszerünkben a golyó centrumának a gyorsulása folyvást vertikális lefelé és mivel most $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$, úgy gyorsulásának a nagysága folyvást $= g$. Ha pedig nem elejtjük csupán, hanem kidobjuk a levegőbe a golyót, centrumának a mozgását ekkor is szabadesésnek mondjuk, bármely irányban és bármekkora sebességgel dobtuk is ki azt s abban a föltevésben, hogy a gyorsulása folyvást vertikális lefelé és folyvást ugyanazon g nagyságú, bizonyos föltételek alatt minden számításunk jól egyezik a golyó centrumának a tényleges mozgásával. Ezek a föltételek abból állanak, hogy megfigyeléseink időtartama valamely határon alul legyen s ezen időtartamban a sebesség nagysága ugyancsak valamely határon alul legyen. Galilei meghatározásai épenséggel e föltételek betartásán vezethettek kielégitő eredményekhez. Főkép a levegő jelenlétén múlik, hogy csak e föltételek alatt tekinthető állandónak a szabadesés gyorsulása.

Foglalkozzunk azonban most általánosan egy pontnak állandó gyorsulású mozgásával. Koordinátarendszerünkben jelöljék egy pont állandó gyorsulásának komponenseit a'', b'', c'', melyek maguk is szükségkép konstansok. Akkor aztán, ha a mozgó pont koordinátái t pillanatban x, y, z, a következő egyenleteink vannak:

(1.) $\ddot{x} = a''$, $\ddot{y} = b''$, $\ddot{z} = c''$.

Három másodrendű lineáris, totális, differenciális egyenletünk van a három koordinátára nézve. Kissé másképp írva:

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = a'', \frac{d\dot{y}}{dt} = b'', \frac{d\dot{z}}{dt} = c''$$

Ezekből integrálás rendén

(2.) $\dot{x} = a' + a''t$, $\dot{y} = b' + b''t$, $\dot{z} = c' + c''t$,

ahol a', b', c' az integráció konstansai. Ezek az egyenletek pedig így is írhatók:

$$\frac{dx}{dt} = a' + a''t, \frac{dy}{dt} = b' + b''t, \frac{dz}{dt} = c' + c''t,$$

tehát további integrálással:

$$(3.)\begin{cases} x = a + a't + \frac{a''}{2}t^2 \\ y = b + b't + \frac{b''}{2}t^2 \\ z = c + c't + \frac{c''}{2}t^2 \end{cases},$$

ahol az a, b, c, az ujabb integráció konstansai. Az integrálásokban felmerült konstansoknak egyszerü mozgástani jelentménység van. Mégpedig a', b', c' a kezdeti sebesség komponensei, a, b, c, a kezdeti hely koordinátái. Jelöljék ugyanis a kezdeti sebesség komponenseit $\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$ és a (2.) alatti egyenletekhez folyamodva vegyük számba azokat a kezdeti pillanatra, tehát a t-nek zérus értékére. Ekkor a három baloldal zérus indexet kap, a három jobboldal pedig rendre a', b', c', következésképp:

$$\dot{x}_0 = a', \quad \dot{y}_0 = b', \quad \dot{z}_0 = c'.$$

tehát (a', b', c') csakugyan a kezdeti sebesség.

Forduljunk most a (3.) alatti egyenletekhez. A kezdeti hely koordinátáit x_0, y_0, z_0-vel jelölve, a kezdeti pillanatban a három egyenlet baloldala zérus indexet kap, a három jobboldal pedig, amiatt, hogy kezdetben $t=0$, az a, b, c értéket veszi fel. Következőleg

$$x_0 = a, \quad y_0 = b, \quad z_0 = c,$$

tehát a, b, c csakugyan a kezdeti hely.

Látjuk egyenleteinkből, hogy a sebesség az időnek lineáris függvénye, a koordináták pedig az időnek qvadratikus függvényeik.

Helyhatározó rendszerünket megválaszthatjuk oly speciális módon, hogy egyenleteink még egyszerűbbekké lesznek. Ez a speciális választás abban áll, hogy a helyhatározó rendszer egyik tengelyét a gyorsulás irányával párhuzamossá tesszük. Mivel pedig a szabadesésben a gyorsulás iránya függőleges lefelé, úgy a szabadesés vizsgálatában az egyik koordináta tengelyt függőlegesen lefelé vagy fölfelé irányítjuk. Valóban a szabadesésre gondolva tegyük ezt a z tengellyel. Éspedig irányítsuk azt vertikálisan lefelé. Még tovább jutunk az egyszerűsítés dolgában, ha oly helyzetet adunk tengelyrendszerünknek, hogy két tengelyének a síkja a kezdeti sebességgel párhuzamos legyen. Ilyen legyen az (y.z) sík. Végre fokozhatjuk az egyszerűsítést még az által is, hogy a helyhatározó rendszer origóját a mozgó pont kezdeti helyébe tesszük. De most már egyéb módon helyhatározó rendszerünkkel nem rendelkezhetünk, mert most már teljesen meg van határozva annak a helyzete. Lássuk rendre, miféle egyszerűsítéseket érünk el egyenleteinken az által, hogy ezeket a speciális választásokat tesszük. Midőn a z tengely irányát a gyorsulás irányával egyezővé tesszük, akkor $a''=0$, $b''=0$, c'' pedig a gyorsulás nagysága. Jelöljük ezt, mint már fentebb is tettük g-vel. Most már az (a'', b'', c'') konstans vektor helyett egyszerűbben a $(0,0,g)$ konstans vektor a gyorsulás. Midőn aztán az (y,z) síkot párhuzamossá tesszük a kezdeti sebességgel, az a' eltűnik, az (a', b', c') vektor helyett egyszerűbben $(0, b', c')$ a kezdeti sebesség. Midőn végre az origót a mozgó pont kezdeti helyébe tesszük, akkor az a, b, c kezdeti koordinátàk eltűnnek. Most már egyenleteink a következők:

$$\ddot{x}=0, \qquad \ddot{y}=0, \qquad \ddot{z}=g$$
$$\dot{x}=0, \qquad \dot{y}=b', \qquad \dot{z}=c'+gt$$
$$x=0, \qquad y=b't, \qquad z=c't+\frac{1}{2}gt^2.$$

Ezek az egyenletek egyszerűbbek, minélfogva az ide tartozó feladatok megoldásához segélyükkel könnyebben juthatunk el. Keressük pl., hogy mily alakú pályavonalon mozog a pont?

Minthogy x állandóan zérus, úgy világos, hogy a pont pályája síkvonal, mégpedig az (y,z) vertikális síkban fekvő vonal. Eliminálva pedig az y és z előttünk levő kifejezéséből az időt, megkapjuk $x=0$ mellé a pályavonal másik koordináta egyenletét is, u. m.

$$2b'^2 z = gy^2 + 2b'c'y,$$

azaz

$$\left(y+\frac{b'c'}{g}\right)^2=2\frac{b'^2}{g}\left(z+\frac{c'^2}{2g}\right).$$

Ez $x=0$ mellett nyilvánképen parábola egyenlete, még pedig oly paraboláé, amelynek tengelye vertikális és a csúcsa a legmagasabb helyen lévő pontja.

3. Példa. Szabadesés a levegő ellenállásának tekintetbe vételével.

Ha léggel telt térben a leget ritkítjuk, akkor minél ritkábbá tettük, annál pontosabban elérjük, hogy azon térben a földhöz rött koordinátarendszerben egy kidobott testnek egy pontja, az u. n. tömegcentruma oly gyorsulás szerint mozog, amelynek az iránya folyvást vertikálisan lefelé mutat s a nagysága is konstans. Ezt a gyorsulást nehézségi gyorsulásnak nevezzük s a nagyságát g betűvel jelöljük. Megközelítésének a módjából azt következtetjük, hogy főképp azért nem szerinte való pontosan egy kidobott test ugy nevezett tömegcentrumának a mozgása a levegőben, mert a testet a levegő környezi. Newton szerint a földre nézve nyugvó légben egy kidobott test mozgásának pontosabb ismeretéhez jutunk, ha u. n. tömegcentrumának a gyorsulását földhöz rött tengelyrendszerünkben két oly gyorsulás vektori összegének („eredőjének") tekintjük, amelyek egyike a nehézségi gyorsulás, másika pedig egy változó gyorsulás, amely úgy változik az idővel, hogy az iránya mindig éppen ellenkező a tömegcentrum sebességének az irányában s a nagysága arányos ezen sebesség négyzetével, úgy, hogy ez az összetevője a gyorsulásnak valamely pozitív állandó κ együttható szerint =

$$= -\kappa \dot{s}^2 \left(\frac{\dot{x}}{\dot{s}}, \frac{\dot{y}}{\dot{s}}, \frac{\dot{z}}{\dot{s}}\right) = -\kappa \dot{s}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}).$$

De csak úgy fogadható el ez, mint jó megközelítésben helyes, ha a test golyó alakú, u. n. tömegcentruma a geometriai centrumában van, átlagos tömöttsége sokkal ~~kisebb~~ nagyobb, mint a környezeti tömöttség és $\dot{s}$ valamely felső határon (mintegy $24000 \frac{cm}{sec}$) folyvást alul van. A κ arányossági együttható a légnemű környezet tömöttségétől s a golyó mekkoraságától és tömegétől függ éspedig az utóbbival fordított arányban van s az előbbitől úgy függ, hogy egyenesen arányos a golyó fölületének a nagyságával, tehát a golyó sugarának a négyzetével.

Az ily módon összetett gyorsulás komponensei a földhöz rótt tengelyrendszerben, ha a nehézségi gyorsulás komponenseit a'', b'', c'' jelöli:

$$\ddot{x} = a'' - \kappa \dot{s}\dot{x}\,; \qquad \ddot{y} = b'' - \kappa \dot{s}\dot{y}\,; \qquad \ddot{z} = c'' - \kappa \dot{s}\dot{z}.$$

Válasszuk meg azonban úgy a z tengely irányát, hogy essék az össze az (a'', b'', c'') nehézségi gyorsulás irányával, azaz vertikálisan lefelé mutasson. Akkor $a''=0$, $b''=0$, $c''=g$, mihez képest egyenleteink ezek lesznek:

$$\ddot{x}=-ks\dot{x}\ ;\quad \ddot{y}=-ks\dot{y}\ ;\quad \ddot{z}=g-ks\dot{z},$$

ahol

$$\dot{s}^2=\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2.$$

Mellőzve ez egyenletek teljes tárgyalását, általánosság tekintetében csupán csak arról győződjünk meg, hogy az általuk meghatározott mozgás is sík mozgás és pedig ezen mozgás síkja is vertikális. Ennek felismerése végett szorozzuk meg első egyenletünket $\dot{y}$-al, második egyenletünket $\dot{x}$-al, azután vonjuk ki az elsőt a másodikból. Akkor a következő egyenletet kapjuk:

$$\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}=0,\ \text{vagyis}\ \frac{\ddot{y}}{\dot{y}}=\frac{\ddot{x}}{\dot{x}}.$$

Ebből integrálással

$$A\dot{x}+B\dot{y}=0,$$

ahol A és B konstansok és hányadosuk az integrálás határozatlana. További integrálással:

$$Ax+By+C=0,$$

ahol C a második integráció határozatlana. Ez az egyenlet pedig vertikális sík egyenlete. A pont tehát folyvást vertikális síkban tartózkodik. Azonban abban hagyva a mozgás általános vizsgálatát, szorítkozzunk arra az esetre, hogy a tömegcentrum vertikálisan mozog. Vertikális mozgás most is lehetséges, mert azzal, hogy

$$\dot{x} = 0\,, \quad \dot{y} = 0$$

írjuk, egyenleteink nem vezetnek ellentmondáshoz. Megtekintve pedig egyenleteinket azonnal látjuk, hogy az $\dot{x}=0$, $\dot{y}=0$ feltevésben a két első egyenlet identikusan teljesül s a harmadikban $\dot{s} = \pm\,\dot{z}$, ahol a felső, vagy alsó előjel érvényes aszerint, amint a pont lefelé, vagy felfelé mozog. Ugyanis, ha a sebesség iránykoszinuszai α, β, γ, akkor

$$\dot{x} = \alpha\dot{s}\,, \quad \dot{y} = \beta\dot{s}\,, \quad \dot{z} = \gamma\dot{s}\,.$$

Jelenleg $\alpha=0$, $\beta=0$, a γ pedig $(+1)$, vagy (-1) aszerint, amint a vertikális mozgás lefelé, vagy felfelé történik. Ekképpen a vertikális mozgás meghatározására ez az egyenletünk van:

$$\ddot{z} = g \mp k\dot{z}^2,$$

ahol a felső, vagy alsó előjel érvényes aszerint, amint a golyó centruma lefelé, vagy felfelé mozog.

Vizsgáljuk speciálisan a lefelé való mozgást. A lefelé való mozgásban

$$\ddot{z} = g - k\dot{z}^2 \quad , \quad \frac{d\dot{z}}{dt} = g - k\dot{z}^2,$$

tehát

$$\frac{d\dot{z}}{g - k\dot{z}^2} = dt.$$

Ennek az integrálásából logaritmus naturális szerint:

$$t = \frac{1}{2\sqrt{gk}} \cdot \log \frac{\sqrt{\frac{g}{k}} + \dot{z}}{\sqrt{\frac{g}{k}} - \dot{z}} + \text{konst.}$$

Tegyük fel azonban, hogy a kezdeti sebesség zérus, akkor az integráció konstansa zérus és egyenletünkből

$$\dot{z} = \sqrt{\frac{g}{k}} \cdot \frac{e^{\sqrt{gk}\cdot t} - e^{-\sqrt{gk}\cdot t}}{e^{\sqrt{gk}\cdot t} + e^{-\sqrt{gk}\cdot t}} .$$

Innen további integrálással

$$z = \frac{1}{k} \cdot \log \frac{e^{\sqrt{gk}\cdot t} + e^{-\sqrt{gk}\cdot t}}{2} + \text{konst.}$$

A sebesség folyvást nől. Ugyanis kissé másképp írva

$$\dot{z} = \sqrt{\frac{g}{k}} \left\{ 1 - \frac{2}{1 + e^{2\sqrt{gk}\cdot t}} \right\},$$

amely kifejezés t nőttével nyilvánképen folyvást nől. De nem nől a végtelenbe, hanem $\frac{g}{k}$ négyzetgyöke felé konvergál és ha a k nagy, akkor megközelítőleg nem nagyon hosszú idő mulva is $\sqrt{\frac{g}{k}}$ más a sebesség nagysága így,

hogy azután már megközelitőleg ezen állandó sebességgel e-
sik a golyó centruma. A k fordított arányban lévén a golyó
tömegével és egyenes arányban lévén a golyó sugarának a
négyzetével: fordított arányban van a golyó sugarának és
átlagos tömöttségének szorzatával. Ha tehát kicsiny a go-
lyó sugara, akkor k nagy, tehát csakhamar bekövetkezik
a sebesség állandósága. Igen nagy magasságból érkező
esőcseppek, jégszemek igen állandó sebességgel közelednek
a földhöz. A hópelyhek nem igen nagy magasságból es-
ve is megközelitőleg állandó sebességgel szállanak a föld-
re. Apró porszemek kis magasságból érkezve is megköze-
litőleg állandó sebességgel szállanak lefelé.

Azonban Newton formulája sem elég pontos.
Pontosabb formula a sebesség nagyságának első és
harmadik hatványát is tartalmazza.

Utólagosan említve egy test tömegén nem e-
gészen pontos meghatározás szerint oly pozitiv skalá-
rist értünk, melynek számértéke azt jelenti, hogy a
mérlegen a szabványos légnyomás alatt hány cm^3
4C hőmérsékletű vízzel ér fel a test. Egy test átlagos tö-
möttségén pedig tömegének és térfogatának hányado-
sát értjük. (Később majd a tömeg pontosabb defini-
ciójával találkozunk.)

<u>4. Példa</u>. Egyszerű harmonikus mozgás. Egy üveg-

pálcát horizontális fekvésben a közepén csiptetőbe szorítunk, amely alkalmas módon a földhöz van rögzítve. A pálca egyik végére letört tűheggyel ragasztunk olyképen, hogy a pálcára merőleges, de különben szintén horizontális legyen. A tűhegy elé kormozott üveglapot helyezünk a pálcával párhuzamos vertikális síkban, úgy, hogy hozzá érjen a tűheggyhez. Most a pálca másik felét hosszmentében nedves posztóval, vagy gyantaporos bőrrel dörzsöljük.

Meg akarjuk ismerni a tűhegy mozgását a földhöz rött helyhatározó rendszerben. Amíg az üveglap nyugszik ezen rendszerben, addig a tűhegy horizontális keskeny csíkot kotor az üveglapon. Annyi kitűnik ebből, hogy horizontális mozgásban van a tűhegy. Mozgásának további meghatározása végett az üveglapot gyorsan lefelé, vagy fölfelé toljuk, mégpedig olyképen, hogy valamely kis t_2-t_1 időközben állandó sebességgel csússzék le, vagy felfelé. A mozgó üveglapon kigyózó csíkot szánt a tűhegy a koromrétegben, keskeny kigyózó útat ír az le, amelynek a t_2-t_1 időközben keletkező darabján a vezérvonal (a rajta húzható legegyszerűbb vonal), egy vertikális tengelyű szinusz vonal nagy pontosság szerint s tengelye a tűhegy kezdeti helyén halad át, azon a helyen, ahol előző nyugalmában volt a tűhegy.

Az üveglappal együtt mozgó x', y', z' koordinátarendszert is gondoljunk egyelőre, amelynek az x', y' síkja az üveglapra legyen rögzítve, és y' tengelye a szinuszvonal tengelyében legyen, tehát vertikális legyen, de a lap siklásával ellenkező iránytan mutasson. Ebben a koordinátarendszerben a szinuszvonal egyenletei ezek:

$$x' = a \sin\left(\varepsilon + \frac{y'}{l}\right), \quad z' = 0,$$

ahol a, ε, l konstansok. A tűhegy koordinátái az üveglaphoz rótt tengelyrendszerünkben a $t_2 - t_1$ időközben folyvást jól kielégítik ezeket az egyenleteket. Ha pedig az üveglap sebességének a $t_2 - t_1$ időközben állandó nagysága $= h$, akkor y' változási sebessége $= h$, azaz $\dot{y}' = h$,

$$dy' = h\,dt, \quad y' = ht + b,$$

ahol b az integráció konstansa. Másmost az üveglaphoz rótt tengelyrendszerünkben

$$x' = a \sin\left(\varepsilon + \frac{b + ht}{l}\right), \quad y' = b + ht, \quad z' = 0$$

határozzák meg a mozgást. Ha pedig azt írjuk, hogy

$$\varepsilon + \frac{b}{l} \equiv -2\pi \frac{t_0}{T}, \quad \frac{h}{l} \equiv \frac{2\pi}{T},$$

akkor

$$x' = a \sin 2\pi \frac{t - t_0}{T}, \quad y' = 2\pi \frac{l}{T} t + b, \quad z' = 0$$

határozzák meg a tűhegy mozgását az üveglaphoz rögzített tengelyrendszerünkben.

Mi azonban a földhöz rött x, y, z tengelyrendszerben akarjuk ismerni a tühegy mozgását. Ugy válasszuk meg ezt a tengelyrendszert, hogy x tengelye a tühegynek a földhöz viszonyított pályájára essék, ami horizontális egyenes vonalnak kis darabja, y tengelye vertikális legyen. Emellett nyilvánvalóképen lehetséges, hogy tengelyei rendre egészen oly irányúak legyenek, mint az üveglaphoz rött tengelyek, és hogy y tengelye az y' tengelyen feküdjék. A földhöz rött koordinátarendszer ily megválasztásában

$$x = x', \quad y = 0, \quad z = 0, \text{ tehát}$$

$$x = a \sin 2\pi \frac{t - t_0}{T}, \quad y = 0, \quad z = 0$$

határozzák meg a tühegy mozgásának a módját a földhöz rött koordinátarendszerben. A módját, vagyis a tühegy koordinátáinak, mint az idő függvényeinek az alakját, de a mozgás teljes megismeréséhez az a, t_0 T konstansok ismerete is szükséges.

A mozgás módját illetőleg látjuk, hogy a zérus helyből ($x=0, y=0, z=0$ helyből), azaz a tühegy nyugvó helyéből épen (x, 0, 0) minden pillanatban a tühegy elmozdulása és látjuk x kifejezésén, hogy az idő nőttével ide-oda mozog horizontális egyenes vonalon a tühegy $\underline{a}$ és $-\underline{a}$ szélső helyek között, mert $\underline{a}$ szorzójának 1 és −1 szélső értékei vannak, amelyek elsejéről a második felé folyvást kisebbedve, azután a másodikáról az elseje felé folyvást nagyöbbodva stb. változik a-nak a szorzója. Megmérve a tűhegy ezen a és $-a$ szélső helyének a távolságát, mivel ez a távolság = abs. $2a$, nyilvánképen eljutunk a mekkoraságának az ismeretéhez. A t_0 és T konstansok pozitív, vagy negatív előjellel időtartamot jelentenek; a t_0 azért, mert időből kell (x kifejezésében) kivonni; a T azért, mert a szinusz argumentumának (x kifejezésében) névtelen számnak kell lennie. Nyilván való, hogy a-nak az előjelét mindig meg lehet úgy választani, hogy T előjele pozitív legyen. Szabjuk ki tehát T-re, hogy pozitív s úgy a maga előjelével jelent időtartamot. Mint ilyen pedig azon időtartam, amelyben a tűhegy egy szélső helyéből ugyanabba visszatér és bármely más helyéből ugyanezen helyébe másodszor tér vissza. T-nek a fele pedig azon időtartam, amelyben a tűhegy egyik szélső helyéből a másikba jut el, vagy a zérus helyéből ($x=0$) ugyanabba visszatér, aminek a révén jól megmérhető a T. A t_0 konstansnak a jellemzésére tekintsünk egy olyan t pillanatot, amelyben a tűhegy a zérushelyen ($x=0$ helyen) van. Ekkor $\sin 2\pi \frac{t-t_0}{T} = 0$, tehát a t_0-nak az a jelentménye, hogy vagy ő maga, vagy $\frac{1}{2}T$ egész számú többszörösével megnagyobbított, vagy megkisebbített értéke oly pillanatot jelent, amelyben a tűhegy a zérus helyen van. Ha ugyanis T_0 olyan t érték, amelynél ez a szinusz eltűnik, akkor $T_0 = t_0 \pm \frac{n}{2}T$ ahol n pozitív egész szám.

Az itt meghatározott mozgást egyszerű harmonikus mozgásnak, vagy egyszerű rezgő mozgásnak, az a együtt-ható abszolút értékét ezen mozgás amplitúdójának, a T időt ezen mozgás időperiodusának, T felét rezgésidőnek, a szinusz argumentumát, vagy annak 2π-ed részét ezen mozgás fázisának nevezzük.

T nagyságú időközökben szinusz függvény szerint ismétlődő mozgás ez, amelyben a szélső helyek a t_0 pillanat után $t = t_0 + \frac{T}{4}$, $t_0 + \frac{3T}{4}$, stb. időpontokra esnek, a zérus helyek pedig $t = t_0$, $t_0 + \frac{T}{2}$, $t_0 + \frac{3T}{2}$, stb. időpontokra.

A tűhegy sebességének a komponensei (x, y, z deriválásából):

$$\dot{x} \equiv \frac{dx}{dt} = \frac{2\pi a}{T} \cos 2\pi \frac{t-t_0}{T}, \quad \dot{y} \equiv \frac{dy}{dt} = 0, \quad \dot{z} \equiv \frac{dz}{dt} = 0.$$

A sebesség is egyszerű trigonometrikus függvénye tehát az időnek. Nyilvánvaló, hogy a szélső helyeken zérus a sebesség, mert a szinusz szélső értékeinél a koszinusz eltűnik. A zérus helyen pedig mindig legnagyobb a sebesség, nyilvánis a nagysága $\frac{2\pi a}{T}$ abszolút értéke. Az iránya egyezik, vagy ellenkező az x tengely irányával aszerint, amint a negatív szélső hely felől a pozitív szélső hely felé, vagy a pozitív szélső hely felől a negatív felé halad a tűhegy, ami közvetlenül is belátható.

A tűhegy gyorsulásának a komponensei (x, y, z deriválásából)

$$\ddot{x} = -\frac{4\pi^2 a}{T^2} \sin 2\pi \frac{t-t_0}{T}, \quad \ddot{y} = 0, \quad \ddot{z} = 0.$$

Így is írhatók ezek:

$$\ddot{x} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 x, \quad \ddot{y} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 y, \quad \ddot{z} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 z,$$

amiből látható, hogy a tűhegy gyorsulása állandó együttható szerint ellentételesen arányos a tűhegy totális elmozdulásával (x, y, z komponensű vektorral). Mindig épen ellenkező irányú tehát a totális elmozdulással s a nagysága oly módon nő, vagy fogy, mint a totális elmozdulásé; különösen pedig a szélső értékei a szélső helyeken, a zérus értékei a zérus helyeken vannak.

A gyorsulás ezen kifejezései másodrendű totális differenciálegyenletek, amelyeknek általános megoldásai a következők:

$$x = a_1 \sin 2\pi \frac{t-t_1}{T}, \quad y = a_2 \sin 2\pi \frac{t-t_2}{T}, \quad z = a_3 \sin 2\pi \frac{t-t_3}{T}$$

ahol $a_1, a_2, a_3, t_1, t_2, t_3$ az integrálás konstansai. Az előbb tárgyalt mozgáshoz nyilvánképen $a_1 = a$, $a_2 = 0$, $a_3 = 0$, $t_1 = t_0$ speciális értékek által jutunk vissza. Általános alakjuk szerint vizsgálva azonban ezen egyenleteket általánosabb mozgásfajjal találkozunk. Mégpedig általánosan elliptikus pályán való mozgást határoznak meg ezek az egyenletek. Győződjünk meg erről.

A szinuszokat fejtsük ki $2\pi\frac{t}{T}$ és $2\pi\frac{t_i}{T}$ trigonometrikus függvényei szerint:

$$x - a_1 \sin 2\pi\frac{t}{T}\cos 2\pi\frac{t_1}{T} + a_1 \cos 2\pi\frac{t}{T}\sin 2\pi\frac{t_1}{T} = 0$$

$$y - a_2 \sin 2\pi\frac{t}{T}\cos 2\pi\frac{t_2}{T} + a_2 \cos 2\pi\frac{t}{T}\sin 2\pi\frac{t_2}{T} = 0$$

$$z - a_3 \sin 2\pi\frac{t}{T}\cos 2\pi\frac{t_3}{T} + a_3 \cos 2\pi\frac{t}{T}\sin 2\pi\frac{t_3}{T} = 0.$$

Innen a $\sin 2\pi\frac{t}{T}$ és $\cos 2\pi\frac{t}{T}$ eliminálására szolgáló determinánsi egyenlet lineáris egyenlet x, y, z között, tehát azt már látjuk, hogy sík mozgással van dolgunk. Tudva pedig ezt, tegyük az x, y síkot a mozgás síkjába, midőn is z állandóan $=0$ s következőleg $a_3=0$. Maradnak az x, y síkra tartozó egyenletek, az x-et és az y-t tartalmazó egyenletek. Ezekből eliminálva most $2\pi\frac{t}{T}$ szinuszát és koszinuszát, másodrendű algebrai egyenletet kapunk x és y között oly együtthatókkal, amelyek szerint ellipszis (vagy kör, vagy egyenes) egyenlete az. A mozgás minden egyéb tulajdonságát is könnyen megállapíthatjuk x-nek és y-nak, mint t függvényének a kifejezésein.

5. Példa. A Keppler-féle törvények. Keppler részint Tycho de Brahenak, részint saját

magának a megfigyeléseiből naprendszerünk bolygóinak a mozgására három törvényt következtetett. (Astronomia nova 1609). Ezek a törvények nem elég pontosak, de Newtonnak alapul szolgáltak ały törvény felfedezésére, amely nagyon pontosnak bizonyult és általánosabb is, mert az összes égi testekre kiterjed.

Keppler törvényei szabatosan így fogalmazhatók meg: „Naprendszerünk minden bolygójának van oly pontja, amely az u. n. álló égitestek alakzatához viszonyitva megközelítőleg úgy mozog, hogy

1. a pályája ellipszis, amelynek egyik fókusza a napnak egy pontja,

2. e fókusz körül a területi sebessége állandó,

3. pályája nagy tengelyének a köbe úgy arány-lik egy másik bolygó-pálya nagy tengelyének a köbé-hez, mint az egyik és másik pálya megfutására szük-séges idő négyzete aránylik egymáshoz.

Az egyes bolygók azon pontját, amely közelítőleg így mozog, azok centrumának mondjuk, s pályáik azon fókuszát, amely a napban van, a nap centrumának mondjuk.

A.) Legközelebb a két első törvénnyel foglalkozunk, amelyeket azonnal analitikus formába foglalunk.

Ugy válasszuk meg koordinátarendszerünket, hogy annak az x, y síkja egy bolygócentrum pályáján feküdjék, origója a pálya (ellipszis) centrumában legyen és x tengelye az origó felől a napnak a centruma felé mutasson. Az ellipszis nagytengelyének a félhosszát a, kis tengelyének a félhosszát b jelölje.

Ezek értelmében Keppler első törvényét a következő két egyenlet tartalmazza:

$$(1)\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,, \quad z=0.$$

A Keppler második törvényét egyszerűen fejezhetjük ki a napcentrumból a bolygócentrumba nyíló vektornak r hossza és az x tengely felől számított elfordulásának ε szöge által. Az elfordulás tengelyét (a napcentrumon a pályasíkra merőlegesen áthaladó tengelyt) oly irányúnak gondoljuk, hogy időszámításunk kezdetén ε növekedőben legyen. Keppler második törvénye szerint létezik oly k konstans, hogy

$$\frac{1}{2}r^2\dot{\varepsilon}=k\,, \quad \left(\dot{\varepsilon}=\frac{d\varepsilon}{dt}\right).$$

Mivel $d\varepsilon$ az első időelemben pozitív, ennélfogva a k konstans pozitív s így az ε elfordulási szög folyvást növőleg változik, tehát a bolygócentrum szakadatlanul előrehalad a pályáján. Vonatkoztassuk azonban ezt az egyenletet is a derékszögű koordinátákra. Ha a pályacentrum és a napcentrum távolságát f jelöli, akkor

$$x - f = r\cos\varepsilon, \quad y = r\sin\varepsilon.$$

Ezekből deriválás rendén

$$\dot{x} = \dot{r}\cos\varepsilon - r\dot{\varepsilon}\sin\varepsilon, \quad \dot{y} = \dot{r}\sin\varepsilon + r\dot{\varepsilon}\cos\varepsilon.$$

Szorozzuk meg az itteni második egyenlet bal és jobb oldalát az előbbi első egyenlet bal és jobboldalával, az itteni első egyenlet bal és jobboldalát az előbbi második egyenlet bal és jobboldalával, azután vonjuk ki az új egyenleteket egymásból. Azt kapjuk, hogy

$$(x - f)\dot{y} - y\dot{x} = r^2\dot{\varepsilon}.$$

Összehasonlítva ezt a területi sebesség egyenletével látjuk, hogy így is írható azon egyenlet:

$$(2) \quad (x - f)\dot{y} - y\dot{x} = 2K.$$

Ez Kepplernek a derékszögű koordinátákra vonatkoztatott második törvénye.

B.) Tűzzük most feladatunkká, hogy meghatározzuk az x és y koordinátáknak ~~az~~ időtől való függését. Ezen célra egy új szögnek, Θ-nak az alkalmazásával a pályaegyenletek (1) alakját paramétrumosan állítjuk elő, ugyanis azt írván, hogy

$$(1)' \qquad x = a\cos\theta, \quad y = b\sin\theta,$$

amelyek θ eliminálásán tényleg (1)-hez juttatnak. Természetesen θ változik az idővel, mert a és b konstans, x és y pedig változik az idővel. Ezt a θ paramétrumot a csillagászok excentrikus anomáliának nevezik. Látni való, hogy ezt kell csak meghatároznunk, mint az idő függvényét. Meghatározása végett a területi sebesség egyenletéhez (2)-höz fordulunk, amelybe beírjuk (1)'-ből x és y kifejezését s az (1)'-ből deriválással származó

$$(1)'' \qquad \dot{x} = -a\dot{\theta}\sin\theta, \quad \dot{y} = b\dot{\theta}\cos\theta$$

kifejezéseket. Azt kapjuk, hogy

$$(2)' \qquad (a - f\cos\theta)\, b\dot{\theta} = 2k,$$

amelyből pedig integrálás rendén (miután dt-vel átszoroztunk és figyelembe vettük, hogy $\dot{\theta}\,dt = d\theta$):

$$(a\theta - f\sin\theta)\, b = 2kt + \text{const.}$$

De válasszuk meg úgy időszámításunk kezdetét, hogy abban θ értéke zérus legyen. Akkor az integrációs határozatlanság eltűnik, tehát θ-nak, mint az idő függvényének a meghatározására az

$$(2)'' \qquad a\theta - f \sin\theta = \frac{2K}{b} t$$

egyenletünk van. Ebből ismert módszerekkel bármely t értékhez tetszésszerinti pontossággal meghatározható a θ és így (1)' nyomán a bolygócentrum helye is.

A kezdeti idő itteni megválasztásában a bolygócentrum kezdeti helye az ellipszis nagy tengelyén a nap oldalon van, mint a (1)'-ből látható, amely szerint $\theta=0$ esetén $x=a$, $y=0$.

C.) Ami a harmadik Keppler féle törvényt illeti: ha egy bolygó pálya egyszeri megfutásának az időtartama T és fél nagy tengelyének a hossza $\underline{a}$, akkor ez a harmadik törvény nyilvánképen így is kimondható, hogy az $\frac{a^3}{T^2}$ hányados a nap minden bolygójának a pályáján ugyanaz.

Az alkalmazások érdekében most másképen is kifejezzük ezt a hányadost. Mialatt a bolygócentrum a maga kezdeti ($x=a$, $y=a$ $z=0$) helyéből ugyanebbe a helybe először jut vissza, azalatt a θ szög zérusból 2π-be változik s így θ-nak ezen értéke T idő mulva következik be. Eszerint a $\theta=2\pi$ és $t=T$ két összetartozó érték, tehát (2)''-nek szükségkép eleget tesz ez a két érték; következőleg (2)''-ből $2\pi ab = 2KT$, honnan:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{K^2 a}{\pi^2 b^2}.$$

Keppler harmadik törvénye úgy is kimondható tehát, hogy $K^2 \frac{a}{b}$ a nap minden bolygójának a pályáján ugyanaz.

6. Példa. Newton nehézkedési törvénye.

A.) Newton Keppler törvényeiből a gyorsulást, mint a hely függvényét állította elő, s ezzel jutott akkor a nagy felfedezéshez, amelyet a nehézkedési törvény nevével jelölünk meg. Az ő következtetése hosszadalmas geometriai szemlélődés révén bontakozott ki. Ma egyszerű analitikus eljárással érünk célt. Ilyen eljárás a következő:

Az előbbi példának (2)' és (1)'' egyenletéből deriválással ezeket kapjuk:

$$(a-f\cos\theta)\ddot{\theta}+f\sin\theta\,\dot{\theta}^2=0$$
$$\ddot{x}=-a\sin\theta\,\ddot{\theta}-a\cos\theta\,\dot{\theta}^2$$
$$\ddot{y}=+b\cos\theta\,\ddot{\theta}-b\sin\theta\,\dot{\theta}^2.$$

Ezen három egyenlet elsejéből írjuk be a másik kettőbe $\ddot{\theta}$ értékét, azután írjuk be (2)' alól $\dot{\theta}$ értékét, s azután írjuk be még (1)' alól $\cos\theta$ és $\sin\theta$ értékét az előbbi példából. E helyettesítések és a kínálkozó rendezések $\ddot{x}$ és $\ddot{y}$ számára az

$$\ddot{x}=-\frac{4K^2a}{b^2}\frac{x-f}{(a-\frac{f}{a}x)^3}\,,\quad \ddot{y}=-\frac{4K^2a}{b^2}\frac{y}{(a-\frac{f}{a}x)^3}$$

kifejezésekhez juttatnak. Azonban az ellipszis geometriájából tudva van, hogy a kis tengely pozitív oldalán fekvő fókusz-nak az ellipszis x, y pontjától való r távolsága és az x koor-dináta között az

$$a - \frac{f}{a} x = r$$

vonatkozás áll fenn. Beírva kifejezéseinkbe:

$$\ddot{x} = -\frac{4K^2 a}{b^2}\frac{x-f}{r^3}, \quad \ddot{y} = -\frac{4K^2 a}{b^2}\frac{y}{r^3}, \quad \ddot{z} = 0$$

az eredmény. Ilyenek Kepler törvényei szerint egy bolygó-centrum gyorsulásának a komponensei, mint a koordi-náták függvényei az oly tengelyrendszerben, amelynek az x tengelye a bolygópálya nagy tengelyében van s a pálya centruma felől a napcentrum felé irányul, az y tengelye pedig a bolygópálya kis tengelyében van. E-zen kifejezések szerint a bolygó centrum gyorsulásának az iránykoszinuszai:

$$-\frac{x-f}{r}, \; -\frac{y}{r}, \; 0,$$

tehát a bolygócentrum gyorsulása folyvást a napcentrum felé irányul, mert a bolygócentrumból a napcentrum-ba nyíló vektor komponensei $f-x$, $0-y$, 0 és a hossza

$$r = \sqrt{(x-f)^2 + y^2}$$

11.-ik ív.

minélfogva épen az itt írtak az iránykoszinuszai. A bolygócentrum gyorsulásának a nagysága pedig kifejezéseink értelmében =

$$\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2+\ddot{z}^2} = \frac{4\kappa^2 a}{b^2}\frac{1}{r^2},$$

tehát a napcentrumtól való mindenkori távolság négyzetével fordítottan arányos és pedig oly konstans arányossági együttható ($\frac{4\kappa^2 a}{b^2}$) révén, amely naprendszerünk minden bolygójának a pályáján ugyanaz: Keppler törvényei szerint naprendszerünk bolygócentrumainak a gyorsulásai folyvást a napcentrum felé irányulnak és közös együttható rendén arányosak a napcentrumtól való távolságok négyzetének fordított értékével.

B.) Newtont a Keppler féle törvényekből vont következtetése általánosabb törvény gondolatára indította, amely az összes égi testekre kiterjed s naprendszerünk bolygócentrumainak a mozgására is jobban ráillik, mint a Keppler féle törvények. Ez az általánosabb törvény szabatosan így mondható ki:

Léteznek tengelyrendszerek, amelyekben minden égi test valamely pontjának u. n. égi centrumnak a gyorsulása eredője az egyes többi égi centrumok felé irányult gyorsulásoknak s ezen parciális gyorsulások az illető távolságok négyzetével fordítva arányosak oly együttható szerint, amely csupán attól függ minden parciális gyorsulásban, hogy mely égi centrum felé irányul folyvást azon parciális gyorsulás, úgy-hogy azok a parciális gyorsulások, amelyek folyvást egy vala-mely égi centrum felé irányulnák, mind ugyanazon e-gyütthatószerint arányosak a távolság négyzetének a for-dított értékével.

Fejezzük ki ezt a törvényt analitikus alakban is. Az egyes égi centrumokat a sorszámokkal különböztessük meg egymástól. A hozzájuk tartozó arányossági együttható-kat rendre K_1, K_2, K_3 stb. jelöljék, koordinátáikat pedig t pillanatban $x_1, y_1, z_1; x_2; y_2; z_2; x_3, y_3, z_3;$ stb. Az i-dik és j-dik égi centrum távolságát r_{ij} vagy r_{ji} jelentse. Ezen jelölések értelmében az 1-es számú égi centrum parciális Newton-féle gyorsulása a 2-es számú felé:

$$\frac{K_2}{r_{12}^2}\left(\frac{x_2-x_1}{r_{12}}, \frac{y_2-y_1}{r_{12}}, \frac{z_2-z_1}{r_{12}}\right);$$

a 3-as számú felé:

$$\frac{K_2}{r_{13}^2}\left(\frac{x_3-x_1}{r_{13}}, \frac{y_3-y_1}{r_{13}}, \frac{z_3-z_1}{r_{13}}\right); \text{ stb.}$$

Tehát az 1-es számú égi centrum teljes Newton-féle gyorsu-lásainak komponensei a következők:

$$\ddot{x}_1 = K_2 \frac{x_2-x_1}{r_{12}^3} + K_3 \frac{x_3-x_1}{r_{13}^3} + K_4 \frac{x_4-x_1}{r_{14}^3} + \dots$$

$$\ddot{y}_1 = K_2 \frac{y_2-y_1}{r_{12}^3} + K_3 \frac{y_3-y_1}{r_{13}^3} + K_4 \frac{y_4-y_1}{r_{14}^3} + \dots$$

$$\ddot{z}_1 = K_2 \frac{z_2 - z_1}{r_{12}^3} + K_3 \frac{z_3 - z_1}{r_{13}^3} + K_4 \frac{z_4 - z_1}{r_{14}^3} + \dots$$

Hasonlólag találjuk, hogy a 2-es számú égi centrum teljes gyorsulásának a komponensei ezek:

$$\ddot{x}_2 = K_1 \frac{x_1 - x_2}{r_{21}^3} + K_3 \frac{x_3 - x_2}{r_{23}^3} + K_4 \frac{x_4 - x_2}{r_{24}^3} + \dots$$

$$\ddot{y}_2 = K_1 \frac{y_1 - y_2}{r_{21}^3} + K_3 \frac{y_3 - y_2}{r_{23}^3} + K_4 \frac{y_4 - y_2}{r_{24}^3} + \dots$$

$$\ddot{z}_2 = K_1 \frac{z_1 - z_2}{r_{21}^3} + K_3 \frac{z_3 - z_2}{r_{23}^3} + K_4 \frac{z_4 - z_2}{r_{24}^3} + \dots$$

s. i. t.

C.) Az egyes égi centrumokhoz tartozó $K_1, K_2, \dots$ együtthatók már ugyancsak Newton gondolatában az illető égi testek tömegeivel arányosak egy egyetemleges pozitív arányossági tényező szerint, vagyis oly arányossági tényező szerint, amely minden egyes parciális gyorsulásban ugyanaz és csak attól függ, hogy miként választjuk meg a tömegegységet.

Ha a tömegegységnek valamely megválasztásában M_1, M_2, stb. az égi testek tömege és v az egyetemleges arányossági tényező, akkor tehát

$$K_1 = v M_1, \quad K_2 = v M_2, \dots$$

és az 1-es számú égi centrum Newton féle gyorsulásának a komponensei ezek:

$$\ddot{x}_1 = v \left(\frac{M_2}{r_{12}^2} \cdot \frac{x_2 - x_1}{r_{12}} + \frac{M_3}{r_{13}^2} \cdot \frac{x_3 - x_1}{r_{13}} + \dots \right)$$

$$\ddot{y}_1 = \nu\left(\frac{M_2}{r_{12}^2}\cdot\frac{y_2-y_1}{r_{12}} + \frac{M_3}{r_{13}^2}\cdot\frac{y_3-y_1}{r_{13}} + \dots\right)$$

$$\ddot{z}_1 = \nu\left(\frac{M_2}{r_{12}^2}\cdot\frac{z_2-z_1}{r_{12}} + \frac{M_3}{r_{13}^2}\cdot\frac{z_3-z_1}{r_{13}} + \dots\right),$$

a 2-es számú égi centrum Newton féle gyorsulásá-inak komponensei:

$$\ddot{x}_2 = \nu\left(\frac{M_1}{r_{21}^2}\cdot\frac{x_1-x_2}{r_{21}} + \frac{M_3}{r_{23}^2}\cdot\frac{x_3-x_2}{r_{23}} + \dots\right)$$

$$\ddot{y}_2 = \nu\left(\frac{M_1}{r_{21}^2}\cdot\frac{y_1-y_2}{r_{21}} + \frac{M_3}{r_{23}^2}\cdot\frac{y_3-y_2}{r_{23}} + \dots\right)$$

$$\ddot{z}_2 = \nu\left(\frac{M_1}{r_{21}^2}\cdot\frac{z_1-z_2}{r_{21}} + \frac{M_3}{r_{23}^2}\cdot\frac{z_3-z_2}{r_{23}} + \dots\right)$$

s. i. t.

Ezek úgy vannak felírva, hogy mindegyik égi centrum-nak mindegyik égi centrum felé való parciális gyorsulásá-ban külön fel van tüntetve annak a nagysága és a három iránykoszinusza. Így az 1-es számú égi centrum gyorsulásá-nak a kifejezésében az égi centrum parciális gyorsulásainak a nagysága a 2-es, 3-as számú stb. égi testek felé rendre ezek:

$$\nu\frac{M_2}{r_{12}^2},\ \nu\frac{M_3}{r_{13}^2},\ \dots$$

iránykoszinuszai pedig rendre ezek:

$$\frac{x_2-x_1}{r_{12}},\ \frac{y_2-y_1}{r_{12}},\ \frac{z_2-z_1}{r_{12}};\ \frac{x_3-x_1}{r_{13}},\ \frac{y_3-y_1}{r_{13}},\ \frac{z_3-z_1}{r_{13}},\ \dots$$

D.) Newton még közelebb jutott a valósághoz azzal a föltevéssel, hogy bizonyos koordinátarendszerekben a tömegek miatt minden elemi (végtelen kicsi) testrésznek, minden, arány lag távollevő" (azaz: a méreteikhez képest nagy távolságú) elemi testrész felé van utóbbinak a tömegével a v tényező szerint arányos, távolságának a négyzetével ellenben fordítottan arányos parciális gyorsulása. Amennyiben mégsem e parciális gyorsulások eredője szerint mozognak az elemi részek, ez részint annak tulajdonítandó, hogy elektromos és mágneses állapotaikból folyólag is vannak parciális gyorsulásaik, részint pedig annak tulajdonítandó, hogy a szomszédos elemi részekkel való érintkezések, összekötte- tések következtében nem mozoghatnak szabadon.

Megjegyzendő, hogy Newtonnál a tömeg "quantitas materiae" és "quantitas materiae est mensura ejusdem orta ex illius densitate et magnitudine coniunctim." Ez azonban tökéletlen definíció, mert nem definiált fogalomra (densitas) támaszkodik. Mink a tömeg fogalmát a harmadik példában meghatározott és alább pontosabban is meghatározandó módon értsük. Képzeletben átterjeszthető a tömegnek a földi testekre definiált fogalma az égi testekre is annak a tapasztalati tételnek az alapján, hogy bármi módon képzeljünk részekre osztva egy testet, tömegrészeinek a tömegével egyenlő."

A tömeg fogalma

29. Kis testeken kezdjük a definíciót, de aztán korlátlanul általánosítjuk.

Egy kicsiny test tömegén közönségesen oly pozitív skalárist értünk, amelynek a számértéke jelenti, hogy a kis test a mérlegen üres térben hányszor annyi tiszta vizet helyettesíthet, amennyinek a szabványos környezeti nyomás alatt azon hőfokon, amelyen legkisebb tért tölt be, 1 cm^3 a térfogata. (A szabványos környezeti nyomás 0 C-i fokú 760 mm-u magas higanyoszlopnak felel meg s ez alatt a nyomás alatt a víz megközelítőleg 4 C-i fokon tölt be legkisebb tért.)

Akármilyen állapotban legyen egy kis test, a tapasztalás szerint mindig ugyanakkora a tömege és bármiképp osszuk részekre a kis testet, a tömege mindig részeinek az összes tömegével egyenlő. E fontos tapasztalásaink alapján bármi nagy testre s annak bármekkora részére kiterjesztjük a tömeg fogalmát t. i. olyképen, hogy akármi nagy test tömegén kis részei tömegének az összegét értjük, amely összeg szükségszerűleg teljesen határozott pozitív állandó.

Két, vagy több test rendszerének a tömegéről is beszélünk. Ezen az egyes testek tömegének az összegét értjük. Nyilvánképp teljesen meghatározott pozitív állandó az is.

30. Számottevő hiányosság állapítható meg e definíció és más definíciók körül is abban, hogy nincs meghatározva, hogy egy testet, vagy egy testrészt mily feltételek

alatt kelljen folyvást ugyanannak a testnek, vagy testrésznek tartanunk. E tekintetben a legszélsőbb empiriára vagyunk utalva. Az is figyelembe veendő, hogy eszményileg tökéletes mérleget és annak eszményileg tökéletes használatát kell feltételeznünk, továbbá még az is figyelembe veendő, hogy a mérlegre helyezett test részeinek valamivel megnagyobbul az értéke a mérlegen, midőn mélyebb helyre kerülnek, úgy, hogy jóllehet igen kicsiny mértékben a testek értéke a mérlegen azok elhelyezési módjával általában változik s következőleg az eszményiséghez annál közelebb jutunk, minél kisebb testeken adjuk meg a tömeg definicióját, aminek a végtelen kis test képzete felel meg. Az üres tér fogalma is határfogalom és pedig olyan, amelyet a valóságban tetszésszerinti pontossággal megközelíteni nem tudunk. De még egyéb nehézségek is vannak. Összeségben a tömeg e definiciójához az abstrakciók egész seregének komplikált rendszere fűződik.

31. Úgy alakja, mint tartalma szerint teljesen elvont, de egyszerűbb definíció a következő: „A testekhez és minden részükhöz tartozik olyan állandó pozitív skaláris, amelytől lényegesen függ, hogy milyen a testek mekanikai viselkedése s ezen skaláris egy tetszés szerint kiválasztott testhez tetszés szerint választható meg, de ha egyszer már egy testhez megválasztottuk, akkor minden más testhez és minden testrészhez teljesen határozott pozitív értéke tartozik a-

mely állandósága mellett azzal a tulajdonsággal is bír, hogy egy testhez, vagy testrészhez tartozó értéke mindig egyenlő a test vagy testrész bármely osztási részeihez tartozó értékeinek az összegével." Ezt nevezzük tömegnek. Megjegyzendő, hogy állandóságát oly univerzális értelemben gondoljuk, hogy koordinátarendszerünk megválasztásától is független az.

A tömegpont fogalma.

32. Valóságbeli testek általános mechanikájával más előadásokban fogunk találkozni. Jelenleg a lehető legegyszerűbb eszményi képzetre fogunk szorítkozni és csak az úgynevezett tömegpontok mechanikájával fogunk foglalkozni. Ez a mechanika célszerűen készíti elő a valóságbeli testek mechanikáját. De még annyiban is hasznos, hogy bizonyos feltételek teljesültével közvetlenül is alkalmazható valóságbeli testekre.

Két elvont fogalmat: a tömeg és a pont fogalmát egy fogalomba foglaljuk és tömeggel bíró pontokat gondolunk. Tehát pontokat, amelyek a mérlegen valóságbeli testeket képesek helyettesíteni. Ezeket a súlyosaknak képzelt pontokat nevezzük tömegpontoknak. Jóllehet a valóságban nem léteznek, úgy beszélünk róluk, mintha tényleg léteznének és még egy természeti törvény alá tartozóknak is tekintjük őket, ugyanis egy természeti törvény alá tartozóknak, amelynek az alapján elsegítenek a valóságbeli testek mechanikájához, sőt, amelynek az alapján a mechanikájuk bizonyos feltételek teljesültével közvetlenül is alkalmazható valóságbeli testekre.

Ez a közvetlen alkalmazhatóság abból áll, hogy az egyes tömegpontok bizonyos feltételek alatt egyes valóságbeli testeket képviselhetnek, mégpedig azon két feltétel alatt, hogy a képviselendő testek méretei elég kicsinyek lehetnek és legyenek arra, hogy mindegyik test egy pontjának a mekanikai viselkedése független legyen nagy pontosság szerint az adott viszonyok közt az egyes testek alakjától és irányulásától. Amellett ezek a testek esetleg még nagyok is lehetnek. Azonban mentül kisebbek, annál jobban rájuk illik mindig a tömegpontoknak az alább meghatározandó törvényre alapított mekanikája, minek rendén a végtelen kis test fogalma áll elő s ezen értelemben a végtelen kis test fogalma azonos is a tömegpont fogalmával.

A kényszer fogalma.

33. A következendőkben mindig azon az eshetőségen tartjuk majd a figyelmünket, hogy a tömegpontok véges nagy kiterjedésű testektől folyvást akadályozva vannak mozgásuk szabadságában. Pl. Egy tömegpont a koordinátarendszerben rögzített merev testtel érintkezik, amelynek a belsejébe nem

hatókat; ha ekkor az érintkezési helyén a merev test fölületének egy érintő síkja van, e síknak azon oldala felé, amelyen a merev test van, nem mozdítható a tömegpont, hanem csak a másik oldala felé, vagy tangenciális irányban. Ha pedig a tömegpont a merev testbe vájt kúpszerű mélyedés csúcsában van, akkor csak a kúpűr felé, vagy magán a kúpfelületen mozdítható. Ha a egy tömegpont egy nyújthatatlan feszült fonál egyik végére van erősítve, a fonál másik vége pedig elválhatatlanul a merev testnek egy pontjához van erősítve, akkor a tömegpont nem mozdítható úgy, hogy a merev test ama pontjától távolodjék, hanem csak úgy, hogy ahoz közeledjék, vagy hogy attól való távolsága ne változzék. Ha két tömegpont nyújthatatlan feszült fonál két végére van erősítve, akkor a két tömegpont nem mozdulhat úgy, hogy egymástól távolodjék, hanem csak úgy, hogy egymáshoz közeledjék, vagy hogy változatlan távolságban maradjon egymástól. stb.

Ez esetben és minden oly esetben, amelyben nem mozdíthatók egészen szabadon a tömegpontok, azt mondjuk, hogy kényszert viselnek, kényszernek nevezvén mozgásuk szabadságának a korlátozottságát, nem különben azoknak a viszonyoknak az összességét, amelyek mozgásuk szabadságát korlátozzák. Azoknak a véges kiterjedésű testeknek az összességét pedig, amelyektől mozgásuk szabadságának a korlátozása származik, kényszer-állományoknak nevezzük.

34. Ámde tárgyalásunk nagy akadályba ütköznék, ha akármilyen kényszerállományra ki akarnók terjeszteni, mert arra volnánk utalva, hogy magának a kényszerállománynak a mekanikájával is foglalkozzunk. Ezt a nehézséget csak úgy háríthatjuk el, ha bizonyos eszményi kényszerállományokra szorítkozunk. Már az iménti példákat is terhelik eszményiségek, milyen a rögzítés, merevség, nyujthatatlanság, hozzáerősítés postulátuma, amelyek az ő rideg értelmükben csak többé-kevésbé megközelíthetők, de el nem érhetők. Itt mink a kényszerállományt alkotó testek két eszményi fajára fogunk szorítkozni. Az egyik gyanánt oly véges kiterjedésű testekre gondolunk, amelyek összes tömege elenyésző kicsiny mindenegyes tömegpont tömegéhez mérten, de mindazonáltal elég összetartók ők arra, hogy a velük érintkező, vagy hozzájuk erősített tömegpontok mozgásának a szabadságát korlátozzák. Ilyennek tekinthető az előbbi példákból a fonál, ha igen vékony az és ennek dacára sem nyujtható számottevően és az adott viszonyok közt nem szakadhat el. Ilyennek tekinthető egy igen vékony, mégis merev pálca, vagy hártya, stb. stb. A végletekig menő absztrakcióval tömegtelenekének tekintjük a szabadság korlátozó testek e faját és rendszerüket kapcsoló rendszernek nevezzük.

A szabadságkorlátozó testek másik fajtájaként oly végeskiterjedésű testekre gondoljunk, amelyek mechanikai viselkedése független a tömegpontoktól, vagyis amelyeket illetően az, hogy nyugalomban vannak-e, vagy mozognak-e, és ha nyugalomban vannak, mily helyzetekben vannak nyugalomban, ha mozognak, miképen mozognak, – független a tömegpontoktól, egészen úgy viselkednek, mintha a tömegpontok nem is léteznének. Ez is eszményi rendszer, mert a feltételezett függetlenség valósággal csak megközelíthető, de teljesen el nem érhető. Az előbbi példákból ide tartozik a koordinátarendszerben rögzített merev test. Ilyképp gondolt testek rendszerét teleprendszernek fogjuk nevezni. Mindig csak kapcsolórendszert, vagy teleprendszert, vagy ilyenek rendszerét alkotó kényszerállomásokra gondolunk majd. Másféle szabadságkorlátozó testek rendszerét kirekesztjük tárgyalásainkból és mindig csak ilyenek jelenlétét tételezzük fel. A valósághoz való viszonyuk abban nyilvánul, hogy valóságbeli testekkel többé-kevésbbé megközelíthetők.

A kényszer matematikai meghatározása.

35. A tömegpontok t pillanati helyei: x_1, y_1, z_1; $x_2, y_2, z_2, \ldots$ legyenek. Ha ezekben a helyekben kényszert viselnek a tömegpontok, akkor végtelen kis dt idő múlt sem te-

hetnek bármily elmozdulásokat a helyeikből. Amelyeket tehetnek, azokat lehetséges elemi elmozdulásaiknak nevezzük. Hogy mely elemi elmozdulások lehetségesek, azt az itt feltételezett kényszerállomány esetében tapasztalás szerint mindig egyszerű egyenletekkel, vagy egyenlőtlenségekkel, vagy mindkét félékkel lehet kifejezni. Nevezetesen a dt időelem és a benne lehetséges elemi elmozdulások komponensei közt fennálló egyszerű relációkkal. úgy, hogy mindazok az elemi elmozdulások, – és csak azok lehetségesek, – amelyek ezeket az egyszerű relációkat kielégítik.

Ha az $x_1, y_1, z_1;\ x_2, y_2, z_2 \ldots$ stb. t pillanati helyekből dt idő alatt lehetséges elmozdulásokat $(\partial x_1, \partial y_1, \partial z_1);\ (\partial x_2, \partial y_2, \partial z_2); \ldots$ stb. jelölik, akkor tehát a kényszert kifejező relációk ily algebrai rendszert alkotnak:

$$
(1)\quad \left\{
\begin{array}{l}
\sum_i (A_{1i}\partial x_i + B_{1i}\partial y_i + C_{1i}\partial z_i) + E_1 dt = 0 \\
\sum_i (A_{2i}\partial x_i + B_{2i}\partial y_i + C_{2i}\partial z_i) + E_2 dt = 0 \\
- - - - - - - - - - - - - \\
\sum_i (L_{1i}\partial x_i + M_{1i}\partial y_i + N_{1i}\partial z_i) + P_1 dt \geqq 0 \\
\sum_i (L_{2i}\partial x_i + M_{2i}\partial y_i + N_{2i}\partial z_i) + P_2 dt \geqq 0 \\
- - - - - - - - - - - - - ,
\end{array}
\right.
$$

amelyekhez járul, hogy $dt > 0$.

3 b. Az A, B, C, E, L, M, N, P-féle együtthatókról az itt go[ndolt] kényszerekben feltehetjük és mindig fel is tesszük, hogy ezek tisztán a tömegpontok helyeinek (koordinátáinak

és az időnek a határozott függvényei s az időtől csak annyiban függenek, amennyiben a kényszerállomány a tömegpontoktól független mozgásokat végez koordinátarendszerünkben. Még az is feltehető ezen együtthatókról, hogy általában folytonos és legalább egyszer egyenletesen deriválható függvényeik a tömegpontok helyeinek és az időnek.

Azon különös esetben, hogy olyan értékeket vesznek fel az együtthatók, hogy azután az egymástól független relációk száma kisebb lesz, vagy, hogy az összes relációk megszűnnek létezni, ez a körülmény nyilvánvalóan a kényszer enyhülését illetőleg teljes megszűnését jelenti. Viszont azonban a kényszer szigorúbbá is válhatik, midőn aztán új relációk lépnek fel az (1) alatt.

Legfontosabb oly időtartamra terjeszteni ki a vizsgálódást, amely alatt a kényszer szakadatlanul ugyanaz marad, amit úgy értsünk, hogy azon időtartamban az egymástól független kényszer relációk (1) száma változatlan, s a bennük foglalt együtthatók a koordinátáknak és az időnek egyenletesen deriválható folytonos függvényeik. Az ily időtartamra folytonosnak mondjuk a kényszert s a következőkben, mint főfontosságúakkal, mindig csak folytonos kényszerekkel fogunk törődni.

37. Amíg pedig folytonos a kényszer, addig a dt időelemben létesülő $(dx_1, dy_1, dz_1); (dx_2, dy_2, dz_2); \ldots$ tényleges ele-

mi elmozdulások a lehetséges elemi elmozdulásoknak az egyenlőtlenségeit is az egyenlőségi jel szerint elégítik ki, ezeknek is egyenletileg tesznek eleget. Ugyanis, mihelyt egy egyenlőtlenséget az egyenlőtlenségi jel (70) szerint elégítenek ki, már a $(t+dt)$ idő végétől számítva ez az egyenlőtlenség megszűnnék létezni, mert az olyan elemi elmozdulások is lehetségesek volnának, amelyek annak az egyenlőtlenségnek az ellenkezőjét teljesítik. A dt időelemben létesülő (dx_1, dy_1, dz_1); (dx_2, dy_2, dz_2); ... valóságos elemi elmozdulások folytonos kényszer alatt kielégítik tehát a következő egyenleteket:

$$(2)\quad\begin{cases}\sum_i \left(A_{i1}\, dx_i + B_{i1}\, dy_i + C_{i1}\, dz_i\right) + E_1\, dt = 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \sum_i \left(L_{i1}\, dx_i + M_{i1}\, dy_i + N_{i1}\, dz_i\right) + P_1\, dt = 0 \\ \cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Csakis addig lehet folytonos a kényszer, amíg ezek az egyenletek teljesülnek.

38. Tegyük azt az észrevételt, hogy ha olyan a kényszer, hogy koordinátarendszerünkben a tömegpontok minden lehetséges helyzetükben lehetnek nyugalomban, akkor minden E és P együttható zérus a koordinátarendszerünkben, mert akkor (2) alól a nyugalom számára $E_1\, dt = 0$, ill. $P_1\, dt = 0$ stb. adódik. Midőn azonban a kényszerállomány nem végez a tömegpontoktól független mozgást

kordinátarendszerünkben, akkor nyilvánképen lehetséges a tömegpontok nyugalma azok minden lehetséges helyzetében a kordinátarendszerünkben. Akkor tehát mindig minden E és P zérus. Ezen együtthatók csak oly kényszerben léterhetnek, amelynek az állománya a tömegpontoktól független mozgásokat végez, vagy ily mozgásokat is végez kordinátarendszerünkben.

A tömegpontok szabadgyorsulása s kényszergyorsulása.

39. Ha adott tömegpontok gyorsulásait, mint mindenkori sebességeik, helyeik és az idő határozott függvényeit ismerjük, akkor adott kezdeti helyekhez és kezdeti sebességekhez minden pillanatra módunkban van meghatározni tetszésszerinti pontossággal a tömegpontok helyeit, tehát meghatározni azok mechanikai állapotát. Midőn azonban nem szabadok a tömegpontok, amit most már mindig felteszünk, akkor nem mindig szükséges ismernünk azok tényleges gyorsulásait és bizonyos feltételek alatt elégséges tudnunk minden pillanatban, hogy ha akkor szabadokká lennének, – anélkül azonban, hogy a kényszerállomány számottevően változnék meg, – mik lennének a gyorsulásaik, mint sebességeiknek, helyeiknek és az időnek a függvényei.

A tömegpontok ezen képzelt gyorsulásait szabad gyorsulásaiknak nevezzük. Egy tömegpont szabad gyorsulása t pillanatban az a gyorsulás tehát, amely a tömegpont tényleges gyorsulása volna, ha a következő dt időelemben a tömegpont környezete a kényszer állományhoz tartozó, pl. tériát nem tartalmazna.

Oly viszonyokra szorítkozunk, amelyek között a szabad gyorsulás, mint az időnek s a tömegpontok helyeinek és sebességeinek folytonos határozott függvénye jelentkezik. Ha valamely idő alatt szabad volna egy tömegpont, úgy ezen idő alatt a szabad gyorsulása volna egyszersmind a tényleges gyorsulása. Midőn azonban nem szabad, akkor a tényleges gyorsulása általában különbözik a szabad gyorsulásától.

40. Egy tömegpont t pillanati tényleges gyorsulását $\ddot{r}$, t pillanati szabad gyorsulását pedig $\mathfrak{G}$ jelölje. Kényszer esetén általában $\ddot{r} \neq \mathfrak{G}$.

Jelölje továbbá $\mathfrak{G}^*$ azt a vektort, amelyet $\mathfrak{G}$ szabadgyorsuláshoz kell adnunk, hogy ki adódjék a tényleges gyorsulás; azaz legyen olyan a $\mathfrak{G}^*$, hogy:

$$\ddot{r} = \mathfrak{G} + \mathfrak{G}^*.$$

Ha szabad volna a tömegpont, akkor $\mathfrak{G}^* = 0$ volna, ha azonban nem szabad a tömegpont, akkor általában $\mathfrak{G}^* \neq 0$.

A tényleges gyorsulás tehát két oly gyorsulás $\mathfrak{V}$ és $\mathfrak{V}^*$ resultánsa, amelyek egyike a szabad gyorsulás, másika pedig, - ha nem zérus, - amiatt létezik, hogy kényszert visel a tömegpont, minélfogva ezt a gyorsulást a tömegpont kényszergyorsulásának nevezzük.

41. Fontos tulajdonsága a kényszergyorsulásnak, hogy minden tengelyrendszerben ugyanazon vektor az. Irjuk ugyanis egy tömegpont t pillanati koordinátáit tengelyrendszerünkben egyszerűen x, y, z-nek, egy másik tengelyrendszerben $x', y' z'$-nek. Ha azután:

$$\ddot{x} = \alpha_1\ddot{x}' + \alpha_2\ddot{y}' + \alpha_3\ddot{z}' + \mathcal{F}'$$
$$\ddot{y} = \beta_1\ddot{x}' + \beta_2\ddot{y}' + \beta_3\ddot{z}' + \mathcal{G}'$$
$$\ddot{z} = \gamma_1\ddot{x}' + \gamma_2\ddot{y}' + \gamma_3\ddot{z}' + \mathcal{H}'$$

tesszük, akkor a 11. artikulus értelmében $\mathcal{F}', \mathcal{G}', \mathcal{H}'$ az idő"nek, az x', y', z' koordinátáknak és az $\dot{x}', \dot{y}', \dot{z}'$ sebességi komponenseknek a függvényeik. Ha pedig a szabadgyorsulás komponenseit $\ddot{\xi}, \ddot{\eta}, \ddot{\zeta}$, illetőleg $\ddot{\xi}', \ddot{\eta}', \ddot{\zeta}'$ jelölik a t pillanatban, akkor nemkülönben

$$\ddot{\xi} = \alpha_1\ddot{\xi}' + \alpha_2\ddot{\eta}' + \alpha_3\ddot{\zeta}' + \mathcal{F}'$$
$$\ddot{\eta} = \beta_1\ddot{\xi}' + \beta_2\ddot{\eta}' + \beta_3\ddot{\zeta}' + \mathcal{G}'$$
$$\ddot{\zeta} = \gamma_1\ddot{\xi}' + \gamma_2\ddot{\eta}' + \gamma_3\ddot{\zeta}' + \mathcal{H}',$$

mert az idő", a hely és sebesség a tényleges gyorsulás és a meg -

felelő szabadgyorsulás mellett ugyan azok lévén $\mathfrak{F}', \mathfrak{G}', \mathfrak{H}'$ is egyezik a kétféle gyorsulás mellett.

Kivonva egymásból rendre a két féle egyenleteket:

$$\ddot{x} - \ddot{\xi} = \alpha_1(\ddot{x}' - \ddot{\xi}') + \alpha_2(\ddot{y}' - \ddot{\eta}') + \alpha_3(\ddot{z}' - \ddot{\zeta}'), \text{ stb.}$$

adódik, tehát az $(\ddot{x} - \ddot{\xi}, \ddot{y} - \ddot{\eta}, \ddot{z} - \ddot{\zeta})$ és az $(\ddot{x}' - \ddot{\xi}', \ddot{y}' - \ddot{\eta}', \ddot{z}' - \ddot{\zeta}')$ vektor azonos. Vektorjelvényeink szerint az $\ddot{v} - \mathfrak{G}$ és az $\ddot{v}' - \mathfrak{G}'$ vektor ugyan az a vektor, amelyek elseje pedig $= \mathfrak{G}^*$ és a második $= \mathfrak{G}'^*$

Erőfogalmak.

41. Egy tömegpont tömegének és szabadgyorsulásának a szorzatát a tömegpontra ható szabaderőnek nevezzük.

Ha tehát m a tömegpont tömege és t pillanatban $\mathfrak{G}$ a tömegpont szabadgyorsulása, akkor az

$$m\mathfrak{G} \equiv \mathfrak{F}$$

vektor a tömegpontra t pillanatban ható szabaderő. Midőn például a nehézségi gyorsulás teszi a szabadgyorsulást, s annak a nagysága g, az iránykoszinuszai pedig α, β, γ, akkor $\mathfrak{F} = mg(\alpha, \beta, \gamma)$, amelyet nehézségi szabaderőnek nevezünk.

Iránya a szabaderőnek nyilvánvalóképen mindig egyezik a szabadgyorsulás irányával. Nagysága pedig mindig a szabadgyorsulás nagyságának és a tömegpont tömegének a szorzatával egyenlő".

Általában, mint több egyszerűbb tulajdonságú vektor eredője, összege jelentkezik a szabaderő:

$$\mathfrak{F}^s = \mathfrak{F}^s_1 + \mathfrak{F}^s_2 + \dots$$

amelyek egyenkint ugyanazok az időnek s a tömegpontok helyeinek és sebességeinek a függvényei. Ezeket parciális szabaderőknek mondjuk.

43. Egy tömegpont tömegének és kényszergyorsulásának szorzatát a tömegpontra ható kényszererőnek nevezzük. Ha tehát m a tömegpont tömege és t pillanatban $\mathfrak{G}^*$ a tömegpont kényszergyorsulása:

$$m\,\mathfrak{G}^* = \mathfrak{F}^{s\,*}$$

vektor a tömegpontra a t pillanatban ható kényszererő. Iránya nyilvánvalóképen mindig egyezik a kényszergyorsulás irányával. Nagysága pedig a kényszergyorsulás nagyságának és a tömegpont tömegének a szorzatával egyenlő. Minthogy a kényszergyorsulás minden koordinátarendszerben ugyanaz a vektor, a tömeg pedig ugyanaz a skaláris, ennélfogva a kényszererő is minden koordinátarendszerben ugyanaz a vektor.

Általában a kényszererő is több egyszerűbb tulajdonságú vektor eredője gyanánt jelentkezik.

$$\mathfrak{F}^{s*} = \mathfrak{F}_1^{s*} + \mathfrak{F}_2^{s*} + \ldots,$$

amelyeket parciális kényszererőknek mondunk.

44. Egy tömegpontra egyszerre ható szabaderő és kényszererő eredőjét egyszerűen a tömegpontra ható erőnek nevezzük.

A tömegpontra t pillanatban ható erő tehát:

$$\mathfrak{F}^s + \mathfrak{F}^{s*} \equiv m(\mathfrak{G} + \mathfrak{G}^*)$$

és így a 40. artikulus szerint egyszersmind

$$\mathfrak{F}^s + \mathfrak{F}^{s*} = m\ddot{\mathfrak{r}}.$$

szerint a tömegpontra ható erőnek az iránya mindig megegyezik a tömegpont tényleges gyorsulásának az irányával, nagysága pedig mindig a tényleges gyorsulás nagyságának és a tömegpont tömegének a szorzatával egyenlő. Az ellentétét (ellenkező irányú, egyenlő nagyságú vektort) a tömegpont inercia erejének mondjuk.

45. Ha a tömegpontra ható erő valamely időtartamban zérus, úgy ebben az időtartamban állandó sebességgel mozog, vagy nyugszik a tömegpont tengelyrendszerünkben, mert ha $\mathfrak{F}^s + \mathfrak{F}^{s*} = 0$, akkor $\ddot{\mathfrak{r}} = 0$, tehát $\dot{\mathfrak{r}} = \text{const.}$ Viszont amely időtartamban $\dot{\mathfrak{r}} = \text{const.}$, abban az időtartamban $\ddot{\mathfrak{r}} = 0$ lévén, $\mathfrak{F}^s + \mathfrak{F}^{s*} = 0$. A tömegpont tehát addig és csak addig, amíg a reá ható teljes erő zérus, vagy

nyugalomban van, vagy egyenes vonalon, folyvást előrehaladva mozog és egyenlő időkben egyenlő utakat tesz meg. Ilyenkor azt mondjuk, hogy a tömegpontra ható parciális szabaderők és kényszererők ekvilibriumot tartanak, vagy hogy egyensúlyban vannak, vagy, hogy ellensúlyozzák egymást. Valahányszor pedig a tömegpontra ható szabaderő zérus, azt mondjuk, hogy a parciális szabaderők ellensúlyozzák egymást, midőn is:

$$m\ddot{r} = \vec{K}^*$$

46. Jóllehet az erőfogalmak csak egy állandó skaláris faktor (a tömeg) által különböznek a megfelelő gyorsulási fogalmaktól, mégis nagyon hasznos fogalmak azok, márcsak azért is, hogy róluk többnyire könnyebben tudunk beszélni, mint a gyorsulásokról, mert tökéletesítései azok a közéletbeli erőfogalmaknak, amelyek körül pedig a mi nyelvünkben is számos jól alkalmazható beszédmód fejlődött ki. De hasznos fogalmak az erőfogalmak kivált azért, mert alapvető tapasztalataink egyenesen reájuk vonatkoznak.

Súrlódás.

47. Ha az egész kényszerállományt koordinátarendszerünkhöz rögzítjük, s ekkor valamely tömegpont puszta érintkezési kényszerben úgy mozog a kényszerállo-

mányon, hogy mozgása független a reá ható szabaderő normális komponensétől (a kényszerállomány fölületének mindenkori normálisára eső komponensétől azon szabaderőnek), akkor azt mondjuk, hogy a tömegpont nem surlódik a kényszerállományon, ellenkező esetben azt mondjuk, hogy surlódik a kényszerállományon. Bármiféle viszonyban legyen pedig egy tömegpont a kényszerállománnyal, ha arra az esetre, hogy puszta érintkezési viszonyban volna véle, nem surlódnék azon, akkor tényleges kényszerviszonyában is azt mondjuk róla, hogy nem surlódik, mégpedig tekintettel csupán azokra a mozgásokra (ha ugyan vannak olyanok), amelyeket tényleges kényszerviszonyában végezhet a kényszerállományon. Ellenkező esetben azt mondjuk, hogy surlódik a tömegpont a kényszerállományon.

48. A kapcsoló rendszerről abban az esetben mondjuk, hogy surlódik a kényszerállományon, ha legalább egy elemi része mint magában való tömegpont surlódnék a kényszerállományon. Ha egyetlen elemi része sem surlódnék, mint magában való tömegpont a kényszerállományon, akkor a kapcsoló rendszerről magáról is azt mondjuk, hogy nem surlódik a kényszerállományon.

49. Ha sem az egyes tömegpontok nem surlódnak

sem a kapcsoló rendszer nem surlódik a kényszerállományon, akkor surlódástalannak mondjuk a tömegpontok rendszerét s a következendőkben, hacsak az ellenkezőt ki nem jelentjük, mindig tömegpontok surlódástalan rendszerét gondoljuk.

Azonkívül egyszersmindenkorra feltesszük a tömegpontokról, hogy azok egymással vizsgálódásunk folyamán soha nem találkoznak s egyáltalában nem érintkeznek egymással, minélfogva egymáson való surlódásukról nem is szólunk.

A kapcsoló rendszer passzivitása.

50. Tegyük fel, hogy koordinátarendszerünkben t pillanatban nyugalomban vannak a tömegpontok és t pillanatra következő kis $\mathcal{T}$ időközben nyugalomban tartjuk a teleprendszert, a tömegpontokra pedig oly szabaderőket hattatunk, amelyek mindenegyes tömegpontos ellensúlyozzák egymást. Ha a tömegpontok nyugalomban maradnak, bármely időpontot jelentsen is t és bármely lehetséges helyzeken voltak is azok a t pillanatban, akkor azt mondjuk a kapcsoló rendszerről, hogy passziv az.

A következendőkben, hacsak kifejezetten ellenkezőt nem mondunk, mindig feltesszük, hogy a kapcsoló rendszer passziv. Azt pedig egyszersmindenkorra feltesszük, hogy a kapcsoló rendszer mekanikai viselkedését materiális rendszerünknek (a tömegpontok s a környezeti állomány rendszerének) a környezete számottevően nem módosítja.

Munka-fogalmak.

51. Egy tömegpontra t pillanatban ható $\vec{F}$ szabaderőnek és a tömegpont dt időelemben kelt $d\vec{r}$ elemi elmozdulásának az $\vec{F}d\vec{r}$ skaláris szorzatát elemi munkának nevezzük, az $\vec{F}$ szabaderőtől a tömegpont $d\vec{r}$ elmozdulásán végzett elemi munkának, vagy a tömegponton az $\vec{F}$ szabaderőtől dt időelemben végzett munkának. Részletesen írva:

$$F_x^s dx + F_y^s dy + F_z^s dz$$

a szabaderőnek a tömegponton dt időelemben végzett munkája, ahol F_x^s stb. a szabaderőnek, dx stb. az elemi elmozdulásnak a komponensei.

Ha pedig az $\vec{F}$ szabaderő és $d\vec{r}$ elemi elmozdulás szöge θ, akkor nem különben

$$|\vec{F}| \cdot |d\vec{r}| \cdot \cos\theta$$

is a szabaderő munkája a tömegpont elemi elmozdulásán. Ez az $\vec{F}$ szabaderőnek a $d\vec{r}$ elemi elmozdulás irányára eső $|\vec{F}| \cdot \cos\theta$ értékéből és az elemi elmozdulás $|d\vec{r}|$ nagyságából képezett szorzat (és egyszersmind az elemi elmozdulásnak az $\vec{F}$ erő irányára eső $|d\vec{r}|\cos\theta$ értékéből, meg $\vec{F}$ nagyságából képezett szorzat.)

Ha a tömegpont t pillanatig s mekkoraságú utat tett meg és ez a dt időelemben ds-el nagyobbodik, akkor $|d\vec{r}| = ds$, tehát

$$|\vec{F}|\,ds\cdot\cos\theta$$

is azon elemi munka.

Jelölje rövidebben X, Y, Z a szabaderő három komponensét és R a nagyságát, akkor az

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$$

elemi skaláris és ugyancsak az

$$R.\,ds\cdot\cos\theta$$

elemi skaláris is a szabaderőnek a dt időalatt a tömegponton végzett elemi munkája:

$$\vec{F}\,d\vec{r} = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = R\,ds\cos\theta.$$

A legtöbbször használandó alakja

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz.$$

52. Az egyes tömegpontokra t pillanatban ható szabaderőktől az illető tömegpontokon dt időelemben végzett ele–

mi munkák összegét a szabaderőktől a tömegpontok rendszerén, vagy röviden a tömegpontokon dt időelemben végzett elemi munkának nevezzük. Ha tehát az egyes tömegpontokhoz tartozó egyidejű mennyiségeket alsó számindexekkel különböztetjük meg egymástól, akkor

$$\sum_i (X_i dx_i + Y_i dy_i + Z_i dz_i)$$

a szabaderőknek a tömegpontokon dt időelemben végzett munkája.

53. Egy tömegpontra t pillanatban ható $\mathfrak{A}^*$ kényszererőnek és a tömegpont dt időelemben létesült $d\mathfrak{r}$ elemi elmozdulásának $\mathfrak{A}^{s*} d\mathfrak{r}$ skaláris szorzatát az $\mathfrak{A}^{s*}$ kényszererőtől a tömegponton dt időelemben végzett elemi munkának nevezzük. Ha tehát az $\mathfrak{A}^*$ kényszererő komponensei a használt koordinátarendszerben X^*, Y^*, Z^*, akkor az

$$X^* dx + Y^* dy + Z^* dz$$

elemi skaláris a kényszererőnek a tömegponton dt időelemben végzett elemi munkája.

54. A kényszererőktől dt időelemben az egyes tömegpontokon végzett elemi munkák összegét

$$\sum_i (X_i^* dx_i + Y_i^* dy_i + Z_i^* dz_i)$$

összeget a kényszererőktől a tömegpontokon dt időelemben végzett elemi munkának nevezzük. Röviden a kényszer elemi munkájának is mondjuk. Mint hogy

$$m_i \ddot{x}_i = X_i + X_i^* \text{ ; stb.}$$

tehát

$$X_i^* = m_i \ddot{x}_i - X_i \text{ ; stb.}$$

úgy a kényszertől dt időelemben végzett elemi munka ekép is írható:

$$\sum_i [(m_i \ddot{x}_i - X_i) dx_i + (m_i \ddot{y}_i - Y_i) dy_i + (m_i \ddot{z}_i - Z_i) dz_i]$$

55. Egy tömegpontra t pillanatban ható szabaderőnek, $\mathfrak{F}$-nek és a tömegpont dt időelemben lehetséges $\delta \mathfrak{r}$ elemi elmozdulásának $\mathfrak{F}\delta\mathfrak{r}$ skaláris szorzatát a tömegpontra ható szabaderő dt időelemben lehetséges elemi munkájának nevezzük. Ilyen mindig végtelen sok van, mert adott időelemben mindig végtelen sokféle nagyságú elemi elmozdulást végezhet egy tömegpont és általában végtelen sokféle irányút is. Ellenben adott időelembe a tömegpontnak szükségképen egyetlen valóságos elmozdulása, tehát a tömegponton a szabaderőnek egyetlen valóságos munkája tartozik. A tömegpontnak a dt időelemben lehet-

séges elemi elmozdulásai közül akármelyiket jelöli a ∂v elemi vektor, úgyhogy $F\partial v$ akármelyikét jelenti azon elemi munkáknak, amelyeket dt időelemben végezhet a szabaderő a tömegponton. Részletesen írva,

$$X\partial x + Y\partial y + Z\partial z$$

jelenti a tömegpontra ható szabaderő akármely lehetséges elemi munkáját a dt időelemben.

Az egyes tömegpontokra t pillanatban ható szabaderők dt időelemben egyszerre lehetséges elemi munkáinak összegét:

$$\sum_i (X_i\partial x_i + Y_i\partial y_i + Z_i\partial z_i)$$

jelentse. Ezt a tömegpontok rendszerén a szabaderők dt időelemben lehetséges elemi munkájának mondjuk.

56. Hasonlóképen, mindig egyszerre lehetséges elemi elmozdulásokat értve, a

$$\sum_i (X_i^*\partial x_i + Y_i^*\partial y_i + Z_i^*\partial z_i)$$

összeget a tömegpontokrendszerén a kényszer dt időelemben lehetséges elemi munkájának nevezzük. Ezt az 54. artikulus vége felé írtaknál fogva, a tömegek, gyorsulások, a szabaderők révén így is jegyezhetjük:

$$\sum_i \{(m_i\ddot{x}_i - X_i)\partial x_i + (m_i\ddot{y}_i - Y_i)\partial y_i + (m_i\ddot{z}_i - Z_i)\partial z_i\}$$

szerint, amint más és más lehetséges elemi elmozdulásnak a komponenseit gondoljuk ezekben a kifejezésekben, más és más elemi munkát jelentenek azok.

Tegyük azt az észrevételt, hogy a következő tények:

1.) a tömegpontok tömegei ($m_1, m_2, \ldots$)

2.) a tömegpontok szabadgyorsulásai ($\frac{X_1, Y_1, Z_1}{m_1}, \frac{X_2, Y_2, Z_2}{m_2}, \ldots$)

3.) a tömegpontok kényszere (a lehetséges elemi elmozdulások révén)

4.) a tömegpontok mechanikai állapota (a tényleges gyorsulások révén) meghatározzák minden időelemben a kényszer lehetséges elemi munkáját a tömegpontok rendszerén.

Tömegpontok mechanikájának alaptörvénye.

57. Ezen alaptörvény érvényessége mindazokat a kikötéseket feltételezi, amelyeket az előzményekben legalább is mint általában megvalósítandókat tettünk. Mielőtt kimondanók azt, idézzük emlékezetünkbe kikötéseinket:

I. A kényszerállományt csupán kapcsoló rendszer, vagy teleprendszer, vagy kapcsoló és teleprendszer alkotja (34, 35, 36. pont.)

II. A kényszer folytonos (36. art.)

III. A tömegpontok szabadgyorsulásai az időnek, a tömegpontok helyeinek és a tömegpontok sebességeinek általában folytonos, határozott függvényeik (39. art.) s úgy a tömegpontokra ható szabaderők is (42. art.)

IV. A kapcsolórendszer passzív. (50. art.)

V. A kapcsolórendszer mekanikai viselkedését a környezet számottevően nem módosítja (50. art. befejezése)

VI. A tömegpontok egymással nem érintkeznek (49. art. vége)

VII. Surlódástalan a tömegpontok rendszere. (49. art.)

58. A következő tapasztalati törvényünk van:

„Kikötéseink keretében a tömegpontok oly tömegei, szabadgyorsulásai, kényszere és mekanikai állapota fér össze, amelyek szerint a kényszer a tömegpontok rendszerén minden időelemben a lehető legkisebb munkát végezi."

E törvény némi nyomaival már Aristotelesnél találkozunk, de igazi kezdője Galilei volt s utána Bernoulli János, D'Alambert, Lagrange, Fourier járultak hozzá még alapvetőkül ezen törvény megalkotásához.

A törvény érvényességéhez szükséges és elégséges kikötéseket elősoroltuk az előbbi artikulasban. Azon k nyezők, amelyeknek az összeférésére szól a törvény, a lehetséges elemi munkát meghatározó tényezők az 56. artikulus észrevétele szerint.

59. Törvényünk alkalmazásai végett első tenni valónk azon posztulátum matematikai kifejezése, hogy a kényszer munkája minden időelemben a lehető legkisebb legyen.

Úgy is követelhető ez, hogy a kényszer tényleges munkája minden időelemben a kényszer legkisebb lehetséges elemi munkája legyen, tehát úgy is követelhető, hogy a kényszer tényleges munkája egy időelemben se legyen nagyobb, mint a kényszer más lehetséges munkája, hanem legfeljebb akkora legyen. Ezt a követelést pedig nyilvánképen a

$$\sum_i (X_i^* \partial x_i + Y_i^* \partial y_i + Z_i^* \partial z_i) \geqq \sum_i (X_i^* dx_i + Y_i^* dy_i + Z_i^* dz_i)$$

egyenlőtlenség fejezi ki (amelyben X_i^*, Y_i^*, Z_i^* a kényszererő komponensei az általános t pillanatban és $\partial x_i, \partial y_i, \partial z_i$ a dt időelemben egyszerre lehetséges elemi elmozdulások akármelyikének a komponensei, dx_i, dy_i, dz_i pedig a dt időelemben tényleg létesülő elemi elmozdulások komponensei.).

A jobboldalt ellentétes előjellel a baloldalra téve át:

15.-ik ív.

$$(3) \qquad \sum_i \{X_i^*(\partial x_i - dx_i) + Y_i^*(\partial y_i - dy_i) + Z_i^*(\partial z_i - dz_i)\} \geqq 0$$

fejezi ki azt a követelést, hogy a kényszer munkája minden időelemben a lehető legkisebb legyen. A $(\partial x_i - dx_i, \partial y_i - dy_i, \partial z_i - dz_i)$ vektorok a tényleges elemi elmozdulásokra nézve relatív lehetséges elemi elmozdulások. Ezeket röviden $(\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i)$ alakban írjuk, azaz

$$(4) \qquad \partial x_i - dx_i \equiv \delta x_i,\ \partial y_i - dy_i \equiv \delta y_i,\ \partial z_i - dz_i \equiv \delta z_i$$

tesszük és a tömegpontok virtuális elmozdulásainak nevezzük. Szerintük a törvényben foglalt követelést

$$\sum_i (X_i^*\delta x_i + Y_i^*\delta y_i + Z_i^*\delta z_i) \geqq 0$$

fejezi ki. Ezen egyenlőtlenség baloldalát a tömegpontok rendszerén a kényszer virtuális munkájának mondjuk. Tekintettel arra, hogy $m_i\ddot{x}_i = X_i + X_i^*$ stb., ahol X_i, Y_i, Z_i az i-dik tömegpontra ható szabaderő komponensei t pillanatban, ekképen is írhatjuk egyenlőtlenségünket:

$$(5) \qquad \sum_i\{(m_i\ddot{x}_i - X_i)\delta x_i + (m_i\ddot{y}_i - Y_i)\delta y_i + (m_i\ddot{z}_i - Z_i)\delta z_i\} \geqq 0$$

és még ezen a módon is írhatjuk nyilvánvalóképen:

$$(5)_{bis} \qquad \sum_i m_i(\ddot{x}_i\delta x_i + \ddot{y}_i\delta y_i + \ddot{z}_i\delta z_i) \geqq \sum_i (X_i\delta x_i + Y_i\delta y_i + Z_i\delta z_i)$$

Itt a baloldalt ellentétes előjellel véve az inercia erők virtuális munkájának, a jobb oldalt a maga előjelével a szabad erők virtuális munkájának mondjuk. Az (5) alatti egyenlőtlenség azt követeli, hogy a kényszer virtuális munkája ne legyen negatív, az (5) bis alatti azt követeli, hogy az inercia erők virtuális munkájának az ellentétese ne legyen kisebb, mint a szabad erők virtuális munkája.

60. Minthogy virtuális munkák fejezik ki legegyszerűbben tapasztalati törvényünk követelését, ennél fogva tapasztalati törvényünket a virtuális munkák törvényének is nevezzük. Magát az (5), vagy (5) bis alatti egyenlőtlenséget a virtuális munkák egyenlőtlenségének, vagy röviden alapegyenlőtlenségnek nevezzük. Tekintet nélkül az itt érvényességükhöz kötött kikötésekre, tartalmunkat D'Alembert-Fourier-féle elvnek szokták nevezni.

Így is kimondhatjuk pedig a virtuális munkák törvényét: Az előre bocsájtott kikötések (57. art) alatt levő tömegpontok rendszerében a tömegek, szabaderők, a kényszer és a mechanikai állapot összeférésének szükséges és elégséges föltétele, hogy a kényszer virtuális munkája sohase legyen negatív.

A virtuális elmozdulások általános tulajdonságai.

61. A virtuális elmozdulások az ő definíciójuknál fogva (4) a tényleges elemi elmozdulásokra nézve relatív lehetséges elemi elmozdulások:

$$(\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i) \equiv (\partial x_i - dx_i, \partial y_i - dy_i, \partial z_i - dz_i)$$

Ha már most a kényszer relációba u. m. (1) alatt (a 35. artikulusban) ∂x_i helyett $\delta x_i + dx_i$ stb. írjuk be, akkor nyilvánvalólag a virtuális elmozdulások relációi állanak elő, vagyis a virtuális elmozdulások értéktartományát megszorító relációk, mert a virtuális elmozdulásokat vezettük be az összes lehetségesek helyett, már pedig ha az egyik félék megengedett értéksokasága megvan határozva, akkor (4) által a másik félék megengedett értéksokasága is meg van határozva. Mintán pedig már ∂x_i helyett $\delta x_i + dx_i$ stb. bevezettük (1)-be, a valóságos elemi elmozdulások komponenseit és az időelemet tartalmazó tagok kiesnek (1) baloldalaiból, mert ezeknek az összegei (2) szerint (37. art.) eltűnnek.

A virtuális elmozdulások értéktartományát a következő egyszerű relációrendszer szorítja tehát meg:

$$
(6)\quad \left\{ \begin{array}{l}
\sum_i (A_{1i}\,\delta x_i + B_{1i}\,\delta y_i + C_{1i}\,\delta z_i) = 0 \\
\sum_i (A_{2i}\,\delta x_i + B_{2i}\,\delta y_i + C_{2i}\,\delta z_i) = 0 \\
\cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot \\
\sum_i (L_{1i}\,\delta x_i + M_{1i}\,\delta y_i + N_{1i}\,\delta z_i) \geqq 0 \\
\sum_i (L_{2i}\,\delta x_i + M_{2i}\,\delta y_i + N_{2i}\,\delta z_i) \geqq 0 \\
\cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot
\end{array} \right.
$$

Azt a képzelt kényszert, amelyben a virtuális elmozdulások volnának a tényleg lehetséges elemi elmozdulások, a tömegpontok virtuális kényszerének mondván, a (6) alatti relációkat a virtuális kényszer relációinak nevezzük.

62. Ha a dt időelemben nem volnának a kényszerállományban a tömegpontoktól független mozgások, akkor a virtuális elmozdulások értéktartománya és a lehetséges elemi elmozdulások értéktartománya ugyanaz volna: minden virtuális elmozdulás lehetséges elemi elmozdulás is volna és minden lehetséges elemi elmozdulás virtuális is volna egyszersmind. Ha ugyanis koordinátarendszerünkben a tetszésszerinti t pillanattal kezdődő a kis dt időre megszüntetnők a kényszerállománynak a tömegpontoktól független mozgását, akkor előfordulhatna, hogy t pillanati helyeiken maradjanak a dt időelemben a tömegpontok, és így $(dx_i, dy_i, dz_i)=0$ legyen minden

i-nél, amiből (2) alól (37. art.) az következik a dt időtartamra, hogy $E_k=0$, $P_k=0$ minden k-nál, s ezáltal a dt időtartamra a lehetséges elemi elmozdulások (1) alatt foglalt relációi (35. art.) a virtuális elmozdulások (6) alatt előállított relációivá válnak. Természetesen, amely időelemekben tényleg nincsenek a kényszerállományban a tömegpontoktól független mozgások, azon időelemekben a lehetséges elemi elmozdulások és a virtuális elmozdulások rendszere azonos.

63. A virtuális elmozdulások rendszere mindig legalább is igen pontosan összeesik azon lehetséges elemi elmozdulások rendszerével, amelyek létrejöttének a sebességéhez képest a tényleges elemi elmozdulások sebessége nem tesz számot. Minthogy t. i. (2) szerint (37. art.) az E_k és P_k -féle együtthatók, ha ugyan léteznek, oly rendű mekkoraságok, mint az (x_i, y_i, z_i) sebességek, az utóbbiakhoz képest igen nagy $\left(\frac{\partial x_i}{dt}, \frac{\partial y_i}{dt}, \frac{\partial z_i}{dt}\right)$ sebességek esetén (1) alatt (35. art.) az E_k és P_k együtthatók számot nem tevő hibával írhatók zérusoknak, miáltal pedig az (1) alatti korlátozás összeesik a (6) alattival. Úgy mondjuk ki ezt, hogy a virtuális elmozdulások egyben nem mások, mint a ∞ nagy sebességű lehetséges elemi elmozdulások.

64. A virtuális elmozdulások minden természe-

tes koordinátarendszerben (1. ábr.) ugyanazon vektorok.

Ha ugyanis az (x', y', z') új rendszer origójának a koordinátái a régiben a, b, c és tengelyeinek az iránykoszinuszai $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$; $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$, akkor

$$x = a + \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z' \text{ stb.}$$

A dt idő alatt az $a, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ stb. együtthatók megváltozását $da, d\alpha_1, d\alpha_2, d\alpha_3$, stb. jelentvén,

$$dx = \alpha_1 dx' + \alpha_2 dy' + \alpha_3 dz' + da + x' d\alpha_1 + y' d\alpha_2 + z' d\alpha_3, \text{ stb.}$$

$$\partial x = \alpha_1 \partial x' + \alpha_2 \partial y' + \alpha_3 \partial z' + \partial a + x' \partial \alpha_1 + y' \partial \alpha_2 + z' \partial \alpha_3, \text{ stb.}$$

mert a lehetséges elemi elmozdulásokat is dt időelemben számítjuk és két természetes koordinátarendszer relatív mozgása azok definíciójának értelmében változhatatlanul elő van írva, minélfogva

$$\partial a = da, \quad \partial \alpha_1 = d\alpha_1, \quad \partial \alpha_2 = d\alpha_2, \quad \partial \alpha_3 = d\alpha_3, \text{ stb.}$$

Első féle egyenleteink bal és jobboldalát rendre kivonva második féle egyenleteink bal és jobb oldalából, azután számba véve, hogy $\partial x - dx = \delta x$, $\partial x' - dx' = \delta x'$, stb., látjuk, hogy

$$(7) \quad \begin{cases} \delta x = \alpha_1 \delta x' + \alpha_2 \delta y' + \alpha_3 \delta z' \\ \delta y = \beta_1 \delta x' + \beta_2 \delta y' + \beta_3 \delta z' \\ \delta z = \gamma_1 \delta x' + \gamma_2 \delta y' + \gamma_3 \delta z'. \end{cases}$$

ével fenti állításunk igazolva van.

A virtuális munkák törvénye minden koordinátarendszerben érvényes.

65. A tömegpontok alaptörvényét nem vonatkoztattuk valamely speciálisan definiált koordinátarendszerre, hanem a koordinátarendszer megválasztásától függetlenül mondtuk ki. Ha azonban valóban független az a koordinátarendszer választásától, akkor a virtuális munkák egyenlőtlenségének minden koordinátarendszerben állnia kell. Valóban, mihelyt egy valamely természetes koordinátarendszerben (1. art.) áll az, már minden természetes koordinátarendszerben megáll. Abból következik ez, hogy mind a kényszererők, mind a virtuális elmozdulások minden természetes koordinátarendszerben ugyanazok a vektorok, tehát skaláris szorzataik is minden természetes koordinátarendszerben ugyanazok a skalárisok, tehát (5) baloldala (59. art.) minden természetes koordinátarendszerben ugyanaz a skaláris és így ha egyben nem negatív, akkor a többiben sem negatív.

Az alkalmazás főbb módszerei.

I. A multiplikátoros módszer.

66. Az alaptörvény szerint szükséges és elégséges mechanikai feltétel, hogy a virtuális elmozdulások teljesítsék az (5) alatti egyenlőtlenséget: tehát hogy mindazok a $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ féle skalárisok, amelyek kielégítik a (6) alatti egyszerű relációrendszert, kielégítsék az (5) alatti egyszerű egyenlőtlenséget is; tehát, hogy a kényszer virtuális munkájának az egyenlőtlensége, t. i. (5) következménye legyen a virtuális kényszer relációrendszerének, (6)-nak.

Ebből folyólag az egyenlőtlenségek tana szerint kell létezniök oly $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ multiplikátoroknak és oly $\pi_1, \pi_2, \dots$ nem negatív multiplikátoroknak, függetleneknek a $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ féle skalárisoktól, hogy rendre megszorozva velük a (6) alatti baloldalakat és összeadva a szorzatokat, az előálló összeg azonos legyen az (5) alatti baloldallal és következőleg:

$$
(8) \quad \left.\begin{aligned}
m_i \ddot{x}_i &= X_i + \varepsilon_1 A_{1i} + \varepsilon_2 A_{2i} + \dots + \pi_1 L_{1i} + \pi_2 L_{2i} + \dots \\
m_i \ddot{y}_i &= Y_i + \varepsilon_1 B_{1i} + \varepsilon_2 B_{2i} + \dots + \pi_1 M_{1i} + \pi_2 M_{2i} + \dots \\
m_i \ddot{z}_i &= Z_i + \varepsilon_1 C_{1i} + \varepsilon_2 C_{2i} + \dots + \pi_1 N_{1i} + \pi_2 N_{2i} + \dots
\end{aligned}\right\}
$$

$$\pi_1 \geqq 0, \quad \pi_2 \geqq 0, \dots$$

legyen, bármelyik tömegpont indexét írjuk is i helyére.

67. Viszont, ha mi ezt a három egyenletet rendre $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$-vel megszorozva, összeadjuk és az így előálló egyenleteken a Σ összegezést végezzük, akkor [illegible] visszajutunk a virtuális kényszer munkájának az e-

egyenlőtlenségéhez, (5)-höz.

Ugyanis a mondott műveletek azt eredményezik, hogy ha végül a különböző multiplikátorok szerint rendezzük a jobboldalakat, akkor:

$$\sum_i \left[(m_i \ddot{x}_i - X_i)\delta x_i + (m_i \ddot{y}_i - Y_i)\delta y_i + (m_i \ddot{z}_i - Z_i)\delta z_i \right] =$$
$$= \varepsilon_1 \sum_i (A_{1i}\delta x_i + B_{1i}\delta y_i + C_{1i}\delta z_i) + \varepsilon_2 \sum_i (A_{2i}\delta x_i + B_{2i}\delta y_i + C_{2i}\delta z_i) + \ldots$$
$$\ldots + \pi_1 \sum_i (L_{1i}\delta x_i + M_{1i}\delta y_i + N_{1i}\delta z_i) + \pi_2 \sum_i (L_{2i}\delta x_i + M_{2i}\delta y_i + N_{2i}\delta z_i) + \ldots$$

Ennek a második sora (6) következtében zérus, a harmadik sora pedig amiatt, hogy $\pi_1, \pi_2 \ldots$ nem negatívok, ugyancsak (6) következtében $\geqq 0$, ennélfogva az első sor is $\geqq 0$, ami az (5) alatti egyenlőtlenséget jelenti.

68. Kitűnt, hogy (6) alapján (7)-ből (8), (8)-ból (5) következik. Ezszerint (8) egyértékű (5)-el.

Tömegpontok surlódástalan rendszerének alaptörvénye így is kimondható tehát: Az előírásos kikötések keretében, tömegpontok rendszerében a tömegek, szabaderők a kényszer és a mechanikai állapot összeférésének szükséges és elégséges feltétele, hogy létezzenek olyan ε_κ multiplikátorok és π_κ nem negatív multiplikátorok, nem függők a virtuális elmozdulásoktól, amelyekkel teljesülnek a (8) alatt foglalt egyenletek.

69. Ezek a multiplikátoros egyenletek megjelenésük szerint határozatlan egyenletek, t.i. határozatlanok annyiban, hogy a bennük előforduló ε multiplikátorok és π nem nega-

tó multiplikátorok jelentménye előre határozatlan. Azonban implicite határozott egyenleteket, vagy határozott egyenlőtlenségeket, vagy mindkét félét tartalmaznak. Általában határozott egyenletek és egyenlőtlenségek állíthatók elő belőlük. Ha az összes multiplikátorok eliminálhatók belőlük egy vagy többféle módon, akkor az eliminálás által egy, vagy több határozott egyenletet szolgáltatnak. Ha továbbá tényleg fordul elő nem negatív multiplikátor a (8) alatt írt egyenletekben, akkor implicite bizonyosan tartalmaznak azok egy, vagy több határozott egyenlőtlenséget is. Egy gyakran előforduló esetben a határozott egyenlőtlenségeket ugyancsak könnyen elő lehet állítani a (8) alatti egyenletekből; nevezetesen olyankor, midőn a (8.)-ból az összes π_ι nem negatív multiplikátorok kiszámíthatók, mégpedig az ε_κ multiplikátoroktól is független kifejezések gyanánt. Ez esetben a π_ι együtthatók számára kapott kifejezéseket $\geqq 0$ írván, más kézen vannak a határozott egyenlőtlenségek. Ha azonban a π_ι némelyei nem számíthatók ki, vagy egyikük nem számítható ki az ε_κ együtthatóktól is független kifejezések gyanánt, akkor a határozott egyenlőtlenségek előállítása általában sajátos eljárási módszerre szorul, amelyről az egyenlőtlenségek tanának bevezetésül előadott elemeiben nem volt szó. Ámde ha a határozott egyenlőtlenségeket nem is állítjuk elő, a tartalmuk leből mégis gyakran kielégítő értesülésekhez jutottunk, ugyanis egysze-rű vektortani szemléltetések segítségével, amely vektortani szemlél-tetések sokszor alkalmasabbak is a szükséges áttekintés megszerzésé-re, mint maguk a határozott egyenlőtlenségek. Az alább követ-kezendő példák kellőkép tájékoztatnak majd az idevágó eljá-rási rendről.

70. Tekintettel az ε_i multiplikátorok és π_k nem nega-tív multiplikátorok határozatlan voltára, nyilvánvaló, hogy a (8.) alatti egyenletekből előállítható határozott egyenletek és egyenlőtlenségek összessége egyértékű magukkal a (8.) alatti multiplikátoros egyenletekkel, tehát azon határozott egyenletek és egyenlőtlenségek rendszerére is vonatkoztatható a tömegpon-tok mechanikájának alaptörvénye.

71. Tegyük azt az észrevételt, hogy (8.) alatti a multi-plikátoros tagok szolgáltatják a kényszererő komponenseit. Ha ugyanis $m_i \ddot{x}_i - X_i \equiv X_i^*$ stb. tesszük, akkor:

$$X_i^* = \varepsilon_1 A_{1i} + \varepsilon_2 A_{2i} + \dots + \pi_1 L_{1i} + \pi_2 L_{2i} + \dots, \quad \text{stb.}$$

II. A paramétrumos módszer.

72. A határozott relációk előállításának egy másik mód-szere azon alapszik, hogy paramétrumokkal oldjuk meg a vir-tuális kényszerrelációit, vagyis a (6.) alatti relációrendszert. Írjuk fel a virtuális elmozdulások komponenseit, mint $\delta x_1, \delta x_2, \dots$

elemi skalárisok és $\delta w_1, \delta w_2, \dots$ nem negatív elemi skalárisok egyszerű függvényeit, u. m.

$$(9.)\quad \begin{cases} \delta x_i = F_{1i}\,\delta v_1 + F_{2i}\,\delta v_2 + \dots + P_{1i}\,\delta w_1 + P_{2i}\,\delta w_2 + \dots \\ \delta y_i = G_{1i}\,\delta v_1 + G_{2i}\,\delta v_2 + \dots + Q_{1i}\,\delta w_1 + Q_{2i}\,\delta w_2 + \dots \\ \delta z_i = H_{1i}\,\delta v_1 + H_{2i}\,\delta v_2 + \dots + R_{1i}\,\delta w_1 + R_{2i}\,\delta w_2 + \dots \end{cases}$$

$$(i = 1, 2, 3, \dots)$$

Ilyen kifejezések mindenesetre lehetségesek. Kitűnik ez már abból, hogy a $\delta x_i = \delta x_i$, $\delta y_i = \delta y_i$, $\delta z_i = \delta z_i$ azonosságok is (9.)féle rendszert képeznek. Ha pedig olyanok ezek a kifejezések, hogy ha mi ezeket beírjuk a virtuális kényszer relációiba, ill.-ba, azok identikusan teljesülnek, ellenben semmi azoktól független egyszerű reláció sem teljesül identikusan e kifejezések által, akkor ezen kifejezéseket a virtuális kényszer általános parametrumos kifejezéseinek nevezzük. A δv és δw elemi skalárisok, a parametrumok és ezek együtthatói az idő és a helyek kizárólagos függvényei lehetnek, mert a (6.) alatti relációk identikus kielégítése ezt megengedi. Hogy csakugyan léteznek mindig ily parametrumos kifejezések és hogy (6.)-ból miképp állíthatók elő, azt az egyenlőtlenségekről hallott előadások csak arra az esetre mutatták meg, hogy az adott egyszerű relációk baloldalai mind függetlenek egymástól. Mi a következendőkben a parametrumos módszert csak ilyen esetekre fogjuk alkalmazni, kivált pedig olyankor amidőn direkte felírhatók a virtuális elmozdulások parametrumos kifejezései. Ha már egyszer valamely kényszerben ismerjük azokat, akkor aztán igen könnyű szerrel jutunk el a virtuális munkák egyenlőtlenségéből következő határozott relációkhoz.

73. Mihelyest a (9) alatti kifejezések a δv elemi skalárisok minden értéke és δw elemi skalárisok minden nem negatív értéke mellett kielégítik a virtuális kényszer (6) alatt foglalt relációit és semmiféle ezektől független egyszerű relációt ki nem elégítenek, már a (6) alattiaknak az általános megoldásai azok. Tehát ők is a virtuális kényszer kifejezései és az alapegyenlőtlenség, t.i. (5), egyfelől teljesülni köteles mindazokkal a $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ elemi skalárisokkal, amelyeket a (9) alatti kifejezések szolgáltatnak, másfelől mihelyt teljesül velük, már meg is felelt egészen annak a követelésnek, amelyet a virtuális elmozdulások relációi tartalmaznak.

Beírván azonban a (9) alatti parametrumos kifejezéseket (5)-be, némi rendezés után azt kapjuk, hogy:

$$\delta v_1 \sum_i \left\{ (m_i \ddot{x}_i - X_i) F_{1i} + (m_i \ddot{y}_i - Y_i) G_{1i} + (m_i \ddot{z}_i - Z_i) H_{1i} \right\} +$$
$$+ \delta v_2 \sum_i \left\{ (m_i \ddot{x}_i - X_i) F_{2i} + (m_i \ddot{y}_i - Y_i) G_{2i} + (m_i \ddot{z}_i - Z_i) H_{2i} \right\} +$$
$$+ \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$

$$+ \delta w_1 \sum_i \{(m_i\ddot{x}_i - X_i)P_{1i} + (m_i\ddot{y}_i - Y_i)Q_{1i} + (m_i\ddot{z}_i - Z_i)R_{1i}\} +$$
$$+ \delta w_2 \sum_i \{(m_i\ddot{x}_i - X_i)P_{2i} + (m_i\ddot{y}_i - Y_i)Q_{2i} + (m_i\ddot{z}_i - Z_i)R_{2i}\} +$$
$$+ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \geqq 0$$

Ebből egyenesen kiírhatók a határozott egyenletek és egyenlőtlenségek, mert ezeknek teljesülniük kell minden δv és minden nem negatív δw mellett. Teljesülniük kell tehát akkor is, ha $\delta v_1 \gtrless 0$ írjuk, és a többi elemi paramétrumot mind zérussá tesszük. Ebből az következik, hogy δv_1 szorzójának el kell tűnnie. Épúgy következik, hogy a többi δv szorzójának is el kell tűnnie. Ha továbbá $\delta w_1 > 0$ írjuk, a többi elemi paramétrumot pedig zérussá tesszük, akkor is teljesülnie kell egyenlőtlenségünknek, tehát kell, hogy δw_1 szorzója ne lehessen negatív. Épúgy következik, hogy a többi δw szorzójának is nem negatívnak kell lennie.

A következő határozott egyenleteink és határozott egyenlőtlenségeink vannak tehát:

$$(10)\left\{\begin{array}{l} \sum_i \{(m_i\ddot{x}_i - X_i)F_{ji} + (m_i\ddot{y}_i - Y_i)G_{ji} + (m_i\ddot{z}_i - Z_i)H_{ji}\} = 0 \\ \sum_i \{(m_i\ddot{x}_i - X_i)P_{ji} + (m_i\ddot{y}_i - Y_i)Q_{ji} + (m_i\ddot{z}_i - Z_i)R_{ji}\} \geqq 0 \\ \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots) \end{array}\right.$$

74. Viszont ezekből a paramétrumos egyenlőtlenség következik könnyen felismerhető módon, t.i. olyképp hogy (10) alatt az egyenletet δv_j-vel, az egyenlőtlenséget δw_j-

vel szorozzuk, azután rendre $j=1$, $j=2$, ... izik és az így előál-ló egyenleteket és egyenlőtlenségeket mind összeadjuk. Részint zérus értékű, részint nem negatív értékű mennyiségeket adunk össze, tehát az összegük bizonyosan nem negatív.

Az így visszanyert paraméteres egyenlőtlenségből pedig (9) révén (5) származtatható nyilván való eljárás rendén.

75. Mindezek szerint (9) alapján (5)-ből és (10)-ből (5) következik. Mivel pedig a (9) ekvivalens a virtuális kényszer-rel, ennélfogva (10) ekvivalens (5)-el és így a (10) alatt foglalt határozott egyenletek tartalma bizonyosan egyezik a multiplikátorok módszerével előállítható határozott egyenletek és egyenlőtlenségek tartalmával s az alaptörvényt (3) helyett, (5) helyett, (8) helyett (10)-re is vonatkoztathatjuk.

III. A multiplikátoros és paraméteres módszer összekapcsolása.

76.) Az előadott módszerek elsejét multiplikátoros mód-szernek, másodikát paraméteres módszernek nevezzük. Ve-gyesen is használhatók mégpedig oly módon, hogy a vir-tuális kényszer relációinak egy részét oldjuk meg csak paraméterekkel, azután ezeket a paraméteres kife-jezéseket behelyettesítjük a virtuális kényszer többi relá-cióiba és az alapegyenlőtlenségbe is, miáltal ama re–

lációk és az alapegyenlőtlenség ezuttal már a parametru-mokra fognak vonatkozni. Most tegyük fel (9)-ről, hogy a (6) egy részének a megoldását teszi csak az. Beirjuk tehát most (9)-et nemcsak (5)-be, de (6)-nak a kimaradott részébe is. Számba véve ezután, hogy a paramestrumokra, mint új változókra vonatkoztatott alapegyenlőtlenség a paramestrumokra, mint új változókra vonatkoztatott kényszer relációk és a $\delta w_1 \geqq 0$, $\delta w_2 \geqq 0$ ... egyenlőtlenségek rendszerének minden megoldásában teljesülni tartozik, az ismeretes módon alkalmazzuk a multiplikátoros eljárást, melynek eredményei pedig nem csak szükségesek, de elégségesek is az alaprelació teljes tartalmának a jellemzésére, úgy, hogy a tiszta multiplikátoros módszernek és a tiszta paramet-rumos módszernek az eredményeivel födözködnek azok.

A határozott egyenletek kanonikus alakja.

47. Az alaptörvényből következő határozott egyenletek a multiplikátoros eljárás rendén úgy állanak elő, hogy a multi-plikátoros egyenletekből (8) minden független módon eliminálják a multiplikátorokat, amelyek részint mint egészen határozatlanok, részint mint nem negatív határozatlanok léptek azon egyenletekbe.

Ha a kényszerek (1) alatt írt relációi mind egyen-letek volnának, úgy hogy azon relációk második sorozatában

17-ik ív.

az egyenlőségjele volna csak érvényes, akkor a virtuális kényszer (6) alatt írt relációi is mind egyenletek volnának és úgy (8)-ban n[em] csak az ε_k multiplikátorok, de a π_k multiplikátorok is mind egyszerű határozatlanok gyanánt szerepelnének. Azonban eliminálásunk ekkor is csak arra az eredményre vezetne, amelyre vezet, midőn a π_k multiplikátorok nem negatívok.

Ennélfogva az alaptörvényből következő határozott egyenletekhez úgy is eljuthatunk, hogy csak azokat a lehetséges mi elmozdulásokat vesszük figyelembe, amelyek által (1) alatt az egyenlőtlenségek is egyenletileg teljesülnek, s így csak azokat virtuális elmozdulásokat vesszük számba, amelyek által (6) al[att] az egyenlőtlenségek is egyenletileg teljesülnek. Most valóban ezeket vesszük majd csak tekintetbe. Így most nem juthatunk el a határozott egyenlőtlenségekhez, de az alaptörvényből folyó összes határozott egyenletekhez eljutunk most is, már pedig most csakis ezeket keressük.

78. Miután (1) és (6) alatt az egyenlőtlenségek helyett is egyenleteket írtunk, az (1) alatti egyenletek a ∂x_i, ∂y_i, ∂z_i inkrementumokra nézve, a (6) alattiak a δx_i, δy_i, δz_i inkrementumokra nézve általában nem lesznek mindannyian függetlenek egymástól. Ilyenkor tehát elég egy részüket tartani meg, oly részüket t. i., amelyben minden egyenlet független a többitől, amely részükből azonban a mellőzött egyenletek levezethetők.

Ezúttal a koordinátákat $u_1, u_2 \dots u_r$ jelöljék, midőn is a koordináták háromszoros száma. A megtartott egyenletek együttha- tóit e betűvel jelöljük. Szerint (1) alól, ha h a megtartott egyen- letek száma:

$$
(11)\quad \begin{cases}
e_{11}\partial u_1 + e_{12}\partial u_2 + \dots + e_{1r}\partial u_r + e_1\,dt = 0\\
e_{21}\partial u_1 + e_{22}\partial u_2 + \dots + e_{2r}\partial u_r + e_2\,dt = 0\\
- - - - - - - - - - - -\\
e_{k1}\partial u_1 + e_{k2}\partial u_2 + \dots + e_{kr}\partial u_r + e_k\,dt = 0
\end{cases}
$$

egyenletrendszer szolgál az egyenletileg lehetséges elemi elmozdu- lások meghatározására, és (6) alól

$$
(12)\quad \begin{cases}
e_{11}\delta u_1 + e_{12}\delta u_2 + \dots + e_{1r}\delta u_r = 0\\
e_{21}\delta u_1 + e_{22}\delta u_2 + \dots + e_{2r}\delta u_r = 0\\
- - - - - - -\\
e_{k1}\delta u_1 + e_{k2}\delta u_2 + \dots + e_{kr}\delta u_r = 0
\end{cases}
$$

egyenletrendszer szolgál az egyenleti virtuális elmozdulások meg- határozására, amely egyenletrendszerekből a koordináták inkre- mentumai mellől legalább egy h-ad fokú szubdeterminans nem zérus, annálfogva t.i., hogy független egyenletek rendszerei azok. Úgy választjuk meg az indexeket, hogy

$$
(13)\quad \begin{vmatrix}
e_{11} & e_{12}, & \dots & e_{1k}\\
e_{21} & e_{22}, & \dots & e_{2k}\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
e_{k1}, & e_{k2}, & \dots & e_{kk}
\end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{legyen.}
$$

79. A (12) egyenletrendszer minden megoldásában köteles teljesülni a virtuális munkák egyenlőtlensége (5). Most ezekben is $u_1, u_2, \dots$ írva koordináták gyanánt, az egyes koordinátákhoz

tartozó tömegeket pedig rendre $\mu_1, \mu_2, \dots$-vel, a szabaderők megfelelő komponenseit $U_1, U_2, \dots$-vel jelölve

$$(14) \quad (\mu_1 \ddot{u}_1 - U_1)\delta u_1 + (\mu_2 \ddot{u}_2 - U_2)\delta u_2 + \dots + (\mu_r \ddot{u}_r - U_r)\delta u_r \geqq 0$$

alakban kerül elő a kényszer virtuális munkájának az egyenlőtlensége.

Ez a (12)-nek minden megoldásában teljesülni tartozik, tehát kell létezniök olyan $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_k$ multiplikátoroknak, hogy

$$(15) \quad \begin{cases} \mu_1 \ddot{u}_1 = U_1 + \lambda_1 e_{11} + \lambda_2 e_{21} + \dots + \lambda_k e_{k1} \\ \mu_2 \ddot{u}_2 = U_2 + \lambda_1 e_{12} + \lambda_2 e_{22} + \dots + \lambda_k e_{k2} \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \mu_r \ddot{u}_r = U_r + \lambda_1 e_{1r} + \lambda_2 e_{2r} + \dots + \lambda_k e_{kr} \end{cases}$$

Innen is megkapjuk a határozott egyenleteket a multiplikátorok eliminálása által. Mutatás azonban a tényleges mozgás kényszer egyenleteit is felhasználva, u. m. a (2) alatti egyenleteket (37. art.) más módon fogunk eljárni.

80. A (2) alatti egyenletrendszerrel nyilvánképen megegyező vagy legalább egyértékű egyenletrendszert kapunk, ha (11) alatt a tényleges elemi elmozdulásokat írjuk, a lehetséges elemi elmozdulások helyett. Egyszersmind átosztva a dt időelemmel azon egyenleteket, (2) egyaránt az

$$(16) \quad \begin{cases} e_{11} \dot{u}_1 + e_{12} \dot{u}_2 + \dots + e_{1r} \dot{u}_r + e_1 = 0, \\ e_{21} \dot{u}_1 + e_{22} \dot{u}_2 + \dots + e_{2r} \dot{u}_r + e_2 = 0, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ e_{k1} \dot{u}_1 + e_{k2} \dot{u}_2 + \dots + e_{kr} \dot{u}_r + e_k = 0 \end{cases}$$

egyenletrendszert kapjuk. Ebből deriválás révén

$$(e_{11}\ddot{u}_1+e_{12}\ddot{u}_2+\dots+e_{1r}\ddot{u}_r)+(\dot{e}_{11}\dot{u}_1+\dot{e}_{12}\dot{u}_2+\dots+\dot{e}_{1r}\dot{u}_r+\dot{e}_1)=0,$$
$$(e_{21}\ddot{u}_1+e_{22}\ddot{u}_2+\dots+e_{2r}\ddot{u}_r)+(\dot{e}_{21}\dot{u}_1+\dot{e}_{22}\dot{u}_2+\dots+\dot{e}_{2r}\dot{u}_r+\dot{e}_2)=0,$$
$$- \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad -$$
$$(e_{k1}\ddot{u}_1+e_{k2}\ddot{u}_2+\dots+e_{kr}\ddot{u}_r)+(\dot{e}_{k1}\dot{u}_1+\dot{e}_{k2}\dot{u}_2+\dots+\dot{e}_{kr}\dot{u}_r+\dot{e}_k)=0.$$

Helyettesítsük be ide (15) alól a második deriváltak ($\ddot{u}_1, \ddot{u}_2, \dots \ddot{u}_r$) kifejezéseit. A multiplikátorok ($\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$) szerint való rendezés után olyan k számú egyenletünk lesz, amelyekből a multiplikátorok mellől képezett determináns =

$$=\sum \begin{vmatrix} e_{1p} & e_{1q} & \dots \\ e_{2p} & e_{2q} & \dots \\ \vdots & \vdots & \\ e_{kp} & e_{kq} & \dots \end{vmatrix}^2 : (\mu_p \mu_q \dots),$$

ahol p, q ... az 1, 2 ..., r számok k számú tagjaiból áll. Ez a determináns (13) miatt nem tűnhetik el, tehát a behelyettesítésekkel oly egyenletekhez jutunk, amelyekből a $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_k$ multiplikátorok kiszámíthatók, mint az időnek, a tömegpontok helyeinek és a tömegpontok sebességeinek a függvényei, ugyanis csupa oly mennyiségek fordulnak elő a λ-kon kívül a helyettesítések után kapott egyenletekben, amelyek szintén az időnek, a tömegpontok helyeinek és a tömegpontok sebességeinek a függvényei.

Ha mármost a λ multiplikátorok kiszámításával nyert kifejezéseket beírjuk (15)-be a λ-k helyébe, akkor (15) alatt a gyorsulás komponensei mint az időnek, a tömegpontok helyeinek és a tömegpontok sebességeinek függvényei állanak elé:

$$(17)\quad \begin{cases} \ddot{u}_1 = \Phi_1(t, u_1, u_2, \ldots, \dot{u}_1, \dot{u}_2, \ldots) \\ \ddot{u}_2 = \Phi_2(t, u_1, u_2, \ldots, \dot{u}_1, \dot{u}_2, \ldots) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ddot{u}_r = \Phi_r(t, u_1, u_2, \ldots, \dot{u}_1, \dot{u}_2, \ldots) \end{cases}$$

Ezek a mekanikai állapot kanonikus egyenletei, a gyorsulások komponenseire kifejtett másodrendű totális differenciálegyenletek.

81. Nyilvánképen függetlenek egymástól ezek az egyenletek. Minthogy pedig a számuk (r) a koordináták ($u_1, u_2, \ldots, u_r$) száma is egyszersmind, így éppen annyi egymástól független határozott differenciálegyenletünk van (17) alatt, amennyi a tömegpontok helyeit meghatározhatja. Ezek az egyenletek a multiplikátoros egyenletekből (15) és a tényleges mekanikai állapot kényszer egyenleteiből (16) eredtek. Lássuk be, hogy r-nél több egymástól független egyenlet nem is eredhet (15) és (16) alól. Kitűnik ez abból, hogy (15) alól csak $r-h$ független módon eliminálhatók a multiplikátorok, (16) pedig h számú egyenletet tartalmaz.

Mivel a (16) alatt foglalt egyenletek csak elsőrendű differenciál egyenletek, ennélfogva h számú első integrálját teszik azok a (17) alatt levő másodrendű differenciálegyenleteknek.

A határozott egyenlőtlenségek kanonikus alakja.

82. A határozott egyenlőtlenségek ugyancsak az idő, a tömegpontok koordinátái, a tömegpontok sebességi komponensei és a tömegpontok gyorsulási komponensei közt fennálló relációk. Egyenesen meglátszik ez (10) alatt, ahol a második sorban gondolt egyenlőtlenségek a határozott egyenlőtlenségek, u. m.

$$(18)\quad \left\{\begin{array}{l} \sum_i \{(m_i\ddot{x}_i - X_i)P_{1i} + (m_i\ddot{y}_i - Y_i)Q_{1i} + (m_i\ddot{z}_i - Z_i)R_{1i}\} \geqq 0 \\ \sum_i \{(m_i\ddot{x}_i - X_i)P_{2i} + (m_i\ddot{y}_i - Y_i)Q_{2i} + (m_i\ddot{z}_i - Z_i)R_{2i}\} \geqq 0 \\ - - - - - - - - - - - - - - \\ - - - - - - - - - - - - - - \end{array}\right.$$

A szabad erők (X_i, Y_i, Z_i) az időnek, a tömegpontok helyeinek s a tömegpontok sebességeinek a függvényei. A (P_{ji}, Q_{ji}, R_{ji}) vektorok komponensei a parametrumos kifejezések (9) együtthatói lévén, az időnek és a tömegpontok helyeinek a függvényei. Következőleg, az itt, (18) alatt levő baloldalak az időnek, a tömegpontok helyeinek, sebességeinek, gyorsulásainak a függvényei. Ha tehát (17) alól a gyorsulások komponenseit a Φ függvények által fejezzük ki (18)-ban, akkor (18) baloldalai márcsak az időnek s a tömegpontok helyeinek és sebességeinek a függvényei lesznek. A (18) alatt foglalt egyenlőtlenségeket baloldalaik ilyetén előállításában mondjuk a mechanikai állapot kanonikus egyenlőtlenségeinek.

A mechanikai állapot határozottságának tétele.

83. A tényleges mekanikai állapot kanonikus egyenleteinek egyik oldalán a gyorsulásoknak a tömegekkel szorzott komponensei állanak, másik oldalán az időnek, a tömegeknek, a helyek koordinátáinak és a sebességek komponenseinek a határozott függvényei vannak. Ha advák a szabaderők mint az időnek, a helyek koordinátáinak és a sebességek komponenseinek a függvényei s advák a kényszerrelációk együtthatói, mint az időnek és a helyek koordinátáinak a függvényei, s advák a tömegek, akkor implicite teljesen adva vannak s ma a kanonikus egyenletek függvényes oldalai, mint az elősorolt mennyiségek függvényei, tehát akkor teljesen megadott egyenleteink vannak a mekanikai állapot számára, annyi egymástól független másodrendű totális differenciálegyenlet, ahány a koordináta.

Bizonyos ismeretes mathematikai feltételek alatt, amelyek a teljes számú elsőrendű totális differenciálegyenletek szerkezetének függvénytani tulajdonságaira vonatkoznak, tudvalevőleg az a matematikai tantételünk van, hogy a független változónak és a függő változóknak egy valamely értékéhez a függő változók teljesen határozott függése tartozik. Mint tapasztalati tény állítható pedig, hogy tömegpontok mekanikai állapotának a kanonikus egyenletein, amelyekhez az elsőrendűekké alakító egyszerű vonatkozások csatlakoznak, legalább a mi időnek az értelmében, s természetszerű kényszereknek, meg természetszerű szabaderőknek a rendszerében mindig teljesülnek azon feltételek. Mint tapasztalati tény állítható tehát, hogy természetszerü kényszerben és természetszerü szabaderők hatása alatt lévő adott tömegü tömegpontok kezdeti helyeihez és kezdeti sebességeihez a tömegpontoknak a kényszer és a szabaderők által teljesen meghatározott mekanikai állapota tartozik. Kérdés azonban, hogy mely tulajdonságú kényszerek és szabaderők természetszerüek? Ezt a kényes kérdést mi úgy intézzük el, hogy épen az olyan kényszert és az olyan szabaderőket tartjuk természetszerüeknek, amelyek szerint a tömegpontok adott kezdeti helyekből, adott sebességekkel indulva, az alaptörvények fogva, csak egy féle mekanikai állapotot folytathatnak. Másféle kényszerre s másféle szabaderőkre soha nem is gondolunk, kényszeren s szabaderőkön mindig ilyeneket értünk.

A közönséges mekanikai feladatok.

84. A gyakorlati szükségletek többnyire olyan feladatokat állítanak elénk, amelyekben a kényszer valamely koordinátarendszerben adva van, ami csak úgy értendő, hogy (1) alatt az együtthatók advák, mint az idő és a helyek függvényei. Itt mi a kényszert valamely koordináta rendszerben mindig adottnak is gondoljuk. De általában egyenesen nem a lehetséges elemi elmozdulások relációi (1) gyanánt van az adva, hanem a kényszerállomány olyas meghatározásával, amelyből speciális geometriai megfontolások révén kerülnek elő a kényszerrelációi. Ilyenkor ezek előállítása az első teendő valónk, ugyanis abban a koordinátarendszerben, amelyben a kényszerállomány adva van, midőn is e koordinátarendszerben a kényszer-

relációk együtthatói, mint az idő és helyek függvényei, teljesen kifejtve állanak elő.

Ha a kényszernek a relációit (1) már megszerkesztettük, akkor mind a tényleges mechanikai állapot egyenleteit (2), mind a virtuális kényszer relációit (6) egyenesen felírhatjuk, az utóbbiak alapján valamelyik módszerünk segélyével megalkotjuk a virtuális munkák törvényéből következő határozott relációkat (10), amelyekhez nyomban hozzácsatoljuk a tényleges mechanikai állapot kényszeregyenleteit (2).

Azonban jóllehet valamely koordinátarendszerben adva van feltevésünk szerint a kényszer, mégis igen sokféle mechanikai feladat lehetséges még a tömegpontokon. Hogy miféle lehetőségek, annak az eldöntésére tudnunk kellene, hogy mely mechanikai mennyiségek adhatók előre anélkül, hogy a határozott relációkból ellentmondás származzék, mert minden mechanikai feladat abból áll, hogy adva lévén bizonyos mechanikai mennyiségek, megállapítsuk, hogy más mechanikai mennyiségek mely értékeket vehetnek fel, már pedig ezt a határozott relációk szabják meg.

A határozott relációk a kényszeregyütthatóin kívül (amelyek az idő és a helyek függvényei) a tömegeket, a szabaderők komponenseit, és a sebességek és gyorsulások komponenseit tartalmazzák explicite. Ezek mindössze azon mechanikai mennyiségek, amelyek explicite fordulnak elő a határozott relációkban (mi mellett a szabaderők az időnek, a helyeknek és a sebességeknek a függvényeik). Ezeknek a körébe tartozó adatokhoz keresünk mindig adatlanul maradt mechanikai mennyiségeket. Ámde ezen explicite elénk került mechanikai mennyiségek körébe implicite számos más mechanikai mennyiségünk csoportosul olyan, amely adott, vagy keresett gyanánt szerepelhet; pl. az explicite előforduló vektorok nagyságai, iránymeghatározói, szögei, szögsebességei, a tömegpontok szögsebességei, szöggyorsulásai, területi sebességei, területi gyorsulásai (23 art.) stb. stb.

Mármost a lehetséges mechanikai föladatok jellemzése végett azon elleve döntenünk, hogy az egy általában felmerülhető mechanikai mennyiségek sokaságából melyek adhatók előre úgy, hogy a többiek a határozott relációkat kielégíthessék. Azonban a legszűkebb mechanikai mennyiségekre szorítkozva is igen terjedelmes enumerációkkal lehetne csak ezt a követelményt teljesíteni. A gyakorlat terén pedig nem is a lehetőségekből, hanem kész szükségletekből fejlenek ki mechanikai feladataink, és ha valamely ezentúl felmerült kérdésünk mégis ellenkezésbe jutna határozott relációinkkal, ez arra mutat, hogy kérdésünk össze nem férő adatokat tartalmaz, aminek a felismerése azonban szintén hasznos eredmény.

Mindezek után azt nézzük csak, hogy melyek azok a mechanikai feladatok, amelyeket a leggyakrabban felmerülő szükségletek állítanak elénk. A következő kérdésekbe foglalhatók azok:

I. Valamely koordinátarendszerben adott (84. art.) kényszer alatt mik a föltételei annak, hogy állandó nyugalomban lehessenek a tömegpontok?

II. Valamely koordinátarendszerben adott (84. art.) kényszer alatt mik a föltételei annak, hogy előre kívánt mozgást végezhessenek a tömegpontok?

III. Valamely koordinátarendszerben adott (84. art.) kényszer és szabaderők hatása alatt adott kezdetihelyektől adott sebességekkel indulva, adott tömegű tömegpontok mikép mozognak és meddig maradnak az adott kényszerben.?

85. Általános válasz az I. kérdésre: a tömegpontok állandó nyugalmára vonatkoztatott határozott relációk, azaz, a határozott relációk, miután azokban a tömegpontok sebességeinek és gyorsulásainak a komponenseit zérusnak írtuk; mert a tömegpontok állandó nyugalmában az ily kép előálló relációk az adatlanul maradó mekanikai mennyiségek összeférésének a szükséges és elégséges föltételei az alaptörvény szerint, úgymint explicite a tömegpontok tömegei, helyei és a szabaderők összeférésének a föltételei.

A kényszernek azonban olyannak kell adva lennie, hogy annak az E_K és P_K együtthatói (1) a tömegpontoknak legalább is egy valamely kényszerhelyzetében állandóan eltűnjenek, máskínt a (1) alatt foglalt határozott relációk a nyugalomban nem teljesülhetnének. Ha kivált az E_K és P_K együtthatók egyáltalában nem léteznek, akkor nyugalomban a (2) alatt foglalt egyenletek identikusan teljesülnek, tehát akkor az alaptörvényből következő határozott relációk a nyugalomra vonatkoztatva magok a szükséges és elégséges föltételei annak, hogy a tömegpontok az adott kényszer alatt állandó nyugalomban lehessenek.

Midőn pedig teljesülnek valamely tömegekkel, helyekkel, szabaderőkkel azok a föltételek, amelyek alatt állandó nyugalomban lehetnek az adott kényszerben a tömegpontok és kezdetben nyugalomban voltak azok, akkor nyugalomban is maradnak t. i. annál-

fogva, hogy csak egy féle mekanikai állapotból folytathatnak. (83. art.) De szüksé-
ges is kezdeti nyugalmunk állandó nyugalmunknak a megvalósulá-
sához, mert amely tömegpont kezdetben mozgásban van, az legalább
még egy véges kis ideig szükségkép mozgásban is marad a sebességnek, mint
az idő függvényének a folytonosságánál fogva.

86. Általános válasz a II. kérdésre: a tömegpontok adott mozgására vonatkoztatott határozott relációk azok az a határozott relációk, miután azokban a tömegpontok sebességeinek és gyorsulásainak a komponenseit az előre kívánt mozgásból fejeztük ki, mint az idő, a helyek és a sebességek határozott függvényeit, mert a tömegpontok előre kívánt mozgásában az ilyképp előálló relációk a szükséges és elégséges föltételei, az alaptörvényszerint, az adatlanul maradt mekanikai mennyiségek összeférésének (az adottakkal és egymással való összeférésének), úgy mint explicite a tömegpontok tömegei és a szabad erők összeférésének (az adottakkal és egymással való összeférésüknek.)

Azonban a sebességek és a gyorsulások végtelen sok féle módon fejezhetők ki egy adott mozgásból az idő, a helyek és a sebességek függvényei gyanánt. Természetszerűnek mondjuk a meghatározásunkat, ha a szabad erőknek a kanonikus mozgásegyenletek révén származó kifejezései olyanok, hogy érvényes azokon és az adott kényszereken a mekanikai állapot határozottságának a tétele (83 art.). Akkor aztán az előre követelt mozgás szerint való kezdeti helyekből és a szerinte való kezdeti sebességekkel indulva, tényleg az előre követelt mozgást is folytatják a tömegpontok. De természetesen csakis azon kezdeti helyekből és (a folytonosság nál fogva) csakis azon sebességekkel indulva mozognak így.

87. Általános válasz a III. kérdés első ágára: az adott tömegekre és szabaderőkre vonatkoztatott határozott egyenleteknek az adott kezdeti helyekhez és sebességekhez tartozó megoldásai szerint.

Általános válasz a III. kérdés második ágára: amíg a határozott egyenlőtlenségek az adott tömegekre, az adott szabaderőkre és a meghatározott mozgásra vonatkoztatva teljesülnek.

Mert az alaptörvény értelmében a mekanikai állapotok határozottságának a tételén az adott kényszerben az adott szabaderők hatása alatt, az adott kezdeti helyek és sebességek rendén, adott tömegű tömegpontoknak egyféle mekanikai állapota következhetik csak, az, amely a határozott egyenleteket kezdet óta kielégíti, azonban csak addig érvényes, amíg az adott szabaderők mellett a határozott egyenlőtlenségeket is kezdet óta kielégíti; ha tehát esetleg összeütközik valamikor ezen egyenlőtlenségekkel, akkor szükségkép más kényszer kezdődik ugyanis éppen amiatt, hogy az adott kényszerben másféle mekanikai állapot, mint amely határozott egyenleteinkből adódik, egyáltalán nem lehetséges.

Feltettük, hogy vannak határozott egyenlőtlenségek. Midőn azonban a kényszer relációi csupa egyenletek, akkor a határozott relációk is csupa egyenletek. Ezen esetben a III. kérdés második ágára az a felelet jár, hogy szakadatlanul tart a határozott egyenleteket kielégítő mekanikai állapot.

A kezdeti helyeknek és kezdeti sebességeknek olyanokul kell természetesen adva lenniök, hogy az adott kényszerrel összeférjenek, különözen pedig teljesítsék a (2) alatt foglalt egyenleteket.

88. Amely kérdések az itt való három kérdésen kívül gyakrabban merülnek még fel, azok e háromnak oly változatai, hogy elintézésük módjai, az itt előadottak nyomában, könnyen kitalálhatók.

Mindehez általános megjegyzés, hogy az alaptörvényből származó határozott relációknak, vagy némelyeiknek a tartalmát nem ritkán a multiplikátoros egyenletekből (2) közvetlenül kiolvashatjuk.

1. Példa. Magánvaló tömegpont érintkezési kényszerben.

A tömegpontok rendszere magában álló tömegpont, amely egy adott K koordinátarendszerhez rögzített T testtel (tehetrendszer) érintkezik, de abba nem hatolhat és más kényszert, mint a puszta érintkezésből származót nem visel. A T testről feltesszük, hogy a felületén mindenütt egy érintősíkja van, amely a fekvését a felület mentén folytonosan változtatja, úgy, hogy ha

$$F(a, b, c) = 0$$

a T test felületének az egyenlete a K koordinátarendszerben, akkor F(a, b, c) egyenletesen deriválható függvénye az a, b, c koordinátáknak a felület környezetében.

A kényszerrelációk. Amíg a tömegpont érintkezik az F felülettel, addig a koordinátái eleget tesznek az F felület egyenletének. Ha tehát x, y, z a tömegpont koordinátái, akkor

1. $F(x, y, z) = 0.$

Jelöljék α, β, γ a T testből kifelé mutató fölületi normális iránykosinusait a tömegpont pillanatnyi x, y, z helyén. Minthogy a tömegpont csak kifelé vagy tangenciálisan mozdulhat, ennélfogva dt időelemben bármely lehetséges elemi elmozdulását jelentse is $(\partial x, \partial y, \partial z)$, ez az (α, β, γ) egységvektorral csak hegyes, vagy derékszöget alkothat, tehát

2. $\alpha \partial x + \beta \partial y + \gamma \partial z \geqq 0.$

Viszont ezen egyenlőtlenség mellett $(\partial x, \partial y, \partial z)$ az (α, β, γ) egységvektorral minden olyan szöget alkothat, amely egy derékszögnél nem nagyobb. Következőleg 2. most a tömegpont kényszerének az analytikus kifejezése, egyetlen egyenlőtlenség, amelyben pedig a dt időelem együtthatója $= 0$. Most a tényleges mechanikai állapot kényszerét nyilvánvalóképen az

3. $\alpha\, dx + \beta\, dy + \gamma\, dz = 0$

egyenlet és a virtuális kényszert az

4. $\alpha\, \delta x + \beta\, \delta y + \gamma\, \delta z \geqq 0$

egyenlőtlenség határozza meg. Azonban az α, β, γ iránykosinusok előállítandók még a kényszerállomány definíciójából, amit az $F(a, b, c) = 0$ egyenlet szolgáltat, amelyben az F függvényt legalább alakszerint adottnak gondoljuk. Hogy pedig ebből miként kerülnek elő a fölület tetszés szerinti pontjára a kifelé mutató normális (α, β, γ) iránykosinusai, az ismeretes a differenciálgeometria elemeiből. Meghatározásuk után természetesen a tömegpont helyére, vagyis az x, y, z koordinátákra kell azokat vonatkoztatni.

A multiplikátoros egyenletek. Most, hogy egyetlen tömegponttal van dolgunk, a virtuális munkák egyenlőtlenségét egyszerűen így írhatjuk:

$$\underline{5} \qquad (m\ddot{x}-X)\delta x+(m\ddot{y}-Y)\delta y+(m\ddot{z}-Z)\delta z \geqq 0,$$

ahol m a tömegpont tömege és (X, Y, Z) a reá ható szabaderő. Ezen egyenlőtlenség a $\underline{4}$ minden megoldásában teljesülni tartozik, tehát kell léteznie oly nem negatív h multiplikátornak, hogy ha megszorozzuk vele $\underline{4}$ baloldalát, akkor ez az $\underline{5}$ baloldalával identikusan egyenlő. A következő multiplikátoros egyenleteink vannak tehát:

$$\underline{6} \quad m\ddot{x}=X+h\alpha, \quad m\ddot{y}=Y+h\beta, \quad m\ddot{z}=Z+h\gamma,$$

amelyekben $h \geqq 0$, különben határozatlan.

<u>A határozott relációk.</u> A h multiplikátor két eliminálása által $\underline{6}$-ból származó egyenletek és $\underline{3}$ a mekanikai állapot határozott egyenletei a tömegpontra. Azonban szimetria kedvéért három eliminálást művelünk a $\underline{6}$ alatt. Továbbá a $\underline{3}$ egyenletet átosztjuk a dt időelemmel. Ezek rendén

$$\underline{7} \quad \left\{ \begin{aligned} &\beta(m\ddot{z}-Z)-\gamma(m\ddot{y}-Y)=0, \\ &\gamma(m\ddot{x}-X)-\alpha(m\ddot{z}-Z)=0, \\ &\alpha(m\ddot{y}-Y)-\beta(m\ddot{x}-X)=0, \\ &\alpha\dot{x}+\beta\dot{y}+\gamma\dot{z}=0 \end{aligned} \right.$$

most a határozott egyenleteink, amelyek sorában a három elsőnek kettője és a negyedik függetlenek egymástól.

Határozott egyenlőtlenséget is kapunk, ugyanis az által, hogy $\underline{6}$ alól kiszámítjuk a h multiplikátort, aztán a kifejezését $\geqq 0$ írjuk. Úgy járunk el pedig h kiszámításában a leghelyesebben, hogy a $\underline{6}$ alatt foglalt egyenleteket rendre α, β, γ-val szorozzuk, azután összeadjuk:

$$7_c \qquad h = (m\ddot{x} - X)\alpha + (m\ddot{y} - Y)\beta + (m\ddot{z} - Z)\gamma \geqq 0.$$

Nyilván való, hogy 7 három első egyenlete helyett azt a hármat is használhatnók, amely 6 alól h-nak 7_c szerinti helyettesítésével származik.

Mivel 7 negyedik egyenletéből deriválás rendén

$$\alpha\ddot{x} + \beta\ddot{y} + \gamma\ddot{z} = -(\dot{\alpha}\dot{x} + \dot{\beta}\dot{y} + \dot{\gamma}\dot{z}),$$

ennélfogva 7_c így is írható:

$$8 \qquad h = -\{m(\dot{\alpha}\dot{x} + \dot{\beta}\dot{y} + \dot{\gamma}\dot{z}) + \alpha X + \beta Y + \gamma Z\} \geqq 0$$

Ez most a kanonikus egyenlőtlenség, mert α, β, γ csak a koordináták (x, y, z) függvényei lévén $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}$ csak $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ függvényei s X, Y, Z csak ezeknek és t-nek a függvényei. Ha pedig 6 alatt h-nak 8 alatti (kanonikus) kifejezését írjuk, akkor megkapjuk a mekanikai állapot kanonikus egyenleteit, amelyeknek egy első integrálja 7 negyedik egyenlete s egy második integrálja az 1 alatti egyenlet.

__A nyugalom lehetőségének feltételei.__ A nyugalomra vonatkoztatott határozott relációk teszik a nyugalom lehetőségének szükséges és elégséges feltételeit. Ezen relációk sorában 7 negyedik egyenlete identikusan teljesül a nyugalomban s így csak azok a határozott relációk képeznek feltételeket, amelyek a multiplikátoros egyenletekből származtak, u.m. 7 három első egyenlete és a 8 alatti egyenlőtlenség, miután bennük az időderiváltakat $=0$ teszük. Ámde egész tartalmuk egy pillantásra felismerhető magukon a multiplikátoros egyenleteken, azaz 6 egyenletein, miután bennük az időderiváltakat zérusnak írtuk, midőn is az

$$X = -h\alpha, \qquad Y = -h\beta, \qquad Z = -h\gamma$$

egyenletekbe mennek át. Tekintettel arra, hogy k nem negatív határozatlant jelent, az a feltétele tehát a nyugalom lehetőségének, hogy vagy ne hasson szabaderő ($k=0$ eset), vagy amidőn hat, akkor folyvást a befelé mutató fölületi normális irányában ($-\alpha, -\beta, -\gamma$ irányban) hasson a tömegpontra ($k>0$ eset). Ha különösen a szabad erő előre adva van, akkor úgy kell adva lennie, hogy az iránya állandó legyen, midőn aztán a fölület oly helyein kell lennie a tömegpontnak a T test határán, ahol a befelé mutató normális iránya egyezik az adott szabaderő irányával.

Ha a meghatározott feltételek teljesülnek, akkor aztán a megkezdett nyugalmat nyugalomban is folytatja a tömegpont a mekanikai állapotok határozottságának tételénél fogva.

A fölületen adott mozgás lehetőségének feltételei. Az adott mozgásra vonatkoztatott határozott relációk teszik az adott mozgás lehetőségének szükséges és elégséges feltételeit. Ezen relációk sorában Z negyedik egyenlete identikusan teljesül, mert a fölületen végbemenő mozgás lévén adva, a sebesség folyvást merőleges a fölületi normálisra és éppen ezt követeli Z negyedik egyenlete. A többi határozott reláció a multiplikátoros egyenletekből származott és a tartalmuk magukból a multiplikátoros egyenletekből ⑥ közvetlenebbül látható meg, miután azokat az adott mozgásra vonatkoztattuk.

Tegyük fel különösen, hogy oly mozgást kívánunk, amelyben a sebesség ($\dot{s}$) nagysága állandó. Akkor $\ddot{s}=0$ lévén a gyorsulás tangenciális összetevője zérus, az egész gyorsulás a radiális gyorsulásból (centripetális gyorsulásból) áll, úgy hogy aszerint, amint a tömegpont pályája domborodik, vagy homorodik a T testre nézve

$$\ddot{x} = \mp \alpha \frac{\dot{s}^2}{R}, \quad \ddot{y} = \mp \beta \frac{\dot{s}^2}{R}, \quad \ddot{z} = \mp \gamma \frac{\dot{s}^2}{R},$$

(ahol R a görbületi sugár), mert ezúttal α, β, γ a felület kifelé mutató normálisának az irány koszinuszait jelentvén, a centripetális irány egységvektora domborulatban – (α, β, γ), homorulatban (α, β, γ). Ennélfogva 6-ból domborulatban

$$X = -\left(h + m\frac{\dot{s}^2}{R}\right)\alpha, \quad Y = -\left(h + m\frac{\dot{s}^2}{R}\right)\beta, \quad Z = -\left(h + m\frac{\dot{s}^2}{R}\right)\gamma.$$

Az $\dot{s}$ egyenlő konst. mellett azt rója ki a szabaderőre, hogy normális módon befelé mutasson a felületen és ne legyen kisebb, mint $m\frac{\dot{s}^2}{R}$ (ami az úgy nevezett centripetális erő nagysága). Homorulatban

$$X = \left(m\frac{\dot{s}^2}{R} - h\right)\alpha, \quad Y = \left(m\frac{\dot{s}^2}{R} - h\right)\beta, \quad Z = \left(m\frac{\dot{s}^2}{R} - h\right)\gamma.$$

Az $\dot{s}$ = konst. mellett azt rója ki a szabaderőre, hogy vagy zérus legyen ($h = m\frac{\dot{s}^2}{R}$ esete), vagy normális módon befelé mutasson ($h > m\frac{\dot{s}^2}{R}$ esete), vagy kifelé mutatva kisebb legyen mint $m\frac{\dot{s}^2}{R}$ ($h < m\frac{\dot{s}^2}{R}$ esete).

Adott kezdeti helyből adott kezdeti sebességgel indulva, adott szabaderő hatása alatt hogyan mozog a tömegpont a T testen, és meddig marad rajta? A kérdés első felére a 7 alatt foglalt egyenletek megoldása, azután második felére a 8 alatt írt egyenlőtlenség felel.

Azonban differenciálegyenleteink megoldása végett nem elég tudnunk, hogy a kérdésben foglalt adatok rendelkezésünkre vannak, hanem esetről esetre explicite számba kell vennünk a K koordinátarendszerben a kényszer α, β, γ együtthatóinak, s a szabaderő X, Y, Z komponenseinek a függvényalakját.

Egy igen egyszerű speciális példa erre a következő: a.) K koordinátarendszerünk a földhöz van róva, tehát a T test is a földhöz van rögzítve; b.) a T test felületének egy része síklap s azzal érintkezik a tömegpont, c.) a szabaderőt a puszta nehézségi erő teszi.

Úgy választottuk képen meg fölállíz rott koordinátarendszerünket, hogy y, z
…ja a T test síklapján legyen, amelyet röviden lejtőnek mondunk. Még pedig
y tengelyt horizontálisan fektetnők, s a z tengelyt lefelé, az x tengelyt a T test bel-
jefelé irányítsuk. Ezzel tehát

$$\alpha = -1,\ \beta = 0,\ \gamma = 0$$

ha a lejtő ε szögön hajlik a vízszinthez, akkor aszerint, amint a lejtő felül, vagy
…ul van a testen, a felső vagy alsó előjellel:

$$X = \pm mg\cos\varepsilon,\ Y = 0,\ Z = mg\sin\varepsilon.$$

Mármost forduljunk határozott egyenleteinkhez. A Z negyedik egyenletéből
=0 következik, tehát x = konst; tudjuk pedig, hogy amíg csak a lejtővel érintke-
zésben van a tömegpont, addig x=0, ugyanis a Z elhelyezésénél fogva.
A többi egyenletben is számba véve adatainkat, ezek az egyenleteink van-
nak tehát:

$$\ddot{x} = 0,\ \ddot{y} = 0,\ \ddot{z} = g\sin\varepsilon.$$

Összehasonlítva ezeket első példasorunk második példatagjával, amelyhez tár-
galásának a végződése szerint $\ddot{x}=0,\ \ddot{y}=0,\ \ddot{z}=g$ egyenletek tartoznak, látjuk,
hogy oly módon mozog a tömegpont a lejtőn a nehézségi szabaderő hatása a-
latt, amely módon szabadon vertikális síkban mozogna, de nem g nagyságú
… és nem vertikális gyorsulás szerint, hanem $g\sin\varepsilon$ nagyságú, a lejtő
…szkedésével egyező irányú gyorsulás szerint. Vagy a lejtő ereszkedésével párhu-
zamos egyenest, vagy parábolát ír tehát a lejtőn a tömegpont s a parábola
magasabban fekvő pontja a csúcsa stb.

A feltett kérdés első felére megfeleltünk. A második felére határozott e-
lőtlenségünk adja meg a választ, 8 amelyben most $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Beírva
A, γ; X, Y, Z fenkelt adott kifejezéseit is azt találjuk, hogy ha alul van, a

lejtő a testen, akkor addig marad érintkezésben a fejtővel a tömegpont, amíg – $mg\cos\varepsilon \geqq 0$, tehát sameddig sem, mert $m, g, \cos\varepsilon$ pozitívok. Ha ellenben felül van a lejtő a testen, akkor addig marad rajta a tömegpont, amíg $mg\cos\varepsilon \geqq 0$, tehát egy általán nem hagyja el a lejtőt.

Megjegyzendő azonban, hogy mindez a megállapítás addig érvényes csak, amíg a tömegpont a lejtő szélén át nem mozdul, mert amint áthalad a T test síklapjának a kerületén, a normális iránykoszinuszai (α, β, γ) másokká lesznek, mint aminők ül $(-1, 0, 0)$ ezen tárgyalásban szerepeltek.

2. Példa. Merev matematikai inga.

A tömegpont egy tömegtelen (34. art) merev pálca egyik végére van erősítve, s e pálcával együtt, valamely K koordinátarendszerben rögzített T tengely körül szabadon foroghat, de más mozgást nem végezhet, úgy hogy egy körön szabadon mozoghat, de arról le nem térhet. A pálca és a tömegpont rendszerét ezen szerkezetben merev matematikai ingának nevezzük.

A kényszerrelációk. Úgy legyen megválasztva a K koordinátarendszer, hogy x tengelye a T tengelyben, origója a pálca hossztengelyének és a T tengelynek a metszésében legyen. Most a tömegpont x koordinátája csak $=0$ lehet, és a tömegpontnak a T tengelytől való távolsága r nem változhatik, $r=$ konst. szükségképen. Ha tehát a pálca pillanatnyi elfordulási szöge a z tengely felől számítva θ, akkor a kényszerállomány csak oly helyekre engedi a tömegpontot, amely helyeken

1 $\qquad x=0\,, \quad y=r\sin\theta\,, \quad z=r\cos\theta\,, \quad r=\text{const.}\,,$

ahol a θ negatív, vagy pozitív aszerint, hogy az x tengely körül jobbra, vagy tobra forditással származtatjuk.

Az 1 alapján közvetlenül előállíthatjuk a lehetséges elemi elmozdulások paraméteres kifejezéseit, ugyanis az által, hogy a ∂-jel szerint differenciáljuk azokat, miből folyólag:

$$2 \qquad \partial x = 0,\ \partial y = r\cos\theta\,\partial\theta,\quad \partial z = -r\sin\theta\,\partial\theta$$

~~mert~~ mint az adott kényszer paraméteres kifejezései. Ezekből a tényleges mechanikai állapot kényszereinek a paraméteres kifejezései a következők:

$$3 \qquad dx = 0,\quad dy = r\cos\theta\, d\theta,\quad z = -r\sin\theta\, d\theta.$$

A virtuális kényszert pedig paraméteresen nyilvánvalóképen

$$4 \qquad \delta x = 0,\quad \delta y = r\cos\theta\,\delta\theta,\quad \delta z = -r\sin\theta\,\delta\theta$$

fejezi ki. Természetesen ezek sorában $\partial\theta$ lehetséges, $d\theta$ tényleges elemi megváltozása, $\delta\theta$ virtuális megváltozása $(= \partial\theta - d\theta)$ a z tengely felől való elfordulás θ szögének.

A határozott relációk. A virtuális munkák egyenlőtlensége úgy mint az előbbi példában, ez:

$$(m\ddot{x} - X)\delta x + (m\ddot{y} - Y)\delta y + (m\ddot{z} - Z)\delta z \geqq 0$$

Beírva ide 2 alól a variációk kifejezéseit, aztán tekintetbe véve, hogy $\delta\theta$ pozitív is, negatív is lehet, egyetlen határozott relációt kapunk, még pedig határozott egyenletet, ú. m.

$$(m\ddot{y} - Y) r\cos\theta - (m\ddot{z} - Z) r\sin\theta = 0.$$

Azonban 3 alól

$$\ddot{y} = r\cos\theta . \ddot{\theta} - r\sin\theta . \dot{\theta}^2$$

$$\ddot{z} = -r\sin\theta . \ddot{\theta} - r\cos\theta . \dot{\theta}^2$$

Ennek a beírása után az

$$⑤ \qquad m r\ddot{\theta} = Y\cos\theta - Z\sin\theta.$$

határozott egyenletünk van a virtuális munkák egyenlőtlenségének következményeként, amelyhez a kényszerből ③ csatlakozik. Továbbá ezt a dt időelemmel:

$$⑥ \qquad \dot{x} = 0, \quad \dot{y} = r\cos\theta . \dot{\theta}, \quad \dot{z} = -r\sin\theta . \dot{\theta},$$

ahol $\dot{\theta}$ a tömegpont x tengelyű szögsebessége, amely θ értelme szerint jobbra fordulásban negatív, balra fordulásban pozitív.

<u>A nyugalom lehetőségének feltétele.</u> A nyugalomra vonatkoztatott határozott relációk, tehát a $\dot{\theta} = 0$, $\ddot{\theta} = 0$ értékekhez tartozók a nyugalom lehetőségének a feltételei. A ⑥ alatti egyenletek identikusan teljesülnek, az ⑤ alatti pedig azt követeli, hogy

$$Y\cos\theta - Z\sin\theta = 0$$

legyen, tehát a nyugalom lehetőségének a szükséges és elégséges feltétele abból áll, hogy a szabaderőnek a forgástengelyre (x tengelyre) merőleges összetevője (0, Y, Z) párhuzamos legyen a pálcával, mert 0, $\sin\theta$, $\cos\theta$ a pálca egyik irányának az iránykoszinuszai. Másszóval az a feltételünk, hogy a tömegpont szabadgyorsulásának a forgás síkjában lévő összetevője centrifugális, vagy centripetális legyen.

<u>A körön előre adott mozgás lehetőségének a feltétele.</u> Az adott mozgásra vonatkoztatott határozott relációk képezik ezt a föltételt. Minthogy pedig a mozgás a körön van adva, így a ⑥ alatti egyenletek identikusan teljesülnek, tehát egyetlen reláció, mégpedig egy egyenlet ⑤ tartalmazza a feltételt.

Ha speciálisan azt kívánjuk, hogy állandó nagyságú sebes-

…séggel mozogjon a körön a tömegpont (egyenletes keringő mozgást végezzen), akkor állandó szögsebességet kívánunk, tehát 5-ben $\ddot{\theta} = 0$ teendő, miáltal ugyanazon feltételt kapjuk, amelyet a nyugalomra kaptunk. Amíg azonban a nyugalomban az (X, Y, Z) szabaderő csak az idő és a koordináták függvénye gyanánt szerepelhet, (mert $\dot{x}=0$, $\dot{y}=0$, $\dot{z}=0$) addig jelenleg a sebesség is befolyhat a meghatározására, illetőleg 6 szerint a $\dot{\theta}$ szögsebesség.

<u>Adott kezdeti helyből, adott kezdeti sebességgel indulva, adott szabaderő hatása alatt hogyan mozog a tömegpont a körön?</u>

Itt a kérdésnek az a része, hogy meddig marad a tömegpont a kényszerben, tárgytalan, mert szükségképen folytonosan a körön vesztegel.

Mihelyt a θ szöget mint az idő függvényét meghatároztuk, már 1 által meg van határozva a mozgás, mert x, y, z mint az idő függvényei θ révén meghatározvák. Mivel pedig az 1 alatti egyenletek 6 integráljai, mert is az 5 alatt levő egyenlettel van csak dolgunk, azonban amennyiben Y és Z függ a helytől, vagy a sebességtől, vagy mindkettőtől, már előre beírjuk Y-ba és Z-be az 1 illetőleg 6 alatti kifejezéseket, miket képest az 5 alatt foglalt egyenlet tisztán a θ szögre szóló másodrendű differenciálegyenlet.

<u>Speciálisan a földhöz legyen rögzítve a Tengely, mégpedig horizontális fekvésben és csak a nehézségi szabaderő hasson számottevően a tömegpontra, amelynek a földhöz viszonyított mozgását akarjuk megismerni, úgy a K koordinátarendszert</u> egészen a földhöz rójuk (azt már eleve kikötöttük, hogy x tengelye a forgástengelyben, origója ennek és a pálya homloktengelyének metszéspontjában legyen), mégpedig úgy tegyük azt, hogy z tengelye vertikálisan lefelé mutasson. Mert

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = mg$$

tehát a mozgás meghatározására szolgáló egyenletünk, $\mathfrak{Z}$, most így szól:

$$\mathfrak{Z} \qquad r\ddot{\theta} = -g \sin\theta$$

Előljáróban vegyük észre ezen egyenletben, hogy a nyugalom lehetőségének mondott feltétele, tehát kétféle helyzetben lehetséges a tömegpont nyugalma, s.m. a pálca kétféle vertikális állásában s így a tömegpont lehető legmélyebb és lehető legmagasabb helyein, amelyek elsejét az ő alsó, másodikát az ő felső nyugalmi helyének mondjuk. Természetesen a nyugalom lehetőségének fentebb általánosan megállapított feltétele a jelen esetre alkalmazva ugyanezen eredményt adja, ami könnyen meg is látható.

A mozgás meghatározása (θ-nak, mint t függvényének meghatározása) végett kétszeres integrálást kell művelnünk $\mathfrak{Z}$ alatti egyenletünkön. Az elsőlegesintegrálás céljára szorozzuk meg $\mathfrak{Z}$ mindkét oldalát θ első deriváltjával $\dot{\theta}$-al. Mint- hogy

$$\dot{\theta}\ddot{\theta} = \dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{\dot{\theta}^2}{2},$$

$$-\sin\theta . \dot{\theta} = -\sin\theta\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\cos\theta}{dt},$$

így egyszeres integrálás rendén azt kapjuk $\mathfrak{Z}$ alól, hogy

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{r}\cos\theta + \text{const.}$$

A konstans meghatározása végett, vonatkoztassuk ezen egyenletet a kezdeti pillanatra is, amikor a szöget θ_0, a szögsebességet $\dot{\theta}_0$ jelölje. Ezen vonatkoztatásból a konstansnak

$$\dot{\theta}_0 - \frac{2g}{r}\cos\theta_0,$$

értéke származik, tehát a

$$\dot{\theta}^2 = \dot{\theta}_0^2 + \frac{2g}{r}(\cos\theta - \cos\theta_0)$$

első rendű differenciálegyenletünk van, amelyet pedig így is írhatunk:

$$\dot\theta^2 = \dot\theta_0^2 + \frac{4g}{l}\left(\sin^2\frac{\theta_0}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right)$$

Arra a nevezetes esetre szoritkozzunk, amelyben a kezdeti szögsebesség zérus
[e] van mozgás mégis: nyugalomból indul θ_0 szögön. Akkor

$$8 \qquad \dot\theta^2 = \frac{4g}{l}\left(\sin^2\frac{\theta_0}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right), \ \sin\theta_0 \neq 0.$$

[A]nnyit a θ-ról már ezen az egyenleten is felismerhetünk, hogy (mivel θ_0-nál nem [m]aradhat) θ_0-tól $-\theta_0$-ig fogyva, aztán (mivel itt sem állhat meg) $-\theta_0$-tól θ_0-ig nő[v]e, aztán ismét, éspedig ugyanúgy, θ_0-tól $-\theta_0$-ig fogyva, $-\theta_0$-tól θ_0-ig növő út. [V]áltozik a θ szög, midőn is azt mondjuk, hogy leng az inga. θ_0-ból vissza θ_0-ba [m]indig ugyanúgy változik a θ, mert minden adott θ-hoz ugyanazon $\dot\theta^2$ tartozik [8 sz]erint és természetesen θ_0-tól $-\theta_0$-ig negatív, $-\theta_0$-tól θ_0-ig pozitív $\dot\theta$ rendén.

A második integrálás foganatosítása végett oly segéd szöget vezetünk be, a[m]elynek szinusza $\sin\frac{\theta}{2}$-nek s $\sin\frac{\theta_0}{2}$-nek hányadosa. Jelölje φ ezt a szöget:

$$9 \qquad \sin\frac{\theta}{2} = \sin\frac{\theta_0}{2}\sin\varphi.$$

[Eze]n φ szögnek az a nevezetes tulajdonsága van, hogy a változása monoton, nevez[etes]en $\frac{\pi}{2}$ értéken növőleg indulva folyvást nő, fogyólag indulva folyvást fogy a φ, amit [kö]nnyű észrevenni $\sin\varphi$-nak definiciójában. Mi itt növekedéssel indítsuk $\frac{\pi}{2}$ szögön [e]nek a változását, minélfogva szakadatlanul nő a φ.

Minthogy 9-ből

$$\dot\theta = \frac{2\sin\frac{\theta_0}{2}\cos\varphi\,\dot\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\theta_0}{2}\sin^2\varphi}}$$

$$\sin^2\frac{\theta_0}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} = \sin^2\frac{\theta_0}{2}\cos^2\varphi,$$

[ú]gy 8 alól, miután mindkét oldalon négyzetgyököt vontunk, aztán dt időelem[m]el szoroztunk:

$$10 \qquad \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\theta_0}{2}\sin^2\varphi}} = \sqrt{\frac{g}{l}}\cdot dt$$

differenciálegyenletünk van φ számára, amelyben a négyzetgyököket mindig pozitívoknak számítva, megfeleltünk azon posztulátumunknak, hogy φ folyvást növőleg változzék.

Új differenciálegyenletünk baloldala elsőfajú elliptikus integrálnak a differenciálja a Legendre-féle alakban. Írjuk röviden, hogy

$$\underline{11} \qquad \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\theta_0}{2}\sin^2\varphi}} \equiv F(\theta_0,\varphi)$$

Ez azon elliptikus integrál modulo $\sin\frac{\theta_0}{2}$. Szerinte 10-ből az integrálás rendén

$$F(\theta_0,\varphi)-F(\theta_0,\tfrac{\pi}{2})=\sqrt{\tfrac{g}{r}}\,t,$$

mert φ kezdeti értéke $\frac{\pi}{2}$. De írjuk röviden azt, hogy

$$\underline{12} \qquad F(\theta_0,\tfrac{\pi}{2})\equiv\varpi\,, \quad \sqrt{\tfrac{g}{r}}=h.$$

Akkor
$$F(\theta_0,\varphi)=\varpi+ht$$
$$\varphi=\underline{am}\,(\varpi+ht),$$

tehát $\underline{9}$ alól az inga t pillanati elfordulásának θ szögére:

$$\underline{13} \qquad \sin\frac{\theta}{2}=\sin\frac{\theta_0}{2}\,\underline{\sin}\,\underline{am}\,(\varpi+ht).$$

Az ϖ konstans kétszerese a szinusz amplitudó reális félperiódusa. Ha tehát azt írjuk, hogy

$$\underline{14} \qquad 2\varpi\equiv hT,$$

akkor T az inga lengési ideje, vagyis azon idő, amely alatt az inga egyik szélső helyzetéből a másikba jut át, mert T idő elteltével az amplitudó argumentuma 2ϖ-val változik meg, tehát az amplitudó maga $\frac{\pi}{2}$ értékből $\frac{3\pi}{2}$ értékbe s így a θ szög θ_0 értékből $-\theta_0$ értékbe változik; azután újabb T idő (összesen $2T$ idő elteltével az amplitudó argumentuma 4ϖ-val változik meg, tehát az amplitudó maga $\frac{3\pi}{2}$ értékből $\frac{5\pi}{2}$ értékbe s így a θ szög $-\theta_0$ értékből θ_0 értékbe változik, stb.

Minthogy az elliptikus függvények tana szerint a teljes elliptikus integrál=

$$F\left(\theta_0,\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\sin^2\frac{\theta_0}{2}+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\sin^4\frac{\theta_0}{2}+\dots\right\}$$

ennélfogva 12 és 14 értelmében

$$15\qquad T=\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\sin^2\frac{\theta_0}{2}+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\sin^4\frac{\theta_0}{2}+\dots\right\}$$

kifejezésünk van az inga lengésidejének a számára. Két oly tényező szorzata ez, a- melyek egyike függ csak az inga szerkezetétől, ugyanis a négyzetgyökös kifejezés, amely szerint a lengésidő egyenesen arányos az inga „hosszának" (a tömegpont tengelytá- volának) a négyzetgyökével. Az inga tömegétől független a T (valamint egyáltalán is az inga mozgása), de a négyzetgyökös tényező szerint fordítottan arányos a ne- hézségi gyorsulás nagyságának négyzetgyökével. A lengésidő másik tényezője csak a szélső helyzetek θ_0 szögétől függ s ezen szög felső határa minden előre adott pontos- ságon belül megválasztható oly kicsinek, hogy T második tényezőjét θ_0 ama fel- ső határa alatt az egységgel helyettesíthessük; ekkor a lengésidő, mint ismeretes, az inga hosszától és a nehézségi gyorsulás nagyságától függ.

Befejezésül a mozgás általános meghatározásában is szorítkozzunk spe- ciálisan igen kicsiny θ_0 szélső szögre. Oly kicsiny θ_0-ra s egyúttal oly pontosságra szorítkozzunk, hogy θ_0 négyzete az egységhez képest zérusnak számíthassuk. Mégpe- dig egészen különvéve tárgyaljuk ezt a speciális esetet, tehát 10-hez térjünk vissza. Itt most így írhatjuk:

$$d\varphi=\sqrt{\frac{g}{l}}\,dt,$$

mert $\sin\frac{\theta_0}{2}\sin\varphi$ négyzetének a legnagyobb értéke $\sin^2\frac{\theta_0}{2}$ is zérusnak írható kikötésünk szerint az egység mellett. Ebből

$$\varphi = \sqrt{\frac{g}{r}}\, t + \frac{\pi}{2},$$

mert φ kezdeti értéke $\frac{\pi}{2}$. Következőleg 9-ből

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sin\frac{\theta_0}{2}\cos\sqrt{\frac{g}{r}}\, t.$$

De kikötésünk értelmében θ_0 felének a sinusa helyett θ_0 fele és úgy θ felének a sinusa helyett θ írható, tehát

$$\theta = \theta_0 \cos\sqrt{\frac{g}{r}}\, t.$$

Eszerint oly kicsiny θ_0 esetén, amelynek a négyzete a kivánt pontosságon belül az egységhez mérten nem tesz számot, az ingaszög egyszerű harmonikus módon változik az idővel, amely változást már egy régebbi példánkban tanulmányoztunk.

Újra láthatjuk, hogy az inga lengési ideje (a $\theta=\theta_0$ szélső helyzetből a túlsó $\theta=-\theta_0$ szélső helyzet elérésére szükséges idő) $= \pi\sqrt{\frac{r}{g}}$, mert t ezen értékénél válik θ-nak a θ_0 kezdeti értéke első ízben $-\theta_0$-ba.

3. Példa. Fonalas matematikai inga.

A telepsrendszer egy állvány, amely a földhöz van rögzítve. A kapcsolórendszer egy tömegtelen fonál, nyújthatatlan, de hajlítható testszál kiegyenesedett állapotban, amely egyik végén az állványhoz van rögzítve. A tömegpontok rendszere egyetlen tömegpont, amely a fonál szabad végéhez van erősítve. Kérdéseink az állványhoz viszonyított mekanikai állapotokra fognak vonatkozni. Ehhez képest tengelyrendszerünk origóját a fonál felfüggesztési pontjába helyezzük és a tengelyeit is állandó helyzetben tartjuk a földre nézve. A tömegpont koordinátáit x, y, z jelentsék ezen tengelyrendszerben. A fonal hosszát pedig r jelölje, mihez képest a fonál feszült állapotban:

$$1 \qquad x^2+y^2+z^2=r^2$$

(a fonál hajlított állapotában $x^2+y^2+z^2<r^2$!)

Amíg a fonál feszült állapotban van, kényszert visel a tömegpont, amely kényszer abban áll, hogy a felfüggesztési ponttól, tehát az origótól nem távolodhatik a tömegpont, hanem csak úgy mozdulhat, hogy vagy megtartja origói távolságát, vagy közeledik az origóhoz. Teljesen megszünt kényszert viselni a tömegpont, mihelyt még oly kicsit is közeledett a felfüggesztési ponthoz. Akkor teljesen szabaddá lett és mindaddig szabad marad, míg esetleg újra r távolságba nem jut a felfüggesztési ponttól, midőn is a fonál újra kiegyenesedik, s.i.t. A kényszerbe tartozó mechanikai állapotokkal akarván foglalkozni, szerkesszük meg mindenek előtt a virtuális kényszer kifejezését.

Mivel a fonál feszült állapotából r és egyben r^2 csak kisebbedve változhatik, úgy 1 alól a ∂ jegy szerint való differenciálás rendén

$$2(x\partial x+y\partial y+z\partial z)\leqq 0$$

azaz

$$2 \qquad -x\partial x-y\partial y-z\partial z\geqq 0,$$

ahol $(\partial x,\partial y,\partial z)$ lehetséges elemi elmozdulást jelent. Viszont a 2 alatt levő egyenlőtlenség kirovásával r csak kisebbedve változhatik, tehát 2 maga a kényszer analytikus kifejezése, egyetlen egyenlőtlenség. Belőle a tényleges mechanikai állapot kényszerére az

$$3 \qquad x\,dx+y\,dy+z\,dz=0$$

egyetlen egyenletünk van. A virtuális kényszer számára pedig a

$$4 \qquad -x\delta x-y\delta y-z\delta z\geqq 0$$

egyetlen egyenlőtlenségünk van.

Ezek után forduljunk az elvi egyenlőtlenséghez, amelyet most is egyetlen tömegpontra kell vonatkoztatnunk, mihez képest így van az:

$$(m\ddot{x}-X)\delta x+(m\ddot{y}-Y)\delta y+(m\ddot{z}-Z)\delta z\geqq 0,$$

ahol minden jegy jelentménye ismeretes. Összehasonlítva ezt a virtuális kényszer eegyenlőtlenségével, 4-el, látjuk, hogy kell léteznie olyan nem negatív multiplikátornak, függetlennek a virtuális elmozdulásoktól, hogy:

$$\underline{5}\quad m\ddot{x}=X-\lambda x\,,\quad m\ddot{y}=Y-\lambda y\,,\quad m\ddot{z}=Z-\lambda z$$

legyen. Ebből λ eliminálásával az

$$\underline{6}\quad m(y\ddot{z}-z\ddot{y})=yZ-zY;\; m(z\ddot{x}-x\ddot{z})=zX-xZ;\; m(x\ddot{y}-y\ddot{x})=xY-yX;$$

határozott egyenletek következnek, amelyekről előre is világos, hogy csak kettőjük lehet egymástól független. Ezekhez csatlakozik 3 alól

$$\underline{7}\quad x\dot{x}+y\dot{y}+z\dot{z}=0.$$

A 6 és 7 alatt lévők teszik a határozott egyenletrendszert. A λ kiszámításával pedig határozott egyenlőtlenséghez jutunk. Ezt a kiszámítást úgy végezzük célszerűen, hogy a koordinátákkal rendre megszorozzuk 5 alatt a multiplikátoros egyenleteinket és azután összeadjuk. Így módon az

$$r^2\lambda=x(X-m\ddot{x})+y(Y-m\ddot{y})+z(Z-m\ddot{z})\geqq 0$$

egyenlőtlenséget kapjuk. Ehelyett pedig 7 deriválása, azután onnan $x\ddot{x}+y\ddot{y}+z\ddot{z}$ helyettesítése után, a kanonikus alakban

$$\underline{8}\quad r^2\lambda=xX+yY+zZ+m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)\geqq 0$$

Első kérdés. A fonál feszült állapotában az állványhoz viszonyítva a nyugalom lehetőségének melyek a föltételei? Felelet: a nyugalomra vonatkoztatott 6, 7, 8, mert ezek most a határozott relációk. A 7 identikusan teljesül, maradnak tehát:

$$yZ=zY\,,\quad zX=xZ\,,\quad xY=yX\,,$$

$$xX+yY+zZ\geqq 0\,,$$

mint a nyugalom lehetőségének szükséges és elégséges feltételei.

A tartalmukat könnyű kifejteni, de közvetlenül is kiolvasható az 5 alól a multiplikátoros egyenletekből, melyek a nyugalomra alkalmazva ezek:

$$X=\lambda x, \quad Y=\lambda y, \quad Z=\lambda z, \quad (\lambda \geqq 0),$$

tehát azt követelik, hogy vagy ne hasson szabaderő ($\lambda=0$), vagy az origói vektor irányában hasson az ($\lambda>0$). Ez a nyugalom lehetőségének szükséges és elégséges föltétele. Világos, hogy bármilyenül adott szabaderőhöz tartozik egy, de csak egy oly hely, ahol azon erő hatása alatt nyugalomban lehet a tömegpont a fonalas kényszerben, mert a fonál bármely irányban fordítható és minden egyes irányhoz egyetlen helye tartozik csak a tömegpontnak. Különösen pedig, ha csupán a nehézségi erőből áll a szabaderő, akkor a lehető legmélyebb helyen és csak itt lehetséges a nyugalom.

<u>Második kérdés</u>. Még csak azt kérdezzük a fonalas inga felől, hogy mik a feltételei annak, hogy az állvány hoz viszonyítva merev matematikai inga módjára mozogjon? Felelet: ezen mozgásra vonatkoztatott $\underline{6}$, $\underline{7}$ és $\underline{8}$ alatti relációink annak a szükséges és elégséges feltételei.

Részletezésük végett vegyük számba mindenek előtt, hogy vertikális körön való mozgást kívánunk. Ha tehát az y, z síkot a mozgás síkjába fektetjük, az elfordulás szögét pedig az x tengely körül a z tengely felől negatív értelemben θ-val jelöljük, akkor

$$x=0, \quad y=r\sin\theta, \quad z=r\cos\theta.$$

(Az origót már eleve a fonál felfüggesztési pontjába helyeztük!) Ezekből

$$\dot{x}=0, \quad \dot{y}=r\cos\theta\,\dot{\theta}, \quad \dot{z}=-r\sin\theta\,\dot{\theta}.$$

Nyilvánvaló tehát, hogy $\underline{6}$-nak második és harmadik egyenlete azon feltétellel teljesül, hogy $X=0$, vagyis azzal, hogy a szabaderő iránya folyvást a kívánt mozgás síkjában legyen. Ez a kívánt mozgásnak egy feltétele már, amelyről feltegyük ezen túl, hogy teljesül. $\underline{7}$ identikusan teljesül. Megmarad még csupán $\underline{6}$ első egyenlete és a $\underline{8}$ alatti foglalt egyenlőtlenség.

A 6 első egyenletét pedig így írva:

$$m\frac{d}{dt}(z\dot{y}-y\dot{z}) = zY - yZ$$

a θ szöges kifejezéseink beiktatásával rögtön az

$$mr\ddot{\theta} = Y\cos\theta - Z\sin\theta$$

egyenletet kapjuk, amely pedig összevág az előbbi példa 5 alatt írt egyenletével, a merev matematikai inga mozgását meghatározó egyenlettel. Ezzel határozott egyenleteink összeférnek a merev matematikai inga módjára való mozgással azon szükséges és elégséges feltétel alatt, hogy a szabaderő iránya folyvást az y, z síkban vagyon.

Azonban egyenlőtlenségünk is vagyon, a 8. Ez a θ szöges kifejezések alkalmazásával így van:

$$Y\sin\theta + Z\cos\theta + mr\dot{\theta}^2 \geqq 0.$$

Addig mozoghat csak merev matematikai inga módjára a fonalas matematikai inga, amíg ezen egyenlőtlenség is teljesül. A puszta nehézségi szabaderő hatását feltételezve, s most a Z tengelyt vertikálisan lefelé állítva, $X=0$, $Y=0$, $Z=mg$, tehát csupán az a feltételünk van, hogy

9 $$g\cos\theta + r\dot{\theta}^2 \geqq 0,$$

amelyben az előbbi példának a 8 előtt írt egyenletéből, vagy ha $\dot{\theta}_0=0$, akkor magából azon példa 8 alatti egyenletéből módunkban van $\dot{\theta}^2$-nak θ-val való kifejezése, midőn aztán tisztán θ-ra kapunk egyenlőtlenséget. Itt csak $\dot{\theta}_0$ (kezdeti szögsebesség) zérus értékére vizsgáljuk meg az egyenlőtlenséget. Célt érhetünk pedig ebben $\dot{\theta}^2$-nak az előbbi példa 8 alatti egyenletéből való helyettesítése nélkül is. Könnyen beláthatjuk ugyanis 9 alatti egyenlőtlenségünkön, hogy ha θ_0 (kezdeti szög) $\leqq \frac{\pi}{2}$, akkor feltétlenül a merev matematikai inga módjára mozog (leng) a fonalas matematikai inga.

Ugyanis az előbbi példa 8 alatti kifejezése azt követeli, hogy $\theta_0 \geqq \theta \geqq -\theta_0$ legyen, ha tehát $\theta_0 \leqq \frac{\pi}{2}$, akkor $\cos\theta$ sohasem negatív, tehát 9 teljesül. Ha ellenben $\theta_0 > \frac{\pi}{2}$, akkor már kezdetben sem teljesül 9, mert kezdetben a második tagja $= r\dot\theta_0^2 = 0$ és az első tagja < 0, midőn nyugalomból indul ki a fonalas matematikai inga, úgy vagy már kezdetben eltér a merev matematikai inga mozgásától (akkor a tömegpont szabadon esik mindaddig, amíg a fonál újra ki nem egyenesedik), vagy folyvást a merev matematikai inga módjára mozog s az első eset akkor köszönt be, midőn a fonál kezdetben fel feléáll, a második akkor, midőn a fonál kezdetben horizontálisan, vagy le feléáll.

4. Példa. Centrifugális cső.

A tömegpontok rendszere egyetlen tömegpont. A testrendszer egy végtelen vékony cső, melynek az egyik vége, amelyet elejének mondunk, nem mozdítható koordinátarendszerünkben, az iránya pedig szabott módon változik, függetlenül a tömegponttól, amely a csőben van és a cső falán keresztül nem mozdulhat, úgy hogy a cső eleje körül a csővel együttesen változtatja a helyét, de a cső mentén mindkét irányban szabadon mozoghat. Kapcsoló rendszer nincs. A koordinátarendszer origóját a cső elejébe tegyük. Ha t pillanatban α, β, γ a cső iránykoszinuszai, a tömegpont pedig a cső elejétől t pillanatban r távolban van, akkor a tömegpont koordinátái t pillanatban ezek:

$$\underline{1} \qquad x = r\alpha, \quad y = r\beta, \quad z = r\gamma.$$

E kifejezésekben r szabadon változtatható, azonban α, β, γ szabott módon változnak. Ha tehát dt időelemben r lehetséges elemi megváltozását δr képviseli, α, β, γ megváltozásai pedig $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$, akkor a tömegpont azon lehetséges elemi elmozdulása, mely a δr-hez tartozik, a koordinátáknak

$$\underline{2} \quad \left\{ \begin{aligned} \delta x &= \alpha\delta r + r\,d\alpha = \alpha\delta r + r\dot\alpha\,dt \\ \delta y &= \beta\delta r + r\,d\beta = \beta\delta r + r\dot\beta\,dt \\ \delta z &= \gamma\delta r + r\,d\gamma = \gamma\delta r + r\dot\gamma\,dt \end{aligned} \right.$$

megváltozásaival van, mint komponensekkel meghatározva. Ezek a kifejezések paraméterumos kifejezései a lehetséges elemi elmozdulásoknak. Belőlük ∂r eliminálásaiu állanak elő a kényszer relációi, amelyek itt csupa egyenletek, u. m.

$$\beta \partial z - \gamma \partial y + (\beta \dot{\gamma} - \dot{\gamma} \beta) r\, dt = 0,$$

$$\gamma \partial x - \alpha \partial z + (\dot{\gamma} \alpha - \dot{\alpha} \gamma) r\, dt = 0,$$

$$\alpha \partial y - \beta \partial x + (\dot{\alpha} \beta - \dot{\beta} \alpha) r\, dt = 0,$$

három eliminációval a szükséges kettő helyett a szimmetria kedvéért.

Most dt szorzója általában nem zérus itt annál fogva, hogy a tömegponttól független mozgást művel a kényszerállomány. Azonban maradjanak a 2 alatti meghatározott paramétrumos kifejezéseknél. Ezekből a tényleges mozgás paraméterumos kényszer kifejezései ugyanazon alakúak:

3 $\quad dx = \alpha\, dr + r \dot{\alpha}\, dt, \quad dy = \beta\, dr + r \dot{\beta}\, dt, \quad dz = \gamma\, dr + r \dot{\gamma}\, dt.$

Kivonva ezeket rendre a 2 alatt levőkből megkapjuk a virtuális elmozdulások paraméterumos kifejezéseit:

4 $\quad \delta x = \alpha\, \delta r, \quad \delta y = \beta\, \delta r, \quad \delta z = \gamma\, \delta r$

s ezek helyettesítendők be most a virtuális munkáknak az

$$(m\ddot{x} - X)\delta x + (m\ddot{y} - Y)\delta y + (m\ddot{z} - Z)\delta z = 0$$

egyenlőtlenségébe. Az eredményben a bal oldalon közös szorzó a δr. Mint hogy ez pozitív is, negatív is lehet, így a szorzatjának el kell tűnnie:

5 $\quad (m\ddot{x} - X)\alpha + (m\ddot{y} - Y)\beta + (m\ddot{z} - Z)\gamma = 0.$

Ez az egyetlen határozott reláció következik most az alaptörvényből, amelyhez 3 alá a tényleges mechanikai állapot kényszereiu az

6 $\quad \dot{x} = \alpha \dot{r} + r \dot{\alpha}, \quad \dot{y} = \beta \dot{r} + r \dot{\beta}, \quad \dot{z} = \gamma \dot{r} + r \dot{\gamma}$

paraméterumos kifejezéseink vannak az egyetlen r paraméterum rendén. Ezek alapján az $\mathfrak{S}$ alatti egyenletet is a paraméterrumra vonatkoztathatjuk: deriválva $\mathfrak{S}$-ot,

$$\ddot{x}=\alpha\ddot{r}+r\ddot{\alpha}+2\dot{\alpha}\dot{r}, \qquad \ddot{y}=\beta\ddot{r}+r\ddot{\beta}+2\dot{\beta}\dot{r}, \quad \ddot{z}=\gamma\ddot{r}+r\ddot{\gamma}+2\dot{\gamma}\dot{r}$$

paraméterrumos kifejezéseket kapjuk, amelyeket beírva $\mathfrak{S}$-be, azután tekintetbe véve, hogy $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$, tehát

$$\alpha\dot{\alpha}+\beta\dot{\beta}+\gamma\dot{\gamma}=0, \quad \alpha\ddot{\alpha}+\beta\ddot{\beta}+\gamma\ddot{\gamma}+\dot{\alpha}^2+\dot{\beta}^2+\dot{\gamma}^2=0.$$

az $\mathfrak{S}$ alatt írt egyenletet az

$$\mathfrak{Z} \qquad \alpha X+\beta Y+\gamma Z = m\ddot{r}-m(\dot{\alpha}^2+\dot{\beta}^2+\dot{\gamma}^2)r$$

paraméterrumos alakra vezettük.

Az α, β, γ iránykoszinuszok itt, mint az idő függvényei adottakul tekintendők. Mindazonáltal reájuk nézve is tehetünk fel kérdéseket. A legegyszerűbb, reájuk vonatkoztatható kérdés az, hogy miképp kell változtatni a cső irányát (s így az α, β, γ iránykoszinuszokat) avégből, hogy a tömegpont adott szabaderő (X, Y, Z) hatása alatt előre kivánt módon mozogjon a cső mentén (előre kivánt módon változtassa a cső elejétől való távolságát)? Nyilvánvaló, hogy ezen kérdésre az α, β, γ iránykoszinuszoknak az invariáns $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$ egyenlete mellett ugyan ők azon első rendű differenciálegyenlete adja meg a választ, amely $\mathfrak{Z}$-ből előáll, miután abban X, Y, Z adott kifejezéseit és r kivánt kifejezését behelyettesítjük. Mivel két egyenletünk van csak a három iránykoszinusz számára, ennélfogva sokféleképen változtathatjuk a cső irányát, úgy, hogy a kivánt módon mozogjon annak a belsejében a tömegpont. Megtehetjük pl., hogy a csövet az elején áthaladó, reá merőleges, a koordinátarendszerünkben iránya szerint is állandó tengely körül forgatjuk; ebbe a tengelybe fektetve ugyanis a z tengelyt, a forgatásnak a θ szögével $\alpha=\cos\theta$, $\beta=\sin\theta$, $\gamma=0$, és most még csak $\mathfrak{Z}$ kielégítése van hátra, amely egyenlet θ kezdeti értékén θ_0-nak, mint az idő függvényének a meghatározására szolgál. Megjegyzendő, hogy a szabaderőt mindig mint $t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ függvényét gondoljuk, tehát adottnak is ilyen függvény gyanánt gondoljuk mindig, miből képest most tekintettel $\mathfrak{S}$-re és $\mathfrak{G}$-ra, mint t, $r\alpha$ stb., $\alpha\dot{r}+r\dot{\alpha}$ stb. függvényét gondoljuk adottnak.

Egy más érdekes kérdés, hogy a cső irányának előre adott változtatása közben, előre adott szabaderők hatása alatt adott kezdeti helyből adott kezdeti sebességgel indulva hogyan mozog a csőmentén a tömegpont. Ezuttal $\underline{Z}$-ben adva van α, β, γ mint az idő függvénye s adva van X, Y, Z mint t, $r\alpha$ stb. $\alpha\dot{r}+r\dot{\alpha}$ stb. függvénye, s meghatározandó r, mint az idő függvénye, amelyre nézve másodrendű differenciálegyenlet a $\underline{Z}$.

Egy harmadik érdekes kérdés, hogy a cső irányának előre adott változtatása közben mily szabaderőt kell hattatnunk a tömegpontra, hogy csak a csővel együtt mozogjon, a csőben nyugalmat tartson. Feleletül $\underline{Z}$-ben $\dot{r}=0$ és úgy nem különben $\ddot{r}=0$ irandó: olyannak kell tehát lennie a szabaderőnek, hogy

$$\alpha X+\beta Y+\gamma Z=-mr(\dot{\alpha}^2+\dot{\beta}^2+\dot{\gamma}^2)$$

legyen. Azonban most, hogy $\dot{r}=0$, az következik (6) alól, hogy $\dot{\alpha}=\frac{\dot{x}}{r}$ stb. Ha tehát a tömegpont sebességének a nagyságát $\dot{s}$ jelöli (minélfogva $\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2=\dot{s}^2$), akkor az

$$\alpha X+\beta Y+\gamma Z=-m\frac{\dot{s}^2}{r}$$

feltételünk van. A baloldal a szabaderőnek a cső irányára tartozó komponense, a jobboldalon $\frac{\dot{s}^2}{r}$ a tömegpont centripetális gyorsulásának a nagysága, amely gyorsulás itt épen a cső eleje felé irányul. Azon feltételünk van tehát, hogy a szabaderőnek a csövön fekvő összetevője folyvást egyenlő legyen a tömegpont tömegének és ~~szabad~~ centripetális gyorsulásának a szorzatával, mert egyenletünk azt rójja ki, hogy a szabaderőnek a cső irányára tartozó komponense abszolút érték szerint $m\frac{\dot{s}^2}{r}$ szorzattal legyen egyenlő, de negatív legyen, tehát mint vektor a cső eleje felé mutasson. Minthogy ilyen szabaderő tartja nyugalomban a csőben a tömegpontot, így a cső eleje körül való mozgásból szükségképp ezzel egyenlő nagyságú, de ellenkező irányú erő háramlik a cső hanyján a tömegpontra, amelyet a mozgás centrifugális erejének nevezünk a tömegponton.

5. Példa. Tömegpont nyugalma ellenálló gúla csúcsában.

Feltesszük, hogy nincsenek beszögellő élei a gúlának és koordinátarendszerünkben nyugvó téleprendszernek gondoljuk azt. Ha lapjai befelé mutató normálisainak iránykoszinuszait $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$; stb. jelölik, akkor oly elemi elmozdulásokat végezhet csak a tömegpont, amelyek eleget tesznek az

$$\alpha_1 \partial x + \beta_1 \partial y + \gamma_1 \partial z \geqq 0,$$
$$\alpha_2 \partial x + \beta_2 \partial y + \gamma_2 \partial z \geqq 0$$
$$- \; - \; - \; - \; - \; -$$

egyenlőtlenségeknek, mert egy normálissal sem alkothatnak tompa szöget a tömegpont lehetséges elemi elmozdulásai. A virtuális elmozdulások most összeesnek a lehetségesekkel, mert $dt = 0$, $dy = 0$, $dz = 0$.

Ezuttal már egyenesen a virtuális munkák egyenlőtlenségét vonatkoztatva a nyugalomra:

$$-(X\partial x + Y\partial y + Z\partial z) \geqq 0.$$

Ezen egyenlőtlenség amazok minden megoldásában tartozik teljesülni, tehát kell lenniök olyan $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ nem negatív multiplikátoroknak, amelyek szerint

$$X = \sum_i \lambda_i(-\alpha_i), \quad Y = \sum_i \lambda_i(-\beta_i), \quad Z = \sum_i \lambda_i(-\gamma_i).$$

Szükséges és elégséges feltétele annak, hogy a tömegpont nyugalomban maradhasson, abból áll tehát, hogy a szabaderőt oly erők eredőjére lehessen bontani, amelyek rendre merőlegesek a gúla lapjaira és mindannyian kifelé irányulnak a gúla felől. Minthogy az ily összetevő erők eredője oly vektor szükségképen, hogy ha az elejét a gúla csúcsába tesszük, akkor a vége a kiegészítő gúlában (a normálisok, mint élek által meghatározott gúlában) van, (ennek a belsejében, vagy egyik lapján, vagy egyik élén), ennélfogva röviden úgy mondható ki a tétel, hogy a tömegpontra ható szabad erő iránya a kiegészítő gúlába esik (a belsejébe, vagy egyik lapjára, vagy egyik élére).

6. Példa. Két tömegpont fonalas kapcsolatban.

„Nyújthatatlan", de hajlítható, kiegyenesített, „tömegtelen" fonál kapcsol össze két tömegpontot, amelyek a fonál két végére vannak erősítve. Az egyik tömegpontra tartozó mennyiségeket (tömeg, koordináták, szabaderő komponensei) egyes index, a másikra tartozókat kettes index jelöli. Abban van a két tömegpont kényszere, hogy, amíg a fonál egyenes, a távolságuk nem nagyobbodhatik, vagy ugyanezt máskép fejezve ki; a távolságuk négyzete nem nagyobbodhatik, csak kisebbedve változhatik meg:

$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z^2-z_1)^2$ minden lehetséges elemi megváltozása negatív

$$\partial\left\{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z^2-z_1)^2\right\}\leqq 0.$$

Így is írhatjuk ezt:

$$1\quad \left\{\begin{aligned}&(x_2-x_1)\partial x_1+(y_2-y_1)\partial y_1+(z_2-z_1)\partial z_1+\\ &+(x_1-x_2)\partial x_2+(y_1-y_2)\partial y_2+(z_1-z_2)\partial z_2\geqq 0\end{aligned}\right.$$

Ha aztán ∂ helyett a d jegyet írjuk s az egyenlőtlenség jelét elhagyjuk, megkapjuk a tényleges mechanikai állapot kényszer egyenletét:

$$2\qquad (x_2-x_1)dx_1+\cdot+\cdot+(x_1-x_2)dx_2+\cdot+\cdot=0.$$

Ha pedig $\partial x_1, \partial x_2$ stb. helyett $\delta x_1, \delta x_2$ stb. írjuk, előáll a virtuális kényszer relációja:

$$3\qquad (x_2-x_1)\delta x_1+\cdot+\cdot+(x_1-x_2)\delta x_2+\cdot+\cdot\geqq 0.$$

A virtuális munkák egyenlőtlensége szerint ez:

$$(m_1\ddot{x}_1-X_1)\delta x_1+\cdot+\cdot+(m_2\ddot{x}_2-X_2)\delta x_2+\cdot+\cdot\geqq 0$$

Kell tehát léteznie olyan nem negatív λ multiplikátornak, hogy megszorozva azzal 3 baloldalát, megkapjuk ezen munkaegyenlőtlenség baloldalát, miből következik az

$$\underset{\smile}{4}\quad\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 = X_1 + \lambda\cdot(x_2 - x_1), & m_2\ddot{x}_2 = X_2 + \lambda\cdot(x_1 - x_2), \\ m_1\ddot{y}_1 = Y_1 + \lambda\cdot(y_2 - y_1), & m_2\ddot{y}_2 = Y_2 + \lambda\cdot(y_1 - y_2), \\ m_1\ddot{z}_1 = Z_1 + \lambda\cdot(z_2 - z_1), & m_2\ddot{z}_2 = Z_2 + \lambda\cdot(z_1 - z_2), \end{cases}$$

multiplikátoros egyenleteink vannak, amelyekben $\lambda \geqq 0$. Öt független módon eliminálható belőlük λ, de szimmetria végett hat módon fogjuk eliminálni; három módon azáltal, hogy az egy sorban lévő egyenleteket összeadjuk:

$$\underset{\smile}{5}_1\quad m_1\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_2 = X_1 + X_2,\quad m_1\ddot{y}_1 + m_2\ddot{y}_2 = Y_1 + Y_2,\quad m_1\ddot{z}_1 + m_2\ddot{z}_2 = Z_1 + Z_2,$$

három módon olyképp, hogy az első oszlopban az m_1-el, a másodikban az m_2-vel átosztjuk az egyenleteket, aztán az egy sorban lévő egyenleteket kivonjuk egymásból, aztán rendre megszorozva az x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1,-vel, összeadjuk őket és az eredményből kiszámítva a λ multiplikátort, értékét beírjuk az előbb a kivonások rendén nyert egyenleteinkbe. Ha a λ kiszámított értékének $\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2}$-szeresét röviden p-vel jelöljük, azt kapjuk, hogy

$$\underset{\smile}{5}_2\quad\begin{cases} \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 = \dfrac{X_2}{m_2} - \dfrac{X_1}{m_1} - p\cdot(x_2 - x_1), \\ \ddot{y}_2 - \ddot{y}_1 = \dfrac{Y_2}{m_2} - \dfrac{Y_1}{m_1} - p\cdot(y_2 - y_1), \\ \ddot{z}_2 - \ddot{z}_1 = \dfrac{Z_2}{m_2} - \dfrac{Z_1}{m_1} - p\cdot(z_2 - z_1) \end{cases}$$

(3) – 2

amelyekhez a tényleges mechanikai állapot kényszeregyenlete csatlakozik még, u. m. 2 alól, dt-vel történt átosztás után

$$\underset{\smile}{5}_3\quad (x_2-x_1)(\dot{x}_2-\dot{x}_1) + (y_2-y_1)(\dot{y}_2-\dot{y}_1) + (z_2-z_1)(\dot{z}_2-\dot{z}_1) = 0$$

Írjuk fel még p kifejezését, amely egyúttal határozott egyenlőtlenséget szolgáltat annál fogva, hogy λ nem negatív. A két tömegpont távolságát (a fonál hosszát) r-el jelölve:

$$\underset{\smile}{6}\quad\begin{cases} \dfrac{m_1+m_2}{m_1 m_2}\lambda = p \equiv \\ \equiv \left\{\dfrac{X_2}{m_2} - \dfrac{X_1}{m_1} - (\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1)\right\}\dfrac{x_2-x_1}{r^2} + \left\{\dfrac{Y_2}{m_2} - \dfrac{Y_1}{m_1} - (\ddot{y}_2 - \ddot{y}_1)\right\}\dfrac{y_2-y_1}{r^2} + \left\{\dfrac{Z_2}{m_2} - \dfrac{Z_1}{m_1} - (\ddot{z}_2 - \ddot{z}_1)\right\}\dfrac{z_2-z_1}{r^2} \geqq 0 \end{cases}$$

Az Σ_1, Σ_2, Σ_3 két határozott egyenletünk van a kifejezésének ~~a tekintetbe vételével~~, amelyek sorában azonban Σ_2 csak két független tartalmaz. Ezen határozott relációkon kívül még egyszerű csak a 6. alatt foglalt egyenlőtlenség. Most azonban mindezeket alkalmasabb formába fogjuk átalakítani.

Az Σ_1-ben a baloldalakon $m_1x_1+m_2x_2$ stb. második deriváltjai fordulnak elő. Írjuk röviden, hogy

$$Z' \qquad m_1x_1+m_2x_2\equiv m\xi,\quad m_1y_1+m_2y_2\equiv m\eta,\quad m_1z_1+m_2z_2\equiv m\zeta,\quad m\equiv m_1+m_2.$$

Ezekkel Σ_1 alatti öt egyenleteink a következők:

$$Z_1 \qquad m\ddot{\xi}=X_1+X_2,\quad m\ddot{\eta}=Y_1+Y_2,\quad m\ddot{\zeta}=Z_1+Z_2.$$

A ξ,η,ζ skalárisok pedig a két tömegpont távolsági vonalán (tehát a focálban) egy határozott pontnak a koordinátái, amelyet a két tömegpont centrumának nevezünk. Ugyanis Z' alól azáltal, hogy m_1 helyett $(m-m_2)$-et írunk ~~a második sorban előbb~~, azt kapjuk, hogy

$$\xi-x_1=\frac{m_2}{m}(x_2-x_1),\quad \eta-y_1=\frac{m_2}{m}(y_2-y_1),\quad \zeta-z_1=\frac{m_2}{m}(z_2-z_1)$$

tehát az m_1 tömegű pontból a (ξ,η,ζ) pontba nyúló vektor azon irányú mint az m_1 tömegűből az m_2 tömegűbe nyúló, a nagysága pedig $\frac{m_2}{m}r$ tehát állandó és kisebb mint a két tömegpont távola (r).

Az Σ_2 alatti egyenleteket úgy alakítjuk át, hogy a konstans r távolsággal átosztjuk s aztán figyelembe vesszük, hogy

$$\frac{\ddot{x}_2-\ddot{x}_1}{r}=\frac{d^2}{dt^2}\frac{x_2-x_1}{r} \text{ stb.}$$

és úgy az m_1 tömegű pontból az m_2-be mutató iránynak az iránykoszinuszait α,β,γ-val jelölve, azaz

$$Z'' \qquad \frac{x_2-x_1}{r}\equiv\alpha,\quad \frac{y_2-y_1}{r}\equiv\beta,\quad \frac{z_2-z_1}{r}\equiv\gamma$$

téve, Σ_2 egyenletei ebben az alakban jelentkeznek:

$$Z_2 \qquad \ddot{\alpha}=\frac{X_2}{m_2r}-\frac{X_1}{m_1r}-p\alpha,\quad \ddot{\beta}=\frac{Y_2}{m_2r}-\frac{Y_1}{m_1r}-p\beta,\quad \ddot{\gamma}=\frac{Z_2}{m_2r}-\frac{Z_1}{m_1r}-p\gamma,$$

az Z_3 pedig r négyzetével való átosztás után ez lesz:

$$Z_3 \qquad \alpha\dot{\alpha} + \beta\dot{\beta} + \gamma\dot{\gamma} = 0,$$

ami azt fejezi ki, csupán, hogy az α, β, γ vektor nagysága állandó, amit úgy is tudunk, mert egység vektor az. A p-nek a kifejezését 6-ből szintén $\ddot{\alpha}, \ddot{\beta}, \ddot{\gamma}$-ra írhatjuk át, de úgyis röviden kapjuk α, β, γ-ra, ha a Z_2 alattiakat rendre α, β, γ-val szorozva összeadjuk. Minthogy pedig Z_3 deriválásán

$$Z''' \qquad \alpha\ddot{\alpha} + \beta\ddot{\beta} + \gamma\ddot{\gamma} = -(\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2 + \dot{\gamma}^2)$$

vonatkozás származik, így e módon írhatjuk p kifejezését s egyben az egyenlőtlenséget:

$$8 \qquad p = \left(\frac{X_2}{m_2} - \frac{X_1}{m_1}\right)\frac{\alpha}{r} + \left(\frac{Y_2}{m_2} - \frac{Y_1}{m_1}\right)\frac{\beta}{r} + \left(\frac{Z_2}{m_2} - \frac{Z_1}{m_1}\right)\frac{\gamma}{r} + \dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2 + \dot{\gamma}^2 \geqq 0$$

1. Kérdés. Mely feltételek alatt lehet nyugalomban a két tömegpont?

Erre kérdésre most is a multiplikátoros egyenletek adják meg a legegyszerűbben a választ. A nyugalomra vonatkoztatott 4. egyenleteit, így írhatjuk fel azokat:

$$X_1 = -\lambda r\alpha, \quad Y_1 = -\lambda r\beta, \quad Z_1 = -\lambda r\gamma,$$
$$X_2 = \lambda r\alpha, \quad Y_2 = \lambda r\beta, \quad Z_2 = \lambda r\gamma.$$

Minthogy $\lambda \geqq 0$, így abból állanak a kérdezett feltételek, hogy vagy nem hatnak egyik pontra sem szabad erő ($\lambda = 0$ esete), vagy egyenlő nagy távolító irányú szabaderők hatnak a tömegpontokra, mindegyikre a másik felől irányult, a fonalat egyenlően feszítő erő hasson ($\lambda > 0$ esete). Elektromos például a két tömegpont csak egy nemben és egyenlően lehet a nyugalom lehetőségére.

2. Kérdés. Mik a feltételei annak, hogy a tömegpontok irányvonala (a két tömegponton áthaladó egyenes vonal) **ne forduljon?** Erre kérdés megoldását az állandó α, β, γ irány koszinuszokra vonatkoztatott Z_1, Z_2, Z_3 és 8 adja. Ezeknek vegyük figyelembe, hogy ha a tömegpontoktól a tömegcentrum r_1 illetőleg r_2 távolban

távolban van, akkor: $\xi - x_1 = r_1\alpha$, stb. $x_2 - \xi = r_2\alpha$, stb. honnan

$$x_1 = \xi - r_1\alpha, \text{ stb.} \qquad x_2 = \xi + r_2\alpha, \text{ stb.},$$

ahol r_1, r_2 konstansok és most α, β, γ is konstansnak tekintendő, miközképpen pedig

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = \dot{\xi}, \text{ stb.}$$

Amennyiben tehát a szabaderők a tömegpontok helyétől és esetleg még a sebességétől is függenének, ezek írandók a komponenseikben a tömegpontok koordinátái, illetőleg sebességi komponensei helyett. Csakis annyiban érinti a kérdés a Z_1 alatti egyenleteket, amelyek a tömegcentrum mechanikai állapotának a meghatározására szolgálnak. A Z_3 identikusan teljesül. Minthogy pedig S csak a Z_2 multiplikátoros egyenletek folyománya, így elég ezen három multiplikátoros egyenlet vizsgálata, amelyekben számba veendő azonban, hogy $p \geqq 0$ köteles lenni. Ezen három egyenletből

$$\frac{X_2}{m_2} - \frac{X_1}{m_1} = rp\alpha, \quad \frac{Y_2}{m_2} - \frac{Y_1}{m_1} = rp\beta, \quad \frac{Z_2}{m_2} - \frac{Z_1}{m_1} = rp\gamma$$

A baloldalakon az első tagok az m_2 tömegű pont szabadgyorsulásának a komponensei, a kivonandó tagok az m_1 tömegű pont szabadgyorsulásának a komponensei. Azt nyújtják tehát feltételül ezen egyenletek, hogy a Z_1-ből következő ξ, η, ζ koordinátáknál $\dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta}$ sebességi komponensek mellett, vagy egyenlő legyen a két tömegpont szabadgyorsulása ($p = 0$ esete), vagy oly vektorban különbözzenek, amely a különbözés értelme (kettes és egyes számúnak, vagy egyes és kettes számúnak a különbsége) szerint a fonál egyik, vagy másik irányával ($1 \to 2$, vagy $2 \to 1$ iránnyal) azonos irányú ($p > 0$ esete). Ehez csatlakozó követelmény, hogy kezdetben $(\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}) = 0$ legyen.

3. Kérdés. Ha koordinátarendszerünk a földhöz van rögzítve és csak a nehézségi szabaderő hat a tömegpontokra, akkor miképp mozognak ezek az ő fonalas kényszerükben és meddig maradnak meg ezen kényszerben?

Oly térben, amelynek a méretei a föld méreteihez képest igen kicsinyek, minden tömegpontnak a nehézségi gyorsulása ugyanaz és állandó. Ha tehát koordinátarendszerünk z tengelyét vertikálisan lefelé irányítjuk, akkor

$$X_1 = 0,\ Y_1 = 0,\ Z_1 = m_1 g;\ X_2 = 0,\ Y_2 = 0,\ Z_2 = m_2 g.$$

Ezek felhasználásával $\mathfrak{Z}_1$ így van:

$$\mathfrak{G}_1 \qquad \ddot{\xi} = 0, \quad \ddot{\eta} = 0, \quad \ddot{\zeta} = g$$

a $\mathfrak{Z}_2$ pedig ezzé válik:

$$\mathfrak{G}_2 \qquad \ddot{\alpha} = -p\alpha, \quad \ddot{\beta} = -p\beta, \quad \ddot{\gamma} = -p\gamma$$

amelyekhez még $\mathfrak{Z}_3$ csatlakozik.

$$\mathfrak{G}_3 \qquad \alpha\dot{\alpha} + \beta\dot{\beta} + \gamma\dot{\gamma} = 0.$$

A 8 alatt foglalt határozott egyenlőtlenség identikusan teljesül.

$$19 \qquad p = \dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2 + \dot{\gamma}^2 \geqq 0$$

A $\mathfrak{G}_1$ három egyenlete a tömegcentrum mozgását határozza meg és pedig úgy határozza meg, mint a 61. lap egyenletei egy kidobott homogén golyó centrumának a mozgását közvetlen tapasztalás rendén határozták meg arra az esetre, hogy amíg a sebesség valamely alsó határon alul marad, addig a környezet ellenállása figyelmen kívül maradhat.

A $\mathfrak{G}_2$ egyenletek és $\mathfrak{G}_3$ (amely az iránykoszinuszok $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = 1$ vonatkozásának a következménye csak) meghatározzák az α, β, γ forgástengely változását az (α, β, γ) egységvektornak és változási sebességének kezdeti komponenseihez. Szorozzuk meg rendre $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}$-val $\mathfrak{G}_2$ egyenleteit. Az eredmény jobb oldala $\mathfrak{G}_3$ nyomán eltűnik, a baloldala pedig $\dot{\alpha}^2+\dot{\beta}^2+\dot{\gamma}^2$ felének a deriváltja. A jobboldal eltűnése miatt $\dot{\alpha}^2+\dot{\beta}^2+\dot{\gamma}^2$ deriváltjának is el kell tűnnie, tehát ő maga egy konstans. Jelölje h^2 az egyenlőre határozatlan konstanst:

$$\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2 + \dot{\gamma}^2 = h^2 = \text{konst.}$$

Ebből és 19-ből $p = h^2$ következik, tehát visszatérve $\mathfrak{G}_2$-höz:

$$\ddot{\alpha} = -h^2\alpha, \quad \ddot{\beta} = -h^2\beta, \quad \ddot{\gamma} = -h^2\gamma$$

Megnézve a 73. lap második egyenletsorából (amelyben x, y, z van α, β, γ helyett és $\omega : T$ van h helyett), látjuk, hogy mind három iránykoszinusz egyszerű harmonikus módon változik az idővel, nevezetesen a 73. lap harmadik egyenlet sora szerint ilyen alakban írható fel egyenleteink megoldása.

$$\alpha = \alpha_1 \sin ht + \alpha_2 \cos ht, \quad \beta = \beta_1 \sin ht + \beta_2 \cos ht, \quad \gamma = \gamma_1 \sin ht + \gamma_2 \cos ht,$$

ahol (amiatt, hogy $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$)

$$\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2=1, \quad \alpha_2^2+\beta_2^2+\gamma_2^2=1, \quad \alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2=0$$

szükséges, vagyis az, hogy $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ és $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ egymásra merőleges egységvektorok legyenek. Ha pedig α, β, γ kezdeti ($t=0$ pillanatbeli) értékeit $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ és $\dot\alpha, \dot\beta, \dot\gamma$ kezdeti értékeit $\dot\alpha_0, \dot\beta_0, \dot\gamma_0$ jelöli, akkor az ($\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ és $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ iránykoszinuszok és h meghatározására α, β, γ kifejezéseiből és deriválás nyomán $\dot\alpha, \dot\beta, \dot\gamma$ kifejezéseiből a kezdeti időre vonatkoztatással)

$$\alpha_2=\alpha_0, \quad \beta_2=\beta_0, \quad \gamma_2=\gamma_0; \quad \alpha_1=\frac{\dot\alpha_0}{h}, \quad \beta_1=\frac{\dot\beta_0}{h}, \quad \gamma_1=\frac{\dot\gamma_0}{h};$$

$$h^2=\dot\alpha_0^2+\dot\beta_0^2+\dot\gamma_0^2,$$

szolgálnak, amelyek második sorát az első sorában levők kvadrálása, azután összeadása adja. Azért jutottunk el h-hoz is, mert $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ iránykoszinuszok, tehát invariáns vonatkozásban vannak. ($\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2=1$).

7. Példa. Két tömegpont tengelyes kényszerben. A talaprendszer a földhöz erősített állvány. A kapcsoló rendszer merev, általában görbe tartószál, amely az állványhoz tartozó tengely körül szabadon foroghat, de más mozgást nem művelhet koordináta rendszerünkben, amelyet a földhöz rögzítve gondolunk. A két tömegpont a tartószál két végére van rögzítve.

Paraméteresen fejezzük ki a kényszert. Az z tengelyt a forgástengelybe helyezve, a tömegpontok z tengelyű vektorát u_1, u_2, ezek szögét ε, a hosszúságukat r_1, r_2 jelölje. Az (x, y) sík felől valamelyik értelemben t pillanatban az u_1 vektor elfordulásának a szöge legyen a kisebb szög, s ezt a szöget θ-val jelöljük. Akkor ugyanazon értelemben az (1, 2) sík felől t pillanatban az r_2 vektor elfordulásának a szöge $= \varepsilon+\theta$. Mindezek rendén a két tömegpont koordinátái:

$$
(1)\quad \begin{cases} x_1 = \text{const}, & y_1 = r_1 \cos\theta; \quad z_1 = r_1 \sin\theta, \\ x_2 = \text{const}, & y_2 = r_2 \cos(\varepsilon+\theta), \quad z_2 = r_2 \sin(\varepsilon+\theta), \end{cases}
$$

ahol csakis θ változhatik, ellenben r_1, r_2, ε konstansok. A ∂ jegy szerint való differenciálással (1 alól

$$
\begin{aligned} \partial x_1 &= 0, \quad \partial y_1 = -r_1 \sin\theta \cdot \partial\theta, \quad \partial z_1 = r_1 \cos\theta \cdot \partial\theta \\ \partial x_2 &= 0, \quad \partial y_2 = -r_2 \sin(\varepsilon+\theta)\,\partial\theta, \quad \partial z_2 = r_2 \cos(\varepsilon+\theta)\,\partial\theta \end{aligned}
$$

következnek, mint a kényszer paraméteres kifejezései $\partial\theta$ egyetlen paraméter szerint. Azonban az írás egyszerűsítése végett vezessük be a szinuszok és koszinuszok helyett (1 alól az illető koordinátákat:

$$
(2)\quad \begin{cases} \partial x_1 = 0, & \partial y_1 = -z_1 \partial\theta, \quad \partial z_1 = y_1 \partial\theta, \\ \partial x_2 = 0, & \partial y_2 = -z_2 \partial\theta, \quad \partial z_2 = y_2 \partial\theta. \end{cases}
$$

Ezekből a tényleges mechanikai állapot kényszerének a kifejezései:

$$
(3)\quad \begin{cases} dx_1 = 0, & dy_1 = -z_1\, d\theta, \quad dz_1 = y_1\, d\theta, \\ dx_2 = 0, & dy_2 = -z_2\, d\theta, \quad dz_2 = y_2\, d\theta. \end{cases}
$$

Rendre kivonva a 3 alattiakat a 2 alattiakból, megkapjuk a virtuális kényszer paraméteres kifejezéseit:

$$
(4)\quad \begin{cases} \delta x_1 = 0, & \delta y_1 = -z_1 \delta\theta, \quad \delta z_1 = y_1 \delta\theta, \\ \delta x_2 = 0, & \delta y_2 = -z_2 \delta\theta, \quad \delta z_2 = y_2 \delta\theta. \end{cases}
$$

Forduljunk már most a virtuális munkák egyenlőtlenségéhez. Ez két tömegpontra alkalmazva így van:

$$
\begin{aligned} &(m_1 \ddot{x}_1 - X_1)\delta x_1 + (m_1 \ddot{y}_1 - Y_1)\delta y_1 + (m_1 \ddot{z}_1 - Z_1)\delta z_1 + \\ &+ (m_2 \ddot{x}_2 - X_2)\delta x_2 + (m_2 \ddot{y}_2 - Y_2)\delta y_2 + (m_2 \ddot{z}_2 - Z_2)\delta z_2 \geqq 0. \end{aligned}
$$

Betéve ebbe 4 alól a koordináta variációk jobboldali értékeit, közös szorzóként kiemelhető fel $\delta\theta$. Minthogy ez pozitív is negatív is lehet, ennélfogva így állhat meg csak az egyenlőtlenség, hogy abban $\delta\theta$ szorzója eltűnik.

$$
\begin{aligned} &y_1 (m_1 \ddot{z}_1 - Z_1) - z_1 (m_1 \ddot{y}_1 - Y_1) + \\ &+ y_2 (m_2 \ddot{z}_2 - Z_2) - z_2 (m_2 \ddot{y}_2 - Y_2) = 0, \end{aligned}
$$

mint így is írhatunk:

$$\text{5} \qquad \frac{d}{dt}\left\{m_1(y_1\dot z_1 - z_1\dot y_1) + m_2(y_2\dot z_2 - z_2\dot y_2)\right\} = (y_1 Z_1 - z_1 Y_1) + (y_2 Z_2 - z_2 Y_2)$$

ez az egyetlen határozott reláció következik most az alaptörvényből, amelyhez a kényszerből 3 alól

$$\text{6} \qquad \begin{cases} \dot x_1 = 0, & \dot y_1 = -z_1\dot\theta, \quad \dot z_1 = y_1\dot\theta, \\ \dot x_2 = 0, & \dot y_2 = -z_2\dot\theta; \quad \dot z_2 = y_2\dot\theta \end{cases}$$

csatlakoznak. Beírva őket 5 baloldalába, 5 helyett az egyszerűbb alakú

$$\text{7} \qquad (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2)\ddot\theta = (y_1 Z_1 - z_1 Y_1) + (y_2 Z_2 - z_2 Y_2)$$

egyenletünk lesz, mert $y_1^2+z_1^2=r_1^2$; $y_2^2+z_2^2=r_2^2$. A $\ddot\theta$ itteni szorzóját a <u>két tömegpont x tengelyű inercia momentumának</u> nevezzük. Két kérdést intézünk el.

<u>1. Kérdés. Mik a nyugalom lehetőségének a föltételei, midőn a szabaderők párhuzamosak?</u> Akkor állítsuk a z tengelyt párhuzamosan a két szabaderőnek a $(0, Y_1, Z_1)$, $(0, Y_2, Z_2)$ összetevőjével, vagyis az (y,z) síkra tartozó összetevőikkel, amelyek mint a két teljes szabaderő, ugyancsak párhuzamosak egymással; ezt z tengely ily helyzetében $Y_1=0$, $Y_2=0$, tehát a 7 alatt írt egyenlet a nyugalomra vonatkoztatva így van:

$$\text{8} \qquad y_1 Z_1 + y_2 Z_2 = 0$$

A 6 alatti egyenletek identikusan teljesülnek s így ezen 8 számú egyenlet itt a nyugalom lehetőségének a szüksége és elégséges föltétele, midőn a két tömegpontra ható erő párhuzamos. Ha egyértelemben párhuzamosak, akkor Z_1 és Z_2 egyező előjelű, vagy mindkettő pozitív, vagy mindkettő negatív; következőleg y_1 és y_2 ellenkező előjelű tartozik lenni, tehát a két tömegpontnak az (x,z) sík két különböző oldalán kell lennie a nyugalom lehetősége végett s a tömegpontoknak az (x,z) síktól való távolságát R_1, R_2-vel jelölve meg, a Z_1 és Z_2 összetevőknek úgy kell egymáshoz arányulniok, mint R_2 és R_1-nek, azaz fordítva, mint a két tömegpont (x,z) síktól való távolságának s ezek a követelmények a szükséges és elégséges feltételek. Ha a két szabaderő ellenkező értelemben párhuzamos, akkor Z_1 és Z_2 ellentétes előjelű, tehát y_1 és y_2 egyező előjelű tartozik lenni s így a két tömegpont az (x,z) sík ugyanazon oldalán lenni köteles, különben Z_1 és Z_2 nagyságának most is fordítva kell aránylaniok egymáshoz, mint a tömegpontok (x,z) síktól mért távolságának, hogy teljesüljenek a nyugalom lehetőségének a szükséges és elégséges feltételei. Ha aztán kezdetben nyugalomban voltak a tömegpontok, továbbra is nyugalomban maradnak azok. Abban a különös esetben, hogy a két tömegpont csak a nehézségi szabaderő hatását viseli, az (x,z) sík vertikális és, ha a z tengely s a lefelé mutató vertikális irányszöge ϖ, akkor $Z_1 = m_1 g\cos\varpi$, $Z_2 = m_2 g\cos\varpi$, tehát a két tömegpont az (x,z) vertikális sík két ellenkező oldalán köteles lenni úgy R_1, illetőleg R_2 távolságban ezen síktól, hogy $R_1 : R_2 = m_2 : m_1$ legyen.

2. Kérdés. A nehézségi szabaderő hatása alatt hogyan mozog a két tömegpont?

Az (x,z) síkot vertikálisan állítva $Y_1 = 0$, $Y_2 = 0$ és ha a z tengely s a nehézségi gyorsulás szöge ϖ, akkor $Z_1 = m_1 g\cos\varpi$, $Z_2 = m_2 g\cos\varpi$, tehát Z alatt írt határozott egyenletünk így van most:

$$(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2)\theta'' = (m_1 y_1 + m_2 y_2)\, g\cos\varpi.$$

Úgy gondoljuk a Z tengelyt, hogy hegyes szöget alkosson a nehézségi gyorsulással, minél fogva $\cos\varpi$ pozitív. A jobb oldalon a zárójel tartalma elosztva a két tömegpont összes tömegével a két tömegpont tömegcentrumának (l. az előbbi példát) a második koordinátája. Ha tehát ezen tömegcentrum x tengelyű vektora h hosszúságú és t pillanatban ψ szögön van elfordulva θ értelmében az (x,z) sík felől, akkor

$$m_1 y_1 + m_2 y_2 = -(m_1 + m_2)\, h \sin\psi, \quad \theta = \psi + \text{const.}$$

A θ szögnek, illetőleg most már a ψ szögnek az alkalmazása által már 6 is számba van véve, mint egyenes következménye 5-nek. Írjuk röviden, hogy $m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 \equiv J$, $m_1 + m_2 \equiv M$, úgyhogy J a két tömegpont u. n. inercia momentuma az x (forgástengely) körül, m a két tömegpont rendszerének a tömege. Ehez képest differenciálegyenletünk ezt az alakot ölti:

$$\frac{J}{mh\cos\bar{\omega}}\ddot{\psi} = -g\sin\psi. \qquad (9)$$

Összehasonlítva ezt a merev matematikai inga 3 alatt írt differenciálegyenletével, látjuk, hogy úgy mozog a két tömegpont tömegcentruma, mint azon merev matematikai inga tömegpontja, amelynek a hosszúsága $\frac{J}{mh\cos\bar{\omega}}$.

Nyugalomban pedig azon helyzetekben lehet a pontpár ezúttal 9 szerint, amelyeket $\psi=0$, meg $\psi=\pi$ határoz meg, tehát a tömegcentrum legalsó és legfelső helyzetében tarthat nyugalmat tengelyes kényszerében a pontpár, midőn csak a nehézségi szabaderő hatását viseli. Az egyik nyugalmi helyzetet a pontpár alsó, a másikat a pontpár felső nyugalmi helyzetének mondjuk.

Itt most foglalkozzunk egy nevezetes mechanikai különbségével a két nyugalmi helyzetnek. Ha alsó nyugalmi helyzetében igen kis kezdeti sebessége van a pontpárnak, akkor a nyugalmi helyzetéhez folyvást igen közel maradva mozog az; ha ellenben felső nyugalmi helyzetében van igen kis sebessége a pontpárnak, akkor bármi kicsi legyen is ez a sebesség, nem vesztegel nyugalmi helyzetének a közelében a pontpár, hanem kezdeti szögsebességének az értelme szerint az egyik, vagy másik értelemben szakadatlan körülforgásokat végez. <u>Röviden úgy mondjuk ezt, hogy a pontpár alsó nyugalmi helyzete stabilis, felső nyugalmi helyzete labilis.</u> — Meggyőződést szerzendők ezen állításaink felől, végezzünk egy integrálást 9 alatti egyenletünkön, mi végre megszorozzuk mindkét oldalát a $\dot{\psi}$ első deriválttal.

Ha röviden

$$2g\frac{mh\cos\bar{\omega}}{J} \equiv k^2$$

tesszük, akkor a

$$\dot{\psi}^2 = k^2\cos\psi + \text{const}$$

egyenletet kapjuk. A konstans meghatározása végett vonatkoztassuk a kezdeti pillanatra ezt az egyenletet. Ha a kezdeti szöget ψ_0 és a kezdeti szögsebességet $\dot{\psi}_0$ jelöli, akkor

$$\dot{\psi}_0^2 = k^2\cos\psi_0 + \text{const}.$$

Beírva innen általános egyenletünkbe a konstansnak a kifejezését:

$$\dot\psi^2 = \dot\psi_0^2 + K^2(\cos\psi - \cos\psi_0)$$

egyenletünk van ψ számára. Ha most $\psi_0=0$ tesszük, akkor az alsó egyensúlyi helyzet a kezdeti helyzet, és

$$\dot\psi^2 = \dot\psi_0^2 + K^2(\cos\psi - 1)$$

Ebből folyólag csak az olyan ψ lehetséges, amely szerint

$$\cos\psi \geqq 1 - \left(\frac{\dot\psi_0}{K}\right)^2$$

Ha tehát $\dot\psi_0$ igen kicsiny, akkor ψ folyvást igen kicsit különbözhetik csak a maga kezdeti 0 értékétől. Ha $\psi_0=\pi$ tesszük, akkor a felső egyensúlyi helyzet a kezdeti helyzet és most

$$\dot\psi^2 = \dot\psi_0^2 + K^2(\cos\psi + 1)$$

Az itteni jobboldal $\cos\psi$ legkisebb értéke (-1) mellett is pozitív, tehát $\dot\psi$ soha sem lehet zérussá, tehát vagy mindig pozitív, vagy mindig negatív, tehát a ψ szög vagy folyvást nő, vagy folyvást fogy, még pedig a ∞-be nő, vagy a $-\infty$-be fogy, mert a szerint, amint $\dot\psi_0>0$, vagy $\dot\psi_0<0$, egyenletünkből $\dot\psi > \dot\psi_0 > 0$, illetőleg $\dot\psi < \dot\psi_0 < 0$,

tehát a két eset szerint $\psi > (\psi_0 + \dot\psi_0 t)_{\dot\psi_0>0}$, $\psi < (\psi_0 + \dot\psi_0 t)_{\dot\psi_0<0}$.

Tegyük itt azt az észrevételt, hogy a két tömegpontra ható szabad erő minden lehetséges elemi munkája (egyben minden virtuális munkája) totális differenciál a jelen esetben. Ugyanis az egyik tömegpontra ható szabad erő komponensei ezek: $X_1 = m_1 g \sin\bar\omega$, $Y_1=0$, $Z_1 = m_1 g\cos\bar\omega$; a másik tömegpontra ható szabaderő komponensei ezek: $X_2 = m_2 g\sin\bar\omega$, $Y_2=0$, $Z_2 = m_2 g\cos\bar\omega$. Lehetséges elemi munkáik (s egyben virtuális munkáik) általános kifejezése tehát a következő:

$$X_1\,\delta x_1 + Y_1\,\delta y_1 + Z_1\,\delta z_1 + X_2\,\delta x_2 + Y_2\,\delta y_2 + Z_2\,\delta z_2 =$$

$$= m_1 g(\sin\bar\omega\,\delta x_1 + \cos\bar\omega\,\delta z_1) + m_2 g(\sin\bar\omega\,\delta x_2 + \cos\bar\omega\,\delta z_2)$$

$$= \delta\left\{(m_1x_1 + m_2x_2)\,g\sin\bar\omega + (m_1z_1 + m_2z_2)\,g\cos\bar\omega\right\}.$$

A variálandó mennyiség koordinátaderiváltjai x_1, y_1, z_1 szerint nem mások, mint az m_1

tömegű pontra ható szabaderő komponensei; a variálandó mennyiség deriváltja x_2, y_2, z_2 szerint, az m_2 tömegű pontra ható szabaderő komponensei. Ennélfogva a variálandó mennyiséget példánkban a szabaderők potenciáljának mondjuk a vektortan értelmében.

Ha pedig a két tömegpont tömegcentrumának első és harmadik koordinátáját ξ és ζ jelöli, tömegük összegét pedig m jelöli, akkor

$$m_1x_1 + m_2x_2 = m\xi\ , \quad m_1z_1 + m_2z_2 = m\zeta\ ,$$

tehát a lehetséges elemi munkák (egyben a virtuális munkák) általános kifejezése így is írható:

$$\delta\, mg(\xi \sin\omega + \zeta \cos\omega)\,.$$

Ami itt a zárójelben van, az a tömegcentrum origói vektorának a vertikális lefelé mutató irányon számított értéke, mert ezen iránynak az iránykoszinuszai mostani koordinátarendszerünkben $\sin\omega,\ 0,\ \cos\omega$.

Az alsó nyugalmi helyzetben maximum, a felső nyugalmi helyzetben minimum az említettek szerint, tehát oly helyzetben stabilis a pontpár nyugalma, amelyben a szabaderők potenciálja maximum s olyan helyzetben labilis, amelyben a szabad erők potenciálja minimum.

A stabilis nyugalomról.

89. Definíció. Midőn olyan a kényszer, olyanok a szabaderők és olyanok a tömegpontok helyei, hogy a tömegpontok nyugalomban lehetnek koordinátarendszerünkben, akkor az esetben, hogy nyugalomban is vannak, ahhoz, hogy mozgásba eredjenek, valamely idegen szabaderőket is kell hattatnunk reájuk. Tegyük fel, hogy igen rövid ideig igen kis idegen erőket hattatunk a tömegpontokra. Ha ezen idegen erők felső határa értéke és hatásuk időtartama megválasztható oly kicsinek, hogy a tömegpontok bekövetkező egész mozgásuk folyamán sem távoznak előre adott igen kis távolokon túl az ő nyugalmi helyeikből, akkor azt mondjuk

a tömegpontok nyugalmáról, hogy az stabilis.

Bizonyos feltevésekben egy nevezetes tételt fogunk itt megállapítani a nyugalom stabilisságára, amelyet Dirichlet-féle tételnek nevezünk.

90. <u>A feltevések</u>. Tegyük fel a következő megszorítások teljesültét:

1.) olyan a közös koordinátarendszerünkben, hogy a tömegpontok lehetséges helyeit valamely $u, v, \dots$ véges számú független paraméterek határozzák meg úgy, hogy

$$(18)\quad \begin{cases} x_i = \varphi_i(u, v, \dots), \; y_i = \psi_i(u, v, \dots), \; z_i = \chi_i(u, v, \dots) \\ (i = 1, 2, \dots, n) \end{cases}$$

2.) ezen kifejezésekben levő $\varphi_i, \psi_i, \chi_i$-féle függvények legalább kétszer egyenletesen deriválhatók az $u, v, \dots$ paraméterek szerint, 3.) a tömegpontokra ható szabad erők lehetséges elemi munkája elsőrendű pontossággal az $u, v, \dots$ paraméterek egy deriválható függvényének az elemi megváltozása, úgyhogy elsőrendű pontossággal

$$(19)\qquad \Sigma(X_i \partial x_i + Y_i \partial y_i + Z_i \partial z_i) = \frac{\partial F}{\partial u}\partial u + \frac{\partial F}{\partial v}\partial v + \dots$$

4.) az F legalább kétszer egyenletesen deriválható függvénye az $u, v, \dots$ független paramétereknek. Ezt az F függvényt erőfüggvénynek nevezzük.

Most elsőrendű pontossággal a tényleges elemi munkája a szabaderőknek

$$\frac{\partial F}{\partial u} du + \frac{\partial F}{\partial v} dv +$$

A lehetségesnek és ennek a különbsége elsőrendű pontossággal a virtuális munkájuk, általánosan $= \frac{\partial F}{\partial u}\delta u + \frac{\partial F}{\partial v}\delta v + \dots$

Tényleg a (18)ban írt kifejezések szerint elsőrendű pontossággal

$$\partial x_i = \frac{\partial \varphi_i}{\partial u}\partial u + \frac{\partial \varphi_i}{\partial v}\partial v + \dots, \text{ stb.}$$

$$d x_i = \frac{\partial \varphi_i}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi_i}{\partial v} dv + \dots, \text{ stb.}$$

Kivonva az első sorból a másodikat:

$$\partial x_i - dx_i \equiv \delta x_i = \frac{\partial \varphi_i}{\partial u}(\partial u - du) + \frac{\partial \varphi_i}{\partial v}(\partial v - dv) + \dots \equiv$$

$$\equiv \frac{\partial \varphi_i}{\partial u}\delta u + \frac{\partial \varphi_i}{\partial v}\delta v + \dots, \text{ stb.}$$

tehát a szabaderők virtuális munkája elsőrendű pontossággal valóban az u, v, ... stb. paramétrumok virtuális megváltozásának az egyszerű függvénye. Ugyancsak ilyen nyilvánvalóan a totális erőknek a virtuális munkája, ami $= \Sigma m_i (\ddot{x}_i \delta x_i + \ddot{y}_i \delta y_i + \ddot{z}_i \delta z_i)$ s következőleg a kényszererők virtuális munkája is a $\delta u, \delta v$.. variációk egyszerű (homogén lineáris) függvénye.

Minthogy pedig $\delta u, \delta v$... akármely értékrendszerének az ellentétese is megállhat, ennélfogva most a virtuális munka egyenlőtlenség csak az egyenlőségi jellel érvényes elsőrendű pontosság szerint:

$$\Sigma \left\{ (m_i \ddot{x}_i - X_i)\delta x_i + (m_i \ddot{y}_i - Y_i)\delta y_i + (m_i \ddot{z}_i - Z_i)\delta z_i \right\} = 0.$$

A nyugalom lehetőségének a feltétele az, hogy a szabaderők virtuális munkája eltűnjék, mert egyenletünk $(\ddot{x}_i, \ddot{y}_i, \ddot{z}_i) = 0$ számára ehez vezet. A nyugalom lehetőségének feltétele tehát, hogy

$$\frac{\partial F}{\partial u}\delta u + \frac{\partial F}{\partial v}\delta v + \dots = 0$$

legyen és pedig $\delta u, \delta v$, stb. minden gondolható elemi értéke mellett. Következőleg

(19)bis $\quad \dfrac{\partial F}{\partial u} = 0, \ \dfrac{\partial F}{\partial v} = 0, \ \dots$

a nyugalom lehetőségének feltétele, mégpedig s pontossággal szükséges és elégséges feltétele, minek teljesültével állítható, hogyha kezdetben nyugalomban voltak a tömegpontok, akkor ezen egyenletek teljesültével továbbra is nyugalomban maradnak, azaz nyugalomban az olyan u, v, .. értékeknek megfelelő x_i, y_i, z_i helyeken, amely u, v,.. értékek ezen egyenleteket kielégítik.

91. A <u>Dirichlet-féle tétel</u>. Amely helyzetben az F erőfüggvény a független paramétrumok minden variációja ellen maximum, azon helyzetben a tömegpontok nyugalma nem csak lehetséges, de ha meg van, stabilis. (Már előbb Lagrange is állította de nem mutatta ki).

92. A bizonyítás előkészítése. Igen kis ideig hathassunk előbb igen kis idegen erőket az eredetileg nyugvó tömegpontokra, amelyek most már mozgásban lesznek. Ezen erők virtuális munkáját is δu, δv, stb. egyszerű függvénye gyanánt lehet nyilván elsőrendű pontossággal előállítani, úgy hogy elsőrendű pontosság szerint:

$$\sum m_i(\ddot{x}_i\delta x_i + \ddot{y}_i\delta y_i + \ddot{z}_i\delta z_i) =$$
$$\left(\frac{\partial F}{\partial u} + A\right)\delta u + \left(\frac{\partial F}{\partial u} + B\right)\delta v + \dots,$$

ahol $A\delta u + B\delta v + \dots$ az idegen erők virtuális munkája elsőrendű pontossággal. Ezen egyenletnek a tényleges elemi elmozdulásokra is kell teljesülnie, mert a ténylegesek virtuálisak is most mindig, ugyanis $(\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i)$ kifejezése $\delta u, \delta v$, stb. által olyan mint (dx_i, dy_i, dz_i) kifejezése du, dv, stb. által, úgy hogy ennélfogva

$$\sum m_i(\ddot{x}_i dx_i + \ddot{y}_i dy_i + \ddot{z}_i dz_i) =$$
$$\left(\frac{\partial F}{\partial u} + A\right)du + \left(\frac{\partial F}{\partial v} + B\right)dv + \dots,$$

vagyis

$$dt\sum m_i(\dot{x}_i\ddot{x}_i + \dot{y}_i\ddot{y}_i + \dot{z}_i\ddot{z}_i) =$$
$$= \left(\frac{\partial F}{\partial u} + A\right)du + \left(\frac{\partial F}{\partial v} + B\right)dv + \dots$$

Ha pedig azt írjuk, hogy

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\sum m_i(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) \equiv T, \\ F \equiv -\mathfrak{B}, \end{cases}$$

akkor egyenletünket elsőrendű pontosság szerint így is írhatjuk:

$$dT + d\mathfrak{B} = A\,du + B\,dv + \dots$$

Integráljuk ezt a nyugalom végétől számítva akkora időre, amely túlterjed azon az időn, amely alatt az idegen erők is hatottak. Ha ezen idegen erők összes munkáját $\mathfrak{A}$ jelöli a tömegpontokra, azt kapjuk, hogy

$$T + \mathfrak{B} - \mathfrak{B}_0 = \mathfrak{A},$$

ahol $\mathfrak{B}_0$ az $\mathfrak{B}$ kezdeti értéke (T kezdeti értéke $=0$, mert kezdetben még nyugalomban voltak a tömegpontok.) Ezt az $\mathfrak{P}_0$ kezdeti értéket tetszés szerint választhatjuk meg, mert az $\mathfrak{P}$-nak csak az a rendeltetése van, hogy $-d\mathfrak{P}$ a szabaderők elemi munkája legyen (elsőrendű pontossággal), de akármely konstanst jelentsen K, ezt a rendeltetést $\mathfrak{P} + K$ is teljesíti; tehát ez is lehet $\mathfrak{P}$, ha tehát úgy választjuk K értékét, hogy a régi $\mathfrak{P}_0$ ellentéte legyen, akkor az új $\mathfrak{P}_0$ eltűnik és mármost az új $\mathfrak{P}$ szerint

$$(20) \qquad T + \mathfrak{P} = M.$$

A T skalárist a tömegpontok kinetikus energiájának, az $\mathfrak{P}$ skalárist a tömegpontok potenciális energiájának mondjuk.

Egyenletünk végtelenül pontos, mert olyan differenciálegyenletből származott, amelyből csak másodrendű és másodnál is magasabbrendű kis tagok hiányoznak.

93. <u>A bizonyítás</u>. Tekintettel arra, hogy a (20)-ban szereplő $\mathfrak{P}$ csak egy konstansban különbözik $-F$-től ($\mathfrak{P} = K - F$), azt kell kimutatnunk 91. értelmében, hogyha a nyugalmi helyzetben $\mathfrak{P}$ az $u, v, \ldots$ minden variációja ellen minimum, akkor teljesül 89-nek azon feltétele, amely alatt stabilisnak mondjuk a nyugalmat.

A (20)-ban lévő potenciális energia a nyugalmi helyzetben zérus, ha tehát $u_0, v_0 \ldots$ határozzák meg ezt a nyugalmi helyzetet, akkor létezik olyan végesnagy h számérték, hogyha $u - u_0$, $v - v_0, \ldots$ számértéke h-nál kisebb, akkor $\mathfrak{P}$ pozitív.

Mármost az $u, v \ldots$ paraméterumok olyan értéktartományát gondoljuk, amelyben $u - u_0$, $v - v_0$ stb. számértéke kisebb, mint egy h-nál kisebb h_0 számérték, amely oly kicsiny, hogy amíg $u - u_0$, $v - v_0$ stb. számértéke kisebb, mint az, addig a tömegpontok előre adott igen kis távolnál kisebb távolokban vannak az ő nyugalmi helyeiktől. Ezen értéktartomány meghatározására azt is kirójjuk még, hogy a határán $\mathfrak{P}$ mindenütt ugyanakkora pozitív $= \mathfrak{P}'$ legyen, egyebütt azonban $\mathfrak{P} < \mathfrak{P}'$ legyen azon értéktartományban.

Könnyű belátni, hogy meghatározható egy ilyen értéktartomány annálfogva, hogy $\mathfrak{P}$ a nyugalmi helyzetben minimum és $=0$. Jelöljük E-vel ezt az értéktartományt. És már most határozzuk el, hogy oly kicsiny idegen erőket és oly kis ideig hattatunk a tömegpontokra, hogy ezen idő végén E belsejében vannak azok és $\mathfrak{U} < \mathfrak{P}'$. Ezen idő végén és azon túl (20) rendén

$$T + \mathfrak{P} < \mathfrak{P}'$$

Mivel T nem lehet negatív, $\mathfrak{P} < \mathfrak{P}'$ bizonyosan mindig, tehát $\mathfrak{P}$ nem nőhet meg $\mathfrak{P}'$ értékére, így $u, v, \ldots$ értékrendszere örökké az E értéktartományban vesztegel, tehát a tömegpontok sohasem jutnak messzebb a megadott igen kis távolságnál az ő nyugalmi helyeikből.

Feltettük, hogy $\mathfrak{P}$ kétszer egyenletesen deriválható, tehát van másodrendű differenciálja. Ha már most ez pozitív definit forma a nyugalmi helyzetben, akkor stabilis a nyugalom.

1. Példa. A földhöz kötött koordinátarendszerben egy állandó tengely körül szabadon forgatható, de másképp nem mozdítható merevszárú matematikai inga lehetséges helyzeteit meghatározza egyetlen független paraméter, mint az elfordulás szöge a vertikális sík felől, az egyik oldal felé pozitívnak, a másik felé negatívnak számítva. A lefelé mutató vertikális irányba állítva a z tengelyt, abban a feltevésben, hogy csak a nehézségi szabaderő tesz számot, $X=0$, $Y=0$, $Z=g$, tehát

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = g\,dz = d\,g(z - z_0),$$

ahol z_0 tetszés szerinti konstans. Ha horizontális a forgástengely és θ jelenti az elfordulás szögét, r az inga konstans hosszát, akkor $z = r\cos\theta$, tehát

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = d\,rg(\cos\theta - \cos\theta_0).$$

Most általánosan $\Omega = rg(\cos\theta_0 - \cos\theta)$.
Ez az alsó nyugalmi helyzetben ($\theta = 0$) minimum, minélfogva ez a helyzet stabilis nyugalomnak a helyzete.

2. Példa. Végtelen vékony cső vertikális helyzetben van a földhöz rögzítve. Egy tömegpont a csőbe van helyezve, amelynek a falán át nem hatolhat. A tömegpont és a cső alsó vége egynemüen elektromos és a tömegpont a cső végének az elektromos hatásán kívül, még csak a nehézségi szabad erő hatását viseli számottevő mértékben, koordinátarendszerünkben, amely szintén a földhöz van rögzítve.

Helyezzük az origót a cső alsó végébe s a z tengelyt vertikálisan felfelé, tehát a csőnek felfelé mutató irányába. A tömegpont lehetséges helyzeteit meghatározza annak a z koordinátája. A reá ható szabaderő komponensei

$$X=0,\ Y=0,\ Z=\frac{\kappa}{z^2}-mg,$$

ahol κ egy pozitív konstans és m a tömegpont tömege. Eszerint

$$X\,dx+Y\,dy+Z\,dz=\left(\frac{\kappa}{z^2}-mg\right)dz=d\left(\frac{\kappa}{z_0}+mgz_0-\frac{\kappa}{z}-mgz\right),$$

ahol z_0 tetszés szerinti konstans. Most tehát általánosan

$$\Omega=\frac{\kappa}{z}+mgz-\frac{\kappa}{z_0}-mgz_0.$$

Egy nyugalmi helye van a tömegpontnak a csőben, ugyanis az

$$x=0,\quad y=0,\quad z=\sqrt{\frac{\kappa}{mg}}$$

hely. Ezen a helyen (sőt a csőben mindenütt is) pozitív Ω második deriváltja, mert

$$\frac{d^2\Omega}{dz^2}=2\frac{\kappa}{z^3}$$

tehát stabilis nyugalomnak a helye ez is.
Ha a cső felső vége volna elektromos, de ellenkezően, mint a tömegpont, akkor is volna nyugalmi helye a tömegpontnak, de ez már nem stabilis nyugal-

mi hely.

A Hamilton-féle elv és a Maupertuis-féle elv.

94. A variált mozgás fogalma. Egy tömegpont origói vektorát t pillanatban jelölje v. Tekintsük a tömegpont mozgását t_0 pillanattól t_1 pillanatig. A t_0 pillanati helyét v_0, a t_1 pillanati helyét v_1 jelöli.

Most egy képzelt mozgást is tekintsünk, amelyet variált mozgásnak fogunk mondani. Ezen mozgásnak a pályája is v_0 helyen kezdődik és v_1 helyen végződik, mi mellett ezen „variált" pálya minden pontja oly közel van a tényleges pályához és pedig a tényleges pálya minden pontjából kihúzva a tömegpont valamely virtuális elmozdulását, ezen elemi vektorok végei teszik a variált pálya pontjait azzal a kikötéssel, hogy mint az idő egyenletesen deriválható folytonos függvényei sorakoznak azok egymás után. Az v_0 és v_1 helyen a variált pályába nyúló virtuális elmozdulások nyilvánvalóan zérusértékűek annál fogva, hogy a variált pálya eleje és vége a tényleges pálya elejével és végével, definícióik rendén összeesik.

A tényleges pálya v vektorú pontját A-val, az A pontból kihúzott virtuális elmozdulást AA'-vel jelöljük, tehát A' a variált pálya egy pontja. A tényleges pályának A-hoz oly közel fekvő későbbi pontját B-vel s a B-ből kihúzott virtuális elmozdulást BB'-vel jelöljük, tehát B' is a variált pálya egy pontja, még pedig az A'-höz oly közel levő pontja és a t időszámítás szerint későbbi pontja. AB elemi elmozdulás valamely dt időelemben a tényleges pályán, $A'B'$ elemi elmozdulás ama dt időelemben a variált pályán.

95. Hosszanti és harántos megváltozás. Bármiféle mennyiség megváltozását a tényleges pályán, vagy a variált pályán, a mennyiség hosszanti megváltozásának mondjuk, * megváltozását a tényleges pályáról át a variált pályára, a mennyiség harántos megváltozásának mondjuk. A hosszanti elemi megváltozásokat a d jeggyel, a harántos elemi megváltozásokat a δ jeggyel írjuk és amazokat differenciáloknak, emezeket variációknak mondjuk.

96. A tényleges elemi elmozdulások variációi és a virtuális elmozdulások differenciáljai. Az elöb-

bíek értelmében az AB elemi elmozdulás differenciálja az v origói vektornak, $AB = dv$, ellenben az AA' virtuális elmozdulás variációja az v origói vektornak, $AA' = \delta v$. Amaz hosszanti, emez harántos elemi megváltozása az v-nek. Mármost a B hely origói vektora $= v + dv$, ellenben az A' hely origói vektora $= v + \delta v$. A B hely origói vektorának a harántos elemi megváltozása a B' helyhez vezet, és az A' hely hosszanti elemi megváltozása szintén a B' helyhez vezet. De az előbbeni szerint a B' hely origói vektora $=$

$$v + dv + \delta(v + dv) = v + dv + \delta v + \delta dv,$$

a másik szerint a B' hely origói vektora $= v + \delta v + d(v + \delta v) = v + \delta v + dv + d\delta v$.
A két kifejezés ugyanazt jelentvén, írjuk egyenlőkül azokat, s azt kapjuk, hogy

$$\delta dv = d\delta v. \tag{21}$$

Itt $d\delta v$ nem más, mint a δv virtuális elmozdulás megváltozása a dv pályaelem mentén, mert $\equiv BB' - AA'$. Aztán δdv nem más, mint a dv pályaelem megváltozása a δv virtuális elmozdulás mentén, mert $\equiv A'B' - AB$. Csakugyan áll pedig, hogy

$$BB' - AA' \equiv A'B' - AB, \text{ azaz } AB + BB' \equiv AA' + A'B',$$

mert az utóbbi azonosság mindkét oldala $\equiv AB'$.

97. <u>A variált idő.</u> A tényleges pályán az A hely t pillanati helye a mozgó pontnak. A variált pályán való mozgást azonban úgy gondoljuk, hogy abban az A' helyre (δv végébe) általában nem t pillanatban, hanem valamely kissé különböző pillanatban érkezik meg a variált pályán a mozgó pont. Mivel a hosszanti elemi különbségeket d jeggyel, a harántosakat δ jeggyel írjuk, úgy a B hely $t+dt$ pillanati hely, az A' hely $t+\delta t$ pillanati hely és következőleg a B' hely hosszanti meghatározása szerint

$$t + \delta t + d(t + \delta t)$$

pillanati hely, harántos meghatározás szerint a B' hely

$$t + dt + \delta(t + dt)$$

pillanati hely. Mindkét féle meghatározásnak ugyanazon időhöz kell vezetni; tehát egyenlítjük a két kifejezést, minek rendén a

$$\delta dt = d\delta t \tag{22}$$

egyenlethez jutunk.

Itt dt azon időtartam, amely alatt a dv elemi elmozdulás létesül; δt abszolút értéke azon időtartam, amellyel (aszerint, amint δt pozitív, vagy negatív) a virtuális elmozdulás (δv) végéhez (A'-höz) később, vagy korábban érkezik a variált pályán mozgó pont, mint a tényleges pályán mozgó; $d\delta t$ azon idő, amellyel a késés, vagy az előresietés a variált pálya $d(v+\delta v)$ elemének menetén megnagyobbodik, vagy megkisebbedik; δdt abszolút értéke azon idő, amellyel (δdt előjele szerint) hosszabb, vagy rövidebb tartamú a variált pálya $d(v+dv)$ eleme, mint a dv tényleges pályaelem.

98. <u>A variált sebesség s a kényszer virtuális munkájának új kifejezése.</u> A sebesség harántos elemi megváltozása $= \delta\dot{v} = \delta\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{dt\,\delta dv - dv\,\delta dt}{dt^2} = \dfrac{\delta dv}{dt} - \dot{v}\,\dfrac{\delta dt}{dt}$, tehát (21) és (22) szerint

$$(23)\qquad \delta\dot{v} = \frac{d\delta v}{dt} - \dot{v}\,\frac{d\delta t}{dt}.$$

Ebből folyólag m tömegű pont kinetikus energiájának a variációja (harántos elemi megváltozása) $=$

$$= \delta\frac{m\dot{v}^2}{2} = m\dot{v}\,\delta\dot{v} = m\dot{v}\left(\frac{d\delta v}{dt} - \dot{v}\,\frac{d\delta t}{dt}\right) =$$

$$= -m\ddot{v}\,\delta v + \frac{d}{dt}\,m\dot{v}\,\delta v - m\dot{v}^2\,\frac{d\delta t}{dt}.$$

Tömegpontok rendszerére alkalmazva, egyszerű összegezés rendén, de azzal a kikötéssel, hogy δt-nek a változási sebessége valamennyi tömegpont pályáján ugyanaz:

$$\delta\sum\frac{m\dot{v}^2}{2} = \frac{d}{dt}\sum m\dot{v}\,\delta v - \sum m\ddot{v}\,\delta v - \frac{d\delta t}{dt}\,2\sum\frac{m\dot{v}^2}{2}.$$

Hogyha tehát a tömegpontok kinetikus energiáját T jelöli és a tömegpontokra ható szabaderők virtuális munkáját δL jelöli; akkor a tömegpontokra ható kényszererők virtuális munkája $\equiv$

$$(24)\qquad \sum m\ddot{v}\,\delta v - \delta L = \frac{d}{dt}\sum m\dot{v}\,\delta v - \left\{\delta T + 2T\,\frac{d\delta t}{dt} + \delta L\right\}$$

99. <u>Az alapegyenlőtlenség integrálalakja.</u> Szorozzuk meg dt időelemmel (24) bal és jobboldalát, aztán integráljuk a t_0 és t_1 időpillanatok között. A jobboldal első tagján elvégezhetjük explicite az integrálást és ezen tagból a $\left(\sum m\dot{v}\,\delta v\right)_{t_1} - \left(\sum m\dot{v}\,\delta v\right)_{t_0}$ különbséget kapjuk. Azonban a 94-ben tett kikötéseink rendén a t_0 és a t_1 pillanatban a tömegpontok virtuális elmozdulásai zérus értékűek, tehát (24) integráljából ez a rész kiesik. Marad:

$$(24)_{bis}\qquad \int_{t_0}^{t_1}\left\{\sum m\ddot{v}\,\delta v - \delta L\right\}dt = -\int_{t_0}^{t_1}\left\{\delta T + 2T\,\frac{d\delta t}{dt} + \delta L\right\}dt$$

Itt a baloldalon dt szorzója a tömegpontokra ható kényszererők virtuális munkája a dt időelemben. Ez minden időelemben nem negatív, a baloldali integrál minden eleme nem negatív tehát, következőleg az egész baloldal is nem negatív, az ellentétese nem pozitív:

(25) $$\int_{t_0}^{t_1}\left\{\delta T + 2T\frac{d\delta t}{dt} + \delta' L\right\} dt \leqq 0.$$

A t_0 és t_1 időpontok egészen tetszésszerint választhatók meg azon kikötéssel, hogy a tömegpontoknak a variált pályái a tömegpontok t_0 pillanati tényleges helyein kezdődjenek és t_1 pillanati tényleges helyeiken végződjenek. Ennek a számon tartásával pedig (25)-ből, amely a virtuális munkák egyenlőtlenségéből származott, viszont a virtuális munkák egyenlőtlensége következtethető. Alkalmazzuk ugyanis ezúttal végtelen kis t_1-t_0 időközre a (25) alatti egyenlőtlenséget, és ebben az integrálandó függvény helyett vezessük be annak (24)-ből számított

$$\frac{d}{dt}\sum m\dot v\,\delta v - \left\{\sum m\ddot v\,\delta v - \delta' L\right\}$$

értékét. Ennek az első tagján az integrálásból zérus ered, mint fentebb, ugyanis amiatt, hogy a t_0 és t_1 pillanatokra tartozó δv vektorok eltűnnek. A zárójel között levő kifejezés pedig részletesen írva $= \sum\{(m\ddot x - X)\delta x + (m\ddot y - Y)\delta y + (m\ddot z - Z)\delta z\}$

Ennek a negatívját szükséges csak beírni (25)-be. Ha pedig őt magát írjuk be, akkor $\geqq 0$ lesz az "$\leqq 0$" helyett:

$$\int_{t_0}^{t}\sum\{(m\ddot x - X)\delta x + \cdot + \cdot\}dt \geqq 0.$$

Feltettük a 21. artikulusban (37. lapon), hogy a tömegpontok gyorsulása, szigorúan véve, mindig folytonos függvénye az időnek. Feltettük továbbá a 39. artikulusban (98. lapon), hogy a tömegpontok szabadgyorsulása mindig folytonos függvénye az időnek, a tömegpontok helyeinek és a tömegpontok sebességeinek. Mint hogy a tömegpontok helyei és sebességei folytonos függvényei az időnek, úgy a tömegpontok szabadgyorsulásai, mint magának az időnek a függvényei ugyancsak mindig folytonosak, tehát a szabaderők is azok, mert a szabadgyorsulásoknak a tömeggel való szorzatai. Következik, hogy a tömegpontokra ható kényszererők nem különben folytonosan változnak az idővel, mindaddig a kényszer-nemcsak is, u. m. $m\ddot{x}-X,\quad m\ddot{y}-Y,\quad m\ddot{z}-Z.$

szerint bármely pillanatra vonatkoztassuk ezeket t_0 t_1-t_0 végtelen kis időközben, így írhatjuk fel utolsó egyenlőtlenségünket:

$$\sum\left\{(m\ddot{x}-X)\int_{t_0}^{t_1}\delta x\,dt+(m\ddot{y}-Y)\int_{t_0}^{t_1}\delta y\,dt+(m\ddot{z}-Z)\int_{t_0}^{t_1}\delta z\,dt\right\}\geqq 0$$

Az itt lévő integrálok virtuális elmozdulások komponensei, mert egyidejű virtuális elmozdulásoknak az összegei, már pedig a kényszer virtuális relációinak az együtthatói is folytonos függvényei az időnek, mert a 36. artikulus végén (94. lap) az idő és a helyek folytonos függvényei gyanánt szabtuk meg a kényszer relációk együtthatóit, ha tehát a 117. lapon (6) alatt írt relációkat (a virtuális kényszer relációit) megszorozzuk a dt időelemmel és aztán a t_1-t_0 végtelen kis időközre integráljuk, úgy végezhetjük az integrálást, hogy az együtthatókat (A, B, C, L, M, N-féle faktorokat) konstansoknak tekintjük t_0 és t_1 pillanatok között. De nem csak az áll, hogy

$$\int_{t_0}^{t_1}\delta x\,dt,\quad \int_{t_0}^{t_1}\delta y\,dt,\quad \int_{t_0}^{t_1}\delta z\,dt$$

virtuális elmozdulások komponensei, hanem az is áll, hogy akármely virtuális elmozdulások komponensei lehetnek. Hogy például valamely δv_0 tetszésre adott virtuális elmozdulás komponensei legyenek, egyszerűen érjük el ezt, ha

$$\delta v=N(t_1-t)(t-t_0)\,\delta v_0,\quad \frac{1}{N}=\frac{(t_1-t_0)^3}{6}$$

tesszük (ami nyilvánvalóképen szabadságunkban van).

Mivel hogy (25) a virtuális munkák egyenlőtlenségéből, a virtuális munkák egyenlőtlensége pedig (25)-ből következik, ennélfogva a (25) alatt írt integrálos egyenlőtlenség és a virtuális munkák egyenlőtlensége ekvivalensek, egyet jelentenek, egyetérők.

100. Ez az egyetérés nem károsodik, ha az idő variációjára más kikötést is teszünk, mint azt, amit már eleve tettünk, hogy ugyanis a változási sebessége minden tömegpont variált pályáján ugyanaz legyen. Ha most azt a kikötést tesszük, hogy $\delta t=0$ legyen, tehát ha ugyanazon időszámítással élünk a variált pályákon, mint a tényleges pályákon, akkor

integrálos egyenlőtlenségünk (25) ezt az egyszerűbb alakot ölti:

$$(25)_H \qquad \int_{t_0}^{t_1} (\delta T + \delta' L)\,dt \leqq 0$$

és ennek a tartalmát nevezzük Hamilton féle elvnek. Abban az esetben, hogy $\delta' L$ totális variációja az idő és a helyek paraméter Φ függvényeinek, még egyszerűbben

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T+\Phi)\,dt \leqq 0,$$

mert $\delta t = 0$ lévén, δdt (ami $= d\delta t$) $= 0$.

De akkor sem károsodik a szóban lévő egyszerűség, ha úgy gondoljuk δt meghatározását, hogy δT és $\delta' L$ között valami összefüggés legyen. A legegyszerűbb ilyetén összefüggés δT és $\delta' L$ egyenlősége, amidőn $\delta' L$ helyett δT íratván és számba vétetvén, hogy $d\delta t = \delta dt$

$$\left(\delta T + 2T\frac{d\delta t}{dt} + \delta' L\right)dt = 2(\delta T.dt + T\,\delta dt) =$$
$$= 2\,\delta(T\,dt),$$

tehát most (25)-ből

$$(25)_M \qquad \delta \int_{t_0}^{t_1} T\,dt \leqq 0$$

Ennek a tartalmát nevezzük Maupertuis féle elvnek. Általánosabbat állított Réthy.

Némely elméleti vizsgálódásokban alkalmasabbak az integrálos egyenlőtlenségek, mint az eredeti alapegyenlőtlenség.