III.

Analitikus mekanika.

Előadta:
Dr Farkas Gyula
e. ny. r. tanár.

1913–14. tanév I. felében.

Testek és anyagi rendszerek.

1., A végtelen tér természeti tartalmában folytonosságszakadási felületeket tapasztalunk, vagyis oly felületeket, melyeknek egyik oldalán számottevően mások a természeti tartalom tulajdonságai, mint a másik oldalán, bármily közel is ugyanahhoz a felületi ponthoz. E felületek a végtelen tért részekre osztják; amely ilyetén térrésznek érzékelhető természeti tartalma van, annak ezt az érzékelhető tartalmát nevezzük közönségesen testnek. A tudományos vizsgálódás azonban arra a fölfogásra utal bennünket, hogy a folytonosságszakadási felületek csak látszatosak és valójában igen vékony térközök jelvényei csupán, amely térközön keresztül is folytonosan változik a hellyel minden természeti tulajdonság, csakhogy igen rohamos a változásuk e térközök vastagsági vonalain. Ezeknek a térközöknek a természeti tartalmát érintkezési, vagy határrétegnek nevezzük és úgy fogjuk fel azokat, hogy a két oldalukon túl levő természeti tartalom őbennük elegyedve folytatódik. Egy ilyen határréteg két oldalán túl lévő természeti tartalomhoz számítjuk általában annak a határrétegben levő folytatását is. Némely tanulmányainkban azonban külön kell számontartani a határrétegeket és külön a rajuk kivül levő természeti tartalmat. Midőn pedig egy testrészt akarunk külön tekintetbe-venni, ehhez is számitunk határréteget, mint egyéni testrészhez, igen vékony körülfogó térköz tartalmát, amelyben összefügg a testrész a környezetével. Egy test, vagy testrész felületén közönségesen határrétegének a külső felületet értjük.

2., A mekanika alapvetésében közönségesen úgy fogható fel egy test vagy testrész, mint egymás mellé került tömegpontok folytonos sokasága. Általánosabban pedig ilyen módon elfogott testeknek, testrészeknek, mint közös térben együttlevőknek összetétele gyanánt fogandó föl egy test vagy testrész. Amely effele alkotóknak az összetétele egy test vagy testrész, azokat anyagi komponenseknek nevezzük, mihez képest egy test vagy testrész általában közös térben együttlévő anyagi komponensekből áll, amely utóbbiak egyenként tömegpontok kontinuumának tekinthetők. Testet, testrészt, anyagi komponenst és ilyenek rendszerét, anyagi rendszernek mondjuk.

3., A térnek a testek határain túl terjedő természeti tartalmát éternek nevezzük. Föltesszük erről, hogy a testekben folytatódik, úgy, hogy a testektől elfoglalt tért is kitölti, de közönségesen nem számitjuk a testek anyagi komponensei közé, valamint az elektromosságokat sem.

4., Azt az anyagi rendszert, amelynek a mekanikai állapotával, (nyugalmi vagy mozgásbeli állapotával) foglalkozni akarunk, röviden az anyagi rendszernek vagy a mi anyagi rendszerünknek mondjuk. Megjegyzendő még, hogy itt a mekanikában az anyagi rendszer komponenseit általában nem kémiai értelemben gondoljuk, ugyanis amely kémiai összetevők az adott viszonyok közt nem mozoghatnak különböző képen egy testben, azokat egy összetevőnek vesszük.

A helyhatározó rendszer választása.

5. Helyhatározó rendszerünket közönségesen vagy valamely változatlan alakzatú anyagi rendszerhez rójjuk, vagy úgy választjuk, hogy oly helyhatározó rendszerre nézve, mely változatlan alakzatú anyagi rendszerhez van róva mozog ugyan, de transformatiojának együtthatói legalább kétszer egyenletesen deriválható függvényei legyenek az időnek. Különös kijelentés hiányában minden definiciónk és állításunk ilyen „természetes" koordinatarendszerben értendő és általában csak ilyenben érvényes. Változatlan alakzatú anyagi rendszer ugyan voltaképen nem létezik, minden anyagi rendszer alakzata folyvást változik és csak annyi lehet igaz, hogy változatlannak látszik, másszóval megközelítőleg változatlan. Ehhez képest fentebbi meghatározásunkat így korrigáljuk: mindig megválasztható oly módon a koordinatarendszer, hogy itt előadandó tanaink benne helyesek és benne valamely anyagi rendszer alakzata megközelítőleg változatlan és közönségesen ily koordinatarendszert haszná-

lunk, vagy pedig olyant, amely egy ilyenre nézve úgy mozog, hogy transformatiójának együtthatói az időnek legalább kétszer egyenletesen deriválható függvényei. Midőn esetleg másféle helyhatározó rendszert akarunk használni, ezt mindig különösen megemlítjük. Az „álló” égitestek alakzatához vett koordinátarendszert abszolut koordinátarendszernek, a hozzája viszonyított mozgást, nyugvást, abszolut mozgásnak, nyugvásnak fogjuk mondani.

Elemi rész és annak elemi elmozdulása, sebessége, gyorsulása.

6, Egy anyagi komponens végtelen kis részét elemi részének mondjuk. Ha egy elemi rész egy pontja t pillanatban A helyen, ugyanazon elemi rész egy pontja pedig a végtelen kis dt idővel később a végtelen kis távolságu B helyen van, és ha a dt idő alatt az elemi rész minden átmérője elenyésző kicsiny az AB távolsághoz képest, akkor azt mondjuk, hogy az elemi résznek a dt időközben elmozdulása van s azt mondjuk, hogy az elemi rész a dt idő alatt A helyből B helybe mozdult és az AB vektort az ő dt időközi elemi elmozdulásának mondjuk.

7, Ha az A pont körül nem jelölhető meg oly kicsiny része az anyagi komponensnek, hogy végtelen kis dt időközben elmozdulása legyen, akkor és csak akkor azt mondjuk, hogy az anyagi komponens A pontja nyugalomban van a dt időközben. Ha tehát meghatározásunk szerint nincs nyugalomban az anyagi komponens A pontja, akkor bármi kicsiny is legyen a dt, megválasztható oly kicsinek az elemi rész az A pont körül, ,hogy elmozdulása legyen a dt időközben. Midőn egy anyagi komponens A pontja nincs nyugalomban, akkor a következőkben mindig úgy képzeljük megválasztva egy dt időelemnek és az A pont körül gondolt elemi rész méreteinek viszonyát, hogy legyen az elemi résznek elemi elmozdulása a dt időközben. Így értendő mindig az elemi rész a következendőkben.

8., Egy elemi rész elemi elmozdulásának és a dt időnek a hányadosáról mindig föltehető, hogy az a hely és idő folytonos, sőt egyenletesen deriválható függvénye s az elemi rész sebességének nevezzük. Sebessége totális időderiváltját pedig az elemi rész gyorsulásának nevezzük. Ezek a fogalmak nyilvánvalóan egybeesnek a pontkinematika azonos nevű fogalmaival s azért az ezekhez fűzött megállapítások rájuk is alkalmazhatók.

Kényszer.

9., Az elemi részek sohasem mozoghatnak bármi módon; mozgásuk szabadsága mindig korlátozott. Bárminképen gondoljunk is elemi részekre osztva egy anyagi rendszert, illetőleg annak az anyagi komponenseit, elemi részeinek egyidejüleg lehetséges elemi elmozdulásai sohasem egészen tetszésszerintiek. Az elemi részek öszszefüggésük által mindig korlátok közt tartják valamiképen egymás mozgásbeli szabadságát és ha az anyagi rendszer más anyagi rendszerekkel (akár belsőleg, akár külsőleg) érintkezik, többé-kevésbé általában ezek is korlátozzák elemi részeinek a mozgásbeli szabadságát. A korlátozás első módját (amely az anyagi rendszer saját elemi részeinek a viszonyából ered) belső kényszerből, második módját külső kényszerből származónak mondjuk.

10. Ha az anyagi rendszer a határán oly véges kiterjedésü anyagi rendszerrel, vagy olyannal is érintkezik, amelynek a tömege az ő benne foglalt anyagi komponensek mindegyikének a tömegéhez képest elenyésző kicsiny, akkor ezt a korlátozó rendszert kapcsoló rendszernek s egyben tömegtelennek mondjuk, amennyiben pedig az anyagi rendszer a határán oly anyagi rendszerrel, vagy olyannal is érintkezik, amelynek a mekanikai állapota az övétől függetlennek számithat, úgy ezt az anyagi rendszert teleprendszer-nek mondjuk. Ha a kapcsoló rendszer oly anyagi rendszerrel is érintkezik, amelynek a mekanikai állapota független a mi anyagi rendszerünktől, ezt is teleprendszernek fogjuk nevezni, illetőleg a teleprendszerhez fogjuk számitani akkor is, ha a mi rendszerünkkel nem érintkezik. Ha az anyagi rendszer a határán oly anyagi rendszerrel, vagy olyannal is érintkezik,

amely nem korlátozza határos elemi részeinek a mozgásbeli szabadságát, akkor anyagi rendszerünk felületét, illetőleg felületén foglalt részét a nem korlátozó rendszerben szabadfelületnek nevezzük. Így nevezzük a tiszta éterben foglalt felületét is. Amit tehát szabadfelületnek nevezünk, azon nincs külső kényszer.

11, A következőkben mindig oly anyagi rendszerre gondoljunk, amelynek a külső kényszere csak kapcsoló vagy teleprendszertől, vagy kapcsoló és teleprendszertől származik; tehát olyanra gondoljunk mindig, amely az ő határán csak kapcsolórendszerrel, teleprendszerrel és nem korlátozó rendszerrel érintkezik. Ha az anyagi rendszer, amelynek a mekanikájával foglalkozni akarunk, másféle rendszerekkel is érintkezik, mint ilyenekkel, akkor oly anyagi rendszert választunk ki a végtelen tér természeti tartalmából, amely egyfelől magában foglalja azt az anyagi rendszert, mellyel foglalkozni akarunk, másfelől vagy nem visel külső kényszert, vagy csak kapcsoló rendszertől és teleprendszertől visel külső kényszert.

12, Az anyagi komponensek elemi részeinek egyidejüleg lehetséges elemi elmozdulásairól föltehető, hogy a hely és idő egyenletesen deriválható függvényeik. Már ezzel is korlátozva vannak azok. Azonfelül a belső kényszer kifejezésére még közönségesen határozott linearis első rendű parciális differenciális relációk (egyenletek és egyenlőtlenségek) szolgálnak az anyagi komponensek közös helyen lévő elemi részeinek lehetséges elmozdulásai között, mi mellett azonban algebrai lineáris relációk (egyenletek és egyenlőtlenségek) is állhatnak fenn közöttük. A relatiók együtthatói általában az időnek, a helynek és a sebességnek s utóbbiak koordinataderiváltjainak határozott egyenletesen deriválható függvényeik, sebességeken az anyagi komponenseknek az illető pontban és pillanatban lévő sebességei értetvén. Ha legalább egy ilyetén reláció együtthatói némely mozgás esetén az elemi részek sebességétől is függenek, akkor azt mondjuk, hogy belső surlódása van az anyagi rendszernek. Ha egyetlen reláció együtthatói sem függenek semmiféle mozgás közben sem az elemi részek sebességétől, hanem legfeljebb csak a helytől és időtől függenek (ami csak megközelitő eset lehet), akkor azt mondjuk, hogy nincs belső surlódása az anyagi rendszernek.

A külső kényszert a lehetséges elemi elmozdulások egyenletes deriválhatósága mellett közönségesen algebrai lineáris relációkra tudjuk redukálni. Ezen relációk együtthatói általában az idő, a hely és a sebességek deriválható függvényei; amely részén pedig az anyagi rendszernek e relaciók mindenféle mozgás közben függetlenek az érintkező anyagi részek sebességétől és csak azok helyétől és az időtől függenek, azon surlódástalannak mondjuk az érintkezést, egyébütt surlódásosnak mondjuk és ezen értelmében beszélünk külső surlódásról, vagy annak hiányáról, a hiánya csak megközelitő lehet.

13.) A következendőkben mindig tegyük föl, hogy a kapcsoló-rendszer, mint külön tekintett anyagi rendszer a maga határának azon a részén, amelyen sem a mi anyagi rendszerünkkel, sem a teleprendszerrel nem érintkezik, szabad, vagyis csak oly környezettel érintkezik, amely mozgásának a szabadságát nem korlátozza és mi több, tegyük föl, hogy olyan ez a környezet, hogy tőle a kapcsoló rendszer mekanikai állapota egyáltalán nem függ számottevő mértékben. Továbbá még azt is feltegyük majd mindig a következendőkben a kapcsoló rendszerről, mint külön tekintett anyagi rendszerről, hogy sem anyagi rendszerünkkel, sem a teleprendszerrel, sem önmagával sehol-sem surlódik. Ha a kapcsoló rendszer, illetőleg annak a környezete nem teljesitené ezeket a feltételeket, akkor a kapcsoló rendszert is anyagi rendszerünkbe kell számitanunk úgy, hogy a mi anyagi rendszerünk egy kiegészitő részét képezi.

Szabad gyorsulás és szabad erő, teljes erő, kényszererő.

14.) Az anyagi rendszer egy komponensének egy belső elemi részéből és ezen elemi rész környezetéből, épúgy az anyagi komponensnek az esetleges szabad-felületnél lévő elemi részből és annak környezetéből eltávolítva gondoljuk igen kis időre az anyagi rendszer összes többi részeit úgy, hogy egy végtelen kis zárt felület anyagi tartalmából csupán azon egyetlen elemi rész maradjon meg; amely gyorsulással ekkor bírna az a belső elemi rész, vagy az a szabad felületnél lévő elemi rész, azt szabad gyorsulásának nevezzük; szabadgyorsulásának a tömegével képzett szorzatát a reá ható szabaderőnek mondjuk. Az anyagi rendszer határán de nem szabad felületnél lévő elemi részből és annak a környezetéből eltávolítva gondoljuk nemcsak az anyagi rendszer többi elemi részeit, hanem a kapcsoló, illetőleg a teleprendszer elemi részeit is igen kis időre s amely gyorsulással ekkor bírna az elemi rész, azt nevezzük az ő szabadgyorsulásának. Ennek és a tömegének a szorzatát a reá ható szabaderőnek mondjuk. Figyelembe veendő, hogy az éternek a részeit nem gondoljuk eltávolítva az elemi részből és környezetéből. Az anyagi rendszer belsejében csakis magának az anyagi rendszernek a részeit annak az egynek a kivételével, az anyagi rendszer határán pedig az ő többi részein kívül még csak a határos kapcsoló vagy teleprendszer részeit gondoljuk eltávolítva, de sohasem az étert sem a szabad fölülettel határos külső anyagi rendszer részeit.

15., Ha az elemi rész szabadgyorsulása: γ, tömege: ∂m, akkor a reá ható szabaderő:

$$\gamma\,\partial m.$$

Ha az elemi rész térfogata: ∂V és ha $\partial m = \rho \partial V$, akkor a ρ együtthatót mondjuk az elemi rész tömöttségének. Ezszerint az elemi részre ható szabaderő egyszersmind az elemi rész szabadgyorsulásának, tömöttségének és térfogatának a szorzata minden időpontban:

$$\gamma \rho \partial V$$

Feltehető, hogy γ és ρ minden anyagi komponensben folytonos, sőt egyenletesen deriválható függvénye a helynek és időnek.

Az elemi rész tömegének és gyorsulásának a szorzatát a reá ható teljes erőnek, ezen szorzat ellentétesét inercia erő-nek nevezzük; a teljes erőnek és a szabaderőnek a különbségét az elemi részre ható kényszer-erő-nek mondjuk. Épen úgy következik, mint az egyes tömegpont mekanikájában, hogy a kényszererő minden természetes koordinata rendszerben ugyanaz a vektor.

Definicióink értelmében a szabad felületen ható szabaderők magukban foglalják a környezettől (pl. levegőtől) származó összes erőket (pl. archimédesi fölhajtás, környezeti ellenállás odaértve a környezettel való „surlódás" ellenhatását is.

A kapcsoló rendszer passzivitása.

16, Gátoljuk meg t pillanattól kezdve igen kis időre a kapcsoló rendszernek és a teleprendszernek a mi anyagi rendszerünktől független mozgását, ha van ilyen és szabaditsuk meg anyagi rendszerünket ezektől a rendszerektől éspedig oly módon, hogy anyagi rendszerünk nem szabad felületének a környezetéből ezen rendszerek elemi részeit eltávolitjuk, továbbá oly szabaderőket hattassunk az anyagi rendszerünkre, hogy a t pillanat után következő igen kis időre nyugalomban legyen az. Ha akkor is nyugalomban volna, hogyha a kapcsoló rendszertől nem szabaditottuk volna meg és ha így van ez, bárminkép válasszuk is meg a t pillanatot, és bármilyen is a mi anyagi rendszerünknek abban lehetséges helyzete, úgy azt mondjuk a kapcsoló rendszerről, hogy passiv. Emellett ne feledjük azokat a megszoritásokat se, amelyeket a 13., artikulusban tettünk a kapcsoló rendszert illetőleg. A következőkben, hacsak az ellenkezőt kifejezetten nem állitjuk, mindig fel fogjuk tenni, hogy a kapcsoló rendszer passiv.

Munka fogalmak.

17. Azonfélék, mint a magánvaló tömegpontok mekanikájában. Egy elemi részre ható $\mathfrak{v}\,\mathfrak{d}m$ szabaderőnek és az elemi rész $d\mathfrak{w}$ elemi elmozdulásának skalaris szorzata:

$$\mathfrak{v}\,\mathfrak{d}m\; d\mathfrak{w} = \mathfrak{v}\, d\mathfrak{w}\; \mathfrak{d}m$$

a $\mathfrak{v}\,\mathfrak{d}m$ szabaderőtől az elemi rész $d\mathfrak{w}$ elmozdulásán végzett munka", vagy „a szabaderőnek az elemi részen dt időelemben végzett elemi munkája." – Az anyagi rendszerre, vagy annak egy részére kiterjedő összegeléssel:

$$\mathfrak{S}\,\mathfrak{y}\,d\mathfrak{w}\,\mathfrak{D}m$$

„a szabad erőnek az anyagi rendszeren, illetőleg annak egy részén végzett elemi munkája"; természetesen az összegben foglalt $d\mathfrak{w}$ elemi elmozdulásokon egyidejű elmozdulások értendők.

Ha a $\mathfrak{D}m$ tömegű rész koordinátái: x, y, z, úgy részletesen írva:

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{y}_x\,dx + \mathfrak{y}_y\,dy + \mathfrak{y}_z\,dz)\,\mathfrak{D}m$$

ez az elemi munka. – További az

$$(\ddot{\mathfrak{w}} - \mathfrak{y})\,\mathfrak{D}m\,d\mathfrak{w} \equiv (\ddot{\mathfrak{w}} - \mathfrak{y})\,d\mathfrak{w}\,\mathfrak{D}m$$

„a kényszererőnek az elemi részen dt idő alatt végzett elemi munkája," és:

$$\mathfrak{S}(\ddot{\mathfrak{w}} - \mathfrak{y})\,d\mathfrak{w}\,\mathfrak{D}m$$

„a kényszererőknek az anyagi rendszerünkön vagy annak egy részén dt idő alatt végzett elemi munkája." Részletesen írva:

$$\mathfrak{S}[(\ddot{x} - \mathfrak{y}_x)dx + (\ddot{y} - \mathfrak{y}_y)\,dy + (\ddot{z} - \mathfrak{y}_z)\,dz]\,\mathfrak{D}m$$

az egész anyagi rendszerünkön vagy annak egy részén végzett elemi munkája a kényszernek aszerint, amint az összegelést az egész rendszerre, vagy egy részére vonatkoztatjuk.

18.) Ha mindezekben a kifejezésekben a $d\mathfrak{w}$ tényleges elmozdulások helyett a $\partial\mathfrak{w}$ lehetséges elemi elmozdulásokat írjuk, akkor a megfelelő „lehetséges elemi munkákat" kapjuk. Természetesen az összegekben mindig egyidejűleg lehetséges elemi elmozdulások értendők.

Általános tapasztalati törvény.

19. Az előrebocsátott definiciók és föltevések értelmében, mint tapasztalati törvény állítható, hogy egy természetes koordináta-rendszerben egy anyagi rendszerre ható kényszererők minden időelemben a lehető legkisebb munkát végzik.

A dt időelemben egyidejűleg lehetséges, különben bármiféle elemi elmozdulásokat $(\partial x, \partial y, \partial z) \equiv \partial w$ jelölje, ugyanazon dt időelemben valósággal létesülőket pedig $(dx, dy, dz) \equiv dw$. Úgy a kimondott tapasztalati törvény általános kifejezése ez:

$$S(\ddot{w} - \gamma)\, \partial w . \mathfrak{D}m \geqq S(\ddot{w} - \gamma)\, dw\, \mathfrak{D}m .$$

Részletesen írva:

$$S\left[(\ddot{x} - \gamma_x)\partial x + (\ddot{y} - \gamma_y)\partial y + (\ddot{z} - \gamma_z)\partial z\right]\mathfrak{D}m \geqq S\left[(\ddot{x} - \gamma_x)dx + (\ddot{y} - \gamma_y)dy + (\ddot{z} - \gamma_z)dz\right]\mathfrak{D}m .$$

20. Nyilvánvalóan így is írható ez az egyenlőtlenség:

$$S\left[(\ddot{x} - \gamma_x)(\partial x - dx) + (\ddot{y} - \gamma_y)(\partial y - dy) + (\ddot{z} - \gamma_z)(\partial z - dz)\right]\mathfrak{D}m \geqq 0$$

A $\partial w - dw = (\partial x - dx, \partial y - dy, \partial z - dz)$ vektorok a valóságos elemi elmozdulásokra nézve relative lehetséges elemi elmozdulások. E relative lehetséges elemi elmozdulásokat virtuális elmozdulásoknak nevezzük és $\delta w \equiv (\delta x, \delta y, \delta z)$ alakban írjuk. Eszerint:

$$S\left[(\ddot{x} - \gamma_x)\delta x + (\ddot{y} - \gamma_y)\delta y + (\ddot{z} - \gamma_z)\delta z\right]\mathfrak{D}m \geqq 0$$

A baloldali kifejezést „a kényszererők virtuális munkájának" mondjuk. Tapasztalati törvényünk így is kimondható tehát: „a kényszererők virtuális munkája sohasem negatív." Röviden a virtuális munka törvényének, vagy a mekanika alaptörvényének vagy D'Alambert–Fourier–féle törvénynek nevezzük. Egyenlőtlenségünket magát a virtuális munka egyenlőtlenségének és röviden elvi egyenlőtlenségnek mondjuk.

21., Egy-egy anyagi komponensben a virtuális elmozdulások a hely és idő egyenletesen deriválható függvényeik, mert a lehetségesek úgy a ténylegesek is egyenletesen deriválhatók a koordináták és az idő szerint, tehát a lehetségesek és a ténylegesek különbségei is.

22., Ha a kényszer matematikai kifejezéseiben (a lehetséges elemi elmozdulások relációiban) szereplő ($\partial x, \partial y, \partial z$) lehetséges elemi elmozdulások helyett a ($\delta x + dx, \delta y + dy, \delta z + dz$) összegeket írjuk, akkor nyilvánképen a virtuális elmozdulások relációit kapjuk. Ezeket a virtuális kényszer relatióinak vagy a kényszer virtuális relatióinak nevezzük.

Az egyszer meghatározott kényszer csak addig tart, amig annak a relátiói a tényleges elemi elmozdulásokkal mind egyenletileg (az egyenlőtlenségek is az egyenlőségi jel szerint) teljesülnek. Amig tehát tart egy kényszer, addig annak a virtuális relációiból (amelyek a $\delta x + dx, \delta y + dy, \delta z + dz$ – féle komponensekre vonatkoznak) a tényleges elemi elmozdulások komponensei (dx, dy, dz) és a tiszta tagok kiesnek, miáltal a kényszer virtuális relációi homogén relációkká válnak.

23. A virtualis elmozdulások
$$(\delta x, \delta y, \delta z) \equiv (\partial x - dx, \partial y - dy, \partial z - dz)$$
felől mondható, hogy egyszersmind azok az elemi elmozdulások, amelyek fizikai végtelen nagy sebességekkel lehetségesek az anyagi rendszerben, mert a tényleges mekanikai állapotokat mindig oly viszonyok közt gondoljuk, amelyek között csak fizikai véges nagy sebességek fordulhatnak elő használatos koordinátarendszereinkben, tehát ha $(\partial x, \partial y, \partial z)$ fizikai végtelen nagy sebességgel lehetséges elemi elmozdulás, akkor hozzá képest (dx, dy, dz) nem tesz számot s úgy fizikai végtelen nagy pontossággal $(\delta x, \delta y, \delta z)$ = fizikai végtelen nagy sebességgel lehetséges elemi elmozdulás.

24. A virtuális elmozdulásoknak más tengelyrendszerekbe való transformációja ugyanazon szabály alá esik a folytonos testek mekanikájában, mint a magánvaló tömegpontok mekanikájában, mert az utóbbiban is a tényleges elemi elmozdulásokra nézve relative lehetséges elemi elmozdulásokat jelentik. E szerint ha természetes koordináta rendszerek közt egy koordinatatranszformáció egyenletei ezek:
$$x' = a + \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z$$
$$y' = b + \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z$$
$$z' = c + \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z,$$
akkor:

$$\delta x' = \alpha_1 \delta x + \beta_1 \delta y + \gamma_1 \delta z$$
$$\delta y' = \alpha_2 \delta x + \beta_2 \delta y + \gamma_2 \delta z$$
$$\delta z' = \alpha_3 \delta x + \beta_3 \delta y + \gamma_3 \delta z$$

olyankor is, midőn az a, b, c origói koordináták és az α, β, γ kilenc iránkoszinusz változik az idővel. A virtuális elmozdulások tehát minden természetes koordinátarendszerben ugyanazok a vectorok.

25, Minthogy a kényszererő is minden természetes koordináta-rendszerben ugyanaz a vector, ennélfogva a kényszererőnek és a virtualis elmozdulásnak egy természetes koordinátarendszerben képezett skaláris szorzata minden más természetes koordináta-rendszerben is a kényszererő és virtuális elmozdulás skaláris szorzata. Következőleg a virtuális munka egy természetes koordinátarendszerben sem lehet negativ: a mekanika alaptörvénye minden természetes koordinátarendszerben ugyanaz.

26, A következőkben a szabadgyorsulások helyett gyakran fogjuk használni majd a szabaderőket. Irjuk, hogy:

$$\mathfrak{v}_x \mathfrak{D}m = \mathfrak{D}X, \quad \mathfrak{v}_y \mathfrak{D}m = \mathfrak{D}Y, \quad \mathfrak{v}_z \mathfrak{D}m = \mathfrak{D}Z,$$

akkor $(\mathfrak{D}X, \mathfrak{D}Y, \mathfrak{D}Z)$ a szabaderő, éspedig az a szabaderő, amely t pillanatban x, y, z helyen $\mathfrak{D}m$ tömegü elemi részre hat. Ez a testek belsejében mindig oly rendü végtelen kicsiny, mint az elemi rész térfogata. A testek érintkezési rétegeiben azonban általában felületelem rendén lévő végtelen kicsiny. — A szabaderők alkalmazásával a virtualis munka törvénye így van:

$$S[(\ddot{x}\,\mathfrak{d}m - \mathfrak{D}X)\,\delta x + (\ddot{y}\,\mathfrak{d}m - \mathfrak{D}Y)\,\delta y + (\ddot{z}\,\mathfrak{d}m - \mathfrak{D}Z)\,\delta z] \geqq 0$$

27, Ne feledjük azt a föltételünket, hogy a kapcsolórendszer passziv. Ha aktiv volna a kapcsoló rendszer, akkor már ez az egyenlőtlenség általában nem állana; azonban bizonyosan lehet olyan $(\mathfrak{D}X', \mathfrak{D}Y', \mathfrak{D}Z')$ vektort adni a $(\mathfrak{D}X, \mathfrak{D}Y, \mathfrak{D}Z)$ vektorhoz, hogy ekkor is álljon. Ezt „a kapcsoló rendszertől származó erőnek" nevezzük. Némely gyakran előforduló kapcsoló rendszerek esetében külön kisérletekkel meg tudjuk határozni ezt, pl. midőn a kapcsoló rendszer egy nyujthatatlan, de torzió ellenében rugalmas testszál.

Parciális alkalmazások.

28, Ritkán ismerjük annyira anyagi rendszerünket, hogy összes virtuális elmozdulásait meg tudjuk határozni, vagyis, hogy oly relációkat tudjunk szerkeszteni a rendszer elemei részeinek a virtuális elmozdulásai között, amelyeknek az elemi részek összes virtuális elmozdulásai elegettesznek s amelyek minden megoldását az elemi részek virtuális elmozdulásai teszik. De gyakran meg tudjuk határozni a virtuális elmozdulások egy részét. Szolgáljanak példakép a következő speciális esetek:

1. eset. Olyanok az anyagi rendszer viszonyai, hogy az egy vagy több irányban virtualisan eltolható. Ez azt jelenti, hogy egy vagy több irányban úgy mozdítható

virtualisan az anyagi rendszer, hogy minden elemi része egyenlő virtuális elmozdulást végez, pl. valamennyi elemi része (δa, δb, δc) virtualis elmozdulást végez, midőn is ezt a (δa, δb, δc) elmozdulást a rendszer „virtuális eltolásának" nevezzük.

2, eset. Anyagi rendszerünk viszonyai olyanok, hogy véges számú részei egyszerre különböző virtuális eltolások alá vethetők, pl egyszerre virtuálisan eltolhatók (δa_1, δb_1, δc_1), (δa_2, δb_2, δc_2) stb elemi vektorok szerint. Ezen elemi vektorok (virtuális eltolások) általában egyszerü algebrai relatiókat teljesitenek.

3, eset. Olyanok az anyagi rendszer viszonyai, hogy az anyagi rendszer egy vagy több tengely körül virtuálisan elforditható, vagyis úgy mozditható virtualisan, hogy minden elemi része változatlan távolban marad a tengelytől és egyenlő szöget s egyező értelemben ír le a tengely körül a tengelyre merőleges mozdulással.

4, eset. Anyagi rendszerünk viszonyai olyanok, hogy véges számú részei egyszerre különböző tengelyek körül fordithatók el virtualisan. Ezen tengelyek helyüket, irányukat általában valamely határozott módon változtatják.

5. eset. A virtualis elmozdulások közt vannak a tényleges elemi elmozdulásokkal arányos elmozdulások.

29, Ezen öt speciális eset a leggyakoribb. Amellett egyszerre kettejük, háromjuk, négyjük, vagy mind az ötük is előfordulhat. Általában ügyen speciális csoportjai ez öt esetben foglaltak a virtualis elmozdulásoknak, de úgy ezek alapján, mint más speciális csoportok alapján is sokszor vonhatók fontos következtetések a mekanikai állapotra, amelynek a kimerítő tárgyalásához azonban az összes virtualis elmozdulások ösmerete volna szükséges és azonfelül még általában a körről szóló tanok is kellenének. Most majd egyenként az elsorolt öt esettel fogunk foglalkozni. Tárgyalásunk bizonyos fogalmak használatát kívánja, ilyenek: a tömegcentrum, a forgató momentum, az inercia momentum stb. fogalma. – Legközelebb a két első esetről legyen a szó. Ezek érdekében meg kell ismerkednünk a tömegcentrum fogalmával.

A tömegcentrum fogalma.

30, Két testelem (elemi rész) tömegcentrumán azt a pontot értjük, amely a két testelem távolsági vonalát a két tömeg fordított arányában osztja két részre. Ha tehát Dm_1 az egyik testelem tömege, Dm_2 a másiké, és ha a kettőnek a távolsági vonalán az O oly pont, hogy Dm_1-től való távola úgy arányik a Dm_2-től való távolához, mint $Dm_2 : Dm_1$, akkor az O pont a Dm_1 tömegű és Dm_2 tömegű testelem tömegcentruma. A távolsági vonalon levő O pontnak Dm_1-től való távolságát r_1-el, a Dm_2-től való távolságát r_2-vel jelölvén, az O pont a két testelem tömegcentruma, ha: $r_1 : r_2 = \mathfrak{D}m_2 : \mathfrak{D}m_1$.

Három testelem tömegcentrumán azt a pontot értjük, amely két testelem tömegcentrumának és a harmadik testelemnek a távolsági vonalát a két testelem összes tömegének és a harmadik testelem tömegének a fordított arányában osztja két részre.

Négy testelem tömegcentrumán azt a pontot értjük, amely három testelem tömegcentrumának és a negyedik testelemnek távolsági vonalát a három testelem összes tömegének és a negyedik testelem tömegének fordított arányában osztja két részre, s. i. t.

31., Akárhány testelemhez egy tömegcentrum tartozik, vagyis a tömegcentrum mindig teljesen meghatározott pont. Ez két testelem esetén világos, azonban három testelem esetén már kétségesnek látszik, mert azt a két testelemet, amelynek tömegcentrumára a definitió támaszkodik, háromféleképen lehet megválasztani; négy testelem esetén 12, öt testelem esetében 60-féleképen s. i. t. határozható meg a tömegcentrum definitióink szerint. Ámde mindannyi meghatározási mód ugyanahhoz a ponthoz vezet. Most majd meggyőződést fogunk erről szerezni és pedig az által, hogy meg fogjuk tudni, hogy mikép lehet adott testelemek koordinátáival és tömegével azok tömegcentrumának a koordinátáit kifejezni.

Két testelem esetén egyik testelem tömegét $\mathfrak{D}m_1$, koordinátáit x_1, y_1, z_1, a másik testelem tömegét, illetölcg koordinátáit $\mathscr{D}m_2$: x_2, y_2, z_2 jelölje; tömegcentrumuktól való távolságuk pedig r_1, illetőleg r_2 legyen, végül a két testelem tömegcentrumának a koordinátáit ξ_2, η_2, ζ_2 jelölje. Könnyű fölismerni, hogy az 1.-es számú testelemből a tömegcentrumba nyuló vektor és a tömegcentrumból a 2-es számú testelembe nyuló vektor egyező irányú. Az első vektor komponensei azonban ezek:

$$\xi_2 - x_1,\ \eta_2 - y_1\ \zeta_2 - z_1$$

a másik vektor komponensei pedig ezek:

$$x_2 - \xi_2,\ y_2 - \eta_2,\ z_2 - \zeta_2$$

Igy tehát a két vektor közös irányának iránykoszinuszai: $\dfrac{\xi_2 - x_1}{r_1} = \dfrac{x_2 - \xi_2}{r_2}$ stb.

Ebből kifolyólag:

$$\frac{\xi_2 - x_1}{x_2 - \xi_2} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{\mathscr{D}m_2}{\mathscr{D}m_1},\ \text{honnan:}\ \xi_2 = \frac{x_1\mathscr{D}m_1 + x_2\mathscr{D}m_2}{\mathscr{D}m_1 + \mathscr{D}m_2}$$

hasonlóképen találjuk, hogy:

$$\eta_2 = \frac{y_1\mathscr{D}m_1 + y_2\mathscr{D}m_2}{\mathscr{D}m_1 + \mathscr{D}m_2}$$

$$\zeta_2 = \frac{z_1\mathscr{D}m_1 + z_2\mathscr{D}m_2}{\mathscr{D}m_1 + \mathscr{D}m_2}$$

Három testelem esetén a harmadiknak a tömegét jelölje $\mathscr{D}m_3$, a koordinátáit pedig jelöljék x_3, y_3, z_3, a három testelem tömegcentrumának a koordinátái legyenek: $\xi_3, \eta_3\ \zeta_3$. Ezt a pontot a definitió értelmében úgy lehet meghatározni, mint a $\mathscr{D}m_1$ és $\mathscr{D}m_2$ tömegü testelem tömegcentrumában gondolt: $\mathcal{D}m_1 + \mathcal{D}m_2$ tömegü testelemnek s a harmadik testelemnek a tömegcentrumát. Következőleg

$$\xi_3 = \frac{\xi_2(\mathcal{D}m_1 + \mathcal{D}m_2) + x_3 \mathcal{D}m_3}{(\mathcal{D}m_1 + \mathcal{D}m_2) + \mathcal{D}m_3}$$

tehát ξ_2 kifejezésének helyettesítése után:

$$\xi_3 = \frac{x_1 \mathcal{D}m_1 + x_2 \mathcal{D}m_2 + x_3 \mathcal{D}m_3}{\mathcal{D}m_1 + \mathcal{D}m_2 + \mathcal{D}m_3},$$ hasonlóképen találjuk, hogy:

$$\eta_3 = \frac{y_1 \mathcal{D}m_1 + y_2 \mathcal{D}m_2 + y_3 \mathcal{D}m_3}{\mathcal{D}m_1 + \mathcal{D}m_2 + \mathcal{D}m_3}$$

$$\zeta_3 = \frac{z_1 \mathcal{D}m_1 + z_2 \mathcal{D}m_2 + z_3 \mathcal{D}m_3}{\mathcal{D}m_1 + \mathcal{D}m_2 + \mathcal{D}m_3}$$

Négy testelem esetén a tömegcentrum definiciójának értelmében úgy határozhatjuk meg a tömegcentrumot, hogy a $\mathcal{D}m_1$, $\mathcal{D}m_2$, $\mathcal{D}m_3$ tömegü testelem tömegcentrumában gondolt $\mathcal{D}m_1 + \mathcal{D}m_2 + \mathcal{D}m_3$ tömegü testelemhez s a negyedik testelemhez tűzzük ki a tömegcentrumot. Ezerint, ha a négy testelem tömegcentrumának a koordinátái: ξ_4, η_4, ζ_4 és a negyedik testelem tömege: $\mathcal{D}m_4$, koordinátái x_4, y_4, z_4; akkor:

$$\xi_4 = \frac{\xi_3(\mathcal{D}m_1 + \mathcal{D}m_2 + \mathcal{D}m_3) + x_4 \mathcal{D}m_4}{(\mathcal{D}m_1 + \mathcal{D}m_2 + \mathcal{D}m_3) + \mathcal{D}m_4},$$ stb.

Ezekből helyettesítés rendjén:

$$\xi_4 = \frac{x_1 \mathcal{D}m_1 + x_2 \mathcal{D}m_2 + x_3 \mathcal{D}m_3 + x_4 \mathcal{D}m_4}{\mathcal{D}m_1 + \mathcal{D}m_2 + \mathcal{D}m_3 + \mathcal{D}m_4},$$ stb.

Nyilvánvaló, hogy n testelem tömegcentrumának koordinátái ezek:

$$\xi = \frac{x_1 Dm_1 + x_2 Dm_2 + \cdots + x_n Dm_n}{Dm_1 + Dm_2 + \cdots + Dm_n}$$

$$\eta = \frac{y_1 Dm_1 + y_2 Dm_2 + \cdots + y_n Dm_n}{Dm_1 + Dm_2 + \cdots + Dm_n}$$

$$\zeta = \frac{z_1 Dm_1 + z_2 Dm_2 + \cdots + z_n Dm_n}{Dm_1 + Dm_2 + \cdots + Dm_n}$$

Minthogy ezek a kifejezések az indexekre nézve szimmetrikusak, ennélfogva bárminként válasszuk is meg a koordinátarendszerünkben a testelemek sorrendjét, mindig ugyanahhoz a ponthoz jutunk el.

32.) A tömegcentrumnak a testelemekhez viszonyított helyzete a koordinátarendszertől független, mert a 30.) pont definiciója független attól.

33.) Ámde a 30.) pont definiciójának csak úgy van értelme, hogyha a számbavett elemi részek méretei azok távolságaihoz képest számot nem tevő kicsinyek. Folytonos testek esetében tehát ez a definició fogyatékos.

Fordítsuk azonban figyelmünket a 31.) pont végén foglalt koordinata kifejezésekre. Ezeknek akkor is határozott értelmük van, ha bennük folytonos anyagi rendszer elemi részeinek tekintjük az elemi részeket, mikoris $n = \infty$. Ugyanis, ha a tömegelemeket olykép fejezzük ki, mint térelemeknek és tömöttségeknek a szorzatát, akkor mind a számlálók, mind a nevezők határozott értékű térintegrálok képében jelentkeznek. Egyébként a nevezők nyilvánképen az anyagi rendszer teljes m tömegét jelentik. Anyagi rendszerünknek a $\mathfrak{D}V$ térelemben foglalt teljes elemi része $\mathfrak{D}m$ tömegű és ϱ tömöttségű legyen. Észerint:

$$\xi = \frac{\mathfrak{S}\, x\, \mathfrak{D}m}{\mathfrak{S}\, \mathfrak{D}m} = \frac{\mathfrak{S}\, x\, \varrho\, \mathfrak{D}V}{m}$$

$$\eta = \frac{\mathfrak{S}\, y\, \mathfrak{D}m}{\mathfrak{S}\, \mathfrak{D}m} = \frac{\mathfrak{S}\, y\, \varrho\, \mathfrak{D}V}{m}$$

$$\zeta = \frac{\mathfrak{S}\, z\, \mathfrak{D}m}{\mathfrak{S}\, \mathfrak{D}m} = \frac{\mathfrak{S}\, z\, \varrho\, \mathfrak{D}V}{m}$$

és ezek határozott koordináták, koordinátarendszerünkben határozott pont koordinátái. Ezt a pontot nevezzük most már anyagi rendszerünk tömegcentrumának.

34, Új kifejezéseink alakja olyan, mint véges távolságú elemi részek esetén, tehát a tömegcentrumnak az elemi részekhez viszonyított helyzete most is független a koordinátarendszertől: a tömegcentrumnak az illető anyagi rendszerhez viszonyított helyzete minden koordinátarendszerben ugyanaz. Koordinata transzformáltió által is meggyőződhetünk erről.

35, Az alkalmazások érdekében megismerkedünk egy kis tantétellel, mely sokszor hasznos a tömegcentrumok helyének a meghatározásában.

Ha egy anyagi rendszert tetszésszerinti módon két, három, vagy több részre osztva gondolunk, azután minden egyes rész helyett annak a tömegcentrumában lévő s annak a tömegével egyenlő tömegű pontot gondolunk, az e módon keletkező rendszer tömegcentruma mindig egybeesik az eredeti rendszer tömegcentrumával.

Az anyagi rendszer egyes részeinek a tömege ugyanis legyen: $m_1, m_2, \ldots$ stb. és ezen egyes részek tömegcentrumának a koordinátái legyenek rendre: ξ_1, η_1, ζ_1; ξ_2, η_2, ζ_2; ... Ha most a ξ_i, η_i, ζ_i helyen m_i tömegű pontot gondolunk, akkor az $i = 1, 2, \ldots$ számú tömegpontok rendszerének a tömegcentrumát:

$$\xi = \frac{\xi_1 m_1 + \xi_2 m_2 + \cdots}{m_1 + m_2 + \cdots}, \text{ stb}$$

koordináták tűzik ki. Ámde a tényleges anyagi rendszerben:

$$\xi_1 = \frac{S_1 x\, Dm}{m_1}, \text{ stb.}$$

$$\xi_2 = \frac{S_2 x\, Dm}{m_2}, \text{ stb.}$$

. . . .

. . . .

ahol a szummák indexei azt kívánják, hogy az összegelés a rendszernek csak az illető indexxel jelölt részére terjedjen ki. Helyettesítsük be az ilyeneket az előbbiekbe s tekintve, hogy $m_1 = S_1 Dm$, stb. azt kapjuk, hogy:

$$\xi = \frac{S_1 x\, Dm + S_2 x\, Dm + \cdots}{S_1 Dm + S_2 Dm + \cdots}, \text{ stb.}$$

ezek azonban így is írhatók:

$$\xi = \frac{S\, x\, Dm}{S\, Dm}, \text{ stb.}$$

(odaértve, hogy itt az összegelések az egész anyagi rendszerre kiterjednek.) Már pedig ezek a kifejezések nem egyebek, mint az eredeti anyagi rendszer tömegcentrumának a koordinátái.

36., A kimutatott tétel alapján azt is könnyű felismerni, hogy ha adva van egy anyagi rendszernek s egy részének a tömege és tömegcentruma; mikép határozható meg a másik részének a tömege és tömegcentruma. Ugyanis, ha az anyagi rendszer egyik részét 1 index, másik részét 0 index jelöli (minélfogva $m_0 = m - m_1$), akkor 35., szerint

$$m_1 \xi_1 + (m - m_1)\xi_0 = m\xi \text{ , stb.,}$$

tehát:
$$\xi_0 = \frac{m\xi - m_1\xi_1}{m - m_1} \text{, stb.}$$

A tömegcentrum mekanikája.

37., Tegyük fel, hogy olyanok az anyagi rendszer viszonyai, hogy az anyagi rendszer virtuálisan minden irányban eltolható. Akkor bármely virtuális eltolást jelentsen $(\delta a, \delta b, \delta c)$, szabadságunkban van egyebek közt az is, hogy valamennyi virtuális elmozdulás helyébe ezt a $(\delta a, \delta b, \delta c)$ vektort írjuk a

$$S[(\ddot{x}\,\mathfrak{D}m - \mathfrak{D}X)\delta x + (\ddot{y}\,\mathfrak{D}m - \mathfrak{D}Y)\delta y + (\ddot{z}\,\mathfrak{D}m - \mathfrak{D}Z)\delta z \geqq 0$$

elvi egyenlőtlenségben. Ezt valóban megcselekedve, elvi egyenlőtlenségünkből a következő speciális (elvi) egyenlőtlenség származik:

$$\delta a S(\ddot{x}\mathfrak{D}m-\mathfrak{D}X)+\delta b S(\ddot{y}\mathfrak{D}m-\mathfrak{D}Y)+\delta c S(\ddot{z}\mathfrak{D}m-\mathfrak{D}Z)\overset{>}{=}0$$

Minthogy pedig $\delta a, \delta b, \delta c$ tetszés szerint választhatók meg, úgy:

$$S(\ddot{x}\mathfrak{D}m-\mathfrak{D}X)=0$$
$$S(\ddot{y}\mathfrak{D}m-\mathfrak{D}Y)=0$$
$$S(\ddot{z}\mathfrak{D}m-\mathfrak{D}Z)=0$$

Kitűnik ez, hogyha egyszer δb és δc helyett zérust írunk, a δa helyett pedig majd positivot, majd negativot gondolunk és í.t.

Amde:

$$S\ddot{x}\mathfrak{D}m=\frac{d^2}{dt^2}S x\mathfrak{D}m=\frac{d^2}{dt^2}m\xi=m\ddot{\xi},$$

ha t.i az egész rendszer tömege m és tömegcentrumának a koordinátái: ξ, η, ζ. Vannak tehát a következő egyenleteink:

$$m\ddot{\xi}=S\mathfrak{D}X,\quad m\ddot{\eta}=S\mathfrak{D}Y,\quad m\ddot{\zeta}=S\mathfrak{D}Z.$$

Nyilvánvalóan azt mondják ezek az egyenletek, hogy az anyagi rendszer tömegcentruma úgy mozog, amint egy m tömegű szabad tömegpont mozogna, ha az anyagi rendszerre ható összes szabaderők reája hatnának.

38. A $(S\mathfrak{D}X, S\mathfrak{D}Y, S\mathfrak{D}Z)$ vektort a szabaderők toló, vagy szállító hatásának nevezzük. Ha ennek a komponensei (u.m. $S\mathfrak{D}X$, stb.) csak ξ, η, ζ-ának, ezek totális időderiváltjainak és az időnek a határozott függvényei, akkor három határozott totális differen-

ciál egyenletünk van a tömegcentrum számára.

39.) Az alkalmazások végett a szabaderőket sajátos módon osztályozzuk. Amely szabaderők abszolut tengelyrendszerben akkor hatnának a mi anyagi rendszerünkre, ha csak a mi anyagi rendszerünk léteznék, azokat a szabaderőket belső szabaderők-nek nevezzük. Az anyagi rendszerünkre ható többi szabaderőket külső szabaderők-nek mondjuk. Nem abszolut koordinatarendszerben azokat az erőket is a külső erőkhöz számitjuk tehát, amelyek az ily koordinátarendszer abszolut mozgásából (abszolut koordinátarendszerhez viszonyitott mozgásából) háramlik anyagi rendszerünkre: a szabaderők minden koordinatarendszerben ugyanazok a vectorok.

40.) Az alkalmazások végett számba veszünk egy igen fontos speciális tapasztalati törvényt is, amely szerint „a belső szabaderőknek nincs szállító hatása az anyagi rendszerre," vagyis:

$$S_b \mathfrak{D}X = 0, \quad S_b \mathfrak{D}Y = 0, \quad S_b \mathfrak{D}Z = 0$$

ha t. i. S_b csak a belső szabaderőkre kiterjedő összegezést jelent.

<u>1. Példa.</u> Naprendszerünk nem visel külső kényszert, tehát eltolható minden irányban virtuálisan, és igy megilletik a levezetett egyenletek. Továbbá közelitőleg állitható, hogy naprendszerünk abszolut koordinátarendszerben külső szabaderők

hatását nem viseli. Következőleg abszolut koordinátarendszerben, naprendszerünkre vonatkoztatva nemcsak

$$S_b \mathfrak{D}X = 0 \text{ stb., de egyszersmind}$$

$$S\mathfrak{D}X = 0,\ S\mathfrak{D}Y = 0,\ S\mathfrak{D}Z = 0$$

is állanak közelítőleg. Ezerint naprendszerünk tömegcentrumára abszolut koordinátarendszerben közelítőleg:

$$\ddot{\xi} = 0,\ \ddot{\eta} = 0,\ \ddot{\zeta} = 0$$

Ebből pedig:

$$\dot{\xi} = \text{konst.},\ \dot{\eta} = \text{konst.},\ \dot{\zeta} = \text{konst.},$$

ami azt jelenti, hogy naprendszerünk tömegcentruma abszolut koordinátarendszerben megközelítőleg állandó sebességgel mozog, vagy mozdulatlan.

2. Példa. A levegőben kidobott test nem visel külső kényszert, következőleg minden irányban eltolható virtuálisan, tehát megilletik az:

$$m\ddot{\xi} = S\mathfrak{D}X,\ m\ddot{\eta} = S\mathfrak{D}Y,\ m\ddot{\zeta} = S\mathfrak{D}Z$$

egyenletek. Ezekben a $(\mathfrak{D}X, \mathfrak{D}Y, \mathfrak{D}Z)$-féle szabaderők egy részét (egy összetevőjét) belső szabaderők teszik. Ezek toló hatását a 40. cikk értelmében zérusnak írván, megmaradnak a $S\mathfrak{D}X$ stb. összegekben csupán a többi, u.n. külső szabaderők komponensei. Ezek az erők a földhöz rótt koordinátarendszerben közönségesen két-két egyszerűbb erő összetételének tekinthetők: egyik a nehézségi erő, a másik pedig a levegőtől származik (archimedesi felhajtás és környezeti ellenállás). Ha azonban a test átlagos tömöttsége (tömegének és térfogatának a hányadosa) sokkal nagyobb, mint a levegő előforduló sűrűségei, úgy ameddig a test határpontjainak lassú a mozgása, addig a levegőtől származó szabaderőt tekinteten kívül hagyhatjuk és úgy (dX, dY, dZ) jó közelítésben pusztán a nehézségi erőt jelentheti. Ennek az iránykoszinuszai a földhöz rögzített koordinatarendszerben $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ legyenek. A nagysága: $g\,dm$. Szerint ha feltevéseink teljesülnek, akkor közelítőleg:

$$m\ddot{\xi} = S\alpha g\,dm, \quad m\ddot{\eta} = S\beta g\,dm, \quad m\ddot{\zeta} = S\gamma g\,dm$$

vagyis (mivel $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, g$ a test minden pontjában ugyanazokúl számíthatnak)

$$\ddot{\xi} = g\alpha_0, \quad \ddot{\eta} = g\beta_0, \quad \ddot{\zeta} = g\gamma_0$$

(és ha a z tengelyt vertikálisan lefelé állítjuk, akkor:

$$\ddot{\xi} = 0, \quad \ddot{\eta} = 0, \quad \ddot{\zeta} = g.)$$

Olymódon mozog tehát megközelítőleg a test tömegcentruma, mint egy szabad tömegpont, mely csak a nehézségi szabaderő hatását viseli. (A nehézségi erő fogalmában közelítőleg benne van a föld abszolut mozgásából származó erő is.)

De mi értendő azon, hogy „amig a határpontok mozgása lassú"? Ez a szólásmód úgy értendő, hogy „meg lehet jelölni akkora sebességet, hogy amig a határpontok sebességei kissebbek mint az."

Ha a test szilárd és gömbalakú és a tömegcentruma a geometriai centrumában van, akkor azon feltétellel, hogy határpontjainak a centruma körül nincs nagy sebessége; addig, amig tömegcentrumának sem nagy a sebessége, a levegő hatását jó közelítéssel úgy lehet számontartani, mint a mekanika alaptanaiban láttuk.

41, Tegyük föl most, hogy az anyagi rendszer viszonyai olyanok, hogy nem tolható az el minden irányban virtuálisan, de van olyan irány, egy vagy több, esetleg végtelen sok, amelyben virtuálisan eltolható; és tegyük föl, hogy amely irányokban eltolható virtuálisan, azokat az irányokat a virtuális eltolások egyszerű algebrai relációi fejezik ki.

Ha most is $(\delta a, \delta b, \delta c)$ jelöli a virtuális eltolásokat, akkor a virtuális munka általános törvényéből a virtuális eltolásokkal most is:

$$\delta a\, S(\ddot{x}\mathfrak{D}m - \mathfrak{D}X) + \delta b\, S(\ddot{y}\mathfrak{D}m - \mathfrak{D}Y) + \delta c\, S(\ddot{z}\mathfrak{D}m - \mathfrak{D}Z) \gtreqless 0$$

következik. De most $(\delta a, \delta b, \delta c)$ nem tetszésszerintiek, hanem föltevésünk értelmében egyszerű algebrai relációknak tesznek eleget, lineáris homogén egész egyenleteknek, vagy egyenlőtlenségeknek úgy, hogy elvi egyenlőtlenségünk mindazokkal és csak azokkal a virtuális eltolásokkal áll fenn, melyek ez egyszerű relációkat kielégitik. Elvi relációnk ezek következményeu tehát, mihez képest ugyanolyan matematikai eljárás juttat bennünket a tömegcentrumra vonatkozó határozott vonatkozásokhoz, mint egy magánvaló tömegpont mekanikájában. Ha a $(S\delta X, S\delta Y, S\delta Z)$ tolóhatás csak ξ, η, ζ-nak és ezek idő deriváltjainak, meg az időnek a határozott függvénye és ha a kényszer relációk együtthatói is csak ezek függvényei, meg ha a virtuális kényszer relációihoz kellő számban csatlakoznak a tömegcentrum tényleges mozgásának kényszerbeli egyenletei, akkor teljes egyenletrendszerünk van a tömegcentrum mekanikai állapotának a tárgyalására. Ellenkező esetben csak részleges ismeretekre tehetünk szert, de ezek is értékesek lehetnek.

<u>1. Példa.</u> Az anyagi rendszer levegőben a földhöz rögzitett sík lejtőre van helyezve, amelynek belsejébe nem hatolhat és amellyel számottevően nem surlódik. A lejtő teleprendszer; kapcsoló rendszer nincs. Gondoljuk már most a lejtő befelé mutató normálisát. Az anyagi rendszer mindazon irányokban eltolható virtuálisan, amelyek ezen normálissal nem alkotnak hegyes szöget, akár nyugodjék, akár mozogjon a lejtő a koordinátarendszerünkben. Ha tehát koordinátarendszerünkben a normális iránykoszinuszai: α, β, γ, akkor:

$$-(\alpha\,\delta a + \beta\,\delta b + \gamma\,\delta c) \geqq 0$$

most a virtuális eltolások relációja. Ha nyugszik a lejtő koordinátarendszerünkben, akkor α, β, γ konstansok, ha mozog, akkor α, β, γ az idő szabott függvényei. A 41, cikk értelmében kell léteznie oly nem negativ $\mathcal{L}$ multiplikátornak, hogy:

$$S(\ddot{x}\,\mathfrak{D}m - \mathfrak{D}X) = -\alpha\mathcal{L}, \text{ stb.}$$

azaz:

$$m\ddot{\xi} = S\,\mathfrak{D}X - \alpha\mathcal{L}$$
$$m\ddot{\eta} = S\,\mathfrak{D}Y - \beta\mathcal{L}$$
$$m\ddot{\zeta} = S\,\mathfrak{D}Z - \gamma\mathcal{L}$$

Belőlük $\mathcal{L}$ eliminálásával két független határozott egyenlet, $\mathcal{L}$ kiszámitásával egy határozott egyenlőtlenség adódik. Az egyenletek ezek:

$$m(\beta\ddot{\zeta} - \gamma\ddot{\eta}) = \beta S\,\mathfrak{D}Z - \gamma S\,\mathfrak{D}Y$$
$$m(\gamma\ddot{\xi} - \alpha\ddot{\zeta}) = \gamma S\,\mathfrak{D}X - \alpha S\,\mathfrak{D}Z$$
$$m(\alpha\ddot{\eta} - \beta\ddot{\xi}) = \alpha S\,\mathfrak{D}Y - \beta S\,\mathfrak{D}X,$$

amelyek közül kettő független egymástól. Az egyenlőtlenség egész racionális alakban így van:

$$\mathcal{L} = (S\,\mathfrak{D}X - m\ddot{\xi})\alpha + (S\,\mathfrak{D}Y - m\ddot{\eta})\beta + (S\,\mathfrak{D}Z - m\ddot{\zeta})\gamma \geqq 0$$

A tényleges mozgás kényszerbeli egyenletei részint a belső kényszerből, részint a lejtővel való érintkezés kényszeréből származnak és általában nem olyanok, hogy belőlük itt a tömegcentrum számára még egy egyenletet tudjunk felállitani. Ha tehát $S\,\mathfrak{D}X$, stb. csak ξ, η, ζ-nak és ezek deriváltjainak és az időnek a függvényei volnának is, akkor sincs általában teljes relatiórendszerünk, nem vagyunk abban a kedvező helyzetben, mint egy tömegpont lejtős kényszerének esetében, amely esetben a tömegpontnak a lejtőn volta szolgáltat egy határozott egyenletet. De ha most általában nem is juthatunk annyi megismeréshez, mint egy tömegpont lejtős kényszerében, mégis értékkel bíró megállapítást tehetünk relációinkon. Könnyen megtehetjük pedig ezt oly koordinátarendszerben, melyben a lejtő nyugszik és amelynek a z tengelye a lejtősík befelé mutató normálisa. Ekkor ugyanis: $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 1$; tehát:

$$m\ddot{\xi} = S\mathfrak{D}X, \quad m\ddot{\eta} = S\mathfrak{D}Y, \quad S\mathfrak{D}Z - m\ddot{\zeta} \geqq 0.$$

A két első relációból az következik, hogy a lejtős kényszerben a tömegcentrumnak a lejtőn levő merőleges vetülete (ξ, η, konst.) úgy nyugszik, vagy úgy mozog a lejtőn, mint az a tömegpont, amely vákuumban a lejtőre van utalva, a lejtővel nem surlódik és oly szabaderő hatását viseli, amelynek a lejtősíkkal párhuzamos komponensei $S\mathfrak{D}X$ és $S\mathfrak{D}Y$.

Ezen vetületi pont nyugalmának pedig szükséges föltételei, hogy:

$$S\mathfrak{D}X = 0, \quad S\mathfrak{D}Y = 0$$

legyen. De elégséges föltételei is azzal, hogy kezdetben nyugalomban volt ez a pont, mert szerintük:

$$\ddot{\xi} = 0, \quad \ddot{\eta} = 0; \quad \dot{\xi} = \text{konst.}, \quad \dot{\eta} = \text{konst.}$$

mindig. Ha tehát kezdetben:

$$\dot{\xi} = 0, \quad \dot{\eta} = 0, \quad \text{akkor mindig is:}$$

$$\dot{\xi} = 0, \quad \dot{\eta} = 0.$$

Végül egyenlőtlenségünkből a tömegcentrumnak a lejtőre merőleges gyorsulásáról is tudunk annyit, hogy amíg a kényszer tart, addig ez a gyorsulás $\leqq \dfrac{S\mathfrak{D}Z}{m}$.

2. Példa. Levegőben a földhöz rögzitett ellenálló horizontális sik alapra legyen helyezve két test s a testek az alappal ne surlódjanak. E két test eleinte ne érintkezzék, de mozogjanak az alapjukon és ennek következtében találkozzanak s egy pillanatra „ütközzenek". Koordinatarendszerünket a földhöz rögzitsük. Ebben a koordinátarendszerben az ütközés előtt és után a külső szabaderők mindegyik testben csak a nehézségi erőből álljanak számottevő mértékben, tehát a nehézségi erőn kivül még csak belső szabaderők, azaz olyan szabaderők hassanak számottevő mértékben, úgy az egyik, mint a másik testben, amelyeknek nincs toló hatása. A szabaderőknek a testek rendszerére, mint egységes anyagi rendszerre ható toló hatása pedig az ütközés alatt is a nehézségi erő toló hatásából áll csak számottevő mértékben. Ezek rendjén feltettük, hogy oly lassúak a mozgások, hogy a levegőtől származó toló hatások nem tesznek számot.

A sik alap teleprendszert képez, amely a koordinátarendszerünkben nyugszik s a testek más kényszert, mint az ettől származót a virtuális eltolások ellenében nem viselnek. A koordinata rendszer z tengelyét állitsuk vertikálisan. Az egyik és másik testben a szabaderők tolóhatását (X_1, Y_1, Z_1), illetőleg (X_2, Y_2, Z_2) jelölje.

Mielőtt érintkeznék egymással a két test,

$$X_1 = 0\,,\; Y_1 = 0\,,\; X_2 = 0\,,\; Y_2 = 0\,,$$

tehát mindenik test tömegcentrumának a gyorsulása olyan az előbbi példa szerint, hogy horizontális összetevője zérus. Jelöljék az egyik test tömegcentrumának a koordinátáit ξ_1, η_1, ζ_1, a másik test tömegcentrumának a koordinátáit ξ_2, η_2, ζ_2; a két test ütközése előtt:

$$\ddot{\xi}_1 = 0\,,\; \ddot{\eta}_1 = 0\,;\; \ddot{\xi}_2 = 0\,,\; \ddot{\eta}_2 = 0\,.$$

Nemkülönben érvényesek ezek az egyenletek azután is, hogy a két test megszűnt ütközni egymással. Jelöljék most már az 1. számú tömegcentrum sebességének a komponenseit az ütközés előtt u_1, v_1, w_1, az ütközés után U_1, V_1, W_1; a másik tömegcentrum sebességének a komponenseit az ütközés előtt u_2, v_2, w_2, az ütközés után U_2, V_2, W_2. Mindezeknek a vektoroknak az alapsíkon lévő normális vetülete állandó, azaz a tömegcentrumoknak az alapsíkra merőlegesen vetített képe az ütközés előtt és után állandó sebességgel mozog, t.i. négy differenciál-egyenletünk szerint úgy, hogy:

$$(u_1, v_1, 0) = \text{konst.}, (U_1, V_1, 0) = \text{konst.}$$
$$(u_2, v_2, 0) = \text{konst.}, (U_2, V_2, 0) = \text{konst.}$$

A két testrendszer, mint egyetlen anyagi rendszer, szintén az előbbi példa tárgyalásába tartozik és pedig az ütközés alatt is. Jelölje meg a két test rendszerének a tömegcentrumát ξ, η, ζ. A két test rendszerén:

$$X_1 + X_2 \equiv SDX = 0\,,\quad Y_1 + Y_2 = SDY = 0$$

az ütközés alatt is, tehát:

$\ddot{\xi} = 0$, $\ddot{\eta} = 0$, úgy az ütközés előtt, mint az ütközés alatt és az ütközés után, szóval mindig. Eszerint az egész rendszer tömegcentrumának az alapsíkon lévő vetülete folyvást állandó sebességgel mozog. E tömegcentrum sebességének a komponenseit jelöljék (U_0, V_0, W_0).

Most már két határozott egyenletet szerkeszthetünk meg a két test tömegcentrumának az ütközés előtti és az ütközés utáni sebessége között. A tömegcentrumok fogalmából folyólag:

$$(m_1 + m_2)\xi = m_1\xi_1 + m_2\xi_2$$
$$(m_1 + m_2)\eta = m_1\eta_1 + m_2\eta_2$$
$$(m_1 + m_2)\zeta = m_1\zeta_1 + m_2\zeta_2\,,$$

ha t.i. m_1 az 1-es számú, m_2 pedig a 2-es számú testnek a tömege. Ezek az egyenletek a mozgás egész tartamában érvényesek. Belőlük:

$$(m_1 + m_2)\dot{\xi} = m_1\dot{\xi}_1 + m_2\dot{\xi}_2$$
$$(m_1 + m_2)\dot{\eta} = m_1\dot{\eta}_1 + m_2\dot{\eta}_2$$
$$(m_1 + m_2)\dot{\zeta} = m_1\dot{\zeta}_1 + m_2\dot{\zeta}_2$$

a mozgás egész tartamában.

Helyettesítsük be a két első egyenletbe egyszer az ütközés előtti, másodszor az ütközés utáni sebességek komponenseit. A két első egyenlet baloldala a föntebbiek értelmében mindkét esetben ugyanaz, t.i. $(m_1 + m_2)U_0$ és $(m_1 + m_2)V_0$.

Minélfogva a két jobboldal is mindkét esetben ugyanaz tartozik lenni. Következésképen:

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 U_1 + m_2 U_2$$
$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 V_1 + m_2 V_2$$

Van tehát valóban két határozott egyenletünk a tömegcentrumnak az ütközés előtti és az ütközés utáni sebességére vonatkozólag.

Két test ütközésében főfontosságú, hogy meghatározzuk az ütközés előtti sebességek horizontális komponenseivel az ütközés utáni sebességek horizontális komponenseit. Minthogy most erejéből csak két egyenletünk van, négy ismeretlenre nézve, úgy nem jutottunk el teljesen ehhez a célunkhoz; még valamely módon szert kell tennünk két egyenletre, hogy célt érjünk. De itt csak egy ilyen speciális tapasztalati esetet intézhetünk el, azt, amelyben a két test tömegcentruma az ütközés után egyenlő sebességgel mozog. Ez az u. n. rugalmatlan testek esete, midőn azok az ütközés előtt egyező vagy ellenkező irányokban haladtak. Ebben az esetben $U_1 = U_2$, $V_1 = V_2$, minélfogva az ütközés után a horizontális sebesség komponensei ezek:

$$U_1 = U_2 = \frac{m_1 u_1 + m_2 u_2}{m_1 + m_2}$$

$$V_1 = V_2 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

Tömegcentrumok rendszerének mechanikája

42.) Az anyagi rendszer n számú testből álljon, melyek különbözően egyenlőe eltolhatók, vagy különbözően is és egyképen is eltolhatók legyenek virtuálisan. Egyidejű virtuális eltolásukat rendre: $(\delta a_1, \delta b_1, \delta c_1), (\delta a_2, \delta b_2, \delta c_2), \ldots, (\delta a_n, \delta b_n, \delta c_n)$ jelöljék az

$$S[(\ddot{x}\,\partial m-\partial X)\delta x+(\ddot{y}\,\partial m-\partial Y)\delta y+S(\ddot{z}\,\partial m-\partial Z)\delta z]\geqq 0$$

elvi relációban, amely így is írható:

$$S(\ddot{x}\,\partial m-\partial X)\delta x+S(\ddot{y}\,\partial m-\partial Y)\delta y+S(\ddot{z}\,\partial m-\partial Z)\delta z\geqq 0$$

a szummációkat az n test szerint n részre bontva gondoljuk úgy, hogy:

$$S(\ddot{x}\,\partial m-\partial X)\delta x=S_1(\ddot{x}\,\partial m-\partial X)\delta x+S_2(\ddot{x}\,\partial m-\partial X)\delta x+ \\ +\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;+S_n(\ddot{x}\,\partial m-\partial X)\delta x$$

$$S(\ddot{y}\,\partial m-\partial Y)\delta y=S_1(\ddot{y}\,\partial m-\partial Y)\delta y+S_2(\ddot{y}\,\partial m-\partial Y)\delta y+ \\ +\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;+S_n(\ddot{y}\,\partial m-\partial Y)\delta y$$

$$S(\ddot{z}\,\partial m-\partial Z)\delta z=S_1(\ddot{z}\,\partial m-\partial Z)\delta z+S_2(\ddot{z}\,\partial m-\partial Z)\delta z+ \\ +\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;+S_n(\ddot{z}\,\partial m-\partial Z)\delta z$$

A három kifejezés i-dik szummájában írható egyebek közt minden δx helyett δa_i, minden δy helyett δb_i és minden δz helyett δc_i. Ezszerint elvi egyenlőtlenségünk a virtuális eltolásokra alkalmazva így van:

$$\delta a_1 S_1(\ddot{x}\,\partial m-\partial X)+\delta b_1 S_1(\ddot{y}\,\partial m-\partial Y)+\delta c_1 S_1(\ddot{z}\,\partial m-\partial Z)+ \\ +\delta a_2 S_2(\ddot{x}\,\partial m-\partial X)+\delta b_2 S_2(\ddot{y}\,\partial m-\partial Y)+\delta c_2 S_2(\ddot{z}\,\partial m-\partial Z)+ \\ +\cdot\;\cdot\;\cdot\;+\cdot\;\cdot\;\cdot\;+\cdot\;\cdot\;\cdot\;+ \\ +\delta a_n S_n(\ddot{x}\,\partial m-\partial X)+\delta b_n S_n(\ddot{y}\,\partial m-\partial Y)+\delta c_n S_n(\ddot{z}\,\partial m-\partial Z)\geqq 0$$

És ha az egyes testek saját tömegcentrumának a koordinátái rendre: $\xi_1, \eta_1, \zeta_1;\ \xi_2, \eta_2, \zeta_2; \dots;\ \xi_n, \eta_n, \zeta_n$, a tömegük pedig: $m_1, m_2, \dots, m_n$, akkor így is van ez az egyenlőtlenség:

$$\sum_{i=1}^{n}\Big[(m\ddot{\xi}_i - S_i\mathfrak{X})\,\delta x_i + (m\,\ddot{\eta}_i - S_i\mathfrak{Y})\,\delta y_i + (m\,\ddot{\zeta}_i - S_i\mathfrak{Z})\,\delta z_i\Big] \geqq 0$$

Ha már most ismerjük a virtuális eltolások relációit (melyeknek minden megoldásában teljesülni tartozik ez az egyenlőtlenség), úgy a tömegpontok mekanikájából ismert eljárások juttatnak bennünket következtetésekhez. Mégpedig abban a speciális esetben, hogy a szabaderők komponenseinek itt előforduló $3n$ összege (u. m. a szabaderők n számú toló hatásának komponensei) és a virtualis eltolások relacióinak az együtthatói csak a tömegcentrumok koordinátáinak és ezek idő deriváltjainak és az időnek a függvényei és hogy kellő számban állanak rendelkezésünkre a tömegcentrumok tényleges mozgásának kényszerbéli egyenletei; ebben az esetben teljes egyenletrendszerünk van az n számú tömegcentrum mekanikájának a tárgyalására. Ellenkező esetben csak részleges ismeretekre tehetünk szert, de ezek is becsesek lehetnek.

<u>1, Példa.</u> Két merev test a levegőben fel van tűzve egy merev szögletes pálcára s egy nyújthatatlan, de hajlítható fonállal össze van kapcsolva, amely fonál tömege egyik test tömege mellett sem tesz

számot. A két test tömegcentrumának távolsági vonala párhuzamos a pálcával. A földhöz rögzített koordinátarendszerre gondolva, ebben a pálcát a két testtől független módon oly tengely körül forgatjuk, amely átmegy ezen távolsági vonalon és arra merőleges. A pálcán csak haladó mozgást végezhetnek a testek, de számottevő surlódás köztük és a pálca közt ne legyen. Az egyik testhez tartozó mennyiségeket 1-es indexxel, a másik testhez tartozó mennyiségeket 2-es indexxel jelöljük. A pálca irányát az 1-es tömegcentrumtól a 2-es felé számítjuk. A z tengelyt a forgás tengelyébe helyezzük. A pálca iránya a t pillanatban az z tengelytől positiv fordulás szerint Θ szög alatt legyen elfordulva. Az 1-es számú tömegcentrumnak a z tengelytől mért távolsága $|s_1|$, a másiké $|s_2|$ legyen, hol s_1, illetőleg s_2 positivnak, vagy negativnak számítson aszerint, amint az 1-es, illetőleg a 2-es számú tömegcentrum a pálca megválasztott irányának értelmében a forgástengely (z tengely) pozitiv vagy negativ oldalán van. A két tömegcentrum kölcsönös távolságát jelölje: r. Minthogy a pálca megválasztott iránya az 1-es tömegcentrumból a 2-es felé mutat,

$$r = s_2 - s_1$$

Esetünkben a testek merevek lévén, minden lehetséges elemi eltolásaik összeesnek a tömegcentrumok: (ξ_1, η_1, ζ_1) és (ξ_2, η_2, ζ_2) lehetséges elemi elmozdulásával, tehát a testek végtelen gyorsan lehetséges elemi elmozdulásaik is összeesnek tömegcentrumaik végtelen gyorsan lehetséges elemi elmozdításaival úgy, hogy (23.) értelmében) $\delta a_1 = \delta \xi_1$, stb. $\delta a_2 = \delta \xi_2$ stb. De a pálcától származó kényszer miatt a két tömegcentrum, csak a pálcával párhuzamosan mozdítható virtuálisan, (azaz végtelen nagy sebességgel). Most a virtuális kényszert legcélszerűbben parametrumosan fejezzük ki: Az előrebocsátottak értelmében

$$\xi_1 = s_1 \cos\Theta \quad , \quad \eta_1 = s_1 \sin\Theta$$
$$\xi_2 = s_2 \cos\Theta \quad , \quad \eta_2 = s_2 \sin\Theta$$

Minthogy a virtuális eltolás alatt Θ megváltozása nem tesz számot, (t.i. amiatt, hogy Θ teljesen határozott véges sebességgel változik), minthogy további ζ_1 és ζ_2 egyáltalában állandó, ennélfogva a pálcától származó kényszer a tömegcentrumok oly virtuális, azaz végtelen gyors elmozdítását engedi csak, amelyben

$$\delta\xi_1 = \cos\Theta\,\delta s_1 \;,\; \delta\eta_1 = \sin\Theta\,\delta s_1 \;,\; \delta\zeta_1 = 0$$
$$\delta\xi_2 = \cos\Theta\,\delta s_2 \;,\; \delta\eta_2 = \sin\Theta\,\delta s_2 \;,\; \delta\zeta_2 = 0$$

Ezek egyszersmind virtuális eltolás komponensei. Van tehát:

$$\delta a_1 = \cos\Theta\,\delta s_1 \;,\; \delta b_1 = \sin\Theta\,\delta s_1 \;,\; \delta c_1 = 0$$
$$\delta a_2 = \cos\Theta\,\delta s_2 \;,\; \delta b_2 = \sin\Theta\,\delta s_2 \;,\; \delta c_2 = 0$$

Ha csak a pálcától származnék kényszer, akkor

δs_1 és δs_2 tetszésszerinti volna. Azonban most azt a mekanikai állapotot vizsgáljuk majd, amelynek folyamán a fonál feszült állapotban van, minélfogva a két tömegcentrum kölcsönös távola nem nagyobbodhatik, tehát:

$$\delta r \leqq 0.$$

Van tehát még a következő egyenlőtlenségünk is a virtuális eltolások komponenseinek a meghatározására: $\delta s_1 - \delta s_2 \geqq 0$

Ezzel azonban már ki van merítve esetünkben a virtuális eltolások meghatározása. Elvi egyenlőtlenségünkhöz forduljunk most. Ez két test virtuális eltolásaira vonatkoztatva a következő:

$$(m_1 \ddot{\xi}_1 - S_1 \mathfrak{D}X)\delta a_1 + (m_1 \ddot{\eta}_1 - S_1 \mathfrak{D}Y)\delta b_1 + (m_1 \ddot{\zeta}_1 - S_1 \mathfrak{D}Z)\delta c_1 +$$
$$+ (m_2 \ddot{\xi}_2 - S_2 \mathfrak{D}X)\delta a_2 + (m_2 \ddot{\eta}_2 - S_2 \mathfrak{D}Y)\delta b_2 + (m_2 \ddot{\zeta}_2 - S_2 \mathfrak{D}Z)\delta c_2 \geqq 0$$

Beírva pedig ide a variációk fent megállapított kifejezéseit:

$$\left[(m_1 \ddot{\xi}_1 - S_1 \mathfrak{D}X)\cos\Theta + (m_1 \ddot{\eta}_1 - S_1 \mathfrak{D}Y)\sin\Theta\right]\delta s_1 +$$
$$+ \left[(m_2 \ddot{\xi}_2 - S_2 \mathfrak{D}X)\cos\Theta + (m_2 \ddot{\eta}_2 - S_2 \mathfrak{D}Y)\sin\Theta\right]\delta s_2 \geqq 0$$

Ez mindazzal a δs_1 és δs_2 értékkel teljesülni tartozik, amely eleget tesz a:

$$\delta s_1 - \delta s_2 \geqq 0$$

egyenlőtlenségnek. Kell tehát léteznie olyan $\mathcal{L}$ nem negatív multiplikatornak, hogy:

$$(m_1 \ddot{\xi}_1 - S_1 \mathfrak{D}X)\cos\Theta + (m_1 \ddot{\eta}_1 - S_1 \mathfrak{D}Y)\sin\Theta = \mathcal{L}$$
$$(m_2 \ddot{\xi}_2 - S_2 \mathfrak{D}X)\cos\Theta + (m_2 \ddot{\eta}_2 - S_2 \mathfrak{D}Y)\sin\Theta = -\mathcal{L}$$

Innen előállíthatunk egy határozott egyenletet és egy határozott egyenlőtlenséget; határozott egyenletet azáltal, hogy $\mathcal{L}$-t elimináljuk, aminek az a módja, hogy a két egyenletet összeadjuk; határozott egyenlőtlenséget azáltal, hogy a $\mathcal{L}$ kifejezését $\geqq 0$ írjuk, amit pedig célszerű $\mathcal{L}$ azon kifejezésére alkalmazni, amelyhez eljutunk, ha az első egyenletet átoszjtjuk m_1-el, a másikat m_2-vel s azután az elsőből a másodikat kivonjuk. – Jelölje már most m a két test összes tömegét és jelöljék ξ, η, ζ a két test rendszerének a koordinátáit. Akkor a határozott egyenlet így írható:

$$(m\ddot{\xi} - S\mathfrak{D}X)\cos\Theta + (m\ddot{\eta} - S\mathfrak{D}Y)\sin\Theta = 0,$$

ahol a szummálás a két test egész rendszerében ható szabaderőkre vonatkozik. Van továbbá a következő egyenlőtlenségünk:

$$\left(\ddot{\xi}_1 - \ddot{\xi}_2 + \frac{S_2\mathfrak{D}X}{m_2} - \frac{S_1\mathfrak{D}X}{m_1}\right)\cos\Theta +$$

$$+ \left(\ddot{\eta}_1 - \ddot{\eta}_2 + \frac{S_2\mathfrak{D}Y}{m_2} - \frac{S_1\mathfrak{D}Y}{m_1}\right)\sin\Theta \geqq 0$$

De ha az egész rendszer tömegcentrumának a forgástengelytől való távolsága: $|s|$, ahol s pozitiv, vagy negativ aszerint, amint a tömegcentrum a pálca megválasztott irányának értelmében a forgástengely pozitiv, vagy negativ oldalán van, akkor

$$\xi = s\cos\Theta \qquad \eta = s\sin\Theta$$

$$\dot{\xi} = \dot{s}\cos\Theta - s\sin\Theta.\dot{\Theta} \qquad \dot{\eta} = \dot{s}\sin\Theta + s.\cos\Theta.\dot{\Theta}$$

$$\ddot{\xi} = \ddot{s}\cos\Theta - 2\dot{s}\dot{\Theta}\sin\Theta - s\dot{\Theta}^2\cos\Theta - s\ddot{\Theta}\sin\Theta$$

$$\ddot{\eta} = \ddot{s}\sin\Theta + 2\dot{s}\dot{\Theta}\cos\Theta - s\dot{\Theta}^2\sin\Theta + s\ddot{\Theta}\cos\Theta.$$

Ezek számbavételével egyenletünk ilyen alakban jelentkezik:

$$m(\ddot{s} - s.\dot{\Theta}^2) = \cos\Theta . S\mathfrak{D}X + \sin\Theta S\mathfrak{D}Y.$$

Az egyenlőtlenségünk pedig $\ddot{\xi}_1, \ddot{\eta}_1; \ddot{\xi}_2, \ddot{\eta}_2$ hasonló kifejezései alapján a következő alakú lesz:

$$\left(\ddot{s}_1 - \ddot{s}_2 - (s_1 - s_2)\dot{\Theta}^2\right) + \left(\frac{S_2\mathfrak{D}X}{m_2} - \frac{S_1\mathfrak{D}X}{m_1}\right)\cos\Theta +$$
$$+ \left(\frac{S_2\mathfrak{D}Y}{m_2} - \frac{S_1\mathfrak{D}Y}{m_1}\right)\sin\Theta \geqq 0.$$

De a két tömegcentrum kölcsönös távola: $r = s_2 - s_1$ lévén, $\ddot{s}_1 - \ddot{s}_2 = -\ddot{r}$. Minthogy pedig feltevésünk szerint a fonál folyvást feszült állapotban van, ennélfogva állandóan eltűnik az $\ddot{r}$. Ennek tekintetbevételével egyenlőtlenségünk a következő alakot ölti:

$$r\dot{\Theta}^2 + \left(\frac{S_2\mathfrak{D}X}{m_2} - \frac{S_1\mathfrak{D}X}{m_1}\right)\cos\Theta + \left(\frac{S_2\mathfrak{D}Y}{m_2} - \frac{S_1\mathfrak{D}Y}{m_1}\right)\sin\Theta \geqq 0$$

Ez a feltétele a fonál feszülésének, tehát föltétele annak is, hogy a mozgás a pálcán „s" előállított egyenlete szerint menjen végbe, mert egyenletünk föltétele, hogy a fonál feszült állapotban maradjon.

Tegyük föl most, hogy a szabaderők toló hatása mindkét testen a forgástengellyel párhuzamos. Akkor:

$$S\mathfrak{D}X = 0,\ S\mathfrak{D}Y = 0;\ S_1\mathfrak{D}X = 0,\ S_1\mathfrak{D}Y = 0;\ S_2\mathfrak{D}X = 0,\ S_2\mathfrak{D}Y = 0$$

Ennélfogva a mozgás egyenlete a következő:

$$\ddot{s} - s\,\dot{\Theta}^2 = 0.$$

Egyenlőtlenségünk pedig ezúttal a következő:

$$r.\dot{\Theta}^2 \geqq 0,$$

tehát folyvást teljesül. Az egyenlet megoldása végett ösmernünk kell a $\dot{\Theta}$ szögsebességet, mint az idő függvényét, azaz egyenletünket a forgatás módjának az ismeretével lehet csak megoldani; ha pl. a pálcát állandó szögsebességgel forgatjuk, akkor $\dot{\Theta}$ = konst. és az egyenlet könnyű szerrel megoldható.

Keressük most még csak annak a föltételét, hogy a testek a pálcához viszonyítva nyugalomban legyenek; tehát hogy s = konst. legyen. Ha s = konst., akkor $\ddot{s} = 0$, s úgy egyenletünk ez lesz:

$$s\,\dot{\Theta}^2 = 0,$$

ez az egyenlet pedig úgy teljesül, hogy vagy:

$$\dot{\Theta} = 0, \quad \text{vagy} \quad s = 0.$$

Mivel $\dot{\Theta}$ nem zérus, mert forgatjuk a pálcát, úgy $s = 0$, vagyis a pálcán való nyugalom lehetőségének szükséges föltétele, hogy a két test rendszerének a tömegcentruma a forgás tengelyében legyen. Ha pedig abban van és kezdetben nincs sebessége a pálca mentében, akkor nyugalomban is marad, mert abból, hogy kezdetben $s = 0$, $\dot{s} = 0$, fönti egyenletünk alapján következtethető, hogy mindig $\dot{s}$ = konst. Eszerint $s = 0$ szükséges és elégséges föltétele annak, hogy ha kezdetben nem volt a pálca mentén sebessége a testeknek, azután se legyen.

2. Példa. Most már valamivel többet tudhatunk meg két test ütközéséről mint a 41. cikk második példájában. Ugyanis most már az ütközés idejében is külön-külön vehetjük tekintetbe a két test virtuális eltolásait.

A földhöz rögzitett koordinátarendszerünk z tengelye a sik alapzatra merőlegesen (azaz függőlegesen) és pedig lefelé lévén irányitva, a sik alapzattól, mint teleprendszertől az egyik és másik test virtuális eltolására az a megszoritás háramlik, hogy:

$$-\delta c_1 \geqq 0 \,, \quad -\delta c_2 \geqq 0$$

legyen. De az ütközés folyamán a két test érintkezéséből is származik kényszer. Arra az esetre szoritkozunk, hogy az ütközés a két test határának egyetlen fölületelemén létesül. E fölületelem normálisát az 1-es számú testből a 2-es számúba irányitva gondoljuk és iránykoszinuszait α, β, γ betükkel jelöljük. Föltesszük, hogy a két test egymásba nem hatolhat és egymással nem surlódik. Ennélfogva azon és csak azon kivonás háramlik a két test érintkezéséből azok virtuális eltolására, hogy:

$$\alpha(\delta a_2 - \delta a_1) + \beta(\delta b_2 - \delta b_1) + \gamma(\delta c_2 - \delta c_1) \geqq 0$$

legyen. Ugyanis az érintkezés miatt így és csak úgy tolható el virtualisan a két test, hogyha virtuális eltolásuknak az (α, β, γ) irányra tartozó δn_1, δn_2 komponense olyan, hogy

$$\delta n_2 \geqq \delta n_1 . \text{ Ámde :}$$

$$\delta n_1 = \alpha \delta a_1 + \beta \delta b_1 + \gamma \delta c_1$$

$$\delta n_2 = \alpha \delta a_2 + \beta \delta b_2 + \gamma \delta c_2$$

Az előállított három egyenlőtlenség szorítja meg a két test virtuális eltolását az ütközés alatt. Ezek minden megoldásában teljesülni köteles a testek virtuális eltolására alkalmazott elvi relatió u.m.

$$(m_1 \ddot{\xi}_1 - S_1 \mathfrak{D} X)\delta a_1 + \cdot + \cdot + (m_2 \ddot{\xi}_2 - S_1 \mathfrak{D} X)\delta a_2 + \cdot + \cdot \geqq 0$$

Kell tehát létezniök oly nem negatív λ_1, λ_2 és λ multiplikátoroknak, hogy

$$m_1 \ddot{\xi}_1 = S_1 \mathfrak{D} X - \alpha \lambda ; \; m_1 \ddot{\eta}_1 = S_1 \mathfrak{D} Y - \beta \lambda , \; m_1 \ddot{\zeta}_1 = S_1 \mathfrak{D} Z - \gamma \lambda - \lambda_1$$

$$m_2 \ddot{\xi}_2 = S_2 \mathfrak{D} X + \alpha \lambda , \; m_2 \ddot{\eta}_2 = S_2 \mathfrak{D} Y + \beta \lambda , \; m_2 \ddot{\zeta}_2 = S_2 \mathfrak{D} Z + \gamma \lambda - \lambda_2$$

Azon föltevésünkben, hogy kivülről mindegyik test elemi részei csak a nehézségi szabaderő hatását viselik, a 40. pont értelmében

$$S_i \mathfrak{D} X = 0 , \; S_i \mathfrak{D} Y = 0 , \; S_i \mathfrak{D} Z = m_i g .$$

Mindenekelőtt vizsgáljuk a multiplikátorok eliminálásaival keletkező határozott egyenleteket. Eliminálásukkal három független egyenlethez jutunk. Ilyenek :

$$m_1 \ddot{\xi}_1 + m_2 \ddot{\xi}_2 = 0 , \; m_1 \ddot{\eta}_1 + m_2 \ddot{\eta}_2 = 0 , \; \beta \ddot{\xi}_2 - \alpha \ddot{\eta}_2 = 0$$

A két első csak azt mondja ki, amit már példánk első tárgyalásában megállapitottunk, hogy ugyanis a két test rendszerének tömegcentruma az ütközés alatt is állandó sebességgel mozog. Amennyiben az ütközés kis időtartamában az (α, β, γ) irány konstansnak számíthat, a harmadik egyenletből integrálás rendén:

$$\beta \dot{\xi}_2 - \alpha \dot{\eta}_2 = \text{konst.}$$

Ebből új egyenletetet írhatunk ki a ξ_2, η_2, ζ_2 tömegcentrum ütközés előtti (u_2, v_2, w_2) és ütközés utáni (U_2, V_2, W_2) sebességének a horizontális komponenseire azáltal, hogy egyszer az ütközés kezdetére, másszor az ütközés végére vonatkoztatjuk, azután a két egyenletből a konstanst elimináljuk. Azt kapjuk ugyanis, hogy:

$$\beta(U_2 - u_2) - \alpha(V_2 - v_2) = 0$$

Egyszerűség kedvéért úgy választottuk legyen koordinátarendszerünk fekvését a z tengely körül, hogy $\beta = 0$ legyen. Azt pedig kikötjük, hogy $\alpha \neq 0$, mert csakis oly felületelemek közt létesülhet az ütközés, amelyek nem horizontálisak. Eszerint új egyenletünkből $V_2 = v_2$ következik. Összevetve ezt a példánk első tárgyalásában levezetett két általános egyenlettel, most már ez a három határozott egyenletünk van az ütközés előtti és utáni horizontális sebességekre:

$$m_1 U_1 + m_2 U_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2$$

$$V_1 = v_1 \quad ; \quad V_2 = v_2$$

Egy negyedik egyenlet megállapítása még nincs módunkban.

Abban maradva, hogy $\beta = 0$, forduljunk most határozott egyenlőtlenségek előállításához. Azáltal érhetünk célt, hogy a három multiplikátort kiszámítjuk s azután a kifejezéseiket $\geqq 0$ írjuk. Azt kapjuk, hogy:

$$\frac{\ddot{\xi}_2}{\alpha} \geqq 0, \quad g + \ddot{\xi}_1 \frac{\gamma}{\alpha} - \ddot{\zeta}_1 \geqq 0$$

$$g + \ddot{\xi}_2 \frac{\gamma}{\alpha} - \ddot{\zeta}_2 \geqq 0$$

De válasszuk úgy az x tengely irányát, hogy: $\alpha > 0$ legyen. Akkor aztán három egyenlőtlenségünk így írható:

$$\ddot{\xi}_2 \geqq 0, \ \gamma \ddot{\xi}_1 \geqq \alpha(\ddot{\zeta}_1 - g), \ \gamma \ddot{\xi}_2 \geqq \alpha(\ddot{\zeta}_2 - g)$$

Hogy azonban a tömegcentrumoknak az ütközés előtti és az ütközés utáni sebességeire nézve jussunk egyenlőtlenségekhez, integráljuk ezen egyenlőtlenségeket az ütközés t_0 kezdetétől annak $t_0 + T$ végéig, ahol is T jelenti az ütközés kis időtartamát. Azt találjuk, hogy:

$$U_2 \geqq u_2, \ \gamma(U_1 - u_1) \geqq \alpha(W_1 - w_1 - gT),$$

$$\gamma(U_2 - u_2) \geqq \alpha(W_2 - w_2 - gT)$$

köteles lenni. Szükséges föltételei ezek az ütközésnek.

Ha szilárd testek ezek, (pl. golyók), amelyek tömegcentruma vertikálisan nem mozdúl, az alapzattal való érintkezés folyamán, úgy:

$$W_1 = w_1 = W_2 = w_2 = 0,$$

tehát:

$$\gamma(U_1 - u_1) + \alpha g T \geqq 0, \ \gamma(U_2 - u_2) + \alpha g T \geqq 0$$

adódik. Föltettük, hogy T igen kicsiny. Ha mármost $|U_1 - u_1|$ meg $|U_2 - u_2|$ nem igen kicsiny, akkor tekintettel arra, hogy föntebbi három egyenletünk elseje szerint az $U_1 - u_1$ és $U_2 - u_2$ különbségek ellentétes jelűek, γ-nak igen kicsinynek kell lennie egyenlőtlenségeinkből folyólag, tehát föltevéseink összeféréséhez szükséges, hogy az érintkezés felületeleme közelitőleg vertikális legyen.

Forgató momentum.

43, Mielőtt a 28. értelmében a virtuális elforditások esetére térnénk, ismerkedjünk meg a cimiratban megnevezett fogalommal. Gondoljunk evégből egy materiális elemi részt és egy rajta át nem haladó tengelyt és gondoljuk ezek sikjának a normálisát, amely arra felé mutasson, amerre a tengely körül jobbra fordulással mozdulhatna az elemi rész. Az elemi részre ható $(\mathfrak{D}X, \mathfrak{D}Y, \mathfrak{D}Z)$ szabad erőnek e normálisra tartozó komponensét szorozzuk meg az elemi résznek a tengelytől való távolságával. Ha e tengely neve $\mathfrak{T}$, akkor ezt a szorzatot „a szabaderő" $\mathfrak{T}$ tengelyű forgató momentumának, vagy forgató hatásának, vagy emeltyűi hatásának" mondjuk

44, Legyenek a tengely egy pontjának a koordinátái: a, b, c, a tengely iránykoszinuszai: λ, μ, ν

az elemi rész koordinátái: x, y, z. A gondolt normálisnak az iránykoszinuszait könnyen meghatározhatjuk ezen adatok segélyével. Ugyanis normálisunk iránya egyezik az $(x-a, y-b, z-c)$ vektor és az $\mathfrak{I}$ tengely tengelyének az irányával. Ha tehát az $(x-a, y-b, z-c)$ vektor hossza r és a $\mathfrak{I}$ tengellyel képezte szög $\tilde{\omega}$, akkor a normális iránykoszinuszai a ~~vektortan~~ szerint ezek:

$$\frac{\mu\frac{z-c}{r} - \nu\frac{y-b}{r}}{\sin\tilde{\omega}}, \text{ stb.}$$

azaz:

$$\frac{\mu(z-c) - \nu(y-b)}{r\sin\tilde{\omega}}, \text{ stb.}$$

ahol r és $\sin\tilde{\omega}$ ismeretes módon fejezhetők ki adatainkkal, kifejezésükre azonban nem lesz szükség. — Ezen iránykoszinuszokat rendre megszorozva a $\mathfrak{D}X, \mathfrak{D}Y, \mathfrak{D}Z$ erőkomponensekkel, azután a szorzatokat összeadva, megkapjuk a szabaderőnek a normálisra tartozó értékét, amely még csak megszorzandó az elemi rész és a tengely távolával. De ez utóbbi nem más, mint $r\sin\tilde{\omega}$. Eszerint a $(\mathfrak{D}X, \mathfrak{D}Y, \mathfrak{D}Z)$ szabaderő $\mathfrak{I}$ tengelyű forgató momentuma ez:

$$[\mu(z-c) - \nu(y-b)]\mathfrak{D}X + [\nu(x-a) - \lambda(z-c)]\mathfrak{D}Y + [\lambda(y-b) - \mu(x-a)]\mathfrak{D}Z \equiv$$

$$\equiv (\nu\mathfrak{D}Y - \mu\mathfrak{D}Z)(x-a) + (\lambda\mathfrak{D}Z - \nu\mathfrak{D}X)(y-b) + (\mu\mathfrak{D}X - \lambda\mathfrak{D}Y)(z-c) \equiv$$

$$\equiv [(y-b)\mathfrak{D}Z - (z-c)\mathfrak{D}Y]\lambda + [(z-c)\mathfrak{D}X - (x-a)\mathfrak{D}Z]\mu + [(x-a)\mathfrak{D}Y - (y-b)\mathfrak{D}X]\nu.$$

Már a definiciójából következik, hogy pozitív vagy negatív ez aszerint, amint a szabaderő az elemi rész I tengelyű jobbra vagy balra forditás-ával képez hegyes szöget.

45., Az elemi részen keresztül a reá ható (DX, DY, DZ) szabaderő irányára fektetett E egyenesnek és az I tengelynek a távolsági vonalát a szabaderő I tengelyű karjának nevezzük. Mint könnyű felösmerni az I tengely bármely pontjából az E egyenes bármely pontjába huzzunk vektort, ennek azon komponense, amely az E egyenesre is és az I tengelyre is merőleges (és úgy az E egyenes és I tengely transverzálisára esik) a szabaderő I tengelyű karjával egyenlő hosszú. Ekként az (x–a, y–b, z–c) vectornak az E és I transverzálisára eső komponense is a szabaderő I tengelyű karjával egyenlő hosszú. Ebből nevezetes tétel háramlik a szabaderő forgató momentumára. A szabaderő nagyságát DF-fel jelölve: az E egyenes egyik irányának az iránykoszinuszai:

$$\frac{DX}{DF}, \frac{DY}{DF}, \frac{DZ}{DF}$$

Ha tehát a szabaderőnek és az I tengelynek a szöge Θ, akkor az E és I transverzálisának az egyik irányát

$$\left(\mu \frac{DZ}{DF} - \nu \frac{DY}{DF}\right) : \sin\Theta, \text{ stb.}$$

iránykoszinuszok határozzák meg. Következőleg a

$$\frac{(\mu DZ - \nu DY)(x-a) + (\nu DX - \lambda DZ)(y-b) + (\lambda DY - \mu DX)(z-c)}{DF \sin\Theta}$$

kifejezés abszolut értéke a szabaderő *J* tengelyü karjának a hosszával egyenlő. – Hasonlítsuk össze ezt a kifejezést a szabaderő *J* tengelyü forgató momentumának második kifejezésével és látjuk, hogy ha a szabaderő *J* tengelyü karjának a hossza L, akkor a szabaderő *J* tengelyü forgató momentumának a nagysága $= L\,DF \sin\Theta =$ a kar hosszának, a szabaderő nagyságának és azon szög szinuszának a szorzata, amelyet az *J* tengellyel képez a szabaderő.

46, A forgató momentum 44,-ben talált egyik kifejezéséből a λ, μ, ν szorzóival, mint komponensekkel meghatározott vektort, ugymint az

$$\big((y-b)DZ - (z-c)DY, (z-c)DX - (x-a)DY,$$
$$(x-a)DY - (y-b)DX\big) \equiv$$
$$\equiv [(x-a, y-b, z-c)(DX, DY, DZ)]$$

vektorszorzatot is forgató momentumnak nevezzük az elemi részen, „a szabaderő a, b, c centrumu forgató momentumának" Ennek az első komponense oly tengelyü forgató momentum, amely tengely áthalad az a, b, c ponton s egyező irányu az x tengellyel s.i.t., mert ha egyező irányu az x tengellyel, akkor a hozzátartozó λ, μ, ν iránykoszinuszok értéke: $1, 0, 0$ s.i.t. Az *J* tengelyü forgató momentum pedig egyben az a, b, c centrumu forgató momentumnak az *J* tengelyre tartozó értéke.

47.) Egy anyagi rendszer elemi részeire ható szabaderők $\mathcal{J}$ tengelyű, illetőleg a, b, c centrumú forgató momentumainak az összegét a szabaderők $\mathcal{J}$ tengelyű, illetőleg a, b, c centrumú forgató momentumának, forgató hatásának, emeltyű hatásának mondjuk.

48.) Hasonló értelemben beszélünk másféle erők $\mathcal{J}$ tengelyű, illetőleg a, b, c centrumú forgató momentumáról. — Az $(\ddot{x}\,Dm, \ddot{y}\,Dm, \ddot{z}\,Dm)$ totális erő a, b, c centrumú forgató momentuma ez

$$[(y-b)\ddot{z}-(z-c)\ddot{y}, (z-c)\ddot{x}-(x-a)\ddot{z}, (x-a)\ddot{y}-(y-b)\ddot{x}]\,Dm$$

ami, ha a, b, c nem változik az idővel, így is írható:

$$\frac{d}{dt}[(y-b)\dot{z}-(z-c)\dot{y}, (z-c)\dot{x}-(x-a)\dot{z}, (x-a)\dot{y}-(y-b)\dot{x}]\,Dm.$$

Ha pedig az $(x-a, y-b, z-c)$ vektort w jelöli, akkor a zárójelben foglalt vektor nem más, mint az w és $\dot{w}$ vektornak a vektor-szorzata:

$$[w.\dot{w}] \equiv \frac{[w\,dw]}{dt}$$

A jobb oldal számlálója a vektor-szorzat definiciója szerint oly vektor, melynek a nagysága a dw elemi elmozdulás és az w távolsági vektor parallelogrammonjának a területe, iránya pedig a dw elemi elmozdulás és w távolsági vektor tengelyének az iránya. A dt-vel képzett osztata, azaz $[w.\dot{w}]$ nem más, mint a kétszerese annak a vektornak, amit a mekanika alapstanaiban az x, y, z pont a, b, c centrumú területi sebességének neveztünk el. Eszerint itt a $\mathfrak{D}m$ szorzója az a, b, c centrumú területi gyorsulás kétszerese.

49, Ha az a, b, c pont s a λ, μ, ν irány állandó, akkor a totális erő $\mathcal{J}$ tengelyű forgató momentumát, vagyis az:

$$\{[(y-b)\ddot{z}\mathfrak{D}m - (z-c)\ddot{y}\mathfrak{D}m]\lambda + [(z-c)\ddot{x}\mathfrak{D}m - (x-a)\ddot{z}\mathfrak{D}m]\mu + \\ + [(x-a)\ddot{y}\mathfrak{D}m - (y-b)\ddot{x}\mathfrak{D}m]\nu\}$$

forgató momentumot így is írhatjuk:

$$\frac{d}{dt}\{[(y-b)\dot{z} - (z-c)\dot{y}]\lambda + [(z-c)\dot{x} - (x-a)\dot{z}]\mu + \\ + [(x-a)\dot{y} - (y-b)\dot{x}]\nu\}\mathfrak{D}m$$

Ami itt a főzárójelben van, ez az a, b, c centrumú területi sebesség kétszeresének a λ, μ, ν irányra ($\mathcal{J}$ tengelyre) tartozó értéke.

50, Akármiféle erő egy elemi részen $(\mathfrak{D}P, \mathfrak{D}Q, \mathfrak{D}R)$, ha ennek az a, b, c centrumú forgató momentuma $(\mathfrak{D}U, \mathfrak{D}V, \mathfrak{D}W)$, akkor az egész anyagi rendszerre való kiterjesztéssel az $S(\mathfrak{D}U, \mathfrak{D}V, \mathfrak{D}W)$ vektort a $(\mathfrak{D}P, \mathfrak{D}Q, \mathfrak{D}R)$ erők a, b, c centrumú forgató momentumának nevezzük. A $\lambda S\mathfrak{D}U + \mu S\mathfrak{D}V + \nu S\mathfrak{D}W$ skalárist pedig a $(\mathfrak{D}P, \mathfrak{D}Q, \mathfrak{D}R)$ erők $\left(\begin{smallmatrix} a, & b, & c \\ \lambda, & \mu, & \nu \end{smallmatrix}\right)$ tengelyű forgató momentumának mondjuk. Nyilvánképen összege ez az egyes $(\mathfrak{D}P, \mathfrak{D}Q, \mathfrak{D}R)$ erők azon $\left(\begin{smallmatrix} a, & b, & c \\ \lambda, & \mu, & \nu \end{smallmatrix}\right)$ tengelyű forgató momentumának.

51. Vegyük észre, hogy ha adva van egy

anyagi rendszeren valamely $(\mathfrak{D}P, \mathfrak{D}Q, \mathfrak{D}R)$ erők toló hatása és origói forgató momentuma, akkor ezen erők bármely tengelyű és bármely centrumú forgató momentumát kiszámithatjuk már. Ha ugyanis (A, B, C) jelenti ezen erők toló hatását és (U, V, W) jelenti ezen erők origói forgató hatását, akkor ezen erők $\left(\begin{smallmatrix} a, & b, & c \\ \lambda, & \mu, & \nu \end{smallmatrix}\right)$ tengelyű forgató momentuma =

$$(U + cB - bC)\lambda + (V + aW - cU)\mu + (W + bU - aV)\nu.$$

A $(\mathfrak{D}P, \mathfrak{D}Q, \mathfrak{D}R)$ erők $(a, b\,c)$ centrumú forgató momentumának komponensei pedig =

$$(U + cB - bC,\ V + aW - cU,\ W + bu - aV)$$

Könnyű ezeket fölismerni az eredeti kifejezéseken. Ugyanis:

$$S\{(y-b)\mathfrak{D}Z - (z-c)\mathfrak{D}Y\} = S(y\,\mathfrak{D}Z - z\,\mathfrak{D}Y) + c\,S\mathfrak{D}Y - b\,S\mathfrak{D}Z$$

stb.

A forgó mozgás mekanikája.

52. Tegyük föl, hogy olyanok az anyagi rendszer viszonyai, hogy van oly nyugvó, vagy határozott módon mozgó tengely, legalább egy, amely körül az anyagi rendszer mindkét értelemben elforditható virtuálisan. Jelölje t pillanatban a, b, c ily tengelynek egy individuális pontját és λ, μ, ν a tengely iránykoszinuszait. Az (a, b, c) tengelypontból az x, y, z pontba nyú-

ló vektor komponenseit ξ, η, ζ jelölje. Az x, y, z pontnak azon tengely körül $\delta\Theta$ szögön tett virtuális elforditása által $a(\xi, \eta, \zeta)$ vektor is elfordúl $\delta\Theta$ szögön s ezáltal a komponensei megváltoznak:

$$\delta\xi = (\mu\zeta - \nu\eta)\,\delta\Theta$$
$$\delta\eta = (\nu\xi - \lambda\zeta)\,\delta\Theta$$
$$\delta\zeta = (\lambda\eta - \mu\xi)\,\delta\Theta$$

értékkel, mint a vektortanból tudjuk. – Emellett $\delta\Theta$ pozitivnak vagy negativnak számit aszerint, amint jobbra vagy balra forditásból származik az $\begin{pmatrix} a, b, c \\ \lambda, \mu, \nu \end{pmatrix}$ tengely körül. Ámde $\xi = x - a$, $\eta = y - b$, $\zeta = z - c$, tehát $\delta\xi = \delta x$, $\delta\eta = \delta y$, $\delta\zeta = \delta z$; ugyanis a puszta elforditásban a, b, c változatlan marad: $(\delta a, \delta b, \delta c) = 0$. Eszerint az (x, y, z) helyű elemi rész a virtuális elforditás következtében

$$(\delta x, \delta y, \delta z) = (\delta\xi, \delta\eta, \delta\zeta)$$

virtuális elmozdulást tesz: az a, b, c ponton λ, μ, ν irányban átmenő tengely körül $\delta\Theta$ szögön való virtuális elforditásból:

$$\delta x = (\mu\zeta - \nu\eta)\,\delta\Theta = \{\mu(z-c) - \nu(y-b)\}\,\delta\Theta$$
$$\delta y = (\nu\xi - \lambda\zeta)\,\delta\Theta = \{\nu(x-a) - \lambda(z-c)\}\,\delta\Theta$$
$$\delta z = (\lambda\eta - \mu\xi)\,\delta\Theta = \{\lambda(y-b) - \mu(x-a)\}\,\delta\Theta$$

komponensű virtuális elmozdulás hárul az elemi részre.

53. E kifejezésekben λ, μ, ν meg $\delta\Theta$ minden elemi rész virtuális elfordulásán ugyanaz. Továbbá (a, b, c) is valamennyi elemi rész számára

ugyanaz gyanánt választható meg a tengelyen. Ha már most $\delta\Theta$ három szorzóját rendre P, Q, R jelöli, akkor a virtuális munkának a törvénye, u. m.

$$S\{(\ddot{x}\mathfrak{D}m-\mathfrak{D}X)\delta x+(\ddot{y}\mathfrak{D}m-\mathfrak{D}Y)\delta y+(\ddot{z}\mathfrak{D}m-\mathfrak{D}Z)\delta z\}\geqq 0$$

a virtualis elfordulással így van:

$$\delta\Theta\, S\{(\ddot{x}\mathfrak{D}m-\mathfrak{D}X)P+(\ddot{y}\mathfrak{D}m-\mathfrak{D}Y)Q+(\ddot{z}\mathfrak{D}m-\mathfrak{D}Z)R\}\geqq 0$$

Minthogy $\delta\Theta$ positiv is lehet, negativ is lehet, az következik, hogy:

$$S\{(\ddot{x}\mathfrak{D}m-\mathfrak{D}X)P+(\ddot{y}\mathfrak{D}m-\mathfrak{D}Y)Q+(\ddot{z}\mathfrak{D}m-\mathfrak{D}Z)R\}=0$$

Helyettesitsük ide be P, Q, R értékét, azután rendezzük a baloldalt λ, μ, ν szerint. Azt kapjuk, hogy:

$$\lambda S\{(y-b)(\ddot{z}\mathfrak{D}m-\mathfrak{D}Z)-(z-c)(\ddot{y}\mathfrak{D}m-\mathfrak{D}Y)\}+$$
$$+\mu S\{(z-c)(\ddot{x}\mathfrak{D}m-\mathfrak{D}X)-(x-a)(\ddot{z}\mathfrak{D}m-\mathfrak{D}Z)\}+$$
$$+\nu S\{(x-a)(\ddot{y}\mathfrak{D}m-\mathfrak{D}Y)-(y-b)(\ddot{x}\mathfrak{D}m-\mathfrak{D}X)\}=0$$

ami azt jelenti, hogy a

$$(\ddot{x}\mathfrak{D}m-\mathfrak{D}X,\ \ddot{y}\mathfrak{D}m-\mathfrak{D}Y,\ \ddot{z}\mathfrak{D}m-\mathfrak{D}Z)$$

kényszererőknek az $\begin{pmatrix}a, & b, & c\\ \lambda, & \mu, & \nu\end{pmatrix}$ tengelyű forgató momentuma eltűnik. Ha pedig a szabaderőkre vonatkozó részt a jobb oldalra visszük át, ebben az alakban jelentkezik egyenletünk:

$$\lambda S\{(y-b)\ddot{z}-(z-c)\ddot{y}\}\mathfrak{D}m+\mu S\{(z-c)\ddot{x}-(x-a)\ddot{z}\}\mathfrak{D}m+$$
$$+\nu S\{(x-a)\ddot{y}-(y-b)\ddot{x}\}\mathfrak{D}m=\lambda S\{(y-b)\mathfrak{D}Z-(z-c)\mathfrak{D}Y\}+$$
$$+\mu S\{(z-c)\mathfrak{D}X-(x-a)\mathfrak{D}Z\}+\nu S\{(x-a)\mathfrak{D}Y-(y-b)\mathfrak{D}X\}$$

Ez azt mondja, hogy a totális erőknek és szabaderőknek az $\begin{pmatrix}a, & b, & c\\ \lambda, & \mu, & \nu\end{pmatrix}$ tengelyű forgató momentuma egyenlő.

54, Arra az esetre, hogy az anyagi rendszer valamely részének virtuális nyugalmában a másik része az $\left(\begin{smallmatrix} a, & b, & c \\ \lambda, & \mu, & \nu \end{smallmatrix}\right)$ tengely körül virtuálisan fordítható, azzal a föltétellel érvényes egyenletünk, hogy az összegeléseket csak anyagi rendszerünk utóbbi részére terjesztjük ki, mert az előbbi rész a maga virtuális nyugalmában, vagy pontosan nyugalomban van, vagy csak véges nagy sebességek szerint való elmozdulásokat tartalmaz.

55.) Az 53.-ban megállapított egyenlet tartalmát a forgató momentumok, vagy a területek tételének nevezzük. Az utóbbi elnevezést a 48. cikk vége igazolja. Egyenletünket magát a forgató momentumok egyenletének mondjuk. Határozott egyenlet ez, amelyből sokszor lehet jelentőset tudni meg a mekanikai állapot felől.

Midőn $a, b, c; \lambda, \mu, \nu$ konstans, akkor hasznos számbavenni, hogy:

$$\lambda S\{(y-b)\ddot{z}-(z-c)\ddot{y}\}\mathfrak{D}m = \frac{d}{dt}\lambda S\{(y-b)\dot{z}-(z-c)\dot{y}\};$$
stb.

mihez képest így is írható ilyenkor a forgató momentumok egyenlete:

$$\frac{d}{dt}\Big\{\lambda S\{(y-b)\dot{z} - (z-c)\dot{y}\}\mathfrak{D}m +$$
$$+ \mu S\{(z-c)\dot{x} - (x-a)\dot{z}\}\mathfrak{D}m +$$
$$+ \nu S\{(x-a)\dot{y} - (y-b)\dot{x}\}\mathfrak{D}m\Big\} =$$
$$= \lambda S\{(y-b)\mathfrak{D}Z - (z-c)\mathfrak{D}Y\} + \mu S\{(z-c)\mathfrak{D}X - (x-a)\mathfrak{D}Z\} +$$
$$+ \nu S\{(x-a)\mathfrak{D}Y - (y-b)\mathfrak{D}X\}.$$

56.) Az alkalmazások érdekében felemlítendő itt is egy speciális tapasztalati tétel, párja a 40.-ben említettnek s azt állítja, hogy a belső szabaderőknek nincs forgató hatásuk az anyagi rendszereken.

Elég pedig egy bizonyos centrumra mondani ki ezt a tételt, mert egyről minden másra következik, pl. 51.-ből 40. alapján látható, hogy az origói forgató hatásról minden más centrumúra és így minden tengelyre is következik ez a tétel.

57.) Ha virtuálisan mindkét értelemben forditható az anyagi rendszer oly tengely körül, mely nyugszik a koordinátarendszerünkben, akkor egyszerűség kedvéért helyezzük ebbe a tengelybe valamelyik koordinátatengelyünket. Legyen ez a koordinátatengely például az y tengely. Most az 55.-ben $a=0$, $b=0$, $c=0$ tehető és $\lambda=0$, $\mu=1$, $\nu=0$, tehát

$$\frac{d}{dt} S(z\dot{x} - x\dot{z})\,\mathfrak{D}m = S(z\mathfrak{D}X - x\mathfrak{D}Z)$$

most a forgató momentumok egyenlete azon tengely körül.

Célszerű ezt y tengelyű poláris koordinátákban is előállítani. Az x, y, z pont távolságát az y tengelytől R-rel, az x, y, z pont elfordulásának a szögét az y tengely körül a z tengely felől számítva ϖ-val jelöljük s vezessük be az R, ϖ, y poláris koordinátákat:

$$x = R\sin\varpi, \quad y = y, \quad z = R\cos\varpi,$$

ahol R mindig positiv, az $\bar{\omega}$ pedig positiv vagy negativ aszerint, hogy jobbra, vagy balra-fordítás eredménye-e. Deriválás rendén

$$\dot{x} = \dot{R}\sin\bar{\omega} + R\dot{\bar{\omega}}\cos\bar{\omega}, \quad \dot{y} = \dot{y}$$
$$\dot{z} = \dot{R}\cos\bar{\omega} - R\dot{\bar{\omega}}\sin\bar{\omega}$$

Az $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ sebességnek az $(\dot{R}\sin\bar{\omega}, \dot{y}, \dot{R}\cos\bar{\omega})$ összetevője az (x,y,z) pont és az y tengely síkjában van, mert $= (\sin\bar{\omega}, 0, \cos\bar{\omega})\dot{R} + (0, \dot{y}, 0)$ és ezek elseje $\parallel$ az (R) távolsági vonallal, második a parallel az y tengellyel. Az $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ sebesség másik összetevője $(\cos\bar{\omega}, 0, -\sin\bar{\omega})R\dot{\bar{\omega}}$ merőleges az (x,y,z) pont és az y tengely síkjára, mert az (x,y,z) vektorra is, meg a $(0,y,0)$ vektorra is merőleges. A sebességnek ezen $(\cos\bar{\omega}, 0, -\sin\bar{\omega})R\dot{\bar{\omega}}$ összetevője tisztán az y tengelyű fordulásból származik, s a másik összetevője ezen fordulástól független.

Irjuk be a koordináták és a sebesség poláris kifejezéseit egyenletünk baloldalába. Az $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$-féle sebességeknek csak az y tengelyű forgásokból származó összetevője marad bent, a másik összetevője kiesik:

$$\frac{d}{dt} S R^2 \dot{\bar{\omega}} Dm = S(zDX - xDZ).$$

Abban a különös esetben, hogy az elemi részek egyképen fordúlnak mozgás közben az y tengely körül, jelölje ε a Dm tömegű elemi rész $\bar{\omega}$-jának kezdeti értékét és jelölje Θ az ε szögek közös megváltozását a t pillanatban: $\bar{\omega} = \varepsilon + \Theta$ és mivel az ε szögek az idővel nem változnak, $\dot{\omega}=\dot{\Theta}$ és ez az összegelés jele elé tehető. Ha még az a speciális esetünk is van, hogy az R-ek sem változnak az idővel, akkor egyenletünk így írható:

$$\ddot{\Theta} S R^2 \mathfrak{D}m = S(z\mathfrak{D}X - x\mathfrak{D}Z)$$

A $SR^2\mathfrak{D}m$ összeget az anyagi rendszer y tengelyű inerciamomemtumának mondjuk.

1. Példa. A közönséges fizikai inga = merev test, amely koordinátarendszerünkben egy állandó tengely körül surlódás nélkül mindkét értelemben fordítható és csakis így mozdítható. Nyilvánképen mindkét értelemben virtuálisan is fordítható azon tengely körül, amelyet is az inga tengelyének mondunk. Ebbe a tengelybe helyezve az y tengelyt, az 57. végén írt egyenletünk van, u. m. ha J jelöli az inga inercia momentumát, a maga tengelye körül:

$$J\ddot{\Theta} = S(z\mathfrak{D}X - x\mathfrak{D}Z).$$

Tegyük fel most, hogy koordinátarendszerünk a földhöz van rögzítve, az inga tengelye horizontális és a kivülről ható szabaderők sorában csak a nehézségi erő tesz számot. Vertikálisan lefelé állítva a z tengelyt: $\mathfrak{D}X=0$, $\mathfrak{D}Y=0$, $\mathfrak{D}Z=-g\mathfrak{D}m$. Ha tehát az inga tömege m és tömegcentrumának a koordinátái ξ, η, ζ, akkor az $J\ddot{\Theta}=-mg\xi$ alakban írható egyenletünk. De ha ε_0 jelenti a tömegcentrum ε-ját (57. végének értelmében) és ha a tömegcentrum az ingatengelytől R_0 távolságban van, akkor $\xi = R_0 \sin(\varepsilon + \Theta)$. Nagyobb egyszerűség kedvéért változtassuk meg úgy a Θ szög értelmét, hogy ezentúl az $\varepsilon + \Theta$ szöget jelentse az. Eszerint az

$$J\ddot{\Theta} = -m R_0 g \sin\Theta$$

egyenletünk van, amelyből Θ adott kezdeti Θ és $\dot{\Theta}$ értékhez meghatározható, mint az idő függvénye.

Szorozzuk át a $\dot{\Theta}$ szögsebességgel egyenletünket és az első integrálját azonnal felírhatjuk:

$$J\dot{\Theta}^2 = 2 m R_0 g \cos\Theta + \text{konst.}$$

Ha pedig:

$$\frac{J}{m R_0} = l, \text{ azaz } \frac{SR^2 \mathfrak{D} m}{m R_0} = l$$

írjuk, akkor:

$$\dot{\Theta}^2 = \frac{2g}{l} \cos\Theta + \text{konstans.}$$

Épen ilyen a mozgás egyenlete egy l hosszúságú merev szárú matematikai ingának. Úgy forog tehát a közönséges fizikai inga a földhöz rögzített tengely körül, mint egy merev szárú $l = \frac{SR^2 \mathfrak{D} m}{m r}$ hosszúságú matematikai inga. Ezt az l hosszúságot a közönséges fizikai inga „redukált" hosszának nevezzük.

Különös érdekű az inga azon mozgása, amely nyugalomból indúl ki. Jelölje ebben a nyugalomban egyszerűen ε a Θ szöget. Akkor egyenletünk integrációs konstansa $= -\frac{2g}{l} \cos\varepsilon$, mert kezdetben $\Theta = \varepsilon$, $\dot{\Theta} = 0$. Ösmeretes alakban kapjuk pedig egyenletünk megoldását, ha φ új változót vezetünk be a

$\sin\frac{\Theta}{2} = \sin\frac{\varepsilon}{2}\cdot\sin\varphi$ egyenlet révén. Ekkor az

$$\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\varepsilon}{2}\cdot\sin^2\varphi}} \equiv F\left(\sin\frac{\varepsilon}{2},\varphi\right)$$

elsőfajú elliptikus integrál segélyével fejezhetjük ki Θ és t összefüggését ugyanis a matematikai ingára megállapított módon. Nevezetesen ha általánosság kedvéért időszámításunk kezdetét Θ-nak valamely Θ_0 értékéhez toljuk el, és φ új kezdeti értékét φ_0 jelöli:

$$\sqrt{\frac{l}{g}}\left[F\left(\sin\frac{\varepsilon}{2},\varphi\right) - F\left(\sin\frac{\varepsilon}{2},\varphi_0\right)\right] = t.$$

Röviden $F\left(\sin\frac{\varepsilon}{2},\varphi_0\right) \equiv F_0$ téve:

$$\varphi = am\left(F_0 + \sqrt{\frac{g}{l}}\cdot t\right), \left(\text{modulo } \sin\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

Következőleg:

$$\sin\frac{\Theta}{2} = \sin\frac{\varepsilon}{2}\sin am\left(F_0 + \sqrt{\frac{g}{l}}\cdot t\right), \left(\text{modulo } \sin\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

egyenletünk van Θ-nak mint az idő függvényének meghatározására.

Az ingának ezzel meghatározott mozgását az ő lengésének, az ε szöget lengése amplitudójának, a $\varphi = am\left(F_0 + \sqrt{\frac{g}{l}}\cdot t\right)$ szöget pedig lengése fázisának nevezzük. Egyenletünk szerint periodusos mozgás ez, amelynek a fél időperiodusa azon idő, amely alatt egyik szélső helyzetből a másikba jut el az inga, vagyis az, amely alatt a Θ szög $-\varepsilon$-tól ε-ig, vagy ε-tól $-\varepsilon$-ig változik, vagyis az, amely alatt a φ fázis $-\frac{\pi}{2}$-től $+\frac{\pi}{2}$-ig, vagy $\frac{\pi}{2}$-től $-\frac{\pi}{2}$-ig változik. A t fentebbi kifejezése szerint ez az idő =

$$\sqrt{\frac{l}{g}}\left[F\left(\sin\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\pi}{2}\right) - F\left(\sin\frac{\varepsilon}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)\right] =$$

$$= 2\sqrt{\frac{l}{g}}\, F\left(\sin\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\sin^2\frac{\varepsilon}{2} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)^2\sin^4\frac{\varepsilon}{2} + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\right)^2\sin^6\frac{\varepsilon}{2} + \dots \text{ in inf.}\right\}$$

Ezt nevezzük „lengésidőnek". Két oly tényező szorzata, amelyek egyike csak az ε amplitudó függvénye (és közelitőleg $= 1 : \sqrt{\cos\frac{\varepsilon}{2}}$, ami Baumgartner Alajos észrevétele), másika pedig u. m.

$$\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \equiv \pi\sqrt{\frac{S R^2 Dm}{r.m.g}}$$

az inga tömegének az inga tengelye körül való elosztódásától, e tömeg nagyságától és a g nehezségi gyorsulástól függ.

Nem vettük számba a tengelyen való surlódást és nem vettük számba a környezet semmi befolyását. Ebből folyólag egyenleteink a valóságban megközelitőleg is csak rövid időre tekinthetők helyesnek.

2. Példa. A közönséges torzió mérleg. Ez egy merev test, amely egy nyujthatatlan, de bármiképen hajlitható és csavarható vékony fonálon csüng a földhöz kötött álványról. Lengőnek fogjuk nevezni. Az állvány teleprendszer, a fonálról pedig feltesszük, hogy kapcsoló rendszer előzetes definicióink értelmében. De a fonál az elcsavarodásra nézve ne legyen passiv, hanem mihelyt elcsavarodott, már visszacsavarodni s a lengőt is visszafordítani törekedjék. Ennek következtében a 27. szerint a szabaderőket elvi relációnkban új erőkkel kell megtoldanunk. Ezeknek a fonáltól származó erőknek a fonál körül való forgató momentumát a torzió forgató momentumának nevezzük. Úgy járjunk el, hogy a

szabaderők $(\mathfrak{D}X, \mathfrak{D}Y, \mathfrak{D}Z)$ jelvényén most már a szabaderőknek és az új erőknek az összegét értsük a virtuális munka törvényében. Koordinátarendszerünket a földhöz, tehát egyben az állványhoz rögzítsük úgy pedig, hogy origója a fonálnak az állványhoz rött pontjában legyen és z tengelye vertikálisan lefelé mutasson.

A lengő minden origói tengely körül mindkét értelemben elfordítható virtuális módon (és tényleg is).

Tegyük föl, hogy a fonál állandóan vertikális helyzetben van és a lengő mozgása ebben a koordinátarendszerünkben a fonál körül való forgó mozgásból áll. Válasszunk most a lengőben tetszésre egy materiális vektort, amelynek az eleje a fonál hosszanti tengelyében, a z tengelyben legyen s amely e tengelyre merőleges legyen. Ennek az irányát nevezzük a lengő irányának. Az x tengelyt úgy helyezzük el a z tengely körül, hogy midőn a fonál nincs elcsavarva, a lengő irányában feküdjék az x tengely. A lengő iránya pedig t pillanatban Θ szög alatt legyen elfordulva az x tengely irányától.

Ha most J a z tengelyű inerciamomentumot jelenti, akkor az 57. végét ezúttal a z tengelyre alkalmazva

$$J\ddot{\Theta} = S(x\mathfrak{Y} - y\mathfrak{X})$$

egyenletünk van mint a z tengelyű forgatómomentumok egyenlete. Egyenletünk jobboldalát két részben fogjuk fel; az egyik a fonál torziójából, másik a külső szabaderőktől származik; amazt Φ, ezt F jelölje, mihez képest

$$J\ddot{\Theta} = \Phi + F,$$

Φ a fonál torziójának, F a külső szabaderőknek a z tengelyű forgató momentuma. Nyugalomban $\Phi + F = 0$, tehát $\Phi = -F$. Ha tehát ismerjük nyugalomban a külső szabaderők z tengelyű forgató momentumát, akkor megkapjuk a nyugalom számára Φ-t, vagyis a torzióból származó z tengelyű forgató hatást. Ezen a módon ahoz az eredményhez jutunk, hogy nyugalomban Φ megközelitőleg arányos az elfordulás szögével, Θ-val, legalább addig, míg nem nagy a Θ – és pedig visszafordító hatás, minélfogva negativ együttható szerint arányos Θ-val. Ezen együttható a fonál minőségétől, méreteitől és állapotától függ. Ezeket a tényezőket itt változatlannak gondoljuk. $-C$-val jelölve az arányossági faktort

$$\Phi = -\lambda\Theta.$$

Igy van ez nyugalomban. Kérdés azonban, vajjon mozgásban is ilyen-e a Φ. Bármely adott F mellett használjuk azonban ezt a Φ kifejezést, Θ-nak mindig van oly felső számhatára, amelyen belül jó megközelítés szerint olyan mozgás következik differenciál egyenletünkből eddigi tapasztalataink szerint, amely egyezik a valóságbeli mozgással, bizvást feltehetjük tehát, hogy mindig ilyen a Φ.

Legyen pl. hogy a külső szabaderők sorában csak a nehézségi erő és a környezet ellenállásából származó erő tesz számot. Akkor azon előzetes föltevésünk, hogy a fonál folyvást vertikális és hogy csupán a fonál körül való forgó mozgást végez a lengő, bizonyos föltételek alatt teljesül, amelyekről máskor lesz szó.

Most a szabaderők F forgató momentuma pusztán a környezeti ellenállás forgató momentumából áll, mert a nehézségi erőnek a horizontális komponensei zérusok lévén, ezen erőnek vertikális tengely körül nincs forgató momentuma. A környezeti ellenállásból származó forgató momentum pedig addig, amig a Θ szögsebesség kicsiny, megközelitőleg arányos ezzel és pedig negativ arányossági együttható szerint, mert mindig ellenkező értelmű mint a szögsebesség. Ezen együttható a környezettől, a lengő alakjától, terjedelmétől és a forgás tengelyéhez viszonyított helyzetétől függ. Itt állandónak fogjuk föltételezni. Jelölje $-2\varkappa$ ezt az arányossági együtthatót. Akkor ezúttal

$$\mathcal{F} = -2\varkappa\dot{\Theta}$$

Van tehát most a következő egyenletünk:

$$J\ddot{\Theta}^2 = -\mathcal{L}\Theta - 2\varkappa\dot{\Theta}$$

azaz:

$$\ddot{\Theta} + \frac{2\varkappa}{J}\cdot\dot{\Theta} + \frac{\mathcal{L}}{J}\Theta = 0$$

Ezen egyenlet kicsiny kezdeti Θ és $\dot{\Theta}$ értékekhez a Θ elfordulási szöget az idő oly függvényeként határozza meg, amely a valóságos mozgással jól egyezik.

Használjuk ezeket a rövidítéseket:

$$\frac{\varkappa}{J} \equiv p\,,\ \sqrt{\frac{\mathcal{L}}{J} - \left(\frac{\varkappa}{J}\right)^2} \equiv q\,.$$

Akkor konstans J, $\mathcal{L}$, $\varkappa$ mellett egyenletünk általános megoldása ez:

$$\Theta = A e^{-pt} \cdot \sin q(t+B),$$

ahol A és B az integráció határozatlanai, amelyek Θ_0 és $\dot{\Theta}_0$ alapján határozandók meg. Ha $\frac{\varkappa^2}{J} < \mathcal{L}$, akkor q reális, és Θe^{pt} egyszerű harmonikus módon változik. Ha pedig a $\varkappa$ ellenállási együttható nagyon kicsiny, és emiatt zérusnak írjuk, akkor magának a Θ-nak a számára kapunk egyszerű harmonikus változást. Azonban vegyük most észre, hogy bármi kicsiny legyen is a $\varkappa$, ellenállási együttható, hacsak nem pontosan zérus, már igen hosszú időtartamra nem válik be az egyszerű harmonikus mozgás, mert az ekszponenciális értéke számottevően el fog ütni igen nagy idő mulva az egységtől, mely érték akkor illetné meg az ekszponenciálist, ha a $\varkappa$ zérus volna. Ugyanis folytást kissebbedik ez az ekszponenciális és idő haladtával 0-ba konvergál.

Forgó mozgások rendszerének mekanikája.

58, Most az anyagi rendszer oly részek összetétele legyen, amelyek egyidejüleg különböző tengelyek körül fordíthatók virtuálisan. Ekkor általános elvi relációnk baloldalát az egyes rendszerrészekre vonatkozó tagok összege gyanánt írjuk fel:

$$\begin{aligned}&S_1\{(\ddot{x}\mathfrak{D}m-\mathfrak{D}X)\,\delta x+(\ddot{y}\mathfrak{D}m-\mathfrak{D}Y)\,\delta y+(\ddot{z}\mathfrak{D}m-\mathfrak{D}Z)\,\delta z\}+\\ &+S_2\{(\ddot{x}\mathfrak{D}m-\mathfrak{D}X)\,\delta x+(\ddot{y}\mathfrak{D}m-\mathfrak{D}Y)\,\delta y+(\ddot{z}\mathfrak{D}m-\mathfrak{D}Z)\,\delta z\}+\\ &+\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\geqq 0\end{aligned}$$

Az egyes rendszer-részekre a virtuális elfordításokból, az előbbi cikk útmutatása szerint

$$\begin{aligned}\delta x_i &= \{\mu_i(z_i-c_i)-\nu_i(y_i-b_i)\}\,\delta\Theta_i\\ \delta y_i &= \{\nu_i(x_i-a_i)-\lambda_i(z_i-c_i)\}\,\delta\Theta_i\\ \delta z_i &= \{\lambda_i(y_i-b_i)-\mu_i(x_i-a_i)\}\,\delta\Theta_i \qquad (i=1,2,\dots)\end{aligned}$$

ahol az i-dik rendszerrész virtuális elforditásának $\begin{pmatrix} a_i, & b_i, & c_i \\ \lambda_i, & \mu_i, & \nu_i \end{pmatrix}$ a tengelye, $\delta\Theta_i$ a szöge, amely pedig pozitiv vagy negativ aszerint, amint a tengely körül jobbra, vagy balra forditásból származott. Természetesen a_i, b_i, c_i és λ_i, μ_i, ν_i az i-dik rendszerrész minden pontjához ugyanazon értékek, valamint $\delta\Theta_i$ is. A virtuális munka egyenlőtlensége tartozik teljesülni a $(\delta x_i, \delta y_i \, \delta z_i)$ virtuális elmozdulásoknak ezen kifejezéseivel. Ha tehát $\delta\Theta_i$ három szorzóját rendre P_i, Q_i, R_i jelöli, beirhatjuk alapegyenlőtlenségünkbe, hogy

$$\delta x_i = P_i \delta\Theta_i \quad , \quad \delta y_i = Q_i \delta\Theta_i \quad , \quad \delta z_i = R_i \delta\Theta_i$$

Eszerint:

$$\delta\Theta_1 S_1 \{(\ddot{x} \mathfrak{D} m - \mathfrak{D} X) P + (\ddot{y} \mathfrak{D} m - \mathfrak{D} Y) Q + (\ddot{z} \mathfrak{D} m - \mathfrak{D} Z) R\} +$$
$$+ \delta\Theta_2 S_2 \{(\ddot{x} \mathfrak{D} m - \mathfrak{D} X) P + (\ddot{y} \mathfrak{D} m - \mathfrak{D} Y) Q + (\ddot{z} \mathfrak{D} m - \mathfrak{D} Z) R\} +$$
$$+ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \geqq 0$$

amelyben az összegelési jelek indexe az összeadandókra is átterjed és P, Q, R kifejezésének beirásával

$$S_i \{(\ddot{x} \mathfrak{D} m - \mathfrak{D} X) P + (\ddot{y} \mathfrak{D} m - \mathfrak{D} Y) Q + (\ddot{z} \mathfrak{D} m - \mathfrak{D} Z) R\} \equiv$$
$$\equiv \lambda_i S \{(y_i - b_i)(\ddot{z}_i \mathfrak{D} m_i - \mathfrak{D} Z_i) - (z_i - c_i)(\ddot{y}_i \mathfrak{D} m_i - \mathfrak{D} Y_i)\} +$$
$$+ \mu_i S \{(z_i - c_i)(\ddot{x}_i \mathfrak{D} m_i - \mathfrak{D} X_i) - (x_i - a_i)(\ddot{z}_i \mathfrak{D} m_i - \mathfrak{D} Z_i)\} +$$
$$+ \nu_i S \{(x_i - a_i)(\ddot{y}_i \mathfrak{D} m_i - \mathfrak{D} Y_i) - (y_i - b_i)(\ddot{x}_i \mathfrak{D} m_i - \mathfrak{D} X_i)\}$$

Ha most $\delta\Theta_1, \delta\Theta_2, \ldots$ egészen tetszéses szögek, akkor egyenlőtlenségünkben mindenik $\delta\Theta_i$-nak a szorzója eltünni köteles, amiből annyi határozott egyenlet származik, ahány rendszerrész fordítható el virtuálisan. Azonban a $\delta\Theta_i$ elfordulási szögek általában egyszerü relációknak tartoznak eleget tenni, mint pl. olyankor, amidőn egymásba fogódzó fogas kerekek tartoznak az egyes rendszerrészekhez. Ekkor azután az egyszerü egyenlőtlenségek tana alkalmazandó határozott vonatkoztatások származtatására.

Ide vágó példák tárgyalásában idő szükéből a szemináriumi gyakorlatokra kell szorítkoznunk.

A kinetikus energia tétele.

59.) Most a 28. cikk ötödik speciális esetével foglalkozzunk, amelyben olyanok anyagi rendszerünk viszonyai, hogy a (dx, dy, dz) valóságos elemi elmozdulásokkal arányos elmozdulások a virtuálisok közé tartoznak úgy, hogy egyebek közt:

$$\delta x = N dx, \quad \delta y = N dy, \quad \delta z = N dz,$$

ahol a N minden elemi rész számára ugyanaz a skaláris és pozitiv is, negativ is lehet. Esetleg ezzel ki is vannak merítve az elemi részek virtuális elmozdulásai, de általában ugyan csak igen speciális faja ez az elemi részek virtuális elmozdulásainak.

60.) Minthogy a virtuális munka egyenlőtlensége, u. m.:

$$S\{(\ddot{x}\mathfrak{D}m-\mathfrak{D}X)\delta x+(\ddot{y}\mathfrak{D}m-\mathfrak{D}Y)\delta y+(\ddot{z}\mathfrak{D}m-\mathfrak{D}Z)\delta z\}\geqq 0$$

ezuttal teljesül a $\delta x = N dx$, stb. által, úgy

$$NS\{(\ddot{x}\mathfrak{D}m-\mathfrak{D}X)dx+(\ddot{y}\mathfrak{D}m-\mathfrak{D}Y)dy+(\ddot{z}\mathfrak{D}m-\mathfrak{D}Z)dz\}\geqq 0$$

Innen pedig annak következtében, hogy N pozitív is, negatív is lehet,

$$S\{(\ddot{x}\mathfrak{D}m-\mathfrak{D}X)dx+(\ddot{y}\mathfrak{D}m-\mathfrak{D}Y)dy+(\ddot{z}\mathfrak{D}m-\mathfrak{D}Z)dz\}=0$$

Ha dt-vel átosztunk és azután a szabaderőktől függő részt a jobb oldalra írjuk:

$$S(\ddot{x}\dot{x}+\ddot{y}\dot{y}+\ddot{z}\dot{z})\mathfrak{D}m=S(\dot{x}\mathfrak{D}X+\dot{y}\mathfrak{D}Y+\dot{z}\mathfrak{D}Z)$$

vagyis:
$$\frac{d}{dt}S\,\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}{2}\mathfrak{D}m=S(\dot{x}\mathfrak{D}X+\dot{y}\mathfrak{D}Y+\dot{z}\mathfrak{D}Z)$$

Ezen határozott egyenlet következik mostani föltevésünkből s ennek a tartalmát nevezzük „a kinetikus energia tételének"

61. Az egyenletet „energia egyenletnek" mondjuk, mert

$$S\,\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}{2}\mathfrak{D}m$$

összeget az anyagi rendszer kinetikus energiájának nevezzük. Minden elemi résznek a tömegét megszorozván az ő t pillanati sebességének a négyzetével, e szorzatok összegének a fele tehát „az anyagi rendszer t pillanati kinetikus energiája"; régi időkből az anyagi rendszer eleven erejének is nevezzük.

Egyenletünk jobboldala:

$$S(\dot{x}\mathfrak{D}X+\dot{y}\mathfrak{D}Y+\dot{z}\mathfrak{D}Z)=\frac{S(\mathfrak{D}X\,dx+\mathfrak{D}Y\,dy+\mathfrak{D}Z\,dz)}{dt}$$

nem más mint a szabaderők dt időelemben végzett munkájának és a dt időelemnek a hányadosa; ezt a szabaderőktől végzett munka sebességének mondjuk. Midőn tehát a valóságos elem elmozdulásokkal arányos elmozdulások a virtuálisok közé tartoznak, akkor elnevezéseink értelmében a kinetikus energia változási sebessége a szabaderők munkájának a sebességével egyenlő. Minthogy pedig ($\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2 \equiv \dot{s}^2$ írtával)

$$d\,\tfrac{1}{2}\,S\,\dot{s}^2\mathfrak{D}m = S(\mathfrak{D}X\,dx+\mathfrak{D}Y\,dy+\mathfrak{D}Z\,dz)$$

úgy föltételünk alatt a kinetikus energia elemi megváltozása minden időelemben a szabaderők elemi munkájával egyenlő. Ebből pedig egyenesen következik, hogy föltételünk alatt a kinetikus energiának bármely időtartamban bekövetkező megváltozása a szabaderőknek azon időtartamban végzett munkájával egyenlő.

62.) Abban a különös esetben, hogy a szabaderők elemi munkája valamely mennyiségnek az elemi megváltozása: ennek a mennyiségnek az ellentételét potenciális energiának nevezzük. Ha a kinetikus energiát T, a potenciális energiát Ω jelöli, akkor energiaegyenletünk így van:

$$dT = -\,d\Omega,\ \text{azaz}\ T+\Omega = \text{konst.}$$

és a T_0, Ω_0 kezdeti értékek szerint:

$$T+\Omega = T_0+\Omega_0$$

Tehát előzetes föltevésünkben az anyagi rendszer kinetikus energiájának és potenciális energiájának összege állandó; a kétféle energia úgy változik, hogy egyik a másik rovására nő, egyik a másik javára fogy. Különben vegyük észre, hogy az Ω potenciális energia egy additiv konstans határozatlanságával van definiálva, mert nem egyéb, mint oly függvény, amelynek a megváltozása ellentétesen egyenlő a szabaderő munkájával

63, Ha a földhöz van rögzitve az a koordinátarendszer, melyben érvényes az energia egyenletünk (61), akkor a nehézségi erő elemi munkája totális elemi megváltozás. Ugyanis $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$-lal jelölvén a nehézségi gyorsulás iránykoszinuszait és g-vel a nagyságát, a nehézségi erő egy elemi részen $\equiv$ $\equiv (\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)\, g\, \mathfrak{D}m$ vektor, tehát a nehézségi erő elemi munkája az elemi rész (dx, dy, dz) elmozdulásán a földhöz rött koordinátarendszerben $\equiv$

$$(\alpha_0 dx + \beta_0 dy + \gamma_0 dz)\, g\, \mathfrak{D}m = d(\alpha_0 x + \beta_0 y + \gamma_0 z)\, g\, \mathfrak{D}m$$

mert a földhöz rött koordinátarendszerben $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, g$ állandók. A nehézségi erő elemi munkája egy anyagi rendszeren =

$$d\, S(\alpha_0 x + \beta_0 y + \gamma_0 z)\, g\, \mathfrak{D}m = d\{\alpha_0 S x \mathfrak{D}m + \beta_0 S y \mathfrak{D}m + \gamma_0 S z \mathfrak{D}m\} g$$
$$= d(\alpha_0 \xi + \beta_0 \eta + \gamma_0 \zeta)\, g m \equiv d\, h\, g m$$

ahol ξ, η, ζ az anyagi rendszer tömegcentrumának a koordinátái, m a tömege, h a tömegcentrum vertikális koordinátája.

Azt irva mármost 61.-ben, hogy

$$\mathfrak{D}X = \mathfrak{D}X' + g\alpha_0 \mathfrak{D}m, \quad \mathfrak{D}Y = \mathfrak{D}Y' + g\beta_0 \mathfrak{D}m,$$
$$\mathfrak{D}Z = \mathfrak{D}Z' + g\gamma_0 \mathfrak{D}m,$$

energia egyenletünk a földhöz rótt koordinátarendszerben így jelentkezik:

$$d\,\tfrac{1}{2} S \dot{s}^2 \mathfrak{D}m = S(\mathfrak{D}X'dx + \mathfrak{D}Y'dy + \mathfrak{D}Z'dz) +$$
$$+ d(\alpha_0 \xi + \beta_0 \eta + \gamma_0 \zeta)\, gm,$$

ahol a jobboldal második sora a nehézségi erő elemi munkája, a jobboldal első sora pedig a többi szabaderők elemi munkája. Természetesen azzal a kikötéssel érvényes ez, hogy olyanok az anyagi rendszer viszonyai, hogy 59. föltétel a földhöz rótt koordinátarendszerben teljesül.

<u>1. Példa.</u> Közönséges fizikai inga 57. első példája. Erre nyilvánképen alkalmazhatjuk az energia tételt; mégpedig ha az inga tengelye a földhöz van rögzitve, akkor koordinátarendszerünket is a földhöz róva 63. egyenletét alkalmazhatjuk. Tegyük föl pedig, hogy csak a nehézségi szabaderőt szükséges számontartanunk és most egyszerűség kedvéért a z tengelyt irányitsuk vertikálisan lefelé ($\alpha_0 = 0, \beta_0 = 0, \gamma_0 = 1$):

$$d\,\tfrac{1}{2} S \dot{s}^2 \mathfrak{D}m = d\, m g \zeta,$$

tehát:

$$\tfrac{1}{2} S \dot{s}^2 \mathfrak{D}m = m g \zeta + \text{konst}.$$

De a tömegcentrumnak az elforditását az x tengelyben gondolt horizontális ingatengely körül a z tengely felől számitva most is Θ szög mérje (pozitiv vagy negativ értékkel aszerint, amint jobbra, vagy balra fordulásból származott). Továbbá a $\mathfrak{D}m$ tömegű elemi rész tengely-távola: R s a tömegcentrum tengely-távola r leggyen most is. Akkor:

$$\dot{s} = \frac{ds}{dt} = \frac{R|d\Theta|}{dt} = R\dot{\Theta} \text{ és } \zeta = r\cos\Theta,$$

tehát:

$$\frac{1}{2} S R^2 \dot{\Theta}^2 \mathfrak{D}m = mgr\cos\Theta + \text{konst.}$$

vagyis ha a $SR^2\mathfrak{D}m$ inerciamomentumot most is J jelöli:

$$\frac{1}{2} J\dot{\Theta}^2 = mgr\cos\Theta + \text{konst.}$$

Az 57. cikk első példájában is ehhez az egyenlethez jutottunk az első integráció után. A folytatás ott megtalálható.

De toldjuk meg azt most a nyugalomtartás kérdésével.

Egyenletünk deriválásából $J\ddot{\Theta} = -mgr\sin\Theta$. Tartós nyugalomban $\ddot{\Theta} = 0$, tehát $\sin\Theta = 0$ és következőleg tartós nyugalom az ingairány más helyzetében nem lehetséges, mint vertikális lefelé, vagy fölfelé mutató helyzetében. De ezen helyzetek mindegyikében meg is marad a megkezdett nyugalom. Ugyanis differenciál-egyenletünk olyan alakú, hogy a differenciálegyenletek alaptanai szerint differenciálegyenletünknek és adott Θ_0, $\dot{\Theta}_0$ értékeknek egyetlen Θ felel meg mint az idő függvénye. Minthogy differenciálegyenletünknek és a $\Theta_0 = 0$, $\dot{\Theta}_0 = 0$ kezdeti értékeknek megfelel Θ állandó zérus értéke és minthogy differenciál —

egyenletünk és a $\Theta_0 = \pi$, $\dot{\Theta}_0 = 0$ kezdeti értékeknek megfelel Θ állandó π értéke, ennélfogva tehát az idézett tétel értelmében mihelyt Θ és $\dot{\Theta}$ kezdetben zérus, már mindig is zérus és mihelyt kezdetben Θ értéke π és $\dot{\Theta}$ értéke zérus, már mindig is az: az ingairány mindkét vertikális állásában megmarad a megkezdett nyugalom. A megkezdett nyugalom megmaradásának szükséges és elégséges föltétele tehát, hogy az ingairány vertikális legyen le- vagy fölfelé.

De ekszplicite is könnyen beláthatjuk, hogy a megkezdett nyugalom mindkét vertikális helyzetben folytatódik. Ugyanis elsőrendű differenciálegyenletünkben az integrációs konstans értéke a $\Theta_0 = 0$, $\dot{\Theta}_0 = 0$ kezdethez nyilvánképen $-mgr$. (a $\Theta = \pi$, $\dot{\Theta}_0 = 0$ kezdethez $+mg$) Következőleg aszerint, amint az inga kezdeti iránya lefelé vagy fölfelé mutat:

$$J\dot{\Theta}^2 = 2mgr(\cos\Theta \mp 1)$$

Az első esetben már ezen egyenlet puszta megtekintése elárulja, hogy nyugalomban marad az inga, mert az egyenlet baloldala miatt annak felső jelű jobboldalából $\cos\Theta \geqq 1$, ami csak úgy teljesülhet, hogy $\cos\Theta = 1$ állandóan. – A második esetben vezessük be a Θ szög helyett a $\pi + \varepsilon$ szöget, midőn is

$$J\dot{\varepsilon}^2 = 2mgr(1 - \cos\varepsilon) = 4mgr\sin^2\frac{\varepsilon}{2}$$

azaz, ha:

$$\pm (mgr : J)^{\frac{1}{2}} = \varkappa \text{ irjuk,}$$
$$\dot{\varepsilon} = 2\varkappa \sin\frac{\varepsilon}{2}$$

honnan

$$tg\,\frac{\varepsilon}{4} = N e^{\varkappa t}$$

ahol N az integráció konstansa. Kezdetben $\Theta = \pi$ lévén, $\varepsilon = 0$, tehát $N = 0$, tehát $tg\,\frac{\varepsilon}{4}$ állandóan $= 0$, ε állandóan $= 0$, Θ állandóan $= \pi$. A stabilitást és labilitást illetőleg itt is alkalmazható a matematikai inga tárgyalása (Mekanika alaptanai).

Ha az inga állványa mozogna a földre nézve (pl. egy hajóhoz volna rögzitve), akkor a földhöz rött koordinátarendszerben nem alkalmazhatók az energia tételét, mert ezen tétel érvényességének a feltétele nem teljesülne; de az állványhoz (a hajóhoz) rögzitett koordinátarendszerben most is alkalmazható^{n}k, csakhogy ekkor a nehézségi erőhöz hozzá kellene csatolnunk azokat az erőket, amelyek az állványnak és egyben a koordinátarendszernek a földhöz viszonyitott mozgásából származnak.

<u>2 Példa.</u> **Atwood ejtőgépe.** A kerék és a súlyok képezik az adott anyagi rendszert. Az állvány, amelyhez a kerék tengelye is tartozik, a teles rendszer. Ez a földdel változatlan kapcsolatban van és ehhez rögzitsük a koordinátarendszerünket.

A nyújthatatlan, de hajlítható fonál, mely a kerék peremén átvetve a súlyokat tartja, kapcsoló rendszer. Csak a nehézségi szabaderő hat számottevően. Használatban a fonál folyvást feszült állapotban van és két szabad ága vertikálisan csüng a kerékről, miközben az egyik súly lefelé, a másik fölfelé haladó mozgást végez; a kerék pedig forgó mozgást végez a maga tengelye körül oly módon, hogy a fonálnak ő hozzá simuló elemeivel teljesen együtt fordúl, mert a fonál nem csúszhat rajta. Egyébiránt pedig föltesszük, hogy számottevő súrlódás nincs. Könnyű észrevenni, hogy a valóságos elemi elmozdulásokkal arányos elmozdulások is a virtuális elmozdulások közt vannak, tehát alkalmazható a kinetikus energia tétele. Mivel pedig csak a nehézségi szabaderőt szükséges számbavennünk, a 63.-nak az egyenletét a jobboldal első sorának elhagyásával használhatjuk.

A z tengely álljon vertikálisan, még pedig lefelé mutasson, midőn is

$$d\,\tfrac{1}{2}\,S\,s^2\,\mathfrak{D}m \equiv dT = d(mg\zeta) \equiv g\,d(m\zeta).$$

Bontsuk most a kinetikus energia kifejezését és a $m\zeta$ szorzatot is (az utóbbit 35. értelmében) három részre, mely három rész egyike az egyik súlyra, egyike a másik súlyra és egyike a kerékre vonatkozzék. Ehhez képest így írjuk energia-egyenletünket:

$$d(T_1 + T_2 + T_3) = g\,d(m_1\zeta_1 + m_2\zeta_2 + m_3\zeta_3) =$$
$$= g(m_1\dot{\zeta}_1 + m_2\dot{\zeta}_2 + m_3\dot{\zeta}_3)dt$$

ahol m_1, m_2, m_3 rendre a három tömeg, $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ rendre a három tömegcentrumnak a harmadik koordinátája, és az 1 és 2 indeksz vonatkozik a súlyokra, a 3 indeksz a kerékre. Minthogy a súlyok haladó mozgást végeznek, ennélfogva minden pontjuknak a sebessége ugyanaz és ha a 2-ős súly mozog lefelé, az 1-es felfelé, akkor a T_1-nek az $\frac{1}{2}S_1\dot{s}^2 Dm$ kifejezésében minden $\dot{s}$ értéke $-\dot{\zeta}_1$ és T_2-nek az $\frac{1}{2}S_2\dot{s}^2 Dm$ kifejezésében minden $\dot{s}$ értéke $\dot{\zeta}_2$, tehát:

$$T_1 = \frac{1}{2}m_1\dot{\zeta}_1^2, \quad T_2 = \frac{1}{2}m_2\dot{\zeta}_2^2.$$

Mivel pedig akkora sebességgel halad az 1-es számú súly felfelé, amekkorával a 2-es számú lefelé halad ennélfogva

$$-\dot{\zeta}_1 = \dot{\zeta}_2$$

De jelöljük a két sebesség közös nagyságát egyszerűen $\dot{s}$-al, midőn is

$$-\dot{\zeta}_1 = \dot{\zeta}_2 = \dot{s}$$

honnan aztán

$$T_1 = \frac{1}{2}m_1\dot{s}^2, \quad T_2 = m_2\dot{s}^2$$

A kerékre vonatkozik a

$$T_3 = \frac{1}{2}S_3\,\dot{s}^2 Dm.$$

De ha a kerék kezdet óta Θ nagyságú szöggel fordult, akkor a forgás tengelyétől R távolban levő elemi része dt idő alatt $Rd\Theta$ hosszúságú utat tett meg s következőleg sebességének nagysága:

$$\frac{R \cdot d\Theta}{dt} = R \cdot \dot{\Theta}$$

A kerék kinetikus energiájának a kifejezése tehát.

$$\mathfrak{T}_3 = S_3 R^2 \dot{\Theta}^2 Dm = \frac{1}{2} \dot{\Theta}^2 S_3 R^2 Dm = \frac{1}{2} J \cdot \dot{\Theta}^2,$$

amelyben az J összeget a kerék inercia momentumán nevezzük. Azonban amekkora utat tettek meg dt idő al a súlyok, ugyanakkorát tettek meg a kerék pereme nek a pontjai is. Hogyha tehát a kerék peremének sugara r, akkor $rd\Theta = ds$, honnan

$$\dot{\Theta} = \frac{\dot{s}}{r}$$

Ennek a behelyettesítésével a kerék $\mathfrak{T}_3$ kinetikus ene giája gyanánt azt találjuk, hogy

$$\mathfrak{T}_3 = \frac{1}{2} \frac{J}{r^2} \dot{s}^2$$

Végül $\dot{\zeta}_3 = 0$, mert a kerék tömegcentruma az ő tengelyében van, tehát nem mozdul, tehát a koordinátái konstansok. Fenti energiaegyenletünkben mindezt számbavéve azt kapjuk, hogy:

$$d \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2 + \frac{J}{r^2}\right) \dot{s}^2 = (m_2 - m_1) g \dot{s} dt$$

Mivel a baloldalon $\dot{s}^2$ szorzója konstans és

$$d(\dot{s}^2) = 2 \ddot{s} \dot{s} dt,$$

ennélfogva

$$\left(m_1 + m_2 + \frac{J}{r^2}\right) \ddot{s} \dot{s} dt = (m_2 - m_1) g \dot{s} dt$$

$$\ddot{s} = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \frac{J}{r^2}}\, g$$

szerint a súlyok haladó mozgásának a gyorsulása állandó és pedig $\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \frac{J}{r^2}}$ abszolut értékének arányában kisebb, mint a szabadesés gyorsulása s lefelé, vagy fölfelé mutat aszerint, amint $m_2 >$ vagy $<$, mint m_1. Az utóbbi esetben lassúdó a mozgás.

64, Midőn olyanok valamely anyagi rendszer tulajdonságai és viszonyai, hogy egyszerre több speciális mekanikai tétel föltételei teljesülnek, ilyenkor mindegyiket alkalmazva általában többet is tudhatunk meg az anyagi rendszer mekanikai állapota felől. De lehet olyan is egy anyagi rendszer és lehetnek olyanok a viszonyai, hogy némely speciális tételek reá nézve ekvivalensek, ugyanazon végső eredményekhez juttatnak.

<u>Példa.</u> Tegyük föl, hogy egy közönséges fizikai inga állványa a földhöz ~~kött~~ koordináta–rendszerben egy horizontális egyenessel párhuzamosan mindkét értelemben tolható, de másképp nem mozgatható és a környezetével nem surlódik. Most az állványt is anyagi rendszerünkhöz kell számitanunk, mert föltesszük róla, hogy nem tekinthető sem teleprendszernek (mekanikai állapota nem független az ingától), sem kapcsolórendszernek

(tömege nem elenyésző kicsiny az inga tömegéhez képest). Egyszerűség kedvéért tegyük föl, hogy az inga tengelye horizontálisan van az állványhoz rögzítve s merőleges az állvány mozgásvonalára.

Ezen vonal s az inga tengelye s a nehézségi gyorsulás iránya három egymásra merőleges egyenesben van. Ennélfogva célszerű lesz ezekkel párhuzamos koordinátatengelyeket választani. Az y tengelyt fektessük párhuzamosan az állvány mozgásvonalával, a z tengelyt pedig állítsuk vertikálisan lefelé, midőn is az x tengely párhuzamossá lesz az inga tengelyével. Ezt a tengelyrendszert a földhöz rögzítve tartsuk.

Az y tengely mentén mindkét irányban eltolható az egész anyagi rendszer virtuálisan. Következőleg a virtuális elmozdulások sokaságához tartoznak $\delta x = 0$, $\delta y = \delta b$, $\delta z = 0$ azzal, hogy δb minden elemi rész számára ugyanazon pozitív vagy negatív parametrum. Ezek rendén a virtuális munka általános törvényéből:

$$\delta b S(\ddot{y} \mathfrak{D} m - \mathfrak{D} Y) \geqq 0$$

Ha tehát M jelenti az egész anyagi rendszer tömegét és η jelenti tömegcentrumának a második koordinátáját, akkor $M\ddot{\eta} = S \mathfrak{D} Y$. De föltesszük, hogy számottevően csak a nehézségi szabaderő hat anyagi rendszerünkre, tehát minden $\mathfrak{D} Y$ zérus:

$\ddot{\eta}=0, \quad \dot{\eta}=\text{konst.}$

Mivel pedig (tengelymenti mozgás nem lévén) $\ddot{\xi}=0$, úgy anyagi rendszerünk (u. m. az ingából és állványból összetett anyagi rendszer) tömegcentrumának vertikális vetülete horizontális síkon állandó sebességgel mozog; röviden mondva, ezen tömegcentrum horizontális mozgása állandó sebességű mozgás. Sebességének az iránya az y tengellyel párhuzamos.

Egy második egyenlethez jutunk a forgató momentumok tételének vagy a kinetikus energia tételének alkalmazásával. Az első alkalmazható az ingára, mert az állvány virtuális nyugalmában az inga virtuálisan elfordítható mindkét értelemben a maga tengelye körül. A második alkalmazható anyagi rendszerünk egészére, mert az egész anyagi rendszer elemi részeinek virtuális elmozdulásaihoz tartoznak a valóságos elemi elmozdulásaikkal arányosak is. Ez a két speciális tétel különböző egyenlethez juttat ugyan, de a már megállapított $\ddot{\eta}=0$ egyenlet a kettőt egyezővé teszi. Alkalmazzuk pedig a kinetikus energia tételét, amely egyenesen egy elsőrendű differenciálegyenletet szolgáltat a 63. végéről annál fogva, hogy csak a nehézségi szabaderőt kell számbavennünk. Minthogy itt most $\alpha_0=0, \beta_0=0, \gamma_0=1$, és m helyett M teendő, úgy most

$$\mathcal{T} = Mg\zeta + \text{const}$$

Két független egyenletünk van a mozgás meghatározására és kettő nyilvánképen elégséges is ezen célra.

Kiváló érdekű pedig esetünkben annak a megállapitása, hogy milyen a tengely haladó mozgása és hogy milyen az ingának a maga tengelye körül való mozgása, ha a rendszerünk kezdetben nyugalomban volt.

Az állványhoz tartozó jegyeket két vesszővel, az ingához tartozókat egy vesszővel jelöljük. Akkor

$$M\eta = m'\eta' + m''\eta''$$

tehát az $\dot{\eta}$ = const egyenlet gyanánt (mivel most $\dot{\eta}$ kezdeti értéke zérus)

$$m'\dot{\eta}' + m''\dot{\eta}'' = 0$$

egyenletünk van. A kinetikus energia egyenletét is széttagolva az inga és állványa szerint és számbavéve, hogy $M\zeta = m'\zeta' + m''\zeta''$, ζ'' pedig állandó:

$$\mathcal{T}' + \mathcal{T}'' = m'g\zeta' + \text{const}$$

Az x tengelyt az ingatengely horizontális sikjában gondoljuk és vegyük számba, hogy $\dot{x} = 0$ és ha az ingatengely egy pontjának a második koordinátája b, akkor $\dot{b} = \dot{\eta}''$; $\dot{y} - \dot{b} = \dot{y} - \dot{\eta}''$ s ha ezen pont harmadik koordinátája c, akkor $\dot{c} = \dot{\zeta}'' = 0$, $\dot{z} - \dot{c} = \dot{z}$. Ezenrint T'-ben

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2=(\dot{y}-\dot{b})^2+\dot{z}^2+2\dot{\eta}''\dot{y}-\dot{\eta}''^2=$$
$$=R^2\dot{\Theta}^2+2\dot{\eta}''\dot{y}-\dot{\eta}''^2$$

tehát

$$2T'=J\dot{\Theta}^2+2m'\dot{\eta}'\dot{\eta}''-m'\dot{\eta}''^2$$

ahol J az inga inercia momentuma az inga tengelye körül. A T''-ben

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2=\dot{\eta}''^2$$

tehát
$$2T'=m''\dot{\eta}''^2$$

Ezek szerint

$$J\dot{\Theta}^2+2m'\dot{\eta}'\dot{\eta}''+(m''-m')\dot{\eta}''^2=2m'g\zeta'+\text{const}$$

De R_0-el jelölve az inga tömegcentrumának tengelytávolát és Θ-val a vertikálistól való elhajlását

$$\eta'=b-R_0\sin\Theta,\ \zeta'=R_0\cos\Theta \text{ továbbá } \dot{\eta}''=\dot{b}$$

Beírva ezeket most dedukált egyenletünkbe, a föntebbi $m'\dot{\eta}'+m''\dot{\eta}''=0$ egyenletnek is számbavételével

$$\begin{cases} \dot{b}=\dfrac{m'}{M}R_0\cos\Theta.\dot{\Theta} \\[2ex] \left(J-\dfrac{m'^2}{M}R_0^2\cos^2\Theta\right)\dot{\Theta}^2=2R_0m'g\cos\Theta+\text{const} \end{cases}$$

egyenleteink vannak b és Θ meghatározására.

Ha $m''=\infty$, akkor $M=\infty$, tehát egyenletünk szerint úgy mozog az inga a maga tengelye körül, mint midőn állványa a földhöz van rögzítve. Ez az eset valóban $\dot{b}=0$ –

hoz is vezet.

Ha $m'' = 0$, akkor $\dot{\xi}' = 0$, tehát az inga tömegcentruma vertikális egyenesben mozog.

Lagrange parametrumos egyenletei.

65. A virtuális munka törvényéből folyó határozott egyenletekhez eljuthatunk olymódon is, hogy csak azokat a virtuális elmozdulásokat vesszük számba, amelyekkel a virtuális kényszer minden relációjának a baloldala eltűnik. Ha ezek a relációk csupa egyenletek, akkor különben is eltűnik mindeniknek a baloldala minden virtuális elmozdulással; ha azonban a virtuális kényszer relációi között olyanok is vannak, amelyek baloldala $\geqq 0$, vagy ha mind ilyenek azok, akkor baloldalaiknak zérussal való egyenlítésével már a virtuális elmozdulások egy részét vesszük csak számba. Hogy azonban az alaptörvényből folyó határozott egyenleteket megkapjuk most is, az kitűnik például a multiplikátorok módszeréből. Midőn ugyanis minden virtuális elmozdulást számba veszünk, akkor multiplikátoros egyenleteink abban különböznek azoktól, amelyeket a

kor kapunk, midőn a virtuális kényszer relációi-nak a baloldalát mind zérussal egyenlősítjük, hogy az utóbbi előállításban egészen határozatlanok a priori a multiplikátorok, míg az előbbiben egy részök vagy valamennyi azt az előzetes kirovást viseli, hogy ne lehessen negativ. Amde ez a multiplikátorok eliminálására nézve közömbös, már pedig azok eliminálásával származnak az egyenletek.

Ezen megismerés alkalmazásában a tényleg lehetséges elemi elmozdulások közül is azokra az elemi elmozdulásokra gondolunk csak, melyek a tényleges kényszer relációit az egyenlőségi jel szerint elégitik ki.

66. De most egy speciális föltételt is kirovunk, nevezetesen ezuttal csupán oly anyagi rendszerre és ennek oly külső kényszerére korlátkozunk, hogy a lehetséges elemi elmozdulások egyenleteit (ideértve az egyenlőtlenségekből valókat is) független parametrumok segélyével lehessen integrálni úgy, hogy

$$x = \varphi(x_0, y_0, z_0, t, p_1, p_2, \dots)$$
$$y = \psi(x_0, y_0, z_0, t, p_1, p_2, \dots)$$
$$z = \chi(x_0, y_0, z_0, t, p_1, p_2, \dots)$$

ahol x_0, y_0, z_0 az elemi részek szerint különböző konstansok, például az illető elemi rész kezdeti helyének koordinátái és $p_1, p_2, \dots$ a független parametrumok, φ, ψ, χ pedig határozott függvény alakok, amelyekről föltegyük azt is, hogy legalább kétszer egyenletesen deriválható függvényeik a $t, p_1, p_2, \ldots$ változóknak. Mind e föltételek teljesültén „holonom"-nak nevezzük a kényszert.

Addig, míg a kényszer tart, a valóságos elemi elmozdulásokkal a kényszer összes relációinak a baloldala eltűnik, tehát a (φ, ψ, χ) lehetséges speciális helyek mindig a valóságosokat is tartalmazzák.

67.) A dt időelemben a p_i-nek bármely gondolható elemi megváltozása legyen is ∂p_i, már azon elmozdulások, amelyek komponensei a következők:

$$\partial x = \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt + \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} \partial p_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial p_2} \partial p_2 + \cdots$$

$$\partial y = \frac{\partial \psi}{\partial t} dt + \frac{\partial \psi}{\partial p_1} \partial p_1 + \frac{\partial \psi}{\partial p_2} \partial p_2 + \cdots$$

$$\partial z = \frac{\partial \chi}{\partial t} dt + \frac{\partial \chi}{\partial p_1} \partial p_1 + \frac{\partial \chi}{\partial p_2} \partial p_2 + \cdots$$

lehetséges elemi elmozdulások.

Ha azután a valóságos mozgásban dt időelemben dp_k jelöli a paramétrumok elemi megváltozásait, akkor

$$dx = \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt + \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} dp_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial p_2} dp_2 + \cdots$$

$$dy = \frac{\partial \psi}{\partial t} dt + \frac{\partial \psi}{\partial p_1} dp_1 + \frac{\partial \psi}{\partial p_2} dp_2 + \dots$$

$$dz = \frac{\partial \chi}{\partial t} dt + \frac{\partial \chi}{\partial p_1} dp_1 + \frac{\partial \chi}{\partial p_2} dp_2 + \dots$$

Ha tehát $\partial p_1 - dp_1 = \delta p_1$, $\partial p_2 - dp_2 = \delta p_2$ stb. írjuk, akkor a virtuális elmozdulások komponensei, azaz: $\partial x - dx$, $\partial y - dy$, $\partial z - dz$, a következők:

$$\delta x = \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} \delta p_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial p_2} \delta p_2 + \dots$$

$$\delta y = \frac{\partial \psi}{\partial p_1} \delta p_1 + \frac{\partial \psi}{\partial p_2} \delta p_2 + \dots$$

$$\delta z = \frac{\partial \chi}{\partial p_1} \delta p_1 + \frac{\partial \chi}{\partial p_2} \delta p_2 + \dots$$

Bármik legyenek is itt a parametrumoknak a δp_1, δp_2, … „virtuális megváltozásaik", már a $(\delta x, \delta y, \delta z)$ elemi vektor virtuális elmozdulást jelent. Más írásmóddal.

$$\delta x = \frac{\partial x}{\partial p_1} \delta p_1 + \frac{\partial x}{\partial p_2} \delta p_2 + \dots$$

$$\delta y = \frac{\partial y}{\partial p_1} \delta p_1 + \frac{\partial y}{\partial p_2} \delta p_2 + \dots$$

$$\delta z = \frac{\partial z}{\partial p_1} \delta p_1 + \frac{\partial z}{\partial p_2} \delta p_2 + \dots$$

Jegyezzük be ezeket a kifejezéseket a virtuális munka egyenlőtlenségébe. Ez velük teljesülni tartozik, tehát

$$S\Big[(\ddot{x}\,dm - dX)\Big(\frac{\partial x}{\partial p_1}\delta p_1 + \frac{\partial x}{\partial p_2}\delta p_2 + \dots\Big) +$$

$$+(\ddot{y}\mathfrak{D}m-\mathfrak{D}Y)\left(\frac{\partial y}{\partial p_1}\delta p_1+\frac{\partial y}{\partial p_2}\delta p_2+\cdots\right)+$$
$$+(\ddot{z}\mathfrak{D}m-\mathfrak{D}Z)\left(\frac{\partial z}{\partial p_1}\delta p_1+\frac{\partial z}{\partial p_2}\delta p_2+\cdots\right)\Big]\geqq 0$$

azaz:

$$\delta p_1\, S\left[(\ddot{x}\mathfrak{D}m-\mathfrak{D}X)\frac{\partial x}{\partial p_1}+(\ddot{y}\mathfrak{D}m-\mathfrak{D}Y)\frac{\partial y}{\partial p_1}+(\ddot{z}\mathfrak{D}m-\mathfrak{D}Z)\frac{\partial z}{\partial p_1}\right]+$$
$$+\delta p_2\, S\left[(\ddot{x}\mathfrak{D}m-\mathfrak{D}X)\frac{\partial x}{\partial p_2}+(\ddot{y}\mathfrak{D}m-\mathfrak{D}Y)\frac{\partial y}{\partial p_2}+(\ddot{z}\mathfrak{D}m-\mathfrak{D}Z)\frac{\partial z}{\partial p_2}\right]+$$
$$+\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\geqq 0$$

Ez az egyenlőtlenség teljesülni tartozik $\delta p_1, \delta p_2, \ldots$ minden gondolható értékével, tehát:

$$\begin{cases} S\left(\frac{\partial x}{\partial p_1}\ddot{x}+\frac{\partial y}{\partial p_1}\ddot{y}+\frac{\partial z}{\partial p_1}\ddot{z}\right)\mathfrak{D}m = S\left(\frac{\partial x}{\partial p_1}\mathfrak{D}X+\frac{\partial y}{\partial p_1}\mathfrak{D}Y+\frac{\partial z}{\partial p_1}\mathfrak{D}Z\right) \\ S\left(\frac{\partial x}{\partial p_2}\ddot{x}+\frac{\partial y}{\partial p_2}\ddot{y}+\frac{\partial z}{\partial p_2}\ddot{z}\right)\mathfrak{D}m = S\left(\frac{\partial x}{\partial p_2}\mathfrak{D}X+\frac{\partial y}{\partial p_2}\mathfrak{D}Y+\frac{\partial z}{\partial p_2}\mathfrak{D}Z\right) \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \end{cases}$$

Annyi határozott totális differenciál-egyenletünk van itt, ahány a p parametrum. Ha $(\mathfrak{D}X, \mathfrak{D}Y, \mathfrak{D}Z)$ mint az időnek, a parametrumoknak és ezek deriváltjainak a függvényei adva vannak, akkor meghatározván az egyenletekből a p parametrumokat, mint az idő függvényeit, megismerjük a koordinátákat is ... ő φ, ψ, χ alakú parametrumos kifejezéseikből.

68, Azonban célszerű az egyenletek baloldalát más alakban is előállítani! Vegyük figyelembe ezt az identitást:

$$\frac{\partial x}{\partial p_1}\ddot{x} \equiv \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial p_1}\cdot\dot{x}\right) - \dot{x}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial p_1}\right)$$

Ebben: $\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial p_1}\dot{p}_1 + \frac{\partial x}{\partial p_2}\dot{p}_2 + \dots$ lévén:

$$\frac{\partial x}{\partial p_1} = \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{p}_1}, \quad \frac{\partial x}{\partial p_1}\cdot\dot{x} = \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{p}_1}\dot{x} = \frac{\partial}{\partial \dot{p}_1}\left(\frac{\dot{x}^2}{2}\right)$$

tehát identitásunk első tagja =

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial p_1}\dot{x}\right) = \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{p}_1}\left(\frac{\dot{x}^2}{2}\right)$$

Továbbá identitásunk második tagjában:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial p_1}\right) = \frac{\partial^2 x}{\partial t\,\partial p_1} + \frac{\partial^2 x}{\partial p_1^2}\dot{p}_1 + \frac{\partial^2 x}{\partial p_2\,\partial p_1}\dot{p}_2 + \dots$$

ami $\dot{x}$ fentebbi kifejezése szerint $= \frac{\partial \dot{x}}{\partial p_1}$, minélfogva identitásunk második tagja =

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial p_1}\right) = -\frac{\partial}{\partial p_1}\left(\frac{\dot{x}^2}{2}\right)$$

Ezek nyomán identitásunk így írható:

$$\frac{\partial x}{\partial p_1}\ddot{x} \equiv \frac{d}{dt}\,\frac{\partial}{\partial \dot{p}_1}\left(\frac{\dot{x}^2}{2}\right) - \frac{\partial}{\partial p_1}\left(\frac{\dot{x}^2}{2}\right)$$

Hasonló kifejezés illeti a második és harmadik koordinátát. Eszerint:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial p_1}\ddot{x} + \frac{\partial y}{\partial p_1}\ddot{y} + \frac{\partial z}{\partial p_1}\ddot{z}\right) = \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{p}_1}\left(\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}{2}\mathfrak{D}m\right) - \frac{\partial}{\partial p_1}\left(\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}{2}\mathfrak{D}m\right)$$

Van tehát a következő egyenletrendszerünk:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{p}_1} - \frac{\partial T}{\partial p_1} &= S\left(\frac{\partial x}{\partial p_1}\mathfrak{X} + \frac{\partial y}{\partial p_1}\mathfrak{Y} + \frac{\partial z}{\partial p_1}\mathfrak{Z}\right) \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{p}_2} - \frac{\partial T}{\partial p_2} &= S\left(\frac{\partial x}{\partial p_2}\mathfrak{X} + \frac{\partial y}{\partial p_2}\mathfrak{Y} + \frac{\partial z}{\partial p_2}\mathfrak{Z}\right) \end{aligned}\right.$$

ahol T a kinetikus energiát jelenti. Ezek Lagrange parametrumos egyenletei.

<u>1. Példa.</u> A közönséges fizikai inga a földhöz rótt ~~horizontális~~ tengelyen. Abban a föltevésben, hogy a tengely körül nem súrlódik az inga, holonom a kényszere mégpedig ele- részeinek lehetséges helyeit egyetlen szabad parametrum teljesen meghatározza. Mindenekelőtt intézzük el a földhöz rögzitett koordinátarendszerben a meghatározást. A forgás tengelyéből e tengelyre merőlegesen egy pontba húzott vektort röviden a pont rádiusz vektorának mondván: ha az x, y, z pont rádiusz vektora a tömegcentrum rádiusz vektorával ε szöget képez, a tömegcentrum rádiusz vektora pedig (az inga iránya) a vertikálisan lefelé mutató iránnyal t pillanatban Θ szöget képez és ezen szögeket pozitivnak, vagy negativnak számitjuk aszerint, amint a forgás tengelye körül jobbra vagy balra fordulásból származnak, akkor az oly koordinátarendszerben, amelynek az x tengelye a forgástengely, z tengelye pedig vertikális lefelé mutat

$$x = const,\ y = -R \sin(\varepsilon + \Theta),\ z = R\cos(\varepsilon + \Theta)$$

ahol R a pont rádiusz vektorának a hossza. Ezzel a parametrikus meghatározás készen van. Speciálisan a tömegcentrumot illetőleg

$$\xi = const,\ \eta = -R_0 \sin\Theta,\ \zeta = R_0 \cos\Theta$$

ha R_0 a tömegcentrum tengely-távola.

Most a kinetikus energia kifejezésében, u.m. a

$$T = \frac{1}{2} S\, \dot{s}^2 \mathfrak{D}m = \frac{1}{2} S(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)\mathfrak{D}m$$

kifejezésben

$$\dot{x} = 0,\ \dot{y} = -R\cos(\varepsilon+\Theta)\dot{\Theta} = -z\dot{\Theta}$$
$$\dot{z} = -R\sin(\varepsilon+\Theta)\dot{\Theta} = y\dot{\Theta}$$

teendő, tehát

$$T = \frac{1}{2} S(y^2 + z^2)\dot{\Theta}^2 \mathfrak{D}m = \frac{1}{2}\dot{\Theta}^2 S R^2 \mathfrak{D}m = \frac{1}{2} J\dot{\Theta}^2$$

ahol J az inga saját tengelyű inerciamomentuma. Mivel pedig jelenleg csak egy parametrum van, a Θ, ennélfogva $p_1 = \Theta$, $p_2 = 0$, $p_3 = 0, \ldots = 0$ tehető, és csak egy mozgás-egyenletünk van, u.m:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\Theta}} - \frac{\partial T}{\partial \Theta} = S\left(\frac{\partial x}{\partial \Theta}\mathfrak{D}X + \frac{\partial y}{\partial \Theta}\mathfrak{D}Y + \frac{\partial z}{\partial \Theta}\mathfrak{D}Z\right)$$

Tekintettel T kifejezésére:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\Theta}} = J\dot{\Theta} \quad \text{és} \quad \frac{\partial T}{\partial \Theta} = 0$$

Egyenletünk jobboldalában pedig

$$\frac{\partial x}{\partial \Theta} = 0,\ \frac{\partial y}{\partial \Theta} = -R\cos(\varepsilon + \Theta) = -z$$
$$\frac{\partial z}{\partial \Theta} = -R\sin(\varepsilon + \Theta) = y$$

Föltéve, hogy koordinátarendszerünkben csak a nehézségi szabaderő hat számottevő mértékben az ingára, mivel a z tengelyt vertikálisan lefelé állítottuk

$$\mathfrak{D}X = 0,\ \mathfrak{D}Y = 0,\ \mathfrak{D}Z = g\,\mathfrak{D}m$$

Ezek nyomán mozgás-egyenletünk ezzé válik:

$$J\ddot{\Theta} = S\, z g\, \mathfrak{D}m = g S\, y\, \mathfrak{D}m = m g \eta,$$

azaz:

$$J\ddot{\Theta} = -\ m\, g\, r \sin\Theta$$

ha t. i. az inga egész tömege: m.

Az 57. első példájában ugyanehhez a másodrendű differenciál-egyenlethez jutottunk, a folytatás ott megtalálható.

<u>2. Példa.</u> A közönséges fizikai inga, midőn a tengelye a földhöz rött koordinátarendszerben horizontális helyzetben vertikálisan fel és le szabadon mozoghat. – Koordinátarendszerünk z tengelyét vertikálisan lefelé állítsuk és x, z síkját az ingatengely mozgásának a síkjában tartsuk a földhöz rögzítve, midőn is az ingatengely folyvást parallel az x tengellyel.

Ha az ingatengely pontjainak a harmadik koordinátáját c jelöli, akkor az ε és Θ szögnek meg az R távolságnak az előbbi példában adott jelentményével

$$x = \text{const},\ y = -R\sin(\varepsilon + \Theta),\ z = c + R\cos(\varepsilon + \Theta)$$

Speciálisan a tömegcentrumra

$$\xi = \text{const}, \ \eta = -R_0 \sin\Theta, \ \zeta = c + R_0 \cos\Theta$$

Most $p_1 = \Theta$, $p_2 = c$ parametrumok szerint alkalmazható Lagrange parametrumos módszere.

A kinetikus energia kifejezésébe, u. m. a

$$T = S(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)\,\mathfrak{D}m$$

kifejezésbe beírandók:

$$\dot{x} = 0, \ \dot{y} = -R\cos(\varepsilon + \Theta)\dot{\Theta} = (c - z)\dot{\Theta}$$

$$\dot{z} = \dot{c} - R\sin(\varepsilon + \Theta)\dot{\Theta} = \dot{c} + y\dot{\Theta}$$

miáltal

$$T = \frac{1}{2} J\dot{\Theta}^2 + \frac{1}{2} m\dot{c}^2 - mR_0\dot{c}\dot{\Theta}\sin\Theta$$

ahol m az inga tömege és J az inga saját tengelyű inercia momentuma. Ez használandó most $p_1 = \Theta$ és $p_2 = c$ szerint a két első Lagrange-féle egyenlet baloldalán, amelyek jobboldalán pedig abban az esetben, hogy csak a nehézségi szabaderő tesz számot,

$$\mathfrak{D}X = 0, \ \mathfrak{D}Y = 0, \ \mathfrak{D}Z = g\mathfrak{D}m$$

$$\frac{\partial z}{\partial \Theta} = -R\sin(\varepsilon + \Theta) = y, \ \frac{\partial z}{\partial c} = 1$$

Minthogy

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\Theta}} = J\dot{\Theta} - mR_0\dot{c}\sin\Theta, \ \frac{\partial T}{\partial \Theta} = -mR_0\dot{c}\dot{\Theta}\cos\Theta,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{c}} = m\dot{c} - mR_0\dot{\Theta}\sin\Theta, \ \frac{\partial T}{\partial c} = 0,$$

ennélfogva azt kapjuk ($p_1 = \Theta$, $p_2 = c$ szerint), hogy

$$\frac{d}{dt}(J\dot{\Theta} - mR_0\dot{c}\sin\Theta) + mR_0\dot{c}\dot{\Theta}\cos\Theta = -mgR_0\sin\Theta$$

$$\frac{d}{dt}(m\dot{c} - mR_0\dot{\Theta}\sin\Theta) = mg$$

Az utóbbi egyenletén egy integráció közvetlenül elvégezhető; az eredmény:

$$\dot{c} - R_0\dot{\Theta}\sin\Theta = gt + A$$

hol A az integráció konstánsa. Ezt az egyenletet pedig szintén lehet közvetlenül integrálni; az eredmény:

$$c + R_0\cos\Theta = \frac{1}{2}gt^2 + At + B$$

ahol B az újabb integrációs konstáns. Ugyanehhez az egyenlethez a tömegcentrum mozgásáról szóló tan alapján is eljuthatunk.

Ami föntebbi első egyenletünket illeti, az részletesen írva így van:

$$J\ddot{\Theta} - mR_0\ddot{c}\sin\Theta = -mR_0 g\sin\Theta$$

Ugyanehhez az egyenlethez vezet a forgató momentumok tétele s nem különben a kinetikus energia tétele. Kissé másképp írva:

$$J\ddot{\Theta} = mR_0(\ddot{c} - g)\sin\Theta.$$

De $\dot{c}$ egyenletéből:

$$\ddot{c} - g = \frac{d}{dt}R_0\dot{\Theta}\sin\Theta,$$

tehát:

$$J\ddot{\Theta} = mR_0^2\sin\Theta\,\frac{d}{dt}(\dot{\Theta}\sin\Theta)$$

$$J\dot{\Theta}\ddot{\Theta} = mR_0^2\dot{\Theta}\sin\Theta\,\frac{d}{dt}(\dot{\Theta}\sin\Theta)$$

miből

$$J\dot{\Theta}^2 = mR_0^2\dot{\Theta}^2\sin^2\Theta + \text{const.}$$

tehát valamely C konstanssal

$$\dot{\Theta}\sqrt{1-\frac{mR_0^2}{J}\sin^2\Theta} = C$$

Feltünő, hogy ezen egyenlet független a nehézségi erőtől s következőleg $\dot{\Theta}$ sem függ attól. Mint majd a következő cikkben kitűnik, $mR_0^2 < J$ mindig, tehát a baloldal csak úgy tűnhetik el, hogy $\dot{\Theta} = 0$. Ha pedig kezdetben $\dot{\Theta} = 0$, akkor $C = 0$ lévén, $\dot{\Theta}$ mindig $= 0$, vagyis akkor az inga iránya nem változik. Ha $\dot{\Theta}$ kezdeti értéke nem zérus, akkor $\dot{\Theta}$ sohasem zérus, hanem C előjele szerint vagy mindig pozitiv, vagy mindig negativ. Eszerint az inga folyvást ugyanazon értelemben fordul tovább a tengelye körül és így a Θ szög vagy folyvást nől, vagy folyvást fogy. De számítsuk éppen az inga forgását pozitiv értelemben valónak. Akkor C pozitiv és Θ folyvást nől. Mivel pedig a négyzetgyök általában < 1, úgy általában $\dot{\Theta} > C$, vagyis $d\Theta > C\,dt$. Ha tehát Θ kezdeti értéke Θ_0, akkor

$$\int_{\Theta_0}^{\Theta} d\Theta > C\int_0^t dt$$

azaz:

$$\Theta > \Theta_0 + Ct$$

folyvást. Következőleg Θ a maga szakadatlan növésével nem közeledik valamely véges határérték felé, hanem a végtelenbe nől, miből folyólag az inga örökké tartó körülforgásokat végez a tengelye körül. Legkisebb a $\dot{\Theta}$ szögsebesség az ingairány vertikális helyzeteiben $= C$, legnagyobb az ingairány horizontális helyzeteiben =

$$= \frac{C}{\sqrt{1 - \frac{mR_0^2}{J}}}$$

Egyébiránt az ingairány egyenlő helyzetében egyenlő a $\dot{\Theta}$, tehát azonos lefolyású körülforgásokat végez az inga.

A $\dot{c}$-nek az egyenlete a forgástengely mozgásának a sebességét határozza meg a Θ révén. Mégpedig tekintettel $\dot{\Theta}$ egyenletére

$$\dot{c} = gt + C\frac{R_0 \sin\Theta}{\sqrt{1 - \frac{mR_0^2}{J}\sin^2\Theta}} + A$$

Vegyük észre, hogy C lehet akkora, hogy ha a kezdeti $\dot{c}$ pozitív volt is, a tengely egy vagy több ízben fölfelé is mozog (ugyanis $\sin\Theta$ negatív értékei miatt).

Inerciamomentum, deviációmomentum.

69, Legközelebb a merev testeknek az általános mekanikájáról lesz a szó. Előbb azonban meg kell ismerkednünk a címben megnevezett két fogalommal.

Legyen adva egy tengely, – melyet majd J tengelynek nevezünk –, egy pontjának a, b, c, koordinátái és irányának α, β, γ iránykoszinuszai által. Egy testelem Dm tömegéből és a tengelytől való r távolának a négyzetéből képzett $r^2 Dm$ szorzatot a testelem J tengelyű inerciamomentumának nevezzük.

Egy anyagi rendszert alkotó elemi részek J tengelyű inercia-momentumainak $S\, r^2 Dm$ összegét pedig az anyagi rendszer J tengelyű inerciamomentumának nevezzük.

70, Minthogy az a, b, c ponttal s az α, β, γ iránnyal s Dm-nek x, y, z helyével meg van határozva az r távolság, ennélfogva az $r^2 Dm$ inerciamomentum r^2 tényezője szükségképen kifejezhető ezekkel az adatokkal. Előállítása végett az a, b, c pontból huzzunk vektort az x, y, z pontba és jelölje ε ezen vektornak és az J tengelynek a szögét, R a vektor hosszát:

$$r = R \sin \varepsilon$$

Azonban $\sin \varepsilon$ kifejezhető a tengelynek és a vektornak az iránykoszinuszaival éspedig a vektortan útmutatása szerint:

$$\sin^2 \varepsilon = \left(\beta \frac{z-c}{R} - \gamma \frac{y-b}{R} \right)^2 +$$

$$+\left(\gamma\,\frac{x-a}{R}-\alpha\,\frac{z-c}{R}\right)^2+\left(\alpha\,\frac{y-b}{R}-\beta\,\frac{x-a}{R}\right)^2$$

Ebből folytatólag:

$$r^2=[\beta(z-c)-\gamma(y-b)]^2+[\gamma(x-a)-\alpha(z-c)]^2+$$
$$+[\alpha(y-b)-\beta(x-a)]^2$$

Az anyagi rendszer inerciamomentuma tehát amelyet, mint a tengelyt szintén J-vel jelöljük, a tengely adataival és az elemi részek koordinátáival kifejezve

$$J=S\{[\beta(z-c)-\gamma(y-b)]^2+[\gamma(x-a)-\alpha(z-c)]^2+$$
$$+[\alpha(y-b)-\beta(x-a)]^2\}\mathfrak{D}m$$

71, Lássuk ezen kifejezést néhány speciális tengelyre vonatkozólag is.

Tegyük fel, hogy az J tengely átmegy az origón. Akkor a, b, c pont gyanánt az origó is szolgálhat. Következéskép az origón átmenő tengelyre az inerciamomentum kifejezése ilyen módon írható:

$$J=S[(\beta z-\gamma y)^2+(\gamma x-\alpha z)^2+(\alpha y-\beta x)^2]\mathfrak{D}m$$

Különösen pedig, ha az J tengely rendre összeesik a három koordinátatengellyel, akkor körülötte az inerciamomentum rendre a következő:

$$\begin{cases} J_x=S(y^2+z^2)\mathfrak{D}m \\ J_y=S(x^2+z^2)\mathfrak{D}m \\ J_z=S(x^2+y^2)\mathfrak{D}m \end{cases}$$

72.) Bármely tengelyt jelentsen J, ha koordinátarendszerünk origóját benne helyezzük el, akkor körülötte érvényes 71.-nek J kifejezése.

Az J inerciamomentumnak ezen kifejezését most az J tengely iránykoszinuszai szerint rendezzük és kapjuk, hogy

$$J = \alpha^2 S(y^2+z^2)\mathfrak{D}m + \beta^2 S(z^2+x^2)\mathfrak{D}m + \gamma^2 S(x^2+y^2)\mathfrak{D}m +$$
$$- 2\beta\gamma\, S yz\, \mathfrak{D}m - 2\gamma\alpha\, S zx\, \mathfrak{D}m - 2\alpha\beta\, S xy\, \mathfrak{D}m$$

Ebben a kifejezésben az első három összeg nem más, mint (71. szerint) rendre az x tengelyű, y tengelyű, z tengelyű inerciamomentum: J_x, J_y, J_z; a másik három összeget „deviációmomentum"-nak nevezzük, éspedig az első bilineáris alakot az x tengelyű, a másodikat az y tengelyű, a harmadikat a z tengelyű deviációmomentumnak és röviden $\mathfrak{D}_x$; $\mathfrak{D}_y$; $\mathfrak{D}_z$ jelvényekkel írjuk. Jelöléseink használatával

$$J = \alpha^2 J_x + \beta^2 J_y + \gamma^2 J_z - 2\beta\gamma\mathfrak{D}_x - 2\gamma\alpha\mathfrak{D}_y - 2\alpha\beta\mathfrak{D}_z$$

E kifejezés arra tanít, hogy ha ismerjük a koordinátarendszer három tengelye körül az inerciamomentumot és a deviációmomentumot, akkor az inerciamomentumot akármely origói tengelyre meg tudjuk határozni a feltüntetett racionális műveletekkel. Minthogy pedig az origó megválasztására nincs semmi kikötésünk, ennélfogva bármely tengelyre tartozó inerciamomentumot ily módon fejezhetünk ki.

73, De az origói tengelyekre tartozó inerciamomentumnak a 72.-ben előállított kifejezéséből még más hasznos megismeréshez is juthatunk. Képzeljük az összes origói tengelyeket, tehát az origón keresztül minden irányban köröskörül sorakozó tengelyek seregét gondoljuk és minden ilyen tengelyen tűzzünk ki – valamennyinek a pozitív felén, vagy valamennyinek a negatív felén – egy oly pontot, hogy annak origói távolsága valamely megszabott arányossági tényező szerint fordított arányban legyen a tengelyre tartozó inerciamomentum négyzetgyökével. Ha az arányossági tényezőt K, egy origói tengelyen kitűzött pont origói távolságát L, ezen tengely körül az inerciamomentumot J jelöli, akkor úgy tűzzük ki a pontot a tengelyen, hogy

$$L = \frac{K}{\sqrt{J}}$$

Minden origói tengelyen számbavéve az ilyen pontot, e pontok összessége ellipszoidot alkot, amelynek centruma az origóban van s amelyet Poinsot-féle ellipszoidnak, vagy inerciaellipszoidnak nevezünk. Lássuk, hogy csakugyan ellipszoid e pontok geometriai helye és hogy annak a centruma az origóban van.- Arányossági egyenletünkből folyólag

$$\mathcal{L}^2 J = K^2$$

tehát J-nek 72.-ben előállitott kifejezése szerint:

$$\mathcal{L}^2[\alpha^2 J_x + \beta^2 J_y + \gamma^2 J_z - 2\beta\gamma D_x - 2\gamma\alpha D_y - 2\alpha\beta D_z] = K^2$$

Akármelyik origói tengely legyen is az J tengely és igy akármelyiken kitüzött $\mathcal{L}\alpha$, $\mathcal{L}\beta$, $\mathcal{L}\gamma$ pontra vonatkoztassuk is ezt az egyenletet, az J_x, J_y, J_z, D_x, D_y, D_z és K értékek mindig ugyanazok az egyenletben, következőleg ez az egyenlet másodrendü felületet határoz meg azoknak a pontoknak a geometriai helye gyanánt, amelyeknek a koordinátái $\mathcal{L}\alpha$, $\mathcal{L}\beta$, $\mathcal{L}\gamma$. Ez a másodrendü fölület nyilvánképen ellipszoid, éspedig olyan, amelynek az origóban van a centruma.

Minden-egyes origói tengely körül ismerjük az inerciamomentumot, ha ismerjük az inerciaellipszoidot és egyetlen egy origói tengely körül az inercia momentumot, mert az $\mathcal{L}$ hosszuságokból a K konstans segélyével mindegyik tengelyre kiszámithatjuk az inerciamomentumot, a K konstans pedig kiadódik az ismert egyetlen inerciamomentumból.

74, De ellipszoidos egyenletünk még arra is megtanit, hogy a koordinátarendszer fekvését mindig meg lehet választani ugy a maga origója körül, hogy a D_x, D_y, D_z origói deviációmomentumok eltünjenek. Ez onnan következik, hogy homogén koordináta-transzformációval mindig el lehet érni, hogy az ellipszoid egyenletében csak a tiszta kvadratikus részek forduljanak elő, a bilineáris részek pedig nem. Megjegyzendő, hogy az origó megválasztására nézve semmi kikötést sem tettünk. Ennélfogva a Poinsot-féle ellipszoid tétele is bármely pontra nézve áll mint centrumra nézve. Tegyük még azt az észrevételt, hogy mindig az ellipszoid legkisebb tengelyére esik a legnagyobb inerciamomentum és a legnagyobbra a legkisebb, mint azt az $J = \frac{K^2}{\mathfrak{L}^2}$ kifejezés mutatja.

75. Bármilyen legyen is egy anyagi rendszer tömegének az eloszlása, az anyagi rendszer inerciamomentuma minden egyes tengely körül nagyobb, mint a tömegcentrumán áthaladó párhuzamos tengely körül, mégpedig minden tengely körül a tömegcentrumában gondolt tömegének az inerciamomentumával nagyobb.

Bizonyítás: J tengely iránykoszinuszait α, β, γ-val és egy pontjának a koordinátáit a, b, c-vel jelölvén, körülötte 70. szerint ez az inercia momentum:

$$J = S\left\{\left[\beta(z-c) - \gamma(y-b)\right]^2 + \left[\gamma(x-a) - \alpha(z-c)\right]^2 + \left[\alpha(y-b) - \beta(x-a)\right]^2\right\} \mathfrak{D}m$$

Ha ξ, η, ζ az anyagi rendszer tömegcentrumának a koordinátái és röviden

$$\beta(z-\zeta)-\gamma(y-\eta)\equiv A, \quad \beta(c-\zeta)-\gamma(b-\eta)\equiv A_0,$$
$$\gamma(x-\xi)-\alpha(z-\zeta)\equiv B, \quad \gamma(a-\xi)-\alpha(c-\zeta)\equiv B_0,$$
$$\alpha(y-\eta)-\beta(x-\xi)\equiv C, \quad \alpha(b-\eta)-\beta(a-\xi)\equiv C_0,$$

tesszük, akkor nyilvánképen így is írhatjuk J-nek e kifejezését:

$$J = S\{(A-A_0)^2+(B-B_0)^2+(C-C_0)^2\}\mathfrak{D}m$$
$$= S(A^2+B^2+C^2)\mathfrak{D}m + S(A_0^2+B_0^2+C_0^2)\mathfrak{D}m$$
$$-2S(AA_0+BB_0+CC_0)\mathfrak{D}m$$

Innen $S\,AA_0\mathfrak{D}m \equiv A_0 S\,A\mathfrak{D}m$, stb. kiesik 33. miatt; $S(A^2+B^2+C^2)\mathfrak{D}m$ nem más, mint az anyagi rendszer inerciamomentuma a tömegcentrumán áthaladó (α,β,γ) irányú tengely körül; végre, ha m jelenti az anyagi rendszer tömegét:

$$S(A_0^2+B_0^2+C_0^2)\mathfrak{D}m = m(A_0^2+B_0^2+C_0^2)$$

ami nyilvánképen a tömegcentrumban gondolt m tömeg J tengelyű inerciamomentuma s valóban $A_0^2+B_0^2+C_0^2$ nem más, mint az J tengely és a tömegcentrum távolságának a négyzete.

Akármely tengely körül jelentse tehát J egy anyagi rendszer inerciamomentumát, ha a tömegcentrumon át vele párhuzamosan vont tengely körül J_0 jelöli az anyagi rendszer inerciamomentumát és ha a két tengely távolsága R, az anyagi rendszer tömege pedig m, akkor

$$J = J_0 + mR^2$$

76. Valahányszor ismerjük a totális tömeget, és ismerjük a tömegcentrumon átmenő ten-

gelyek körül az inerciamomentumot, utolsó egyenletünkből egyszerű módon számíthatjuk ki bármely más tengely körül is az inertiamomentumot.

Láthatjuk pedig azt is ezen egyenletből, hogy párhuzamos tengelyekre tartozó inercia-momentumok sorában azok a nagyobbak, melyek a tömegcentrumtól távolabb eső tengelyekre tartoznak s azok a párhuzamos tengelyek, melyekre egyenlő inerciamomentumok tartoznak forgáshengert alkotnak, melynek tengelye áthalad a tömegcentrumon.

77. Hogy egy koordinátatengelyre szóló inerciamomentum más koordinátarendszerbe transzformálva milyen alakot ölt, ezt közös origó esetén közvetlenül mutatja az inercia momentumnak 72.-ben előállított kifejezése. Ha pl. az x tengely iránykoszinuszai egy új rendszerben $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ és a két rendszer origója összeesik, akkor:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_x = \alpha_1^2 \mathcal{J}_{x'} + \alpha_2^2 \mathcal{J}_{y'} + \alpha_3^2 \mathcal{J}_{z'} \\ -2\alpha_2\alpha_3 \mathcal{D}_{x'} - 2\alpha_3\alpha_1 \mathcal{D}_{y'} - 2\alpha_1\alpha_2 \mathcal{D}_{z'} \end{aligned}$$

ahol $\mathcal{J}_{x'}$, stb. meg $\mathcal{D}_{x'}$, stb. az új tengelyekre szóló inercia-, illetőleg deviációmomentumok.

78. Szükséges azt is tudnunk, hogy

valamely koordinátatengelyre szóló deviációmomentum miképen tránszformálódik egy más koordinátarendszerbe, ha az origók összeesnek. Tekintsük pl. az z tengelyre szóló deviációmomentumot:

$$\mathfrak{D}_z = \mathfrak{S}\, x\, y\, \mathfrak{d}m$$

Az új koordinátarendszerben a koordináták x', y', z' legyenek s az új origó essék össze a régi origóval, az új tengelyek iránykoszinuszai pedig a régi rendszerben rendre: $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$; $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ legyenek. Akkor

$$x = \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z'$$

$$y = \beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3 z'$$

Eszerint:

$$xy = \alpha_1\beta_1 x'^2 + \alpha_2\beta_2 y'^2 + \alpha_3\beta_3 z'^2 + (\alpha_2\beta_3 + \beta_2\alpha_3)\, y'z' +$$
$$+ (\alpha_3\beta_1 + \beta_3\alpha_1)\, z'x' + (\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2)\, x'y'$$

De x'^2, stb kifejezhetők $y'^2 + z'^2$, $z'^2 + x'^2$, $x'^2 + y'^2$ által, éspedig:

$$x'^2 = \frac{1}{2}\left\{-(y'^2 + z'^2) + (z'^2 + x'^2) + (x'^2 + y'^2)\right\}$$

$$y'^2 = \frac{1}{2}\left\{(y'^2 + z'^2) - (z'^2 + x'^2) + (x'^2 + y'^2)\right\}$$

$$z'^2 = \frac{1}{2}\left\{(y'^2 + z'^2) + (z'^2 + x'^2) - (x'^2 + y'^2)\right\}$$

Ezeknek a számbavételével azonnal feltűnik, hogy ha az új tengelyekre tartozó inerciamomentumokat, illetőleg deviációmomentumokat rendre $\mathfrak{J}_{x'}$, $\mathfrak{J}_{y'}$, $\mathfrak{J}_{z'}$, $\mathfrak{D}_{x'}$, $\mathfrak{D}_{y'}$, $\mathfrak{D}_{z'}$ jelölik, akkor:

$$D_z = \frac{1}{2}\alpha_1\beta_1\left(-J_{x'} + J_{y'} + J_{z'}\right) + \frac{1}{2}\alpha_2\beta_2\left(J_{x'} - J_{y'} + J_{z'}\right)$$
$$+ \frac{1}{2}\alpha_3\beta_3\left(J_{x'} + J_{y'} - J_{z'}\right) + (\alpha_2\beta_3 + \beta_2\alpha_3) D_{x'} +$$
$$+ (\alpha_3\beta_1 + \beta_3\alpha_1) D_{y'} + (\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2) D_{z'}$$

vagy kissé másképp írva:

$$D_z = \frac{1}{2}(-\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3) J_{x'} + \frac{1}{2}(\alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3) J_{y'}$$
$$+ \frac{1}{2}(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 - \alpha_3\beta_3) J_{z'} + (\alpha_2\beta_3 + \beta_2\alpha_3) D_{x'} +$$
$$+ (\alpha_3\beta_1 + \beta_3\alpha_1) D_{y'} + (\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2) D_{z'}$$

De:

$$\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = 0, \text{ tehát}$$

$$D_z = -\alpha_1\beta_1 J_{x'} - \alpha_2\beta_2 J_{y'} - \alpha_3\beta_3 J_{z'} + (\alpha_2\beta_3 + \beta_2\alpha_3) D_{x'}$$
$$+ (\alpha_3\beta_1 + \beta_3\alpha_1) D_{y'} + (\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2) D_{z'}$$

Hasonlóképen fejezhetjük ki a régi rendszer első és második tengelyére szóló deviációmomentumot az új rendszerre szóló inercia- és deviációmomentumokkal.

Merev testek mekanikája.

79. A merevség meghatározása. Egy testet merevnek mondunk, ha elemi részei relativ helyzetüket nem változtathatják, ha tehát a test két-két elemi részének az egymástól való távola nem változhatik.

Első feladatúl tűzzük ki úgy határozni

meg a test elemi részeinek a koordinátáit parametrumok segélyével, hogy ezáltal a test merev volta, súgy a merevségi kényszer jellemezve legyen. E végből egy második tengelyrendszert a merev testhez rögzitünk. Világos, hogy ezen „materiális" koordinátarendszernek az eredetiben elfoglalt mindenkori helyzetével teljesen meg van határozva a merev test mindenkori helyzete. Mihelyt tehát a testelemeknek az eredeti rendszerbe tartozó koordinátáit kifejeztük a materiális rendszerbe tartozó konstáns koordinátákkal és ezen rendszer helyhatározóival, akkor már úgy határoztuk meg a testelemek változandó koordinátáit, hogy ezek a testelemek merev testet alkotnak.

A materiális origó (a materiális koordinátarendszer origója) t pillanatban a', b', c' helyen legyen az eredeti koordinátarendszerben és ugyanekkor a materiális koordinátatengelyek iránykoszinuszai rendre $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$; $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ legyenek az eredeti rendszerben. Egy testelem koordinátáit az eredeti rendszerben x, y, z, a materiális rendszerben x', y', z' jelöljék. Ehhez képest

$$\begin{cases} x = a' + \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z' \\ y = b' + \beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3 z', \\ z = c' + \gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3 z' \end{cases}$$

Az x', y', z' koordináták mint állandók szerint és a materiális rendszernek az a', b', c'; $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ helyhatározói mint változandó mennyiségek szerint, tekintettel az iránykoszinuszok vonatkozásaira máris úgy határozzák meg ezen kifejezések a testelemek mindenkori helyét az eredeti koordinátarendszerben, hogy merev testnek az elemi részei azok.

80, Az Euler-féle szögek alkalmazása

Minthogy a kilenc iránykoszinusz hat független egyenletet elégít ki, annálfogva három független paramétrummal fejezhetők ki. Ilyen paramétrumok az u. n. Euler-féle szögek. Beiktatásuk végett helyezzük egy pillanatra a materiális origóba az eredeti origót; az iránykoszinuszokon ezzel nem változtatunk, pedig most csak róluk lesz a szó.

A z' irányú egységvektor az eredeti rendszerben $=(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$. Szferikus határozók szerint

$$\alpha_3 = \sin\vartheta\cos\varphi, \quad \beta_3 = \sin\vartheta\sin\varphi$$

$$\gamma_3 = \cos\vartheta$$

ahol ϑ a két harmadik tengely szöge ($0 \leq \vartheta \leq \pi$) és φ = a z' tengelynek z tengelyű forgásszöge az x irány felől egy konstans hozzáadásával vagy valamely más (z-tengelyű) alapirány felől és pozitív vagy negatív aszerint, amint „jobbra" vagy „balra" fordulásból származott a z tengely körül.

A z irányú egységvektor a materiális

rendszerben $= (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$. Szferikus határozók szerint

$$\gamma_1 = \sin\vartheta\cos\varphi', \quad \gamma_2 = \sin\vartheta\sin\varphi', \quad \gamma_3 = \cos\vartheta$$

ahol ϑ ugyanaz, mint előbb, ugyanis a z és z' tengely szöge, φ' pedig a z-tengelynek z' tengelyű forgásszöge az x' irány felől (egy konstans hozzáadásával) vagy valamely más (z' tengelyű) alapirány felől számítva és pozitív vagy negatív aszerint, amint „jobbra" vagy „balra" fordulásból származott a z' tengely körül.

Öt iránykoszinuszt kifejeztünk három szöggel. A hátralévő négy iránykoszinuszt a $\beta_2\gamma_3 - \gamma_2\beta_3 = \alpha_3$ stb. vonatkozásokból mint ugyancsak $\vartheta, \varphi, \varphi'$ határozott függvényét kapjuk azzal a föltétellel, hogy

$$\sin\vartheta \neq 0$$

Mégpedig e föltétellel azt kapjuk, hogy

$$\alpha_1 = -\cos\vartheta\cos\varphi\cos\varphi' - \sin\varphi\sin\varphi'$$
$$\alpha_2 = -\cos\vartheta\cos\varphi\sin\varphi' + \sin\varphi\cos\varphi'$$
$$\beta_1 = -\cos\vartheta\sin\varphi\cos\varphi' + \cos\varphi\sin\varphi'$$
$$\beta_2 = -\cos\vartheta\sin\varphi\sin\varphi' - \cos\varphi\cos\varphi'$$

Ha egy pillanatra $\sin\vartheta = 0$, akkor a φ és φ' forgásszögnek általában folytonosságszakadása van, ami egyszerű szemléletből kitűnik azon eseteken, amelyekben a zz' sík hirtelen egészen új fekvésbe csap át. A φ és φ' ezen folytonosságszakadása azonban megszüntethető azáltal, hogy most már más alapirányok felől számítjuk ezeket a forgásszögeket mint előbb, a z

illetőleg a z' tengely körül

Midőn tartósan tűnik el $\sin\vartheta$ (tartósan egyezik vagy ellenkezik a két harmadik tengely iránya), akkor nyilvánvalólag egyetlen szög meghatározza a két tengelyrendszer relatív irányulását, úgymint egy z tengelyű vagy z' tengelyű forgásszög az x irány vagy az x' irány felől vagy valamely más alapirány felől számítva. Az előállított kifejezések pedig olyanok, hogy még ekkor is érvényesek, ugyanis $\varphi-\varphi'$, vagy $\varphi+\varphi'$ függvényeivé válnak azok aszerint amint $\vartheta=0$ vagy $\vartheta=\pi$, és $\varphi-\varphi'$ vagy $\varphi+\varphi'$ jelenti ekkor az egyetlen határozó szöget.

A $\vartheta, \varphi, \varphi'$ szögeket Euler-féle szögeknek nevezzük.

81, A merevség parametrumos kifejezései. Ha 79.-nek a kifejezéseiben az iránykosinuszokat 80-ból mint az Euler-féle szögek függvényeit helyettesítjük, akkor már explicite paraméterumokkal jellemeztük a merevséget, $a', b', c', \vartheta, \varphi, \varphi'$ hat paraméterummal. Ezek ugyanis minden testelem számára ugyanazok és az idővel csak ezek változhatnak, ellenben az x', y', z' materiális koordináták az idő szerint változhatatlanok.

82. A merevség differenciálkifejezései. Egy merev test elemi részei legfeljebb csak úgy mozdúlhatnak, ahogy azt 79. kifejezései az a', b', c' origói koordinátáknak és $\vartheta, \varphi, \varphi'$ Euler-féle szögeknek a megváltozásai által engedik, mihez képest, akár tényleges, akár lehetséges, akár virtuális elemi megváltozást jelentsen a δ és következőleg a merev test elemi részeinek akár tényleges, akár lehetséges, akár virtuális elmozdulásait jelentse $(\delta x, \delta y, \delta z)$, ezek szükségképen olyanok, hogy:

$$\delta x = \delta a' + x'\delta\alpha_1 + y'\delta\alpha_2 + z'\delta\alpha_3$$
$$\delta y = \delta b' + x'\delta\beta_1 + y'\delta\beta_2 + z'\delta\beta_3$$
$$\delta z = \delta c' + x'\delta\gamma_1 + y'\delta\gamma_2 + z'\delta\gamma_3$$

ahol

$$\delta\alpha_1 = \frac{\partial\alpha_1}{\partial\vartheta}\delta\vartheta + \frac{\partial\alpha_1}{\partial\varphi}\delta\varphi + \frac{\partial\alpha_1}{\partial\varphi'}\delta\varphi', \text{ stb.}$$

a 81. alatt írt kifejezések értelmében. Részletesen kifejtve itt az iránykoszinuszok deriváltjait, a $(\delta x, \delta y, \delta z)$ számára kellő redukciók után a következő kifejezéseket találjuk:

$$\delta x = \delta a' + (y-b')(\gamma_3\delta\varphi' - \delta\varphi) - (z-c')(\beta_3\delta\varphi' - \cos\varphi\,\delta\vartheta)$$
$$\delta y = \delta b' + (z-c')(\alpha_3\delta\varphi' + \sin\varphi\,\delta\vartheta) - (x-a')(\gamma_3\delta\varphi' - \delta\varphi)$$
$$\delta z = \delta c' + (x-a')(\beta_3\delta\varphi' - \cos\varphi\,\delta\vartheta) - (y-b')(\alpha_3\delta\varphi' + \sin\varphi\,\delta\vartheta)$$

Most már a merev test elemi részeinek minden fajú elemi elmozdulásai ki vannak fejezve az a', b', c' és $\vartheta, \varphi, \varphi'$ helyzethatározókkal és azok elemi megváltozásával. Ezen kifejezések differenciál-alakban jellemzik a kényszert.

83, Az elemi eltolás és elemi elfordítás bevezetése. Alkalmazzuk a következő jelöléseket:

$$\begin{cases} -(\alpha_3\,\delta\varphi' + \sin\varphi\,\delta\vartheta) \equiv \delta u \\ -(\beta_3\,\delta\varphi' - \cos\varphi\,\delta\vartheta) \equiv \delta v \\ -(\gamma_3\,\delta\varphi' - \delta\varphi) \equiv \delta w \end{cases}$$

$$\begin{cases} \delta a' + b'\delta w - c'\delta u \equiv \delta a \\ \delta b' + c'\delta u - a'\delta w \equiv \delta b \\ \delta c' + a'\delta v - b'\delta u \equiv \delta c \end{cases}$$

Ezeknek a behelyettesitésével a merevség differenciálkifejezései 82.-ből a következők:

$$\begin{cases} \delta x = \delta a + z\delta v - y\delta w \\ \delta y = \delta b + x\delta w - z\delta u \\ \delta z = \delta c + y\delta u - x\delta v \end{cases}$$

A bennük előforduló hat differenciál parametrumnak pedig közvetlenül felfogható kinematikai értelme van. Tekintsük a $(\delta x, \delta y, \delta z)$ vektort úgy, mint két vektor összegét, amelyek egyike $(\delta a, \delta b, \delta c)$ másika pedig:

$$(z\delta v - y\delta w,\ x\delta w - z\delta u,\ y\delta u - x\delta v)$$

és most vizsgáljuk, hogy mi a jelentése az egyik és másik összetevőnek.

Az első $(\delta a, \delta b, \delta c)$ a test minden pontjában ugyanaz, mint a definiciója mutatja. Következőleg ez a vektor a test minden pontjának egyenlő nagyságú és egyező irányú elemi úton való elmozdulását, azaz a test elemi eltolódását jelenti.

Ami a másik összetevőt illeti, a vektortanból a vektorok elemi megváltozásának a tárgyalásából közvetlenül láthatjuk, hogy a $(\delta x, \delta y, \delta z)$ elemi elmozdulás ezen második összetevője létesül, ha az (x, y, z) origói vektor elfordul $\delta\omega = \sqrt{\delta u^2 + \delta v^2 + \delta w^2}$ nagyságú szög alatt pozitiv értelemben oly origói tengely körül, amelynek az iránykoszinuszai : $\frac{\delta u}{\delta\omega}, \frac{\delta v}{\delta\omega}, \frac{\delta w}{\delta\omega}$. Az x, y, z pontnak ugyanily elfordulásából ered tehát a második összetevő. Minthogy pedig $\delta u, \delta v, \delta w$ a test minden pontjában ugyanaz, mint a definiciója mutatja, következőleg a $(\delta x, \delta y, \delta z)$-féle elemi elmozdulások második komponensei a test pontjainak egyetemleges elemi elfordulását jelentik a $\delta\omega$ szög alatt pozitiv értelemben oly origói tengely körül, amelynek iránykoszinuszai : $\frac{\delta u}{\delta\omega}, \frac{\delta v}{\delta\omega}, \frac{\delta w}{\delta\omega}$. Az elemi elmozdulások második összetevője az egész testnek ezen a módon való elemi elfordulását jelenti.

Ha nem eredeti helyzetéből forditjuk el a testet, hanem előbb eltoljuk végtelen kis úton, azután forditjuk el, ugyanaz lesz az elemi elfordulása, mert az eltolás után elfoglalt helyek koordinátái csak végtelen kicsit különböznek az x, y, z koordinátáktól. Ha tehát a két elemi müveletet, u. m. az eltolást és elforditást folytatólag egymásután végezzük, ugyanazon helyzetbe jut a test, mint a $(\delta x, \delta y, \delta z)$ teljes elmozditásokkal.

De a δa, δb, δc, meg a δu, δv, δw komponenseknek egyenként is van kinematikai értelme.

$$(\delta a, \delta b, \delta c) \equiv (\delta a, 0, 0) + (0, \delta b, 0) + (0, 0, \delta c)$$

következöleg úgy fogható fel a test elemi eltolódása, mint három elemi eltolódás összege, amelyek nagysága rendre $|\delta a|$, $|\delta b|$, $|\delta c|$ s amelyek elseje párhuzamos az x tengellyel, másodika az y tengellyel, harmadika a z tengellyel és e tengelyeknek az irányával egyezik vagy ellenkezik aszerint, amint δa, illetőleg δb, illetőleg δc pozitiv vagy negativ. Ha tehát a testet bármely sorrendben egymásután eltoljuk a $|\delta a|$, $|\delta b|$, $|\delta c|$ mekkoraságú úton az illető koordinátatengelyekkel egyező vagy ellenkező irányban a δa, δb, δc előjele szerint, a három egymást követő elemi eltolás a test ugyanazon helyzetét eredményezi, mert pontjainak ugyanazon koordinátáit eredményezi. Ez a külön kinematikai jelentménye a δa, δb, δc elemi komponenseknek. — Továbbá a vektortanból, a vektorok elemi megváltozásának a tárgyalásából egyenesen látható, hogy ha valamely sorrend szerint egymásután elfordítjuk a testet az x és y és z tengely körül $|\delta u|$, $|\delta v|$, $|\delta w|$ szögön pozitiv vagy negativ értelemben δu, δv, δw előjele szerint, akkor ugyanazon helyzetbe kerül a test, amelybe $\delta\bar{\omega} \equiv \sqrt{\delta u^2 + \delta v^2 + \delta w^2}$ szögön $\frac{\delta u}{\delta\bar{\omega}}$, $\frac{\delta v}{\delta\bar{\omega}}$, $\frac{\delta w}{\delta\bar{\omega}}$ iránykoszinuszos tengely körül fordul. Ez a külön kinematikai jelentménye a δu, δv, δw elemi komponenseknek.

84. A merevségi kényszer differenciálkifejezéseinek részletes előállítása.

Azon eljárás, amelyet 82.-ben posztuláltunk a merevségi kényszer differenciálkifejezéseinek előállítására, kevés szóval értelmezhető ugyan, de a részletes kifejtése hosszadalmas. Egyszerűbben érünk célt az itt részletesen kifejtendő eljárással.

A materiális koordinátákra írva fel 79.-ből a transzformációt:

$$x' = \alpha_1(x - a') + \beta_1(y - b') + \gamma_1(z - c') \quad \text{stb.}$$

Minthogy $\delta x' = 0$ stb., úgy ezen egyenletekből az következik, hogy

$$\alpha_1\delta x + \beta_1\delta y + \gamma_1\delta z = \alpha_1\delta a' + \beta_1\delta b' + \gamma_1\delta c' + \\ - \{(x-a')\delta\alpha_1 + (y-b')\delta\beta_1 + (z-c')\delta\gamma_1\} \quad \text{stb.}$$

Szorozzuk meg az ily három egyenletet rendre az $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ iránykoszinuszokkal s azután adjuk össze. Minthogy $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$, úgy az $x - a'$ együtthatója gyanánt jelentkező $\alpha_1\delta\alpha_1+\beta_1\delta\beta_1+\gamma_1\delta\gamma_1$ eltűnik, minthogy továbbá $\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3=0$, $\alpha_1\gamma_1+\alpha_2\gamma_2+\alpha_3\gamma_3=0$, ennélfogva a baloldalon előálló összegből δy és δz kiesik. Eredmény:

$$\delta x=\delta a'-(y-b')(\alpha_1\delta\beta_1+\alpha_2\delta\beta_2+\alpha_3\delta\beta_3)+$$
$$-(z-c')(\alpha_1\delta\gamma_1+\alpha_2\delta\gamma_2+\alpha_3\delta\gamma_3)$$

Hasonló eljárással kapjuk, hogy

$$\delta y=\delta b'-(z-c')(\beta_1\delta\gamma_1+\beta_2\delta\gamma_2+\beta_3\delta\gamma_3)+$$
$$-(x-a')(\beta_1\delta\alpha_1+\beta_2\delta\alpha_2+\beta_3\delta\alpha_3)$$
$$\delta z=\delta c'-(x-a')(\gamma_1\delta\alpha_1+\gamma_2\delta\alpha_2+\gamma_3\delta\alpha_3)+$$
$$-(y-b')(\gamma_1\delta\beta_1+\gamma_2\delta\beta_2+\gamma_3\delta\beta_3)$$

Ámde amiatt, hogy $\beta_1\gamma_1+\beta_2\gamma_2+\beta_3\gamma_3=0$ stb:

$$\beta_1\delta\gamma_1+\beta_2\delta\gamma_2+\beta_3\delta\gamma_3=-(\gamma_1\delta\beta_1+\gamma_2\delta\beta_2+\gamma_3\delta\beta_3)$$
$$\gamma_1\delta\alpha_1+\gamma_2\delta\alpha_2+\gamma_3\delta\alpha_3=-(\alpha_1\delta\gamma_1+\alpha_2\delta\gamma_2+\alpha_3\delta\gamma_3)$$
$$\alpha_1\delta\beta_1+\alpha_2\delta\beta_2+\alpha_3\delta\beta_3=-(\beta_1\delta\alpha_1+\beta_2\delta\alpha_2+\beta_3\delta\alpha_3)$$

Ha már most ezeket rendre δu, δv, δw jelöli, és ha a

$$\delta a'+b'\delta w-c'\delta v,\quad \delta b'+c'\delta u-a'\delta w,\quad \delta c'+a'\delta v-b'\delta u$$

kifejezéseket rendre δa, δb, δc jelöli, ismét 83. harmadik egyenletcsoportja kerül elő.

Ami pedig a δu, δv, δw differenciálparametrumoknak a $\delta\vartheta$, $\delta\varphi$, $\delta\varphi'$ variációkkal való kifejezését illeti, ennek a megszerzése végett δu, δv, δw két-két kifejezéséből tekintsük a

$$\delta u\equiv-(\gamma_1\delta\beta_1+\gamma_2\delta\beta_2+\gamma_3\delta\beta_3)$$
$$\delta v\equiv\gamma_1\delta\alpha_1+\gamma_2\delta\alpha_2+\gamma_3\delta\alpha_3$$

$$\delta w = \alpha_1 \delta\beta_1 + \alpha_2 \delta\beta_2 + \alpha_3 \delta\beta_3$$

kifejezéseket és vegyük tekintetbe, hogy 80.-ból

$$\delta\alpha_1 = \gamma_1 \cos\varphi\, \delta\vartheta - \beta_1 \delta\varphi - \alpha_2 \delta\varphi'$$
$$\delta\alpha_2 = \gamma_2 \cos\varphi\, \delta\vartheta - \beta_2 \delta\varphi + \alpha_1 \delta\varphi'$$
$$\delta\alpha_3 = \gamma_3 \cos\varphi\, \delta\vartheta - \beta_3 \delta\varphi$$
$$\delta\beta_1 = \gamma_1 \sin\varphi\, \delta\vartheta + \alpha_1 \delta\varphi - \beta_2 \delta\varphi'$$
$$\delta\beta_2 = \gamma_2 \sin\varphi\, \delta\vartheta + \alpha_2 \delta\varphi + \beta_1 \delta\varphi'$$
$$\delta\beta_3 = \gamma_3 \sin\varphi\, \delta\vartheta + \alpha_3 \delta\varphi$$

Ezek beírásautàn az iránykoszinuszok vonatkozásainak fölhasználásával már megkapjuk 83. első egyenletcsoportját is. A másodikat $\delta a, \delta b, \delta c$ definiciója gyanánt már az előbb fölvettük.

85. A virtuális munka törvénye merev testen. A 83-ban $(\delta x, \delta y, \delta z)$ tetszésszerint, virtuális elmozdulást, vagy tényleges elemi elmozdulást, vagy akármely lehetséges elemi elmozdulást jelent és megfelelőleg $(\delta a, \delta b, \delta c)$ illetőleg $(\delta u, \delta v, \delta w)$ virtuális eltolódást illetőleg elfordulást vagy tényleges vagy akármely lehetséges elemi eltolódást, illetőleg elfordulást (határozz meg). Most a δ jegy virtuális elmozdulást, virtuális eltolódást, elfordulást jelentsen és egyetlen merev test alkossa azt az anyagi rendszert, amelynek a mekanikájával foglalkozni akarunk. Eszerint most $(\delta x, \delta y, \delta z)$-nek 83-ban (részletesen 82-ben) előállított kifejezései irhatók az általános élvi egyenlőtlenségbe, amely ilykép

egy merev test elvi egyenlőtlenségévé válik. Az általános elvi egyenlőtlenség ez:

$$S\{(\ddot{x}\mathfrak{D}m-\mathfrak{D}X)\delta x+(\ddot{y}\mathfrak{D}m-\mathfrak{D}Y)\delta y+(\ddot{z}\mathfrak{D}m-\mathfrak{D}Z)\delta z\}\geqq 0$$

ahol $\mathfrak{D}m$ egy elemi rész tömege és $(\mathfrak{D}X, \mathfrak{D}Y, \mathfrak{D}Z)$ a reá ható szabaderő. Feltétele ennek, hogy a kapcsoló rendszer passziv és nincs a kapcsolórendszernek surlódása és környezeti ellenállása számot tevő mértékben. Behelyettesítvén ide $\delta x, \delta y, \delta z$-nek 83 alatti kifejezéseit és azután a hat differenciálparametrum (δa stb.) szerint rendezvén az egyenlőtlenség baloldalát, továbbá a $(\mathfrak{D}X, \mathfrak{D}Y, \mathfrak{D}Z)$ szabaderők toló hatását $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C})$-vel, az origói forgató hatását pedig $(\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W})$-vel jelölvén, a merev test elvi relációja a következő alakban jelentkezik:

$$\begin{aligned}(m\ddot{\xi}-\mathcal{A})\delta a+(m\ddot{\eta}-\mathcal{B})\delta b+(m\ddot{\zeta}-\mathcal{C})\delta c&+\\+\left\{\frac{d}{dt}S(y\dot{z}-z\dot{y})\mathfrak{D}m-\mathcal{U}\right\}\delta u&+\\+\left\{\frac{d}{dt}S(z\dot{x}-x\dot{z})\mathfrak{D}m-\mathcal{V}\right\}\delta v&+\\+\left\{\frac{d}{dt}S(x\dot{y}-y\dot{x})\mathfrak{D}m-\mathcal{W}\right\}\delta w&\geqq 0.\end{aligned}$$

ha ugyanis ξ, η, ζ a test tömegcentrumának a koordinátái és m a test egész tömege. Az $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}$ definiciója:

$$\mathcal{A}\equiv S\mathfrak{D}X,\quad \mathcal{B}\equiv S\mathfrak{D}Y,\quad \mathcal{C}\equiv S\mathfrak{D}Z$$
$$\mathcal{U}\equiv S(y\mathfrak{D}Z-z\mathfrak{D}Y),\quad \mathcal{V}\equiv S(z\mathfrak{D}X-x\mathfrak{D}Z)$$
$$\mathcal{W}\equiv S(x\mathfrak{D}Y-y\mathfrak{D}X)$$

86, Virtuális külső kényszer merev testen. Midőn a merev test a merevségi kényszeren kivül még egyéb kényszert is visel, azaz ha külső kényszert is visel, akkor a külső virtuális kényszernek a relációjába vagy relációiba is beírandók a ($\delta x, \delta y, \delta z$) elemi elmozdulások 83 alatti kifejezései, amidőn már aztán a külső virtuális kényszer relációi is a merev testre lesznek vonatkoztatva és csakis a hat differenciál-paramétrumot: $\delta a, \delta b, \delta c, \delta u, \delta v, \delta w$ tartalmazzák, mint vezérmennyiségeket, amelyektől homogén lineáris egész alakban függenek. E relációk minden megoldásában köteles teljesülni az elvi reláció (85-ben), aminek a számbavételével határozott egyenletekhez és egyenlőtlenségekhez jutunk.

87, A merevségi kényszer a tényleges mekanikai állapoton. Hogy a merev test elvi relációja (85) egészen explicite vonatkozzék a merev testre, evégből szükséges, hogy a benne előforduló koordinátákat és azok differenciálhányadosait kifejezzük az új origó koordinátái és az Euler-féle szögek segítségével. A differenciálhányadosokat illetőleg vegyük figyelembe, hogy a 83-ban foglalt kifejezések mindenféle elemi elmozdulást megilletnek, megilletik a valóságos elemi elmozdulásokat is, mihez képest pedig

$$dx = da + z\,dv - y\,dw \text{ stb.}$$

és következőleg, dt-vel átosztva

$$\dot{x} = \frac{da}{dt} + z\frac{dv}{dt} - y\frac{dw}{dt} \text{ stb.}$$

Itt $\frac{da}{dt}$ stb., differenciálhányadosok, de egész általánosság szerint nem jelentkeznek úgy, mint valamely a, b, c, u, v, w határozott helyzetfüggvények időderiváltjai, mert ezen mennyiségek nem definiálvák és általában nem is definiálhatók mint a hat helyzethatározó határozott függvényei, hanem csak a differenciáljaik definiálvák határozott módon (85 alatt) a helyzethatározók és ezek differenciáljai által. Mindazonáltal röviden az $\dot{a}$, stb. jelvényt használjuk $\frac{da}{dt}$, stb. helyett. Ezeknek maguknak a 83 értelmezéséből határozott kinematikai jelentményük van. Nevezetesen $(\dot{a}, \dot{b}, \dot{c})$ haladó mozgás sebessége, $(\dot{u}, \dot{v}, \dot{w})$ meg forgó mozgás szögsebessége, amelynek a pillanatnyi nagysága $\sqrt{\dot{u}^2+\dot{v}^2+\dot{w}^2} =$ pillanatnyi tengelye pedig origói tengely $\frac{\dot{u}}{\dot{\omega}}, \frac{\dot{v}}{\dot{\omega}}, \frac{\dot{w}}{\dot{\omega}}$ iránykoszinuszokkal. Egyben $\dot{a}$ maga haladási sebesség az x tengely mentén, $\dot{u}$ maga szögsebesség az x tengely körül s. i. t. Jelöléseink alkalmazásával

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{a} + z\dot{v} - y\dot{w} \\ \dot{y} = \dot{b} + x\dot{w} - z\dot{u} \\ \dot{z} = \dot{c} + y\dot{u} - x\dot{v} \end{cases}$$

és nemkülönben

$$\begin{cases} \dot\xi = \dot a + \zeta\dot v - \eta\dot w \\ \dot\eta = \dot b + \xi\dot w - \zeta\dot u \\ \dot\zeta = \dot c + \eta\dot u - \xi\dot v. \end{cases}$$

Tehát egyszersmind ezek összehasonlításából

$$\begin{cases} \dot x = \dot\xi + (z-\zeta)\dot v - (y-\eta)\dot w \\ \dot y = \dot\eta + (x-\xi)\dot w - (z-\zeta)\dot u \\ \dot z = \dot\zeta + (y-\eta)\dot u - (x-\xi)\dot v \end{cases}$$

ahol is 83 értelmében (δ helyett d téve és dt-vel átosztásokat művelve)

$$\begin{cases} \dot u = -(\alpha_3\dot\varphi' + \sin\varphi\,\dot\vartheta) \\ \dot v = -(\beta_3\dot\varphi' - \cos\varphi\,\dot\vartheta) \\ \dot w = -(\gamma_3\dot\varphi' - \dot\varphi) \\ \dot a = \dot a' + b'\dot w - c'\dot v \\ \dot b = \dot b' + c'\dot u - a'\dot w \\ \dot c = \dot c' + a'\dot v - b'\dot u \end{cases}$$

Ha most még kifejtenők az $\ddot x, \ddot y, \ddot z$ meg $\ddot\xi, \ddot\eta, \ddot\zeta$ második deriváltakat is, azután magukat a koordinátákat ugyancsak kifejeznők 85-ben a merev test elvi relációjában a hat merevségi paraméterummal (az $a', b', c', \vartheta, \varphi, \varphi'$ helyzethatározókkal), akkor teljesen explicite transzformáltuk volna már általános elvi relációnkat a merev test elvi relációjába. Azonban ezeknek a műveleteknek a végrehajtása nagyon komplikált kifejezésekhez juttat, minélfogva azoknak az általános kifejtésétől tartózkodunk. Az egyes föladatokban a speciális viszonyok szerint egyszerűbb kifejezésekhez jutunk, miért is ezeknek a műveletek-nek a végrehajtását az egyes alkalmazások számára tartjuk fenn.

88. A külső kényszer a tényleges mekanikai állapoton. Midőn külső kényszer is van, akkor szükségképen számbaveendők a tényleges mekanikai állapoton is a helyhatározóknak ezen új kényszerből származó függései. Amint pedig ezeket is számba vettük, akkor már teljesen hozzáillesztettük matematikai kifejezésünket a kényszerhez. Általánosan a helyhatározók elsőrendű differenciálegyenletei szolgáltatják ezen függéseket.

89. A virtuális munka törvénye merev testek rendszerén. Ha anyagi rendszerünk egynél több merev testből áll, akkor általános elvi relációnk baloldalát annyi részben írjuk fel, ahány a merev test és így (a kapcsoló rendszerre 13 és 16 alatt kirótt posztulátumok fenntartásával)

$$\begin{aligned} &S_1[(\ddot{x}\,\mathfrak{D}m - \mathfrak{D}X)\,\delta x + \cdot + \cdot] \\ &+ S_2[(\ddot{x}\,\mathfrak{D}m - \mathfrak{D}X)\,\delta x + \cdot + \cdot] \\ &+ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \geqq 0 \end{aligned}$$

ahol az 1 indexes összegelés a merev testek egyikére, a 2 indexes egy másikára s.i.t. terjed ki.

Már most mindegyik merev testre alkalmazzuk a merevségi kényszer virtuális relációit. Az

1-es számú testre vonatkozólag:

$$\delta x = \delta a_1 + z\,\delta v_1 - y\,\delta w_1 \quad \text{stb.}$$

a 2-es számú testre vonatkozólag:

$$\delta x = \delta a_2 + z\,\delta v_2 - y\,\delta w_2 \quad \text{stb.}$$

és így tovább.

Természetesen itt az első kifejezésben a koordináták az első test egy pontjának, a második kifejezésben a második test egy pontjának a koordinátáit jelentik. Ehhez képest alaprelációnk több merev test rendszerére alkalmazva a következő alakot ölti:

$$\Sigma \Big\{ (m\ddot{\xi} - A)\,\delta a + (m\ddot{\eta} - B)\,\delta b + (m\ddot{\zeta} - C)\,\delta c$$
$$+ \Big[\frac{d}{dt} S (y\dot{z} - z\dot{y})\,\mathfrak{D}m - U\Big]\,\delta u$$
$$+ \Big[\frac{d}{dt} S (z\dot{x} - x\dot{z})\,\mathfrak{D}m - V\Big]\,\delta v$$
$$+ \Big[\frac{d}{dt} S (x\dot{y} - y\dot{x})\,\mathfrak{D}m - W\Big]\,\delta w \Big\} \geqq 0$$

ahol a Σ jel a különböző merev testek szerint való összegelést jelent.

90. A merev testek virtuális érintkezési kényszere és külső kényszere. Beirandók a virtuális elmozdulások paraméteres kifejezései a merev testek esetleges érintkezéseiből származó kényszernek a virtuális relációiba is, valamint az esetleg még előforduló külső kényszer virtuális relációiba, amidőn azután ezek is a differenciálparaméterekre fognak vonatkozni. Ilyen alakúak lesznek pedig ezek

nyilvánképen:

$$\sum\{L\delta a + M\delta b + N\delta c + P\delta u + Q\delta v + R\delta w\} = 0$$

vagy:

$$\sum\{L\delta a + M\delta b + N\delta c + P\delta u + Q\delta v + R\delta w\} \geqq 0$$

mert a virtuális elmozdulások komponenseinek homogén lineáris relációiból származnak. A számuk áltálában végtelen nagy mert a merev testek fölületének mindazon elemére tartozik egy ilyen reláció, amelyen a merev testek egymással vagy a külső környezetük állományával érintkeznek.

Ezen relációk minden megoldásában teljesülnie kell a merev testek elvi egyenlőtlenségének, minek rendjén határozott relációk (egyenletek, egyenlőtlenségek) következnek a mekanikai problémák számára.

91, A merevségi kényszerek a tényleges mekanikai állapoton. Figyelembe kell vennünk az alkalmazások végett, hogy minden egyes merev test elemi részeinek a koordinátáit meghatározza a merev test hat helyzethatározója s elemi részeinek a tényleges sebességi komponenseit meghatározzák a merev test helyzethatározói és ezek tényleges változási sebességei (időderiváltjai) és így a merev test tömegcentrumának a tényleges sebességi komponenseit is a 87-ben előállitott kifejezések szerint minden egyes merev test számára, midőn is a helyzethatározók és ezek változási sebességei a különböző merev testeket illetőleg általában különbözők. Mihelyt minden egyes merev test elemi részeinek a koordinátáit és tényleges sebességi komponenseit kifejeztük (87 útmutatása szerint) az illető merev test helyzethatározói és ezek tényleges változási sebességei által, már a testek merevségét számbavettük, a tényleges mekanikai állapoton is; már ekkor minden további következtetésünk egyenesen merev testekre vonatkozik. A kifejtést azonban, különösen a második deriváltakon, célszerűen az egyes speciális alkalmazások számára tartjuk fenn.

92. A merev testek érintkezési kényszere és külső kényszere a tényleges mekanikai állapoton. Általában érintkeznek egymással a merev testek és érintkeznek valamely teleprendszerrel is és összeköttetésben vannak valamely kapcsoló rendszerrel. Egymással való érintkezésük kényszere a rendszerük belső kényszeréhez tartozik úgy mint ahhoz tartozik mindnyájuk merevsége. Teleprendszerből s kapcsolórendszerből származó kényszerük az ő rendszerük külső kényszere. Miután már számbavettük a merevségi kényszert a tényleges mekanikai állapoton is, most még hátra van, hogy ugyancsak a tényleges mekanikai állapoton számba vegyük a me-

rev testek érintkezési kényszerét és külső kényszerét, ami azáltal valósul meg, hogy a helyzethatározóknak ezen új kényszerektől való függéseit állapítjuk meg s erre általánosan elsőrendű differenciálegyenletek szolgálnak.

93. Belső szabaderők mellőzése. Minden egyes merev testben a reá nézve külső szabaderőket (39) szükséges csak figyelembe venni, mert merev testek rendszerén a virtuális munka törvénye (89) a szabaderőktől, ezeknek az egyes merev testekre háramló toló és forgató hatásai által függ csupán, már pedig egy anyagi rendszeren sincs az ő reá nézve belső szabaderőknek (39) sem toló, sem forgató hatásuk (40, 56). Azokat a belső szabaderőket szükséges csak számon tartani, tehát merev testek rendszerében, amelyek az egyes merev testekre „a többi merev testekből" hatnak, ami úgy értendő, hogy mindegyik merev test visel a többi merev testek tömegétől s elektromágneses állapotától függő hatásokat a maga tömegén s a maga elektromágneses állapotán (amely különben szintén függ a többi merev testek elektromágneses állapotától és viszont).

Merev testek mekanikai törvényei surlódástalan kényszerben.

94, Surlódástalan kényszer fölvétele. Eddig sohasem zártuk ki azt a természetrerűséget, hogy számottevő surlódásuk van (12) a merev testeknek egymás közt és a teleprendszerrel, amennyiben érintkeznek egymással s érintkeznek a teleprendszerrel. Ha pedig van surlódásuk ezen érintkezéseikben, akkor mozgásuk szabadsága korlátoltabb, mint ha nincs, az egymással s a teleprendszerrel való érintkezéseik kényszere a súrlódásban szigorúbb.

Most azonban olyan merev testeket és olyan teleprendszereket gondoljunk, a melyeknek az érintkezéséből, vizsgálódásunk időtartamára megengedhető hibával hagyhassuk figyelmen kívül a súrlódást.

Egyuttal a beszéd egyszerüsitése végett állapodjunk még abban, hogy a merev testek külső kényszerét és egymással érintkezésének a kényszerét (midőn például egy merev test egy másik merev testből kiálló csap vagy csukló körül foroghat, vagy egy hengeres merev test egy őt körülfogó merev test hengeres üregében csúszhat, vagy midőn két merev test változandó fölületelemben érintkezik mint megfeszült lánc szomszédos gyűrűi, stb.) e kétféle kényszert együttvéve röviden a merev testek kényszerének fogjuk mondani. Ezen értelemben ahhoz a föltevéshöz szegődünk most, hogy vizsgálódásunk időtartamára surlódástalannak tekinthetjük a merev testek kényszerét.

Akár surlódásos pedig akár nem valamely merev testek kényszere, tényleges kényszerüket (érintkezéseik tényleges kényszerét és tényleges külső kényszerüket), a határaik (= fölületeik) elemi részeinek a $(\partial x, \partial y, \partial z)$ lehetséges elemi elmozdulásai közt fennálló lineáris relációk (egyenletek, egyenlőtlenségek) határozzák meg általánosan. Surlódástalan kényszerben ezen relációk együtthatói az idő és a fölületelemek koordinátáinak határozott függvényei, tehát az idő és a helyzethatározók $(a', b', c', \vartheta, \varphi, \psi'$ féle paraméterek) határozott függvényei. Tekintettel pedig arra, hogy 83-ban $(\partial x, \partial y, \partial z)$ bármiféle elemi elmozdulásokat jelenthet, a merev testek tényleges kényszerének a relációi mindig a

$$\sum(\mathcal{L}\partial a + \mathcal{M}\partial b + \mathcal{N}\partial c + \mathcal{P}\partial u + \mathcal{Q}\partial v + \mathcal{R}\partial w) + \mathcal{E}dt = 0$$

vagy

$$\sum(\mathcal{L}\partial a + \mathcal{M}\partial b + \mathcal{N}\partial c + \mathcal{P}\partial u + \mathcal{Q}\partial v + \mathcal{R}\partial w) + \mathcal{E}dt \geqq 0$$

alakban állíthatók elő, s amikor surlódástalan a merev testek kényszere, akkor a $\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}, \mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{R}$ és $\mathcal{E}$ együtthatók csupán az idő és az $a', b', c', \vartheta, \varphi, \varphi'$-féle helyzethatározók szabott függvényei. A tényleges mozgásban (azaz $\partial x = dx$, $\partial y = dy$, $\partial z = dz$ mellett) az egyenlőtlenségek is egyenletileg teljesülnek (22) és éppen azáltal kerülnek elő a virtuális helyzetváltozásoknak a relációi (90-ben), hogy a tényleges elemi elmozdulások kényszeregyenleteit rendre kivonjuk a lehetséges elemi elmozdulások relációiból, minélfogva merev testek surlódástalan kényszerében a virtuális elmozdulások relációiban is az idő és a helyzethatározók szabott függvényei az együtthatók.

95. A virtuális munka általános törvénye merev testek surlódástalan kényszerében. Akár van surlódásuk merev testeknek az ő kényszerükben, akár nincs (a kapcsoló rendszerre tett kikötések folytonos fenntartásával 13 és 16 alól), a virtuális munka törvénye reájuk alkalmazva azt jelenti, hogy adott merev testeknek oly kényszere s mekanikai állapota meg oly szabad erők hatásai férhetnek csak össze, amelyek szerint a kényszer a merev testek rendszerén minden időelemben a lehető legkisebb munkát végzi. Ugyanis 19, 20, 26 nyomán ezt az állítást tartalmazza mint tapasztalati tételt 89, mert 89 baloldala a kényszer vir-

tuális munkája a merev testeken és bármely merev testek legyenek adva, azok minden kényszerére, mekanikai állapotára s minden reájuk ható szabaderőkre kiterjed 89-nek az egyenlőtlensége.

Midőn azonban surlódástalan valamely adva lévő merev testeknek a kényszere, akkor az is állítható mint tapasztalati tétel, hogy e merev testeknek mindazon kényszere, mekanikai állapota, meg minden oly szabaderők hatásai összeférnek, amelyek szerint a kényszer minden időelemben a lehető legkisebb munkát végezi.

Összefoglalva: adott merev testek oly kényszere, oly mekanikai állapota és oly szabaderők hatásai férnek össze, amelyek szerint a kényszer minden időelemben a lehető legkisebb munkát végzi, amelyek szerint tehát teljesül a kényszer virtuális munkájának az egyenlőtlensége. Merev testeken surlódástalan rendszerben ez a virtuális munka általános törvénye.

Megjegyzendő, hogy mindebben természetszerű merev testeket, természetszerű kényszert, mekanikai állapotot, szabad erőket kell gondolnunk. Példaként merev testek és teleprendszerek geometriai élekkel és csúcsokkal, mekanikai állapot matematikai végtelen gyors mozgásokkal, szabaderők matematikai végtelen nagy toló és forgató hatásokkal nem természetszerűek.

96, Értelmezések. Adott merev testek surlódástalan kényszerét adottnak mondjuk, ha külső kényszerük $\mathcal{L}, \dots, \mathcal{R}$ és $\mathcal{E}$-féle együtthatói (94) mint az időnek és a merev testek helyzethatározóinak a függvényei teljesen megvannak határozva vizsgálódásunk idejére és ha az is ki van szabva ezen időre, hogy mely merev testek és mi módon érintkezzenek egymással, midőn aztán a merev testek érintkezési kényszerének az $\mathcal{L}, \dots, \mathcal{R}$ és $\mathcal{E}$ együtthatói is teljesen meghatározvák, ugyanis fölületeik egyenletei által mint az idő és a helyzethatározók függvényei. Megjegyzendő, hogy itt minden tárgyalásunk egy bizonyos kényszerre terjed ki csak, úgy hogy folyvást ugyanazon kényszerrelációkra vonatkozik. Egyes kényszerrelációk megszűnése és új kényszerrelációk föllépése külön vizsgálódás alá tartoznak és a tárgyalásuk általában szinguláris tapasztalást is igényel.

Adott merev testeken adottnak mondjuk a szabaderők szállító és forgató hatásait ($\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ és $\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}$ 89-ben) ha ezek teljesen adott módon függenek az időtől, a helyzethatározóktól és a helyzethatározók változási sebességeitől (totális idő-deriváltjaiktól).

Adott merev testek mekanikai állapotát

véges nagy időtartamra adottnak mondjuk, ha teljesen advák azon időtartamra a helyzethatározóik, mint az idő függvényei.

Adott merev testek mekanikai állapotát egy pillanatra (időpontra) adottnak mondjuk, ha azon pillanatra adva van azok helyzete és mozgása, azaz ha adva vannak e pillanatra helyzethatározóiknak és ezek változási sebességeinek (totális időderiváltjainak) az értékei.

97. A mekanikai állapot határozottságának törvénye merev testek surlódástalan kényszerében. Mindig természetszerű adatokra gondolva, állitható mint tapasztalati tétel a 96 értelmében, hogy adott surlódástalan kényszerben, a szabad erők adott szállitó és forgató hatásai alatt, adott merev testek rendszere adott kezdeti mekanikai állapotot csak egy bizonyos módon folytathat.

Tiszta matematikai megfontolásokon következik, hogy merev testek surlódástalan kényszerében, azok mekanikai állapotának mindig annyi független egyenlete van, amennyi az állapothatározó, azaz hatszor annyi, amennyi a merev test. Ugyanolyan matematikai levezetés juttat ennek a fölismeréséhez, mint a megfelelő matematikai tételhez a tömegpontok mekanikájában. Hogy azonban mindig olyanok ezek az egyenletek, hogy a mondott föltételek alatt a helyzethatározóknak és a helyzethatározók időderiváltjainak adott kezdeti értékeihez minden időpontra teljesen határozott helyzetek tartoznak, ez tapasztalati eleme a kimondott törvénynek, amelyről csak annyi állítható, hogy minden eddigi tapasztalásunkkal egyezésben van.

98, Speciális tételek. A 95 és 97 alatt kimondott törvényekből könnyen megállapítható adott merev testek rendszerén, hogy ha surlódástalan kényszert viselnek, akkor helyzethatározóiknak a virtuális munka egyenlőtlenségéből folyó relációi és ugyanazoknak a mekanikai állapot kényszeréből folyó egyenletei, ha pedig szabadok (azaz 96 értelmében kényszert nem viselnek) a merev testek, akkor a virtuális munka egyenlőtlenségéből folyó relációk oly relációrendszert alkotnak, amely:
a) meghatározza a merev testek bármely természetszerűleg kivánt mekanikai állapotának szükséges és elégséges föltételeit, különösen pedig meghatározza nyugalomtartásuknak (megkezdett nyugalmuk folytatásának) a szükséges és elégséges föltételeit és meghatározza bármely előirt természetszerű mozgásuknak szükséges és elégséges föltételeit, b) akármely egyéb természetszerű

követeléshez meghatározza részint a megfelelő mekanikai állapotot vagy állapotokat, részint annak illetőleg azoknak a szükséges és elégséges föltételeit.

1. Példa. Anyagi rendszerünk egyetlen merev test, amely egészen szabad (csak a merevségi kényszert viseli, külső kényszert nem visel). Az elvi egyenlőtlenség egyetlen merev testre ez:

$$\left\{\begin{aligned}&(m\ddot{\xi}-A)\delta a+(m\ddot{\eta}-B)\delta b+(m\ddot{\zeta}-C)\delta c+\\&+\left\{\frac{d}{dt}S(y\dot{z}-z\dot{y})\mathfrak{D}m-U\right\}\delta u+\\&+\left\{\frac{d}{dt}S(z\dot{x}-x\dot{z})\mathfrak{D}m-V\right\}\delta v+\\&+\left\{\frac{d}{dt}S(x\dot{y}-y\dot{x})\mathfrak{D}m-W\right\}\delta w\geqq 0\end{aligned}\right.$$

A jelen példában a hat differenciálparametrum tetszésszerinti. Ebből folyólag mindanyi differenciálparametrum szorzójának el kell tünnie:

$$m\ddot{\xi}=A\,,\quad m\ddot{\eta}=B,\quad m\ddot{\zeta}=C$$

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{d}{dt}S(y\dot{z}-z\dot{y})\mathfrak{D}m=U\\&\frac{d}{dt}S(z\dot{x}-x\dot{z})\mathfrak{D}m=V\\&\frac{d}{dt}S(x\dot{y}-y\dot{x})\mathfrak{D}m=W\end{aligned}\right.$$

Ez a hat határozott egyenletünk van. Az első hármat a haladó mozgás egyenleteinek a másik hármat a forgó mozgás egyenleteinek fogjuk mondani. Odaértendő, hogy

$$A = S\mathfrak{D}X, \text{ stb.}, \; U = S(y\mathfrak{D}Z - z\mathfrak{D}Y), \text{ stb.}$$

Keressük elsősorban a nyugalomtartás szükséges és elégséges föltételeit. E föltételekhez azáltal jutunk el, hogy a helyzethatározók időderiváltjait zérusnak írjuk. Figyelembe vévén tehát azt az eshetőséget, hogy A, U, stb. ily időderiváltaktól is függhetnek, az utóbbiak zérus értékeihez tartozó értékeiket o indexel jelölve, most

$$A_0 = 0, \; B_0 = 0, \; C_0 = 0, \; U_0 = 0, \; V_0 = 0, \; W_0 = 0$$

a nyugalomtartás szükséges és elégséges föltétele, vagyis az, hogy a $(\mathfrak{D}X_0, \mathfrak{D}Y_0, \mathfrak{D}Z_0)$ szabaderőknek ne legyen a merev testen se toló, se forgató hatása. Ha ez teljesül, akkor és csak akkor tovább tart a szabad merev test megkezdett nyugalma.

Most vizsgáljuk a szabad merev test mozgásának azt az esetét, amelyben csak a nehézségi szabad erő hat. Ha koordinátarendszerünket a földhöz rögzitjük és a nehézségi szabadgyorsulás iránykoszinuszait α, β, γ-val jelöljük, akkor:

$$\mathfrak{D}X = \alpha g \mathfrak{D}m, \; \mathfrak{D}Y = \beta g \mathfrak{D}m, \; \mathfrak{D}Z = \gamma g \mathfrak{D}m$$

Következőleg A, B, C kifejezéseiből

$$A = mg\alpha,\quad B = mg\beta,\quad C = mg\gamma$$

a toló-hatás komponensei. Így tehát a haladó mozgás egyenletei szerint

$$\ddot{\xi} = g\alpha,\quad \ddot{\eta} = g\beta,\quad \ddot{\zeta} = g\gamma$$

vagyis a test tömegcentrumának a gyorsulása folyvást a nehézségi gyorsulással egyenlő. Ezen egyenletekből integrálással ösmeretes kifejezését kapjuk a mozgás sebességének és a helynek, mint az idő függvényének.

Hogy azonban a szabad merev test mozgását egészen megismerjük, ki kell még derítenünk, hogy miképp mozog a test a maga tömegcentruma körül. Erre a célra pedig még csak oly koordinátarendszerben szükséges meghatároznunk a test mozgását, amelynek origója a test tömegcentrumában van, s a tengelyei a régi tengelyekkel egyező irányúak. Ezentúl ez új koordinátarendszerben fogjuk x, y, z-vel jelölni az elemi részek koordinátáit, mihez képest a forgó mozgás egyenleteiben (természetesen U, V, W kifejezéseiben is) x, y, z helyett $\xi + x$, $\eta + y$, $\zeta + z$ tesszük (ξ, η, ζ eddigi jelentményével). Ha figyelembe vesszük, hogy az új x, y, z rendszer origója a test tömegcentrumában van, tehát $S x\, \mathfrak{D}m = 0$, $S y\, \mathfrak{D}m = 0$, $S z\, \mathfrak{D}m = 0$, akkor tekintettel a $\mathfrak{D}X = \alpha g\, \mathfrak{D}m$, stb.

meg a $\ddot{\xi} = g\alpha$ stb. egyenletekre, azt találjuk (miután t.i. már $\xi + x$, $\eta + y$, $\zeta + z$ van x, y, z helyett a forgó mozgás egyenleteiben), hogy az új koordinátarendszerben

$$\frac{d}{dt} S(y\dot{z} - z\dot{y})\,\mathfrak{D}m = 0\,, \quad \frac{d}{dt} S(z\dot{x} - x\dot{z})\,\mathfrak{D}m = 0,$$

$$\frac{d}{dt} S(x\dot{y} - y\dot{x})\,\mathfrak{D}m = 0$$

Ezekből, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ integrációs konstansok szerint:

$$S(y\dot{z} - z\dot{y}) = \mathcal{F}, \; S(z\dot{x} - x\dot{z}) = \mathcal{G}, \; S(x\dot{y} - y\dot{x}) = \mathcal{H}$$

a forgó mozgás egyenletei

Forduljunk már most 87-nek az

$$\dot{x} = \dot{\xi} + (z - \zeta)\,\dot{v} - (y - \eta)\,\dot{w}, \text{ stb.}$$

kifejezéseihez. Ezekben jelenleg $(\xi, \eta, \zeta) = 0$, mert jelenleg az orgó a tömegcentrumban van. Ezerint most

$$\dot{x} = z\dot{v} - y\dot{w}, \quad \dot{y} = x\dot{w} - z\dot{u}, \quad \dot{z} = y\dot{u} - x\dot{v}$$

behelyettesítésük után a következő alakban jelennek meg a forgó mozgás új egyenletei:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_x \dot{u} - \mathcal{D}_z \dot{v} - \mathcal{D}_y \dot{w} &= \mathcal{F} \\ -\mathcal{D}_z \dot{u} + \mathcal{J}_y \dot{v} - \mathcal{D}_x \dot{w} &= \mathcal{G} \\ -\mathcal{D}_y \dot{u} - \mathcal{D}_x \dot{v} + \mathcal{J}_z \dot{w} &= \mathcal{H} \end{aligned}$$

ahol $\mathcal{J}_x, \mathcal{J}_y, \mathcal{J}_z$ a merev test inercia momentumai, $\mathcal{D}_x, \mathcal{D}_y, \mathcal{D}_z$, a merev test deviáció momentumai a koordináta tengelyek (az új koordinátatengelyek) körül. Általában az idővel változó mennyiségek ezek, mert az idővel változó koordinátákat tartalmazzák. Fejezzük ki őket azonban azon állandó inercia- és deviációmomentumok révén, melyek a merev testhez rögzitett koordinátatengelyekre tartoznak. Ha a merev testhez rögzitett tengelyekre a merev test inerciamomentumait rendbe $\mathcal{J}_1$ $\mathcal{J}_2$, $\mathcal{J}_3$ jelölik és ha egyszerűség kedvéért úgy választottuk a merev testhez rögzitett tengelyrendszert, hogy origója szintén a tömegcentrumban legyen, tengelyei pedig az origói inerciaellipszoid főtengelyei legyenek, akkor 77 és 78 szerint a következő kifejezéseink vannak:

$$\mathcal{J}_x = \mathcal{J}_1 \alpha_1^2 + \mathcal{J}_2 \alpha_2^2 + \mathcal{J}_3 \alpha_3^2 \text{ stb.}$$

$$\mathcal{D}_x = -(\mathcal{J}_1 \beta_1 \gamma_1 + \mathcal{J}_2 \beta_2 \gamma_2 + \mathcal{J}_3 \beta_3 \gamma_3) \text{ stb.}$$

mert 74 értelmében az inerciaellipszoid főtengelyei körül eltünnek a test deviációmomentumai. Helyettesitsük be ezeket a kifejezéseket a forgómozgás egyenleteibe s azután rendezzük az egyenleteket az inerciamomentumok szerint. Erre a következő alakban jelennek meg azon egyenletek:

$$\begin{aligned} &\mathcal{J}_1 \alpha_1 (\alpha_1 \dot{u} + \beta_1 \dot{v} + \gamma_1 \dot{w}) \\ + &\mathcal{J}_2 \alpha_2 (\alpha_2 \dot{u} + \beta_2 \dot{v} + \gamma_3 \dot{w}) \\ + &\mathcal{J}_3 \alpha_3 (\alpha_3 \dot{u} + \beta_3 \dot{v} + \gamma_3 \dot{w}) = \mathcal{F}, \text{ stb.} \end{aligned}$$

De jelöljük meg a zárjelek tartalmát röviden u', v', w'-el, azaz írjuk, hogy

$$(a) \quad \begin{cases} u' \equiv \alpha_1 \dot{u} + \beta_1 \dot{v} + \gamma_1 \dot{w} \\ v' \equiv \alpha_2 \dot{u} + \beta_2 \dot{v} + \gamma_3 \dot{w} \\ w' \equiv \alpha_3 \dot{w} + \beta_3 \dot{v} + \gamma_3 \dot{w} \end{cases}$$

Nyilvánvaló, hogy u', v', w' nem mások, mint az $(\dot{u}, \dot{v}, \dot{w})$ szögsebesség komponensei a testhez rögzített x', y', z' rendszerben, úgy hogy ebben a rendszerben az (u', v', w') vektor nem más, mint az $(\dot{u}, \dot{v}, \dot{w})$ szögsebesség ellentétben az (x', y', z') rendszerbe tartozó szögsebességével a merev testnek, amely $= 0$. Most már forgási egyenleteink ezekbe mennek át:

$$(b)\quad \begin{cases} J_1 u' \alpha_1 + J_2 v' \alpha_2 + J_3 w' \alpha_3 = \mathcal{F} \\ J_1 u' \beta_1 + J_2 v' \beta_2 + J_3 w' \beta_3 = \mathcal{G} \\ J_1 u' \gamma_1 + J_2 v' \gamma_2 + J_3 w' \gamma_3 = \mathcal{H} \end{cases}$$

Az $(\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H})$ konstans vektorra tegyük itt azt az észrevételt, hogy ha kezdetben $(\dot{u}, \dot{v}, \dot{w})$ zérus, akkor (a) miatt (u', v', w') kezdetben szintén zérus lévén, az $(\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H})$ konstans vektor (b) szerint zérus. Már pedig ha $(\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}) = 0$, akkor (b)-ből folyólag $(J_1 u', J_2 v', J_3 w')$ mindig zérus, tehát (u', v', w') is mindig zérus, tehát (a) miatt $(\dot{u}, \dot{v}, \dot{w})$ is mindig zérus, tehát nincs mozgás a tömegcentrum körül. Ez az eset el lévén intézve, tegyük fel most már, hogy az $(\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H})$ konstans vektor nem zérus. Válasszuk meg pedig ekkor úgy az x, y, z koordinátarendszer fekvését az ő origója körül, hogy a z tengely egyező irányú legyen az $(\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H})$ vektorral. Most $\mathcal{F} = 0$, $\mathcal{G} = 0$, $\mathcal{H} > 0$ mihez képest (b) alatt írt egyenleteink a következő alakban jelentkeznek:

$$J_1 u'\alpha_1 + J_2 v'\alpha_2 + J_3 w'\alpha_3 = 0$$
$$J_1 u'\beta_1 + J_2 v'\beta_2 + J_3 w'\beta_3 = 0$$
$$J_1 u'\gamma_1 + J_2 v'\gamma_2 + J_3 w'\gamma_3 = \mathcal{H} > 0$$

Ezekből egyszerűbbeket kapunk azáltal, hogy rendre megszorozzuk őket egyízben $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$-el, másízben $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$-vel s ismét más ízben $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$-al s azután összeadjuk őket. E módon a következő három egyenlet származik:

(C) $\qquad J_1 u' = \mathcal{H}\gamma_1, \quad J_2 v' = \mathcal{H}\gamma_2, \quad J_3 w' = \mathcal{H}\gamma_3$

Fejezzük pedig ki ez egyenletekben a $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ iránykoszinuszokat az Euler-féle szögekkel a 80 alól és kapjuk, hogy

$$(A) \quad \begin{cases} J_1 u' = \mathcal{H} \sin\vartheta \cos\varphi' \\ J_2 v' = \mathcal{H} \sin\vartheta \sin\varphi' \\ J_3 w' = \mathcal{H} \cos\vartheta \end{cases}$$

Továbbá az (u', v', w') vektornak az (a) alatti kifejezéseibe is vezessük be az Euler-féle szögeket. Egyszerű módon fejlik ki ezen eljárásunk, ha előbb csak u, v, w 87 alatti kifejezéseit vezetjük be (a)-ba, azután elvégezünk bizonyos maguktól kínálkozó redukciókat s azután írjuk be az iránykoszinuszok Euler-féle kifejezéseit. A következő eredményhez jutunk:

$$(B) \quad \begin{cases} u' = \sin\varphi' \dot{\vartheta} + \sin\vartheta \cos\varphi' \dot{\varphi} \\ v' = -\cos\varphi' \dot{\vartheta} + \sin\vartheta \sin\varphi' \dot{\varphi} \\ w' = -\dot{\varphi}' + \cos\vartheta \dot{\varphi} \end{cases}$$

Ha a (B) alatti értékeket bevezetjük az (A) alatti egye letekbe, akkor három elsőrendű totális differenciálegyenletünk lesz az Euler-féle szögek számára. Azonban ezt a közvetlen eljárást csak arra az esetre fogjuk alkalmazni, hogy az origói inercia-ellipszoid forgás ellipszoid. Arra az esetre, hogy az origói inercia ellipszoid nem forgás ellipszoid, indirekt módszert követünk.

Az első esetben az J_1, J_2, J_3 inercia-momentumoknak legalább ketteje egyenlő. De ha csak kettejük egyenlő is, akkor is meg lehet osztani úgy a testhez vött (x', y', z') koordinátatengelyeket az origói inerciaellipszoid főtengelyei között, hogy $J_2 = J_1$ legyen. Emellett lehet $J_3 \gtreqless J_1$. Ezúttal az (A)-ból és (B)-ből eliminálván az u', v', w' komponenseket, az Euler-féle szögek egyenletei ezen alakokban állíthatók elő:

$$\dot{\vartheta} = 0, \quad \left(\dot{\varphi} - \frac{H}{J_1}\right) \sin\vartheta = 0,$$

$$\left(\dot{\varphi} - \frac{H}{J_3}\right) \cos\vartheta = \dot{\varphi}', \quad (J_2 = J_1)$$

Ha kezdetben $\vartheta = \vartheta_0$, akkor az első egyenletnél fogva ϑ mindig $= \vartheta_0$. Mikor tehát ϑ_0 nem zérus, és nem π, akkor a

$$\begin{cases} \vartheta = \vartheta_0, \quad \dot{\varphi} = \dfrac{H}{J_1}, \quad \dot{\varphi}' = \dfrac{J_3 - J_1}{J_3} \dot{\varphi} \cos\vartheta_0 \\ (\sin\vartheta_0 \neq 0) \end{cases}$$

egyenleteink vannak. A 80 értelmében rendre könnyen felismerhető ezeken, hogy a z' tengely (itt az J_3 inerciamomentum tengelye) z tengelyű 2ϑ nyílású origói forgáskúpon tartózkodik; a z' tengely ezen a kúpon a z tengely körül állandó $\frac{H}{J_1}$ szögsebességgel forog; ha $J_3 \gtrless J_1$ akkor az x' tengely s úgy az egész test is a z' tengely körül

$$-\frac{J_3 - J_1}{J_3}\dot{\varphi}\cos\vartheta_0$$

szögsebességgel forog, ha azonban $J_3 = J_1$, akkor ez a forgás elmarad. A $\dot{\varphi}$ mekkoraságát H révén tetszés szerint szabhatjuk meg s csak azért pozitív, mert a z tengelyt az eleve tetszés szerint adható (F, G, H) vektor irányába tettük, tehát nem jelent az megszorítást. Ha kezdetben $\vartheta_0 = 0$ vagy $\vartheta_0 = \pi$ akkor három egyenletünk ebbe a kettőbe szakad:

$$\cos\vartheta = \pm 1\,, \quad \dot{\varphi} \mp \dot{\varphi}' = \frac{H}{J_3}$$

De $\vartheta = 0$ vagy $\vartheta = \pi$ és $\varphi - \varphi'$-nek, illetőleg $\varphi + \varphi'$-nek az ismerete elég is a helyzetkatározásra. Tudjuk ezt 80-ból, ahonnan a $\varphi \mp \varphi'$ mindig z-tengelyű forgásszöget jelent, tehát $\dot{\varphi} \mp \dot{\varphi}'$ a test z tengelyű szögsebessége. Eszerint: ha $J_2 = J_1$ és ha kezdetben ϑ értéke 0 vagy π, akkor ϑ értéke mindig 0 vagy π és a test $\frac{H}{J_3}$ állandó szögsebességgel forog a z tengely körül, amely tengely most az J_3 inerciamomentumnak is tengelye.

Hogy csak pozitív lehet ez a szögsebesség ($H > 0$ miatt), az onnan van, hogy az tengelyt eredeti koordinátarendszerünknek az (F, G, H) konstáns vektorával egyező irányúvá tettük; minthogy az (F, G, H) vektor tetszésszerint adható, úgy az tengelyű forgás egyoldalúsága nem jelent megszorítást. Ha J_3 is $= J_1$, akkor természetesen akármelyik origói tengely tekinthető az J_3 inercia momentum tengelyének a testben, tehát $\sin \vartheta$ eltűnéséhez tartozó forgástengelynek.

A második esetben J_1, J_2, J_3 különbözők. Ekkor az (A) és (B) egyenletekből az u', v', w' eliminálásával származó egyenletek kissé nehézkesek s azért célszerű lesz más eljárást követni. Módunkban van, hogy az (A) és (B) egyenletekből infinitezimális úton elimináljuk az Euler-féle szögeket. Hogyha ugyanis az (A) alattiakat deriváljuk, kapunk még három egyenletet. Lesz összesen kilenc egyenletünk s ezekből $\vartheta, \varphi, \varphi', \dot{\vartheta}, \dot{\varphi}, \dot{\varphi}'$ hat mennyiség három független módon eliminálható. Ezáltal három független differenciál-egyenlethez jutunk u', v', w' számára, amelyekben ezeken a változókon kívül más változó nem lesz. Meghatároztatván pedig e három új differenciál-egyenletből az u', v', w': azután már az (A) alatti harmadik egyenletből következik ϑ és ha $\sin\vartheta$ nem zérus, az (A) alatti másik két egyenletből φ' következik, azután a (B) alatti egyenletekből kvadraturával a φ.

A $\sin\vartheta$ maradandó eltünésének esetén 80 értelmében csak $\varphi \mp \varphi'$ ismerete szükséges és ezt kvadraturával (B) harmadik egyenlete megadja. Az eliminálást legegyszerűbben azon kezdjük, hogy az (A) deriválásával nyert egyenletekből elimináljuk a (B) egyenletek segélyével a szögek deriváltjait. Ezt megtéve, a kínálkozó összevonások után már (A) figyelembe vételével nyomban fölírhatjuk az eliminálás végső eredményét és pedig:

$$
(\mathrm{I}) \quad \begin{cases} J_1 \dfrac{du'}{dt} = (J_2 - J_3)\, v'w' \\[2ex] J_2 \dfrac{dv'}{dt} = (J_3 - J_1)\, w'u' \\[2ex] J_3 \dfrac{dw'}{dt} = (J_1 - J_2)\, u'v' \end{cases}
$$

Egy integráljukat azonnal megkapjuk, ha rendre $J_1 u'$, $J_2 v'$, $J_3 w'$-vel szorozva összeadjuk őket, de ezen integráljuk rövidesen (A)-ból is kiadódik, még pedig kész integrációs konstanssal, ugyanis azáltal, hogy (A)-ban a bal és jobboldalokat négyzetre emelve összeadjuk, a H integrációs konstanssal kapjuk, hogy

$$
(\mathrm{I})_0 \qquad J_1^2 u'^2 + J_2^2 v'^2 + J_3^2 w'^2 = H^2
$$

Ha (I) harmadik egyenletét átszorozzuk w'-vel és átosztjuk $(J_1 - J_2)$-vel, második egyenletét pedig átszorozzuk v'-vel és átosztjuk $(J_3 - J_1)$-vel, aztán az ilyképen nyert egyenleteket kivonjuk egymásból, akkor szintén azonnal integrálható egyenlethez jutunk és nemkülönben, ha hasonlóan járunk el az első és harmadik, meg a második és első differenciálegyenleten.

Az (I) általános megoldását teljesen kifejtve elliptikus függvények teszik. Az origói inerciaellipszoid főtengelyein oly sorrendben helyezzük el a testhez rött (x', y', z') tengelyeket, hogy

$$J_1 < J_2 < J_3, \text{ vagy } J_1 > J_2 > J_3$$

legyen. A kétféle választás szerint a felső vagy alsó előjelekkel azt írván, hogy

$$\pm \frac{J_3 - J_2}{J_1} \equiv N_1^2, \pm \frac{J_3 - J_1}{J_2} \equiv N_2^2, \pm \frac{J_2 - J_1}{J_3} \equiv N_3^2,$$

a következő kifejezések jelentkeznek mint (I) általános megoldása (a fölső vagy alsó előjelekkel az J_1, J_2, J_3 nagyságviszonyának kétféle megválasztása szerint):

$$(\mathrm{II}) \quad \begin{cases} u' = \dfrac{\pm k}{N_2 N_3 T} \operatorname{cn}\left(\dfrac{t}{T} + \varepsilon\right), \\ v' = \dfrac{\pm k}{N_3 N_1 T} \operatorname{sn}\left(\dfrac{t}{T} + \varepsilon\right), \quad \text{mod. ell.} \equiv |k| \\ w' = \dfrac{\pm 1}{N_1 N_2 T} \operatorname{dn}\left(\dfrac{t}{T} + \varepsilon\right) \end{cases}$$

ahol k, $\mathfrak{T}$, ε az integrálás konstánsái. Összesen négy integrációs konstánsunk van ugyan ($\mathcal{H}$, k, $\mathfrak{T}$, ε) de a $\mathcal{H}$ konstanst a többi három teljesen meghatározza $(\mathrm{I})_0$-ból, ugyanis beirván $(\mathrm{I})_0$-ba (II) kifejezéseit, azt kapjuk ($cn^2 + sn^2 = 1$ és $k^2 sn^2 + \mathfrak{d}n^2 = 1$ segélyével), hogy

$$(\mathrm{II})_0 \qquad \mathcal{H}^2 = \frac{k^2 N_1^2 \mathfrak{I}_1^2 + N_3^2 \mathfrak{I}_3^2}{N_1^2 N_2^2 N_3^2 \mathfrak{T}^2}$$

Az alkalmazások érdekében matematikai föltétel, hogy $k^2 \leqq 1$ legyen. Erre nézve látni fogjuk most, hogy az origói inerciaellipszoid legkisebb és legnagyobb tengelyét mindig módunkban áll úgy osztani ki, az x' és z' tengelyek között, hogy k^2 ne legyen nagyobb az egységnél. A (II)-ből a $cn^2 + sn^2 = 1$ és $k^2 sn^2 + \mathfrak{d}n^2 = 1$ vonatkozásokon kikövetkeztethetjük, hogy:

$$k^2 = \frac{N_3^2}{N_1^2} \cdot \frac{N_2^2 u'^2 + N_1^2 v'^2}{N_2^2 w'^2 + N_3^2 v'^2}$$

Ha mármost (u', v', w') kezdeti értékéből az hdramlanék k-ra, hogy $k^2 > 1$, akkor fordítsuk el az (x', y', z') koordinátarendszert a testben az y' tengely körül derékszög alatt. Ennek következtében u'^2 és w'^2 kicserélődik, N_1^2, N_2^2, N_3^2 pedig rendre a $-N_3^2, -N_2^2, -N_1^2$ értéket veszi fel (mint definiciójuk mutatja), tehát k^2 helyébe ennek a reciprokja kerül s ily képen az új mod. ell. az egységnél kisebb.

Láthatjuk (II)-ből, hogy $\sin\vartheta$ csak úgy lehet zérus, ha $k=0$, mert ha $\sin\vartheta$ eltűnik, akkor (A) szerint u' és v' is eltűnik, ami (annálfogva, hogy $sn^2+cn^2=1$) csak úgy lehetséges, hogy $k=0$. Ha mármost $\sin\vartheta$ kezdetben nem zérus, akkor később sem zérus, és úgy ϑ-nak 0-tól és π-től különböző minden kezdeti értékéhez teljesen meghatározzák (II) alapján az (A) és (B) egyenletek az Euler-féle szögeket. A ϑ és φ' szöget direkte adja (A):

$$
(\mathrm{III})\quad \begin{cases} \cos\vartheta = \dfrac{J_3}{H}w', & \sin\vartheta = \dfrac{\sqrt{J_1^2u'^2+J_2^2v'^2}}{H} \\[2ex] \cos\varphi' = \dfrac{J_1u'}{\sqrt{J_1^2u'^2+J_2^2v'^2}}, & \sin\varphi' = \dfrac{J_2v'}{\sqrt{J_1^2u'^2+J_2^2v'^2}}; \end{cases}
$$

a φ szöget pedig most már (B)-ből kvadratúrával kapjuk, amely célra (B) első egyenletét $\cos\varphi'$-vel, második egyenletét $\sin\varphi'$-vel szorozva összeadjuk, aztán $\cos\varphi'$, $\sin\varphi'$, $\sin\vartheta$ itteni kifejezéseit beirjuk, aminek

$$
(\mathrm{IV})\qquad \dot\varphi = H\,\frac{J_1u'^2+J_2v'^2}{J_1^2u'^2+J_2^2v'^2}
$$

az eredménye. – Ha kezdetben ϑ vagy 0 vagy π, akkor (A) miatt kezdetben u' és v' eltűnik, tehát (II) két első kifejezése szerint $k=0$, tehát ugyanazon kifejezések szerint u' és v' mindig zérus, tehát (A) miatt ϑ mindig 0 vagy mindig π. Ekkor φ és φ' számára ~~csak~~ annyi következzik, hogy

$$\dot{\varphi} \pm \dot{\varphi}' = \frac{H}{J_3}$$

ami (A) és (B) harmadik egyenletéből származik. Amde $\sin\vartheta$ állandó eltűnésén $\varphi \pm \varphi'$ meghatározása kell csak a helyzethatározásra (80), ami most azzal adódik, hogy a test a z tengely körül és úgy ($\sin\vartheta = 0$ értelmében) az origói inerciaellipszoid legkisebb vagy legnagyobb tengelye körül $\frac{H}{J_3}$ szögsebességgel forog. Hogy ez a szögsebesség pozitív, az nem jelent megszorítást, mert a z tengelyt az eredeti koordinátarendszernek (F, G, H) vektorával egyező irányba vettük, amely vektor integrációs konstans lévén, tetszés szerint adható.

Végül tegyük azt az észrevételt, hogy $\sin\vartheta$-nak (III.)-ban lévő kifejezéséből (II) szerint, (I). figyelembe vételével:

$$\sin^2\vartheta = k^2 \frac{J_1^2 N_1^2 + J_3^2 N_3^2 \, sn^2\left(\frac{t}{T} + \varepsilon\right)}{k^2 J_1^2 N_1^2 + J_3^2 N_3^2}$$

Következőleg a

$$k^2 \frac{2 J_1^2 N_1^2}{k^2 J_1^2 N_1^2 + J_3^2 N_3^2} \quad \text{alsó és}$$

$$k^2 \frac{J_1^2 N_1^2 + J_3^2 N_3^2}{k^2 J_1^2 N_1^2 + J_3^2 N_3^2} \quad \text{felső}$$

határok közt változik $\sin^2\vartheta$. Különösen pedig, ha kezdetben igen kicsiny a ϑ vagy igen kicsivel kisebb, mint π, akkor mindig is az, mert szükségképen igen kicsiny azon esetben a $|k|$ modulusz; erre való tekintettel a test origói inercia ellipszoidjának legkisebb és legnagyobb tengelyét a test stabilis forgástengelyének mondjuk és ha azon ellipszoid forgási ellipszoid, akkor a test stabilis forgástengelyének az ellipszoid forgási tengelyét mondjuk, mert ha kezdetben kis szögön hajlik a z tengelyhez, akkor mindig is kis szögön hajlik ahhoz annálfogva, hogy $J_2 = J_1$ esetén a ϑ állandó mint fönt láttuk.

2. Példa. Anyagi rendszerünk egy merev test, amelynek egy pontja rögzitve van koordinátarendszerünkben, de e pontja körül szabadon foroghat az.

Ha e rögzitett pont koordinátái x_0, y_0, z_0, akkor most a merev test a merevségi kényszeren kivül azt a kényszert is viseli, hogy x_0, y_0, z nem változhatnak és így a testnek egyszersmind azon virtuális külső kényszere van, hogy x_0, y_0, z_0 virtuálisan nem változhatnak. Akár lehetséges akár valóságos, akár virtuális megváltozást jelentsen tehát a δ jegy, ezuttal

$$\delta x_0 = 0, \; \delta y_0 = 0, \; \delta z_0 = 0$$

De más megszoritás nincs. A differenciál parametrumokkal fejezve ki:

$$\delta a + z_0 \delta v - y_0 \delta w = 0 \text{ stb}$$

Azonban helyezzük az origót a rögzités pontjába. Akkor egyszerüen

(o) $\quad \delta a = 0, \ \delta b = 0, \ \delta c = 0$

fejezik ki a rögzitést. Ellenben δu, δv, δw nem visel semmi megszoritást. Következőleg a virtuális munka egyenlőtlenségéből:

(a) $$\frac{d}{dt} S(y\dot{z} - z\dot{y}) = U \text{ stb.}$$

A tényleges mekanikai állapot külső kényszerét (o) szerint $\dot{a} = 0$, $\dot{b} = 0$, $\dot{c} = 0$ fejezik ki (mert δ lehet ott d is). Ennélfogva a merevségi kényszert és a külső kényszert együttesen számon tartják a tényleges mekanikai állapoton az

(b) $\quad \dot{x} = z\dot{v} - y\dot{w}$, stb.

kifejezések.

Az (a)-ból közvetlenül látható, hogy megkezdett nyugalom folytatásának szükséges és elégséges föltétele, hogy a szabaderőknek ne legyen origói forgató hatása. Ha pedig mozgás közben nincs a szabaderőknek origói forgató hatása, akkor (a)-ból és (b)-ből a forgó mozgás előbbi tárgyalásához jutunk nyilvánképen vissza, jóllehet most az origó általában nincs a tömegcentrumban, mert általában nem a tömegcentrum van rögzitve.

Irjuk be (a)-ba (b)-ből a sebességi komponensek kifejezéseit, aztán végezzük el a deriválásokat. Most is $S(y^2+x^2)\mathfrak{D}m \equiv \mathfrak{I}_x$, $S\, yz\mathfrak{D}m \equiv \mathfrak{D}_x$, stb írva, azt kapjuk, hogy

$$\mathfrak{I}_x \ddot{u} - \mathfrak{D}_z \ddot{v} - \mathfrak{D}_y \ddot{w} + \dot{\mathfrak{I}}_x \dot{u} - \dot{\mathfrak{D}}_z \dot{v} - \dot{\mathfrak{D}}_y \dot{w} = \mathfrak{U}, \text{ stb.}$$

Az $\mathfrak{I}_x, \mathfrak{D}_x$, stb momentumok deriváltjai.

$$\dot{\mathfrak{I}}_x = 2\, S(y\dot{y}+z\dot{z})\mathfrak{D}m,\ \dot{\mathfrak{D}}_x = S(y\dot{z}+z\dot{y})\mathfrak{D}m, \text{ stb.}$$

Ide is beírva a (b) kifejezéseit, ezen egyenleteink lesznek:

$$\mathfrak{I}_x \ddot{u} + (\mathfrak{I}_z - \mathfrak{I}_y)\dot{v}\dot{w} + \mathfrak{D}_x(\dot{w}^2 - \dot{v}^2) - \mathfrak{D}_y(\ddot{w} + \dot{u}\dot{v})$$
$$- \mathfrak{D}_z(\ddot{v} - \dot{u}\dot{w}) = \mathfrak{U}, \text{ stb.}$$

A testhez rótt koordinátarendszer origóját is a rögzitett pontba téve célszerü, hogy az $(\dot{u}, \dot{v}, \dot{w})$ origói szögsebességnek a testhez rótt koordináta rendszerbe tartozó komponenseit alkalmazzuk az eredetibe tartozó $\dot{u}, \dot{v}, \dot{w}$ helyett, az $u' = \alpha_1 \dot{u} + \beta_1 \dot{v} + \gamma_1 \dot{w}$, stb. komponenseket, amelyek 80-ból és 87-ből az Euler-féle szögekkel definiálva a következők:

$$(\mathrm{I}) \quad \begin{cases} u' = \sin\varphi' \cdot \dot{\vartheta} + \sin\vartheta \cdot \cos\varphi' \cdot \dot{\varphi} \\ v' = -\cos\varphi' \cdot \dot{\vartheta} + \sin\vartheta \sin\varphi' \cdot \dot{\varphi} \\ w' = -\dot{\varphi}' + \cos\vartheta \cdot \dot{\varphi} \end{cases}$$

Az $\dot{u}, \dot{v}, \dot{w}$ komponensek számára levezetett differenciál egyenletekből úgy jutunk el legegyszerübben az u', v', w' komponensek differenciálegyenleteihez, hogy az eredeti koordinátarendszer tengelyeit egy időpontra a testhez rótt koordináta rendszer tengelyeiben fekvőkül képzeljük, amely képzeletünkben $(\dot{u}, \dot{v}, \dot{w})$ egyenlő (u', v', w')-vel, $\mathfrak{I}_x\ \mathfrak{D}_x$ stb a testhez rött tengelyekre tartozó inercia- és deviációmomentumokkal egyenlők és U, V, W helyét

$$(\mathrm{II})\quad \begin{cases} U' = \alpha_1 U + \beta_1 V + \gamma_1 W \\ V' = \alpha_2 U + \beta_2 V + \gamma_2 W \\ W' = \alpha_3 U + \beta_3 V + \gamma_3 W \end{cases}$$

foglalják el, amelyek az eredeti koordinátarendszerben ható szabaderők forgatómomentumának a testhez rött koordinátarendszerbe tartozó komponensei. A testhez rött koordinátarendszerben $J_1, J_2, J_3, D_1, D_2, D_3$ jelöljék az inercia- és deviációmomentumokat a koordinátatengelyek körül, midőn is új egyenleteink a következők:

$$(\mathrm{III})\quad \begin{cases} J_1\dot{u}' + (J_3 - J_2)v'w' + D_1(w'^2 - v'^2) - D_2(\dot{w}' + u'v') - D_3(\dot{v}' - u'w') = U' \\ J_2\dot{v}' + (J_1 - J_3)w'u' + D_2(u'^2 - w'^2) - D_3(\dot{u}' + v'w') - D_1(\dot{w}' - v'u') = V' \\ J_3\dot{w}' + (J_2 - J_1)u'v' + D_3(v'^2 - u'^2) - D_1(\dot{v}' + w'u' - D_2(\dot{u}' - w'v') = W' \end{cases}$$

Tekintettel (I)-re és (II)-re az Euler-féle szögek másodrendű totális differenciálegyenleteit jelentik (III) egyenletei. Azon formális előnyük van az eredeti differenciálegyenletek fölött, hogy baloldalaik együtthatói (J_1, D_1 stb.) konstansok. (Arra a speciális esetre, hogy U, V, W eltűnnek: az origói inercia-ellipszoid főtengelyeire fektetett x', y', z' tengelyek körül az előbbi példa (I) alatt írt egyenleteivé válnak ezen egyenletek, mint előre is látható.)

Hogy lássuk ezek egy kis alkalmazását is, vizsgáljuk meg azt a kérdést, hogy miképen és mely föltételek alatt forog állandó tengely körül a test?

Természetesen ez a tengely csak a test rögzített pontján s így az origón átfektetett tengely lehet. Helyezzük ebbe eredeti koordinátarendszerünk z tengelyét. Ugyanezt a testhez rött z' tengellyel is megtehetjük nyilvánvalólag s ha megtettük, akkor már egyenleteinket a föltett kérdéshez illesztettük. A z' tengelyt a z tengellyel egyezővé rendeljük, midőn is $\vartheta=0$ és, ha $\varphi-\varphi'=\pi+\tilde{\omega}$ írjuk, akkor (80)-ból

$$\begin{cases} \alpha_1=\cos\tilde{\omega}, & \beta_1=\sin\tilde{\omega}, & \gamma_1=0 \\ \alpha_2=-\sin\tilde{\omega}, & \beta_2=\cos\tilde{\omega}, & \gamma_2=0 \\ \alpha_3=0, & \beta_3=0, & \gamma_3=1 \end{cases}$$

úgy, hogy $\tilde{\omega}$ = forgásszöge az x' tengelynek a z (és z') tengely körül az x tengely felől számítva (pozitív elfordulásban pozitívnak, negatív elfordulásban negatívnak). Az (I) alól ($\vartheta=0$ és $\varphi-\varphi'=\pi+\tilde{\omega}$ szerint):

$$u'=0, \quad v'=0, \quad w'=\dot{\tilde{\omega}}$$

A (II) alól pedig (az iránykoszinuszok kifejezései szerint):

$$U'=U\cos\tilde{\omega}+V\sin\tilde{\omega}, \quad V'=-U\sin\tilde{\omega}+V\cos\tilde{\omega}, \quad W'=W$$

Ezek figyelembe vételével a következő egyenletekben adja meg (III) a föltett kérdésre a választ

$$\mathfrak{D}_1\dot{\tilde{\omega}}^2-\mathfrak{D}_2\ddot{\tilde{\omega}}=U\cos\tilde{\omega}+V\sin\tilde{\omega}$$

$$\mathfrak{D}_2\dot{\tilde{\omega}}^2-\mathfrak{D}_1\ddot{\tilde{\omega}}=U\sin\tilde{\omega}-V\cos\tilde{\omega}$$

$$\mathfrak{I}_3\ddot{\tilde{\omega}}=W$$

azaz:

$$\begin{cases} \mathfrak{I}_3\ddot{\tilde{\omega}}=W \\ U=(\mathfrak{D}_1\cos\tilde{\omega}+\mathfrak{D}_2\sin\tilde{\omega})\dot{\tilde{\omega}}^2+(\mathfrak{D}_1\sin\tilde{\omega}-\mathfrak{D}_2\cos\tilde{\omega})\dfrac{W}{\mathfrak{I}_3} \\ V=(\mathfrak{D}_1\sin\tilde{\omega}-\mathfrak{D}_2\cos\tilde{\omega})\dot{\tilde{\omega}}^2-(\mathfrak{D}_1\cos\tilde{\omega}+\mathfrak{D}_2\sin\tilde{\omega})\dfrac{W}{\mathfrak{I}_3} \end{cases}$$

Kitűnik ezekből, hogy W forgatómomentum tetszésre adható mint $t, \varpi, \dot{\varpi}$ természetszerű függvénye amely egyszer megadatván, az első egyenlet tetszésre adott kezdeti ϖ és $\dot{\varpi}$ számára meghatározza a forgó mozgást (az ϖ szöget mint az idő függvényét). A második és harmadik egyenlet a meghatározott mozgás föltételei. Legalább is ϖ-nak meghatározott függvényértéke mellett, a szabaderők x és z tengelyű forgató momentumának folyvást ezen egyenletek szerint valónak kell lennie, ami elégséges föltétele is a meghatározott mozgásnak. Ha állandó szögsebességet követelünk, akkor szükséges és elégséges föltételek gyanánt

$$W = 0, \quad U = (\mathfrak{D}_1 \cos\varpi + \mathfrak{D}_2 \sin\varpi)\dot{\varpi}^2, \quad V = (\mathfrak{D}_1 \sin\varpi - \mathfrak{D}_2 \cos\varpi)\dot{\varpi}^2$$

egyenleteink vannak, amelyekben konstans k és ϖ_0 szerint $\varpi = \varpi_0 + kt$. — Ha a forgás tengelyét a rögzített pont inerciaellipszoidjának egyik főtengelyében követeljük, akkor helyezzük ezen inerciaellipszoid másik főtengelyeibe az x', y' tengelyt, midőn aztán $\mathfrak{D}_1 = 0$, $\mathfrak{D}_2 = 0$, tehát három egyenletünk $J_3 \ddot{\varpi} = W$, $U = 0$, $V = 0$ fog lenni: az elsővel meghatározott forgó mozgás föltétele, hogy a szabaderőknek a z tengelyre merőleges tengelyek körül ne legyen forgató momentuma.

3. Példa. Lejtőn sikló és pörgő mozgás. Midőn azt mondjuk, hogy egy merev test sík lejtőn sikló

és pörgő mozgást végez, ezen azt értjük, hogy olyképp mozog a test, hogy a felületének folyvást ugyanazon elemeivel érinti a lejtőt, tehát a lejtővel párhuzamos haladó és forgó mozgást végez. Az érintkező fölületelemek számát itt végtelen nagynak gondoljuk úgy, hogy véges kiterjedésű folytonos felületet alkossanak. A lejtő a földhöz legyen rögzítve és a merev testtel ne súrlódjék. Kérdezzük, hogy milyen a test sikló és pörgő mozgása a lejtőhöz rögzített tengelyrendszerben, ha csupán a nehézségi szabaderő tesz számot és melyek ezen mozgás szükséges és elégséges feltételei.

Egy merev test mekanikai állapotának az elvi relációja a következő:

$$(m\ddot{\xi} - A)\delta a_1 + (m\ddot{\eta} - B)\delta b_1 + (m\ddot{\zeta} - C)\delta c_1 +$$

$$+\left\{\frac{d}{dt}\int(y\dot{z} - z\dot{y})\,\mathfrak{D}m - U\right\}\delta u +$$

$$+\left\{\frac{d}{dt}\int(z\dot{x} - x\dot{z})\,\mathfrak{D}m - V\right\}\delta v +$$

$$+\left\{\frac{d}{dt}\int(x\dot{y} - y\dot{x})\,\mathfrak{D}m - W\right\}\delta w \geqq 0$$

Az xy síkot a lejtő síkjára tegyük úgy pedig, hogy az x tengely horizontális legyen és az y tengely lefelé mutasson a lejtőn s a z tengely, amely egyuttal a sík normálisa, a sík azon oldala felé mutasson, amelyen a merev test van.

Az érintkezési felületet elemi részekre osztva gondoljunk. Egy ily rész koordinátái legyenek x_0, y_0, z_0. Akkor a merevségi kényszeren kívül még azt a tényleges és egyben virtuális kényszert is viseli a test, hogy minden $\delta z_0 \geqq 0$, mely egyenlőtlenségek száma végtelen nagy és pedig egyenlő az érintkezési felületen gondolt felületelemeknek a számával. Foglaljuk össze ezeket az egyenlőtlenségeket nem negatív $\lambda \mathfrak{D}\sigma$ multiplikátorokkal, amelyek $\mathfrak{D}\sigma$ faktora, a (σ) érintkezési felület egy-egy elemének a területét jelenti. Az összefoglalásból származó egyenlőtlenség a következő:

$$\mathfrak{S}_\sigma \lambda \delta z_0 \mathfrak{D}\sigma \geqq 0$$

De $\delta z_0 = \delta c + y_0 \delta u - x_0 \delta v$, tehát az összefoglalásból származó egyenlőtlenség így is írható:

$$\delta c \,\mathfrak{S}_\sigma \lambda \mathfrak{D}\sigma + \delta u \,\mathfrak{S}_\sigma \lambda y_0 \mathfrak{D}\sigma - \delta v \,\mathfrak{S}_\sigma \lambda x_0 \mathfrak{D}\sigma \geqq 0$$

Az egyenlőtlenségek tana szerint léteznek oly $\lambda \mathfrak{D}\sigma$ nem negatív multiplikátorok, hogy emez egyenlőtlenség baloldala identikusan egyenlő az elvi reláció baloldalával. Ezszerint az elvi relációból a következő multiplikátoros egyenleteink vannak:

$$m\ddot{\xi} = \mathfrak{A}, \quad m\ddot{\eta} = \mathfrak{B}, \quad m\ddot{\zeta} = \mathfrak{C} + \mathfrak{S}_\sigma \lambda \mathfrak{D}\sigma$$

$$\frac{d}{dt}\mathfrak{S}(y\dot{z} - z\dot{y})\mathfrak{D}m = \mathfrak{U} + \mathfrak{S}_\sigma \lambda y_0 \mathfrak{D}\sigma$$

$$\frac{d}{dt}\mathfrak{S}(z\dot{x} - x\dot{z})\mathfrak{D}m = \mathfrak{V} - \mathfrak{S}_\sigma \lambda x_0 \mathfrak{D}\sigma$$

$$\frac{d}{dt}\mathfrak{S}(x\dot{y} - y\dot{x})\mathfrak{D}m = \mathfrak{W}$$

Ha a nehézségi szabaderő iránya a z tengellyel ω szöget képez, akkor $\mathfrak{D}Y = g \sin\omega\, \mathfrak{D}m$, $\mathfrak{D}Z = g \cos\omega\, \mathfrak{D}m$, amelyekhez járul, hogy $\mathfrak{D}X = 0$. Így van ez akár a test legyen felül, a lejtő alul, akár a lejtő legyen felül, mert mindkét esetben lefelé mutat a lejtő mentén az y tengely és mindkét esetben horizontális az x tengely (de az első esetben a lejtő hajlásszöge $\pi - \omega$, a másodikban ω). Ehhez képest:

$$A \equiv S\mathfrak{D}X = 0,\quad B \equiv S\mathfrak{D}Y = mg\sin\omega,\quad C \equiv S\mathfrak{D}Z = mg\cos\omega$$

$$U \equiv S(y\mathfrak{D}Z - z\mathfrak{D}Y) \equiv mg(\eta\cos\omega - \zeta\sin\omega)$$

$$V \equiv S(z\mathfrak{D}X - x\mathfrak{D}Z) \equiv -mg\,\xi\cos\omega$$

$$W \equiv S(x\mathfrak{D}Y - y\mathfrak{D}X) \equiv mg\,\xi\sin\omega$$

ha t.i. ξ, η, ζ jelentik a test tömegcentrumának a koordinátáit. Ezek rendén multiplikátoros egyenleteink a következők:

$$(a)\qquad \ddot{\xi} = 0,\quad \ddot{\eta} = g\sin\omega,\quad \ddot{\zeta} = g\cos\omega + \frac{1}{m} S\,\lambda\,\mathfrak{D}\sigma$$

$$(b)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt} S(y\dot{z} - z\dot{y})\mathfrak{D}m = mg(\cos\omega.\eta - \sin\omega.\zeta) + S_\sigma \lambda\, y_0 \mathfrak{D}\sigma \\[2mm] \dfrac{d}{dt} S(z\dot{x} - x\dot{z})\mathfrak{D}m = -mg\cos\omega\,\xi - S_\sigma \lambda\, x_0 \mathfrak{D}\sigma \\[2mm] \dfrac{d}{dt} S(x\dot{y} - y\dot{x})\mathfrak{D}m = mg\sin\omega\,\xi \end{cases}$$

amelyekhez hozzájárul még, mint a tényleges mekanikai állapot kényszeregyenlete, hogy

$$(c)\qquad \text{minden } z = \text{const.}$$

ami a test érintkező határának az állandóságából következik. Ezek vannak csak. Ezek szolgálnak tehát részint meghatározására a sikló és pörgő mozgásnak, részint e mozgás föltételeinek a meghatározására.

A határozott (multiplikátort nem tartalmazó) egyenletek megismertetik velünk a mozgást. Még pedig a tömegcentrum számára (a) és (c) alól

$$(I) \qquad \ddot{\xi} = 0, \; \ddot{\eta} = g \sin \bar{\omega}, \quad \zeta = const.$$

határozott egyenleteink vannak. Ez egyenletek szerint a test tömegcentruma úgy mozog, mint egy $\bar{\omega}$ hajlású sík lejtőre helyezett tömegpont, ha csupán a nehézségi szabaderő hatását viseli és nem surlódik.

Még egy határozott egyenletünk van a virtuális munka elvén és ez (b)-nek a harmadik egyenlete. Minthogy a tömegcentrum mozgását már ismerjük, ennélfogva a mozgás teljes megismerésére elégséges még csak a testnek a maga tömegcentruma körül való mozgását ismerni meg. Az (a) két határozott egyenletének és (c)-nek számbavételével ehhez juttat el (b) harmadik egyenlete. A (c) miatt ez a mozgás nem lehet más, mint forgás a tömegcentrumon áthaladó s a lejtősíkra merőleges tengely körül. Hogy már most megismerjük ezt a mozgást, válasszunk egy másik koordinátarendszert, melynek origója a test tömegcentrumában van, a tengelyei pedig egyező irányúak a régi tengelyekkel. Ebbe a koordinátarendszerbe transzformáljuk (b) harmadik egyenletét, mivégből x helyett $\xi + x$, y helyett $\eta + y$ írjuk, úgy hogy az új rendszerben is x, y, z jelölik a koordinátákat, minélfogva ebben a rendszerben

$$S x \mathfrak{D} m = 0 \,, \quad S y \mathfrak{D} m = 0$$

Tekintettel erre és (a)-ra is, a transzformáció eredménye gyanánt azt kapjuk, hogy

$$\frac{d}{dt} S (x\dot{y} - y\dot{x}) \mathfrak{D} m = 0$$

Olymódon válasszuk meg a testhez rögzített x', y', z' koordinátarendszert, hogy origója szintén a tömegcentrumban legyen s a z' tengelye essék össze a mostani z tengellyel, amely körül pörög a test. Az x' tengely forgásszögét az x tengely felől Θ-val jelölve, egyenesen felírhatjuk, hogy

$$(d) \quad \begin{cases} x = x' \cos\Theta - y' \sin\Theta \\ y = x' \sin\Theta + y' \cos\Theta \\ z = z' \end{cases}$$

Innen deriválással:

$$(e) \quad \begin{cases} \dot{x} = -(x' \sin\Theta + y' \cos\Theta)\dot{\Theta} = -y\dot{\Theta} \\ \dot{y} = (x' \cos\Theta - y' \sin\Theta)\dot{\Theta} = x\dot{\Theta} \\ \dot{z} = 0 \end{cases}$$

Behelyettesítvén ezeket a forgás egyenletébe ta–

láljuk, hogy

$$\frac{d}{dt}\{\dot{\Theta} S(x^2+y^2)\mathfrak{D}m\}=0$$

honnan (minthogy $x^2+y^2=x'^2+y'^2=const$):

$$(\mathrm{II}) \qquad \dot{\Theta}=const.$$

ami azt jelenti, hogy a test állandó szögsebességgel pörög oly tengely körül, mely átmegy a tömegcentrumán és a lejtősíkra merőleges.

Lássuk már most, hogy mik a megállapitott mozgásnak szükséges és elégséges föltételei. Ennek a kifejtésére (a) és (b) alól a multiplikátort tartalmazó három egyenlet szolgál. Ezek elsejéből az (I)-nek harmadik egyenletén

$$(\mathrm{III}) \qquad mg\cos\tilde{\omega}=-S\lambda\mathfrak{D}\sigma$$

következik. Ez pedig azt követeli, hogy az $\tilde{\omega}$ szög tompaszög legyen, tehát hogy a lejtősík a lejtő törzsöket felül határolja és úgy a merev test a lejtő fölött legyen. – Ami a másik két λ-ás egyenletet illeti, ezeket is transzformáljuk a második tengelyrendszerbe. Transzformációnkat természetesen az x_0 és y_0 koordinátákra is ki kell terjeszteni: x, y, z, x_0, y_0 helyett $\xi+x$, $\eta+y$, $\zeta+z$, $\xi+x_0$, $\eta+y_0$-t irunk (b) két első egyenletébe.

Tekintettel (c)-re, (I)-re, (III)-ra, ezen egyszerü alakban jelentkezik (b)-nek két λ-ás egyenlete az új x, y, z koordinátarendszerben:

$$(f)\quad \begin{cases} -S z\ddot{y}\,\mathfrak{D}m = S\lambda y_0\,\mathfrak{D}\sigma \\ -S z\ddot{x}\,\mathfrak{D}m = S\lambda x_0\,\mathfrak{D}\sigma \end{cases}$$

De az (e)-ből

$\dot{x} = -y\dot{\Theta}$, $\dot{y} = x\dot{\Theta}$, tehát ($\dot{\Theta}$ konstans lévén)

$$\ddot{x} = -\dot{y}\dot{\Theta} = -x\dot{\Theta}^2 = -(x'\cos\Theta - y'\sin\Theta),$$
$$\ddot{y} = \dot{x}\dot{\Theta} = -y\dot{\Theta}^2 = -(x'\sin\Theta + y'\cos\Theta).$$

Helyettesítsük $\ddot{x}$-nak és $\ddot{y}$-nak ezen kifejezéseit és z helyett a vele egyenlő z'-t s (f) baloldalai a következőkké lesznek:

$$(f)_1\quad \begin{cases} -S z\ddot{y}\,\mathfrak{D}m \equiv \mathfrak{D}_2\sin\Theta + \mathfrak{D}_1\cos\Theta \\ -S z\ddot{x}\,\mathfrak{D}m \equiv \mathfrak{D}_2\cos\Theta - \mathfrak{D}_1\sin\Theta \end{cases}$$

ahol $\mathfrak{D}_1$ az x' tengelyű $\mathfrak{D}_2$ az y' tengelyű deviációmomentum. Az (f) jobboldalai pedig (d) alkalmazásával

$$(f)_2\quad \begin{cases} S\lambda y_0\,\mathfrak{D}\sigma \equiv \sin\Theta\, S\lambda x_0'\,\mathfrak{D}\sigma + \cos\Theta\, S\lambda y_0'\,\mathfrak{D}\sigma \\ S\lambda x_0\,\mathfrak{D}\sigma \equiv \cos\Theta\, S\lambda x_0'\,\mathfrak{D}\sigma - \sin\Theta\, S\lambda y_0'\,\mathfrak{D}\sigma \end{cases}$$

Bejegyezvén $(f)_1$-et és $(f)_2$-őt az (f)-be kapjuk, hogy:

$$(\mathfrak{D}_2\dot{\Theta}^2 - S\lambda x_0'\,\mathfrak{D}\sigma)\sin\Theta + (\mathfrak{D}_1\dot{\Theta}^2 - S\lambda y_0'\,\mathfrak{D}\sigma)\cos\Theta = 0$$
$$(\mathfrak{D}_2\dot{\Theta}^2 - S\lambda x_0'\,\mathfrak{D}\sigma)\cos\Theta - (\mathfrak{D}_1\dot{\Theta}^2 - S\lambda y_0'\,\mathfrak{D}\sigma)\sin\Theta = 0$$

Szorozzuk meg az első egyenletet $\sin\Theta$-val, a másodikat $\cos\Theta$-val, azután adjuk össze őket; majd pedig az első egyenletet szorozzuk meg $\cos\Theta$-val, a másodikat $\sin\Theta$-val s azután vonjuk ki őket egymásból. Ily módon a következő két egyenlethez jutunk:

(IV) $$\dot{\Theta}^2 \mathcal{D}_2 = S\, l\, x_0'\, \mathcal{D}\sigma$$
$$\dot{\Theta}^2 \mathcal{D}_1 = S\, l\, y_0'\, \mathcal{D}\sigma$$

Ezek az egyenletek is kötelesek teljesülni, hogy valóban a meghatározott mozgást végezze a test. Ez egyenleteknek egyszerű fölfogásához a multiplikátoros kifejezések alkalmas értelmezése vezet el. Ha $l\,\mathcal{D}\sigma$ tömegelemet jelentene, akkor $S\, l\, x_0'\, \mathcal{D}\sigma$ nem volna egyéb, mint a $S\, l\, \mathcal{D}\sigma$ tömegnek és az ő tömegcentruma első koordinátájának a szorzata, és $S\, l\, y_0'\, \mathcal{D}\sigma$ nem volna más, mint a $S\, l\, \mathcal{D}\sigma$ tömegnek és az ő tömegcentruma második koordinátájának a szorzata; emellett a $S\, l\, \mathcal{D}\sigma$ tömegnek a tömegcentrumán természetesen a $l\,\mathcal{D}\sigma$ tömegű elemek összességének a tömegcentruma értendő. Ezen kvázi tömegcentrum koordinátáit a, b, c-vel jelölve

$$S\, x_0'\, l\, \mathcal{D}\sigma \equiv a\, S\, l\, \mathcal{D}\sigma$$
$$S\, y_0'\, l\, \mathcal{D}\sigma \equiv b\, S\, l\, \mathcal{D}\sigma$$

Ha minden érintkező pontot minden más érintkező ponttal egyenes által összekapcsolunk, az így származó teljes síkidom egy pontjának az első és második koordinátája az a és b. Ezen idom keletkezésének a módja ugyanis egyenesen elárulja, hogy a mondott kvázi tömegcentrum benne van és benne bármely pont lehet. Számbavéve pedig a (II) alatti egyenletet is, a (IV) két követelése most már a következő alakban áll elő

$$a = \frac{\mathfrak{D}_2\dot{\Theta}^2}{-mg\cos\bar{\omega}}, \quad b = \frac{\mathfrak{D}_1\dot{\Theta}^2}{-mg\cos\bar{\omega}}$$

Ezerint a mozgás leírt módjának a feltétele az is, hogy a két jobboldali kifejezés oly pont első és második koordinátáját jelentse, amely benne fekszik a jellemzett idomban. Ekkor és csak ekkor, meg ha a test van a lejtő fölött (s nem fordítva) végezheti a test a határozott egyenleteinkből kifejtett mozgást.

<u>4. Példa.</u> **Gördülő mozgás.** Anyagi rendszerünk egy merev test, amely a koordináta rendszerünkhöz rögzitett merev testtel érintkezik. Az utóbbi merev test nyilvánképen teleprendszer itt. Ezt „alapnak" mondjuk és a „test" szón mindig csak a másik merev testet, a mi anyagi rendszerünket fogjuk érteni. Olyan alakú alapot és testet gondolunk, amelyek minden előfordúló érintkezésének a helye egyetlen felületelemnek számithat. Mindazonáltal a test sikló mozgása ellen az alap határrétegében folyvást oly nagy ellenállást gondolunk most, oly nagy „súrlódást", hogy érdeklődésünk idejére a testet az alapon csúszhatatlannak tekinthessük, mihez képest azon föltevéssel élünk, hogy csak hengeregve haladhat az alapon a test s e szerint való mozgását mondjuk gördülő mozgásnak.

A testnek erről a külső kényszeréről egyebek közt azt a képet alkothatjuk magunknak, amely szerint a merev testből igen sűrűen igen apró bogok (göcsök, csomók) állanak ki, szabad szemmel nem is láthatók, – az alap határrétege pedig oly állomány (kapcsoló rendszer az alap merev állománya és a test között), amelybe ezen bogok benyomódhatnak és az alaphoz szorító erők hatása alatt az érintkezés helyén tényleg benyomódott bog oldalaslag nem mozdúlhat azon határrétegben. Midőn erre a képre gondolunk, akkor a bogokat feszülten érintő fölületet értjük a test fölületen és az alap határrétegének belső fölületét értjük az alap fölületén s ezen két fölület érintkezését mondjuk a test és az alap érintkezésének.

Jelöljék x_0, y_0, z_0 valamely t pillanatban az érintkezés helyének a koordinátáit. Föltevésünk szerint az alappal érintkező testelem tángenciálisan semerre sem mozdúlhat pillanatnyi helyéből, hanem csak a felületi normális mentén és azon is csak az alaptól távolodva mozdúlhat tényleg is és virtuálisan is. Ha tehát a felületi normálist az alapból kifelé irányítjuk, és most az érintkezés helyén α, β, γ az iránykoszinuszai, akkor $(\delta x_0, \delta y_0, \delta z_0)$ akár tényleg lehetséges, akár virtuális elmozdulás, csak (α, β, γ)

irányú lehet. Eszerint, δn-nel jelölvén a $(\delta x_0, \delta y_0, \delta z_0)$ nagyságát:

$$(o) \qquad \delta x_0 = \alpha\,\delta n, \quad \delta y_0 = \beta\,\delta n, \quad \delta z_0 = \gamma\,\delta n; \quad \delta n \geqq 0$$

vagyis:

$$(a) \quad \begin{cases} \delta a + z_0 \delta v - y_0 \delta w = \alpha\,\delta n \\ \delta b + x_0 \delta w - z_0 \delta u = \beta\,\delta n \\ \delta c + y_0 \delta u - x_0 \delta v = \gamma\,\delta n \end{cases}$$
$$\delta n \geqq 0$$

A következő határozott relációk rendszerével ekvivalens ez (mint (o)-ból δn eliminálása és kiszámítása mutatja):

$$\beta\,\delta z_0 - \gamma\,\delta y_0 = 0, \quad \gamma\,\delta x_0 - \alpha\,\delta z_0 = 0, \quad \alpha\,\delta y_0 - \beta\,\delta x_0 = 0$$
$$\alpha\,\delta x_0 + \beta\,\delta y_0 + \gamma\,\delta z_0 \geqq 0$$

Azonban maradjunk az (a) alatti kifejezéseknél. Számítsuk ki belőlük δa, δb, δc értékét, azután írjuk be a merev test elvi relációjába. Minthogy δu, δv, δw bármi lehet és δn bármi nemnegatív lehet, a következő egyenletekhez és egyenlőtlenséghez jutunk:

$$(b) \quad \begin{cases} m(z_0 \ddot{\eta} - y_0 \ddot{\zeta}) + \frac{d}{dt} S(y\dot{z} - z\dot{y})\,\mathcal{D}m = \\ = z_0 S\mathcal{D}\mathcal{Y} - y_0 S\mathcal{D}\mathcal{Z} + S(y\mathcal{D}\mathcal{Z} - z\mathcal{D}\mathcal{Y}) \\ m(x_0 \ddot{\zeta} - z_0 \ddot{\xi}) + \frac{d}{dt} S(z\dot{x} - x\dot{z})\,\mathcal{D}m = \\ = x_0 S\mathcal{D}\mathcal{Z} - z_0 S\mathcal{D}\mathcal{X} + S(z\mathcal{D}\mathcal{X} - x\mathcal{D}\mathcal{Z}) \\ m(y_0 \ddot{\xi} - x_0 \ddot{\eta}) + \frac{d}{dt} S(x\dot{y} - y\dot{x})\,\mathcal{D}m = \\ = y_0 S\mathcal{D}\mathcal{X} - x_0 S\mathcal{D}\mathcal{Y} + S(x\mathcal{D}\mathcal{Y} - y\mathcal{D}\mathcal{X}) \end{cases}$$

(c) $\quad (m\ddot{\xi} - S\mathfrak{D}X)\alpha + (m\ddot{\eta} - S\mathfrak{D}Y)\beta + (m\ddot{\zeta} - S\mathfrak{D}Z)\gamma \geq 0$

Hozzájuk csatolandók még a tényleges mozgás kényszeregyenletei: (87) szerint a merevségi kényszerre

$$(d)\quad \begin{cases} \dot{x} = \dot{\xi} + (z-\zeta)\dot{v} - (y-\eta)\dot{w} \\ \dot{y} = \dot{\eta} + (x-\xi)\dot{w} - (z-\zeta)\dot{u} \\ \dot{z} = \dot{\zeta} + (y-\eta)\dot{u} - (x-\xi)\dot{v} \end{cases}$$

és (a) szerint a külső kényszerre ($dn = 0$ lévén, a folytonos érintkezésben)

$$\begin{aligned} da + z_0\,dv - y_0\,dw &= 0 \\ db + x_0\,dw - z_0\,du &= 0 \\ dc + y_0\,du - x_0\,dv &= 0 \end{aligned}$$

~~(d)~~

Annak a felhasználásával, hogy

$$d\xi = da + \zeta\,dv - \eta\,dw, \text{ stb}$$

célszerűbb így írni ezeket az egyenleteket

$$(e)\quad \begin{cases} \dot{\xi} + (z_0-\zeta)\dot{v} - (y_0-\eta)\dot{w} = 0 \\ \dot{\eta} + (x_0-\xi)\dot{w} - (z_0-\zeta)\dot{u} = 0 \\ \dot{\zeta} + (y_0-\eta)\dot{u} - (x_0-\xi)\dot{v} = 0 \end{cases}$$

Azt fejezik ki ezek, hogy a test azon pontjai, amelyek rendre érintik az alapot, érintésük pillanatában nyugalomban vannak, mert a baloldalaikkal meghatározott $(\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$ vektor a test érintkező pontjának a sebessége.

Hat egyenletünk van (b) és (e) alól a testhez rött x', y', z' rendszer helyzethatározói ($a', b', c', \vartheta, \varphi, \varphi'$) számára. Csakhogy az x_0, y_0, z_0 koordinátáknak az x_0', y_0', z_0' által való

(f) $\quad x_0 = a' + \alpha_1 x_0' + \alpha_2 y_0' + \alpha_3 z_0'$, stb.

kifejezéseiben x_0', y_0', z_0' nem konstánsok, hanem eleve ismeretlen időfüggvények, mert nem állandó egyéni pont koordinátái, hanem folyvást más és más egyéni pont koordinátái a test határán. Az (f) tehát még nem fejezi ki az x_0, y_0, z_0 koordinátákat a helyhatározók szabott függvényei gyanánt. Ezen határozatlanság megszűnik azonban, mihelyt az érintkezés posztulátumát is egyenletekbe foglaljuk, azaz felállítjuk azon egyenleteket, amelyek kifejezik, hogy x_0, y_0, z_0, illetőleg x_0', y_0', z_0' érintkező pontnak a koordinátái.

Ha az alap fölületének az egyenlete

$$\mathcal{F}(x, y, z) = 0$$

és a test felületének egyenlete a testhez rögzített koordinátarendszerben:

$$f(x', y', z') = 0$$

akkor (f) szerint értve az x_0, y_0, z_0 koordinátákat, az érintkezés számára a következő egyenleteink vannak:

$$(g)\quad \begin{cases} \mathcal{F}(x_0, y_0, z_0) = 0\,, \quad f(x_0', y_0', z_0') = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial x_0'} : \dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial y_0'} : \dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial z_0'} = \dfrac{\partial f}{\partial x_0'} : \dfrac{\partial f}{\partial y_0'} : \dfrac{\partial f}{\partial z_0'} \end{cases}$$

Ha az érintkezés tényleg megvan (mint föltesszük), akkor három a független egyenlet ezek sorában x_0', y_0', z_0', mint a hat helyzethatározó paraméter függvényeinek meghatározására.

Sokszor hasznos oly koordinátarendszerre térni át az összes egyenletekben, amelynek origója a tömegcentrumban van, tengelyei pedig egyező irányúak az eredeti x, y, z tengelyekkel.

Némi alkalmazás végett kérdezzük, hogy mily haladással és mily föltételek alatt gördül sík lejtős alapon párhuzamosan a lejtő hosszával egy merev gömb, ha a tömegcentruma a geometriai centrumában van és ha csak a nehézségi szabaderő hatását viseli számottevő mértékben koordinátarendszerünkben, amelyet a lejtővel együtt a földhöz róva gondolunk. Egyenleteink s egyenlőtlenségünk a következő választ adják erre a kérdésre.

Ha s jelöli a gömb centrumának az útját, egy állandó helyből lefelé pozitivnak, fölfelé negativnak számítva, és ha J jelöli a gömbnek inerciamomentumát a forgás tengelye körül, akkor

$$\ddot{s} = \frac{g \sin \tilde{\omega}}{1 + \frac{J}{mR^2}}$$

határozza meg a gömb centrumának a mozgását, ahol g a nehézségi gyorsulás, $\tilde{\omega}$ a lejtő hajlásszöge, m a gömb tömege, R a gömb sugara (emellett a gömb forgásának szögsebessége a maga tengelye körül akkora folyvást mint $\dot{s} : R$) A föltételei ennek a mozgásnak, hogy a lejtős alap legyen alul és a gömb fölül és, hogy a centralis inerciaellipszoid valamelyik főtengelye a forgás tengelyében legyen.

Igen egyszerűen fejlenek ki ezek, ha az x, y, z rendszert origójával a gömb centrumába toljuk el (x, y, z helyett $\xi + x$, $\eta + y$, $\zeta + z$ irjuk). Az érintkezés egyenletei most egyenesen felirhatók. Ha az x tengely horizontális és párhuzamos a lejtősíkkal, a z tengely pedig merőleges a lejtősíkra ennek a belseje felé, akkor az új koordinátarendszerben $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $z_0 = R$ nyilvánképen. Számba véve ezt és azt, hogy a kivánt mozgásban $\dot{v} = 0$, $\dot{w} = 0$, könnyen találjuk már a mozgás egyenletét és annak föltételeit. A forgás tengelyét illető föltételt ezen egyenletek jelentik:

$$\frac{d}{dt}(\dot{u}\mathcal{D}_y) = 0\,, \quad \frac{d}{dt}(\dot{u}\mathcal{D}_z) = 0$$

ahol $\mathcal{D}_y, \mathcal{D}_z$ a gömb deviáció momentuma az y illetőleg a z tengely körül. Ezen egyenletekből ugyanis könnyen levezethető, hogy $\mathcal{D}_y = 0$, $\mathcal{D}_z = 0$.

<u>5. Példa.</u> Lejtőn nyugvás és sikló mozgás súrlódással. A földhöz rögzitett sík lejtőt gondoljunk és ehhez rójjuk x, y, z koordinátarendszerünket, úgy pedig, hogy x, y síkját a lejtősíkra helyezzük, x tengelyét horizontálisan, y tengelyét lefelé, z tengelyét a lejtő belseje felé irányítva. Anyagi rendszerünk egy merev test,

amely vagy nyugalmat tartva érintkezik a lejtővel, vagy állandó irányban puszta haladó mozgást művelve érintkezik azzal. Az érintkezést véges terjedelmű területen gondoljuk mind a nyugalomban, mind a mozgásban.

A.) Föltesszük itt, hogy a test nyugalmában a következő egyszerű képet alkothatjuk magunknak a test és a lejtő súrlódásáról: A lejtő határrétege nem merev folytatása a lejtő belsejének, hanem a lejtő csak a határrétegén belül tekinthető merev testnek és így egyben teleprendszernek is; a határrétege kapcsoló rendszer a lejtő merev belseje és a test között, olyan, hogy abba a merev test kissé benyomódhatik és a lejtőhöz szorító erők hatása alatt ténylег be is nyomódik, minek következtében igen sekély süppedése van a lejtő határrétegének, lapos horpadása, amelynek a feneke a testhez mindenütt egészen hozzásimuló síkrész, párhuzamos, legalább igen pontosan, a lejtő felszinével, a pereme pedig körös-körül kis lejtő a lejtőn, lejtős leereszkedése a lejtő felszinének a süppedés aljára s a test mozditása ellenállásba ütközik a süppedés fenekén és peremén, - a feneken lévő testelemek nem mozdithatók a lejtő belseje felé s a fenék szélén lévők a környező határréteg belseje felé sem mozdithatók fizikai végtelen nagy sebességgel.

B, Föltesszük, hogy a test fönt követelt mozgásában a test és a lejtő közt nyilvánuló súrlódásról oly képet alkothatunk magunknak, amely a következőkben különbözik a nyugalom számára alkotott képtől: a test mögött és a test mellett a süppedés feneke igen gyenge hajlással egészen a lejtő felszínéig húzódik, a test előtt van csak jelentékeny hajlású alacsony lejtő a lejtőn s ennek a normálisa azon helyeken, amelyeken hozzá ér a test, a fenék normálisának és a mozgás irányának a síkjában van, s a testtel együtt folyvást tovább tolódik az egész süppedés mint hullámvölgy a határrétegben, a test kényszere pedig abban nyilvánul, hogy a fenéken lévő testelemek a lejtő belseje felé nem mozdithatók, a kis másodlagos lejtőnél levők pedig a környező határréteg belseje felé sem mozdithatók fizikai végtelen nagy sebességgel.

C, A test nyugalmában a kis mélyedés fenekén levő testelemek a fenéktől azt a virtuális kényszert viselik, hogy ha egy ilyen testelemnek x_0, y_0, z_0 a koordinátái, akkor

(a)$_1$ $$-\delta z_0 \geqq 0 .$$

A kis mélyedés fenekének a határvonalánál lévő testelemek pedig ezen a kényszeren kivül még azt a virtuális kényszert is viselik, hogy ha a határvonal x_0, y_0, z_0 pontjánál a kis másodlagos lejtőnek az ő belseje felé mutató normálisa $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ irányú, akkor

$$(a)_2 \qquad -\alpha_0 \delta x_0 - \beta_0 \delta y_0 - \gamma_0 \delta z_0 \geqq 0$$

Beirandók ezekbe

$$(a)_3 \qquad \begin{cases} \delta x_0 = \delta a + z_0 \delta v - y_0 \delta w \\ \delta y_0 = \delta b + x_0 \delta w - z_0 \delta u \\ \delta z_0 = \delta c + y_0 \delta u - x_0 \delta v \end{cases}$$

amelyekből a z_0 tartalmú tagok ki is hagyhatók, mert z_0 számot nem tevően különbözik zérustól.

Jelöljük meg a kis mélyedés fenekének a területét (σ)-val, s ezen fenék határvonalát (s)-sel, (σ)-nak egy elemi részét $(\mathfrak{D}\sigma)$-val, (s)-nek egy elemi részét $(\mathfrak{D}s)$-sel, és már most foglaljuk össze az $(a)_1$-féle egyenlőtlenségeket $p\mathfrak{D}\sigma$ nem negativ multiplikátorokkal, az $(a)_2$-féle egyenlőtlenségeket $q\mathfrak{D}s$ nem negativ multiplikátorokkal.

$$-\left\{ S_\sigma p \delta z_0 \mathfrak{D}\sigma + S_\sigma q (\alpha_0 \delta x_0 + \beta_0 \delta y_0 + \gamma_0 \delta z_0) \mathfrak{D}s \right\} \geqq 0$$

Vannak oly $p\mathfrak{D}\sigma$ és $q\mathfrak{D}s$ nem negativ multiplikátorok (az egyenlőtlenségek tana szerint), hogy ezen egyenlőtlenség baloldala identikusan egyenlő a kényszer virtuális munkájával (az alapegyenlőtlenség baloldalával), amelynek az együtthatóit most nyugalomra kell vonatkoztatnunk ($\dot{x}=0$, $\dot{y}=0$, $\dot{z}=0$ és úgy nem különben $\dot{\xi}=0$, $\dot{\eta}=0$, $\dot{\zeta}=0$ teendő azokban). Az identitásból (a)$_3$ figyelembe vételével a következő multiplikátoros egyenletek származnak

$$(a)_4 \quad \begin{cases} A = S_s q\, \alpha_0 \mathfrak{D}s, \quad B = S_s q\beta_0 \mathfrak{D}s, \quad C = S q\gamma_0 \mathfrak{D}s + S_\sigma p \mathfrak{D}\sigma \\ U = S_s q(y_0\gamma_0 - z_0\beta_0)\mathfrak{D}s + S_\sigma p\, y_0 \mathfrak{D}\sigma \\ V = S_s q(z_0\alpha_0 - x_0\gamma_0)\mathfrak{D}s - S_\sigma p\, x_0 \mathfrak{D}\sigma \\ W = S_s q(x_0\beta_0 - y_0\alpha_0)\mathfrak{D}s \end{cases}$$

Az A) alatt alkotott képen azt a föltételt rójják ki ezen egyenletek a nyugalomra, hogy a szabad erők szállító és forgató hatása olyan erők szállító és forgató hatásával legyen egyenlő, amelyek a kis mélyedés fenekén hatnak, még pedig annak a belsejében mindenütt merőlegesen a lejtő felé s a szélén mindenütt merőlegesen a kis másodlagos lejtőre ennek a belseje felé. A tapasztalással jól egyező feltétele ez a lejtőn a test nyugalmának.

Tekintsük közelebbről azt a különös esetet, amelyben az érintkezés körös területen van, s a kis másodlagos lejtő köröskörül mindenütt ugyanazon szögön hajlik a lejtő síkjához. Akkor A, B, C kifejezése azt követeli, hogy a szabaderők szállító hatása egy z tengelyű, lefelé nyúló forgáskúp csúcsából a forgáskúp öblébe mutató vektorral legyen egyező irányú, mert az (A, B, C) vektor multiplikátoros kifejezése nem más, mint ezen kúp alkotóinak és tengelyének az irányában fekvő elem vektorok összege (eredője); ezt a kúpot súrlódási kúpnak nevezik. Ha pedig az érintkezés területe igen kicsiny, akkor ezen terület pontjai körül a szabad erők forgató momentumának igen kicsinynek kell lennie, mert ha koordinátarendszerünk origóját ezen területbe helyezzük, akkor az (U, V, W) vektor multiplikátoros kifejezésében minden koordináta igen kicsiny.

D, A test mozgásában, amely föltevésünk szerint állandó irányú haladó mozgás, a kis mélyedés fenekén lévő testelemek a fenéktől azt a virtuális kényszert viselik, hogy ha egy ilyen testelemnek a t pillanati koordinátái x_0, y_0, z_0, akkor

$$(\mathfrak{b})_1 \qquad -\delta z_0 \geqq 0.$$

A fenék határvonalának a test előtti részénél pedig a mélyedés peremének érintéseinél ezen kényszeren kívül azt a virtuális kényszert is viselik a testelemek, hogy ha a t pillanati kis másodlagos lejtőnek az ő belseje felé mutató normálisa $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ irányú, akkor

$$(\mathfrak{b})_2 \qquad -\alpha_0\delta x_0 - \beta_0\delta y_0 - \gamma_0\delta z_0 \geqq 0$$

Az $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ irányról tegyük azt az észrevételt, hogy ha a test siklásának α, β, γ az irány koszinuszai és ennek meg az $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ egységvektornak a szöge ε, akkor az $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ egységvektor az $(\alpha, \beta, \gamma)\cos\varepsilon$

vektornak és a $(0, 0, 1)\sin\varepsilon$ vektornak az eredője, mert $\gamma = 0$ lévén az utóbbi vektorok merőlegesek egymásra és az $(\alpha_0 \beta_0 \gamma_0)$ egységvektor az ő szögsíkjukban van (a $\mathfrak{B}_3$ alatt adott meghatározás szerint) tehát

$(b)_{2\varepsilon}$ $\quad \alpha_0 = \alpha\cos\varepsilon, \; \beta_0 = \beta\cos\varepsilon, \; \gamma_0 = \sin\varepsilon$

Beirandók még a merevségi kényszernek föltüntetése végett mind $(b)_1$, mind $(b)_2$ alá:

$$(b)_3 \quad \begin{cases} \delta x_0 = \delta a + z_0\delta v - y_0\delta w \\ \delta y_0 = \delta b + x_0\delta w - z_0\delta u \\ \delta z_0 = \delta c + y_0\delta u - x_0\delta v \end{cases}$$

amelyekből a z_0 tartalmú tagok el is hagyhatók, mert igen sekély lévén a bemélyedés a határrétegben, z_0 igen kicsiny.

Jelöljük meg az érintkezés területét (σ)-val s e terület határvonalának a test előtt lévő részét a másodlagos lejtő érintkezéseinél (s)-sel, a (σ)-nak egy elemi részét $(\mathfrak{D}\sigma)$-val, az (s)-nek egy elemi részét $(\mathfrak{D}s)$-sel és foglaljunk össze a $(b)_1$-féle egyenlőtlenségeket $p\mathfrak{D}\sigma$ nem negativ multiplikátorokkal, a $(b)_2$-féléket $q\,\mathfrak{D}s$ nem negativ multiplikátorokkal:

$$-\left\{ S_\sigma\, p\,\delta z_0\, \mathfrak{D}\sigma + S_s\, q(\alpha_0\delta x_0 + \beta_0\delta y_0 + \gamma_0\delta z_0)\mathfrak{D}s \right\} \geqq 0$$

Vannak oly $p\mathfrak{D}\sigma$ és $q\mathfrak{D}s$ nem negativ multiplikátorok, hogy a kényszer virtuális munkája identikusan egyenlő ezen kényszer egyenlőtlenség baloldalával. Ebből $(b)_3$ figyelembe vételével a következő multiplikátoros egyenletek származnak:

$$(b)_4 \quad \left\{ \begin{aligned} & m\ddot{\xi} = \mathfrak{A} - S_s q\alpha_0 \mathfrak{D}s, \quad m\ddot{\eta} = \mathfrak{B} - S_s q\beta_0 \mathfrak{D}s \\ & m\ddot{\zeta} = \mathfrak{C} - S_s q\gamma_0 \mathfrak{D}s - S_\sigma p \mathfrak{D}\sigma \\ & \frac{d}{dt} S(y\dot{z} - z\dot{y})\mathfrak{D}m = \mathfrak{U} - S_s q(y_0\gamma_0 - z_0\beta_0)\mathfrak{D}s - S_\sigma p y_0 \mathfrak{D}\sigma \\ & \frac{d}{dt} S(z\dot{x} - x\dot{z})\mathfrak{D}m = \mathfrak{V} - S_s q(z_0\alpha_0 - x_0\gamma_0)\mathfrak{D}s + S_\sigma p x_0 \mathfrak{D}\sigma \\ & \frac{d}{dt} S(x\dot{y} - y\dot{x})\mathfrak{D}m = \mathfrak{W} - S_s q(x_0\beta_0 - y_0\alpha_0)\mathfrak{D}s \end{aligned} \right.$$

Hozzájuk csatolandók a tényleges mozgás kényszeregyenletei. Ily kényszeregyenletek tartoznak $(b)_1$-hez, amely a tényleg lehetséges elemi elmozdulásokat is megilleti: minden $\partial z_0 \geqq 0$ s a tényleges mozgásban minden $dz_0 = 0$, tehát $\dot{z} = 0$,

$$\dot{c} + y_0\dot{u} - x_0\dot{v} = 0$$

az érintkezés minden pontjában, minélfogva

$$\dot{c} = 0, \quad \dot{u} = 0, \quad \dot{v} = 0$$

és így a merevségi kényszerből s a fenék ellenállásából a test minden pontjának a mozgására oly korlátozás háramlik, amely szerint

$$(b)_5 \qquad \dot{x} = \dot{a} - y\dot{w}, \quad \dot{y} = \dot{b} + x\dot{w}, \quad \dot{z} = 0$$

A $(b)_2$ virtuális kényszernek nem felel meg a tényleges mozgásra háramló kényszer. Ugyanis azt írva (b_2)-ben, hogy

$$\delta x_0 = \partial x_0 - d x_0 = \partial x_0 - \alpha\, d s_0$$
$$\delta y_0 = \partial y_0 - d y_0 = \partial y_0 - \beta\, d s_0$$
$$\delta z_0 = \partial z_0$$

és tekintetbe véve a $(b)_{2\varepsilon}$ kifejezéseket, azt kapjuk a tényleg lehetséges $(\partial x_0, \partial y_0, \partial z_0)$ elem. elmozdulásokra, hogy

$$\alpha_0 \partial x_0 + \beta_0 \partial y_0 + \gamma_0 \partial z_0 \leqq \cos\varepsilon . ds_0$$

ahol ds_0 a siklás elemi útja. Egyebet a tényleg lehetséges elemi elmozdulásokról nem állíthatunk. Ez az egyenlőtlenség pedig a tényleges elemi elmozdulások $(\partial x_0 \equiv dx_0, \partial y_0 \equiv dy_0, dz_0 \equiv 0)$ által identikusan teljesül (az egyenlőség jelével), tehát nem mond semmit a tényleges mozgásról. Ennélfogva egyenleteink rendszere most hiányos és hiányosságának a megszüntetése külön tapasztalásokat követel.

Vizsgáljuk speciálisan, hogy a lejtő hosszával párhuzamosan mikép siklik a test a lejtőn, midőn csak a nehézségi szabaderő hatása tesz számot a merev testen? Föltesszük, hogy a lejtősíkot felülről érinti a test. Koordinátarendszerünk y tengelye párhuzamos lévén a lejtő ereszkedésével, $(b)_4$ második egyenletétől várhatunk választ erre a kérdésre. Most $(b)_{2\varepsilon}$ alatt $\alpha = 0$ és $\beta = \pm 1$ aszerint, amint lefelé vagy fölfelé siklik a test. Ekként az említett egyenletből

$$m\ddot{\eta} = mg \sin\tilde{\omega} \mp S_s q \cos\varepsilon\, \mathfrak{D}s$$

ahol $\tilde{\omega}$ a lejtő hajlásszöge. Az itt lévő összeg a kérdezett mozgásban külön tapasztalás szerint arányos a test súlyának a lejtőre merőleges komponensével oly pozitív k arányossági együttható szerint, amely a lejtő határrétegének minőségétől és állapotától függ, mihez képest

$$\ddot{\eta} = g(\sin\tilde{\omega} \mp k\cos\tilde{\omega})$$

Ebből, a felfelé mozgásban, ha $\dot{s}$ a kezdeti sebesség nagysága, és k konstansnak számíthat

$$\dot{\eta} = g(\sin\tilde{\omega} + k\cos\tilde{\omega})t - \dot{s}$$

Olyan tehát a felfelé siklás, mintha súrlódás nem volna, a nehézségi gyorsulás azonban nagyobb, és pedig:

$$g(1 + k\cot\tilde{\omega})$$

nagyságú volna.

A lefelé siklásban

$$\dot{\eta} = \dot{s} + (g\sin\tilde{\omega} - k\cos\tilde{\omega})t$$

ha most is $\dot{s}$ jelöli a kezdeti sebesség nagyságát. Ha már most

$$g\sin\tilde{\omega} - k\cos\tilde{\omega} > 0,$$

akkor olyan a lefelé siklás, mintha súrlódás nem volna, a nehézségi gyorsulás azonban kisebb, éspedig:

$$g - k\cot\tilde{\omega}$$

nagyságú volna.

Ha pedig

$$q \sin\bar{\omega} - k \cos\bar{\omega} < 0,$$

akkor úgy siklik a test lefelé, mintha nem súrlódnék, de a nehézségi gyorsulás helyett

$$k \cot\bar{\omega} - q$$

nagyságú és vertikálisan felfelé irányúlt szabad-gyorsulása volna. Ekkor lassúdó a test lefelé siklása.

Ha végül

$$k \cos\bar{\omega} = q \sin\bar{\omega}$$

akkor $\quad \dot{\eta} = \dot{s}$

tehát állandó sebességgel siklik lefelé a test.

A $(b)_4$ második egyenletéből következtek ezek egy külön tapasztalás rendén. A $(b)_4$ többi egyenletei ezen mozgás föltételeit állapitják meg. A föltételekre nézve tekintsük legalább azt az egyszerü esetet, amelyben a test a kis mélyedés határvonalának egy fizikai végtelen kis s darabjánál ér csak hozzá a mélyedés pereméhez, amelyet folyvást tovább tol maga előtt. Ekkor az s-re szóló összegelésekben ds szorzói az összegjegyek elé irhatók, mert minden összeadandó tagban ugyanannak számithatnak és x_0, y_0, z_0 ezen összegekben mint a kis s egy pontjának t pillanati x_s, y_s, z_s koordinátái jelentkeznek. Most

$$\alpha_0 = 0 \quad \beta_0 = \pm \cos\varepsilon, \; \gamma_0 = \sin\varepsilon$$

$$S_s \beta_0 q\, ds = \beta_0 q s = \pm q s \cos\varepsilon = m q k \cos\bar{\omega}$$

$$\dot{x} = \dot{\xi} = 0, \quad \dot{y} = \dot{\eta}, \quad \dot{z} = \dot{\zeta} = 0$$

$$\mathfrak{D}X = 0, \quad \mathfrak{D}Y = q \sin\tilde{\omega}\, \mathfrak{D}m, \quad \mathfrak{D}Z = q \cos\tilde{\omega}\, \mathfrak{D}m$$

Fektessük át az yz síkot a test tömegcentrumán, midőn is $\xi = 0$, továbbá írjuk, hogy

$$x_s\, q\, s \sin\varepsilon + S_\sigma\, x_0\, p\, \mathfrak{D}\sigma \equiv a_0 (q\, s \sin\varepsilon + S_\sigma\, p\, \mathfrak{D}\sigma)$$

$$y_s\, q\, s \sin\varepsilon + S_\sigma\, y_0\, p\, \mathfrak{D}\sigma \equiv b_0 (q\, s \sin\varepsilon + S_\sigma\, p\, \mathfrak{D}\sigma)$$

Végül írjuk az igen kis z_s-t zérusnak. Mindezek rendén azt találjuk, hogy $(b)_4$ első egyenlete identikusan teljesül; a harmadik egyenlete ezzé lesz:

$$m g \cos\tilde{\omega} = q\, s \sin\varepsilon + S_\sigma\, p\, \mathfrak{D}\sigma$$

mivel tehát a lejtőt már eleve alul, a testet fölül lévőnek gondoltuk, ez is identikusan teljesül; a még hátralévő feltételi egyenletek ezen egyenletnek és a mozgás egyenletének is a hozzájárulásával a következő egyszerű kikötéseket tartalmazzák:

$$\eta = b_0 \pm k\zeta, \quad a_0 = 0, \quad x_s = 0$$

ahol x_s a test és a kis másodlagos lejtő t pillanati érintkezési helyének első koordinátája, a_0 és b_0 pedig a teljes érintkezési idom egy pontjának t pillanati két első koordinátája, ezen érintkezési idomon azt a területet értve, amely a lejtő t pillanatban érintett pontjainak egyenes összekapcsolásaiból származik (mint a 3. példa végén is). A harmadik egyenlet azt kívánja meg, hogy a tömegcentrum útjának vertikális síkja (u. m. az yz sík) szelője legyen a test és a másodlagos lejtő kis érintkezési helyének; a második egyenlet azt rójja ki, hogy ez a sík szelője legyen a teljes érintkezési idomnak is; az első egyenlet azt követeli, hogy a tömegcentrumnak a lejtőre merőlegesen vetített képe $k\zeta$-nyira hátratolva benne legyen a teljes érintkezési idomban.

6. Példa. Három merev test mérlegszerű rendszere. A teleprendszer egy állvány, amely a földhöz van rögzítve. Az adott rendszer három merev testből áll, amelyeket Q_0, Q_1, Q_2 jelöljön. A Q_0 testnek egy egyenes pontsora az állványhoz van rögzítve, Q_1 valamint Q_2-nek egy egyenes pontsora pedig az előbbivel párhuzamosan a Q_0 testhez van rögzítve. A Q_0 test mindenkép foroghat az állványhoz rött pontsora körül; a Q_1 valamint a Q_2 test mindenkép foroghat a Q_0-hoz rögzített pontsora körül. Koordinátarendszerünket az állványhoz rójjuk s x tengelyét tegyük a Q_0 test forgástengelyébe. Az egyes testek-hez tartozó mennyiségeket a megfelelő alsó indexxel jelöljük. Ha a Q_0 test saját tengelyében egy pont koordinátái x_0^0, y_0^0, z_0^0, akkor

$$\delta x_0^0 = \delta a_0 + z_0^0 \delta v_0 - y_0^0 \delta w_0 = 0$$
$$\delta y_0^0 = \delta b_0 + x_0^0 \delta w_0 - z_0^0 \delta u_0 = 0$$
$$\delta z_0^0 = \delta c_0 + y_0^0 \delta u_0 - x_0^0 \delta v_0 = 0$$

a tengely bármely pontja is az. De a tengelyben $y_0^0 = 0$,

$z_0^0 = 0$, ellenben x_0^0 bármi lehet; ebből folyólag:

1. $\begin{cases} \delta a_0 = 0, \delta b_0 = 0, \delta c_0 = 0, \delta v_0 = 0, \delta w_0 = 0 \\ \delta u_0 \text{ pedig bármi lehet} \end{cases}$

A Q_1 saját tengelyében x_1^0, y_1^0, z_1^0 legyenek egy pont koordinátái. A Q_0 test ottani pontjának pedig $x_{01}^0, y_{01}^0, z_{01}^0$ legyenek a koordinátái. Eszerint

$$x_1^0 = x_{01}^0, \quad y_1^0 = y_{01}^0, \quad z_1^0 = z_{01}^0$$

Következőképen: $\delta x_1^0 = \delta x_{01}^0$, $\delta y_1^0 = \delta y_{01}^0$, $\delta z_1^0 = \delta z_{01}^0$, vagyis:

$$\delta a_1 + z_1^0 \delta v_1 - y_1^0 \delta w_1 = \delta a_0 + z_{01}^0 \delta v_0 - y_{01}^0 \delta w_0 = 0$$
$$\delta b_1 + x_1^0 \delta w_1 - z_1^0 \delta u_1 = \delta b_0 + x_{01}^0 \delta w_0 - z_{01}^0 \delta u_0 = $$
$$= - z_{01}^0 \delta u_0 \equiv - z_1^0 \delta u_0$$
$$\delta c_1 + y_1^0 \delta u_1 - x_1^0 \delta v_1 = \delta c_0 + y_{01}^0 \delta u_0 - x_{01}^0 \delta v_0 =$$
$$= y_{01}^0 \delta u_0 \equiv y_1^0 \delta u_0$$

Az itteni második és harmadik egyenlet minden x_1^0 mellett köteles teljesülni minden pillanatban. Ebből folyólag: $\delta v_1 = 0$, $\delta w_1 = 0$. A következő kényszeregyenleteink is vannak tehát:

2. $\begin{cases} \delta a_1 = 0, \delta b_1 = z_1^0(\delta u_1 - \delta u_0), \delta c_1 = y_1^0(\delta u_0 - \delta u_1) \\ \delta v_1 = 0, \delta w_1 = 0. \end{cases}$

Hasonlóképen kapjuk a Q_2-re vonatkozólag, hogy

3. $\begin{cases} \delta a_2 = 0, \delta b_2 = z_2^0(\delta u_2 - \delta u_0), \delta c_2 = y_2^0(\delta u_0 - \delta u_2) \\ \delta v_2 = 0, \delta w_2 = 0 \end{cases}$

A három merev test a merevségi kényszeren kívül még azt a kényszert is viseli, amelyet az

1., 2., 3., alatt írt egyenletek fejeznek ki. Bevezetve ezeket a kifejezéseket 89-ben az elvi egyenlőtlenségbe, amely most három merev testre szól, három határozott egyenlethez jutunk amiatt, hogy $\delta u_0, \delta u_1, \delta u_2$ egészen tetszésszerinti három inkrementum.

Azonban egyszerűbb módon is eljuthatunk a három idetartozó egyenlethez, olyképen pl., hogy 53.-ból a forgató momentumok tételét alkalmazzuk:

$$\lambda S\{(y-b)\ddot{z}-(z-c)\ddot{y}\}\mathfrak{D}m+\mu S\{\cdots\}\mathfrak{D}m+\nu S\{\cdots\}\mathfrak{D}m=$$
$$=\lambda S\{(y-b)\mathfrak{D}Z-(z-c)\mathfrak{D}Y\}+\mu S\{\cdots\}+\nu\{\cdots\}$$

t.i. egy oly (a, b, c) pontú és (λ, μ, ν) irányú tengelyre, amely körül az egész anyagi rendszer, vagy amely körül az egész rendszer egy részének nyugalmában más része szabadon fordítható. Alkalmazzuk pedig ezt a forgásegyenletet egyszer a rendszer egészére a q_0 test tengelyén, egyszer a q_1 testre az ő tengelyén és egyszer a q_2 testre az ő tengelyén. Mind három tengely iránykoszinuszai: $\pm 1, 0, 0$, tehát forgásegyenletünk mindkét oldalán az első tag marad csak meg, mindhárom esetben. Továbbá most b és c értéke egyszer 0 és 0, egyszer y_1^0 és z_1^0, egyszer pedig y_2^0 és z_2^0. A két utóbbi alkalommal az összegelések csak az illető testre terjesztendők ki.

Tekintsük speciálisan azt az esetet, amelyben a forgástengelyek horizontálisak és csak a nehézségi szabaderő hat számottevően. Feladatunkúl tűzzük ki pedig itt csupán meghatározni a nyugalom szükséges és elégséges feltételeit. Most forgásegyenleteinkben minden derivált eltűnik, mihez képest a következő három egyenletünk van:

$$\begin{cases} S(y\mathfrak{D}Z - z\mathfrak{D}Y) = 0 \\ S\{(y_1 - y_1^0)\mathfrak{D}Z_1 - (z_1 - z_1^0)\mathfrak{D}Y_1\} = 0 \\ S\{(y_2 - y_2^0)\mathfrak{D}Z_2 - (z_2 - z_2^0)\mathfrak{D}Y_2\} = 0 \end{cases}$$

ahol az első összegelés az egész rendszerre, a második a Q_1 testre, a harmadik a Q_2 testre szól s y_1^0 és z_1^0 a Q_1 test saját forgástengelyének egy pontjában, y_2^0 és z_2^0 pedig a Q_2 test saját forgástengelyének egy pontjában a második és harmadik koordináta s ha a z tengelyt vertikálisan lefelé irányítjuk:

$$\mathfrak{D}Y = \mathfrak{D}Y_1 = \mathfrak{D}Y_2 = 0$$

$$\mathfrak{D}Z = g\mathfrak{D}m,\ \mathfrak{D}Z_1 = g\mathfrak{D}m_1,\ \mathfrak{D}Z_2 = g\mathfrak{D}m_2$$

Beirván a szabaderő ezen kifejezéseit, a következőkké lesznek egyenleteink

$$\eta = 0,\ \eta_1 - y_1^0 = 0,\ \eta_2 - y_2^0 = 0$$

ahol η az egész rendszer tömegcentrumának második koordinátája, η_1 a Q_1 test, η_2 a Q_2 test tömegcentrumának második koordinátája. Ezek az egyenletek azt állítják, hogy amidőn csak a nehézségi szabad erő tesz számot, akkor a három test nyugalom-tartásának a szükséges és elégséges föltétele abból áll, hogy 1., az egész rendszer tömegcentruma az állványhoz rögzített tengely vertikális síkjaiban legyen 2., a Q_1 test tömegcentruma Q_1 tengelyének vertikális síkjában legyen, 3., a Q_2 test tömegcentruma Q_2 tengelyének vertikális síkjában legyen. Ezek egy közönséges mérleg nyugalmának szükséges és elégséges föltételei.

Merev testek súrlódásáról.

99., Ha egy test igen vékony határrétegen belül tekinthető csak merev testnek, de a határrétege kis deformációkat szenvedhet, akkor az érintkezésben főképp az ilyen deformációkból származnak azok a hatások, amelyeket súrlódásból származóknak mondunk. Ilyenkor a határrétegek kapcsoló rendszert alkotnak és pedig aktív kapcsoló rendszert, amelynek az aktivitásához tartozik a tapadás is és, amidőn valamely merev testek telepрendszer gyanánt szerepelnek, de csak határrétegeiken belül tekinthetők mereveknek, akkor a határrétegeik mekanikai állapota nem lévén független azon anyagi rendszertől, amelynek a mekanikájával foglalkozunk: a határrétegeiken belül lévő törzseik teszik a teleprendszert.

Természetesen a kényszer virtuális munkájának a törvénye surlódás esetén csak úgy érvényes, ha e törvényben a határrétegeknek az aktivitását mint anyagi rendszerünkre háramló kényszert tartjuk számon (mint ezen artikulus előtt a 4. és 5. példában). Ez azonban kielégitően általában nincs módunkban s azért rendszerint egészen a 27. artikulus értelmében iparkodunk eljárni

100., Ha a merev testek elvi relációjában 89-ben a surlódásból származó kényszert nem vesszük figyelembe, hanem a virtuális eltolásokon és elforditásokon mindazokat értjük, amelyeket a súrlódástalan kényszer engedne meg, szóval, ha csak a helyzeti kényszert vesszük tekintetbe, de tényleg van súrlódás, akkor megszünik helyes lenni azon elvi reláció. Azonban mindig vannak oly (A^*, B^*, C^*) és (U^*, V^*, W^*) vektorok, hogy ha (A, B, C) helyett $(A+A^*, B+B^*, C+C^*)$ és (U, V, W) helyett $(U+U^*, V+V^*, W+W^*)$ vektorokat használjuk 89-ben, helyes lesz az, jóllehet csak a helyzeti kényszerre vonatkozik, vagyis, állitható:

$$\sum\{(m\ddot{\xi} - A - A^*)\delta a + \cdot + \cdot +$$
$$+ \frac{d}{dt}S(y\dot{z} - z\dot{y})\mathfrak{D}m - U - U^*)\delta u + \cdot + \cdot\} \geqq 0$$

ámbár itt $(\delta a, \delta b, \delta c)$, illetőleg $(\delta u, \delta v, \delta w)$ mindazokat a virtuális eltolásokat, illetőleg elfordításokat jelentik, amelyeket a puszta helyzeti kényszer megenged, nem pedig csupán azokat, amelyeket a teljes kényszer enged meg.

Az ilyetén (A^*, B^*, C^*) és (U^*, V^*, W^*) vektorokat a surlódás toló, illetőleg forgató visszahatásának (reakciójának) nevezzük.

Ha pedig a multiplikátoros eljárásból a helyzeti kényszeren előkerülő multiplikátoros tagokat A_0, B_0, C_0, U_0, V_0, W_0 jelöli, akkor

$$m\ddot{\xi} = A + A^* + A_0 \text{ stb.}$$

$$\frac{d}{dt}S(y\dot{z} - z\dot{y})\mathfrak{D}m = U + U^* + U_0 \text{ stb.}$$

és a helyzeti kényszerből származó toló illetőleg forgató visszahatás az (A_0, B_0, C_0) illetőleg (U_0, V_0, W_0). A súrlódásból származó (A^*, B^*, C^*) toló és (U^*, V^*, W^*) forgató visszahatás felől külön tapasztalások alapján törekszünk oly ismereteket szerezni, amelyek elégségesek mekanikai kérdéseink elintézésére. Mindeddig azonban ez is csak némely igen egyszerű esetekben sikerült kielégitően. Egyébiránt épen egyenleteink szolgálnak arra is, hogy azokat a külön tapasztalásokat megszerezzük. Mindebben jó segítségünkre van a súrlódás toló és forgató visszahatásának oly összetevőkre bontása, amelyek egy-egy fölületelem súrlódásából valók és pedig mint sikló mozgás ellen toló s pörgő és gördülő mozgás ellen forgató visszahatások. Másszerüek pedig ezen hatások nyugalomban, mint mozgásban: nyugalomból mássá válnak a mozgás megindulásában és mozgásból mássá válnak a mozgás megszünésében; sőt másszerüek aszerint is, hogy a háromféle mozgás (siklás, pörgés, gördülés) melyike, vagy melyik ketteje szünetel, vagy kezdődik, vagy végződik. Különben a pörgés és gördülés ellen ható súrlódás rendszerint igen kis mérvü.

<u>Példa.</u> Homogén merev kerék körös merev henger körül, amelyet mindenütt szorosan érint, surlódással foroghat, más mozgást nem végezhet. A kerék geometriai tengelye a henger geometriai tengelyében, tehát a forgás tengelyében van.

Koordinátarendszerünket a hengerhez vögzitsük, úgy pedig, hogy x tengelye a forgás tengelyében legyen.

Most a virtuális munka törvénye 100

alól egyetlen testre, a kerékre alkalmazandó, tehát a Σ jegy elmarad. Továbbá a kerék helyzeti kényszeréből

$$\delta a = 0,\ \delta b = 0,\ \delta c = 0$$
$$\delta v = 0,\ \delta w = 0$$

Van tehát a mozgás meghatározására

$$\frac{d}{dt} S(y\dot{z} - z\dot{y})\mathfrak{D}m = \mathfrak{U} + \mathfrak{U}^*$$

Hogyha pedig az x tengely körül kezdet óta Θ az elfordulás szöge, akkor

$$\dot{y} = -z\dot{\Theta},\ \dot{z} = y\dot{\Theta}$$

tehát:

$$S(y\dot{z} - z\dot{y})\mathfrak{D}m = \dot{\Theta}\cdot S(y^2+z^2)\mathfrak{D}m = J.\dot{\Theta}$$

ahol az J inerciamomentum konstans.

Tegyük föl, hogy a henger a földhöz van rögzitve és a kerékre csak a nehézségi szabad erő hat. Akkor $\mathfrak{U} = 0$ állandóan, tehát

$$J\ddot{\Theta} = \mathfrak{U}^*$$

egyenletünk van, ahol $\mathfrak{U}^*$ a surlódás visszahatásának x tengelyű forgatómomentuma.

A tapasztalás szerint addig, míg a $\dot{\Theta}$ szögsebesség nagysága valamely alacsony alsó határon felül van, az érintkező határrétegek pedig számottevően nem változnak, az egyszerübb esetekben $\mathfrak{U}^*$ megközelitőleg konstansnak számíthat. Az előjele természetesen ellentétes a $\dot{\Theta}$ szögsebesség előjelével, mert a sebességet a súrlódás mindig csökkenteni törekszik. Ezúttal

$$U^* = \pm J.k \quad , \quad 0 < k = const.$$

és így $\ddot{\Theta} = \pm k$, ahol a felső vagy alsó előjel érvényes aszerint, amint $\dot{\Theta}$ negatív vagy pozitív. Legyen $\dot{\Theta}$ kezdetben pozitív $= \dot{\Theta}_0$. Most mindaddig $-k$ használandó, amig csak $\dot{\Theta}$ el nem tűnik és k mindaddig állandó, amig csak $\dot{\Theta}$ bizonyos igen kis értékhez nem jutott, úgy hogy e pillanatig egyenletünkből

$$\dot{\Theta} = \dot{\Theta}_0 - kt \qquad (k > 0)$$

De egyenletünk $\dot{\Theta}$ igen kis értékén alul már csak megközelítőleg érvényes és megközelítőleg is csak addig, amig $\dot{\Theta}$ el nem tűnik. Azután abban nyilvánul a súrlódás, hogy nyugalmóból csak úgy fordítható ki a kerék, ha bizonyos értéken fölül lévő forgató hatást visel valamely szabaderőktől.

A k együtthatót és a $\dot{\Theta}_0$ kezdeti szögsebességet is könnyen meghatározhatjuk még egy integráció után két helyzet megfigyeléséből. A Θ-án a kezdet óta létrejött szöget értvén :

$$\Theta = \dot{\Theta}_0 t - \frac{k}{2} t^2$$

Ha két adott időponthoz megfigyeljük a létrejött Θ szöget, kiszámithatjuk innen k és $\dot{\Theta}_0$ értékét.

Eszményi izotrop folyós testek.

101, Egy egyszeres (a 2. artikulus értelmében egyetlen anyagi komponensből álló) folyós testben (folyadék vagy légnemű test) dt időelemben $(\partial x, \partial y, \partial z) \equiv \partial w$ jelentse az elemi részek hely és idő szerint egyenletesen deriválható lehetséges elemi elmozdulásait. Mivel egyenletesen deriválható ∂w a koordináták szerint, úgy a divergenciája

$$\operatorname{div} \partial w \equiv \frac{\partial \partial x}{\partial x} + \frac{\partial \partial y}{\partial y} + \frac{\partial \partial z}{\partial z}$$

invariáns minden koordináta-transzformációban.

Más előadásokból megtudjuk, hogy az x, y, z helyen gondolt testelemnek $\mathfrak{D}V$ térfogatával szorozva nem más ez, mint $\mathfrak{D}V$-nek az a megváltozása, amely a ∂w lehetséges elemi elmozdulások következménye:

$$\operatorname{div} \partial w . \mathfrak{D}V = \partial \mathfrak{D}V.$$

A tényleges elemi elmozdulásokban

$$\operatorname{div} dw\, \mathfrak{D}V = d\mathfrak{D}V$$

illetőleg

1 $$\operatorname{div} w \,.\, \mathfrak{D}V = \frac{d\mathfrak{D}V}{dt}$$

Eszményi izotrop folyós testnek mondjuk egy testet, mikor annak a belsejében legalább is minden oly ∂w elemi elmozdulások lehetségesek, amelyekkel

$$\partial\mathfrak{D}V \geqq d\mathfrak{D}V,$$

azaz

$$\operatorname{div} \partial w \geqq \operatorname{div} dw$$

Az eszményi izotrop folyós testben tehát legalább is minden oly $\partial w - dw$ relativ elmozdulás (virtuális elmozdulás), amellyel

2 $$\operatorname{div} \delta w \geqq 0$$

ami azt jelenti, hogy $\delta\mathfrak{D}V \geqq 0$.

A fölületi normálist a test belseje felé számitva jelöljük ennek az egységvektorát $\mathfrak{r}$-val. Mindenütt, ahol a folyós test teleprendszerrel érintkezik és abba nem hatolhat:

3 $$\mathfrak{r}\, \delta w \geqq 0$$

Föltegyük, hogy olyan a teleprendszer, hogy nincs surlódása azzal a testnek úgy, hogy attól csakis a 3 alatti virtuális kényszert viseli.

102. Forduljunk már most a virtuális munka törvényéhez. Ha a ρ tömöttségű DV térfogatú w helyű elemi részre ható szabaderő Dk, akkor

$$\int_V (\ddot{w}\delta w)\,\rho\, DV - \int_V (Dk\, \delta w) \geq 0$$

tartalmazza ezt a törvényt.

A Dk szabaderő egy test belsejében mindig oly rendű végtelen kicsiny, mint a hatását viselő testelem térfogata. A test határán a határréteg merőleges széleseivel szabjuk ki a testelemeket. Az ilyen testelemre ható Dk szabaderő oly rendű végtelen kicsiny, mint a test határfölületének azon DS elemi része, amely a testelem fölületéhez tartozik. Ha tehát egy test belsejében

$$Dk = k\,DV$$

és a határán

$$Dk = N\,DS$$

tesszük, akkor k és N véges mekkoraságú vektorok. Az elsőt (k) a szabaderő sűrűségének, a másodikat (N) a szabaderő nyomásának, vagy röviden szabadnyomásnak mondjuk. Ezek szerint a virtuális munka egyenlőtlenségét így írjuk fel:

$$\underline{4} \qquad \int_V (\ddot{w}\,\delta w)\,\rho\,\mathfrak{D}V - \int_V (k\,\delta w)\,\mathfrak{D}V - \int_S (\Pi\,\delta w)\,\mathfrak{D}S \geqq 0$$

103., Egy eszményi izotrop folyós testben ezen egyenlőtlenség a $\underline{2}$ és $\underline{3}$-féle egyenlőtlenségek következményese. Ily testben az egyenlőtlenségek tana szerint vannak tehát olyan nem negativ $p\,\mathfrak{D}V$ multiplikátorok a test belsejéhez és olyan nem negativ $\lambda\,\mathfrak{D}S$ multiplikátorok a testnek a teleprendszerrel érintkező σ határához, hogy

$$\underline{5} \quad \left\{ \begin{aligned} &\int_V (\ddot{w}\,\delta w)\,\rho\,\mathfrak{D}V - \int_V (k\,\delta w)\,\mathfrak{D}V - \int_S (\Pi\,\delta w)\,\mathfrak{D}S \equiv \\ &\equiv \int_V p\,\mathrm{div}\,\delta w\,\mathfrak{D}V + \int_\sigma \lambda(\nu\,\delta w)\,\mathfrak{D}S \end{aligned} \right.$$

Ugyanis a $\mathrm{div}\,\delta w \geqq 0$ $\underline{2}$ alatt írt egyenlőtlenségek is egyszerű (azaz homogén lineáris) egyenlőtlenségek a virtuális elmozdulások között, mert ha az x_1, y_1, z_1 pont az x, y, z ponthoz végtelen közel lévő pontot jelent, akkor

$$\mathrm{div}\,\delta w = \frac{\partial \delta x}{\partial x} + \frac{\partial \delta y}{\partial y} + \frac{\partial \delta z}{\partial z} =$$

$$= \frac{\delta x_1 - \delta x}{x_1 - x} + \frac{\delta y_1 - \delta y}{y_1 - y} + \frac{\delta z_1 - \delta z}{z_1 - z}$$

104., Az 5. alatt követelt azonosság azonban csak úgy teljesülhet, ha a jobboldalon lévő térintegrál parciális redukció alá fogható, mert benne a virtuális elmozdulások nem maguk fordúlnak elő a $\mathfrak{D}V$ térelem mellett (ahogy a baloldal térintegráljaiban vannak), hanem a koordinátaderiváltjaik fordúlnak elő. A p multiplikátor tehát szükségképen olyan függvénye a helynek és időnek, hogy a parciális redukció végrehajtható:

$$\int_V p \operatorname{div} \delta w . \mathfrak{D}V = -\int_V (\operatorname{grad} p . \delta w)\mathfrak{D}V - \int_S p(n . \delta w).$$

Már most így írható fel az 5. alatt követelt azonosság:

$$\int_V (\rho \ddot{w} - k + \operatorname{grad} p) . \delta w . \mathfrak{D}V +$$

$$+ \int_\sigma \{(p - \lambda) n - \mathfrak{N}\} . \delta w . \mathfrak{D}S + \int_{S-\sigma} (p n - \mathfrak{N}) . \delta w . \mathfrak{D}S \equiv 0$$

105., Ebből következnek:

I. A test belsében

(I) $\qquad \rho \ddot{w} = k - \operatorname{grad} p \quad (p \geqq 0)$

II. A testnek a teleprendszerrel érintkező határán

(II) $\qquad \mathfrak{N} = (p - \lambda) n \quad (p \geqq 0, \lambda \geqq 0)$

III. A test szabad határán

(III) $\mathfrak{N} = p\mathfrak{n}$

A harmadik egyenlet értelmében az eszményi folyós állapot szükséges föltétele, hogy a test szabad határán ható szabad nyomás mindenütt a határfölületre merőleges és a test belseje felé irányúló nyomás leggyen.

A második egyenlet értelmében az eszményi folyós állapot szükséges föltétele az is, hogy a testeknek a teleprendszerrel érintkező határán ható szabad nyomás szintén mindenütt merőleges leggyen a határfölületre, de itt kifelé is irányúlhat, mert $\mathfrak{L} > p$ is lehetséges, befelé pedig nem lehet naggyobb p-nél.

Az első egyenlet értelmében az eszményi folyós állapottal csak olyan mekanikai állapot fér össze, amelyben a $p\mathfrak{v} - \mathfrak{K}$ vektor gradiens. Különösen pedig eszményi folyós test nyugalmának szükséges föltétele, hogy a szabaderő sűrűsége gradiens leggyen.

106, Ezek azonban nem elégséges föltételek, aminek az az egyik oka, hogy általában másféle elemi elmozdulások is lehetségesek a testben, mint azok, amelyeket mink itt számbavettünk. Ehhez járúl, hogy még egy térbeli egyenletet egészen általánosan hozzácsatolhatunk az első egyenletünkhöz, nevezetesen a tömegmegmaradás egyenletet, u. m. a

$$d\rho\, DV = 0$$

egyenletet. Átosztva azt a dt időelemmel, a baloldala részletesen így van:

$$\frac{d\rho}{dt} DV + \rho\, \frac{d.DV}{dt} =$$

$$= \left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial\rho}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial\rho}{\partial z}\dot{z}\right) DV + \rho\, \frac{dDV}{dt}$$

tehát tekintettel $\mathfrak{1}$-re, még,

IV. a tömegmegmaradás egyenlete gyanánt a

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathfrak{v} = 0$$

egyenletünk is vagyon. De általában még ezzel együtt sincs elég egyenletünk. Hőtani ismeretekre van szükségünk a teljességhez.

107. Az (I) egyenletből látható, hogy $-\operatorname{grad} p . DV$ az elemi részre ható kényszererő. Ha az elemi rész DV térfogatának magasabb rendű végtelen kis részeit DDV jelöli, akkor

$$-\operatorname{grad} p . DV = -\int_{DV} \operatorname{grad} p . DDV$$

Redukáljuk térintegrálunkat fölületi integrállá. Ez az elemi rész fölületére fog kiterjedni. Azt kapjuk, hogy ha az elemi rész fölületének $\mathfrak{D}\mathfrak{D}S$ elemén az elemi rész belsejébe mutató normális egységvektora $\mathfrak{n}$, akkor

$$-\operatorname{grad} p\, \mathfrak{D}V = \int_{\mathfrak{D}S} p\,\mathfrak{n}\, \mathfrak{D}\mathfrak{D}S$$

ahol most $\mathfrak{D}S$ az elemi rész egész fölületét jelöli.

E kifejezés szerint az elemi résztől viselt kényszererő hatása mindig az elemi rész határán ható nyomások szállító hatásával értelmezhető és pedig az elemi rész határán mindenütt normális irányban befelé ható nyomások szállító hatásával s épen e nyomások nagyságát jelenti a p multiplikátor.

Eszményi izotrop szilárd testek.

108, Az itt előadandókban folyvást emlékezetben tartsuk, hogy fizikai végtelen kicsinyeknek vagy fizikai végtelen nagyoknak mindig oly kicsiny vagy oly nagy mennyiségeket (vektorokat, skalárisokat) mondunk, amelyeken az infinitezimális számítás szabályai számottevő hiba nélkül alkalmazhatók.

Ha egy testnek az elemi részei a relativ helyzetüket csak fizikai végtelen kis mértékben változtat*hat*ják, akkor a testet szilárd testnek mondjuk. Szilárdnak mondjuk tehát, ha az elemi részei egy tömegtelen merev törzsnek a pontjaitól csak fizikai végtelen kis távolságokba mozdíthatók el.

Egy szilárd test elemi részeinek x, y, z koordinátái egy mereves pontrendszer pontjainak x_0, y_0, z_0 koordinátáitól csak fizikai végtelen kicsit különbözhetnek, tehát, azt írván, hogy:

1) $$x = x_0 + \bar{x}, \quad y = y_0 + \bar{y}, \quad z = z_0 + \bar{z}$$

az $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ vektor csak fizikai végtelen kicsiny lehet.

Az x_0, y_0, z_0 merev tömegtelen pontrendszert röviden a szilárd test törzsének mondjuk majd. Az $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ fizikai végtelen kis vektorokat mint az (x_0, y_0, z_0) pontokból számított elmozdulásokat pedig majd röviden ellendüléseknek, az elemi részek ellendüléseinek mondjuk.

109.) Abban a föltevésben, hogy az $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ ellendülés a testben egyenletesen derivalható függvénye az x, y, z helynek (és az időnek), tekintsük a

2) $$\begin{cases} \operatorname{div}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \equiv H_1, \quad (\operatorname{rot}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}))^2 \equiv H_2^2, \\ (\operatorname{grad} \bar{x})^2 + (\operatorname{grad} \bar{y})^2 + (\operatorname{grad} \bar{z})^2 \equiv H_3^2 \end{cases}$$

skalárisokat. Könnyű vektortani szemlélődés meggyőz arról, hogy ezek a skalárisok invariánsok a koordináta-transformációban. Más előadásokból azt is meg fogjuk látni, hogy a $\mathcal{H}_1$ és a $\mathcal{H}_3^2 - \frac{1}{2}\mathcal{H}_2^2$ invariánsokat az elemi részeknek az $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ ellendülésektől okozott deformációja (méreteik megváltozása) határozza meg, és a deformáció minden lineáris invariánsát meghatározza az egyetlen $\mathcal{H}_1$ és minden kvadratikus invariánsát meghatározza $\mathcal{H}_1^2$ és $\mathcal{H}_3^2 - \frac{1}{2}\mathcal{H}_2^2$.

110. Az 1) alatti kifejezésekben x_0, y_0, z_0 a törzsnek a pontjait jelentvén, az x_0, y_0, z_0 koordináták minden lehetséges elemi megváltozása kifejezhető hat elemi paraméterrel, u. m. a törzs elemi eltolásának és elemi elfordulásának a komponenseivel. Nevezetesen x_0, y_0, z_0 virtuális megváltozása

$$\begin{aligned}
\delta x_0 &= \delta a + z_0 \delta v - y_0 \delta w \\
\delta y_0 &= \delta b + x_0 \delta w - z_0 \delta u \\
\delta z_0 &= \delta c + y_0 \delta u - x_0 \delta v
\end{aligned}$$

ahol $\delta a, \delta b, \delta c$ a törzs virtuális eltolásának a komponensei, $\delta u, \delta v, \delta w$ a törzs virtuális elfordításának a szögei a koordináta tengelyek körül. Minthogy $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ fizikai végtelen kicsiny, ennélfogva helyettük

$$\delta x_0 = \delta a + z \delta v - y \delta w, \text{ stb.}$$

tehető. Hasonlóan, a törzs tényleges mozgására

$$\dot{x}_0 = \dot{a} + z.\dot{v} - y\dot{w} \quad stb.,$$

ahol az $(\dot{a}, \dot{b}, \dot{c})$ vektor a törzs haladó mozgásának a sebessége és az $(\dot{u}, \dot{v}, \dot{w})$ vektor a törzs origói szögsebessége.

Ha már most az $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ ellendülés virtuális megváltozását $(\delta\bar{x}, \delta\bar{y}, \delta\bar{z})$, tényleges megváltozásának a sebességét pedig $(\dot{\bar{x}}, \dot{\bar{y}}, \dot{\bar{z}})$ jelöli, akkor 1)-ből

3) $$\delta x = \delta x_0 + \delta\bar{x} = \delta a + z.\delta v - y.\delta w + \delta\bar{x}, \; stb.$$

4) $$\dot{x} = \dot{x}_0 + \dot{\bar{x}} = \dot{a} + z.\dot{v} - y\dot{w} + \dot{\bar{x}}, \; stb.$$

111.) Eszményi izotrop szilárd testnek mondjuk a szilárd testet, ha a belsejében az $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ ellendüléseknek $(\partial\bar{x}, \partial\bar{y}, \partial\bar{z})$ lehetséges elemi megváltozásaihoz tartoznak mindazok, amelyek szerint

$$\partial\mathcal{H}_1 \gtreqless d\,\mathcal{H}_1, \quad \partial(\mathcal{H}_1)^2 \leqq d(\mathcal{H}_1)^2,$$
$$\partial\left(\mathcal{H}_3^2 - \tfrac{1}{2}\mathcal{H}_2^2\right) \leqq d\left(\mathcal{H}_3^2 - \tfrac{1}{2}\mathcal{H}_2^2\right)$$

Tekintettel $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2^2$ és $\mathcal{H}_3^2$-nek 2) alatt írt definiciójára, így is írhatók ezek:

$$\operatorname{div}(\partial\bar{x}, \partial\bar{y}, \partial\bar{z}) \gtreqless \operatorname{div}(d\bar{x}, d\bar{y}, d\bar{z})$$
$$2\operatorname{div}(\bar{x},\bar{y},\bar{z})\operatorname{div}(\partial\bar{x},\partial\bar{y},\partial\bar{z}) \leqq 2\operatorname{div}(\bar{x},\bar{y},\bar{z})\operatorname{div}(d\bar{x},d\bar{y},d\bar{z})$$

$$2\,\mathrm{grad}\,\bar{x}\,\mathrm{grad}\,\partial\bar{x} + \cdot + \cdot - \mathrm{rot}(\bar{x},\bar{y},\bar{z})\,\mathrm{rot}(\partial\bar{x},\partial\bar{y},\partial\bar{z}) \leqq$$
$$\leqq 2\,\mathrm{grad}\,\bar{x}\,\mathrm{grad}\,d\bar{x} + \cdot + \cdot - \mathrm{rot}(\bar{x},\bar{y},\bar{z})\,\mathrm{rot}(d\bar{x},d\bar{y},d\bar{z})$$

Minthogy pedig $\partial\bar{x} - d\bar{x} = \delta\bar{x}$ stb., így ezen a módon is írhatók egyenlőtlenségeink:

$$\mathrm{div}(\delta\bar{x},\delta\bar{y},\delta\bar{z}) \geqq 0$$
$$-2\,\mathrm{div}(\bar{x},\bar{y},\bar{z})\,\mathrm{div}(\delta\bar{x},\delta\bar{y},\delta\bar{z}) \geqq 0$$
$$-2(\mathrm{grad}\,\bar{x}\,\mathrm{grad}\,\delta\bar{x} + \cdot + \cdot) +$$
$$+ \mathrm{rot}(\bar{x},\bar{y},\bar{z})\,\mathrm{rot}(\delta\bar{x},\delta\bar{y},\delta\bar{z}) \geqq 0$$

Eszményi izotrop szilárd testnek mondunk tehát egy szilárd testet, ha az $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ ellendülléseknek minden olyan képzelt megváltozása a virtuális megváltozásaihoz tartozik, amely ezt a három egyenlőtlenséget a test belső elemi részein kielégíti.

A $\mathcal{H}$ betűk szerint írva, nyilvánképen így van ez a három egyenlőtlenség:

$$(5)\qquad \delta\mathcal{H}_1 \geqq 0\,,\quad -\delta(\mathcal{H}_1)^2 \geqq 0\,,\quad \delta\left(\tfrac{1}{2}\mathcal{H}_{\underset{1}{3}}^2 - \mathcal{H}_{\underset{3}{2}}^2\right) \geqq 0$$

112., A test minden belső elemi részére tartozik három ilyen egyenlőtlenség. Nem negatív multiplikátorokkal foglaljunk össze valamennyit. Az elsőfélékhez $p\mathfrak{D}V$, a másodikfélékhez $N\mathfrak{D}V$, a harmadikfélékhez $K\mathfrak{D}V$ jelöljék a multiplikátorokat, amelyekben $\mathfrak{D}V$ az illető elemi rész térfogata. Eszerint egyenlőtlenségeink multiplikátoros összefogla–

lásával, a test V térfogatára kiterjesztett integrációval:

$$\text{6} \qquad \int_V \left\{ p\,\delta\mathcal{H}_1 - \mathcal{N}\,\delta(\mathcal{H}_1)^2 + \mathcal{K}\,\delta\left(\tfrac{1}{2}\mathcal{H}_2^{\,2} - \mathcal{H}_3^{\,2}\right)\right\} \mathcal{D}V \geqq 0$$

De írjuk, hogy

$$\text{7} \qquad \begin{cases} p - 2\mathcal{N}\left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{y}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{z}}{\partial z}\right) - 2\mathcal{K}\frac{\partial \bar{x}}{\partial x} \equiv X_x \\ p - 2\mathcal{N}\left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{y}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{z}}{\partial z}\right) - 2\mathcal{K}\frac{\partial \bar{y}}{\partial y} \equiv Y_y \\ p - 2\mathcal{N}\left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{y}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{z}}{\partial z}\right) - 2\mathcal{K}\frac{\partial \bar{z}}{\partial z} \equiv Z_z \\ -\mathcal{K}\left(\frac{\partial \bar{z}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{y}}{\partial z}\right) \equiv Y_z \equiv Z_y \\ -\mathcal{K}\left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{z}}{\partial x}\right) \equiv Z_x \equiv X_z \\ -\mathcal{K}\left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{x}}{\partial y}\right) \equiv X_y \equiv Y_x \end{cases}$$

Ezek értelmében részletezve így van a 6:

$$\text{8} \qquad \left\{ \begin{aligned} &\int_V \left\{ \left(X_x \frac{\partial \delta \bar{x}}{\partial x} + X_y \frac{\partial \delta \bar{x}}{\partial y} + X_z \frac{\partial \delta \bar{x}}{\partial z} \right) + \right. \\ &\left. + (\cdots) + (\cdots) \right\} \mathcal{D}V \geqq 0 \end{aligned} \right.$$

Még általában a test-nek a határán, fölületének oly 6 részére, amelyen teleprendszertől vagy kapcsoló rendszertől külső kényszert visel:

$$\text{9} \qquad \mathcal{F}_x\,\delta x + \mathcal{F}_y\,\delta y + \mathcal{F}_z\,\delta z \geqq 0$$

féle egyenlőtlenségünk van, s minden DS elemi részére egy, vagy több. Multiplikátoros összefoglalásukból λDS nem negativ multiplikátorok szerint

$$\underline{10} \qquad \int_{\sigma}\left(\Sigma\left(F_x\delta x + F_y\delta y + F_z\delta z\right)\lambda\right) DS \geqq 0$$

ahol a Σ összegelés arra való, hogy ha egy-egy fölületelemre több virtuális egyenlőtlenség tartoznék, ezek mind be legyenek iktatva összefoglaló (9) alatti egyenlőtlenségünkbe.

113. A virtuális munka törvénye részletesen irva, az előbbi cikk (Eszményi folyós testek) (4) alatti képletének értelmében

$$\underline{11} \qquad \int_{V}\left\{(\rho\ddot{x}-X)\delta x+\cdot+\cdot\right\}DV-\int_{S}(P\delta x+Q\delta y+R\delta z)DS \geqq 0$$

ahol (X, Y, Z) a szabaderő sürüsége a test belsejében és (P, Q, R) a szabadnyomás a test határain.

Ez az egyenlőtlenség egy eszményi izotrop szilárd testben következményese az $\underline{5}$ és $\underline{9}$-féle egyenlőtlenségeknek. Az egyenlőtlenségek tana szerint vannak tehát $\underline{7}$ értelmében $\underline{8}$-ban olyan p, N, K nem negativ multiplikátorok és $\underline{10}$-ben olyan λ nem negativ multiplikátorok, hogy $\underline{11}$ baloldala identikusan egyenlő $\underline{8}$ és $\underline{10}$ baloldalának az összegével:

$$\int_V \{(\rho\ddot{x} - X)\delta x + \cdot + \cdot\}\mathfrak{D}V - \int_{S'}(P\delta x + \cdot + \cdot)\mathfrak{D}S' \equiv$$

$$\equiv \int_V \{(X_x \frac{\partial \delta\bar{x}}{\partial x} + X_y \frac{\partial \delta\bar{y}}{\partial y} + X_z \frac{\partial \delta\bar{z}}{\partial z}) +$$

$$+(\cdots) + (\cdots)\}\mathfrak{D}V + \int_\sigma \{\Sigma(F_x\delta x + \cdot + \cdot)\lambda\}\mathfrak{D}S$$

A jobboldal térintegrálján az identitás lehetősége megköveteli, hogy párciális redukciót végezhessünk. Ez a térintegrál a redukció végeztével =

$$-\int_V \{(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z})\delta\bar{x} + \cdot + \cdot\}\mathfrak{D}V$$

$$-\int_S \{(X_x\alpha + X_y\beta + X_z\gamma)\delta\bar{x} + \cdot + \cdot\}\mathfrak{D}S$$

ahol α, β, γ a befelé mutató normális iránykoszinuszai. Ezt írván az identitás jobboldali térintegrálja helyett, azután beírván $\delta x, \delta y, \delta z$ helyett a ③ alatt lévő $\delta u + z\delta v - y\delta w + \delta\bar{x}$ stb. kifejezéseket, identitásunk azt kívánja, hogy a $\delta a, \delta b, \delta c, \delta u, \delta v, \delta w$ paramétrumoknak és minden $\delta\bar{x}, \delta\bar{y}, \delta\bar{z}$ komponensnek baloldali szorzója egyenlő legyen a jobboldali szorzójával

Ebből az itt következő egyenletek származnak. A test egészére vonatkozóan:

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} \int_V (\rho\ddot{x} - X)\mathfrak{D}V = \int_{S'} P\mathfrak{D}S' + \int_\sigma (\Sigma F_x \lambda)\mathfrak{D}S', \text{ stb.} \\ \int_V \{y(\rho\ddot{z} - Z) - z(\rho\ddot{y} - Y)\}\mathfrak{D}V = \int_{S'}(yR - zQ)\mathfrak{D}S' + \int_\sigma (\Sigma(yF_z - zF_y)\lambda)\mathfrak{D}S, \text{ stb.} \end{cases}$$

A test belső pontjaira:

(II) $$\rho \ddot{x} = X - \left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} \right), \text{ stb.}$$

A σ felület pontjaira:

(III) $$P = X_x \alpha + X_y \beta + X_z \gamma - \sum F_x \lambda, \text{ stb.}$$

Az $S - \sigma$ szabad fölület pontjaira:

(IV.) $$P = X_x \alpha + X_y \beta + X_z \gamma, \text{ stb}$$

Ezekhez csatlakoznak (4) alól:

(V) $$\dot{x} = \dot{a} + z_0 \dot{v} - y_0 \dot{w} + \dot{\bar{x}}, \text{ stb.}$$

és a tömegmegmaradás egyenlete u. m. az előbbi cikk (IV) alatti egyenlete, részletesen írva:

(VI) $$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \rho \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \rho \dot{z}}{\partial z} = 0$$

Végül a tényleges mekanikai állapotnak a külső kényszerből származó határozott egyenletei is idetartoznak.

Az (I) alatti egyenletek levezethetők a (II), (III), (IV) alatti egyenletekből.

Folyós és szilárd testek mekanikájának alkalmazásaival más előadások foglalkoznak.