A

PROJEKTIV GEOMETRIA

ELEMEI

SYNTHETIKAI-GEOMETRIAI MÓDSZERREL

TÁRGYALJA

Dr KLUG LIPÓT

EGYETEMI MAGÁN- ÉS FŐREÁLISKOLAI RENDES TANÁR.

A MAGYAR TUD. AKADÉMIA SEGÉLYZÉSÉVEL.

BUDAPEST.

FRANKLIN-TÁRSULAT

MAGYAR IROD. INTÉZET ÉS KÖNYVNYOMDA.

1892.

//

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA.

ELŐSZÓ.

A mathematikai és physikai szakok irodalma hazánkban még nem örvend virágzásnak. E szakoknak számos ága van, melyeknek tanulmányozására magyar tankönyvek nem állanak rendelkezésünkre. E hiányon azonban nem kell csodálkoznunk. Elméleti szakokkal foglalkozó tudósaink többnyire főiskolai tanárok, kiknek főfeladata, hogy magukat szakjaikban a mindinkább mélyebbre ható tudományok színvonalán föntarthassák, ami, tekintve a nyugat-európai államok előrehaladottságát a tudományokban, tekintve az ottani tudósok és buvárok nagy számát, kitartó produktiv munkásságát, — nem kis feladat. Ezért teljes mértékben igazolható, ha a szaktudós tanár, rendelkezésére álló szabad idejét nem egy tudományág elemeinek megírására forditja, hanem arra, hogy magát föntarthassa tárgyának ama szinvonalán, melyet nagy fáradsággal végzett kitartó munkával elért. Egy-két évi elmaradás, melyet egy tankönyv megirása okoz, nem pótolható oly könnyen. Nem kivánható tehát az első generácziótól, mely hivatva volt és még most is hivatva van hazánkban a mathematikai és physikai szakokat terjeszteni és mely azt főiskoláinkon élő szóval telhetőleg legjobban megtette és teszi, hogy tankönyveket is írjon. A második és harmadik generácziónak azonban, melyet elődeik bevezettek a tudományok csarnokaiba, nem szabad a dolog elől kitérni, ha egyáltalán azt akarjuk, hogy serdülő magyar ifjaink ne legyenek kénytelenek az egyes tudományágak első *elemeit* is idegen nyelven tanulni.

Egy más nem kevésbé fontos körülmény, mely sok írót tankönyv írástól elriaszt az, hogy még jelenleg csekély számú olvasó közönségre

*

számíthat. Míg német vagy franczia nyelven megjelent tudományos munkákat nemcsak Németországban, hanem minden művelt nemzet eme tudományágával foglalkozó egyénei olvassák, mi csak Magyarország kis számú olvasóinak írunk. Ebből természetszerűleg következik, hogy magyar tudományos munka kiadására nem igen vállalkozik könyvkiadó és valódi győzelemnek mondható, ha valaki fáradsággal megírt munkájának kiadására, tiszteletdíj fizetése nélkül, kiadót talál.

Így e munka is csak a Magyar Tudományos Akadémia segedelmezésével jelenhetett meg. *Hálás köszönetemet fejezem ki ezért ez alkalommal is a Magyar Tudományos Akadémia III-ik osztályának, mely segedelmével könyvem megjelenését lehetővé tette.*

Attérve a munka tartalmára, az a projektiv geometriának síkalakzatokra vonatkozó elemeit, mint azt Poncelet, Möbius, Steiner, Chasles, Staudt e század első felében megalkották és e buvárok utódai tovább fejlesztették, tartalmazza. A tárgyalásnál, nevezetesen: a projektivitás fogalmának megállapításánál a Steiner-féle és nem a Staudt-féle módszert használtam, mert ez, mint Fiedler róla helyesen megjegyzi, könnyű szerrel, a régiek geometriájára támaszkodva, vezeti az olvasót a tárgyba. Tettem azt még azon oknál fogva is, mert fiatal mathematikusainknak csak kis része fejlődött a reáliskola emlőin, vagy más szóval: csak kevésnél tételezhető fel, hogy ábrázoló geometriával foglalkozott, mely tárgyánál fogva legjobb eszköz *a térszemlélethez szükséges érzék* kifejlesztésére.* A Staudt-féle tárgyalási módszer pedig már kezdetben is megkivánja a térszemléletnek kifejlődött érzékét és pedig még fokozottabb mértékben, mint az ábrázoló geometria.

Könyvem leginkább a Steiner-Schröter-féle «Die Theorie der

* Sajnálandó, hogy ezen tárgy — az ábrázoló geometria — tanítására, mely a mathematikus, physikus, geografus, kristallografusra, mint elméleti szakokkal foglalkozó egyénekre oly fontos, csak egy főiskola — a műegyetem — kinálkozik az egész országban. Ausztriában sem sokkal előbb honosodott meg ezen, sokak által nem kedvelt, mert félreértett, tantárgy; de tekintve, hogy ott az ábrázoló geometriát már a középiskolákban nagyobb terjedelemben tanítják; hogy a tárgynak ott nagyobb fontosságot tulajdonítanak, mint nálunk; hogy ott öt műegyetem van és így a szabad versenynek nagyobb tér nyílik: az ábrázoló geometria ott szebb fejlődésnek örvend, mint nálunk. Az ábrázoló geometriának épen módszere bír művelő erővel és ezért fontosabbnak tartanám, ha ezen módszert (a Monge-féle derékszögű, a középponti, a derék- és ferdeszögű axonometrikus-projekczió módszerét) tanítanók: a pont-, egyenes- és sík-

Kegelschnitte» (TEUBNER 1876.) czímű munkához alkalmazkodik, mint a mely a projektiv geometria első tanulmányozására, különösen ábrázoló geometriai előismeretek hiányában, elismerten legkönnyebbnek bizonyult. A könyv megírásánál az a főczél vezetett, hogy e tárgyat, — mely már keletkezésénél oly nagy változást hozott létre a geometriában, hogy az analytikai geometria annak befolyása következtében mintegy ujjá alakult (L. PLÜCKER : Analytisch-geometrische Entwickelungen) és melynek a geometriai tudomány tovább fejlesztésében még most is nagy szerepe van,* — hazánkban meghonosítsuk. Kivánatos, hogy az új nemzedék még egyetemi évei alatt, ezen szép és egyszerű alapelvekre állapított és ezért könnyen érthető tudományt megkedvelje, hogy későbbi időben önállóan művelhesse. Mert mint néhai SCHRÖTER H. egy magánlevélben írja : «a geometriai kutatások véghetetlen tere új meg új kérdésekre vezet, melyek egész az alapelemekig terjednek . . .», és ezért mindazok, kik e tárgygyal behatóan foglalkoznak, követ-kőre rakva, hozzá járulhatnak a tudomány fölépítéséhez.

Könyvem első fejezetében az első fokozatú alapalakzatoknak a pont- és sugársorok projektiv vonatkozását és azoknál föllépő fontosabb metrikus relacziókat tárgyalom. A második fejezetben ugyanegy síkban fekvő első fokozatú alapalakzatok képződményével : a kúpszelettel, annak szerkesztésével, polártulajdonságaival, főbb metrikus relaczióinak levezetésével foglalkozom. A harmadik fejezet tárgyát : két kúpszelet közös elemeinek (pontok és érintőknek) meghatározása, valamint kúpszeletsorok és kúpszeletseregek alapvető tulajdonságainak megállapitása és azok projektiv vonatkozása képezi. A negyedik fejezetben a másodfokozatú síkalapalakzatok projektiv vonatkozását,

alakzatokon, a magyarországi középiskolákban, mitsem a mostani, csak igen kis részében elméleti tananyagot. A mathematikában szintén nem a gyakorlati rész az, mely művelő erővel bír, hanem a preczis értelmezésekből folyó következtetések, bebizonyítások, diskussiók stb. egy szóval: az elméleti rész.

A 70-es évek elején a reáliskolák tananyagából : az építészettan, a géprajz és géptan, mint a középiskolába nem való tantárgy, igen helyesen, kihagyatott és ezért nagy hanyatlásnak és káros experimentumnak tartom, ha most ismét holmi «gyakorlati ábrázoló geometriák» behozatalával a középiskolába, annak tudományos színvonalát lejebb szállítjuk és az ábrázoló geometria egészséges fejlődésének útját álljuk.

* Lásd : Festschrift, herausgegeben von der Mathematischen Gesellschaft Hamburg. Leipzig 1890 ; II. Theil, 60. lapon.

a Kollineacziót és Reciprocitást tárgyalom. A mellékelt bő tartalomjegyzék áttekintése különben tájékozni fogja az olvasót, hogy a projektiv geometriának mennyi és mily anyagát dolgoztam fel.

Nem volt szándékom síkon kívül fekvő alakzatokra kiterjeszkedni, mert ez könyvem terjedelmét tetemesen nagyítja vala, a nélkül, hogy ezek felvételével e könyv anyagát egyszerübben tárgyalhattam volna.

Pozsony, 1892 május havában.

Klug Lipót.

TARTALOMJEGYZÉK.

I. FEJEZET.

Pont- és sugársorok projektiv vonatkozása.

1. §. *Egyszerü és kettős viszony fogalma.*

2. §. *A projektiv vonatkozás fogalma és a projektiv sorok szerkesztése.*

3. §. *Különböző tartóval biró projektiv sorok különös elemei.*

Lap

4. §. *Közös tartóval biró projektiv sorok kettős elemei.*

5. §. *Involucziós helyzetű sorok.*

6. §. *Különös projektiv sorok.*

7. §. *Harmonikus és involucziós elemekre vonatkozó méretes relacziók és szerkesztések.*

II. FEJEZET.

A kúpszelet.

8. §. *Két általános helyzetű projektiv sugársor képződménye.*

9. §. *Két ugyanegy síkban fekvő általános helyzetű projektiv pontsor képződménye.*

10. §. *Kúpszeletek beosztása.*

11. §. *Kúpszeletek polártulajdonságai.*

12. §. *Kúpszeleten fekvő projektiv sorokról.*

13. §. *Kúpszeletek szerkesztése valós és képzetes elemekből.*

14. §. *Kúpszeletek szerkesztése oly adatokból, melyek azt többféleképp határozzák meg.*

15. §. *Képzetes kúpszelet. Polárrendszer.*

III. FEJEZET.

Kúpszelet-sorok és seregek projektiv vonatkozása.

18. §. *Két kúpszelet közös elemei. A Steiner-féle rokonság.*

19. §. *A kúpszeletsorról.*

20. §. *A kúpszeletseregről.*

21. §. *Kúpszeletsorok projektiv vonatkozása.*

IV. FEJEZET.

A kollineaczió és recziprocziţás.

22. §. *A kollineaczió és külön esetei.*

23. §. *Kúpszeletek kollineacziója.*

24. §. *A reciprok vonatkozás.*

FÜGGELÉK.

PROJEKTIV GEOMETRIA,

SYNTHETIKAI-GEOMETRIAI MÓDSZERREL TÁRGYALVA.

I. FEJEZET.

Pont- és sugársorok projektiv vonatkozása.

1. §. Az egyszerű- és kettősviszony fogalma.

1. Az egyenest úgy tekinthetjük, mint a benne fekvő pontok összességét, vagy mint egységes egészet. Az első esetben annak neve: *egyenes;* a másodikban: *sugár.*

Az egyenes pontjainak összességét *pontsor*nak, az egyenest magát, melyen a pontsor fekszik: a *pontsor tartójának* nevezzük.

A sík tetszőleges T pontján át végtelen sok sugarat huzhatunk a síkban; e sugarak egy *sugársort* alkotnak. Azon T pont, melyen a sugársor minden sugara átmegy: a *sugársor középpontja* vagy *tartója.*

A pontsor egyes pontjait, valamint a sugársor egyes sugarait, az illető sor *elemeinek* is szokás nevezni.

2. Hogy t tartón fekvő pontsor egyes elemeinek helyzetét a pontsorban meghatározhassuk, legegyszerűbb egy állandó A pontot felvenni a pontsorban, és megadni, hogy a sornak minden más pontja mily távolságra van A-tól. De t-n két pont van, mely A-tól adott távolságra fekszik, miért is maga a *távolság* nem határozza meg a kérdéses pontot *egyfélekép.*

Ha azonban az A-tól mért távolságokat positiv vagy negativ jellel látjuk el, a szerint a mint a pont, melynek távolságát A-tól megmérjük, az A által két végtelen hosszú részre osztott egyenes egyik vagy másik részében fekszik: úgy minden pontnak helyzetét a pontsorban, a jellel ellátott távolságból meg lehet határozni, ha még ismeretes, hogy A-tól mérve, mely részen keresendők a positiv, illetve negativ távolságra levő pontok.

Az egyenesen fekvő A, B pontok távolságát AB, vagy BA-val jelölhetjük. AB és BA összefüggését egymással:

$$AB+BA=0, \text{ vagy a mi ugyanaz}$$
$$AB=-BA$$

egyenlet által értelmezzük, mely kifejezi, hogy AB és BA *különböző előjelű.*

Az egyenesen fekvő A, B, C pontok kölcsönös távolságai között az előjel tekintetbe vétele mellett következő összefüggés van:

$$AB+BC=AC;$$

mely még ily alakokban is írható:

$$AC-BC=AB, \quad CB-CA=AB, \quad AB+BC+CA=0.$$

Ha ugyanis B pont A és C között fekszik: AB és BC ugyanazon előjelű és összegük AC. Ha C pont elválasztja A, B-t úgy

$$AC+CB=AB, \text{ és } -CB=BC$$

egyenletek összeadásából következik, hogy:

$$AC=AB+BC.$$

Ha végre A pont B és C között van, úgy

$$BA+AC=BC \text{ és } -BA=AB$$

egyenletek összege mutatja, hogy

$$AC=AB+BC.$$

3. Egy pont helyzetét t tartón azonban oly módon is meghatározhatjuk, hogy *két* állandó pontot A, B-t veszünk fel t-n és megadjuk jellel együtt azon viszonyt, mely szerint a harmadik pont C, AB távolságot osztja, vagyis C pontnak A és B-től mért távolsági viszonyát $(AC:BC)$-t és az előjelt, mely a viszonyhoz tartozik és mely mindegyik távolságnak AC, BC-nek előjeléből a positiv és negativ mennyiségek osztásának szabálya szerint lesz meghatározva.

Legyen ugyanis B pont t tartónak azon részén, mely az A-ra nézve positiv távolságra levő pontokat tartalmazza, más szóval: legyen B-nek távolsága A-tól, t. i. AB positiv, és így A-nak távolsága B-re nézve tehát BA, negativ előjelű. Ha most C pont A-ból kiindulva B-felé halad t tartón, míg t-nek végtelen távol fekvő pontjához nem jut, továbbá másik felén fekvő végtelen távol levő pontjából ismét A-hoz közeledik, úgy kimutatható, hogy $AC:BC$ viszonynak a változó C pont következtében más és más értéke lesz.

Ha C, A-ban van, úgy $AC:BC=0$. Míg C, AB köznek felező pontjába ér, $AC:BC$, 0-tól—1-ig folytonosan növekszik, mert a számláló kisebb marad mint a nevező és amannak előjele positiv, ezé negativ.

A midőn C a felezőponton túl B-ig halad: a viszony számlálója folytonosan nagyobbodik, nevezője kisebbedik előjele negativ marad; és a midőn C, B-be jut, a nevező határértéke 0, a viszony határértéke ∞, és így $AC:BC$ viszony -1-től ∞-ig minden lehető negativ értéket elért.

Ha C ugyanazon értelemben tovább halad, a viszony ∞-nél mindig kisebb-kisebb positiv értékű lesz, és ha C végtelenben jutott, úgy $AC:BC$ viszony értéke $+1$.

A midőn C, a tartó másik oldalán végtelen távolban vétetik fel: $AC:BC$ értéke szintén $+1$, és ha C e ponttól A-hoz közeledik, a viszony $+1$ és 0 között levő minden értéket elért.

Azt látjuk ezekből, hogy *az A, B pontok között fekvő C pontokra nézve $AC:BC$ viszony értéke, minden lehető negativ szám; AB közön kívül fekvő C pontokra nézve minden lehető positiv szám;* továbbá, hogy csupán egyszer kaptunk ugyanazon értéket ($+1$-et) C-nek két különböző helyzeténél, t. i. a midőn C a tartónak végtelen távol fekvő pontjaiban volt. Hogy tehát C minden új helyzetéhez a viszonynak új értéke tartozzék és fordítva a viszony minden értékének csak egy pont feleljen meg, t-n és minden más egyenesen csak *egy* végtelen távol fekvő pontot képzelünk, vagyis *a következőkben feltételezzük, hogy minden egyenesnek csak* **egy** *pontja van végtelen távol.* Az egyenes tehát zárt vonalnak tekintetik és mint ilyen nem egy, hanem két pont A, B által lesz két részre osztva; ezek közül (a mennyiben A, B pontok egyike sincs végtelen távol) AB köz véges rész, a másik pedig, mely az egyenesnek végtelen távol fekvő pontját tartalmazza, végtelen nagy. Minthogy a sík minden egyenesén csak egy pontot képzelünk végtelen távol fekvőnek, ebből folyólag *a sík összes végtelen távol fekvő pontjait, mint egy egyenesen g_∞-en levő pontoknak kell tekintenünk,* mert csak az egyenes az egyedüli vonal, mely minden más egyenessel egy pontot bir közösen.

Az előbbi vizsgálódásnál feltételeztük, hogy B-nek távolsága A-tól positiv előjelű; de ha B, A-tól mérve t-nek másik részén feküdnék, ugyan így mint előbb kimutatható volna, hogy $AC:BC$ viszony, minden positiv és negativ szám értékét eléri, ha C pont t-n végig halad.

4. Legyen C, D két tetszőleges pontja t tartón fekvő pontsornak, mely a pontsor tetszőleges A, B pontjainak távolságát, az AB közt, $\frac{AC}{BC}$, és $\frac{AD}{BD}$ viszony szerint osztja.

E két viszony viszonyát: $\frac{AC}{BC}:\frac{AD}{BD}$-t, az A, B, C, D pontok *kettősviszonyának* vagy *anharmonikus* viszonyának; a négy pont közül A, B, valamint C, D pontokat *egymáshoz rendelt* pontoknak nevezik, és a kettősviszonyt: $\frac{AC}{BC}:\frac{AD}{BD}$-t röviden $(ABCD)$ symbolummal jelölik.

Ha A, B, C pont állandó, D pedig t-n változó pont, úgy $(ABCD)=\frac{AC}{BC}:\frac{AD}{BD}$ kettősviszony D-nek minden helyzeténél más és más értéket vesz fel.

$\frac{AC}{BC}:\frac{AD}{BD}$ kettősviszonyban ugyanis $\frac{AC}{BC}$ állandó, $\frac{AD}{BD}$-nek pedig D pont változása következtében minden positiv és negativ értéke lehet és pedig oly módon, hogy $\frac{AD}{BD}$ más és más értékénél D-nek más és más helyzete van a pontsorban, miből következik, hogy $\frac{AC}{BC}:\frac{AD}{BD}$ kettősviszony D változása következtében szintén minden positiv és negativ értéket fog elérni, és a kettősviszony két különböző értékéhez mindaddig, míg A, B, C pontok állandóak, két különböző D pont tartozik a pontsorban.

Ez ily módon fejezhető ki: *ha egy pontsor A, B, C pontja állandó, D pontja pedig változó, úgy $(ABCD)$ kettősviszony értékéből, D pont helyzete egyféleképp van meghatározva.*

Hogy áttekintést nyerjünk arra nézve, mily értékű $(ABCD)$ kettősviszony, D különböző helyzeteinél, tételezzük fel, hogy A, B, C állandó pont t-n, továbbá, hogy a változó D pont A-tól B-felé halad t-nek végtelen távol fekvő pontjáig és a másik oldalon a végtelen távol fekvő ponttól A-ig, végre, hogy a változó D ponthoz rendelt C pont: 1. AB közön kívül; 2. AB közön fekszik.

1. Ha (1. ábra) D, A-ban van, úgy $\frac{AD}{BD}=0$, tehát $(ABCD)=\infty$.

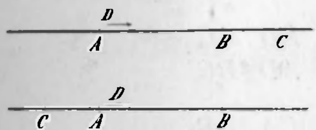
A midőn D, A-tól B-ig halad $\frac{AD}{BD}$ mindig negativ és a midőn B-be jut határértéke ∞, egyszer tehát $\frac{AD}{BD}$ értéke jelétől eltekintve oly nagy volt mint $\frac{AC}{BC}$, és ekkor $(ABCD)=-1$, mig akkor a midőn B-be jutott $(ABCD)=0$.

Mialatt tehát D pont A-tól B-ig halad: $(ABCD)$ kettősviszony, ∞-től 0-ig minden negativ jelű értéket elért.

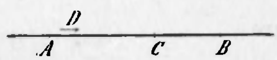
Ha D, B-től tovább halad ugyanazon értelemben mint előbb, és C-vel mielőtt végtelen távolba jutna egyesül, $(ABCD)$ értéke 0-tól $+1$-ig nő, és ha C-től t-nek végtelen távol fekvő pontjához jutott, úgy $(ABCD)$, $+1$-től $\frac{AC}{BC}$-ig nőtt.

A midőn D, a másik részen képzelt végtelen távol fekvő ponttól A-ig ér, $\frac{AD}{BD}$ mindig positiv marad és így $(ABCD)$ is $\frac{AC}{BC}$ positiv értéktől ∞-ig, minden positiv jelű értéket elért.

De ha D pont miután B-től tovább halad, előbb ér végtelen távolba, úgy $(ABCD)$ előbb éri el $\frac{AC}{BC}$ (jelen esetben) valódi törtnek



1. ábra.



2. ábra.

értékét és csak aztán, a midőn a másik oldalon képzelt végtelen távol fekvő pontból C-be jut, $+1$ értéket; ezentúl A-ig haladva értéke minden 1-nél nagyobb positiv szám.

Mindkét esetben $(ABCD)$ értéke, ha D, B-től a végtelenen át A-ig halad, minden positiv szám lesz.

2. Ha másodszor (2. ábra) feltételezzük, hogy C, AB közön fekszik: $(ABCD)$ értéke míg D, A-tól C-ig mozog, ∞-től $+1$-ig minden positiv számú értéken végig fut, és C-től B-ig haladván, $+1$-től 0-ig fogy.

A midőn D, B-től végtelenig és a másik oldalon képzelt végtelen távol fekvő ponttól A-hoz halad: $(ABCD)$, 0-tól ∞-ig minden negativ szám értékét felvette.

Ezek szerint mondhatjuk:

Ha A, B, C, D valamely pontsor négy pontja, melyek közül A, B és C, D egymáshoz rendelt pont, úgy ezek $(ABCD)$ kettősviszonyának értéke nem változik, akármely értelmében mérjük A-tól, vagy más ponttól a pontsorban a távolságokat. A kettősviszony positiv *vagy negativ, a szerint a mint a C, D pontok A, B által nincsenek, vagy el vannak választva. Ha D pont A vagy B-ben van, úgy a kettősviszony értéke ∞, illetve 0, és ha C pont van A vagy B-ben, a kettősviszony 0, illetve ∞.*

5. A, B, C, D pontok kettősviszonyának $(ABCD)$-nek értéke ugyanaz marad, ha mindkét egymáshoz rendelt pontot, B-t A-val és D-t, C-vel felcseréljük, továbbá szintén nem változik a kettősviszony értéke, ha két nem egymáshoz rendelt pontot és egyszersmind a másik két nem egymáshoz rendelt pontot, tehát A-t C-vel, és B-t D-vel, vagy A-t D-vel és B-t C-vel fölcseréljük, vagyis:

$$(ABCD)=(BADC)=(CDAB)=(DCBA).$$

Ugyanis:

$$(ABCD)=\frac{AC}{BC}:\frac{AD}{BD}=\frac{AC\,.\,BD}{BC\,.\,AD},$$

és

$$(BADC)=\frac{BD}{AD}:\frac{BC}{AC}=\frac{BD\,.\,AC}{AD\,.\,BC};$$

végre

$$(CDAB)=\frac{CA}{DA}:\frac{CB}{DB}=\frac{CA\,.\,DB}{DA\,.\,CB},$$

és ha ez utóbbi kifejezésben CA, DB, DA, CB helyett a véle egyértékű $-AC$, $-BD$, $-AD$, $-BC$-t irjuk, úgy

$$(CDAB)=\frac{AC\,.\,BD}{AD\,.\,BC}=(ABCD).$$

A, B, C, D pontok kettősviszonyának értéke azonban a pontoknak minden más fölcserélésénél változni fog, de tekintettel arra, hogy a négy elemnek 24 permutacziója közül, mindig négy complexió értéke megegyező: a négy pont kettősviszonyának következő hat különböző értéke lehet: $(ABCD)$, $(ABDC)$, $(ACBD)$, $(ACDB)$, $(ADBC)$, $(ADCB)$.

Ha $(ABCD)$ értékét röviden λ-val jelöljük, úgy:

$$(ABCD)=\lambda,\qquad (ABDC)=\frac{1}{\lambda},\qquad (ACBD)=1-\lambda,$$

$$(ACDB)=\frac{1}{1-\lambda},\qquad (ADBC)=\frac{\lambda-1}{\lambda},\qquad (ADCB)=\frac{\lambda}{\lambda-1}.$$

Ez következőkép bizonyítható be:

$$(ABDC) = \frac{AD}{BD} : \frac{AC}{BC} = \frac{1}{\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}} = \frac{1}{(ABCD)} = \frac{1}{\lambda},$$

$$(ACBD) = \frac{AB}{CB} : \frac{AD}{CD} = -\frac{AB \cdot CD}{BC \cdot AD} = -\frac{(AC-BC)\,(BD-BC)}{BC \cdot AD} =$$

$$= -\frac{AC \cdot BD - BC \cdot BD - AC \cdot BC + BC^2}{BC \cdot AD} = -\lambda + \frac{BD+AC-BC}{AD}$$

$$= -\lambda + \frac{AB+BD}{AD} = 1-\lambda.$$

Minthogy ezek szerint

$$(ABDC) = \frac{1}{(ABCD)} \text{ és } (ACBD) = 1-(ABCD)$$

következik, hogy:

$$(ACDB) = \frac{1}{(ACBD)} = \frac{1}{1-\lambda} \text{ és}$$

$$(ADBC) = 1-(ABDC) = 1-\frac{1}{\lambda} = \frac{\lambda-1}{\lambda},$$

végre

$$(ADCB) = \frac{1}{(ADBC)} = \frac{\lambda}{\lambda-1}.$$

Ezek folytán mondhatjuk:

Ha valamely egyenesen négy pont vétetik fel és közülök bármely kettő és a másik kettő egymáshoz rendelt pontpárnak tekintetik, ugy az általuk meghatározott kettősviszony értékével kifejezhetők azon kettősviszonyok is, melyeknél a felvett pontok közül más-más tekintetik egymáshoz rendeltnek.

Így pl. ha

$$(ABCD) = -1,$$

akkor:

$$(ABDC) = -1, \quad (ACBD) = 2, \quad (ACDB) = \frac{1}{2},$$

$$(ADBC) = 2, \quad (ADCB) = \frac{1}{2}.$$

Ha t tartón A, B, C, D, E pontokat veszünk fel és A, B-t egymáshoz rendeltnek tekintjük, és azonkívül még C, D; D, E; E, C pontokat egymáshoz rendeljük, akkor a származó $(ABCD)$, $(ABDE)$, $(ABEC)$ kettősviszonyok között következő, könnyen igazolható *azonosság* létezik.

$$(ABCD) \,.\, (ABDE) \,.\, (ABEC) = 1,$$

a mi így is írható:

$$(ABCD) \,.\, (ABDE) = (ABCE),$$

és mely *Mőbius-féle relacziónak* neveztetik.* (Mőbius 1790—1868).

Ezen reláczió folytán A, B, C, D és A, B, D, E pontoknak bármely kettősviszonyából A, B, E, C pontoknak bármely kettősviszonya kifejezhető.

Így pl. ha

$$(ADCB) = 2, \qquad (BDAE) = -3,$$

akkor

$$(BCEA) = -1\,;$$

mert ha

$$(ADCB) = 2, \qquad (BDAE) = -3,$$

akkor

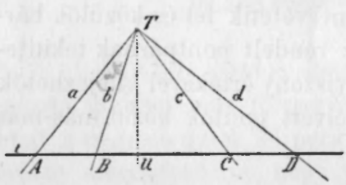
$$(ABCD) = 2, \qquad (ABDE) = \frac{1}{4}$$

és a Mőbius-féle reláczió alapján

$$(ABCE) = 2 \,.\, \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

végre

$$(BCEA) = -1.$$



3. ábra.

6. Legyen (3. ábra) A, B, C, D; t egyenesnek négy tetszőleges pontja. Kössük össze ezen pontokat t-n kívül fekvő T ponttal a, b, c, d *sugarak* (végtelen hosszú egyenesek) által és jelöljük két-két ily sugár pl. a, b hajlásszögei közül azt, melynek szárai között AB köz fekszik (ab)-vel. Ezen szöget ép úgy mint AB távolságot, tekintve a forgás értelmét, melynél b, a-ból b helyzetbe jut, positiv vagy negativ előjellel kell ellátva képzelnünk, hogy b helyzete T sugársorban a sugár és (ab) szög nagysága által egyféleképlegyen meghatározva, vagyis legyen: szög $(ab) = -(ba)$ szöggel.

* Mőbius A. F. Gesammelte Werke, Leipzig 1885. I. Band »Der barycentrische Calcul« pag. 225.

Ha mi T-ből t-re bocsátott merőleges talppontját U-nak nevezzük, úgy

$$TAC,\ TBC,\ TAD,\ TBD$$

háromszögeknek kettős területeit így fejezhetjük ki:

$$AC\,.\,TU = TA\,.\,TC\sin(ac), \qquad BC\,.\,TU = TB\,.\,TC\sin(bc),$$
$$AD\,.\,TU = TA\,.\,TD\sin(ad), \qquad BD\,.\,TU = TB\,.\,TD\sin(bd).$$

E szerint tehát:

$$\frac{AC\,.\,TU}{BC\,.\,TU} = \frac{TA\,.\,TC\sin(ac)}{TB\,.\,TC\sin(bc)},$$

vagy

$$\frac{AC}{BC} = \frac{TA}{TB}\cdot\frac{\sin(ac)}{\sin(bc)};$$

és hasonlóképen:

$$\frac{AD}{BD} = \frac{TA}{TB}\cdot\frac{\sin(ad)}{\sin(bd)};$$

végre

$$\frac{AC}{BC}:\frac{AD}{BD} = \frac{\sin(ac)}{\sin(bc)}:\frac{\sin(ad)}{\sin(bd)}.$$

Ezen utóbbi kifejezés: $\frac{\sin(ac)}{\sin(bc)}:\frac{\sin(ad)}{\sin(bd)}$, az a, b, c, d *sugarak kettősvisszonyának* neveztetik és röviden $(abcd)$-vel lesz jelölve. Az $(abcd)$ symbolumban a és b, c és d elemek, *egymáshoz rendelt* elemek.

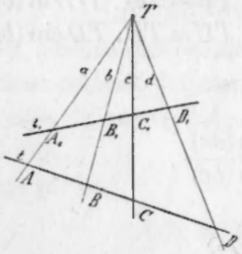
7. Ha a, b, c, d sugarakat egy új egyenessel t_1-gyel metszük A_1, B_1, C_1, D_1 pontokban, akkor a származott TA_1C_1, TB_1C_1, TA_1D_1, TB_1D_1 háromszögekből, mint előbb, szintén levezethető, hogy:

$$\frac{A_1C_1}{B_1C_1}:\frac{A_1D_1}{B_1D_1} = \frac{\sin(ac)}{\sin(bc)}:\frac{\sin(ad)}{\sin(bd)}.$$

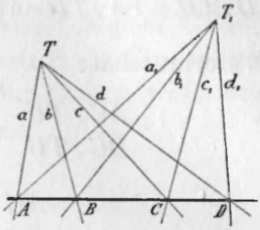
Ha az AC, BC ... valamint A_1C_1, B_1C_1, ... közök nem is feküdnének a, c; b, c; ... sugarak által képezett szögek ugyanazon szárai között, hanem pl. AC és A_1C_1 közök a, c sugarak csúcs- vagy mellékszögeinek szárai között volnának, azért $\sin(A_1TC_1)$ jelre és nagyságra nézve megegyezik $\sin(ATC)$-vel, vagyis $\sin(ac)$-vel.

E szerint: *egy sugársor négy sugarának kettősviszonya egyenlő azon négy pont kettősviszonyával, melyben a sugársor négy sugara a középponton át nem menő egyenes által metszetik; továbbá két különböző* *pontsorhoz tartozó négy-négy pont kettősviszonya egyenlő, ha azon pontok az egyik és másik pontsorban egy sugársor négy sugarán fekszenek.* (4. ábra.)

sugársor négy-négy sugarának kettősviszonya egyenlő, ha azon sugarak, az egyik és másik sugársorban, egy pontsor négy pontján mennek át. (4*a*. ábra.)



4. ábra.



4*a*. ábra.

8. Vegyünk fel (5. ábra) t tartón egy pontsort, és *projicziáljuk* ezen pontsort tetszőleges T pontból, mint középpontból, T sugársor sugaraival t egyenes és T ponton átmenő síknak tetszőleges t_1 egyenesére; ezáltal t_1-en egy új pontsort nyerünk.

t egyenes A pontjának *projekcziója* T-ből t_1-re, azon A_1 pont, melyben az A pont *projicziáló sugara:* $|TA| \equiv a$, t_1-et metszi, és viszont t_1 pontsor A_1 pontjának projekcziója T-ből t-re nem egyéb, mint A pont; projiczeáló sugara pedig $|TA_1| \equiv |TA| \equiv a$.

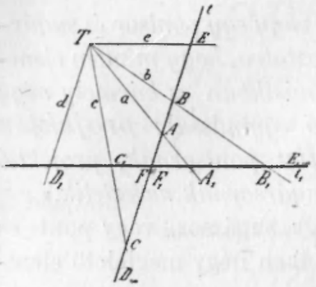
Két-két ily pont, mint A, A_1, melyek közül az egyik a másiknak projekcziója: t és t_1 *pontsor egymásnak megfelelő pontjának* neveztetik, úgy szintén A, vagy A_1 pont projicziáló sugara: a, az A és A_1 pontnak *megfelelő sugár* T sugársorban.

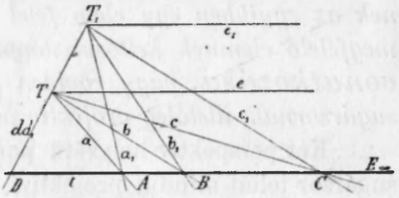
Minden pontnak t-ben megfelel egy (projicziáló) sugár T-ben és egy pont t_1-ben, és viszont t_1 minden pontjának megfelel T-ben egy sugár, t-ben egy pont. t végtelen távol fekvő D_∞ pontjának T-ben azon sugár felel meg, mely t-vel párhuzamos, t_1-ben pedig azon D_1 pont, melyben ezen párhuzamos sugár t_1-et metszi, mely tehát általában nem lesz végtelen távol. És viszont t_1 végtelen távol fekvő $E_{1\infty}$ pontjának megfelelő E pontja ott lesz, hol T-nek t_1-gyel párhuzamos e sugara t-t metszi. t és t_1 metszőpontja $F \equiv F_1$ mindkét pontsorban egymásnak megfelelő.

Két ily pontsor $A, B, C \ldots : A_1, B_1, C_1 \ldots$, melyek közül az egyik a másiknak projekcziója T középpontra vonatkozólag: *perspek-*

tiv helyzetűnek neveztetik, és a sugársor is, melynek $a, b, c \dots$ sugarai a neki megfelelő $A, B, C \dots; A_1, B_1, C_1, \dots$ pontokon mennek át, az egyik és másik pontsorra nézve perspektiv helyzetű.

Két sugársor T, T_1, melynek $a, b, c \dots; a_1, b_1, c_1 \dots$ sugarai (6. ábra) egy t pontsor ugyanazon $A, B, C \dots$ pontjait projicziálják, szintén perspektiv helyzetűnek, és a pontsor t tartója, *perspektiv tengelynek* neveztetik. Oly két sugár, pl. a, a_1, mely a pontsor ugyanazon pontján A-n megy át, *egymásnak megfelelő*. A megfelelő sugarak közül T és T_1 sugársornak $|TT_1|$ sugara egymással összeesik, míg t végtelen távol fekvő pontján átmenő sugarak: T és T_1-nek egymással párhuzamosan menő megfelelő sugarai.


5. ábra.


6. ábra.

9. Ha $A_1, B_1, C_1 \dots$ pontsort, miután t-nek $A, B, C \dots$ pontjait T-ből $a, b, c \dots$ sugarakkal t_1-re projicziáltuk, ezen helyzetéből elmozdítjuk, általában nem fog bekövetkezni, hogy a perspektiv helyzetből származó két megfelelő elemnek: A, A_1-nek, B, B_1-nek, C, C_1-nek stb. összekötő egyenesei: $|AA_1|, |BB_1|, |CC_1|, \dots$ ugyanazon ponton mennek át, sem pedig, hogy az $A_1B_1C_1 \dots$ pontsor minden pontja a neki megfelelő sugáron $a, b, c, \dots$-n maradnak, vagyis sem a két pontsor, sem pedig az elmozdított pontsor és $a, b, c, \dots$ sugársor nem lesz perspektiv helyzetű.

Ugyszintén ha $A, B, C, \dots$ pontsorra vonatkozólag perspektiv helyzetű $a, b, c, \dots; a_1, b_1, c_1, \dots$, vagy röviden T, T_1 sugársor közül, T_1-et elmozdítjuk ezen perspektiv helyzetéből, az új helyzetnél $a_1, b_1, c_1 \dots$ sugaraknak metszőpontja a neki megfelelő $a, b, c, \dots$ sugarakkal nem fog egyenesen feküdni, tehát az elmozdított T_1 sugársor nem lesz T-vel perspektiv helyzetű.

Egy azonban mindig bekövetkezik, t. i. hogy tetszőleges négy pontnak A_1, B_1, C_1, D_1-nek, vagy négy sugárnak $a_1b_1c_1d_1$-nek kettősviszonya, egyenlő a neki megfelelő négy sugár a, b, c, d, és négy pont A, B, C, D kettősviszonyával T sugársorban, illetve t pontsorban, mert A_1, B_1, C_1, D_1 pontok, valamint a_1, b_1, c_1, d_1 sugarak kettősviszonya ugyanaz marad, míg azon elemek *kölcsönös* helyzetüket nem változtatják (a mi t_1 vagy T_1 tartó elmozditása által nem történik), a menynyiben $(A_1B_1C_1D_1)$ kettősviszony értéke csak $A_1B_1C_1D_1$ pontoknak kölcsönös távolságaitól, $(a_1b_1c_1d_1)$ pedig a_1, b_1, c_1, d_1 sugarak által képezett szögektől függ.

2. §. A projektiv vonatkozás fogalma és projektiv sorok szerkesztése.

10. «*Két pontsor, vagy két sugársor, vagy egy pontsor és sugársor, mely oly módon van egymásra vonatkoztatva, hogy minden elemnek az egyikben egy elem felel meg a másikban és bármely négy megfelelő elemnek kettősviszonya egyenlő egymással:* **projektiv vonatkozású**, *vagy röviden* **projektiv** *pontsornak, projektiv sugársornak, illetőleg projektiv pont- és sugársornak neveztetik.*»

Két perspektiv helyzetű pontsor, vagy sugársor, vagy pont- és sugársor tehát mindig projektiv, a mennyiben négy megfelelő elemnek kettősviszonya (6. szerint) egyenlő.

De kimutatható, hogy a projektiv vonatkozásnak értelmezése nem kiván lehetetlenséget, vagyis kielégíthető azon követelmény, hogy bármely négy megfelelő elemnek kettősviszonya egyenlő legyen egymással.

Ha ugyanis két pontsor elemeit projektiv akarjuk egymásra vonatkoztatni, a nélkül, hogy azok perspektiv helyzetűek legyenek, akkor az egyik pontsor három pontjának A, B, C-nek megfelelő pontjait A_1, B_1, C_1-et a másik pontsorban tetszőlegesen választhatjuk. Ha ezután az első pontsorban négy tetszőleges, X, Y, Z, U pontot veszünk fel és ezeknek megfelelő X_1, Y_1, Z_1, U_1 pontjait úgy határozzuk meg, hogy azok a projektiv vonatkozás értelmezése szerint:

$$(ABCX)=(A_1B_1C_1X_1),\ (ABCY)=(A_1B_1C_1Y_1),$$
$$(ABCZ)=(A_1B_1C_1Z_1),\ (ABCU)=(A_1B_1C_1U_1)$$

egyenleteket kielégitsék, akkor kimutatható, hogy X_1, Y_1, Z_1, U_1 pontok eleget tesznek

$$(XYZU)=(X_1Y_1Z_1U_1)$$

egyenletnek.

A Möbius-féle relácziók folytán ugyanis

$$(ABXC)\,.\,(ABCY)=(ABXY),$$

és

$$(A_1B_1X_1C_1)\,.\,(A_1B_1C_1Y_1)=(A_1B_1X_1Y_1),$$

de ezen egyenleteknek baloldalán levő első, illetőleg második tényezők a föltételi egyenletek alapján egyenlők, tehát

$$(ABXY)=(A_1B_1X_1Y_1),$$

és hasonlóképen

$$(ABXZ)=(A_1B_1X_1Z_1),\ (ABXU)=(A_1B_1X_1U_1).$$

Továbbá

$$(AXYB)\,.\,(AXBZ)=(AXYZ),$$

és

$$(A_1X_1Y_1B_1)\,.\,(A_1X_1B_1Z_1)=(A_1X_1Y_1Z_1)$$

relácziókból látható, mint előbb, hogy

$$(AXYZ)=(A_1X_1Y_1Z_1),$$

és hasonlókép

$$(AXYU)=(A_1X_1Y_1U_1);$$

$$(XYZA)\,.\,(XYAU)=(XYZU)$$

és

$(X_1Y_1Z_1A_1)\,.\,(X_1Y_1A_1U_1)=(X_1Y_1Z_1U_1)$-ből következik

végre, hogy:

$$(XYZU)=(X_1Y_1Z_1U_1).$$

Ezzel ki van mutatva: ha a pontsor egy pontja annak tetszőleges három pontjával oly értékű kettősvisszonyt képez, mely egyenlő a megfelelő pontok kettősviszonyával, akkor azon pont a pontsor bármely más három pontjával is oly kettősviszonyt fog szolgáltatni, mint a megfelelő négy pont.

Ugyanígy bebizonyítható, hogy a projektiv vonatkozás értelmezése kielégíthető, két sugársorra, vagy egy pont- és egy sugársorra nézve is.

A projektiv vonatkozás jele Staudt * (1798—1867) szerint: $\overline{\wedge}$

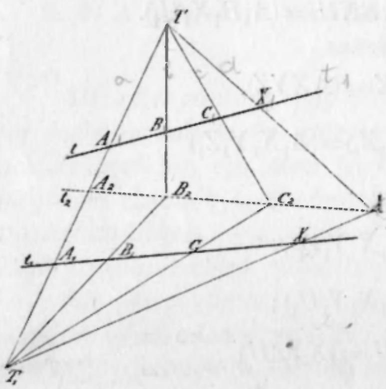
$$(ABCDE\ldots)\ \overline{\wedge}\ (A_1B_1C_1D_1E_1\ldots),$$

olvasva $ABCDE\ldots$ sor projektiv $A_1B_1C_1D_1E_1\ldots$ sorral, melyben $A, B, C, D, E,\ldots$ elemnek rendre $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1\ldots$ elem felel meg,

* Staudt G. K. Ch.: Geometrie der Lage, Nürnberg 1847. pag. 49.

e szerint azt fejezi ki, hogy bármely négy elemnek kettősviszonya az egyik sorban egyenlő a neki megfelelő négy elem kettősviszonyával a másikban.

11. Ha t és t_1 tartón fekvő *két pontsort projektiv akarunk egymásra vonatkoztatni* és annak megfelelő pontjait szerkeszteni, úgy a pontsorok három egymásnak megfelelő elemét (7. ábra) A, A_1; B, B_1; C, C_1-et tetszőlegesen választhatjuk. Ha ezután $|AA_1|$ egyenesen két pontot T, T_1-et felveszünk és $|TB|$, $|T_1B_1|$, valamint $|TC|$, $|T_1C_1|$ metszőpontján B_2, illetve C_2-n át t_2 egyenest fektetünk, úgy t pontsor tetszőleges X pontjának megfelelő pontját X_1-t t_1-en megkapjuk, ha $|TX|$ és t_2 közös X_2 pontját T_1-ből t_1-re projicziáljuk.



7. ábra.

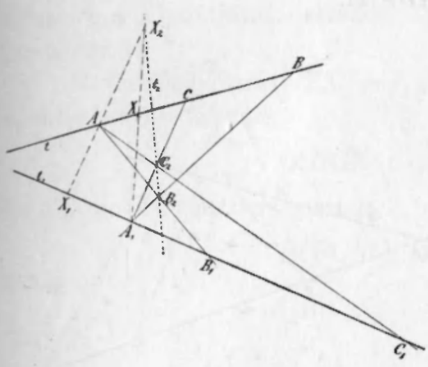
t_2 és $|TT_1|$ metszőpontját A_2-nek nevezvén következik, hogy $ABCX\ldots$ pontsor perspektiv $A_2B_2C_2X_2\ldots$-vel T középpontra nézve, $A_2B_2C_2X_2\ldots$ pontsor pedig perspektiv $A_1B_1C_1X_1\ldots$-gyel T_1 középpontra vonatkozólag. Ennélfogva $ABCX\ldots$ pontsor négy tetszőleges elemének kettősviszonya egyenlő $A_2B_2C_2X_2\ldots$, valamint $A_1B_1C_1X_1\ldots$ pontsor neki megfelelő elemének kettősviszonyával, és igy $A_1B_1C_1X_1\ldots$ projektiv $ABCX\ldots$ pontsorral.

Még egyszerűbb az eljárás, ha (8. ábra) T-t A_1-ben, T_1-et A-ban vesszük fel. Ekkor B_2 és C_2, metszőpontja lesz $|AB_1|$, $|A_1B|$, illetve $|AC_1|$, $|A_1C|$-nek, és $|B_2C_2|=t_2$ tartó tetszőleges X_2 pontjának projekcziója A_1-ből t-re, valamint A-ból t_1-re: két egymásnak megfelelő X, X_1 pont.

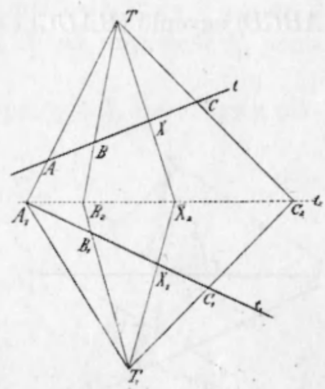
Lehet azonban úgy is eljárnunk, hogy (9. ábra) $ABCX\ldots$ pontsort $|AA_1|$ tetszőleges T pontjából egy az A_1 ponton átmenő t_2 egyenesre projicziáljuk $A_1B_2C_2X_2\ldots$-be, ez utóbbi pontsort pedig $|B_2B_1|$ és $|C_2C_1|$ metszőpontjából T_1-ből ismét t_1-re projicziáljuk $A_1B_1C_1X_1\ldots$-be; ezen új pontsor az előbbi okoknál fogva projektiv $ABCX\ldots$-szel.

12. Ha *t pontsort és T sugársort projektiv akarunk egymásra vonatkoztatni,* akkor T sugársort tetszőleges t_1 egyenessel metszéshez hozzuk és a T-vel perspektiv t_1 pontsort vonatkoztatjuk t-re projektiv. Ha X, X_1 két megfelelő pontja t, t_1-nek, úgy T sugársornak X_1 ponton átmenő $|TX_1| = x$ sugara, szintén megfelel t pontsor X pontjának.

Ugyan így lehet két sugársort T, T_1-et is projektiv vonatkoztatni egymásra, ha T három sugarához a, b, c-hez, T_1-ben három tetszőleges a_1, b_1, c_1 sugarat választunk, melyről feltételezzük, hogy az előbbieknek megfelelők, és a két sugársort t, illetőleg t_1 egyenessel metszéshez hozzuk. A származott pontsorokat most projektiv vonatkoztatjuk egymásra olymódon, hogy t és a, b, c metszőpontjának A, B, C-nek megfeleljen t_1 és a_1, b_1, c_1 metszőpontja A_1, B_1, C_1. T és T_1 sugársor azon két sugara x, x_1, mely t és t_1-nek két megfelelő X, X_1 pontján megy át, egymásnak megfelelő.



8. ábra.



9. ábra.

A szerkesztés egyszerüsbül, ha (10. ábra) t, a sugársorok két pár megfelelő sugarának a, a_1 és c, c_1-nek A, illetve C metszőpontján; t_1 pedig a, a_1; b, b_1-nek A, illetve B_1 metszőpontján lesz átfektetve. Ha b, t; t_1, c_1 és b, c_1 metszőpontja B, C_1 és T_2, a mi röviden igy lesz írva:

$$(bt) = B, \quad (t_1c_1) = C_1, \quad (bc_1) = T_2,$$

továbbá T_2-n átmenő tetszőleges sugár, t, t_1-et X, X_1-ben metszi, úgy $|TX| = x$, és $|T_1X_1| = x_1$, a projektiv vonatkozású sugársoroknak két megfelelő sugara.

$$(ABCX\ldots) \overline{\wedge} (A_1B_1C_1X_1\ldots),$$

mert T_2-re nézve perspektiv;

$$(abcx\ldots) \overline{\wedge} (a_1b_1c_1x_1\ldots),$$

mert a sugársorok $ABCX\ldots$ illetve $A_1B_1C_1X_1\ldots$-re vonatkozólag perspektivek.

Czélszerűen lehet még t és t_1-et mindjárt a_1, illetve a sugárban felvenni, mint az a mellékelt 11. ábrából látható.

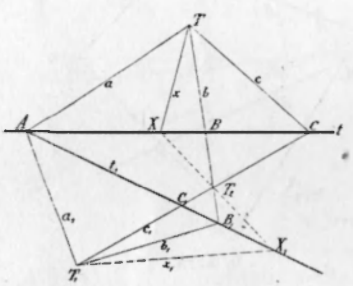
Ezekkel kapcsolatban projicziálás által is kimutathatjuk, hogy ha A, B, C, D; t tartónak négy tetszőleges pontja, akkor (5)

$$(ABCD) = (BADC) = (CDAB) = (DCBA).$$

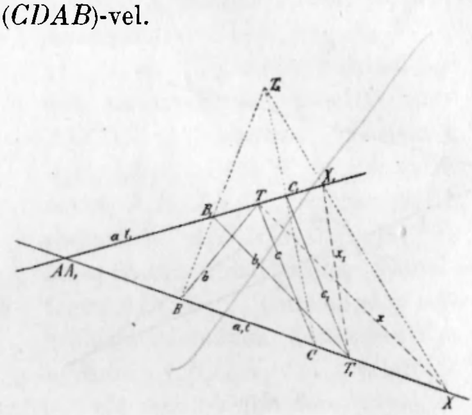
Ha pl. D ponton átmenő tetszőleges egyenesre egy H pontból reá projicziáljuk A, B, C, D-t, E, F, G, D-be, e pontokat C-ből $|HA|$ egyenes E, I, H, A pontjaiba, végre e pontokat F-ből ismét t tartóra, akkor

$$(ABCD) = (EFGD) = (EIHA) = (DCBA).$$

Hasonló úton lehet projicziálás által bebizonyítani, hogy $(ABCD)$ egyenlő $(BADC)$ és $(CDAB)$-vel.



10. ábra.



11. ábra.

13. Mindezen szerkesztések, melyek két projektiv pontsor, pont- és sugársor, vagy két sugársor megfelelő elemeinek felkeresésére vonatkoztak azon alapszanak, hogy más pont- vagy sugársorok vétetnek fel, melyek egyrészt az adottakkal, másrészt önmaguk között perspektivek voltak, mert *ha több pont- vagy sugársor közül az első a másodikkal, a második a harmadikkal, a harmadik a negyedikkel stb. perspektiv, úgy az első a harmadikkal, negyedikkel stb. is projektiv lesz,* minthogy az első pont- vagy sugársor bármily négy elemének kettősviszonya egyenlő a második, harmadik, negyedik stb. pont- vagy sugârsor neki megfelelő négy elemének kettősviszonyával.

Megtörténhetik azonban, hogy az első pont- vagy sugársor a harmadik, vagy negyedik, vagy következő pont- vagy sugársorral azonkívül, hogy — *projektiv vonatkozású,* még — *perspektiv helyzetű* is. Kérdés: mi kívántatik ahhoz, hogy két projektiv pontsor $ABCX\ldots$, $A_1B_1C_1X_1\ldots$, mely t, t_1 tartón fekszik, perspektiv helyzetű legyen?

A perspektiv helyzet értelmezése folytán

$$|AA_1|,\ |BB_1|,\ |CC_1|,\ |XX_1|,\ldots$$

és minden más megfelelő pontpár összekötő egyenesének egymást egy és ugyanazon pontban kellene metszeni, és viszont minden ezen T metszőponton átfektetett sugárnak a pontsorok megfelelő pontjain kellene átmenni. De ha

$$|AA_1|,\ |BB_1|,\ |CC_1|$$

sugarak, mint megfelelő pontok összekötő egyenesei egymást ugyanazon pontban T-ben metszik, úgy bebizonyítható, hogy T pontot t tetszőleges X pontjával összekötő egyenes, X-nek megfelelő X_1 pontján megy át.

Nevezzük ugyanis $|TX|$ és t_1 metszőpontját X_1'-nek, úgy a perspektiv helyzet folytán

$$(ABCX) \overline{\wedge} (A_1B_1C_1X_1'),$$

de a projektiv vonatkozás miatt

$$(ABCX) \overline{\wedge} (A_1B_1C_1X_1),$$

tehát

$$(A_1B_1C_1X_1) \overline{\wedge} (A_1B_1C_1X_1'),$$

vagy

$$\frac{A_1X_1}{B_1X_1} = \frac{A_1X_1'}{B_1X_1'},$$

miből következik, minthogy ezen viszonyok jelre és értékre nézve megegyezők, hogy X_1' összeesik X_1-gyel, vagyis t pontsor perspektiv t_1-gyel.

Ha továbbá két projektiv sugársor T, T_1 három megfelelő sugarának a, a_1; b, b_1; c, c_1-nek, A, B, C metszőpontjai *egy* egyenesen t-n fekszenek, úgy kimutatható, hogy a többi megfelelő sugarak, pl. x, x_1, egymást szintén t-n metszik. Nevezzük ugyanis x és x_1 metszőpontját t-vel, X ill. X_1-nek, úgy

$$(abcx) \overline{\wedge} (ABCX),\ (a_1b_1c_1x_1) \overline{\wedge} (ABCX_1),\ \text{és}\ (abcx) \overline{\wedge} (a_1b_1c_1x_1)\text{-ből}$$

következik, hogy

$$(ABCX) \overline{\wedge} (ABCX_1)$$

tehát X pont összeesik X_1-gyel, vagyis x, x_1 egymást t-n metszi. Ennélfogva: *két projektiv* *pontsor perspektiv helyzetű, ha három megfelelő pontpár összekötő egyenese egymást egy pontban metszi.*

sugársor perspektiv helyzetű, ha három megfelelő sugárpár metszőpontja egy egyenesen fekszik.

E tételek bebizonyításával egyszersmind kimutattuk, hogy *ha két projektiv pontsor (sugársor) három megfelelő eleme összeesik, úgy a két pontsor (sugársor) minden megfelelő eleme is össze fog esni,* továbbá: *ha egy pontsor három eleme, egy véle projektiv sugársor három megfelelő elemében fekszik, úgy a pontsor minden eleme, benne fekszik a sugársor megfelelő elemében, és így a sorok perspektivek.*

14. A midőn két projektiv pontsor $ABCX\ldots$, $A_1B_1C_1X_1\ldots$ tartóinak t, t_1-nek metszőpontja egymásnak megfelelő pont, akkor ezen metszőponton, pl. $A \equiv A_1$-en átmenő bármely sugár, két megfelelő pont összekötő egyenesének tekinthető. Így tehát B, B_1; C, C_1 megfelelő pontok összekötő egyenesének T metszőpontján, átmegy A, A_1 megfelelő pontoknak összekötő egyenese is, minek következtében a két pontsor perspektiv.

Hasonlókép: ha két projektiv sugársorban T, T_1-ben, a középpontokat összekötő sugár egymásnak megfelelő, akkor ezen közös sugárnak minden pontja metszőpontnak tekinthető, tehát más két megfelelő sugár metszőpontján átmenő t egyenesen a közös harmadik sugárpárnak metszőpontja is rajta fekszik, és igy a sugársorok perspektivek.

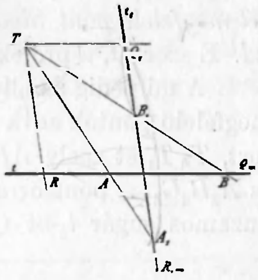
Ennélfogva mondhatjuk: *két projektiv pont- vagy sugársor, melynek közös eleme egymásnak megfelelő: perspektiv helyzetű.*

E tételekből következik még: hogy két projektiv pontsor, vagy sugársor, mindig perspektiv helyzetbe hozható, ha az egyik pont- vagy sugársornak tetszőleges elemét a megfelelő elemre helyezzük. Alább (46. pontban) látni fogjuk, hogyan kell egy pontsort egy hozzá projektiv sugársorral, vagy egy sugársort a hozzá projektiv pontsorral perspektiv helyzetbe hozni.

3. §. Különböző tartóval biró projektiv pont- és sugársorok különös elemei.

15. Eddigelé két projektiv pontsor végtelen távol fekvő pontjainak megfelelő pontjait az egyik és másik pontsorban figyelmen kivül hagytuk. E pontok azonban különös szerepet viselnek, a mennyiben a négy pont kettősviszonya az esetben, ha a négy pont egyike az egyenes végtelen távol fekvő pontja, egyszerű viszonnyá fajul.

Hogy ezen pontokat is tekintetbe vegyük, legyen t, t_1 (12. ábra) tartója két, T középpontra vonatkozólag, perspektiv pontsornak, és nevezzük t pontsor végtelen távol fekvő pontját Q_∞-nek, azon pontot, mely Q_∞-nek t_1-ben megfelel, mely tehát T-n át t-vel párhuzamos sugárnak metszőpontja t_1-gyel, Q_1-nek; végre azon pontot, mely t_1 végtelen távol fekvő $R_{1\infty}$ pontjának megfelel, R-nek. A végtelen távol fekvő Q_∞, $R_{1\infty}$ pontoknak megfelelő Q_1, R pontokat a két projektiv pontsor *ellenpontjainak* nevezik.



12. ábra.

Négy megfelelő pont kettősviszonya akkor is egyenlő, ha azok közül egyik végtelen távolban van, miért is $ABQR$ és $A_1B_1Q_1R_1$ megfelelő pontokra nézve:

$$(ABQ_\infty R) \wedge (A_1B_1Q_1R_{1\infty}),$$

vagyis

$$\frac{AQ_\infty}{BQ_\infty} : \frac{AR}{BR} = \frac{A_1Q_1}{B_1Q_1} : \frac{A_1R_{1\infty}}{B_1R_{1\infty}}.$$

De

$$\frac{AQ_\infty}{BQ_\infty},\ \frac{A_1R_{1\infty}}{B_1R_{1\infty}}$$

viszonyoknak határértéke 1, mert AQ_∞, BQ_∞, $A_1R_{1\infty}$, $B_1R_{1\infty}$, mint ugyanazon rendű végtelen nagy mennyiségek, melyek egymástól véges mennyiségekben különböznek, egyenlőknek tekinthetők, és így ama kettősviszonyok átmennek következőkbe:

$$\frac{BR}{AR} = \frac{A_1Q_1}{B_1Q_1},$$

vagy

$$AR \,.\, A_1Q_1 = BR \,.\, B_1Q_1.$$

Ezen egyenlet, TAR, TA_1Q_1 és TBR, TB_1Q_1 hasonló háromszögekből is levezethető, a mennyiben az első pár háromszög

$$AR : TR = TQ_1 : A_1Q_1,$$

a második

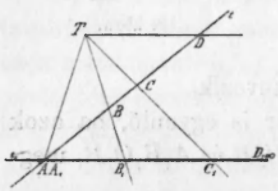
$$BR : TR = TQ_1 : B_1Q_1\text{-et}$$

szolgáltatja, melyekből:

$$TR \,.\, TQ_1 = AR \,.\, A_1Q_1 = BR \,.\, B_1Q_1.$$

Az egyenlet pedig azt fejezi ki, hogy: *projektiv pontsoroknál két megfelelő pont távolsága az ellenpontoktól, egyenlő szorzatokat ad.* E szorzat, a projektiv pontsorok *hatványának* neveztetik.

A mi pedig az ellenpontok szerkesztését illeti, ha ABC, $A_1B_1C_1$ megfelelő pontok adva vannak, felveszünk (7. ábra szerint) két sugársort, T, T_1-et mely $ABC\ldots$, $A_1B_1C_1\ldots$ pontsorokkal külön-külön, és $A_2B_2C_2\ldots$ pontsorral közösen perspektiv. T-n átmenő és t-vel párhuzamos sugár t_2-őt Q_2-ben, T_1-en átmenő és t_1-gyel párhuzamos sugár pedig t_2-őt R_2-ben metszi; T_1Q_2 és TR_2-nek közös Q_1, R pontja t_1, ill. t-vel, az $A_1B_1C_1$, ABC által adott projektiv pontsoroknak ellenpontja.



13. ábra.

Az ellenpontok ismerete arra képesít, hogy oly négy pontot szerkeszthessünk, melyeknek kettősviszonya egyenlő három adott pont egyszerű viszonyával. Ha ugyanis (13. ábra) t és t_1-en A, B, C, illetve A_1, B_1, C_1 pontok advák és mi oly D pontot akarunk szerkeszteni, hogy

$$(ABCD) = A_1C_1 : B_1C_1,$$

akkor t_1-nek A_1 pontját egyesitjük A-val; $|BB_1|$, $|CC_1|$ sugarak T metszőpontján át t_1-gyel párhuzamost huzunk, mely már t-t a kivánt D-ben, t_1-et $D_{1\infty}$-ben metszi, mert

$$(ABCD) = (A_1B_1C_1D_{1\infty}) = A_1C_1 : B_1C_1.$$

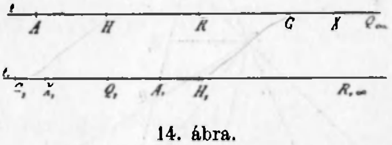
16. Ha két projektiv pontsornak t, t_1-nek ellenpontja R, Q_1 és még egy pár megfelelő pontja A, A_1 adva van, t sor minden más pontjának X-nek megfelelő pontját X_1-et t_1-en, egyszerűen lehet megtalálni.

Szerkesztünk ugyanis oly téglányt, melynek egyik oldala RX és területe a pontsorok hatványa: $RA \,.\, Q_1A_1$; a téglány másik oldala megadja X-nek megfelelő X_1 pont távolságát Q_1-től.

Hogy ezen távolság Q_1-től mérve, mely oldalra viendő fel t_1-re, azon körülményből határoztatik meg, hogy: *két projektiv pontsornál, az egyik pontsor négy egymásra következő pontjának megfelelő pontjai, szintén egymásra következő pontok.* Ennek helyes volta, pedig könnyen belátható perspektiv helyzetű pontsoroknál, és mert projektiv pontsorok mindig perspektiv helyzetbe hozhatók, azért bármily helyzetű projektiv pontsorokra nézve is helyes.

Ha tehát (14. ábra) X pont A-tól el van választva R és Q_∞ által, a pontok sorrendje: $ARXQ_\infty$, és így a megfelelő pontok sorrendje: $A_1R_{1\infty}X_1Q_1$, vagyis X_1 szintén el lesz választva A_1-től Q_1 és $R_{1\infty}$ által.

Ha azon téglányt, melynek területe a projektiv pontsorok hatványa négyzetté alakítjuk át, és annak oldalát R és Q_1-től mérve t, t_1 egyenesekre visszük, G, H és G_1, H_1-ig, úgy G, H-ban t-nek oly két különös pontját kapjuk meg, mely R ellenponttól ép oly távolságra van, mint a nekik megfelelő G_1, H_1 pontok t_1-en a másik Q_1 ellenponttól. E két pontpár: G, G_1; H, H_1 a projektiv pontsorok *hatványpontjainak* neveztetik.



14. ábra.

17. Projektiv pontsoroknál mindig léteznek *egymással egyenlő* közök, melyeknek végpontjai, egymásnak megfelelő pontok, és melyek *megfelelőleg egyenlő közöknek* neveztetnek.

Legyen ugyanis (15. ábra) a két projektiv pontsor hatványa μ^2, annak ellenpontja R és Q_1, végre két megfelelő pontpár A, A_1; B, B_1. Minthogy

$$RA = \frac{\mu^2}{Q_1A_1} \text{ és } RB = \frac{\mu^2}{Q_1B_1},$$

$$AB = RB - RA = \mu^2\left(\frac{1}{Q_1B_1} - \frac{1}{Q_1A_1}\right),$$

tehát

$$AB = \frac{\mu^2 . B_1A_1}{Q_1A_1 . Q_1B_1}.$$

Ezen egyenlet folytán AB és A_1B_1 közök nagyságukra nézve akkor egyenlők, ha:

$$Q_1A_1 . Q_1B_1 = \mu^2,$$

vagy mert:

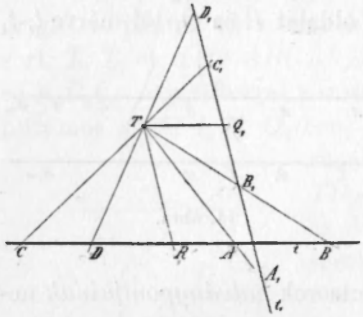
$$RB = \frac{\mu^2}{Q_1B_1},\quad RA = \frac{\mu^2}{Q_1A_1},$$

ha

$$RA = Q_1B_1, \text{ és } Q_1A_1 = RB.$$

E két utolsó egyenlet azt fejezi ki, hogy: *két projektiv pontsorban a megfelelőleg egyenlő közöknek végpontjai az ellenpontoktól felváltva egyenlő távolságra vannak.*

Ha tehát A tetszőleges pont t-ben, és RD, Q_1B_1, Q_1C_1 egyenlőnek vétetik RA-val t, ill. t_1-en, továbbá A, D, B_1, C_1-nek megfelelő pontja: A_1, D_1, B, C, úgy: $AB=A_1B_1$; $CD=C_1D_1$; $AC=A_1C_1$; $BD=B_1D_1$.



15. ábra.

E közöknél az is látható (l. az ábrát), hogy AB és CD-nek, valamint a megfelelőknek A_1B_1, C_1D_1-nek végpontjai nincsenek elválasztva, míg AC, BD-nek és így A_1C_1, B_1D_1-nek végpontjai el vannak választva R, Q_1 ellenpontok által.

Ha A, t-nek G hatvány pontjában vétetett volna fel, akkor B szintén G-be, C és D pedig H-ba, és hasonlókép a megfelelő pontok G_1 és H_1-be jutottak volna. Két köz tehát G és H ponttá fajult volna el, a másik két köz pedig összeesett volna GH-val az egyik, és G_1H_1-gyel a másik pontsoron.

18. Két projektiv sugársornál, ép úgy mint projektiv pontsoroknál, találhatók oly különös egymásnak megfelelő sugarak, melyek ha kettősviszonyba hozatnak más sugarakkal, a kettősviszonyok egyszerűbb alakot öltenek.

Hogy e sugarak szerkesztését és az egyszerűsített kettősviszony értékét megtalálhassuk vegyük fel, hogy a két projektiv sugársor T, T_1 már perspektiv helyzetű, mely helyzetbe, mint láttuk, két projektiv sugársor mindig az által hozható, hogy egy tetszőleges megfelelő sugárpár egymásra lesz fektetve a nélkül, hogy a középpontok összeesnének.

Ha t tartója azon pontsornak (16. és 17. ábra), mely mindkét sugársorral perspektiv, s mi t-n fekvő pontból, mint középpontból, T, T_1-en át $\varkappa$ kört irunk le, úgy ezen körnek és t-nek U, V metszőpontjain átmenő $|TU|=q$, $|TV|=r$ sugarak, valamint ezeknek megfelelő $|T_1U|=q_1$, $|T_1V|=r_1$ sugarak, egymásra merőlegesek, és e végből a sugársorok *egymásnak megfelelő merőleges sugárpárjainak* neveztetnek.

Noha a két projektiv sugársor végtelen sokfélekép hozható perspektiv helyzetbe, mindamellett általában csak egy-egy pár egymásnak megfelelő merőleges sugárpár létezik, mert ha még egy léteznék, akkor t-nek TT_1 köz felezőpontján át TT_1-re merőlegesen álló egyenesnek kellene lenni, és ekkor végtelen sok ily sugárpárt lehetne szerkeszteni. Ezen eset azonban csak különös projektiv sugársoroknál következik be, melyről később szólunk.

Ha a, a_1; b, b_1 ezen T, T_1 sugársoroknak két megfelelő sugárpárja, úgy $(abqr)=(a_1b_1q_1r_1)$, vagy mi ugyanaz:

$$\frac{\sin(aq).\sin(br)}{\sin(bq).\sin(ar)}=\frac{\sin(a_1q_1).\sin(b_1r_1)}{\sin(b_1q_1).\sin(a_1r_1)},$$

de minthogy (szög-)

$$(ar)=(qr)+(aq),\ (a_1q_1)=-(q_1r_1)+(a_1r_1)$$
$$(br)=(qr)+(bq),\ (b_1q_1)=-(q_1r_1)+(b_1r_1)$$

és q, r; q_1, r_1 egymásra merőleges:

$$\sin(ar)=\cos(aq),\ \sin(a_1q_1)=-\cos(a_1r_1)$$
$$\sin(br)=\cos(bq),\ \sin(b_1q_1)=-\cos(b_1r_1),$$

miért is a fönnebbi egyenletekből következik:

$$\frac{\sin(aq).\cos(bq)}{\cos(aq).\sin(bq)}=\frac{-\cos(a_1r_1).\sin(b_1r_1)}{-\cos(b_1r_1).\sin(a_1r_1)},$$

vagy

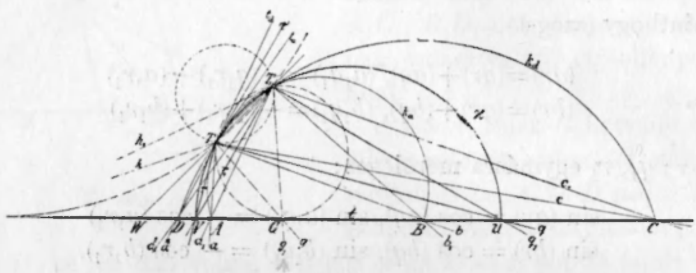
$$\operatorname{tg}(aq).\operatorname{tg}(a_1r_1)=\operatorname{tg}(bq).\operatorname{tg}(b_1r_1).$$

Ezen egyenlet azt fejezi ki, hogy: *két projektiv sugársorban egy tetszőleges sugárnak hajlásszöge az egymásnak megfelelő merőleges sugárpár egyik szárához, és a felvett tetszőleges sugárnak megfelelő sugár hajlásszöge az egymásnak megfelelő merőleges sugárpár másik — az előbbinek meg nem felelő — sugarához, oly két szög, melynek tangense állandó szorzatot ad.* Ezen állandó szorzatból, mely a *sugársor hatványának* neveztetik, látható, hogy ha a forgás közben közeledik q-hoz, úgy a_1 távolodik r_1-től, vagyis közeledik q_1-hez.

19. Projektiv sugársoroknál szintén találhatók egyenlő szögek, melyeknek szárai egymásnak megfelelők.

Mielőtt ily sugarakat szerkesztenénk, vegyük tekintetbe, hogy két perspektiv helyzetű sugársornál a középpontok vagy el vannak választva a velök perspektiv pontsor tartója — a perspektiv tengely — által, vagy pedig nincsenek elválasztva. Az első esetben a sugársorokat *ellenkező forgású*, a másodikban *egyenlő forgású* sugársoroknak nevezhetjük, mert ha két megfelelő sugarat, más két megfelelő sugár helyzetébe akarjuk forgatni, az első esetben ellenkező, a másodikban egyenlő értelemben kell forgatni a sugarakat. A sugársoroknak e tulajdonsága akkor is megmarad, ha azokat síkjukban a perspektiv helyzetből kimozdítjuk.

Ha két felvett projektiv sugársor T, T_1, egyenlő, vagy ellenkező forgású volt, az marad, miután perspektiv helyzetbe hozatott, vagyis középpontjuk vagy nincs, vagy pedig el van választva a perspektiv tengely t által.



16. ábra.

Ha most, miután a sugársorok perspektiv helyzetbe hozattak, T, T_1 középponton át tetszőleges k_a kört fektetünk (16. ábra), mely t perspektiv tengelyt A, B pontokban metszi, úgy

$$|TA|=a,\ |TB|=b \text{ és } |T_1A|=a_1,\ |T_1B|=b_1$$

sugarak által képezett szögek egyenlők, még pedig: egyenlő forgásúnál a, b és a_1, b_1 sugarak azon szögei, melynek szára között AB köz fekszik egyenlők; ellenkező forgásúnál pedig (17. ábra) a, b sugarak azon szöge, melynek szára között AB köz fekszik egyenlő, a_1, b_1 azon szögével, melynek szára között AB köz nem fekszik. a, b és a_1, b_1 sugarakat egyenlő forgású soroknál az egymásnak megfelelő derékszög szárai nem választják el, ellenkező forgásúnál pedig elválasztják.

Tekintve TT_1UV és TT_1BA húrnégyszögeket következik:

$$T_1UV \pm T_1TV = T_1BA \pm T_1TA,$$

a szerint, a mint a sugársorok egyenlő vagy ellenkező forgásúak, miből

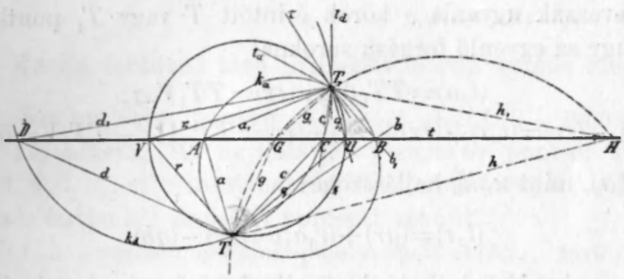
$$T_1UV - T_1BA = \mp(T_1TV - T_1TA),$$

vagy a felső jelt véve: $(q_1b_1) = -(ra) = (ar)$, az alsót véve: $(q_1b_1) = (ar)$.

Ha tehát (ab) és (a_1b_1) a projektiv sugársorokban egymásnak megfelelő egyenlő szögek, (rq) és (r_1q_1) pedig az egymásnak megfelelő derékszögek, úgy

$$(ar) = (q_1b_1) \text{ és } (aq) = (r_1b_1)$$
$$(br) = (q_1a_1) \quad (bq) = (r_1a_1),$$

mely egyenletek azt fejezik ki, hogy: *projektiv sugársoroknál az egymásnak megfelelő egyenlő szögek szárai, az egymásnak megfelelő derékszög száraihoz felváltva, egyenlő szög alatt hajlanak.*



17. ábra.

20. Fektessük T ponton át azon másik sugarat d-t, mely r-rel ép oly szöget képez, mint a, és mely t-t D-ben metszi.

Minthogy DTA háromszögben T-nél lévő r, q szögfelezők DA egyenest V, U pontokban metszik, és T_1 azon körnek pontja, mely VU átmérő fölött van leírva: $|DT_1| = d_1$ sugár r_1-gyel ugyanoly szöget képez, mint r_1 az a_1-gyel.

Ha mi most DTT_1-en át k_d kört fektetünk, mely t-t másodizben C-ben metszi, és $|CT|$ $|CT_1|$ sugarakat c, c_1-nek nevezzük, akkor ismét mint előbb k_a kör alkalmazásánál volt:

$$(cd) = (c_1d_1),\ (dr) = (q_1c_1),\ (qc) = (d_1r_1),$$

és mert

$$(dr) = (ra),\ (r_1a_1) = (d_1r_1)$$

azért:

$$(b_1q_1) = (q_1c_1),\ (bq) = (qc).$$

Ezen egyenletekből, tekintve hogy (rq) derékszög, látható, hogy a, b és c, d sugarak azon szögei, melyeknek szárai között AB, CD közök fekszenek, egymásnak kiegészítő szögei, vagy mi ugyanaz, a, b és c, d sugarak (és hasonlókép a_1, b_1; c_1, d_1 sugarak) által képezett kétkét szög egymással egyenlő.

Mindezekből következik, hogy nemcsak (ab) és (cd) szög egyenlő megfelelő szögével, hanem egyszersmind (ac) és (bd) szög is; továbbá hogy egyenlő forgású soroknál a, b es a_1, b_1 valamint c, d és c_1, d_1, ellenkező forgású soroknál a, c és a_1, c_1, valamint b, d és b_1, d_1 sugarak azon szögei egyenlők, melyek AB, CD közöket tartalmazzák, — vagy mi ugyanaz, melyek r, q; r_1, q_1 által nincsenek elválasztva, tehát derékszögnél kisebbek. —

$\varkappa$, k_a, k_d körökről könnyen kimutatható, hogy $\varkappa$ felezi k_a és k_d által képezett szögek egyikét.

Nevezzük ugyanis e körök érintőit T vagy T_1 pontban τ, t_a, t_d-nek, úgy az egyenlő forgású soroknál

$$(t_a a) = TT_1A\measuredangle,\ (\tau r) = TT_1V\measuredangle,$$

$$(t_a a)-(\tau r)=(t_a\tau)+(\tau r)+(ra)-(\tau r)=TT_1A\measuredangle-TT_1V=(r_1a_1),$$

miből $(t_a\tau)$, mint $\varkappa$, k_a hajlásszöge:

$$(t_a\tau)=(ar)+(r_1a_1)=(ar)-(qb).$$

Ugyanígy kimutatható, hogy ellenkező forgású soroknál e körök hajlásszöge szintén $(ar)-(qb)$, valamint hogy k_d, $\varkappa$ köröknek hajlásszöge $(t_d\tau)=(dr)-(qc)$, miből már következik, tekintettel $(dr)=(ra)$ és $(qc)=(bq)$ egyenletekre, hogy $\varkappa$ kör k_a, k_d-hez egyenlő szögek alatt hajlik.

«Az egymásnak megfelelő egyenlő szögek szárai tehát, mind az egyenlő, mind az ellenkező forgású sugársoroknál azon pontokon mennek át, melyekben T, T_1 középpontokon átfektetett és $\varkappa$-hoz egyenlő szög alatt hajló körök t perspektiv tengelyt metszik.»

21. Ezen k_a, k_d körpárak között egyenlő forgású sugársoroknál létezik olyan, mely t tartót érinti, mert T, T_1 pontok t által nincsenek elválasztva. Az érintő pontokon G, H-n átmenő g, h ill. g_1, h_1 sugarak — a sorok *hatványsugarai* — külön-külön véve nullá fajult egyenlő megfelelő szögeknek tekinthetők, együttvéve pedig [mint (gh), (g_1h_1)] szintén egyenlő megfelelő szögek.

Ellenkező forgású sugársoroknál nem léteznek oly körök, melyek t tartót érintik, de ekkor $\varkappa$-át T, T_1-ben derékszög alatt metsző körnek és t-nek közös G, H pontjain átmenő g, h; g_1, h_1 sugarak képezik a hatványsugarakat, mert a derékmetszőkör, $\varkappa$-hoz egyenlő szög alatt hajló körpárak egyesült körének tekinthető. — Bár az egyenlő forgású sugársoroknál is található kör, mely $\varkappa$-át T, T_1-ben derékszög alatt metszi, de ennek nincs közös pontja a perspektiv tengelylyel, t-vel. —

g, h, g_1, h_1 hatványsugarak, melyek az egymásnak megfelelő derékszögek (qr), (q_1r_1) száraival egyenlő szögeket képeznek:

$$(gq)=(qh)=(g_1r_1)=(r_1h_1),$$

itt is hasonló tulajdonsággal birnak, mint a hatványpontok a pontsoroknál, t. i. hogy:

$$\mathrm{tg}\,(aq)\,.\,\mathrm{tg}\,(a_1r_1)=\mathrm{tg}\,(gq)\,.\,\mathrm{tg}\,(g_1r_1)=\mathrm{tg}^2\,(gq)=\mathrm{tg}^2\,(hq)=\mathrm{tg}^2\,(g_1r_1)$$

egyenlő a sugársorok hatványával.

4. §. Közös tartóval biró projektiv sorok kettős elemei.

22. Két projektiv pontsor $ABC\ldots$, $A_1B_1C_1\ldots$ ugyanazon t tartón is képzelhető. Ha ugyanis két perspektiv pontsor közül az egyiket, $A_1B_1C_1\ldots$-et, a másiknak, $ABC\ldots$-nek tartójára helyezzük, úgy a közös tartón két projektiv pontsort kapunk.

$A_1B_1C_1\ldots$ pontsor kétféleképp helyezhető $ABC\ldots$ tartójára, t. i. vagy oly módon, hogy ha A-ból B-n át C-hez és A_1-ből B_1-en át C_1-hez haladunk, a haladás értelme ugyanaz, vagy pedig oly módon, hogy a haladás értelme ellenkező. Két ugyanazon tartón fekvő projektiv pontsor tehát vagy *egyenlőkép haladó*, vagy pedig *ellenkezőleg haladó* pontsor lehet.

Ily projektiv pontsorok megfelelő pontjainak szerkesztése visszavezethető, két különböző tartón fekvő projektiv pontsorok megfelelő pontjainak szerkesztésére az által, hogy $A_1B_1C_1\ldots$ pontsort tetszőleges T pontból egy új t_2 tartóra projicziáljuk $A_2B_2C_2\ldots$-be, és $ABC\ldots$ pontsor X pontjának megfelelő X_2 pontot azon pontsorban, T-ből ismét t-re projicziáljuk X_1-be.

A kérdés, mellyel most foglalkozunk abban áll, megvizsgálni: valjon van-e két ugyanazon tartón fekvő projektiv pontsoron oly pont, melyet ha az egyik vagy másik pontsorhoz tartozónak tekintünk, megfelelő pontjával összeesik és mikép kell ezen különös pontokat, úgynevezett *kettőspontokat* szerkeszteni.

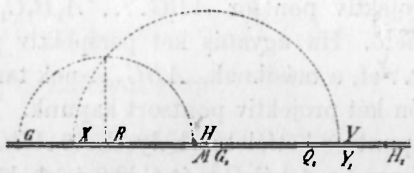
Hogy kettőnél több ily pont nem lehet az könnyen belátható, mert ha ABC pontok összeesnének a megfelelő $A_1B_1C_1$ pontokkal, úgy minden más D pont is, az $(ABCD)=(A_1B_1C_1D_1)$ relaczió következtében összeesnék megfelelő D_1 pontjával. Ennélfogva *a kettőspontoknak száma legfellebb kettő.*

23. Legyenek az egyes pontsorok végtelen távol fekvő Q_∞, $R_{1\infty}$ pontjainak megfelelő pontjai, vagyis az ellenpontok: Q_1, R. E pontok általában nem esnek össze, mert a midőn a pontsorokat egymásra helyeztük, csak tőlünk függött, valjon R és Q_1-et egyesítjük-e, vagy nem.

R, Q_∞ és $R_{1\infty}$, Q_1 pontok által az egyes pontsorok két részre lesznek osztva, melyet következőleg lehet jelezni:

$$Q_\infty \ldots\ldots R \ldots\ldots\ldots\ldots Q_\infty$$
$$R_{1\infty} \ldots\ldots\ldots\ldots Q_1 \ldots\ldots R_{1\infty}$$

Ha most egy X pont R-től balra levő Q_∞ ponttól R felé mozog, úgy *ellenkezőleg haladó* pontsornál a neki mindig megfelelő X_1 pont



18. ábra.

Q_1-től azon $R_{1\infty}$ pontig fog mozogni, mely Q_1-től balra van, s minthogy X, X_1 pontok egymással szemben mozognak egyszer megtörténik, hogy egymással találkoznak, mely találkozás szükségkép RQ_1 közön *kívül* R-től balra lesz.

Ha a mozgó X pont a másik Q_∞ pontból mozog R felé, a neki megfelelő X_1 pedig ezen, ellenkezőleg haladó pontsornál, Q_1-től a másik $R_{1\infty}$ felé, tehát véle ismét szemben, úgy azok ismét egyesülnek RQ_1 közön *kívül* Q_1-től jobbra fekvő pontban.

Ellenkezőleg haladó pontsoroknál tehát szükségkép létezik az ellenpontok által határolt közön kívül, két kettőspont.

Hogy ezeket szerkeszthessük, szükségünk van Q_∞, Q_1, R, $R_{1\infty}$ pontokon kívül (18. ábra) még egy tetszőleges megfelelő pontpárra, pl. G, G_1 (vagy H, H_1) hatványpontokra, melyek különben minden más megfelelő pontpár segélyével szerkeszthetők. Nevezzük RQ_1 felezőpontját M-nek és vegyük tekintetbe, hogy X kettőspontra nézve, feküdjék az R, Q_1-től jobbra, vagy balra:

$$\overline{RG}^2 = RX.Q_1X = (RM+MX)(Q_1M+MX) = (RM+MX)(-RM+MX),$$

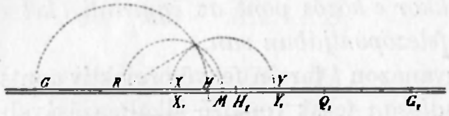
tehát

$$\overline{RG}^2 + \overline{RM}^2 = \overline{MX}^2.$$

Ezen egyenletből látható, hogy RG és RM befogókkal alakított derékszögű háromszögnek *átfogója,* megadja a kettőspontok távolságát RQ_1 felezőpontjától.

24. Hogy az *egyenlőkép haladó* pontsorokra nézve a kettőspontok fekvését megállapíthassuk, vegyük tekintetbe, ha X pont ismét az R-től balra levő Q_∞ pontból kiindulva R-ig mozog, a neki (19. ábra) megfelelő X_1 pont, Q_1-től azon $R_{1\infty}$-ig fog mozogni, mely Q_1-től jobbra van. E mozgás közben X nem eshet össze megfelelő pontjával.

Ha X pont R-től a másik Q_∞-ig halad, X_1 a másik $R_{1\infty}$-től közeledik Q_1-hez. E mozgásnál már megtörténhetik, hogy X, X_1-gyel egyesül, de ezen egyesülési pont csak RQ_1 közön jöhet létre.



19. ábra.

Ha ily X pont létezik, akkor erre nézve:

$$RX.XQ_1 = \overline{RG}^2,$$

vagy mert

$$RX.XQ_1 = (RM+MX)(XM+MQ_1) = (RM+MX)(RM-MX),$$

$$\overline{RM}^2 - \overline{MX}^2 = \overline{RG}^2.$$

Ezen egyenlet szerint a kettőspont távolsága RQ_1 felezőpontjától M-től, *befogója* azon derékszögű háromszögnek, melynek átfogója RM, másik befogója RG.

Ha tehát RM átfogó nagyobb mint RG befogó, vagy mi ugyanaz ha RQ_1 nagyobb mint HG, úgy létezik két M-től egyenlő távolságra levő kettőspont; ha ellenben RQ_1 kisebb volna mint HG, úgy nem lehet oly valós pontot találni t-n, mely megfelelő pontjával összeesnék; s végre midőn $RQ_1 = HG$, akkor az M-től 0 távolságra levő pont, vagyis maga M pont az egyedüli, mely megfelelő pontjával összeesik.

Minthogy $HG = G_1H_1$, és felező pontjuk R, ill. Q_1: az egyenlőkép haladó projektiv pontsoroknak két *valós*, vagy nem valós, hanem *képzetes* kettőspontjuk van a szerint, a mint HG, G_1H_1 közök közös részszel nem birnak, vagy pedig közös részszel birnak; de ha a közös rész csupán egy pont M, akkor a pontsoroknak ezen egy pontja az egyedüli kettőspont.

E vizsgálat eredményét így fejezhetjük ki:

Ha két ugyanazon tartón fekvő projektiv pontsor ellenpontjai R, Q_1, hatvány pontjai G, H; G_1, H_1, akkor a két projektiv pontsornak kettőspontjai RQ_1 köz felezőpontjától vagy

$$\sqrt{\left(\frac{RQ_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{HG}{2}\right)^2}, \text{ vagy } \sqrt{\left(\frac{RQ_1}{2}\right)^2 - \left(\frac{HG}{2}\right)^2}$$

távolságra vannak, a szerint a mint a sorok ellenkezőleg, vagy egyenlőkép haladók. A kettőspontok ellenkezőleg haladó pontsoroknál mindig valósak, egyenlőkép haladóknál pedig csak akkor, ha HG és G_1H_1 közök nem birnak közös részszel. Ha ezen közöknek csak egy pontjuk közös, akkor e közös pont az egyedüli (két egyesült) fedőpont, mely RQ_1 felezőpontjában van.

25. Két ugyanazon t tartón fekvő projektiv pontsornak második kettőspontja *vonalosan* (csak vonalzó alkalmazásával) szerkeszthető, ha az egyik kettőspont I, és a pontsoroknak két-két megfelelő pontja: A, A_1; B, B_1, mely a projektiv vonatkozás meghatározásához szükséges, adva van.

20. ábra.

Projicizáljuk ugyanis (20. ábra) $IA_1B_1 \ldots$ pontsort tetszőleges T pontból, I-n átmenő t_2 tartóra $IA_2B_2 \ldots$-be. Ezen $IA_2B_2 \ldots$ pontsor $IAB \ldots$-vel nemcsak projektiv, hanem, mert I-ben megfelelőleg közös pontjuk van, egyszersmind perspektiv is, ennélfogva AA_2, BB_2, egyenesek T_1 metszőpontja, a vélök perspektiv sugársornak középpontja. Az $IA_2B_2 \ldots$ pontsorral perspektiv T, T_1 sugársorok egymás között is perspektivek, miért is $|TT_1|$ sugár, a két sugársorban egymásnak megfelelő. Ezen $|TT_1|$ sugárnak K metszőpontja t-vel a keresett második kettőspont, mert K-nak $IA_2B_2 \ldots$ sorban megfelel $(KT_1, t_2) = K_2$, $IA_1B_1 \ldots$-ben pedig $(K_2T, t) = K$.

Lehet azonban úgy is eljárnunk, feltéve, hogy K az adott, I a keresett második kettőspont, hogy K-n át tetszőleges egyenest húzunk és ennek két pontjából T, T_1-ből projicziáljuk $A_1B_1 \ldots$, illetve $A, B \ldots$ sorokat; TA_1, T_1A és TB_1, T_1B egyenesek közös A_2, B_2 pontján átmenő $|A_2B_2|$ egyenes t-t a kivánt második kettőspontban I-ben metszi.

Ha az első szerkesztés szerint TT_1 sugár t-t I-ben, vagy a második szerint $|A_2B_2|$ egyenes t-t K-ban metszené, akkor a második kettőspont az elsővel egyesül és a soroknak csak egy kettőspontjuk van.

26. A kettőspontokra vonatkozólag még megjegyezhető a következő tétel: *ha két közös tartón fekvő projektiv pontsor kettőspontjai I, K-val, azok egymásnak megfelelő tetszőleges pontjai A, A_1; B, B_1-gyel jelöltetnek, akkor:*

$$(IKAA_1) \overline{\wedge} (IKBB_1).$$

$$(IKAB) \overline{\wedge} (IKA_1B_1)\text{-}$$

ből következik ugyanis:

$$\frac{IA}{KA} : \frac{IB}{KB} = \frac{IA_1}{KA_1} : \frac{IB_1}{KB_1},$$

vagy

$$\frac{IA}{KA} : \frac{IA_1}{KA_1} = \frac{IB}{KB} : \frac{IB_1}{KB_1},$$

tehát

$$(IKAA_1) \overline{\wedge} (IKBB_1).$$

A számítás azonban kikerülhető, ha meggondoljuk, hogy $(IKAA_1) \overline{\wedge} (K_2KT_1T) \overline{\wedge} (IKBB_1)$, mert az első és utolsó négy pont, projekcziója a középső négynek, A_2, illetve B_2-ből $|TT_1|$-re.

27. Ha két projektiv pontsor ugyanazon tartón fekszik, de nem bír valós kettőspontokkal, akkor mindig találunk két, a tartó által symmetrikusan elválasztott pontot, melyek mindegyikéből a megfelelő pontpárakat projicziáló sugárpárak egymással egyenlő szögeket képeznek.

Nevezzük (21. ábra) R, Q_1 ellenpontok távolságát felező pontot M-nek, a pontsorok hatványpontjait G, H, G_1, H_1-nek, és legyen $|RQ_1|$-re M-ben emelt merőleges O, O' pontja oly helyzetű, hogy

$$\overline{MO'}^2 = \overline{MO}^2 = \overline{RG}^2 - \overline{RM}^2 = (GR + RM)(GR - RM) = GM \,.\, MH.$$

Minthogy

$$\sphericalangle 2OGM = \sphericalangle 2\,MOH = \sphericalangle ORM,$$

$$|OG|, |OG_1|; |OH|, |OH_1|; |OR|, |OR_{1\infty}|$$

megfelelő sugárpár egymással egyenlő szöget képez, mert

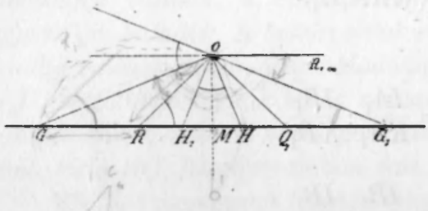
$$O \mid GHR \ldots \mid \text{ sugársor, } O \mid G_1 H_1 R_1 \ldots \mid$$

sugársorral összeillő.

E szerint a két pontsor megfelelő pontparjai A, A_1; B, B_1; . . . O, valamint O' pontból egyenlő szögek alatt projicziáltatnak.

A midőn a pontsoroknak kettőspontjuk van, $RG^2 - RM^2$ negativ előjelű, és $|MO|$ egyenesen nem található oly pont, mely az előbbi tulajdonsággal birna.

28. Tudjuk, hogyha valamely pontsor egy sugársorral perspektiv, akkor a pontsor minden eleme a sugársor neki megfelelő elemében van. De ha ugyanazon sikban fekvő projektiv vonatkozású pont- és sugársor nem perspektiv, van-e a pontsorban oly pont, mely a sugársor megfelelő sugarában fekszik?



21. ábra.

A pontsor tartója a sugársort egy az adott pontsorral projektiv pontsorban metszi, s a szerint a mint a két pontsor két valós de különböző, két egybeeső, vagy két képzetes fedőponttal bir: a sugársornak 2, 1, 0 sugara megy át a pontsor neki megfelelő pontján.

Hasonló eljárást követünk, ha megakarjuk vizsgálni, valjon két ugyanazon középponttal biró és ugyanazon síkban fekvő projektiv sugársor bir-e megfelelő összeeső sugárral, úgynevezett *kettőssugárral?* A sugársorokat tetszőleges t egyenessel metszük, miáltal t-n két projektiv pontsort kapunk; e két projektiv pontsor két valós de különböző, két egybeeső, vagy két képzetes kettőspontján, mennek át a sugársoroknak két valós de különböző, két egybeeső, vagy két képzetes kettőssugarai.

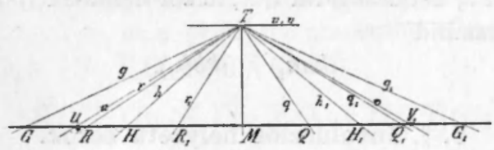
Ellenkező forgású sugársoroknál tekintve, hogy a pontsorok szintén ellenkezőleg haladók, mindig két *valós* kettőssugarat kapunk, *egyenlő forgású* sugársoroknál csak akkor kapunk két valós kettőssugarat, ha a pontsorok hatványpontjai által határolt közök közös résszel nem birnak.

Hogy az egyenlő forgású sugársoroknál azon pontsortól függetlenül megitélhessük valjon valós, vagy képzetes kettőssugarai vannak-e a soroknak, nevezzük az egymásnak megfelelő derékszögek szárait

Hogyan kapjuk meg, ha T közös ??

(22. ábra) $q, r; q_1, r_1$-nek, a hatványsugarakat $g, h; g_1, h_1$-nek, (rq_1) szög egyik felezőjét $u_1 \equiv v$-nek és ezen felezőnek megfelelő sugarat az egyes sorokban u, v_1-nek, végre $u_1 \equiv v$-vel párhuzamosan menő tetszőleges t egyenesnek metszőpontjait az előbbi sugarakkal, a sugarak nevei szerint, de nagy betűvel.

Minthogy $(gh)=(h_1 g_1)$ szögek felezői: r, ill. q_1, és $\sphericalangle (rr_1)=(qq_1)$, t egyenes pedig r és q_1-gyel egyenlő szöget képez: RQ_1, R_1Q, GG_1, HH_1 közöknek ugyanazon M felezőpontjuk van; minthogy továbbá $\operatorname{tg}(q_1u_1) \,.\, \operatorname{tg}(ur) = \operatorname{tg}(q_1v_1) \,.\, \operatorname{tg}(vr) = \operatorname{tg}^2(gr)$, és $(q_1u_1) = (vr)$, azért $(ur) = (q_1v_1)$, tehát u és v_1 sugarak t-vel szintén egyenlő szöget képeznek, minek következtében t-n fekvő és a sugársorokkal perspektiv pontsorok U, V_1 ellenpontjai, M-től szintén egyenlő távolságra vannak.



22. ábra.

Ha X, X_1 e projektiv pontsorok megfelelő pontpárja, úgy U, V_1 ellenpontok miatt:

$$UX \,.\, X_1V_1 = UG \,.\, G_1V_1 = UH \,.\, H_1V_1,$$

s mert az előbbiek szerint

$$UG = G_1V_1;\; HU = V_1H_1,$$

azért

$$UX \,.\, X_1V_1 = \overline{UG}^2 = \overline{HU}^2 = \overline{V_1G_1}^2 = \overline{H_1V_1}^2$$

miből látható, hogy G, H és G_1, H_1 pontok, a pontsoroknak hatványpontjai.

A felvett sugársorokat tehát t oly pontsorok szerint metszi, melyeknek hatványpontjain a sugársoroknak hatványvonalai mennek át, és mert projektiv pontsoroknak csak akkor nincs valós kettőspontjuk, ha hatványpontjaik által határolt közök közös résszel (nem ponttal) bírnak, azért e sugársoroknak is csak akkor vannak valós kettőssugarai, ha a hatványsugarak által képezett (hegyes, vagy tompa) szögek szárai nincsenek egymástól elválasztva.

E szerint mondhatjuk: *két, közös középponttal biró ellenkező forgású projektiv sugársor, mely ugyanazon síkban fekszik, min-*

X, X_1 egy tetszőleges, kapcsolt pontpár. G, H, G_1, H_1 pedig a hatványpontok, úgy ezen projektiv pontsoroknál:

$$XM \,.\, X_1M = GM \,.\, G_1M = HM \,.\, H_1M,$$

és mert $GH = G_1H_1$ közök felező pontja M, azért G, G_1 és H, H_1 egy-egy pontba esik, melyek az involucziós pontsor kettőspontjai.

Ha az involucziós pontsort alkotó projektiv pontsorok egyenlőkép haladók, akkor ezeknek és így az involucziós pontsornak nincs valós kettőspontja; mert $GH = H_1G_1$ hatványpontok által határolt közök egymást teljesen befödik, miután mindkét köznek felezőpontja M, egybeesik. De azon körülményből, hogy a kapcsolt pontok, egyenlőkép haladó projektiv pontsorból alkotott involucziós pontsornál, a középponttól el vannak választva szintén következik, hogy két kapcsolt pont nem eshet egybe.

Ily természetű involucziós pontsoroknak kettőspontjai képzetesek; az egybeeső G, H_1 és G_1, H hatványpontokat itt szintén, az *involucziós sorok hatványpontjainak nevezik.*

Valós kettőspontokkal biró involucziós pontsorokat *hyperbolikus természetűnek* vagy röviden *hyperbolikusnak*, képzetes kettőspontokkal birókat *elliptikusnak* szokták nevezni, így tehát: az involucziós pontsorok elliptikusak, vagy hyperbolikusak, a szerint, a mint a kapcsolt pontok nincsenek vagy el vannak választva a középpont által.

A kapcsolt pontoknak a középponttól mért távolságai, ha a pontsor hyperbolikus, positiv, ha elliptikus negativ szorzatot adnak, mely szorzat: az involucziós pontsor *hatványának* neveztetik.

32. Ha az involucziós pontsor középpontja M, kettőspontjai G, H, annak tetszőleges kapcsolt pontpárja X, X_1, úgy az involucziós pontsort jellegző relaczió:

$$XM \,.\, X_1M = GM^2 = MH^2,$$

így is írható:

$$XM \,.\, X_1M + MG \,.\, MH = 0.$$

Ha ezen egyenletet 2-vel szorozzuk és ahhoz

$$XM \,.\, (MH + MG) + X_1M \,.\, (MH + MG) = 0$$

egyenletet adjuk, akkor:

$$(XM + MG)\,(X_1M + MH) + (X_1M + MG)\,(XM + MH) = 0,$$

vagy egyszerűbben írva:

$$XG \,.\, X_1H + X_1G \,.\, XH = 0$$

egyenlethez jutunk, miből következik, hogy

$$\frac{XG}{X_1G}:\frac{XH}{X_1H}=(XX_1GH)=-1.$$

Ezen relaczió azt fejezi ki, hogy az involucziós pontsor kettőspontjai és egy tetszőleges kapcsolt pontpár kettős viszonyának értéke $=-1$, ha a kettőspontok és a kapcsolt pontok egymáshoz rendelt pontoknak tekintetnek.

Négy pontot, melynek kettősviszonya $=-1$: *harmonikus helyzetű*, vagy *harmonikus* pontnak neveznek. Minthogy harmonikus pontok kettősviszonyának értéke negativ: az egymáshoz rendelt pontok el vannak választva egymástól, és ez rendesen úgy fejeztetik ki, hogy az egymáshoz rendelt pontok *harmonikusan vannak elválasztva*. Ennélfogva mondhatjuk: *involucziós pontsornál a kettőspontok a kapcsolt pontoktól harmonikusan vannak elválasztva.*

33. Tekintve, hogy az involucziós pontsor két különös helyzetű projektiv pontsor, annak meghatározásához nem szükséges három egymásnak megfelelő pontpár A, A_1; B, B_1; C, C_1, mert két kapcsolt pontpárral A, A_1; B, B_1-gyel az involucziós pontsornak négy pontja és azoknak megfelelő pontjai is adva vannak, a mennyiben A, B, A_1, B_1, pontoknak az egyik pontsorban: A_1, B_1, A, B, pontok felelnek meg a másikban. A projektiv vonatkozás azonban ezen adatokkal nincs túlterhelve, mert (ABA_1B_1) azonosan egyenlő (A_1B_1AB)-vel (5). E szerint: *az involucziós pontsort két kapcsolt pontpár meghatározza.*

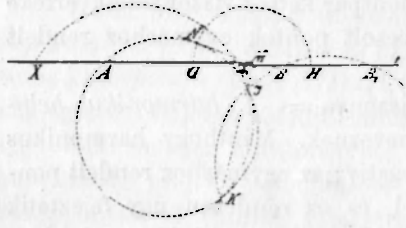
A, A_1; B, B_1 kapcsolt pontpárakkal adott involucziós pontsor tetszőleges X pontjának kapcsolt X_1 pontját oly módon szerkeszthetjük, hogy az ABA_1 és A_1B_1A pontokkal meghatározott projektiv vonatkozású pontsorokban az elsőnek X pontjához megkeressük (22) a megfelelő X_1 pontot; ezen X_1 már kapcsolt pontja X-nek. A szerkesztés azonban egyszerűbb úton is eszközölhető.

Fektessünk ugyanis (24. ábra) A, A_1; BB_1 pontokon át két kört, melyek egymást metszik, és nevezzük ezeknek I, K metszőpontjain átmenő egyenesnek és az involucziós pontsor t tartójának közös pontját M-nek. Minthogy

$$AM.A_1M=IM.KM=BM.B_1M:$$

M középpontja, az A, A_1; B, B_1 kapcsolt pontokkal biró involucziós pontsornak, és ha I, K-n valamint t-n fekvő X ponton áthelyezett kör t-t másodizben X_1-ben metszi, úgy $XM.X_1M=IM.KM$ relaczió következtében, X_1 kapcsolt pontja X-nek.

A szerint, a mint a felvett kapcsolt pontok A, A_1; B, B_1, egymástól el vannak választva, vagy nincsenek elválasztva, M pont szintén elválasztja, vagy nem választja el a kapcsolt pontokat egymástól, és az involucziós pontsor elliptikus, illetve hyperbolikus lesz. De magából a szerkesztésből is látható, hogy csak azon esetben, a midőn A, A_1; B, B_1 nincsenek egymástól elválasztva, tehát M, AA_1I, BB_1I körön kívül van, lehet I, K pontokon át oly két kört fektetni, mely t-t érinti, azaz összeeső kapcsolt pontokban metszi. S ezen érintőpontokat, mint az involucziós pontsor kettőspontjait megkapjuk, ha az IK pontokon átmenő körök egyikéhez M-ből vont érintő hosszával MN-nel, M-ből kört irunk le; ezen kör t-t már a kettőspontokban G, H-ban metszi, mert:



24. ábra.

$$\overline{NM}^2 = \overline{GM}^2 = \overline{HM}^2 = IM.KM = AM.A_1M = BM.B_1M.$$

E szerkesztésből következő tételhez jutottunk:

Két ponton, I, K-n, átmenő összes körök (körsor), tetszőleges egyenest involucziós pontsor szerint metszik, melyben az egyes körök metszőpontjai kapcsolt pontok, és a két pont összekötő egyenesének — a körsor hatványvonalának — metszőpontja, az involucziós pontsor középpontja. Ezen involucziós pontsor elliptikus, vagy hyperbolikus a szerint, a mint tartója I, K pontokat elválasztja, vagy nem választja el egymástól; azon pontok, melyekben a tartó a körsor két körét érinti, — s mely csak a hyperbolikus involucziós pontsornál fordulhat elő, — a pontsor kettőspontjait képezik.

Megjegyezhető még, hogy ha a metsző egyenes I (vagy K) ponton megy át, egy különös involucziós pontsor áll elő, melyben minden pontnak egy és ugyanazon pont t. i. I (vagy K) a kapcsolt pontja, és mely involucziós pontsor *parabolikusnak* neveztetik. A kapcsolt pontoknak a középponttól mért távolságai parabolikus pontsornál oly szorzatot adnak, melynek értéke $=0$.

34. A hyperbolikus természetű involucziós pontsor egy különös pontsorba megy át, ha a két kettőspont G, H közül egyik pl. H, végtelenbe esik. Ekkor ugyanis a középpont, mely GH közt felezi szintén végtelen távolba esik, és azon szorzat, melynek tényezői két kapcsolt pontnak a középponttól mért távolságai, vagyis a pontsor határványa: végtelen nagy lesz. E pontsornál a kapcsolt pontok $A, A_1; \ldots$ azon különös helyzetűek, hogy a végesben fekvő kettősponttól G-től egyenlő távolságra vannak. Az ismert $(AA_1GH) = -1$ relaczióból:

$$\frac{AG}{A_1G} = -\frac{AH}{A_1H},$$

de minthogy ezen egyenlet jobboldalának határértéke -1, tehát

$$AG = -A_1G = GA_1:$$

A, A_1 kapcsolt pontok G kettősponttól egyenlő távolságra vannak.

De hogy G-től egyenlő távolságra levő A, A_1; B, B_1; C, C_1; D, D_1; ... pontok projektiv pontsort képeznek, mely egyszersmind involucziós helyzetű, onnan következik, mert egyrészt négy tetszőleges $ABCD$ pontnak kettősviszonya egyenlő a megfelelő $A_1B_1C_1D_1$ pontok kettősviszonyával, vagyis $(ABCD) = (A_1B_1C_1D_1)$; másrészt $(ABA_1B_1) = (A_1B_1AB)$, minthogy a kettősviszonyt képező AC, BC, AA_1, BA_1, ... közök egyenlők a megfelelőkkel: A_1C_1, B_1C_1, $-A_1A$, $-B_1A$, ...-val.

Ezen különös involucziós pontsor: *egyenoldalu hyperbolikusnak* neveztetik.

35. Két ugyanazon tartón fekvő involucziós pontsor *közös* kapcsolt pontjait (ha olyanok léteznek) az előbbiek szerint könnyen szerkeszthetjük.

Legyen ugyanis t tartón két involucziós pontsor A, A_1; B, B_1 és A', A'_1; B', B'_1 kapcsolt pontok által adva, és keressünk oly kapcsolt pontpárt, mely mindkét pontsorhoz tartozik. Vegyünk fel e végből tetszőleges I pontot és fektessünk IAA_1, IBB_1, $IA'A'_1$, $IB'B'_1$ pontokon át köröket; az első két kör, még egy K pontot, a másik kettő K' pontot bír közösen; ezen K, K' és I ponton átmenő kör az involucziós pontsorok tartóját a két pontsor közös kapcsolt pontjaiban C, C_1-ben metszi.

$KK'I$ kör metszőpontjai a tartóval mindig valósak, tehát *két ugyanazon tartón fekvő involucziós pontsor mindig bír valós közös kapcsolt pontpárral, ha azok közül legalább egyik elliptikus*, mert ekkor K, K' közül legalább egyik pont I-től a tartó által el van választva, és így a kör a tartót valós pontokban metszi.

Ha mindkét pontsor hyperbolikus, úgy IKK' pontokat a tartó nem választja el, és ezen pontok helyzetéből nem itélhető meg, hogy a rajta átmenő kör metszi-e a tartót, vagyis van-e a pontsoroknak közös kapcsolt pontpárja. De tudjuk, hogy a kapcsolt pontpár az összetartozó kettőspontokat harmonikusan választja el. Ha tehát az összetartozó kettőspontokat egy *új* involucziós pontsor kapcsolt pontjainak tekintjük, úgy az új involucziós pontsor kettőspontjai ezen új sor kapcsolt pontjait, tehát az eredetieknek kettőspontjait harmonikusan választják el. De hogy ezen új involucziós pontsor valós kettőspontokkal bírjon, megkivántatik, hogy kapcsolt pontjai ne legyenek egymástól elválasztva, így tehát: az eredeti *két hyperbolikus természetű involucziós pontsor, akkor bír valós közös kapcsolt pontpárral, ha összetartozó kettőspontjai nincsenek egymástól elválasztva.* (Függelék 1.)

36. Két közös középponttal, T-vel, bíró projektiv sugársor szintén hozható oly helyzetbe, melynél az egymásnak megfelelő egyenlő szögek megfelelő száraikkal felcserélve egymást födik.

Ha mi ugyanis projektiv sugársoroknál az egymásnak megfelelő derékszögek (rq), (r_1q_1) szárait egymásra helyezzük oly módon, hogy r, q_1 és r_1, q egyesüljön, és egy tetszőleges $x\equiv y_1$ sugárnak, mint az egyik és másik sorhoz tartozónak megfelelő sugarát, x_1, y-nal jelöljük, úgy

$$\operatorname{tg}(xr).\operatorname{tg}(x_1q_1)=\operatorname{tg}(yr).\operatorname{tg}(y_1q_1)=\operatorname{tg}(yr).\operatorname{tg}(xr)$$

relaczióból következik, hogy $\operatorname{tg}(x_1q_1)=\operatorname{tg}(yr)$, és mert q_1 és r egy és ugyanazon sugár: x_1 egybeesik y-nal.

Ily két projektiv sugársor, *involucziós sugársornak*, az egymásnak megfelelő sugarak *kapcsolt* sugaraknak, az egymásra merőleges kapcsolt sugarak ($r\equiv q_1$, $r_1\equiv q$) *tengelyeknek* neveztetnek.

Azon általános relaczió, mely projektiv sugársorok megfelelő sugarai és az egymásnak megfelelő derékszög szárai által képezett szögek között fönforog, involucziós sugársornál így fejezhető ki: *az involucziós sugársor két tetszőleges kapcsolt sugara x, x_1 a tengelyekkel r-rel és q-val oly szögeket képez, melyeknek tangensei állandó szorzatot adnak, vagyis:*

$$\operatorname{tg}(xr).\operatorname{tg}(x_1r)=\text{állandó, és } \operatorname{tg}(xq).\operatorname{tg}(x_1q)=\text{állandó.}$$

Ezen állandó szorzat bármelyike az involucziós sugársor hatványa.

37. Az involucziós sugársor *elliptikus* vagy *hyperbolikus* a szerint, a mint az alkotó projektiv sugársorok egyenlőkép, vagy ellenkezőleg forgók. Elliptikus involucziós sugársornál két kapcsolt sugár a tengelyek által el van választva, hyperbolikusnál nincs elválasztva, a mi könnyen belátható, ha a tengelyekből $q_1 \equiv r$, $q \equiv r_1$-ből kiindulva x, x_1 kapcsolt sugarakat forgatjuk. Ha a forgás ugyanazon értelemben történik: x, x_1 el lesz választva, ha pedig ellenkező értelemben, úgy nem lesz elválasztva r, q tengelyek által, és az involucziós sugársor hatványa $\operatorname{tg}(xr) . \operatorname{tg}(x_1 r)$, az első esetben negativ, a másodikban positiv.

Ha az involucziós sugársorban minden sugárhoz egy és ugyanazon sugár kapcsolt: a sugársort *parabolikusnak* nevezik, melynél mint könnyen látható:

$$\operatorname{tg}(xr) . \operatorname{tg}(x_1 r) = 0,$$

hol x, x_1 egy pár kapcsolt sugarat, r azon tengelyt jelenti, mely x-szel egyesül.

Minthogy a hyperbolikus involucziós sugársornál a kapcsolt sugarak a tengelyek által nincsenek elválasztva, mindig található oly két az egyes tengelyekhez egyenlő szög alatt hajló valós sugár, mely kapcsolt sugarával összeesik és melyek az alkotó projektiv sugársorok egyesült hatványsugarai. E különös sugarakat az involucziós sugársor *kettőssugarainak* vagy *asymptotáinak* nevezik. Az elliptikus involucziós sugársornál a hatványsugarak felcserélve kerülnek egymásra (g, h_1-re és g_1, h-ra); és ezen kapcsolt sugarakat, melyek tehát a tengelyekhez egyenlő szög alatt hajlanak a sugársor *hatványsugarainak* nevezik.

38. *Minden involucziós sugársor metszése a középponton át nem menő t egyenessel, involucziós pontsor, melyben a kapcsolt pontok, a sugársor kapcsolt sugarainak metszései,* mert az involucziós sugársort képező két projektiv sugársor t-t két projektiv pontsor szerint metszi, melyben az egymásnak megfelelő egyenlő közök végpontjaikkal felcserélve egymásra kerülnek, minthogy a sugársorokban az egymásnak megfelelő egyenlő szögek szárai fölcserélve egymást födik. Az involucziós sugársor kettőssugarainak, mint két összeeső kapcsolt sugárnak metszőpontjai t-vel, a pontsor kettőspontjai lesznek, és mert ezen kettőspontok bármely kapcsolt pontpárral oly kettősviszonyban levő négy pontot képeznek, melynek értéke —1, azért a sugársor kettőssugarainak és két kapcsolt sugárnak, mint a sugársorhoz tartozó négysugárnak kettősviszonya szintén : —1.

Két-két egymáshoz rendelt sugárt, melynek kettősviszonya $= -1$, *harmonikus* helyzetű, vagy *harmonikusan elválasztott* sugaraknak neveznek; ennélfogva *az involucziós sugársor kapcsolt sugarai a kettőssugarak által harmonikusan vannak elválasztva.*

Visszatérve az involucziós sugársor és annak t egyenes által származott metszéséhez, — az involucziós pontsorhoz, — mondhatjuk: *az involucziós sugársorból kimetszett involucziós pontsor, hyperbolikus, vagy elliptikus lesz, a szerint a mint a sugársor hyperbolikus vagy elliptikus.* A sugársor tengelyeinek metszése t-vel, nem lesz különös pontja az involucziós pontsornak, ellenben a sugársor azon sugarának metszőpontja, mely t-vel párhuzamos sugárhoz kapcsolt, az involucziós pontsor középpontja.

De viszont szintén következik: az involucziós pontsor tetszőleges pontból involucziós sugársor által projicziáltatik, mely hyperbolikus, vagy elliptikus a szerint, a mint a pontsor hyperbolikus vagy elliptikus; a pontsor kettőspontjainak projicziáló sugarai, a sugársor kettőssugarai.

39. Minthogy az involucziós pontsor két pár kapcsolt pont által meg van határozva: az őt projicziáló involucziós sugársor, s így *minden involucziós sugársor két pár kapcsolt sugár által meg van határozva, mely a szerint a mint a kapcsolt sugarak el vannak választva vagy nincsenek elválasztva: elliptikus vagy hyperbolikus.*

Ha az involucziós pontsor két kapcsolt pontpár A, A_1; B, B_1 által van adva, a pontsort T középpontból projicziáló involucziós sugársor tengelyeit következőkép lehet szerkeszteni: TAA_1, valamint TBB_1 pontokon átmenő körök T, I metszőpontjain keresztül kört fektetünk, melynek középpontja a pontsor tartóján fekszik, e körnek és a pontsor tartójának C, C_1 metszőpontjain átmenő projicziáló sugarak, mint egymásra merőleges kapcsolt sugarak, az involucziós sugársor tengelyei. E szerkesztésből egyszersmind látható, hogyan kell egy involucziós sugársornak tengelyeit meghatározni, ha a sugársor két pár kapcsolt sugár a, a_1; b, b_1 által van adva.

40. Az előbbi szerkesztésnél T-nek oly helyzete lehet, hogy a TAA_1, TBB_1 pontokon átfektetett két körnek középpontja, és így valamennyi a TI pontokon átmenő kör középpontja, a pontsor tartóján fekszik. Ezen esetben a projicziáló sugársornak *valamennyi kapcsolt sugárpárja egymásra merőleges,* és ekkor egy különös involucziós sugársort kapunk, mely *czirkularis involucziós sugársornak* neveztetik. A *czirkularis involucziós sugársor,* minthogy a kapcsolt sugárpárok egymástól el vannak választva, *elliptikus természetű, vagyis nem bír valós kettőssugarakkal; a sornak két tetszőleges sugara oly szöget képez, mint a hozzá kapcsolt sugarak.*

A fönnebbi szerkesztésből látható, hogy ha valamely involucziós sugársornak két pár kapcsolt sugara egymásra merőleges, úgy valamennyi kapcsolt sugárpár merőleges egymásra, és a sugársor czirkularis, továbbá, hogy két pont létezik a síkban, melyből egy elliptikus természetű involucziós pontsor czirkularis involucziós sugársor által projicziáltatik; e pontok, az AA_1, BB_1, ... közök, mint átmérő fölött leírt köröknek metszőpontjai.

De a hyperbolikus involucziós sugársornak szintén van egy különös esete, melynél t. i. *a kettőssugarak egymásra merőlegesek.* Ha ugyanis egy involucziós pontsor kettőspontjai G, H, és mi GH mint átmérő fölött leírt kör tetszőleges T pontjából projicziáljuk a pontsort, akkor a projicziáló sugarak oly involucziós sugársort képeznek, melynek kettőssugarai egymásra merőlegesek. Ezen involucziós sugársor, mely *egyenoldalú hyperbolikusnak* neveztetik, azon tulajdonsággal bír, hogy *kapcsolt sugarai az egyes kettőssugarakkal egyenlő szöget képeznek.*

Az előbbiekből ugyanis tudjuk, hogy a két kettőssugár g, h és két tetszőleges kapcsolt sugár a, a_1, oly helyzetű, hogy kettősviszonya $(ghaa_1) = -1$, vagyis:

$$\frac{\sin(ga)}{\sin(ha)} = -\frac{\sin(ga_1)}{\sin(ha_1)},$$

de minthogy g, h egymásra merőleges:

$$\sin(ha) = \cos(ga), \ \sin(ha_1) = \cos(ga_1),$$

tehát

$$\operatorname{tg}(ga) = -\operatorname{tg}(ga_1).$$

Ha (ga) és (ga_1) alatt egyidejüleg a hegyes vagy tompa szöget értjük, melyet g, a-val, ill. g, a_1-gyel képez, úgy azon egyenlet folytán: $(ga) = -(ga_1)$, vagyis a, a_1 kapcsolt sugarak g (és hasonlókép h) kettőssugárral egyenlő szöget képeznek.

Az egyenoldalú hyperbolikus sugársor e tulajdonságából következik, hogy *két tetszőleges sugara a, b oly szöget képez, mint a hozzájuk kapcsolt a_1, b_1 sugarak.*

(gb) és (ga) ugyanis egyenlő (b_1g), (a_1g) szöggel, tehát:

$$(ab) = (gb) - (ga) = (b_1g) - (a_1g) = -(a_1b_1).$$

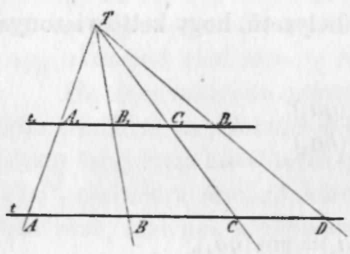
A különbség az egyenoldalú hyperbolikus és az előbbi czirkularis sugársor között, e közös tulajdonságot tekintve abban áll, hogy az őket alkotó projektiv sugársorok az előbbinél *ellenkezőleg,* az utóbbinál *egyenlőkép* forgók. —

Könnyen belátható, hogy mindazon pontok, melyekből egy hyperbolikus természetű involucziós pontsor, egyenoldalú hyperbolikus sugársor által projicziáltatik, azon körön fekszenek, melynek egyik átmérője a pontsor kettőspontjai által határolt köz.

Megjegyzendő végre, hogy egy pontsor és véle projektiv sugársor, involucziós helyzetű, ha a sugársor metszése a pontsor tartójával, az adott pontsorral involucziós helyzetű pontsort szolgáltat.

6. §. Különös projektiv sorok.

41. Az előbbi §-ban láttuk, hogy közös tartón fekvő két projektiv pontsor, valamint közös középponttal biró két projektiv sugársor különös *helyzetet* foglalhat el. Ugyanezen alkalommal tapasztaltuk, hogy maguk a projektiv pont- és sugársorok megfelelő elemei, melyek az involucziós pont- és sugársort képezik egyszerűbb relacziók által lesznek egybekapcsolva, mint azon relaczió, mely általában a projektiv vonatkozást kifejezi, t. i. hogy bármely négy elem kettősviszonya egyenlő a neki megfelelő négy elem kettősviszonyával. Igy: a midőn az involucziós pontsor egyenoldalú hyperbolikus, az alkotó projektiv pontsorok egyikének két eleme oly távolságra van egymástól, mint a a megfelelő két elem a másik sorban; midőn az involucziós sugársor egyenoldalú hyperbolikus, vagy czirkularis, az alkotó projektiv sugársorokban két sugár által képezett szög oly nagy, mint a megfelelő sugarak hajlásszöge.



25. ábra.

A kérdés, melylyel most szándékunk foglalkozni, annak megállapítása, hogy *mikép egyszerűsbülhet az általános projektiv vonatkozás, különös esetekben?*

Ha mi t tartón fekvő $A, B, C, D, \ldots$ pontsort (25. ábra) tetszőleges T pontból t-vel párhuzamos t_1 egyenesre projicziáljuk A_1, B_1, C_1, $D_1, \ldots$-be, akkor $A, B, C, D, \ldots$; $A_1, B_1, C_1, D_1, \ldots$ projektiv pontsorokra nézve, nemcsak négy tetszőleges elemnek kettősviszonya egyenlő a megfelelő négy elem kettősviszonyával, hanem az egyik pontsor bármely *három* elemének A, B, C-nek *egyszerű* viszonya $AB : BC$, már egyenlő a megfelelő A_1, B_1, C_1 elem egyszerű viszonyával $A_1B_1 : B_1C_1$-gyel, vagyis:

$$AB : BC = A_1B_1 : B_1C_1.$$

Ezen arányból, és a hasonló képzésű

$$BC : CD = B_1C_1 : C_1D_1$$

arányból következik:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \ldots,$$

mely már kifejezi, hogy az *ily projektiv pontsoroknál a megfelelő közök viszonya állandó.* Ily projektiv pontsorok: *hasonlóan-projektiv* pontsoroknak neveztetnek.

Mint ezen pontsoroknak perspektiv helyzetéből kitünik, az egyik pontsor végtelen távol fekvő pontjának a másikban szintén végtelen távol fekvő pont felel meg, vagy más szóval kifejezve: *ezen projektiv pontsoroknak ellenpontjai végtelenben vannak.*

Azonban fordítva is kimutatható: *ha két projektiv pontsor ellenpontjai R, Q_1, végtelenben vannak, akkor a megfelelő közök viszonya állandó, és így a pontsorok: hasonlóan-projektivek.*

$(ACBR) = (A_1C_1B_1R_{1\infty})$-ből ugyanis következik:

$$\frac{AB}{CB} \cdot \frac{CR}{AR} = \frac{A_1B_1}{C_1B_1} \cdot \frac{C_1R_{1\infty}}{A_1R_{1\infty}},$$

és minthogy $\frac{CR}{AR}$, $\frac{C_1R_{1\infty}}{A_1R_{1\infty}}$ viszonyok határértéke $= 1$, mert R és $R_{1\infty}$ végtelen távol van:

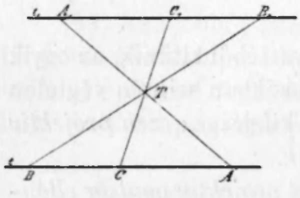
$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CB}{C_1B_1},$$

vagyis a megfelelő közök viszonya állandó.

Ezen egyszerű relaczió következtében világos, hogy a *hasonlóan-projektiv pontsorok meghatározásához elégséges két megfelelő pontpár ismerete.* —

Ha t_1 tartó végtelen távol fekvőnek vétetik, tehát $A_1B_1C_1 \ldots$ pontok, az $ABC \ldots$ pontsor projicziáló sugarainak végtelen távol fekvő pontjai: $ABC \ldots$, $A_1B_1C_1 \ldots$ pontsorokat szintén hasonlóan-projektiveknek tekinthetjük, mert t_1 és t metszőpontjának, vagyis t végtelen távolban fekvő pontjának megfelelő pontja az egyik és másik pontsorban, t. i. a két ellenpont, végtelen távol van.

42. A hasonlóan-projektiv pontsor egy speczialis esete áll elő, ha t_1 tartót (26. ábra) t-vel párhuzamosan, a projicziáló sugársor T középpontjától ép oly távolságra vesszük fel, mint T-nek távolsága az eredeti pontsor t tartójától. Ekkor ugyanis az egymásnak megfelelő közök egymással egyenlők, tehát az egyik pontsor két tetszőleges pontjának távolsága egyenlő a megfelelő pontok távolságával. Ily projektiv pontsorokat *egyenlően-projektiv*, vagy *összeillő* pontsoroknak nevezik, és meghatározásukra *egy* pont és megfelelő pontjának ismerete szükséges, ha azonkivül még adva van, hogy egy másik pontnak megfelelő pontja a másik tartó mely részén fekszik. —



26. ábra.

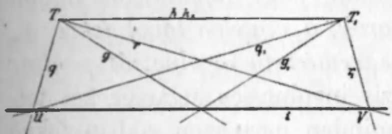
Két ugyanazon t tartón fekvő hasonlóan projektiv pontsornak $A, B, \ldots$; $A_1, B_1, \ldots$-nek egyik kettőspontja K, a tartó végtelen távol fekvő pontja; a másik kettőspont I, a 25-dik pontban tanult szerkesztés folytán következőkép található: t-vel párhuzamos egyenes két tetszőleges T, T_1 pontját összekötjük A_1, B_1, illetve A, B-vel; $|TA_1|$, $|T_1A|$, és $|TB_1|$, $|T_1B|$, sugarak A_2 és B_2 metszőpontját összekötő $|A_2B_2|$ egyenes t-t a keresett második kettőspontban I-ben metszi.

Ha ezen második kettőspont szintén végtelen távol van, a mi csak akkor következhetik be, ha a pontsorok egyenlőkép haladók, úgy a két pontsor egyenlően-projektiv. Viszont: közös tartón fekvő egyenlően-projektiv pontsorok egyik vagy mindkét kettőspontja végtelen távol van a szerint, a mint a pontsorok ellenkezőleg vagy egyenlőkép haladók; az első esetben a végesben fekvő kettőspont felezi a megfelelő pontokkal határolt közöket, tehát a pontsorok egyenoldalú hyperbolikus természetű involucziós pontsort képeznek.

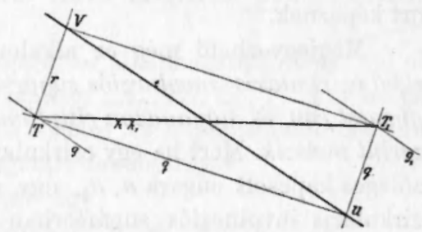
43. Hátra volna még azon eset megvizsgálása, a midőn t_1 egyenes, t pontsort projicziáló sugársornak T középpontján megy át és t-t metszi. t pontsor mindegyik pontjának projekcziója T-ből t_1-re maga T pont, míg t, t_1 metszőpontjának (t, t_1)-nek projekcziója, mint hogy projicziáló sugara t_1 egyenes, bármely ezen t_1-en fekvő pont lehet. A két projektiv pontsor tehát jelen esetben oly különlegességet mutat, hogy az egyik (t) pontsor minden pontjának a másik (t_1) pontsorban csak egy pont (T) felel meg, és hasonlókép a második (t_1) pontsor mindegyik pontjának megfelelő pontja az elsőben (t-ben) szintén egy pont (t, t_1 metszőpontja). Ily különös vonatkozású projektiv pontsorok *parabolikus* nevet viselnek. — Ha a projicziáló sugársor középpontja mindkét tartón fekszik, tehát azoknak metszőpontja: akkor az előbbi eset áll elő, csakhogy azon különös pontok, melyeknek az egyik és másik pontsor valamennyi pontja megfelel: egybeesnek.

44. Vegyünk most két sugársort T, T_1 középponttal tekintetbe, melyeket ismét perspektiv helyzetben levőknek képzelünk. A perspektiv tengely következő különös helyzetet foglalhat el a középpontokhoz képest: *a)* párhuzamos TT_1 egyenessel, vagy átmegy TT_1 köz felező pontján; *b)* végtelen távolba kerülhet, vagy merőleges TT_1 köz felező pontjában TT_1-re; *c)* átmegy az egyik vagy mindkét középponton.

a) Ha a perspektiv tengely párhuzamos TT_1-gyel, vagy TT_1 köz felezőpontján megy át: a sugársorok projektiv vonatkozása nem egyszerűsbűl, mert bármily két projektiv sugársor ezen helyzetbe hozható, ha a megfelelő hatványsugarak egyikét vagy másikát helyezzük egymásra; még pedig az egyenlőkép forgó sugársoroknál a perspektiv



27. ábra.



27a. ábra.

tengely párhuzamos lesz TT_1-gyel, ellenkezőleg forgó sugársoroknál, TT_1 köz felező pontján megy át.

Ha ugyanis (27., 27a. ábra) két projektiv sugársor h, h_1 hatványsugarait egymásra helyezzük, úgy q, r; q_1, r_1 megfelelő merőleges sugárpárak közül q, r_1 és q_1, r egyenlő szöget képez a közös $h=h_1$-gyel; ennélfogva q, q_1 és r, r_1 sugarak U, V metszőpontjait összekötő egyenes vagy párhuzamos $h=h_1$-gyel, vagy pedig átmegy TT_1 köz felezőpontján, a szerint, a mint a sorok egyenlőkép vagy ellenkezőleg forgók. A másik két megfelelő hatványsugár g, g_1 az első esetben UV köz felezőpontján megy át, a másodikban UV egyenessel párhuzamos.

b) A midőn a perspektiv tengely végtelenbe távozik, tehát a síknak végtelen távol levő egyenese, g_∞ (3), vagy TT_1-re a felezőpontban merőlegesen álló egyenes a sugársorok már azon egyszerű vonatkozásban állanak egymáshoz, hogy két tetszőleges sugár hajlásszöge az egyik sugársorban, egyenlő a megfelelő sugarak hajlásszögével a másikban. Ily két sugársor *egyenlően-projektiv sugársornak* neveztetik és meghatározásához a forgás értelmének és *egy* megfelelő sugárpár helyzetének ismerete szükséges.

Ha ellenkezőleg forgó és egyenlően projektiv sugársorok középpontjukkal egymásra helyeztetnek, úgy azok szükségkép involucziós helyzetűek, mert ha az első sugársor tetszőleges a sugarának megfelel a_1, és az első sugársor azon b sugarának, mely a_1-ben van, megfelel b_1, úgy az (ab), $(b_1 a_1)$ szögek egyenlősége folytán b_1 is össze esik a-val. A sugársorok tehát *egyenoldalú hyperbolikus* természetű involucziós sugársort alkotnak.

Ha ellenben egyenlőkép forgó és egyenlően-projektiv sugársorok középpontjukkal egymásra helyeztetnek, úgy ezek általában nem lesznek involucziós helyzetűek, csupán akkor, a midőn a megfelelő sugárpárak közűl egy pár, tehát valamennyi egymásra merőleges. Az egyenlően-projektiv sugársorok ezen esetben *czirkuláris* involucziós sugársort képeznek.

Megjegyezhető még ez alkalommal, hogy *ugyanazon síkban fekvő czirkularis involucziós sugársorok, a végtelen távol fekvő g_∞ egyenest egy és ugyanazon elliptikus természetű involucziós pontsor szerint metszik.* Mert ha egy czirkularis involucziós sugársor két tetszőleges kapcsolt sugara a, a_1, úgy minden más azon síkban fekvő czirkularis involucziós sugársorban létezik a, a_1-gyel párhuzamos sugárpár, ezek tehát mindannyian a sík végtelen távol fekvő g_∞ egyenesét ugyanazon kapcsolt pontpárban metszik. A sík végtelen távol levő egyenesén ezen különös involucziós pontsor *képzetes* kettőspontjait *a végtelen távol fekvő képzetes körpontoknak,* vagy röviden, képzetes körpontoknak nevezik.

c) Ha végre a perspektiv tengely az egyik, pl. T sugársor középpontján megy át, akkor T_1 sugársor mindegyik sugarának T-ben TT_1 sugár felel meg, kivévén T_1 sugársor T_1T sugarát, melynek T sugársor bármely sugara megfelelhet. Ezen *parabolikus* névvel jelzett projektiv sugársorok tehát oly tulajdonságúak, hogy az egyik sugársor bármely sugarának *egy* sugár felel meg a másikban, és viszont a második sugársor sugarainak, *egy* sugár felel meg az elsőben.

Ha a perspektiv tengely mindkét középponton megy át, akkor a sugársorok szintén parabolikusak, csakhogy a középpontot összekötő egyenesben egyesül azon két különös sugár.

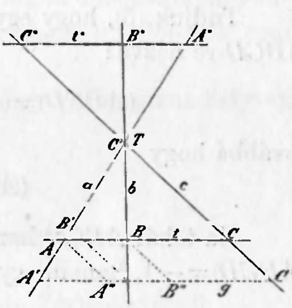
45. Szólanunk kell végre még oly sugársorokról is, melyeknek középpontja végtelen távol van.

Ha mi egy pontsor elemein át párhuzamos sugarakat huzunk, úgy ezen sugarak egy úgynevezett *párhuzamos-sugaru* sort képeznek, melynek középpontja végtelen távol van. Ezen sugársor szintén perspektiv helyzetű projektiv sugársor azon pontsorra nézve, melynek elemein a sugarakat átfektettük. Egy sugara a párhuzamos-sugáru sornak végtelen távol van, t. i. az, mely a pontsor végtelen távol fekvő pontján megy át.

Ha azon pontsor elemein más irány szerint húzunk párhuzamos sugarakat, vagy pedig a pontsort egy végesben fekvő ponttal kötjük össze sugarak által, úgy az előbbivel perspektiv helyzetű és projektiv vonatkozásu sugársorokat nyerünk. — Könnyen belátható, hogy *a párhuzamos sugaru sor két tetszőleges egyenes által hasonlóan-projektiv, két párhuzamos egyenes által, egyenlően-projektiv pontsor szerint lesz metszve,* mert a sugársor végtelen távol fekvő sugara a pontsorok tartóit végtelen távol fekvő megfelelő pontok szerint metszi.

46. Hogy a párhuzamos-sugaru sor alkalmazását lássuk, oldjuk meg a következő feladatot. «Egy pontsor: $A_0, B_0, C_0, \ldots$ úgy helyezendő el, hogy pontjai egy adott szilárd és a pontsorral projektiv $a, b, c, \ldots$ sugársor megfelelő sugarain feküdjenek.»

Ha a sugársor a sugarára, egy az adott pontsorral egyenlően-projektiv pontsort (28. ábra) $A', B', C', \ldots$ -et rakunk, melynek egyik, pl. C' pontja a sugársor T középpontjában van, és C'-nek megfelelő c sugárral $A', B', C', \ldots$ pontokon át párhuzamosakat húzunk, úgy ezek a T sugársorral perspektiv helyzetű sugársort képeznek, mert c-ben megfelelőleg közös sugárral bírnak; a megfelelő sugarak metszőpontja, a perspektiv tengelyen, g-n fekszik, mely c-t C''-ben metszi.



28. ábra.

Ha most az adott pontsort g-re rakjuk, de oly módon, hogy C''-nek megfelelő C-pont C''-vel egyesüljön, a mi kétféleképp történhetik, és ezen új pontsoron $A''\ B''\ C'' \ldots$-en át ismét c-vel párhuzamos sugársort fektetünk, akkor ezen új, T-vel perspektiv sugársor és T sugársor perspektiv tengelye t, meghatározza a pontsor tartóját a kívánt helyzetben. —

Egyszerübb: egy szilárd $A, B, C, \ldots$ pontsoron oly sugársort áthelyezni, mely egy adott, a pontsorral projektiv $a, b, c, \dots$ sugársorral egyenlően projektiv.

Ha ugyanis A, B és B, C pontokon át oly köröket irunk le, melyeknek AB és BC húrok fölött nyugvó kerületi szögei egyenlők ab és bc sugarak hajlásszögeivel, úgy ezeknek metszőpontja közül egyik a kivánt sugársor középpontja. E feladatnak szintén két megoldása van.

7. §. Harmonikus és involucziós elemekre vonatkozó méretes relacziók és szerkesztések.

47. Involucziós pont- és sugársoroknál alkalmunk volt látni, hogy a kettőssugarak és a kapcsolt elempárak harmonikus helyzetűek, vagy mint mondani szokás, harmonikusan vannak elválasztva. Harmonikus helyzetű pontok és sugarak a synthetikai geometriában nagy fontossággal birnak, miért is ezeknek tulajdonságaival, szerkesztésével és a vélök kapcsolatos relacziókkal itt részletesen akarunk foglalkozni.

Két egymáshoz rendelt pont- vagy sugárpárról A, B és C, D-ről azt mondjuk, hogy harmonikus helyzetű, ha kettős viszonyuk egyenlő —1-gyel, vagyis: $(ABCD) = -1$.

Tudjuk (5), hogy egy pont- vagy sugársor bármely négy elemére $ABCD$-re nézve:

$$(ABCD) = (BADC) = (CDAB) = (DCBA),$$

továbbá hogy

$$(ABCD) = 1 : (ABDC).$$

Ha tehát $ABCD$ harmonikus helyzetü négy elem, úgy nemcsak $(ABCD) = -1$, hanem egyszersmind:

$$(ABDC) = (BACD) = (DCAB) = (CDBA) = -1.$$

Mig tehát általában a kettősviszony értéke megváltozik, ha csak az egyik, vagy csak a másik egymáshoz rendelt elempár A, B; C, D elemeit cseréljük fel $(ABCD)$ symbolumban: harmonikus helyzetű elempáraknál ezen csere nem bir befolyással a kettősviszony értékére, mert mint láttuk: $(ABCD) = (BACD) = (ABDC)$ stb.

Harmonikus helyzetü elemeknél az egymáshoz rendelteket közönségesen egymáshoz *harmonikusan rendelt*, vagy egymáshoz *kapcsolt* elemeknek szokták nevezni.

Két kapcsolt pontnak A, B-nek távolsága könnyen kifejezhető a másik kapcsolt elempárnak C, D-nek, az elsőknek egyike vagy másikától mért távolságai által.

$$(ABCD) = -1$$

egyenletből ugyanis

$$AC \,.\, BD + AD \,.\, BC = 0,$$

vagy

$$AC \,.\, (AD - AB) + AD \,.\, (AC - AB) = 0,$$

miből

$$2\, AC \,.\, AD = AB \,.\, (AC + AD),$$

és

$$\frac{1}{AB} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}\right),$$

vagy A-t B-vel fölcserélve:

$$\frac{1}{BA} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{BC} + \frac{1}{BD}\right).$$

Ha tekintetbe veszszük, hogy két mennyiség α, β harmonikus középarányosa γ, azon mennyiség, melynek reciprok értéke α, β reciprok értékeinek számtani középarányosa, következik: *négy harmonikus helyzetű pont közül két kapcsolt pontnak távolsága, harmonikus középarányos, a másik két kapcsolt pontnak az előbbiek egyikétől mért távolságai között.*

Az előbbihez hasonló relaczió létezik négy harmonikus helyzetű sugár a, b, c, d között is.

$(abcd) = -1$-ből ugyanis

$$\sin{(ac)} \,.\, \sin{(bd)} + \sin{(ad)} \,.\, \sin{(bc)} = 0,$$

tehát

$$\sin{(ac)} \,.\, \sin{[(ad) - (ab)]} + \sin{(ad)} \,.\, \sin{[(ac) - (ab)]} = 0,$$

miből egyszerű úton következik

$$tg\,(ab) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{tg\,(ac)} + \frac{1}{tg\,(ad)}\right).$$

Egy más tulajdonsága a harmonikus helyzetű pontoknak következő előbb már előfordult relaczió:

$$MA^2 = MB^2 = MC \,.\, MD$$

által van adva, hol M pont A, B kapcsolt pontok távolságának felező pontja, C, D pedig a másik kapcsolt pontpárt jelenti, és mely

$$AC\,.\,BD+AD\,.\,BC=(AM+MC)\,.\,(MD-MB)+$$
$$+(AM+MD)\,.\,(MC-MB)=0$$

egyenletből egyszerűsítés után kapható. Ezen relaczió következőkép fejezhető ki: *két kapcsolt pont távolságának fele, geometriai középarányos a másik két pontnak az előbbiek felezőpontjától mért távolságai között.*

Ehhez hasonló tétel vezethető le négy harmonikus sugárra a, b, c, d-re nézve is, ha

$$\sin(ac)\,.\,\sin(bd)+\sin(ad)\,.\,\sin(bc)=0$$

egyenletben (ac), stb. szögek helyett, a velük egymértékü

$$(ac)=(am)+(mc),\ (bd)=(md)-(mb),$$
$$(ad)=(am)+(md),\ (bc)=(mc)-(mb)$$

kifejezéseket helyettesítjük és az egyenletet annak tekintetbe vételével egyszerűsítjük, hogy m, az a, b sugarak egyik szögének felezője. Az egyszerűsítés után ily alaku relaczíót kapunk:

$$tg^2\,(ma)=tg^2\,(mb)=tg\,(mc)\,.\,tg\,(md).$$

48. Harmonikus elemeknek ezen, és az előbbi $\overline{MA}^2=\overline{MB}^2=MC\,.\,MD$ egyenlet által kifejezett összefüggéséből következtethető, hogy ha C pont M-ben van, vagyis $MC=0$, úgy $MD=\infty$, tehát D-nek végtelen távol kell lenni: és ha C pont B, vagy A-ban fekszik, D-nek is ugyanazon pontba kell kerülni. Hasonlókép ha c sugár a, b kapcsolt sugarak által képezett szög egyik felezőjében m-ben van, $tg\,(mc)=0$, és $tg\,(md)=\infty$, tehát d-nek m-re merőlegesnek, és így (ab) szög másik felezőjében kell lenni; míg ha c sugár b, vagy a-ban van, d-nek is ugyanazon sugárba kell feküdni. Ennélfogva:

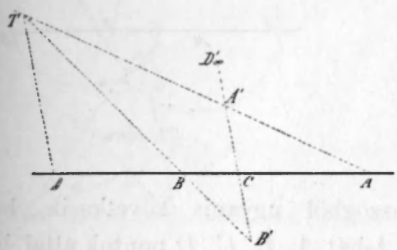
«Ha négy harmonikus helyzetű

ABCD pont közül egyik, pl. C, felezi A, B kapcsolt pontpár által határolt közt, úgy C-hez kapcsolt D pont végtelen távol fekszik, és fordítva: ha négy harmonikus pont közül egyik végtelen távol fek-	*abcd* sugár közül egyik, pl. c sugár a, b kapcsolt sugarak egyik szögfelezőjében van, úgy c-hez kapcsolt d sugárnak a másik szögfelezőben kell feküdni; míg ha c sugár a, vagy b-ben van, a hozzá

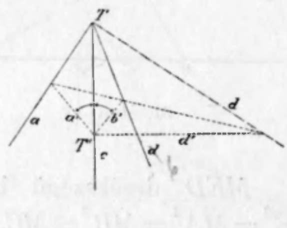
ezik, akkor a hozzá kapcsolt pont felezi a másik kettő által határolt közt; továbbá ha C pont A, B kapcsolt pontok egyikében van, úgy C-hez kapcsolt D pont szintén ott lesz.»

kapcsolt d sugár szintén azon sugárba kerül. De fordítva is következik, mert a szögfelezők egymásra merőlegesek: ha négy harmonikus sugár közül egy pár kapcsolt sugár egymásra merőleges, úgy ezek felezik a másik két sugár által képezett szögeket».

E tételek alapján t egyenesen fekvő ABC pontokhoz a negyedik harmonikus helyzetü C-hez kapcsolt pontot következőkép szerkeszthetjük: C ponton (29. ábra) átmenő tetszőleges egyenesen C-től



29. ábra.

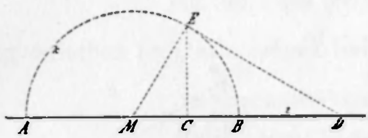


30. ábra.

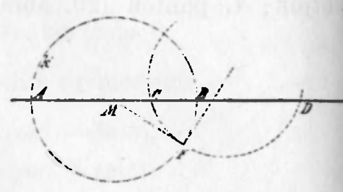
egyenlö távolságra felveszünk két pontot A', B'-et és AA' BB' egyeneseknek T metszőpontján át párhuzamost huzunk $A'CB'$-hez, mely t-t a keresett negyedik harmonikus pontban D-ben metszi. A', B', C pontok és a rajtuk átmenő egyenes végtelen távol fekvő D'_∞ pontja ugyanis, az előbbiek szerint, négy harmonikus helyzetű pont; ezeknek projekcziója T-ből t-re, vagyis $ABCD$, szintén harmonikus helyzetű négy pont lesz.

Hasonlókép lehet a jobb oldalon álló tétel alapján T ponton átmenő abc sugarakhoz (30. ábra), c-től a, b által harmonikusan elválasztott d sugarat szerkeszteni, ha c-nek tetszőleges T' pontján át, c-hez egyenlő szög alatt hajló a', b' és c-re merőleges d' sugarat húzunk és T-t azon ponttal összekötjük, melyben d' egyenes a, a' és b, b' metszőpontjainak összekötő egyenesét metszi. De tekintettel a bal oldalon álló tételre így is eljárhatunk: a, b-t tetszőleges c-vel párhuzamos egyenes által metszszük A, B-ben; AB felező pontján D-n átmenő $TD = d$ sugár a keresett negyedik harmonikus, mert AB egyenes $abcd$ sugarakat, harmonikus helyzetü pontok szerint metszi.

C, vagy D-hez kapcsolt negyedik harmonikus pontot, ha még AB kapcsolt pontpár adva van $\overline{MA}^2 = \overline{MB}^2 = MC \,.\, MD$ relaczió alapján következőkép szerkeszthetjük: AB pontokon át k kört írunk le (31. ábra), melynek középpontja AB köz felezőpontja M. Ha az adott C, AB pontokat elválasztja, úgy C-ben AB-re merőlegesen álló egyenesnek és k körnek E metszőpontjában érintőt húzunk k-hoz, mely ABC egyenest a negyedik harmonikus pontban D-ben metszi. Ha ellenben az adott D pont AB közön kívül fekszik, úgy D-ből k-hoz vont érintő érintőpontjából AB-re merőlegest bocsátunk, melynek C talppontja A, B, D-hez negyedik harmonikus pont.



31. ábra.



32. ábra.

MED derékszögű háromszögből ugyanis következik, hogy $\overline{ME}^2 = \overline{MA}^2 = \overline{MB}^2 = MC.\, MD$, tehát A, B, C, D pontok által harmonikusan vannak elválasztva.

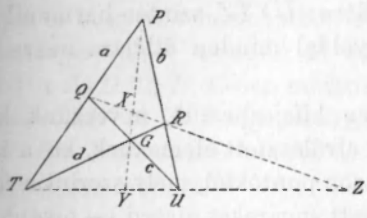
Ugyanezen $\overline{MA}^2 = \overline{MB}^2 = MC.\, MD$ relaczió alapján C, D kapcsolt pontpár és AB vonaldarab M felezőpontjából, A, B pontpár szerkeszthető.

Ha mi (32. ábra) CD-n átmenő tetszőleges körhez M-ből érintőt húzunk, mely azt F pontban érinti, úgy az MF érintő hosszával M-ből leirt kör CD egyenest, C, D-től harmonikusan elválasztott A, B pontokban metszi, mert $\overline{MA}^2 = \overline{MB}^2 = \overline{MF}^2 = MC.\, MD.$

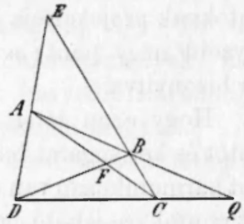
ABF, CDF körök egymást derékszög alatt metszik, és mivel bármely két egymást X, Y pontban derékszög alatt metsző körre nézve, melyek egyikének tetszőleges AMB átmérője a másikat C, D-ben metszi: $\overline{MA}^2 = \overline{MB}^2 = \overline{MX}^2 = \overline{MY}^2 = MC.\, MD$, azért: *két egymást derékszög alatt metsző kör bármelyikének átmérője, a körök által harmonikus pontokban metszetik* és fordítva, ha egy k körnek átmérőjén AB-n oly két pontot C, D-t szerkesztünk, mely az átmérőt harmonikusan osztja, akkor mindazon körök, melyek C, D pontokon átmennek k-t derékszög alatt metszik. Ebből következik: (33.) *ha g egyenes pontjaiból, mint középpontokból köröket irunk le, melyek egy* *tetszőleges k kört derékszög alatt metszenek, akkor ezen körök g egyenest egy involucziós pontsor kapcsolt pontpárjaiban fogják metszeni; ezen involucziós pontsor hyperbolikus, parabolikus vagy elliptikus, a szerint, amint k metszi, érinti, vagy nem metszi g egyenest.*

49. Mindezen szerkesztések, melyek a negyedik harmonikus pont, vagy sugár felkeresésénél alkalmaztattak, feltételezik a körző használatát. Minthogy azonban csak *egy* elem létezik, mely két elemet egy harmadiktól harmonikusan választ el: ezen egy elem felkeresése *első fokú* feladat s mint ilyen, csupán a vonalzó használatával is megoldható.

Hogy a negyedik harmonikus pont, vagy sugár szerkesztését csupán vonalzóval megmutathassuk, ismerni kell a synth. geometriában nagy fontossággal biró *teljes négyoldalt* és *négyszöget.*



33. ábra.



34. ábra.

Teljes négyoldal, vagy röviden négyoldal képeztetik, négy ugyanazon síkban fekvő *a, b, c, d* egyenes által, melyek közül kettőnél több nem megy ugyanazon ponton át. Ezen egyeneseket *oldalaknak*, két-két oldal metszőpontját szögpontnak (33. ábrában: *P, Q, R, G, T, U*), két oly szögpontot, mely nem fekszik ugyanazon oldalon (*P, G*; *Q, R*; *T, U*) *átellenes szögpontnak*, végre két átellenes szögpont összekötő egyenesét *átlónak* nevezik. A négyoldalnak tehát van: négy oldala, hárompár átellenes szögpontja, és három átlója.

Hasonlókép a teljes négyszög vagy röviden: négyszög meg van határozva négy ugyanazon síkban fekvő pont (34. ábrában: *A, B, C, D*) által, melyek közül kettőnél több nem fekszik egyenesen. E pontok a négyszög *szögpontjainak*; két-két szögpont összekötő egyenese (*AB, AC, AD, BC, BD, CD*) *oldalnak*; két oly oldal, mely nem metszi egymást egy szögpontban *átellenes oldalnak* (*AB, CD*; *AC, BD*; *AD, BC*), végre két átellenes oldal metszőpontja (*E, F, Q*) *átlóspontnak* neveztetik.

Négy harmonikus pont szerkesztése csupán vonalzóval a teljes négyoldal következő tulajdonságán alapszik:

A teljes négyoldal bármely átlójának metszőpontjai a másik két átlóval, azon első átlón fekvő szögpontoktól harmonikusan vannak elválasztva.

Hogy ezt bebizonyítsuk, képzeljük (33. ábra) $|UP|$, $|UG|$, $|UT|$ sugarakhoz a negyedik UT-hez kapcsolt harmonikus sugarat, valamint $|TP$, $|TG|$, $|TU|$-hoz a negyedik $|TU|$-hoz kapcsolt harmonikus sugarat szerkesztve; e szerkesztett sugarak egymást PG átló azon pontjában fogják metszeni, mely Y-t P, G-től harmonikusan választja el. E sugarak azonban QR átlót is egy és ugyanazon pontban metszik, mely Z-t Q, R-től harmonikusan választja el, miért is a szerkesztett negyedik harmonikus sugarak PG és QR átlók X metszőpontján mennek át. Minthogy továbbá $RXQZ$ harmonikus helyzetű pontoknak projekcziója P-ből TU átlóra: $UYTZ$, szintén harmonikus helyzetű négy pont: a tétel a négyoldal minden átlójára nézve be van bizonyítva.

Hogy azon tételt egyszerűbben kifejezhessük, nevezzünk két pontot és két sugarat harmonikusan elválasztott elemeknek, ha a két pont harmonikusan van elválasztva azon pontoktól, mely szerint a felvett pontok összekötő egyenese a felvett sugarakat metszi, — továbbá: egy pontot és egy sugarat két pont által harmonikusan elválasztott elemeknek, ha a három pont egy egyenesben fekszik, melynek metszőpontja a sugárral az első pontot a második kettőtől harmonikusan elválasztja, — végre: egy pontot és egy sugarat két sugár által harmonikusan elválasztott elemeknek, ha a három sugár egymást egy pontban metszi, melynek összekötő egyenese a felvett ponttal, az első sugarat a másik kettőtől harmonikusan választja el.

Ennélfogva mondhatjuk:

«A teljes négyoldal bármely átlóján fekvő szögpontok, a másik két átlót harmonikusan választják el, vagy mi ugyanazt fejezi ki: a teljes négyoldal bármely átlója, a másik két átló metszőpontját, a négyoldal két pár oldalától harmonikusan választja el.»

«A teljes négyszög bármely átlóspontján átmenő oldalak, a másik két átlósponttól harmonikusan vannak elválasztva, vagy a mi ugyanazt mondja: a teljes négyszög bármely átlóspontja, a másik két átlóspont összekötő egyenesét a négyszög két pár szögpontjától harmonikusan választja el.»

Hogy a jobb oldalon álló tételt a mellette levő tétel alapján bebizonyítsuk, vegyük tekintetbe, hogy AF, EB, AE, BF négyoldal EF átlójának metszőpontja AB-vel Q-t A, B-től harmonikusan választja el, tehát $|EA|$, $|EB|$, $|EF|$, $|EQ|$ négy harmonikus sugár, és így EA, EB oldalak F, Q átlóspontoktól harmonikusan vannak elválasztva. Ugyanez kimutatható QA, QD oldalak és E, F átlóspontokra, valamint FA, FB oldalak és E, Q átlóspontokra nézve is.

Ezen tételek alapján T, U, Y ponthoz a negyedik Y-hoz kapcsolt harmonikus pontot egyedül a vonalzó használatával következőkép szerkesztjük: Y ponton át egy, T ponton át két tetszőleges egyenest huzunk, melyek egymást P, G pontokban metszik; $|UG|$, $|TP|$ és $|UP|$, $|TG|$ egyeneseknek Q és R közös pontján átmenő QR egyenes TYU-t a kivánt negyedik harmonikus pontban, Z-ben metszi.

Ha pedig $|EA|$, $|EB|$, $|EF|$ sugarakhoz akarjuk az $|EF|$-hez kapcsolt negyedik harmonikus sugarat szerkeszteni, úgy $|EF|$-nek tetszőleges, pl. F pontján át két egyenest huzunk, melyek $|EA|$, $|EB|$-t A, D ill. B, C-ben metszik; a keresett negyedik harmonikus sugár: $|AB|$ és $|DC|$ egyeneseknek Q metszőponján megy át.

50. Harmonikus pontok és sugaraknak alkalmazását láthatjuk a következő tételnél.

«Ha egy háromszög síkjának tetszőleges pontját annak szögpontjaival összekötjük, akkor az összekötő egyenesektől az oldalak által harmonikusan elválasztott sugarak a háromszög oldalait, egyenesen fekvő pontokban metszik. Ezen egyenes a felvett pont *harmonikus polárisának* neveztetik a háromszöget illetőleg.»

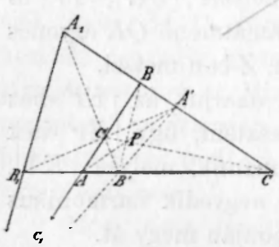
«Ha egy háromszög oldalain oly pontokat szerkesztünk, melyek a háromszög szögpontjait, egy tetszőleges egyenes és az oldalak metszőpontjától harmonikusan elválasztja, akkor a szerkesztett pontoknak összekötő egyenesei a háromszögoldalaknak átellenes szögpontjaival, egymást egy pontban metszik. E pont a felvett egyenes *harmonikus polusának* neveztetik a háromszöget illetőleg».

Hogy a baloldalon álló tételt bebizonyítsuk, nevezzük (35. ábra) a háromszög szögpontjait A, B, C-nek, a háromszög síkjának tetszőleges pontját P-nek, $|PA|$, $|PB|$, $|PC|$ egyenesek metszőpontját BC, CA, AB oldalakkal A', B', C'-nek, végre e pontoktól, a háromszög szögpontjai által harmonikusan elválasztott pontokat A_1, B_1, C_1-nek.

Minthogy $(A'A_1CB)=(B'B_1CA)=-1$:
$|A'B'|$, $|A_1B_1|$, $|BA|$ egyenesek egymást egy pontban metszik, mely tekintettel $PA'CB'$ teljes négyszögre, C'-et A, B pontokból harmonikusan elválasztja, tehát C_1 pont.

$(A'A_1CB)=(B_1B'CA)$ relaczióból és $A'B'A_1B_1$ teljes négyszögből látható, hogy nemcsak A', B', C_1, hanem B', C', A_1; C', A', B_1 pontok is egyenesben fekszenek és így $|A_1B_1C_1|$ egyenes egyszersmind harmonikus polarisa P-nek $A'B'C'$ háromszöget illetőleg.

Jegyzet. A jobb oldalon álló tételnek speciális esete a következő: a háromszög-súlyvonalai egymást egy pontban metszik (?).



35. ábra.

51. Láttuk az előbbiekben, hogy négy harmonikus helyzetű pont vagy sugár által határolt közök, illetve bezárt szögek között egyszerű relacziók léteznek, melyeknek alapján azoknak szerkesztése egyszerű módon eszközölhető. Hasonlókép lehet involucziós pont- vagy sugársorok, mint speczialis helyzetű projektiv sorok, kapcsolt elemei által határolt közök vagy bezárt szögek között egyszerű relacziókat levezetni, és azokból, ha az involucziós sorok meghatározásához elegendő elemek advák, az involucziós sorokat szerkeszteni.

Tudjuk, hogy két kapcsolt pontpár A, A_1; B. B_1 által az involucziós pontsor, és így minden C pontnak kapcsolt C_1 pontja, meg van határozva. Kell tehát, hogy az involucziós pontsor három kapcsolt pontpárja: A, A_1; B, B_1; C, C_1, — melyet *involucziót képező hat pontnak* is neveznek — bizonyos relacziók képzésére vezessen, melyek az általuk határolt közök közt léteznek.

Kiindulhatunk az involucziós pontsorok ama tulajdonságából, hogy két kapcsolt pontnak A, A_1, vagy B, B_1-nek, a középponttól M-től mért távolságai állandó szorzatot adnak, vagyis $MB \,.\, MB_1 = MA \,.\, MA_1$ egyenletből, mely így is irható:

$$(MA+AB) \,.\, (MA+AB_1)=MA \,.\, MA_1.$$

Ebből következik:

$$\begin{aligned} AB \,.\, AB_1 &= MA \,.\, (MA_1-MA-AB-AB_1) \\ &= MA \,.\, (BA_1+B_1A)=MA \,.\, (BA+B_1A_1); \end{aligned}$$

és ha ezen egyenletben A-t, A_1-gyel felcseréljük, úgy:

$$A_1B \,.\, A_1B_1 = MA_1 \,.\, (BA + B_1A_1) = MA_1 \,.\, (BA_1 + B_1A).$$

A két utóbbi egyenlet egymással osztva:

$$\frac{AB \,.\, AB_1}{A_1B \,.\, A_1B_1} = \frac{MA}{MA_1}$$

egyszerű relaczióhoz vezet.

Ha itt B, B_1 kapcsolt pontok C, C_1 által cseréltetnek fel, az egyenlet jobb oldala nem változik, és ezért

$$1. \qquad \frac{AB \,.\, AB_1}{A_1B \,.\, A_1B_1} = \frac{AC \,.\, AC_1}{A_1C \,.\, A_1C_1}$$

Ezen, involucziót képező hat pont kölcsönös távolságai között fönnálló relaczió, az előbbinek általánositása, tekintettel arra, hogy ha C, M-ben van, úgy C_1 végtelenbe kerül, vagyis $AC_1 = A_1C_1 = \infty$.

Ha 1.-ben A, A_1-et előbb B, B_1-gyel, aztán C, C_1-gyel kölcsönösen felcseréljük, úgy

$$2. \qquad \frac{BC \,.\, BC_1}{B_1C \,.\, B_1C_1} = \frac{BA \,.\, BA_1}{B_1A \,.\, B_1A_1},$$

$$3. \qquad \frac{CA \,.\, CA_1}{C_1A \,.\, C_1A_1} = \frac{CB \,.\, CB_1}{C_1B \,.\, C_1B_1}$$

egyenleteket nyerjük, melyek alakjukra nézve az előbbivel megegyeznek.

Ha az 1., 2., 3. egyenleteket így, a mint itt felírva vannak, egymással szorozzuk és a lehetséges rövidítéseket elvégezzük,

$$\left(\frac{AB_1 \,.\, BC_1 \,.\, CA_1}{A_1B \,.\, B_1C \,.\, C_1A}\right)^2 = 1$$

alakú egyenletet nyerjük, melyből

$$\frac{AB_1 \,.\, BC_1 \,.\, CA_1}{A_1B \,.\, B_1C \,.\, C_1A} = \pm 1.$$

Minthogy azonban ezen egyenlet baloldala negativ jelű lesz, ha feltételezzük, hogy C, A-val és C_1, A_1-gyel egyesül, vagyis

$$\frac{AB_1 \,.\, BA_1 \,.\, AA_1}{A_1B \,.\, B_1A \,.\, A_1A}$$

azonosan egyenlő -1-gyel, a fönnebbi egyenletben csak a negativ előjelre nézve helyes, tehát:

4. $AB_1 . BC_1 . CA_1 = AC_1 . BA_1 . CB_1$.

Hasonló három egyenletet kapunk még, ha 4.-ben A-t, A_1-gyel, aztán B-t, B_1-gyel, végre C-t, C_1-gyel felcseréljük, ezek:

$$5. \quad \begin{cases} A_1B_1 . B\,C_1 . C\,A = A_1C_1 . B\,A \;. C\,B_1, \\ A\,B . B_1C_1 . C\,A_1 = A\,C_1 . B_1A_1 . C\,B, \\ AB_1 . B\,C \;. C_1A_1 = A\,C \;. B\,A_1 . C_1B_1. \end{cases}$$

Megjegyzendő, hogy az 1.—5. egyenletek az involucziós pontsoroknak ama tulajdonságából lettek levezetve, mely az involucziós pontsorok értelmezésének is tekinthető, t. i. hogy «oly (kapcsolt) pontpárak, melyeknek egy ponttól (középpontól) mért távolságai állandó szorzatot adnak, involucziós pontsort képeznek».

Azon egyenleteket azonban levezethetjük az involucziós pontsoroknak eredetileg adott értelmezéséből is, t. i. hogy «az involucziós pontsorok kapcsolt pontjai, két, ugyanazon tartón fekvő és ellenpontokkal egyesített projektiv pontsor megfelelő pontjai».

Ha ezen tulajdonságból indulunk ki és tekintetbe veszszük, hogy a pontsor egyes pontjainak az egyik vagy másik pontsorban egy és ugyanazon pont felel meg, úgy:

$$(AA_1BC) = (A_1AB_1C_1) \text{ és } (ABA_1C_1) = (A_1B_1AC)\text{-ből}$$

egyszerűen 1. ill. 4. alatti egyenletet kapjuk. —

Hasonló egyenletek találhatók involucziós sugársor három pár kapcsolt sugara a, a_1; b, b_1; c, c_1 által bezárt szögekre nézve is:

$$(aa_1bc) = (a_1ab_1c_1) \text{ és } (aba_1c_1) = (a_1b_1ac)$$

egyenletekből, nevezetesen:

$$\frac{\sin(a\,b) . \sin(a\,b_1)}{\sin(a_1b) . \sin(a_1b_1)} = \frac{\sin(a\,c) . \sin(a\,c_1)}{\sin(a_1c) . \sin(a_1c_1)}, \text{ és}$$

$$\sin(ab_1) . \sin(bc_1) . \sin(ca_1) = \sin(ac_1) . \sin(ba_1) . \sin(cb_1),$$

melyeknek elsejéhez még két, a másodikhoz még három hasonló alkotású egyenlet tartozik.

52. Két kapcsolt elempár által meghatározott involucziós sor tetszőleges eleméhez a kapcsolt elemet csupán vonalzó segélyével lehet szerkeszteni, mert ezen feladat, minthogy *egy* megoldás van, *elsőfoku.*

A szerkesztés következő tételeken alapszik:

Minden teljes négyszög hat oldala, tetszőleges egyenes által, involucziót képező hat pont szerint metszetik, melynél az átellenes oldalok metsző pontjai, kapcsolt pontok. (Desargues-féle tétel.)*

Minden teljes négyoldal hat szögpontja, tetszőleges ponttól involucziót képező hat sugár által projicziáltatik, melynél az átellenes szögpontokat projicziáló sugarak, kapcsoltak.

Hogy ezt bebizonyítsuk, legyen

$PQRS$ szögpontok által adott négyszög (36. ábra) három átlóspontja U, V, W, és ezen pontokon átmenő PR, QS; PS, QR; PQ, SR átellenes oldalak metszőpontja t egyenessel A, A_1, B, B_1; C, C_1. Ha most a négyszög bármely oldalán, pl. QS-en, fekvő szögpontokat, átlóspontot és metszőpontot t-vel, vagyis Q, S, U, A_1 pontot a négyszög másik két szögpontjából P és R-ből, t-re projicziáljuk, úgy a projekcziók C, B, A, A_1 és B_1, C_1, A, A_1 kettősviszonya egyenlő a projicziált pontok kettősviszonyával, tehát

$(CBAA_1)=(B_1C_1AA_1)$ és mert
$(C_1B_1A_1A)=(B_1C_1AA_1)$ azért:
$(CBAA_1)=(C_1B_1A_1A)$.

$pqrs$ oldalak által adott teljes négyoldal (37. ábra) három átlója u, v, w, és ezen átlókon fekvő (p, r), (q, s); ill. (p, s), (q, r); (p, q), (s, r) átellenes szögpontok projicziáló sugara a sík tetszőleges T pontjából: a, a_1; b, b_1; c, c_1. Ha q, s oldalak metszőpontjából kiinduló q, s, u, a_1 sugarak metszőpontjait p és r-rel T-ből projicziáljuk, úgy a projicizáló sugaraknak c, b, a, a_1, ill. b_1, c_1, a, a_1-nek kettősviszonya egyenlő $(qsua_1)$-el, vagyis:

$(cbaa_1)=(b_1c_1aa_1)$, és
mert $(c_1b_1a_1a)=(b_1c_1aa_1)$, azért:
$(cbaa_1)=(c_1b_1a_1a)$.

Ezen talált egyenletek már kifejezik, hogy A, A_1; B, B_1; C, C_1; pontok és a, a_1; b, b_1; c, c_1 sugarak involucziót képeznek. — Desargues

C-hez kapcsolt C_1 pontnak szerkesztése az A, A_1; B, B_1 kapcsolt pontok által adott involucziós pontsorban ezek szerint következőkép történik: C-n átmenő tetszőleges egyenesen felveszünk két pontot P, Q-t és ezeket B, A illetve B_1, A_1-gyel összekötjük; PB, QA_1 és PA, QB_1 egyenesek közös S, R pontján átfektetett egyenes a keresett C_1 ponton megy át.

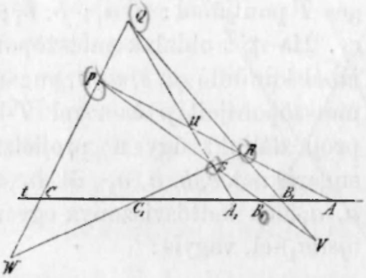
Ugyanígy történik c-hez kapcsolt c_1 sugárnak szerkesztése az a, a_1; b, b_1 kapcsolt sugarak által meghatározott involucziós sugársorban.

* Desargues Gerard, 1593—1662.

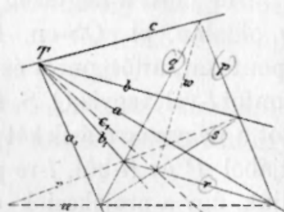
c-nek tetszőleges pontján át két egyenest p, q-t; p, a és q, b_1, valamint p, b és q, a_1 közös pontjain átmenő r, s egyenesek egymást a keresett c_1 sugáron metszik. —

Megjegyezhető még, hogy a midőn a teljes négyszög oldalait metsző t egyenes a négyszög két átlóspontján megy át, vagy a teljes négyoldal szögpontjait projicziáló sugarak két átló metszőpontjából indulnak ki, azon átlóspontok, illetve ezen átlók a metszés, illetve projicziálás által származott involucziós sorok kettőspontjai lesznek.

A fönnebbi két tétel különben egybefoglalva így is kifejezhető: *Egy tetszőleges háromszög szögpontjait síkjának bármely pontjából projicziáló sugarak involucziós fekvésűek azon pontokkal, melyek szerint egy tetszőleges, a felvett ponton át nem menő egyenes, a háromszög oldalait metszi.*



36. ábra.



37. ábra.

PQR háromszög szögpontjai S-ből $|SP|$, $|SQ|$, $|SR|$ sugarak által projicziáltatnak, mely sugarak QR, RP, PQ oldalaknak t-n fekvő pontjaival involucziós fekvésűek. — Hasonlókép pqr háromszög szögpontjai T-ből oly három sugár által lesznek projicziálva, melyek involucziós fekvésűek a háromszögoldalak és s egyenes metszőpontjaival.

Két erre vonatkozó tapasztalati eredményt említünk még itt, melynek ismerete geometriai kutatásoknál gyakran szükséges, s mely annak megítélésére szolgál, hogy *a teljes négyszög átellenes oldalai által kimetszett pontpárak, valamint a teljes négyoldal átellenes szögpontjait projicziáló sugárpárak hyperbolikus, vagy elliptikus természetű involucziós sornak kapcsolt elemei-e.* Az eredmény következő:

Ha a teljes négyszög négy szögpontja közül egyik pont sem fekszik a többi három által meghatározott háromszög kerületén belől, akkor a négyszög átellenes oldalait metsző egyenesen, e metszőponkot hyperbolikus, illetve elliptikus természetű involucziós pontsor pontpárjait határozzák meg, a szerint, a mint e szögpontok párosával, vagy páratlan számban vannak elválasztva a metsző egyenes által. Ha pedig egyik szögpont a másik három által meghatározott háromszög határán belül fekszik, akkor ellenkezőleg a páratlan számu szögpont elválasztásánál áll be a hyperbolikus, a páros számu szögpont elválasztásánál pedig az elliptikus természetű involucziós pontsor esete. A mi pedig a teljes négyoldalt illeti, látható, hogy annak oldalai a síkot tizenegy részre osztják, melyek közül három véges és nyolcz végtelen nagy. A négy oldal átlói nem hatolnak mindegyik részbe. A szerint, a mint a felvett pont, melyből a négy oldal átellenes szögpontjait projicziáljuk, oly síkrészben van, melybe az átlók bejutnak, vagy pedig egy másik síkrészben, a projicziáló sugarak hyperbolikus, illetve elliptikus sugársornak képezik kapcsolt sugárpárjait. (Függelék 2.)

53. «Egy négyszög síkjában mindig szerkeszthető oly pont, mely egy adott pontot, a négyszög átellenes oldalpárjaitól harmonikusan választ el.»

«Egy négyoldal síkjában mindig találunk oly egyenest, mely tetszőleges egyenest a négyoldal átellenes szögpontjaitól harmonikusan választ el.»

Nevezzük a négyszög szögpontjait *A*, *B*, *C*, *D*-nek, a sík tetszőleges pontját *P*-nek, és azon két sugár metszőpontját, mely *P*-t a négyszög $|AD|$, $|BC|$ és $|AC|$, $|BD|$ átellenes oldalpárjaitól harmonikuson elválasztja: *Q*-nak. $|PQ|$ egyenes a négyszög átellenes oldalait involuczióban metszi, melynek kettőspontjai *P*, *Q* pontok, mert *P*, *Q* az involucziót képező hat pont két kapcsolt pontpárjától harmonikusan van elválasztva.— Ebből következik, hogy *P*, *Q* kettőspontok, a harmadik kapcsolt pontpártól, és így a négyszög harmadik átellenes oldalpárjától is harmonikusan vannak elválasztva.

Ha *P* pont a négyszög egyik átlóspontjában van, akkor azon pont, mely tőle az átellenes oldalpárak által harmonikusan van elválasztva: a másik két átlóspont összekötő egyenesének bármely pontja. —

A jobb oldalon álló tételnek, mely hasonlókép lesz bebizonyítva, speciális esete a következő: *Egy négyoldal három átlójának felező pontjai egyenesben fekszenek.* (Gauss-Bodenmiller-féle tétel.)*

Ha ugyanis a négyoldal síkjában fekvő egyenest végtelen távol

* A négyoldal ezen tulajdonságát Gauss (1777—1855.) találta 1810-ben. Lásd: Baltzer E. Elemente d. Math. 1870. II. kötet, pag. 57.

g_∞-ben fekvőnek képzeljük, akkor a másik egyenes, mely az átellenes szögpontokat g_∞-től harmonikusan elválasztja, felezi a négyoldal átlóit.

54. Végre még a 35-dik pontban előforduló szerkesztés speciális esetének, a következő feladatnak, megoldását akarjuk tárgyalni.

«AA_1, BB_1 kapcsolt pontpárak által meghatározott involucziós pontsor azon kapcsolt pontpárja D, D_1 szerkesztendő, mely C, C_1 kapcsolt pontokat harmonikusan választja el.»

Jelenleg AA_1, BB_1, CC_1, ... involucziós pontsor és C, C_1 kettőspontokkal biró involucziós pontsornak közös D, D_1 kapcsolt pontpárját kell szerkesztenünk.

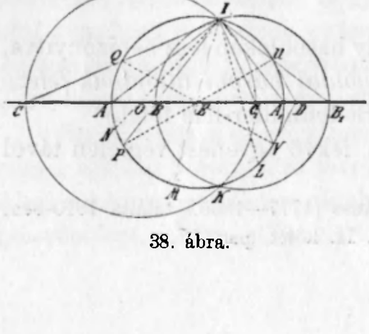
A feladatnak előreláthatólag csak akkor van valós megoldása, ha az első involucziós pontsor elliptikus; mert a harmonikus osztás megkivánja, hogy D, D_1; C, C_1-től el legyen választva és csak az elliptikus természetű involucziós pontsoroknál vannak a kapcsolt elemek egymástól elválasztva.

Ha AA_1, BB_1, CC_1 átmérők fölött köröket írunk le, úgy ezek egymást az involucziós pontsorok tulajdonsága következtében ugyanazon I, K pontokban metszik. Az I, K pontokban CC_1IK kört derékszög alatt metsző kör, a keresett D, D_1 kapcsolt pontokon megy át. —

E szerkesztés különös esetét képezi a következő általánosabbnak: «egy elliptikus természetű involucziós pontsorban oly kapcsolt pontpárt kell szerkeszteni, mely egy adott kapcsolt pontpárral adott kettősviszonyt képez».

Minthogy ily involucziós pontsor kapcsolt elemei egymást elválasztják, azért ha az adott kettősviszony négy pont által van megadva, az egymáshoz rendelt pontpáraknak egymást szintén el kell választani, ha pedig számérték —λ— által van adva, annak negativnak kell lenni.

Nevezzük az involucziós sor kapcsolt pontpárjai által határolt közök, mint átmérők fölött leirt körök metszőpontjait (38. ábra) I, K-nak, az adott pontpárt A, A_1-nek, AA_1 köz felezőpontját E-nek és szerkeszszük meg azon D pontot, melyre nézve $(AA_1ED)=\lambda$. Az AA_1IK körön, k-n, szükségkép kívül fekvő D pontból k-hoz vont érintők k-t U, V-ban érintik; IU, IV egyeneseknek B_1, C_1 metszőpontja a sor tartójával, a kivánt kap-



38. ábra.

csolt pontok egyike lesz; a másik pont IKB_1 és IKC_1 körnek B, illetve C metszőpontja a tartóval.

Hogy ezt bebizonyítsuk, nevezzük k kör UE, VE átmérőjének másik végpontját P, ill. Q-nak; mely P, Q pont PIU és QIV derékszög miatt IB, ill. IC egyenesen fekszik.

Minthogy $|UA|$, $|UA_1|$, $|UE|$, $|UD|$ és $|VA|$, $|VA_1|$, $|VE|$, VD sugaraknak kettősviszonya, a mit röviden $U(AA_1ED)$, $V(AA_1ED)$-vel szokás jelölni, egyenlő λ-val, továbbá azon sugarak által képezett szögek, k kör kerületi szögeinek tulajdonsága következtében, egyenlők $|IA|$, $|IA_1|$, $|IBP|$, $|IUB_1|$, valamint $|IA|$, $|IA_1|$, $|IQC|$, $|IVC_1|$ sugarak hajlásszögeivel, azért

$$I(AA_1BB_1)=I(AA_1CC_1)=\lambda,$$

és B, B_1; C, C_1 a keresett két pontpár, mely A, A_1 pontokkal együtt λ-val egyenértékű kettősviszonyt képez.

Megjegyezhető, hogy CIK, BIK körök k-hoz egyenlő szögek alatt hajlanak. Ha ugyanis CIK kör középpontját O-nak OI, EI egyeneseknek metszőpontját k körrel N, M-nek nevezzük, akkor OIC egyenszárú háromszögből látható, k körnek következő ívei között levő relaczió

$$IA_1 - AQ = NQ,$$

és mert

$$(MN+NA) = MA = IA_1,$$

azért

$$MN+NA-AQ = NA+AQ,$$

végre

$$MN \text{ ív} = 2AQ \text{ ív}.$$

Ugyanígy kimutatható, hogy

$$LM \text{ ív} = 2PA \text{ ív},$$

hol L azon pont, melyben BIK körnek I-n átmenő átmérője k-t metszi, és mert PA ív $= AQ$ ívvel, azért LM, MN ívek és így a fölöttük nyugvó LIM, MIN kerületi szögek, melyek BIB_1 és k, valamint CIC_1 és k köröknek hajlásszögei szintén egyenlők.

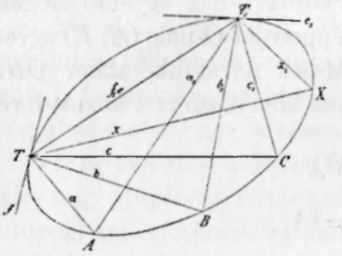
E szerint: «két kör hajlásszögeinek bármelyik felező köre a középpontokon átmenő egyenest oly pontokban metszi, melyek azon egyenesen fekvő kör-átmérők végpontjaival, egyenlő kettősviszonynyal biró pontokat képeznek».

II. FEJEZET.

A kúpszelet.

8. §. Két általános helyzetű projektiv sugársor képződménye.

55. Két ugyanazon sikban fekvő projektiv sugársor $abc\ldots$: $a_1b_1c_1\ldots$, mely különböző középponttal bir, vagy perspektiv vagy *általános* helyzetű lehet. A sugársorok általános helyzeténél (39. ábra) a megfelelő sugaraknak a, a_1; b, b_1; c, c_1;...-nek metszőpontjai nem fekszenek egyenes vonalban. De tekintettel arra, hogy perspektiv helyzetnél az egyik sugársor közvetlen egymásra következő sugarainak megfelelő sugarai szintén közvetlen következnek egymásra, mely tulajdonság független a perspektiv helyzettől, és így a megfelelő sugaraknak metszőpontjai is igen közel jutnak egymáshoz: az összes megfelelő sugarak metszőpontjai, egymásra következő pontjait képezik egy *görbe vonalnak*, melynek neve — *kúpszelet*.



39. ábra.

Minthogy a kúpszelet pontjai két projektiv sugársor megfelelő sugarainak metszéséből származnak, tehát abból képeztetnek — *a kúpszelet két általános helyzetű projektiv sugársor képződménye*. Perspektiv helyzetű sugársorok képződménye egyenes vonal, t. i. a perspektiv tengely.

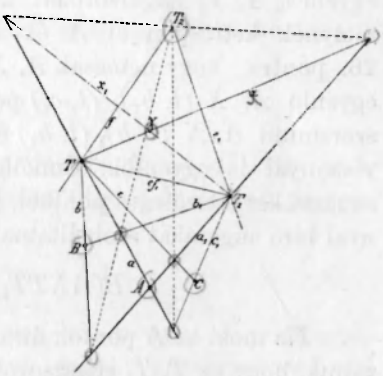
A kúpszelet azon nevezetes tulajdonsággal bir, hogy *tetszőleges egyenessel két (valós vagy képzetes) pontban metszhető*.

Hogy ezt kimutassuk, hozzuk a kúpszeletet képező projektiv sugársorokat metszéshez a felvett metsző egyenessel t-vel, mi által t-n két projektiv pontsort kapunk, melynek megfelelő pontjai: a sugársorok megfelelő sugarainak metszőpontjai t-vel. A két projektiv pontsornak azonban vagy két különvált valós, vagy két egybeeső valós, vagy két képzetes kettőspontja van, és azért a sugársoroknak legfeljebb két pár olyan megfelelő sugara van, mely egymást t-n metszi.

A kúpszelet, azon tulajdonságánál fogva, hogy egyenes által legfeljebb két pontban metszetik: *II. rendű görbe*.

A kúpszeletet képező T, T_1 sugársorok egyes sugarai általában szintén két pontban metszik a kúpszeletet. Ha T sugársor x sugarának metszőpontját a görbével, az előbb mutatott általános eljárás szerint akarjuk szerkeszteni, azt tapasztaljuk, hogy azon projektiv pontsorok, melyek szerint x — T, T_1 sugársorok által metszetik, parabolikus természetűek; de ekkor is két pont létezik x-en, melyen a sugársoroknak megfelelő sugarai átmennek. Az egyik pont ugyanis x-nek metszőpontja T_1 sugársorban x-nek megfelelő x_1-gyel, a másik pedig maga T pont, mert ez, T_1 sugársor $|T_1T| \equiv f_1$ sugarának metszőpontja, T sugársor néki megfelelő f sugarával. — Ugyanígy kimutatható, hogy T_1 sugársornak mindegyik sugara két pontban metszi a kúpszeletet, melyek közül egyik maga T_1 pont, mint T sugársor $|TT_1| \equiv e (\equiv f_1)$ sugarának metszőpontja, T_1 sugársor neki megfelelő e_1 sugarával. E szerint: *a kúpszeletet képező sugársorok középpontjai, szintén pontjai a kúpszeletnek.*

56. Hogy T, T_1 középponttal biró $a, b, c, \ldots ; a_1, b_1, c_1, \ldots$ projektiv sugársorok képződményének, a kúpszeletnek, pontjait szerkeszthessük, a projektiv vonatkozás meghatározására szolgáló a, a_1; b, b_1; c, c_1 három pár megfelelő sugárból uj megfelelő sugárpárakat kell találni; e megfelelő sugárpárak metszőpontjai: a kúpszeletnek pontjai. E végből (40. ábra) $a, b, c, \ldots$; $a_1, b_1, c_1; \ldots$ sugársorokat metszéshez hozzuk két, egymásnak megfelelő sugárral, pl. a_1, ill. a-val.


40. ábra.

E két sugáron ez által két perspektiv helyzetű projektiv pontsor származik, mert a_1, a metszőpontja a pontsorok megfelelő pontja, miért is két pár megfelelő pont (a, b_1), (a_1, b) és (a, c_1), (a_1, c) összekötő egyenesének T_2 metszőpontja, a két pontsorral perspektiv helyzetű sugársornak középpontja lesz. T sugársor tetszőleges x sugarának megfelelő x_1 sugarát, és így x, x_1-nek metszésében a kúpszeletnek X pontját, ezek után az által szerkesztjük, hogy (x, a_1) pontot T_2-ből a-ra projiciáljuk; e projekczión átmegy T_1 sugársornak x_1 sugara, mely x-et a kúpszelet X pontjában metszi. Hasonlókép található T_1 sugársor x_1

sugarának megfelelő x sugara, ha (x_1, a) metszőpont projekcziója T_2-ből a_1-re, T-vel egyenes által összeköttetik.

Ha T sugársor $|TT_2| \equiv f$ sugarának megfelelő f_1 sugarát ezen eljárás szerint akarjuk szerkeszteni, azt tapasztaljuk, hogy T_1 sugársor f_1 sugara T_1T-vel egyesül. Ennélfogva f sugár, mely T_1 sugársor T_1T sugarának felel meg, a kúpszeletet két T-ben egyesült pontban metszi. Az oly egyenes, mely valamely görbe vonalat, két végtelen közel fekvő pontban metsz, a görbe *érintőjének*, és azon két végtelen közel fekvő, vagyis összeeső metszőpont, az érintő *érintőpontjának* neveztetik. $|TT_2|$ egyenes tehát a görbe érintője T pontban. Hasonlókép kimutatható, hogy T sugársor $|TT_1| \equiv e$ sugarának megfelelő e_1 sugár T_1 sugársorban: a kúpszeletet T_1 pontban érinti. Ezért mondhatjuk: *a kúpszeletet képező sugársorok közös sugarának megfelelő sugarak az egyes sorokban, a kúpszelet érintői a sugársorok középpontjaiban.*

57. Legyen A, B, C, X négy tetszőleges pontja a kúpszeletnek, mely a kúpszeletet képező T, T_1 sugársorok a, a_1; b, b_1; c; c_1; x, x_1 megfelelő sugarainak metszéséből származott. Tudjuk, hogy $|AX| \equiv t$ egyenes, T, T_1 sugársorokat két projektiv pontsor szerint metszi, melynek kettőspontjai A és X. Ebből következik, tekintettel a 26. pontra, hogy nemcsak $A, X, (t, b), (t, c)$ pontok kettősviszonya egyenlő A, X (t, b_1), (t, c_1) pontok kettősviszonyával, hanem egyszersmind A, X $(t, b), (t, b_1)$ és $A, X, (t, c), (t, c_1)$ pontok kettősviszonyai is egyenlők. Ennélfogva ez utóbbi pontoknak projicziálósugarai két tetszőleges pontból, pl. B, ill. C-ből, egyenlő kettős viszonynyal biró sugarakat szolgáltatnak, vagyis:

$$B(AXTT_1) \barwedge C(AXTT_1).$$

Ha most az A ponton átmenő $|AX|$ egyenest oly módon változtatjuk, hogy az T, T_1 sugársorok más két egymásnak megfelelő sugár y, y_1; z, z_1; u, u_1; ... metszőpontján, vagyis a kúpszeletnek $Y, Z, U, \ldots$ pontján menjen át, akkor szintén:

$$B(AYTT_1) \barwedge C(AYTT_1),$$
$$B(AZTT_1) \barwedge C(AZTT_1),$$
$$B(AUTT_1) \barwedge C(AUTT_1), \quad \text{stb.}$$

miből következik (10), hogy:

$$B(XYZU) \barwedge C(XYZU).$$

Ha tehát a kúpszelet tetszőleges, B, C, pontját annak X, Y, Z, U pontjaival összekötjük, úgy a származtatott két B, C sugársor bármely négy sugarának kettősviszonya egyenlő, és így a sugársorok projektivek. Ennélfogva mondhatjuk: *a kúpszeletnek pontjai annak tetszőleges két pontjából, projektiv sugársorok által projicziáltatnak.* Ebből következik még, hogy *a kúpszeletet képező eredeti két projektiv sugársor T. T_1 középpontja nem lesz különös pontja a kúpszeletnek,* mert ugyanazon kúpszelet egyszersmind képződménye bármily két projektiv sugársornak, melyeknek középpontja a kúpszeleten fekszik és melyeknek három pár megfelelő sugara egymást azon kúpszeleten metszi.

58. Egy más következménye az előbbi tételnek, hogy *minden kúpszelet, öt pontja által, melyek közül tehát kettőnél több nem fekszik ugyanazon egyenesen, meg van határozva, és uj pontok, azon öt segélyével szerkeszthetők.*

Minthogy a kúpszelet öt független helyzetű pont által meg van határozva, kell hogy oly hatszög, melynek szögpontjai egy kúpszeletnek pontjait képezik, mely mint mondani szokás, a kúpszeletbe van irva, különös tulajdonsággal birjon.

Ha T, A, T_1, B, D, C, egy ily hatszögnek egymásra következő hat szögpontja, tehát (41. ábra)

$$T(ABCD) \barwedge T_1(ABCD),$$

akkor az első négy sugárnak α, B, γ, D metszőpontjai $|BD|$-vel, és a másik négy sugárnak α_1, β_1, C, D metszőpontjai $|CD|$-vel, oly pontok lesznek, melyekre nézve:

$$(\alpha B\gamma D) = (\alpha_1\beta_1 CD),$$

vagyis melyek két projektiv pontsor megfelelő pontjai. E pontsorok D-ben megfelelőleg közös ponttal birnak, tehát (14) perspektivek, és így a többi megfelelő pontoknak összekötő egyenesei: $|\alpha\alpha_1|$, $|B\beta_1| \equiv T_1B$, $|\gamma C| \equiv |TC|$, egymást egy pontban α_2-ben metszik. Ennélfogva: *a kúpszeletbe irt hatszög azon tulajdonsággal bir, hogy átellenes oldalainak metszőpontjai ugyanazon egyenesben fekszenek.* (PASCAL-féle tétel.) (Pascal Balázs, 1623—1662.)

De fordítva is lehet következtetni, hogy ha egy görbe vonalba irt bármely hatszög átellenes oldalainak metszőpontjai egyenesben fekszenek, — mely hatszöget PASCAL-féle hatszögnek nevezik, — úgy a görbének összes pontjai a görbe két pontjából projektiv sugársorok által projicziáltatnak, tehát a görbe kúpszelet.

Ha ugyanis az előbbi jelölés szerint $ATCDBT_1$, a görbébe írt egy ily hatszög, melynek átellenes oldalai egymást, egyenesen fekvő a, a_1, a_2 pontokban metszik, vagyis:

$$|AT, BD| = a, \; |AT_1, DC| = a_1, \; |T_1B, TC| = a_2$$

és

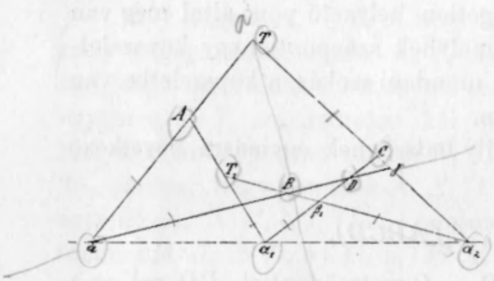
$$|T_1B, CD| = \beta_1, \; |BD, TC| = \gamma,$$

úgy a, B, γ, D-pontoknak projekciója a_2-ből $|DC|$-re: a_1, β_1, C, D, tehát:

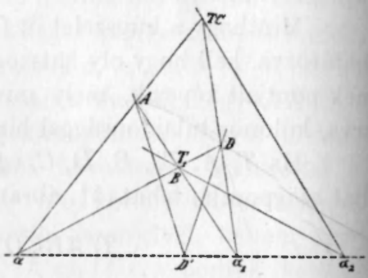
$$(aB\gamma D) \barwedge (a_1\beta_1 CD).$$

miből következik, hogy:

$$T(ABCD) \barwedge T_1(ABCD).$$



41. ábra.



42. ábra.

Ha ezután az előbbi hatszögnek $ABCD$ szögpontjai helyett más szögpontokat veszünk fel a görbén, azt látjuk, hogy ismét azon sugarak, melyek az uj pontokat T, T_1-ből projicziálják, egyenlő kettősviszonynyal birnak: tehát a görbének pontjai, tetszőlegesen választott T, T_1 pontokból projektiv sugársorok által projicziáltatnak.

A midőn a kúpszeletbe írt TAT_1BDC hatszögnek két egymásra következő szögpontja, pl. D, C végtelen közel van egymáshoz, az őket összekötő egyenes a kúpszelet *érintője* lesz, és az érintőnek azon két végtelen közel fekvő pontja, melyet a görbével közösen bir: *érintőpont.* TAT_1BC pontok által adott kúpszeletnek érintője C pontban e szerint következőkép szerkeszthető: $|TA|$, $|BC|$, valamint $|T_1B,|$ $|TC|$ egyeneseknek a', ill. a_2 metszőpontján át egyenest fektetünk, mely $|AT_1|$-et a'_1-ben metszi; $|a'_1 C|$ a keresett érintő.

Ha a kúpszeletbe írt TAT_1BDC hatszögnek C szögpontja T-vel, B pedig T_1-gyel egyesül, a hatszög (42. ábra) *négyszöggé* fajul és TC,

T_1B oldalak a kúpszelet érintői lesznek T, T_1 pontokban. De ezen érintőknek, mint az elfajult hatszög két átellenes oldalának metszőpontja a_2, jelenleg is azon egyenesen lesz, mely a hátra levő átellenes oldalak: $|AT_1|$, $|DT|$ és $|AT|$, $|DT_1|$ metszőpontjait a_1, a-át összeköti. Ugyanígy kimutatható, hogy A és D pontoknak érintői aa_1 egyenes ugyanazon D' pontján mennek át. E szerint: *a kúpszeletbe írt négyszög két szögpontjának érintői egymást a négyszög egyik átlóján metszik.*

A kúpszeletbe írt háromszög oldalai és ezen háromszög szögpontjainak érintői, szintén a kúpszeletbe írt elfajult hatszög oldalainak tekinthetők, miből következik: *a kúpszeletbe írt háromszög szögpontjainak érintői, a háromszög átellenes oldalait, egyenesen fekvő pontokban metszik.*

59. Ha a kúpszeletbe írt $ATDT_1$ négyszög D pontját és ennek érintőjét oly módon változtatjuk, hogy D a kúpszeletet leirja, és a négyszög többi szögpontjait A, T, T_1-et és azok érintőit változatlanul hagyjuk, akkor $|TD|$ és $|T_1D|$ sugarak két projektiv sugársort, az a és a_1 pontok $|AT|$ és $|AT_1|$ egyeneseken az előbbiekkel projektiv és perspektiv helyzetű pontsort, végre a megfelelő a, a_1 pontok összekötő egyenesei, a_2 középponttal biró és az a, a_1 által befutott pontsorokkal perspektiv sugársort irnak le. Minthogy D pont érintője A pont érintőjét aa_1a_2 sugárban fekvő D' pontban metszi: a mozgó D pont érintője által a szilárd A pont érintőjén kimetszett D' pontsor projektiv azon sugársorral, melyet a mozgó $|TD|$, valamint $|T_1D|$ sugár, T, ill. T_1 körül leír. Tekintve, hogy A, T, T_1 tetszőleges pontjai a kúpszeletnek, következik: *azon sugársor, mely a kúpszelet pontjait annak tetszőleges pontjából projicziálja, projektiv ama pontsorral, mely szerint a kúpszelet érintői annak bármely érintőit metszik.* A kúpszelet változó pontján átmenő sugárnak a sugársorban mindig azon pont felel meg, melyben a változó pont érintője a felvett szilárd érintőt metszi.

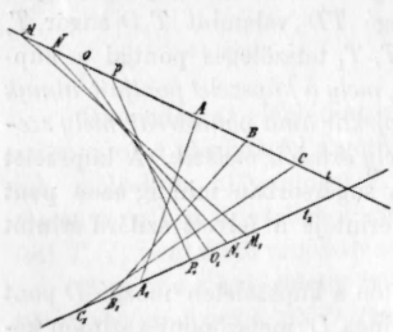
Megjegyzendő még, hogy a midőn a kúpszeleten mozgó D pont A-hoz közeledik, D és A pont érintőinek D' metszőpontja szintén közeledik A-hoz, és a midőn D, A-val egyesül, D' metszőpont szintén A-ba jut. Ennélfogva: amint a kúpszelet, vagy bármily más görbe érintője, ezen pont és a hozzá végtelen közel levő pont összekötő egyenesének tekintetik, úgy *a kúpszelet (vagy bármely más görbe) érintőjének érintőpontja: ezen érintőnek és a hozzá végtelen közel fekvő érintőnek, metszőpontja.*

Egyik következménye a föntebbi tételnek, hogy *a kúpszelet két* *tetszőleges érintője, annak többi érintőjét projektiv pontsorok szerint metszi.*

Minthogy e tétel szerint, a kúpszelet érintői annak két érintőjét, pl. t, t_1-et, két projektiv pontsorok szerint metszik, kérdezhetjük, hogy ha két tetszőleges egyenesen projektiv pontsorokat veszünk fel és annak megfelelő elemeit egyenesekkel összekötjük, valjon létezik-e oly kúpszelet, melynek a két felvett és ezen összekötő egyenesek, érintői? E kérdéssel a következő §-ban foglalkozunk.

9. §. Két ugyanegy síkban fekvő általános helyzetű projektiv pontsor képződménye.

60. Legyen ugyanazon sikban fekvő t, t_1 tartón, két projektiv pontsor $A, B, C, \ldots; A_1, B_1, C_1 \ldots$, (43. ábra) mely nem perspektiv helyzetű. Ha az ily, mint nevezni szokás, *általános* helyzetű projektiv pontsorok megfelelő elemeit $A, A_1; B, B_1; C, C_1; \ldots$-et egyenesekkel összekötjük, úgy ezek nem mennek át ugyanazon ponton, hanem egy görbe vonalat *burkolnak*, mely görbe vonalnak ezen egyenesek érintői, és *mely görbe vonal a projektiv pontsorok képződményének neveztetik.*



43. ábra.

t pontsor (43. ábra) egymáshoz közel fekvő $M, N, O, P, \ldots$ pontjainak megfelelő $M_1, N_1, O_1, P_1, \ldots$ pontok összekötő egyenesei, kis szöget képeznek egymással; azon sokszögnek (kül-) szögei, melyet ezen egyenesek alkotnak, szintén kicsinyek lesznek. Ha $M, N, O, P \ldots$, tehát egyszersmind $M_1, N_1, O_1, P_1, \ldots$ pontok, a pontsoroknak egymásra következő pontjai, úgy azon sokszögnek oldalai is végtelen kicsinyek lesznek, és így egy görbe vonalnak egymásra következő ivrészeit képezik. Minthogy MM_1, NN_1, OO_1, $PP_1, \ldots$ egyenesek, azon görbe vonalnak végtelen kis ivrészeit tartalmazzák: a görbe vonalnak érintői lesznek.

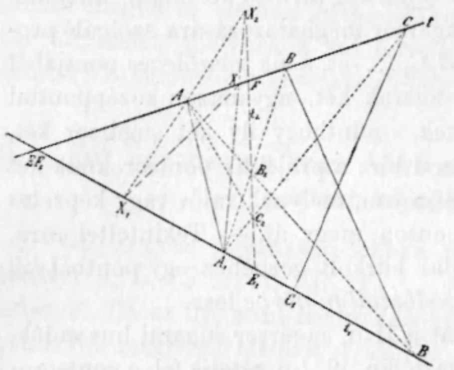
t, t_1 pontsorok megfelelő pontjainak összekötő egyeneseit: AA_1; BB_1; $CC_1; \ldots$-et szintén sugaraknak, és azok összességét *II. osztályu* *sugársornak* nevezik, megkülönböztetésül a már ismert sugársortól, melyet I. osztályu sugársornak is neveznek. Ezen elnevezés onnan származik, hogy az I. o. sugársor síkjának tetszőleges pontján át csak egy sugár huzható, mely a sugársorhoz tartozik, mig *a II. o. sugársor síkjának bármely pontján át a sugárhoz tartozó két sugár huzható.*

Ha ugyanis (44. ábra) a sugársor meghatározására szolgáló projektiv pontsorokat $ABC\ldots$, $A_1B_1C_1\ldots$-et, a sík tetszőleges pontjából projicziáljuk, úgy a projicziáló sugarak két, ugyanazon középponttal biró projektiv sugársort képeznek, s minthogy ily két sugársor két, valós, vagy képzetes, kettőssugárral bir: a projektiv pontsoroknak két oly egymásnak megfelelő pontpárja van, melynek valós vagy képzetes összekötő egyenese a felvett ponton megy át. — Tekintettel arra, hogy a II. o. sugársor sugarai által burkolt görbéhez egy pontból *két* érintő vonható: ezen görbe *másodosztályú görbe* lesz.

A midőn X pont, melyen át a II. o. sugársor sugarai huzandók, a projektiv pontsorok egyikének tartóján, pl. t-n vétetik fel, a pontsorokat X-ből projicziáló sugársorok elfajulnak parabolikus természetűvé, de ekkor is két sugár huzható X ponton át, mely a pontsoroknak megfelelő pontjait összeköti. Az egyik sugár ugyanis t tartó X pontjának pedig összekötő egyenese X-nek megfelelő X_1 ponttal t_1 tartón, a másik maga t tartó, mert ez t, t_1 egyeneseknek t_1-en fekvő F_1 metszőpontját összeköti F_1-nek megfelelő F ponttal t tartón. Ugyanígy kimutatható, hogy t_1 tartón fekvő pontok mindegyikén általában, a II. o. sugársorhoz tartozó két sugár megy át, melyek közül egyik maga t_1 tartó, mint t, t_1 egyeneseknek t-n fekvő $E(\equiv F_1)$ metszőpontját E-nek megfelelő E_1 pontjával összekötő sugár. Ebből azt látjuk, hogy *a projektiv pontsorok tartói szintén sugarai a pontsorok által meghatározott II. o. sugársornak,* vagy mi ugyanazt fejezi ki: érintői a II. o. sugársor által burkolt görbének.

61. Hogy a II. o. sugársor t tartójának tetszőleges X pontján átmenő $|XX_1|$ sugarat és az E_1, F pontokat szerkeszthessük, összekötünk két tetszőleges megfelelő pontot, pl. A, A_1-et, a projektiv pontsorok A_1, B_1, $C_1\ldots$; ill. A, B, C, elemeivel $|AA_1|$, $|AB_1|$, $|AC_1|,\ldots$, valamint $|A_1A|$, $|A_1B|$, $|A_1C|,\ldots$, sugarak által. Ezen perspektiv sugársorok perspektiv tengelye t_2, $|AB_1|$, $|A_1B|$, valamint $|AC_1|$, $|A_1C|$ egyeneseknek metszőpontja által meg van határozva. Ha ezután t-nek X pontját A_1-ből t_2-re projicziáljuk, X_2 projekcziót ismét A-ból t_1-re projicziáljuk X_1-be, úgy $|XX_1|$ a II. o. sugársor egy sugara (44. ábra).

Látszólag kivételt képeznek azon szabály alól, hogy a tartók minden pontján át a tartókon kivül még egy sugár huzható a II. o. sugársorban, a tartók $E \equiv F_1$ metszőpontjainak megfelelő E_1, F pontok. De ezen E_1, F pontokra nézve, melyek mint könnyen látható, t_2-nek metszőpontjai t, ill. t_1-gyel, a második sugár, mely a tartón kivül még huzható a II. o. sugársorban, magukkal a tartókkal esik össze. A tartók ezen különös pontjai, melyekben a II. o. sugársornak az egyes tartókhoz végtelen közel fekvő sugarai a tartókat metszik, azoknak *érintőpontjai.*



44. ábra.

A II. o. sugársor bármely sugarának pontjain át lehet még egy-egy sugarat huzni, mely a sugársorhoz tartozik; a szerkesztés, mely egy ily ponton átmenő második sugár felkereséséhez vezet, első foku, tehát csupán a vonalzó használatával eszközölhető.

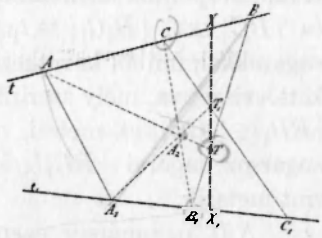
Legyen (45. ábra) $|BB_1|$ azon sugár, és T annak tetszőleges pontja. Ha mi T-t az adott projektiv pontsorokkal

$$|TA|, \; |TB|, \; |TC|, \ldots; |TA_1|, \; |TB_1|, \; |TC_1|, \ldots$$

sugarak által összekötjük, akkor a T-n átmenő második sugárnak szerkesztése abban áll: e két projektiv sugársornak, második kettőssugarát megtalálni, ha egyik kettőssugara $|TBB_1|$. Utalva 25. és 29. pontra, $|TBB_1|$ ismert kettőssugárnak B_1 pontján átmenő B_1C egyenest metszéshez hozzuk $T(A, B, C, \ldots)$ sugársorral, mely azt A_2, B_1, $C, \ldots$ pontokban metszi; a keresett második kettőssugár $A_2B_1C \ldots$ és $A_1B_1C_1 \ldots$ perspektiv helyzetű pontsorokat projicziáló sugársornak középpontján megy át, mely pont nem egyéb, mint $|A_2A_1|$, $|CC_1|$ egyenesnek T_1 metszőpontja.

Utólag is könnyen igazolható, hogy $|TT_1|$ egyenes, a projektiv pontsoroknak két megfelelő pontján megy át, ha tekintetbe vesszük, hogy a pontsorokat T és T_1-ből projicziáló $T(A, B, C, \ldots)$, $T_1(A_1, B_1, C_1 \ldots)$ projektiv sugársorok (mert három megfelelő sugárpár metszőpontja egyenesben fekszik), perspektiv helyzetűek, s mint ilyenek $|TT_1|$-ben megfelelő közös sugárral birnak, mely tehát t, t_1 tartókat megfelelő pontokban metszi.

Ha $|BB_1|$ sugár T pontját B-ben, vagy B_1-ben vesszük fel, a szerkesztés szerint a második sugár, mely BB_1-en kivül még azon ponton átmegy: t, ill. t_1 lesz. Van azonban $|BB_1|$ sugáron egy pont, melyből BB_1-en kivül nem huzható a II. o. sugársorhoz tartozó uj sugár, vagyis melyre nézve a második sugár BB_1-gyel összeesik. Ha ugyanis előbb T_1 pontot, $|CC_1|$, $|BB_1|$ metszőpontjában vesszük fel, és a hozzá tartozó T pontot az által szerkesztjük, hogy $|T_1A_1|$, $|CB_1|$ metszőpontját A-ból $|BB_1|$-re projicziáljuk, úgy *ezen* T projekczióból kiinduló második sugár, mint látható, $|BB_1|$-gyel esik egybe. Minthogy $|BB_1|$ tetszőleges sugara a II. o. sugársornak, mondhatjuk, hogy nemcsak a pontsorok tartóin, hanem *a II. o. sugársornak minden sugarán* (vagy mi ugyanaz, a sugársor által burkolt görbe minden érintőjén) *van egy pont, melyen át más sugár nem huzható a sorban.* Ezen pont, ép úgy, mint a tartón fekvő ily tulajdonságu pont, az illető sugár vagy érintő, *érintőpontjának* neveztetik, és úgy tekintendő, mint két végtelen közel fekvő sugárnak metszőpontja.



45. ábra.

62. Azonban a II. o. sugársor sugarai más tekintetben is közös tulajdonsággal birnak a tartókkal, nevezetesen: *a II. o. sugársor két tetszőleges sugarát, a sugársor többi sugarai projektiv pontsorok szerint metszik.*

Ha ugyanis A_2 pontot $|B_1C|$ egyenesen tova mozgatjuk, úgy a mozgó A_2 pont T projekcziója A-ból $|BB_1|$ sugárra, valamint T_1 projekcziója A_1-ből $|CC_1|$ sugárra, A_2-vel perspektiv, tehát egymással projektiv pontsorokat ír le; és mert két ily összetartozó pontnak, mint T, T_1-nek összekötő egyenese, a II. o. sugársornak egy sugara: ezen sugarak a tetszőlegesen választott $|BB_1|$, $|CC_1|$ sugarakat projektiv pontsorok szerint metszik.

De az előbbi (44-dik) ábrából is kimutatható ezen tulajdonsága a II. o. sugársornak.

Nevezzük e végből a II. o. sugársor $|AA_1|$, $|XX_1|$ sugarainak metszőpontját T-nek, és vegyük tekintetbe, hogy $|TAA_1|$ és $|TXX_1|$ sugarak, kettőssugarai az $A, X, B, C, \ldots; A_1, X_1, B_1, C_1, \ldots$ pontsorokat T-ből projicziáló sugársoroknak; tehát nemcsak

$$T(AXBC) \overline{\wedge} T(A_1X_1B_1C_1),$$

hanem egyszersmind:

$$T(AXBB_1) \overline{\wedge} T(A_1X_1CC_1),$$

és így

$|TA|, |TX|, |TB|, |TB_1|$ sugarak $|BB_1|$ egyenest
$|TA_1|, |TX_1|, |TC|, |TC_1|$ « $|CC_1|$ «

oly pontok szerint metszik, melyeknek kettősviszonyai egyenlők. E metszéspontok azonban a II. o. sugársor $|AA_1|$, $|XX_1|$ sugarának és $|BC| \equiv t$, $|B_1C_1| \equiv t_1$ tartóknak közös pontjai $|BB_1|$, $|CC_1|$ sugarakkal, miből következik (tekintettel 10-re), hogy azon pontok kettősviszonya, mely szerint a II. o. sugársornak bármily négy sugara $|BB_1|$, $|CC_1|$-et metszi, egymással egyenlő, vagyis hogy a II. o. sugársor sugarai $|BB_1|$, $|CC_1|$ sugarakat projektiv pontsorok szerint metszik.

A II. o. sugársor ezen tulajdonságának következménye, hogy: *a felvett projektiv pontsorok tartói, nem lesznek különös sugarai a sornak, mert annak bármely két sugara által pótolhatók,* továbbá hogy *a II. o. sugársor öt tetszőlegesen választott sugárból, melyek közül kettőnél több nem megy ugyanazon ponton át, teljesen meg van határozva, és ezekből bárhány új sugár szerkeszthető.*

63. A szerkesztés legegyszerűbben végezhető a 45. ábra szerint. Az öt adott sugár közül bármely kettőt t, t_1-nek, a többi háromnak metszőpontjait ezekkel A, B, C ill. A_1, B_1, C_1-nek nevezvén, BC_1 egyenesnek tetszőleges A_2 pontját A-ból $|BB_1|$-re, A_1-ből $|CC_1|$-re projicziáljuk; a projekcziókat T, T_1-et összekötő $|TT_1|$ egyenes, új sugara a sugársornak.

A szerkesztés egy egyszerű tételhez vezet, mely a II. o. sugársor hat tetszőleges sugarának helyzeti viszonyát fejezi ki, t. i. *a II. o. sugársor hat tetszőleges sugarából képezett hatoldalnak három főátlói* egymást egy pontban metszik. (Brianchon-féle tétel.)*

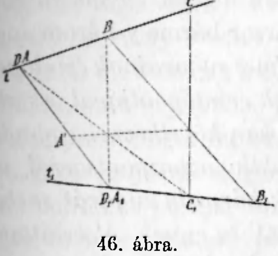
E tétel alapján bármely sugár érintőpontját szerkeszthetjük, tekintetbe véve, hogy egy sugár érintőpontja, metszőpontja ezen és a közvetlen mellette levő sugárnak. Ha (46. ábra)

* Ha ugyanazon síkban fekvő hat általános helyzetű egyenest *a, b, c, d, e, f*-fel, ezen egyenesek, vagy oldalakból képezett hatoldal oldalait ugyanazon betükkel; annak egymásra következő szögpontjait (a, b), (b, c), (c, d), (d, e), (e, f), (f, a)-lel jelöljük, akkor ezen hatoldalnak főátlói átmennek: (a, b), (d, e); (b, c), (e, f); (c, d), (f, a) átellenes szögpontokon. Oly hatoldalt, melynek főátlói egymást egy pontban metszik, *Brianchon-féle hatoldalnak* nevezik. (Brianchon született 1785-ben.)

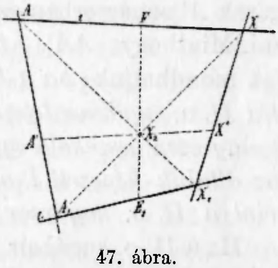
$$|AA_1|,\ t,\ |BB_1|,\ |CC_1|,\ t_1$$

sugarak közül $|AA_1|$-nek érintőpontját A'-et akarjuk szerkeszteni, és azon, valamint az $|AA_1|$-gyel egyesült $|DD_1|$ sugarat egy hatoldal egymásra következő oldalainak tekintjük, akkor az egymásra következő szögpontok: A, B, (BB_1, CC_1), C_1, A_1 és $|AA_1|$, $|DD_1|$ metszőpontja, vagyis $|AA_1|$ sugár érintőpontja. Ha tehát $|AC_1|$ és $|BA_1|$, valamint $|BB_1|$ és $|CC_1|$ metszőpontját összekötjük, úgy ezen összekötő egyenes $|AA_1|$ sugárnak érintőpontján A'-en megy át.

Ha továbbá $|CC_1|$ sugár $|BB_1|$-gyel egyesül, a hatoldal *négyoldallá* fajul, de ekkor is az egyesült $|BB_1| \equiv |CC_1|$ sugár metszőpontját, vagyis $|BB_1|$ érintőpontját B'-et, A'-tel összekötő egyenes, $|AB_1|$, $|A_1B|$ metszőpontján megy át. Ennélfogva: *a II. o. sugársor négy sugarából képezett négyoldal két-két oldalának érintőpontja, a négyoldal egyik átlóspontjával, ugyanazon egyenesen fekszik* (47. ábr.).



46. ábra.



47. ábra.

Ha végre az $|AA_1|$, t, $|BB_1|$, $|CC_1|$, t_1, $|DD_1|$ sugarakból képezett hatoldal oldalai közül

$$|AA_1| \equiv |DD_1|\text{-gyel};\quad |BB_1| \equiv t\text{-vel};\quad |CC_1| \equiv t_1\text{-gyel},$$

a hatoldal *háromoldallá* fajul. Az így elfajult hatszögnek szögpontját: $|AA_1|$, t, t_1 oldalakból álló három oldal szögpontjai, és ezen oldalak érintőpontjai; ellenben főátlói azon egyenesek, melyek a háromoldal egyes szögpontjait az átellenes oldalak érintőpontjaival összekötik. E szerint: *a II. o. sugársor tetszőleges három sugarából képezett háromoldal szögpontjait, az átellenes oldalak érintőpontjaival összekötő egyenesek egymást egy pontban metszik.* E tételből következik még, hogy: a II. o. sugársor bármely három sugarának érintőpontjai nem fekhetnek ugyanazon egyenesben.

64. Visszatérünk a II. o. sugársor $|AA_1|$, t, $|XX_1|$, t_1 sugarából képezett négyoldal előbb kimutatott tulajdonságához, mely szerint $|AA_1|$, $|XX_1|$ sugaraknak A', X' érintőpontjait összekötő egyenes (47. ábra), $|AX_1|$, $|A_1X|$ metszőpontján X_2-n megy át, megjegyezvén, hogy ugyanazon oknál fogva t és t_1 sugaraknak F, E_1 érintőpontjait összekötő egyenes X_2 ponton megy át, mely utóbbi tulajdonságot már a 44. ábrában láttuk.

$|AA_1|$, t, $|XX_1|$, t_1 sugarak közül $|XX_1|$-et oly módon változtatjuk, hogy az a II. o. sugársor minden sugarának helyzetét elfoglalja; ekkor A', F, E_1 érintőpontok állandóak maradnak, X, X_1 pontok t, ill. t_1-en, X_2 pedig $|FE_1|$ egyenesen projektiv pontsorokat írnak le. Ennélfogva az $|A'X_2| \equiv |A'X'|$ által leírt sugársor, melynek sugarai az $|FE_1|$-en mozgó X_2 pontokon és a mozgó $|XX_1|$ sugárnak X' érintőpontján mennek át szintén projektiv X és X_1 által befutott pontsorral. A mozgó $|XX_1|$ sugár minden helyzetéhez, t-n egy X pont, $|A'X'|$ által leírt sugársorban egy sugár tartozik, és mert a II. o. sugársor sugarai folytonosan következnek egymásra: $|A'X'|$ sugarak A' sugársorban szintén folytonosan fognak egymásra következni. Minthogy $|AA_1|$, t, t_1 a II. o. sugársor bármely három sugara lehet, mondhatjuk: *ha a II. o. sugársor egyes sugarainak érintőpontjait a II. o. sugársor tetszőleges sugarának érintőpontjával összekötjük, úgy ezen összekötő egyenesek folytonosan következnek egymásra, és az általuk képezett I. o. sugársor projektiv azon pontsorral, mely szerint a II. o. sugársor sugarai annak bármely sugarát metszik.*

Ha a II. o. sugársor $|AA'A_1|$ sugarát és ennek A' érintőpontját, $|BB'B_1|$ sugár és B' érintőpont által pótoljuk, úgy a mozgó $|XX'X_1|$ sugár X, X_1 pontjai által befutott pontsorok projektivek, a B' körül forgó $B'X'$ sugár által leírt sugársorral. Ennélfogva azon két sugársor, mely a mozgó $|XX_1|$ sugár X' érintőpontját A' és B'-ből projicziálja, egymással szintén projektiv. E tulajdonsága a II. o. sugársornak így fejezhető ki: *a II. o. sugársor sugarainak érintőpontjai, a sugársor két tetszőleges sugarának érintőpontjából projektiv sugársorok által projicziáltatnak.*

Minthogy a II. o. sugársor érintőpontjai, vagy mi ugyanazt jelenti, a II. o. sugársor által burkolt görbének pontjai, annak két tetszőleges pontjából projektiv sugársorokkal projicziáltatnak: *a II. o. sugársor által burkolt görbe két projektiv sugársor képződményének is tekinthető, és ezért — kúpszelet.* Viszont láttuk az előbbi §-ban, hogy a kúpszelet érintői annak tetszőleges két érintőjét projektiv pontsorok szerint metszik, tehát: *a kúpszelet érintőinek összessége, II. o. sugársornak sugarai.* —

10. §. Kúpszeletek beosztása.

65. Láttuk az előbbi §§-ban, hogy két ugyanazon síkban fekvő projektiv sugársor megfelelő sugarainak metszőpontjai, valamint két ugyanazon síkban fekvő projektiv pontsor megfelelő pontjait összekötő sugarak érintőpontjai, ha a sorok általános helyzetűek: egy és ugyanazon görbe vonalon fekszenek, melynek neve *kúpszelet.*

De a kúpszeletek speciális tulajdonságaikra nézve különbözhetnek egymástól, a szerint, a mint az őket képező sugár- vagy pontsorok különböző kölcsönös helyzettel bírnak, vagy maguk ezen sorok speciális tulajdonságuak.

A kúpszeletek rendesen végtelen távol fekvő pontjaik minősége szerint osztatnak be, és mert a sík végtelen távol fekvő pontjait, mint már említettük, egyenesen g_∞-en fekvőnek tekintjük, egyenes vonal pedig a kúpszeletet két valós és széteső (különböző), két valós de egybeeső, vagy végre két képzetes pont szerint metszheti: a kúpszeletnek 2, 1, vagy 0 valós pontja lehet végtelen távol. A kúpszelet neve azon esetben, ha két (valós) pontja van végtelen távol: *hyperbola;* ha csak egy (valós) pontja van végtelen távol: *parabola;* végre ha a kúpszelet nem bír végtelen távol fekvő valós ponttal: *ellipsis.*

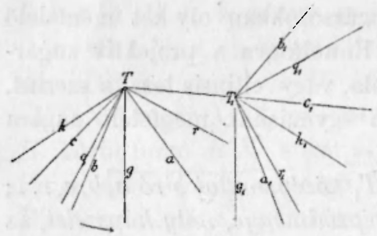
Két projektiv sugársor képződményének akkor lesz végtelen távolban fekvő pontja, ha létezik a sugársorokban oly két megfelelő sugár, mely egymással párhuzamos. Ennélfogva a projektiv sugársorok képződménye hyperbola, parabola, vagy ellipsis lesz, a szerint, a mint a sugársoroknak 2, 1, 0 számú egymásnak megfelelő sugara párhuzamos.

66. Hogy megtudjuk, valjon T, T_1 *középponttal biró* $a, b, c, \ldots$; $a_1, b_1, c_1, \ldots$ *projektiv sugársorok képződménye, mily kúpszelet,* az egyik, pl. T sugársort párhuzamosan elmozdítjuk, míg T középpontja T_1-gyel összeesik, vagy mi ugyanaz: T_1-en át T sugársor a, b, c, ... sugaraival a_2, b_2, c_2, ... párhuzamosokat huzunk. A szerint a mint T_1 középponttal biró a_1, b_1, c_1, ...; a_2, b_2, c_2, ... projektiv sugársoroknak 2, 1, 0 valós kettőssugaruk van: $a, b, c, \ldots$ és $a_1, b_1, c_1, \ldots$ sugársoroknak 2, 1, 0 számú megfelelő párhuzamos sugaruk lesz, tehát ezen sugársorok képződménye hyperbola, illetőleg parabola, vagy ellipsis.

Ismeretes az előbbiekből (27., 28.), hogy két ellenkezőleg forgó közös középpontú projektiv sugársornak mindig két valós kettőssugara van, és hogy két egyenlőkép forgó ily sugársor akkor bir két valós kettőssugárral, ha hatványsugarai egymástól nincsenek elválasztva, és mert a sugársorok párhuzamos elmozdításánál a forgás értelme nem változik, azért: *ugyanegy síkban fekvő általános helyzetű és ellenkezőleg forgó projektiv sugársor képződménye szükségkép hyperbola; továbbá két egyenlőkép forgó ily sugársor képződménye ellipsis, vagy hyperbola, a szerint a mint az egyik, illetőleg a másik sugársor hatványsugaraival tetszőleges ponton áthuzott párhuzamosak közül az első kettő az utóbbi kettőt elválasztja, vagy nem választja el egymástól; végre két egyenlőkép forgó ily sugársor képződménye parabola, ha hatványsugarai közül egy pár megfelelő párhuzamos.*

Az egyenlőkép forgó projektív sugársorok képződménye tehát ellipsis, hyperbola vagy parabola lehet, és csak a hatványsugárpárak végtelen távol fekvő pontjainak kölcsönös helyzetétől, vagyis ezeknek *irányától* függ, hogy a kúpszelet milyen természetű görbe, miért is az egyik sugársornak a középpont körül eszközlendő forgása által elérhetjük, hogy a sugársorok képződménye ellipsis, hyperbola, vagy parabola legyen.

Kiindulva az egyenlőkép forgó sugársorok azon helyzetéből, melynél két megfelelő hatványsugár, pl. g, g_1 párhuzamos, tehát a másik kettő általában nem párhuzamos, és mely helyzetnél a képződmény parabola, forgassuk az egyik, pl. T sugársort középpontja körül, mint a mellékelt 48. ábrában a nyíl mutatja. Mindaddig, míg h sugár nem lesz párhuzamos h_1-gyel, T_1-en át g, h-val párhuzamosan huzott sugarak g_1, h_1-et elválasztják, tehát a sugársorok képződménye ellipsis marad. A midőn h párhuzamos lett h_1-gyel, a képződmény ismét parabola. Tovább forgatván T sugársort eredeti helyzetéig, g, h-val T_1-en át párhuzamosan huzott sugarak g_1, h_1-et nem választják el, és így a képződmény hyperbola lesz.



48. ábra.

Ez utóbbi forgatásnál *az egymásnak megfelelő derékszög szárai párhuzamosak lesznek;* ekkor tehát a hyperbola végtelen távol levő pontjai két egymásra merőleges egyenesen fekszenek. Ily különös hyperbolát, melynek végtelen távol levő pontjai egymásra merőleges egyenesen vannak: *egyenoldalú hyperbolának* neveznek.

Ugyanezen forgatás alkalmával még előfordul azon eset, hogy a két sugársor egyszer perspektiv helyzetű lesz, akkor t. i. a midőn $T_1 T = c_1$-nek megfelelő c sugár, c_1-gyel összeesik. A kúpszelet ezen esetben *elfajul két egyenessé,* melyek közül az egyik a perspektiv tengely, a másik a közös cc_1 sugár, mert mindkét egyenesnek pontjai, a sugársorok két megfelelő sugarainak közös pontjai.

67. Két *egyenlően-projektiv* sugársornak 0, vagy 2 megfelelő párhuzamos sugara van, a szerint, a mint a sorok egyenlőkép vagy ellenkezőleg forgók; ez utóbbi esetben a megfelelő párhuzamos sugarak egymásra merőlegesek, tehát a képződmény egyenoldalú hyperbola.

A midőn az egyenlően-projektiv sugársorok egyenlőkép forgók, az általuk képezett kúpszelet két tetszőleges pontja a sorok középpontjaiból egyenlő szögek alatt projicziáltatik, tehát a kúpszelet *kör* lesz. Ezért mondhatjuk: *egyenlően-projektiv sugársorok képződménye kör, vagy egyenoldalú hyperbola, a szerint a mint a sorok egyenlőkép, vagy ellenkezőleg forgók.*

Ha a projektiv sugársorok T, T_1 középpontjai végtelen távol vannak, tehát az egyes sugársorok sugarai párhuzamosak, képződményük közönséges, vagy egyenoldalú hyperbola, a szerint a mint a sugársorok sugarai egymásra nem merőlegesek, vagy merőlegesek, mert mint tudjuk, a sorok középpontjai T, T_1, pontjai a képződött görbének. A sugársoroknak azon sugarai, melyek a végtelen távol fekvő közös sugárnak felelnek meg: a sugársorok középpontjaiban, tehát a hyperbola végtelen távol fekvő pontjaiban érintik a hyperbolát. A hyperbola végtelen távol fekvő pontjainak érintői, *asymptotáknak* neveztetnek, és ezek természetesen, más projektiv sugársorokból képezett hyperbolánál is előfordulnak.

Ha az egyik sugársor T középpontja végtelen távol, a másik T_1 pedig végesben van, akkor képződményük hyperbola, vagy parabola, a szerint a mint T_1 középponton át az előbbi sorral párhuzamosan 2
vont sugárnak megfelelő sugara, véges vagy végtelen távol van. —

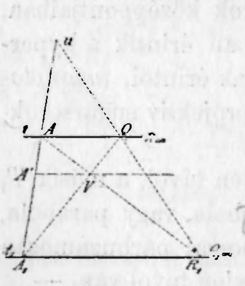
68. Vizsgáljuk most meg, hogy *két projektiv pontsor képződménye, a sorok mily helyzeténél vagy specialis tulajdonságánál lesz az egyik, vagy másik kúpszelet?*

Parabolának, az értelmezés szerint, két egybeeső végtelen távol fekvő pontja van, tehát a sík végtelen távol fekvő egyenese érinti a parabolát. Mint minden más érintője a parabolának, úgy ezen végtelen távol fekvő érintő is a pontsorok tartóit megfelelő pontokban metszi. Ha tehát a pontsorok képződménye parabola, úgy azoknak végtelen távol fekvő pontjai megfelelők, vagyis a pontsorok hasonlóan-, vagy egyenlően-projektivek. Ennélfogva: *két ugyanazon síkban fekvő hasonlóan-, vagy egyenlően-projektiv pontsor képződménye parabola.*

Ugyanazon oknál fogva, mert a sík végtelen távol fekvő egyenese a parabola érintője: *két ugyanazon síkban fekvő projektiv pontsor képződménye parabola, ha az egyiknek tartója végtelen távol fekszik.*

69. Más két, ugyanazon síkban fekvő projektiv pontsor képződménye csak hyperbola, vagy ellipsis lehet, és hogy melyike ezen görbéknek lesz burkolva a pontsorok megfelelő pontjait összekötő sugarak, vagyis a II. o. sugársor által, attól függ: van-e oly sugár a II. o. sugársorban, melynek érintőpontja végtelen távol fekszik?

Könnyen kimutatható, hogy ha a projektiv pontsorok sem hasonlóan — sem pedig egyenlően — nem projektivek, úgy a II. o. sugársor minden sugarával párhuzamos sugár létezik a sorban. Ha ugyanis az első pontsor ellenpontján át a második pontsor tartójával párhuzamost huzunk, úgy ez a pontsorok két megfelelő pontját köti össze, tehát ez a II. o. sugársornak azon sugara, mely a második pontsor tartójával párhuzamos, és mert a felvett pontsorok, bármely két sugáron a többi sugártól kimetszett pontsorokkal pótolhatók, azért *a II. o. sugársor minden sugárhoz található párhuzamos sugár a sorban.* — Hogy a II. o. sugársor által burkolt görbe természetét megvizsgáljuk, vegyük fel először azon esetet, a melynél a pontsorok tartói t, t_1 párhuzamosak (49. ábra) és nevezzük a projektiv pontsorok ellenpontjait Q, R_1-nek; egy pár megfelelő pontot A, A_1-nek. Minthogy Q, R_1 a sorok végtelen távol fekvő közös $Q_{1\infty}$, R_∞ pontjainak felelnek meg, a tartók Q és R_1-ben érintik a kúpszeletet. $|AA_1|$ sugár érintőpontját azon tétel (63.) alapján szerkeszthetjük, «hogy a kúpszelet körülírt háromszög (vagy a mi ugyanaz: háromoldal) szögpontjait, az oldalak érintőpontjaival összekötő egyenesek, egy ponton mennek át». Ennélfogva $|QA_1|$ és $|R_1A|$ egyenesek V metszőpontján át t-vel párhuzamos egyenes AA_1-et A' érintőpontban metszi. Ezen A' pont, tekintve QVR_1R_∞ négyoldalt, $|AA_1|$, $|QR_1|$ egyenesek U metszőpontját, A, A_1-től harmoniku-



49. ábra.

san választja el. A szerint tehát, a mint $|AA_1|$ sugár $|QR_1|$ egyenest QR_1 közön kívül, vagy belül metszi: A' érintőpont AA_1 közön belül, vagy kívül lesz, és csak ez utóbbi esetben juthat A' végtelen távolba. Az U metszőpont helyzete a párhuzamos tartókon fekvő projektiv pontsoroktól függ, még pedig ha a pontsorok ellenkezőleg haladók, tehát Q és R_1-től jobbra, valamint balra fekvő részei felelnek egymásnak: U pont mindig QR_1 közön kívül fekszik; ha pedig a pontsorok egyenlőkép haladók, úgy U pont mindig QR_1 közön van. «Párhuzamos tartókon fekvő projektiv pontsorok megfelelő pontjait összekötő sugarak által burkolt görbe tehát ellipsis, vagy hyperbola, a szerint, a mint a pontsorok ellenkezőleg, vagy egyenlőkép haladók. Azon esetben, a midőn a görbe hyperbola, annak asymptotái (a végtelen távol fekvő pontok érintői), a pontsorok megfelelő hatványpontjait összekötő sugarak.»

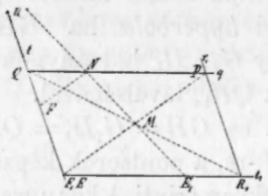
A tétel utolsó része könnyen belátható, ha megfontoljuk, hogy G, H és G_1, H_1 hatványpontok Q, ill. R_1-től egyenlő távolságra vannak, tehát GG_1, HH_1, QR_1 közök közös metszőpontja M, egyszersmind azoknak felezőpontja, és hogy ezért G, G_1; valamint H, H_1-től M által harmonikusan elválasztott pont: $|GG_1|$, $|HH_1|$ sugaraknak végtelen távol fekvő érintőpontja. Ebből látható egyszersmind, hogy a burkolt görbe *egyenoldalú hyperbola*, ha $|GG_1|$, merőleges $|HH_1|$-re, vagyis ha G, H és így G_1, H_1 hatványpontok távolsága egymástól, egyenlő az ellenpontok QR_1, távolságával.

Ha a pontsorok *ellenkezőleg* haladók és $GH = G_1H_1 = QR_1$, továbbá QR_1 egyenes merőleges $GH \parallel G_1H_1$-re, a pontsorok képződménye azon *kör*, mely a tartókat Q, R_1 pontokban érinti. A kör ugyanis ama tulajdonsággal bír, hogy két párhuzamos érintőről egy változó érintő által lemetszett részek szorzata, egyenlő a kör-küllő négyzetével, és ha X, X_1 a pontsorok két megfelelő pontja, akkor a pontsorok jelen helyzeténél $QX \,.\, R_1X_1 = \overline{GQ}^2 = \left(\frac{QR_1}{2}\right)^2 =$ a pontsorok hatványával.

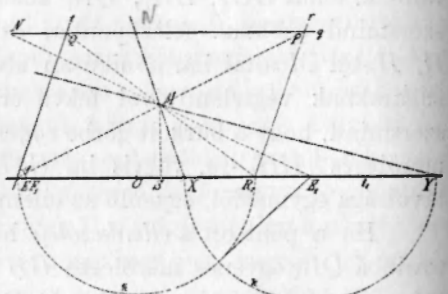
70. Áttérünk most azon általános eset megvizsgálásához, melynél a pontsorok tartói nem párhuzamosak.

Legyen (50. ábra) t, t_1 két ily tartó, Q, R_1 azoknak ellenpontja; q, r_1 azon két sugár, mely Q, ill. R_1-en át t_1, ill. t-vel párhuzamosan halad, P ezeknek metszőpontja, végre E_1, t_1 tartónak érintőpontja. A projektiv vonatkozás ezek által meg van határozva, mert $Q_{1\infty}$, R_1, E_1-nek megfelel Q, $R_{1\infty}$, és a tartóknak E metszőpontja.

q sugár érintőpontja N ezen adatokból könnyen megtalálható, és nem más (47. ábra), mint t, t_1, q, r négyoldal QR_1, EP átlóinak M közös pontján, és az adott E_1 érintőponton átmenő ME_1 egyenesnek metszőpontja q-val. Ha már most t_1 és q egyeneseket tekintjük, úgy E_1 és N érintőpontok: t_1, q tartókon fekvő projektiv pontsoroknak ellenpontjai, míg R_1, P, és $E \equiv F_1$, Q más két megfelelő pontpár. Az előbb tárgyalt esetet szem előtt tartva: a II. o. sugársor által burkolt görbe ellipsis, vagy hyperbola lesz, a szerint a mint $|QE| \equiv t$ sugár érintőpontja F, QE közön belül, vagy kívül fekszik. Ez azonban t_1 érintőpontjának, E_1-nek helyzetétől függ. Ha ugyanis E_1 pont F_1R_1 közön belül van, úgy N is QP közön belül lesz, tehát NE_1 és QE metszőpontja U által Q, E-től harmonikusan elválasztott F érintőpont QE közön belül lesz, és a kúpszelet ellipsis. Az ellenkező esetben, a midőn E_1, F_1R_1 közön kívül fekszik, F is EQ közön kívül fog lenni, és a kúpszelet hyperbola. E szerint: *Két projektiv pontsor képződménye ellipsis, vagy hyperbola, a szerint, a mint az egyik, tehát egyszersmind a másik tartónak érintőpontja, a tartók metszőpontja és azok ellenpontja által határolt közön belül, vagy kívül fekszik.*



50. ábra.



51. ábra.

A midőn a görbe hyperbola, annak asymptotáit megkapjuk, ha t_1 tartó E_1 érintőpontjából k kört írunk le (51. ábra), mely R_1F_1-en átmenő tetszőleges $\varkappa$ kört derékszög alatt metszi, és t_1, k metszőpontjait X, Y-ot M-mel egyenesek által összekötjük. Ezen metszőpontok ugyanis t_1 és q-n képzelt projektiv pontsoroknak t_1-en fekvő hatványpontjai, mert

$$\overline{E_1X}^2 = E_1R_1 \,.\, E_1E = E_1R_1 \,.\, NP,$$

hol N, E, a q, t_1 tartókon levő projektiv pontsorok ellenpontja, P, R_1 pedig két megfelelő pont.

71. E körülményből könnyen levezethető azon relaczió, melynek bekövetkeztével, t, t_1 tartón fekvő projektiv pontsorok képződménye *egyenoldalú hyperbola*. Ha M-ből t_1-re bocsátott merőlegesnek talppontját S-sel, R_1E felezőpontját O-val, t, t_1 hajlásszögét φ-vel jelöljük és tekintetbe vesszük, hogy egyenoldalú hyperbola esetében:

$$\overline{E_1M}^2 = \overline{E_1X}^2 = E_1R_1 \,.\, E_1E,$$

úgy E_1R_1M háromszögből:

$$\overline{MR_1}^2 + \overline{E_1R_1}^2 + 2E_1R_1 \,.\, R_1S = \overline{E_1M}^2 = E_1R_1 \,.\, E_1E,$$

miből

$$\overline{MR_1}^2 = E_1R_1\,(E_1E - E_1R_1 - 2R_1S) = E_1R_1 \,.\, 2\,(R_1O - R_1S) = E_1R_1 \,.\, 2 \,.\, SO,$$

és mert

$$EQ \cos\varphi = 2OM \cos\varphi = 2 \,.\, OS,$$

azért:

$$\overline{MR_1}^2 = E_1R_1 \,.\, EQ \cos\varphi.$$

Ezen egyenletből látható, hogy «ha az adott t, t_1 tartón levő projektiv pontsorok hatványa $E_1R_1 \,.\, EQ$, szorozva a tartók hajlásszögének cosinusával, egyenlő a tartókon fekvő ellenpontok féltávolságának négyzetével: úgy a pontsorok képződménye egyenoldalú hyperbola».

Hasonlókép levezethető azon relaczió, melynél t, t_1 tartókon levő pontsorok képződménye *kör*. Ekkor ugyanis, tekintve azon esetre, melynél a tartók párhuzamosak voltak, megkivántatik (69. pont végén), hogy t_1 tartó E_1 érintőpontján és M-en átmenő ME_1 egyenes merőleges legyen t_1-re, és azonkivül:

$$\overline{E_1M}^2 = E_1R_1 \,.\, F_1E_1 \,.$$

De minthogy (52. ábra) a körnél:

$$F_1E_1 = FE = QE - QF = QE - E_1R_1,$$

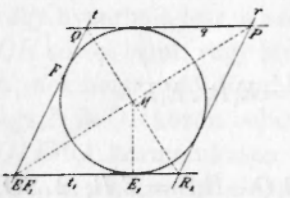
$$\overline{E_1M}^2 = E_1R_1 \,.\, QE - \overline{E_1R_1}^2,$$

vagy

$$\overline{MR_1}^2 = E_1R_1 \,.\, QE.$$

«Ha tehát t, t_1 tartókon fekvő projektiv pontsorok hatványa egyenlő a tartókon fekvő ellenpontok féltávolságának négyzetével, és a tartók érintőpontjai a metszőpontoktól egyenlő távolságra vannak, a metszőpont és az ellenpont által határolt közön: úgy a pontsorok képződménye kör».

72. Vizsgáljuk végre meg azon képződményeket, melyeket kapunk, ha t tartót a rajta fekvő pontsorral önmagában tova mozgatjuk, míg t_1 tartón az előbbivel projektív pontsor változatlan marad. Kiindulva azon helyzetből, melynél t érintőpontja F, Q ellenpont és $E \equiv F_1$ metszőpont között fekszik, és melynél a kúpszelet ellipsis, mozgassuk t-t oly módon, hogy F érintőpontja és így t_1-nek is érintőpontja közeledjék F_1-hez. Mindaddig míg F nem kerül E_1-be a kúpszelet ellipsis marad. Azon esetben, a midőn F egyesül F_1-gyel, t_1 érintőpontja is F_1-be esik, a pontsorok perspektiv helyzetűek lesznek, és az egyes sugarak mind ugyanazon ponton, a pontsorokat projicziáló középponton T-n mennek át. De



52. ábra.

közös FF_1 ponton átmenő egyenesek is két megfelelő pont F, F_1 az összekötő egyenesének tekinthetők, tehát ekkor a II. o. sugársor két, T, és $F \equiv F_1$ középponttal biró I. o. sugársorrá bomlik és képződménye, vagyis a sugarak által burkolt görbe: T és $F \equiv F_1$ pontból áll.

A midőn t-t ezen helyzetéből önmagában tova mozgatjuk, F érintőpont F_1 metsző- és Q ellenpont által határolt közön kívül, t_1 érintőpontja, F_1R_1 közön kívül (R_1-től balra) marad, és a kúpszelet hyperbola lesz. E mozgás alkalmával Q pont F_1-be, t_1 érintőpontja $Q_{1\infty}$-be jut, és ezen esetben t_1, a hyperbola egyik asymptotája lesz.

Tovább mozgatva t-t a képződmény mindig hyperbola marad, és t_1 érintőpontja most jobbról közeledik R_1-hez, anélkül, hogy R_1-et elérné, mert ekkor t végtelen távol fekvő R_∞ pontjának kellene F_1-be jutni.

Megjegyezhető még, hogy ha a projektiv pontsorok tartói egymást az ellenpontokban metszik, úgy a képződmény hyperbola, melynek asymptotái maguk a tartók lesznek.

11. §. A kúpszeletek polártulajdonságai.

73. Az 58. és 63. pont alatt tanultunk egy tételt a kúpszeletbe írt négyszög, és kúpszelet körül írt négyoldalról, mely így fejezhető ki: «ha (53. és 55. ábra)

$$ABCD \text{ és } IKLN$$

valamely kúpszeletbe írt négyszög, ill. kúpszelet körül írt négyoldal, mely utóbbinak

$$|IK|,\ |KL|,\ |LN|,\ |NI|$$

oldalai a kúpszeletet a négyszög A, B, C, D szögpontjaiban érintik, akkor egyrészt a négyszög és négyoldal átellenes oldalainak metszőpontjai:

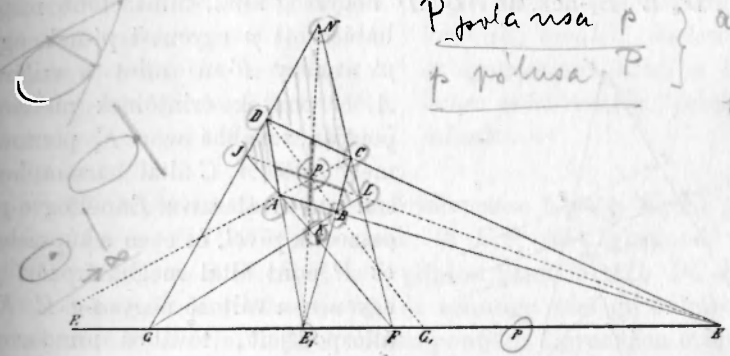
$$(AB,\ CD) \equiv E,\ (AD,\ BC) \equiv E_1,\ (IK,\ LN) \equiv F,\ (KL,\ IN) \equiv G,$$

ugyanazon p egyenesen fekszenek, másrészt a négyszög és négyoldal átellenes szögpontjait összekötő

$$|AC|,\ |BD|,\ |IL|,\ |KN|$$

egyenesek ugyanazon P ponton mennek át».

P polárisa p
p pólusa P
a kúpszelet által meghatározva



53. ábra.

A négyszög és négyoldal ezen tulajdonságához még az is hozzájárul, hogy $IKLN$ négyoldal IL, NK átlói $ABCD$ négyszögnek E, E_1 átlóspontjait tartalmazzák. Tekintve ugyanis

$$|IN|,\ |LN|,\ |IK|$$

kúpszelet-érintőket, melyek

$$|LN|,\ |IN|,\ |IK|,\ |KL|,\ldots$$

kúpszelet érintők által projektiv pontsorok szerint metszetnek:

$$(NDIG) \barwedge (CNFL) \barwedge (FIAK),$$

és így

$$(NDIG) \barwedge (NCLF), \text{ és } (NDIG) \barwedge (KAIF),$$

tehát $|IL|$ egyenes, $|DC|$ és $|GF|$-nek E metszőpontján,
$|NK|$ « $|AD|$ « $|GF|$-nek E_1 «

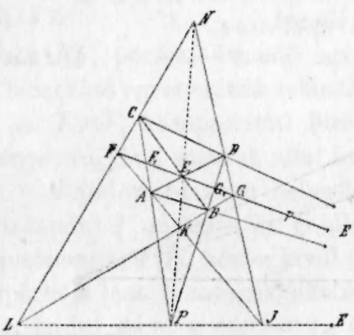
megy át.

Mindezekből következik: p egyenes és P pont a négyszög és négyoldalt illetőleg azon helyzettel bír, hogy a négyszög két-két átellenes szögpontja és a négyoldal két-két átellenes oldala által harmonikusan van elválasztva. Ha mi most először $ABCD$ négyszög B, D szögpontjait oly módon változtatjuk, hogy azok mindig a kúpszeleten maradjanak és összekötő egyenesük P ponton menjen át, akkor a változó négyszögoldalaknak és a változó B, D pontok érintőinek metszőpontjai:

$$(AB, CD) \equiv E, \ (AD, BC) \equiv E_1, \ (KL, IN) \equiv G,$$

a változatlan helyzetű p egyenesen maradnak.

Nevezzük ugyanis B, D, E, E_1 pontokat az új helyzetek egyikében B', D', E', E'_1-nek, az $AB'CD'$ négyszög által, mint előbb meghatározott p egyenest p'-nek, úgy p' átmegy F-en, mint a szilárd A, C pontok érintőinek metszőpontján, továbbá azon F_1 ponton, mely P-től A, C által harmonikusan van elválasztva. Ennélfogva p' összeesik p-vel, és ezen a kúpszelet és P pont által meghatározott p egyenes, a változó négyszög E, E_1 átlóspontjait, továbbá mindazon G_1 pontokat tartalmazza, melyek P-n átmenő BD kúpszelet-húrok végpontjait P-től harmonikusan elválasztják, végre azon G pontokat, melyben a változó BD húr végpontjainak érintői egymást metszik.



54. ábra.

Ha másodszor a kúpszelet körül írt $IKLN$ négyoldal IN, KL oldalait oly módon változtatjuk, hogy azok egymást a szilárd p egyenesen messék és a kúpszeletet érintsék, akkor a változó négyoldal átellenes szögpontjait, és a változó érintők érintőpontjait összekötő $|IL|$, $|KN|$, $|BD|$ egyenesek ugyanazon P ponton mennek át.

P pont ugyanis a négyoldal változatlan IK, LN oldalainak A, C érintőpontjait összekötő $|AC|$ egyenesen, és még azon egyesen fekszik, mely p-től $|IK|$, $|LN|$ oldalak által harmonikusan van elválasztva.

Ezen a kúpszelet és p egyenes által meghatározott P ponton átmennek mindazon egyenesek, melyek p pontjaiból a kúpszelethez vont érintőpáraktól p által harmonikusan vannak elválasztva, továbbá ezen érintőpárak érintő-húrjai, végre a változó négyoldal $|IL|$, $|KN|$ átlói is.

A kúpszelet és P pont által az előbbiek szerint meghatározott p egyenes: *P pontnak polárisa* a kúpszeletet illetőleg; ellenben a kúpszelet és p egyenes által meghatározott P pont, *p egyenesnek pólusa* a kúpszeletet illetőleg. E vizsgálódás eredményét e szerint így foglalhatjuk össze:

Egy pont polárisa mindazon pontokat tartalmazza, melyek a ponton átmenő kúpszelet-húrok végpontjait, vagy röviden mondva, *kúpszelet-húrokat, a ponttól harmonikusan elválasztják; továbbá mindazon pontokat, melyekben a felvett ponton átmenő kúpszelet-hurok végpontjainak érintői egymást metszik.*	*Egy egyenes pólusa mindazon egyeneseknek metszőpontja, melyek az egyenes pontjaiból a kúpszelethez vont érintőpárakat, az egyenestől harmonikusan elválasztják; továbbá metszőpontja, az egyenes pontjaiból a kúpszelethez vont érintők, érintő-húrjainak.*

74. A pólus és poláris ezen értelmezése folytán E, E_1 pontoknak polárisai E_1P, EP egyenesek, és E_1P, EP egyenesek polusai E, E_1 pontok, mert pl. E_1P, az E ponton átmenő AB, DC húrokat E-től harmonikusan választja el, és szintúgy átmegy e húrok végpontjaiban vont érintők K, N metszőpontján. Ugyanazon értelmezésből folyik, hogy *a kúpszelet tetszőleges pontjának polárisa, azon pont érintője,* mert a ponton átmenő összes húrok végpontjainak érintői egymást azon érintőn metszik, és viszont *a kúpszelet érintőjének pólusa, az érintőpont.*

Ha most ismét, mint előbb, a kúpszeletbe írt $ABCD$ négyszög B, D szögpontjait oly módon változtatjuk, hogy a változó BD húr P ponton menjen át, úgy a változó E, E_1 átlóspontok bármelyikének polárisa P-n és a másik átlósponton megy át, és ezen átlóspontok befutják p egyenest. Ennélfogva: *egy tetszőleges*

ponton átfektetett egyenesek pólusai, azon pont polárisán vannak.	*egyenes pontjainak polárisai átmennek azon egyenes pólusán.* —

A kúpszelet síkjában fekvő két oly pontot, melyek közül az egyiknek polárisa a másikon megy át, tehát viszont a másodiknak polárisa az első pontot tartalmazza: a kúpszeletet illetőleg *kapcsolt polus*-nak, és a kúpszelet síkjában fekvő oly két egyenest, melyek közül bármelyiknek pólusa, a másikon fekszik: a kúpszeletet illetőleg *kapcsolt polárisnak* nevezik. E szerint: egy pont polárisán fekvő bármely pont, a felvett ponthoz a kúpszeletet illetőleg kapcsolt pólus, és egy egyenes pólusán átmenő tetszőleges egyenes a felvett egyeneshez a kúpszeletet illetőleg kapcsolt poláris.

A kúpszeletbe írt $ABCD$ négyszögnek E, E_1, P átlóspontjai közül bármely kettő kapcsolt polus, és a kúpszelet körül írt $IKLN$ négyoldalnak IL, NP, GF átlói közül bármely kettő kapcsolt poláris a kúpszeletet illetőleg. — A kúpszelet érintőjének bármely pontja kapcsolt az érintőponthoz, és a kúpszelet bármely pontján átmenő egyenes kapcsolt azon pont érintőjéhez.

75. Hogy p egyenesen fekvő, vagy P ponton átmenő kapcsolt pólus-, illetőleg polárisokról fogalmat szerezzünk magunknak, változtassuk ismét a kúpszeletbe írt $ABCD$ négyszög B, D szögpontjait úgy, hogy összekötő egyenesük AC-nek P pontján menjen át, és nevezzük B, D szögpontokat, valamint E, E_1 kapcsolt pontokat, mint a változó négyszög átlóspontjait az új helyzetek egyikében B', D', E', E_1'-nek. Ha most tekintetbe veszszük, hogy a kúpszelet A, D, C, D' . . . pontjai A és C-ből projektiv sugársorok által projicziáltatnak:

$$A(FDCD'\ldots) \barwedge C(ADFD'\ldots),$$

tehát

$$(FE_1F_1E_1'\ldots) \barwedge (F_1EFE'\ldots),$$

mely egyenlet azt fejezi ki, hogy

$$F, F_1;\ E, E_1;\ E', E_1'$$

pontpárak, valamint

$$|PF|, |PF_1|;\ |PE|, |PE_1|;\ |PE'|, |PE_1'|$$

sugárpárak, involucziós soroknak kapcsolt elemei.

Ebből következik: *tetszőleges*

egyenesen fekvő és a kúpszeletet illetőleg kapcsolt pólusok, involucziós helyzetű pontsort képeznek; továbbá: egyenesen fekvő pontsor polárisai, a pontsorral involucziós helyzetű, tehát projektiv, sugársort képeznek, melynek középpontja, a pontsor tartójának pólusa.

ponton átmenő kapcsolt polárisok involucziós sugársort, továbbá egy sugársor sugarainak pólusai a sugársorral involucziós helyzetű, és így projektiv pontsort képeznek, melynek tartója, a sugársor középpontjának polárisa.

A midőn p egyenes a kúpszeletet két valós pontban metszi, és a változó BD húr a metszőpontok egyikén átmegy, azon metszőpontban a harmonikus osztás miatt a változó húr két végpontja B, D és a négyszög két átlóspontja E, E_1 egyesül. A változó BD húr ekkor a metszőpont érintője, és a metszőpont maga, két összeeső kapcsolt pólus lesz. Ha ellenben p nem metszi a kúpszeletet valós pontokban, úgy $ABCD$ változó négyszög E, E_1 átlóspontjai nem eshetnek egybe.

Ennélfogva: *valamely*

egyenesen fekvő és a kúpszeletet illetőleg kapcsolt pólusok által képezett involucziós pontsor hyperbolikus elliptikus, vagy parabolikus, a szerint a mint az egyenes a kúpszeletet két valós, vagy képzetes pontban metszi, vagy pedig érinti; a kúpszelet és az egyenes közös pontjai képezik az involucziós pontsor kettőspontjait.

ponton átmenő és kúpszeletet illetőleg kapcsolt polárisok által képezett involucziós sugársor hyperbolikus elliptikus, vagy parabolikus, a szerint a mint a pontból a kúpszelethez két valós, vagy képzetes érintő vonható, vagy pedig a pont maga a kúpszeleten fekszik; a ponton átmenő kúpszelet-érintők képezik az involucziós sugársor kettőssugarait.

Ha a kúpszelet síkjának azon részét, melyből a kúpszelethez két valós érintő vonható: *a kúpszeleten kívül fekvőnek*, a másikat: *a kúpszeleten belül fekvőnek* nevezzük: úgy egy ponton átmenő és a kúpszeletet illetőleg kapcsolt polárisok, valamint a pont polárisán levő és a kúpszeletet illetőleg kapcsolt pólusok hyperbolikus, vagy elliptikus természetű involucziós sort képeznek, a szerint, a mint a pont a kúpszeleten kívül, vagy belül fekvő síkrészen van, és így a pont polárisa a kúpszeletet, valós vagy képzetes pontokban metszi.

A kúpszeleten kívül fekvő rész bármely pontjának polárisa a kúpszeletet azon valós pontokban metszi, melyben a ponton átmenő kúpszelet-érintők azt érintik, és viszont; a kúpszeletet valós pontokban metsző egyenes pólusa, a metszőpontok érintőinek közös pontja.

76. Ha egy háromszög P, E, E_1 szögpontjai valamely kúpszeletet illetőleg páronként kapcsolt pólusok, akkor mindegyik szögpont polárisa, a másik két szögpont összekötő egyenese, és így a háromszög oldalai páronként kapcsolt polárisok. Oly háromszög, melynek szögpontjai és így oldalai egy kúpszeletet illetőleg kapcsoltak: *kapcsolt háromszögnek* vagy *polárháromszögnek* neveztetik.

Egy polárháromszög szögpontjai közül kettő a kúpszeleten kívül, egy azon belül fekszik, és így oldalai közül kettő a kúpszeletet valós, egy pedig képzetes pontpárban metszi. Egy polárháromszög szerkesztésénél ugyanis, annak egyik szögpontját tetszőlegesen vehetjük fel, a másik két szögpont pedig az elsőnek polárisán fekvő két tetszőleges kapcsolt pontpár. Ha tehát a polárháromszög első szögpontja a kúpszeleten kívül lett felvéve, úgy azon szögpont polárisa a kúpszeletet valós pontokban metszi, és így azon polárison fekvő kapcsolt pólusok közül egy a kúpszeleten kívül, egy pedig belül lesz. Ha pedig az első szögpont a kúpszeleten belül lett felvéve, úgy polárisa a kúpszeletet nem metszi valós pontokban, miért is ezen polárison fekvő bármely két kapcsolt pólus, mint a polárháromszög másik két szögpontja, a kúpszeleten kívül lesz.

A polárháromszög még egyszerűbben szerkeszthető következő tétel alapján.

A kúpszeletbe írt tetszőleges négyszög átlóspontjai, egy polárháromszög szögpontjai,	*A kúpszelet körül írt tetszőleges négyoldal átlói, egy polárháromszög oldalai,*

mert az előbbiek szerint, az átlóspontok, illetőleg átlók, kapcsolt pólus és polárisok, a kúpszeletet illetőleg.

77. Térjünk ismét vissza a kúpszeletbe írt $ABCD$ négyszöghez, melynek szerkesztését oly módon képzelhetjük, hogy tetszőleges P ponton át két tetszőleges egyenest AC, BD-t húzunk, és metszőpontjait a kúpszelettel egyenesek által összekötjük. Minthogy $ABCD$ négyszög E, E_1 átlóspontjai P polárisán, p-n, kapcsolt pólusok lesznek, és P-n átmenő BD húr változása következtében a változó AB, AD oldalak p-t a változó négyszög E, E_1 átlóspontjaiban, tehát mindig kapcsolt pólusokban metszik, végre minthogy a kapcsolt pólusok p-n involucziós pontsort (75.) képeznek mondhatjuk:

Ha egy tetszőleges ponton átmenő kúpszelet-húrok végpontjait a kúpszelet bármely pontjából projicziáljuk; a projicziáló sugarak involucziós sugársort képeznek, mely hyperbolikus vagy elliptikus a szerint, a mint a felvett pont a kúpszeleten kívül vagy belül fekszik.	*Ha egy tetszőleges egyenes pontjaiból a kúpszelethez érintőket húzunk, úgy ezek a kúpszelet bármely érintőjét involucziós pontsor szerint metszik, mely hyperbolikus vagy elliptikus a szerint, a mint az egyenes a kúpszeletet valós vagy képzetes pontokban metszi.*

A jobb oldalon álló tételnek helyes volta szintén könnyen belátható. Ha ugyanis $IKLN$ négyoldal $|IN|$, $|KL|$ oldalait úgy változtatjuk, hogy azok a kúpszeletet érintsék és egymást p-n messék, úgy a változó $|IP|$, $|KP|$ kapcsolt polárisok involucziós sugársort, és I, K pontok involucziós pontsort irnak le. Mindkét tétel meg is fordítható, t. i.:

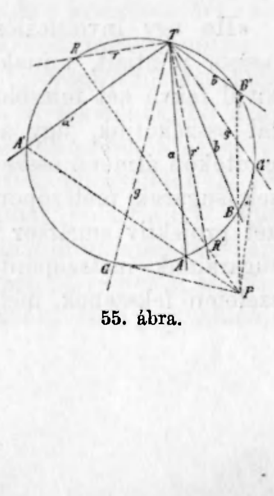
«Ha egy tetszőleges involucziós sugársor középpontja valamely kúpszeleten fekszik, úgy ezen involucziós sugársor kapcsolt sugarainak (második) metszőpontjait összekötő egyenesek, egy ponton mennek át. Ezen pont a kúpszeleten kívül vagy belül fekszik, a szerint a mint a felvett sugársor hyperbolikus vagy elliptikus.»

«Ha a kúpszelet valamely érintőjében fekvő involucziós pontsor kapcsolt pontjaiból a kúpszelethez érintőket húzunk, úgy ezeknek metszőpontjai egyenesen fekszenek, mely a kúpszeletet valós vagy képzetes pontokban metszi, a szerint a mint a felvett pontsor hyperbolikus vagy elliptikus.»

Hogy ezt bebizonyítsuk, nevezzük az involucziós sugársor középpontját A-nak, két pár kapcsolt sugár metszőpontját a kúpszelettel B, D; B', D'-nek, végre BD, $B'D'$ húr közös pontját P-nek. P-n átmenő húrok végpontjait A-ból projicziáló sugársor involucziós; ez az adott involucziós sugársorral két pár kapcsolt sugarat AB, AD; AB', AD'-et közösen bir, miért is az utóbbi sornak minden sugárpárja összeesik az adott sorral, és így az összes sugárpárok és a kúpszelet metszőpontját összekötő egyenes, P ponton megy át.

Ha P a kúpszeleten kívül fekszik, akkor nem minden P-n átmenő szelő metszi a kúpszeletet valós pontokban, ezért *a hyperbolikus involucziós sornak képzetes kapcsolt elempárjai is vannak.*

E tétel alapján könnyű egy involucziós sugársor tengelyeit, kettőssugarait (ha azok valósak), továbbá két ugyanazon középponttal biró involucziós sugársor közös kapcsolt sugárpárját szerkeszteni. Ha ugyanis a sornak T középpontján át kört fektetünk, mely az involucziós sugársor meghatározására szolgáló a, a'; b, b' sugárpárt A, A'; B, B' pontokban metszi, úgy az AA', BB' egyenesek P metszőpontján átmenő körátmérő RR' végpontjai és P-n átmenő kör-érintők G, G' érintőpontjai, T-ből a sugársor r, r' tengelyei, illetőleg g, g' kettőssugarai által projicziáltatnak. Ha továbbá a második involucziós sugársor a_1, a_1'; b_1, b_1' kapcsolt sugárpárjai a kört A_1, A_1'; B_1, B_1' pontokban



55. ábra.

metszik és A_1A_1', B_1B_1' egyenesek közös pontja P_1, úgy a két involucziós sugársor közös kapcsolt sugárpárja PP_1 egyenes és a kör valós vagy képzetes metszőpontjain megy át (55. ábra).

78. A kapcsolt pólus és polárisokról egyszerű úton bebizonyítható következő tétel:

A kúpszeletbe írt háromszög két oldalának metszőpontjai a harmadiknak polusán átmenő egyenessel: kapcsolt pólusok a kúpszeletet illetőleg.

Azon sugarak, melyek a kúpszelet körül írt háromszög két szögpontját a harmadiknak polárisán fekvő tetszőleges pontból projicziálják: kapcsolt polárisok a kúpszeletet illetőleg.

A kúpszeletbe írt ABD háromszög AB, AD oldalait metszéshez hozzuk BD-nek polusán G-n átmenő tetszőleges p egyenessel E, E_1-ben. Minthogy p egyenes BD-nek pólusán megy át, p-nek polusa P, rajta fekszik BD-n, és ha AP-nek második metszőpontját a kúpszelettel C-nek nevezzük, úgy $ABCD$ négyszög átlóspontjai közül egyik P lesz, a másik kettő pedig P-nek polárisán tartozik feküdni, — miért is E és E_1 gyel összeesik.

A tétel így is kifejezhető:

«Ha a kúpszeletbe írt háromszög egyik szögpontja a kúpszeleten mozog, úgy a változó oldalak, az állandó oldal pólusán átmenő tetszőleges egyenest (kapcsolt pólusokban, tehát) involucziós pontsor szerint metszik.»

«Ha a kúpszelet körül irt háromszög egyik oldala a kúpszeletet érintőleg mozog, úgy a változó szögpontok, az állandó szögpont polárisának bármely pontjából involucziós sugársor által projicziátatnak.»

De fordítva is következik, hogy:

«Ha egy involucziós pontsor összes pontjait, annak tartóján kívül fekvő két tetszőleges ponttal összekötjük, úgy a kapcsolt pontokon átmenő összes egyenesek (sugarak) metszőpontjai, mint két projektiv sugársor megfelelő sugarainak metszőpontjai: kúpszeleten fekszenek, mely átmegy

«Ha egy involucziós sugársor összes sugarait két tetszőleges egyenessel metszéshez hozzuk, akkor két-két megfelelő kapcsolt sugár metszőpontjait összekötő egyenesek: kúpszeletet burkolnak; e kúpszelet a két egyenest érinti, és erre vonatkozólag a sugársor középpontja és a két egyenes a két felvett ponton, és melyre vonatkozólag a két pont összekötő egyenese és a pontsor tartója kapcsolt poláris, az involucziós pontsor kapcsolt pontjai pedig kapcsolt pólusok.»

metszőpontja, valamint a sugársor kapcsolt sugarai, kapcsolt pólus, illetőleg polárisok.»

79. Az előbbi tételből folyik, hogy végtelen sok polárháromszög szerkeszthető, melynek szögpontjai egy kúpszeletbe írt háromszög oldalain fekszenek, vagy melynek oldalai egy a kúpszelet körül irt háromszög szögpontjain mennek át.

De fordítva is következik, hogy végtelen sok háromszöget lehet egy kúpszeletbe irni, melynek oldalai egy polárháromszög szögpontjain átmennek, vagy mint mondani szokás, mely egy polárháromszög körül van írva; és végtelen sok háromszöget lehet a kúpszelet körül és egy polárháromszögbe írni.

Nevezzük ugyanis a polárháromszög szögpontjait P, E, E_1-nek, a kúpszelet tetszőleges pontját A-nak, AE, AE_1 metszőpontjait a kúpszelettel B, D-nek. Ha BD egyenesnek polusát E_1-gyel egyenes által összekötjük, úgy ez AB-t, E_1-hez kapcsolt pontban metszi, de AB-n E_1-hez kapcsolt pont csak egy létezik, mert E_1 polárisa AB-t csak egy pontban metszheti, t. i. E-ben, és így mert BD-nek polusa EE_1-en fekszik, BD átmegy EE_1-nek polusán P-n. Ugyanígy bizonyíttatik be a tétel második része.

Ezen bebizonyításból az is következik, hogy ha két egymást a kúpszeleten metsző egyenes egyikének pontjait a másikon fekvő és hozzá kapcsolt pólusaival egyenesek által összekötjük, úgy ezek I. o. sugársort képeznek. E tétel általánosítása így hangzik:

«Ha két egyenes nem metszi egymást k kúpszeleten és az egyik egyenes pontjait a másik egyenesnek az előbbihez k-t illetőleg kapcsolt pólusaival egyenesek által összekötjük, úgy ezen összekötő sugarak, k' kúpszeletet burkolnak, mely a felvett két egyenest érinti. A felvett egyenesek bármelyikének k-ra vonatkozó pólusán átmenő kapcsolt polárisok, kapcsolt

«Két állandó ponton átmenő és k kúpszeletre vonatkozólag kapcsolt polárisok metszőpontjai, a két állandó ponton átmenő új kúpszeleten k'-n fekszenek, ha azon állandó pontok összekötő egyenese nem érinti a kúpszeletet. A két állandó pont polárisán k által indukált involucziós pontsor kapcsolt elemei, k'-re nézve is kapcsolt pólusok, és a két állandó polárisok egyszersmind k'-re nézve is, és a felvett egyenesek metszőpontjának polárisa k és k' kúpszeletet illetőleg egy és ugyanazon egyenes.»

ponton átmenő egyenes pólusa mindkét kúpszeletet illetőleg, egy és ugyanazon pont.»

Az első egyenesen, t-n fekvő A, B, C, ... pontsor ugyanis, e pontoknak k-ra vonatkozó polárisai által képezett sugársorral involucziós helyzetű s mint ilyen projektív, tehát a sugársor metszése a második t_1 egyenessel, vagyis a második egyenesen fekvő és az elsőnek pontjaihoz k-t illetőleg kapcsolt A_1, B_1, C_1 ... pólusai, az elsővel szintén projektivek. De két projektív pontsor megfelelő elemeit összekötő egyenesek I. o. vagy II. o. sugársort képeznek, a szerint a mint a tartók metszőpontja egymásnak megfelelő vagy nem. Jelen esetben t, t_1 metszőpontja P, nem lesz egymásnak megfelelő, mert a metszőpont nem fekszik k kúpszeleten, tehát polárisa nem megy át a metszőponton, és így a megfelelő kapcsolt pontok összekötő egyenesei egy k' kúpszeletet burkolnak. Azt látjuk továbbá, hogy ha t-nek pólusán T-n átmenő két tetszőleges k-ra nézve kapcsolt poláris t-t E, F-ben, t_1-et megfelelőleg F_1, E_1-ben metszi, úgy: $|EE_1|$, $|FF_1|$ sugarak érintői k'-nek; miből következik, tekintve k' körül írt EFF_1E_1 négyoldalt (76.), hogy azon kapcsolt polárisok, k'-re nézve is kapcsolt polárisok lesznek. Ha végre meggondoljuk, hogy t, t_1 egyeneseknek érintőpontjai k'-tel, t, t_1 metszőpontjához, P-hez kapcsolt pólusok k-t illetőleg következik, hogy P pontnak k-ra vonatkozó polárisa, polárisa egyszersmind P pontnak k'-re nézve is. —

Ha még tekintetbe vesszük, hogy

$$|AA_1|,\ |BB_1|,\ |AB| \equiv t,\ |A_1B_1| \equiv t_1$$

egyenesek, k' körül írt négyoldalnak oldalai, melynek tehát $|AB_1|$, $|A_1B|$ átlói egymást $|AB|$, $|A_1B_1|$ érintők érintő-húrján, p-n metszik, és ezen p-n fekvő metszőpont P_1, k-t illetőleg kapcsolt pólus P-hez, mondhatjuk: ha A, A_1; B, B_1 pontok kapcsolt pólusok valamely kúpszeletet illetőleg, akkor $|AB|$, $|A_1B_1|$ és $|AB_1|$, $|A_1B|$ egyeneseknek P, P_1 metszőpontjai szintén kapcsoltak azon kúpszeletre nézve, vagy más szóval:

Ha egy négyoldal két pár átellenes szögpontja kapcsolt pólus valamely kúpszeletet illetőleg, úgy a harmadik pár átellenes szög-

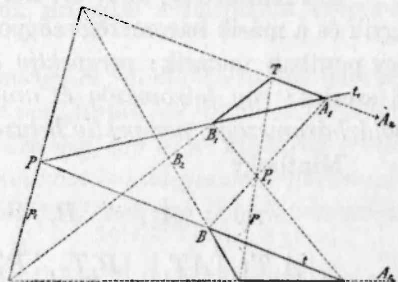
Ha egy négyszögnek két pár átellenes oldala valamely kúpszeletet illetőleg kapcsolt poláris, akkor a harmadik pár át-

pont szintén kapcsolt lesz. (Hesse-féle tétel). (Hesse O. L. 1811—74.)*

ellenes oldal szintén kapcsolt lesz.

Ugyanígy bizonyíttatik be ezen és az előbbi tételnek jobb oldalán levő tétel is, ha csak az adott egyeneseken levő kapcsolt pólusok helyett, az adott pontokon átmenő kapcsolt polárisokat veszszük figyelembe.

80. Ezekkel kapcsolatban, még más, a kúpszeletre vonatkozó tételek könnyen leszármaztathatók.



56. ábra.

Ha az utóbb leírt ábrában t, t_1-nek p-n fekvő pólusait k-t illetőleg T, T_1-nek nevezzük, azt látjuk, hogy ABT_1 háromszög szögpontjai- és oldalainak polárisai, ill. pólusai, A_1B_1T háromszögnek oldalai, ill. szögpontjai. De előbb bebizonyítottuk, hogy $|A_1B|$, $|AB_1|$ egyenesek, $p \equiv |TT_1|$ egyenesen jutnak metszéshez, tehát

$$ABT_1, \; B_1A_1T$$

háromszögek oly helyzetűek, hogy

$$A, B_1; \; B, A_1; \; T_1, T$$

szögpontokat összekötő egyenesek egy ponton P_1-en mennek át. Ezen

$$|AB_1|, \; |BA_1|, \; |T_1T|$$

egyenesek pólusai nem egyebek, mint az ABT_1, B_1A_1T háromszögek

$$|BT_1|, |A_1T|; \; |AT_1|, |B_1T|; \; |AB|, |B_1A_1|$$

oldalainak metszőpontjai; és mert azon egyenesek egy ponton P_1-n mennek át, azért pólusai, vagyis e metszőpontok, ugyanazon egyenesen p_1 fekszenek. Minthogy ABT_1 háromszög k kúpszeletre nézve egészen tetszőleges, a talált eredmény így fejezhető ki: egy tetszőleges háromszög szögpontjainak és oldalainak polárisai, ill. pólusai valamely kúpszeletet illetőleg, egy és ugyanazon háromszögnek — a *felvett háromszög* úgynevezett *polár-háromszögének* — oldalai és szög-

* E tétel irodalmára vonatkozó részletes jegyzék található Fritz Hofmann, «Die Constructionen doppelt berührender Kegelschnitte» Teubner. 1886, czímű könyv 73. lapján.

pontjai; és viszont ez utóbbi háromszög polárháromszöge: az eredeti háromszög. A felvett- vagy a polár-háromszög szögpontjainak összekötő egyenesei az átellenes oldalak pólusaival: egy ponton mennek át, és a felvett- vagy polár-háromszög oldalainak metszőpontjai az átellenes szögpontok polárisaival: ugyanazon egyenesen fekszenek, mely egyenes pólusa az előbbi pontnak.

Két háromszög, mely oly helyzetű mint a találtak, t. i. hogy az egyik és a másik háromszög szögpontjait összekötő egyenesek egymást egy pontban metszik: *perspektiv helyzetű* háromszögnek neveztetik. E szerint: *egy háromszög és annak bármely kúpszeletre vonatkozó polárháromszöge, perspektiv helyzetű.* (Függelék 3.)

Minthogy

$$A, \quad A_1, \quad B, \quad B_1 \text{ pontoknak polárisai,}$$

$$|A_1T|, |AT_1|, |B_1T|, |BT_1| \text{ egyenesek: az}$$

$$|AA_1|, \quad \text{és} \quad |BB_1| \text{ egyeneseknek pólusai}$$

$$|A_1T|, |AT_1|, \quad \text{és} \quad |B_1T|, |BT_1| \text{ egyeneseknek } A_2, \text{ ill. } B_2$$

metszőpontjai. E szerint AA_1A_2, BB_1B_2 háromszögek külön-külön polárháromszögek k kúpszeletre nézve, mert a háromszögek egyes szögpontjainak polárisai az átellenes oldalok.

De tekintve, hogy $AA_2A_1B_1B_2B$, Pascal-féle hatszög, mert átellenes oldalai:

$$|AA_2|\equiv|AT_1|, \; |B_1B_2|\equiv|TB_1|; \; |A_2A_1|\equiv|A_1T|, \; |B_2B|\equiv|BT_1|;$$
$$|A_1B_1|, |AB|$$

egymást p egyenesen metszik, és $AT_1BB_1TA_1$, Brianchon-féle hatoldal, mert főátlói

$$|AB_1|, |T_1T|, |BA_1|,$$

mint előbb láttuk, ugyanazon P_1 ponton mennek át, és azon hatszög szögpontjai, valamint ezen hatoldal oldalai, AA_1A_2, BB_1B_2 polárháromszögnek szögpontjai, illetve oldalai, mondhatjuk:

Egy kúpszelet két tetszőleges polárháromszögének

szögpontjai, egy új kúpszeleten fekszenek. Továbbá: ha egy kúpszelet átmegy egy másik kúpszeletre vonatkozó polárháromszög	*oldalai, egy új kúpszeletnek érintői. Ha egy kúpszelet egy másik kúpszeletre vonatkozó polárháromszög oldalait érinti; akkor a*

szögpontjain, akkor az első kúpszelet. a másik kúpszeletre vonatkozó végtelen sok polárháromszögnek szögpontjait tartalmazza.

második kúpszeletre vonatkozó végtelen sok polárháromszög oldalai érinteni fogják az első kúpszeletet.

Ez utóbbi tétel onnan következik, hogy egy polárháromszögnek egyik szögpontját egész tetszőlegesen, annak második szögpontját az elsőnek polárisán bárhol fölvehetjük, mi által a harmadik szögpont teljesen meg van határozva.

81. A kúpszelet polártulajdonságaira vonatkozó fontos tétel így hangzik: *egy tetszőleges k kúpszelet pontjainak és érintőinek polárisai, ill. pólusai egy másik $\varkappa$ kúpszeletet illetőleg, egy új k′ kúpszelet érintői és pontjai lesznek; k kúpszeletre vonatkozó tetszőleges polárháromszög szögpontjainak polárisai $\varkappa$-at illetőleg: k′-nek egy polárháromszögét képezik.*

Ezt bebizonyítandó képzeljük, hogy k, képződménye két projektív sugársornak, melynek T, T_1 középpontja, k-n fekszik, és melynek $\varkappa$-ra vonatkozó polárisa t, t_1. — k kúpszelet P pontjának $\varkappa$-ra vonatkozó polárisa azon p egyenes, mely TP, T_1P egyenesek t és t_1-en fekvő pólusait összeköti. De minthogy k-t képező két projektiv sugársor sugarainak t, t_1-en fekvő pólusai, a sugársorokkal és így önmaguk között is projektív (74.) pontsorok lesznek: a k-n változó P pont polárisai $\varkappa$-át illetőleg, t, t_1-et két projektiv pontsorban metszik, és ezért egy k' kúpszeletet burkolnak. Minthogy továbbá két pont összekötő egyenesének pólusa valamely kúpszeletet illetőleg, a két pont polárisának metszőpontja, azért k érintőjének, mint k-n két végtelen közel fekvő pont összekötő egyenesének pólusa $\varkappa$-t illetőleg: k' két végtelen közel fekvő érintőjének metszőpontja, — vagyis k'-nek egy pontja.

A tétel második részének helyes volta azonnal látható, ha tekintetbe vesszük, hogy k kúpszeletbe írt négyszög átlós- és szög-pontjainak polárisai $\varkappa$-át illetőleg, k' kúpszelet körül irt négyoldal átlói és oldalai.

k kúpszelet számos tulajdonsága e tétel alapján átvihető k'-re. Így a Pascal-féle tételből, mely így hangzik: «k-ba irt hatszög átellenes oldalainak metszőpontjai, egyenesen fekszenek», következik Brianchon tétele, t. i.: «k' körül írt hatoldal átellenes szögpontjait összekötő egyenesek (főátlók), egy ponton mennek át».

A hatszög: oldalai, szögpontjai, és átellenes oldalak metszőpontjainak $\varkappa$-ra vonatkozó pólus és polárisai ugyanis, a hatoldal: szögpontjai, oldalai, és az átellenes szögpontokat összekötő egyenesek, s

7*

minthogy a hatszög átellenes oldalainak metszőpontjai egyenesben fekszenek, a hatoldal főátlói ezen egyenes pólusán, tehát egy ponton, mennek át. Tekintve, hogy k' egy tetszőleges kúpszelet lehet, a menynyiben k'-ből k is szerkeszthető, mondhatjuk: ha a Pascal-féle tétel minden kúpszeletre érvényes, úgy a Brianchon-féle tétel szintén érvényes lesz.

k' kúpszeletről, vagy bármely pont és egyenesekből álló idomról, melynek egyenesei és pontjai, egy k idom pontjainak, és egyeneseinek $\varkappa$-ra vonatkozó polárisai és pólusai azt mondjuk, hogy k-nak *reciprok-polár,* vagy röviden *polár* idoma, $\varkappa$ *alap-, polarizáló-* vagy *vezérlő* kúpszeletre vonatkozólag; a két idom között fönnálló vonatkozást, *reciprok-polár vonatkozásnak,* és oly tételt, melyet valamely ismert tételből a reciprok-polár vonatkozás alapján képezni lehet, az ismert tétel *dualis tételének* nevezik.

Az előbbiekben két-két dualis tételt többnyire egymás mellé helyeztük, hogy a *reciprocitás elvére* a figyelmet előre felköltsük.

Síkidomok reciprok-polár vonatkozása e szerint abban nyilvánul, hogy *az egyik idom minden pontjának és azon ponton átmenő egyenesnek, a másikban egy egyenes és azon fekvő pont felel meg.* Ez képezi egyszersmind értelmezését az általános reciprok vonatkozásnak, melylyel később találkozunk. — A következőkben az egyes tételeknek megfelelő dualis tételeket csak helyenként fogjuk bebizonyítani.

12. §. Kúpszeleten fekvő projektiv sorok.

82. A kúpszeletek projektiv tulajdonsága alapján, projektiv és involucziós sorokról egyszerű úton tételek vezethetők le, melyekből látható, hogy mikép lehet egy involucziós sort közönséges sorra, vagy két involucziós sort egymásra projektiv vonatkoztatni. E végből szükséges a következő értelmezéseket előre bocsátani.

Ha valamely sugársor középpontja T, kúpszeleten fekszik, és annak $a, b, c, \ldots$ sugarai a kúpszeletet másodízben $A, B, C, \ldots$ pontokban metszik, akkor ezen a kúpszeleten fekvő $A, B, C, \ldots$ pontsort, $|TA|, |TB|, |TC|, \ldots$ sugársorral projektivnek és ezenkívül perspektivnek nevezzük. Két ugyanazon vagy különböző kúpszeleten fekvő $A, B, C, \ldots; A_1, B_1, C_1, \ldots$ pontsort projektivnek nevezünk, ha azon sugársorok, melyek e két pontsort az illető kúpszelet pontjaiból projiciálják: projektivek.

Hasonlókép lehet egy kúpszelet érintőiből képezett II. o. sugársort projektiv vonatkoztatni azon pontsorra, mely szerint a sugársor elemei egy tetszőleges szilárd sugarát a sornak, vagyis egy szilárd kúpszelet-érintőt metszenek; továbbá lehet két ily II. o. sugársort, legyenek azok egy és ugyanazon kúpszelet, vagy két különböző kúpszeletnek érintői, projektivnek tekinteni, ha azon sugarak az illető sornak egy szilárd sugarát oly pontsorok szerint metszik, melyek projektivek. —

Kúpszeleten fekvő két projektiv pontsor involucziós is lehet, ha t. i. ezen pontsorokat a kúpszelet egyik pontjából projicziáló sugársorok is involucziós helyzetű projektiv sugársorok.

Ezen értelmezések alapján egy kúpszelet pontjai és érintőire lehet egy

egyenesen fekvő pontsort projektiv vonatkoztatni, ha a pontsort a kúpszelet tetszőleges pontjából a kúpszeletre projicziáljuk; a projekcziókból álló pontsor projektiv az egyenesen levő pontsorral,	sugársort projektiv vonatkoztatni, ha a sugársort a kúpszelet tetszőleges érintőjével metszéshez hozzuk és e metszőpontokból a kúpszelethez érintőket huzunk; az érintőkből képezett II. o. sugársor projektiv a felvett sugársorral,

mert a közvetítő sor mindig perspektiv az eredeti és a leszármaztatott sorral.

83. Kúpszeleten fekvő involucziós pontsorról a 77. pont alatt tanultunk egy tételt, mely ezen értelmezések folytán így fejezhető ki: «kúpszeleten fekvő involucziós pontsor kapcsolt pontpárjait összekötő egyenesek egy ponton mennek át» és forditva «egy ponton átmenő összes szelők a kúpszeletet involucziós pontsor szerint metszik». Ezen pontot, melyben a kúpszeleten fekvő involucziós pontsor kapcsolt pontpárjait összekötő egyenesek egymást metszik, valamint annak polárisát ezentúl: *az involucziós pontsor pólus, illetve polarisának* fogjuk nevezni. E szerint: *ha* A, A_1; B, B_1; C, C_1; ... *pontpárak, valamely kúpszeleten fekvő involucziós pontsornak kapcsolt pontpárjai, akkor a kapcsolt pontpárak összekötő egyenesei* $|AA_1|$, $|BB_1|$, $|CC_1|$, ... *az involucziós pontsor pólusán, P-n, mennek át és az* $|AB_1|$, $|A_1B|$; $|AC_1|$, $|A_1C|$; $|BC_1|$, $|B_1C|$; ... *valamint* $|AB|$, $|A_1B_1|$; $|AC|$, $|A_1C_1|$; *stb. egyenesek metszőpontjai, egy és ugyanazon egyenesen, t. i. P-nek polárisán p-n fekszenek. Az involucziós pontsor valós vagy képzetes kettőspontjai, p polárisnak valós vagy képzetes metszőpontjai a kúpszelettel.*

A kúpszeletbe irt AA_1BB_1, AA_1CC_1, BB_1CC_1,... négyszögek átlósháromszögei, melyek a kúpszeletnek polárháromszögei: P-ben közös szögponttal birnak, tehát a nevezett $|AB_1|$, $|A_1B|$; stb. egyenesek metszőpontjai P-nek polárisán p-n fekszenek.

Az involucziós pontsor kettőspontjai az egyes kapcsolt pontpárakat itt is harmonikusan választják el, mert ha A, A_1 egy ily pontpár I, K pedig a pontsor két kettőspontja, hol $|AA_1|$ átmegy IK egyenesnek pólusán P-n, úgy $|IA|$, $|IA_1|$, $|IK|$, $|IP|$ sugarak a pólus és poláris értelmezése folytán harmonikusak és ezért AA_1KI pontok, melyek a kúpszelet I, tehát bármely pontjából harmonikus sugarak által projicziáltatnak, harmonikusak.

Azon tulajdonságból folyólag, hogy $|IK|$ pólusa rajta fekszik $|AA_1|$ egyenesen, tehát a két egyenes egymáshoz kapcsolt poláris, mi a kúpszeleten fekvő harmonikus pontokat következőkép értelmezzük: *egy kúpszelet kapcsolt polárisai a kúpszeletet harmonikus pontok szerint metszik.* Ezen értelmezést kiterjesztjük azon esetre is, a midőn az egyik kapcsolt poláris nem metszi a kúpszeletet valós pontokban, a mi csak akkor következhetik be, ha a két kapcsolt poláris metszőpontja a kúpszeleten kívül van, tehát ezen metszőpont mint pólus által a kúpszeleten meghatározott involucziós pontsor hyperbolikus természetű. *Hyperbolikus természetű involucziós pontsornak a kúpszeleten vagy egyenesen képzetes kapcsolt pontpárjai is vannak; az elliptikus involucziós kapcsolt pontpárjai mindig valósak* (77.).

84. Két a kúpszeleten fekvő általános helyzetű projektiv pontsor szintén nevezetes tulajdonsággal bir, melyet következő tétellel fejezünk ki:

Ha valamely kúpszeleten két projektiv pontsor van adva,

és X, X_1; Y, Y_1 két egymásnak megfelelő tetszőleges pontpár, akkor $|XY_1|$, $|X_1Y|$ egyenesek metszőpontja egy, a projektiv sorok által meghatározott szilárd egyenesen, p-n fekszik, és $|XY|$, $|X_1Y_1|$, valamint $|XX_1|$, $|YY_1|$ egyenesek metszőpontjait összekötő egyenes, ugyanazon P ponton megy át; e P pont p-nek pólusa a kúpszeletre nézve.

és x, x_1; y, y_1, két megfelelő pontpár X, X_1; Y, Y_1 érintője, akkor (x, y_1) és (x_1, y) metszőpontok összekötő egyenese egy, a projektiv pontsorok által meghatározott szilárd P ponton megy át, és (x, y), (x_1, y_1), valamint (x, x_1), (y, y_1) pontok összekötő egyenesének metszőpontja, egy szilárd p egyenesen fekszik; P és p pólus és poláris a kúpszeletre nézve.

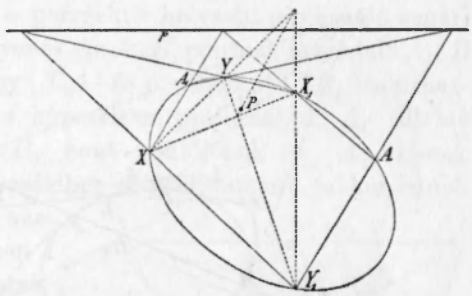
Ez a perspektiv helyzetű sugársorok egy tulajdonságának és a Pascal-féle hatszögnek következménye. Ha ugyanis a kúpszeleten fekvő $A, X, Y, \ldots; A_1, X_1, Y_1, \ldots$ projektiv pontsorokat A_1, ill. A középpontból projicziáljuk, akkor (57. ábra):

$$A_1(AXY\ldots) \barwedge A(A_1X_1Y_1\ldots),$$

és mert ezen sugársorok AA_1-ben közös megfelelő sugárral birnak: perspektiv helyzetűek; tehát

$$|A_1X|, |AX_1|; |A_1Y|, |AY_1|; \text{ stb.}$$

sugárpárak egymást a perspektiv-tengelyben p-ben, metszik. De hogy $|XY_1|$, $|X_1Y|$ egyenesek metszőpontja, szintén ezen p egyenesen van, az $AX_1YA_1XY_1$ Pascal-féle hatszögből látható, melynek átellenes oldalai egymást egyenesen fekvő pontokban metszik. Minthogy továbbá a kúpszeletbe írt XX_1YY_1 változó négyszögnek egyik átlóspontja ($|XY_1|$, $|X_1Y|$) a szilárd p egyenesen mozog: a másik két átlóspont összekötő egyenese, mely az első átlóspontnak polárisa átmegy azon szilárd p egyenes pólusán,



57. ábra.

P-n. A jobb oldalon álló tétel hasonlókép lesz bebizonyítva; és mert XX_1YY_1 négyszög és xx_1yy_1 négy oldalnak közös átlósháromszöge van, azért P pont és p egyenes a jobb és baloldalon álló tételben egy és ugyanazon pontot és egyenest jelent. Azon pontok, melyekben p egyenes a kúpszeletet metszi, a projektiv pontsorok kettőspontjai; ha ezen p egyenes a kúpszeletet nem metszi valós pontokban, akkor a projektiv pontsorok nem birnak valós kettőspontokkal. —

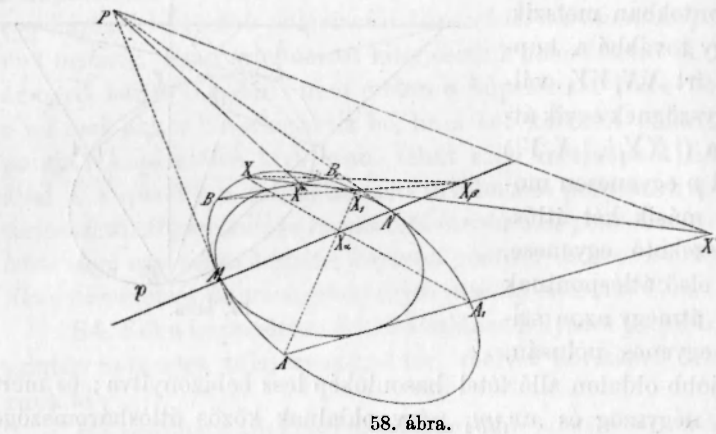
84*a*. *Két ugyanazon $\varkappa$ kúpszeleten fekvő projektiv pontsor megfelelő pontjait összekötő egyenesek egy II. o. sugársort képeznek; e sugársor által burkolt k kúpszelet*

Két ugyanazon $\varkappa$ kúpszeleten fekvő projektiv pontsor megfelelő pontpárjain átmenő érintők egymást egy k' kúpszeleten metszik; ezen k' kúpszelet *és az eredeti kúpszelet azon p egyenesén, melyben két meg nem felelő pont X, Y_1 összekötő egyenese, az ezeknek megfelelő X_1, Y pontok összekötő egyenesét metszi, ugyanazon kapcsolt pólusokat indukálja; továbbá p egyenesnek pólusa a kúpszeletekre vonatkozólag egy és ugyanazon P pont.*

Hogy a baloldalon álló tételt bebizonyitsuk, nevezzük (58. ábra) $\varkappa$ kúpszeleten fekvő projektiv pontsor megfelelő pontjait $A, B, X, \ldots$ ill. $A_1, B_1, X_1, \ldots$-nek,

	$\|AA_1\|$	és	$\|XX_1\|$	metszőpontját	X'-nek,
	$\|BB_1\|$	«	$\|XX_1\|$	«	X'' «
$p,$	$\|AX_1\|$	«	$\|A_1X\|$	«	X_α «
$p,$	$\|BX_1\|$	«	$\|B_1X\|$	«	X_β «

és p pólusát P-nek.



58. ábra.

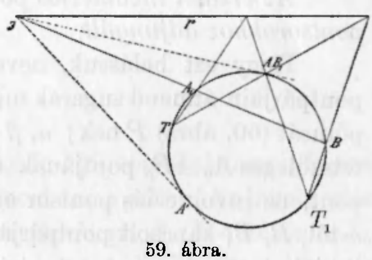
Mialatt X, $\varkappa$ kúpszeleten tovahalad, $|AX_1|$ és $|BX_1|$ sugarak, A és B körül két projektiv sugársort irnak le, mely p egyenest két projektiv pontsor $X_\alpha, \ldots$, ill. $X_\beta, \ldots$ szerint metszi. Az X_α és X_β pontok által leírt pontsor egyes pontjainak polárisai a felvett $\varkappa$ kúpszeletre nézve: $|PX'|$ ill. $|PX''|$ sugarak P körül szintén projektiv sorokat irnak le, és ezért az $|AA_1|$ és $|BB_1|$ egyeneseken változó $X', \ldots$ és $X'', \ldots$ pontok projektiv pontsorokat futnak be.

De a megfelelő X', X'' pontok összekötő egyenese: $|X'X''| \equiv |XX_1|$-gyel, tehát a változó $|XX_1|$ a szilárd $|AA_1|$, $|BB_1|$ sugarakat projektiv pontsorok szerint metszi és így a változó és szilárd sugarak

II. o. sugársort képeznek. AA_1X_1X és BB_1X_1X négyszögek harmonikus tulajdonsága folytán $|PX'|$, $|PX''|$ egyenesek polárisai X_a ill. Y_a pontoknak nemcsak az adott, hanem azon k kúpszeletre nézve is, melynek $X'AA_1$, $X'XX_1$; $X''BB_1$, $X''XX_1$ egyenesek érintői.

85. *Ha valamely kúpszeleten (vagy egyenesen) két projektiv pontsor van adva és a sor egyik pontjának, mely az első pontsorban A-val a másodikban B_1-gyel lesz jelölve, úgy hogy $A \equiv B_1$-gyel, megfelelő pontjait A_1, ill. B-nek nevezzük, és oly A' pontot szerkesztünk, mely A-t A_1, B-től harmonikusan választ el, akkor A, A' pontmialatt A a kúpszeletet (vagy egyenest) befutja, egy involucziós pontsort írnak le, melynek valós vagy képzetes kettőspontjai öszszeesnek az eredeti projektiv pontsorok kettőspontjaival.*

Hogy ezt belássuk, projicziáljuk (59. ábra) az első pontsort a másodiknak tetszőleges T_1 pontjából, és a második pontsort az elsőnek megfelelő T pontjából, és legyen e perspektiv helyzetű projicziáló sugársorok perspektiv-tengelye p egyenes. Az $A \equiv B_1$ pontnak megfelelő A_1, B pontot akkép szerkesztjük, hogy $|T_1A|$ és p, valamint $|TB_1|$ és p metszőpontját T, ill. T_1 pontból a kúpszeletre projicziáljuk A_1, illetve B pontokba. Ha még $A \equiv B_1$ pont érintőjének és $|A_1\ B|$-nek I metszőpontjából a kúpszelethez érintőt huzunk, akkor ennek A' érintőpontja, A-t B, A_1-től harmonikusan választja el. De ezen I pont, mely $|AB_1|$, $|A_1B|$ sugaraknak metszőpontja, mint előbb kimutattuk és mint az ötszöggé fajult $BT_1AB_1TA_1$ Pascal-féle hatszögből is látható p egyenesen fekszik; a miért is AA' egyenes p-nek pólusán megy át. Az összes ily módon szerkesztett AA' egyenesek tartalmazzák p-nek pólusát, tehát AA' pontpárak involucziós pontsort képeznek a kúpszeleten. Ha A a projektiv pontsornak egyik valós kettőspontja, akkor I és A' pont szintén A-ba jut.



59. ábra.

Az eredeti projektiv pontsorokból ily módon képezett involucziós pontsort, azon projektiv pontsorokhoz *adjungált** involucziós pontsornak nevezik. E szerint *kúpszeleten, vagy egyenesen fekvő két projektiv pontsor kettőspontjainak szerkesztése vissza van vezetve a hozzájuk adjungált involucziós pontsor kettőspontjainak szerkesztésére.*

* Bobek K. «Projektivische Geometrie der Ebene» Teubner 1889; 77. lap.

86. *Ha valamely kúpszeleten egy involucziós pontsor van adva, és mi a kúpszeleten oly X_α pontokat szerkesztünk, melyek a kúpszelet tetszőleges, de állandó α pontját, az involucziós pontsor X, X_1 kapcsolt pontjaitól harmonikusan elválasztják, akkor ezen X_α pontok az involucziós pontsor pontpárjain átmenő $|XX_1|$ sugarak által leírt sugársorral, projektiv pontsort képeznek.*

α pont érintőjét t_α-nak nevezvén, az X_α pontok, az előbbiek szerint, érintőpontjai azon érintőknek, melyek az állandó t_α és a változó $|XX_1|$ egyenesek metszőpontjaiból a kúpszelethez huzhatók; ezen metszőpontok sorozata tehát projektiv X_α pontsorral. De mivel $|XX_1|$ által leírt sugársor perspektiv helyzetű ama metszőpontokból képezett pontsorral, azért e sugársor szintén projektiv X_α pontsorral. — E tételből következik: *Ha valamely kúpszeleten (vagy egyenesen) egy involucziós pontsor van adva és mi oly X_α, valamint X_β pontokat szerkesztünk, melyek ezen involucziós pontsor kapcsolt pontpárjait a kúpszeleten (vagy egyenesen) fekvő tetszőleges állandó α, valamint β ponttól harmonikusan elválasztják, akkor a változó X_α és X_β pontok projektiv pontsorokat írnak le*, mert ezen pontsorok mindegyike projektiv azon sugársorral, mely az involucziós pontsor kapcsolt pontpárjait összekötő sugarakból lesz képezve.

Az eredeti involucziós pontsor, az X_α és X_β által leírt projektiv pontsorokhoz adjungált.

Hogy ezt belássuk, nevezzük az involucziós pontsor kapcsolt pontpárjain átmenő sugarak metszőpontját, az involucziós pontsornak pólusát (60. ábra) P-nek; α, β pontok érintőit t_α, t_β-nek; a kúpszelet tetszőleges $A_\alpha \equiv B_\beta$ pontjának érintőjét szintén $A_\alpha \equiv B_\beta$-nak. $A_\alpha \equiv B_\beta$ pont, az involucziós pontsor egy bizonyos A, A_1 kapcsolt pontpárját α-tól, B, B_1 kapcsolt pontpárját β-tól harmonikusan választja el. Projicziáljuk A_α, t_α és A_α, t_β érintők metszőpontjait P-ből t_β, ill. t_α-ra és nevezzük ezen projekcziókból a kúpszelethez vonható új érintőket, valamint azoknak érintőpontjait A_β, ill. B_α-nak. Mint könnyen látható ekkor

$$(AA_1\beta A_\beta) = (BB_1\alpha B_\alpha) = -1.$$

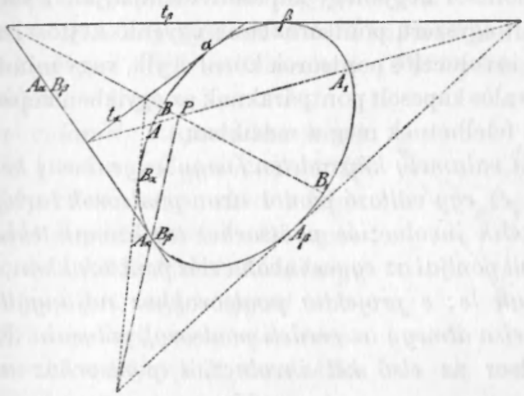
t_β A_β B_α t_α A_α érintőkből képezett ötoldal, elfajult BRIANCHON-féle hatoldalnak tekinthető, melynél A_α érintő kétszeresen számittatik, tehát:

(t_β, A_β) és (t_α, A_α) érintők metszőpontjainak összekötő egyenese
(t_α, B_α) « (t_β, A_α) « « « «
(A_β, B_α) metsző- és $A_\alpha \equiv B_\beta$ érintőpont « «
ugyanazon P ponton megy át.

E szerint azon pont, mely $A_\alpha \equiv B_\beta$-át A_β, B_α-tól harmonikusan elválasztja: az adott involucziós pontsorban $A_\alpha \equiv B_\beta$-nak kapcsolt pontja; vagyis A_α, B_α, C_α, . . .; A_β, B_β, C_β, . . . projektiv pontsorokhoz az eredeti involucziós pontsor — adjungált. (85.)

87. Minden involucziós pontsort projektiv vonatkoztathatunk egy közönséges pontsorra a következő értelmezés alapján: *ha valamely involucziós pontsor két projektiv pontsorhoz adjungált, akkor az involucziós pontsort azon pontsorok mindegyikéhez projektivnek nevezzük.*

Ezen értelmezés és az előbbi tétel folytán, *azon pontsor, melynek pontjai egy involucziós pontsor kapcsolt pontpárjait az involucziós*



60. ábra.

pontsor tartóján tetszőlegesen felvett állandó ponttól harmonikusan elválasztják: az adott involucziós pontsorhoz projektiv. Az involucziós pontsor egy bizonyos kapcsolt pontpárjának, pl. X, X_1-nek azon X_α pont felel meg, mely a felvett állandó α pontot, X, X_1 kapcsolt ponttól harmonikusan elválasztja. Az X, X_1 kapcsolt pontpárakból álló involucziós pontsorról azt mondjuk, hogy az, a hozzá projektiv és X_α pontokból álló egyszerü pontsorra van *redukálva.*

Láttuk előbb, hogy ha az involucziós pontsor kúpszeleten fekszik és a változó X_α pont, az involucziós sor változó X, X_1 kapcsolt pontpárját az α állandó ponttól harmonikusan elválasztja: akkor $|XX_1|$ sugár által leírt I. o. sugársor perspektiv és így projektiv X_α pontsorral. Ennélfogva: *kúpszeleten fekvő involucziós pontsor projektiv azon sugársorral, melynek sugarai az involucziós pontsor kapcsolt pontpárjait projicziálják.*

Két involucziós pontsor projektiv van egymásra vonatkoztatva, ha azon két egyszerű pontsor, melyre az egyik, illetve másik involucziós pontsor redukálható, projektiv van vonatkoztatva egymásra. Hasonlókép: egy involucziós pontsor projektiv egy egyszerű pontsorral, ha azon pontsor, melyre az involucziós sor redukálható, projektiv az egyszerű sorral.

Ha két tetszőleges involucziós pontsort projektiv akarunk egymásra vonatkoztatni, úgy az egyiknek három kapcsolt elempárjához a másiknak három kapcsolt elempárját tetszőlegesen választhatjuk. Minden kapcsolt elempárnak az egyikben úgy kell szerkeszteni a megfelelő kapcsolt elempárját a másikban, hogy az első és második involucziós pontsor négy-négy kapcsolt elempárjának megfelelő pontok a redukált egyszerű pontsorokban: egyenlő kettősviszonyt képezzenek. Ha az involucziós pontsorok közül egyik, vagy mindkettő hyperbolikus, úgy valós kapcsolt pontpáraknak az egyikben képzetes kapcsolt pontpárak is felelhetnek meg a másikban.

88. *Ha valamely kúpszeleten (vagy egyenesen) két involucziós pontsor van és egy változó pontot azon pontsorok tartóján, mint az első és második involucziós pontsorhoz tartozónak tekintjük, akkor ennek kapcsolt pontjai az egyes involucziós pontsorokban, két projektiv pontsort írnak le; e projektiv pontsorokhoz adjungált involucziós pontsor polárisa átmegy az eredeti pontsorok pólusain.* Ezen uj involucziós pontsor az *első két involucziós pontsorhoz adjungált*nak nevezhető.

Képzeljünk valamely kúpszeletbe (61. ábra) egy $AA_1'B_1BB_1'$ ötszöget írva; jelöljük ennek A, B, B_1' pontját még A', ill. B', A_1 betűkkel, úgy, hogy

$$A \equiv A', B \equiv B', B_1' \equiv A_1,$$

és nevezzük

$$|A A_1|, |B B_1| \text{ metszőpontját } P\text{-nek.}$$
$$|A'A_1'|, |B'B_1'| \quad « \quad P'\text{-nek.}$$

P és hasonlókép P' ponton átmenő szelők a kúpszeletet egy-egy involucziós pontsorban metszik, melynek kapcsolt pontjai A, A_1; B, B_1; . . .; valamint A', A_1'; B', B_1'; . . .

A kúpszelet $A \equiv A'$ pontjához kapcsolt pont az első involucziós sorban A_1, a másodikban A_1'; hasonlókép $B \equiv B'$ ponthoz B_1', valamint B_1'. — A_1, B_1, . . . és A_1', B_1', . . . pontsorok projektivek, mert mindegyike projektiv $A \equiv A'$, $B \equiv B'$, . . . által leírt pontsorral.

Minthogy $A_1 \equiv B_1'$, azért ezen ponthoz kapcsolt pont az A_1, B_1, ...; A_1', B_1', ... projektiv pontsorokhoz adjungált involuczióban az lesz, mely $A_1 \equiv B_1'$-et A_1', B_1 pontoktól harmonikusan elválasztja. De mert

$$AA_1'B_1BB_1'B_1'$$

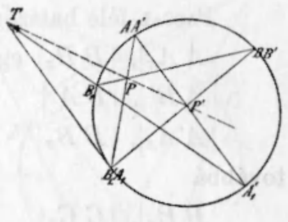
PASCAL-féle hatszögben

$|AA_1'|$, $|BB_1'|$ átellenes oldalak metszőpontja P',
$|BB_1|$, $|AB'|$ « « « P,

azért $|A_1'B_1|$ hatszögoldal B_1' pont érintőjét, $|PP'|$ egyenesen metszi, mely metszőpont pólusa az adjungált involuczióban $A_1 \equiv B_1'$ pont és $A_1 \equiv B_1'$-hez kapcsolt pont összekötő egyenesének.

Tekintve, hogy az adjungált involuczió kapcsolt pontpárjait összekötő egyenesek pólusai $|PP'|$-en fekszenek: $|PP'|$ polárisa az adjungált involucziónak.

89. *Ha valamely kúpszeleten fekvő két involucziós pontsor pólusai* **kapcsolt pólusok** *a kúpszeletre nézve, akkor a kúpszelet pontjaihoz kapcsolt pontok a két involucziós pontsorban, két* **involucziós** *helyzetű projektiv pontsort, vagyis egy új involucziós pontsort képeznek, mely azon involucziós pontsorokhoz adjungált involucziós pontsor. Az ily három involucziós pontsor közül mindegyik a másik kettőhöz adjungált, és egyik mindig elliptikus a másik kettő hyperbolikus.*



61. ábra.

E tétel következménye a kapcsolt háromszög ama tulajdonságának, hogy «ha egy kúpszeletbe írt háromszög két oldala egy kapcsolt háromszög két szögpontján megy át, akkor a harmadik oldal is a kapcsolt háromszög harmadik szögpontján fog átmenni.» —

Ily három involucziós pontsort az által szerkeszthetünk a kúpszeleten, hogy beirunk abba egy tetszőleges $ABCD$ négyszöget; A, B; C, D az első, A, C; B, D a második és A, D; B, C a harmadik involucziós sor két kapcsolt pontpárja. Ha a kúpszelet tetszőleges E pontjához az első, második és harmadik sorban E_1, E_2, E_3 pont kapcsolt, akkor $ABCD$, $EE_1E_2E_3$ négyszögek közös átlósháromszöggel birnak és így E_2, E_3; E_3, E_1; E_1, E_2 pontpárak az első, illetve a második és harmadik involucziós sorban kapcsoltak. (62. ábra)

90. *Ha valamely kúpszeleten (vagy egyenesen) két projektiv pont-*

*sor van adva, akkor azon végtelen sok oly pontsor szerkeszthető, melyeknek mindegyike úgy az első, mint a második pontsorral involucziós helyzetű; azon involucziós pontsorok pólusai, melyek a változó pontsor és az első, valamint a változó pontsor és a második adott pontsor által meg vannak határozva, két projektiv pontsort írnak le, az eredeti két projektiv pontsor valós vagy képzetes kettőspontjait összekötő p egyenesen fekszenek. A két projektiv pontsorhoz adjungált involucziós sornak minden kapcsolt elempárja, kettőspontja az egyes involucziós soroknak.**

Ha az adott két projektiv pontsor elemeit $A, B, C, \ldots; A', B', C', \ldots$-nek, p egyenes tetszőleges X pontjának projekczióját $A, B, C, \ldots$ pontokból a kúpszeletre $A_x, B_x, C_x, \ldots$-nek nevezzük, akkor kimutatandó, hogy $|A'A_x|, |B'B_x|, |C'C_x|, \ldots$ egyenesek egymást p-nek egy pontjában, pl. X'-ben metszik.

$$AA_xA'BB_xB' \text{ és } BB_xB'CC_xC'$$

Pascal-féle hatszögeket tekintve

$|A A_x|$, $|B B_x|$ egymást p-nek X pontjában metszi,
$|A B'|$, $|B A'|$ « p-ben metszi, tehát
$|A'A_x|$, $|B'B_x|$ « p-ben metszi,

továbbá

$|B B_x|$, $|C C_x|$ « p-nek X pontjában metszi,
$|B'C|$, $|B'C|$ « p-ben metszi;
$|B'B_x|$, $|C'C_x|$ « p-ben metszi;

e szerint

$|A'A_x|$, $|C'C_x|$ is azon X' ponton megy át, melyben $|B'B_x|$, p egyenest metszi.

De hogy az X és X' pólusok által p-n leírt pontsorok, mialatt az adottakkal involucziós helyzetű $A_x, B_x, C_x, \ldots$ pontsorok változnak, két projektiv sort írnak le, onnan következik, hogy X, X' pontok a változó A_x-nek (vagy $B_x, \ldots$-nek) projekcziói A, ill. A' pontokból p egyenesre.

Ha végre meggondoljuk, hogy a két adott projektiv pontsorhoz adjungált involucziós pontsor pólusa egyszersmind p-nek pólusa a kúpszeletre vonatkozólag, a tétel utolsó részének helyes volta is könnyen belátható.

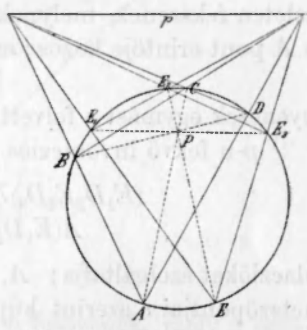
* Klug: Beitrag zur Geometrie der Lage; Archiv der Math. u. Physik. 1883. LXX. Teil pag. 446, és 1884. I. Teil pag. 293.

Jegyzet. 1. A midőn p a kúpszeletet valós pontokban metszi, tehát az adott projektiv pontsoroknak valós kettőspontjuk van, az A_x, B_x, C_x, ... pontsorok kétszer ponttá fajulnak és így az involucziós sor parabolikus természetű lesz.

2. Ha a kúpszeleten egy más A'', B'', C'', ...; A, B, C, ...-vel projektiv pontsor van, melynek kettőspontjai összeesnek az első két projektiv pontsor kettőspontjaival, vagyis A, B, C, ...; A'', B'', C'' ... sorok ugyanazon p egyenest határozzák meg, (83. szerint) mint az előbbiek, akkor A'', B'', C'' ..., a talált A_x, B_x, C_x ... pontsorok mindegyikével szintén involucziós helyzetű.

91. *Ha valamely kúpszeletek (vagy egyenesen) három projektiv pontsor fekszik, melyek nem bírnak közös kettőspontokkal és páronként nem involucziós helyzetűek, akkor mindig lehet oly pontsort találni, mely mind a hárommal involucziós helyzetű.*

Nevezzük a kúpszeleten fekvő A, B, C, ...; A', B', C', ...; valamint A', B', C', ...; A'', B'', C'', ... projektiv pontsorok valós vagy képzetes kettőspontjain átmenő egyenest p'', illetve p-nek; ezeknek metszőpontját P'-nek, végre A', B', C', ... pontsor projekczióját P'-ből a kúpszeletbe A_p, B_p, C_p ...-nek. Minthogy P', p'' és p-ben fekszik, azért az előbbi tétel szerint A_p, B_p, C_p, ... pontsor A, B, C, ...-vel p''-en fekvő P pólusra nézve, és



62. ábra.

A'', B'', C'', ... sorral p'-en fekvő P'' pólusra nézve, tehát mind a három felvett sorral involucziós helyzetű, és P, P' pontoknak összekötő egyenese p': az A, B, C, ...; A'', B'', C'' ... projektiv pontsoroknak kettőspontjain megy át.

Jegyzet. 1. A midőn a három adott pontsornak *egy* közös kettőspontja van, a velök involucziós pontsor minden pontja ezen kettőspontba jut és azért az involucziók parabolikus természetűek.

2. Ha a három adott projektiv pontsor páronként involucziós helyzetű, akkor $PP'P''$ kapcsolt háromszög, és a pontsorok ezen kapcsolt háromszög csúcspontjaiból egymásba projicziáltatnak, tehát nem található új pontsor, mely ezekkel involucziós fekvésű.

92. «Ha valamely kúpszeleten (vagy egyenesen) tetszőleges három pont van adva, akkor annak minden pontjához lehet még két pontot szerkeszteni úgy, hogy ezen pontok a három adottal mint kapcsolt ponttal háromfélekép képezzenek involucziós pontokat; e három mindig hyperbolikus involucziónak kettőspontjai egy elliptikus involucziót képeznek». (63. ábra.)

Nevezzük a kúpszelet három adott pontját A, B, C-nek, a tetszőlegesen választot pontot A_1-nek. A, B, C pontok érintői $|BC|$, $|CA|$, $|AB|$ egyeneseket a kúpszeleten kivül fekvő D_1, D_2, D_3 pontokban metszik, melyek (58. pont végén) p egyenesen fekszenek; p az $ABCA_1$ teljes négyszög átellenes oldalait D_1, E_1; D_2, E_2; D_3, E_3 pontokban metszi és ezen pontok p-n involucziót képeznek. E szerint:

$$(E_1D_3E_2D_1)\barwedge(D_1E_3D_2E_1)\barwedge(E_3D_1E_1D_2),$$

és így

$$A(E_1D_3E_2D_1)\barwedge C(E_3D_1E_1D_2),$$

tehát a megfelelő sugarak metszőpontjai A, C pontokkal együtt kúpszeleten fekszenek, melynek a felvett kúpszelettel A, B, C, A_1 pontja és A pont érintője közös; ennélfogva

$$|AE_2|,\ |CE_1|$$

egyenesek egymást a felvett kúpszelet C_1 pontjában metszik.

p-n fekvő involucziós hat pont továbbá:

$$(E_1D_2E_2D_3)\barwedge(D_1E_2D_2E_3)\barwedge(E_2D_1E_3D)$$
$$A(E_1D_2E_2D_3)\barwedge B(E_2D_1E_3D_2)$$

relacziókat szolgáltatja; A, B pontok és a megfelelő sugárpárak metszőpontjai e szerint kúpszeleten fekszenek, mely a felvettel szintén azonos, mivel mindkét kúpszelet A, B, C, A_1 pontokon megy át és B-ben közös érintővel bir, tehát

$$|AE_2|,\ |BE_3|$$

sugarak egymást a felvett kúpszeletnek $|AE_2|$-n fekvő C_1 pontjában metszik.

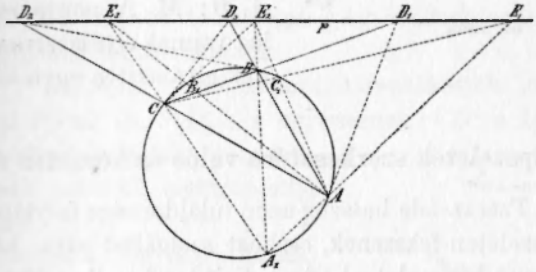
A mint most kimutattuk, hogy $|AE_2|$, $|BE_3|$, $|CE_1|$ sugarak a kúpszelet C_1 pontján mennek át, hasonlókép bebizonyítható, hogy $|AE_3|$, $|BE_1|$ $|CE_2|$ egymást a kúpszelet B_1 pontjában metszik és mert ebből folyólag:

$\lvert AA_1\rvert$,	$\lvert BB_1\rvert$,	$\lvert CC_1\rvert$	sugarak	E_1	ponton
$\lvert AC_1\rvert$,	$\lvert BA_1\rvert$,	$\lvert CB_1\rvert$	«	E_2	«
$\lvert AB_1\rvert$,	$\lvert BC_1\rvert$,	$\lvert CA_1\rvert$	«	E_3	«

mennek át: A_1, B_1, C_1 pontok az A, B, C-nek háromféle involuczióban kapcsolt pontjai.

Ha meggondoljuk, hogy E_1, E_2, E_3 pontok, mint az involucziók pólusai a kúpszeleten mindig kívül fekvő p egyenesen vannak, látható, hogy azon involucziók hyperbolikus természetűek és kettőspontjai oly elliptikus involucziót képeznek, melynek pólusa egyszersmind p-nek pólusa a kúpszeletre vonatkozólag.

$D_1D_2D_3E_1E_2E_3$ pontok p-n szintén háromfélekép képeznek involucziót, mert e pontok $ABCA_1$, $ABCB_1$, $ABCC_1$ teljes négyszögek átellenes oldalainak metszőpontjai p-vel. Látható továbbá még, hogy A, B, C pontok ép úgy függnek A_1, B_1, C_1 pontoktól, mint ezek amazoktól vagyis, hogy $A_1B_1C_1$ háromszög szögpontjainak érintői az átellenes oldalakat, p egyenes pontjaiban metszik, mert pl. $AB_1C_1CA_1A_1$ Pascal-féle hatszög $|AB_1|$, $|CA_1|$; $|CC_1|$, $|AA_1|$ át-



63. ábra.

ellenes oldalainak közös E_3, E_1 pontjai p-n fekszenek, mely p egyenes e végből $|B_1C_1|$-nek és A_1 érintőjének metszőpontját is tartalmazza.

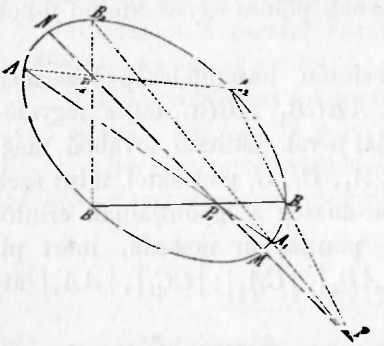
93. Ha valamely kúpszeleten, vagy egyenesen két elliptikus természetű involucziós pontsor van adva, akkor könnyen megitélhető, hogy a sornak két tetszőleges eleme a közös kapcsolt elempár által el van-e választva, vagy nincs elválasztva (64. ábra).

Legyen e végből a kúpszeleten fekvő két pont A, B; a két involucziós pontsor meghatározására szolgáló kapcsolt elempár A, A_1; B, B_1, illetve A, A_2; B, B_2.

$$
\begin{array}{lll}
|AA_1|, & |BB_1| & \text{metszőpontját } P_1\text{-nek,} \\
|AA_2|, & |BB_2| & \text{« } P_2\text{-nek,} \\
|A_1B_2|, & |A_2B_1| & \text{« } P\text{-nek,}
\end{array}
$$

a közös elempárt vagyis $|PP_1P_2|$-nek e feltételek mellett mindig valós metszőpontját a kúpszelettel M, N-nek nevezvén, $AA_1B_2BB_1A_2$ Pas-

CAL-féle hatszögből következik, hogy A_1, B_2; B_1, A_2; M, N, kapcsolt pontpárjai egy involucziós pontsornak, melynek pólusa P. A szerint a mint ezen P pont a kúpszeleten kívül van, belül fekszik, tehát ezen involucziós pontsor hyperbolikus vagy elliptikus: A, B pontok nincsenek elválasztva M, N által, vagy pedig el vannak választva. Ez még így is kifejezhető: «ha két elliptikus természetű involucziós pontsorban A elemhez kapcsolt A_1, A_2; B elemhez B_1, B_2, és a közös elempár M, N, akkor A_1, B_2; B_1, A_2 és A, B; M, N pontpárak egyidejűleg vannak elválasztva vagy nincsenek elválasztva egymástól».



64. ábra.

13. §. Kúpszeletek szerkesztése valós és képzetes elemekből.

94. A PASCAL-féle hatszög azon tulajdonsága folytán, hogy szögpontjai kúpszeleten fekszenek, eszközt szolgáltat arra, hogy öt adott ponton átmenő kúpszeletnek új pontjait szerkeszthessük; mert mindazon PASCAL-féle hatszögnek hatodik szögpontja, melynek szögpontja az adott öt pont: ezen öt ponton átmenő és ezek által egyféleképp meghatározott kúpszeleten fekszik.

Ugyanez mondható a reciprocitás elve szerint az öt érintő által meghatározott kúpszeletről is, t. i. hogy mindazon BRIANCHON-féle hatoldalak hatodik oldalai, melyek öt közös oldallal birnak, az öt közös oldal, mint érintő, által egyféleképp meghatározott kúpszeletnek érintői.

De a PASCAL-féle hatszög és a BRIANCHON-féle hatoldal, mint az előbbi tárgyalások folyamán láttuk, elfajulhat öt-, négy-, és háromszöggé, illetve öt-, négy-, és háromoldallá; a hiányzó és változó hatodik szögpontok és oldalak az öt adott által olyképen vannak meghatározva, hogy azok egy kúpszeletnek pontjai, illetve érintői lesznek.

E szerint magára a PASCAL- és BRIANCHON-féle hatszög és hatoldalra alapítva, következő feladatokat oldhatunk meg:

Egy kúpszelet új pontjainak és érintőinek szerkesztése, ha adva van a kúpszeletnek *a)* öt pontja,

b) négy pontja és azok egyikének érintője,

c) három pontja és ezek közül kettőnek érintője.

a₁) öt érintője,

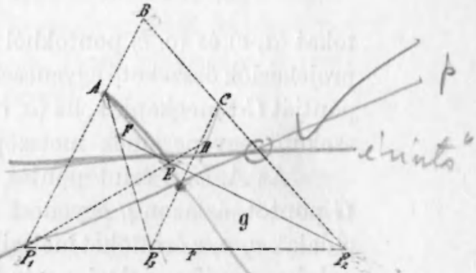
b₁) négy érintője és azok egyikének érintőpontja,

c₁) három érintője és kettőnek érintőpontja.

a) Az adott öt pontot A, B, C, D, E-nek nevezvén (65. ábra) $|AB|$, $|DE|$-nek közös P_1 pontján át tetszőleges p egyenest huzunk, mely $|BC|$, és $|CD|$-t, P_2, illetve P_3 pontokban metszi; $|EP_2|$, $|AP_3|$ egyeneseknek metszőpontja a kúpszeletnek új F pontja lesz. — Ha p-t P_1 körül forgatjuk, F-nek új helyzetét, tehát a kúpszeletnek új pontjait fogjuk találni, melyeket ép úgy mint az adottakat, más pontok szerkesztésére használhatjuk.

A szerkesztésből látható, hogyan lehetett volna az adott pontok egyikén, pl. E-n átmenő tetszőleges g egyenesnek második metszőpontját a kúpszelettel szerkeszteni.

$|AB|$, $|DE|$-nek P_1 metszőpontját összekötjük $|BC|$ és g metszőpontjával P_2-vel, és $|P_1P_2| \equiv p$ egyenesnek $|CD|$-n fekvő P_3 pontját A-ból g-re projicziáljuk, mely projekczió g-nek második metszőpontja a kúpszelettel.



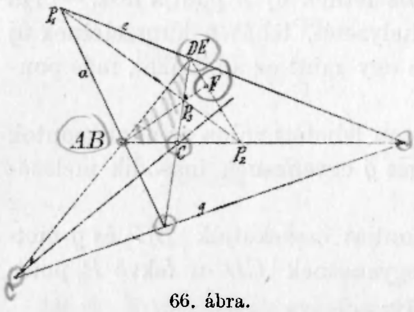
65. ábra.

Ha a kúpszelet egyik pontjának, pl. E-nek érintőjét akarjuk szerkeszteni, egy elfajult Pascal-féle hatszöget kell képzelni, melynek két szomszéd szögpontja E-ben van; e két szomszéd szögponton átmenő egyenes: E pont érintője. E végből $|AB|$, $|DE|$-nek P_1 metszőpontját összekötjük $|AE|$, $|CD|$-nek P_3 metszőpontjával $|P_1P_3| \equiv p$ egyenes által; E pont érintője átmegy $|BC|$ és p közös pontján. —

b) Hasonló eljárást követünk, ha a kúpszeletnek A, C, D, E pontja, és A-ban az érintő t van adva, csak t-t, A és az A-val egyesült B pont összekötő egyenesének kell tekintenünk.

c) Amidőn a kúpszelet A, C, E pontja és A, E pontoknak a, e érintője van adva (66. ábra), az elfajult hatszögnek B szögpontját A-ban, D szögpontját E-ben fekvőnek képzeljük. E szerint a, e közös P_1 pontján átmenő tetszőleges p egyenes $|BC|$-t P_2-ben, $|CD|$-t P_3-ban metszi; $|AP_3|$, $|EP_2|$ sugarak a kúpszeletnek új F pontján mennek át. C és bármely más pont érintőjét azon körülményből szerkesztjük, hogy «a kúpszeletbe írt háromszög szögpontjainak érintői az átellenes oldalakat egyenesen fekvő pontokban metszik», tehát $|AC|$ és e, valamint $|EC|$ és a metszőpontjain átmenő g egyenes $|AE|$-t, C pont érintőjének, c-nek, egyik pontjában metszi.

a_1) Ugyanígy lehet az a, b, c, d, e érintőkkel adott kúpszelet új érintőjét és azok érintőpontját is szerkeszteni. $(a, b), (d, e)$ pontok összekötő egyenesének $|(a, b), (d, e)| \equiv p_1$-nek tetszőleges P pontját (b, c) és (c, d) pontokból e illetve a-ra projicziáljuk, e projekczió összekötő egyenese az új f érintő. — e érintőnek E érintőpontját megkapjuk, ha p_1 és $|(ae), (cd)|$ egyeneseknek metszőpontját (b, c) pontból e-re projicziáljuk.



66. ábra.

c_1) Ha a, c, e valamely kúpszeletnek érintője, A, E pontok a, e-nek érintőpontjai, akkor az $|AE|$ egyenesen változó pontokat (a, c) és (c, e) pontokból e, illetve a-ra projicziáljuk, a megfelelő projekcziók összekötő egyenesei, a kúpszeletnek új érintői. c-nek érintőpontját C-t megkapjuk, ha (a, c) és E, valamint (c, e) és A pontok öszszekötő egyeneseinek metszőpontját G-t, (a, e)-ből c-re projicziáljuk.

Az A, E, C érintőpontot, azok a, e, c érintőiből álló háromszöget, G pontot, és azon g egyenest tekintve, melyben $|AE|$, $|EC|$, $|CA|$ oldalak c, a, e érintőket metszik, — azt látjuk : hogy g egyenes G pontnak harmonikus polárisa mindkét háromszöget és a szerkesztett kúpszeletet illetőleg (50.).

95. A kúpszelet nemcsak *valós,* hanem *képzetes* pontok által is lehet megadva. Hogy képzetes elemek által adott kúpszeletet szerkeszthessünk, tudnunk kell mit értünk azalatt, hogy «egy kúpszelet képzetes pontokon megy át vagy képzetes egyeneseket érint.»

Tanultuk, hogy egy kúpszelet, minden síkjában fekvő p egyenesen involucziós pontsort indukál, melynek kapcsolt pontpárjai, kapcsolt pólusok a kúpszeletre vonatkozólag; továbbá, hogy p egyenesen fekvő kapcsolt pólusok projekcziói a kúpszelet tetszőleges pontjából a kúpszeletre, a kúpszeleten involucziós pontsort képeznek, melynek polárisa p egyenes; végre hogy a kúpszelet átmegy p egyenesen, a kapcsolt pólusokból álló involucziós sornak valós kettőspontjain, valamint hogy

p egyenes átmegy a kúpszeleten fekvő involucziós sornak valós kettőspontjain. Ebből folyólag a következő értelmezést adjuk:

«Ha valamely egyenesen egy elliptikus természetű involucziós pontsor fekszik és ennek kapcsolt pontpárjai, kapcsolt polusok egy kúpszeletre vonatkozólag, akkor a kúpszeletről azt mondjuk, hogy átmegy az involucziós pontsor képzetes kettőspontjain,

Ha egy elliptikus természetű involucziós sugársort kapcsolt sugarai, kapcsolt polárisok egy kúpszeletre vonatkozólag, akkor a kúpszeletről azt mondjuk, hogy az, az involucziós sugársor képzetes kettőssugarait érinti,

mert ez a valós kettőselemekkel biró, tehát hyperbolikus természetű, involucziós soroknál is bekövetkezik.»

Az előbbi pont *c), c_1)* feladatait e szerint így fogalmazhatjuk.

«Adva van C és P pont, p egyenes és p-n fekvő involucziós pontsor; szerkesszük meg azon C ponton átmenő kúpszeletet, melyre vonatkozólag P pontnak polárisa p. és p-n fekvő involucziós pontsor kapcsolt pontpárjai, kapcsolt pólusok».

«Adva van c és p egyenes, P pont, és P átmenő involucziós sugársor, szerkesztessék azon kúpszelet, melyre vonatkozólag P sugársor kapcsolt sugarai, kapcsolt polárisok, P-nek polárisa p, és mely c-t érinti».

Nevezzük azon pontot, mely P és p-t, C-től harmonikusan elválasztja A-nak, $|CP|$ és p metszőpontját F_1-nek, p tetszőleges kapcsolt pontpárját E, E_1-nek $|AE|$, $|CE_1|$, és $|AE_1|$, $|CE|$ metszőpontját B, illetve D-nek (53. és 54. ábra).

$|BD|$ egyenes P ponton megy át és B, D pontok P, p-t harmonikusan választják el, mert $ABCD$ teljes négyoldal átlói: $|BD|$, $|AC|$ és p egyenesek. Mialatt E, E_1 kapcsolt pontpár az involucziós pontsoron végig halad $|AE|$, $|CE_1|$ sugarak, A és C körül projektiv sugársorokat irnak le, melynek képződménye kúpszelet. E kúpszelet átmegy A, C és a változó B, D pontokon; érinti A, C-ben $|FA|$, ill. $|FC|$ egyeneseket; erre vonatkozólag P-nek polárisa p, és a változó $ABCD$ négyoldal következtében, p-n fekvő kapcsolt pontok kapcsolt pólusok.

Ha C pont helyett c érintő lett volna adva, akkor vagy a dualisan megfelelő eljárást követjük, vagy a szerkesztést visszavezetjük az előbbire akkép, hogy c, p metszéspontján átmenő $|PF|$ sugárhoz kapcsolt $|PF_1|$ sugarat felkeressük, mely c érintőt, annak C érintő pontjában metszi. C pont, mint a kúpszelet egy pontja, P, p mint polus és poláris, és P involucziós sugársor által p-n kimetszett involucziós pontsor, mint előbb meghatározza a kúpszeletet. A szerkesztések függetlenek attól, hogy p-n fekvő vagy P-n átmenő involucziós sorok hyperbolikus vagy elliptikus természetűek-e.

Jegyzet. Ha fönnebbi szerkesztésnél p a sík végtelen távol fekvő egyenese g_∞, a rajta fekvő involucziós pontsor pedig egy czirkuláris involucziós sugársor által van rajta kimetszve, akkor a kúpszelet — kör lesz. Azon A pont ugyanis, mely P és C által harmonikusan van elválasztva, P-től ép oly távolságra van, mint C pont; az A, C pontokon átmenő és egymásra merőleges egyenesek, melyek tehát g_∞-en fekvő involucziós pontsornak kapcsolt pontpárjain átmennek, egymást oly körön metszik, a melynek középpontja P. — A kör e szerint középpontja, és egy pontja, vagy érintője által meg van határozva.

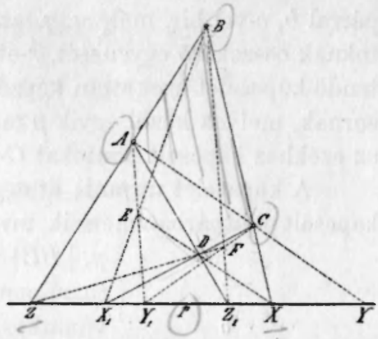
96. Vegyük most a 94-dik pont $a)$ és $a_1)$ feladatát, de mondjuk, hogy az öt adott pont vagy érintő közül, két pont, illetve két érintő, mint egy involucziós sornak két kettőspontja van adva. A feladat e szerint így szól: «Szerkesszünk három adott

ponton A, B, C-n átmenő kúpszeletet, melyre vonatkozólag adott p egyenesen fekvő involucziós pontsor kapcsolt pontpárjai, kapcsolt pólusok, ha A, B, C pontok p-n kívül fekszenek».

egyenest a, b, c-t érintő kúpszeletet, melyre vonatkozólag adott P ponton átmenő involucziós sugárpárak kapcsolt polárisok, ha P nem fekszik, a, b, c egyeneseken».

Nevezzük (67. ábra) $|BA|$, $|CB|$ egyenesek metszőpontjait p-vel, Z, illetve X-nek; e pontokhoz kapcsolt pontokat az involucziós sorban Z_1, X_1-nek; $|AZ_1|$, $|CX_1|$ metszőpontját D-nek. Ha p-nek összes pontjait B-vel, és ezekhez kapcsolt pontokat D-vel sugarak által összekötjük, akkor a két sugársor képződménye oly kúpszelet lesz, mely átmegy A, B, C, D pontokon és melyre vonatkozólag p-n fekvő kapcsolt pontok, kapcsolt pólusok (78. és 95.). — A szerkesztés független attól, hogy az involucziós sor hyperbolikus vagy elliptikus-e, tehát hogy annak kettőspontjai valósak-e vagy képzetesek. —

E szerkesztésnél B pontnak különös szerep jutott A, C pontok mellett, de kimutatható, hogy ugyanazon kúpszeletet találjuk, ha A-t vagy C-t a szerkesztésnél B-vel fölcseréljük.



67. ábra.

$|DX|$, $|BX_1|$ metszőpontját, mint a szerkesztett kúpszeletnek egy pontját E-nek nevezvén látható, hogy $|AE|$, $|AC|$ egyenesek p-t az adott involucziós pontsor két kapcsolt pontjában Y_1, Y-ban metszik, mert $EDCB$ négy oldalnak hat szögpontja: E, C; D, B; X, X_1 involucziót képező sugárpárakkal projicziáltatik A-ból. Ebből következik, hogy E, C pontokat az involucziós sor kapcsolt pontjaival összekötő egyenesek egymást ugyanazon az A, B, C, D, E pontokon átmenő kúpszeleten metszik, mint az előbbi kúpszelet.

Ugyan így kimutatható, ha $|DZ|$, $|BZ_1|$ metszőpontja F: hogy azon sugárpárak, melyek A, F pontokat az adott involucziós pontsor kapcsolt pontjaival összekötik, egymást a talált kúpszeleten metszik.

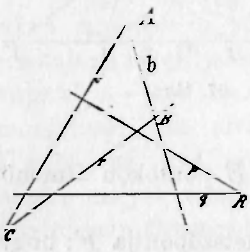
Jegyzet. Ha p a sík végtelen távol fekvő g_∞ egyenese, és a rajta fekvő involucziós pontsor egy cirkuláris involucziós sugársor által van kimetszve, akkor $AD \perp AB$, $CD \perp BC$, és a B, D pontokon átfektetett egymásra merőleges egyenesek g_∞-t azon involuczió kapcsolt pontjaiban metszik. De két ponton átmenő és egymásra merőleges egyenesek metszőpontjai körön fekszenek, tehát *a három ponton átmenő kör szerkesztése, speciális esetét képezi a tárgyaltnak.*

97. Az *a)* és *a_1)* feladatnál azonban két pár elem is lehet képzetes, és így, mint egy-egy involucziós sor kettőspontja által adva. A feladat akkor így szól:

«Fektessünk A ponton át kúpszeletet, melyre vonatkozólag p és q egyeneseken fekvő involucziós pontsorok kapcsolt pontpárjai, kapcsolt pólusok».	«Szerkesszünk a egyenest érintő kúpszeletet, melyre vonatkozólag P és Q középponttal biró involucziós sugársorok kapcsolt sugarai kapcsolt polárisok».

Tételezzük fel, hogy az involucziós sorok közül legalább egyik elliptikus, mert ha mindkettő hyperbolikus természetű volna, úgy a két pár valós kettőspont és az adott pont vagy érintő szerkesztése után a feladat az *a)* illetve *a_1)* feladatra lenne visszavezetve. Azon két involucziós sugársor, mely p és q-n fekvő involucziós pontsorokat A-ból projicziálja, ekkor szükségkép (35) közös kapcsolt sugárpárral b, c-vel bir, mely p, q tartók R metszőpontjához kapcsolt pontoknak összekötő egyenesét, r-et, B, C pontokban metszi. A szerkesztendő kúpszelet ezek után képződménye lesz azon két projektiv sugársornak, melyek közül egyik p tartónak összes pontjait B-ből, a másik az ezekhez kapcsolt pontokat C-ből projicziálja.

A kúpszelet ugyanis átmegy A-n mert $|BA|$, $|CA|$ sugarak p-t kapcsolt pontpárban metszik, továbbá $|BC|\equiv r$ egyenes pólusa, R; mert p, $|BC|$ egyenesek kapcsolt polárisok és R, (p, r) pontok kapcsolt polusok azon kúpszeletre vonatkozólag. De $|BA|$, $|CA|$; és $|BR|$, $|CB|$ sugarak q-t is a q-n fekvő involucziós pontsor kapcsolt pontjaiban metszik, mely metszőpontok egyszersmind kapcsolt pólusok a szerkesztett kúpszeletre vonatkozólag, tehát q-n fekvő öszszes kapcsolt pontpárak kapcsolt pólusok lesznek azon kúpszeletet illetőleg.



68. ábra.

A jobb oldalon álló feladat hasonlókép lesz megoldva. a érintőn P, Q involucziós sugársorok involucziós pontsorokat metszenek ki, melyeknek (ha legalább egyik sugársor elliptikus) B, C-ben közös kapcsolt pontpárjuk van; ezek $|PQ|\equiv r$-hez mindkét adott sugársorban kapcsolt sugarak R metszőpontjából $|RB|\equiv b$, $|RC|\equiv c$ sugarakkal projicziáltatnak. Azon kúpszelet, mely a, b,c-t érinti és melyre vonatkozólag P, Q involucziós sugársor egyikének kapcsolt sugarai kapcsolt polárisok: a kivánt kúpszelet.

98. A kúpszeletet azonban más adatok is egyféleképp határozzák meg, mint a következő feladatokból látható.

Szerkesztendő kúpszelet, melyre vonatkozólag:

α) egy P pontnak polárisa p egyenes, és mely A, B, C pontokon átmegy, vagy a, b, c egyeneseket érinti.

β) P, Q pontoknak polárisai p, q egyenesek, és mely A ponton átmegy, vagy a egyenest érinti.

γ) PQR háromszög polárháromszög, és A, R pontokon átmegy, vagy a, b egyeneseket érinti.

Megoldás. α) Ha D, E, F pontok A, B, C-t P, p-től harmonikusan elválasztják, akkor ezek az adott pontokkal meghatározzák az α) alatt keresett kúpszeletet. De hogy A, B, C, D, E, F pontok tényleg kúpszeleteken fekszenek onnan következik, hogy $ABCDEF$ Pascal-féle hatszög. Nevezzük ugyanis $|AP|$, $|BP|$, $|CP|$ sugarak metszőpontját p-vel A_1, B_1, C_1-nek, akkor

$$(ADPA_1)=(BEPB_1)=(CFPC_1)=-1\,;$$

tehát

$$|AB|,\ |ED|;\ |BC|,\ |FE|$$

egymást p-ben metszik, és mert

$$(ADPA_1)=(FCPC_1)=-1,$$

azért

$$|AF|,\ |DC|$$

is egymást p-ben metszi. —

β) Ha a kúpszelet A pontja vagy a érintője és P, p; Q, q pólus és polárisa van adva, akkor p, q polárisok $|PQ|$ egyenest P_1, Q_1 pontokban metszik, és P, Q pontok (p, q) pontból p_1, q_1 sugarakkal projicziáltatnak. Azon kúpszelet, melyre vonatkozólag P, P_1; Q, Q_1 pontok kapcsolt pólusok, és $|PQ|$-nak pólusa (p, q), vagy a mi ugyanaz, p, p_1; q, q_1 sugarak kapcsolt polárisok és (p, q)-nak polárisa $|PQ|$: (95. szerint) teljesen meg van határozva és szerkeszthető. E szerint a pólus és poláris együttvéve annyi adatnak felel meg, mint két pont, vagy két érintő.

γ) Szerkesztünk két négyszöget, melyeknek átlós háromszöge PQR, és melyek elsejének egyik szögpontja A, a másodiknak egyik szögpontja B; azon kúpszelet, mely az első négyszögnek négyszögpontján és B-n átmegy, a második négyszögnek mind a négy szögpontját tartalmazza.

Ebből látható, hogy ha két négyszögnek ugyanazon átlósháromszöge van, akkor annak nyolcz szögpontja kúpszeleten fekszik; hasonlókép két négyoldalnak nyolcz oldala egy kúpszeletnek érintője, ha azok közös átlósháromszöggel birnak.

E tulajdonságából a négyszögek és négyoldalaknak következik:

Két ugyanazon négyoldalba írt kúpszeletnek nyolcz érintőpontja az oldalakkal, új kúpszeleten fekszik, mert (72.) a négyoldal és a két kúpszelet érintőpontjai által meghatározott két négyszög, közös átlósháromszöggel bír.

Egy négyszög körül írt két kúpszelet négy pár érintője a négyszög szögpontjaiban, egy új kúpszeletnek érintője, mert azon négyoldalak, melyek ugyanazon kúpszelethez tartozó négy érintőből képeztetnek, a négyszöggel együtt közös átlósháromszöggel birnak.

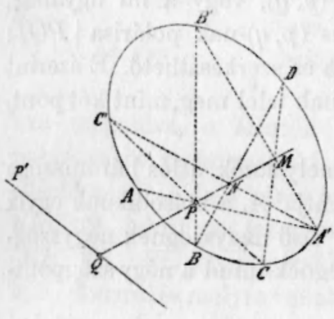
Magából a szerkesztésből következik még, hogy egy polárháromszög annyi adatnak felel meg, mint három pont, vagy három érintő.

99. Vegyünk fel A, B, C, D, P, P' pontokat és szerkesszünk kúpszeletet, mely az első négy ponton átmegy, és melyre vonatkozólag P, P' pontok kapcsolt pólusok.

Oly kúpszelet szerkesztendő, mely négy egyenest érint és melyre vonatkozólag két tetszőleges egyenes kapcsolt poláris.

Ha azon pontot, mely A, B, C, D négyszög átellenes oldalait P-től harmonikusan elválasztja (53) Q-nak nevezzük, akkor a keresett kúpszelet az lesz, mely A, B, C pontokon átmegy és melyre vonatkozólag P pont polárisa $|P'Q|$ egyenes.

Hogy ezt bebizonyítsuk, nevezzük azon pontokat (69. ábra), melyek A, B, C-től P pont és $|P'Q|$ egyenes által harmonikusan vannak elválasztva A', B', C'-nek. $|AB|$, $|A'B'|$, valamint $|AB|$, $|CD|$ egyenespárak P, Q-tól harmonikusan vannak elválasztva, ezért $|A'B'|$ és $|CD|$ metszőpontja M, — $|PQ|$ egyenesen fekszik; hasonlókép $|AC|$, $|A'C'|$, valamint $|AC|$, $|BD|$ egyenespárak, P, Q-tól harmonikusan vannak elválasztva, ezért $|A'C'|$ és $|BD|$ metszőpontja N, — $|PQ|$ egyenesen fekszik. Minthogy továbbá $C'A'B'BDC$ hatszög átellenes oldalpárjai:



69. ábra.

$|C'A'|$, $|BD|$; $|A'B'|$, $|DC|$ és $|B'B|$, $|C'C|$ egymást $|PQ|$ egyenes M, N, P pontjában metszik: $C'A'B'BDC$ Pascal-féle hatszög; tehát D pont rajta fekszik a C', A', B', B, C pontokon átmenő kúpszeleten, mely mint könnyen látható, A pontot is tartalmazza.

14. §. Kúpszeletek szerkesztése oly adatokból, melyek azt többféleképp határozzák meg.

100. Mindazon adatok, melyekből az előbbi fejezetben kúpszeletet szerkesztettünk, csak egyféleképp határozták meg a kúpszeletet, vagyis csak *egy* kúpszeletet lehetett szerkeszteni, mely az adott követelményeknek megfelelt. Lehet azonban oly adatokat is választanunk, melyek egynél több — de nem végtelen sok — kúpszeletet határoznak meg.

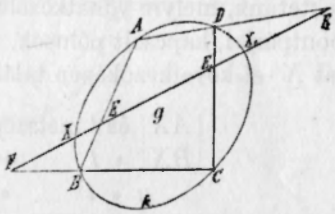
Hogy az erre vonatkozó szerkesztéseket megmutassuk, előre kell bocsátanunk a következőket.

Négy pont A, B, C, D, mint tudjuk, nem határozza meg a kúpszeletet egyféleképen, mert a sík tetszőleges pontján és ezen négy ponton mindig lehet kúpszeletet átfektetni, mely azonban azon esetben, a midőn az ötödik pont a négy pont összekötő egyenesének egyikén, pl. $|AB|$-n fekszik, elfajul $|AB|$, $|CD|$ egyenespárrá. A négy ponton átmenő kúpszeletek tehát a négy pont síkját teljesen betöltik. Mindezen kúpszeletek, melyek négy ponton átmennek, nevezetes tulajdonsággal bírnak, mely következő Desargues-tól eredő tétellel fejezhető ki:

Négy ponton átmenő összes kúpszelet a sík tetszőleges egyenesét egy involucziós pontsor kapcsolt pontpárjaiban metszik; a négy ponton átmenő egyenespárak metszőpontjai az egyenessel, az involucziós sornak kapcsolt pontjai.

Azon érintőpárak, melyek egy négyoldalba írható összes kúpszelethez egy tetszőleges pontból vonhatók: involucziós sugársort képeznek; a négy oldal átellenes szögpontjait projicziáló sugárpárak, kapcsolt sugarai az involucziós sornak.

Nevezzük $ABCD$ négyszög $|AB|$, $|CD|$; $|BC|$, $|AD|$ átellenes oldalainak és egy a négyszög szögpontjain átmenő tetszőleges kúpszeletnek metszőpontjait g egyenessel E, E_1; F, F_1; X, X_1-nek, és vegyük tekintetbe, hogy



70. ábra.

$$A\,(XX_1BD)\barwedge C\,(XX_1BD).$$

Az első négy és második négy sugárnak metszését képezve g-vel:

$$(XX_1EF_1)\barwedge(XX_1FE_1),$$

és

$$(XX_1EF_1)\barwedge(X_1XE_1F),$$

a miből már következik, hogy X, X_1 kapcsolt pontpárja azon involucziós sornak, melynek kapcsolt pontpárjai E, E_1; F, F_1. Ugyanígy bizonyíttatik be a jobb oldalon álló tétel is.

101. A tétel bizonyításánál föltételeztük, hogy A, B, C, D pontok valósak, de a tétel akkor is igaz, ha a négy pont közül kettő, egy elliptikus természetű involucziós pontsornak képzetes kettőspontja, a midőn a tétel így fejezhető ki:

Mindazon kúpszeletek, melyek két ponton átmennek és melyre vonatkozólag egy adott involucziós pontsor kapcsolt pontpárjai kapcsolt pólusok, tetszőleges egyenest involucziós pontsor szerint metszenek; ezen involucziós sornak egyik kapcsolt pontpárja az adott két pont összekötő egyenesének és az involucziós sor tartójának metszőpontja az egyenessel.

Ha mindazon kúpszeletekhez, melyek két egyenest érintenek és melyre vonatkozólag egy adott involucziós sugársornak kapcsolt sugarai kapcsolt polárisok, tetszőleges pontból érintőket húzunk, úgy ezen érintők involucziós sugársort képeznek, melynek egyik kapcsolt sugárpárja a két érintő metszőpontját és az adott sornak középpontját projicziálja.

Nevezzük a két adott pontot A, B-nek, az involucziós pontsor tartóját t-nek, a kúpszeleteket metsző egyenest g-nek; (g, t) metszőpontját γ-nak (71. ábra).

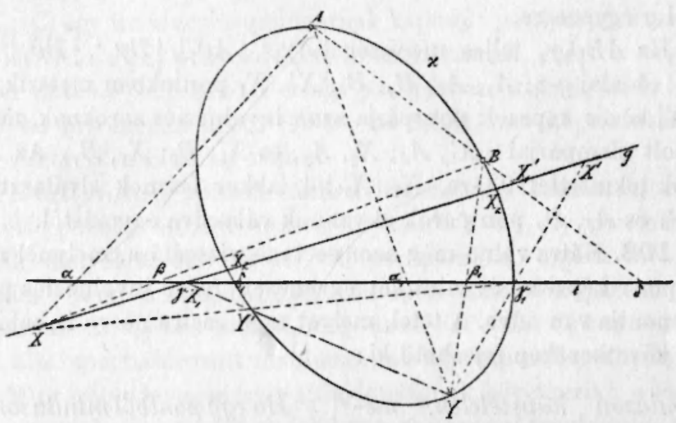
Ha A, B-n és g-nek tetszőleges X pontján át kúpszeletet, k-t fektetünk, melyre vonatkozólag t-n fekvő involucziós pontsor kapcsolt pontpárjai, kapcsolt pólusok, akkor k és g-nek második metszőpontját X'-et következőképen találjuk meg:

$|AX|$ és t metszőpontja α, ennek kapcsolt pontja t-n, α_1,
$|BX|$ « t « β, « « « t-n, β_1,
g « t « γ, « « « t-n, γ_1,
ha végre $|A\alpha_1|$ « $|B\beta_1|$ « Y, akkor $|Y\gamma_1|$, g egyenest X' pontban metszi, mert k kúpszelet képződménye azon két projektiv sugársornak, mely az adott involucziós pontsor kapcsolt elemeit X, Y-ból projicziálja (96). Ugyane k kúpszeleten fekszik ezért $|X\gamma_1|$ és $|Y\gamma|$ egyeneseknek metszőpontja Y' is, és mert $|X'Y'|$, szintúgy mint $|XY|$, t-nek k-ra vonatkozó pólusán megy át, a mint az k kúpszeletbe írt $XX'YY'$ négyszögből látható: k kúpszelet egyszersmind képződménye azon két projektiv sugársornak, melynek megfelelő sugarai t-n fekvő involucziós pontsor kapcsolt pontpárjait X', Y'-ból projicziálják.

k kúpszelet X, X' metszőpontjai g-vel, oly összefüggésben állanak Y, Y' pontokkal, hogy X, X' pontok Y', Y-nak projekcziói g és t metszőpontjához, γ-hoz, kapcsolt γ_1 pontból g-re; maguk az Y, Y' pontok pedig γ-val együtt egyenesen fekszenek.

Y, Y' pontokról kimutatható, hogy ezek, mialatt X és így egyszersmind X' pont g-n változik, γ_1 ponton átmenő $\varkappa$ kúpszeletet írnak le, a miből már következni fog, tekintettel arra, hogy $|YY'|$ egyenes az állandó γ ponton megy át, hogy Y, Y' pontpárak $\varkappa$-n, és így ezeknek projekcziói γ_1-ből g-re, vagyis X, X' pontpárak g egyenesen, involucziós pontsort képeznek.

Ha ugyanis X pont g-n tova halad, $|A\alpha|$ és $|B\beta|$ sugarak, melyek X-ben találkoznak, két projektiv sugársort, és így $|A\alpha_1|$ és $|B\beta_1|$ sugarak szintén két projektiv sugársort irnak le; ez utóbbi sorok megfelelő sugarainak metszőpontjai pedig az Y pontok.



71. ábra.

A midőn X, γ-ba kerül, a hozzá tartozó Y, — γ_1 lesz; tehát γ_1 rajta fekszik azon projektiv sorok képződményén, vagyis $\varkappa$ kúpszeleten, melylyel azon állításunk, hogy X, X' pontok, mint a változó k kúpszeletnek metszőpontjai g-vel, involucziós pontsort képeznek, — be van bizonyítva.

A midőn X pont t egyenes γ pontjába jut, k kúpszelet elfajul ezen t és $|AB|$ egyenessé, tehát e két egyenesnek X_1, X_1' metszőpontja g-vel szintén egy kapcsolt pontpárja lesz az involucziós sornak.

Jegyzet. 1) Ha g egyenes $|AB|$ és t metszőpontjához δ-hoz kapcsolt δ_1 ponton megy át, $\varkappa$ kúpszelet két egyenessé fajul, mert $|A\alpha_1|$ és $|B\beta_1|$ sugarak által leírt sugársorok perspektiv helyzetűek lesznek; ezen egyenesek közül az egyik $|AB|$, a másik pedig átmegy δ_1 ponton. Minden X ponthoz tartozik egy második metszőpont X', és ehhez egy Y' pont; Y és Y' pontoknak projekcziói δ-ból g-re: X' illetve X.

X és Y pontok g, illetve $\varkappa$-án projektiv pontsorokat írnak le, és mert Y-nak projekcziója δ-ból g-re X', tehát X és X' pontsor is projektiv. De ezek azonkívül involucziós helyzetű, mert X-nek megfelel a második sorban X' és X'-nek megfelel a második sorban (Y' közvetítésével) X pont.

2.) $\varkappa$ kúpszelet metszőpontjai g-vel szintén kapcsolt pontjai az X, X' pontpárak által leírt involucziós sornak, és előre megszerkeszthetők, mint azon két involucziós pontsor közös kapcsolt pontpárjai X_2, X_2', mely involucziós sorok projekcziói az adottnak A és B pontokból g egyenesre.

Ha $AB\delta_1\gamma_1$ teljes négyszög $|A\gamma_1|$, $|A\delta_1|$, $|B\gamma_1|$, $|B\delta_1|$, $|AB|$, $|\delta_1\gamma_1|$ oldalai g-t: A_γ, A_δ, B_γ, B_δ, X_1', X_1 pontokban metszik, akkor X_2, X_2' közös kapcsolt pontpárja azon involucziós soroknak, melynek kapcsolt elempárjai: X_1', A_δ; X_1, A_γ, és X_1', B_δ; X_1, B_γ. Az X_2, X_2' pontok tekintettel 93.-ra, X_1, X_1'-től, akkor lesznek elválasztva, ha A_γ, B_δ és A_δ, B_γ pontpárok el vannak választva egymástól.

102. Hátra volna még azon eset megvizsgálása, melynél mind a négy pont képzetes és mint két egyenesen fekvő involucziós pontsor kettőspontja van adva. A tétel, melyet ezen esetre nézve is bebizonyítunk, következőkép fejezhető ki:

Mindazon kúpszeletek, melyekre vonatkozólag, két egyenesen fekvő két involucziós pontsor kapcsolt pontpárjai, kapcsolt pólusok, egy tetszőleges egyenest involucziós pontsor szerint metszenek; a két involucziós pontsor tartójának metszőpontjai a felvett egyenessel: kapcsolt pontpárja az involucziós pontsornak.

Ha egy pontból mindazon kúpszeletekhez, melyekre vonatkozólag két adott involucziós sugársor kapcsolt sugarai, kapcsolt polárisok, érintőket húzunk, akkor ezek egy involucziós sugársornak kapcsolt sugarait képezik; e sornak egyik sugárpárja azon két sugár, mely a két involucziós sornak középpontját a felvett pontból projicziálja.

Hogy a baloldalon álló tételt bebizonyítsuk, nevezzük a két involucziós pontsor tartóját a, b-nek; ezeken fekvő involucziós sorok kapcsolt pontpárjait általánosan A_i, A_i'-nek, illetve B_i, B_i'-nek; a, b metszőpontját $A \equiv B$-nek, az ehez kapcsolt pontot a-n, valamint b-n A', illetve B'-nek, végre $|A'B'|$ egyenest röviden c-nek.

Először kimutatjuk, hogy «ha a és b egyeneseken fekvő involucziós pontsor tetszőleges A_i, A'_i; B_i, B'_i kapcsolt pontpárjain át kúpszeletet fektetünk, ezen kúpszeletek, bármint válaszszuk is az A_i, A'_i; B_i, B'_i kapcsolt pontpárakat, az (a, b) ponthoz kapcsolt A', B' pontok összekötő egyenesét $|A'B'| \equiv c$-t egy és ugyanazon involucziós pontsor kapcsolt pontpárjaiban C_i, C'_i-ben metszik, melynek egy kapcsolt pontpárja A', B'».

Ha A_i, A'_i; A_j, A'_j az a-n, B_i, B'_i; B_j, B'_j a b-n fekvő involucziós pontsornak kapcsolt pontpárja, és az A_i, A'_i, B_i, B'_i, valamint az A_j, A'_j, B_j, B'_j pontokon átmenő tetszőleges kúpszelet metszőpontja c-vel C_i, C'_i, illetve C_j, C'_j, — akkor kimutatandó, hogy A', B'; C_i, C'_i; C_j, C'_j egy involucziós pontsornak kapcsolt pontpárjai lesznek.

$A_iA'_iC_iC'_iB_jB'_j$ pontok kúpszeleten fekszenek, mert a négy első ponton átmenő kúpszelet b-t oly pontpárban metszi, mely B, B'; B_i, B'_i-tel involucziót képez (100.); ha tehát ama kúpszelet átmegy B_j-n, akkor B'_j-n is át fog menni.

$C_iC'_iB_jB'_jA_jA'_j$ pontok szintén kúpszeleten fekszenek, mert a négy első ponton átmenő összes kúpszeletek a-t oly pontpárakban metszik, melyek az A, A'; A_i, A'_i pontpárakkal együtt involucziót képeznek; végre a $B_jB'_jA_jA'_jC_jC'_j$ pontokon átmenő kúpszelet c-t oly pontpárban C_j, C'_j-ben metszi, mely az A', B'; C_i, C'_i kapcsolt pontpárak által meghatározott involucziónak egy kapcsolt pontpárja.

Mint különös esete ezen tulajdonságnak következik: «*ha a sík összes pontjain át azon lehetséges egyenes párakat meghúzzuk, melyek a és b egyeneseket a rajtuk fekvő involucziós pontsorok kapcsolt pontpárjaiba nmetszik, akkor az összes ily tulajdonságú egyenespárak, (a, b) ponthoz kapcsolt A', B' pontok összekötő $|A'B'| \equiv c$ egyenesét, egy és ugyanazon involucziós pontsor kapcsolt pontpárjaiban C_i, C'_i-ben fogják metszeni*», — mert ama egyenespárak elfajult kúpszeleteknek tekinthetők.

Figyelembe véve már most a 97-dik pont alatt tárgyalt szerkesztést, tiszta fogalmat szerezhetünk magunknak, az összes k_i kúpszeletekről, melyekre vonatkozólag az a és b-n fekvő involucziós pontsorok kapcsolt pontjai, kapcsolt pólusok; mert ezek képződményei ama projektiv sugársoroknak, melyeknek C_i, C'_i középpontjai a c-n fekvő, és a két adott involucziós pontsor által meghatározott, involucziós pontsor kapcsolt pontpárjai, és mely projektiv sugársorok megfelelő sugarai, az a-n, vagy b-n fekvő involucziós pontsorok kapcsolt pontjait projicziálják. Ezután bebizonyítandó, hogy mindazon k_i kúp-

A mi annak megitélését illeti, hogy az adatok mily helyzeténél van a feladatnak *két valós*, vagy *két képzetes megoldása*, és mely attól függ, hogy a szóban forgó involucziós sorok hyperbolikus avagy elliptikus természetűek-e, az az 52-dik pont végén adott tapasztalati eredményekből könnyen leolvasható. A feladatnak *egy megoldása* van, ha az adott egyenes a négy pont egyikén megy át, illetve, ha az adott pont a négy egyenes egyikén fekszik. —

Ha a négy pont közül A, B valós, a másik kettő, mint t-n fekvő involucziós pontsor képzetes kettőspontja van adva, akkor (71. ábra) g-n levő kettőspontok felkeresésére czélszerű t és $|AB|$-nek metszőpontjait X_1, X_1'-et az adott g egyenessel, egyik kapcsolt pontpárnak választani.

Az adott involucziós pontsor projekcziói A és B pontból g-re szintén elliptikus természetüek, s mint ilyenek, közös kapcsolt pontpárral X_2, X_2'-vel bírnak, melyet a g-n származó involucziós pontsor második kapcsolt pontpárjának tekinthetünk.

A feladat ezen esetben két valós, vagy két képzetes megoldással bír, a szerint, a mint X_1, X_1'; X_2, X_2' pontpárak egymástól nincsenek, vagy pedig el vannak választva. De ezen kritérium (tekintettel a 101. pont 2. jegyzetére) visszavezethető még egyszerűbbre, mely magukból az adatokból leolvasható és mely tapasztalási eredmény így szól: «ha a két adott valós pont g és t egyenes közül csak *egyik* által van elválasztva, akkor a feladat nem ad valós megoldást, minden más esetben a feladatnak két valós megoldása van».

A dualisan megfelelő feladat diskussiójára nézve következő mondható. Ha a négy egyenes közül kettő a, b valós, kettő pedig T involucziós sugársor képzetes kettőssugara, és G azon pont, melyen a négy egyenest érintő kúpszelet átfektetendő, akkor a, b egyenesek metszéshez hozatnak T sugársorral és a származott involucziós pontsorokat G-ből projicziáló sugársorok közös kapcsolt sugárpárjának x_2, x_2'-nek helyzete $|GT| \equiv x_1$, $|G, (a, b)| \equiv x_1'$ sugárpárhoz meghatározza, hogy két valós vagy pedig képzetes kúpszelet felel-e meg a feladat követelményeinek. Ha ugyanis x_2, x_2'; x_1, x_1' sugárpárak egymástól nincsenek elválasztva, akkor a feladatnak két valós megoldása van; ellenkező esetben nincs oly valós kúpszelet, mely a követelményeknek megfelel. Ez ismét visszavezethető még egyszerűbb kritériumra, t. i.: «ha G, T pontokat a, b egyenesek közül csak *egyik* választja el, akkor a megoldások képzetesek; különben valósak». —

Hátra volna végre azon eset megvizsgálása, a melynél a négy pont. illetve a négy egyenes, képzetes, és mint két elliptikus természetű involucziós pontsor kettőspontja van adva.

Ezen esetben a feladatnak mindig két valós megoldása van, mert bármily helyzetü g egyenes, a rajta kimetszett involucziós sor — melynek A_1, B_1; D, G kapcsolt elempárja a 72. ábrában egymástól soha sincsen elválasztva — mindig hyperbolikus természetű. —

104. E §-ban tanult alaptétel azonban fordítva is igaz, t. i.: *Mindazon kúpszeletek, melyek három ponton és egy involucziós pontsor kapcsolt pontpárjain átmennek, egymást még egy negyedik pontban metszik.* Mert ha A, B, C azon három pont és P, Q; P_1, Q_1, az involucziós pontsor két kapcsolt pontpárja, t annak tartója, úgy A, B, C, P, Q és A, B, C, P_1, Q_1 ponton átmenő két kúpszelet, mint később látni fogjuk, még egy negyedik közös ponttal D-vel bír. A, B, C, D ponton átfektetett kúpszeletek t-t egy involucziós pontsorban metszik, melynek két kapcsolt pontpárja P, Q; P_1, Q_1, mely tehát az adott involuczió pontsorral azonos. Innen következik, hogy az adott involucziós pontsor más kapcsolt pontpárján P_i, Q_i-n és A, B, C-n áthelyezett kúpszeletek D ponton is átmennek.

E tulajdonság tekintetbe vételével *szerkeszthetünk kúpszeletet, mely három adott ponton megy át és melyre vonatkozólag két adott pontpár kapcsolt pólus.*

Ha ugyanis A, B, C az adott három pont; P, Q és P_1, Q_1 a két pontpár, úgy A, B, C pontokon át oly két kúpszeletet (legegyszerűbben egyenespárt) fektetünk, mely $|PQ|$ egyenest két-két, P, Q pontoktól harmonikusan elválasztott pontban metszi. E két kúpszelet A, B, C pontokon kívül még egy negyedik közös ponttal, D-vel bír. Ha most A, B, C, D pontokon át kúpszeletet fektetünk, melyre (99) vonatkozólag P_1, Q_1 kapcsolt póluspár, úgy ez lesz a keresett kúpszelet, mert ez $|PQ|$ egyenest azon involucziós pontsor kapcsolt pontjában metszi, melynek két kettőspontja P, Q pont.

105. A négy ponton A, B, C, D-n átmenő kúpszeletek ama tulajdonsága, hogy azok tetszőleges egyenest involucziós pontsor szerint metszenek, igaz marad még akkor is, ha a négy pont közül kettő-kettő, pl. A és C, valamint B és D egybe esik. $ABCD$ négyszögnek AC, BD oldalai ekkor a kúpszeletek érintőivé, $|AB| \equiv |CD|$ egybeeső oldalak pedig azon kúpszeletek érintő húrjává változnak. Ennélfogva mondhatjuk:

«Az összes kúpszeletek, melyek két egyenest ugyanazon két pontban érintenek, azon tulajdonsággal birnak, hogy tetszőleges egyenest involucziós pontsor szerint metszenek. A két érintő metszőpontja a metsző egyenessel az involucziós pontsornak egy kapcsolt pontpárja, az érintőhúr metszőpontja pedig egy kettőspontja.

pontból a kúpszeletekhez vonható érintőpárak involucziós sugársort képeznek. Azon sugárpár, mely a két érintő érintőpontját projicziálja a felvett pontból: a sornak két kapcsolt sugara; az érintők metszőpontját projicziáló sugár pedig annak egyik kettőssugara.

Ily kúpszeletek nemcsak ama két egyenest, hanem egymást is a két érintőn fekvő pontban érintik és *kettős érintésű* kúpszeleteknek neveztetnek.

Kettős érintésű kúpszeletekre vonatkozólag a két közös érintő metszőpontjának polárisa: a két ponton átmenő egyenes; továbbá az érintők metszőpontján átmenő, valamint annak polárisán fekvő és egy kúpszeletre vonatkozólag kapcsolt polárisok, illetve kapcsolt pólusok, valamennyi kúpszeletre nézve kapcsolt polárisok és kapcsolt pólusok.

Minthogy ezen kapcsolt pólus és polarisokból képezett involucziós sorok, melyek mindig perspektiv helyzetűek, elliptikus természetűek is lehetnek, a midőn ugyanis a két érintő és azok érintő pontja képzetes, ezért mi általában, «mindazon kúpszeleteket, melyekre vonatkozólag egy perspektiv helyzetű involucziós pont- és sugársor tartói poláris és pólus, és azon involucziós sorok kapcsolt elemei, kapcsolt pólusok, illetve kapcsolt polárisok: *kettős érintésű* kúpszeleteknek nevezzük», tekintet nélkül arra, hogy a felvett involucziós sorok elliptikus vagy hyperbolikus természetűek-e.

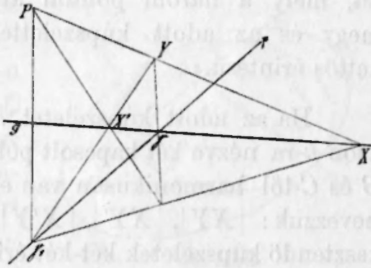
Ily helyzetű kúpszeleteket már volt alkalmunk megismerni a 84*a*-ik pontnál, mert «kúpszeleten fekvő két projektiv pontsor megfelelő pontjait összekötő egyenesek által beburkolt kúpszelet az eredetivel kettős érintésű», valamint «egy kúpszelet projektiv vonatkozású érintői közül a megfelelőknek metszőpontjai, az eredetivel kettős érintésű kúpszeleten fekszenek».

Ha a kettős érintésű kúpszeleteknek két közös érintője és így egyszersmind ezeknek érintőpontja képzetes, kérdezhetjük, valjon az előbbi alaptétel ily *képzetes kettős érintésű* kúpszeletekre is vonatkozik-e vagy nem?

Hogy ezt megvizsgálhassuk, nevezzük az összes kúpszeletekre nézve közös pólust és polárist P és p-nek, a metsző egyenest g-nek; g és p metszőpontját γ-nek, az ehez kapcsolt pólust p-n, γ_1-nek;

g-nek tetszőleges pontját X-nek; azon pontot, mely X-től P, p által harmonikusan van elválasztva Y-nak, végre $|Y\gamma_1|$ és g metszőpontját X'-nek (73. ábra).

Visszaemlékezvén a (95. pont alatt) tanult szerkesztésre, látható, hogy p-n fekvő és kapcsolt pólusokból álló involucziós pontsor kapcsolt elemeit X, Y-ból projicziáló sugársorok képződménye, egy az X, Y ponton átmenő k kúpszelet, mely az adatokból meghatározott kettős érintésű kúpszeletekhez tartozik, és melynek második metszőpontja g-vel $|Y\gamma_1|$ és g metszőpontja X'.



73. ábra.

Mialatt X, g-n végig halad, $|\gamma_1 X|$ és $|\gamma_1 Y|$ sugarak hyperbolikus természetű involucziós sugársort írnak le, melynek kettőssugarai: p és $|\gamma_1 P|$ sugarak; miből már következik, hogy X, X' pontok, vagyis a változó k kúpszelet metszőpontjai g-vel, g-n involucziós ponsort írnak le, melynek kettőspontjai p és $|P\gamma_1|$ metszőpontjai g-vel.

Ennélfogva mondhatjuk:

Kettős érintésű kúpszeletek, legyen az érintés valós vagy képzetes, azon tulajdonsággal birnak,

hogy tetszőleges egyenest involucziós pontsorok szerint metszenek, melynek egyik kettőspontja, az érintőpontokon átmenő egyenes metszőpontja a metsző egyenessel.	*hogy tetszőleges pontból a kúpszeletekhez vont érintőpárak involucziós sugársor képeznek, melynek egyik kettőssugara a közös érintők metszőpontján megy át.*

E kettőspont a kúpszeletek által a metsző egyenesen indukált involucziós pontsorok közös elempárjának egyik elemét képezi.

E tételből következik:

Mindazon egy adott k kúpszelettel kettős érintésű kúpszeletek érintőhúrjai, melyekre nézve g egyenesen adott involucziós pontsor kapcsolt pontjai kapcsolt pólusok, g egyenest ugyanazon két pontban metszik; e két pont az adott involucziós pontsornak k-ra vonatkozólag kapcsolt póluspárja.

E tétel ilyképen is kifejezhető: «ugyanazon két (valós vagy képzetes) ponton átmenő és egy állandó kúpszelettel kettős érintési kúpszeletek összes érintőhúrjai, a két adott pont összekötő egyenesét ugyanazon két pontban metszik».

106. A szerkesztési feladat, melyet ezen tételt alapul véve, megoldhatunk, igy szól:

«Adva van egy kúpszelet és három

pont; szerkesztendő oly kúpszelet, mely a három ponton átmegy és az adott kúpszelettel kettős érintésü.»

egyenes; szerkesztendő oly kúpszelet, mely a három egyenest érinti és a kúpszelettel kettős érintésű.»

Ha az adott kúpszeletet k-nak, a három pontot A, B, C-nek, azon k-ra nézve két kapcsolt póluspárt, mely A és C-től, valamint B és C-től harmonikusan van elválasztva Y, Y'; illetve X, X'-nek nevezzük: $|XY|$, $|XY'|$, $|X'Y|$, végre $|X'Y'|$ egyenesek k-t a szerkesztendő kúpszeletek két-két érintőpontjában metszik (74. ábra).

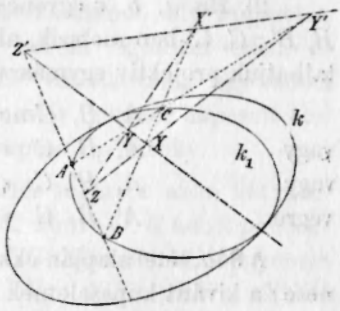
Hogy ezt belássuk, nevezzük azon kúpszeletet, mely k-t pl. k és $|XY|$ valós vagy képzetes metszőpontjaiban érinti és C ponton átmegy, s mely ezen adatokból teljesen meg van határozva (95.), k_1-nek. AC egyenes k, k_1-et egy involucziós pontsor kapcsolt pontpárjaiban metszi, melynek egyik kettőspontja Y; ezen involucziós sor meg van határozva k és $|AC|$ metszőpontjai, mint egy kapcsolt pontpár és Y kettőspont által, mert ezekből a másik kettőspont Y' szerkeszthető. Ennélfogva k_1-nek második metszőpontja $|AC|$-vel azon pont lesz, mely C-t Y, Y'-től harmonikusan elválasztja, vagyis az adott A pont. E szerint k_1 átmegy A-n és hasonlóképp bebizonyítható, hogy k_1 átmegy B ponton is.

Az $XYX'Y'$ teljes négyszög harmonikus tulajdonsága folytán $|XY|$, $|X'Y'|$; $XY'|$, $|X'Y|$ egyenespárak egymást ABC átlós háromszög AB átlóján metszik, mely Z', Z metszőpontok A, B pontokat szintén harmonikusan választják el. Ezért nem nyerünk új kúpszeleteket, ha a szerkesztésnél C pont szerepét A vagy B pont szerepével fölcseréljük.

A feladatnak általában *négy megoldása van;* a megoldások valósak, ha lehet oly két kapcsolt pólust találni, mely A, C és B, C-től harmonikusan van elválasztva, a mi csak akkor következik be, ha mind a három pont A, B, C a kúpszelet egyik oldalán fekszik, vagyis: ha vagy mind a három pont a kúpszeleten kívül, vagy mind a három pont a kúpszeleten belül fekszik. —

Ha A, B, C pontok k kúpszeleten belül fekszenek, akkor

X, X'; Y, Y' pontokat következőkép szerkeszthetjük. $|BC|$ egyenes pólusát B, C pontokkal összekötő egyenesek a kúpszeletet egy négyszög szögpontjaiban metszik, melynek $|BC|$-n fekvő átlóspontja: X, X'; mert X, X' a kúpszelettől és B, C pontoktól harmonikusan van elválasztva. Ugyanígy Y, Y' pont átlóspontja azon k kúpszeletbe írt négyszögnek, melynek két átellenes oldala A és C pontokon átmegy és egymást $|AC|$ pólusában metszi.



74. ábra.

A midőn A, B, C pontok k-n kívül fekszenek, B, C, valamint A, C pontokból érintőket huzunk k-hoz; az első két érintőpár, valamint a másik kettő, két a kúpszelet körül írt négy oldalnak négy-négy oldala, melyeknek átlói $|BC|$ illetve $|AC|$ átlókat X, X' és Y, Y' pontokban metszik. —

Lehet azonban e feladatot, t. i. «A, B, C ponton át kúpszeletet szerkeszteni, mely k kúpszelettel kettős érintésű», a 84a. tétel felhasználásával is megoldani, ha A, B, C pontok k kúpszeleten kívül fekszenek.

Nevezzük A, B, C pontokból k-hoz vont érintőpárakat a, a'; b, b'; c, c'-nek és vonatkoztassuk k kúpszelet érintőit oly módon projektiv egymásra, hogy a, b, c-nek a', b', c' feleljen meg: ekkor minden új megfelelő érintőpárnak x, x'-nek metszőpontja, az idézett tétel alapján a keresett kúpszeletnek egy pontja. Lehet azonban a, a'; b, b'; c, c' érintőpárakat úgy is egymásra projektiv vonatkoztatni, hogy

	a, b, c'-nek	megfeleljen	a', b', c,
vagy	a, b', c «	«	a', b, c',
végre	a', b, c «	«	a, b', c',

mert ekkor is a három ismert egymásnak megfelelő érintőpárnak metszőpontja A, B, illetve C pont. A feladat tehát ezen eljárás szerint szintén négy megoldást szolgáltat.

A jobb oldalon álló feladat hasonló eljárások szerint oldható meg.

1). Megszerkesztjük k kúpszeletre vonatkozólag azon kapcsolt polárisokat, melyek az adott a, c és b, c egyenesektől harmonikusan vannak elválasztva; ezen y, y' és x, x' egyenespárak (x, y), (x', y), (x, y'), (x', y') közös pontjaihoz tartozó és k-ra vonatkozólag kapcsolt polárisok: kapcsolt polárisok egyszersmind a kivánt kúpszeletekre nézve is, melyek már ezen adatokból (95. szerint) szerkeszthetők.

2). Ha a, b, c egyenesek k kúpszeletet valós pontokban A, A'; B, B'; C, C'-ben metszik, akkor a kúpszelet pontjait úgy vonatkoztathatjuk projektiv egymásra, hogy

	A, B, C-nek megfeleljen		A', B', C',
vagy	A, B, C' «	«	A', B', C,
vagy	A, B', C «	«	A', B, C',
végre	A', B, C «	«	A, B', C'.

A 84a. tétel alapján ekkor két-két megfelelő pont összekötő egyenese: a kivánt kúpszeletnek érintője és pl. az első projektiv vonatkozásnál $|AB'|$, $|A'B|$; $|AC'|$, $|A'C|$ egyenespárak metszőpontjainak összekötő egyenese k-t, az első projektiv vonatkozásból leszármaztatott kúpszeletnek két érintőpontjában metszi.

A feladatnak négy megoldása van, ha vagy mind a három egyenes a, b, c a kúpszeletet valós, vagy pedig mind a három képzetes pontok szerint metszi.*

107. Mindkét feladat speciálizálható, miből következő új feladatok származnak:

«Három ponton át kúpszelet fektetendő, mely két egyenest érint.»	«Két ponton át kúpszelet fektetendő, mely három egyenest érint.»

Ha a bal oldalon álló feladatnál a két egyenest elfajult kúpszeletnek, a jobb oldalon levő feladatnál pedig a két pontot elfajult kúpszeletnek tekintjük és meggondoljuk, hogy két egyenes vagy két pont, mely akár az egyenespártól, akár a pontpártól harmonikusan van elválasztva, ezen egyenes- vagy pont-párrá elfajult kúpszeletre vonatkozólag kapcsolt poláris, illetve kapcsolt pólus, a feladatot az előbbiek szerint megoldottnak tekinthetjük. A feladatnak négy megoldása valós, ha a három pont közül kettő nincs elválasztva egy egyenes által, tehát ha a pontok nem fekszenek az egyenesek által képezett mellékszögek szárai között; továbbá a második feladatnál a négy megoldás valós, ha a két pont összekötő egyenesének

* Chasles M. (1793—1880): «Traité des sections coniques» Paris, 1865, 351. lap.

metszőpontjai a három adott egyenessel oly helyzetüek, hogy egy metszőpont sincs elválasztva a többiektől, csak *egy* adott pont által. A bal oldalon álló feladatnál azonban a két egyenes, a jobb oldalon levőnél a két pont képzetes is lehet, azért a feladat általánosabban így fejezhető ki.

«Három ponton át kúpszelet fektetendő, melyre vonatkozólag egy adott involucziós sugársor kapcsolt sugarai kapcsolt polárisok».	«Szerkesztendő oly kúpszelet, mely három egyenest érint, és melyre vonatkozólag egy adott involucziós pontsor kapcsolt elemei kapcsolt pólusok».

Ha az elliptikus természetű involucziós sugársor azon két mindenkor valós kapcsolt sugárpárja, mely A, C, illetve B, C adott pontoktól harmonikusan van elválasztva (54.), $|BC|$, illetve $|AC|$ egyenest X, X' és Y, Y' pontokban metszi, akkor $|XY|$, $|X'Y|$, $|XY'|$, $|X'Y'|$ egyenesek az involucziós sugársor sugarait involucziós pontsor szerint metszi; a három adott ponton A, B, C-n átmenő négy kúpszelet, melyekre vonatkozólag ezen négy involucziós pontsor kapcsolt pontpárjai kapcsolt pólusok (96.): a keresett négy kúpszelet.

Jegyzet. A 106-dik feladatnak és speciális eseteinek megoldása azon esetben, a midőn a három pont közül kettő képzetes, megtalálható a 97-dik lapon idézett: Hofmann F. könyvében, mely ezen érdekes feladatnak különböző megoldását tartalmazza. —

15. §. Képzetes kúpszelet. Polárrendszer.

108. A 78. pont alatt tanultuk a következő tételt: «ha két pontot egy involucziós pontsor kapcsolt pontjaival sugarak által összekötjük, akkor egy-egy kapcsolt pontpáron átmenő sugárpárak egymást oly kúpszeleten metszik, melyre vonatkozólag az involucziós pontsor kapcsolt pontjai, kapcsolt pólusok, annak tartója és a két pont összekötő egyenese kapcsolt polárisok, s mely kúpszelet átmegy a két ponton».

Ezen kúpszeletre vonatkozólag egy tetszőleges g egyenes pólusát szerkeszthetjük a nélkül, hogy a kúpszeletnek pontjait ismernők. Ha ugyanis a két pontot P, Q-t összekötő $|PQ| = b$ egyenesnek és az involucziós sor a tartójának C metszőpontjához kapcsolt pont az involucziós sorban B (75. ábra); azon pont, mely C-t P, Q-tól harmonikusan elválasztja A; továbbá g és a metszőpontjához A_1-hez kapcsolt pont A_1'; g és b metszőpontjától B_1-től P, Q által harmonikusan elválasztott pont B_1': akkor g-nek pólusa a kúpszeletre vonatkozólag $|AA_1'|$ és

$|BB_1'|$ egyeneseknek metszőpontja G. Mert tekintetbe véve, hogy a és b a kúpszeletre vonatkozólag kapcsolt poláris, tehát a és b-nek pólusa A és B; A_1 és B_1 pontoknak polárisa $|AA_1'|$, illetve $|BB_1'|$, azonnal következik: hogy $|A_1B_1| \equiv g$ egyenesnek pólusa $|AA_1'|$, $|BB_1'|$-nek metszőpontja G.

E szerkesztésből látható, hogyan lehetett volna egy általános helyzetű G pontnak polárisát g-t, a kúpszeletre vonatkozólag megszerkeszteni, a nélkül, hogy a kúpszeleteknek újabb pontjait szerkesztettük volna.

Ha g egyenes A ponton megy át, akkor pólusa: (g, a) metszőpontjához kapcsolt pont az a-n adott involucziós sorban, és viszont: az a-n fekvő pontok polárisai A-nak és a felvett ponthoz kapcsolt pontnak összekötő egyenesei. Ha g egyenes B ponton megy át, annak pólusa P, Q-tól (g, b) pont által harmonikusan elválasztott pont.

A szerkesztésre nézve kivételt képeznek $(a, b) \equiv C$-n átmenő g egyenesek, melyeknek pólusai $|AB| \equiv c$-n fekszenek, valamint a c-n fekvő G pontok, melyeknek polárisai C ponton mennek át.

Ily egyenesek és pontok pólusai és polárisainak szerkesztése egy általános helyzetű pólus és poláris közvetítésével történik, mert C-n átmenő g egyenes tetszőleges pontjának polárisa, c-t g-nek pólusában metszi, és fordítva c-n fekvő G ponton átmenő tetszőleges egyenes pólusának összekötő egyenese C-vel, azon G pont polárisa.

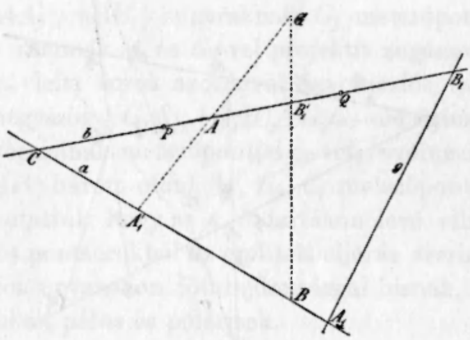
109. g egyenes pólusának (vagy G pont polárisának) szerkesztésénél követett eljárást rövidebben is kifejezhetjük, ha P, Q pontokat b-n fekvő hyperbolikus természetű involucziós pontsor kettőspontjainak tekintjük, t. i. ilyképen: «Miután $(a, b) \equiv C$ ponthoz kapcsolt pontot A és B-t, mint a és b-nek pólusát megszerkesztettük, g és a, valamint g és b metszőpontjához A_1, illetve B_1-hez kapcsolt A_1', B_1' pontokat összekötjük A, illetve B-vel, mely $|AA_1'|$, $|BB_1'|$ egyenesek metszőpontja a keresett pólus G''». A szerkesztés nem kívánja P, Q kettőspontok ismeretét, mert involucziós pontsor kapcsolt pontpárjait, két pontpárból a kettőspontok felhasználása nélkül is szerkeszthetjük.

Ebből látható, hogy a pólus és poláris szerkesztésénél nem is lényeges az, hogy P, Q pontok valósak legyenek, vagyis a b-n fekvő involucziós pontsor hyperbolikus természetű legyen; g egyeneshez tartozó G pont ép úgy szerkeszthető akár hyperbolikus, akár elliptikus természetű a és b-n adott involucziós pontsor.

Vizsgáljuk meg, hogy ezen esetben, a midőn az a-n és b-n adott involucziós pontsorok elliptikus természetűek, és a és b-nek pólusa,

b illetve a-n fekvő és $(a, b) \equiv C$ metszőponthoz kapcsolt A és B pont, hogy akkor a «sík minden pontjához és egyeneséhez lehetséges-e *egy* egyenest és *egy* pontot, mint polárist és pólust hozzárendelni, és hogy e pólus és poláris bír-e azon tulajdonsággal, melyet a kúpszeletnél róla tanultunk? t. i.: hogy egy ponton átmenő összes sugarak pólusai a pont polárisán fekszenek és azon sugársorral involucziós fekvésü pontsort képeznek».

Hogy egy az A, vagy B ponton átmenő g egyenes pólusa, az a-n, illetve b-n fekvő ama egy pont, mely (g, a) illetve (g, b) ponthoz



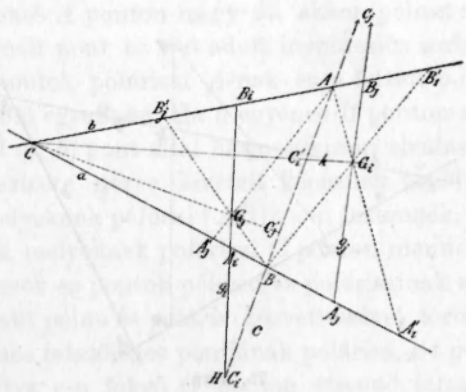
75. ábra.

kapcsolt, továbbá hogy ebből folyólag egy általános helyzetü g egyenesnek pólusa oly G pont, melyben (g, a), illetve (g, b)-hez az involucziós sorban kapcsolt pontnak összekötő egyenese A, illetve B-vel egymást metszi, — az az előbbi szerkesztésből látható. De hogy egy a C ponton átmenő h egyenes pólusa jelen esetben is c egyenesen fekvő H pont-e, az által lesz kimutatva, ha bebizonyítjuk, hogy h-n fekvő tetszőleges G_i pontnak polárisa c-t egy és ugyanazon C_i pontban metszi.

Ha G_i projekczióját A és B-ből a és b-re A_i', B_i'-nek, ezekhez kapcsolt pontot A_i, B_i-nek nevezzük, úgy kimutatandó, hogy $|A_iB_i|$, és c metszőpontja C_i állandó pont, bármint változik is G_i, h egyenesen. Ha G_i (76. ábra), h-n tovamozog, akkor A_i', B_i' és így egyszersmind A_i, B_i két projektiv pontsort ír le; ez utóbbi sorok azonban perspektivek, mert ha G_i, c-nek C_i' pontjába jut, akkor A_i és B_i, C-be kerül. Minthogy továbbá A és B két megfelelő pontja az A_i és B_i által leírt projektiv pontsoroknak, azért a mozgó $|A_iB_i|$ egyenes, $c \equiv |AB|$-nek ugyanazon C_i pontján megy át.

Ezzel kimutattuk, hogy a fönnebbi szerkesztés szerint, *minden pontnak a síkban egy egyenenes és minden egyenesnek egy pont felel meg.*

Egy ponton átmenő sugaraknak azon tulajdonságát bebizonyítandó, hogy involucziós fekvésüek pólusai által képezett pontsorral, és mely tulajdonság az A-n és B-n átmenő sugársorra nézve a származtatás folytán igaz, — azt előbb C ponton átmenő sugarak és azoknak c-n fekvő pólusaira nézve akarjuk megvizsgálni.



76. ábra.

Ha az előbbi (76.) ábrában $|AA'_i|$ állandó, h pedig C körül forog, akkor G_i pont $|AA'_i|$-n, B'_i és így B_i, b-n, végre $|A_iB_i| \equiv g_i$ sugár A_i körül projektiv sort ír le, miből következik, hogy a változó h és $|A_iB_i|$ által c-n kimetszett pontsorok, vagyis C'_i és C_i által befutott pontsorok projektivek. De ezek azon kívül involucziós fekvésüek is, mert az első sor A és B pontjának megfelel a másodikban B és A, miből következik (30), hogy h által leírt sugársor involucziós fekvésü annak C_i pólusa által képezett pontsorral.

Ezen a c-n fekvő involucziós pontsor, melynek kapcsolt elemei az előbbi C_i, C'_i pontok, oly összefüggésben áll az a és b-n adott involucziós pontsorokkal, melyeknek kapcsolt pontpárjai A_i, A'_i; B_i, B'_i, hogy ha egy tetszőleges g_i egyenes a, b, c-t A_i, B_i, C_i pontokban metszi, akkor $|AA_i|$, $|BB_i|$, $|CC'_i|$ egyenesek g_i-nek pólusán G_i-n mennek át.

A pólus és polárisnak a kúpszeleteknél tanult azon tulajdonsága, «hogy ha G_i pont g_j egyenesen pontsort ír le, akkor a mozgó G_i-nek polárisai, vagyis g_i egyenesek, átmennek g_j-nek pólusán G_j-n és G_i sorral involucziós fekvésü sugársort képeznek», itt szintén bekövetkezik.

Ha ugyanis G_i, g_j-n tovamozog, akkor a mozgó G_i pontnak A'_i, B'_i projekcziói A és B-ből a és b-re, és A_i, B_i pontok, melyeknek összekötő egyenese $|A_iB_i| \equiv g_i$, polárisa G_i-nek, G'_i-vel projektiv pontsort írnak le; A_i, B_i pontsorok azonban perspektiv helyzetüek, mert ha G_i, (c, g_j) pontba jut, akkor annak mindkét projektív sorban C felel meg. De g_j-n fekvő $(a, g_j) = A_j$, és $(b, g_j) = B_j$ pontoknak polárisai $|AA'_j|$, $|BB'_j|$ sugarak, tehát a mozgó G_i ponttal változó q_i polárisok is mindannyian $|AA_j|$, $|BB'_j|$ sugaraknak G_j metszőpontján — mely q-nek pólusa — mennek át, és G_i-vel projektiv sugársort írnak le. De ezen G_i, g_i által leírt sorok azonkívül involucziós fekvésüek, mert $ABCG_j$ teljes négyszög $|G_jA|$, $|G_jB|$, $|G_jC|$ oldalainak, mint g_i sugársor három sugarának metszőpontjai g_j-vel, involucziós fekvésüek a $|BC|$, $|CA|$, $|AB|$ három oldal A_j, B_j, C_j metszőpontjaival.

Ezzel kimutattuk, hogy az a, b tartókon levő elliptikus természetű involucziós pontsorokból az említett eljárás szerint szerkesztett pólus és polárisok ugyanazon főtulajdonsággal bírnak, mint egy kúpszelet által indukált pólus és polárisok.

110. *A sík pontjai és egyeneseinek összességét, melyek olynemü vonatkozásban állanak, hogy minden pontnak és rajta átmenő sugarakból álló sugársornak, egyenes és ezen fekvő pontsor felel meg, s mely pontsor az előbbi sugársorral involucziós fekvésü: polárrendszernek nevezzük.* Az egymásnak megfelelő pontot és egyenest: pólus és polárisnak; az egyenes pólusán átmenő bármely egyenest az előbbi egyeneshez kapcsolt polárisnak; egy pont polárisán fekvő bármely pontot, azon ponthoz kapcsolt pólusnak nevezik.

Hogy pontok és egyeneseknek ilynemű vonatkozása létesíthető, azt láttuk először a kúpszelet pólus és polárisainál, de láttuk másodszor a kúpszelettől függetlenül az imént szerkesztett pólus és polárisoknál is. Lényeges különbség nincs is a két polárrendszer között, csupán az, hogy *oly polárrendszernél, mely két elliptikus természetű involucziós pontsorból A_i, A'_i; B_i, B'_i-ből lett szerkesztve, nem található oly valós pont, mely polárisán feküdnék,* vagy a mi ugyanaz: *tetszőleges egyenesen fekvő kapcsolt pólusokból, valamint tetszőleges ponton átmenő kapcsolt polárisokból álló involucziós sorok kettőselemei képzetesek*; míg ha a két involucziós pontsor közül egyik (vagy mindkettő) hyperbolikus, tehát P, Q kettőspontokkal bír, akkor végtelen sok oly valós pont található, mely polárisán fekszik. Mind e pontok azon kúpszeletnek pontjai, melyben a másik involucziós pontsor kapcsolt elemeit P, Q kettőspontokból projicziáló sugársorok megfelelő sugarai egymást metszik.

Ha ugyanis az adott elliptikus természetű involucziós sorok a, b tartóinak pólusa A, B; azoknak metszőpontja C; a tetszőleges g_j egyenesnek pólusa G_j, akkor $ABCG_j$ négyszög és g_j egyenes kölcsönös helyzetéből következik, tekintettel az 53-ik pontban adott tapasztalati eredményre, hogy a négyszögnek átellenes oldalai g_j-t, elliptikus involuczióban metszik, tehát g_j-n fekvő és G_j-n átmenő kapcsolt pólusok, illetve kapcsolt polárisok által képezett involucziós sorok közül egyiknek sincsenek valós kettőselemei. Ugyanez mondható c-n fekvő, és C-n átmenő egyenesekről is.

Minthogy a polárrendszer egyes egyenesein fekvő kapcsolt pólusokból képezett involucziós pontsorok kettőspontjai, a midőn a polárrendszer valós kúpszelet által indukáltatik, ezen valós kúpszeleten fekszenek: ezért mi *azon esetben, a midőn az összes egyeneseken fekvő kapcsolt pólusokból képezett involucziós sorok kettőspontjai képzetesek, ezen képzetes kettőspontokat egy a polárrendszer által meghatározott képzetes kúpszeleten fekvőnek tekintjük, és ama polárrendszerről azt mondjuk, hogy e képzetes kúpszelet által indukáltatik.*

Képzetes és valós kúpszeletek által indukált polárrendszerek, mindazon tulajdonságban megegyeznek egymással, mely nem vonatkozik egyeneseken fekvő vagy ponton átmenő kapcsolt pólusok, illetve kapcsolt polárisokból álló involucziós sorok kettőselemeire, vagyis a kúpszelet pontjai és érintőire.

Igy Pascal- vagy Brianchon-féle hatszög és hatoldalról nem szólhatunk képzetes kúpszeletnél, mert ha egy Paskal-féle hatszög egyik oldalán fekvő szögpontokat egy involucziós pontsor képzetes kettőspontjainak tekintjük is, nem lehet ezt azon oldallal szomszédos oldalra nézve tenni; mert két valós egyenes ugyanazon síkban egymást mindig valós pontban metszi.

De magára a polárrendszerre vonatkozó tulajdonságok megegyezők, legyen a kúpszelet mely a polárrendszert indukálja valós vagy képzetes.

Tanultuk, pl. hogy k kúpszelet pontjainak $\varkappa$ kúpszeletre vonatkozó polárisai egy k' kúpszeletet burkolnak, és ezen tulajdonság igaz marad akkor is, ha $\varkappa$ képzetes, mert a 81-ik pontban adott bebizonyitás szóról-szóra itt is alkalmazható.

A 79-ik pont alatt előfordult azon tétel, hogy «ha egy kúpszelet síkjában két tetszőleges egyenest a, b-t veszünk fel, és az egyiknek A_i pontjait a másiknak ezen pontokhoz $\varkappa$-ra vonatkozólag kapcsolt B_i pontjaival $|A_iB_i|$ egyenesek által összekötjük, akkor A_i változásával, változó $|A_iB_i|$ sugarak: kúpszeletet burkolnak», és az ebből folyó «Hesse-féle» tétel bebizonyításai nem kívánják, hogy $\varkappa$ pontjai valósak legyenek, tehát képzetes $\varkappa$-ra nézve is érvényesek. Ugyanez mondható azon tételre nézve is, mely szerint «két polárháromszög szögpontjai egy új kúpszeletnek pontjai», stb. stb. —

111. A képzetes kúpszeletet, vagy a mi ugyanazt fejezi ki, az általa indukált polárrendszert más, adatokból is meg lehet határozni, mint azt az előbbi pontban tanultuk s melyek következők voltak:

a) két egyenesen adott kapcsolt polusokból álló involucziós pontsor, melyeknek tartói a polárrendszer kapcsolt polárisai;

a_1) két ponton átmenő kapcsolt polárisokból álló involucziós sugársor, ha a sorok középpontjai kapcsolt pólusok;

mert ha képesek vagyunk más adatokból ezeket meghatározni, a nélkül, hogy még más föltételekre volna szükségünk, akkor ezekből a polárrendszer, mint láttuk, mindig szerkeszthető.

Oly adatok, melyekből egyszerű úton következtetni lehet, a) vagy a_1) alatt levő adatokra, melyekből tehát a polárrendszer egyszerűen szerkeszthető, következők:

b) és b_1). *Egy polárháromszög ABC és egy általános helyzetű G pontnak polárisa g.*

c) és c_1). Egy polárháromszög ABC és g egyenesen fekvő involucziós pontsor vagy ez utóbbi helyett, G ponton átmenő involucziós sugársor, ha a sorok elempárjai kapcsolt pólusok, illetve kapcsolt polárisok.

g, $|AB|$; g, $|BC|$; g, $|CA|$ egyenesek metszőpontjaihoz kapcsolt pontokat C, ill. A és B-vel egyenesek által összekötjük; ezek g-nek polusán, G-n átmenő egyenesek lesznek. A feladat e szerint az előbbire van visszavezetve.

d) és d_1). A pont, annak polárisa a, és ezen fekvő involucziós pontsor, melynek kapcsolt pontpárjai kapcsolt pólusok; végre egy kapcsolt pontpár X, X', vagy (ez utóbbi helyett) egy kapcsolt egyenes pár x, x'.

$|XX'|$ és a metszőpontjának polárisa A-n és az a involucziós sorban a metszőponthoz kapcsolt póluson megy át, és $|XX'|$-et $(|XX'|, a)$ ponthoz kapcsolt pólusban metszi. A feladat ez által az előbbire van visszavezetve, mert A szögpont és a átellenes oldallal végtelen sok polárháromszöget szerkeszthetünk, és $|XX'|$-en ismeretes a kapcsolt pólusokból álló involucziós pontsor.

e) Két involucziós pontsor, melynek kapcsolt pontpárjai kapcsolt pólusok, a nélkül, hogy a pontsorok tartói kapcsolt polárisok volnának, és még egy az előbbi sorokhoz nem tartozó kapcsolt póluspár X, X'. (99).

e_1) Két involucziós sugársor, melynek kapcsolt sugarai kapcsolt polárisok, a nélkül, hogy középpontjai kapcsolt pólusok volnának, és még két tetszőleges kapcsolt poláris.

Ha X ponton át azon sugárpárt megszerkesztjük, mely a és b pontsort kapcsolt pontokban metszi, akkor ez utóbbi két kapcsolt pontpár egy négyszögnek szögpontja; e négyszögnek átlósháromszögének egyik szögpontja (a, b), a másik X, — a harmadik Y, a Hesse-féle tétel (79) szerint X-hez kapcsolt pólus. Ebből következik, hogy X-nek pólusa $|X'Y|$. Ha ugyanígy megszerkesztünk X'-hez, egy kapcsolt pólust Y'-et, akkor $|XY'|$, X'-nek polárisa; és ezért $|XY'|$, $|X'Y|$ egyenesek metszőpontja X'', $|XX'|$ egyenesnek pólusa. $XX'X''$ polárháromszög és az adott involucziós pontsorok egyike *b)* szerint meghatározza a polárrendszert. —

A polárrendszer meghatározására vonatkozó szerkesztéseket más adatokból, «Schröter H.: Theorie der Kegelschnitte» czímű mű 58. §-ában találhatunk.

Természetes, hogy ezen szerkesztések akkor is érvényesek, ha az általuk meghatározott polárrendszerhez tartozó kúpszelet nem képzetes, hanem valós pontokkal bír; vagyis egy valós kúpszelet szintén meg van ez adatokból határozva, mint ezt részben már a 13. §. alatt láttuk. —

16. §. Kúpszeletek átmérői.

112. Mondottuk a 65. pontban, hogy a kúpszeletek azon pontok minősége szerint osztályoztatnak, melyet közösen bírnak síkjuk végtelen távol fekvő egyenesével.

A sík végtelen távol fekvő egyenesének g_∞-nek, más tekintetben is fontos szerepe van a kúpszeletek tanában, a mennyiben a kúpszeletek polártulajdonságairól tanult tételek egyszerűbb alakot öltenek, ha a bennük fellépő egyenesek közül egyik vagy másik g_∞-nel lesz pótolva. Különös fontos e tekintetben azon polárháromszögek megvizsgálása, melyeknek egyik oldalát g_∞ képezi, s melyek ellipsis és hyperbolánál nem fajulnak el, mert g_∞ e görbéket nem érinti. Mi tehát előbb azon két kúpszeletre nézve fogjuk megvizsgálni ama polárháromszögeket, melyeknek egyik oldala g_∞, de könnyen fölismerhető, hogy a levezetett tételek közül, melyek érvényesek minden kúpszeletre, a menynyiben az nem fajul el, hanem görbe vonal marad; tehát épp úgy parabolára, mely g_∞-t érinti, mint ellipsis vagy hyperbolára nézve egyaránt alkalmazhatók.

Legyen E_∞, k kúpszelet síkjában felvett l egyenesnek végtelen távol fekvő pontja. E_∞ pont polárisa e, mindazon pontokat tartalmazza, melyek E_∞-en átmenő vagyis l-lel párhuzamos húrokat E_∞-től harmonikusan elválasztják, és jelen esetben azokat (72) felezik. Az e egyenes végtelen távol fekvő $E_{1\infty}$ pontjának polárisa e_1, átmegy E_∞-en és szintén tartalmazza mindazon pontokat, melyek az e-vel párhuzamos húrokat felezik.

e, e_1 egyenesek, mint g_∞-n fekvő E_∞, $E_{1\infty}$ pontoknak polárisai egymást g_∞-nek pólusában M-ben metszik, és g_∞-nel együtt egy polárháromszögnek $ME_\infty E_{1\infty}$-nek oldalait képezik. Minthogy M pont polárisa végtelen távol fekszik, az M ponton átmenő kúpszelethúrok általa feleztetnek.

Egy görbe vonal síkjának azon pontja, mely valamennyi rajta átmenő húrt felezi: a görbe vonal *középpontjának;* minden a középponton átmenő húr, és általában minden a görbe síkjában annak középpontján átmenő egyenes: a görbe *átmérőjének* neveztetik.

Ezen értelmezés szerint mondhatjuk: *kúpszelet síkjában végtelen távol fekvő egyenesnek pólusa, a kúpszelet középpontja; és a végtelen távol fekvő egyenes pontjainak polárisai, a kúpszelet átmérői.*

E szerint: *a parabola középpontja végtelen távol, az ellipsis és hyperbola középpontja pedig véges távolságban van.* Ez utóbbi két kúpszeletet ezért: (véges távolságban) *középponttal biró kúpszeletnek* is szokás nevezni.

113. A kúpszelet középpontján átmenő kapcsolt polárisokat, mint $ME_\infty \equiv e_1$, $ME_{1\infty} \equiv e$, *kapcsolt átmérőknek* nevezik. Minthogy e, ill. e_1-gyel párhuzamos húrok, e_1 ill. e által feleztetnek, mondhatjuk: *a kúpszelet bármely kapcsolt átmérőpárja azon tulajdonsággal bír, hogy az egyik átmérővel párhuzamos húrok a hozzá kapcsolt átmérő* *által feleztetnek,* a minek további következménye, hogy *egy átmérő végpontjában vont érintő párhuzamos a hozzá kapcsolt átmérőhöz.*

Minthogy a kúpszelet körül írt négyoldal átlói, egy polárháromszögnek oldalai, és a kúpszeletbe írt négyszög átlóspontjai egy polárháromszögnek szögpontjai, következik: *a kúpszelet körül írt parallelogramm átlói, valamint a kúpszeletbe írt parallelogramm oldalaival párhuzamos átmérők: a kúpszelet kapcsolt átmérői.* — Mint minden ponton, úgy a kúpszelet középpontján M-en átmenő kapcsolt polárisok vagyis *a kúpszelet kapcsolt átmérői, involucziós sugársort képeznek,* mely g_∞-t, végtelen távol fekvő kapcsolt pontokban metszi. *A kapcsolt átmérők által képezett involucziós sugársor hyperbolikus vagy elliptikus,* a szerint a mint g_∞ a kúpszeletet valós vagy képzetes pontpárban metszi, vagyis *a szerint, a mint a kúpszelet hyperbola vagy ellipsis.*

Minthogy g_∞ a hyperbolát valós pontokban metszi, g_∞-nek pólusa, a hyperbola középpontja, a hyperbolán kívül fekszik; a középpontból a hyperbolához valós érintők húzhatók, melyek a kapcsolt átmérők által képezett sugársornak és egyszersmind a hyperbolának valós *asymptotáit* képezik és a hyperbolát a végtelen távol fekvő pontokban érintik. A hyperbola két-két kapcsolt átmérőpárja egymástól nincsen elválasztva; a kapcsolt átmérők közűl egyik a hyperbolát valós, a másik képzetes pontokban metszi. Ellenben az ellipsis középpontja, mert polárisa (g_∞) az ellipsist nem metszi valós pontokban, az ellipsisen belűl van; a középpontból nem húzhatók valós érintők az ellipsishez; annak asymptotái képzetesek. Mind a hyberbola, mind pedig az ellipsis középpontja, középpontja egyszersmind az átmérőkön fekvő kapcsolt pontok által képezett involucziós pontsoroknak, mert a középpont az egyes átmérők végtelen távol levő pontjának kapcsolt pontja.

Ehhez járul még, hogy *az egyenoldalú hyperbola kapcsolt átmérői által képezett involucziós sugársor: egyenoldalúan hyperbolikus,* mert asymptotái egymásra merőlegesek, és így a kapcsolt átmérők szögei, az asymptoták által feleztetnek. Ellenben a körnek, mint speciális ellipsisnek, kapcsolt átmérői egymásra merőlegesek,* tehát *a kör kapcsolt átmérői által képezett involucziós sugársor:*

* Ezt a kapcsolt átmérők azon általános tulajdonságából tudjuk, hogy az egyik átmérővel párhuzamos húrok a másik által feleztetnek. A körnél, egy átmérővel párhuzamos húrok felezőpontja, a reá merőleges átmérőben fekszik.

czirkularis. Egy sík valamennyi körére nézve g_∞-en fekvő kapcsolt pontpárak egy és ugyanazon involucziós pontsort képeznek, melynek kettőspontjai, mint a sík összes köreinek képzetes metszőpontjai g_∞-nél: a síknak végtelen távol fekvő képzetes körpontjai (44).

A kapcsolt átmérők által képezett involucziós sugársornak egymásra merőleges kapcsolt sugarai, vagyis a sugársor tengelyei: *a kúpszelet tengelyeinek;* ezeknek valós metszőpontjai a kúpszelettel *csúcsoknak* neveztetnek. Az *ellipsis,* mert mindkét tengely által valós pontokban metszetik, *négy csúcscsal bír; a hyperbola csak kettővel.* A hyperbola tengelyeiről megjegyzendő, hogy ezek felezik az asymptoták által képezett szögeket, mert minden hyperbolikus természetű involucziós sugársor tengelyei, a kettőssugarak szögfelezői.

114. Az előbbi §-ban kimutattuk, hogy két egyenes és ezeken fekvő involucziós pontsorok által, egy kúpszelet van meghatározva, melyre vonatkozólag a pontsorok tartói kapcsolt polárisok, és a pontsorok kapcsolt pontjai, kapcsolt pólusok. A sík végtelen távol fekvő egyenesének pólusa azon adatok által meghatározott valós vagy képzetes kúpszeletnek középpontja.

Ha az involucziós pontsorok tartóinak metszőpontja mindkét involucziós pontsor középpontja, akkor azon tartók az általuk meghatározott kúpszeletnek átmérői, metszőpontjuk már a kúpszeletnek középpontja; és ha azon tartók még egymásra merőlegesek, akkor azok a kúpszeletnek tengelyei lesznek. A kúpszelet maga ellipsis, vagy hyperbola, vagy *képzetes kúpszelet* a szerint, a mint a felvett involucziós pontsorok közül mindkettő vagy csak az egyik, vagy egyik sem hyperbolikus, hanem elliptikus természetű.

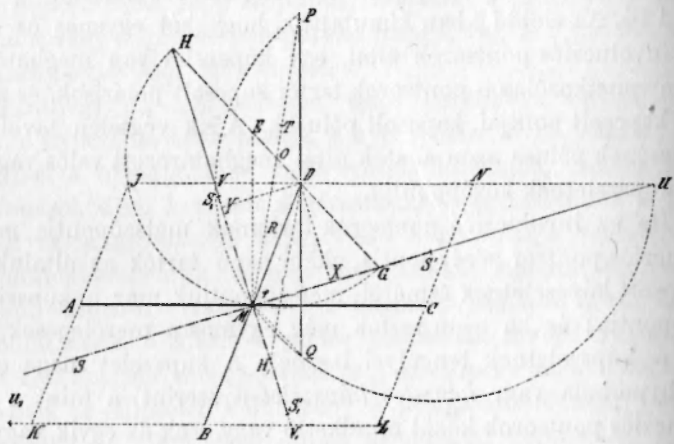
Ebből következik, hogy *az ellipsis, hyperbola, és a képzetes kúpszelet egy kapcsolt átmérőpárja és a rajtuk fekvő involucziós pontsorok által van meg határozva.* Ugyanez ily módon is kifejezhető: egy ellipsis meg van határozva, ha ismeretesek egy kapcsolt átmérőpárnak (valós) metszőpontjai az ellipsissel; a hyperbola pedig meg van határozva ha ismeretes egy átmérőjének metszőpontja a hyperbolával és a hozzá kapcsolt átmérőn fekvő elliptikus természetű involucziós pontsornak egy kapcsolt pontpárja.

Legyen AC, BD valamely ellipsis egy kapcsolt átmérőpárja, mely az ellipsist A, C; B, D pontokban, egymást pedig annak középpontjában M-ben metszik; *szerkeszszük meg az ellipsis tengelyeit.*

AC valamint BD átmérők pólusai, BD ill. AC végtelen távol fekvő pontjai, tehát azon négyoldal, melynek oldalai az ellipsist

ABCD pontokban érintik: parallelogramm lesz. Ezen *IKLN* parallelogrammnak, mint minden a kúpszelet körülírt négyoldalnak átlói (72), a kúpszeletet illetőleg kapcsolt egyenesek és mert a parallelogrammnak *IL*, *KN* átlói *M*-en mennek át, azért szükségkép kapcsolt átmérők.

Hogy az $|MA|$, $|MB|$; $|MK|$, $|ML|$ kapcsolt sugarak által meghatározott involucziós sugársor tengelyeit szerkeszthessük (77. ábra) metszéshez hozzuk ezen sugarakat tetszőleges egyenessel, pl. *M A*-val párhuzamos *IN* érintővel, mely őket: *IN* végtelen távol fekvő pontjában, és *D*-ben; továbbá *N* és *I*-ben metszi. *D* középpontja, *N*, *I* pedig hatványpontjai azon involucziós pontsornak, mely szerint *IN*



77. ábra.

szelő a kapcsolt átmérőkből képezett involucziós sugársort metszi. Ha most *D*-ben *IN*-re emelt merőlegesre reá viszszük $AM = MC = ID = DN$-et, *P*, *Q*-ig, úgy (33) a *P*, *Q* pontokon átmenő összes körök *IN*-et kapcsolt pontokban metszik; tehát *PQM* pontokon átmenő kör és *IN* egyenes *U*, *V* metszőpontjait *M*-ből projicziáló $|MU|$, $|MV|$ sugarak, az involucziós sugársornak és egyszersmind az ellipsisnek tengelyei (36).

Az ellipsisnek, $|MU|$, $|MV|$ tengelyeken fekvő *S*, *S'* ill. S_1, S_1' pontjai, vagyis az ellipsis csúcspontjai: kettőspontjai azon involucziós pontsoroknak, melyet a tengelyen levő és az ellipsisre nézve kapcsolt pólusok meghatároznak. Hogy ezen pontokat és evvel egyszersmind a *tengelyek hoszszát* SS', S_1S_1'-et szerkeszthessük, ismernünk kell mindegyik involucziós pontsornak két pár kapcsolt pontját; de mert M középpontja az egyes átmérőkön levő involucziós pontsoroknak: elégséges *egy* kapcsolt pontpárnak ismerete.

$|MU|$, $|MV|$ tengelyek U, V pontjainak kapcsolt pontjai X, Y ott lesznek, hol az U és V pontokon átmenő $IVDNU$ ellipsis-érintő D érintőpontjából a tengelyekre bocsátott merőlegesek, a tengelyeket metszik; mert ezen $|DX|$, $|DY|$ egyenesek U, V, pontoknak az ellipsisre vonatkozó polárisai. $|MU|$, $|MV|$-n fekvő S, S' és $S_1 S_1'$ csúcspontoknak meghatározása

$$\overline{MS}^2 = \overline{MS'}^2 = MX . MU; \; \overline{MS_1}^2 = \overline{MS'_1}^2 = MY . MV$$

egyenletek alapján történik.

Megjegyezhető még, hogy ha AC, BD kapcsolt átmérők egyenlő hosszúak lennének, úgy PMQ kör, IN egyenest I, N pontokban metszené és a tengelyek $IKLN$ rhombusnak szögpontjain mennének át. E szerint *az ellipsis tengelyei felezik az egyenlő hosszú kapcsolt átmérők által képezett szögeket.* —

114*a*. Az ellipsis átmérői által képezett involucziós sugársor hatványa $\operatorname{tg}(UMD) . \operatorname{tg}(UMC)$ kifejezhető MS_1, MS' közökkel. A 77. ábrából látható, hogy

$$\operatorname{tg}(UMD) = \frac{MY}{MX}, \; \operatorname{tg}(UMC) = \operatorname{tg}(VUM) = \frac{MV}{MU},$$

tehát az involucziós sugársor hatványának értéke:

$$\frac{MY . MV}{MX . MU} = \frac{\overline{MS_1}^2}{\overline{MS'}^2};$$

de mert $\overline{MS_1}^2 : \overline{MS'}^2$ viszony az ellipsisnél lényegesen positiv UMD, UMC hegyes szögek pedig ellenkező jelűek és így tangenseiknek szorzata negativ, azért

$$\operatorname{tg}(UMD) . \operatorname{tg}(UMC) = -\frac{\overline{MS_1}^2}{\overline{MS'}^2}.$$

Az ellipsis átmérői által képezett involucziós sugársor hatványa egyenlő a tengelyek négyzetének viszonyával negativ előjellel véve.

115. Az ellipsis tetszőleg kapcsolt átmérőpárjának, pl. AMC BMD-nek hajlásszöge: $DMC = \varphi$, az átmérők hoszsza: $AC = 2a_1$, $BD = 2b_1$, és a tengelyek hossza: $SS' = 2a$, $S_1S_1' = 2b$ között igen egyszerű relacziók léteznek, melyek az előbbi ábrából levezethetők.

MVD, MUD háromszögek kettős területei:

$$MV.MX = MV.YD = VD.MD \sin\varphi,$$
$$MU.MY = MU.XD = DU.MD \sin\varphi,$$

miből

$$MX.MU.MY.MV = VD.DU.\overline{MD}^2.\sin^2\varphi =$$
$$= \overline{PD}^2.\overline{MD}^2.\sin\varphi = \overline{MA}^2.\overline{MD}^2.\sin^2\varphi,$$

avagy

$$a^2.b^2 = a_1^2.b_1^2 \sin\varphi,$$

és így

$$ab = a_1 b_1 \sin\varphi \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; 1)$$

Másrészt

$$\overline{MX}^2 + \overline{MY}^2 + VD.DU = \overline{MD}^2 + \overline{PD}^2,$$

és mert

$$VD : MX = VU : MU$$
$$DU : MY = VU : MV$$

azért:

$$VD.DU = \frac{MX.MY}{MU.MV}.\overline{VU}^2 = \frac{MY.MX}{MU.MV}(\overline{MU}^2 + \overline{MV}^2);$$

ezt az előbbi egyenletbe helyettesítve:

$$(MX.MU + MY.MV)\left(\frac{MX}{MU} + \frac{MY}{MV}\right) = \overline{MD}^2 + \overline{PD}^2.$$

Tekintve azonban, hogy

$$\frac{MX}{MU} = \frac{VD}{VU}, \quad \frac{MY}{MV} = \frac{DU}{VU};$$

tehát

$$\frac{MX}{MU} + \frac{MY}{MV} = \frac{VD}{VU} + \frac{DU}{VU} = 1,$$

leszen

$$MX.MU + MY.MV = \overline{MD}^2 + \overline{PD}^2,$$

végre

$$a^2 + b^2 = a_1^2 + b_1^2 \;.\;.\;.\;.\;.\; 2)$$

Az 1) egyenlet következő egyszerű tétellel fejezhető ki: «az ellipsisbe írt parallelogrammok területei állandók, ha azoknak szögpontjai az ellipsis kapcsolt átmérőinek végpontjai; továbbá az ellipsis körül írt parallelogrammok területei állandók, ha azoknak oldalai annak kapcsolt átmérőivel párhuzamosak».

1) és 2) egyenletek alapján a tengelyek hosszúsága egyszerűen

szerkeszthető. Ha ugyanis 1)-nek kétszeresét 2)-hez adjuk és abból kivonjuk, úgy leszen:

$$(a+b)^2=a_1^2+b_1^2+2a_1b_1\sin\varphi=a_1^2+b_1^2=2a_1b_1\cos MDQ,$$

$$(a-b)^2=a_1^2+b_1^2-2a_1b_1\sin\varphi=a_1^2+b_1^2-2a_1b_1\cos MDQ,$$

mely egyenletek jobb oldalai az MDP, ill. MDQ háromszögek MP, ill. MQ oldalainak négyzeteit jelentik. Ennélfogva

$$MP=a+b,\quad MQ=a-b,$$

tehát

$$SM=MS=a=\frac{MP+MQ}{2},\ S_1'M=MS_1=b=\frac{MP-MQ}{2},$$

miből az ellipsis csúcsai egyszerűen szerkeszthetők.

Az ellipsis nagyobb tengelyét SS'-et, *fő-*, kisebb tengelyét S_1S_1'-et *melléktengelynek* nevezik és rendesen $2a$, illetve $2b$-vel jelölik.

Az MP, MQ egyenesek, melyek a tengelyek hosszúságnak meghatározására szolgáltak, helyzetük által a tengelyek helyzetének szerkesztésére is alkalmasak. $PVMQU$ kört tekintve:

$$PU\text{ ív}=UQ\text{ ívvel},$$

és így

$$PMU\measuredangle=UMO\measuredangle,$$

tehát $|MU|$, $|MV|$ tengelyek felezik az MP, MQ egyenesek által képezett szögeket.

Az ellipsis tengelyei ezek szerint AC, BD kapcsolt átmérőkből következőkép szerkesztetnek: «az egyik, pl. BD átmérő D végpontjából a hozzá kapcsolt átmérőre merőlegeset bocsátunk és erre D-től mérve reárakjuk a BD-hez kapcsolt AC átmérő felét P, Q-ig; PMQ-szög felezője, a fő-, a reá M középpontban emelt merőleges a melléktengely. Ha még MQ, M-től mérve P-felé MP-re reárakatik R-ig ($MQ < MP$) úgy RP felezőpontjának T-nek távolsága M es P-től a fő-, ill. melléktengely félhosszúsága, a, b lesz». (Frézier-féle szerkesztés). Frézier (1689—1776.)

Vigyük fel az M pontban AC-re emelt merőlegesre $AM=MC$ félátmérőt E-ig, és nevezzük ED köz- O felezőpontjából M-en át leírt körnek metszőpontjait ED-vel: G, H-nak. Minthogy $EM \# PD \# DQ$, $EMDP$ és $EDMQ$ négyszögek parallelogrammok, tehát MP egyenes átmegy O-n és $MQ \parallel GH$.— $|MH|$, $|MP|$, $|MG|$, $|MQ|$ sugarak, melyek ED egyenes által négy harmonikus helyzetű pontban (H, O, G és a végtelen távol levő pontban) metszenek: harmonikusak; és mert $MH \perp MG$: $|MG|$ és $|MH|$ felezi $|MP$, $|MQ|$ egyenesek által képezett szögeket. Ezen $|MH|$, $|MG|$ egyenesek tehát a kúpszelet tengelyei.

Ha még meggondoljuk, hogy

$$EO = OD = \frac{MQ}{2},\ HO = OG = OM = \frac{MP}{2},$$

azt látjuk, hogy

$$HD = HO + OD = \frac{MP+MQ}{2}\ \text{és}\ DG = OG - OD = \frac{MP-MQ}{2},$$

tehát HD és DG a féltengelyeket szolgáltatják.

E szerint az ellipsis tengelyei helyzetük és nagyságukra nézve AMC, BMD kapcsolt átmérőkből következőkép szerkeszthetők: «az egyik pl. AC átmérőre az ellipsis M középpontjában merőlegest emelünk és erre M-től rárakjuk AM-et E-ig; E pontnak a másik átmérő D végpontjával összekötő ED egyenesét metszéshez hozzuk G, H pontokban azon körrel, mely ED köznek O felezőpontjából M-en át leírható; MG, MH a tengelyek helyzetét, DG, DH azoknak félhosszát adják meg olyképen, hogy DH, M-től mérve MG-re, DG pedig M-től mérve MH-ra helyezendő fel.» (Rytz-féle szerkesztés.)*

116. Azon körülményből, hogy HD és DG a tengelyek félhosszával egyenlő, következtetni lehet az ellipsis pontjainak szerkesztésére, ha annak tengelyei helyzet és nagyságra nézve ismeretesek.

Minthogy BD és így D tetszőleges átmérője, ill. pontja az ellipsisnek és HD, DG az ellipsis tengelyeinek félhosszával egyenlő, azt látjuk, hogy: ha GHD egyenes úgy mozog, hogy H pontja mindig az ellipsisnek egyik tengelyén, G pontja annak másik tengelyén marad, úgy HG egyenesnek D pontja leírja azon ellipsist, melynek tengelyei $2GD$, $2DH$ hosszuságak.

Ha mi továbbá D ponton át DG_1H_1 egyenest fektetünk, mely a tengelyekhez ép oly szög alatt hajlik, mint GDH, és MG tengelyt G_1-ben, MH-t H_1-ben metszi, úgy $DG_1 = DG$, $DH_1 = DH$. Ha ezen H_1G_1D egyenest úgy mozgatjuk, hogy H_1 pontja az ellipsisnek MH tengelyén, G_1 pontja MG tengelyén maradjon, akkor H_1G_1D egye-

* Wiener Christian: Darstellende Geometrie, 1884 Teubner; I. k. 293 l.

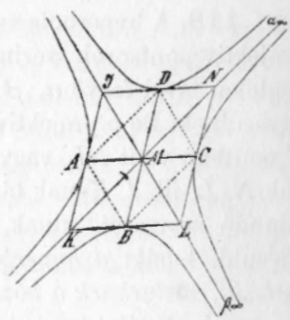
nesnek D pontja szintén leírja azon ellipsist, melynek tengelyei $2G_1D$, $2H_1D$ hosszúságúak.

Ennélfogva: «ha egy egyenesnek két szilárd pontja egy derékszög szárain mozog, akkor azon egyenesnek minden pontja leír egy ellipsist; ennek tengelyei egybeesnek a derékszög száraival és hosszúságuk a leíró pontnak a szilárd pontoktól mért távolságainak kétszeresse».

Ezen leírási módja az ellipsisnek tiszta fogalmat ad annak alakjáról és a szerkesztésből látható, hogy a tengelyek az ellipsist symmetrikus részekre osztják.

Megjegyzendő még, hogy a szilárd pontok által határolt köz felezőpontja, minthogy az egyenes mozgása alkalmával egyenlő távolságra marad a derékszög csucsától, kört ír le. A kör tehát oly ellipsisnek tekinthető, melynek tengelyei egyenlő hosszúak.

117. Áttérünk most a hyperbola asymptotáinak, az érintők érintőpontjainak, és tengelyeinek szerkesztéséhez, ha az, egy pár kapcsolt átmérőjének helyzete és a rajtuk fekvő, a hyperbolát illetőleg, involucziós pontsorok által van adva, melynek kapcsolt pontjai, kapcsolt pólusok a hyperbolát illetőleg. E pontsorok közül az egyik mindig hyperbolikus, a másik elliptikus természetű. Legyen a 78. ábrában a hyperbolikus involucziós pontsor A, C kettőspontjai által, az elliptikus pedig B, D hatványpontjai által adva. Minthogy AC átmérőnek pólusa BD-n fekszik és B, D pontok kapcsoltak: AD, BC valamint AB, CD egyenesek (78) egymást a hyperbolának, nevezzük α, β pontjaiban, és a hyperbolába írt $A\alpha C\beta$ négyszög átellenes szögpontjainak A, C és α, β-nak érintői egymást BD-n fekvő kapcsolt pólusokban (76) metszik. AC egyenesnek pólusa azonban BD-nek végtelen távol fekvő pontja, miért is α, β pontoknak érintői BD átmérőnek végtelen távol fekvő pontjához kapcsolt M ponton, a hyperbola középpontján mennek át; $|M\alpha|$, $|M\beta|$ egyenesek tehát a hyperbola asymptotái.



78. ábra.

Ha A, C pontokon át BD-vel és B, D pontokon át AC-vel párhuzamosan húzott egyenesek metszőpontjait I, K, L, N-nel jelöljük, úgy a hyperbola asymptotái ezen $IKLN$ parallelogramm KN, IL átlói, mert ezek M-en és AD, BC-nek, ill. AB, CD-nek végtelen távol fekvő α, β metszőpontján, tehát a hyperbolának végtelen távol fekvő két pontján mennek át. Minthogy AC, BD a hyperbolának tetszőlegesen választott átmérőpárja következik: *a hyperbola asymptotái azon parallelogrammnak átlói, melynek oldalai egy kapcsolt átmérőpárral párhuzamosak és melyek azon átmérőkön fekvő kapcsolt pólusokból álló involucziós pontsorok kettőspontjain, illetve hatványpontjain mennek át.*

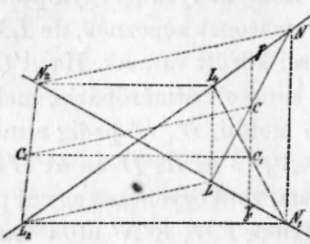
Bármely, a kúpszeleten kívüli tetszőleges ponton átmenő kapcsolt poláris közül egyik a kúpszeletet valós, a másik képzetes pontban metszi, és ezen egyenesek egymástól a ponton átmenő érintők által harmonikusan vannak elválasztva. A hyperbola asymptotái is, mint M középponton átmenő érintők, a kapcsolt átmérőket harmonikusan választják el, még pedig úgy, hogy az egyik átmérő mindig valós, a másik képzetes pontokban metszi a hyperbolát, miért is: *a hyperbola (valós) pontjai az asymptoták által képezett négy szög közül, két csúcsszögnek szárai között fekszenek.*

118. A hyperbola asymptotáit, mint két érintőt, a többi érintők projektiv pontsorok szerint metszik, melyeknek ellenpontja, mint a végtelen távol fekvő α, β érintőpontoknak megfelelő pontok, M-ben egyesülnek. De e projektiv pontsorok két megfelelő pontjának, mint C pontban vont NL, vagy A pontban vont IK érintő metszőpontjának N, L, ill. I, K-nak távolságai az ellenpontoktól (jelenleg M-től) állandó szorzatot adnak, mely a projektív pontsorok hatványával egyenlő, tehát: *a hyperbola érintői az asymptotákat oly pontokban metszik, melyeknek a középponttól mért távolságai állandó szorzatot képeznek.* E tétel így is kifejezhető: *a hyperbola asymptotái és az egyes érintőkből, mint oldalakból képezett háromszögeknek területe állandók,* mert egy ily háromszögnek pl. LMN-nek kettős területe $ML \cdot MN \cdot \sin LMN$.

E tétel alapján a hyperbola bárhány érintőjét szerkeszthetjük, ha a két asymptota IL, KN és egy érintő NL ismeretes. L, N pontokon át ugyanis párhuzamosokat huzunk, melyek az asymptotákat L_1, N_1; L_2, N_2; . . . pontokban metszik; e pontok összekötő egyenesei: L_1N_1, L_2N_2, . . . érintői a hyperbolának. (79. ábra.)

De az egyes érintők érintőpontja is egyszerűen szerkeszthető, mert *az érintőről az asymptoták által lemetszett résznek felezőpontja az érintőpont.* Az érintőponton átmenő átmérőhöz kapcsolt átmérő ugyanis párhuzamos az érintővel, az érintő pedig a kapcsolt átmérők, valamint az asymptoták által harmonikus pontok szerint metszetik, mely metszéspontok közül egyik végtelen távol van.

Két tetszőleges érintőponton C, C_1-en átmenő és így (az előbbi tétel szerint) LL_1-gyel párhuzamos CC_1 egyenes az asymptotákat oly γ, γ_1 pontokban metszi, melyek C, ill. C_1-től egyenlő távolságra vannak, mert $2C\gamma = LL_1 = 2C_1\gamma_1$. Ennélfogva a hyperbola pontjai, ha az egy C pontja és az asymptoták által van adva, oly módon szerkeszthetők, hogy C-n átmenő tetszőleges egyenesre, mely az asymptotákat γ, γ_1 pontokban metszi, γ_1-től mérve felvisszük $C\gamma$ közt C_1-ig, tekintettel lévén arra, hogy C_1 pont, mint a hyperbola új pontja, ugyanazon szög, vagy csúcsszögének szárai közé kerüljön, mely között C pont fekszik.



79. ábra.

119. Az előbbi tételekből fordítva is következik: *ha egy háromszögnek egyik oldala úgy mozog, hogy a háromszögnek területe és a mozgó oldal átellenes szöge állandó marad, akkor a mozgó oldal felezőpontja által leírt, és a mozgó oldal által burkolt görbe, egy és ugyanazon hyperbola, melynek asymptotái az állandó szög szárai.* A háromszögek területeinek állandó volta miatt ugyanis a változó két csúcs, az állandó szögnek és csúcsszögének szárain projektiv pontsorokat ír le, melyeknek ellenpontja az állandó szög csúcsába esik.

Ha a mozgó oldal az állandó szög mellékszögeinek szára között mozog, de szintén úgy, hogy a származott háromszögek területei az előbbieknek területével egyenlőek maradjanak, akkor a mozgó oldal valamint felezőpontja által egy *új* hyperbola lesz burkolva ill. leírva, melynek az előbbivel közös asymptotái vannak. Az előbbi és ezen új hyperbola, *egymáshoz kapcsolt hyperbolának* neveztetik és a két hyperbola nem csak közös asymptotákkal, hanem közös kapcsolt átmérőpárakkal is bír. Azonkívül az egyes kapcsolt átmérőpárak közül az egyik átmérő az egyik hyperbolát, a másik a hozzá kapcsolt hyperbolát metszi valós pontokban, mely metszőpontok egyszersmind az egyes hyperboláknak átmérőjén levő hatványpontok.

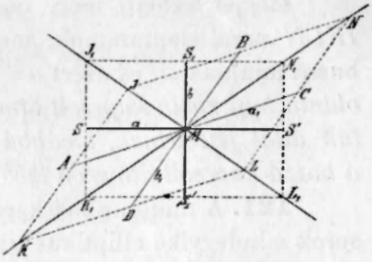
Hogy ezt belássuk, térjünk vissza az AC, BD kapcsolt átmérők és a rajta fekvő involuczios pontsorok A, C kettőspontjai és B, D hatványpontjai által adott hyperbolához (78. ábra). E hyperbola burkolva lesz azon mozgó LN egyenesek által, melyek az asymptotákkal együtt LMN-nel egyenlő területű háromszögeket képeznek és $LMN\sphericalangle$, valamint csúcsszögének $IMK\sphericalangle$-nak szárai között vannak. A kapcsolt hyperbola pedig burkolva lesz azon mozgó IDN, vagy KBL egyenesek által, melyek az asymptotákkal együtt LMN-nel egyenlő területű háromszöget képeznek, de $LMN\sphericalangle$ mellékszögeinek $NMI\sphericalangle$ és $LMK\sphericalangle$ szárai között vannak. Ha $A'C'$ és $B'D'$ az első hyperbolának egy másik kapcsolt átmérőpárja, melyek közül $A'C'$ azt valós A', C' pontokban metszi, B', D' pedig a másik átmérőn levő két hatványpont, akkor A', C' és B', D'-en át $B'D'$, valamint $A'C'$ egyenessel párhuzamosan vont egyenesek egy új parallelogrammot $I'K'L'N'$-et képeznek, melynek $I'L'$, $K'N'$ átlói ismét az előbbi asymptoták és $I'K'$, $L'N'$ oldalai, érintői a hyperbolának A', C' pontokban, végre $MI'K'$, $ML'N'$ háromszögek egyenlő területűek MNL háromszöggel. De $I'K'L'N'$ parallelogramm másik két oldala $I'N'$, $K'L'$ szintén oly két háromszöget képez az asymptotákkal, mely MNL-lel egyenlő területű, tehát azon oldalak érintik a kapcsolt hyperbolát $K'L'$, $I'N'$ közök B', D' felezőpontjaiban, és $B'D'$, $A'C'$ kapcsolt átmérőpárja e hyperbolának. Ezen $B'D'$, $A'C'$ átmérők közül $B'D'$ metszi a kapcsolt hyperbolát B', D' pontokban, míg a másiknak A', C' pontjai, mint a leírt $\alpha B'\beta D'$ négyszögnek átlóspontjai kapcsoltak ezen hyperbolát illetőleg, tehát $A'C'$ átmérőnek hatványpontjai.

120. *A hyperbola tengelyei,* mint az M pontból kiinduló kapcsolt egyenespárak által képezett involucziós sugársor tengelyei, *felezik az asymptoták hajlásszögeit* és egymásra merőlegesek, miért is azon $I_1K_1L_1N_1$ parallelogramm, melynek két oldala I_1K_1, L_1N_1 a hyperbolát a metsző — vagy mint mondani szokás — *főtengely* végpontjaiban, S, S' csúcsokban érinti, és melynek másik két oldala I_1N_1, K_1L_1 a másik tengely S_1, S_1' hatványpontjain át a főtengelylyel párhuzamosan : téglány lesz.

Minthogy (80. ábra)

$$MI_1 . MK_1 = MN_1 . ML_1 = MN . ML:$$

$I_1K_1L_1N_1$ téglány csúcsainak távolsága M-től azon négyzetnek oldala, mely az MN, ML oldalakból alakitott téglánynyal egyenlő területű, és ha $I_1K_1L_1N_1$ téglány meg lett szerkesztve, úgy általa a főtengelyen fekvő S, S' csúcsok és a melléktengelyen fekvő S_1, S_1' hatványpontok ismeretesek.



80. ábra.

A hyperbola érintői valamint pontjai, úgy mint az ellipsisé, symmetrikusan vannak elhelyezve a tengelyeket illetőleg.

Ha a hyperbola AC átmérőjén A, C pontok távolságát — az *átmérőnek* úgynevezett *hosszát* — $2a_1$-gyel; a hozzá kapcsolt BD átmérőn B, D hatványpontok távolságát $2b_1$-gyel; az AC, BD átmérők hajlásszögét φ-vel; S, S' csúcsok távolságát, vagyis a főtengely hosszát $2a$-val; végre a melléktengelyen fekvő S_1, S_1' hatványpontok távolságát $2b$-vel jelöljük, úgy ezen a_1, b_1, φ, a, b, mennyiségek között az ellipsisnél talált relacziókhoz hasonlók vezethetők le.

MLN és $M_1N_1L_1$ háromszögek területei egyenlők lévén:

$$LC.MC\sin\varphi = L_1S'.MS',$$

vagy

$$a_1b_1\sin\varphi = ab \quad .\;.\;.\;.\;1)$$

De MLN háromszög MN, ML, $NL=2b_1$ oldalai és $MC=a_1$ középvonala között ismeretes ezen relaczió:

$$\overline{MN}^2+\overline{ML}^2 = 2b_1^2+2a_1^2,$$

miből

$$(MN+ML)^2-(2b_1)^2 = 2MN.ML+2(a_1^2-b_1^2),$$
$$(2b_1)^2-(MN-ML)^2 = 2MN.ML-2(a_1^2-b_1^2).$$

E két utóbbi egyenlet baloldalainak szorzata MLN háromszög négyszeres területének négyzete, tehát:

$$(4.MLN)^2 = 4.\overline{MN}^2.\overline{ML}^2-4(a_1^2-b_1^2)^2;$$

de minthogy ML_1N_1 háromszög négyszeres területének négyzete szintén kifejezhető ily módon, t. i.

$$(4.ML_1N_1)^2 = 4.\overline{MN_1}^2.\overline{ML_1}^2 - 4(a^2-b^2)^2$$

és MLN, ML_1N_1 háromszögek területei valamint $MN.ML$, $MN_1.ML_1$ szorzatok egyenlők következik, hogy

$$a^2-b^2 = a_1^2-b_1^2 \quad .\;.\;.\;.\;.\;.\;2)$$

mely egyenlet az ellipsisnél előforduló 2) egyenletre emlékeztet.

Megjegyezhető még, hogy az egyenoldalú hyperbolánál azon $IKLN$ parallelogrammok, mert átlói egymásra merőlegesek, rhombussá fajulnak el, és ezért $a = b$, valamint $a_1 = b_1$, tehát: *az egyenoldalu hyperbola kapcsolt átmérői által képezett szögek az asymptoták által feleztetnek, továbbá bármely átmérő hosszúsága egyenlő a hozzá kapcsolt átmérőn levő hatványpontok távolságával.*

121. A midőn a két kapcsolt átmérőn adott involucziós pontsorok mindegyike elliptikus természetű: *a kúpszelet képzetes.*

Nevezzük ezen kapcsolt átmérők hajlásszögét φ-nek, a rajtuk fekvő involucziós sorok hatványpontjait A, C, illetve B, D-nek, azoknak középpontját, mely egyszersmind a kúpszeletnek is középpontja M-nek, azoknak hatványát, mely negativ jelű, $-a_1^2$, $-b_1^2$-nek.

E szerint (77. ábra):

$$AM = -MC, \; MB = -MD,$$

és

$$MA \,.\, MC = -MA^2 = -a_1^2, \quad MD \,.\, MB = -MD^2 = -b_1^2.$$

A és D pont polárisa azon $|CL|$, és $|BL|$ egyenes, mely C-n át BD-vel, illetve B-n át AC-vel párhuzamosan húzható; ez utóbbiaknak L metszőpontja $|AD|$-nek pólusa. $|ML|$ átmérőhez kapcsolt átmérő e szerint: M-en át $|AD|$-vel párhuzamosan menő $|MN|$ egyenes.

$|ML|$, $|MN|$ és $|MD|$, $|MA|$ kapcsolt átmérőpárakból a tengelyek ép úgy mint az ellipsis eseténél szerkeszthetők. Ezen átmérők ugyanis D ponton át AC-vel párhuzamos $|IDN|$ egyenessel I, D, N, és a végtelen távol fekvő pontokban metszetnek, és ha

$$PDQ \perp ID, \; PD = DQ = ID,$$

akkor PQM-en átmenő körnek közös U, V pontjai $|IN|$-nel, a tengelyeknek pontjai lesznek.

Hogy ezen U_1MU, V_1MV tengelyeken fekvő kapcsolt pólusok által képezett elliptikus természetű involucziós pontsorok hatványpontjait S, S'; S_1S_1'-et és hatványait, $-MS^2 = -a^2$, $-MS_1^2 = -b^2$ megtaláljuk, vegyük tekintetbe, hogy D pontból U_1MU, V_1MV tengelyekre bocsátott merőlegeseknek X, Y talppontjai, kapcsolt pontjai azon U_1, V_1 pontoknak, melyekben a tengelyek D pontnak polárisát $|BL|$-et metszik.

Minthogy

$$MU_1 = -MU, \; MV_1 = -MV,$$

$$MX \,.\, MU = -MX \,.\, MU_1 = a^2, \; MY \,.\, MV = -MY \,.\, MV_1 = b^2,$$

és mint az ellipsisnél tanultuk:

$$MX.MU.MY.MV = MA^2.MD^2 \sin\varphi$$

és

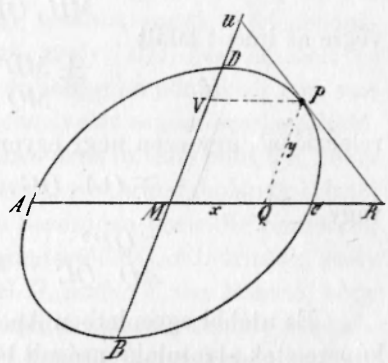
$$MX.MU + MY.MV = PD^2 + MD^2,$$

látható, hogy itt is mint valós kúpszeletnél

$$a^2.b^2 = a_1^2 b_1^2 \sin^2\varphi, \text{ és } a^2 + b^2 = a_1^2 + b_1^2,$$

csakhogy a^2, b^2, a_1^2, b_1^2 itt nem a félátmérők négyzeteit, hanem az átmérőkön fekvő involucziós sorok negativ hatványait jelentik.

122. Legyen valamely ellipsis vagy hyperbola egy kapcsolt átmérőpárja AC, BD; az ellipsisnél A, C; B, D pontok ama átmérők metszőpontja a görbével, a hyperbolánál pedig B, D; BD átmérő fekvő involucziós pontsor hatványpontjai. Ha a kúpszelet P pontján át BD, AC-vel párhuzamosan menő egyenes AC, BD átmérőt Q, V-ban, P pont érintője pedig ezen két átmérőt R, U-ban metszi, akkor (80a ábra)



80a. ábra.

R pont PQ-nak polárisa
U « PU « « ,

miből következik, hogy

$$MC^2 = MQ.MR$$
$$\pm MD^2 = MV.MU,$$

hol ez utóbbi egyenletben a felső illetve alsó jel értendő a szerint, a mint a görbe ellipsis vagy hyperbola.

Ezen egyenletek még ily alakba írhatók:

$$\frac{MQ^2}{MC^2} = \frac{MQ}{MR} = \frac{VU}{MU}$$

$$\pm \frac{MV^2}{MD^2} = \frac{MV}{MU},$$

miből:

$$\pm \frac{MV^2}{MD^2} + \frac{MQ^2}{MC^2} = \frac{MV}{MU} + \frac{VU}{MU} = 1.$$

Ha MQ, $MV = QP$, MC, MD-t röviden x, y, a, b-vel jelöljük, akkor a talált egyenlet ily alaku:

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ezen egyenlet, mely a kúpszeleten változó P pont x, y *koordinátái*, valamint $AC=a$, $BD=b$ átmérők hosszasága között lévő relacziót fejezi ki, az analytikai geometriában: *az ellipsis illetve hyperbola egyenletének* neveztetik, vonatkoztatva AC, BD kapcsolt átmérő párba helyezett tengelyrendszerre.

Ha tekintetbe vesszük, hogy Q, R pontpár A, C-t harmonikusan választja el, tehát

$$QA \,.\, QC = QM \,.\, QR;$$

továbbá $UMR \sim PQR$ hasonló háromszögekből folyó egyenletet:

$$MU \,.\, QR = MR \,.\, QP,$$

végre az imént talált

$$\pm MD^2 = MU \,.\, QP$$

$$MQ \,.\, MR = MC^2$$

relacziókat, úgy ezen négy egyenlet szorzatából következik:

$$\mp QA \,.\, QC \,.\, MD^2 = MC^2 \,.\, QP^2,$$

vagy

$$\frac{QP^2}{AQ \,.\, QC} = \pm \frac{MD^2}{MC^2} = \text{állandó}.$$

Ez utóbbi egyenletben Apollonius (mint Hankel * megjegyzi), a kúpszeletek alaptulajdonságait látta kifejezve, mert mint alább kimutatjuk, a parabolára nézve is érvényes.

123. Már említve lett, hogy a parabola két hasonlóan projektiv pontsor képződménye, s mint ilyen síkjának végtelen távol fekvő g_∞ egyenese által érintetik, miért is g_∞-nek pólusa, vagyis g_∞-nek érintőpontja, tehát *a parabolának középpontja, végtelen távol van.*

A parabola középpontján átmenő egyenesek szintén átmérőknek neveztetnek és ezeknek pólusai g_∞-en, mint a középpont érintőjén vannak, tehát *a parabola átmérői egymással párhuzamosak és pólusai végtelen távol fekszenek.*

A parabolának nincsenek kapcsolt átmérői, mert minden átmérőnek a középponton átmenő kapcsolt egyenese maga g_∞ egyenes.

Minden parabola átmérőn levő kapcsolt pólusok egyenoldalú hyperbolikus természetű involucziós pontsort képeznek, mert e pontsor egyik kettőspontja végtelen távol van (42.); ennélfogva az átmérőn fekvő kapcsolt pontok távolságát az átmérőnek metszőpontja felezi. Továbbá a parabola-átmérő összes pontjainak polárisai egymással párhuzamosak, és e polárisok a mennyiben a parabolát valós pontokban metszik, *azon átmérőhez kapcsolt húrrendszert képezik,* mely húrrendszer minden egyes húrját azon átmérő felezi. Minden átmérőhöz más irányú kapcsolt húrrendszer, és fordítva minden párhuzamos húrrendszerhez más átmérő tartozik. Azon átmérő, melyre a hozzá kapcsolt húrrendszer merőleges, a parabola *tengelye;* a tengelynek végesben levő metszőpontja: a parabola *csúcsa.*

* Hankel H.: Die Elemente der projectivischen Geometrie. 1875. p. 223.

124. Mint minden kúpszelet, úgy a parabola is meg van határozva egy átmérője, egy ehhez kapcsolt húr és ezeken fekvő kapcsolt pólusokból álló involucziós pontsorok által. Legyen CD a parabola egyik húrja, mely azt C, D-ben metszi, továbbá annak B felezőpontján átmenő AB egyenes azon átmérő, mely $|CD|$-hez kapcsolt és mely a parabolát A-ban metszi; a parabola ezen adatokból meg van határozva és annak érintői, pontjai, tengelye és csúcsa szerkeszthető.

CD húrnak pólusa, AB egyenesnek azon (másik) pontja E, mely A-tól AB távolságra van; EC, ED egyenesek a parabolának érintői C, D pontokban. Ha a parabolát azon hasonlóan-projektiv pontsorok képződményének tekintjük, melyeknek tartói EC, ED érintők, mely pontsorokban tehát E, C-nek megfelel D, illetve E, úgy látható, hogy EC egyenes bármely X pontjából kiinduló második érintőt megkapjuk, ha DE-t, D-től mérve $EX:XC$ (külső, illetve belső) viszony szerint osztjuk X_1-ben; $|XX_1|$ a kivánt új érintő. Ennek érintőpontja X', XX_1 közt oly XX', $X'X_1$ részekre osztja, melyek viszonya egyenlő $CX:XE$ viszonyával, mert ha a parabolát EC és XX_1 tartón levő hasonlóan-projektiv pontsorok képződményének tekintjük, úgy az egymásnak megfelelő pontok

$$C,\ X,\ E;\ X,\ X',\ X_1$$

tehát:

$$CX : XE = XX' : X'X_1.$$

Innen következik: *ha egy mozgó egyenes valamely háromszög két oldalát egyenlő viszony szerint osztja anélkül, hogy a harmadik oldallal párhuzamos maradna, úgy azon mozgó egyenes parabolát burkol, melyek háromszög két első oldala szintén érintője. E két oldal által a mozgó egyenesről lemetszett rész az egyenes érintőpontjában oly viszony szerint osztatik, mint a mily viszony szerint a mozgó egyenes az oldalakat osztja.* Ha tehát EC, DE közöket egyenlő részekre osztjuk, a részeket a közökön kívül is felvisszük az egyes egyenesekre, és az egymásra következő osztáspontokat E, ill. D-től számítva, összekötjük, úgy ezen összekötő egyenesek burkolója: parabola. —

Hogy egy tetszőleges, CD-t G-ben metsző, átmérőhöz kapcsolt húr irányát, és az átmérő metszőpontját a parabolával szerkeszthessük, ha CD húr, és a hozzá kapcsolt AB átmérőnek A metszőpontja a parabolával ismeretes, megkeressük azon H pontot, mely G-t C, D-től harmonikusan választ el (82. ábra). EGH, polárháromszög a parabolát illetőleg, tehát EH lesz iránya azon húrrendszernek, mely a felvett átmérőhöz kapcsolt. Ha G-n át felvett átmérőnek metszőpontját EH-val I-nek nevezzük, úgy I, G kapcsolt pólusok által határolt köznek S felező pontja, azon átmérőnek metszőpontja a parabolával.

E szerkesztés szerint könnyen megtalálható azon SG átmérő, mely egy tetszőleges EH irányú húrrendszerhez kapcsolt, továbbá, ha EH merőlegesen vétetik fel AB-re, azon átmérő, mely a hozzá kapcsolt húrrendszerre merőleges, tehát mely a parabola *tengelyét* képezi.

125. Ha egy parabola C, P pontján átmenő két átmérő valamint $|CP|$ egyenes, a parabola tetszőleges P_1 pontján át C pont érintőjével párhuzamos húrt: Q_1, illetve U, V-ban metszi, és P-n át $|VQ_1|$-gyel párhuzamos $|PQ|$ egyenes közös pontja $|CQ_1|$ átmérővel: Q, akkor:

$$QP : Q_1V = QC : Q_1C$$
$$QP^2 : Q_1V \cdot Q_1U = QC : Q_1C.$$

De minthogy V, U kapcsolt pólus a parabolára nézve, mert $|VU|$, $|CQ_1|$ átmérőnek pólusán megy át (88)., azért

$$Q_1V \cdot Q_1U = Q_1P_1^2,$$

tehát

$$\frac{QP^2}{QC} = \frac{Q_1P_1^2}{Q_1C} = \text{állandó}$$

bárhol vegyük is fel P_1 vagy P pontot a parabolán.

Ha

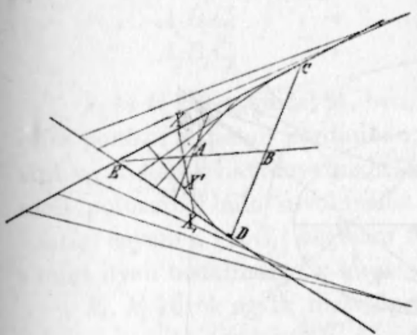
$$QP_1 = y,\ CQ_1 = x,$$

akkor

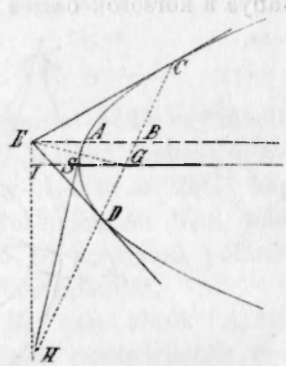
$$\frac{y^2}{x} = \text{állandó}$$

a parabolának egyenlete, C ponton átmenő átmérő és C érintőjére mint X, illetve Y tengelyre vonatkoztatva.*

126. Tanultuk (33.), hogy két ponton átmenő körök, vagyis egy körsor körei, tetszőleges egyenest involucziós pontsor szerint metszenek, a miből fordítva is következik, hogy ha I ponton át köröket fektetünk, melyek egy involucziós pontsor A, A'; B, B'; X, X' kapcsolt pontpárjain át mennek, úgy ezek egymást még egy K pontban metszik; mert ha IAA', IBB' körök második metszőpontja K, akkor IKX kör az involucziós pontsor tartóját szükségkép az X-hez kapcsolt X' pontban fogja metszeni, tehát IXX' kör, mely egybe esik IKX körrel, szintén átmegy K ponton.



81. ábra.



82. ábra.

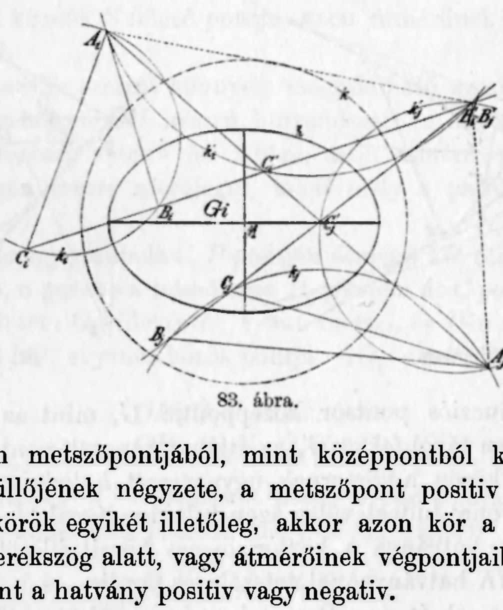
Az involucziós pontsor középpontja G, mint az involucziós pontsor végtelen távol fekvő G'_∞ pontjához kapcsolt pont, IKG egyenessé elfajult körön, a körsornak úgynevezett *hatványvonalán* van, mely hatványvonal tudvalevőleg azon tulajdonsággal bír, hogy minden pontjának hatványa a körsor összes köreit illetőleg egyenlő; mert ha P az IK hatványvonal tetszőleges pontja, és a körsor körei IK ponton mennek át, úgy P pont hatványa a körsor összes köreit illetőleg $PI \,.\, PK$ szorzattal egyenlő. Ha P pont, IK közön lett felvéve, akkor $PI \,.\, PK$ szorzat negativ, ha pedig P, IK közön kívül fekszik, akkor $PI \,.\, PK$ szorzat positiv, és ha P-ből kört írunk le, mely kör küllőjének négyzete az első esetben P-nek negativ hatványával $PI \,.\, PK$-val, a második esetben P-nek positiv hatványával, $PI \,.\, PK$-val egyenlő,

* A kúpszeletekre vonatkozó számos metrikus relacziók találhatók Staudt utolsó művében: Von den reellen und imaginären Halbmessern der Kurven und Flachen II. Ordnung. 1867.

akkor ezen kör az első esetben a körsor körei által átmérőinek végpontjaiban, a második esetben pedig a derékszög alatt metszetik.

Ha továbbá két körsor egy közös körrel bír, akkor mindig létezik oly kör, mely a körsorok körei által derékszög alatt, vagy átmérőinek végpontjaiban metszetik; ennek középpontja a két körsor hatványvonalának metszőpontja; sugarának négyzete, ezen metszőpont positiv illetve negativ hatványa a két körsor közös körét, és így a sorok összes köreit illetőleg.

Ha végre több körsor hatványvonalai egymást egy pontban metszik és az első és második, a második és harmadik stb. körsor mindig közös körrel bír, akkor a hatványvonalak metszőpontjának hatványa a körsorok összes köreit illetőleg egyenlő; és ha a hatvány-



83. ábra.

vonalak ezen metszőpontjából, mint középpontból kört írunk le, mely kör küllőjének négyzete, a metszőpont positiv vagy negativ hatványa a körök egyikét illetőleg, akkor azon kör a körsor összes körei által derékszög alatt, vagy átmérőinek végpontjaiban metszetik, a szerint, mint a hatvány positiv vagy negativ.

Ezen a körsorok tulajdonságaira vonatkozó elemi tételeket előre bocsátva bebizonyitható, hogy: *egy kúpszelet középpontjának hatványa mindazon köröket illetőleg, melyek a kúpszelet polárháromszögei körül írhatók egymás között egyenlők*, vagy másszóval: *ha a kúpszelet középpontjából kört írunk le, mely kör küllőjének négyzete oly nagy, mint a középpontnak egy polárháromszög körül írt körre vonatkozó hatványa, positiv vagy negativ jellel véve: akkor azon kör valamennyi polárháromszög körül irt kör által derékszög alatt, vagy átmérőinek végpontjaiban metszetik.*

A tétel akkor lesz bebizonyítva, ha kimutatjuk, hogy a kúpszelet középpontjának hatványa két tetszőleges polárháromszög körül írt kört illetőleg egyenlő. (83. ábra.)

Legyen e végből $A_iB_iC_i$, $A_jB_jC_j$ két polárháromszög $\varkappa$ kúpszeletre vonatkozólag; M a kúpszeletnek középpontja. Jelöljük $|B_iC_i|$, $|B_jC_j|$ egyenesek metszőpontját két betűvel $B'_i \equiv B'_j$-vel; e ponthoz kapcsolt pólust $|B_iC_i|$-n, C'_i-vel; $|B_jC_j|$-n, C'_j-vel; mely C'_i, C_j pontok, mint $(|B_iC_i|, |B_jC_j|) \equiv B'_i \equiv B'_j$ ponthoz kapcsolt pólusok, $|B_iC_i|$, $|B_jC_j|$ pólusait összekötő egyenesen $|A_iA_j|$ fekszenek. Nevezzük végre:

$A_iB_iC_i$ polárháromszög körül írt kört k_i-nek
$A_iB'_iC'_i$ « « « « k'_i «
$A_jB'_jC_j$ « « « « k'_j «
$A_jB_jC_j$ « « « « k_j «.

k_i és k'_i kör egymást A_i-ben, $|B_iC_i|$ egyenest pedig egy involucziós pontsor kapcsolt pontjaiban, B_i, C_i; B'_i, C'_i-ben metszi; e szerint k_i, k'_i körök hatványvonala A_iG_i átmegy A_i-n és az $|B_iC_i|$ kapcsolt polusaiból álló involucziós pontsor középpontján G_i-n, tehát $|A_iG_i|$ egyenes, $|B_iC_i|$ végtelen távol fekvő G'_i pontjának polárisa, s mint ilyen tartalmazza $\varkappa$ kúpszeletnek M középpontját.

k'_i, k_j körök egyik metszőpontja $B'_i \equiv B'_j$; ezen körök $|A_iA_j|$-t egy involucziós pontsor A_i, C'_i; A_j, C_j kapcsolt pontpárjaiban metszik, ennélfogva $|A_iA_j|$ végtelen távol fekvő pontjának polárisa, mely $|A_iA_j|$-nek, $B'_i \equiv B'_j$ pólusán és M középponton megy át: k'_i, k'_j körök hatványvonala.

Az A_j ponton átmenő k'_j, k_j körök végre, $|B_jC_j|$ egyenest egy involucziós pontsor B'_j, C'_j; B_j, C_j kapcsolt pontpárjaiban metszik és hatványvonaluk $|B_jC_j|$ végtelen távol fekvő pontjának polárisa, mely $|B_jC_j|$-nek pólusán és $\varkappa$-nak középpontján, M-en, megy át.

E szerint k_i, k'_i; k'_i, k'_j; k'_j, k_j körpárak hatványvonalai átmennek M-en, és ezen M pont hatványai k_i, k'_i, k'_j, k_j köröket, tehát a tetszőlegesen választott $A_iB_iC_i$, $A_jB_jC_j$ polárháromszögek körül írt k_i, k_j köröket illetőleg, egyenlő.—

127. *A kúpszelet polárháromszögei körül írható körök derékmetsző köre k, azon tulajdonsággal bír, hogy egyes pontjain átmenő kapcsolt polárisok egyenoldalúan hyperbolikus természetű involucziós sugársort képeznek;* vagy a mi ugyanaz: *k kör pontjaiból a kúp szelethez vont érintőpárak egymásra merőlegesek.*

Nevezzük k kör tetszőleges pontját X-nek, ennek a kúpszeletre vonatkozó polárisát x-nak; az x-n változó kapcsolt pólusokat X_i, X_i'-nek.

Minthogy k, az X, X_i, X_i'-n átmenő változó k_i köröket X-ban derékszög alatt metszi, ezen k_i körök egymást $|MX|$-nak X pontjában érintik. Ily körsorban mindig létezik két kör, mely minden X ponton át nem menő egyenest, tehát X-nek polárisát, egy-egy pontban P, Q-ban, az X_i, X_i' kapcsolt pólusokból álló involucziós pontsor asymptotáiban érinti. Ezen érintőpontok, azonban $|MX|$ hatványvonal és x poláris metszőpontjától S-től egyenlő távolságra vannak, mert SX, SP, SQ körérintők egyenlő hosszúak, tehát P, Q pontok X-ből derékszög száraival projicziáltatnak. $|XP|$, valamint $|XQ|$ azonban egy-egy egyenessé elfajult polárháromszög, s mint ilyen a kúpszeletnek érintője P, illetve Q pontban, tehát X pontból a kúpszelethez vont érintők egymásra merőlegesek.

Minthogy az ellipsis fő- és melléktengelyén fekvő S, S_1 csúcspontjain át húzott érintők egymásra merőlegesek, azért ha a és b az ellipsis féltengelyeit jelenti: *az ellipsis polárháromszögei körül írható köröket derékszög alatt metsző kör küllője egyenlő* $\sqrt{a^2+b^2}$.

Ha a hyperbola egyik asymptotájára (78. ábra) ML-re, LN merőleges érintőt bocsátok, mely a hyperbolát C-ben érinti, az asymptotákat L, N pontban metszi, akkor $MC=a_1$, $LC=b_1$, egyenlő a hyperbola egy kapcsolt átmérőpárjának hosszával, tehát MLC derékszögű háromszög folytán, ha a és b a fő- és melléktengely:

$$ML^2=MC^2-LC^2=a_1^2-b_1^2=a^2-b^2,$$

és mert L pontból kiinduló két érintő LM, LN egymásra merőleges: L pont k körön fekszik, tehát *a hyperbola polárháromszögei körül írható kört derékszög alatt metsző kör küllője egyenlő* $\sqrt{a^2-b^2}$.

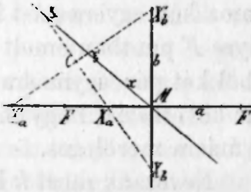
Ha a hyperbola az asymptotáknak azon csúcsszöge között fekszik, melyek tompa szöget képeznek, akkor egy asymptótára merőleges érintőt húzni nem lehet; ezen esetben M pont hatványa negatív, és a derékmetsző k kör átmegy azon másik körbe, mely a polárháromszögek körül írható körök által átmérőinek végpontjaiban metszetik. A midőn a hyperbola egyenoldalú ($a^2=b^2$), k kör ponttá fajul és így: *az egyenoldalú hyperbola minden polárháromszöge körül írt kör átmegy a hyperbola közeppontján.*

A *parabolánál*, melynek középpontja a tengely végtelen távol fekvő pontja, *a polárháromszög körül írható köröket derékszög alatt* *metsző kör a tengelyre merőleges egyenessé fajul, tehát ezen egyenes (vezérvonal) pontjaiból a parabolához vont érintők egymásra merőlegesek.*

A képzetes kúpszeletnél valós érintők, tehát egymásra merőleges valós érintők nem léteznek, és így a derékmetsző kör helyébe itt is azon kör lép, mely a polárháromszögek körül irható körök által átmérőinek végpontjaiban metszetik.

17. §. Kúpszeletek gyújtópontjai.

128. Jelöljük egy tetszőleges k kúpszeletnek egyik átmérőjét x-szel, egy ezen változó és k-t illetőleg kapcsolt póluspárt ξ, ξ'-gyel. Ha mi a változó ξ pontokból e pontoknak k-ra vonatkozó polárisaira, melyek mint ismeretes, ξ' pontokon mennek át, merőlegeseket bocsátunk, úgy a polárisok, valamint a reá merőlegesen álló kapcsolt egyenesek k-nak minden átmérőjét involucziós pontsor szerint metszik.



84. ábra.

ξ pontsor ugyanis projektiv, ξ-nek polárisai által képezett párhuzamos sugársorral, valamint a ξ pontok sorával perspektiv és az előbbire merőlegesen álló sugársorral. E két sugársor metszése k-nak bármely átmérőjével projektiv pontsor lesz, de tekintve, hogy ha ξ végtelen távol van, annak polárisa k-nak M középpontján megy át és ξ-ből reá merőlegesen bocsátott egyenes azon átmérőt végtelen távol metszi, továbbá ha ξ M-ben van, úgy annak polárisa azon átmérőt végtelen távol és a reá merőleges egyenest M-ben metszi: a projektiv pontsorok ellenpontjai M-ben egyesülnek, tehát a projektiv pontsorok involucziós helyzetűek.

Ennélfogva: *egy kúpszeletnek ugyanazon irányú egymásra merőleges kapcsolt polárisai, a kúpszeletnek bármely átmérőjét involucziós pontsor szerint metszik.*

Azon involucziós pontsorok, melyet más az előbbitől különböző irányu egymásra merőleges és k-t illetőleg kapcsolt polárisok k-nak egyik átmérőjén kimetszenek, különbözik az előbbi involucziós pontsortól, kivévén ha a metsző átmérő k-nak egyik tengelye, mert *bármely irányú egymásra merőleges és valamely kúpszeletet illetőleg kapcsolt polárisok a kúpszeletnek tengelyeit ugyanazon involucziós* *pontsor szerint metszik, mely az egyik tengelyen hyperbolikus s a másikon elliptikus természetű.*

Hogy ezt bebizonyítsuk, nevezzük x átmerőn változó ξ pont polárisának metszését k kúpszelet tengelyeivel X'_a, X'_b-nek és ξ-ből azon polárisra bocsátott merőlegesnek metszését k-nak tengelyeivel X_a, illetve X_b-nek (84. ábra).

k-nak tengelyei és $|\xi X_a X_b|$, $|\xi' X_a X'_b|$ egyenesek egymásra merőlegesek lévén, vagy X_a, X'_a, vagy pedig X_b, X'_b metszőpontok nem lesznek elválasztva k-nak M középpontja által, tehát a változó és egymásra mindig merőleges kapcsolt polárisok $|\xi X_a X_b|$, $|\xi X'_a X'_b|$, az egyik tengelyt elliptikus, a másikat hyperbolikus természetű involucziós pontsor szerint metszik. Ez utóbbi involucziós pontsor kapcsolt pontjait X_a, X'_a-nak, kettőspontjait F, F'-nek nevezvén kimutatható, hogy F, valamint F'-en átmenő összes kapcsolt polárisok egymásra merőlegesek, vagyis *czirkularis természetű involucziós sugársort* képeznek. Minthogy F, úgyszintén F' az X_a, X'_a involucziós pontsor kettőspontja, azon átmenő és $|\xi X_a X_b|$, $|\xi X'_a X'_b|$-vel párhuzamos két egyenes k-t illetőleg kapcsolt, minthogy továbbá FM tengelyre F pontban emelt merőleges FM tengelyhez kapcsolt poláris: F-ből két pár egymásra merőleges kapcsolt poláris indul ki, miből már következik, hogy minden egymást F-ben metsző kapcsolt poláris egymásra merőleges.

Nevezzük most k kúpszeletnek x-től különböző átmérőjét y-nak, y-on változó kapcsolt pontpárt η, η'-nek, η polárisának és η-ből a polárisokra bocsátott merőlegeseknek metszőpontjait k tengelyeivel Y'_a, Y'_b és Y_a, Y_b-nek, hol Y_a, Y'_a az F, F' pontokon átmenő tengelyen fekszik. Y_a, Y'_a által képezett involucziós pontsor: metszése az F, F' pontokon átmenő tengelynek $|\eta Y_a Y_b|$, $|\eta' Y'_a Y'_b|$-gyel párhuzamos és egymásra merőleges kapcsolt polárisokkal; de minthogy F-en, és szintúgy F'-en át $|\eta Y_a Y_b|$, $|\eta' Y'_a Y'_b|$-gyel párhuzamosan menő egyenesek szintén kapcsoltak k-t illetőleg: F, F' kettőspontjai egyszersmind az Y_a, Y'_a pontpárak által befutott involucziós pontsornak, a miből már következik, hogy az X_a, X'_a, valamint Y_a, Y'_a által leírt involucziós pontsorok egymástól nem különböznek. Bármely irányú egymásra merőleges kapcsolt polárisok F, F'-en átmenő tengelyt, mely mint látni fogjuk a főtengely, ugyanazon involucziós pontsor szerint metszik, melynek kettőspontjai F, F' pontok.

Ha az

$$MX_aX_b,\ MX'_aX'_b, \quad \text{és} \quad MY_aY_b,\ MY'_aY'_b$$

hasonló háromszögeket tekintjük, ugy

$$MX_a : MX_b = XM_b : MX'_a, \quad \text{és} \quad MY_a : MY_b = YM'_b : MY_a$$

tehát

$$-MX_b \,.\, MX'_b = MX_a \,.\, MX'_a = \overline{MF}^2 = MY_a \,.\, MY'_a = -MY_b \,.\, MY'_b,$$

vagyis a másik tengelyen kimetszett X_b, X'_b és Y_b, Y'_b involucziós pontsorok is azonosak, mert M középpontjuk közös és MF^2 hatványuk egyenlő.

129. Az egymásra merőleges kapcsolt polárisok még a sík végtelen távol fekvő g_∞ egyenesét is involucziós pontsor szerint metszik, t. i. azon involucziós pontsor szerint, melynek kettőspontjai a végtelen távol fekvő *körpontok*. Ezen g_∞-en fekvő involucziós pontsor perspektiv a melléktengelyen fekvő X_b, X'_b pontok által képezett involucziós pontsorral F, valamint F' középpontra nézve, mert X_b, X'_b pontsor kapcsolt pontjai F, valamint F'-ből $-MX_b . MX'_b = MF^2 = MF'^2$ relaczió következtében, derékszögek száraival projicziáltatnak.

Ha föltételezzük, hogy F (valamint F') középponttal biró czirkularis sugársornak nemcsak valós kapcsolt sugarai mennek át a melléktengelyen és g_∞-en fekvő involucziós pontsoroknak kapcsolt elemein, hanem egyszersmind azon sugársoroknak képzetes kettőssugarai is tartalmazzák a melléktengely és g_∞-n fekvő involucziós pontsorok kettőspontjait, mely képzetes kettőssugarak tulajdonkép az F, és F' pontokból a kúpszelethez menő képzetes érintők, úgy mondhatjuk: *a kúpszeletet illetőleg egymásra merőleges kapcsolt polárisok, a kúpszelet tengelyeit, valamint a végtelen távol fekvő g_∞ egyeneset oly involucziós pontsorok szerint metszik, melyeknek valós és képzetes kettőspontjai, egy a kúpszelet körül írt képzetes négyoldal, három pár átellenes szögpontjainak tekinthetők.* Az F, F' pontokat tehát ezen felfogás szerint úgy értelmezhetjük, hogy *ezek valós metszőpontjai a sík végtelen távol fekvő képzetes körpontjaiból a kúpszelethez vont képzetes érintőknek.*

A kúpszelet síkjának azon pontjait, melyből kiinduló és a kúpszeletet illetőleg kapcsolt polárisok czirkularis sugársort képeznek, a kúpszelet *gyújtópontjainak* nevezik.

Az előbb talált F, F' pontokon kívül nincsen a síkban oly valós pont, melyből kiinduló kapcsolt polárisok czirkularis természetű involucziós sugárt képeznének. Ha ugyanis P egy tetszőleges pont, úgy P-n átmenő átmérőhöz kapcsolt egyenes, párhuzamos ezen átmérő kapcsolt átmérőjéhez, tehát nem lesz merőleges az első átmérőre, kivévén, ha P a kúpszeletnek egyik tengelyén fekszik. De ha P a kúpszeletnek egyik tengelyén vétetik fel, úgy P-n átmenő és a tengelytől különböző egyenesre merőleges kapcsolt egyenes, az előbbiek szerint, ezen tengelyt oly P_1 pontban metszi, mely az előbb tárgyalt X_a, X'_a, vagy X_b, X'_b pontpárak által képezett involucziós pontsorban P-hez kapcsolt; P_1 tehát csak azon esetben esik össze P-vel, ha ez F, vagy F'-ben lett felvéve.

130. Minthogy a gyújtópontokon átmenő kapcsolt polárisok czirkularis, tehát elliptikus természetű, involucziós sugársort képeznek: *a valós gyújtópontok kúpszeleten belül fekszenek,* és így a hyperbolánál a fő-, tehát azon tengelyen, mely a hyperbolát valós pontokban metszi. De az ellipsis gyújtópontjai is a fő- vagyis hosszabb tengelyen lesznek, mert az ellipsis csúcsaiban vont érintők által képezett téglány egyik szögpontjának polárisa a fő- és melléktengelyhez fekvő egy-egy csúcsnak, pl. S, S_1-nek, összekötő egyenese, tehát ezen szögpontból a polárisra bocsátott merőlegesnek a tengelyekkel való metszőpontjai közül a hosszabb tengelyen fekvő, az illető csúcstól S-től, M által nincs elválasztva, a kisebb tengelyen fekvő pedig M által el van választva.

A képzetes kúpszeletnek valós gyújtópontjai azon tengelyen lesznek, melyen fekvő kapcsolt pólusokból képezett involucziós pontsornak hatványa kisebb, mint a másik tengelyen fekvő involucziós pontsornak hatványa.

A parabolánál az egymásra merőleges kapcsolt polárisok metszése a tengelylyel egyenoldalúan-hyperbolikus, mert középpontja M, és a metszési pontsor középpontja, végtelen távol van. A parabolának tehát csak egyik gyújtópontja van véges távolságban és felezi az egymásra merőleges kapcsolt polárisok által a tengelyről lemetszett közöket.

A körnek két gyújtópontja, annak középpontjába esik, mert párhuzamos egyenesekre merőleges kapcsolt polárisok, mind egy átmérőbe jutnak, tehát az egymásra merőleges kapcsolt polárisok a körnek átmérőin parabolikus természetű involucziós pontsort metszenek ki, melyben a középpont képezi a közös kapcsolt pontot.

A kúpszeletek gyújtópontjainak polárisait, *vezérvonalnak,* és a kúpszelet tetszőleges pontját a gyújtópontokkal összekötő egyeneseket, a *kúpszeleten felvett pont vonósugarainak* nevezik. A kör vezérvonala e szerint végtelen távol van, és a vonósugarak a kör sugaraival esnek össze; az ellipsis és hyperbolának két vezérvonala merőleges azon tengelyre, melyen a gyújtópontok fekszenek. A parabola végesben fekvő gyújtópontjának vezérvonala szintén merőleges a parabola tengelyére és a csúcstól ép oly távolságra van, mint a gyújtópont. A parabola minden pontjához tartozó vonósugár közül egy a gyújtóponton megy át, a másik párhuzamos a tengelylyel.

131. A kúpszeleteknek számos a gyújtópontokkal kapcsolatos relácziói vannak, melyek egyszerűségüknél fogva már régóta ismeretesek, és a kúpszelet pontjainak és érintőinek egyszerű szerkesztéséhez vezetnek.

E tételeket és szerkesztéseket tárgyalandó, kiindulunk a gyujtópontoknak ama tulajdonságából, hogy ezek kettőspontjai az egymásra merőleges kapcsolt polárisok által a főtengelyen kimetszett involucziós pontsoroknak és mint ilyenek a síknak bármily két egymásra merőleges kapcsolt polárisát harmonikusan választják el. E tulajdonság így is kifejezhető: «a kúpszelet síkjának tetszőleges P pontját F, F' gyujtópontokkal összekötő $|PF|$ $|PF'|$ egyenesek hajlásszögeinek felezői, a felvett ponton átmenő egymásra merőleges kapcsolt polárisok». De tekintve, hogy P ponton átmenő összes kapcsolt polárisokból képezett involucziós sugársornak kettőssugarai, P-ből a kúpszelethez vonható érintők, továbbá ezen kettőssugarak szögfelezői az involucziós sugársornak tengelyei, vagyis az egymásra merőleges kapcsolt egyenesek: P-ből a kúpszelethez vont érintők, valamint $|PF|$, $|PF'|$ egyenesek által képezett szögeknek ugyanazon szögfelezőjük vannak. Innen következik, hogy *azon egyenesek, melyek a kúpszelet síkjának tetszőleges pontját a gyujtópontokkal összekötik, a felvett pontból a kúpszelethez vonható érintőkhöz egyenlő szögek alatt hajlanak.*

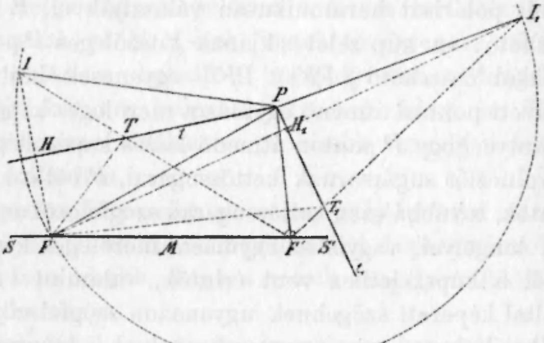
Ha P pont a kúpszeleten vétetik fel, úgy a két érintő egyesül és ezen érintő $|PF|$, $|PF'|$ egyenesekhez — P pontnak vonósugaraihoz — egyenlő szögek alatt hajlik. Ha, mint szokás, azon egyenest, mely valamely görbe érintőjére az érintőpontban merőlegesen áll, *azon pont deréklőjének* (normális) nevezzük, úgy a talált eredmény így is kifejezhető: *a kúpszelet tetszőleges pontjának érintője és deréklője felezi azon ponthoz tartozó vonósugarak hajlásszögeit.*

Tekintve, hogy a parabola egyik gyujtópontja a tengelynek végtelen távol fekvő pontja: *a parabola bármely pontjának érintője és deréklője annak tengelyét és azon ponthoz tartozó (véges) vonósugarat egyenlő szög alatt metszi;* az érintő és deréklő metszőpontja a tengelylyel, a gyujtóponttól ép oly távolságra van, mint a milyen a vonósugár hossza.

Minthogy a gyujtópontok az ellipsis főtengelyén levő csúcspontok által határolt közön belül, a hyperbola gyujtópontjai pedig azon csúcspontok által határolt közön kívül fekszenek: az ellipsis érintői a gyujtópontokat nem választják el, ellenben a hyperbola érintői a gyujtópontokat elválasztják egymástól.

132. Az utóbb talált két tétel alapján a kúpszeletnek bárhány érintőjét és azoknak érintőpontját egyszerűn szerkeszthetjük, ha a kúpszelet két gyujtópontja F, F' és egy érintője t, ismeretes. (85. és 86. ábra.)

t-nek érintőpontját T-t ugyanis megkapjuk, ha F-ből t-re bocsátott merőlegesre, H talpponttól mérve HF közt reá viszszük J-ig, úgy hogy $FH=HI$; IF' egyenes t-t az érintőpontban T-ben metszi, mert



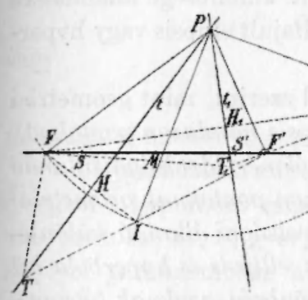
85. ábra.

T-nek összekötő egyenesei F, F'-tel t-hez egyenlő szög alatt hajlanak.

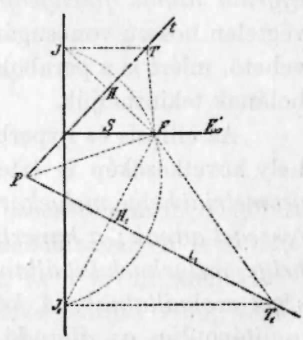
Ha továbbá t-nek tetszőleges P pontját F, F'-tel összekötjük és P-n át t_1 egyenest huzunk, mely $|PF'|$, $|PF|$-tel ugyanoly szögeket képez, mint t érintő $|PF'|$, $|PF|$-fel, akkor t_1 szintén érintője a kúpszeletnek. t_1-nek érintőpontja T_1 épp úgy, mint t-é az által lesz szerkesztve, hogy az egyik gyujtópontból, pl. F-ből t_1-re bocsátott merőlegesre H_1 talpponttól mérve FH_1 közt reá rakjuk I_1-ig, és I_1F' egyenest metszéshez hozzuk t_1-gyel T_1-ben.

Minthogy P tetszőleges pontja volt t-nek, e szerkesztés alapján a kúpszeletnek valamennyi érintőjét és azok érintőpontját meg lehet találni, még pedig egyféleképp, mert: *a kúpszelet, két gyujtópontja és egy érintője által egyféleképp van meghatározva.* A két gyujtópont által ugyanis két czircularis involucziós sugársor van megadva, melynek középpontja a két gyujtópont; de két involucziós sugársor és egy egyenes, csak egy kúpszeletet határoz meg, melyre nézve annak kapcsolt sugarai, kapcsolt polárisok és mely az egyenest érinti (97).

Ha ezen szerkesztésből származó IPF' és I_1PF' háromszögeket tekintjük, azt látjuk, hogy ezek két oldalban és az általuk bezárt szögben megegyeznek ($PF'=PF'$; $IP=PF=PI_1$; $\sphericalangle IPF'=\sphericalangle IPT+\sphericalangle TPF'=\sphericalangle TPF+FPT_1=\sphericalangle F'PT_1+\sphericalangle T_1PI_1=\sphericalangle F'PI_1$), tehát a harmadik oldal IF', $F'I_1$ is egyenlő. Ebből következik, hogy az egyik gyujtópontnak, pl. F-nek, tükörképei (I, I_1), két tetszőleges érintőt t, t_1-et illetőleg, a másik gyujtóponttól egyenlő távolságra vannak, vagy mi ugyanaz: *a kúpszelet bármely gyujtópontjának tükörképei*



86. ábra.



87. ábra.

annak összes érintőjét illetőleg, oly körön fekszenek, melynek középpontja a másik gyujtópont. Ezen körnek sugara a kúpszelet bármely pontjához tartozó két vonósugár összege illetve különbsége, a szerint a mint a kúpszelet ellipsis vagy hyperbola. A tétel utolsó részét bebizonyítandó, vegyük tekintetbe, hogy IF' egyenlő $TF'\pm IT=TF'\pm TF$, mely utóbbi kifejezésben a felső illetve alsó jel érvényes, a szerint, a mint t a gyujtópontokat nem választja el, vagy pedig elválasztja, tehát a kúpszelet ellipsis vagy hyperbola.

Parabolánál ugyanazon oknál fogva, mint előbb IPF'_∞, $I_1PF'_\infty$ szögek egyenlők, tehát FP-vel egyenlő IP, I_1F közök a parabola tengelyével egyenlő szöget képeznek, miért is I, I_1 . . . pontok, mint F gyujtópontnak tükörképei a parabola érintőit illetőleg, a parabola tengelyére merőleges egyenesen lesznek.—Tekintve, hogy a gyujtópontnak tükörképe a csúcs érintőjére vonatkozólag a tengely azon pontja, mely a csúcstól ép oly távolságra van mint a gyujtópont, következik, hogy *azon egyenes, mely a parabola gyujtópontjának tükörképeit az érintőkre vonatkozólag, tartalmazza: a parabola vezérvonala.* (Függelék 4.)

133. A főtengelyen fekvő S, S' csúcsokhoz, mint az ellipsis, vagy hyperbola csúcsaihoz tartozó vonósugarak összege ill. különbsége szintén egyenlő ama kör sugarával, mely az egyik (v. másik) gyujtópontnak az érintőkre vonatkozó tükörképeit tartalmazza; de minthogy S, S' csúcsok és F, F' gyujtópontok a kúpszelet középpontját illetőleg symmetrikus fekvésüek, tehát FS és $F'S'$, $F'S$ és FS' közök egyenlő hoszszuak, azért *az ellipsis csúcsaihoz, és így bármely pontjához tartozó vonósugarak* **összege** *egyenlő annak főtengelyével a hyperbola csúcsaihoz, tehát bármely pontjához tartozó vonósugarak* **különbsége** *egyenlő annak főtengelyével.* A parabola pontjaihoz tartozó véges és végtelen hosszú vonósugár összege, valamint különbsége állandónak vehető. miért is a parabolát e szempontból elfajult ellipsis vagy hyperbolának tekinthetjük.

Az ellipsis és hyperbola az előbbi tétel szerint, mint geometriai hely következőkép is értelmezhető. *Az ellipsis mindazon pontoknak geometriai helye, melyeknek két állandó ponttól mért távolságai állandó összeget adnak; a hyperbola pedig mindazon pontoknak geometriai helye, melyeknek két állandó ponttól mért távolságai állandó különbséget szolgáltatnak. A két állandó pont az ellipsis és hyperbola két gyujtópontja, az állandó összeg illetve különbség azoknak főtengelyével egyenlő.* Hogy a geometriai hely valós pontokkal bírjon, megkívántatik, hogy azon köz, mely a két állandó ponttól mért távolok összegét adja, nagyobb legyen, ellenben azon köz, mely a két állandó ponttól mért távolok különbségét képezi, kisebb legyen, mint a két állandó pont távolsága, vagy más szóval, az ellipsisnél a gyujtópontok távolságának kisebbnek, a hyperbolánál nagyobbnak kell lenni, mint a főtengely.

Az ellipsis melléktengelyén fekvő bármely csúcsnak vonósugarai egyenlők és mert összegük oly nagy, mint a főtengely $2a$, azért a melléktengelyen levő csúcsok a gyujtópontoktól a távolságra vannak.

Ha, mint szokás, az ellipsis vagy hyperbola gyujtópontjainak távolságát *középpontkivüliségnek (excentriczitásnak)* nevezzük, és $2c$-vel jelöljük, úgy az imént kimutatott tulajdonság következtében

$$c^2 = a^2 - b^2,$$

hol a, b az ellipsis féltengelyeinek hosszúságát jelenti.

E relaczió különben a gyujtópontok értelmezéséből is leszármaztatható. Ha az ellipsis fő- és melléktengelyén levő egy-egy csúcspontot S, ill. S_1-gyel, e pontok érintőinek metszőpontját P-vel, végre P-ből SS_1-re bocsátott merőlegesnek metszőpontját MS főtengelylyel, Q-val jelöljük, úgy PQS, SS_1M hasonló háromszögekből következik (88*a*. ábr.)

$$MS-MQ:SP=MS_1:MS,$$

vagy

$$MS^2-MQ\,.\,MS=SP\,.\,MS_1=\overline{MS_1}^2.$$

De $MQ\,.\,MS$, hatványa azon involucziós pontsornak, melyet az egymásra merőleges kapcsolt egyenesek a főtengelyen kimetszenek, és ezért

$$MQ\,.\,MS=\overline{MF}^2,$$

tehát

$$\overline{MS}^2-\overline{MF}^2=\overline{MS_1}^2,$$

vagy

$$c^2=a^2-b^2$$

mi már a fönnebbi egyenletre vezet.

A hyperbolánál szintén találunk ehhez hasonló relacziót. Jelöljük e végből a hyperbola csúcsait S, S'-tel, a melléktengelyen levő hatványpontokat S_1, S'_1-gyel; S'_1 és S pontokon át a fő- ill. melléktengelylyel párhuzamosan huzott egyenesek közös pontját P-vel, végre P-ből S_1S-re bocsátott merőlegesnek metszőpontját a főtengelylyel Q-val (88*b*. ábra).

MS_1S, SQP hasonló háromszögek következtében

$$MQ-MS:PS=MS_1:MS,$$

vagy

$$MQ\,.\,MS-MS^2=PS\,.\,MS_1=\overline{MS_1}^2.$$

De S_1, S pontok polárisa $|S'_1P|$, $|SP|$, tehát S_1S egyenes pólusa P pont, és S_1S, PQ két egymásra merőleges kapcsolt egyenes. Ennélfogva $MS.MQ$, mint hatványa az egymásra merőleges kapcsolt egyenesek által a főtengelyről kimetszett involucziós pontsornak, egyenlő $\overline{MF}^2$, tehát

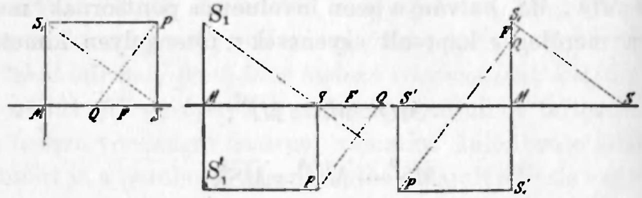
$$\overline{MF}^2-\overline{MS}^2=\overline{MS_1}^2,$$

s ha mint már előbb történt, a hyperbola melléktengelyén levő S_1, S'_1 hatványpontok távolságát $2b$-vel jelöljük, a talált relaczió így is irható:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Ha a képzetes kúpszelet tengelyein levő involucziós sorok hatványpontjait S, S'; S_1, S_1'-tel, azon sorok negativ hatványát MS^2, MS_1^2-et röviden a^2, b^2-tel; jelöljük, akkor a, b és a gyujtópontoknak F, F'-nek féltávolsága $c = MF = F'M$ között szintén találunk az előbbiekkel hasonló relacziót.

$|SS_1|$ egyenes pólusa nem egyéb, mint S', S_1' pontokon át a tengelyekkel párhuzamosan menő egyeneseknek P metszőpontja, s ha



a) b) c)

88. ábra.

P-ből $|SS_1|$-re bocsátott merőlegesnek metszőpontját $|S_1S_1'|$-el ($MS > MS_1$), Q-nak nevezzük, akkor MSS_1, $S_1'QP$ hasonló háromszögekből:

$$MS : MS_1 = S_1'M + MQ : PS_1',$$

vagy

$$MS_1 \,.\, PS_1' = MS_1 \,.\, S_1'M + MQ \,.\, MS_1,$$

és mert

$$MQ \,.\, MS_1 = MF^2 = c^2,$$

azért

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

134. A 85. 86. ábra alapján *gyujtópontjai és főtengelyén levő csúcsai által adott kúpszelethez tetszőleges P pontból kiinduló érintők következőkép szerkeszthetők.* Az egyik gyujtópontból, pl. F'-ből a főtengely hosszával kört irunk le és ezt metszéshez hozzuk I, I_1 pontokban azon körrel, mely P-ből a másik gyujtóponton F-en át leiratott: IF, I_1F-re P-ből bocsátott PT, PT_1 merőlegesek a kivánt t, t_1 érintők; IF', I_1F' egyeneseknek T, T_1 metszőpontja az érintőkkel az érintőpontok.

A parabola eseténél a vezérvonal képezi, az előbbi F'-ből a főtengely hosszával leírt kört; a vezérvonal pedig a tengelyre merőleges egyenes, mely a csúcstól ép oly távolságra van, mint a gyujtópont F (87. ábra). —

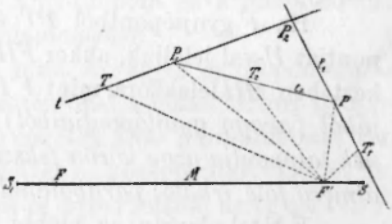
A szerkesztésnél előforduló IPF', I_1PF' háromszögek összeillőségéből következtetni lehet, hogy $\sphericalangle IF'P = \sphericalangle PF'I_1$ (parabolánál $\sphericalangle TFP = \sphericalangle PFT_1$), de minthogy az érintők T, T_1 érintőpontja azon szögeknek IF', I_1F' szárán fekszik mondhatjuk: *a kúpszelet két tetszőleges pontját bármely gyujtóponttal összekötő egyenesek hajlásszöge felezve lesz azon egyenes által, mely a gyujtópontot a felvett pontok érintőinek metszőpontjával összeköti.*

A tétel különben a gyujtópontok ama értelmezésének egyszerű következménye, hogy «a gyujtópontokból kiinduló kapcsolt polárisok egymásra merőlegesek». PF' egyenesnek ugyanis pólusa Q, TT_1 egyenesen fekszik és harmonikusan választja el T, T_1 pontokat PF'-től, tehát $|F'T|$, $|F'P|$, $|F'T_1|$, $|FQ|$ harmonikus sugarak, — de mert $|F'P|$, $|F'Q|$ mint kapcsolt polárisok egymásra merőlegesek: $|F'P|$ és hasonlókép $|F'Q|$ felezi $|TF'|$, $|T_1F'|$ egyenesek hajlásszögeit.

Hogy az előbbi tételt általánosíthassuk, nevezzük a kúpszelet t, t_1, t_2 érintőinek érintőpontjait T, T_1, T_2-nek; t, t_1; t_1, t_2; t_2, t érintők metszőpontját P_2, P, P_1-nek, végre a kúpszelet egyik gyujtópontját F'-nek. A tétel folytán (89. ábra):

$$\sphericalangle P_1F'P = P_1F'T_2 + T_2F'P = \tfrac{1}{2}(TF'T_2 + T_2F'T_1) = \tfrac{1}{2}TF'T_1,$$

ha tehát t, t_1 érintő állandó marad, t_2 pedig változik, $\sphericalangle TF'T_1$ fele, és így a vele egyenlő $\sphericalangle P_1F'P$ is állandó marad. Ebből következik: *a kúpszeletnek két szilárd érintője egy változó érintőről oly részt metsz le, mely a kúpszeletnek bármely gyujtópontjából egyenlő szög alatt mutatkozik.*



89. ábra.

Minthogy a kúpszelet egyik gyujtópontja és három érintője által egyféleként van meghatározva (96), a tétel folytán három érintőből és a gyujtópontból bárhány érintő egyszerű úton szerkeszthető. A kúpszeletnek hiányzó gyujtópontja azon körnek középpontja, mely az adott gyujtópontnak a három érintőre vonatkozó tükörképén megy át.

Ha az új t_2 érintők szerkesztésénél tekintetbe veszszük, hogy a változó t_2 érintő a szilárd t, t_1 érintőket projektiv pontsorok szerint metszi, úgy a tételből következik: *két projektiv pontsor megfelelő pontjait összekötő véges egyenesek, egyenlő hosszuaknak látszanak* *azon kúpszelet gyujtópontjaiból tekintve, mely a projektiv pontsorok képződménye.* Vagy «két projektiv pontsor síkjában két oly pont van, melyből a két pontsort, két egyenlően-projektiv koncentrikus sugársor sugarai projicziálják; e két pont gyújtópontja ama kúpszeletnek, mely a két projektiv pontsor képződménye». (Összehasonlítandó a 27. alatt tárgyalttal).

135. Térjünk ismét vissza a 85—87. ábrához, melyben a kúpszelet F gyujtópontjának I tükörképe PT érintőre vonatkozólag, továbbá PF érintőnek T érintőpontja és a másik gyujtópont F' | ITF' | egyenesen fekszenek.

Minthogy PT érintő változásánál I tükörkép, $2a$ sugaru kört ír le, melynek középpontja F', a változó T érintőpont pedig $TF=TI$ egyenlet következtében azon körtől ép oly távolságra van, mint F gyujtóponttól, mondhatjuk: *mindazon pontok, melyek egy állandó ponttól (F) és egy körtől (IFI_1) egyenlő távolságra vannak, kúpszeleten fekszenek, melynek egyik gyujtópontja a kör középpontja F', a másik pedig az állandó pont; e kúpszelet főtengelye egyenlő a kör sugarával. A kúpszelet ellipsis vagy hyperbola a szerint, a mint az állandó pont a körön belül, vagy kivül fekszik; a kúpszelet parabola, ha a kör egyenessé fajul, és ezen egyenes a parabola vezérvonala.*

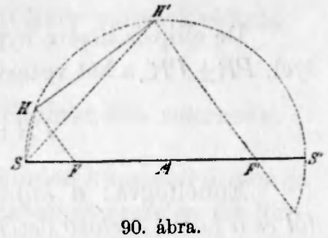
Ha F gyujtópontból PT érintőre bocsátott merőlegesnek talppontját H-val jelöljük, akkor FIF', FHM hasonló háromszögek következtében MH félakkora, mint $F'I=2a$, tehát: *a kúpszelet gyujtópontjából (avagy gyujtópontjaiból) az érintőkre bocsátott merőlegeseknek talppontja azon körön fekszik, mely a kúpszelet főtengelye, mint átmérő fölé írható; parabolánál ezen kör a csúcsérintőbe megy át.*

E tétel alapján az előbbi szerkesztéstől némileg eltérőleg szerkeszthetünk egy pontból a kúpszelethez érintőket, ha az, gyujtópontjai és főtengelye által van adva, nemkülönben a kúpszeletet mint burkolt görbét következőkép származtathatjuk. «Ha egy derékszög úgy mozog, hogy egyik szára állandó ponton megy át, csúcsa pedig egy körön marad, akkor a másik szár kúpszeletet burkol, melynek egyik gyujtópontja az állandó pont; középpontja egyszersmind a kör középpontja; főtengelyének hossza, a kör átmérője. A kúpszelet ellipsis vagy hyperbola a szerint, a mint az állandó pont a körön belül vagy kívül fekszik; a kúpszelet parabola, ha a kör, melyen a derékszög csúcsa mozog, egyenessé fajul.»

Felhasználjuk végre az utóbb talált tételt a következőnek igazolására: *a kúpszelet gyujtópontjaiból az egyes érintőkre bocsátott*

merőlegeseknek szorzata állandó és az ellipsisnél egyenlő félmelléktengelyének négyzetével, a hyperbolánál pedig a jeltől eltekintve, a melléktengelyen fekvő hatványpontok féltávolságának négyzetével.

Ha ugyanis az ellipsis vagy hyperbola F, F' gyujtópontjaiból tetszőleges érintőre bocsátott merőlegesnek talppontját H, H'-nek, a főtengelyen egyik csúcsot S-nek nevezzük (90. ábra), akkor FHS, $F'H'S$ háromszögek hasonlók, mert



90. ábra.

$$\sphericalangle HFS=H'F'S;\ \sphericalangle FSH=F'H'S$$

(egyenlő körívek fölött nyugszanak), tehát

$$FH : FS=F'S : F'H',$$

vagy

$$FH \,.\, F'H'=FS \,.\, F'S;$$

de ellipsisnél ez utóbbi szorzat: $(a-c) \,.\, (a+c)=b^2$, hyperbolánál pedig a jeltől eltekintve: $(c+a)\,(c-a)=b^2$. —

136. Láttuk az előbbiekben, hogy a parabola pontjai a gyujtóponttól és a vezérvonaltól egyenlő távolságra vannak, ezért vizsgáljuk még meg, hogy a középponttal biró kúpszeletek — ellipsis és hyperbola — pontjai, nem mutatnak-e a gyujtópont és a hozzá tartozó vezérvonal irányában hasonnemű tulajdonságot?

A kúpszeletek vezérvonalait, mint az egyes gyujtópontoknak polárisait értelmeztük. E szerint a vezérvonal a hozzá tartozó gyujtóponttól a kúpszelet főtengelyén levő csúcsok által harmonikusan van elválasztva és ha a kúpszelet főtengelyét és középpontkivüliségét $2a$, illetve c-vel jelöljük, úgy az ellipsis és hyperbolánál az egyes vezérvonalak távolsága a középponttól: $a^2 : c$.

Nevezzük az ellipsis vagy hyperbola tetszőleges P pontjában vont érintőnek metszőpontját F, F' gyujtópontokhoz tartozó f, f' vezérvonalakkal Q, Q'-nek; P-ből a vezérvonalakra bocsátott merőlegeseknek talppontjait R, R'-nek (91. és 92. ábra).

Q pontnak polárisa PF, mert Q, F-nek polárisán van és P, érintőpontja Q-ból a kúpszelethez vonható egyik érintőnek; QF tehát kapcsolt FP-hez és így merőleges FP-re. Ugyanezen oknál fogva $Q'F'$ is merőleges $F'P$-re. QFP, $Q'F'P$ derékszögű háromszögek $\sphericalangle QPF=Q'PF'$ következtében hasonlók, azért

$$PQ : PF=PQ' : PF',$$

és QRP, $Q'R'P$ hasonló háromszögek folytán:

$$PR : PQ = PR' : PQ',$$

mely arányokból

$$PR : PF = PR' : PF',$$

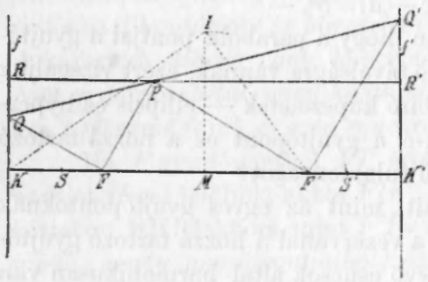
és

$$PR : PF = PR \pm PR' : PF \pm PF'.$$

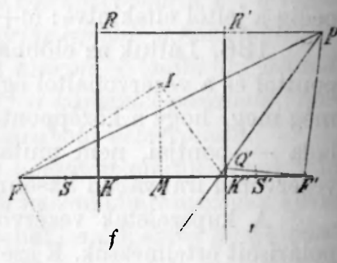
De ellipsis illetve hyperbolánál $PF \pm PF'$ egyenlő a főtengelylyel, $PR \pm PR'$ a két vezérvonal távolságával, tehát

$$PR : PF = \frac{2a^2}{c} : 2a = a : c$$

Ennélfogva: *a kúpszelet tetszőleges pontjának a gyujtóponttól és a hozzá tartozó vezérvonaltól mért távolságai állandó viszonyban vannak. E viszony értéke az ellipsisnél, $a > c$ következtében, nagyobb; hyperbolánál, hol $a < c$, kisebb, a parabolánál pedig — mint láttuk — egyenlő, egygyel.*



91. ábra.



92. ábra.

A kúpszelet meg van határozva egyik gyujtópontja, a hozzá tartozó vezérvonal és még egy pontja vagy érintője által (95-dik pont *c)* és *c_1)*, és új pontoknak szerkesztése az előbbi tétel és annak levezetésénél alkalmazott ábra alapján egyszerüen eszközölhető.

Ha ugyanis a kúpszeletnek adott F gyujtópontjából f vezérvonalra merőlegest bocsátunk, mely azt K-ban metszi, és FK-t F-tol mérve harmonikusan úgy osztjuk, mint a milyen az adott P pontnak távolsága F és f-től, akkor az osztáspontok a kúpszeletnek főtengelyén fekvő csúcspontok. Ha továbbá P pont helyett a kúpszeletnek p érintője van adva, mely f vezérvonalat Q-ban metszi, akkor QF-re F-ben emelt merőleges p érintőnek P érintőpontján megy át, mely P ponttal a szerkesztés az előbbire van visszavezetve.

III. FEJEZET.

Kúpszelet-sorok és seregek projektiv vonatkozása.

18. §. Két kúpszelet közös elemei. A Steiner-féle rokonság.

137. Tanultuk az előbbiekben, hogy minden kúpszelet öt pontja által meg van határozva, és hogy négy ponton át végtelen sok kúpszelet fektethető. Ebből következik, hogy két kúpszelet egymást négy pontban metszheti. Hogy a metszőpontok száma nem lehet páratlan, tehát sem egy, sem három, azt ily módon szokás kimutatni.

Minden kúpszelet a sikot két részre osztja, melynek határvonalát maga a kúpszelet képezi; e részek egyikében azon pontok fekszenek, melyekből valós érintők nem húzhatók a kúpszelethez, ezekről azt mondjuk, hogy a kúpszeleten belül vannak; a másik rész pontjaiból valós érintők vonhatók a kúpszelethez, és ez a kúpszeleten kívül fekszik.

Ha a két kúpszelet k, k' *egy* közös A ponttal bír, akkor ezen pontnak két szomszédos pontja az egyik kúpszeleten, pl. k'-en, a másik kúpszelet által meghatározott két különböző sikrészben fekszik; e szerint k-n vannak pontok, melyek k-n kivül és olyanok, melyek k-n belül fekszenek. Minthogy a kúpszelet zárt görbe, tehát az A pontból kiinduló és k'-en haladó pont ismét A-ba jut, ezért ha k'-en A-ból kiinduló pont k-n belül fekvő síkrészben halad, nem juthat a k-n kivül fekvő részbe a nélkül, hogy a határon t. i. k görbén még egyszer át ne menne; ezen átmeneti pont képezi k' és k-nak új metszőpontját. Ha azonban a k'-en tova mozgó pont még egyszer azon síkrészbe jutna, mely k-n belül fekszik, vagyis k', k-t harmadízben metszené, akkor ismét ki kellene onnan kerülnie, hogy A-val egyesülhessen, a k-n kívül fekvő és A-val szomszédos ponton át.

Ha k, k' kúpszeleteknek egy tetszőleges $\varkappa$ kúpszeletre vonatkozó polár kúpszeleteit megszerkesztjük (81.), akkor ezen polár kúpszeletekről is mondhatjuk, hogy 0, 2 vagy 4 metszőpontjuk lehet. Azonban minden ily metszőpontnak $\varkappa$-ra vonatkozó polárisa, k, k'-nek közös érintője; tehát k, k' kúpszeletek közös érintőinek száma is páros. E szerint:

Két ugyanazon sikban fekvő kúpszelet valós

metszőpontjainak száma mindig páros, tehát: 0, 2 vagy 4.	*közös érintőinek száma mindig páros, tehát: 0, 2 vagy 4.*

138. Két kúpszelet közös pontjai és érintőinek szerkesztése szoros összefüggésben áll *azon pontok meghatározásával, melyeknek polárisai mindkét kúpszeletre vonatkozólag ugyanegy egyenesbe esnek, és oly egyenesek meghatározásával, melyeknek pólusai egy pontba esnek.*

Hogy az ily pontokról fogalmat szerezzünk magunknak, nevezzük k, k' kúpszeletek síkjának tetszőleges pontját P-nek; ennek k, k'-re vonatkozó polárisát p, p'-nek ezek metszőpontját Q-nak. Q pont, mint könnyen belátható, P-hez kapcsolt pólus mindkét kúpszeletet illetőleg, és viszont Q-hoz, P a kapcsolt pólus, mert Q-nak polárisai egymást P-ben metszik. Ily két pontot mint P, Q: *közös kapcsolt pólusnak* lehet nevezni.

Vizsgáljuk meg, mily geometriai helyet ír le a P-hez mindkét kúpszeletre vonatkozólag kapcsolt pólus Q, mialatt P a síknak tetszőleges g egyenesén végig halad. Ha q-nek k és k'-re vonatkozó pólusa G, G' látható, hogy: mialatt P, g egyenesen tova mozog, P-nek k, k'-re vonatkozó polárisai p, illetve p'; G, G' körül két sugársort irnak le, mely külön-külön a pontsorral involucziós fekvésű, tehát egymás között projektiv. E két projektiv sugársor képződménye γ kúpszelet, melynek származásánál fogva minden Q pontja P-hez kapcsolt pólus a két kúpszeletet k, k'-et illetőleg. E szerint:

«Ha valamely síkban két kúpszelet van adva, akkor a sik minden

P pontjához általában egy Q pont tartozik, mely mindkét kúpszeletre vonatkozólag kapcsolt pólus; mialatt P egy tetszőleges g egyenesen végig halad, P-hez mindkét kúpszeletre vonatkozólag kapcsolt pólusok egy γ kúpszeletet irnak le, mely átmegy q-nek k, k'-re vonatkozó pólusán G, G' ponton.»	egyeneséhez általában egy egyenes tartozik, mely mindkét kúpszeletre vonatkozólag kapcsolt poláris; mialatt az egyik egyenes sugársort ír le, az alatt a hozzá kapcsolt poláris egy kúpszeletet burkol, melynek két érintője, azon sugársor középpontjának polárisa a két kúpszeletre vonatkozólag.»

Vegyünk fel már most a két kúpszelet síkjában két egyenest g, g_1-et; e két egyeneshez két kúpszelet γ, γ_1 tartozik, mely g, g_1 pontjaihoz mindkét kúpszeletre vonatkozó kapcsolt pólusokat tartalmazza. g, g_1 egyenesek közös P_0 pontjához kapcsolt Q_0 pólus, γ és γ_1 kúpszeleten fekszik, tehát γ, γ_1 egymást Q_0 valós pontban metszi; ennélfogva még egy vagy három valós közösponttal X, Y, Z-vel bír. Minthogy X pont γ-n fekszik, a hozzá mindkét kúpszeletre vonatkozó kapcsolt pólus g-n lesz, de minthogy X, γ_1-nek is pontja, g_1-en is létezik X-hez mindkét kúpszeletre vonatkozólag kapcsolt pólus; e két g és g_1-en fekvő és X-hez mindkét kúpszeletre vonatkozólag kapcsolt pólus összekötő egyenese x: X pontnak polárisa k és k' kúpszeleteket illetőleg. Ugyanez mondható γ, γ_1 más két metszőpontjáról Y és Z-ről, ha azok valósak, t. i.: Y és hasonlókép Z pontnak k és k'-re vonatkozó polárisai egy és ugyanazon egyenesbe y, illetve z-be esnek.

Könnyen belátható, hogy az X, Y, Z pontok és x, y, z egyenesek által képezett háromszögek egybe esnek. Ha ugyanis X és Y pontnak polárisai k, k' kúpszeletekre vonatkozólag x, y egyenesek, úgy ezek metszőpontjának, pl. U-nak polárisa, amazoknak összekötő egyenese $|XY|\equiv u$, mely u egyenes minden pontjához kapcsolt pólus U pont volna. De (u, g) metszőponthoz k, k'-re vonatkozó kapcsolt pólus γ-n; (u, g_1) metszőponthoz kapcsolt pólus γ_1-en fekszik; e szerint U pont γ, γ_1-nek egy új metszőpontja volna. γ, γ_1 kúpszeleteknek azonban Q_0, X, Y, Z pontjuk közös, nem metszhetik tehát egymást egy új U pontban; e végből x, y metszőpontja U egybeesik Z-vel, és így $|XY|\equiv u$ egyenes, z egyenessel.

Vizsgálatunkat egybefoglalva így fejezhetjük ki:

Két kúpszelet közös síkjában általában három oly pont van, melyek mindegyikének polárisa mindkét kúpszeletre vonatkozólag egy egyenesbe esik, mely pontokhoz tehát végtelen sok kapcsolt pólus tartozik; azon három pont és annak három polárisa, egy és ugyanazon háromszögnek, a kúpszeletek **közös polárháromszögének** *szögpontja, illetve oldala. E közös polárháromszögnek egyik szögpontja és átellenes oldala mindig valós, a másik két szögpont és így a másik két oldal képzetes is lehet.*

139. Vizsgáljuk meg, hogy a két kúpszelet k, k' mily helyzeténél és valós vagy képzetes mivoltánál, lesznek ezen közös polárháromszög oldalai valósak vagy részben képzetesek.

Ha k, k' kúpszelet közös polárháromszögének XYZ-nek valós szögpontja X, akkor Y, Z szögpontok X-nek polárisán x-en feküsznek és azon két involucziós pontsornak közös kapcsolt pontpárját képezik, melyet a két kúpszeletnek kapcsolt pólusai x-en indukálnak. Ha ezen involucziós pontsorok mindegyike, vagy csak egyike elliptikus természetű, akkor azoknak mindig van közös kapcsolt pontpárjuk, ha pedig mindkét involucziós pontsor hyperbolikus, akkor azon egy esetben, a midőn a kettőspontok egymást elválasztják, nincs a két involucziós pontsornak közös kapcsolt pontpárja. Ennélfogva:

α) *Ha mindkét kúpszelet k, k', vagy csak az egyik képzetes, a két kúpszeletnek közös polárháromszöge valós, mert* X-nek közös polárisán x-en mindig van két valós közös kapcsolt pontpár Y, Z.

β) *Ha a két kúpszelet egymást négy valós pontban metszi; a négy metszőpont által meghatározott teljes négyszög átlósháromszöge, képezi a két kúpszeletnek valós polárháromszögét.*

β_1) *Ha a két kúpszelet négy közös valós érintővel bír, úgy ezen érintők által képezett teljes négyoldal átlósháromszöge, képezi a két kúpszeletnek valós polárháromszögét.*

γ) *Ha a két kúpszelet nem bir valós közös pontokkal,* mely eset akkor következik be, ha az egyik kúpszeletnek összes pontjai a másikon kívül, vagy pedig belül fekszenek, tehát X-nek polárisán x-en a két kúpszelet kapcsolt pólusai által indukált involucziós pontsorok kettőspontjai, vagyis a kúpszeleteknek metszőpontjai x-szel, egymástól nincsenek elválasztva, *a két kúpszeletnek közös polárháromszöge valós.*

γ_1) *Ugyanez mondható, ha a két kúpszelet nem bir valós közös érintőkkel,* mert a két kúpszeletnek tetszőleges $\varkappa$ kúpszeletre vonatkozó polár kúpszeletei ezen esetben nem bírnak valós közös metszőpontokkal. Ekkor tehát, γ) szerint, a polár kúpszeleteknek közös polárháromszöge valós, melynek $\varkappa$-ra vonatkozó polár ábrája: az eredeti két kúpszelet közös polárháromszöge.

δ) és δ_1) Ha végre a két kúpszelet egymást csak két valós pontban metszi, akkor X pont szükségkép a metszőpontok összekötő egyenesén s-en fekszik és a metszőpontoktól x által harmonikusan van elválasztva. Mert (s, x) ponthoz, mint x-en fekvő ponthoz kapcsolt pólus X-ben van, és mint s-en fekvő pont, k, k'-nek s-en levő metszőpontjaitól (s, x) által harmonikuson van elválasztva.

Ezen X pont szükségkép a két metszőponttal határolt közön kívül, (s, x) pedig azon belül fekszik, úgy hogy x a metszőpontokat elválasztja egymástól. Ha ugyanis x nem metszené k, k'-et valós pontokban, x-en találnánk két valós közös kapcsolt pólust Y, Z-t. XYZ ekkor a két kúpszelet közös polárháromszöge volna és ezért X, Y pontok harmonikusan volnának elválasztva a kúpszeletek által. Ámde $|XY|$ és k metszőpontjai közül egyik k'-en belül, a másik azonkívül van, és hasonlókép $|XY|$ és k' metszőpontjai, k által el vannak választva. Minthogy e szerint k, $|XY|$ és k', $|XY|$ metszőpontjai egymást elválasztják, nem létezik oly valós pontpár X, Y, melyet azok harmonikusan választanának el. X pont tehát k, k' két metszőpontjával határolt közön kívül (s, x) pedig azon belül fekszik. E végből x-en a kapcsolt pólusok által indukált involucziós pontsorok hyperbolikus természetűek, melyeknek kettőspontjai egymást elválasztják, tehát az involucziós sorok nem birnak közös kapcsolt pontpárral.

Ha tehát két kúpszeletnek csak két valós közös pontja vagy csak két valós közös érintője van, a közös polárháromszög két szögpontja és ezeknek átellenes oldalai képzetesek.

140. *Két kúpszelet közös polárháromszöge azon nevezetes tulajdonsággal bír, hogy a kúpszeleteknek közös kapcsolt*

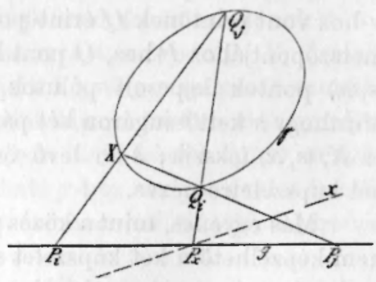
pólusai a polárháromszög szögpontjaiból involucziós pontsorokkal projicziáltatnak. | *polárisai a polárháromszög oldalait involucziós pontsorok szerint metszik.*

Hogy ezt bizonyítsuk, nevezzük ismét g egyenesen változó P_i pont kapcsolt pólusát Q_i-nek; Q_i pontok geometriai helyét γ-nak; a közös polárháromszög egyik szögpontját X-nek, az ennek átellenes x oldal metszőpontját g-vel P_x-nek, mely P_x-hez γ kúpszeleten kapcsolt pólus, X pont.

Minthogy P_i és P_x, kapcsolt pólusai Q_i és X, a Hesse-tétel szerint

$$|P_iP_x| \text{ és } |Q_iX| \text{ metszőpontja } P_j, \text{ és}$$
$$|P_iX| \quad \text{«} \quad |P_xQ_i| \quad \text{«} \quad Q_j$$

is kapcsolt pólus, és mert P_j pont g-n fekszik: Q_j, γ kúpszeleten lesz.



93. ábra.

Ha P_i, g egyenesen tova mozog, Q_i, Q_j pontok szintén változnak γ-án, P_j pedig g-n; P_x és X pontok azonban állandók maradnak, és mert Q_i, Q_j pontok összekötő egyenese mindig átmegy P_x-en: P_i, Q_i pontok X-ből oly $|XQ_j|$, $|XQ_i|$ sugárpárakkal projicziáltatnak melyek involucziós sugársort képeznek (77). Ezen involucziós sugársor kettőssugarai, P_x-ból γ-hoz vonható érintők érintőpontján mennek át, tehát csak akkor valósak, ha $P_x \equiv (g, x)$ pont γ-án kívül fekszik.

Azon három involucziós sugársor, mely két kúpszelet kö- | *pontsor, melyben a két kúpszelet* *zös kapcsolt pólusait a közös polárháromszög szögpontjaiból procziálja, vagy mindegyike hyperbolikus vagy egyik hyperbolikus, a másik kettő elliptikus természetű. A hyperbolikus természetű involucziós sugársor kettőssugarain, a két kúpszelet kapcsolt pólusai ugyanazon involucziós pontsort indukálják.*

közös polárisai, a közös polárháromszög oldalait metszik, vagy mindegyike hyperbolikus, vagy egyik hyperbolikus, a másik kettő elliptikus természetű. A hyperbolikus természetű involucziós pontsor kettőspontjain átmenő kapcsolt polárisok mindkét kúpszeletre nézve, ugyanazon involucziós sugársort képezik.

Tetszőleges g egyenes a két kúpszelet közös polárháromszögének szögpontjai közül vagy csak egyet választ el a többi kettőtől, vagy egyet sem; tehát g egyenes és XYZ háromszög oldalainak P_x, P_y, P_z metszőpontjai közül vagy egy, vagy mind a három a szögpontokon túlhosszabbított $\overline{YZ}$, $\overline{ZX}$, $\overline{XY}$ oldalakon fekszik. Azon γ kúpszelet, melynek pontjai g pontjaihoz a két kúpszeletet, illetőleg kapcsolt pólusok: XYZ háromszög körül van irva; és azon involucziós sugársoroknak kettőssugarai, melyeknek sugárpárja X, valamint Y és Z pontokból, a két kúpszeletre vonatkozó kapcsolt pólusokat projicziálják P_x, valamint P_y és P_z pontokból γ-hoz vonható érintők érintőpontjain mennek át. Minthogy P_x, P_y, P_z pontok közül, az előbbi szerint, csak egy, vagy mind a három γ-án kívül fekszik: a tetel első része be van bizonyítva.

Ha s, az X pontból kiinduló egyik valós kettőssugár, mely P_x-ből γ-hoz vont érintőnek Q érintőpontján megy át, akkor $|XQ|\equiv s$ és g metszőpontjához P-hez, Q pont közös kapcsolt pólus; másrészt X és (s, x) pontok kapcsolt pólusok mindkét kúpszeletre vonatkozólag. Minthogy s kettőssugáron két pár közös kapcsolt pólus: Q, $P\equiv(s, g)$, és X, (s, x) fekszik; s-en levő összes kapcsolt póluspárak közösek a két kúpszeletre nézve.

Más egyenes, mint a közös polárháromszög szögpontjain átmenő nem képzelhető a két kúpszelet síkjában, melyen a két kúpszelet kapcsolt pólusai ugyanazon involucziós pontsort indukálnák. Mert ha u egy ily egyenes volna, mely a közös polárháromszög x oldalát (u, x) pontban metszené, a nélkül, hogy annak X, Y, Z szögpontjain átmenne, akkor (u, x) ponthoz mindkét kúpszeletre vonatkozólag kapcsolt X pontnak u-n kellene feküdni, vagy mi ugyanaz, u-nak X-en kellene átmenni. De az X-en átfektetett tetszőleges $|XQ_jP_i|$ egyenes, mely γ-át Q_j-ben, g-t P_i-ben metszi (93. ábra) olyan, hogy P_i-hez kapcsolt pólus nem fekszik $|XQ_jP_i|$-n, hanem γ-nak egy másik pontjában, t. i. $|XQ_iP_j|$ egyenesen, kivévén ha $|XQ_jP_i|$ és $|XQ_iP_j|$ egybe esik, vagyis ha azon közös egyenes kettőssugara a kapcsolt pólusokat X-ből projicziáló involucziós sugársornak. Ennélfogva mondhatjuk:

Két kúpszelet síkjában általában hat, vagy két oly valós egyenes van, melyen a két kúpszelet kapcsolt pólusai ugyanazon involucziós pontsort indukálják; ezen egyenesek kettejével átmennek a két kúpszelet közös polárháromszögének szögpontjain, és kettőssugarai azon involucziós sugársoroknak, melyek a kúpszeletekre vonatkozó közös kapcsolt póluspárakat a nevezett polárháromszög szögpontjaiból projicziálják.

pont van, melyen átmenő és mindkét kúpszeletre vonatkozó kapcsolt polárisok ugyanazon involucziós sugársort képezik; e pontok kettejével a két kúpszelet közös polárháromszögének oldalain fekszenek és kettőspontjai azon involucziós pontsoroknak, melyeknek pontpárjai az összes kapcsolt polárisoknak metszőpontjai a nevezett polárháromszög oldalaival.

141. Könnyen kimutatható, hogy *a midőn két kúpszelet közös polárháromszögének csak egy szögpontja és ennek átellenes oldala valós, akkor azon involucziós sugársor, melynek kapcsolt sugarai a két kúpszelet közös kapcsolt pólusait, azon valós szögpontból projicziálják, és azon involucziós pontsor, mely szerint a kapcsolt polárisok azon valós oldal által metszetnek: mindenkor hyperbolikus természetű.*

Nevezzük a két kúpszelet közös polárháromszögének valós szögpontját és oldalát X, x-nek; azon az X ponton átmenő kúpszeletet, melyen g egyenes pontjaihoz kapcsolt pólusok fekszenek γ-nak.

Minthogy a közös polárháromszög két szögpontja Y, Z, mely x-en fekszik képzetes, ezen Y, Z pontok pedig γ és x-nek metszőpontjai: x nem metszi γ-át valós pontokban; tehát x-nek minden pontja és így g és x metszőpontja is γ-án kívül fekszik. (g, x) metszőpontból e végből két valós érintő húzható γ-hoz, melynek valós érintőpontjai X-ből az említett involucziós sugársor valós kettőssugaraival projicziáltatnak.

A dualis tétel bebizonyítása hasonlókép történik, és mert ezen esetben, a midőn a közös polárháromszögnek csak X szögpontja és annak átelles x oldala valós, a két kúpszelet két valós és két képzetes metszőponttal bír, melyek azon sugársornak egy-egy valós kettőssugarain fekszenek: az x-en fekvő és a tétel által kifejezett involucziós pontsor kettőspontjainak egyikéből a kúpszeletekhez két valós, a másikból két képzetes érintő húzható. Ennélfogva: *ha két kúpszeletnek* *két valós és két képzetes metszőpontja van, akkor azoknak közös érintőjei közül is kettő valós, kettő pedig képzetes.*

142. Két kúpszelet k, k' közös pontjai és érintőinek szerkesztése a tárgyaltak szerint következőben áll:

«Miután két tetszőleges g, g_1 egyenes pontjaihoz kapcsolt pólusokból álló geometriai hely, vagyis γ, γ_1 kúpszelet meg lett szerkesztve, meghatároztatnak ezeknek közös pontjai Q_0, X, Y, Z; ezek közül Q_0, mint (g, g_1) ponthoz kapcsolt pólus, és még egy metszőpont, pl. X mindig valós. XYZ háromszög $|YZ|$, $|XZ|$, $|XY|$ oldalai g egyenest P_x, P_y, P_z pontokban metszik, melyekből γ-hoz érintők huzatnak; az első két érintőpontot X-ből; a másik kettőt Y-ból, az utolsókat Z-ből projicziáló sugarak, a két kúpszeletnek hat közös szelői, melyek egymást a két kúpszelet négy metszőpontjában metszik.

Ha továbbá tetszőleges G, G_1 pontokon átmenő egyenesekhez kapcsolt polárisok Γ, Γ_1 kúpszeletet burkolnak, úgy ezeknek egy közös érintője $|GG_1|$-hez kapcsolt poláris; Γ, Γ_1 tehát általában még három közös érintővel x, y, z-vel bír, melyek egybeesnek az előbbi XYZ háromszög oldalaival. $|GX|$, $|GY|$, $|GZ|$ egyenesek Γ kúpszeletet két-két pontban metszik; az első két metszőpont érintői x-et, a másik két metszőponté y-ot, az utolsó két metszőpont érintői z-t; k, k' kúpszeletek közös érintőinek metszőpontjaiban metszik.»

Mint látjuk két kúpszelet négy közös pontjának és négy közös érintőinek szerkesztése, mely *negyedrendű feladat,* vissza van vezetve két kúpszelet γ, γ_1 három közös pontjának, vagy Γ, Γ_1 kúpszelet három közös érintőinek szerkesztésére, melyeknek egy közös pontja, illetve egy közös érintője ismeretes, mely utóbbi *harmadrendű feladat,* és csupán körző és vonalzó használatával nem eszközölhető. A további szerkesztés, mely pontból kúpszelethez való érintők huzásán, és egyenes és kúpszelet metszőpontjának szerkesztésén alapszik, már *másodrendű feladat* és azért körző és vonalzóval megoldható. A szerkesztésnél előforduló harmadrendű feladat a kúpszeletek általános helyzeténél mindig az marad és csak azoknak különös helyzeténél válhatik szét első- és másodrendű feladattá.

(Kortum * megmutatta, hogy ha a síkban egy kúpszelet van rajzolva úgy, hogy annak metszőpontjai tetszőleges kör vagy egyenessel ismereteseknek tekinthetők, hogyan lehet ezen megrajzolt

* Kortum: Geometrische Aufgaben dritten und vierten Grades. Bonn 1868.

kúpszelet, és körző és vonalzó segélyével negyed- és harmadrendű feladatokat megoldani.) (Függelék 5. és 6.)

143. Ha k, k' kúpszelet közös polárháromszögének egy szögpontja és így annak átellenes oldala x, mint X-nek polárisa a két kúpszelet bármelyikét illetőleg ismeretes, akkor a közös pontok és érintők szerkesztése körző és vonalzóval következőkép történik:

«A sík két tetszőleges pontjához P, P_1-hez felkeressük a közös kapcsolt pólusokat Q, Q_1-et; továbbá azon involucziós sugársor s, t kettőssugarait, melyeknek kapcsolt sugárpárjai $|XP|$, $|XQ|$; $|XP_1|$, $|XQ_1|$; ezen s, t kettőssugarakon fekszenek a metszőpontok, tehát ezeknek kell metszőpontjait a kúpszeletek egyikével szerkeszteni (55).

Ha azonban az involucziós sugársor elliptikus természetű volna, akkor a közös polárháromszögnek másik két szögpontja Y, Z szükségkép valós, és ezek a kúpszeletek által x-en indukált involucziós pontsorok közös pontpárjai. E pontok egyikéből P, Q; P_1, Q_1 pontpárak hyperbolikus természetű involucziós sugársorok által projiciáltatnak és ezeknek kettőssugarain fognak a keresett (képzetes) metszőpontok feküdni.

Hogy k, k' kúpszeleteknek közös érintőit megszerkesszük x-et metszéshez hozzuk két tetszőleges egyenes p, p_1-gyel és azokhoz kapcsolt egyenessel q, q_1-gyel, és felkeressük (x, p), (x, q); (x, p_1), (x, q_1) kapcsolt pontpárakkal biró involucziós sorok kettőspontjait S, T-t; e pontokból k, vagy k'-hez vonható érintők képezik a kúpszeletek közös érintőit.

Ha azon involucziós pontsornak kettőspontjai képzetesek, akkor k, k'-nek van x-en közös kapcsolt pontpárja Y, Z és a közös polárháromszögnek $|XZ| \equiv y$, $|XY| \equiv z$, oldalai közül egyik p, q; p_1, q_1 kapcsolt egyeneseket szükségkép oly pontpárakban metszi, melyek egymástól nincsenek elválasztva, tehát az általuk meghatározott involucziós pontsor kettőspontjai valósak; e valós kettőspontokból kiinduló érintők képezik a két kúpszelet közös érintőit.»

144. Az előbbi tárgyalásoknál felvettük, hogy azon γ, γ_1 kúpszeletek, melyek g, g_1 egyenes pontjaihoz k, k' kúpszeletre vonatkozó kapcsolt pólusok fekszenek, legföllebb négy közös ponttal bírnak. γ és γ_1 azonban végtelen sok közös ponttal is bírhat a nélkül, hogy minden pontja közös lenne, t. i. ha γ és γ_1 két-két egyenessé fajul és az első két egyenes közül egyik összeesik a másik két egyenes egyikével. Ezen eset bekövetkezik, ha k, k' kúpszelet egymást két, valós vagy képzetes pontban érinti, vagyis ha egy X pont polárisa mindkét kúpszeletre nézve ugyanazon x egyenes, és az x-en fekvő kapcsolt pólusok, tehát egyszersmind X-en átmenő kapcsolt polárisok, mindkét kúpszeletre vonatkozólag ugyanazon involucziós sort képezik.

Hogy ezt beláthassuk, nevezzük tetszőleges g egyenesnek metszőpontját x-szel, (g, x)-nek; g pólusát k, k'-re vonatkozólag G, G'-nek. (g, x) pont polárisa k-ra vonatkozólag $|GX|$, k'-re vonatkozólag $|G'X|$ egyenes; de minthogy (g, x) pont x-en fekszik, (g, x)-nek a két kúpszelet különös helyzeténél fogva ugyanazon $|GX| \equiv |G'X|$ egyenes, polárisa. Ha továbbá P pont g-nek tetszőleges pontja, akkor $|XP|$-nek pólusa mindkét kúpszeletre vonatkozólag ugyanazon x-en fekvő Q pont, mely tehát P-hez kapcsolt pólus k, k'-re nézve. g egyenes összes pontjaihoz kapcsolt pólusok e szerint x-be esnek, kivévén (g, x) pontot, melyhez kapcsolt pólusok $|XGG'|$ egyenes összes pontjai; γ kúpszelet tehát x és $|XGG'|$ egyenessé fajul. Ugyanez mondható valamennyi más γ kúpszeletről is, t. i., hogy két egyenessé fajulnak, melyeknek egyike x egyenes.

Az egymást két pontban érintő, — úgynevezett kettős érintésű k, k' kúpszeletek tehát végtelen sok közös polárháromszöggel birnak, melyeknek egyik szögpontja az érintőpontokon átmenő x egyenes pólusa X, a többi két-két szögpont pedig x egyenes bármely kapcsolt pólus párja lehet.

145. E §-ban tanult főfeladatnál, «két kúpszelet közös elemeinek szerkesztésénél» egyszerűbb a következő feladat:

Adva van két kúpszeletnek k, k'-nek két közös pontja A, B, vagy csak e két valós vagy képzetes pont összekötő egyenese s, és még minden kúpszeletnek három-három pontja C, D, E, illetve C', D', E'; szerkesztendők a másik két metszőpont, és a közös érintők.

s-nek a két kúpszeletre vonatkozó pólusait összekötő egyenes x: a két kúpszelet közös polárháromszögének egyik oldala; ennek pólusa X, a közös polárháromszög egyik szögpontja. Meglévén X és x, a feladat ezzel vissza van vezetve az előbbi szerkesztésre.

Lehet azonban a feladat megoldásánál más eljárást is követni.

Ha $|CC'|$ egyenes a két kúpszeletet és $|AB| \equiv s$-t: C, C_1; $C'C'_1$; és P-ben metszi, akkor a két kúpszelet hiányzó metszőpontjait összekötő t egyenes, $|CC'|$-nek azon P' pontján megy át, mely C, C_1; C', C'_1 kapcsolt pontpárakkal adott involuczióban P-hez kapcsolt. Hasonlóképp mondható: ha $|DD'|$ egyenes a két kúpszeletet és s-et: D, D_1; D', D'_1, és Q-ban metszi, és D, D_1; D', D'_1; Q, Q' kapcsolt pontpárak involucziót képeznek, akkor t egyenes Q' ponton megy át; tehát a két új metszőpont összekötő egyenese: $|P'Q'|\equiv t$. — s és t egyenes X metszőpontja a két kúpszelet közös polárháromszögének egyik szögpontja.

E szerkesztés a Desargues-féle tételen alapszik, mely mint tanultuk, így szól: minden általános helyzetű egyenes, négy ponton átmenő összes kúpszeleteket egy involucziós pontsor kapcsolt pontpárjaiban metszi.

146. A szerkesztés némileg egyszerűbb, ha k, k' kúpszeletnek három metszőpontja ismeretes; a feladat ekkor így szól:

Adva van két kúpszeletnek három közös pontja, szerkesztessék a negyedik metszőpont, ha a kúpszeleteknek a metszőpontokon kívül még két-két pontja ismeretes.

Nevezzük k, k' kúpszelet három közös pontját A, B, C-nek, k, k'-nek még két-két pontját E, F; E', F'-nek.

Ha $|AB|\equiv s$ egyenes pólusai k, k' kúpszeletet illetőleg σ, σ', akkor azon X pont, mely A, B pontokat $|\sigma\sigma'|\equiv x$ egyenestől harmonikusan elválasztja: a két kúpszelet polárháromszögének egyik szögpontja, x pedig annak átellenes oldala. Ama D-pont, mely X, x-et C-től harmonikusan választja el: a kúpszeleteknek negyedik közös pontja.

A szerkesztés ily módon is végezhető:

Nevezzük $|EE'|$ egyenes metszőpontjait k, k' $|AB|$, és $|AC|$-vel: E, E_1; illetve E', E'_1; G és H-nak, és ez utóbbi két ponthoz kapcsolt pontot az E, E_1; E', E'_1 kapcsolt pontpárakkal meghatározott involucziós sorban G', H'-nek. $|CG'|$ és $|BH'|$ egyenesek közös D pontja, a kúpszeletnek negyedik metszőpontja. E szerkesztés szintén a Desargues-féle tételen alapszik.

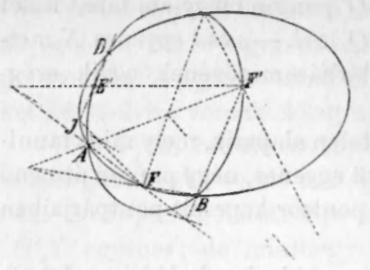
Lehet azonban e feladat megoldásánál így is eljárnunk (94. ábra): Szerkesztünk F-en át oly FI sugarat, hogy:

$$F(ABCI)=F'(ABCE'),$$

és felkeressük FI-nek második metszőpontját I-t, és $E'I$-nek szintén második metszőpontját D-t, k-val. Minthogy

$$D(ABCE')=D(ABCI)=F(ABCI)=F'(ABCE'),$$

A, B, C, E' pontok D és F'-ből oly négy sugárral projicziáltatnak, melyeknek kettősviszonya egyenlő, tehát D pont az A, B, C, E', F' pontokon átmenő kúpszeleten fekszik.



94. ábra.

Mind a három szerkesztési mód, melyet ezen feladat megoldásánál követtünk, csak a vonalzó használatát kivánja, és ezért a feladat vonalos.

147. Geometriai vizsgálatoknál gyakran előfordul a következő feladat, melyet az imént mutatott, szerkesztések alapján megoldhatunk. A feladat így hangzik:

Adva van a síkban öt sugár a, b, c, d, e, mely ugyanazon T ponton megy át, és még öt pont A, B, C, D, E; szerkesztendő X pont úgy, hogy:

$$(abcde)\barwedge X(ABCDE).$$

A megoldás következő: D ponton át $|DF|$ és E ponton át $|EG|$ egyenest szerkesztünk, melyre nézve

$$(abcd)\barwedge D(ABCF) \text{ és } (abce)\barwedge E(ABCG).$$

A, B, C, D ponton átmenő és $|DF|$-et D-ben érintő k kúpszeletnek minden pontja A, B, C, D pontokat oly négy sugárral projicziálja melyeknek kettősviszonya: $(abcd)$; A, B, C, E ponton átmenő és $|EG|$-t E-ben érintő k' kúpszeletnek minden pontja A, B, C, E pontokat oly négy sugárral projicziálja, melyeknek kettősviszonya: $(abce)$; k, k' kúpszeletnek negyedik metszőpontja X, a kivánt tulajdonsággal bír.

148. Végül még egyszer ki akarjuk emelni ezen § főfeladatánál előforduló vonatkozását a sík pontjai és egyeneseinek.

Láttuk, hogy ha egy síkban két általános helyzetű kúpszelet k, k' van adva, akkor a sík minden P pontjához egy Q pont tartozik, mely P-hez k, k' kúpszeletekre vonatkozólag kapcsolt pólus.

Láttuk továbbá, hogy a síkban általában három oly pont van, — mi azokat X, Y, Z-vel jelöltük, — melyhez nem egy, hanem végtelen sok pont tartozik, mint kapcsolt pólus, s melyek egy-egy egyenesen x, y, z-n fekszenek; s viszont ezen egyeneseknek, pl. x-nek minden pontjához egy pont, X, tartozik mint kapcsolt pólus. E három pont és e három egyenes egy és ugyanazon háromszögnek, k, k' kúpszelet közös polárháromszögének szögpontja és oldala, mely háromszögnek egy szögpontja és átellenes oldala mindig valós, a többi két-két alkotó rész egyidejűleg képzetes is lehet.

Kimutattuk továbbá, hogy ha P pont egy g egyenest ír le, akkor a hozzátartozó Q pontok egy γ kúpszeleten lesznek, mely XYZ háromszög körül van írva és viszont minden az XYZ háromszög körül írható kúpszelet pontjaihoz k, k'-re vonatkozó kapcsolt pólusok egy egyenesen (tulajdonkép XYZ háromszög oldalain és még egy egyenesen) fekszenek. Mert ha XYZ háromszög körül írt γ kúpszeletnek Q_1, Q_2 pontjához P_1, P_2 tartozik, mint kapcsolt pólus, akkor $|P_1P_2| \equiv g$ egyenes összes pontjaihoz kapcsolt pólusok: X, Y, Z, Q_1, Q_2 pontokon átmenő kúpszeleten, tehát γ-n fekszenek.

Ebből következik továbbá, hogy tetszőleges P_0 ponton átmenő összes g egyenesekhez oly γ kúpszeletek fognak tartozni, melyek négy ponton: X, Y, Z és P_0-hoz kapcsolt póluson Q_0-on mennek át. A midőn g, az XYZ háromszög egyik szögpontját pl. X-et tartalmazza: γ elfajul két egyenessé, melyeknek egyike XYZ háromszög $|YZ| \equiv x$ oldala, a másik pedig g tetszőleges P pontjához kapcsolt Q pontnak összekötő egyenese X-szel.

A pontoknak ilynemű vonatkozását a síkban, melynél minden P pontnak egy Q pont, és tetszőleges egyenesen fekvő pontoknak, három állandó ponton átmenő kúpszelet felel meg: *«Steiner-féle rokonság»*-nak nevezik.* Steiner Jakab (1796—1863.)

A Steiner-féle rokonság a síkban legegyszerűbben állapitható meg, ha k, k' két valós egyenespárrá elfajult kúpszeletnek vétetik fel. A közös polárháromszög ekkor a két egyenespár $ABCD$ metszőpontjai által képezett teljes négyszögnek átlósháromszöge. Két kapcsolt pólus, vagy máskép kifejezve, két megfelelő pont ekkor a teljes négyszög három pár átellenes oldalaitól harmonikusan van elválasztva (53).

Ha g egyenes a négyszög oldalait hat pontban metszi, és mi ezen hat ponthoz az egyes oldalakon a szögpontoktól harmonikusan elválasztott hat pontot megszerkesztjük, akkor g-nek megfelelő γ kúpszelet átmegy: ez utóbbi hat ponton; a négyszög átlósháromszögének szögpontjain; és azon involucziós pontsor valós vagy képzetes kettőspontjain, melynek három kapcsolt pontpárja g egyenes és a négyszög átellenes oldalainak metszőpontja.

* A dualisan megfelelő vonatkozásnál, a sík p egyenesének egy q egyenes, G pontnak egy az XYZ háromszög oldalait érintő Γ kúpszelet felel meg.

19. §. A kúpszeletsorról.

149. Tudjuk az előbbiekből, hogy négy ponton át végtelen sok kúpszelet fektethető. A pontok valós vagy képzetes mivoltukra nézve lehetnek:

a) mind a négy pont valós;

b) két pont valós, kettő képzetes és ez utóbbiak egy elliptikus természetű involucziós pontsor képzetes kettőspontjai.

c) mind a négy pont képzetes, melyek két különböző tartón fekvő elliptikus természetű involucziós pontsorok képzetes kettőspontjai.

Mindazon kúpszeletek, melyek ily négy ponton átmennek: *kúpszeletsort* képeznek; a négy pontot, melyen a kúpszeletsornak minden egyes kúpszelete, vagyis a sornak minden egyes eleme átmegy, a *kúpszeletsor alappontjainak* nevezik.

Minthogy két kúpszelet egymást mindig oly pontokban metszi, melyek egy kúpszeletsornak alappontjai lehetnek, azért mondhatjuk, *egy kúpszeletsor két kúpszelet által teljesen meg van határozva.*

Láttuk a 13. §-ben, hogy a sík minden pontján *egy* kúpszelet fektethető át, mely alappontjai által meghatározott kúpszeletsorhoz tartozik; tehát a kúpszeletsor egyes elemeinek pontjai a síkot teljesen befödik.

A kúpszeletsornak egyes kúpszelete nemcsak egy pont által van meghatározva, a melyen az, az alappontokon kívül még átmegy, hanem egy tetszőleges pontpár P, P' által is, mely azon kúpszeletre nézve kapcsolt póluspár. Mert láttuk (99. és 111*e*. alatt), hogy két egyenesen adott involucziós pontsor és egy pontpár egy valós vagy képzetes kúpszeletet határoz meg, melyre nézve ezen pontpár és az involucziós pontsorok kapcsolt pontpárjai kapcsolt pólusok. A kúpszelet képzetes is lehet, ha az adott involucziós pontsorok elliptikus természetűek. E szerint képzetes alappontokkal biró kúpszeletsorban képzetes kúpszeletek is fordulnak elő; míg az oly kúpszeletsorban, melynek két, vagy négy valós alappontja van, nem található (a 15. §-ben értelmezett) képzetes kúpszelet.

A kúpszeletsor egyes elemei tetszőleges g egyenest egy involucziós pontsor kapcsolt pontpárjaiban metszik, mely *c)* esetben, vagyis midőn az alappontok képzetesek, mindig hyperbolikus természetű; az *a)* és *b)* esetekben, midőn az alappontok nem mind képzetesek, azon involucziós pontsor elliptikus, hyperbolikus vagy parabolikus természetű lehet, mint azt a 12. §. 101—103. pontjai alatt kimutattuk. Parabolikus különben akkor lesz a kúpszeletsor által g egyenesen kimetszett pontsor, ha g egyenes átmegy a kúpszeletsornak egyik alappontján.

Ha a kúpszeletsor g egyenest hyberbolikus természetű involucziós pontsorban metszi, akkor a sorban két oly kúpszelet van, mely g-t érinti azon involucziós pontsor valós kettőspontjaiban. Ezen esetben oly kúpszeletek is vannak a sorban, melyek g-t nem metszik valós pontokban; mert a hyperbolikus természetű involucziós pontsornak képzetes kapcsolt pontpárjai is vannak (77). Ha ellenben g-n kimetszett involucziós pontsor elliptikus természetű, akkor nincs oly kúpszelet a sorban, mely g-t érintené, hanem a sor minden kúpszelete g-vel két valós pontot bír közösen.

150. A kúpszeletsorban előforduló kúpszeletek nemére következtetni lehet azon involucziós pontsorból, mely szerint a sík végtelen távol fekvő egyenese g_∞, a kúpszeletsort metszi.

Ha g_∞ a kúpszeletsort elliptikus természetű involucziós pontsorban metszi, akkor a sor minden kúpszeletének két valós végtelen távol fekvő pontja van; a sor kúpszeletei tehát mind hyperbolák. E hyperbolák közé számíttatnak azon egyenes párak is, melyek a kúpszeletsorban előfordulnak, és melyeknek száma három vagy egy, a szerint, a mint a kúpszeletsornak mind a négy alappontja valós, vagy nem minden alappont valós. Ezen eset, hogy a kúpszeletsornak minden kúpszelete hyperbola, csak akkor következhetik be, ha a kúpszeletsornak mind a négy alappontja valós, vagy pedig ha két alappont valós, kettő képzetes, tehát az *a)* és *b)* esetekben. *a)* esetben a kúpszeletsor minden kúpszelete hyperbola, ha a négy alappont közül egyik a többi három által képezett háromszög kerületén belül van (52.); *b)* esetben pedig, ha a két képzetes pont tartója a valós pontokat elválasztja egymástól (103).

Ha ellenben a négy valós alappont közül mindegyik a másik három által képezett háromszög kerületén kívül fekszik; vagy a két valós alappont nincs elválasztva a két képzetes alappont tartója által; vagy végre ha a négy alappont képzetes, akkor a kúpszeletsor g_∞-t hyperbolikus természetű involucziós pontsorban metszi, melynek képzetes kapcsolt pontpárjai vannak. Ily kúpszeletsorban tehát lesznek hyperbolák, ellipsisek és két parabola; ez utóbbiak g_∞-t a kimetszett involucziós pontsor kettőspontjaiban érintik.

A midőn a valós alappontok közül egyik végtelen távol van, a kúpszeletsor g_∞-t parabolikus természetű involucziós pontsorban metszi; az ily kúpszeletsornak egyik kúpszelete parabola, a többi hyperbola.

Minthogy a czirkuláris involucziós sugársor metszése g_∞-nel elliptikus természetű involucziós pontsor, az ilyennek pedig minden involucziós pontsorral van egy közös kapcsolt pontpárja, azért minden kúpszeletsorban, melynek két alappontja nincs g_∞-en, van egy kúpszelet, mely g_∞-t két egymásra merőleges egyenes végtelen távol fekvő pontjában metszi; tehát minden kúpszeletsorban van egy *egyenoldalú hyperbola.*

De ha a kúpszeletsorban két egyenoldalú hyperbola volna, akkor g_∞ ezeket két oly pontpárban metszetné, melyek egymásra merőleges egyenespárak végtelen távol fekvő pontjai; a kúpszeletsor ekkor g_∞-t oly involucziós pontsorban metszené, mely perspektiv egy czirkularis involucziós sugársorral, tehát ekkor *a kúpszeletsor minden kúpszelete egyenoldalú hyperbola.* Minthogy a kúpszeletsorban előforduló egyenespárrá elfajult kúpszeletek szintén elfajult egyenoldalú hyperbolák, vagyis egymásra merőleges egyenespárak, azért ha a sornak alappontjai valósak, ezek egy háromszögnek szögpontjait és magasságpontját képezik.

E körülményből fordítva is következtethetünk, *ha egy egyenoldalú hyperbola valamely háromszögnek három szögpontján megy át, akkor ezen hyperbola annak magasságpontját is tartalmazza.* Mert ha az ABC háromszög szögpontjain átmenő h egyenoldalú hyperbola A pontjából merőlegest bocsátunk BC oldalra, mely h-t D-ben metszi, akkor az $ABCD$ alappontokkal bíró kúpszeletsorban két egyenoldalú hyperbola van, t. i. h és $|AD|$, $|BC|$ egyenespárrá elfajult egyenoldalú hyperbola. A sornak ekkor minden kúpszelete egyenoldalú hyperbola lesz, melyekhez $|AB|$, $|CD|$; $|AC|$, $|BD|$ egyenespárak tartoznak; ezek tehát szintén merőlegesek egymásra és így D pont, ABC háromszögnek magasságpontja.

De midőn a kúpszeletsornak két alappontja A, B valós, kettő képzetes, akkor is lehet a sornak minden kúpszelete egyenoldalú hyperbola. Ha azon elliptikus természetű involucziós pontsornak, melynek kettőspontjai a képzetes alappontok: tartója t, hatványa $-\mu^2$, középpontja γ_1, és $(|AB|. t)$ pont δ, úgy a kúpszeletsornak minden eleme egyenoldalú hyperbola, ha:

$$A\delta\,.\,\delta B = \delta\gamma_1^2 + \mu^2,$$

és t merőleges $|AB|$-re.

Hogy ezt bebizonyítsuk emlékezzünk vissza a 101. pontban meg-ismert $\varkappa$ kúpszeletre. E kúpszelet tetszőleges g egyenest azon involucziós pontsor egy kapcsolt pontpárjában metszi, melyet az A, B valós és t-n fekvő két képzetes ponton átmenő kúpszeletek g-n kimetszenek. $\varkappa$ kúpszelet átmegy A, B ponton, továbbá $|AB|$ és t egyenes δ metszőpontjához, valamint g és t egyenes γ metszőpontjához, az adott t-n fekvő involucziós pontsorban kapcsolt δ_1, illetve γ_1 ponton.

Tekintsük jelenleg g-t végtelen távol fekvőnek, g_∞-nek; γ_1 akkor t-n adott involucziós sornak középpontja; $|AB|$ és t metszőpontjához δ-hoz kapcsolt δ_1 pont pedig

$$\delta\gamma_1 \,.\, \gamma_1\delta_1 = \mu^2$$

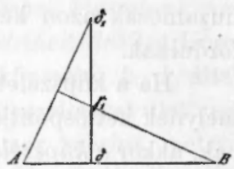
relaczióból lesz meghatározva. Minthogy a föltétel szerint

$$A\delta \,.\, \delta B = \delta\gamma_1^2 + \mu^2,$$

tehát

$$A\delta \,.\, \delta B = \delta\gamma_1^2 + \delta\gamma_1 \,.\, \gamma_1\delta_1 = \delta\gamma_1 \,.\, \delta\delta_1,$$

és $|\delta\delta_1| \equiv t$ merőleges AB-re δ pontban, azért γ_1 magasságpontja $AB\delta_1$ háromszögnek. Innen következik, hogy $\varkappa$ kúpszelet, mely $AB\gamma_1\delta_1$ pontokon átmegy egyenoldalú hyperbola, és mert $\varkappa$ metszőpontja g_∞-nel azon involucziós pontsornak egy kapcsolt pontpárja, melyet a kúpszeletsor g_∞-en kimetsz, azért g_∞-en két oly kapcsolt pontpár van, mely két egymásra merőleges egyenespáron fekszik, tehát g_∞-en valamennyi kapcsolt pontpár ily tulajdonságú.



95. ábra.

Jegyzet. Ha az előbbi szerkesztésben B-t azon háromszög magasság pontjának tekintjük, melynek egyik szögpontja A, a másik kettő pedig a t-n fekvő involucziós pontsor két kettőspontja, úgy «egy háromszögnek magasságpontját, melynek egyik szögpontja A, másik két szögpontja t tartón fekvő involucziós pontsor két kettőspontja, függetlenül attól, hogy ezen involucziós pontsor valós vagy képzetes kettőspontokkal bír, következőképen lehet szerkeszteni». Ha az involucziós pontsor középpontja N; A-tól t-re bocsátott merőleges M talppontjához a kapcsolt pont M_1; akkor $|AN|$-re M_1-ből, vagy $|AM_1|$-re N-ből bocsátott merőleges metszőpontja $|AM|$-mel: azon háromszögnek magasságpontja. Ez valós háromszögnél is könnyen igazolható.

151. A sík tetszőleges egyenesén a kúpszeletsornak minden eleme egy-egy involucziós pontsort indukál, melynek kapcsolt pontpárjai, az egyes kúpszeletekre vonatkozó kapcsolt pólusok. E végtelen sok involucziós sor egy valós közös kapcsolt pontpárral bír, ha a kúpszeletsor g-t hyperbolikus természetű involucziós pontsor szerint metszi. Ez utóbbi involucziós sornak kettőspontjai a közös kapcsolt pontpár, mert a kettőspontok a kapcsolt pontpárakat harmonikusan választják el; ha tehát a sornak egy kúpszelete g-t, X, X_1-ben metszi, úgy X, X_1 pontok a kettőspontoktól harmonikusan vannak elválasztva, és így a kettőspontok a sornak azon kúpszeletére vonatkozólag kapcsolt pólusok.

Képzeljük g-t a sík végtelen távol fekvő egyenesén. A kúpszeletsor egyes elemei által g_∞-en indukált involucziós pontsorok nem egyebek, mint az egyes kúpszeletek kapcsolt átmérőpárjainak metszőpontjai g_∞-nel. Ennélfogva ha a kúpszeletsor g_∞-t hyperbolikus természetű involucziós pontsorban metszi: a kúpszeletsor minden kúpszeletének van egy oly kapcsolt átmérőpárja, mely g_∞-t az involucziós pontsor kettőspontjaiban metszi, vagyis mely kapcsolt átmérőpárak egymással párhuzamosak. E kapcsolt átmérőpárak egyszersmind párhuzamosak azon két parabola tengelyével, melyek ily sorban előfordulnak.

Ha a kúpszeletsor g_∞-t oly involucziós pontsor szerint metszi, melynek kettőspontjai egymásra merőleges egyenesekkel projicziáltatnak, akkor *a kúpszeletsor kúpszeleteinek tengelypárjai lesznek egymással párhuzamosak*. Ha az ily kúpszeletsornak négy valós pontja van, úgy ezeken átmenő három egyenespár szögfelezői egymással párhuzamosak, mert ezen szögfelezők tengelyei az egyenspárrá elfajult kúpszeleteknek.

Minthogy a kúpszeletsorban mindig létezik egy valós vagy képzetes kúpszelet, melyre vonatkozólag egy adott P, P' pontpár kapcsolt pólus, azért lehet minden, tehát az előbbi kúpszeletsorban is oly k kúpszeletet találni, melyre vonatkozólag P, P' egy egymásra merőleges egyenespárnak végtelen távol fekvő pontja. E k kúpszeletnek két pár egymásra merőleges kapcsolt átmérőpárja lesz; az első az előbbi közös irányú tengelypárral párhuzamos, a másik pár végtelen távol fekvő pontja P, P'. — k kúpszelet e tulajdonsága következtében *kör*. Tekintve, hogy ezen sorban előforduló két parabola tengelye merőleges egymásra, mondhatjuk: *ha valamely kúpszeletsorban két parabola fordul elő, melynek tengelyei egymásra merőlegesek, úgy ezen kúpszeletsornak egyik kúpszelete kör.* E kör képzetes is lehet, ha a kúpszeletsor alappontjai képzetesek; de ha az alappontok valósak, úgy azon kör is valós lesz. Ezért: *két egymásra merőleges tengelyű parabola négy* *metszőpontja mindig körön fekszik*; továbbá egybevetve az előbbivel: *egy körnégyszög átellenes oldalpárjainak szögfelezői egymással párhuzamosak*, a mi így is kifejezhető: *ha egy kör és kúpszeletet négy pontot bír közösen, akkor a kúpszelet tengelyei párhuzamosak a négy közös ponton átmenő egyenespárak szögfelezőivel.*

Ha a kúpszeletsor kúpszeleteinek tengelypárjai egymással párhuzamosak és mi g_∞-en két pontpár P, P'; P_1, P_1'-et veszünk fel, mely egymásra merőleges egyenespár végtelen távol fekvő pontja, akkor a kúpszeletsornak azon két köre, melyre vonatkozólag P, P'; illetve P_1, P_1' kapcsolt pólus, egymástól nem különböző, mert P_1, P_1' körre vonatkozólag is kapcsolt póluspár. *Egy kúpszeletsorban tehát két kör nem fordulhat elő, kivévén azon esetet, a midőn a sornak minden kúpszelete kör.* Ekkor ugyanis g_∞-en kimetszett czirkularis involucziós pontsornak kettőspontjai — az ismert végtelen távol fekvő képzetes körpontok — a sornak alappontjait képezik; a sornak másik két alappontja lehet valós, vagy pedig képzetes.

152. *A kúpszeletsor síkjában fekvő tetszőleges P pontnak van egy kapcsolt pólusa Q, a kúpszeletsor valamennyi elemeit illetőleg.* Hogy ezt belássuk, képzeljük, hogy a kúpszeletsor két kúpszelet k_i, k_j által van adva és hogy P-hez, Q kapcsolt pólusa k_i, k_j kúpszeleteket illetőleg. $|PQ|$ egyenes a kúpszeletsort involucziós pontsor szerint metszi, mely ha hyperbolikus természetű, úgy kettőspontjai kapcsolt pólusok a kúpszeletsor összes kúpszeleteit illetőleg. De $|PQ|$ egyenes P, Q pontja már a kúpszeletsor k_i, k_j kúpszeleteit illetőleg kapcsolt póluspár, és mert $|PQ|$ egyenesen nem lehet két közös kapcsolt póluspár k_i, k_j kúpszeleteket illetőleg, ha csak $|PQ|$ nem közös szelője k_i, k_j-nek: azért P, Q kapcsolt póluspár a kúpszeletsor valamennyi kúpszeletére nézve.

Ha P pont k_i, k_j kúpszelet közös polárháromszögének XYZ-nek egyik valós szögpontja, pl. X, úgy X-hez kapcsolt pólusok nemcsak k_i, k_j hanem a kúpszeletsor valamennyi kúpszeletére vonatkozólag $|YZ| \equiv x$ polárisban fekszenek. A kúpszeletsor minden kúpszelete ugyanis az X ponton átmenő s, t egyeneseken, mint k_i, k_j közös szelőin, melyeken a kúpszeletsor két-két valós vagy képzetes alappontja fekszik, ugyanazon involucziós pontsort indukálja. E szerint X-hez kapcsolt pólus s-en, (s, x); t-n, (t, x) pont, tehát x polárisa X-nek a sor valamennyi kúpszeletére vonatkozólag. Ezen XYZ háromszög *a kúpszeletsornak közös polárháromszöge.*

Tetszőleges g egyenes pontjaihoz kapcsolt pólusok egy kúp-

szeletsor összes kúpszeleteit illetőleg, a kúpszeletsor közös polárháromszögének szögpontjain átmenő kúpszeleten fekszenek. Ez onnan következik, hogy g egyenes pontjaihoz kapcsolt pólusok a kúpszeletsor két tetszőleges k_i, k_j kúpszeletét illetőleg e kúpszeletek közös polárháromszöge körül írt γ kúpszeleten fekszenek (135).

A kapcsolt pólusok fogalmából folyik továbbá, hogy P pont polárisai egy kúpszeletsor kúpszeleteit illetőleg, P-hez kapcsolt póluson, Q-n mennek át. De fordítva is kimutatható, hogy *ha P, Q pontok kapcsolt pólusok egy kúpszeletsort illetőleg, úgy Q ponton átmenő tetszőleges p egyenes polárisa P-nek a kúpszeletsor bizonyos k kúpszeletére nézve.*

Vegyünk fel e végből p-n tetszőleges P' pontot. A kúpszeletsorban mindig van oly kúpszelet, melyre vonatkozólag P, P' kapcsolt póluspár, de minthogy P, Q a föltétel szerint szintén kapcsolt póluspár k-ra vonatkozólag, azért $|P'Q| \equiv p$ egyenes polárisa P-nek k-ra nézve. k kúpszelet csak akkor lehet képzetes, ha a sornak alappontjai is képzetesek.

Minthogy Q sugársor minden p sugarához tartozik egy kúpszelet a kúpszeletsorban, melyre vonatkozólag P és p, pólus és poláris, azért a kúpszeletsorban annyi kúpszelet van, a mennyi a Q ponton átmenő sugarak száma, vagyis *a kúpszeletsorban egyszer végtelen kúpszelet van.*

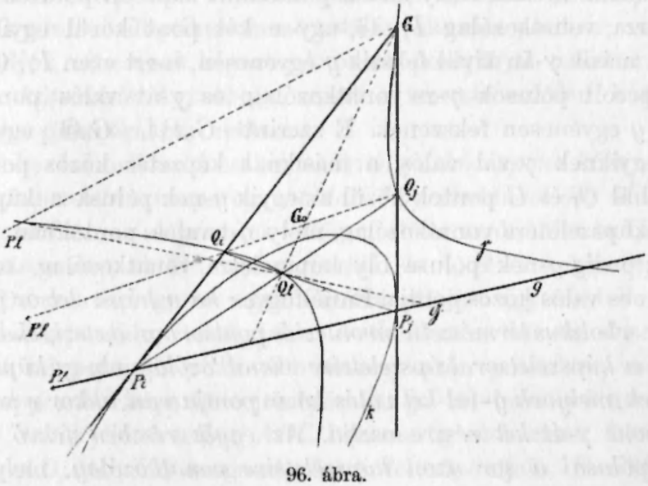
153. *Azon γ kúpszelet, melynek pontjai kapcsolt pólusok egy g egyenes pontjaihoz a kúpszeletsort illetőleg: egyszersmind geometriai helye g egyenes pólusainak a kúpszeletsor kúpszeleteire nézve.* g egyenesen ugyanis van oly P pont, mely γ tetszőleges Q pontjához kapcsolt pólus a kúpszeletsor összes kúpszeleteit illetőleg; ennélfogva a kúpszeletsorban van oly kúpszelet, melyre vonatkozólag P-n átmenő g egyenes polárisa Q-nak, vagyis melyre vonatkozólag g-nek pólusa Q pont.

A tétel így is kifejezhető:

Tetszőleges g egyenes pólusai valamely kúpszeletsor kúpszeleteit illetőleg a kúpszeletsor közös polárháromszögének szögpontjain átmenő γ kúpszeleten fekszenek. A kúpszeletsor kúpszeletei által g egyenesen kimetszett involucziós pontsor kapcsolt pontjai: kapcsolt pólusok γ kúpszeletre vonatkozólag.

Hogy e tétel utolsó részét is bebizonyítsuk, nevezzük a kúpszeletsor tetszőleges k kúpszeletének metszőpontjait g-vel P_i, P_j-nek, az ezekhez kapcsolt pólusokat a kúpszeletsorra vonatkozólag Q_i, Q_j-nek; $|Q_iQ_j|$ és $|P_iP_j| \equiv g$ metszőpontját P_l-nek; P_l-hez kapcsolt pólust Q_j-

nek ; végre g-nek k-ra vonatkozó pólusát G-nek (96. ábra). Q_i, Q_j pontok γ kúpszeletnek pontjai és $|P_iQ_i|$, $|P_jQ_j|$ egyenesek érintői k-nak P_i, P_j pontokban, mert ha két kapcsolt pólus közül egyik a kúpszeletnek pontja, akkor a másik annak érintőjén, mint azon pont polárisán tartozik feküdni. k kúpszelet $|P_iQ_i|$, $|P_jQ_j|$ érintői P_i, P_j pontokban, egymást γ-nak G pontjában metszik, mert G pólusa $|P_iP_j| \equiv g$-nek k-t illetőleg. Végre $|P_iP_j|$, $|Q_iQ_j|$ metszőpontjához P_l-hez kapcsolt polus Q_l, mely $|P_iQ_j|$, $|P_jQ_i|$-nek közös pontja szintén γ-n fekszik, miután P_l, $|P_iP_j| \equiv g$-nek egyik pontja (Hesse). Minthogy ezek szerint P_i, P_j, a γ kúpszeletbe írt $Q_iGQ_jQ_l$ négyszögnek átlóspontjai : k kúpszeletnek P_i, P_j metszőpontjai g-vel, γ-nak kapcsolt pólusai (76). —



96. ábra.

Mint $GQ_iQ_lQ_j$ négyszögből következik g egyenesnek γ kúpszeletre vonatkozó pólusa G_0, $|GQ_l|$ és $|Q_iQ_j|$ egyenaseknek metszőpontja, és így a kúpszeletsor által g-n kimetszett pontpáraknak, mint P_i, P_j-nek kapcsolt pólusait Q_i, Q_j-t összekötő $|Q_iQ_j|$ egyenes, mindig átmegy g-nek γ-ra vonatkozó pólusán G_0-on.

g-n levő involucziós pontsor minden kapcsolt pontpárjához, pl. P_i, P_j-hez, tartozik egy G pont γ kúpszeleten, és viszont γ minden pontja pólusát képezi g-nek a kúpszeletsor egy-egy kúpszeletére nézve. Ha G, γ-n tetszőlegesen lesz felvéve, akkor azon k kúpszeletnek P_i, P_j metszőpontjait g-vel, melyre vonatkozólag g-nek pólusa G, így lehet megtalálni. G-t, γ-nek g-ra vonatkozó G_o pólusából γ-ra projicziáljuk Q_l-be ; ezen Q_l projekczióhoz a kúpszeletsorban kapcsolt

P pólust G_o-val $|P_l G_o|$ egyenes által összekötjük, mely összekötő egyenes γ-át, Q_i, Q_j-ben, a kívánt k kúpszelet és g metszőpontjához P_i, P_j-hez kapcsolt pólusokban metszi.

G-hez kapcsolt pólus a kúpszeletsorra vonatkozólag g-nek azon $\mathfrak{G}$ pontja, mely P_l-hez kapcsolt pont a kúpszeletsor által g-n kimetszett involucziós pontsorban. Mert, mint láttuk, G_o-n átmenő szelők γ-át oly két pontban metszik, melyeknek kapcsolt pólusai a kúpszeletsorra vonatkozólag a g-n kimetszett involucziós pontsornak kapcsolt pontpárjai.

Ha g egyenes és γ kúpszeletnek két valós közös pontja van, és g-nek γ-ra vonatkozó G_o pólusán átmenő tetszőleges egyenes γ-t Q_l, G pontokban metszi, mely metszőpontokhoz kapcsolt pólusok a kúpszeletsorra vonatkozólag P_l, $\mathfrak{G}$, úgy e két pont közűl egyik γ-án belűl, a másik γ-án kívül fekszik g egyenesen, mert ezen P_l, $\mathfrak{G}$ pontok kapcsolt pólusok γ-ra vonatkozólag, és γ-át valós pontokban metsző g egyenesen fekszenek. E szerint $|G_o P_l|$, $|G_o \mathfrak{G}|$ egyenesek közűl egyiknek γ-val valós, a másiknak képzetes közös pontpárja van; tehát Q_l és G pontok közűl az egyik g-nek pólusa a kúpszeletsor oly kúpszeletére vonatkozólag, mely g-t valós pontokban metszi, a másik pedig g-nek pólusa oly kúpszeletre vonatkozólag, melynek g-vel nincs valós közös pontja. Ennélfogva: *ha a kúpszeletsor g egyenest hyperbolikus természetű involucziós pontsorban metszi, tehát g-nek pólusai a kúpszeletsor kúpszeleteire vonatkozólag oly γ kúpszeleten fekszenek, melynek g-vel két valós közös pontja van, akkor e két valós közös pont γ-át két részre osztja. Az egyik részben fekvő pontok g-nek pólusai a sor azon kúpszeleteire vonatkozólag, melyek g-t valós pontokban metszik; a másik részen levő pontok pedig g-nek pólusai a kúpszeletsornak g-t képzetes pontokban metsző kúpszeleteire nézve; g és γ két metszőpontja, g-nek pólusa a kúpszeletsornak g-t érintő kúpszeleteit illetőleg.* γ kúpszelet csak akkor érintheti g-t, ha az a kúpszeletsornak egyik alappontján megy át; az érintés ezen alappontban történik.

Ha g egyenes a kúpszeletsor polárháromszögének egyik szögpontján megy át, úgy γ két egyenessé fajul, melyek közűl az egyik egyenes ugyanazon szögponton megy át, a másik pedig a polárháromszög másik két szögpontját köti össze. Mert a kúpszeletsor két kúpszelete által megállapitott Steiner-féle rokonságnál szintén a közös polárháromszög egyik szögpontján átmenő egyeneshez a közös kapcsolt pólusok két egyenessé fajult kúpszeleten fekszenek. (148). — Ha végre

g egyenes a polárháromszögnek egyik oldala, úgy γ, azon polárháromszög oldalának átellenes szögpontjává fajul.

154. Az előbbi általános tételek alapján *a kúpszeletsorban előforduló kúpszeletek középpontjainak geometriai helyét, és a sor kúpszeleteinek nemét* könnyen fölismerhetjük. Ha ugyanis fölveszszük, hogy g egyenes a sík végtelen távol fekvő g_∞ egyenese, akkor azon γ_∞ kúpszelet, mely g_∞-nek a kúpszeletsor kúpszeleteire vonatkozó pólusokat tartalmazza: geometriai helye a kúpszeletsor középpontjainak. *Ezen γ_∞ kúpszelet, melyen a kúpszeletsor kúpszeleteinek középpontjai fekszenek s mely e végből középponti kúpszeletnek neveztetik,* felvilágosítást nyújt a sorban előforduló kúpszeletek neméről.

Ha a középponti kúpszelet γ_∞ ellipsis, tehát g_∞-en γ_∞ által indukált pontsor elliptikus természetű involucziós pontsor, melynek, mint tudjuk, nincsenek képzetes kapcsolt pontpárjai, *akkor a sornak minden kúpszelete hyperbola;* mert a sornak minden kúpszelete g_∞-t valós pontpárakban metszi.

Ehhez tartozik azon eset is, melynél γ_∞ *középponti kúpszelet kör, tehát a kúpszeletsor csupa egyenoldalú hyperbolákból áll.* Ha az ily kúpszeletsorban az alappontok valósak, akkor azok, mint tudjuk, egy ABC háromszögnek D magasságpontját és A, B, C szögpontjait képezik. De γ_∞ átmegy az egyenespárrá elfajult egyenoldalú hyperbolák középpontján, tehát jelen esetben azon háromszög magasságainak talppontjain. γ_∞ tovább átmegy azon pontokon, melyek a négy alappontból képezhető pontpárakat g_∞-től harmonikusan elválasztják, tehát jelen esetben ABC háromszög oldalainak felezőpontjain, és AD, BD, CD magasságrészek felezőpontjain. Ennélfogva *a kúpszeletsor középponti kúpszelete, azon esetben, a midőn a kúpszeletek (egyenoldalú hyperbolák) egy háromszög magasság-pontján és szögpontjain átmennek, ezen háromszögnek* ***kilencz pontos köre.*** Ezen a háromszöggel kapcsolatos kör *Feuerbachtól* lett először ismertetve (1827.),* azért Feuerbach-féle körnek is neveztetik.

A midőn a középponti kúpszelet γ_∞ parabola, a kúpszeletsornak minden kúpszelete hyperbola, kivévén, azon egyet, melynek középpontja γ_∞-nek érintőpontja g_∞-nel és mely parabola. A kúpszeletsornak ekkor egy alappontja végtelen távol fekszik.

Ha a kúpszeletsor középponti kúpszelete γ_∞ hyperbola, tehát γ_∞ által g_∞-en indukált involucziós pontsor hyperbolikus természetű,

* Feuerbach K. W. (1800—1834.)

melynek képzetes kapcsolt pontpárjai is vannak, *akkor a kúpszeletsorban végtelen sok ellipsis, hyperbola és két parabola van. Ezen hyperbola egyik ágán fekszenek a kúpszeletsorban előforduló ellipsiseknek, a másik ágon pedig a hyperboláknak középpontjai; a hyperbola asymptotái pedig párhuzamosak azon sorban előforduló két parabola tengelyeivel.*

A midőn γ_∞ egyenoldalú hyperbola, a kúpszeletsor egyik kúpszelete kör, mert a kúpszeletsorban előforduló két parabolának tengelyei egymásra merőlegesek.

A kúpszeletsor középponti kúpszelete γ_∞ egyenessé fajul, ha a kúpszeletsor polárháromszögének egyik szögpontja végtelen távol van, vagy a mi ugyanaz, ha a kúpszeletsor közös szelői közül oly kettő, mely mind a négy alappontot tartalmazza, egymással párhuzamos. A kúpszeletsor összes kúpszeleteinek középpontjai ekkor azon egyenesen fekszenek, mely a szelőkön adott involucziós pontsorok középpontjait összeköti; a párhuzamos szelőpár középpontja e szelők által határolt szalag felezőjének bármely pontja.

Ha azonban a kúpszeletsornak két szelőpárja párhuzamos egyenespár, akkor g_∞ a kúpszeletsor polárháromszögének egyik oldala, és így *a kúpszeletsor összes kúpszeletének középpontja egy pontba esik;* ily kúpszeletsor tehát közös középponttal bír.

A midőn a kúpszeletsornak egy közös szelője végtelen távol van, a középponti kúpszelet szintén egyenessé fajul, mert ekkor a polárháromszögnek e szelőn fekvő szögpontja szintén végtelen távol lesz.

155. Két oly kúpszelet, mely g_∞-en ugyanazon involucziós pontsort indukálja, melynek tehát kapcsolt átmérőpárja megfelelőleg párhuzamosak, *hasonló és perspektiv helyzetű kupszeletnek* neveztetik. A két kúpszelet hasonló marad akkor is, ha az egyiket e helyzetéből elmozdítjuk, de nem lesz a másikkal perspektiv helyzetű, ha csak az elmozdítás úgy nem történik, hogy a kapcsolt átmérőpárak párhuzamosak maradnak.

Két hasonló kúpszelet mindig egynemű, mert csak ilyenek indukálhatnak g_∞-en egy és ugyanazon involucziós pontsort. Két kör mindig hasonló és perspektiv helyzetű; két parabola mindig hasonló és ha tengelyei párhuzamosak, akkor még perspektiv helyzetű is. Két hyperbola hasonló, ha asymptotái egyenlő szöget képeznek és a két hyperbola ág az asymptoták által képezett egyenlő csúcsszögek szárai között fekszik.

«Ha két ellipsis hasonló, akkor az egyenlő szöget bezáró kapcsolt átmérőpárak, mint hosszmennyiségek helyes geometriai arányt képeznek». Nevezzük ugyanis az egyik k ellipsis tetszőleg kapcsolt átmérőpárját AC, BD-nek, a másik k_1 kúpszeletnek azon kapcsolt átmérőpárját, mely ugyanily szöget képez, mint AC, BD; A_1C_1, B_1D_1-nek. Minthogy $ABCD$ és $A_1B_1C_1D_1$ parallelogrammnak oldalai, szintén párhuzamosak k, illetve k_1 egy-egy kapcsolt átmérő párjával (113.), azért úgy az oldalak, mint az átlók által képezett szögek egyenlők, tehát azon parallelogrammok hasonlók és így:

$$AB : CD = A_1B_1 : C_1D_1.$$

20. §. A kúpszeletseregről.

156. Mindazon kúpszeletek, melyekre vonatkozólag két involucziós sugársor kapcsolt sugarai, kapcsolt polárisok: *kúpszeletsereget* képeznek. Ama két involucziós sugársor közül, melynek kapcsolt sugarai kapcsolt polárisok a kúpszeletsereg egyes kúpszeleteire vonatkozólag, vagy mindkettő hyperbolikus, vagy egyik hyperbolikus, a másik elliptikus, vagy végre mindkettő elliptikus természetű lehet. Ennek megfelelőleg a kúpszeletsereg kúpszeleteinek, vagy

a) négy valós, vagy

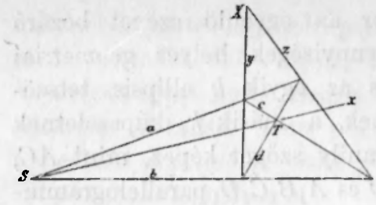
b) két valós és két képzetes, vagy végre

c) négy képzetes közös érintője van. Ezen közös érintőket a kúpszeletsereg *alapérintőinek* nevezzük.

A kúpszeletsereg nemcsak két involucziós sugársor, hanem két kúpszelete által is teljesen meg van határozva, mert mindig két vagy hat oly involucziós sugársor létezik a kúpszelet síkjában, melynek kapcsolt sugárpárjai azon két kúpszeletre vonatkozólag kapcsolt polárisok, és melyek a kúpszeletsereg többi kúpszeleteire nézve is kapcsolt polárisok. Azon két kúpszelet közös polárháromszöge egyszersmind polárháromszöge a kúpszeletsereg összes kúpszeleteinek.

A polárháromszög egyik oldala x, a kúpszeletsereg meghatározására szolgáló involucziós sugársor S, T középpontjait összekötő egyenes; ennek átellenes szögpontja X: a sugársorok azon közös sugarához $x \equiv |ST|$, illetve $x \equiv |TS|$-hez kapcsolt $|SX|$, $|TX|$ két sugár metszőpontja.

Ha S, T involucziós sugársorok hyperbolikusak, akkor azok a, b; c, d kettőssugarainak (a, c), (b, d); (a, d), (b, c) metszőpontjait összekötő y, z egyenesek a polárháromszög másik két oldalát adják (97. ábra.) Ha pedig az involucziós sugársorok elliptikus természetűek és a, b,



97. ábra.

valamint c, d azon két kapcsolt sugár az S illetve T sugársorban, mely $|ST|$, $|SX|$, valamint $|TS|$, $|TX|$-től harmonikusan van elválasztva, akkor ismét az (a, c), (b, d), és (a, d), (b, c) metszőpontokat összekötő y, z egyenesek képezik a polárháromszög két oldalát, mert ezek kapcsolt polárisok a kúpszeletsereg összes kúpszeleteire vonatkozólag (HESSE). Ha végre a két involucziós sugársor különböző természetű, egyik elliptikus, a másik hyperbolikus, akkor a polárháromszögnek y, z oldalai képzetesek, és kettőssugarai azon involucziós sugársornak, melynek egy kapcsolt sugárpárja $|XS|$, $|XT|$, egy másik sugárpárja pedig a kúpszeletsereg tetszőleges kúpszeletéhez X-ből vont érintőpár.

157. A kúpszeletsereg egy kúpszelete meg van határozva, egy tetszőlegesen választott egyenespár által, mely azon kúpszeletre vonatkozólag kapcsolt polárispár (99a, 111e); e kúpszelet képzetes is lehet, ha a kúpszeletseregnek alapérintői képzetesek. Ha azon két kapcsolt polárist egy egyenesben fekvőnek veszszük fel, vagyis megadjuk a kúpszeletsereg egyik kúpszeletének egy érintőjét, úgy ez által azon kúpszelet teljesen meg van határozva; *a kúpszeletseregnek érintői tehát a síkot teljesen betöltik.*

Ha tetszőleges G pontból érintőpárakat huzunk a kúpszeletsereg egyes kúpszeleteihez, úgy ezek, mint ismeretes (12. §.), involucziós sugársort képeznek, melyet rövidség kedvéért $\{G\}$-vel jelölünk; a szerint a mint $\{G\}$ sugársor hyperbolikus, parabolikus vagy elliptikus természetű: G ponton két, egy, vagy zérus számú kúpszelet megy át, mely a kúpszeletsereghez tartozik. Az első esetben a sugársor valós kettőssugarai képezik G pontnak érintőit; a második esetben G-nek az alapérintő egyikén kell feküdni és G érintőpontja a rajta átmenő kúpszeletnek.

Ha $\{G\}$ hyperbolikus természetű, akkor ennek p, q kettőssugarai kapcsolt polárisok a kúpszeletsereg összes kúpszeleteire vonatkozólag; mert ezen kettőssugarak G-ből a kúpszeletsereg kúpszeleteihez vont érintőpárakat harmonikusan választják el egymástól. Minthogy hyperbolikus természetű involucziós sugársornak képzetes sugárpárjai is vannak, azért ha $\{G\}$ hyperbolikus természetű, tehát G ponton a kúpszeletseregnek két kúpszelete megy át, a kúpszeletseregben oly kúpszeletek is lesznek, melyekhez G-ből nem húzható valós érintőpár.

Ha ellenben G ponton át nem lehet valós kúpszeletet fektetni, mely a kúpszeletsereghez tartozik, akkor G-ből a kúpszeletsereg minden kúpszeletéhez valós érintőpárak vonhatók.

Ha a kúpszeletseregnek *alapérintői képzetesek*, akkor $\{G\}$ mindig hyperbolikus természetű, tehát a kúpszeletseregben végtelen sok kúpszelet van, melyhez G-ből valós és végtelen sok, melyhez G-ből nem húzhatók valós érintőpárak; végre van két kúpszelet, melyhez G-ből csak egy-egy érintő húzható, vagyis mely átmegy G ponton. Ily kúpszeletsereg kúpszeletei tehát a síkot teljesen betöltik.

A midőn a kúpszeletsereg *két érintője a, b valós, kettő pedig képzetes*, mely utóbbiak egymást T valós pontokban metszik, úgy $\{G\}$ sugársor elliptikus, ha a, b alapérintők közűl egyik G, T pontokat elválasztja egymástól; ellenben hyperbolikus, ha a, b alapérintők közűl vagy mindakettő, vagy egyik sem választja el G, T pontokat egymástól. G ponton át tehát azon esetben nem lehet kúpszeletet fektetni, mely a kúpszeletsereghez tartozik, a midőn G, T pontok a, b alapérintők által képezett mellékszögek szárai között fekszenek.

Ha *az alapérintők mind valósak* és G pont a négy érintő által szétosztott síknak azon részében fekszik, melybe a négy érintő által képezett négyoldal átlói nem jutnak, úgy $\{G\}$ elliptikus, ha G a többi síkrészekben van, úgy $\{G\}$ hyperbolikus természetű; ily kúpszeletseregnek kúpszeletei tehát nem töltik be teljesen a síkot.

158. *A kúpszeletsereg síkjának tetszőleges p egyeneséhez létezik egy kapcsolt poláris q a kúpszeletsereg összes kúpszeleteire vonatkozólag.*

Ha ugyanis p-nek a kúpszeletsereg két tetszőleges kúpszeletére vonatkozó pólusát q egyenes által összekötjük, úgy p, q egyenesek kapcsolt polárisok, a kúpszeletsereg összes kúpszeleteire vonatkozólag, és (p, q) pontból a kúpszeletsereg kúpszeleteihez vont érintőpárak oly involucziós sugársort alkotnak, melynek kettőssugarai minden érintőpárt harmonikusan választanak el. De minthogy csak egy sugárpár létezik, mely (p, q) pontból a tekintetbe vett két kúpszelethez vont érintőpárakat harmonikusan választja el, és ez azon p, q kapcsolt polárispár: azért p, q kapcsolt poláris a kúpszeletsereg öszszes kúpszeleteire vonatkozólag. — Ha p a kúpszeletsereg közös polárháromszögének egyik oldala, akkor ezen oldal átellenes szögpontján átmenő tetszőleges egyenes a hozzá kapcsolt poláris.

Ha egy általános helyzetű p egyeneshez a kapcsolt polárist q-t a kúpszeletsereg kúpszeleteit illetőleg szerkeszteni akarjuk, nem szükség p-nek pólusát a kúpszeletsereg két kúpszeletére meghatározni, hanem következőképen lehet eljárni:

A midőn az alapérintők a, b, c, d valósak, úgy (a, b), (c, d); (a, c), (b, d); (a, d), (b, c) pontpárak a kúpszeletsereg elfajult kúpszeletei; tehát azon három pont, mely p-től e pontpárak által harmonikusan van elválasztva a p-hez kapcsolt polárison — q egyenesen fekszik. Ha másodszor az alapérintők S, T középponttal biró invol. sugársorok kettőssugarai, melyek közül legalább egyik elliptikus természetű, akkor felkeressük a sugársorok által p-n kimetszett involucziós pontsoroknak szükségkép valós közös pontpárját M, N-et.

$$|SM|,\ |TN| \text{ és } |SN|,\ |TM|$$

sugarak metszőpontjait összekötő q egyenes p-hez kapcsolt poláris a kúpszeletsereg összes kúpszeleteit illetőleg, mert ha

$$|SM|,\ |SN|, \text{ és } |TM|,\ |TN|$$

sugárpárak kapcsolt polárisok valamely kúpszeletre vonatkozólag, úgy

$$|SM|,\ |TM|;\ |SN|,\ |TN|$$

és

$$|SM|,\ |TN|;\ |SN|,\ |TM|$$

sugárpárak metszőpontjain átmenő egyenesek (melyek közül az első: $|MN| \equiv p$), szintén kapcsolt polárispár (HESSE). A talált q egyenes, a kúpszeletseregben előforduló egyedüli pontpár S, T által itt is p-től harmonikusan van elválasztva, mint az $STMN$ négyszögből látható.

159. *Tetszőleges egyenes pólusai valamely kúpszeletsereg kúpszeleteit illetőleg egy másik egyenesen fekszenek, mely az előbbihez kapcsolt poláris a kúpszeletsereg kúpszeleteit illetőleg.* Ez a kapcsolt polárisok fogalmából következik; mert ha p, q kapcsolt polárispár a kúpszeletet illetőleg, úgy p-nek pólusa q-n, és q-nak pólusa p-n tartozik feküdni.

Ha p-nek a kúpszeletsereg tetszőleges k_i kúpszeletére vonatkozó pólusa G_i, akkor könnyen fölismerhető azon $\{G_i\}$ involucziós sugársor természete, melyet G_i-n átmenő és k_i-re vonatkozó kapcsolt polárisok képeznek. Nevezzük a kúpszeletsereg közös polárháromszögét XYZ-nek. $|XY|$, $|YZ|$, $|ZX|$ és p egyenesek oldalai egy teljes négyoldalnak; ha G_i pont ezen négyoldal által szétosztott síkrészek közül olyanban van, melybe a négyoldal átlói behatolnak, akkor $\{G_i\}$ sugársor hyperbolikus, különben elliptikus természetű. — XYZ háromszögnek azonban két oldala, pl. $|XZ|$, $|XY|$: X-ből a kúpszeletsereghez vonható érintőpárakból álló elliptikus természetű involucziós sugársornak *képzetes* kettőssugarai is lehetnek. $\{G_i\}$ involucziós sugársor ezen esetben

elliptikus, ha X és G_i pontok, XYZ polárháromszög$=|YZ|$ valós oldala és p egyenes közül csak egyik által vannak elválasztva egymástól; ellenben hyperbolikus ha X, G_i pontok $|YZ|$ és p egyenesek által nincsenek elválasztva, vagy pedig mindkettő által el vannak választva egymástól (103.).

160. Ha p egyenest a sík végtelen távol fekvő g_∞ egyenesébe helyezzük, akkor a hozzá kapcsolt poláris, q_∞-nek a kúpszeletsereg kúpszeleteire vonatkozó pólusait, vagyis a kúpszelet középpontjait tartalmazza. Ennélfogva: *a kúpszeletsereg kúpszeleteinek középpontjai egyenesben fekszenek, mely kapcsolt poláris a sík végtelen távol fekvő egyeneséhez.* Ezen egyenes a kúpszeletsereg *középponti vonalának* neveztetik.

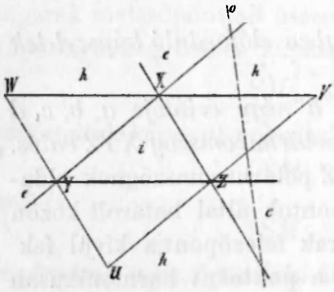
Az előbbiek alapján *a kúpszeletseregben előforduló kúpszeletek nemét* könnyen felismerhetjük.

A midőn a kúpszeletseregnek mint a négy érintője a, b, c, d valós, vagy mind a négy képzetes: a közös polárháromszög XYZ valós. A középponti vonal o az első esetben XYZ polárháromszögnek oldalait a meghosszabbításban, tehát a szögpontok által határolt közön kívül metszi, mert pl. (a, b), (c, d) pontpárak felezőpontja kívül fekszik azon XY közön, melynek végpontjai e pontokat harmonikusan elválasztják.

Ha ellenben a, b, c, d közös érintők képzetesek, tehát az általuk képezett négyoldalnak csak egy pár átellenes szögpontja, pl. $(a, b) \equiv S$, $(c, d) \equiv T$, mely XYZ polárháromszögnek YZ oldalán fekszik valós, a többi két pár képzetes, úgy o középponti vonal XYZ háromszögnek YZ oldalát a meghosszabbításban, $|XY|$, $|XZ|$ oldalát pedig a szögpontokon belül metszi. Ez onnan következik, hogy o és g_∞ kapcsolt poláris, a kúpszeletsereg kúpszeleteire nézve; más két kapcsolt poláris pedig Z-n átmenő tetszőleges egyenes és $|XY|$. De az összes polárispárak a polárháromszögnek $|XZ|$ oldalát involucziós helyzetű pontpárakban metszik, melyeknek valós vagy képzetes kettőspontjai oly tulajdonságú pontok, mint S és T, t. i. hogy a rajtuk átmenő és a kúpszeletsereg egy kúpszeletére vonatkozó kapcsolt polárispárak, a többi kúpszeletre vonatkozólag is kapcsolt polárispárak. Minthogy jelen esetben, a midőn a kúpszeletseregnek közös érintői képzetesek, csak egy ily valós pontpár S, T létezik, mely a feltétel szerint $|YZ|$ oldalon fekszik: azért $|XZ|$ oldalon ezen S, T pontok képzetesek; a kapcsolt polárispárak $|XZ|$-t elliptikus természetű involucziós pontsorban metszik, tehát X, Z pontok, $(o, |XZ|)$ pont és $|XZ|$-nek végtelen távol fekvő pontja által el vannak választva, vagyis o középponti vonal $|XZ|$-t X, Z pontok által határolt közön belül metszi. —

$$|XY|, |YZ|, |ZX| \text{ és } g_\infty$$

oldalakból álló négyoldal átlósháromszögének UVW-nek oldalai, párhuzamosak XYZ háromszög oldalaival és ennek szögpontjain mennek át. UVW háromszög oldalai nem hatolnak XYZ háromszög által hét részre osztott síknak minden részébe, hanem csak háromba; ezen utóbbi síkrészeket h-val, a véges síkrészt i-vel, a többieket e-vel jelöljük, mint azt a mellékelt 98. ábra mutatja.



98. ábra.

A h részekben levő pontok, mint általánosan (159.), csak hyperboláknak, vagyis oly kúpszeleteknek lehetnek középpontjai, melyeken átmenő kapcsolt polárisok, — jelen esetben kapcsolt átmérőpárak — hyperbolikus természetű involucziós sugársort képeznek; az e részekben levő pontok pedig ellipsiseknek középpontjai; végre az i részben levő pontok csak képzetes kúpszeleteknek lehetnek középpontjai, mivel valós kúpszeletnek középpontja, minden polárháromszögén kívül fekszik.

o középponti vonal, akár metszi XYZ háromszögnek mind a három oldalát a meghosszabbításban akár csak egyet: az e és i részek közül, valamint a h részek közül kettőbe jut, melyek felváltva következnek egymásra. Ennélfogva:

Ha a kúpszeletseregnek alapérintői valósak, akkor a kúpszeletseregben előforduló kúpszeletek négy csoportra osztva fordulnak elő, melyek felváltva ellipsisek és hyperbolák; az átmenet az egyik csoportból a másikba a három pontpárrá elfajult kúpszeleten és a kúpszeletseregben előforduló egyedüli parabolán át történik, mely utóbbinak középpontja, a középponti vonal végtelen távol fekvő pontja. A midőn a kúpszeletseregnek négy alapérintője képzetes: az egyik ellipsis csoport, és e csoportnak két pontpárrá elfajult két határkúpszelete képzetes.

Ha a kúpszeletseregnek középponti vonala a közös polárháromszög körül írt kört két valós pontban metszi vagy érinti, úgy ezen metsző- vagy érintőpont a kúpszeletseregben előforduló két vagy egy egyenoldalú hyperbolának középpontja. Ha végre a középponti *vonal a közös polárháromszögnek magasság pontján megy át, úgy ezen magasságpont a kúpszeletseregben előforduló egyedüli valós vagy képzetes körnek középpontja.*

A tétel ezen utolsó része onnan következik, hogy az egyenoldalú hyperbola tetszőleges polárháromszöge körűl írt kör annak középpontján megy át (127.), továbbá, hogy $|XY|$, $|YZ|$, $|ZX|$ és g_∞ oldalakból képezett négyoldalnak átellenes szögpontjai XYZ háromszög magasságpontjából czirkularis involucziós sugársor által projiczáltatnak.

161. Térjünk most azon eset megvizsgálásához, melynél *a kúpszeletseregnek két valós és két képzetes érintője van, tehát a polárháromszögnek csak egy szögpontja X és átellenes oldala* $|YZ|$ *valós.*

o középponti vonal $|YZ|$-t két részre osztja; az egyik résznek pontjai X-től $|YZ|$ által nincsenek elválasztva, a másik részen levő pontokat pedig $|YZ|$ elválasztja X-től. A végből az első részen fekvő pontok középpontjai a kúpszeletseregben előforduló hyperboláknak, a másik rész pontjai, pedig középpontjai az ellipsiseknek. Ezért mondhatjuk: *ha a kúpszeletseregnek két valós és két képzetes érintője van, akkor a kúpszeletseregben két csoport kúpszelet fordúl elő; az egyik csoport kúpszeletei hyperbolák, a másiké ellipsisek; az átmenetet a két csoport között a kúpszeletseregben előforduló egyedüli valós pontpár, és parabola képezi.*

Ha a polárháromszög valós szögpontján X-en kört fektetünk át, melyre vonatkozólag a kúpszeletsereg által $|YZ|$-n kimetszett involucziós pontsor kapcsolt pontpárjai kapcsolt pólusok, mely tehát XYZ polárháromszögnek X valós és Y, Z képzetes szögpontjain átmegy, és ha ezen kör o-t valós pontokban metszi vagy érinti, akkor e metsző- vagy érintőpont a kúpszeletseregben előforduló két, vagy egy egyoldalu hyperbola középpontja (127).

Tudjuk, hogy ha o középponti vonal XYZ valós polárháromszög magasságpontján megy át, akkor a kúpszeletseregnek van egy köre, melynek középpontja e magasságpont. Ugyanezt mondhatjuk jelen képzetes polárháromszög eseténél is. Az XYZ polárháromszög Y, Z szögpontjai: kettőspontjai azon involucziós pontsornak, mely szerint X-nek polárisa $|YZ| \equiv x$, a kúpszeletsereget metszi. Ha ezen involucziós pontsor középpontja N, X-ből x-re bocsátott merőleges talppontja M, az ehez kapcsolt pont ezen involucziós pontsorban M_1, akkoz XYZ képzetes háromszögnek magasságpontja, XM-nek O metszőpontja azon egyenessel, mely N-ből $|XM_1|$-re merőlegesen lesz bocsátva.

Ezen a valós polárháromszög esetéből vont következtetést, direkt úton következőkép lehet igazolnunk (99. ábra).

X-ből x-re bocsátott $|XM|$ merőleges mindenesetre tengelyét képezi a kúpszeletsereg azon k kúpszeletének, melynek középpontja $|XM|$ és o metszőpontja O. — k-nak P, P_1 metszőpontjai x-szel, ezért M-től egyenlő távolságra vannak és kapcsolt pontpárját képezik a kúpszeletsereg által x-en kimetszett involucziós pontsornak. Ha ezen pontsor N középpontjához és M-hez kapcsolt pont $N_{1\infty}$ és M_1, úgy

$$(PP_1NM)=(P_1PN_{1\infty}M_1)=(PP_1M_1N_{1\infty});$$

mely egyenlet szorozva

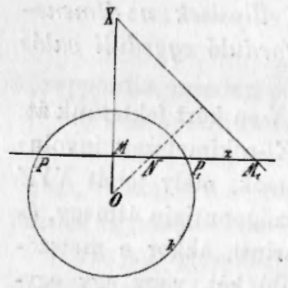
$$-1= \qquad (PP_1N_{1\infty}M),$$

és

$$-(PP_1MM_1)= \qquad -(PP_1MM_1)\text{-}$$

gyel következő egyenlethez vezet:

$$(PP_1NM_1)=-1.$$



99. ábra.

E szerint P, P_1; N, M_1 pontpárak harmonikusan vannak elválasztva, tehát $|XM_1|$ egyenes pólusa N pont. k kúpszelet már most akkor lesz kör, ha $|XM_1|$ polusát N-et a középponttal O-val összekötő egyenes merőleges $|XM_1|$-re, vagy más szóval: *a két valós és két képzetes alapérintővel biró kúpszeletseregnek akkor van egy köre, ha o középponti vonal átmegy $|XM|$ egyenes és N-ből $|XM_1|$-re bocsátott merőlegesnek metszőpontján, vagy a mi ugyanaz, XYZ képzetes polárháromszög magasságpontján.* —

Ha valamely kúpszeletseregben két kör fordul elő, akkor kell, hogy ezen kúpszeletsereg közös polárháromszögének két magasságpontja legyen, mi csak úgy lehetséges, ha *a polárháromszög két oldala merőleges a harmadikra;* ezen harmadik oldal képezi a kúpszeletsereg középponti vonalát.

162. Minthogy a kúpszeletsereg, polár-ábrája egy kúpszeletsornak azért: *egy tetszőleges G ponton átmenő p egyenesekhez kapcsolt*

polárisok valamely kúpszeletseregre vonatkozólag, egy Γ kúpszeletet burkolnak, mely a kúpszeletsereg közös polárháromszögébe van írva. Ezen Γ kúpszelet egyszersmind burkoló görbéje G pont polárisainak a kúpszeletsereg kúpszeleteit illetőleg. G pontból Γ-hoz vonható érintők kapcsolt polárisai a kúpszeletseregnek és G-ből a kúpszeletsereghez vonható érintőpárak kapcsolt polárisai Γ-nak. E tételnek megfelelő dualis tétel az előbbi §-ban lett tárgyalva.

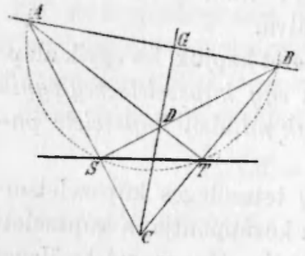
163. A kúpszeletsereg egy különös esetét kapjuk, ha egyik alapérintőt végtelen távol veszszük fel, mert *ha egy kúpszeletsereg egyik alapérintője végtelen távol van, akkor annak minden kúpszelete parabola.*

Az ily kúpszeletsereg polár-ábrája egy tetszőleges kúpszeletsornak, oly kúpszeletre vonatkozólag, melynek középpontja, a kúpszeletsornak egyik végesben fekvő valós alappontja. Ha azon tetszőleges kúpszeletsor helyett egyenoldalu hyperbola sort, polárizáló kúpszeletnek pedig az egyenoldalu hyperbola sor A, B, C, D alappontjainak egyikéből, pl. D-ből, tetszőleges sugárral leírt $\varkappa$ kört választunk, úgy A, B, C, D pontoknak $\varkappa$ körre vonatkozó a, b, c, d_∞ polárisai képezik a parabola sor alapérintőit; a parabolasor tehát abc háromszögbe van beírva. D pont úgy az ABC, mint abc háromszögnek magasságpontja, mert a két háromszög oldalai párhuzamosak ($AB \,||\, c$, stb.) és a megfelelő szögpontjukat összekötő egyenesek D ponton mennek át.

Minthogy az egyenoldalú hyperbola asymptotái egymásra merőlegesek, azért ezek végtelen távol fekvő pontjainak polárisai, $\varkappa$ középpontján D-n átmenő, reájuk és így egymásra is merőleges egyenesek, melyek a parabolasereg egy parabolájának érintői. De minden parabola két egymásra merőleges érintője egymást a parabola vezérvonalában metszi (127.), és így a parabolasereg vezérvonalai D-n mennek át, vagy más szóval: *egy háromszögbe írható parabolák vezérvonalai a háromszög magasságpontján mennek át.*

Azon tétel, hogy «minden háromszögbe abc-be írt parabola vezérvonala, a háromszög magasságpontján megy át» különben így is bebizonyítható: Ha abc háromszög körül egy új háromszöget UVW-t írunk, melynek oldalai abc háromszög oldalaival párhuzamosak, akkor UVW körül írt kör középpontja abc háromszögnek magasságpontja és UVW háromszög a parabolának polárháromszöge. De a parabola minden polárháromszöge körül írt kör a vezérvonalat derékszög alatt metszi, e végből UVW háromszög körül írt körnek középpontja, vagyis abc háromszögnek magasságpontja, a vezérvonalon fekszik.

E tételnek következménye, hogy «egy tetszőleges négyoldal oldalaiból alakított négy háromszög magasságpontjai egyenesben fekszenek, mely a négyoldalba írható parabola vezérvonala».



100. ábra.

Minthogy minden kúpszelet két érintőjének metszőpontját a gyújtópontokkal összekötő egyenesek az érintőkhöz felváltva egyenlő szög alatt hajlanak (131.), azért a parabolánál, melynek egyik gyújtópontja tengelyének végtelen távol fekvő pontja, a, b, c érintők (a, b) és (b, c) metszőpontját annak gyújtópontjával összekötő két egyenes a, illetve c érintővel ép oly szöget képez, mint a parabola tengelye b érintővel. Ebből következik: *minden háromszögbe írt parabola gyújtópontja, azon háromszög körülírt körön fekszik;* továbbá, hogy «egy négy oldalba írt parabola gyújtópontja azon pont, melyben a négyoldal oldalaiból képezett négy háromszög körül írt négy kör egymást metszi.»

164. A kúpszeletseregnek más különös esetét találjuk, ha azon két általános involucziós sugársor helyett, melynek kettőssugarai a kúpszeletseregnek alapérintői, czirkularis természetű involucziós sugársort választunk. Ekkor ugyanis a két sugársor középpontja S, T a kúpszeletsereg minden kúpszeletének gyújtópontja — fokus-a — lesz, miért is ily kúpszeletsereget *konfokális* kúpszeletseregnek nevezik. — E kúpszeletsereg közös polárháromszögének oldalai: $|ST| \equiv |XZ_\infty|$, és $|ST|$-re a felezőpontban emelt $|XY_\infty|$ merőleges, és a sík végtelen távol fekvő $g_\infty \equiv |Y_\infty Z_\infty|$ egyenese.

A konfokális kúpszeletseregnek két tetszőleges közös kapcsolt polárisa egymásra merőleges. Mert ha S valamint T gyújtópontokon át két tetszőleges egymásra merőleges sugárpárt (100. ábra)

$$|SA|,\ |SB|;\ |TA|,\ |TB|\text{-t}$$

húzunk, melyek egymást A, B, C, D pontokban metszik, úgy e metszőpontok egy háromszögnek magasság- és szögpontjai: tehát $|AB|$, merőleges $|CD|$-re és S, T gyújtópontokat harmonikusan választják el egymástól. De az előbbi sugárpárak kapcsolt polárisok, tehát $|AB|$, $|CD|$ szintén kapcsolt polárispár lesz. Innen következik:

egy tetszőleges G pontból a konfokális kúpszeletsereghez vont érintőpárak egyenoldalúan-hyperbolás természetű involucziós sugársort képeznek, mert kettőssugarai — a G-n átmenő kapcsolt polárisok — egymásra merőlegesek. Továbbá: a *sík minden pontján két kúpszelet, egy ellipsis és egy hyperbola, fektethető át, mely egy konfokális kúpszeletsereghez tartozik; ezek egymást a felvett pontban derékszög alatt metszik.* A felvett ponton átmenő kapcsolt polárisok azon kúpszeleteknek érintői a felvett pontban, és mert a kapcsolt polárisok egymásra merőlegesek, és egyik közülök S, T gyújtópontokat egymástól elválasztja, azért a kúpszeletek derékszög alatt metszik egymást és különböző neműek, t. i.: ellipsis és hyperbola.

Ha S, T pontok közül T végtelen távol vétetik fel, akkor a kúpszeletsor kúpszeletei *konfokális parabolák.* A sík minden pontján két egymást derékszög alatt metsző ily konfokális parabola megy át.

Könnyen belátható, hogy *tetszőleges G pont polárisai egy konfokális kúpszeletsereget illetőleg parabolát burkolnak, melynek vezérvonala G ponton és a kúpszeletsereg középpontján megy át.* E burkoló görbe ugyanis a kúpszeletsereg polárháromszögének oldalait érinti, mely oldalak közül egyik végtelen távol van, tehát a burkoló görbe parabola. A polárháromszög másik két oldala a konfokális kúpszeletseregnek két közös tengelye, és mert ezen tengelyek valamint a G ponton átmenő kapcsolt polárisok egymásra merőleges érintői a burkoló görbének, azért a burkoló parabola vezérvonala, a kúpszeletsereg középpontján és G-n megy át.

165. A kúpszeletseregnek különös esete áll elő, ha a négy valós közös érintő a, b, c, d közül kettő-kettőt, pl. a és b, c és d-t, egy-egy egyenesbe fekvőnek vesszük fel, és megadjuk ezen egyesült a, b és c, d érintők A, illetve C metszőpontját: A-t az a-n, C-t a c-n. Ily kúpszeletsereg kúpszeletei, minthogy az a, c egyeneseket A, C pontokban, tehát egymást is e két pontban érintik, és mint ilyenek négy ponton mennek át, — kúpszeletsort is képeznek. E különös kúpszeletsereg- és kúpszeletsorhoz tartozó kúpszeleteket: *kettős érintésüeknek* neveztük (105., 144).

A kettős érintésű kúpszeletsereg A, C érintőpontjain átmenő x egyenes, polárisa ezen pontokban vont a, c érintők X metszőpontjának; x egyenesen fekvő kapcsolt pólusok, valamint X ponton átmenő kapcsolt polárisok valamennyi kúpszeletre nézve, egy perspektiv helyzetű involucziós pont- és sugársort képeznek. Ezért a kettős érintésű kúpszeletsereget így is értelmezhetjük: *mindazon kúpszeletek, melyekre vonatkozólag tetszőleges X ponton átmenő és x egyenesen fekvő perspektiv helyzetű involucziós sugár- és pontsorok kapcsolt elemei kapcsolt polárisok, illetve kapcsolt pólusok: kettős érintésű kúpszeletsereget képeznek.* E kúpszeletekre vonatkozólag X és x szükségkép pólus és poláris. Ha az adott involucziós sorok hyperbolikusak, akkor a kúpszeletsereg kúpszeletei két valós érintőponttal és érintővel bírnak; ha pedig az involucziós sorok ellipikus természetűek, akkor az érintőpontok és érintők képzetesek.

Az ily kúpszeletsereg bizonyos tekintetben magában egyesíti a kúpszeletsor és kúpszeletsereg tulajdonságait, melyeket itt röviden felemlítünk.

A kettős érintésű kúpszeletseregnek végtelen sok közös polárháromszöge van, melyeknek egyik szögpontja a közös érintők metszőpontja X, és egyik oldala X-nek polárisa x; a többi két szögpont x-en adott involucziós pontsor két tetszőleges kapcsolt póluspárja.

Egy ponton át, és hasonlókép egy egyenest érintőleg csak egy kúpszelet szerkeszthető, mely a kettős érintésű kúpszeletsereghez tartozik. Tetszőleges g egyenes a kettős érintésű kúpszeletsereget involucziós pontsor szerint metszi, melynek egyik kettőspontja g és x metszőpontja; és tetszőleges G pontból az ily kúpszeletsereghez vont érintők involucziós sugársort képeznek, melyek egyik kettőssugara $|GX|$ sugár.

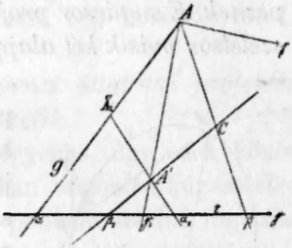
Egy P pont polárisai a kettős érintésű kúpszeletseregre vonatkozólag egymást x egyenes egy Q pontjában metszik, mely $|PX|$ és x metszőpontjához kapcsolt; hasonlókép tetszőleges p egyenes pólusai egy q egyenesen fekszenek, mely X-n átmegy és (x, p), X pontok összekötő egyeneséhez kapcsolt.

A kettős érintésű kúpszeletsereg o középponti vonala X ponton és x-en adott involucziós pontsor középpontján megy át; a kúpszeletek: ellipsisek, hyperbolák, egy egyenoldalú hyperbola, és egy parabola; ha o merőleges x-re, akkor a kúpszeletseregben egy kör is előfordul, mely képzetes is lehet.

21. §. Kúpszeletsorok projektiv vonatkozása.

166. Tanultuk a 152. pontban, hogy «ha P, Q egy kapcsolt póluspár valamely kúpszeletsorra vonatkozólag, akkor Q ponton átmenő tetszőleges p_i egyenes, polárisa P pontnak a kúpszeletsor egy bizonyos kúpszeletére vonatkozólag». Másrészt tudjuk, hogy két tetszőleges P, P' pont p_i, p'_i polárisai a kúpszeletsorban változó k_i kúpszeletre vonatkozólag: két projektiv sugársort képeznek; mert p_i, p'_i sugarak által leírt sorok képződménye azon γ kúpszelet, melyben $|PP'| \equiv g$ egyenesnek a kúpszeletsor kúpszeleteire vonatkozó pólusai fekszenek. Ezen tulajdonságok alapján *a kúpszeletsor* k_i *elemeit projektiv vonatkoztathatjuk azon sugársorra, melyet egy tetszőleges* P *pont* p_i *polárisai képeznek;* k_i *kúpszeletnek megfelel a sugársorban,* P *pontnak* k_i*-re vonatkozó* p_i *polárisa.*

Ha a kúpszeletsor két vagy négy alappontja valós, akkor ezen alappontokban a kúpszeletsor elemeihez vont érintők: az alappontok polárisai, ezért: *a kúpszeletsor alappontjaiban a kúpszeletsor elemeihez vont érintők projektiv sugársort képeznek,* mely egyszersmind projektiv a kúpszeletsorral.



101. ábra.

A kúpszeletsor elemei, annak egyik alappontján átmenő tetszőleges egyenest, a kúpszeletsorral projektiv pontsor szerint metszik.

Ha a kúpszeletsor két valós alappontja A, C (101. ábra); a másik kettő pedig t-tartón fekvő involucziós pontsor valós vagy képzetes kettőspontja, és A-n átmenő g egyenes a kúpszeletsornak egyik kúpszeletét k_i-t X_i-ben metszi, akkor ezen k_i kúpszeletnek egy új pontja A': az $|X_i\alpha_1|$, $|C\beta_1|$ egyeneseknek metszőpontja; hol α_1, β_1, — t-n adott involucziós pontsorban $|AX_i|$ és t, valamint $|AC|$ és t egyenesek α, β metszőpontjához kapcsolt pont (96.). A, A' pont érintői egymást az $|AA'|$ és t közös γ_1 pontjához kapcsolt γ pontban metszik. k_i változásával a kúpszeletsorban, k_i-nek $|A\gamma|$ érintője A pontban, egy sugársort; γ_1 az $|A\gamma|$ sugársorral projektiv pontsort; A' pont, mint γ_1-nek projekcziója A-ból $|C\beta_1|$-re, γ_1-gyel projektiv pontsort; végre X_i, vagyis a változó k_i kúpszeletnek második metszőpontja $|AX_i| \equiv g$-vel, mint A'-nek projekcziója α_1-ből g-re: A', γ_1, γ, $|A\gamma|$ sorokkal projektiv pontsort ír le.

E tételnek következménye: *a kúpszeletsor két egyenest, mely ugyanazon vagy különböző alapponton megy át projektiv pontsorok szerint metsz; e projektiv pontsorok általános vagy perspektiv helyzetűek a szerint, a mint a két egyenes ugyanazon, vagy különböző alapponton megy át.*

Ha ugyanis a két egyenes különböző alapponton lett átfektetve, úgy azoknak közös pontján átmenő és a kúpszeletsorhoz tartozó kúpszelet, a két egyenest egymásnak *megfelelő* közös pontban metszi, tehát a két egyenesen a kúpszeletsor által kimetszett projektiv sor perspektiv helyzetű. Ez utóbbi tulajdonság speciális esetét képezi a következőnek:

167. *Ha egy kúpszeletsor két alappontján át egy tetszőleges $\varkappa$ kúpszeletet fektetünk, akkor $\varkappa$ a kúpszeletsor egyes elemeit még két-két pontban metszi, melyeknek összekötő egyenesei egy sugársort képeznek. E sugársor projektiv a kúpszelet sorral és középpontja a kúpszeletsor másik két alappontján átmenő egyenesen fekszik.*

102. ábra.

Nevezzük a kúpszeletsor azon két alappontját, melyen $\varkappa$ átmegy A, B-nek; a másik két alappontot C, D-nek; $\varkappa$-nak metszőpontját $|CD|$-vel E, F-nek; $|AB|$ és $|CD|$ metszőpontját U-nak, végre a kúpszeletsorban változó k kúpszelet és $\varkappa$ más két metszőpontját, P, Q-nak; $|PQ|$ és $|CD|$ közös pontját T-nek (102. ábra).

$|AB|$, $|PQ|$ egyenespár, k_1, és $\varkappa$ kúpszelet, három ugyanazon négy ponton átmenő kupszelet, mely minden egyenest, és így $|CD|$-t is involucziót képező hat pontban metsz, tehát

$$C, D; \; E, F; \; U, T$$

egy involucziós pontsornak három kapcsolt pontpárja. E pontok közül k változásával a kúpszeletsorban, csak T, mint a változó $|PQ|$-n fekvő pont, változhat; de mert T az állandó U pontnak kapcsolt pontja, azért T is állandó marad, és így: $|PQ|$, mint $\varkappa$ és a változó k metszőpontjait P, Q-t összekötő egyenes, mindig T ponton megy át. Minthogy T-nek a változó k kúpszeletre vonatkozó t polárisai a kúpszeletsorral projektiv sugársort képeznek; T-nek $\varkappa$ és k-ra vonatkozó τ és t polárisai pedig egymást $|PQ|$-nak egy pontjában, (mely P, Q-t T-től harmonikusan elválasztja) metszik; végre minthogy a változó t, $|PQ|$ metszőpontjai mindig τ egyenesen vannak: azért T pontnak a kúpszeletsorra vonatkozó t polárisai, $|TPQ|$ sugár által leírt sugársorral projektiv sugársort képeznek.

Az imént bebizonyított tétel különben így is kifejezhető: *Egy kúpszeletsor bármely $\varkappa$ kúpszeletet, mely a kúpszeletsor két alap-*

pontján megy át: egy involucziós pontsor kapcsolt pontpárjaiban metszi; vagy fordítva: «mindazon kúpszeletek, melyek egy $\varkappa$ kúpszeleten fekvő involuczió pontsor kapcsolt pontpárjain, továbbá $\varkappa$-nak két tetszőleges állandó pontján, végre a siknak egy állandó pontján átmennek, kúpszeletsort képeznek, — tehát még egy negyedik közös ponttal bírnak».

Ha a kúpszeletsornak csak két elemét vesszük tekintetbe, akkor a tételt így is fogalmazhatjuk: *Ha három kúpszelet egy közös szelővel bír, akkor két-két kúpszeletnek azon szelői, melyek az előbbi szelővel nem metszik egymást a kúpszeleteken, egy pontban találkoznak.*

168. *A kúpszeletsor két tetszőleges egyenes által két projektiv vonatkozású involucziós pontsor szerint metszetik.*

Ha g, l a kúpszeletsort metsző két egyenes, úgy ezek közös $(g, l) \equiv P$ pontjának polárisai a kúpszeletsorban változó k kúpszeletre nézve, g, l egyeneseket oly két projektiv pontsor szerint metszik, melyeknek elemei: a kúpszeletsor által g-n és l-n kimetszett involucziós pontsor kapcsolt pontpárjait P-től harmonikusan választják el. Ebből következik, hogy a kúpszeletsor g és l-et projektiv vonatkozású involucziós pontsorban metszi (86.).

169. *Két kúpszeletsort projektiv vonatkoztatunk egymásra,* ha azon két sugársort, melyet egy P pont polárisai az első kúpszeletsorban és egy P' pont polárisai a második kúpszeletsorban képeznek, egymásra projektiv vonatkoztatjuk; a kúpszeletsorokban oly két kúpszelet felel meg egymásnak, melyekre vonatkozólag P illetve P'-nek polárisai, a polárisokból álló sugársorokban, egymásnak megfelelők.

Ha két kúpszeletsor közül az egyiket g, a másikat tetszőleges g' egyenessel metszéshez hozzuk, és a kimetszett involucziós pontsorokat egymásra projektiv vonatkoztatjuk, akkor a kúpszeletsorok is projektiv vannak egymásra vonatkoztatva; oly két kúpszelet, mely az involucziós sorok egymásnak megfelelő kapcsolt pontpárjain átmegy, egymásnak megfelelő. Ezen, és az előbbi vonatkoztatása a kúpszeletsoroknak lényegében nem különbözik egymástól, mert g és g'-en kimetszett involucziós pontsorok vonatkoztatása oly két egyszerű pontsor által történik, mely projektiv, P, P' pont polárisaiból képezett sugársorokkal.

Ha egy pont polárisai valamely kúpszeletsorra nézve, projektivek egy egyszerű sugársorral, akkor a kúpszeletsor is projektiv ezen egyszerű sugársorral; a kúpszeletsor egyik k kúpszeletének azon sugár felel meg a sugársorban, mely a felvett k kúpszeletre vonatkozó polárisnak megfelelő sugár.

170. *Két ugyanazon tartón fekvő projektiv vonatkozású involucziós pontsornak négy megfelelőleg közös pontja van, mely párosával képzetes is lehet.*

Tegyük fel, hogy a két involucziós pontsor egy k kúpszeleten fekszik, és hogy ezen soroknak pólusa P, P' pont (82). A két projektiv involucziós pontsor kapcsolt pontpárjait összekötő sugarak, két projektiv sugársort írnak le P és P' körül, melynek képződménye $\varkappa$ kúpszelet. k és $\varkappa$-nak négy közös pontja oly tulajdonságú, hogy azok mindegyikében az egyik és másik involucziós pontsor megfelelő kapcsolt pontpárjának egy-egy eleme egyesül.

Ha a két involucziós pontsornak egy megfelelőleg közös *kapcsolt* pontpárja van, akkor P, P' sugársorok perspektivek, tehát $\varkappa$ két egyenesre fajul. Ezek közül $|PP'|$ egyenes k-t a megfelelőleg közös kapcsolt pontpárban, a másik egyenes pedig a másik két megfelelő pontban I, K-ban metszi. Ha A, A_1; és A', A'_1 két egymásnak megfelelő kapcsolt pontpár e projektiv vonatkozású involucziós sorokban, akkor $|AA_1|$, $|A'A'_1|$ két egymásnak megfelelő sugár az egyszerű P, P' sugársorokban, és mert ez utóbbiak jelen esetben perspektiv helyzetűek: $|AA_1|$, $|A'A'_1|$ sugarak egymást $|IK|$-ban metszik, tehát A, A_1; A', A'_1; I, K pontpárak involucziót képeznek. Ezért mondhatjuk: *ha két, közös tartón fekvő, projektiv vonatkozású involucziós pontsor egy megfelelő közös kapcsolt pontpárral bír, akkor a másik két megfelelő közös pont, két tetszőleges megfelelő kapcsolt pontpárral involucziót képez.* —

Egy involucziós pontsor és egy véle projektiv és ugyanazon kúpszeleten (vagy egyenesen) fekvő egyszerű pontsor, három megfelelőleg közös ponttal bír, melyek közül egyik mindig valós, a másik kettő képzetes is lehet.

Ha a projektiv pontsorok k kúpszeleten fekszenek, és az involucziós pontsornak pólusa P, k-nak tetszőleges pontja Q, akkor az involucziós pontsor kapcsolt pontpárjait projicziáló $\{P\}$ sugársor, és az egyszerű pontsornak pontjait Q-ból projicziáló $\{Q\}$ sugársor projektiv egymással, és ezért képződményük $\varkappa$ kúpszelet. $\varkappa$ és k-nak négy közös pontja van, melyeknek egyike Q; a többi egy vagy három valós közös pontban az involucziós és az egyszerű pontsornak egy-egy megfelelő eleme egyesül.

171. *Két projektiv kúpszeletsor, valamint két projektiv involucziós sugársornak képződménye oly görbe, melyet minden egyenes négy pontban metsz, — tehát negyedrendű görbe. E negyedrendű görbe átmegy a kúpszeletsoroknak alappontjain.*

Tetszőleges egyenes a kúpszeletsorokat két projektiv involucziós pontsor szerint metszi, melyeknek általában négy megfelelő közös pontjuk van. Minden ily pontban az első kúpszeletsornak egyik kúpszelete, a második sorban neki megfelelő kúpszeletét metszi; tehát azon négy pont a két projektiv kúpszeletsor képződményének egy-egy pontja. Ha az első kúpszeletsor egyik alappontja A, akkor azon a második kúpszeletsornak egy kúpszelete fektethető át; ezért A-ban a két kúpszeletsor két kúpszelete metszi egymást.

Az involucziós sugársor sugárpárjai elfajult kúpszeletek; és mert az involucziós sugársor azon tulajdonsággal bír, mint a kúpszeletsor t. i. hogy egyenes által involucziós pontsor szerint metszetik, azért *az involucziós sugársor elfajult kúpszeletsornak tekinthető.* — *Egy sugársor és egy vele projektiv kúpszeletsor vagy involucziós sugársor képződménye oly görbe, mely egyenes által három pontban metszhető, — tehát harmadrendű. E görbe átmegy a kúpszeletsornak alappontjain és a sugársornak középpontján.*

Tetszőleges egyenes a kúpszeletsort involucziós pontsorban, a sugársort egyszerű pontsorban metszi, melyek három közös ponttal bírnak. E pontok mindegyikében a kúpszeletsor egy kúpszelete, a sugársorban neki megfelelő sugarat metszi, tehát e pontok a képződménynek pontjai. Ugyanígy bizonyítható be, hogy egy involucziós sugársor és egy véle projektiv egyszerű sugársor képződménye harmadrendű görbe; ez az előbbitől abban különbözik, hogy ennek az involucziós sugársor középpontjában valós *kettőspontja* van.

Ha két involucziós sugársor, mely projektiv van egymásra vonatkoztatva, egy megfelelőleg közös sugárral bír, akkor a többi megfelelő sugarak metszőpontja egy harmadrendű görbét képez. Ily involucziós sugársorok, *félig-perspektiv* helyzetű involucziós sugársoroknak neveztetnek. (Schröter: «Theorie der ebenen Kurven dritter Ordnung». 1888. 14. lap.)

Két involucziós sugársor képződménye tetszőleges egyenes által négy pontban metszetik, melyek közül az egyik mindig a megfelelő közös sugáron van; ezen közös sugár tehát egy része a képződménynek; a másik rész, melyet minden egyenes három pontban metsz: harmadrendű görbe.

172. *Ha két projektiv kúpszeletsor egy megfelelőleg közös kúpszelettel bir, akkor a többi megfelelő kúpszeletpárak egymást egy új kúpszeleten metszik,* vagyis azon negyedrendű görbe, mely a két projektiv kúpszeletsor képződménye, szétbomlik két kúpszeletté.

Nevezzük a két projektiv kúpszeletsor megfelelőleg közös kúpszeletét k nak; az első kúpszeletsor k, k_1, k_2, . . . kúpszeleteinek megfelelő kúpszeleteket a második sorban k, k'_1, k'_2, . . .-nek.

k_1 és k'_1-nek I metszőpontján át tetszőleges g egyenest fektetünk, mely a két projektiv kúpszeletsor képződményét négy pontban metszi; ezeknek egyike I, más kettő g-nek metszőpontja k-val, a negyedik legyen X.

Minthogy g és k-nak közös pontjai a kúpszeletsorok által g-n kimetszett két projektiv involucziós pontsornak megfelelőleg közös kapcsolt pontpárja: a másik két megfelelő pont I és X oly helyzetű, hogy bármely két megfelelő kapcsolt pontpárral, tehát g és k_2, valamint g és k'_2-metszőpontjával involucziót képez (170.). Ha g-t I körül forgatjuk, akkor X pont, e tulajdonság folytán I és k_2, k'_2 metszőpontján átmenő $\varkappa$ kúpszeletet ír le. De I és X pontokban a projektiv kúpszeletsorok két megfelelő kúpszelete jut metszéshez, ennélfogva: a két projektiv kúpszeletsor képződményének azon része, mely k-n kívül fekszik: $\varkappa$ kúpszelet.

Ezen $\varkappa$ kúpszelet nemcsak k_2, k'_2, hanem minden más két megfelelő k_i, k'_i, kúpszelet négy metszőpontján is átmegy. Ebből következik:

Ha k_1, k_2 és k'_1, k'_2 kúpszeleteknek négy-négy metszőpontja egy k kúpszeleten fekszik, akkor k_1, k'_1 és k_2, k'_2 kúpszeleteknek, (hasonlóképen k_1, k'_2 és k_2, k'_1 kúpszeleteknek) négy-négy metszőpontja szintén egy $\varkappa$ kúpszeleten lesz. (Chasles (1793—1880): Traité des sections coniques, 1865. (404); Schröter: Theorie der Kegelschnitte, 506. lap).

E tételnek következménye: *ha egy kúpszeletsor k_1, k_2, k_3, . . . kúpszeletei egy tetszőleges $\varkappa$ kúpszeletet négy-négy pontban metszik, és mi egy tetszőleges A' ponton és $\varkappa$, k_1; $\varkappa$, k_2; $\varkappa$, k_3; . . . metszőpontjain át k'_1, k'_2, k'_3, . . . kúpszeleteket fektetünk, úgy ezek szintén kúpszeletsort képeznek, mely projektiv az előbbivel.*

Ezt bebizonyítandó, csak ki kell mutatnunk, hogy $\varkappa$, k_3 és k'_1, k'_2 kúpszeletpárak nyolcz metszőpontja egy kúpszeleten k'_3-on fekszik.

$\varkappa$, k'_1 és k_2, k_3 metszőpontjai k_1 kúpszeleten fekszenek, tehát
$\varkappa$, k_2 « k'_1, k_3 « — « « , vagy a mi

ugyanaz:

$\varkappa$, k_2' és k_1', k_3 metszőpontjai — kúpszeleten fekszenek, tehát
$\varkappa$, k_3 « k_1', k_2' « « « .

De mert:

k_1, k_1' és k_2, k_2' metszőpontjai $\varkappa$ kúpszeleten fekszenek, azért
k_1, k_2 « k_1', k_2' « vagyis a kúpszeletsorok alappontjai

szintén egy k kúpszeleten fekszenek. $\varkappa$ tehát a k_1, k_2, k_3, . . .; és k_1', k_2', k_3', . . . kúpszeletsorok megfelelő elemeinek metszőpontján megy át, mely kúpszeletsoroknak alappontjai k-n vannak, s ezért a két kúpszeletsor projektiv egymáshoz.

Ebből látható, hogy mikép lehet egy k_1, k_2, k_3; . . . kúpszeletsort, más kúpszeletsorra, melynek egyik alappontja A' adva van, egy $\varkappa$ *kúpszelet* közvetítésével, projektiv vonatkoztatni (169).

IV. FEJEZET.

A kollineaczió és recziproczitás.

22. §. A kollineaczió és különös esetei.

173. Az előbbi két fejezetben projektiv sugársorok és pontsorok képződményével, a kúpszelettel foglalkoztunk. Megismerkedtünk ennek számos tulajdonságával és e tulajdonságon alapuló szerkesztésekkel. Projektív sugársorok és pontsorok alatt pedig sugársorok és pontsoroknak egy bizonyos kölcsönös vonatkozását értettük, olyképen: hogy minden elemnek az egyik sorban megfelelt egy elem a másikban és hogy négy megfelelő elem kettős viszonya mindig egyenlő volt egymással.

De nemcsak két egyenes pontjait, vagy két sugársor sugarait lehet egymásra vonatkoztatni, hanem *egy sík összes pontjait és egyeneseit egy másik sík összes pontjaira és egyeneseire oly módon lehet vonatkoztatni, hogy az egyik* **S** *sík minden* P *pontjának és azon ponton átmenő* g *sugársornak egy* P_1 *pont és azon átmenő* g_1 *sugár feleljen meg a másik —* $\mathbf{S}_1$ *— síkban.* E vonatkozását két sík pontjai- és sugarainak *kollinear vonatkozásnak*, vagy *kollineaczió*nak nevezzük.* Hogy **S** sík pontjait és sugarait, melyet együttvéve *sík-rendszernek*, külön-külön pedig *pont-mező-*, és *sugár-mezőnek* lehet nevezni, egy más sík $\mathbf{S}_1$ pontjai és sugaraira ily módon vonatkoztathatjuk, kitünik a következőkből:

Vegyünk fel **S** síkban két sugársort A, B középponttal; $\mathbf{S}_1$ síkban két sugársort A_1, B_1 középponttal, és vonatkoztassuk A, A_1, valamint B, B_1 középponttal biró sugársorokat projektiv egymásra, de úgy, hogy $|AB|$ és $|A_1B_1|$ sugarak A, A_1 sugársorokban, úgyszintén $|BA|$, $|B_1A_1|$ sugarak B, B_1 sugársorokban egymásnak megfelelők legyenek. **S** sík-mező minden P pontjának, melyben A, B sugársorok $|AP|$, $|BP|$ sugarai egymást metszik, feleljen meg $\mathbf{S}_1$ síkban

* Möbius: Der barycentrische Calcul; 1886. 266 lap.

azon P_1 pont, melyben $|AP|$, $|BP|$-nek megfelelő $|A_1P_1|$, $|B_1P_1|$ sugarak az A_1, B_1 sugársorokból találkoznak.

E szerint **S** sík-mező minden pontjának — $|AB|$ sugár pontjainak kivételével — az $\mathbf{S}_1$ síkban megfelelő pont, a nevezett projektiv sugársorok vonatkozása alapján vonalosan szerkeszthető.

S síkban fekvő tetszőleg g egyenes pontjainak, e vonatkozás alapján megfelelő pontok egy g_1 egyenesen fekszenek. g pontjait A, B-ből projicziáló sugársorok sugarai ugyanis g pontsor által projektiv lesznek egymásra vonatkoztatva, és e projektiv vonatkozáson kívül még perspektiv helyzetűek; úgyszintén A_1, B_1 sugársorok is, melyek g-pontjainak megfelelő pontokat projicziálják, projektivek egymáshoz. De mert g és $|AB|$ metszéspontját projicziáló $|AB|$. $|BA|$ sugárnak megfelelő sugara A_1, B_1 sugársorban: $|A_1B_1|$, illetve $|B_1A_1|$; ezek pedig megfelelőleg közös sugarak, azért: g pontjainak megfelelő pontokat projiczeáló sugársorok perspektiv helyzetűek, és így metszőpontjaik egyenesen fekszenek.

Ehhez járul még, hogy **S** sík g egyenesén fekvő pontsornak megfelelő pontjai $\mathbf{S}_1$ síkban, g pontsorral projektiv pontsort képeznek g_1-en, mert az első pontsort A-ból projicziáló sugársor projektiv, a másodikat A_1-ből projicziáló sugársorral.

Ha T, T_1 pontpár **S**, $\mathbf{S}_1$ pont mezőnek megfelelő pontja, akkor g pontsort T-ből projicziáló sugársor is projektiv g_1 pontsort T_1-ből projicziáló sugársorral, és mert ezen T, T_1 sugársorok azon sugarai, melyek g, illetve g_1-nek megfelelő pontjain átmennek, egymásnak megfelelő egyenesek **S**, $\mathbf{S}_1$ síkrendszerben, azért: *ha* **S** *síkrendszer* $\mathbf{S}_1$ *síkrendszerre kollinear van vonatkoztatva, akkor* **S**-*ben fekvő minden pontsornak és sugársornak,* $\mathbf{S}_1$ *síkban egy az előbbivel projektiv pontsor és sugársor felel meg.*

T, T_1 sugársor két megfelelő sugara $|AB|$, illetve $|A_1B_1|$-et két megfelelő pontban metszi, miből látható, hogy: $|AB|$, $|A_1B_1|$-en fekvő pontsorok szintén projektivek egymáshoz.

174. «Ha két síkrendszert kollinear akarunk egymásra vonatkoztatni, akkor az egyik síkrendszer négy

pontjának A, B, C, D-nek, melyek közül kettőnél több nem fekszik egyenesben, megfelelő négy pontját A_1, B_1, C_1, D_1-et, melyek közül szintén kettőnél több nem fekszik egyenesben,	egyenesének a, b, c, d-nek, melyek közül kettőnél több nem megy ugyanazon ponton át, négy megfelelő egyenesét a_1, b_1, c_1, d_1-et, melyek közül szintén kettőnél több nem metszi egymást, egy pontban

tetszőlegesen választhatjuk, mi által a collinear vonatkozás teljesen meg van határozva».

Ha ugyanis X, **S** sík-mezőnek tetszőleges pontja, és $|A_1X_1|$, $|B_1X_1|$ sugarakat úgy szerkesztjük, hogy:

$$A(BCDX) \barwedge A_1(B_1C_1D_1X_1), \text{ és } B(ACDX) \barwedge B_1(A_1C_1D_1X_1),$$

akkor, $|A_1X_1|$, $|B_1X_1|$ sugarak X_1 metszőpontja X-nek megfelelő pont.

Ha továbbá a jobb oldalon lévő adatokat tekintjük és a két síkrendszert úgy vonatkoztatjuk egymásra, hogy

$$(a, b), \quad (b, c), \quad (c, d), \quad (d, a) \text{ pontoknak,}$$
$$(a_1, b_1), (b_1, c_1), (c_1, d_1), (d_1, a_1) \text{ pontok}$$

feleljenek meg, akkor a, b, c, d egyeneseknek megfelelnek a_1, b_1, c_1, d_1 egyenesek, és ezen eset az előbbire van visszavezetve.

Ebből következik, hogy «ha két ugyanazon síkban fekvő kollinear síkrendszer négy megfelelőleg közös ponttal bír, melyek közül három nem fekszik egyenesben, akkor a két a kollinear síkrendszer minden megfelelő pontja és egyenese közös».

175. Nevezzük két egymásra kollinear vonatkoztatott **S**, $\mathbf{S}_1$ síkrendszer végtelen távol fekvő egyenesét q_∞-, illetve $r_{1\infty}$-nek, az ezeknek megfelelő egyeneseket q_1, illetve r-nek. q_1, r egyenesek általában nem lesznek végtelen távol, mert **S** sík q_∞ egyenesének pontjait A, B pontokból projicziáló sugársoroknak megfelelő A_1, B_1 sugársorok nem lesznek egymással párhuzamosak, és viszont A_1, B_1 sugársorok párhuzamos sugarainak megfelelő sugarak A, B sugárokban, nem párhuzamosak egymással.

S, $\mathbf{S}_1$ kollinear síkrendszer azon r, q_1 egyeneseit, melyek $\mathbf{S}_1$, **S** síkok végtelen távol fekvő $r_{1\infty}$, q_∞ egyeneseinek megfelelnek: *ellentengelyeknek* nevezzük.

Az ellentengelyek értelmezéséből következik, hogy **S** síkrendszer tetszőleges párhuzamos sugársorának oly sugársor felel meg, melynek középpontja q_1 ellentengelyben van, és $\mathbf{S}_1$ sikrendszer bármely párhuzamos sugársorának megfelelő sugársor középpontja r-ben fekszik; de q_1-gyel párhuzamos sugársornak r-rel párhuzamos sugársor fog megfelelni, mert q_1 és r végtelen távol fekvő pontjai egymásnak megfelelő pontok.

Minthogy **S**, $\mathbf{S}_1$ síkrendszer r, q_1 ellentengelyének R, Q_1 metszőpontja két megfelelő g, g_1 egyenessel, ellenpontját képezi a kollinear rendszerekben megfelelő es g, g_1-en fekvő projektiv pontsoroknak, azért *az ellentengelyekkel párhuzamos megfelelő egyeneseken fekvő projektiv pontsorok hasonlóan-projektivek.* Ezt tekintve, kérdezhetjük: «létezik-e az ellentengelyekkel párhuzamos megfelelő egyenespár, melyen a megfelelő projektiv pontsorok *egyenlően-projektivek?*»

Hogy e kérdésre felelhessünk, vegyünk fel S síkban (103. ábra) két párhuzamos egyenest g, l-et, mely r ellentengelyt G, L-ben metszi; g és l-nek megfelelő g_1, l_1 egyenesek q_1-nek egy pontján Q_1-en mennek át. q_1-gyel két egyenes s_1, s_1' huzható párhuzamoson q_1-től egyenlő távolságra, melyről g_1, l_1 ép oly hosszúságú részt metsz le, mint GL köz hosszúsága; és ezen s_1, s_1'-nek megfelelő s, s' egyenesekről, melyek szintén párhuzamosak r-rel, g, l egyenesek GL közzel egyenlő részt metszenek le. Ebből látható, hogy s, s_1, valamint s', s_1' egymásnak megfelelő egyenespárakon fekvő projektiv pontsorok nemcsak hasonlóan-projektivek, mint minden az r, q_1 ellentengelyekkel párhuzamos megfelelő egyeneseken fekvő pontsorok, hanem egyszersmind *egyenlően-projektivek.* s, s' egyenesek szintén egyenlő távolságra vannak r ellentengelytől, mert $(ss'rq_\infty) \barwedge (s_1s_1'r_\infty q_1) = -1$, tehát ss' *szalagot,* r ellentengely felezi.

176. **S**, **S**$_1$ kollinear vonatkozású síkrendszerekben mindig létezik oly egymásnak megfelelő egyenespár m, m_1, mely merőleges az ellentengelyekre: m az r-re, m_1, q_1-re. r-re merőlegesen álló, tehát párhuzamos sugaraknak ugyanis oly sugársor felel meg, melynek Q_1 középpontja q_1-ben fekszik; ez utóbbi sugarak között van egy, mely merőleges q_1-re, és ezen egy m sugárnak megfelelő m_1 sugár merőleges r-re. (Kollinear síkrendszerekben különben oly megfelelő egyenesek g, g_1 is találhatók, melyek az ellentengelyekkel bármily nagyságú egyenlő szögeket képeznek.)

Az ellentengelyekre merőlegesen álló megfelelő m, m_1 egyeneseken két oly pontpár található, mely két egymásnak megfelelő és *egyenlően projektiv sugársoroknak* középpontja (104. ábra).

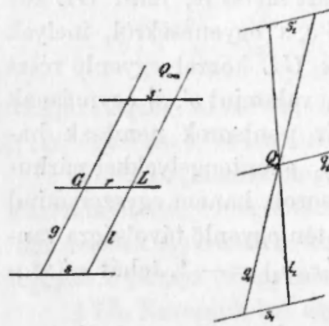
Nevezzük r ellentengely és az előbb talált s, s' egyeneseknek metszőpontját m-el R, illetve: S, S'-nek; m_1-nek metszőpontját q_1, s_1, s_1'-gyel: Q_1, S_1, S_1'-nek. m, m_1 egyeneseken fekvő projektiv pontsorokban az egymásnak megfelelő egyenlő közök egyikének végpontja S; ezen köz másik végpontjának O-nak megfelelő pontja O_1, Q_1-től ép oly távolságra van, mint S, R-től, úgy hogy: $RS = Q_1O_1$, és $OS = S_1O_1$ (17).

Hasonlókép lehet m, m_1-ben oly két megfelelő pontot O', O'_1-et szerkeszteni, hogy: $O'S' = S'_1 O'_1$.

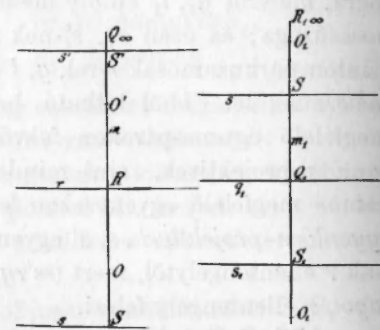
Ezen O, O_1 és O', O'_1 megfelelő pontpárak a két kollinear síkrendszer egyenlően projektiv sugársorainak középpontjai.

Ha ugyanis X, X_1 az s, s_1 egyeneseknek megfelelő pontpárja, akkor s, s_1 egyenesek ama kiváló tulajdonságát tekintve, hogy a rajta fekvő pontsorok egyenlően-projektivek: $XS = X_1 S_1$, és mert $OS = S_1 O_1$,

$$\sphericalangle XOS = \sphericalangle X_1 O_1 S_1,$$



103. ábra.



104. ábra.

tehát O, O_1-en átmenő tetszőleges megfelelő $|OX|$, $|O_1 X_1|$ sugarak m, illetve m_1-gyel egyenlő szöget képeznek, a miből következik, hogy: O, O_1 középponttal biró megfelelő sugársorok egyenlően-projektivek. Ugyanígy bebizonyítható O', O'_1 pontoknak e tulajdonsága.

Az egyenlően-projektiv sugársorok középpontjait: O, O' és O_1, O'_1-et, az egyenlően-projektiv pontsorok tartóitól s, s'; s_1, s'_1-től függetlenül is szerkeszthetjük:

S sík tetszőleges párhuzamos sugársorának, melynek sugarai r-hez φ szög alatt hajlanak, megfelel $\mathbf{S}_1$-ben egy sugársor, melynek középpontja q_1-ben van. Ez utóbbi sorban két oly sugarat g_1, g'_1-et találunk, mely q_1-hez φ szög alatt hajlik; ezeknek megfelelő g, g' sugarak r-rel szintén φ szöget képeznek. Ha l, l_1 és l', l'_1 más két megfelelő sugárpár, mely r, q_1-hez egyenlő szögek (pl. ψ szög) alatt hajlik, akkor g, l, r; g_1, l_1, q_1; g', l', r'; g'_1, l'_1, q'_1 oldalakból képezett háromszög szögei egyenlők és így: $(g, l) \equiv O, (g', l') \equiv O'$; $(g_1, l_1) \equiv O_1$, $(g'_1, l'_1) \equiv O'_1$ pontok az egyenlően projektiv megfelelő sugársoroknak középpontjai.

A talált eredményeket egybefoglalva, így fejezhetjük ki:

Ha S, S_1 *két kollinear vonatkozású síkrendszer, akkor* S*-ben mindig van két oly az r ellentengelytől egyenlő távolságra levő egyenes s, s', melyen fekvő pontsorok egyenlően-projektivek a neki megfelelő és q_1 ellentengelytől egyenlő távolságra levő s_1, s'_1 egyeneseken fekvő pontsorokkal. Úgyszintén találunk* S*-ben oly két sugársort O, O' középponttal, melyeknek ezekkel egyenlően-projektiv O_1, O'_1 sugársorok felelnek meg; O, O' és O_1, O'_1 pontok r, illetve q_1 ellentengelytől ép oly távolságra vannak az ellentengelyekre merőleges megfelelő m, m_1 egyeneseken, mint s_1, s'_1 egyenesek q_1-től, illetve s, s' egyenesek r-től.*

177. Helyezzük most a két kollinear síkrendszert S, S_1-et egymásra úgy, hogy az s-en fekvő pontsor elemei a vele egyenlően-projektiv s_1 pontsor megfelelő elemeivel egybeesnek. Ezen elhelyezésnél m összeesik m_1-gyel, S, S_1-gyel, és vagy O pont kerül O_1-re, vagy O', O'_1-re és így, vagy az $O \equiv O_1$ ponton vagy $O' \equiv O'_1$ ponton átmenő összes megfelelő sugarak egymásra esnek. Ha P, P_1 két megfelelő pont, akkor $|OP|$, $|O_1P_1|$ két megfelelő sugár, és mert ezek $O \equiv O_1$-en mennek át, azért egybeesnek, vagyis *két tetszőleges megfelelő pontpár P, P_1 összekötő egyenese $O \equiv O_1$-en* (vagy $O' \equiv O'_1$-en) *megy át.* Ugyanígy: ha p, p_1 két tetszőleges megfelelő egyenes, akkor (s, p), (s_1, p_1) két megfelelő pont; de most a közös $s \equiv s_1$-en a megfelelő pontok egybeesnek, azért $(s, p) \equiv (s_1, p_1)$, tehát: *két tetszőleges megfelelő egyenes, ezen elhelyezésnél egymást $s \equiv s_1$-en metszi.*

Ugyanezen helyzetet, melynél a megfelelő pontpárak összekötő egyenesei egy ponton mennek át és a megfelelő egyenespárak metszőpontjai egyesen fekszenek, az által is elérhetjük, hogy a két síkrendszernek s', s'_1 egyenesein fekvő egyenlően-projektiv pontsorait megfelelő elemeivel egymásra helyezzük, a mi szintén kétfélekép lehetséges, t. i. hogy vagy O, O_1, vagy O', O'_1 pontok kerülnek egybe.

«Ha két ugyanazon síkban fekvő kollinear síkrendszer megfelelő egyeneseinek metszőpontjai egy egyenesen ($s \equiv s_1$, vagy s', s'_1-en) fekszenek, mely önmagának megfelelő, tehát egyszersmind a megfelelő pontok összekötő egyenesei, egy önmagának megfelő ponton ($O \equiv O_1$, vagy $O' \equiv O'_1$-en) mennek át, akkor a két síkrendszert *perspektiv helyzetűnek* nevezzük. Azon egyenes, melyben a megfelelő egyenespárak egymást metszik; *kollineáczió-tengely,* azon pont, melyen a megfelelő pontpárak összekötő egyenesei átmennek: *kollineáczióközéppont*».

E szerint két kollinear vonatkozású síkrendszer *négyfélekép* hozható egy síkban perspektiv helyzetbe, t. i. úgy, hogy az s, s', s_1, s_1' vonalak és O, O', O_1, O_1' pontok közül:

	s összeesik	s_1-gyel	és	O összeesik	O_1-gyel,
vagy	s «	s_1 «	«	O' «	O_1' «
vagy	s' «	s_1' «	«	O «	O_1 «
végre	s' «	s_1' «	«	O' «	O_1' «

Ebből látható, tekintettel arra, hogy a kollinear vonatkozás két négyszög megfelelő szögpontjai vagy oldalai által meg van határozva, hogy «két tetszőleges négyszög $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$ négyféleкép hozható perspektiv helyzetbe, vagyis oly helyzetbe, hogy $|AA_1|$, $|BB_1|$, $|CC_1|$, $|DD_1|$ sugarak egymást egy pontban messék és $|AB|$, $|A_1B_1|$; $|BC|$, $|B_1C_1|$ stb. négyszögoldalak és átlók metszőpontjai egyenesben feküdjenek». A szerkesztés következőkép történik:

Ha $|AB|$, $|CD|$ és $|A_1B_1|$, $|C_1D_1|$ oldalak metszőpontja E, illetve E_1, úgy ezen egyeneseken R, R', Q_1, Q_1' pontokat szerkesztünk következő relacziók alapján:

$$\begin{aligned}
(ABER) &= (A_1B_1E_1R_{1\infty}) = A_1E_1 : B_1E_1, \\
(CDER') &= (C_1D_1E_1R_{1\infty}) = C_1E_1 : D_1E_1, \\
(A_1B_1E_1Q_1) &= (ABEQ_\infty) = AE : BE, \\
(C_1D_1E_1Q_1') &= (CDEQ'_\infty) = CE : DE;
\end{aligned}$$

$|RR'| = r$, és $|Q_1Q_1'| = q_1$ képezik a kollinear síkrendszerek ellentengelyeit.

Q_1Q_1', illetve RR' oldal fölé két-két $RR'E$, illetve $Q_1Q_1'E_1$ háromszöggel hasonló háromszöget: $Q_1Q_1'O_1 \sim Q_1Q_1'O_1'$, illetve $RR'O \sim RR'O'$, szerkesztünk, és a két így előkészített idomot oly módon egyesítjük, hogy O, O_1; O, O_1'; O', O_1; O' O_1' pontpárak közül egyik összeessék, és a mellett r párhuzamos legyen q_1-gyel. $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$ négyszögek akkor már perspektiv helyzetben lesznek. Az egyesített pontpár, pl. O, O_1, képezi a kollineáczió-középpontot, és két megfelelő oldal $|AB|$, $|A_1B_1|$ metszőpontján át húzott s egyenes, a kollineáczió-tengelyt.

178. Ha két síkrendszert kollinear akarunk egymásra vonatkoztatni úgy, hogy azok mindjárt perspektiv helyzetben legyenek, akkor s kollineáczió-tengelyt és O kollineáczió-középpontot tetszőlegesen választhatjuk, és azonkívül az O-n átmenő egyenesen két egymásnak megfelelő pontot A, A_1-et, melyek közül egyik sincs O-ban vagy s-ben. s-nek két pontját E, F-nek nevezvén, látható, hogy e felvétellel az egyik síkrendszer négy pontja O, A, E, F, és a másik síkrendszerben ezeknek megfelelő négy pont $O_1 \equiv O$, A_1, $E_1 \equiv E$, $F_1 \equiv F$ szintén meg van adva, és két síkrendszerben négy egymásnak megfelelő pontpár, melyek közül kettőnél több nem fekszik egyenesben, meghatározza a kollinear vonatkozást (105. ábra.).

Ha B, B_1 más két megfelelő pontja a kollinear síkrendszereknek, akkor $|BB_1|$ átmegy O-n és $|AB|$, $|A_1B_1|$ megfelelő egyenesek egymást s-en metszik; tehát B pontból, B_1 szerkeszthető. O-n át $|AB|$-vel, és $|A_1B_1|$-gyel párhuzamosan menő $|OQ_1|$, illetve $|OR|$ egyenes $|A_1B_1|$ és $|AB|$-t: Q_1 és R-ben metszi, mely pontok q_1, r ellentengelyeknek pontjai. A kollineáczió középponton át húzott tetszőleges $g \equiv g_1$ egyenesen fekvő megfelelő projektív pontsorok ellenpontjai: az ellentengelyeknek (g, r), (g, q_1) metszőpontjai q-vel, és a mindenkor valós két kettőspont: O és $(g, s) \equiv S$.

Ha B, B_1; C, C_1, két ugyanazon g egyenesen fekvő, A, A_1 azon kívül levő megfelelő pontpár, és $|AA_1|$, s-et S'-ben metszi, akkor nemcsak (26.)

$$(OSBB_1) \barwedge (OSCC_1),$$

hanem a perspektiv helyzet következtében

$$(OSBB_1) \barwedge (OS'AA_1), \text{ tehát}$$

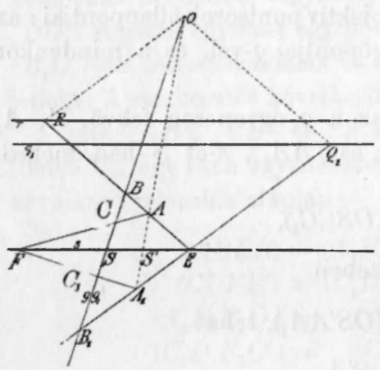
$$\frac{OA}{OA_1} : \frac{S'A}{S'A_1} \text{ viszony értéke állandó.}$$

E szerint: *két perspektiv helyzetű kollinear síkrendszer két tetszőleges megfelelő pontjának távolsági viszonya a kollineáczió-középponttól és kollineáczió-tengelytől, egymással osztva, állandó hányadost ad.* Ezen hányados, mely adott kollineáczió középpont és tengely mellett a kollinear vonatkozást meghatározza, ép úgy, mint egy adott megfelelő pontpár A, A_1, vagy egyenespár $|AB|$, $|A_1B_1|$: a perspektiv helyzetű kollinear-rendszer *charakteristikájának* neveztetik. A szerint, a mint ezen Δ charakteristika negativ vagy positiv előjelű, a megfelelő pont- és egyenespárak el vannak választva vagy nincsenek elválasztva a kollineáczió-középpont és tengely által.

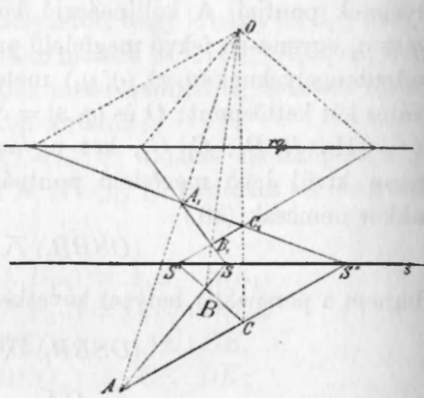
179. Ha a charakteristika értéke: $\Delta = -1$, akkor egy különös perspektiv helyzetű kollinear síkrendszert nyerünk, mely involucziós helyzetű vagy röviden *involucziós* síkrendszernek neveztetik: a kollineáczió-tengely és középpont neve ekkor: involuczió-tengely és középpont. Az involucziós síkrendszer r, q_1 ellentengelyei egy egyenesbe esnek, mely az involuczió-tengely és középponttól egyenlő távolságra van; a megfelelő pontok, valamint egyenesek: az involuczió-tengely és középponttól harmonikusan vannak elválasztva (106. ábra).

Involucziós síkrendszernél az involuczió középponton átmenő egyenesen fekvő projektiv pontsorok, azon tulajdonságnál fogva, hogy megfelelő pontpárok az involuczió-tengely és középponttól harmonikusan vannak elválasztva: hyperbolikus természetű involucziós pontsort képeznek, melynek középpontja az egyesült két ellenpont.

Két tetszőleges kollinear vonatkozású síkrendszer $\mathbf{S}$, $\mathbf{S}_1$ általában nem hozható involucziós helyzetbe, mert az involucziós helyzet



105. ábra.



106. ábra.

egyszersmind perspektiv. De $\mathbf{S}$, $\mathbf{S}_1$ négyfélekép hozható mindig perspektiv helyzetbe, és ha ezen műveletnél az ellentengelyek nem esnek egybe, a mi csak $\mathbf{S}$, $\mathbf{S}_1$ kölcsönös vonatkozásától függ, úgy $\mathbf{S}$, $\mathbf{S}_1$-et nem lehet involucziós helyzetbe hozni. —

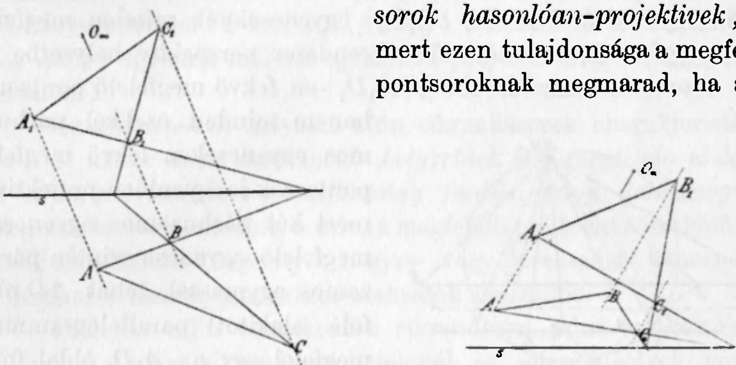
Ha $\Delta = +1$, akkor O, s-ben van, és s felezi az ellentengelyek távolságát.

180. Perspektiv helyzetű kollinear síkrendszernél, mint említettük, a kollineáczió-középpont és tengely O és s, valamint egy pár megfelelő pont az O-n átmenő egyenesen, O és s-en kívül, tetszőlegesen választható. A szerint a mint O-t, vagy s-et, vagy O és s-et végtelen távol veszszük fel a síkban, specialis természetű kollinear síkrendszert kapunk, melyeket: *affin,* illetve *hasonló,* végre *összeillő* síkrendszernek nevezünk.*

* Az *affinitást* már Euler (1707—1783) ismerte. L. Möbius: Der barycentrische Calcul, 147. §.

Ha a kollineáczió középpont a sík egyik végtelen távol fekvő O_∞ pontja, mely nem fekszik a kollineáczió tengelyen, akkor s és egy megfelelő pontpár A, A_1 meghatározza az *affin* vonatkozást; O_∞ az $|AA_1|$ sugárnak végtelen távol fekvő pontja; a charakteristika: $\Delta = AS : A_1S$; hol S az $|AA_1|$ sugár metszőpontja *s affinitási tengelylyel* (107. ábra).

Minthogy két tetszőleges megfelelő egyenesen a megfelelő pontsorok párhuzamos sugársorokat metszetnek ki: *affin vonatkozású síkrendszereknél a megfelelő pontsorok hasonlóan-projektivek*, és mert ezen tulajdonsága a megfelelő pontsoroknak megmarad, ha azok



107. ábra.

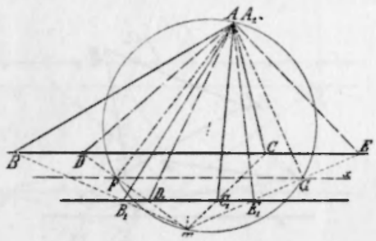
a perspektiv helyzetből kimozdíttatnak, és hasonlóan-projektiv pontsorok ellenpontjai végtelen távol vannak, azért: *affin síkrendszert oly különös kollinear síkrendszernek értelmezzük, melynél az ellentengelyek végtelen távol fekszenek.*

Ha két síkrendszer **S**, $\mathbf{S}_1$ között affin vonatkozást akarunk létesíteni, akkor az egyik síkrendszer három pontjának A, B, C-nek megfelelő A_1, B_1, C_1 pontját tetszőlegesen választhatjuk, de úgy, hogy sem A, B, C, sem pedig A_1, B_1, C_1 pontok ne feküdjenek egy egyenesen. Minthogy az affin síkrendszerek két egymásnak megfelelő egyenese **S** és $\mathbf{S}_1$ sík végtelen távol fekvő egyenese g_∞, $g_{1\infty}$, tehát az ABC, $A_1B_1C_1$ háromszögek megfelelő oldalai szükségesek és elégségesek ezen kollineak vonatkozás megállapítására.

181. Ha két affin síkrendszert **S**, $\mathbf{S}_1$-et, mely ABC, $A_1B_1C_1$ megfelelő háromszög által van adva, perspektiv helyzetbe akarunk hozni, e háromszögeknek két megfelelő pontját A, A_1-et egyesítjük akkép, hogy az átellenes oldalak $|BC|$, $|B_1C_1|$, párhuzamosak legyenek (108. ábra) $|BC|$, $|B_1C_1|$-en fekvő hasonlóan-projektiv pontsorok perspektiv helyzetűek, mert tartójuk metszőpontja megfelelő pont, tehát megfelelő pontjainak összekötő egyenesei $|BB_1|$, $|CC_1|$ metszőpontján T-n mennek át.

Ha AT köz felezőpontjából A, T-n át leirt kör, $|BC|$, $|B_1C_1|$ között levő szalag felezővonalát x-et F, G pontokban metszi, akkor $|FT|$-nek D, D_1 metszőpontjai $|BC|$, $|B_1C_1|$-gyel $A \equiv A_1$-től egyenlő távolságra fekvő megfelelő pontok. E szerint $|AD|$, $|A_1D_1|$ egyeneseken a megfelelő hasonlóan-projektiv pontsorok, egy megfelelőleg egyenlő közzel bírnak: tehát] *egyenlően-projektivek.* AD, A_1D_1 közök egyesítésével $|AD|$, $|A_1D_1|$ egyeneseknek minden megfelelő pontja egybeesik, és a két affin síkrendszer perspektiv helyzetbe jut.

Azonban nemcsak $|AD|$, $|A_1D_1|$-en fekvő megfelelő pontsorok, hanem minden ezekkel párhuzamos egyeneseken fekvő megfelelő pontsorok is egyenlően-projektivek, mert két párhuzamos egyenesnek megfelelő egyenese szintén párhuzamos egymással, tehát AD oldal fölé alakitott parallelogrammnak megfelel egy az A_1D_1 oldal fölött fekvő parallelogramm, és így az AD, A_1D_1 oldalakkal szemben fekvő oldalak, melyek egymásnak megfelelő közök, szintén egyenlők.



108. ábra.

Ugyanígy mondhatjuk: ha $|GT|$ metszőpontjai $|BC|$, $|B_1C_1|$-gyel: E, E_1, akkor $\overline{AE} = \overline{A_1E_1}$; tehát $|AE|$, $|A_1E_1|$-en és a véle párhuzamos egyeneseken levő projektiv pontsorok, szintén egyenlően-projektivek.

Ha A, T-n át leirt kör nem metszi x-et valós pontokban, úgy a két affin-rendszer nem hozható perspektiv helyzetbe. E szerint: *két affin síkrendszer síkjaiban általában 0, 1, vagy 2 különböző párhuzamos sugársor található, melynek sugarai egyenlően-projektiv megfelelő pontsoroknak tartói; az első esetben az affin-rendszerek nem hozhatók perspektiv helyzetbe; a második és harmadik esetben az affin-rendszerek két megfelelő egyenlően-projektiv pontsor egyesítése által perspektiv helyzetbe jutnak.*

Hogy a második eset lételéről meggyőződjünk, tételezzük fel, hogy azon tetszőlegesen választott ABC, $A_1B_1C_1$ megfelelő háromszögek $\overline{BC}$, $\overline{B_1C_1}$ oldalai egyenlők, tehát már a $|BC|$, $|B_1C_1|$-en fekvő megfelelő pontsorok egyenlően-projektivek. Ekkor a másik irányú egyenlően-projektiv pontsor tartóit megkapjuk, ha ABC, $A_1B_1C_1$ háromszögeket, úgy mint előbb, egy síkba helyezzük, t. i. hogy A összeessék A_1-gyel és $|BC|$ párhuzamos legyen $|B_1C_1|$-gyel. $A \equiv A_1$ pontból $|BB_1| \parallel |CC_1|$-re bocsátott merőleges $|BC|$, $|B_1C_1|$ határvonallal bíró szalag x felezőjét H-ban metszi; H-n át $|BB_1|$-gyel párhuzamosan menő egyenes $|BC|$, $|B_1C_1|$-nek D, illetve D_1 pontján megy át, és $|AD|$, $|A_1D_1|$ az egyes síkrendszereknek azon új irányú tartója, melyen egyenlően-projektiv pontsorok vannak. Ha ezen szerkesztésnél $|BB_1|$ és hasonlókép $|CC_1|$, merőleges $|BC|$-re, akkor a két síkrendszerben $|BC|$, $|B_1C_1|$ irányú tartókon kívül nem található más irányú egyenes, melyen egyenlően-projektiv megfelelő pontsorok léteznének.

Ha a perspektiv helyzetű affin síkrendszerek charakteristikája: $\Delta = -1$, akkor azok *involucziós helyzetüek* és a megfelelő alakzatok *az affinitási tengelyre vonatkozólag ferdén, vagy derékszög alatt symmetrikusak*, a szerint, a mint a megfelelő pontokat összekötő egyenesek az affinitási tengelylyel hegyes- vagy derékszöget képeznek. — A derékszög alatt symmetrikus alakzatok összeillők.

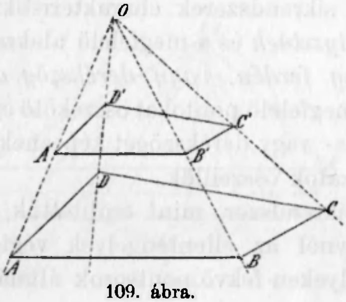
182. Az affin vonatkozású síkrendszer, mint említettük, oly különös kollinear síkrendszer, melynél az ellentengelyek végtelen távolba kerülnek. De az ellentengelyeken fekvő pontsorok általában nem lesznek egyenlően-projektivek.

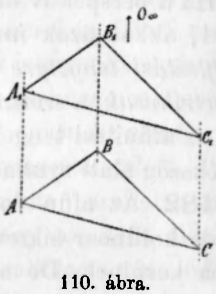
Képzeljünk most két oly kollinear síkrendszert, melynél a végtelen távol fekvő egyeneseken a megfelelő pontsorok egyenlően-projektivek, vagy a mi ugyanaz: a megfelelő sugársorok mind egyenlően-projektivek, tehát két-két megfelelő egyenes hajlásszöge egyenlő. Ily kollinear síkrendszerek *hasonló-*, vagy *összeillőeknek* neveztetnek, a szerint, a mint bármely két megfelelő végesben fekvő pontsor: hasonlóan-, vagy egyenlően-projektiv.

E rendszerek meghatározásához csupán két megfelelő pontpár A, A_1; B, B_1 szükséges; $\overline{AB}$, $\overline{A_1B_1}$ közöknek a hasonló vonatkozásnál különbözőknek, az összeillőségnél pedig egyenlőknek kell lenni. Az egyik síkrendszer $C, D, E, \ldots$ pontjához a megfelelő pontokat $C_1, D_1, E_1, \ldots$ megkapjuk, ha A_1B_1 fölé ABC, ABD, $ABE, \ldots$-vel hasonló vagy összeillő $A_1B_1C_1$, $A_1B_1D_1$, $A_1B_1E_1$ háromszögeket szerkesztünk, mert A, A_1 középponttal bíró megfelelő sugársorok sugarai: $|AB|$, $|AC|$, illetve $|A_1B_1|$, $|A_1C_1|$ egyenlő szöget képeznek.

Ha két hasonló- vagy összeillő síkrendszer két megfelelő egyenespárját párhuzamos helyzetbe hozzuk, akkor a két síkrendszer perspektiv helyzetü lesz. Ekkor minden megfelelő egyenespár párhuzamos, és a megfelelő pontpárak összekötő egyenesei egy véges illetve végtelen távol fekvő O ponton mennek át a szerint, a mint a síkrendszerek hasonlók vagy összeillők. Ezen O pontot a perspektiv helyzetü hasonló síkrendszerek *hasonlósági pontjának* nevezik (109—110. ábra).

Ha hasonló és perspektiv helyzetü síkrendszerek charakteristikája Δ positiv, akkor a hasonlósági pont nem választja el a megfelelő pontokat; ha $\Delta = -1$, akkor a hasonlósági pont két-két megfelelő pont távolságát felezi, tehát $\Delta = -1$ mellett a hasonló alakzatok a hasonlósági pontra nézve *középpontilag symmetrikus* fekvésüek, és ily alakzatok egyszersmind összeillők.


109. ábra.


110. ábra.

183. A kollinear síkrendszerek ezen különös eseteinek tárgyalása után vizsgáljuk meg, hogy *két ugyanazon síkban tetszőlegesen elhelyezett kollinear síkrendszernek* **S**, **S**$_1$*-nek hány megfelelő összeeső pontja és egyenese lehet?*

Legyen A, A_1; B, B_1, két tetszőleges megfelelő pontpár a közös síkban. A és A_1 ponton átmenő megfelelő sugarak két projektiv sugársort képeznek, melynek képződménye egy k kúpszelet; ugyanígy B és B_1 ponton átmenő megfelelő sugarak metszőpontjainak geometriai helye egy új kúpszelet k', mely B, B_1 pontokon átmegy. k, k' kúpszeletek egymást általában négy pontban metszik; ezek közül egyik: $|AB|$, $|A_1B_1|$ megfelelő sugarak metszőpontja C, mely azonban nem esik össze megfelelő pontjával, minthogy $|AB|$, $|A_1B_1|$ két tetszőleges megfelelő egyenespárnak tekinthető. k, k'-nek többi három metszőpontja: P, Q, R, megfelelő pontjával egybeesik, mert ezen pontok mindegyikében az A és B sugársor két sugara és az ezeknek megfelelő sugarak A_1, B_1 sugársorból, egymást metszik. Háromnál több ily egymásnak megfelelő összeeső pont nem létezhetik a kollinear síkrendszerek közös síkjában, hacsak a síkrendszerek nem perspektiv helyzetüek, mert ha két collinear síkrendszer négy megfelelő közös ponttal bír, melyek egy négyszögnek szögpontjai, akkor minden megfelelő pontpár egybeesnék.

A talált PQR háromszögnek minden oldala, szintén megfelelőleg összeeső egyenes, mert minden oldalon két egymásnak megfelelő összeeső pontpár fekszik. Ha k, k' kúpszelet csak két valós közös ponttal C, P-vel bír, hogy PQR háromszögnek egy szögpontja P és átellenes oldala $|QR|$ valós, a többi két oldal $|PQ|$, $|PR|$ és két szögpont Q, R képzetes.

Ezen PQR háromszöget meghatározhatjuk a dualis eljárás szerint is. Ha a, a_1; b, b_1 két egymásnak megfelelő egyenespár, akkor a, a_1-en, valamint b, b_1-en fekvő megfelelő pontpárak összekötő egyenesei egy $\varkappa$, ill. $\varkappa'$ kúpszeletet burkolnak, melynek egyik közös érintője (a, b), (a_1, b_1) pontok összekötő egyenese; a másik három vagy egy valós közös érintő: a kollinear síkrendszerek megfelelő összeeső egyenese.

A midőn a két collinear síkrendszer perspektiv helyzetü: k, és hasonlókép k' egyenes párrá fajul, melyeknek egyik közös egyenese a kollineáczió-tengely, a másik két egyenes metszőpontja a kollineáczió-középpont. Ezen esetben tehát a kollineáczió-tengelynek minden pontja egymásnak megfelelő, úgy szintén a kollineáczió-középpont is. Ezek után e vizsgálat eredményét így fejezhetjük ki:

Két ugyanazon síkban fekvő kollinear síkrendszer, mely nem perspektiv helyzetü, három megfelelőleg közös ponttal és ugyanannyi megfelelőleg közös egyenessel bír, mely utóbbiak ama pontok összekötő egyenesei. Azon három pont és egyenes közül kettő egy ponttá, illetve egy egyenessé egyesülhet, úgy szintén két pont és két egyenes képzetes is lehet; egy megfelelőleg közös pont és egyenes azonban mindig valós.

23. §. Kúpszeletek kollineacziója.

184. Ha két síkrendszer **S**, $\mathbf{S}_1$ kollinear van egymásra vonatkoztatva, akkor az egyik síkrendszer minden pontjának és egyenesének az előbbi §-ban adott értelmezések folytán egy pont és egyenes felel meg. **S** síkjában fekvő k kúpszelet pontjai és érintőinek $\mathbf{S}_1$-ben egy k_1 kúpszelet pontjai és érintői felelnek meg; mert ha k-t két projektiv sugársor képződményének tekintjük, melyeknek középpontja

k-nak A, B pontja, úgy ezen projektiv sugársoroknak megfelelő sugársorok szintén projektivek és így ez utóbbiaknak képződménye: k-nak megfelelő k_1 kúpszelet.

«Ha két síkrendszert **S**, $\mathbf{S}_1$-et úgy akarunk egymásra kollinear vonatkoztatni, hogy az **S** síkjában fekvő k kúpszelet pontjai- és érintőinek, egy az $\mathbf{S}_1$ síkjában fekvő tetszőleges k_1 kúpszelet pontjai és érintői feleljenek meg, akkor k kúpszelet *három* pontjának A, B, C-nek megfelelő A_1, B_1, C_1 pontját k_1-en tetszőlegesen választhatjuk, mi által a collinear vonatkozás teljesen meg van határozva».

Nevezzük A, A_1, B, B_1 pontok érintőit a, a_1, b, b_1-nek; (a, b), (a_1, b_1) pontokat D, D_1-nek és vonatkoztassuk a két síkrendszert úgy kollinear egymásra, hogy A, B, C, D pontoknak A_1, B_1, C_1, D_1 pontok feleljenek meg. Ekkor az $a = |AD|$, $b = |BD|$ érintőknek megfelelnek $a_1 = |A_1D_1|$, $b_1 = |B_1D_1|$ érintők; C pont c érintőjének, mely $(|BC|, |AD|)$, $(|AC|, |BD|)$ pontok összekötő egyenesének és $|AB|$-nek metszőpontján megy át (58. végén), oly c_1 egyenes felel meg, mely $(|B_1C_1|, |A_1D_1|)$, $(|A_1C_1|, |B_1D_1|)$ pontok összekötő egyenesének és $|A_1B_1|$-nek metszőpontján átmegy, — mely tehát k_1-et C_1-ben érinti.

k minden X pontjának megfelel egy X_1 pont, melyre nézve:

$$(a, |AB|, |AC|, |AX|) = (a_1, |A_1B_1|, |A_1C_1|, |A_1X_1|)$$
$$(|BA|, b, |BC|. |BX|) = (|B_1A_1|, b_1, |B_1C_1|, |B_1X_1|);$$

de minthogy e két egyenlet baloldala egyenlő, mert X, k-n, azért a jobb oldalak is egyenlők, és így X_1, k_1-en lesz.

k és k_1 pontjai és érintői ezen vonatkozás következtében projektivek egymáshoz és mert egy sugársor, mely k-nak pontjait annak tetszőleges pontjából projicziálja: projektiv oly sugársorral, mely a megfelelő pontokat k_1-nek *tetszőleges* pontjából projicziálja: *k, k_1 kúpszeleten fekvő projektiv pontsorok megfelelő elemei által a két görbe síkjában fekvő összes pontok és egyenesek kollinear vannak egymásra vonatkoztatva.*

Ha **S**, $\mathbf{S}_1$ *kollinear vonatkozású síkrendszerben k, k_1 kúpszeletek egymásnak megfelelők és p egyenesnek pólusa k-t illetőleg P pont, akkor p és P-nek megfelelő p_1 egyenes és P_1 pont: poláris és pólus k_1-re nézve.*

P-n át két egyenest huzunk, mely k-t A, C; B, D-ben metszi; e pontoknak megfelelnek k_1 kúpszeleten A_1, C_1; B_1, D_1. Minthogy $ABCD$-négyszögnek egyik átlója és átlóspontja: p, P, azért p_1, P_1 is átló és átlóspontja lesz a k_1-be írt $A_1B_1C_1D_1$ kúpszeletnek, miből következik: hogy p_1, P_1 poláris pólus k_1-re nézve.

E tételből következik, hogy: «k kúpszelet minden kapcsolt pólus- és poláris-párjának, k_1 kúpszeletnek egy kapcsolt pólus- és polárispárja felel meg a kollinear rendszerekben».

185. *Két ugyanazon síkban fekvő tetszőleges k, k_1 kúpszelet, perspektiv helyzetű kollinear vonatkozású görbének tekinthető; a kollineaczió-középpont azon O, O' pontok bármelyike, melyen átmenő összes kapcsolt polárispárak mindkét kúpszeletre nézve ugyanazon involucziós sugársort képezik és mely involucziós sugársornak, ha valós kettőssugarai vannak, vagy mindkét vagy egyik kettőssugár sem választja el a kúpszeleteket egymástól; a kollineaczió-tengely a két kúpszelet azon közös szelőinek s, s'-nek egyike vagy másika, mely $|OO'|$ egyenesnek a kúpszeletekre vonatkozó közös pólusán, P-n megy át. s, s' közös szelők O-nak, valamint O'-nek k, k_1-re vonatkozó polárisaitól o, o_1, illetve o', o'_1-től harmonikusan vannak elválasztva; úgy szintén O, O' pontok s-nek, valamint s'-nek k, k_1-re vonatkozó S, S_1, illetve S', S'_1 pólusait harmonikusan választják el.*

Nevezzük O-nak k, k_1-re vonatkozó polárisait: o, o_1-nek; O-n átmenő tetszőleges egyenesnek metszőpontjait k, k_1-gyel: A, B ill. A_1, B_1-nek; $|AA_1BB_1|$ egyenesnek pólusát k, k_1-re vonatkozólag: C, C_1-nek (111. ábra).

$|OC|$, $|OA|$ és $|OC_1|$, $|OA_1|$ egyenespárak, kapcsolt polárisok k illetve k_1-re nézve, de minthogy O-ból kiinduló kapcsolt egyenespárok mindkét kúpszeletre nézve azonosok és $|OA| \equiv |OA_1|$, azért $|OC| \equiv |OC_1|$, tehát: O, C, C_1 pontok egyenesben fekszenek.

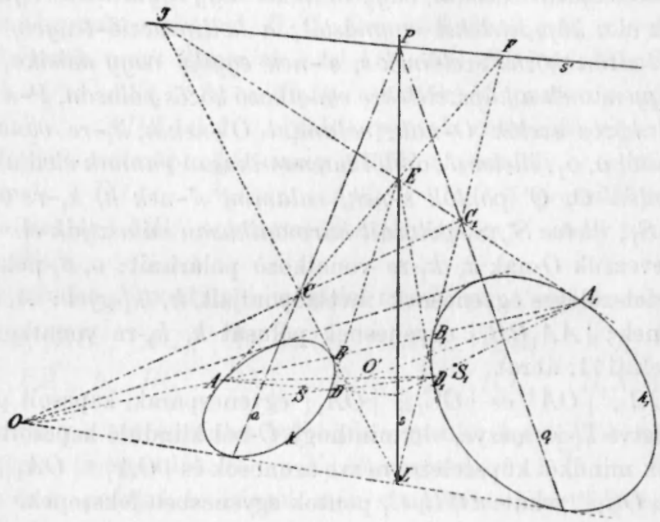
Ha most a két síkrendszert úgy vonatkoztatjuk egymásra kollinear, hogy A, C, O és $(o, o_1) = P$ pontoknak az egyikben, A_1, C_1, O, P pontok feleljenek meg a másikban, tehát $|OA| \equiv |OA_1|$, $|OC| \equiv |OC_1|$, $|OP|$ sugarak egymásnak megfelelők, akkor a két kollinear síkrendszer perspektiv helyzetü: O képezi a kollineaczió-középpontot; $|PE| \equiv s$, a kollineaczió-tengelyt, hol E, metszőpontja $|AC|$, $|A_1C_1|$-nek.

E perspektiv síkrendszerekben $|PC| \equiv o$, $|P_1C_1| \equiv o_1$ egyenesek; és o, o_1 egyeneseknek metszőpontjai $|OAA_1|$-gyel egymásnak megfelelők, tehát azon B, B_1 pontok is, melyek O és o-t, A-tól; illetve O és o_1-et, A_1-től harmonikusan elválasztják.

Ha X, k kúpszeletnek tetszőleges pontja, akkor $|AX|$, $|BX|$ egyenesnek o-t kapcsolt pólusokban G, H-ban metszik, melyeknek

G_1, H_1 projekcziója O-ból o_1-re (miután a projicziálás mindkét kúpszeletre vonatkozólag kapcsolt sugárpárral eszközöltetik), szintén kapcsolt póluspár k_1-re, tehát $|G_1A_1|$, $|H_1B_1|$-et, k_1-nek X_1 pontjában metszi, mely X_1, X-nek megfelelő pontja lévén: O, X-szel egyenesben fekszik.

Minthogy s kollineaczió-tengelynek összes pontjai egymásnak megfelelők és egy tetszőleges k-ra vonatkozólag kapcsolt póluspárnak megfelelő pontpár kapcsolt pólus k_1-re nézve: azért s kollineaczió-tengelyen k, k_1 ugyanazon póluspárakat indukálja és így s közös szelője k, k_1-nek.



111. ábra.

Ha a két síkrendszert úgy vonatkoztattuk volna egymásra, hogy A, C, P, O pontoknak B_1, C_1, P, O pontok feleljenek meg, akkor k ismét projektiv helyzetű k_1-gyel: O kollineaczió-középpontra nézve; de a kollineaczió-tengely s: P-n és $|AC|$, $|B_1C_1|$-nek F metszőpontján megy át, és s', P pontból kiinduló második közös szelőjét képezi, k, k_1-nek.

B-nek ekkor megfelel A_1 pont és $|BC|$, $|A_1C_1|$ kúpszelet-érintők egymást s'-nek I pontjában, $|BC|$, $|B_1C_1|$ érintők s-nek L pontjában metszik. $|AC|$, $|BC|$, $|A_1C_1|$, $|B_1C_1|$ négyoldalból látható, hogy s, s' átlók, C, C_1 átellenes szögpontokat, tehát egyszersmind o, o_1 polárisokat harmonikusan választják el.

Ha e vizsgálatnál O helyett O' pontból indulunk ki, ugyanazon s, s' kollineaczió-tengelyeket találjuk, melyekre nézve k, k_1 perspektiv helyzetű kollinear alakzat, mert ezek az egyedüli $|OO'|$-nek P pólusából kiinduló közös szelői k, k_1-nek; tehát s, s' kollineaczió-tengelyek O'-nek o', o'_1 polárisait k, k_1-re nézve harmonikusan választják el.

Hogy a tétel utolsó részét is bebizonyítsuk, nevezzük s-nek pólusait k, k_1-re nézve S, S_1-nek; $|AS|$, $|A_1S_1|$-nek második metszőpontját k, illetve k_1-gyel D, D_1-nek; hol D, D_1 egymásnak megfelelő pont O kollineaczió-középpont és s kollineaczió-tengelyre nézve, tehát $|AD|$, $|A_1D_1|$ egymást s-ben metszi és $|ED|$, $|ED_1|$ sugarak k, k_1-et D, D_1-ben érintik. De O' és s kollineaczió-középpont és tengelyre nézve A_1-nek D; A-nak D_1 felel meg; mert k_1 kúpszelet $|EA_1|$ érintőjének, megfelel E-ből k-hoz huzható érintő, mely csak $|ED|$ lehet. Ebből látható, hogy: ADD_1A_1 négyszögnek O, O' átellenes szögpontja, S, S_1 átlóspontokat harmonikusan választja el. Ugyanígy következik: hogy s'-nek k, k_1-re vonatkozó S', S'_1 pólusai harmonikusak O, O' pontpárral.

186. Tanultuk, hogy egy k kúpszelet végtelen sokféleképp lehet kollinear ábrája egy tetszőleges k_1 kúpszeletnek, és hogy a kollinear vonatkozás, k, k_1-nek három tetszőlegesen választott megfelelő pontpárja által van teljesen meghatározva. De két kollinear sikrendszer mindig perspektiv helyzetbe hozható; ennélfogva: *két kúpszelet mindig perspektiv helyzetbe hozható úgy, hogy az egyiknek három pontja, a másik kúpszelet három tetszőlegesen választott pontjának feleljen meg.*

Két perspektiv helyzetű kollinear síkrendszerben k kúpszelet kollinear k_1 kúpszelete: ellipsis, parabola vagy hyperbola lesz a szerint, a mint r ellentengely k kúpszeletet nem metszi, érinti, vagy valós pontokban metszi. r ellentengely k-ra vonatkozó pólusának M-nek megfelelő M_1 pont: középpontja k_1-nek, és viszont q_1 ellentengely k_1-re vonatkozó pólusának megfelel k-nak középpontja. k kúpszelet M-en átmenő kapcsolt polárisainak: k_1 kúpszelet kapcsolt átmérői felelnek meg. — r pólusán átmenő kapcsolt polárisok között mindig van egy pár, melynek metszőpontjai r-rel O kollineaczió-középpontból derékszög száraival prójicziáltatnak; e különös kapcsolt polárisoknak megfelelő sugarak: k_1-nek tengelyei. Ha O kollineaczió-középpont oly helyzetű, hogy k kúpszeletnek r-en fekvő összes kapcsolt póluspárjai O-ból derékszög alatt prójicziáltatnak, akkor k_1-nek minden kapcsolt átmérőpárja egymásra merőleges, tehát k_1— kör.

E szerint «ha r egyenes k kúpszeletet nem metszi valós pontokban és mi két, az r egyenesen fekvő k-ra vonatkozólag kapcsolt póluspáron át köröket írunk le, melyeknek középpontja r-en fekszik, úgy ezek egymást O, O' pontokban metszik: k-nak perspektiv helyzetű kollinear ábrája O (vagy O') collineaczióközéppontra és az r ellentengelylyel párhuzamos tetszőleges s kollineaczió-tengelyre vonatkozólag: k_1 *kör* lesz».

Viszont, *ha k kúpszelet és O pont adva van, határozzuk meg úgy r ellentengelyt, hogy k-nak O kollineaczió-középpontra vonatkozólag perspektiv helyzetű kollinear ábrája kör legyen.*

Az r ellentengelynek oly egyenesnek kell lenni, mely O középponttal biró czirkuláris sugársor kapcsolt sugarait k-ra vonatkozólag kapcsolt póluspárak szerint metszi. E szerint: r *közös szelőjét képezi k kúpszelet és azon végtelen kis körnek, melynek középpontja O.* O-ból végtelen sok k-ra vonatkozólag kapcsolt polárispár huzható; ezek között általában egy pár van, mely egymásra merőleges. Ha ezen különös kapcsolt polárispár metszését O-nak k-ra vonatkozó o polárisával A, B-nek nevezzük úgy OAB, O-nál derékszögű polárháromszöge k-nak, tehát minden az A (valamint B) ponton átmenő egyenes: $|OA|$, $|OB|$-t oly kapcsolt póluspárban metszi, mely O-ból derékszög alatt projicziáltatik. Ha g, l két tetszőleges O-n átmenő merőleges egyenes, akkor mindazon egyenesek, melyek g, l-et k-ra vonatkozólag kapcsolt poluspárban metszik (79.), $\varkappa$ kúpszeletet burkolnak. A, valamint B pontból $\varkappa$-hez vonható érintők e szerint azon tulajdonsággal bírnak, hogy rajtuk két k-ra vonatkozó kapcsolt póluspár létezik, mely O-ból derékszög alatt lesz projicziálva, tehát minden ily érintő már a kivánt tulajdonsággal bir, mert a rajta fekvő összes kapcsolt póluspárak O-ból derékszögű sugarakkal lesznek projicziálva, és így mindegyike ezen A, valamint B-ből $\varkappa$-hoz vont érintőknek a rendszer ellentengelyének vehető. O-nak $\varkappa$ és k-ra vonatkozó polárisa egy és ugyanazon egyenes (79.), mely g, l-et $\varkappa$-nak érintőpontjaiban metszi. E végből A, B pontok, úgy mint $|OA|$, $|OB|$ sugarak g, l által el vannak választva és ezért A, B pontok közül egyik $\varkappa$-án belül, a másik kívül fekszik; de csak ez utóbbiból lehet $\varkappa$-hoz érintőket huzni. A kitűzött feladatnak e szerint általában *két* megoldása van.

187. A midőn O, k-nak egyik gyujtópontja, e gyujtópont polárisa r az egyedüli egyenes, melyen a kapcsolt pólusok O-ból derékszög alatt projicziáltatnak, és mert ezen r-nek pólusa k-ra nézve O, mely mint kollineaczió-középpont önmagának megfelelő: azért O képezi egyszersmind középpontját mindazon köröknek, melyeknek perspektiv helyzetű kollinear ábrája O kollineaczió-középpontra nézve k kúpszelet. De fordítva is következik, hogy *egy kör projektiv helyzetű kollinear ábrája O középpontjára, mint kollineaczió-középpontra mindig oly k kúpszelet, melynek egyik gyujtópontja a kör középpontja.* O-ból kiinduló kapcsolt polárisok a körre és k-ra nézve ugyanazon involucziós sugársort képezik; de a körre nézve ezen sugársor czirkularis és mert a kúpszeletek csak gyujtópontjukban indukálnak czirkularis involucziós sugársort: azért k-nak gyujtópontja O pont.

188. Ha másodszor, O k-nak egyik pontja, akkor azon OAB, O-nál derékszögű polárháromszög két oldala: O pont érintője, és normalisa és a harmadik oldal is az érintőbe esik; szögpontjai közül kettő O-ban van, a harmadik A, a normálisnak pólusa. $\varkappa$ kúpszeletet burkoló II. o. sugársor, minthogy g, l egymást k kúpszelet O pontjában metszi (79.), I. o. sugársorra bomlik, melynek középpontja g, l derékszög által kimetszet p húr pólusa P. Jelen esetben tehát csak egy ellentengelyt r-et találunk, mely O pont normálisának és p húrnak A, illetve P pólusán átmegy, s mint ilyen azon normális és p húr metszöpontjának, R-nek polárisa (112. ábra).

Azon végtelen sok kör, mely k-nak kollinear ábrája, k-nak O pontjára, mint kollineaczió-középpontra és az imént szerkesztett r ellentengelyre: mind érinti k-t O pontban. Ha e körök közül egyik k-t még O-n kívül két valós pontban metszi, akkor azok összekötő egyenese, mint kollineaczió-tengely r-rel párhuzamos; és viszont, ha r-rel párhuzamos húrt huzunk k kúpszeletben, akkor annak végpontjain és O-n átmenő kör, mint k-nak perspektiv helyzetű kollinear ábrája, k-t érinti O-ban.

A midőn a kollineaczió-tengelyt s-t O-n át helyezzük r-rel párhuzamosan, a kör, mely ezek által meg van határozva, k-val O-ban három pontot bír közösen. Az oly kör, mely egy kúpszeletnek, vagy bármily más görbének, három végtelen közel fekvő pontján átmegy: *a görbe görbületi* vagy *simuló köre* ezen (összeeső három) pontban.

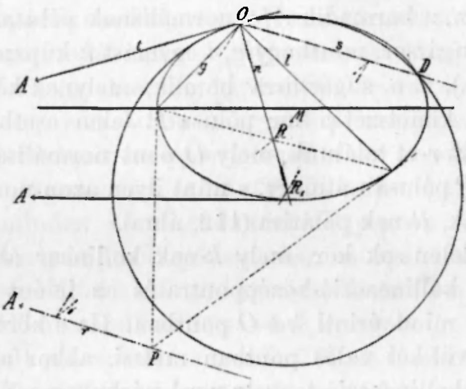
E szerint «egy megrajzolt k kúpszelet görbületi körét O pontban megtaláljuk, ha O-ban t érintő és n normalist huzunk k-hoz, és O-n át t-t érintőleg kört irunk le, mely k-t két pontban metszi; e metszőpontok összekötő egyenesével O-n át párhuzamost huzunk, mely k-t már a görbületi kör negyedik metszőpontjában, D-ben metszi».

Ha azonban k, — pontok vagy érintőkkel van megadva, úgy O

pont érintőjének és normalisának szerkesztése után, k-t metszéshez hozzuk egy derékszög száraival, melynek csúcsa O. A metszési húr a normálist R pontban metszi; ennek r polárisához O-n át párhuzamost huzunk, mely k-t a kivánt görbületi kör negyedik pontjában metszi.

A kúpszeletek görbületi körének számos szerkesztései közül megemlítünk még egyet, mely ha a kúpszeletnek egyik tengelye ismeretes, egyszerűen eszközölhető. Tanultuk, hogy: «egy kör és kúpszelet metszőpontjai oly négyszögnek szögpontjai, melynek átellenes oldalai a kúpszelet tengelyeihez egyenlő szögek alatt hajlanak».

k kúpszelet O pontjában szerkesztendő görbületi kör k-val O-ban három pontot bír közösen és k-t még egy negyedik pontban,



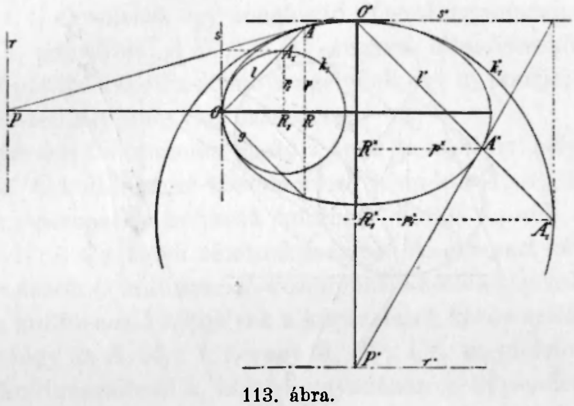
112. ábra.

D-ben metszi. Minthogy azon elfajult négyszögnek egyik pár átellenes oldala $|OD|$ egyenes és k-nak érintője O pontban, azért $|OD|$, k-nak ismert tengelyéhez ép oly szög alatt hajlik, mint O-nak érintője; miből már $|OD|$ egyenes, D pont, és k-nak görbületi köre D pontban szerkeszthető.

Ha O, k kúpszeletnek egyik csúcsa, úgy ez utóbbi szerkesztés nem alkalmazható, míg az előbbi, mely megkivánja, hogy k-val perspektiv helyzetű kollinear kört szerkesszünk, O kollineaczió-középpontra és az O-n átmenő kollineaczió-tengelyre s-re nézve, mindig czélhoz vezet. r ellentengely ekkor merőleges az O-n átmenő kúpszelettengelyre, tehát s kollineaczió-tengely k-nak érintője O pontban, miért is *k kúpszeletnek görbületi köre mindegyik csúcsban, k-val négy egybeeső pontot bír közösen* (113. ábra).

189. Azon körülmény, hogy k kúpszelet perspektiv helyzetű kollinear ábrája kör lehet, arra képesít, hogy «ha k kúpszeletnek négy pontja A, B, C, O és azok egyikében, pl. O-ban, az érintő t adva van, k-nak új pontjait, érintőit, tengelyeit a kollinear vonatkozás alapján szerkeszthessük» (114. ábra).

Fektessünk e végből A, O pontokon át k_1 kört, mely t-t érinti. Ezen kör k-val perspektiv helyzetű kollinear alakzat, mely kollineaczióban A, O, és O-nak szomszédpontja t-n, önmagának megfelelő. Minthogy O pont és azon átmenő t egyenes valamint $|OA|$ szintén önmagának megfelel: O képezi a kollineaczió-középpontot. B, C pontoknak megfelelő B_1, C_1 pontok k_1 körön, B, C-nek projekcziói O-ból k_1-re, miért is s kollineaczió-tengely: $|BC|$, $|B_1C_1|$ megfelelő egyeneseknek metszőpontján és A-n megy át.



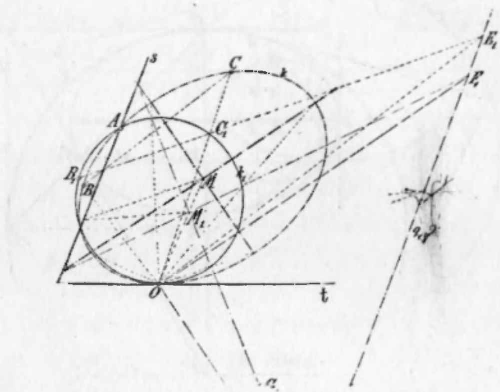
113. ábra.

O-n át $|BC|$-vel párhuzamosan menő egyenes $|B_1C_1|$-et E_1-ben metszi, melyen át q_1 ellentengely s-sel párhuzamosan huzatik. q_1-nek k_1-re vonatkozó M_1 pólusa, k középpontjának M-nek felel meg; miből már M szerkeszthető. Ha F_1, G_1 pontok, q_1-nek azon k_1-re vonatkozó kapcsolt póluspárjai, melyek O-ból derékszög száraival lesznek projicziálva, akkor $|M_1F_1|$, $|M_1G_1|$ kapcsolt egyenespárak, k kúpszelet tengelyeinek felelnek meg.

190. *Egy ponton A-n átmenő k kúpszelet, melyre vonatkozólag O-ból kiinduló $\{O\}$ involucziós sugársornak kapcsolt sugarai kapcsolt polárisok, és t-n fekvő $\{t\}$ involucziós pontsornak kapcsolt pontpárjai kapcsolt pólusok,* ezen föltételekből akkép szerkeszthető, hogy perspektiv helyzetű kollinear vonatkozást létesítünk k kúpszelet és egy még ismeretlen k_1 kör között.

1. Először azon esetet fogjuk tárgyalni, melynél a két involucziós sor $\{O\}$, $\{t\}$ elliptikus természetű.

Ha O-t kollineáczió-középpontnak vesszük, akkor k_1 kört kell szerkesztenünk, melyre vonatkozólag $\{O\}$ involucziós sugársor kapcsolt sugarai kapcsolt polárisok. $\{O\}$ minden kapcsolt sugárpárja l, p azon sugársor x, y tengelyeitől el van választva, úgy hogy x, az (l, p) tompaszög, y pedig (l, p) hegyesszög szárai között fekszik. x tetszőleges H pontjából merőlegest bocsátunk l-re és p-re, melyek p, *illetve* l-t egy-egy pontban metszik; e metszőpontokat összekötő o_1 egyenes merőleges $|HO|$-re és (HO)-val G-ben találkozik, és H pontból $(GH . GO)^{\frac{1}{2}}$ küllővel leírt k_1 körre vonatkozólag már $\{O\}$ involucziós sugársor kapcsolt sugarai, kapcsolt polárisok.



114. ábra.

Hogy a kollineáczió-tengelyt megtaláljuk $\{t\}$ involucziós pontsor t tartójának megfelelő t_1 egyenesét kell szerkesztenünk. Minthogy $\{t\}$ kapcsolt pontpárjai k nézve kapcsolt pólusok: t_1-en ezeknek megfelelő pontpárak kapcsolt póluspárak lesznek k_1 körre nézve. Nekünk tehát azon $[o]$ involucziós sugársort, mely $\{t\}$ involucziós pontsort O-ból projicziálja, oly t_1 egyenessel kell metszenünk, hogy a kimetszett kapcsolt pontpárak kapcsolt pólusok legyenek k_1 körre nézve.

$\{O\}$ és $[O]$ elliptikus természetű involucziós sugársoroknak két közös kapcsolt sugárpárja: m, n van; ezeknek közös pontja O-nak k_1-re vonatkozó o_1 polárisával: M_1, N_1. E pontok bármelyikén átmenő egyenesnek metszőpontjai $|OM_1|$, $|ON_1|$ sugarakkal, k_1 körre vonatkozólag kapcsolt pólusok, mert OM_1N_1 polárháromszöge k_1-nek. Ha most oly $\varkappa$ kúpszeletet határozunk meg (79.), melynek érintői $[O]$

sugársor két tetszőleges g, g' kapcsolt sugarát k_1 körre vonatkozólag kapcsolt póluspárakban metszik, úgy M_1, N_1-ből $\varkappa$-hoz vonható érintők már azon tulajdonsággal bírnak, hogy $[O]$-t, k_1-re vonatkozólag kapcsolt póluspárakban metszik.

Minthogy $[O]$ sugársor elliptikus, azért $|OM_1|$, $|ON_1|$ el van választva g, g'-től, tehát M_1, N_1 pontok közül egyik $\varkappa$-n belül, a másik $\varkappa$-n kívül van, és csak ez utóbbi pontokból lehet $\varkappa$-hoz valós érintőket, t_1, t_1'-et húzni.

Ha t_1, t egyeneseket tekintjük a kollinear rendszerekben megfelelőknek: t_1, t egyenesek S metszőpontja, már egy pontja a kollineaczió-tengelynek, míg k kúpszelet A pontjának azon A_1, A_1' pontok bármelyike felel meg, melyben $|OA|$ sugár k_1-et metszi.

A kollineaczió-tengelynek egy másik pontját megkapjuk, ha A, A_1-et, t, t_1 egyenesek egy megfelelő (O-val ugyanazon egyenesen fekvő) X, X_1 pontjával $|AX|$, $|A_1X_1|$ sugarak által összekötjük; ezeknek metszőpontja a kollineaczió-tengelynek egy új pontja, melylyel a kollineaczió-tengely meg van határozva.

Ugyanezen k kúpszelet, mely k_1-nek perspektiv helyzetű kollinear ábrája O kollineaczió-középpontra, a midőn A, A_1; t, t_1 elemek megfelelők: perspektiv helyzetű kollinear ábrája k_1-nek akkor is, a midőn A, A_1'; t, t_1' elemek vétetnek megfelelőknek, mert két kúpszelet (k, k_1) ugyanazon O kollineaczió-középpontra kétfélekép kollinear egymáshoz; a kollineaczió tengelyek a kúpszeletek közös szelői.

Ugyanígy az A, A_1; t, t_1' vagy A, A_1'; t, t_1 megfelelő elemekből származó kollineacziónál k_1 körnek ugyanazon k' kúpszelet felel meg, mely szintén eleget tesz a feladat követelményeinek. *A feladatnak e szerint két megoldása van.* (Chasles a «Traité des sections coniques» czimű mű 344. pontjában 4 megoldást említ, melyek azonban nem mind különbözők.)

2. Ha másodszor az $\{O\}$ involucziós sugársor hyperbolikus, $\{t\}$ pedig elliptikus, akkor a feladatnak megoldása az előbbitől abban különbözik, hogy azon k_1 kör, mely $\{O\}$ kettőssugarait érinti és a kettőssugarak azon szögének szárai között fekszik mint A pont, egyszerűbben szerkeszthető. A feladatnak ekkor szintén *két* megoldása van.

3. Ha $\{O\}$ sugársor elliptikus, $\{t\}$ pontsor pedig hyperbolikus, melynek kettőspontjai B, C pontok, akkor mint előbb szerkesztünk oly k_1 kört, melyre vonatkozólag $\{O\}$ sugársor kapcsolt sugarai, kapcsolt polárisok, és $|OA|$, $|OB|$, $|OC|$ sugarakat metszéshez hoz-

zuk A_1, A_1'; B_1, B_1'; C_1, C_1' pontokban k_1 körrel. A szerint a mint A_1, B_1, C_1; A_1, B_1, C_1'; A_1, B_1', C_1; A_1', B_1, C_1 tekintetnek A, B, C megfelelő pontjainak, négy különböző kollineaczió származik, és k_1-nek megfelelő kollinear kúpszeletek egymástól különbözők. Ha A_1', B_1', C_1'; A_1', B_1', C_1; A_1', B_1, C_1'; A_1, B_1', C_1' pontok felelnek meg A, B, C-nek, ugyanazon kúpszeleteket nyerjük, mint előbb, és ezért a feladatnak csak *négy* megoldása (106.) van. Mint látható, jelenleg $|BC| \equiv t$-nek nem két, hanem négy egyenes felelhet meg, t. i. $|B_1C_1|$, $|B_1'C_1'|$, $|B_1C_1'|$, $|B_1'C_1|$.

4. Ha $\{O\}$, $\{t\}$ involucziós sorok hyberbolikusak, akkor a feladat ép úgy oldatik meg mint előbb, csak k_1 szerkesztése egyszerűbb. De hogy a feladatnak megoldása legyen, megkívántatik, hogy A, B, C pontok $\{O\}$ kettőssugarai által képezett egyik szög szárai között, vagy pedig két csúcsszög szárai között feküdjenek (106.).

191. Gondoljunk vissza az előbbi feladat megoldására az első esetben, a midőn t-nek két egyenes t_1, t_1' felel meg a kollinear vonatkozásnál. t_1, t_1' egyenesek egymást azon két sugár $|OM_1|$, $|ON_1|$ egyikében, pl. $|OM_1|$-ben metszik, melyek $\{O\}$ involucziós sugársorban megfelelők és $\{t\}$ involucziós pontsor két kapcsolt pontján mennek át. t_1, t_1' egyenesek pólusai k_1 körre nézve ekkor $|NO_1|$-ben fekszenek, és így e pólusoknak megfelelő pontok, vagyis t-nek pólusai a szerkesztendő kúpszeleteket illetőleg, bárhol feküdjék A pont, $|ON_1|$-en lesznek.

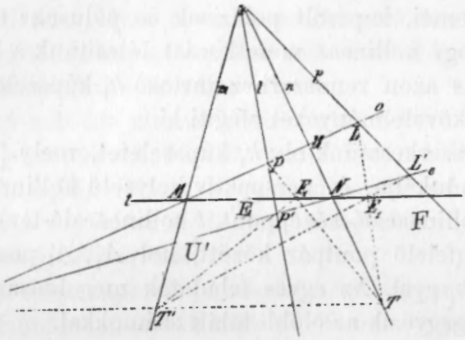
Másrészt O-nak k_1 körre vonatkozó o_1 polárisa: $|M_1N_1|$, és t_1, t_1' egyenesek M_1 metszőpontjának megfelelő M pont, mindig t-n van; tehát O-nak mindegyik szerkesztendő k kúpszeletre vonatkozó polárisa átmegy $(t, |OM_1|) = M$-en. Ha ellenben t_1, t_1' egyenesek egymást N_1-ben metszenék, úgy O pontnak k kúpszeletre vonatkozó polárisa $(t, |ON_1|) = N$ ponton menne át. Innen következik:

Ha O pontból kiinduló sugárpárak és t-n fekvő pontpárak $\{O\}$, $\{t\}$ involucziós sorokat képeznek, melyek nem perspektivek, de $\{O\}$-nek egy m, n kapcsolt sugárpárja $\{t\}$-nek egy kapcsolt pontpárján M, N-en megy át: akkor mindazon kúpszeletekre vonatkozólag, melyek $\{O\}$, $\{t\}$ involucziós sorokat indukálják, O pontnak polárisai M, vagy N ponton mennek át, és t-nek pólusai megfelelőleg n, vagy m egyeneseken fekszenek. A midőn $\{O\}$, és $\{t\}$ elliptikus, a kúpszeleteknek csak egyik rendszere valós, t. i. vagy az, melyre vonatkozólag O-nak polárisai M ponton mennek át, és így t-nek pólusai n-en fekszenek, vagy pedig azon kúpszeletrendszer, melyre vonatkozólag

O-nak polárisai N ponton mennek át és így t-nek pólusai m-en fekszenek. Minden más esetben, míg m, n, M, N valós, mindkét kúpszeletrendszer is valós. A midőn m, n és így M, N képzetes, tehát $\{O\}$, $\{t\}$ involucziós sorok kettőselemei egymást elválasztják: nem létezik oly kúpszelet, mely ezen involucziós sorokat indukálná. —

Direkt uton is bebizonyítható, hogy a midőn $\{O\}$, $\{t\}$ involucziós sorok elliptikus természetűek és az M ponton átmenő o egyenesből mint O pont polárisából meghatározott kúpszelet valós, akkor N ponton átmenő o' egyenesből mint O polárisából meghatározott kúpszelet képzetes lesz (115. ábra).

Nevezzük $\{O\}$-nak két kapcsolt sugarát, l, p-nek, e sugarak metszőpontját o, o', t-vel rendre: P, L; P', L', E, F-nek; E, F-hez kapcsolt pontokat $\{t\}$-ben E_1, F_1-nek; $|LE_1|$, $|PF_1|$ egyeneseknek



115. ábra.

n-n fekvő metszőpontját T-nek; $|L'E_1|$, $|P'F_1|$ egyeneseknek m-en fekvő metszőpontját T'-nek; végre o, n és o', m egyenespárak közös pontját U, U'-nek.

l-nek pólusa azon k kúpszeletre nézve, melynek polárháromszöge OPL, és mely t-n a $\{t\}$ involucziós pontsort indukálja (111. *c)*): T pont; úgy szintén t egyenes pólusa azon k' kúpszeletre vonatkozólag, melynek kapcsolt háromszöge $OP'L'$, és melyre $\{t\}$ kapcsolt elemei kapcsolt pólusok: T' pont.

Az adott involucziós pontsor következtében

$$(FMNE_1) \;\overline{\wedge}\; (F_1NME),$$

és így

$$(OUNT) \;\overline{\wedge}\; (T'U'MO),$$

mert e pontsorok az előbbieknek projekcziói L, illetve P'-ből. Innen következik:

$$(OUNT) \overline{\wedge} (OMU'T');$$

de ha a pontok a felírt sorrendben következnek n, m-en egymásra, akkor O, U nincs elválasztva N, T-től, míg O, U' el van választva M, T'-től.

Ha tehát n-en fekvő és k-ra vonatkozó involucziós pólusok sora hyperbolikus, úgy m-en fekvő és k'-re vonatkozó pólusok sora elliptikus, és így midőn k valós (képzetes), k' képzetes (valós). k, k' kúpszeletet OPL, illetve $OP'L'$ polárháromszög és $\{t\}$ involucziós pontsor határozza meg.

Az előbb tárgyalt feladatot: «A ponton át kúpszeletet fektetni, melyre vonatkozólag $\{O\}$ involucziós sugársor, és $\{t\}$ involucziós pontsor kapcsolt elemei, kapcsolt polárisok és pólusok» még akkép oldhatjuk meg, hogy kollinear vonatkozást létesítünk a keresett k kúpszelet és egymás azon rendszerhez tartozó k_1 kúpszelet között, mely csak az utóbbi követelményeket elégíti ki.

E végből szerkesztünk oly k_1 kúpszeletet, mely $\{O\}$, $\{t\}$ involucziós sorokat indukálja, és perspektiv helyzetű kollinear vonatkozást létesítünk O kollineaczió-középpont, t kollineaczió-tengely és A, A_1; vagy A, A_1' megfelelő pontpár között, hol A_1, A_1' pontok $|OA|$-nak metszőpontjai k_1-gyel. Az egyes feladatok megoldásának száma természetesen megegyezik az előbb talált számokkal.

192. Ugyan így járunk el a dualisan megfelelő feladatnál, mely így szól: *szerkesztendő a egyenest érintő k kúpszelet, mely adott* $\{O\}$, $\{t\}$ *involucziós sugár- és pontsorokat indukálja.*

Leirunk oly k_1 kört, melyre vonatkozólag $\{O\}$ sugársor kapcsolt sugarai kapcsolt polárisok és oly t_1 egyenest szerkesztünk, melyen k_1 által indukált involucziós pontsor, $\{t\}$ sornak projekcziója O-ból. t és a metszőpontját O-ból t_1-re projicziáljuk és ezen projekczióból a_1, a_1' érintőket huzunk k_1-hez; a, a_1; t, t_1 megfelelő egyenespárak, valamint O kollineaczió-középpont oly kollinear vonatkozást létesít, melyben k_1-nek a keresett k kúpszelet felel meg.

A másik eljárás szerint k_1 kúpszeletet szerkesztünk, mely $\{O\}$, $\{t\}$ involucziós sorokat indukálja, és t és a metszőpontjából k_1-hez a_1, a_1' érintőket huzunk. A kollinear vonatkozást, melyben k_1-nek k felel meg most: O kollineaczió-középpont, t kollineaczió-tengely, valamint a, a_1, vagy a, a_1' megfelelő egyenespár határozza meg. —

193. Miután egy kör végtelen sokfélekép lehet perspektiv helyzetű, kollinear ábrája k kúpszeletnek vizsgáljuk meg: *lehet-e a kollineaczió-középpontot és ellentengelyt úgy meghatározni, hogy két ugyanazon síkban fekvő k, k' kúpszelet* (és a velük meghatározott kúpszeletsor) *perspektiv helyzetű kollinear ábrája két kör (körsor) legyen?*

A megoldás akkor lehetséges, ha k, k' nem bír négy valós közös ponttal. A rendszer ellentengelye r, azon *közös* szelője k, k' kúpszeletnek, mely nem metszi a kúpszeleteket valós pontokban; a kollineaczió-középpont pedig azon pontok bármelyike, melyből az r-en fekvő, k, k'-re vonatkozólag kapcsolt póluspárak, derékszög alatt projicziáltatnak.

Ha k, k' kúpszelet kettősérintésű, de az érintési pontok r közös szelőn képzetesek, akkor k, k' kúpszeletek perspektiv helyzetű kollinear ábrái r ellentengelyre és azon kollineaczió-középpontra nézve, melyből az r-en fekvő kapcsolt póluspárak derékszög alatt projicziáltatnak: két konczentrikus kör lesz.

194. Egy más ide tartozó kérdés volna a következő: *k kúpszeleten belül két pont van: A, B; határozzuk meg a kollineaczió-középpontot és ellentengelyt akkép, hogy k kúpszelet perspektiv helyzetű kollinear ábrája oly kúpszelet legyen, melynek gyujtópontjai az A, B pontoknak megfelelő pontok.*

Nevezzük azon kapcsolt póluspárt $|AB|$ egyenesen, mely A, B pontokat harmonikusan elválasztja M, N-nek; e pontok egyike pl. M, k-n belül van. Nevezzük M-nek k-ra vonatkozó pólusát r-nek; azon pontokat, melyből az r-en fekvő k-ra vonatkozó kapcsolt póluspárak derékszög alatt projicziáltatnak O, O'-nek. k kollinear ábrája O (vagy O') kollineaczió-középpont r ellentengely és bármely az r-rel párhuzamos s kollineaczió-tengelyre vonatkozólag, oly k_1 kúpszelet, melynek A_1, B_1 gyújtópontjai: A, B pontoknak megfelelők.

B-ből kiinduló k-ra vonatkozó kapcsolt polárispáraknak ugyanis oly polárispárak felelnek meg k_1-ben, melyek egymásra merőlegesek, vagyis czirkularis involucziót képeznek, mert az előbbi polárispárak r-en oly közöket metszenek ki, melyek O-ból derékszög száraival projicziáltatnak; tehát B-nek megfelelő B_1 pont, k_1-nek gyújtópontja. r ellentengely k-ra vonatkozó M pólusának megfelel továbbá k, középpontja M_1, és azon A pontnak, mely M, r-et B-től harmonikusan elválasztja, oly A_1 pont, mely M_1, r_1-et B_1-től harmonikusan elválasztja, vagyis, mely $|M_1B_1|$-en M_1-től M_1B_1 távolságra van. De ez utóbbi pont k_1-nek másik gyújtópontja.

Ha két kúpszeletnek k, k'-nek (vagy kúpszeletseregnek) nincs valós közös érintője, akkor ezeknek perspektiv helyzetű kollinear ábrái egy bizonyos kollineaczió-középpont és ellentengelyre nézve két konfokalis kúpszelet k_1, k_1' (vagy konfokalis kúpszeletsereg) lehet.

k, k' kúpszeleteknek közös polárháromszögük valós; ennek egyik oldalán két oly valós A, B pont fekszik, melyből kiinduló és az egyik kúpszeletre vonatkozólag kapcsolt polárisok a másikra nézve is kapcsoltak. E pontok a kúpszeleteken belül fekszenek, különben azokból valós közös érintőket lehet a kúpszeletekhez húzni. Ezt előre bocsátva, ha az előbbi eljárás szerint a kollineaczió-középpontot és ellentengelyt akkép határozzuk meg, hogy k-nak és A, B pontoknak megfelelő alakzata egy kúpszelet és annak két gyújtópontja, akkor k'-nek megfelelő kúpszeletnek is e pontok lesznek gyújtópontjai.*

195. k kúpszelet kollinear ábrája ugyanazon kúpszelet is lehet. Ha ugyanis $k \equiv k_1$-en A, B, C és A_1, B_1, C_1 pontokat tetszőlegesen választjuk és k-t akkép vonatkoztatjuk k_1-re kollinear, hogy A, B, C pontoknak A_1, B_1, C_1 pontok feleljenek meg, akkor (184.) a kollinear vonatkozás teljesen meg van határozva. Minden X pontnak k-ban megfelel egy X_1 pont $k_1 \equiv k$-ban, $(ABCX) \,\overline{\wedge}\, (A_1B_1C_1X_1)$ relaczió alapján. Ha $k \equiv k_1$-ben fekvő projektiv pontsorok két valós kettősponttal I, K-val bírnak, akkor a két egyesített kollinear síkrendszer megfelelőleg közös háromszögének (183.) oldalai: $|IK|$, és I, K pontok érintői. De ha I, K pontok képzetesek, akkor is a megfelelőleg közös háromszögnek egyik oldala és szögpontja: $AB_1CA_1BC_1$ Paskal-féle hatszögnek Paskal-féle egyenese, és annak k-ra vonatkozó pólusa. —

k kúpszeletnek kollinear ábrája azonkívül, hogy k-val egybeesik, még k-val perspektiv helyzetű is lehet. Ha ugyanis k-ba irt ABC, $A_1B_1C_1$ háromszögeket akkép választjuk, hogy $|AA_1|$, $|BB_1|$, $|CC_1|$ egyenesek egymást egy O pontban messék, akkor a kúpszelettel és azon háromszögekkel meghatározott kollinear síkrendszerek perspektiv helyzetűek.

A kúpszeleten fekvő megfelelő pontsorok: $ABCX\ldots$; $A_1B_1C_1X_1\ldots$, ekkor nemcsak projektivek, hanem involucziós

* E tárgyalás összehasonlítható szerzőnek «Construction der den Brennpunkten eines Kegelschnitts etc.» czímű «Archiv f. Math. und Physik» folyóiratban (1886.) megjelent czikkével.

helyzetűek is. A kollinear síkrendszerek ekkor szintén involucziós helyzetűek; az involucziós középpont és tengely: O és annak k-ra vonatkozó polárisa. E szerint: *ha két ugyanazon síkban fekvő perspektiv helyzetű kollinear síkrendszerben egy kúpszelet önmagának megfelel, akkor a síkrendszerek involucziós helyzetűek: az involuczió-középpont és tengely a kúpszeletnek egy pólus és polárisa.*

De fordítva is következtethető: ha O pont és s egyenes valamely k kúpszeletnek pólus és polárisa, ha továbbá A, A_1 két pontja k-nak, mely O-val ugyanazon egyenesben fekszik, és mi egy perspektiv helyzetű kollinear vonatkozást O, s kollineaczió-középpont és tengely, valamint A, A_1 megfelelő pontpárral létesítünk: akkor k kúpszelet minden pontjának megfelelő pont k-n fekszik, vagyis k kúpszelet önmagának megfelel. —

196. *k kúpszelet affin alakzata k_1 szintén kúpszelet, mely k-val egynemű.* Ez onnan következik, hogy az affin vonatkozásnál az ellentengelyek végtelen távol vannak és így r_∞ ellentengely k-val ugyanannyi valós pontot bir közösen mint $r_{1\infty}$, k_1-gyel.

Ha két egynemű kúpszeletet k, k_1-et, affin akarunk egymásra vonatkoztatni, akkor k, *két* vagy *egy* pontjának megfelelő pontját k_1-ben tetszőlegesen választhatjuk, a szerint a mint k és k_1 parabola, vagy más kúpszelet.

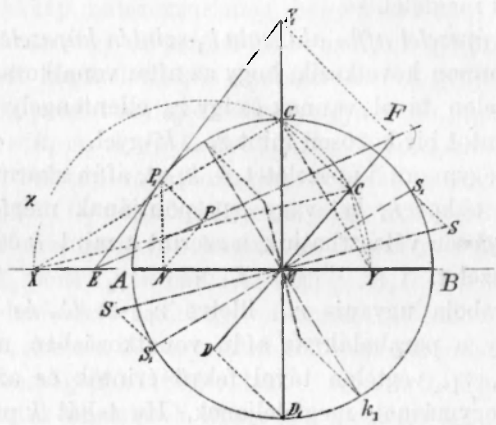
k, k_1 parabola ugyanis r_∞, illetve $r_{1\infty}$-et C_∞ és $C_{1\infty}$ pontban érinti, és hogy a parabolák az affin vonatkozásban megfeleljenek, kell hogy r_∞, $r_{1\infty}$ végtelen távol fekvő érintők és azok C_∞, $C_{1\infty}$ érintőpontjai egymásnak megfeleljenek. Ha tehát k parabola A, B pontjának megfelelő A_1, B_1 pontot k_1-en tetszőlegesen választjuk, akkor a két kúpszelet kollinear van egymásra vonatkoztatva. A vonatkozás azonban affin, mert C_∞ és $C_{1\infty}$ pont érintői, tehát a két síkrendszer végtelen távol fekvő egyenesei: megfelelők.

Ha másodszor k és k_1 ellipsisek A, A_1 pontja tetszőleges; EF, E_1F_1 pedig A, illetve A_1 ponton átmenő átmérőhez kapcsolt, úgy a két rendszert akkép lehet egymásra kollinear vonatkoztatni, hogy $|AE|$, $|AF|$, $|EF|$, r_∞ egyeneseknek: $|A_1E_1|$, $|A_1F_1|$, $|E_1F_1|$, $r_{1\infty}$ egyenesek feleljenek meg. M, M_1 középpontok, melyek E, F-t r_∞-től, illetve E_1, F_1-et $r_{1\infty}$-től harmonikusan elválasztják: megfelelők, tehát $|AM|$, $|A_1M_1|$ egyenesek, valamint E és F ponton át $|AM|$-mel és E_1, F_1 ponton át $|A_1M_1|$-mel párhuzamosan haladó egyenesek szintén megfelelők. Minthogy ez utóbbiak k, k_1-nek érintői E, F, illetve E_1, F_1 pontokban, ezen érintők, és A, illetve A_1 pont pedig a kúpszeleteket meghatározzák: azért a kollinear vonatkozásban k-nak k_1 felel meg. E kollinear vonatkozás azonban *affinitás,* mert a kúpszeletek síkjának végtelen távol fekvő r_∞, $r_{1\infty}$ egyenesei megfelelők.

Ha végre k, k_1 kúpszeletek hyperbolák, akkor ezeket akkép lehet egymásra kollinear vonatkoztatni, hogy az egyik hyperbola két végtelen távol fekvő és egy végesben levő A pontjának, a másik hyperbola két végtelen távol fekvő és egy végesben levő A_1 pont feleljen meg.

A két hyperbola ekkor kollinear van egymásra vonatkoztatva, mely kollineaczió azonban affinitássá fajul.

197. Ha valamely k ellipsis M középpontjából annak tetszőleges A pontján át k_1 kört irunk le, akkor ezen kör kétféleképp lehet k



116. ábra.

ellipsisnek perspektiv helyzetű affin alakzata $|AM|$ affinitástengelyre vonatkozólag. AM-hez kapcsolt kör és ellipsis átmérőt C_1D_1, CD-nek nevezvén: C, C_1, vagy C, D_1 pontokat lehet megfelelőknek tekinteni, az első esetben a kollineaczió-középpont $|CC_1|$-nek, a másodikban $|CD_1|$-nek végtelen távol fekvő pontja (116. ábra).

E tulajdonság tekintetbe vételével AB, CD kapcsolt átmérőpárral adott k ellipsis: pontjait, érintőit, tengelyeit egyszerűen szerkeszthetjük.

$\overline{AB}$ átmérő fölött M közzéppontból leírt k_1 kör ugyanis affin k-val $|AB|$ affinitástengelyre vonatkozólag; a megfelelő pontpárakat összekötő sugarak párhuzamosak $|CC_1|$-gyel, hol C_1, az $|AB|$-re merőleges körátmérőnek $|C_1D_1|$-nek egyik végpontja.

k_1 tetszőleges P_1 pontjának és e pont p_1 érintőjének megfelelő P pontját és p érintőjét megkapjuk, ha p_1-et metszéshez hozzuk $|AB|$, $|C_1D_1|$-gyel E, F_1-ben. E pont önmagának felel meg, míg F_1-nek megfelelő F pont $|CD|$-n fekszik és $|FF_1| \parallel |CC_1|$; $|EF_1| \equiv p_1$-nek megfelel $|EF| \equiv p$, P_1-nek pedig P pont, hol $|PP_1| \parallel |CC_1|$. Ha csak P_1-nek megfelelő P pontját keressük, úgy MCC_1-gyel hasonló és hasonló fekvésű NPP_1 háromszöget szerkesztünk, melynek N szögpontja $|AB|$-n fekszik.

Ha C, C_1-en át $\varkappa$ kört írunk le, melynek középpontja $|AB|$-n van és mely $|AB|$-t X, Y pontokban metszi, úgy $|XC_1|$, $|YC_1|$ egymásra merőleges egyeneseknek $|XC|$, $|YC|$ egymásra merőleges egyenesek felelnek meg. $|XC_1|$, $|YC_1|$-gyel párhuzamos körátmérőknek, melyek kapcsoltak, megfelelnek $|XC|$, $|YC|$-vel párhuzamos ellipsis átmérők, melyek szintén kapcsoltak, s mert merőlegesek egymásra, azért ezek k ellipsisnek tengelyei.

24. §. A reciprok vonatkozás.

198. A kollineaczió, mint láttuk, olynemű vonatkozása *két* síkrendszer pontjai- és egyeneseinek, hogy az egyik síkrendszer bármely pontjának és azon átmenő egyenesnek, egy pont és azon átmenő egyenes felel meg. Ismeretes továbbá, hogy egy valós vagy képzetes kúpszelet, *egy* síkrendszer pontjai és egyenesei között oly vonatkozást állapít meg, mely szerint a sík bármely pontjának mint pólusnak, egy egyenes felel meg, mint azon pont polárisa, és viszont bármely egyenesnek mint polárisnak, bizonyos pont felel meg, mely azon egyenesnek pólusa. Lehet azonban *két* síkrendszer $\mathbf{S}$, $\mathbf{S}_1$ pontjai és egyenesei között is oly vonatkozást létesíteni, melynél $\mathbf{S}$ síkrendszer minden pontjának X-nek és egy ezen ponton átmenő y egyenesnek, $\mathbf{S}_1$ síkrendszerben egy x_1 egyenes és azon fekvő Y_1 pont felel meg.

Hogy ezt kimutassuk, vegyünk fel $\mathbf{S}$ síkrendszerben $ABCD$ négyszöget, $\mathbf{S}_1$-ben $a_1b_1c_1d_1$ négyoldalt és mondjuk, hogy $\mathbf{S}$ síkrendszer A, B, C, D pontjainak feleljenek meg a_1, b_1, c_1, d_1 egyenesek $\mathbf{S}_1$-ben. $\mathbf{S}$ rendszer X pontjának megfelelő x_1 egyenes $\mathbf{S}_1$-ben akkép lesz meghatározva, hogy

$$A(BCDX) \barwedge a_1(b_1c_1d_1x_1), \text{ és } B(ACDX) \barwedge b_1(a_1c_1d_1x_1);$$

az első föltételből (a_1, x_1) pont, a másodikból (b_1, x_1) pont szerkeszthető, melyeknek összekötő egyenese: x_1.

Ha X pont g egyenesen végig halad, $|AX|$, $|BX|$ sugarak két perspektiv helyzetű sugársort, (a_1, x_1), (b_1, x_1) pontok két az egyes sugársorokkal projektiv és egymás között perspektiv pontsort írnak le a_1, b_1 tartókon; mert a_1, b_1 tartók metszőpontja egymásnak megfelelő pont, minthogy ez: $|AB|$ és $|BA|$ sugárnak megfelel. A mozgó X pontnak megfelelő x_1 sugarak tehát X-szel projektiv sugársort írnak le, melynek középpontja g-nek megfelelő G_1 pont.

S síkrendszer tetszőleges Y pontjának összekötő egyenesei a mozgó X pontokkal, egy $\{Y\}$ sugársort képeznek, mely projektiv, Y pontnak megfelelő y_1 egyenesen x_1 sugársor által kimetszett $\{y_1\}$ pontsorral, és ezért $|AB|$-nek metszése $\{Y\}$-mal, és $\{y_1\}$-nek projekciója (a_1, b_1) pontból: egymásnak megfelelő projektiv pontsor, illetve sugársor. Ebből látható, hogy $|AB|$ egyenes tetszőleges pontjának megfelelő sugarat akkép kapjuk meg, ha azon ponton átmenő egyenesnek megfelelő pontját (a_1, b_1)-gyel összekötjük.

Két síkrendszer, mely oly módon van egymásra vonatkoztatva, hogy az egyik síkrendszer bármely pontjának és azon átmenő egyenesnek, a másikban egy egyenes és azon fekvő pont felel meg, és így az egyik síkrendszerben minden pontsor vagy sugársornak, a másikban az előbbiekkel projektiv sugársor, illetve pontsor felel meg: **reciprok síkrendszernek** *neveztetik.*

Ezen értelmezésből következik, hogy *ha két síkrendszer* $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{S}_1'$ *egy harmadikkal* **S**-*sel reciprok, akkor azon két síkrendszer egymással collinear.* **S**-ben fekvő pontsornak és avval perspektiv sugársornak ugyanis $\mathbf{S}_1$-ben, úgyszintén $\mathbf{S}_1'$-ben azokkal projektiv és perspektiv helyzetű sugársor és pontsor felel meg, miért is $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{S}_1'$ síkrendszerek egymással kollinear vonatkozásban állanak.

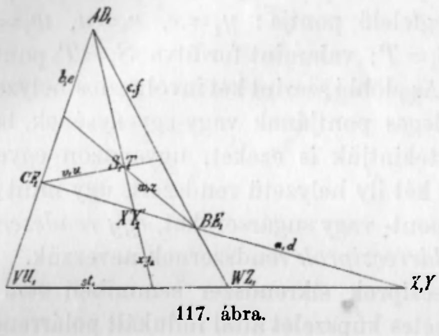
199. **S**, $\mathbf{S}_1$ síkrendszer q_∞, illetve $r_{1\infty}$ egyenesének, $\mathbf{S}_1$-ben Q_1 pont, **S**-ben R pont felel meg. Ezen Q_1, R pontok, melyek általában nem fekszenek végtelen távol, a reciprok rendszerek *középpontjainak;* minden rajtuk átmenő egyenes: a rendszerek *átmérőjének* neveztetik.

Mialatt X_∞ pont q_∞-en pontsort ír le, a neki megfelelő x_1 átmérő Q_1 körül a pontsorral projektiv sugársort fog leírni; minden ily x_1 átmérő végtelen távol fekvő $Y_{1\infty}$ pontjának **S**-ben egy y átmérő felel meg. Két-két oly átmérő, melyek közül egyik, tehát mindegyik, a másik végtelen távol fekvő pontjának felel meg: *kapcsolt* átmérőnek neveztetik.

Az egyik síkrendszer átmérőiből alkotott sugársor projektiv ezen átmérőkhöz kapcsolt átmérőkből képezett sugársorral, és mert két projektiv sugársorban mindig van egy vagy végtelen sok oly egymásra merőleges sugárpár, melynek megfelelő sugárpárja szintén merőleges egymásra, azért: ha két síkrendszer reciprok, akkor az egyikben mindig van oly egymásra merőleges átmérőpár m, n, melyhez kapcsolt átmérők m_1, n_1, szintén merőlegesek egymásra.

Ha e különös átmérőpárak — a reciprok rendszerek *tengelyei* — úgy lesznek egymásra fektetve, hogy m, n_1-re, m_1 pedig n-re kerüljön, mely elhelyezésnél, mint magától értetődik, $r_{1\infty}$, q_∞-nel egyesül: a két reciprok rendszer *involucziós helyzetűnek* neveztetik.

200. *Két reciprok síkrendszer* **S**, $\mathbf{S}_1$, *mely úgy van egymásra fektetve, hogy egy háromszög szögpontjainak megfelelő egyenesek, akármelyik rendszerhez tartozónak tekintsük is a szögpontokat, a*



117. ábra.

háromszög átellenes oldalai felelnek meg, azon tulajdonsággal bír: hogy a két síkrendszer minden pontjának, mint az egyes síkrendszerekhez tartozó pontnak, megfelelő egyenesei egybeesnek, és így m, n *tengelyek* $M_\infty = N_{1\infty}$, *valamint* $N_\infty = M_{1\infty}$ *végtelen távol fekvő pontjainak megfelelő* m_1, n, *illetve* n, m_1 *egyenesei is egybeesnek, tehát a síkrendszerek involucziós helyzetűek.*

Nevezzük (117. ábra) $A = D_1$, $B = E_1$, $C = F_1$ szögpontokkal biró háromszög azon oldalait, melyek e szögpontokkal átellenesek: $a_1 = d$, $b_1 = e$, $c_1 = f$-nek; $a_1 = d$ oldal tetszőleges $X_1 = Y$ pontjának megfelelő egyeneseket, melyek $A = D_1$ ponton mennek át, x, y_1-nek; ezek metszőpontjait $a_1 = d$-vel X', Y_1'-nek.

Minthogy $a_1 = d$ egyenes E_1 és F_1 pontjának e és f egyenes; X' pontnak, mely d, x metszőpontja $|D_1 X_1|$ egyenes; Y_1' pontnak, mely a_1, y_1 metszőpontja $|AY|$ egyenes felel meg, azért:

$$(X_1, Y_1', E_1, F_1) \overline{\wedge} (x, |AY|, e, f) \overline{\wedge} (X', Y, C, B) \overline{\wedge} (Y, X', B, C),$$

miből következik, mert

$$X_1 = Y, E_1 = B, F_1 = C,$$

hogy

$$Y_1' = X', \quad \text{tehát} \quad x = y_1.$$

Ennélfogva $a_1 = d$ oldal tetszőleges pontjának, mint az egyik és másik rendszerhez tartozó pontnak ugyanazon egyenes, és $A = D_1$ szögponton átmenő egyenesnek, ugyanazon pont felel meg. E tulajdonsággal bír $ABC = D_1E_1F_1$ háromszögnek többi szögpontja és oldala is.

Egy tetszőleges $s = t_1$ egyenes, $d = a_1$, $e = b_1$, $f = a_1$ háromszögoldalakat $Y = X_1$, $V = U_1$, $W = Z_1$ pontokban metszi; e metszőpontoknak $y_1 = x$, $v_1 = u$, $w_1 = z$ egyenesek felelnek meg, miért is $s = t_1$ egyenesnek megfelelő pontja: $y_1 = x$, $v_1 = u$, $w_1 = z$ egyeneseknek metszőpontja $S_1 = T$; valamint fordítva $S_1 = T$ pont megfelelő egyenese: $s = t_1$. — Az előbbi szerint két involucziós helyzetű reciprok síkrendszer tetszőleges pontjának vagy egyenesének, bármely rendszerhez tartozónak tekintjük is ezeket, ugyanazon egyenes illetve pont felel meg, ezért két ily helyzetű rendszert, úgy mint involucziós helyzetű projektiv pont- vagy sugársorokat, *egy rendszernek* tekintünk és mint ilyent, *polárreciprok* rendszernek nevezzük.

A polárreciprok síkrendszer semmiben sem különbözik egy valós vagy képzetes kúpszelet által indukált polárrendszertől, a menynyiben a polárreciprok síkrendszernél is: a sík minden egyenesén s-en fekvő pontsornak, egy a pontsorral projektiv és involucziós helyzetű S_1 sugársor felel meg; mert s, $ABCT$ négyszög oldalaitól involucziót képező hat pont szerint metszetik, tehát $YUW\ldots$ pontsor involucziós helyzetű $y_1u_1w_1\ldots$ sugársorral. A megfelelő elempárak úgy mint: s, S_1, képezik a polárrendszer polárisait és pólusait.

201. Két tetszőlegesen egymásra fektetett reciprok síkrendszer **S**, $\mathbf{S}_1$ nem lesz involucziós helyzetű, és ezért egy tetszőleges pontnak, mint az egyik és másik rendszerhez tartozónak megfelelő egyenesei egymástól különbözők. *De ugyanazon síkban fekvő két reciprok síkrendszerben mindig létezik oly $P = P_1$ pont, melynek megfelelő p_1, p egyenesei egybeesnek,* vagyis mely pont és egyenes egymásnak *involucziósan* megfelel.

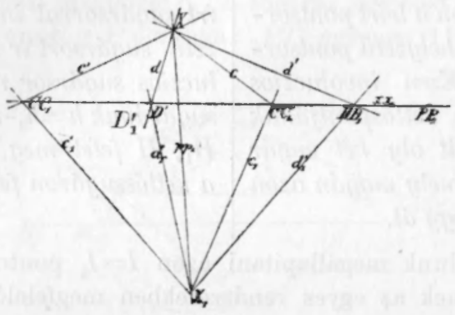
Hogy ezt belássuk, nevezzük a közös síkban fekvő $C = C_1$ pont megfelelő c_1, c egyeneseinek metszőpontját $C' = C_1'$-nek, e metszőpontnak megfelelő és így $C=C_1$ ponton átmenő egyeneseket c'_1, c'-nek; $|CC'|=|C_1C'_1|=x=x_1$ egyeneseknek megfelelő pontjait, melyek szintén különbözők: X_1, X-nek.

$x=x_1$ egyenes tetszőleges $D=D_1$ pontjának (118. ábra) megfelelő, tehát X_1, illetve X-en átmenő két egyenes: d_1, d; ezek metszőpontja $x=x_1$-gyel: D'_1, D'; végre $(x_1, d_1)=D'_1$-nek és $(x, d)=D'$-nek megfelelő két egyenes $|XD|=d'$, illetve $|X_1D_1|=d'_1$.

Minthogy

$$(CC'DD')\barwedge(c_1c'_1d_1d'_1)\barwedge(C'_1CD'_1D)\barwedge(CC'_1DD'_1),$$

azért D' összeesik D'_1-gyel: tehát $x=x_1$ egyenes tetszőleges pontjának megfelelő egyenesek egymást $x=x_1$-nek ugyanazon pontjában metszik.



118. ábra.

Ha $E=E_1$, ezen $x=x_1$-nek egy új pontja, melynek megfelelő e_1, e egyenesek $x=x_1$-et, $E'=E'_1$-ben metszik, akkor

$$(CDEC')\barwedge(c_1d_1e_1c'_1)\barwedge(C'D'E'C),$$

miből látható, hogy: C, C'; D, D'; E, E' pontpárak involucziót képeznek.

Mialatt tehát egy pont $x=x_1$-en végig halad, a neki az egyes rendszerekben megfelelő sugarak $x=x_1$-et, egy a leírt pontsorral involucziós helyzetű pontsorban metszik. A mozgó pont egy helyzeténél pl. $P=P_1$-nél: a neki megfelelő p_1, p sugarak $|XX_1|$-be esnek, és így $P=P_1$ pont lesz a reciprok síkrendszereknek azon pontja, melynek megfelelő egyenesei egybeesnek. Más ily pont, melynek megfelelő két egyenese egybeesik, és mely egybeeső két egyenes nem megy át magán a ponton, nem található a síkban, mert ha még egy ily pont léteznék, akkor a recziprok síkrendszerek *involucziós* helyzetűek volnának. Ebből és az előbbi bebizonyításból következik:

Ha két recziprok síkrendszer közös síkban fekszik, és egy tetszőleges

$C=C_1$ pont megfelelő c_1, c egyeneseinek $C'=C'_1$ metszőpontját $C=C_1$-gyel összekötjük, akkor az összekötő $x=x_1$ egyenes a síknak azon különös $P=P_1$ pontján megy át, melynek megfelelő egyenesei $p_1=p$ egybeesnek. Mialatt $C=C_1$ pont $x=x_1$-en végig halad, a neki megfelelő sugarak $x=x_1$-et egy és ugyanazon a leírt pontsorral involucziós helyzetű pontsorban metszik. Ezen involuczios pontsor minden kettőspontjának $I=I_1$-nek, tehát oly két sugár i_1, i felel meg, mely magán azon kettősponton megy át.

$d=d_1$ egyenes megfelelő D_1, D pontjait $|DD_1|$ egyenes által összekötjük, akkor $|DD_1|=d'=d'_1$ egyenes $d=d_1$-et a sík azon különös $p=p_1$ egyenesén metszi $Y=Y_1$ pontban, melynek megfelelő $P_1=P$ pontjai egybeesnek. Mialatt $d=d_1$ sugár $Y=Y_1$ körül forog, $d'=d'_1$ sugrá, d által leírt sugársorral involucziós helyzetű sugársort ír le. Ezen involucziós sugársor minden kettőssugarának $h=h_1$-nek oly két pont H_1, H felel meg, mely magán a kettőssugáron fekszik.

202. Czélunk megállapitani azon $I=I_1$ pontnak geometriai helyét, melyeknek az egyes rendszerekben megfelelő i_1, i sugarak magán a ponton $I=I_1$-en mennek át, továbbá azon $h=h_1$ sugarak által burkolt görbét, melyeknek megfelelő H_1, H pontjai $h=h_1$ sugáron fekszenek. Mielőtt ezt tennők, előre kell bocsátanunk a következőket:

Ha két recziprok síkrendszer közös síkjában fekvő

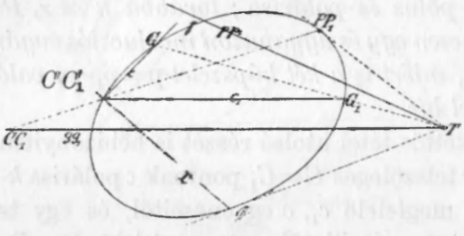
$C=C_1$ pontot a sík tetszőleges $g=g_1$ egyenesén tova mozgatjuk, akkor a megfelelő c_1, c egyenesek egymást egy γ kúpszelet $C'=C'_1$ pontjaiban metszik; e kúpszelet átmegy $g=g_1$-nek megfelelő G_1, G ponton, és a síknak azon $P=P_1$ pontján, melynek involucziósan megfelelő $p_1=p$ egyenese van. Mialatt $C=C_1$ pont, $g=g_1$-en fekvő pontsort befutja azon c su-

$d=d_1$ sugarat $L=L_1$ pont körül forgatunk, akkor a megfelelő D_1, D pontok összekötő egyenesei $d'=d'_1$, egy λ kúpszeletet burkolnak, melynek érintői: $L=L_1$-nek megfelelő l_1, l egyenesek, valamint $p=p_1$. Mialatt $d=d_1$, $L=L_1$ körül forog azon $\mathfrak{D}$ pont, mely D, D_1-et $p=p_1$-től harmonikusan elválasztja, λ-nak egy érintőjén l-en, a forgó $d=d_1$ sugárral in-

gár, mely c, c_1-et $|PCC'|$-től harmonikusan elválasztja, γ-nak egy $\mathfrak{G}$ pontja körül forog és C-vel involucziós helyzetű sugársort ír le. g és γ metszőpontjának az egyes reciprok rendszerekben megfelelő sugarak átmennek azon metszőponton.

volucziós helyzetű pontsort ír le. $L=L_1$-ből λ-hoz vonatkozó érintőnek megfelelő pontjai az egyes rendszerekben, magán az érintőn fekszenek.

$g=g_1$ egyenesen mozgó $C=C_1$ pontnak megfelelő c_1, c sugarak, G_1, G körül két, C-vel és így önmaguk között is projektiv sugársort írnak le, ennélfogva e sugársorok képződménye, vagyis c_1, c sugarak $C'=C_1'$ metszőpontjának geometriai helye: G_1, G ponton átmenő γ kúpszelet. A midőn a mozgó $C=C_1$ pont g és p metszőpontjába T-be kerül, a neki megfelelő c_1, c sugarak egymást $P=P_1$-ben metszik, és γ-nak érintője P pontban: $|PT|$ egyenes (119. ábra).



119. ábra.

Ha γ azon pontját, mely P-t, G, G_1-től harmonikusan elválasztja, $\mathfrak{G}$-nek nevezzük, úgy $C=C_1$ bármely helyzeténél $g=g_1$ egyenesen, azon $\mathfrak{c}$ sugár, mely $|C'CP|$-t, c, c_1-től harmonikusan elválasztja $\mathfrak{G}$-n megy át. E pontban érinti a T-ből kiinduló második érintő γ kúpszeletet, mert $(GG_1P\mathfrak{G})=-1$, és P érintője, valamint $|GG_1|$, T ponton megy át. Tekintve, hogy $|P\mathfrak{G}|$-nek γ-ra vonatkozó pólusa T, g-n fekszik; $|C'CP|$, $|C'\mathfrak{G}|=\mathfrak{c}$ sugarak g-t kapcsolt pólusokban metszik tehát C által g-n és $\mathfrak{c}$ által $\mathfrak{G}$ körül leírt projektiv sorok $\{g\}$, illetve; $\{\mathfrak{G}\}$, involucziós helyzetűek. Ha $\{\mathfrak{G}\}$ sugársor egy $\mathfrak{c}$ sugara a $\{g\}$ pontsornak $\mathfrak{c}$-hez tartozó C pontján megy át, a mi akkor következik be, a midőn $C=C_1$ pont g és γ-nak metszőpontja: $C=C_1$ pontnak a reciprok rendszerekben megfelelő c_1, c egyenesek szintén átmennek $C\equiv C_1$ ponton.

Mindezekből azt látjuk, hogy ha két reciprok síkrendszer ugyanazon síkban fekszik, akkor ezen sík minden g egyenesén fekvő $\{g\}$ pontsorhoz egy $\{\mathfrak{G}\}$ sugársor tartozik, mely a pontsorral involucziós helyzetű. De valamely sík összes egyenesei és pontjai, melyek oly módon vannak egymásra vonatkoztatva, hogy minden egyenesen fekvő pontsornak, egy a pontsorral involucziós helyzetű sugársor tartozik, mint tudjuk: *polárrendszert* alkotnak; e polárrendszer azon pontjai, melyek a pontokhoz tartozó egyenesen fekszenek: egy kúpszeletnek pontjai. Ebből következik:

Két ugyanazon síkban fekvő reciprok síkrendszer azon

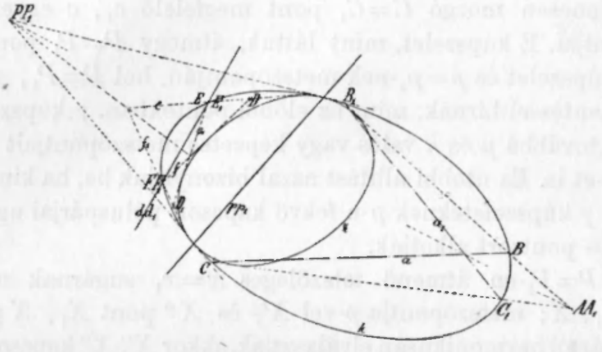
$C=C_1$ pontjai, melyeknek az egyes rendszerekben megfelelő c_1, c egyenesei magán a ponton átmennek: egy valós vagy képzetes k kúpszeletnek pontjai.	*$d=d_1$ egyenesei, melyeknek az egyes rendszerekben megfelelő D_1, D pontok, magán az egyenesen fekszenek: egy valós vagy képzetes $\varkappa$ kúpszeletet burkolnak.*

Az involucziósan megfelelő $P=P_1$ pont és $p=p_1$ egyenes k és $\varkappa$ kúpszeletnek pólus és polárisa; továbbá k és $\varkappa$, $P=P_1$ pont körül és $p=p_1$ egyenesen egy és ugyanazon involucziós sugár — illetve pontsort indukálja, miért is a két kúpszelet $p=p_1$-en valós vagy képzetes kettős érintéssel bír.

Hogy e kettős tétel utolsó részét is bebizonyítsuk, vegyük tekintetbe, hogy egy tetszőleges $C=C_1$ pontnak c polárisa k-ra vonatkozólag, C, C_1 pontnak megfelelő c_1, c egyeneseitől, és egy tetszőleges $d=d_1$ egyenes $\mathfrak{D}$ pólusa $\varkappa$-át illetőleg, a megfelelő D_1, D pontoktól, harmonikusan van elválasztva. Ha tehát $C=C_1$ pont $p=p_1$-en vétetik fel: C, C_1-nek megfelelő c_1, c sugarak $P=P_1$-en mennek át, és $|PC|=|P_1C_1|$ sugárnak megfelelő (p_1c_1), (p, c) pontok: $p=p_1$-en fekszenek. Ennélfogva $p=p_1$-en mozgó $C=C_1$ pontnak k-ra vonatkozó polárisa átmegy $|PC|=|P_1C_1|$-nek $\varkappa$-ra vonatkozó és $p=p_1$-en fekvő pólusán, — melylyel a tételnek utolsó része is be van bizonyítva.

k és $\varkappa$ kúpszelet származtatásánál fogva azon tulajdonsággal bír, hogy k tetszőleges $E=E_1$ pontjából $\varkappa$-hoz vonható e_1, e érintők: az EE_1 pont megfelelő egyenesei; továbbá $\varkappa$ bármely érintője $b=b_1$, k-t a két megfelelő pontban B_1, B-ben metszi. Ebből látható, *hogy k és $\varkappa$ kúpszelet egyidejűleg valós vagy képzetes; továbbá ha k és $\varkappa$ kúpszelet két érintőpontja: Q, R, és igy ezeknek érintője q, r valós, akkor $Q=Q_1$-nek és $R=R_1$-nek megfelelő $q=q_1$, illetve $r=r_1$, szintén involucziósan felelnek meg egymásnak.* De ezen utóbbi pontok abban különböznek a már előbb ismert $P=P_1$, $p=p_1$ involucziósan megfelelő elempártól, hogy azok képzetesek is lehetnek, míg $P=P_1$, $p=p_1$ mindig valós; továbbá hogy $Q=Q_1$ rajta fekszik $q=q_1$-en, $R=R_1$ pedig $r=r_1$-en, míg $P=P_1$ pont $p=p_1$-en kívül van.

203. Bármily két kettős érintésű kúpszelet: k, $\varkappa$, két reciprok síkrendszert határoz meg, melyben az egyik kúpszeletnek, pl. k-nak tetszőleges pontján, az ezen pontnak a reciprok vonatkozásban megfelelő egyenesek mint $\varkappa$ érintői, átmennek, és így $\varkappa$ érintőinek megfelelő pontok, ezen érintők metszőpontjai k-val; az involucziósan megfelelő elempár $P=P_1$, $p=p_1$, k és $\varkappa$ közös érintőinek metszőpontja, illetve az érintőpontok összekötő egyenese. Egy tetszőleges $A=A_1$ pontnak megfelelő egyenesek k, $\varkappa$ segélyével következő-



120. ábra.

kép szerkeszthetők (120. ábra): $A=A_1$-ből $\varkappa$-hoz vonható $b=b_1$, $c=c_1$ érintők, k-t: B, B_1, illetve C, C_1-ben metszik. $b=b_1$-en, B, B_1 pontokra nézve a jelölés tetszőleges; C, C_1-nél azonban a jelölés oly módon eszközlendő, hogy $|BC_1|$, $|B_1C|$ sugarak $p=p_1$-ben találkozzanak (84); $|B_1C_1|=a_1$, és $|BC|=a$ egyenesek lesznek $A=A_1$ pont megfelelő egyenesei. a, a_1 metszőpontja $A'=A'_1$, mint könnyen látható $|PAA_1|$ egyenesen fekszik, mert $|PAA_1|$ polárisa, $|BC_1|$, $|B_1C|$ metszőpontjának.

Ugyanígy lehet $d=d_1$ egyenesnek megfelelő D_1, D pontjait szerkeszteni: $d=d_1$ és k kúpszelet $E=E_1$, $F=F_1$ metszőpontjaiból e_1, e, f_1, f érintőket húzunk $\varkappa$-hoz; ezen érintők négy metszőpontja közül kettő: (ef_1), (e_1f), PP_1-gyel ugyanazon egyenesen fekszik; a másik két metszőpont $(e_1f_1)=D_1$, $(ef)=D$: d, d_1-nek megfelelő pontja; ezeknek összekötő egyenese $|DD_1|$, átmegy $d=d_1$, és $p=p_1$-nek közös pontján.

Ha $A=A_1$-ből nem vonható valós érintő k-hoz, vagy $d=d_1$ nem metszi k-t valós pontokban, akkor az első esetben a_1, a meghatározása, két az $A=A_1$ ponton átmenő segédegyenessel, a másodikban D_1, D, két $d=d_1$-en fekvő segédponttal eszközöltetik, mely segédelemek úgy lesznek választva, hogy azokkal az előbbi szerkesztés keresztül vihető.

A szerkesztésekből még látható, hogy ha k és $\varkappa$ egybeesik, akkor $A=A_1$ pontnak megfelelő a_1, a egyenesek, valamint $d=d_1$-nek megfelelő D_1, D pontok is egyesülnek és a szerkesztés maga nem egyéb, mint pont polárisának, illetve egyenes pólusának ismert szerkesztése.

204. Térjünk ismét vissza a 202. pontban ismert γ kúpszelethez, melynek $C'=C'_1$ pontjai a reciprok vonatkozásban, egy tetszőleges g egyenesen mozgó $C=C_1$ pont megfelelő c_1, c egyeneseinek metszőpontjai. E kúpszelet, mint láttuk, átmegy $P=P_1$ ponton, továbbá k kúpszelet és $p=p_1$-nek metszőpontján, hol $P=P_1$, $p=p_1$ és k azon jelentéssel bírnak, mint az előbbi pontokban. γ kúpszelet tartalmazza, továbbá p és k valós vagy képzetes metszőpontjait $Q=Q_1$, és $R=R_1$-et is. Ez utóbbi állítást azzal bizonyítjuk be, ha kimutatjuk, hogy k és γ kúpszeleteknek p-n fekvő kapcsolt póluspárjai ugyanazon involucziós pontsort alkotják.

Ha $P=P_1$-en átmenő tetszőleges $x=x_1$ sugárnak megfelelő pontjai X_1, X; metszőpontja p-vel X', és X^* pont X_1, X pontokat $x=x_1$ sugártól harmonikusan elválasztják, akkor X', X^* kapcsolt pólusa k-nak. Ha továbbá $x=x_1$ sugár g-t, $C=C_1$ metszi, úgy CC_1 pontnak megfelelő, egymást $C'=C'_1$-ben metsző c_1, c egyenesek: X_1, illetve X-en mennek át, tehát azon $|C'\mathfrak{G}|$ sugár, mely $|C'CP|$-t, c_1, c-től harmonikusan elválasztja, szintén átmegy X^* ponton. Tudjuk továbbá, hogy $p=p_1$, $|P\mathfrak{G}|$-nek pólusát T-t tartalmazza; ebből következik: hogy $|C'\mathfrak{G}|$, $|C'CP|$ sugarak p-t, γ-ra vonatkozólag is kapcsolt póluspárakban X^*, X' metszik. Ha tehát egy síkban két reciprok síkrendszer fekszik és mi a sík minden $C=C_1$ pontjának a reciprok rendszerekben megfelelő c_1, c egyenesek $C'=C'_1$ metszőpontját, *C-hez tartozó pontnak* tekintjük, akkor egy g egyenes pontjaihoz tartozó pontok, a reciprok rendszereknek azon három állandó pontján $P=P_1$, $Q=Q_1$, $R=R_1$ átmenő γ kúpszeleten fekszenek, melyek involucziósan felelnek meg $p=p_1$, $q=q_1$, $r=r_1$ egyeneseknek.

C, C_1 pontoknak, valamint g egyenes és γ kúpszeletnek e vonatkozása hasonlít a Steiner-féle rokonság által megállapított vonatkozáshoz és *másodfoku geometriai rokonságnak* neveztetik (Reye Th.

Die Geometrie der Lage, II. kötet; 16. előadás). Itt is, mint a STEINER-féle rokonságnál P, Q, vagy R ponton átmenő egyenesekhez tartozó pontok egyenespárrá elfajult kúpszeleten fekszenek; de a STEINER-féle rokonságnál P, Q, R alappontok bármelyikén átmenő egyeneshez tartozó egyenespár: a másik két alappont összekötő egyenese és az első alapponton átmenő egyenes, míg itt a Q vagy R ponton átfektetett egyeneshez tartozó egyenespár: $|QP|$ és egy az R-en átmenő egyenes, illetve: $|RP|$ és Q-n átmenő egyenes.

Die Geometrie der Lage. II. Kötet, 18. előadás, 104. s. [illegible] másfra- [illegible] Q, vagy R ponton átmenő egyenesekhez tartozó pontok egyenespárrá elfajult kúpszeletek [illegible] P, Q, R alappontok [illegible] átmenő egyenesben tartozó egyenespár: a másik két alappontot összekötő egyenes és [illegible] alapponton átmenő egyenes, míg [illegible] Q vagy R ponton [illegible] egyenespár: |QR| és egy az R-en átmenő egyenes, illetve |RP| és Q-n átmenő egyenes.

FÜGGELÉK.

FÜGGELÉK.

(35)

1) Tanultuk (26), hogy ha $A, B, C, \ldots; A_1, B_1, C_1, \ldots$ projektiv pontsorok kettőspontjai I, K, akkor

$$(AA_1IK) \barwedge (BB_1IK) \barwedge (CC_1IK),$$

tehát

$$(AA_1IK) \barwedge B_1BKI), \text{ és } (AA_1IK) \barwedge (C_1CKI),$$

a mi kifejezi, hogy

$$A, B_1; A_1, B; I, K, \text{ és } A, C_1; A_1, C; I, K$$

két involucziós sornak kapcsolt elempárjai. Az $A, B, C, \ldots; A_1, B_1, C_1, \ldots$ projektiv pontsorok kettőspontjai tehát kapcsolt elempárját képezik az $A, B_1; A_1, B$, és $A, C_1; A_1, C$ kapcsolt elempárakkal meghatározott involucziós soroknak; ennélfogva (fordítva is) «két projektiv pontsor kettőspontjainak szerkesztése visszavezethető két involucziós pontsor közös elempárjának szerkesztésére».

2) Ha a teljes négyszög oldalait a végtelen távol fekvő egyenessel g_∞-nel metszük, a g_∞-en szintén hat involucziót képező pontot nyerünk, mely bármely pontból involucziót képező hat sugárral projicziáltatik. Ennélfogva: «ponton át egy teljes négyszög oldalaival párhuzamosan menő sugarak involucziót képeznek». Ha teljes négyszög *két* pár átellenes oldala egymásra merőleges, akkor az involuczió czirkuláris, tehát a harmadik pár átellenes oldal is merőleges lesz egymásra; a mi ezen ismert elemi tételre vezet: «egy háromszög magasságvonalai egymást egy pontban metszik».

3) «Ha két háromszög $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ oly helyzetű, hogy $A_1, A_2; B_1, B_2; C_1, C_2$ megfelelő szögpontjait összekötő egyenesek egymást egy pontban O-ban metszik, akkor a megfelelő oldalak metszőpontjai:

$$(|A_1B_1|, |A_2B_2|) = N, \; (|B_1C_1|, |B_2C_2|) = L, \; (|C_1A_1|, |C_2A_2|) = M$$

egyenesen fekszenek (DESARGUES).»

$|MN|$ egyenes metszőpontjait $|OA_1A_2|$, $|OB_1B_2|$, $|OC_1C_2|$-vel, α, ill. β, γ-nak nevezvén:

$(OA_1A_2\alpha) \barwedge (OC_1C_2\gamma)$, mert persp. M középpontra nézve

$(OA_1A_2\alpha) \barwedge (O_1B_1B_\beta\beta)$, « « N « «

ennélfogva $(OB_1B_2\beta) \barwedge (OC_1C_2\gamma)$ és perspektiv helyzetű, tehát $|B_1C_1|$, $|B_2C_2|$ egyenesek L metszőpontja $|\beta\gamma|$ egyenesen és így L pont $|MN|$-en fekszik.

A tétel megfordítható t. i.: «ha két háromszög megfelelő oldalainak metszőpontjai egyenesen fekszenek, akkor megfelelő szögpontjait összekötő sugarak egy ponton mennek át»; a bebizonyítás hasonló az előbbihez.

Az alakzatban 10 pont: O, A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, L, M, N és 10 egyenes van kitüntetve; minden ponton 3 egyenes megy át és minden egyenesen 3 pont fekszik. Az ily alakzat *konfiguráczió*-nak neveztetik, és symbolikus jelölése ezen konfiguracziónak: $(10_3, 10_3)$.

Egy más konfigurácziót $(9_3, 9_3)$ nyerünk, ha $A_1C_2B_1A_2C_1B_2$ Pascal-féle hatszögnek $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ szögpontjait egy-egy egyenesen, mint egyenespárrá elfajult kúpszeleten fekvőnek képzeljük; e hat szögpont és az átellenes oldalpárak három metszőpontja, mely Pascal-féle egyenesen fekszik, a konfigurácziónak 9 pontját; a hatszög oldalai az egyenespárrá elfajult kúpszelet, valamint a Pascal-féle egyenes, a konfigurácziónak 9 egyenesét képezi.

Hasonnemű konfigurácziókra vonatkozólag l. Schroeter Henrik értekezését a Journal für r. u. a. Mathematik 108. kötet 4. füzetében ezen a czimen: «die Hesse'sche Configuration $(12_4, 16_3)$», valamint: Klug «Perspektiv helyzetű alakzatokról» a M. T. Akad. Értekezései 1882, IX. kötet; és «Perspectiv helyzetü tetraederek az n méretü térben», Pozsony, 1886.

4) E tétel alapján a kúpszeletnek második gyújtópontját és így *a kúpszeletet szerkeszthetjük, ha annak három érintője és egyik gyujtópontja ismeretes,* még pedig függetlenül a 96. pont alatt tanult általános eljárástól. F' gyujtópont I, I_1, I_2 tükörképein át, a három érintőt t, t_1, t_2-őt illetőleg, kört fektetünk; ennek F középpontja a kúpszeletnek második gyujtópontja. Ha I, I_1, I_2 tükörképek egyenesen fekszenek (a mi akkor következik be, ha F' a tt_1t_2 háromoldal körül irható körön fekszik), akkor a kúpszelet parabola és $|II_1I_2|$ egyenesre merőleges egyenes párhuzamos a parabola tengelyével; ha pedig a

l, l_1, l_2 tükörképek tt_1t_2 háromoldal körülirható körön vannak, akkor F pont F'-be esik és a kúpszelet kör lesz.

5) Két kúpszelet metszőpontjainak vagy közös érintőinek szerkesztésére minden negyedrendű feladat vissza vezethető. Ezek közül fölemlítjük a következőt:

Egy adott N ponton át ellipsis vagy hyperbolához deréklő fektetendő. N pontból merőlegeseket bocsátunk az ellipsis vagy hyperbola átmérőire; ezen merőlegesek az egyes átmérőkhez kapcsolt átmérőket egy egyenoldalu hyperbolának pontjaiban metszik, melynek asymptótái párhuzamosak a kúpszelet tengelyeivel. Az átmérőkből álló sugársor projektiv a hozzá kapcsolt átmérőkből alkotott sugársorral, és a reájuk merőleges sugarakból képezett sugársorral; a képződmény tehát kúpszelet. De minthogy N-ből a tengelyekre bocsátott merőlegeseken a metszőpontok végtelen távol vannak — a képződmény egyenoldalú hyperbola. Ezen egyenoldalú hyperbola és az adott kúpszelet egyik P metszőpontját N-nel összekötő $|NP|$ egyenes a kúpszeletnek deréklője, mivel NP merőleges P-n átmenő kúpszelet-átmérőhez kapcsolt átmérőre, vagyis merőleges P pont érintőjére.

Ha az adott kúpszelet parabola, akkor N-ből a parabola érintőire bocsátott merőlegesek és az egy érintők érintőpontjain átmenő parabola átmérők alkotják azon két sugársort, melynek képződménye az egyenoldalú hyperbola. (Lásd: Chasles: Traité des sections coniques. 142. lap.)

Ugyanezen feladat a Steiner-féle parabolával is egyszerűen oldható meg.

Az N ponton átmenő sugarakra merőlegesen álló és a kúpszeletet illetőleg kapcsolt polárisok ugyanis egy parabolát burkolnak, melyet Pelz: Steiner-féle parabolának nevez. Ezen parabola érintőihez tartoznak N pont polárisa, a kúpszelet tengelyei és N-en átmenő egymásra merőleges kapcsolt polárisok; tehát a kúpszelet M középpontján és N ponton átmenő egyenes: a parabola vezérvonala (127.). A parabola és a kúpszelet közös érintői a kúpszeletet oly pontokban érintik, melyeknek deréklői N ponton mennek át, mert ezen érintők és a deréklők egymásra kapcsolt polárisai a kúpszeletnek.

6) *Egy AOB szögnek három egyenlő részre osztása,* két kúpszelet metszőpontjainak szerkesztésére vezethető vissza. (Chasles: Traité des sections coniques, 36. lapján egy könnyen felismerhető hibás kitétel van.)

Ha az AOB szög O csúcsából leírt k kör a szög szárait A, B pontokban metszi és k körön változó X pontból X'-et akkép határozzuk meg, hogy $2AX$ ív egyenlő legyen $X'B$ ívvel, akkor a változó $|OX|$, $|BX'|$ sugarak két összeillő, de ellenkezőleg forgó sugársort írnak le, mert $|OX|$ sugár $|OA|$-val ugyanoly szöget képez, mint $|BX'|$ sugár k körnek B pontban vont érintőjével. Ennélfogva a változó $|OX|$, $|BX'|$ sugarak metszőpontjainak geometriai helye h egyenoldalú hyperbola (67). E hyperbola átmegy $|AO|$ és t metszőpontján, k körnek O középpontján, B ponton, és AB húrnak felezőpontján; a hyperbola asymptótái $|AO|$ és t egyenesek hajlásszögeinek felezőivel párhuzamosak; O és B pont érintői merőlegesek $|OA|$-ra és így h-nak középpontja OB kör-küllő felezőpontja. h és k egymást B-n kívül még egy egyenoldalú háromszög három csúcspontjában P_1, P_2, P_3-ban metszi, mely P_i metszőpontok h-nak származtatása folytán oly tulajdonságuak, hogy

$$2AP_i \text{ ív} = P_iB \text{ ív},$$

tehát OP_i sugarak AOB szöget, annak kiegészítő szögét két, illetve négy derékszögre : 1 : 2-höz viszony szerint osztják.

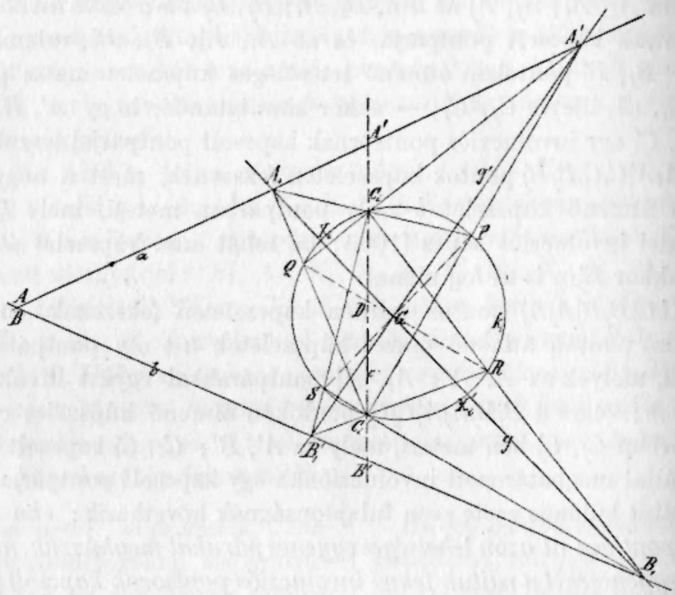
Ha AOB derékszög, akkor h elfajul két egymásra merőleges egyenessé, mely $|OB|$-vel egybeesik, illetve OB-re a felező pontban merőleges. A derékszögnek három egyenlő részre osztása tehát körző és vonalzóval eszközölhető.

Viszont könnyen következtethető, hogyan lehet: egy megrajzolt egyenoldalú hyperbola, valamint körző és vonalzó, vagy csak körző (Mascheroni!) használatával bármily szöget három egyenlő részre osztani.

---

szeletek, melyek ily módon származtathatók, egy tetszőleges g egyenest involucziós pontsor szerint metszenek.

Legyen (72. ábra) k_i egy ily kúpszelet, mely C_i, C'_i pontokon megy át s melyre vonatkozólag az összes A_i, A'_i; B_i, B'_i kapcsolt pontpárak kapcsolt pólusok; és nevezzük g egyenes metszőpontját a, b-vel A_1, B_1-nek, az ehez kapcsolt pontokat A'_1, B'_1-nek; $|A'_1B'_1|$ egyenest



72. ábra.

g'-nek; g, g' metszőpontját G-nek; g, c metszőpontját D-nek, k_i kúpszelet és g egyenes metszőpontjait X_i, X'_i-nek. E szerint:

$$|A_1B_1| \equiv g\,;\ |A'_1B'_1| \equiv g'\,;\ (g, g') \equiv G\,;\ (g, c) \equiv D\,;\ (g, k_i) \equiv X_i \text{ és } X'_i.$$

Ha kimutatjuk, hogy A_1, B_1; G, D; X_i, X'_i involucziót képező hat pont, akkor a tételben kifejezett tulajdonság be van bizonyítva, mert C_i, C'_i pontok változásával k_i, és így X_i, X'_i is változik, de A_1, B_1; G, D pontok állandók maradnak és ezért az összes X_i, X'_i pontpárak egy involucziós pontsor kapcsolt pontjai, mely már A_1, B_1; G, D kapcsolt pontpárak által meg van határozva.

$|A_1C_i|$, $|A'_1C'_i|$ egyenesek metszőpontját P-nek,
$|A'_1C_i|$, $|A_1C'_i|$ « « Q «
$|B_1C_i|$, $|B'_1C_i|$ « « R «
$|B'_1C_i|$, $|B_1C'_i|$ « « S «

nevezvén, $PQRS$ pontok $C_iC'_i$-vel együtt k_i kúpszeleten fekszenek és $PC_iRQC'_iS$ PASCAL-féle hatszögnek átellenes oldalai egymást

$$|A_1GB_1|=g\text{-ben},$$

PC'_iRQC_iS PASCAL-féle hatszögnek átellenes oldalai egymást

$$|A'_1GB'_1|=g'\text{-ben}$$

metszik, tehát a két hatszögnek közös $|PS|$, $|RQ|$ átellenes oldalai: g, g'-nek G metszőpontján mennek át.

Ha még k_i kúpszeletbe irt $QC_iRC'_i$ négyszöget tekintjük, melynek $|QC'_i|$, $|RC_i|$ átellenes oldalai g-t A_1 és B_1-ben; $|C_iC'_i|=c$, és $|RQ|$ átellenes oldalai g-t, D és G-ben metszik, következik, (97.): hogy A_1,B_1; D,G; X_i, X'_i pontok ugyanazon involuczionak kapcsolt pontpárjai, melylyel — a tételben kifejezett tulajdonság be van bizonyítva.

103. Ezen a kúpszeletek tanában fontos és általános tételek alapján képesek leszünk már a következő feladatokat megoldani.

Adva van négy pont és egy egyenes; szerkesztendő oly kúpszelet, mely a négy ponton átmegy és az egyenest érinti.

Az egyenes a négy ponton átmenő összes kúpszeletek által involucziós pontsor szerint metszetik, melynek kettőspontjai a keresett kúpszeletnek érintőpontjai az adott egyenessel.

Ha a négy pont valós, úgy a négy ponton átmenő egyenes párak, mint elfajult kúpszeletek az egyenest azon involucziós pontsor kapcsolt pontpárjaiban metszik; ezekből már a kettőspontok szerkeszthetők.

Adva van négy egyenes és egy pont; e ponton át szerkesztendő kúpszelet, mely a négy egyenest érinti.

A pontból a négy egyenest érintő kúpszeletekhez húzható érintőpárak involucziós sugársort képeznek; e sornak egyes kettőssugarai, mint érintők, meghatározzák a keresett kúpszeleteknek ötödik érintőjét.

Ha a négy egyenes valós, akkor az általuk meghatározott négy oldal átellenes szögpontjai, mint két-két pontta fajult kúpszeletek, a felvett pontból az involucziós sugársor kapcsolt sugarai által projicziáltatnak; ezekből a kettőssugarak szerkeszthetők.