Harkay István

A variatio-számitás elemei.

Dr. Schlesinger Lajos
után.

1901/02.

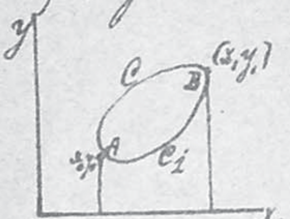
Ha egy kifejezésünk van, a mely változó mennyiségtől függ és ha ennek a változó mennyiségnek különböző értékeket adunk, akkor az illető kifejezés változását vts az illető kifejezés különböző értékeit, a melyek a változó mennyiség különböző értékeinek felelnek meg bizonyos feltevések mellett a differentialis calculus módszereinek segélyével meg lehet vizsgálni akkép, hogy az illető kifejezés változását vizsgáljuk a változó mennyiség végtelen kis változásainál. Ebben áll a diff. calc. módszereinek lényege.

Képzeljük most, hogy egy oly kifejezésünk van, a mely nem egy változó mennyiségtől függ, hanem a mely kifejezésben még határozatlan függvények szerepelnek. Hogy a dolgot világosabban láthassuk vegyünk mindjárt egy példát.

Tekintsük az:

$$\left.\begin{array}{l} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{array}\right\}$$

görbét, a melynek Descartes féle derékszögű coordinatái tehát ugy vannak előállitva, mint egy „t" parameter függvényei; legyen görbénknek a: $t=t_0$ és $t=t_1$ parameter értékeknek megfelelő két pontja: (x_0y_0) és (x_1,y_1) képzeljük kiszámitva ennek a görbének az ivhosszát ezen két pont között. Ha az ivhossznak egyáltalában van értelme, kifejezése igy irható:



$$\int_{x_0y_0}^{x_1y_1} ds = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\, dt\,;$$

nyertünk tehát egy olyan kifejezést, a milyenről az imént szóltunk. Itt ugyan nem magok a φ, ψ függvények, hanem ezek derivaltjai szerepelnek, de általánosan ugy vehetjük a dolgot, hogy egy oly kifejezés képezi a vizsgálat tárgyát, a melyben egy bizonyos függvény, ennek successiv deriváltjai, egy más függvény, ismét ennek successiv deriváltjai stb. szerepelnek. Fölvett példánknál maradva nyilvánvaló, hogy ha az A, B pontok közt egy más görbét fektetünk, akkor ennek az uj C_1 görbének ugyanazon két pont közt más ivhossz fog meg felelni. Ámde ezen uj görbének a fektetése analitikailag abban áll hogy φ és ψ függvényalakok helyett más függvény alakokat teszünk az ivhossz kifejezésébe; az ivhossz tehát ezen két függvénytől függ, ugy hogy itt egészen más feladattal állunk szemben, mint azzal, a melyet a diff. calc. segélyével meg-szoktunk oldani. Itt t. i. oly kifejezésünk van a mely nem változó mennyiségektől, hanem változó függvényektől függ és az ilyen kifejezések változásának vizsgálata képezi az u. n. variatio calculus feladatát.

A variatio calculus itt ugyszólván ~~tehát~~ a diff. calc.-nak analogonja, csakhogy a ott változó mennyiség, az itt változó függvény.

A var. calc. hasonlóan jár el, mint a diff. calc. igyekszik t. i. egy bizonyos kifejezés változását – a mely változás az által idéztetik elő, hogy bizonyos függvény alakokat más függvény alakokkal helyettesitünk – az által tanulmányozni, hogy a szóban forgó kifejezésben a függvény alakoknak végtelen kis változását vizsgálja. Hogy mit kell azon értenünk, hogy egy függvény végtelen kis változást szenved, azt nem sokára ált talánosan látni fogjuk; most példánkra vonatkozólag csak annyit jegyzünk meg, hogy φ és ψ függvények végtelen kis változást szenvednek, ha A és B pontok közt fektetett görbe helyébe [C] egy hozzá végtelen közel fekvő más görbét teszünk.

A var. calc. kiválkép egy feladatnak a megoldásáért lett kifejtve. Ismeretes, hogy már a diff. calc. kifejezése idejében is egy feladat állott előtérben, t. i. a differentia-számitás alkalmazása a függvények max. és min.-mak meghatározására, mint az Leipnitz alapvető értekezésének a czíme: „De maximis et minimis itemque tangentibus" is mutatja és a diff. calc. tényleg megtanít bennünket arra, hogy miként kell egy kifejezésben, mely egy változó mennyiségtől függ, felkeresni a változónak azon speciális értékeit, a melyekre nézve az illető kifejezés extremum értéket vesz fel. Hasonló feladat megoldása czéljából lett kifejtve a variatio számítás is. Fölvett példánknál maradva, ha az A és B pontokon keresztül fektetjük az összes elképzelhető görbéket és ha mindezekre a görbékre nézve meghatározzuk A és B között az ívhosszat akkor felvethetjük azt a kérdést, hogy milyen görbe mentén lesz az illető ívhossz extremum, tehát mivel maximumról itt nem lehet szó így csak azt kérdezhetjük, mely A és B pont közt fektetett görbének lesz az ívhossza: minimum? Vagyis ha adva van:

$$J = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt$$

integrál, mely φ és ψ függvényektől függ, kérdés tárgyát képezheti az, hogy a φ és ψ függvények milyen változtatása mellett lesz az „J" integrál minimum: vis feladatunk lehet φ és ψ-t megalkotni akként, hogy ezen speciális értékekkel megalkotott „J" integrál értéke kisebb, mint bármely más függvény érték mellett.

Természetes dolog, hogy általánosan szólva oly kifejezésekkel kell foglalkoznunk, melyek bizonyos függvény alakoktól függenek pl

$$\Phi(f(t), g(t) \ldots f'(t)\, g'(t) \ldots f''(t), g''(t) \ldots)$$

és vizsgálnunk kell ezeknek a kifejezéseknek a változását, ha az egyes függvények helyébe más függvényeket teszünk; azonban a var. calc. rendszerint legalább is az analytikai és geometriai alkalmazásokban oly kifejezésekkel foglalkozik, melyek határozott integrálok alakjában vannak előállítva; mint pl:

$$\int_{t_0}^{t} \Phi\, f(t), g(t) \ldots f'(t)\, g'(t) \ldots)\, dt$$

és épen ezt mi itt főleg szintén

ilyen kifejezésekkel fogunk foglalkozni. Előbb azonban lás
suk, miszerint az ily függvény, illetve függvény rendszer változásán
Hogy erre szükség van mutatja a var. és diff. calc. közt
levő analogia is. A diff. calc. elméletében t. i. az extremum fela-
data nem abban áll, hogy kikeressük a független változó
azon értékét, mely mellett a függvénynek tényleg extremuma
van, hanem azon helyeket keressük, mely a szomszédos pon
tokhoz viszonyítva bír extremum jelleggel. Így áll a dolog
a variatio calc.-ban is t. i. keressük azokat a függvény ala-
kokat, melyek mellett az integral extremum azon értékek
hez képest, melyek az illető függvényeknek bizonyos ha-
tárok közt való változásától előállanak. Ha ezután vala-
mely függvényrendszernek fent jelzett változását pon-
tosabban akarjuk értelmezni a legegyszerűbb módon a kö-
vetkezőleg járhatunk el. Képzeljük, hogy volna két függvé-
nyünk $f(t)$ és $g(t)$, a mely függvényekről feltételezzük, hogy
egyértékűek, végesek és diff.-hatók a t_0-tól t_1-ig terjedő in-
tervallumon belül, vegyünk fel még két, ugyanezen inter-
vallumon belől egyértékű, véges és diff.-ható ~~egy~~ uj függ-
vényt: ξ-t és η-t, s képezzük az: $f(t)+\xi$ és $g(t)+\eta$ kifejezéseket.

Ha: $\left.\begin{array}{l} x=f(t) \\ y=g(t) \end{array}\right\}$ egyenleteket felfogjuk mint egy síkbeli L gör-
bének az előállítását, mely görbe keresztül megy a t_0 és t_1
parameter értékeknek megfelelő pontokon, akkor az:

$\left.\begin{array}{l} f(t)+\xi \\ g(t)+\eta \end{array}\right\}$ kifejezéseket is ugy tekinthetjük, mint egy L_1 görbe pont-
jainak a coordinatait és most ezen két görbét egymásra le-
het vonatkoztatni akkép, hogy a két görbének azon pontjait,
melyek a „t" parameter u. a. értékeinek felelnek meg, egy-
másnak megfelelő pontoknak nevezzük. Ennélfogva
ugy képzelhetjük a dolgot, hogy a L_1 görbe a L görbéből bizo
nyos processus alkalmazásával származik, a mennyiben nem

n

kell egyebet semmi, mint a $\mathfrak{L}$ görbe minden pontját átváltoztatni a $\mathfrak{L}_1$ görbe megfelelő pontjába, ugyhogy a $\mathfrak{L}_1$ görbét felfogjuk mint egy a $\mathfrak{L}$ görbe variálásából eredő görbét, azaz mint a $\mathfrak{L}$ görbe egy variatioját. Az $f(t)$ és $g(t)$ függvényrendszer variatioján tehát egy Keriien azt értjük hogy $f(t)$ és $g(t)$ helyébe $f(t)+\xi$-t és $g(t)+\eta$-t teszszük, a hol ξ és η : t-nek ugyancsak a t_0-tól t_1-ig terjedő intervallumon belül egyértékü véges és diff.-ható függvényei. Czélszerü lesz a következő jelölést bevezetni. Ha x-t és y-t mint $f(t)$ és $g(t)$-értelmezzük és ha ezt a két függvényt az itt jelzett módon varialjuk, akkor ξ-t: δx-el és η-t δy-al jelöljük és t ezen két függvénye neveztetik az x és y variatiojának.

A variatio számitás feladatát tehát igy fogalmazhatjuk: Ha van:

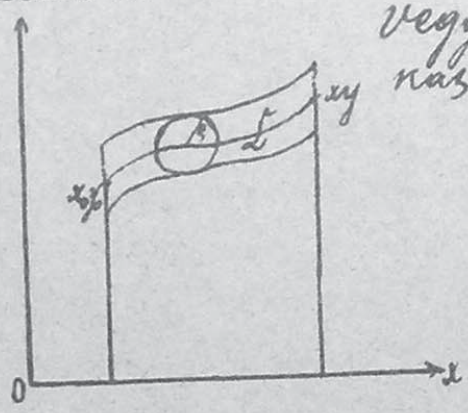
$\Phi(f(t), g(t) \ldots f'(t), g'(t) \ldots)$ kifejezésünk és ha megalkotjuk ezen kifejezést az $f(t)+\xi$, $g(t)+\eta$ függvényrendszerre:

$\Phi[f(t)+\xi, g(t)+\xi, \ldots f'(t)+\xi', g'(t)+\eta' \ldots\ldots]$; vagy másképen kifejezve hatvan egy:

$u = \Phi(x, y \ldots\ldots x', y' \ldots)$ kifejezésünk és ha az által, hogy az: $x, y \ldots x', y' \ldots$ függvények helyébe más függvényeket irunk az:

$\bar{u} = \Phi(x+\delta x, y+\delta y, \ldots x'+\frac{d\delta x}{dt}, y'+\frac{d\delta y}{dt}, \ldots)$ kifejezésbe megyát, akkor keresnünk kell hogy az eredeti u kifejezés micsoda változást szenvedett az által, hogy az $\bar{u}$ kifejezésbe ment át; vis vizsgálnunk kell, hogy miben különbözik $\bar{u}$ az eredeti u-tól. Tehát további vizsgalataink tárgya az: $\bar{u} - u = \Delta u$ kifejezés lesz, melyet az u kifejezés teljes variatiojának nevezünk. Ámde nem kell nekünk ezen Δu minőségét vizsgálni azon esetben, ha δx és δy tetszőleges függvények; hanem szoritkozhatunk vizsgálatainkban arra az esetre, midőn ezek a variatiók bizonyos határon belül mozognak.

Hogy δx és δy ezen határok közé való szorítását jobban megvilágíthassuk, folyamodjunk ismét a geometriai szemlélethez.



Vegyük fel a síkban az (x_0,y_0) és (x,y) pontokat és ezeken keresztül a L görbét s vegyünk azután: „ρ" távolságot és rajzoljunk ezzel, mint radiussal kört a L görbe minden egyes pontja körül, akkor ezen körök összesége egy csíkot fog szolgáltatni a görbe síkjában, mely L görbének ρ radiusu környezete és ha most már valamely L_1 görbe, melynek coordinatái: $\left.\begin{matrix} x+\delta x \\ y+\delta y \end{matrix}\right\}$ teljesen ezen körökből képezett csíkrészen belül marad, akkor azt fogjuk mondani, hogy L_1 az eredeti görbe ρ radiusu környezetében van. Ha ρ meglehetős kicsinnyé válik, a variált görbe szintén meglehetősen közel jut a L görbéhez, ha pedig ρ végtelen kicsinnyé válik: a L_1 görbe az eredetihez végtelen közel fog feküdni, vele végtelenül szomszédos lesz s így: belőle végtelen kis variatióval származott.

Ezután nézzük, hogy egy oly kifejezés, milyet az előzőkben U-val jelöltünk miképp változtatja értékét, ha „x"-t és „y"-t bizonyos variatiónak vetjük alá.

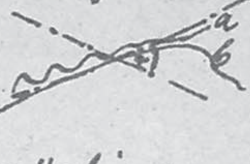
Ha „x": $x+\delta x$-be és „y": $y+\delta y$-ba megy át, akkor kifejezésünkben x' helyébe $x'+\frac{d\delta x}{dt}$-t és y' helyébe $y'+\frac{d\delta y}{dt}$-t kell tennünk, úgy hogy bevezetve a:

$\frac{d\delta x}{dt}=\delta x'$ és $\frac{d\delta y}{dt}=\delta y'$ jelöléseket az $U=\Phi(x,y\dots x',y'\dots)$ kifejezés $x,y\dots, x',y'\dots$, variálása folytán az:

$\bar{U}=\Phi[x+\delta x, y+\delta y, \dots x'+\delta x', y'+\delta y', \dots]$ kifejezésbe fog átmenni.

Vizsgáljuk most ezt az $\bar{U}$-t arra az esetre, ha ha a variált görbe az eredetinek bizonyos szomszédságában fekszik. Ha tehát az illető görbe pontjai csak kis határon belöl variálhatnak, akkor δx és δy függvényeh t"-nek t_0 és t_1 közt fekvő bármely értéke mellett abs. értékre nézve bizonyos határon alul fognak maradni; az azonban még ebből nem következik, hogy a deriváltak variatioi $\delta x'$ és $\delta y'$ szintén csak kis határon belül változnak, mert:

$$\frac{y'}{x'} = \frac{dy}{dx} = tg\varphi,$$ hol φ: a görbe (x, y) pontjában vont érintőnek és a $+X$ tengelynek hajlásszögét jelenti, az tehát, hogy $\delta x'$ és $\delta y'$ szintén igen igen kis határokon belül mozognak, azt jelentené, hogy a variálás következtében az illető görbének nemcsak pontjai mennek át igen közeli pontokba, hanem, hogy az illető görbének érintői is igen kevéssel változtatják helyzetöket, a mi nem következik be mindig, mert



pl a és b két görbe megfelelő pontjainak távolsága lehet kicsiny, mégis két megfelelő ponthoz huzott érintő hajlásszöge: α'' elég nagy. Ezen sajátságos körülménnyel fogva szükségesnek látszik, hogy kissé élesebben fogalmazzuk meg a szomszédos görbe fogalmát, azt fogjuk mondani, hogy ha nemcsak δx és δy, hanem $\delta x'$ és $\delta y'$ is alul maradnak bizonyos határon, akkor a variált az eredeti görbének közelebbi szomszédságában van, míg ha $\delta x'$ és $\delta y'$-ról ilyesmit nem lehet állítani, tehát ha ezeknek változására nem szabunk határt, akkor a variált görbéről azt mondjuk, hogy az eredeti görbe tágabb szomszédságában van. Ennek a distinctionak az extremum elméletében egy erősebb és egy gyengébb extremum fog megfelelni

Képzeljük most, hogy a variált görbe az eredeti görbének közelebbi, vagy szűkebb szomszédságában van, ekkor nemcsak δx és δy, hanem $\delta x'$, és $\delta y'$ is alul maradnak bizonyos határon, tehát $\overline{U}$ kifejezését át tudjuk alakitani Taylor tétele szerint:

$$\overline{U} = \Phi(x, y; x', y') + \frac{\partial \Phi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial \Phi}{\partial x'}\delta x' + \frac{\partial \Phi}{\partial y'}\delta y' + \left[\delta x, \delta y, \delta x', \delta y'\right]_2$$

a mely „2" index-el azt akarjuk jelölni, hogy a bezárt rész azon tagok összeségét foglalja magában, a melyek $\delta x, \delta y; \delta x', \delta y'$ mennyiségeknek legalább második dimensioju tagjait tartalmazzák. Ezek után a teljes variatioja igy irható:

$$\Delta U = \overline{U} - U = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial \Phi}{\partial x'}\delta x' + \frac{\partial \Phi}{\partial y'}\delta y' + \left[\delta x, \delta y; \delta x', \delta y'\right]_2,$$

ebben a kifejezésben az első dimensioju tagok összeségét δU-val jelöljük és U első variatiójának vagy egyszerüen U variatiójának nevezzük, mely:

$$\delta U = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial \Phi}{\partial x'}\delta x' + \frac{\partial \Phi}{\partial y'}\delta y';$$

vizsgáljuk most az első variatiót néhány egyszerü esetben. Ha Φ maga x', akkor az első variatio:

$$\delta x' = \frac{d\,\delta x}{dt}; \text{ és } \delta y' = \frac{d\,\delta y}{dt}.$$

Számitsuk ki most: $\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'}$ variatioit. A teljes variatio:

$$\Delta \frac{dy}{dx} = \frac{y' + \delta y'}{x' + \delta x'} - \frac{y'}{x'} = \frac{x'\delta y' - y'\delta x'}{x'^{2}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\delta x'}{x'}}.$$

Ha most $\delta x'$ bizonyos határon belül marad, tehát meglehetős kicsiny fel lehet tételezni, hogy az: $\frac{1}{1 + \frac{\delta x'}{x'}}$ törtet sorba lehet bontani $\frac{\delta x'}{x'}$ + egész hatványai szerint, ha tehát $\left|\frac{\delta x'}{x'}\right| < 1$, akkor irhatjuk:

$$\Delta \frac{dy}{dx} = \frac{x'\delta y' - y'\delta x'}{x'^{2}}\left\{1 + \frac{\delta x'}{x'} + \left(\frac{\delta x'}{x'}\right)^2 + \cdots\right\}.$$

Ha teljes variatiónak ezen kifejezéséből veszük az $1^{\text{ső}}$ dimensioju tagokat, nyerjük a definitio értelmében $\frac{y'}{x'}$ első variatioját: $\frac{\delta y'}{x'}$ - t, tehát:

$$\delta \frac{dy}{dx} = \frac{x'\delta y' - y'\delta x'}{x'^{2}}.$$

és itt egyszersmind azt is látjuk, hogy a hányados variatioját itt u.a. törvény szerint nyertük, mint a mely törvény szerint valamely hányadosnak diff.-ja képeztetik.

Előbb a variatio értelmezésénél x-t és y-t, mint „t" paraméter függvényét vettük. A variatio számításban azonban rendesen geometriai, illetőleg mechanikai feladatokkal fogunk foglalkozni, melyekben pedig oly kifejezések játszanak nagyobb szerepet, melyek a „t" paraméter megválasztásától függetlenek, ezért a „t" paramétert el fogjuk ejteni, úgy hogy vele az x abscissát fogjuk egyenlővé tenni, azaz ezen x-t fogjuk mindig, mint független változót tekinteni, úgy hogy további vizsgálatainkban ily kifejezésekkel lesz dolgunk:

$F(x, y, p \dots)$ hol $\frac{dx}{dx} = 1$ így elmaradt és $p = \frac{dy}{dx}$. A többi jelölésekre nézve a következőkben állapodunk meg. Legyen x, illetve y variatiója továbbra is: δx, illetve: δy, legyenek továbbá:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\delta x}{dx} &= \delta x' \\ \frac{d\delta y}{dx} &= \delta y' \end{aligned}\right\}$$ és tekintettel arra, hogy $x' = 1$

$$\delta p = \frac{\delta y'}{x'} - \frac{y'}{x'}\frac{\delta x'}{x'} = \frac{d\delta y}{dx} - p\,\frac{d\delta x}{dx}.$$

Térjünk át ezekután a következő határozott int-ra: $J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, p)\,dx$. és foglalkozzunk azzal a legegyszerűbb esettel, midőn x-nek csak 1 függvényével t. i. y-al van dolgunk. Mindenekelőtt írjuk fel ezen int. teljes variatióját:

$$\Delta J = \int_{x_0}^{x_1} F(x+\delta x, y+\delta y, p+\delta p)\,d(x+\delta x) - \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, p)\,dx.$$ Mielőtt az extremum feladatát megfogalmaznók, számítsuk ki ezen int. 1-ső variatióját:

$$\Delta J = \int_{x_0}^{x_1}\left\{F(x, y, p) + \frac{\partial F}{\partial x}\delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial p}\delta p + [\delta x, \delta y, \delta p]_2\right\}\cdot\left(dx + \frac{d\delta x}{dx}dx\right) - \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, p)\,dx =$$

$$= \int_{x_0}^{x_1}\left\{\frac{\partial F}{\partial x}\delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial p}\delta p + F(x, y, p)\,\delta x'\right\}dx + \int_{x_0}^{x_1}\left\{\frac{\partial F}{\partial x}\delta x\,\delta x' + \frac{\partial F}{\partial y}\delta y\,\delta x' + \frac{\partial F}{\partial p}\delta p\,\delta x' + [\delta x, \delta y, \delta p]_2 + [\delta x, \delta y, \delta p]_2\,\delta x'\right\}dx$$

Ebben a második integrálban csakis legalább második dimensiójú tagokat tartalmaz~~za~~, ~~szokásos jelölésse-~~ ~~int. δJ-vel jelölve~~ úgy hogy ezt röviden a következőleg jelölhetjük

$\int_{x_0}^{x_1}[\delta x, \delta y, \delta p, \delta x']_2 \, dx$. és most már 1ső int-t, mely az összes 1ső dimensiójú tagokat tartalmazza, szokott jelölés szerint δJ-vel jelölve az „J" int. teljes variatiója lesz:

$$\Delta J = \delta J + \int_{x_0}^{x_1}[\delta x, \delta y, \delta p, \delta x']_2 \, dx.$$

a hol δJ nem egyéb, mint:

$$\delta J = \int_{x_0}^{x_1}\left\{\frac{\partial F}{\partial x}\delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial p}\delta p + F(x, y, p)\,\delta x'\right\} dx.$$

Ezután áttérhetünk annak a kérdésnek a tárgyalására, hogy micsoda feltételek mellett lesz az ilyen integral extremum. Ha azt akarjuk, hogy görbénkre nézve J max. legyen, akkor kell, hogy minden szomszédos görbére $\Delta J < 0$, azaz kell, hogy minden szomszédos görbére megalkotott „J" integrálból a maximalis görbére vonatkozó integrált levonva a különbség kisebb legyen mint 0; ha pedig azt akarjuk, hogy „J" minimum legyen görbénkre nézve, kell hogy: $\Delta J > 0$. Ez az eredmény egyezik a diff. calc. azon szabályával, mely szerint $f(x)$ maximuma esetén $f(x+h) - f(x) < 0$; minimum esetén pedig: $f(x+h) - f(x) > 0$ és most már a diff. calc.-ban sikerült ezen $f(x+h) - f(x)$ kifejezés előjelét egy egyszerűbb kifejezés előjelére visszavezetni t. i. az első el nem tűnő páros rendszámú differential-quot. előjelére. Ezen eljárás mintájára most mi egyszerűbb kifejezést fogunk keresni, a melynek előjele ΔJ előjelével egyezik; ez a vizsgálat itt természetesen nem lesz olyan egyszerű, mint a diff. calc.-ban, de azért mégis sikerülni fog ilyen kifejezést találni. Hogy ezen czélunkat elérhessük, mindenekelőtt az első variatiót δJ-t fogjuk egy kissé átalakítani. Vegyük tekintetbe ezen δJ-nek azon részét, mely igy irható:

$$\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, p)\,\delta x' \, dx = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, p)\frac{d\delta x}{dx} dx.$$

Ezen kifejezésre igen czélszerűnek mutatkozik a partialis integralás, nyerjük tehát:

$$= \Big[F(x, y, p)\,\delta x\Big]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1}\delta x \, \frac{dF(x, y, p)}{dx} dx =$$

$=\left[F(x,y,p)\delta x\right]_{x_0}^{x_1}-\int_{x_0}^{x_1}\delta x\left(\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}p+\frac{\partial F}{\partial p}\frac{dp}{dx}\right)dx$. Ezek után az első variatio kifejezése következő alakú lesz:

$$\delta J=\left[F(x,y,p)\delta x\right]_{x_0}^{x_1}+\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial F}{\partial y}(\delta y-p\delta x)+\frac{\partial F}{\partial p}\left(\delta p-\frac{dp}{dx}\delta x\right)dx$$ és mivel:

$$\delta p-\frac{dp}{dx}\delta x=\frac{d\delta y}{dx}-p\frac{d\delta x}{dx}-\frac{dp}{dx}\delta x=\frac{d}{dx}(\delta y-p\delta x)$$, tehát:

$$\delta J=\left[F(x,y,p)\delta p\right]_{x_0}^{x_1}+\int_{x_0}^{x_1}\left\{\frac{\partial F}{\partial y}(\delta y-p\delta x)+\frac{\partial F}{\partial p}\frac{d}{dx}(\delta p-p\delta x)\right\}dx.$$

Alkalmazzuk most másodszor a partialis integratiot a köv. int-ra:

$$\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial F}{\partial p}\frac{d}{dx}(\delta y-p\delta x)dx=\left[\frac{\partial F}{\partial p}(\delta p-p\delta x)\right]_{x_0}^{x_1}-\int_{x_0}^{x_1}(\delta y-p\delta x)\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)dx.$$ ezt tekintetbe véve nyerjük az első variatio számára a köv. értéket:

$$\delta J=\left[F(x,y,p)\delta x+\frac{\partial F}{\partial p}(\delta p-p\delta x)\right]_{x_0}^{x_1}+\int_{x_0}^{x_1}(\delta y-p\delta x)\left\{\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)\right\}dx.$$

Most mindenekelőtt szükséges feltételeket keresünk arra nézve, hogy a mi integralunk: „J" extremum legyen. Mivel csak szükséges feltételről van szó, elegendő, ha x és y variatioit: δx és δy-t speciális módon választjuk meg, t. i. a következő képen

$\delta x=ku$ }
$\delta y=kv$ }, a hol u és v x és $y$nak oly függvényei, melyekre nézve bizonyos folytonossági és diff.-hatósági feltételek teljesülnek és a „k" állandó legyen elegendő kicsiny mennyiség, oly formán, hogy δx és δy eleget legyenek azoknak a feltételeknek, melyeket ezen variatiokra felállítottunk.

A variatioknak ezen speciális megválasztásánál az „J" integral első variatioja: δJ a köv. alakban írható:

$$\delta J=k\left[Fu+\frac{\partial F}{\partial p}(v-pv)\right]_{x_0}^{x_1}+k\int_{x_0}^{x_1}(v-pu)\left\{\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)\right\}dx.$$; azt látjuk tehát, hogy ebben a speciális esetben az első variatio arányos a k állandó factorral, a teljes variatio pedig nem egyéb, mint:

$\Delta J = \delta J + \int_{x_0}^{x_1} \left[ku, kv, k\left(\frac{dv}{dx} - p\frac{du}{dx}\right)\right]_2 dx$. vagy ha a k-val ará-nyos első" variatiot kw-el a teljes variatiónak második tag-ját pedig $k^2 w_1$-el jelöljük lesz:

$$\Delta J = kw + k^2 w = k(w + kw_1)$$

Tegyük fel most, $w \neq 0$, akkor $w + kw_1$ a k"-nak 1-ső foku egész rationalis kifejezése ugy hogy ha k"-t elég kicsinek választjuk áll, hogy:

$sgn(w + kw_1) = sgn\, w$. ; azaz: $sgn\, \Delta J = sgn\, w$. Ez esetben k-ra nézve csak annak a feltételnek kell teljesülni, h. abs. értékre legyen elég kicsi, de azért még lehet: $\pm$; ámde ezáltal ΔJ előjele majd „+" majd „−" lesz (?!?); de extremum esetén ez ki van zárva, mert akkor elég kis variatio mellett ΔJ előjelének állandónak kell lenni s igy első szükséges feltétel az extremum bekövetkezhetésére hogy: $w = 0$ azaz:

$$w = \left[F u + \frac{\partial F}{\partial p}(v - pu)\right]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} (v - pu)\left\{\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)\right\} dx = 0.$$

Most mindenekelőtt a határfeltételekre kell néhány észrevételt tenni. Vizsgálataink tárgyát, mint már említettük oly görbék képezik, melyek két adott $(x_0 y_0)$; $(x_1 y_1)$ ponton mennek keresztül. Most már lehetséges, hogy a variatiós problemája, a melyel foglalkozunk olyan, hogy ez a két pont mindig rögzitve marad; a feladatot azonban következő kép is lehet módositani:

Legyen adva két görbe: C_1 és C_2 s keressük ezen két görbének egymástól való távolságát vagy más szóval keressük azt a görbét, a mely a C_1 és C_2 görbe valamely tetszőleges két pontja közt van kifeszitve és a melynek ivhossza minimum a C_1 és C_2 görbéket összekapcsoló görbék közt.

Ha feladatunkat ilymódon fogalmazzuk, geometriailag evidens, hogy a keresett görbének minősége teljesen független attól hogy rögzített határokkal van e dolgunk, vagy pedig olyanféle határfeltételekkel, a hol a két határpont még bizonyos törvények ~~közt~~ szerint változik. Tegyük fel t. i. hogy ezen utóbbi általánosabb felfogásban sikerül egy extremum görbét találni, a mely görbe természetesen a C_1 határgörbének valamely A_0 és a C_2 határgörbének valamely B_0 pontjában fog végződni. Ez az így nyert görbe extremum lesz az összes görbék közt, melyek általában a C_1 és C_2 görbék közt fektethetők, de ebből kifolyólag extremum lesz egyszersmind azon görbékre nézve is, a melyek A_0 és B_0 végpontokkal bírnak, azt látjuk tehát, hogy ha a görbe abban az általánosabb felfogásban, a hol a végpontok változhatnak extremum, akkor extremum e a görbe rögzített határpontokra nézve is, azaz ha rögzített határpontokra nézve felkeressük az extremum görbét, mint ha az extremum görbét változó határpontokra nézve keressük; úgy hogy a görbe természetére látszólag semmi befolyással sem bírhat az, hogy rögzített v. változó határokkal van e dolgunk. Ez a körülmény, a melyet később analytikailag is igazolni fogunk, mindenesetre feljogosít bennünket arra, hogy vizsgálataink ezen első stadiumában, a hol csak az illető extremum görbének a természetébe akarunk némi betekintést szerezni, azt az esetet számba mindenek előtt, a hol a határok rögzített pontok.

Ebben az esetben, a hol tehát a variatio csak akkép történik, hogy az illető görbék mind az $(x_0 y_0)$ és $(x_1 y_1)$ rögzített pontokon mennek keresztül nyilvánvaló első sorban az, hogy úgy az $(x_0 y_0)$, mint $(x_1 y_1)$ pontban $\delta x = 0$ és $\delta y = 0$, mivel ezekben a pontokban nincs variatio, kell tehát, hogy itt:

$x = x_0$ és $y = y_0$ mellett $u = 0$ és $v = 0$
$x = x_1$ " $y = y_1$ " " $u = 0$ " $v = 0$ } akkor azonban w kifejezésének első része magától elesik és a $w = 0$ szükséges felté-

telünk a köv. egyenletre redukalódik:

$$\int_{x_0}^{x_1}(v-pu).\left\{\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\right\}=0$$; Itt az integral-jel alatt két függvénynek a szorzata áll, és pg. ha y-t mint x függvényét képzeljük kifejezve, akkor ugy az első, mint a második x-nek jól meghatározott függvénye: $v-pu=\varphi(x)$

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)=\Psi(x)$$, ugy hogy a mi

$w=0$ feltételünk azt mondja hogy:

$$\int_{x_0}^{x_1}\varphi(x).\Psi(x)dx=0.$$ Az „u" és „v" x-nek folytonos deriválható, de különben egészen tetszőleges függvénye volt, ennélfogva ott $\varphi(x)$ is bizonyos folytonossági feltételektől eltekintve egészen tetszőleges függvénye x-nek. Ennek az itt felirt integralnak el kell tűnnie, bárhogy is válasszam meg x_0 és x_1 közt az $\varphi(x)$-függvényt, ha tehát $[\varphi(x)=0]$ (?!?) ugy választom meg, hogy $\varphi(x)=\Psi(x)$ akkor is áll, hogy: $\int_{x_0}^{x_1}\Psi(x)^2dx=0$

Itt az int. jel alatt egy függvénynek a négyzete áll, ez tehát lényegesen „+"; ha feltesszük továbbá, hogy $x_1>x_0$, akkor dx szintén „+" mennyiségnek tekintendő. Gondoljuk meg már most, hogy az integr. egy összegnek a limese, a mely összeg a mi esetünkben csupa + tagokból áll és hogy csupa „+" tagokból álló összeg csak akkor lehet 0-val egyenlő", ha minden tagja $=0$. Ezt tudva nyilván való, hogy $\Psi(x)=0$, nyerjük tehát, mint szükséges feltételt arra, hogy $w=0$ legyen:

(L) $\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)=0$; Nézzük most mindenek előtt, hogy miféle egyenlet ez.: Irjuk fel egyenletünket kissé részletesebben:

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\partial^2 F}{\partial p\partial x}-\frac{\partial^2 F}{\partial p\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}-\frac{\partial^2 F}{\partial p^2}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}=0$$; azt látjuk tehát, hogy ez az (L) egyenlet, a melynek okvetlenül teljesülni kell az extremum-görbére nézve, egy másodrendü diff. egyenlet y-ra

nézve, mivel benne y-nak második deriváltja szerepel. Ezek után eredményeinket összefoglalva azt mondhatjuk, hogy az a függvény, a mely esetleg egy extremumot szolgáltat, eleget tartozik tenni ezen L másod rendű diff. egyenletnek, vagy máskép kifejezve: ha egyáltalában extremum görbe létezik, akkor ezt szükségképen az L másodrendű diff. egyenlet megoldásai között kell keresnünk. Az olyan görbét vagy ha úgy tetszik, az olyan függvényt, a mely ezt az L diff. egyenletet kielégiti, extremális görbének illetőleg függvénynek nevezzük, ha tehát röviden csak extremáról szólunk, akkor ezalatt az L egyenlet egy megoldását fogjuk mindig érteni, minden tekintet nélkül arra, hogy ez a megoldás tényleg extremum értéket szolgáltat-e vagy nem.-

Ezzel problemánkra nézve egy oly pontig jutottunk el, a mely a közönséges max. és minimum számitásnál megfelel annak, hogy ha az $y=f(x)$ függvénynek maximumát és minimumát keressük, akkor ezeket szükségképen az $f'(x)=0$ egyenlet gyökei közt kell keresnünk csak hogy míg ott egy közönséges egyenletet nyertünk, addig itt egy diff. egyenlettel van dolgunk, a melynek megoldásai közt a valódi extremum szükségképen előfordul és most már további vizsgálataink arra fognak vonatkozni, hogy mikép lehet egy ilyen extremalisra nézve feldönteni, hogy az tényleg extremum-e, vagy nem.-

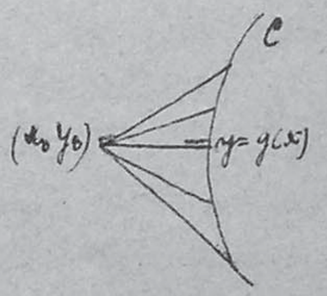
Mielőtt azonban ezen kérdéssel foglalkoznánk, még egy észrevételt kell tennünk a határi feltételekre nézve. Azon speciális feltételek mellett, hogy extremumunk legyen rögzitett határokra nézve), mint az extremum létezésének szükséges feltétele adódott az L egyenlet. Most tekintsünk el attól, hogy ezzel a speciális feltétellel van dolgunk, és végzük az első variátiónak legáltalánosabb kifejezését, a melynek extremum esetén szükségképen el kell tűnnie:

$$\partial J = \left[F\delta x + \frac{\partial F}{\partial p}(\delta p - p\delta x)\right]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1}(\delta y - p\delta x)\left\{\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)\right\}dx = 0$$

Azt tudjuk, hogy extremumra nézve egy szükséges feltétel az L diff. egyenlet, bármilyen is legyen a variátió és a határ, ennélfogva a δJ kifejezésében szereplő integrálnak okvetlenül el kell tűnnie, ugy hogy akármilyenek is legyenek a határfeltételek, szükségképen kell, hogy

$$\left[F\delta x + \frac{\partial F}{\partial p}(\delta y - p\delta x)\right]_{x_0}^{x_1} = 0$$

legyen, a mely egyenlet, ha a görbének a természete már ismeretes, szolgáltatja az illető görbének a határait, ettől az egyenletből t. i. meghatározni x_0-t és x_1-t, mint olyan pontokat, a melyek közt az extremum tényleg bekövetkezik. De rendesen nem ilyen általános módon vannak a határpontok adva, hogy t. i. az $(x_0 y_0)$ és $(x_1 y_1)$ pontok egy tetszőleges görbén változhatnak, hanem rendszerint ugy van a dolog, hogy az $(x_0 y_0)$ pont rögzített és az $(x_1 y_1)$ pont az $y = g(x)$ görbén változhatik és keresnünk kell azt a görbét, a melynek az ívhossza minimum mind azon görbék közt, a melyek az $(x_0 y_0)$ pont és a C görbének valamely tetszőleges pontja közt fektethetők.



Ezen rendesen előjövő határfeltételek mellett nyilvánvaló, hogy

$$x = x_0 \text{ és } y = y_0 \text{ mellett } \delta x = 0 \text{ és } \delta y = 0$$

mivel az $(x_0 y_0)$ pont nem variál, ugy hogy a mi azt a feltételt illeti, hogy az $(x_1 y_1)$ pont az $y = g(x)$ görbén legyen, ennek az $(x_1 y_1)$ pontnak a meghatározása végett szolgál a következő egyenlet:

$$\left[F\delta x + \frac{\partial F}{\partial p}(\delta y - p\,\delta x)\right]_{x=x_1} = 0$$

Legyen $x = x_1$ és $y = y_1$ mellett $\delta x = \delta_1$ és $\delta y = \delta y_1$, akkor egyenletünk alakja lesz:

$$(F)_1 \delta x_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)_1 (\delta y_1 - p_1 \delta x_1) = 0$$

azaz

$$\left(F - p\frac{\partial F}{\partial p}\right)_1 \delta x_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)_1 \delta y_1 = 0$$

Vegyük most ehez az egyenlethez még az $y_1 = g(x_1)$ egyenletet, a mely azt mondja, hogy az $(x_1 y_1)$ pontnak ezen a görbén kell mozognia, akkor nyilvánvaló, hogy nem csak az $(x_1 y_1)$ pont fekszik ezen a görbén, hanem egyszersmind az $(x_1 + \delta x_1, y_1 + \delta y_1)$ pont is, tehát áll a következő egyenlet:

$$y_1 + \delta y = g(x_1 + \delta x_1)$$

azaz

$$\delta y_1 = g(x_1 + \delta x_1) - g(x_1)$$

Alkalmazzuk ezen egyenlet jobb oldalára Taylor tételét, akkor az első variatio kifejezése véglévén dolgunk a magasabb rendű tagoktól eltekinthetünk és nyerjük, hogy

$$\delta y' = g'(x)\, \delta x_1$$

a mely egyenlet az előbb levezetett, felírt egyenlettel együtt teljesen meghatározza a δx_1, δy_1 variatiokat. Azt látjuk tehát, hogy ha az extremalis ismeretes, akkor a határfeltételeket igen egyszerű módon fel lehet állítani erre a rendesen előjövő esetre nézve, a mikor az $(x_0 y_0)$ pont rögzített és az $(x_1 y_1)$ pont egy görbén változik. (Ha azt a legáltalánosabb esetet vennők, a midőn mind a két pont változik egy-egy görbe mentén, akkor a határfeltételek természetesen három egyenlet által lennének meghatározva, t. i. ekkor szerepelne az $(x_0 y_0)$ pontot hordozó görbe $y = h(x)$ egyenlete is. Ezeket a határfeltételekre vonatkozó, levezetett egyenleteket akkép is felfoghatjuk, hogy ezek egy bizonyos speciális összeköttetést szolgáltatnak az extremum görbe és az adott $y = g(x)$ határgörbe között és czélszerű lesz mindjárt elejétől fogva erre a kapcsolatra egy terminust bevezetni; azt fogjuk mondani, hogy ha a két feltételi egyenlet teljesül, hogy az extremalis a határgörbéhez transversalisan fekszik.

Czélszerü, ha exekulém a mondottak illustrálására tárgyalni azt a példát, a melyet mindjárt tárgyalásunk elején paradigmaként felvettünk. – Ebben a példában azt a görbét keressük, a melynek ivhossza két pont között a legrövidebb utat szolgáltatja, vagyis keressük az:

$$J = \int_{x_0}^{x_1} \frac{ds}{dx}\, dx = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+p^2}\, dx$$

integrál minimumát. Ha eredményeinket erre a példára alkalmazni akarjuk, akkor mindenekelőtt azt látjuk, hogy itt: $F(x, y, p) = \sqrt{1+p^2}$ .. Állitsuk fel ezután az L egyenletet, a mely az extrémáliskat szolgáltatja; – Mivel F y-t nem tartalmazza, azért: $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$, ugy hogy az L egyenletet a következőkép irhatom:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right) = 0 \text{ azaz } \frac{\partial F}{\partial p} = \text{const.}$$

nyertünk tehát az extremaliskat számára egy elsőrendü diff. egyenletet, a melyet még az F függvény értékének tekintetbe vételével a következőkép alakithatunk át:

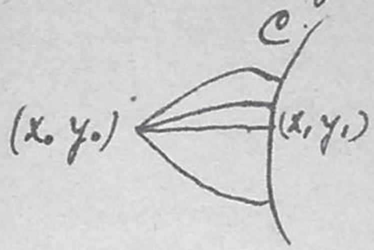
$$\frac{\partial F}{\partial p} = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} = \text{const}$$

Könnyü belátni, hogy ha ez az egyenlet a p-re teljesül, akkor p maga is constans: $p = \frac{dy}{dx} = a$, a mely egyenlet integrálva adja az $y = ax + b$ egyenletet, nyerjük tehát azt a más geometriailag is evidens tényt, hogy ha a síkban két pont közt legrövidebb vonal egyáltalában létezik, akkor ez a legrövidebb vonal csak is egyenes lehet.

Ha két rögzitett ponttal van dolgunk, akkor ezzel, a dolog el van intézve, ha tehát csak arról van szó, hogy két adott pont $(x_0\, y_0)$ és $(x_1\, y_1)$ között felállítsuk a legrövidebb vonalat, akkor nem kell egyebet tenni, mint a két ponton keresztül fektetni az

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_0 & y_0 \\ 1 & x_1 & y_1 \end{vmatrix} = 0$$

egyenlettel meghatározott egyenest, de hogy a határfeltételekre is példát lássunk, vegyük most azt az általánosabb esetet, a midőn adva van a síkban az $(x_0\, y_0)$ pont és a C görbe, és keresendő az a legrövidebb vonal, a mely az $(x_0\, y_0)$ pontot ezen $y = g(x)$ görbével összekapcsolja. Itt meg kell jegyeznünk, hogy ha az extremalis természete már ismeretes, akkor a feladat tárgyalása már nem egyéb, mint közönséges maximum-minimum számítás, mert ismeretes lévén, hogy az extremalis egyenes vonal, most már csak azt a pontot kell keresnünk a C görbén, a melynek távolsága az $(x_0\, y_0)$ ponttól a legkisebb. Az adódó eredményt már a geometria elemeiből tudjuk, t. i. hogy ez a legrövidebb távolság nem lesz egyéb, mint a görbére húzott normalis, de azért a határfeltételekre való tekintettel mégis czélszerű lesz a számítást elvégezni.



Helyettesítsük bele az $y = g(x)$ egyenletbe az $(x_1\, y_1)$ coordinatákat: $y_1 = g(x_1)$

$\delta y_1 = g(x_1 + \delta x_1) - g(x_1) = g'(x_1)\, dx_1$, a magasabb rendű tagoktól eltekintve. Írjuk fel továbbá a mi-ez egyenletet, a mely általánosan a következőleg hangzik:

$$\varphi_1 \delta x_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)_1 (\delta y_1 - p_1 \delta x_1) = 0$$

a megfelelő helyettesítéseket elvégezve nyerjük, hogy

$$\sqrt{1+(p_1)^2}\,\delta x_1 + \frac{(p)_1}{\sqrt{1+(p)_1^2}} (\delta y_1 - (p)_1 \delta x_1) = 0 \quad \text{azaz}$$

$$\sqrt{1+(p)_1^2}\,\delta x_1 + \frac{(p)_1}{\sqrt{1+(p)_1^2}} (g'(x_1)\,\delta x_1 - (p)_1 \delta x_1) = 0$$

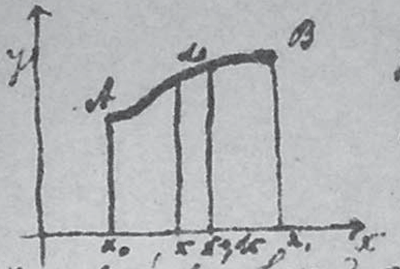
$\delta x_1 \neq 0$ lévén, azzal való osztás után marad: $1+(p)_1^2 + (p)_1 g'(x_1) - (p)_1^2 = 0$, tehát $\left(\frac{dy}{dx}\right)_1 g'(x_1) = -1$.

Ez az egyenlet felel, a mely az extremalisnak és határgörbének transversalis helyzetét ábrázolja, a mi esetünkben csak azt mondja, hogy az (x_1, y_1) pontban az extremalis és az adott határgörbe egymást derékszög alatt metszik.

Most az elegendő feltételek vizsgálatára kellene áttérnünk, arra nézve, hogy az J integrál extremum legyen. De megjegyezve azt, hogy ezek a vizsgálatok nagyon komplikáltak, ugyannyira, hogy általános módszerek erre nézve nem is léteznek, hanem a variatio számítás mai stadiumában meg kell elégednünk azzal, hogy néhány egyszerű esetben sajátságos speciális módszerek alkalmazásával el tudjuk dönteni, hogy az illető extremalis tényleg extremummá, maximummá vagy minimummá teszi az J integrált, ezen vizsgálatok megkezdése előtt még néhány történelmileg és elvileg is fontos példát fogunk felemlíteni, a melyek a variatio számításnál követendő eljárásnál paradigmákul szolgálhatnak és a melyeket az előadás egész folyamán szemmel tartani és tárgyalni fogunk.

I. Lássuk először a legkisebb forgási felület példáját, a melyet már Bernoulli maga is tárgyalt és a mely egyike a variatio számítás leghíresebb és legegyszerűbb példáinak.

Legyen adva a síkban egy egyenes és ezen kívül két pont, ezt is képzeljünk ezen két ponton át egy görbét fektetve és képzeljük, hogy ez a görbe az adott egyenes körül forog.



Ha görbénk ezen egyenes körül, mint tengely körül forog, akkor egy úgynevezett forgási felületet fog leírni, a mely forgási felületnek a területe nyilvánvalóan könnyen ezen illető forgó görbének a minőségétől függ. Az a kérdés, hogy miként kell a görbét megválasztani, hogy a forgási felületnek a területe egy minimum legyen.

Nézzük mindenek előtt, hogy miként kell egy ilyen forgási felületnek a területét meghatározni. Az eset is szigorú módon szerint röviden ezt a következőleg eszközölhetjük. Válasszuk forgási tengelynek az x tengelyt és legyen a forgó görbe egyenlete $y = f(x)$. Ezen görbének ds íveleméit a végtelen kis elemek szerint egyenes vonalnak tekinthetjük, ha tehát a görbe forog, akkor a ds ívelem egy csonka kúpot fog leírni, a melynek felülete:

$$2\pi \frac{y+y+dy}{2} ds = \pi(2y+dy)ds = 2\pi y ds + \pi dy ds.$$

ha a másodrendű végtelen kicsiny $\pi dy ds$-t elhanyagoljuk, a $2\pi y ds$ lesz egy végtelen kis csíknak a felülete. Ha tehát most ezen kifejezést integrálni az A és B pontoknak megfelelő abscissák között, és nyerjük forgási felületünk területét: $F = \int_{x_0}^{x_1} 2\pi y \frac{ds}{dx} dx = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1+p^2}\, dx$ ez tehát azon integrál, a melyet minimummá kell tennünk. Példánkat az általános esettel egybevetve azt látjuk, hogy most:

$F(x, y, p) = y \cdot \sqrt{1-p^2}$, tehát független x-től, ugyanezt a körülményt a jelen esetben: $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ az extremálisokat, általunk felhasználva először is az egyenletet akkép írhatjuk:

$$(L)\ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right) = 0$$

Vegyük továbbá az F függvény totális diff. quotiensét x szerint:
$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial y}p + \frac{\partial F}{\partial p}\cdot\frac{dp}{dx}$$

vagy tekintetbe véve az L egyenletet:
$$\frac{dF}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)p + \frac{\partial F}{\partial p}\cdot\frac{dp}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)\cdot p$$

Egyenletünk mind két oldalát közvetlenül integráljuk x szerint és nyerjük, hogy: $F = \frac{\partial F}{\partial p}\cdot p + \text{const.}$

Nézzük, hogy példánkra nézve miképp alakul ez az egyenlet:
$$y\sqrt{1+p^2} - y\cdot\frac{p^2}{\sqrt{1+p^2}} + a\ ;\quad \frac{y(1+p^2-p^2)}{\sqrt{1+p^2}} = a$$

tehát
$$\frac{y}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = a \quad \text{amiből} \quad \frac{dy}{dx} = \sqrt{\left(\frac{y}{a}\right)^2 - 1}$$

Itt még meg kell jegyeznünk, hogy ez az utóbbi számítás azt a feltételt foglalja magában, hogy $a \neq 0$. $a = 0$ esete ugyan külön tárgyalást érdemelne, de mindjárt megjegyezzük, hogy ez arra a triviális esetre vezet, amikor a felület $= 0$.

Ezt az esetet kizárva diff. egyenletünket a következőkép írhatjuk:
$$\frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{y}{a}\right)^2 - 1}} = dx\ , \quad \text{azaz} \quad d\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{d\left(\frac{y}{a}\right)}{\sqrt{\left(\frac{y}{a}\right)^2 - 1}}$$

Integráljuk most egyenletünk mind két oldalát, ekkor nyerjük, hogy $\frac{x}{a} = \log\left(\frac{y}{a} + \sqrt{\left(\frac{y}{a}\right)^2 - 1}\right) + \frac{b}{a}$ és így $\frac{x-b}{a} = \log\left(\frac{y}{a} + \sqrt{\left(\frac{y}{a}\right)^2 - 1}\right)$. Ez tehát az extremális egyenletének implicit alakja, amelyben az a, b tetszőleges constansok az által határozhatók meg, hogy az extremális keresztül megy az A és B pontokon. Hogy ezen egyenletünk közönségesen használt alakját kapjuk, vegyük mind két oldal reciprocus értékét:

$$e^{-\frac{x-b}{a}} = \frac{1}{\frac{y}{a} + \sqrt{\left(\frac{y}{a}\right)^2 - 1}} = \frac{y}{a} - \sqrt{\frac{y^2}{a^2} - 1}$$

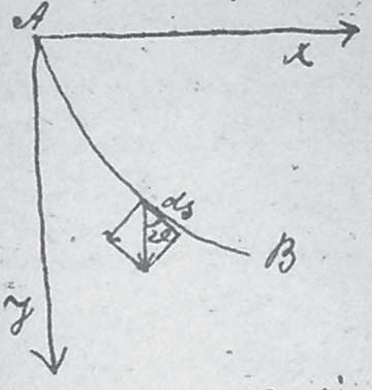
és a nyert egyenletet adjuk az eredetikez; az így nyert:

$$y = a\left(e^{\frac{x-b}{a}} + e^{-\frac{x-b}{a}}\right)$$

egyenlet adja az extremális keresett egyenletét. t.i. az úgynevezett lánczgörbét értelmezi, a mely elnevezés onnan származik, hogy ha egy lánc alakú testet akképen függesztünk fel, hogy tisztán csak a nehézségi erő behatása alatt álljon, akkor a test egy ilyen egyenlettel értelmezett görbe alakját veszi fel.

A mi problemánkra nézve tehát azt az eredményt találtuk, hogy ha általában létezik olyan görbe, a mely minimalis forgási felületet szolgáltat, úgy ez csak is a lánczgörbe lehet.-

II. Második példa gyanánt tárgyaljuk az úgynevezett brachystochrone feladatát, a mely a következőkben áll. Legyen adva a síkban két pont A és B és képzeljük, hogy egy egységnyi tömegű anyagi pont egy az A és B pontokat összekötő görbén kénytelen mozogni és pedig csupán a nehézség erő befolyása alatt.



A kérdés, miként kell választani a görbét, ha azt akarjuk, hogy a pont a lehető legrövidebb idő alatt jusson el A-ból B-be. Hogy ezt a régi problemát, a melyet már Bernoulli és János is tárgyaltak, megoldhassuk, mindenek előtt fogalmazzuk meg ezt a feladatot analytikailag. Képzeljük, hogy A és B között egyelőre tetszőleges $y = f(x)$ görbe van fektetve és számítsuk ki az időt, mely eltelik, a míg az anyagi pont tisztán csak a nehézségi erő behatása alatt A-ból B-be jut. Legyen ds görbénknek egy ivelemе és képzeljük, hogy az anyagi pont ezen mozog. A pontra ható nehézségi erő vertikálisan lefelé működik és a pontot is ily irányu mozgásra készteti, ámde a görbe, a melyet mint fonalat is képzelhetünk, bizonyos ellen-

állási erőt fejt ki vele szemben a normalis irá...
nyhogy a nehézségi erő egy normalis és egy tangen...
componensre bomlik fel, a melyek közül az egyik a
említett ellenállási erejével szemben megsemmisül és így
a nehézségi erőnek csakis a tangenziális componense
érvényesülhet mint anyagi pontunkat mozgató erő. E
tangentiális erő nagysága, mint könnyű kiszámítani,
egyebb, mint $g\cos\vartheta$, hol g a gravitacios állandó és a...
pontunk egységnyi tömegű lévén, ugyanez pontunk
gyorsulásának nagysága is, ámde a mechanika alap-
tételei szerint a sebesség nagysága az illető helyen nem
mint $\frac{ds}{dt}$ a gyorsulásé pedig $\frac{d^2s}{dt^2}$, úgy hogy nyerjük a
következő egyenletet: $\frac{d^2s}{dt^2} = g\cos\vartheta$. — Most képzeljük
dinata rendszerünket akkép megválasztva, hogy az
pont legyen a coordinata rendszer origója, az y tengely
haladjon a gravitacios erő irányában verticálisan
felé és az x tengely horizontálisan az y tengely
dala felé, a mely oldalon a B pont van. Ebben a coordi-
rendszerben nyilvánvaló, hogy: $\cos\vartheta = \frac{dy}{ds}$, s
jenti diff. egyenletünket a következőleg írhatjuk:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = g\frac{dy}{ds} = g\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}$$

— Ha még a sebesség nagy-
ságát v-vel jelöljük, akkor $v = \frac{ds}{dt}$ lévén

$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$, úgy hogy diff. egyenletünk alakja lesz:

$$\frac{dv}{dt} = g\frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{v}, \text{ azaz } v\frac{dv}{dt} = g\frac{dy}{dt}$$

vagy 2-vel szorozva:

$$\frac{d(v^2)}{dt} = 2g\frac{dy}{dt}$$

, a miből integrálás által nyerjük, hogy:

$$v^2 = 2gy + c$$

A jelen esetben most levezett ez az egyenlet az eleven erő elvét szolgáltatja is, és mivel az anyagi pont a fel-
tevés szerint csakis a nehézségi erő befolyása alatt áll.

mivel ezen egyenlet a mozgó pont útját teljesen meghatározza. Az egyenletben szereplő c constans mechanikai jelentésére nézve meg kell jegyeznünk, hogy ha $y=0$ $v^2=c$, c tehát nem egyéb, mint a mozgó pont $y=0$ pontjában sebességének a négyzete; ha tehát a pont kezdeti sebességét α-val jelöljük $\alpha^2=c$ és így az eleven erő elvét így irhatjuk: $v^2=2gy+\alpha^2$.

Meg is jegyezhetjük még, hogy ezen egyenlet még egy érdekes physikai törvényt is foglal magába, azt t.i., hogy a mozgó pont sebessége csak is y-tól függ, azaz, hogy ha egy vagy más görbén mozog a pont A és B között, a sebesség mindig ugyanazon horizontalisban mindig ugyanaz.

A feladatul tűztük ki magunk elé kiszámitani azt az időt, a mely alatt a mozgó pont az egyik görbén végig fut. Erre nézve nem kell egyebet tenni, mint venni a sebesség kifejezését: $v=\frac{ds}{dt}$; ebből $dt=\frac{ds}{v}$, ámde $ds=\sqrt{dx^2+dy^2}$, hol x és y a görbének $y=f(x)$ egyenletével vannak egymással összekapcsolva, úgy hogy

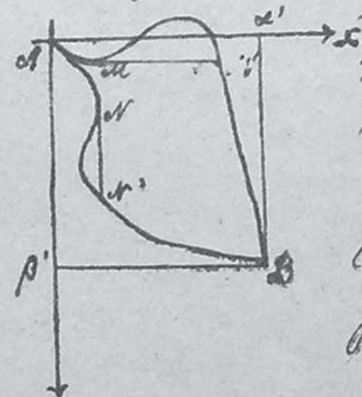
$$dt=\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{\sqrt{2gy+\alpha^2}},$$

vagy x-et független változónak véve: $dt=\frac{\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{2gy+\alpha^2}}\,dx$, a mely egyenlet integrálva, adja az időt:

$$t=\int^{x}\frac{\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{2gy+\alpha^2}}\,dx,$$

a tetszőleges állandó abban a feltevésben, hogy $x=0$ mellett $t=0$, vagyis, hogy az időt az A ponttól kiinduló mozgás kezdetétől számitjuk, elhagyható.

Az esési idő ezen kifejezéséből közvetlen láthatjuk, hogy a brachystochrone feladata tényleg egy variatios számitási feladatra vezet, keresnünk kell t.i. azt az $y=f(x)$ görbét, a mely mellett t, vagyis a felirt integrál minimalis értéket vesz fel. Mielőtt azonban ezen feladat tárgyalásához fognánk, előbb a négyzetgyökök előjeleire nézve kell tájékozódnunk. Térjünk vissza ezen czélból a $dt = \frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{\sqrt{2gy+\alpha^2}}$ kifejezésre. Itt dt mint a folyton növő mennyiség differentiálja mindig positiv, abból pedig, hogy görbénk brachystochrone, következik, hogy x és y csakis positiv növő mennyiségek lehetnek, mert, ha x vagy y fogynának, már lehetne rövidebb idő alatt eljutni A-ból B-be, mint ez az út és így a görbe a brachystochrone névnek épen nem felelne meg, úgy hogy a



kifejezésünk baloldala és a jobb oldalon a négyzetgyökök alatti kifejezések mindnyájan positivek lévén következik, hogy a négyzetgyökök szükség képen csakis a positiv előjelet jöhetnek számba. Az a körülmény, hogy y mindig positiv, kizárja azt is, hogy a jobb oldal nevezője, vagy is, hogy $2gy+\alpha^2 = 0$ legyen, a mennyiben g positiv mennyiség lévén, ez csak is akkor következik, ha y negativvá válnék. Ezzel minden nehézséget elhárítva, problemánkat, mint variatio számítási feladatot a következőleg fogalmazhatjuk meg. Legyen a B pontnak abscissája α' és ordinátája β', akkor az idő, mely elfolyik, a míg a pont A-tól B-ig halad, lesz

$$t = \int_{\alpha'}^{\beta'} \sqrt{\frac{1+p^2}{2gy+\alpha^2}}\,dx$$

ez az integrál teendő tehát minimummá az által, hogy y-t megfelelően választjuk meg. Az integrál jel alatti függvény: $F(x,y,p) = \sqrt{\frac{1+p^2}{2gy+\alpha^2}}$ a jelen esetben, mint láthatjuk x-től független, a mely körülmény ép úgy, mint előbb a legkisebb forgási felület példájánál magával hozza, hogy az extremalisokat értelmező L másodrendű diff. egyenlet egy elsőrendű diff. egyenlettel helyettesíthető legyen, és így nyerjük, hogy $F = p\frac{\partial F}{\partial p} + C$

azaz $\sqrt{\frac{1+p^2}{2gy+\alpha^2}} = \frac{p^2}{\sqrt{2gy+\alpha^2}\cdot\sqrt{1+p^2}} + C$; $1+p^2 = p^2 + C\sqrt{2gy+\alpha^2}\sqrt{1+p^2}$

$$1 = C^2(2gy+\alpha^2)(1+p^2);$$

az azon diff. egyenlet, a mely az extremalisokat szolgáltatja. Nézzük most mindenek előtt azt az esetet, a midőn a c állandó nullal egyenlő. Ha $c = 0$, akkor a jobb oldali szorzat egyik, vagy másik tényezője végtelen nagy. Ámde $2gy + \alpha^2$ nem lehet végtelen nagy, mert y-nak végtelenné válása esetén a mozgó pontnak előbb a végtelenbe kellene távoznia, mielőtt B-be érkeznék, a mi semmi esetre nem volna azon út, a melyet brachystochronenak neveznénk, α-nak, tehát a kezdeti sebességnek a végtelenné válása esetén pedig a mozgó pont A-ban oly lökést kapna, a mely azt tüstént a végtelenbe ragadná, úgyhogy végtelen nagynak ezt sem tételezhetjük fel. Ily formán végtelenné csak is p, vagyis $\frac{dy}{dx}$ válhat, ez azonban csak akkor következtetnék be, ha a B pont az y tengely irány vonalába esnék, a mikor is a brachystochrone az y tengelyével összeeső AB egyenes volna, ha tehát ezt a triviális esetet tárgyalásunkból kizárjuk, akkor minden esetre feltételezhetjük, hogy $c \neq 0$. Legyen most már egyszerűség kedvéért $c^2 \cdot 2g = \frac{1}{2b}$ és $\frac{\alpha^2}{2g} = a$, hol b egy tetszésszerinti, a pedig egy ismeretes állandó, a mely α-tól függ, akkor egyenletünket akkép irhatjuk: $1 = \frac{1}{2b}(y+a)\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]$ a miből $\frac{2b-(y+a)}{y+a} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$, és $\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2b-(y+a)}{y+a}}$, tehát

$$dx = \sqrt{\frac{y+a}{2b-(y+a)}}\ \text{és integrálva}\ x = \int\sqrt{\frac{y+a}{2b-(y+a)}}\,dy.$$

Hogy ezt az integrált minél egyszerűbb módon megoldhassuk, célszerű lesz a következő trigonometrikus substitutiót alkalmazni: $y + a = b(1 - \cos\omega)$, akkor mindenek előtt $dy = b\sin\omega\,d\omega$ és $x = \int\sqrt{\frac{b(1-\cos\omega)}{2b - b + b\cos\omega}}\cdot b\sin\omega\,d\omega$
$= b\int\sqrt{\frac{1-\cos\omega}{1+\cos\omega}}\sin\omega\,d\omega = b\int(1-\cos\omega)\,d\omega$, tehát $x = b\omega - b\sin\omega - h$ hol h tetszőleges constans. Most már összefoglalva felirhatjuk az extremális görbe egyenleteit:

$x-h=b(\omega-\sin\omega)$ és $y-a=b(1-\cos\omega)$, a mely egyenletek, mint ismeretes egy cycloist értelmeznek; arra az eredményre jutottunk tehát, hogy ha brachystochrone egyáltalában létezik, akkor ez nem lehet más, mint cycloïs.

Miélőtt most annak vizsgálatára átmennénk, hogy vajjon az itt nyert extremalisok szolgáltatnak-e tényleg extremumot vagy nem, előbb még az eddig tárgyalt feladatoknak két irányban való általánosításával fogunk foglalkozni, a mennyiben ezen általánosabb feladatoknál az extremum vizsgálata ugyanazon segédeszközökkel történhetik, mint az eddig tárgyalt egyszerűbb esetekben. Hogy ezen általánositások természetére nézve tájékozódhassunk, felemlitjük III. és IV. példánkat a melyek általánositásaink mivoltára éles világot vetnek.

III. Harmadik példánkat következőleg fogalmazhatjuk meg. Legyen adva egy felület: $f(x,y,z)=0$, vegyünk fel ezen a felületen az $(x_0 y_0 z_0)$ és (x_1, y_1, z_1) coordinatás pontokat és képzeljünk ezeken a pontokon keresztül oly görbéket fektetve, a melyeknek minden pontja a felületen fekszik. Egy ilyen görbe általánosan szólva térbeli görbe lesz és parameteresen a következőleg állitható elő: $x=\varphi(t)$; $y=\psi(t)$; $z=\chi(t)$, vagy ha előbbi feltevésünkhöz híven a t parametert x-el teszszük egyenlővé, akkor a görbe egyenletei lesznek: $y=\psi(x)$; $z=\chi(x)$. Mivel ez a görbe feltevésünk szerint teljesen a felületen fekszik, ezért $\psi(x)$ és $\chi(x)$ nem lehetnek egészen tetszőleges függvényei az x-nek, hanem kell, hogy identice kielégitsék a felület egyenletét, vagyis, hogy $f(x,\psi(x),\chi(x))=0$ legyen.

Most vegyük fel azt a sík esetén már tárgyalt kérdést, hogy miképen kell ezt a görbét fektetni a felület adott két pontja közt, hogy a görbe mentén mért ívhossz minimum legyen, vagyis hogy a görbe két pontja között a legrövidebb utat szolgáltassa. Az olyan görbét, mely az itt feltüntetett tulajdonsággal bír, általánosan geodaeticus görbének, geodaeticus vonalnak szokás nevezni és a síktan — mint ismeretes — az egyenes, a gömbön pedig a legnagyobb kör bír a geodaeticus görbe tulajdonságával, az a kérdés tehát most, hogy miképp kell a felületen görbénket megválasztani úgy, hogy az geodeticus görbe legyen. Vegyük ezen czélból az ívelem kifejezését: $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$

$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$, az ívhossz tehát az (x_0, y_0, z_0) és (x, y, z) pontok között nem lesz egyéb, mint $s = \int_{x_0}^{x} \sqrt{1 + \varphi'(x)^2 + \chi'(x)^2}\, dx$ és már most nem kell egyebet tenni, mint a φ és χ függvényeket úgy választani, hogy az integrál minimum legyen, szem előtt tartva egyúttal azt is, hogy φ és χ az $f(x, \varphi(x), \chi(x)) = 0$ relationak eleget tesznek. Nyilvánvaló, hogy ez már más variatio számítási feladat, mint az eddigiek voltak a mellett t. i., hogy itt az integrál jel alatt x-nek már két függvénye szerepel, feltűnő még az is, hogy ezek a függvények nem tetszőlegesek, hanem közöttük egy identicus feltételi egyenlet áll fenn. Ebből kifolyólag a variatio számítási problemák azon typusa, a melyhez a geodaeticus görbe feladata is tartozik, a következőleg jellemezhető: extremummá teendő egy:

$$\int_{x_0}^{x_1} F\left(x, y, z, u, \dots \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \frac{du}{dx} \dots\right) dx$$

kifejezés de úgy, hogy mellette egy adott kifejezés

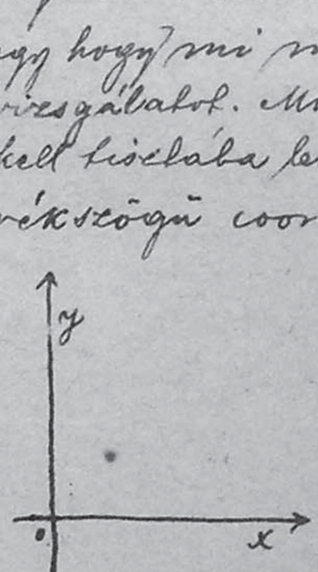
$$\left.\begin{array}{l} f(x, y, z, u \dots) = 0 \\ g(x, y, z, u, \dots) = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{array}\right\}$$

identikus feltételi egyenletek is teljesüljenek, vagy is meghatározandók az $y, z, u \dots$ függvények úgy, hogy 1.-ő a felírt integrált minimummá tegyék és 2, hogy a feltételi egyenleteknek identice eleget tegyenek. A variatio-számítási problemák ezen typusa a variatio-számítási

<u>számítási problemák mellék feltételekkel</u> "nevet viselő" analog problemákkal találkozunk már a max és minimum-számítás elméletében is.

Ezen mellék feltételes problemák közül kiválnak még bizonyos sajátságos problemák, a melyeknek typusát a feladatok során következő negyedik példa adja.

IV. Ezen negyedik példa tárgya a következő: Képzeljük, hogy egy tetszőleges hajlitható, de ki nem nyulható nehéz fonalunk van, a mely két pont között fel van függesztve és keressük ennek az aequilibrium (egyensulyi) helyzetet a mely helyre áll, ha a fonal tömeg centruma a lehető legmélyebben fekszik. Physikai okokból nyilván való, hogy ez a aequilibriumi helyzet egy verticalis síkban fog feküdni, ugy hogy mi mindjárt egy (x, y) síkban kezdhetjük a vizsgálatot. Mindenek előtt a tömeg centrum fogalmával kell tisztába lennünk. Legyen az (x,y) síkban egy olyan derékszögű coordinata rendszerben, a melynek x tengelye



horizontalis irányu, y tengelye pedig verticalisan felfelé mutat, az anyagi pontoknak következő rendszere:

(x_1, y_1) tömege m_1
$(x_2\ y_2)$ " m_2
- - - - - - -
- - - - - - -
$(x_k\ y_k)$ - - - - m_k

az anyagi pontok ezen rendszerének tömeg centruma az a pont, a melynek coordinatái ξ és η a következő kifejezésekkel vannak értelmezve:

$$\xi = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \ldots + x_k m_k}{m_1 + m_2 + \ldots + m_k}$$

$$\eta = y_1 m_1 + y_2 m_2 + \ldots + y_k m_k$$

Tudva most már, hogy a mi fonalunk nem 1, hanem végtelen sok anyagi pont rendszere: fonalunk tömegcentrumának a coordinatai lesznek:

$$\xi = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} x_k m_k}{\sum_{k=1}^{\infty} m_k}$$

$$\eta = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} y_k m_k}{\sum_{k=1}^{\infty} m_k}$$

vagy mivel ezen végtelen sok anyagi pont rendszere a fonalban egy folytonos sokaságot alkot, azért ξ és η ezen kifejezéseit, mint limeseket foghatjuk fel és úgy írhatjuk, hogy: $\xi = \frac{\int x\,dm}{\int dm}$ és $\eta = \frac{\int y\,dm}{\int dm}$ hol dm tömeg differentiál a görbének egy ds ív elemén.- Ebben az esetben a: $\frac{dm}{ds} = \mu$ kifejezés adja a fonal sűrűségét, hol μ általánosan szólva függvénye x-nek és y-nak, mivel a sűrűség a vonal különböző pontjain más és más lehet és most már a tömeg differentiál kifejezhető, mint az ív elem és sűrűség szorzata, t. i.:
$dm = \mu\,ds$, úgy hogy a tömegcentrum coordinátái így írhatók: $\xi = \frac{\int x\mu\,ds}{\int \mu\,ds}$, $\eta = \frac{\int y\mu\,ds}{\int \mu\,ds}$.-

A mi problemánkban arról van szó, hogy mikor lesz a fonal aequilibriumi helyzetben, vagyis más szóval, mikor fog a tömegcentrum lehető legmélyebb helyzetet elfoglalni: az ξ coordinátát tehát nekünk tárgyalásunk folyamán nem is szerepelnek, hanem csakis a η coordinátával kell foglalkoznunk, ezt kell minimummá tenni, mivel a tömegcentrum mélyen fekvése csakis ettől a coordinátától függhet.-

Mi itt a feladatnak azzal az esetével fogunk csak foglalkozni, midőn a fonal homogén, tehát a midőn a sűrűség μ állandó, amikor is:

$$\eta = \frac{\int y\,ds}{\int ds} = \frac{\int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1+p^2}\,dx}{\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+p^2}\,dx}$$

; ezt a kifejezést kell tehát minimummá tenni.- Nem vettünk azonban mindeddig egy körülményt, azt t. i. hogy a fonal ki nem nyújtható, vagyis más szóval, hogy a fonal hossza nem változik, tehát, hogy:

$\int ds = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+p^2}\, dx = S$, hol S egy állandó mennyiséget jelent, ha tehát most ezt a körülményt számba vesszük, akkor feladatunk a következő alakot ölti: minimummá kell tenni az: $J = \int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1+p^2}\, dx$ integrált és pedig úgy, hogy egy másik integrál: $\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+p^2}\, dx = S$ állandó értékkel bírjon.-

Nyilvánvaló, hogy itt a variatió számítási problemák egy új typusával van dolgunk, mely typusnál az integrál jel alatt álló egyetlen függvény úgy határozandó meg, hogy az integrált minimummá tegye, és hogy e mellett egy másik integrál állandó értéket vegyen fel, tehát általánosan véve a dolgot: y itt meghatározandó úgy, hogy: $J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, p)\, dx$ minimum legyen és hogy e mellett: $\int_{x_0}^{x_1} \Phi(x, y, p)\, dx = S$ állandó értékkel bírjon.- A variatió számítás problemáinak ezen typusához tartozó feladatokat is perimetrikus feladatoknak szokás nevezni, mivel a második integrál, melynek állandó értéket kell felvennie, rendesen egy periméter, tehát egy ívhossz; - ilyesféle feladatokkal mindjárt a differentiális calculus felfedezése után kezdtek foglalkozni; így már a két Bernoulli is tárgyalt ilyen feladatokat.-

Mielőtt még III és IV példánk részletesebb tárgyalásába bocsátkoznánk, előbb vizsgáljunk kissé közelebbről azt az általánosabb esetet, melyben az integrál jel alatti függvény több, mint egy függvényt tartalmaz:-

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F\left(x, y, z \ldots u\, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx} \ldots \frac{du}{dx}\right) dx$$

és kérdezzük, miképp kell az $y, z \ldots u$ függvényeket meghatározni, hogy ez az J integrál extremum legyen.- A követendő eljárás egészen typikus erre nézve, úgy, hogy teljesen elegendő x-nek csak két függvényét:

$$\left.\begin{matrix} y = f(x) \\ z = g(x) \end{matrix}\right\}$$

venni tekintetbe, a mikor is az extrémummá teendő integrál alakja:

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F\left(x, y, z \ldots \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}\right) dx$$

Az, hogy x-nek csak két függvényét vesszük számba, azzal az előnnyel is jár, hogy ezt a két függvényt, mint egy térbeli görbe előállítását tekinthetjük, a miből egyuttal azt is látjuk, hogy az az általánosabb problema az előzőkben tárgyalt egyszerűbb problémától csakis attól különbözik, hogy az ottani síkbeli görbe helyét, most a térbeli görbe foglalja el.- A határ feltételekre nézve most is ugyanaz áll, mint az előbbi egyszerűbb feladatnál: az extremum minősége itt is teljesen független a határ feltételek megválasztásától, úgy hogy elejétől fogva kiköthetjük, hogy az extremálisok az $(x_0 y_0 z_0)$ és $(x_1 y_1 z_1)$ pontokon menjenek keresztül.- (A legáltalánosabb határfeltétel a jelen esetben az volna, hogy a görbének két végpontja egy-egy felületen mozogjon, a mikor aztán a feladat az volna, hogy fel kell keresni a legrövidebb vonalat, a mely a két felület két tetszőleges pontját egymással összekapcsolja, de könnyű belátni, hogy ez az általánosabb határ feltétel a feladatot lényegesen nem complicálja).-

Ezek után tovább menve emlékezzünk vissza arra a körülményre, hogy a síkbeli görbéknél x-nek variátiója: δx és y variátiója δy volt.- Ha mi most egyszer s mindenkorra a határfeltételeket akkép választjuk meg, hogy görbénk két meghatározott ponton menjen keresztül, akkor ezzel szemben az általánosság megszorítása nélkül vehetjük, hogy $\delta x = 0$ és pedig identice, vagyis hogy x nem variál, megjegyzendő azonban, hogy δx megtartása elméletileg semmi nehézséget nem okoz és hogy mi inkább csak egyszerűség és kényelem szempontjából tesszük azt a kikötést.- Ha már most: $\delta x = 0$ vesszük, akkor: $\frac{dy}{dx}$ variátiója, mely általánosan a:

$$\delta \frac{dy}{dx} = \frac{d\,\delta y}{dx} - \frac{dy}{dx} \cdot \frac{d\,\delta x}{dx} = \frac{dx\, d\delta y - dy\, d\delta x}{dx^2}$$

kifejezéssel volt előállítva, lényegesen egyszerűbbül is lesz: $\delta \frac{dy}{dx} = \frac{d\,\delta y}{dx} = \delta y'$ úgy hogy feltevésünk mellett azzal is egyszerűbbé lesznek számításaink, hogy nem kell p-t bevezetni, hanem az x szerint való deriváltakat egyszerűen vesszővel jelölhetjük: $\frac{dy}{dx} = y'$ $\frac{dz}{dx} = z'$ és variátióik lesznek:

$$\delta \frac{dy}{dx} = \delta y' \text{ és } \delta \frac{dz}{dx} = \delta z'. -$$

Térjünk át ezen előzetes megállapodások után a felírt J integrál vizsgálatára és pedig alkossuk meg mindenek előtt az integrál első variátióját.-

Az integrál jel alatti függvényben x a feltétel szerint nem variál, tehát a variált függvény alakja lesz: $\mathcal{F}(x, y+\delta y, z+\delta z, y'+\delta y', z'+\delta z')$ vagy Taylor tétele szerint kifejtve:

$$= \mathcal{F}(x, y, z, y', z') + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y}\delta y + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z}\delta z + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y'}\delta y' + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z'}\delta z' + [\delta y, \delta z, \delta y' \delta z']$$

Itt a variátiokra nézve ismét azt a megszoritást kell behoznunk, hogy: $\delta z, \delta y$ és $\delta y', \delta z'$ egyenlő rendüek, azaz, hogy ha δy és δz végtelen kicsinyek, akkor $\delta y'$ és $\delta z'$ is végtelen kicsinyekké válnak. – Ezen sorbafoltás révén meglehet alkotni az $\mathcal{F}$ integrál teljes váriátioját, a melyből az első rendü tagokat megtartva, az első váriátiót nyerjük, úgy hogy az $\mathcal{F}$ integrál első váriátioja nyilván nem lesz egyébb, mint:

$$\delta \mathcal{F} = \int_{x_0}^{x_1} \left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y}\delta y + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z}\delta z + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y'}\delta y' + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z'}\delta z' \right\} dx$$

Most ép úgy, mint az egyszerübb esetben ezt az első váriátiót pártiális integrátió alkalmazásával át fogjuk alakitani. – Végezzük mindenek elött a következő integrált:

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y'}\delta y' dx = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y'} \cdot \frac{d\,\delta y}{dx} dx = \left[\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y'}\delta y\right]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \frac{d \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y'}}{dx}\delta y\, dx$$

mivel azonban határfeltételünk azt mondja, hogy a görbe átmegy az $(x_0 y_0 z_0)$ és $(x_1 y_1 z_1)$ pontokon, kell, hogy ezekben a pontokban $\delta y = 0$ legyen, úgy hogy a jobb oldal első tagja kiesik. –

Hasonlóképen át lehet alakitani a következő integrált:

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z'}\delta z' dx = \left[\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z'}\delta z\right]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dy}\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z'}\right)\delta x\, dx$$

, úgy hogy ezen átalakitások tekintetbe vételével az első variátio így irható:

$$\delta \mathcal{F} = \int_{x_0}^{x_1} \left\{ \left[\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y} - \frac{d}{dy}\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y'}\right)\right]\delta y + \left[\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z'}\right)\delta z\right\} dx$$

Most okoskodjunk így: Mivel csak szükséges feltételekről van szó arra nézve, hogy $\mathcal{F}$ integrálunk extremum legyen, megválaszthatjuk δy-t és δz-t speciális módra olyképen, hogy:
$$\left.\begin{aligned}\delta y &= \kappa u\\ \delta z &= \kappa v\end{aligned}\right\}$$
legyen, hol κ elegendő kis állandó, u és v pedig tetszőleges függvényei x-nek. – A variátioknak ezen speciális megválasztásánál ismeretes okoskodások szerint a teljes variátio kifejezése-

ben a k első hatványával szorzott tagok összege nem egyébb, mint δJ, mivel pedig k előjelének megváltozásával a teljes variátió előjele is megváltozik, a mi extremum esetén ki van zárva, azért szükséges, hogy extremum esetén a k első hatványával szorzott δJ null legyen, az első szükséges feltétel tehát az extremumra nézve: $\delta J = 0$ egyenlet.- Vegyük ezután tekintetbe, hogy δy és δz az x_0-tól x_1-ig terjedő intervallumon belül még egészen tetszőleges függvényei az x-nek.- Ezt tudva, vegyük görbénknek egy olyan variátióját, a melynél a z coordináta egyáltalában nem változik, tehát a hol: $\delta z = 0$, ekkor a nullával egyenlő első variátió a következő kifejezésre redukálódik:-

$$\int_{x_0}^{x_1}\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]\delta y\, dx = 0$$

Most ismét a már egyszer alkalmazott következtetési módszer szerint a még egészen tetszőleges δy-t úgy választhatjuk meg, hogy az itt felírt integrál eltűnésének szükséges következményeként egyszersmind:

$$(1.)\quad \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$$

legyen, a mely egyenlettel egy első differentiál egyenletet nyertünk az extremáltsok meghatározására.- Ha ezután görbénknek egy olyan variátióját vesszük, melynél $\delta y = 0$, akkor nyerjük: $\delta J = 0$ kifejezésből az: $\int_{x_0}^{x_1}\left[\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right)\right]\delta z\, dx = 0$ egyenletet, a mely δz célszerű megválasztásával az extremáltsok meghatározására szolgáló második:

$$(2.)\quad \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right) = 0$$

differentiál egyenletbe megy át, úgy hogy ebben az esetben a két ismeretlen függvény meghatározására két differentiál egyenletet nyertünk.- Hogy feladatunk teljesen elvégezve, még ezen két másodrendű differentiál egyenlet megoldásánál előjövő négy tetszőleges állandó meghatározására nézve megjegyezzük, hogy ez a 4 állandó az:

$$\left.\begin{matrix} y_0 = f(x_0) \\ z_0 = g(x_0) \end{matrix}\right\} \text{ és } \left.\begin{matrix} y_1 = f(x_1) \\ z_1 = g(x_1) \end{matrix}\right\}$$

kifejezések által van meghatározva, ezzel problémánkat ezen általánosb esetben teljesen megoldottuk.

Tegyük meg végre azt az észrevételt, hogy, ha az integráljel alatt x-nek nem két hanem három, négy, öt stb. tetszőleges függvénye állana, akkor ugyanolyan eljárással mint itt három, négy, öt etc. differentiál egyenletet nyernénk ezen függvények meghatározására.-

Térjünk át ezek után arra az előzőkben mellék feltételes problémának nevezett esetre, a midőn az integrál-jel alatt több függvény szerepel, a melyeket olyképp kell meghatározni, hogy: 1. az integrál egy extrémum legyen és 2., bizonyos feltételi relátiók teljesüljenek.- A mi, mindenek előtt ezen relátió sereget illeti, meg kell jegyeznünk azt, hogy, ha a meghatározandó függvények száma $\underline{n}$, akkor szelire nézve legfeljebb $(n-1)$ relátiót szabad adni, mert, ha, már pl. n relátió volna adva, akkor ez az $\underline{n}$ relátió az $\underline{n}$ függvényt teljesen meghatározná és így nem volna meg a lehetőség, hogy ezek a függvények még egy integrált extrémummá tegyenek.-

Ezt tekintetbe véve foglalkozunk először is azzal a legegyszerűbb esettel, a midőn két függvény y és z határozandók meg úgy, hogy: $J=\int_{x_0}^{x_1} F(x, y, z, y', z')\,dx$

integrált extrémummá tegyék, és hogy a mellett, a: $\varphi(x, y\, z, ;\ y' z')=0$ identikus relátiónak eleget tegyenek.- Itt, a következőképen lesz célszerű okoskodni.- Ha x-nek azon y, z függvényeit veszem, melyek a kitűzött feladatnak megfelelnek, akkor ezen függvényeknek a behelyettesítésével a φ identice eltűnik, én tehát a helyett, hogy az integráljel alatt az: $F(x\, y\, z\, y' z')$ függvényt venném, nyugodt lélekkel írhatom helyébe az: $F(x\, y\, z, y' z')+\lambda\varphi(x\, y\, z\ \ y' z')$ összeget, a melynek a második tagja úgy is identice null, vagyis foglalkozhatom azzal a feladattal, hogy az: $\overline{J}=\int_{x_0}^{x}(F+\lambda\varphi)\,dx$ integrált tegyem extrémummá, mert ha egy x, y függvényrendszer az J integrált extrémummá teszi, és a mellett a feltételi egyenletnek is eleget tesz, akkor nyilván valóan extrémummá teszi az $\overline{J}$ integrált is.- Írjuk ezt az $\overline{J}$ integrált így:

$\overline{J}=\int_{x_0}^{x_1}\overline{F}(x, y, y', z, z')\,dx$, akkor ennek első variátiója az előzők szerint lesz: $\delta J=\int_{x_0}^{x_1}\left\{\left[\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]\delta y+\left[\frac{\partial F}{\partial z}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right)\right]\delta z\right\}dx$

Nem szabad azonban feledünk, hogy most a δy és δz nem tetszőleges függvényei

x-nek, hanem, hogy mint minden y és z függvény eleget tartoznak tenni a feltételi egyenletnek: $\varphi(x, y+\delta y, z+\delta z, y'+\delta y', z'+\delta z')=0$, mely egyenlet, δy-t megadva, δz-re nézve egy differentiál egyenletet szolgáltat, vagyis nem szabad feledni, hogy ha pl. δy-t tetszőlegesen megválasztottuk, akkor δz értéke már ezen egyenlet által megvan szabva és ipen ezért a továbbiakra nézve nem okoskodhatunk úgy, mint az előbb tettük, a hol δy és δx $\underline{x}$ tetszőleges függvényei voltak, hanem más módszerhez kell folyamodnunk. – Megkönnyiti most okoskodásunkat azon körülmény, hogy λ-nek egy még teljesen tetszőleges x függvénye áll rendelkezésünkre, a melyet akkép fogunk megválasztani, hogy:

$$(1.)\quad \frac{\partial \bar{F}}{\partial z}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial z'}\right)=0$$

legyen, a mikor aztán az első variátió kifejezése lesz:- $\delta J=\int_{x_0}^{x_1}\left[\frac{\partial \bar{F}}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial \bar{F}}{\partial y'}\right]\delta y\,dx=0$, a miből a már többször használt következtetés szerint nyerjük, hogy: $(2.)\ \frac{\partial \bar{F}}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial \bar{F}}{\partial z'}=0$

Ha még a nyert két egyenlethez hozzáirjuk harmadiknak a feltételi egyenletet: $(3.)\ \varphi(x, y\ z\ y'z')=0$, akkor van 3 egyenletünk, a mely y-t z-t és λ-et mint x függvényét teljesen meghatározzák és ezzel az extremálisok ebben az esetben is megvannak határozva. –

Nézzük ezek után azt az általánosabb esetet, a midőn az s független változónak x, y, z függvényeit akkép kell meghatározni, hogy ezen 3 függvény az:

$$J=\int_{x_0}^{x_1}F(s, x, y, z\ x'\ y'\ z')\,ds$$

integrált extrémummá tegye és emellett, a: $\varphi(s, x, y\ z, x'\ y'z')=0$

$\psi(s. x, y, z, x', y', z')=0$

identikus relátióknak eleget tegyen, hol a vesszős mennyiségek most $\underline{s}$ szerint való deriváltakat jelentenek. – Legyen itt ismét: $\bar{F}=F+\lambda\varphi+\mu\psi$. és foglalkozzunk azzal a feladattal, hogy a $\varphi=0$ és $\psi=0$ relátiók figyelembe vétele mellett, az: $\bar{J}=\int_{s_0}^{s_1}\bar{F}\,ds$ – integrált extrémummá tegyük; ekkor: $\delta\bar{J}$ ismét a: $\delta\bar{J}=\int_{s_0}^{s}\left\{\left[\frac{\partial \bar{F}}{\partial x}-\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial x'}\right)\right]\delta x+\left[\frac{\partial \bar{F}}{\partial y}-\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial y'}\right)\right]\delta y+\left[\frac{\partial \bar{F}}{\partial z}-\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial z'}\right)\right]\delta z\right\}ds$

alakba irható, hol azonban δx-et, δy-t és:

δz-t úgy kell megválasztani, hogy a:

$$\left.\begin{array}{l}\varphi(s, x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z, x'+\delta x', y'+\delta y', z'+\delta z')=0 \\ \psi(s, x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z, x'+\delta x', y'+\delta y', z'+\delta z')=0\end{array}\right\}$$

egyenletek fennálljanak, miből következik, hogy ezen 3 variáltó közül egyet tetszőlegesen megadva, a másik kettő ezen egyenletek révén meghatározható.- Most azonban s-nek tetszőleges λ μ függvényeit úgy választhatjuk meg: hogy: 1.,

$$\left.\begin{array}{l}1.,\ \dfrac{\partial \overline{F}}{\partial x}-\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{\partial F}{\partial x'}\right)=0 \\ 2.,\ \dfrac{\partial \overline{F}}{\partial y}-\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right)=0\end{array}\right\}$$

legyen, a mikor is az első variáltó kifejezése lesz: $\delta \overline{F}=\int_{s_0}^{s_1}\left[\dfrac{\partial F}{\partial z}-\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{\partial F}{\partial z'}\right)\right]\delta z\, ds=0$

azaz ismét következtetés szerint:

$$3.,\ \frac{\partial \overline{F}}{\partial z}-\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right)=0,$$ a mely 3 egyenlet a:

$$4.,\ \varphi(s\ x\ y\ z\ x'\ y'\ z')=0$$
$$5.,\ \psi(s\ x\ y\ z\ x'\ y'\ z')=0$$

feltételekkel, -egyenletekkel együtt teljesen meghatározza az x y z extrémáliókat és a λ, μ factorokat.-

Miután a mellékfeltételes problémák ezen két esetéből kielégítő útmutatást szerezhettünk arra nézve, hogy miképp kelljen általánosabb esetekben is eljárnunk, térjünk most át III. példánkhoz, a melyen először láttuk a mellékfeltételes problémák sajátosságait t.i: a felület geodaetikus vonalainak a meghatározásához.- Legyen az adott felület egyenlete: $f(x, y, z)=0$ legyen ezen a felületen két szabott ponthelynek cordinátája: $(x_0\, y_0\, z_0)$, $(x_1\, y_1\, z_1)$ és keressük azt a görbét, a mely a felületen mérve a legrövidebb utat adja ezen két pont között.- Legyen a felület ív eleme: $ds^2=dx^2+dy^2+dz^2$. ekkor feladatunkat a következőleg fogalmazhatjuk meg: határozzuk meg az x y z coordinátákat, felfogva, mint az s ívhossznak: $x=\varphi(s)$, $y=\psi(s)$; $z=\chi(s)$ függvényeit olyképpen, hogy: s-nek ezen függvényei: 1.) az $J=\int_{s_0}^{s_1} ds$ integrált minimummá tegyék és 2., a felület: $f(x, y, z)$ egyenletének is identice eleget tegyenek.- Megjegyzendő azonban, hogy: ezen problémánál még egy feltételi egyenletet is tekintetbe kell vennünk, t.i. az:

$1 = \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2$ vagyis : $x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$ egyenletet, a mely a mi esetünkben szintén teljesülni köteles, úgy, hogy most van 3 meghatározandó függvényünk és két feltételi egyenletünk, tehát ugyanannyi, mint a legutóbbi esetben volt... Az integrál jel alatti függvény most a lehető legegyszerűbb, t. i.: $F = 1$ és így: $\bar{F} = \lambda f(x y z) + \mu(x'^2 + y'^2 + z'^2)$.– Alkossuk meg ezen $\bar{F}$ függvény segélyével az extremálisok differentiál egyenletét:

$$\lambda \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{ds}(\lambda\mu x') = 0 \qquad \lambda \frac{\partial f}{\partial x} - 2\mu x'' - 2\mu' x' = 0$$
$$\lambda \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{ds}(\lambda\mu y') = 0 \qquad \lambda \frac{\partial f}{\partial y} - 2\mu y'' - 2\mu' y' = 0$$
$$\lambda \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{ds}(\lambda\mu z') = 0 \qquad \lambda \frac{\partial f}{\partial z} - 2\mu z'' - 2\mu' z' = 0$$

ez az előbbi 3 egyenlet differentiálva.

És végül szorozzuk meg egyenleteinket rendre $x'\ y'\ z'$-el és adjuk össze, ekkor nyerjük, hogy: $\lambda\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{ds} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{dz}{ds}\right) - 2\mu(x'x'' + y'y'' + z'z'') - 2\mu'(x'^2 + y'^2 + z'^2) = 0$

Amde itt λ factor nem egyéb, mint: $\frac{df}{ds} = 0$, mivel f maga is identice null; μ' coefficiense: $x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$ ennek differentiál quotiense: $2(x'x'' + y'y'' + z'z'') = 0$ pedig μ coefficiensét adja, úgyhogy felírt egyenletünkből szükségképen következik, hogy: $\mu' = 0$ azaz μ constáns.– Ezt tekintetbe véve differentiál egyenleteink lényegesen egyszerűsbülnek, t. i. a következő alakba írhatók: $\lambda\frac{\partial f}{\partial x} - 2\mu x'' = 0$; $\lambda\frac{\partial f}{\partial y} - 2\mu y'' = 0$; $\lambda\frac{\partial f}{\partial z} - 2\mu z'' = 0$

hol μ állandó, λ pedig s-nek még tetszőleges függvénye is lehet.– Hogy egyenleteinket még kissé más alakba írhassuk, legyen: $\frac{\lambda}{2\mu} = \nu$ ekkor nyerjük, hogy: $\frac{d^2x}{ds^2} = \nu\frac{\partial f}{\partial x}$; $\frac{d^2y}{ds^2} = \nu\frac{\partial f}{\partial y}$; $\frac{d^2z}{ds^2} = \nu\frac{\partial f}{\partial z}$, amely egyenletek a geodaeticus vonalak szokott előállítását szolgáltatják; ezt látjuk tehát, hogy, ha létezik egyáltalában oly görbe a felületen, a mely két pont közt a legrövidebb utat szolgáltatja, akkor ez a görbe csakis geodaeticus vonal lehet.

Alkalmazzuk most ezt az eredményt egy speciális felületre t. i. a gömbre.– A gömb egyenlete: $f = x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$. Ebben az egyenletben tehát a geodaeticus vonalakat értelmező egyenletek a következők lesznek:

$x'' = \nu 2x$, $y'' = \nu 2y$, $z'' = \nu 2z$, következő

$yx''-xy''=0$, $zy''-yz''=0$, $xz''-zx''=0$.- Ezeket az egyenleteket most közvetlenül integrálhatjuk, a mennyiben pl. az első egyenlet baloldala ekép is irható: $\frac{d}{ds}(yx'-xy')=0$, úgy hogy az integrálás elvégzése után nyerjük: hogy: $yx'-xy'=m$; $zy'-yz'=k$; $xz'-zx'=l$.- Szorozzuk meg rendre ezt a 3 egyenletet z, x és y-al, akkor összeadás után nyerjük: hogy: $kx+ly+mz=0$.- Ez az egyenlet a geodaetikus görbékre nézve a térbeli derékszögű coordinátákban egy síkot értelmez, mely keresztül megy a coord. rendszer kezdő pontján, azaz keresztül megy a görbe centrumán, a geodeticus vonalak tehát oly síkokkal metszetnek ki a gömbből, mely síkok a gömb centrumán keresztül mennek, tehát ezek a geodaeticus vonalak nem egyebek, mint a gömb legnagyobb körei.-

Az eddig tárgyalt esetekre visszavezethető még egy általánosítása a variatio számítás problemájának.- Eddig t.i. az integrál jel alatt mindig bizonyos függvények és ezeknek első differentiál hányadosai állottak, képzelhető azonban, hogy nemcsak az első, hanem második, 3^{dik} .... n-dik diff. hányadosok is szerepelnek az integral jel alatt.- Ebben az esetben az extremalisok differentiál egyenleteit szintén fel lehet állitni, és pedig a követendő eljárás a következő.- Rövidség kedvéért vegyük a legegyszerübb esetet: tegyük extremummá az: $J=\int_{x_0}^{x_1}F(x\,y\,y'\,y''\,y^{(3)})\,dx$ integrált.- Ezt az esetet közvetlenül visszalehet vezetni arra, midőn az integrál jel alatti függvény több függvénytől függ, melyek közt bizonyos feltételi egyenletek teljesülnek.- Legyen t.i.: $y'=z$, $z'=u=y''$, $u'=y^{(3)}$...

akkor integralunk igy irható: $J=\int_{x_0}^{x_1}F(x\,y\,z\;u\,u')\,dx$

a hol az: y, z, u függvények közt fennállanak az: $z-y'=0$; $u-z'=0$ relatiók, van tehát az integráljel alatt x-nek 3 ismeretlen függvénye, melyek közt két relatio áll fenn. Ez az eset azonban már ismeretes az előzőkből, itt t.i.: $\overline{F}=F+\lambda(z-y')+\mu(u-z')$ és az extremálisok differentiál egyenletei a következők:

$$\frac{\partial\overline{F}}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\overline{F}}{\partial y'}\right)=0\;;\;\frac{\partial\overline{F}}{\partial z}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\overline{F}}{\partial z'}\right)=0;\;\frac{\partial\overline{F}}{\partial u}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\overline{F}}{\partial u'}\right)=0$$

azaz: $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}(-\lambda) = 0$ 1.) $\frac{\partial F}{\partial z} + \lambda - \frac{d}{dx}(-\mu) = 0$, 2.) ; $\frac{\partial F}{\partial u} + \mu - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial w}\right) = 0$ (3.

a mely egyenletek a két feltételi egyenlettel együtt az extrémálisokat teljesen meghatározzák.- A λ és μ eliminálása ezekből az egyenletekből így eszközölhető: differentiáljuk a (3.) egyenletet x szerint: $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right) + \frac{d\mu}{dx} - \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial w}\right) = 0$ helyettesítsük bele: $\frac{d\mu}{dx}$ helyébe az értékét (1.) alatti egyenletből:

$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right) - \frac{\partial F}{\partial z} - \lambda - \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial w}\right) = 0$ és a nyert egyenletet még egyszer differentiáljuk x szerint:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right) - \frac{d\lambda}{dx} - \frac{d^3}{dx^3}\left(\frac{\partial F}{\partial w}\right) = 0 ;$$ $\frac{d\lambda}{dx}$ értéke az (1.) alatti egyenletből ismeretes, nyerjük tehát, hogy:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right) - \frac{d^3}{dx^3}\left(\frac{\partial F}{\partial w}\right) = 0$$ és tekintetbe véve, hogy: $z = y'$, $u = y''$ lesz:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right) - \frac{d^3}{dx^3}\left(\frac{\partial F}{\partial y^{(3)}}\right) = 0$$

ez a hatodrendű differentiál egyenlet szolgáltatja tehát az extrémálisokat.

Ez az egyszerű eset magasabbrendű differentiálok esetén, csak annyiban módosul, hogy az extrémálisok számára magasabbrendű diff. egyenleteket nyerünk, több függvény esetén pedig annyiban, hogy a diff. egyenletek száma lesz nagyobb.-

Hátra volna még ezek után az isoperimetrikus feladatok tárgyalása.- Ezen feladatok legegyszerűbb esetének a schemája volt a következő feladat: extremummá teendő az: $J = \int_{x_0}^{x_1} F(x\, y\, y')\,dx$ integrál és pedig úgy, hogy e mellett az: $S = \int_{x_0}^{x_1} G(x, y, y')\,dx$ integrál constans értékű legyen.

Ezen feladat megoldásánál szorítkozunk most is, mint előbb a variáció számítás azon speciális esetére, midőn: $\delta x = 0$.- Arra nézve, most már, hogy felírt integrálunk extremum legyen, szükséges első sorban az, hogy: $\delta J = 0$ legyen és azonkívül az S integrálnak állandó értékkel kell bírnia, bármikép is variáljuk az y függvényt; ez azonban nem mond mást, mint azt, hogy: $\delta J = 0$ mellett $\Delta S = 0$.- De az S integrál teljes váro-

ációja a következő kifejezésekből van összerakva: $\Delta S = \delta S + \delta^2 S + \ldots\ldots$
hol az első kifejezés nem egyéb, mint egy dimenziójú tagok összesége, vagyis
az első variáció, a második kifejezés nem egyéb, mint a két dimenziójú tagok
összesége, vagyis a második variáció stb. ΔS kifejezés azonban nyilvánvalóan
csak akkor lehet null, ha a δS, $\delta^2 S$ stb. kifejezések mind eltünnek, kell
tehát, hogy: $\delta S = 0$, $\delta^2 S = 0 \ldots\ldots\ldots$ legyen. Hogy ezeket a feltételeket
most minél egyszerűbb módon fejezhessük ki célszerű lesz δy-t speciálisan
úgy megválasztani, hogy $\delta y = k\,v$ legyen, hol $\underline{v}$ tetszőleges függvénye x-nek,
k pedig egy állandó, mely tetszőleges kicsinynek választható meg. - Ekkor:
δS kifejezése: $\delta S = \int_{x_0}^{x_1}\left[\frac{\partial S}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial S}{\partial y'}\right)\right]\delta y\,dx$ a következőleg írható:

$$\delta S = \int_{x_0}^{x_1}\left[\frac{\partial S}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial S}{\partial y'}\right)\right]kv\,dx \text{ azaz:}$$

$$\delta S = k\int_{x_0}^{x_1}\left[\frac{\partial S}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial S}{\partial y'}\right)\right]v\,dx$$

és ennek a kifejezésnek, vagy mivel $k \neq 0$, a jobb oldali kifejezésnek el kell tűnni minden tetszőleges v-re nézve. Hogy kissé áttekinthetőbb alakban nyerjük e feltételt, legyen: $\int_{x_0}^{x}\left[\frac{\partial S}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial S}{\partial y'}\right)\right]v\,dx = \varphi(x)$

ha most ezt az egyenletet mindkét oldalon differenciáljuk x szerint,
és az így adódó egyenletből $\underline{v}$-t kiszámítjuk, nyerjük, hogy:

$$v = \frac{\varphi'(x)}{\frac{\partial S}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial S}{\partial y'}\right)} \quad (1.)$$

$\varphi(x)$ értelmezéséből következik, hogy:
$\varphi(x_0) = 0$ és minthogy a feltétel szerint:
$\delta S = 0$ minden variációra nézve, ennélfogva egyszersmind $\varphi(x_1) = 0$
A φ függvényt tehát úgy kell berendezni, hogy tetszőleges $\underline{v}$ függvényre nézve $\varphi(x_0)=0$ és $\varphi(x_1)=0$ legyen, ha ezen (1) egyenlet áll fenn köztük. Nyilvánvaló továbbá, hogy, ha megfordítva, φ-t akkép választjuk meg, hogy:
$\varphi(x_0) = 0$ és $\varphi(x_1) = 0$ akkor egyszersmind $\delta S = 0$ feltevé, hogy az (1) egyenlet kapcsolja a φ-t a $\underline{v}$-vel össze, úgy hogy a $\varphi(x_0)=0$ és $\varphi(x_1)=0$ e-

egyenletek képezik a szükséges és elegendő feltételt, arra nézve, hogy δJ eltűnjék; vegyük ezután az F integrálnak, melyet extrémummá kell tennünk, első variátióját, mely a dolog természetéből kifolyólag nullal egyenlő:

$\delta F = \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right] \delta y \, dx = 0$ és helyettesítsük bele δy-nak előbbi speciális értékét, ha az első egyenletet (1) tekintetbe vesszük: akkor:

$$\delta y = kv = k \frac{\varphi'(x)}{\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial G}{\partial y'}\right)} \quad \text{tehát:}$$

$$\delta F = k \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)}{\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial G}{\partial y'}\right)} \right] \varphi'(x) \, dx = 0$$

hol $\varphi(x)$ még egyelőre egészen tetszőleges függvény, csak az kell, hogy $\varphi(x_0) = 0$, $\varphi(x_1) = 0$. A jobb oldalt most partiális integrátióval át fogjuk alakítani:

$$\delta F = k \left[\frac{\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)}{\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial G}{\partial y'}\right)} \varphi(x) \right]_{x_0}^{x_1} - k \int_{x_0}^{x_1} \left[\varphi(x) \frac{d}{dx} \left[\frac{\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)}{\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)} \right] \right] dx = 0$$

Az első kifejezés eltűnik, mert $\varphi(x)$ úgy az alsó, mint felső határon null, következik tehát, hogy a jobb oldalon szereplő integrál maga is eltűnik. Ámde a már többször alkalmazott eljárás szerint az ebben az integrálban szereplő még egészen tetszőleges $\varphi(x)$ függvény megválasztható olykép, hogy:

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)}{\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial G}{\partial y'}\right)} \right] = 0$$

legyen, a mely egyenlet integrálva a:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\frac{d}{dx} - \mu \left[\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial G}{\partial y'}\right)\right] = 0,$$

illetve a:

$$\frac{\partial (F - \mu G)}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial (F - \mu G)}{\partial y'}\right) = 0$$

egyenletbe megy át, ez az egyenlet szolgáltatja tehát az extrémálisok differentiál egyenletét. – Mint látjuk az extremálisoknak ez a diff. egyenlete a variatió számítás legegyszerűbb problemájának diff. egyenletétől csakis abban különbözik, hogy itt F helyett: $\underline{F - \mu G}$ áll, hol:

$\mathcal{G}$ a constans értékű integrál jelalatti függvényt jelöli.-

Alkalmazzuk ezután az itt elkövetett eljárást a IV problemánkra.- Itt az az integrál, melyet extrémummá kellett tenni volt: $\mathcal{F} = \int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1+y'^2}\,dx$. a constans értékű integrált pedig szolgáltatta a következő kifejezés:

$\mathcal{S} = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2}\,dx$ E szerint az a függvény, a mely az extrémálisok differentiál egyenletében előfordúl, a következő lesz: $(y-\mu)\sqrt{1+y'^2}$.- Az extrémálisok differentiál egyenlete tehát a következőleg alakúl:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[(y-\mu)\sqrt{1+y'^2}\right] - \frac{d}{dx}\left\{\frac{\partial}{\partial y'}\left[(y-\mu)\sqrt{1+y'^2}\right]\right\}$$

Nyilvánvaló, hogy itt y helyébe irhatunk mindenütt $(y-\mu)$-t és akkor azt látjuk, hogy differentiál egyenletünk teljesen identicus lesz azzal, a melyet az I. problemánál nyertünk, úgy, hogy eredményül azt kapjuk, hogy, ha extrémum-görbe általában létezik, akkor ez nem egyéb, mint egy:

$y-\mu = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x-x_0}{2}} + e^{-\frac{x-x_0}{2}}\right)$ transcendens egyenlettel értelmezett láncgörbe ilyen alakot vesz fel, tehát az a sulyos fonál, a mely két pont közé felfüggesztve aequilibriumhelyzetben van.-

---

* * *

Átfutottuk már azokat a főbb problemákat, a melyekkel a variatió számitásban foglalkozni szokás, legalább a mennyiben csak egyszerü integrálok jönek tekintetbe, felállitottuk azokat a szükséges feltételeket, melyek a közönséges maximum és minimum számitás problemáinál annak felelnek meg, hogy a függvény első derivaltjának el kell tünnie és azt láttuk, hogy ezek a feltételek bizonyos extremálisoknak nevezett görbéket határoznak meg, a melyek közt az extrémum görbének okvetlenül elő kell fordulnia, ha az egyáltalában létezik.- Térjünk át ezekután annak a vizsgálatára, hogy hogyan kell a már ismeretes extremálisok közül a valóságos extremumot kikeresni.- Miután, mint láttuk minden variatió számitási problema visszavezethető arra az egyszerü feladatra, a melynél az integráljel alatt csak egy függvény és ennek első derivaltja szerepel, azért mi a következőkben csak ezt a feladatot fogjuk tárgyalni.-

Eljutottunk már az előzőkben addig, hogy az: $J = \int_{x_0}^{x_1} F(x\,y\,y')\,dx$ integrálhoz meghatároztuk az: $(L)\ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$ differentiálegyenletet, melynek megoldásai közt az extremum görbét keresni kell. – Hogy most már vizsgálatainkban tovább haladhassunk, a dolog természetéből kifolyólag fel kell tételeznünk, hogy ezen L. differenciál egyenlet megoldásai ismeretesek: $y = \varphi(x\alpha\beta)$

Irjuk fel ezek után a teljes variátió kifejezését:

$$\Delta J = \int_{x_0}^{x_1} \{F(x, y+\delta y, y'+\delta y') - F(x\,y\,y')\}dx$$

és tekintetbe véve, hogy a rögzitett határpontokban, a melyekkel mi most dolgozunk, a teljes variátió eltünik, fejtsük sorba a felirt kifejezést Taylor szerint:

$$\Delta J = \int_{x_0}^{x}\left\{\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y' + \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\delta y^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial y'}\delta y\delta y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\delta y'^2\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{3!}[\delta y, \delta y']_3\right\}dx = \delta J + \underbrace{\frac{1}{2!}\int_{x_0}^{x_1}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\delta y^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial y\partial y'} + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\delta y'^2\right]dx}_{\delta^2 J} + \frac{1}{3!}\int_{x_0}^{x_1}[\delta y\,\delta y']_3\,dx$$

A $\delta^2 J$ kifejezés, mely a két dimensiójú tagokat tartalmazza, az u. n. második variátio, melynek vizsgálata további feladatunkat képezi – a 3ik és magasabb rendű variátiok vizsgálata azonban az analysis mai állaspontján még nem eszközölhető.–

Már láttuk, hogy problémánknak szükséges feltételei, hogy $\delta J = 0$ legyen és hogy ΔJ állandó előjellel birjon. – Most először is azt akarjuk kimutatni, hogy ΔJ előjele lényegesen megvan határozva, $\delta^2 J$ előjelével. Ennek kimutatására okoskodjunk a következőképen: Először egy tetszőleges δy-ra nézve megalkotva képezzük a ΔJ-t, úgy, a hogy az imént feltettük és aztán veszünk egy speciális variátiót oly formán, hogy x_1 illetőleg y átmenjen x-be, illetve $y + \kappa\delta y$-ba, hol κ egy egészen tetszőleges állandó. – Erre a variátióra nézve természetesen egy más teljes variátiót kapunk és pedig: $\Delta_1 J = \frac{1}{2!}\kappa^2\delta^2 J + \frac{1}{2!}\kappa^3\int_{x_0}^{x_1}(\delta y + \delta y')_3\,dx$

Azt állitjuk most már, hogy $\Delta_1 J$ és $\delta^2 J$ előjele egy és ugyanaz. – A bizonyitást legcélszerübb apogógice vezetni, azaz bebizonyitani, hogy lehetetlen

mészerint ennek a két kifejezésnek különböző előjele volna. – A K-t, a mely
mégegyszer tetszőleges factor, akként tudjuk megválasztani, hogy a jobb oldali
kifejezésben az első tag előjele legyen mérvadó, az egész kifejezés előjelére nézve;
ha t.i. $\underline{K}$ elegendő kicsiny, akkor ugyanolyan okoskodás szerint, mint a mi-
lyennel a maximum és minimum elméletében éltünk:

$\operatorname{sgn.} \Delta_1 J = \operatorname{sgn} \delta^2 J K^2$, vagy mivel $K^2 > 0$, $\operatorname{sgn} \Delta_1 J = \operatorname{sgn.} \delta^2 J$. te-
hát lehetetlen az, hogy $\Delta_1 J$ és $\delta^2 J$ különböző előjelűek legyenek. – A mint
áll ez $\Delta_1 J$-re nézve, úgy áll természetesen általánosan ΔJ-re nézve is,
úgy hogy írhatjuk: $\operatorname{sgn} \Delta J = \operatorname{sgn.} \delta^2 J$. – Ezekután már most a
második váriátió előjelére nézve kell megállapodáshoz jutnunk. Ha az
extremáliok differentiál egyenleteit megoldva képzeljük és ha az ily mó-
don nyert: $y = \psi(x\,\alpha\,\beta)$ értékeket a második váriátió kifejezésébe behe-
lyettesítjük, akkor egy jól meghatározott kifejezés lesz és mi most azzal a ne-
héz feladattal állunk szemben, hogy megítéljük, hogy vajjon az előjövő hatá-
rozott integrál bír-e állandó előjellel, vagy nem. – Ennek a feladatnak a
megoldásánál mi Lagrange eljárását fogjuk követni, mely a következő
okoskodáson alapszik. – A második váriátióban szereplő 3 integrál kö-
zül mindenek előtt a másodikat fogjuk figyelembe venni, tehát a követ-
kezőt:

$$2\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} \delta y\, \delta y' dx$$

Mivel: $2\delta y \delta y' = 2\delta y \dfrac{d\delta y}{dx} = \dfrac{d(\delta y^2)}{dx}$

azért a fenti integrálra célszerűnek mutatkozik a pár-
tiális integrátió alkalmazása, mely szerint:

$$2\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} \delta y \delta y' dx = \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} (\delta y)^2\right]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} (\delta y)^2 \frac{d}{dx}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'}\right] dx$$

Határfeltételeinknél fogva δy mindkét határon zérus és így az első kife-
jezés elesik, úgy hogy a második váriátió alakja lesz:

$$\delta^2 J = \frac{1}{2!}\int_{x_0}^{x_1} (F_1 \delta y'^2 + F_2 \delta y^2) dx \text{, a hol: } F_1 = \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}, \quad F_2 = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'}\right)$$

Lagrangenak az igyekezete most abban állott, hogy azt a kifejezést,
mely a 2ik váriátióban az integráljel alatt szerepel, szorzatalakban állít-

sa elő", a mely szorzatnak egyik faktora legyen egy négyzet, a másik faktora pedig független a variatiótól, úgy hogy ennek a második faktornak az előjelét meg lehessen határozni egyszer s mindenkorra függetlenül a variatiótól s ez által dönteni a második variatio előjelére nézve. Hogy a variationak egy négyzetbe való szorítását elérje, a következőképen okoskodott. Legyen v egy tetszőleges függvény és képezzük a következő integrált:

$$\int_{x_0}^{x_1}\frac{d}{dx}\left[v.(\delta y)^2\right]dx = \left[v.(\delta y)^2\right]_{x_0}^{x_1} = 0$$

Ha ezt az identice nullával egyenlő integrált a második variatióhoz hozzáadjuk, kapjuk:

$$2\delta^2 J = \int_{x_0}^{x_1}\left\{F_1\,\delta y'^2 + F_2\,\delta y^2 + \frac{d}{dx}\left[v.(\delta y)^2\right]\right\}dx = \int_{x_0}^{x_1}\left\{F_1\,\delta y'^2 + F_2\,\delta y^2 + \frac{dv}{dx}\delta y^2 + 2v\,\delta y\,\delta y'\right\}dx$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} F_1\left[\delta y'^2 + \frac{2v}{F_1}\delta y\,\delta y' + \frac{F_2 + \frac{dv}{dx}}{F_1}\delta y^2\right]dx$$

Ez a kifejezés, mely az integrál jel alatt áll, már körülbelül úgy néz ki, mint egy teljes négyzet; és teljes négyzetbe is lesz, ha: $\left(\frac{v}{F_1}\right)^2 = \frac{F_2 + \frac{dv}{dx}}{F_1}$ I, Ez a feltétel teljesíthető, mivel v még egészen tetszőleges, és hogy, ha ez a feltétel teljesül, akkor Lagrangenak tényleg sikerült elérnie azt, a mit akart, a mennyiben az integrál jel alatti kifejezés egyik faktora egy a variatióktól független F_1 mennyiség, másik faktora pedig egy teljes négyzet: $2\delta^2 J = \int_{x_0}^{x_1} F_1\left(\delta y' + \frac{v}{F_1}\delta y\right)^2 dx$. Ebben az esetben tehát v-nek a meghatározása ezen a módon sikerül, akkor F_1 előjele meghatározza a második variatio előjelét; ha tehát F_1-nek állandó előjele van, akkor tudjuk, hogy a második variationak is állandó előjele van és egy extremummal van dolgunk, míg ellenkező esetben nincs extremum.

A mint látjuk, a dolog egészen azon fordul meg, hogy lehetséges-e a v meghatározása az (I) diff. egyenlettől, vagy a mint rendesen ki-szokás fejezni; hogy meg van-e engedve a második variationak ez a transformatioja, azt kell tehát vizsgálnunk, hogy az (I.) diff. egyenlet az x_0 és x_1 intervallumban bír-e egyértelmű és folytonos megoldásokkal; – ha bír, akkor a dolog el van intézve, ha nem bír, akkor ezen az uton nem sikerül a második variationak előjelének a meghatározása. Hogy ezt a kérdést eldönthessük, czélszerű lesz v-t, mint hányadost írni: $v = \frac{u_1}{u}$, hol u_1 egyértelmű, véges és folytonos u pedig egyértékű, véges, folytonos és el nem tűnő függvénye az x-nek. Tegyük be v-nek ezt az értékét egyenletünkbe: $\frac{u_1^2}{u^2} = F_1\left(F_2 + \frac{u\cdot\frac{du_1}{dx} - u_1\frac{du}{dx}}{u^2}\right)$ Mivel u-t az $x_0 - x_1$ intervallumon belül el nem tűnőnek tételezzük fel, át lehet vele szorozni egyenletünket, és lesz:

$$u_1^2 = u^2 F_1 F_2 + F_1\left(u\frac{du_1}{dx} - u_1\frac{du}{dx}\right),$$ azaz másképp írva:

$$F_1 u\left(\frac{du_1}{dx} + F_2 u\right) - u_1\left(u_1 + \frac{du}{dx}F_1\right) = 0$$ Az u_1 és u függvénypár természetesen még bizonyos értelemben tetszőleges, válasszuk meg tehát u_1-t úgy, hogy $u_1 + \frac{du}{dx}F_1 = 0$ legyen. Ekkor miután $u \neq 0$, kell, hogy: $F_1\left(\frac{du_1}{dx} + F_2 u\right) = 0$ legyen, a miből tekintetbe véve az imént felírt egyenletet, lesz:

$$F_1\left[\frac{d}{dx}\left(-F_1\frac{du}{dx}\right) + F_2 u\right] = 0..$$ Ha F_1 identice null volna, az $x_0 - x_1$ intervallumon belül, akkor a második variatio is identice null volna és akkor a harmadik variatiot kellene vizsgálni, a mi legalább ez idő szerint lehetetlen, úgy hogy vizsgálatainknak csak akkor van értelme, ha $F_1 \neq 0$, a mikor is legutolsó egyenletünk a következőleg írható:

$$F_2 u - \frac{du}{dx}\cdot\frac{d\,F_1}{dx} - \frac{d^2u}{dx^2}F_1 = 0 \quad (\mathrm{II}_1)$$ Arra az eredményre jutottunk tehát, hogy u ennek a másodrendű, homogén, lineáris diff. egyenletnek tegyen eleget, a mely diff.-egyenlet most az (I_1) diff. egyenlet helyébe lép, a mennyiben a második variationak a már említett transformatioja nyilván meg van engedve, ha ezen másodrendű, homogén, lineáris diff. egyenletből u-nak egy oly értéke adódik ki, mely az x_0 és x_1 határok között egyértékű, véges, folytonos és 0-tól különböző, míg ellenkező esetben a transformatio elveszti értelmét.

A mi most ennek a másodrendű homogén, lineáris diff. egyenletnek az integrálját illeti, erre nézve a következőket kell megjegyezni. Az ilyen másodrendű homogén, lineáris diff. egyenlet általános integrálja két tetszőleges állandótól függ, és ezt az általános integrált nyerjük, ha két különös integrált ismerünk:

$$u_1 = \psi_1(x), \quad u_2 = \psi_2(x)$$, a hol $\frac{u_1}{u_2} \neq$ constans; ezekből t. i. az általános integrál a következőleg adódik:

$u = c_1 \psi_1(x) + c_2 \psi_2(x)$, hol c_1 és c_2 két tetszőleges állandót jelent. – Így állván a dolog, a mi diff. egyenletünk általános integrálását is elvégezettnek lehet tekinteni, ha két ilyen partiális megoldás lehetséges. – Ámde Jakobi kimutatta, hogy ennek a másodrendű diff. egyenletnek mindig megtudjuk találni két partiális integrálját, ha az (L) diff. egyenlet meg van oldva, úgy hogy – mivel az (L) diff. egyenlet, a második variálás szolgálatakor már mindig megoldottnak tekinthető, azért Jakobi ezen tétel értelmében a másodrendű homogén, lineáris diff. egyenletünk általános integrálja kiszámitható. – A bizonyitás ez: Az (L) diff. egyenlet így szólt:

$$(L)\quad \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = G(x\, y\, y'\, y'') = 0.$$

– Ennek a diff. egyenletnek, mivel másodrendű, általános integrálja két tetszőleges állandótól fog függni, lesz tehát: $y = \psi(x\,\alpha\,\beta)$. Tegyük fel, hogy ez a kifejezés x-ben és az α, β állandókban ismeretes. – Ha akkor y-nak ezt az értéket G-be behelyettesitjük, akkor G identice eltünik. – Ebből következik természetesen, hogy G-nek partiális deriváltja $\alpha\ \beta$ szerint, szintén zérus:

$\frac{\partial G}{\partial \alpha} = 0$ és $\frac{\partial G}{\partial \beta} = 0$. – Számitsuk ki e két kifejezést: $\frac{\partial G}{\partial \alpha} = \frac{\partial G}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial G}{\partial y'}\cdot\frac{\partial y'}{\partial \alpha} + \frac{\partial G}{\partial y''}\cdot\frac{\partial y''}{\partial \alpha}$,

hol: $\frac{\partial y'}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)$; $\frac{\partial y''}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) = \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)$, továbbá:

$$\frac{\partial G}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right],$$

megjegyezve azt, hogy itt a 3-szoros diff. hányadosban a differentiálás sorrendje nem cserélhető fel, mivel x és y nem független egymástól. – Alakitsuk át egy kissé e kifejezést: $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y'} + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\cdot\frac{d^2 y}{dx^2}$

tehát: $\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right] = \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y \partial y'} + \frac{\partial^3 F}{\partial y^2 \partial y'}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{\partial^3 F}{\partial y \partial y'^2}\cdot\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'}\right)$ úgy, hogy:

$\frac{\partial G}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'}\right) = F_2$ Vegyük most G-nek partiális diff. hányadosát: y' szerint:

$$\frac{\partial G}{\partial y'} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} - \frac{\partial}{\partial y'}\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right] = \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y} - \frac{\partial}{\partial y'}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y'} + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\cdot\frac{d^2 y}{dx^2}\right] =$$

$$= \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\right) - \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\right) = -\frac{dF_1}{dx}$$ és végül

$$\frac{\partial G}{\partial y''} = \frac{\partial^2 F}{\partial y'' \partial y} - \frac{\partial}{\partial y''}\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right] = -\frac{\partial}{\partial y''}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y'} + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\cdot\frac{d^2 y}{dx^2}\right] =$$

$$= -\left\{\frac{\partial^3 F}{\partial y'' \partial x \partial y} + \frac{\partial^3 F}{\partial y'' \partial y \partial y'}\cdot y' + \frac{\partial^3 F}{\partial y'' \partial y'^2}\, y'' + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\right\} = -\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} = -F_1$$

A többi tagok kiesnek, mivel F-ben: y'' már nem szerepel. – Helyettesitsük be kifejezéseket: $\frac{\partial G}{\partial \alpha}$ egyenletébe, akkor lesz:

$\frac{\partial g}{\partial \alpha} = F_2 \frac{\partial y}{\partial \alpha} - \frac{d F_1}{dx}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial y}{\partial\alpha}\right) - F_1\cdot\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)$, mely kifejezés, mint mondottuk identice eltűnik, ha y helyett ψ-t irunk.. Hasonlitsuk most össze a kifejezést a (II) homogén lineáris másodrendű lineáris differentiál egyenlettel, a két egyenlet csak annyiban különbözik egymástól, hogy $\frac{\partial y}{\partial\alpha}$ helyett ott u áll, úgy, hogy azt mondhatjuk, hogy, ha $u=\frac{\partial y}{\partial\alpha}$, akkor a mi (II.) másodrendű homogén lineáris differentiál egyenletünk identice teljesül, azaz $\frac{\partial y}{\partial\alpha}$ ennek a differentiál egyenletnek egy megoldását képezi.. Ugyanazt a számitást, a mint α-ra nézve elvégeztük, elvégezhetjük a másik állandóra, β-ra nézve is, tehát $\frac{\partial y}{\partial\beta}$ szintén egy megoldása az egyenletnek és épen ebben áll Jakobi tétele, a mely szerint t.i. ha az (L) differentiál egyenletnek az általános integrálját, $y=\psi(x,\alpha\beta)$-t felállitottuk, akkor ennek a ψ-nek a két tetszőleges állandó szerint való partiális deriváltja a (II) homogén lin. differentiál egyenletnek két speciális integrálját szolgáltatja.. Az a kérdés most még, hogy vajjon e két integrálnak hányadosa nem állandó-e, mert, ha e hányados állandó, akkor csak egy integrálunk volna.

A két speciál integrál a következő: $\psi_1 = \frac{\partial y}{\partial\alpha}=\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}$; $\psi_2=\frac{\partial\psi}{\partial\beta}$

Kérdés lehet-e ezek hányadosa állandó; ha $\psi_2:\psi_1$ állandó, akkor diff. quot.:

$\frac{\psi_1\psi_2'-\psi_2\psi_1'}{\psi_1^2}=0$ és mivel a nevező nem identice végtelen, kell, hogy: $\psi_1\psi_2'-\psi_2\psi_1'=0$ legyen.. Vizsgáljuk lehetséges-e ez?

A felirt egyenlet más alakban:

$$\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\beta}\right)-\frac{\partial\psi}{\partial\beta}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}\right)=\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}\cdot\frac{\partial\psi'}{\partial\beta}-\frac{\partial\psi}{\partial\beta}\cdot\frac{\partial\psi'}{\partial\alpha}$$

.. Képezzük most: $\frac{d\psi'}{d\psi}$-t megjegyezve, hogy itt úgy ψ'-t, mint ψ-t csakis mint az α és β függvényeit fogjuk tekinteni.-

$$\frac{d\psi'}{d\psi}=\frac{\frac{\partial\psi'}{\partial\alpha}d\alpha+\frac{\partial\psi'}{\partial\beta}d\beta}{\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}d\alpha+\frac{\partial\psi}{\partial\beta}d\beta}$$

ha most a kérdéses kifejezés null volna, akkor ez a hányados független volna: $d\alpha$-tól és $d\beta$-tól, t.i.: pl. úgy lehetni felirni:

$$\frac{\frac{\partial\psi'}{\partial\alpha}\cdot\cancel{d\alpha+\frac{\frac{\partial\psi'}{\partial\beta}}{\frac{\partial\psi'}{\partial\alpha}}d\beta}}{\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}\cdot\cancel{d\alpha+\frac{\frac{\partial\psi}{\partial\beta}}{\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}}\cdot d\beta}} \;.-$$

Úgyhogy hányadosunkat úgy lehetne felirni, hogy: $\frac{d\psi'}{d\psi}$ = függv. $(\alpha\,\beta)$,

a mi annyit jelentene, hogy: $d\psi=0$ és $d\psi'=0$ azaz: $\psi=\text{const.}$ $\psi'=\text{const.}$ egymásnak következménye, tehát, hogy: $\psi'=\Phi(\psi)$ a függvény értelmérése szerint. – Ámde: $\psi' = \frac{d\psi}{dx}$ és így lehetetlen, hogy $\psi(\alpha\beta x)$-nek a függvénye legyen, mert a felírt elsőrendű diff. egyenlet megoldásánál nem szerepelhet két tetszőleges állandó, hanem csak egy, ψ pedig két tetszőleges állandót tartalmaz. Ebből következik, hogy: $\frac{d\psi'}{d\psi}$ nem lehet tisztán csak x-nak és β-nak a függvénye, tehát a kérdéses kifejezés nem lehet null, ψ_2 és ψ_1 hányadosa nem lehet állandó s ennélfogva a (II) másodrendű homogén lineáris diff. egyenletnek az általános integrálja írható:

$u = c_1 \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\alpha} + c_2 \frac{\partial\psi}{\partial\beta}$. Ezzel az $\underline{u}$ meg van határozva, úgy hogy tényleg bebizonyult, hogy ha az extremálisok diff. egyenlete meg van integrálva, akkor közvetlenül fel tudjuk írni a (II.) diff-egyenlet általános integrálját. –

Az a kérdés most már, hogy vajjon meg lehet-e határozni a c_1 és c_2 állandókat úgy, hogy a velük előállított $\underline{u}$ az x_0 és x_1 intervallumon belül valós folytonos és $\neq 0$ legyen.. Ez természetesen esetről-esetre külön-tüntetendő el. – Minden külön vizsgálatot igényel annak megítélése, hogy a szokásos szóhasználattal élve – a transformatió meg van-e engedve. – Ha ez a vizsgálat el van végezve, akkor már annyira vagyunk, hogy a második variátiónak az alakját ismerjük, t.i.: mindjárt bevezetve a $\delta^2 J$ kifejezésébe az $\underline{u}$-t, mivel: $u = c_1 \frac{\partial\psi}{\partial\alpha} + c_2 \frac{\partial\psi}{\partial\beta}$ és $u_1 = -F_1\left[c_1 \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}\right) + c_2 \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\beta}\right)\right]$ azért:

$$v = -F_1 \frac{\frac{\partial\psi'}{\partial\alpha} + \frac{c_2}{c_1} \cdot \frac{\partial\psi'}{\partial\beta}}{\frac{\partial\psi}{\partial\alpha} + \frac{c_2}{c_1} \frac{\partial\psi}{\partial\beta}}.$$

Itt láthatjuk, hogy $\underline{v}$ tényleg csak egy tetszőleges állandótól függ, t.i.: $\frac{c_2}{c_1}$-től, aminek úgy is kell lennie, mivel $\underline{v}$ egy elsőrendű diff. egyenletnek tesz eleget. –

Ha a transformatió meg van engedve, akkor $\underline{v}$ kifejezésének az x_0 és x_1 intervallumon belül valósnak és folytonosnak kell lennie, úgy hogy most már minden F_1-től függ, mely függvény a következő kifejezéssel volt értelmezve: $F_1 = \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}$.. Tegyük fel, hogy (1) $F_1 > 0$ az x_0–x_1 intervallumban. – Ha ez áll, akkor F_1 szorozva lévén egy folytonos függvény négyzetével $\delta^2 J$ integrál jel alatti része pozitív, tehát egyszers-

mind maga $\delta^2 J > 0$ s ennélfogva $\Delta J > 0$, úgy hogy integralunk.
egy minimum. Ha ellenkezőleg (2) $F_1 < 0$, akkor nyilvánvalóan $\delta^2 J < 0$,
$\Delta J < 0$ és így integralunk egy max. lesz. – Az látjuk tehát, hogy ha
a transformatio meg van engedve, azaz hogy ha a v az $x_0 - x_1$ in-
tervallumon belül, mint valós és folytonos függvény adódik ki, akkor
az egész vizsgálat F_1-nek az előjelére van visszavezetve, nem
kell egyebet tenni, mint az extremalisok kifejezését behelyettesí-
teni ϑ helyébe és utána nézni, hogy a nyert kifejezésnek állan-
dó előjele van-e x_0 és x_1 között – ha az előjel állandó, akkor van
extremum – és pedig max. v. min. a szerint, a mint $\delta^2 J < 0$, vagy $\delta^2 J > 0$
ha pedig nem állandó az előjel, akkor követett módszerünkkel az
extr. létezését nem lehet eldönteni.

Az itt előadott elméleti kriteriumot egyszerű módon alkalmaz-
hatjuk azon példákra, a melyeket előadásaink elején felsorol-
tunk, ugymint a legkisebb forgási és a brachystochrone esetére a-
mi azonban ezen kriterium általánositását illeti oly variatio
számitási problemákra, amelyeknél magasabbrendű differen-
tial-egyenletek teljesülnek, erre nézve az irodalomban történtek
ugyan kisérletek, de ezek positiv eredményre ezideig nem vezet-
tek. – Egyáltalában mondhatjuk, hogy az általunk levezetett kriterium
igen szükkörű, majdnem olyannak tűnik fel, mintha néhány specialis
esetre, néhány példa számára volna kitalálva, és a legtöbb esetben vagy
csak igen nehezen vagy pedig épen nem alkalmazható, úgyannyira, hogy
az ujabb időben a második variatio vizsgálatát teljesen abba is hagyták,
és arra törekedtek, hogy az első variatio vizsgálatával az extremalisok
differential egyenletét megoldva másféle direkt segédeszközökkel vizsgál-
ják meg, hogy vajjon létezik e maximum vagy minimum. –

Ez ilyféle vizsgálatoknak, eltekintve attól, hogy fontosak a va-
riatio számitásra nézve, még egy komolyabb czéljuk is van. Tegyük fel t. i.
hogy adva van a következő variatio számitási problema. Extremummá

lecendő az:

$\mathcal{J}=\int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')dx$.- integral, azaz meghatározandó y olyképen hogy az max. illetve minimum legyen. Teljes bizony-sággal állíthatjuk, hogy ha egy ilyen $y=\varphi(x)$ extremum görbe létezik, akkor ennek a görbének az extremalisok közt elő kell fordul-nia, tehát ennek a görbének a $G=0$ diff.-egyenletnek eleget kell tennie. Ámde most már tudjuk, hogy egy ilyen diff. egyenlet megoldása általáno-san szólva igen nehéz feladat, úgy hogy néha könnyebb ezen görbe existentiáját kimutatni, a mely az adott határfeltételeknek eleget tesz és az int.-t extremummá teszi, mint az (L) diff. egyenletnek az általános int.-t elvégezni. Épen azért az olyan eljárás, mely közvet-lenül egy extr. görbét szolgáltat az ilyen int-ra nézve, felfogható, mint egy oly eljárás, melynek révén a $G=0$ diff. egyenlet egy integrálját nyer-jük, úgy hogy ezzel új módszert nyertünk a diff. egyenletek megoldására.

Különösen fontos ez a felfogás, ha az egyszerű int.-ról átmegyünk a kettős integrálokra. Legyen pl. ez a kettős int.:

$\iint F\left(x,y,z,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right)dxdy$ az a kérdés, hogy vonatkoztatva bizo-nyos C zárt görbére, hogyan lehet z-t, mint x és y függ-vényét úgy megválasztani, hogy ez az integr. egy extremum legyen. Itt is tökéletesen úgy kell eljárnunk, mint az egyszerű int. esetén. Felállítjuk az első variatio kifejezését, ennek el kell tűnni, és ebből kiadódik egy (L) egyenlet; a mely most természetesen a két független változó szerinti diff.-egy quotienseket tartalmazza, te-hát egy partialis diff.-egyenlet lesz. Ha van extr. akkor ez egy felüle-tet szolgáltat, mely a C mentén bizonyos határfeltételeknek tartozik ele-get tenni. Ámde itt is úgy van a dolog, hogy az extr. meghatározása tényleg sokkal egyszerűbb, mint az (L) part. diff. egyenletnek bizonyos határ felté-telek mellett való megintegrálása, úgy h. az extr. direct kiszámítása itt is az (L) part. diff. egyenlet integratióját könnyíti meg a helyett, hogy ebből az egyenletből az extremumra vonjunk következtetést.

Riemann doktori dissertatiójában szerepel egy ilyen kettős integrál, a mely azzal a tulajdonsággal bír, hogy megfelel neki egy: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ diff. egyenlet olyformán, hogy ha a szóban integrálnak egy minimuma, akkor ki van mutatva ezen partialis diff. egyenlet oly megoldásainak az existentiája, a melyek az ezen C görbe mentén határfeltételeknek eleget tesznek. Már most Riemann ennek az extremumnak az existentiáját magától értetődő dolognak tekintette fel és erre alapítja a partialis diff. egyenlet megoldásainak az existentiáját is.

Ez a következtetés nyilván valóan közvetlenül alkalmazható lenne csak akkor, ha a minimalis felület existentiáját kimutatni sikerülne; és tényleg az ujabb időben egészen függetlenül ettől a diff. egyenlettől sikerült kimutatni, hogy bizonyos feltételek mellett mindig létezik egy extremum. Ez az eljárás természetesen a partialis diff. egyenletekre nézve nagyon fontos, a mennyiben ezen egyenletek integrálását közvetlenül szolgáltatja bizonyos feltételek mellett.

Végül még megemlítjük, hogy a legjobb, úgyszólván egyedüli tankönyv: a Braunschweigban 1900-ban kiadott Kneser Adolf: „Lehrbuch der Variationsrechnung"-ja, melyet ezen bevezetés után tanulmányozhatunk.-

- Vége -