

A
PROJEKTIV GEOMETRIA
ELEMEI

SYNTHETIKAI-GEOMETRIAI MÓDSZERREL

TÁRGYALJA

D^r KLUG LIPÓT

EGYETEMI MAGÁN- ÉS FŐREÁLSKOLAI RENDES TANÁR.

A MAGYAR TUD. AKADÉMIA SEGÉLYZÉSÉVEL.



EL. POLGÁRI ISK. TANÁRKEPZŐ FŐISKOLA
MATHEMATIKAI KÖNYVTÁR

Lejt. sz. 702 Csoport. sz. c.

BUDAPEST.

FRANKLIN-TÁRSULAT

MAGYAR IROD. INTÉZET ÉS KÖNYVNYOMDA.

1892.

516

K-58-3

408-4



ELŐSZÓ.

A matematikai és physikai szakok irodalma hazánkban még nem örvend virágzásnak. E szakoknak számos ága van, melyeknek tanulmányozására magyar tankönyvek nem állanak rendelkezésünkre. E hiányon azonban nem kell csodálkoznunk. Elméleti szakokkal foglalkozó tudósaink többnyire főiskolai tanárok, kiknek főfeladata, hogy magukat szakjaikban a mindinkább mélyebbre ható tudományok színvonalán föntarthassák, ami, tekintve a nyugat-európai államok előrehaladottságát a tudományokban, tekintve az ottani tudósok és buvárok nagy számát, kitartó produktív munkásságát, — nem kis feladat. Ezért teljes mértékben igazolható, ha a szaktudós tanár, rendelkezésére álló szabad idejét nem egy tudományág elemeinek megírására fordítja, hanem arra, hogy magát föntarthassa tárgyának ama színvonalán, melyet nagy fáradsággal végzett kitartó munkával elért. Egy-két évi elmaradás, melyet egy tankönyv megírása okoz, nem pótolható oly könnyen. Nem kívánható tehát az első generációtól, mely hivatva volt és még most is hivatva van hazánkban a matematikai és physikai szakokat terjeszteni és mely azt főiskoláinkon élő szóval telhetőleg legjobban megtette és teszi, hogy tankönyveket is írjon. A második és harmadik generációnak azonban, melyet elődeik bevették a tudományok csarnokaiba, nem szabad a dolog elől kitérni, ha egyáltalán azt akarjuk, hogy serdülő magyar ifjaink ne legyenek kénytelenek az egyes tudományágak első *elemeit* is idegen nyelven tanulni.

Egy más nem kevésbé fontos körülmény, mely sok író tankönyv írástól elriaszt az, hogy még jelenleg csekély számú olvasó közönségre

számíthat. Míg német vagy francia nyelven megjelent tudományos munkákat nemcsak Németországban, hanem minden művelt nemzet eme tudományágával foglalkozó egyénei olvassák, mi csak Magyarország kis számú olvasóinak írunk. Ebből természetzerűleg következik, hogy magyar tudományos munka kiadására nem igen vállalkozik könyvkiadó és valódi győzelemnek mondható, ha valaki fáradsággal megírt munkájának kiadására, tiszteletdíj fizetése nélkül, kiadót talál.

Így e munka is csak a Magyar Tudományos Akadémia segédmezésével jelenhetett meg. *Hálás köszönetemet fejezem ki ezért ez alkalommal is a Magyar Tudományos Akadémia III-ik osztályának, mely segédelmével könyvem megjelenését lehetővé tette.*

Attérve a munka tartalmára, az a projektív geometriának síkalakzatokra vonatkozó elemeit, mint azt PONCELET, MÖBIUS, STEINER, CHASLES, STAUDT e század első felében megalkották és e buvárok utódai tovább fejlesztették, tartalmazza. A tárgyalásnál, nevezetesen: a projektivitás fogalmának megállapításánál a STEINER-féle és nem a STAUDT-féle módszert használtam, mert ez, mint FIEDLER róla helyesen megjegyzi, könnyű szerrel, a régiek geometriájára támaszkodva, vezeti az olvasót a tárgyba. Tettem azt még azon oknál fogva is, mert fiatal matematikusainknak csak kis része fejlődött a reáliskola emlőin, vagy más szóval: csak kevesnél tételezhető fel, hogy ábrázoló geometriával foglalkozott, mely tárgyánál fogva legjobb eszköz a *térszemlélethez szükséges érzék* kifejlesztésére.* A STAUDT-féle tárgyalási módszer pedig már kezdetben is megkívánja a térszemléletnek kifejlesztött érzékét és pedig még fokozottabb mértékben, mint az ábrázoló geometria.

Könyvem leginkább a STEINER-SCHRÖTER-féle «Die Theorie der

* Sajnálandó, hogy ezen tárgy — az ábrázoló geometria — tanítására, mely a matematikus, physikus, geografus, kristallografusra, mint elméleti szakokkal foglalkozó egyénekre oly fontos, csak egy főiskola — a műegyetem — kínálkozik az egész országban. Ausztriában sem sokkal előbb honosodott meg ezen, sokak által nem kedvelt, mert félreértett, tantárgy; de tekintve, hogy ott az ábrázoló geometriát már a középiskolákban nagyobb terjedelemben tanítják; hogy a tárgynak ott nagyobb fontosságot tulajdonítanak, mint nálunk; hogy ott öt műegyetem van és így a szabad versenynek nagyobb tér nyílik: az ábrázoló geometria ott szebb fejlődésnek örvend, mint nálunk. Az ábrázoló geometriának épen módszere bír művelő erővel és ezért fontosabbnak tartanám, ha ezen módszert (a MONGE-féle derékszögű, a középponti, a derék- és ferde-szögű axonometrikus-projekezió módszerét) tanítanók: a pont-, egyenes- és sík-

Kegelschnitte» (TEUBNER 1876.) című munkához alkalmazkodik, mint a mely a projektív geometria első tanulmányozására, különösen ábrázoló geometriai előismeretek hiányában, elismerten legkönnyebbnek bizonyult. A könyv megírásánál az a főczél vezetett, hogy e tárgyat, — mely már keletkezésénél oly nagy változást hozott létre a geometriában, hogy az analtikai geometria annak befolyása következtében mintegy ujja alakult (L. PLÜCKER: Analytisch-geometrische Entwicklungen) és melynek a geometriai tudomány tovább fejlesztésében még most is nagy szerepe van,* — hazánkban meghonosítsuk. Kívánatos, hogy az új nemzedék még egyetemi évei alatt, ezen szép és egyszerű alapelvekre állapított és ezért könnyen érthető tudományt megkedvelje, hogy későbbi időben önállóan művelhesse. Mert mint néhai SCHRÖTER H. egy magánlevélben írja: «a geometriai kutatások véghetetlen tere új meg új kérdésekre vezet, melyek egész az alapelemekig terjednek . . .», és ezért mindazok, kik e tárggyal behatóan foglalkoznak, követ-köre rakva, hozzá járulhatnak a tudomány fölépítéséhez.

Könyvem első fejezetében az első fokozatú alapalakzatoknak a pont- és sugársorok projektív vonatkozását és azoknál föllépő fontosabb metrikus relációkat tárgyalom. A második fejezetben ugyanegy síkban fekvő első fokozatú alapalakzatok képződményével: a kúpszelettel, annak szerkesztésével, polártulajdonságaival, főbb metrikus relációinak levezetésével foglalkozom. A harmadik fejezet tárgyát: két kúpszelet közös elemeinek (pontok és érintőknek) meghatározása, valamint kúpszeletsorok és kúpszeletseregek alapvető tulajdonságainak megállapítása és azok projektív vonatkozása képezi. A negyedik fejezetben a másodfokozatú sicalapalakzatok projektív vonatkozását,

alakzatokon, a magyarországi középiskolákban, mitsem a mostani, csak igen kis részében elméleti tananyagot. A matematikában szintén nem a gyakorlati rész az, mely művelő erővel bír, hanem a precíz értelmezésekből folyó következtetések, bebizonyítások, diskussiók stb. egy szóval: az elméleti rész.

A 70-es évek elején a reáliskolák tananyagából: az építészetten, a gép-rajz és géptan, mint a középiskolába nem való tantárgy, igen helyesen, kihagyott és ezért nagy hanyatlásnak és káros experimentumnak tartom, ha most ismét holmi «gyakorlati ábrázoló geometriák» behozatalával a középiskolába, annak tudományos színvonalát lejjebb szállítjuk és az ábrázoló geometria egészséges fejlődésének útját álljuk.

* Lásd: Festschrift, herausgegeben von der Mathematischen Gesellschaft Hamburg. Leipzig 1890; II. Theil, 60. lapon.

a Kollineációt és Recziprocitást tárgyalom. A mellékelt bő tartalomjegyzék áttekintése különben tájékozni fogja az olvasót, hogy a projektív geometriának mennyi és mily anyagát dolgoztam fel.

Nem volt szándékom síkon kívül fekvő alakzatokra kiterjeszkedni, mert ez könyvem terjedelmét tetemesen nagyítja vala, a nélkül, hogy ezek felvételével e könyv anyagát egyszerűbben tárgyalhattam volna.

Pozsony, 1892 május havában.

Klug Lipót.

TARTALOMJEGYZÉK.

I. FEJEZET.

Pont- és sugársorok projektív vonatkozása.

1. §. *Egyszerű és kettős viszony fogalma.*

Lap

1. Pont- és sugársor fogalma	1
2. Egyenesen fekvő pont helyzetének meghatározása, ha az egyenesen egy állandó pont vétetik föl	1
3. Pont helyzetének meghatározása a pontsorban, ha annak tartóján két állandó pont van felvéve. (Egyszerű viszony)	2
4. Négy pont kettős viszonyának értékváltozása a negyedik pont helyzetének változásával	3
5. Négy pont kettős viszonyának különböző értékei. MÖBIUS-féle reláció	6
6. Négy sugár kettős viszonyának fogalma	8
7. Négy sugáron egyenes által kimetszett négy pont kettősviszonya	9
8. Két pont- és sugársor perspektív helyzetben	10
9. Két, a perspektív helyzetből elmozdított pont- és sugársor	11

2. §. *A projektív vonatkozás fogalma és a projektív sorok szerkesztése.*

10. A projektív vonatkozás értelmezése	12
11. Projektív pontsorok szerkesztése	14
12. Projektív pont- és sugársor, valamint projektív sugársorok szerkesztése	14
13—14. Mikor perspektív két projektív sor	16

3. §. *Különböző tartóval bíró projektív sorok különös elemei.*

15. Projektív pontsorok ellenpontjai	18
16. Projektív pontsorok megfelelő pontjainak és hatványpontjainak szerkesztése az ellenpontok segélyével	20
17. Projektív pontsorok egymásnak megfelelő egyenlő közei	21
18. Egymásnak megfelelő derékszög szárjai	22
19. Tétel az egymásnak megfelelő egyenlő szögekről	23
20. Más erre vonatkozó tétel	25
21. Projektív sugársorok hatványsugarai	26

	Lap
<i>4. §. Közös tartóval bíró projektív sorok kettős elemei.</i>	
22. A kettőspont fogalma	27
23. Ellenkezőleg haladó projektív pontsorok kettős pontjai	28
24. Egyenlőkép haladó projektív pontsorok kettős pontjai	29
25. Szerkesztése az egyik kettős pontnak, ha a másik ismeretes	30
26. Tétel a kettőspontokról	31
27. Oly pontok szerkesztése, melyekből két, ugyanazon tartón fekvő projektív pontsor egyenlően projektív sugársorokkal projicziáltatik	31
28. Projektív pont- és sugársor megfelelőleg közös eleme. Egyenlő forgású projektív sugársorok kettőssugarai	32
29. Projektív sugársorok második kettőssugarának szerkesztése az elsőből	34
<i>5. §. Involucziós helyzetű sorok.</i>	
30. Involucziós pontsor fogalma és tulajdonsága	34
31—32. Involucziós pontsor kapcsolt és kettőspontjai	35
33. Involucziós pontsor meghatározásához szükséges adatok. Szerkesztések	37
34. Egyenoldaluan hyperbolikus involucziós pontsor	38
35. Két involucziós pontsor közös kapcsolt pontpárja	39
36—37. Involucziós sugársor fogalma, kapcsolt sugarak, tengelyek, a sor hatványa	40
38. Involucziós sugársor metszése egyenessel. Harmonikus sugarak	41
39. Involucziós sugársor szerkesztése	42
40. Czirkuláris- és egyenoldaluan hyperbolikus természetű involucziós sugársorok	42
<i>6. §. Különös projektív sorok.</i>	
41. Hasonlóan-projektív pontsorok	44
42. Egyenlően-projektív pontsorok	45
43. Parabolikus természetű projektív pontsorok	46
44. Egyenlően-projektív sugársorok	47
45. Párhuzamos sugarú sorok	48
46. Projektív pont- és sugársor perspektív helyzetbe hozandó	49
<i>7. §. Harmonikus és involucziós elemekre vonatkozó méretes relációk és szerkesztések.</i>	
47. Méretes relációk harmonikus elemekről	50
48. Harmonikus elemek szerkesztése	52
49. A teljes négyszög és négyoldal harmonikus tulajdonsága	55
50. Egy háromszög harmonikus polárisa	58
51. Méretes relációk involucziót képező hat pont és sugár között	57
52. A teljes négyszög és négyoldal involucziós tulajdonsága	60
53. Szerkesztések. GAUSS-BODENMILLER-féle tétel	63

	Lap
54. Harmonikusan elválasztott kapcsolt elempárok az involúziós sorokban. Ennek általánosítása	65

II. FEJEZET.

A kúpszelet.

8. §. <i>Két általános helyzetű projektív sugársor képződménye.</i>	
55. A kúpszelet mint két általános projektív sugársor képződménye ...	66
56. Kúpszelet pontjainak szerkesztése	67
57. Minden kúpszelet végtelen sok projektív sugársor képződménye	68
58. A PASCAL-féle hatszög és speciális esetei	69
59. A kúpszelet érintői két érintőt projektív sorok szerint metszenek ...	71
9. §. <i>Két ugyanegy síkban fekvő általános helyzetű projektív pontsor képződménye.</i>	
60. A másodosztályú sugársor által burkolt görbe másodosztályú ...	72
61. A másodosztályú sugársor sugarainak és azok érintőpontjainak szerkesztése	73
62. A másodosztályú sugársor tartói más sugarak által pótolhatók ...	75
63. A BRIANCHON-féle hatoldal és speciális esetei	76
64. A másodosztályú sugársor által burkolt görbe: kúpszelet	77
10. §. <i>Kúpszeletek beosztása.</i>	
65. Kúpszeletek nemei	79
66. Két projektív sugársor képződménye mily kúpszelet?	79
67. Egyenlően-projektív pontsorok képződménye mily kúpszelet?	81
68. Hasonlóan-projektív kúpszeletek képződménye parabola	81
69—70. Párhuzamos és nem párhuzamos tartókkal bíró projektív pontsorok képződménye mily kúpszelet?	82
71. Projektív pontsorok képződménye mikor lesz egyenoldalú hyperbola?	84
72. Projektív pontsorok képződményeinek változása, ha az egyik tartó önmagában eltolatik	86
11. §. <i>Kúpszeletek polártulajdonságai.</i>	
73. A pólus és polaris fogalma	86
74. Kapcsolt pólus és polaris	89
75. Egyenesen fekvő kapcsolt pólusok és ponton átmenő kapcsolt polárisok	90
76. A polárháromszög fogalma	91
77. Involúziós sorok kapcsolatban a kúpszelettel	92

	Lap
78—79. Tételek a kapcsolt pólus és polárisokról. HESSE-fele tétel	94
80. A háromszög és annak polárháromszöge perspektív helyzetű. Két polárháromszög kúpszeleten fekszik	97
81. A kúpszeletnek polárábrája kúpszelet	99

12. §. *Kúpszeleten fekvő projektív sorokról.*

82. Értelmezések	100
83. Involucziós sorok a kúpszeleten	101
84. Általános projektív sorok a kúpszeleten	102
84a. Kúpszeleten fekvő projektív sorok képződménye kúpszelet	103
85—86. Projektív pontsorokhoz adjungált involucziós pontsor	104
87. Az involucziós sor redukciója egyszerű sorra	107
88—89. Két involucziós sorhoz adjungált involucziós pontsor	108
90—91. Két és három projektív pontsorról involucziós pontsor szerkesztése	109
92. Négy elem három involucziót határoz meg	111
93. Egy elempár el van-e választva két involucziós sor közös elempárja által	113

13. §. *Kúpszeletek szerkesztése valós és képzetes elemekből.*

94. Ot valós ponton átmenő; öt valós egyenest érintő kúpszelet szerkesztése. Speciális esetek	114
95. Képzetes pontpáron átmenő kúpszelet értelmezése	116
96. Három valós és két képzetes ponton átmenő kúpszelet szerkesztése	118
97. Egy valós és két pár képzetes ponton átmenő kúpszelet szerkesztése	119
98. Kúpszeletek szerkesztése különböző adatokból	120

14. §. *Kúpszeletek szerkesztése oly adatokból, melyek azt többfélekép határozzák meg.*

99—100. Négy ponton átmenő kúpszeletekre vonatkozó DESARGUES-féle tétel	122
101—102. A DESARGUES-féle tétel bebizonyítása, ha az előbbi négy pont közül kettő vagy négy képzetes	123
103. Négy ponton átmenő kúpszelet szerkesztése, mely egyenest érint	129
104. Három ponton átmenő kúpszelet, melyre vonatkozólag két pontpár kapcsolt pólus	131
105. Kettős érintésű kúpszeletekre vonatkozó tétel	131
106—107. Három ponton átmenő és kúpszeletet vagy egyenespárt két pontban érintő kúpszelet. A dualisan megfelelő szerkesztés	134

15. §. *Képzetes kúpszelet. Polárrendszer.*

108—109. Egy pont polárisának szerkesztése, ha a kúpszelet két kapcsolt poláris és azokon fekvő involucziós pontsorok által van adva	137
--	-----

	Lap
110. Polárrendszer. Képzetes kúpszelet	141
111. Polárrendszerek szerkesztése különböző adatokból	143

16. §. Kúpszeletek átmérői.

112. A kúpszeletek középpontjának és átmérőjének fogalma	144
113. A kapcsolt átmérőpárokból álló involúciós sor	145
114. Az ellipsis tengelyeinek szerkesztése	147
114a. Az ellipsis átmérő rendszerének hatványa	149
115. Az ellipsis átmérői és tengelyeire vonatkozó méretes relációk. Az ellipsis tengelyeinek FREZIER- és RVTZ-féle szerkesztése	149
116. Az ellipsis pontjainak szerkesztése	152
117—118. A hyperbola asymptótáinak és érintőinek szerkesztése	153
119. Kapcsolt hyperbolák	155
120. A hyperbolára vonatkozó méretes relációk és a hyperbola tengelyeinek szerkesztése	156
121. A képzetes kúpszelet tengelyei	158
122. Ellipsis és hyperbola egyenlete	159
123. A parabola átmérőihez kapcsolt húrrendszer	160
124. A parabola tengelyeinek szerkesztése	161
125. A parabola egyenlete	162
126. A kúpszeletek polárháromszögei körül írható körök	163
127. A polárháromszögek körül írható körök derékmetsző köre	165

17. §. Kúpszeletek gyújtópontjai.

128. Egymásra merőlegesen kapcsolt polárisok metszése egy kúpszelet-átmérővel: involúciós pentsor	167
129. A gyújtópont értelmezése	169
130. A kúpszelet vezérvonalai és a vonósugarak	170
131. Az érintő és deréklő felezi a vonósugarak hajlásszögeit	171
132. A gyújtópont tükkörképei az érintőkre vonatkozólag	172
133. A kúpszeletek vonósugarainak összege, illetve különbsége állandó. A középpontkivüliség	174
134. A kúpszelet mint burkolt görbe kapcsolatban a gyújtóponttal	176
135. A kúpszelet pontjai egy körtől és egy ponttól egyenlő távolságra vannak	178
136. A kúpszelet, mint a gyújtóponttal és a hozzá tartozó vezérvonallal kapcsolatos geometriai hely	179

III. FEJEZET.

Kúpszelet-sorok és seregek projektív vonatkozása.18. §. *Két kúpszelet közös elemei. A Steiner-féle rokonság.*

137. Két kúpszelet közös kapcsolt pólusai és polárisai	181
138. Két kúpszelet közös polárháromszöge	182
139. A kúpszeletek mily helyzeténél valós a polárháromszög	183
140. A közös kapcsolt pólusokat a közös kapcsolt polárháromszög szögpontjaiból projicziáló sugársorok involúciót képeznek	185
141. Két valós közös ponttal bíró kúpszelet	187
142. Két kúpszelet közös pontjai és érintői	188
143. Két kúpszelet közös pontjainak szerkesztése, ha a közös polárháromszögnek egy szögpontja ismeretes	189
144. Kettős érintésű kúpszeletek közös polárháromszögeiről	189
145—146. Két és három adott ponton átmenő két kúpszelet hiányzó metszéspontjainak szerkesztése	190
147. Az előbbieknél alkalmazása egy feladatnál	192
148. A STEINER-féle rokonság	192.

19. §. *A kúpszeletsorról.*

149. A kúpszeletsor értelmezése. A sornak egy ponton átmenő, vagy egy egyenest érintő kúpszelete	194
150. A kúpszeletsorban előforduló kúpszeletek nemei. Az egyenoldalú hyperbola sor	195
151. Kúpszeletsor, melynek egyik kúpszelete: kör	197
152. Egyenes pontjaihoz kapcsolt pólusok kúpszeletsorra vonatkozólag	199
153. Egyenes pólusai kúpszeletsorra vonatkozólag	200
154. A kúpszeletsor középponti kúpszelete	203
155. Hasonló kúpszeletek	204

20. §. *A kúpszeletseregről.*

156. A kúpszeletsereg értelmezése	205
157. A kúpszeletseregnek egyenest érintő, vagy ponton átmenő kúpszelete	206
158. A kúpszeletsereg közös kapcsolt polárisai	207
159. Egyenes pólusai a kúpszeletsereget illetőleg	208
160. A kúpszeletsereg középponti vonala	209
161. Két valós érintővel bíró kúpszeletsereg kúpszeletei	211
162. Egy pont polárisa egy kúpszeletseregre vonatkozólag	212

	Lap
163. A parabolasereg	213
164. Konfokális kúpszelétsereg	214
165. Kettős érintésű kúpszelétsereg	215

21. §. *Kúpszelet sorok projektív vonatkozása.*

166. Kúpszelet sor redukciója egyszerű sorokra	216
167. A kúpszelet sor két alappontján átmenő kúpszelet	218
168. A kúpszelet sor által két egyenesen kimetszett involúciós sorok	219
169. Mikép vonatkozhat két kúpszelet sor projektív egymásra	219
170. Két involúciós pontsor, mely projektív vonatkozású, hány megfelelőleg közös ponttal bír	219
171. Két projektív kúpszelet sor, vagy sugár- és kúpszelet sor, képződménye	220
172. Két projektív kúpszelet sor, mely egy megfelelőleg közös kúpszelettel bír	221

IV. FEJEZET.

A kollineáció és reciprocitás.

22. §. *A kollineáció és külön esetei.*

173. A kollinear vonatkozás fogalma	224
174. A kollinear vonatkozás meghatározásához szükséges adatok	225
175. Az ellentengelyek; egyenlően-projektív sorok a kollinear síkrendszerben	226
176. A kollineáció-középpont és tengely	227
177. Két négyszög perspektív helyzetbe hozandó	229
178. Perspektív-kollinear alakzatok karakteristikája	230
179. Involúciós síkrendszer	231
180—182. <u>Affin</u> ; hasonló; összeillő síkrendszerek	232
183. Két ugyanegy síkban fekvő kollinear síkrendszer megfelelőleg közös háromszöge	236

23. §. *Kúpszelet kollineációja.*

184. Két kollinear kúpszelet	237
185. Két ugyanegy síkban fekvő kúpszelet négyféleképp perspektív-kollinear alakzat	239
186. Egy kúpszelettel perspektív-kollinear kör	241
187. A kúpszelet perspektív-kollinear ábrája, ha a kollineáció-középpont a kúpszeletnek egyik gyújtópontja	242
188. A kúpszelet egy pontjának görbületi köre	243
189. Kúpszeletnek, mint körrel kollinear görbének szerkesztése	244
190—192. Három ponton átmenő és két egyenest érintő, valamint két pon-	

	Lap
ton átmenő és három egyenest érintő kúpszelet, ha két pont és két érintő képzetes	245
193. Két kúpszelet perspektív-kollinear ábrája két kör	250
194. Egy kúpszelet és két pont kollinear ábrája kúpszelet és annak két gyújtópontja	251
195. Kúpszelet, mely kollinear vonatkozásban önmagának felel meg.	252
196. Kúpszelet affin alakzata	253
197. Ellipsis tengelyeinek szerkesztése az affinitás alapján	254

24. §. *A reciprok vonatkozás.*

198. A reciprok vonatkozás fogalma	255
199. Reciprok rendszer kapcsolt átmérői és tengelyei	256
200. Involúciós helyzetű reciprok síkrendszer: polárreciprok rendszer	257
201. Két, ugyanegy síkban fekvő reciprok síkrendszer involúciósan megfelelő elempárja	258
202. Két, ugyanegy síkban fekvő reciprok síkrendszer azon elempárja, mely a megfelelőn fekszik, illetve azon átmege	260
203. Reciprok rendszerek megfelelő elemeinek szerkesztése két kettős-érintésű kúpszelet segítségével	262
204. A STEINER-féle rokonsághoz analog vonatkozás	264

FÜGGELÉK.

1. A kettőspontok másnemű meghatározása	169
2. A teljes négyszög involúciós tulajdonságának specializálása	169
3. Konfigurációk	169
4. Három érintő és egy gyújtópontból meghatározott kúpszelet	170
5. Adott ponton átmenő deréklők szerkesztése kúpszelethez	171
6. A szög három egyenlő részre osztása	171

PROJEKTIV GEOMETRIA,

SYNTHETIKAI-GEOMETRIAI MÓDSZERREL TÁRGYALVA.

Faint, illegible text at the top of the page, possibly a title or introductory paragraph.

PROJEKTIV-GEOMETRIE
IN DER ANSCHAUENDE GEOMETRIE

Faint, illegible text in the middle section of the page, likely the beginning of a chapter or section.

Faint, illegible text at the bottom of the page, possibly a conclusion or further text.

I. FEJEZET.

Pont- és sugársorok projektív vonatkozása.

1. §. Az egyszerű- és kettősviszony fogalma.

1. Az egyenest úgy tekinthetjük, mint a benne fekvő pontok összességét, vagy mint egységes egészet. Az első esetben annak neve: *egyenes*; a másodikban: *sugár*.

Az egyenes pontjainak összességét *pontsornak*, az egyenest magát, melyen a pontsor fekszik: a *pontsor tartójának* nevezzük.

A sík tetszőleges T pontján át végtelen sok sugarat húzhatunk a síkban; e sugarak egy *sugársort* alkotnak. Azon T pont, melyen a sugársor minden sugara átmegy: a *sugársor középpontja* vagy *tartója*.

A pontsor egyes pontjait, valamint a sugársor egyes sugarait, az illető sor *elemeinek* is szokás nevezni.

2. Hogy t tartón fekvő pontsor egyes elemeinek helyzetét a pontsorban meghatározhassuk, legegyszerűbb egy állandó A pontot felvenni a pontsorban, és megadni, hogy a sornak minden más pontja mily távolságra van A -tól. De t -n két pont van, mely A -tól adott távolságra fekszik, miért is maga a *távolság* nem határozza meg a kérdéses pontot *egyféleképp*.

Ha azonban az A -tól mért távolságokat pozitív vagy negatív jellel látjuk el, a szerint a mint a pont, melynek távolságát A -tól megmérjük, az A által két végtelen hosszú részre osztott egyenes egyik vagy másik részében fekszik: úgy minden pontnak helyzetét a pontsorban, a jellel ellátott távolságból meg lehet határozni, ha még ismeretes, hogy A -tól mérve, mely részen keresendők a pozitív, illetve negatív távolságra levő pontok.

Az egyenesen fekvő A , B pontok távolságát AB , vagy BA -val jelölhetjük. AB és BA összefüggését egymással:

$$AB + BA = 0, \text{ vagy a mi ugyanaz} \\ AB = -BA$$

egyenlet által értelmezzük, mely kifejezi, hogy AB és BA *különböző előjelű*.

Az egyenesen fekvő A, B, C pontok kölcsönös távolságai között az előjel tekintetbe vétele mellett következő összefüggés van :

$$AB + BC = AC;$$

mely még ily alakokban is írható :

$$AC - BC = AB, \quad CB - CA = AB, \quad AB + BC + CA = 0.$$

Ha ugyanis B pont A és C között fekszik : AB és BC ugyanazon előjeltű és összegük AC . Ha C pont elválasztja A, B -t úgy

$$AC + CB = AB, \text{ és } -CB = BC$$

egyenletek összeadásából következik, hogy :

$$AC = AB + BC.$$

Ha végre A pont B és C között van, úgy

$$BA + AC = BC \text{ és } -BA = AB$$

egyenletek összege mutatja, hogy

$$AC = AB + BC.$$

3. Egy pont helyzetét t tartón azonban oly módon is meghatározhatjuk, hogy két állandó pontot A, B -t veszünk fel t -n és megadjuk jellel együtt azon viszonyt, mely szerint a harmadik pont C , AB távolságot osztja, vagyis C pontnak A és B -től mért távolsági viszonyát ($AC:BC$)-t és az előjelt, mely a viszonyhoz tartozik és mely mindegyik távolságnak AC, BC -nek előjeléből a pozitív és negatív mennyiségek osztásának szabálya szerint lesz meghatározva.

Legyen ugyanis B pont t tartónak azon részén, mely az A -ra nézve pozitív távolságra levő pontokat tartalmazza, más szóval : legyen B -nek távolsága A -tól, t. i. AB pozitív, és így A -nak távolsága B -re nézve tehát BA , negatív előjeltű. Ha most C pont A -ból kiindulva B -felé halad t tartón, míg t -nek végtelen távol fekvő pontjához nem jut, továbbá másik felén fekvő végtelen távol levő pontjából ismét A -hoz közeledik, úgy kimutatható, hogy $AC:BC$ viszonynak a változó C pont következtében más és más értéke lesz.

Ha C, A -ban van, úgy $AC:BC=0$. Míg C, AB köznek felező pontjába ér, $AC:BC, 0$ -tól—1-ig folytonosan növekszik, mert a számláló kisebb marad mint a nevező és amannak előjele pozitív, ezé negatív.

A midőn C a felezőponton túl B -ig halad: a viszony számlálója folytonosan nagyobbodik, nevezője kisebbedik előjele negatív marad; és a midőn C , B -be jut, a nevező határértéke 0 , a viszony határértéke ∞ , és így $AC:BC$ viszony -1 -től ∞ -ig minden lehető negatív értéket elért.

Ha C ugyanazon értelemben tovább halad, a viszony ∞ -nél mindig kisebb-kisebb pozitív értékű lesz, és ha C végtelenben jutott, úgy $AC:BC$ viszony értéke $+1$.

A midőn C , a tartó másik oldalán végtelen távolban vétetik fel: $AC:BC$ értéke szintén $+1$, és ha C e ponttól A -hoz közeledik, a viszony $+1$ és 0 között levő minden értéket elért.

Azt látjuk ezekből, hogy az A, B pontok között fekvő C pontokra nézve $AC:BC$ viszony értéke, minden lehető negatív szám; AB közön kívül fekvő C pontokra nézve minden lehető pozitív szám; továbbá, hogy csupán egyszer kaptunk ugyanazon értéket ($+1$ -et) C -nek két különböző helyzeténél, t. i. a midőn C a tartónak végtelen távol fekvő pontjaiban volt. Hogy tehát C minden új helyzetéhez a viszonynak új értéke tartozzék és fordítva a viszony minden értékének csak egy pont feleljen meg, t -n és minden más egyenesen csak egy végtelen távol fekvő pontot képzelünk, vagyis a következőkben feltételezzük, hogy minden egyenesnek csak egy pontja van végtelen távol. Az egyenes tehát zárt vonalnak tekintetik és mint ilyen nem egy, hanem két pont A, B által lesz két részre osztva; ezek közül (a mennyiben A, B pontok egyike sincs végtelen távol) AB köz véges rész, a másik pedig, mely az egyenesnek végtelen távol fekvő pontját tartalmazza, végtelen nagy. Minthogy a sík minden egyenesén csak egy pontot képzelünk végtelen távol fekvőnek, ebből folyólag a sík összes végtelen távol fekvő pontjait, mint egy egyenesen g_∞ -en levő pontoknak kell tekintenünk, mert csak az egyenes az egyedüli vonal, mely minden más egyenessel egy pontot bír közösen.

Az előbbi vizsgálódásnál feltételeztük, hogy B -nek távolsága A -tól pozitív előjelű; de ha B , A -tól mérve t -nek másik részén fekszenék, ugyan így mint előbb kimutatható volna, hogy $AC:BC$ viszony, minden pozitív és negatív szám értékét eléri, ha C pont t -n végig halad.

4. Legyen C, D két tetszőleges pontja t tartón fekvő pontsornak, mely a pontsor tetszőleges A, B pontjainak távolságát, az AB köz, $\frac{AC}{BC}$, és $\frac{AD}{BD}$ viszony szerint osztja.

E két viszony viszonyát: $\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$ -t, az A, B, C, D pontok *kettősviszonyának* vagy *anharmonikus viszonyának*; a négy pont közül A, B , valamint C, D pontokat *egymáshoz rendelt* pontoknak nevezik, és a kettősviszonyt: $\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$ -t röviden $(ABCD)$ symbolummal jelölik.

Ha A, B, C pont állandó, D pedig t -n változó pont, úgy $(ABCD) = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$ kettősviszony D -nek minden helyzeténél más és más értéket vesz fel.

$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$ kettősviszonyban ugyanis $\frac{AC}{BC}$ állandó, $\frac{AD}{BD}$ -nek pedig D pont változása következtében minden pozitív és negatív értéke lehet és pedig oly módon, hogy $\frac{AD}{BD}$ más és más értékénél D -nek más és más helyzete van a pontsorban, miből következik, hogy $\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$ kettősviszony D változása következtében szintén minden pozitív és negatív értéket fog elérni, és a kettősviszony két különböző értékéhez mindaddig, míg A, B, C pontok állandóak, két különböző D pont tartozik a pontsorban.

Ez ily módon fejezhető ki: *ha egy pontsor A, B, C pontja állandó, D pontja pedig változó, úgy $(ABCD)$ kettősviszony értékéből, D pont helyzete egyféleképp van meghatározva.*

Hogy áttekintést nyerjünk arra nézve, mily értékű $(ABCD)$ kettősviszony, D különböző helyzeteinél, tételezzük fel, hogy A, B, C állandó pont t -n, továbbá, hogy a változó D pont A -tól B -felé halad t -nek végtelen távol fekvő pontjáig és a másik oldalon a végtelen távol fekvő ponttól A -ig, végre, hogy a változó D ponthoz rendelt C pont: 1. AB közön kívül; 2. AB közön fekszik.

1. Ha (1. ábra) D, A -ban van, úgy $\frac{AD}{BD} = 0$, tehát $(ABCD) = \infty$.

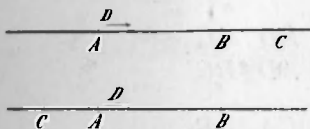
A midőn D, A -tól B -ig halad $\frac{AD}{BD}$ mindig negatív és a midőn B -be jut határértéke ∞ , egyszer tehát $\frac{AD}{BD}$ értéke jelétől eltekintve oly nagy volt mint $\frac{AC}{BC}$, és ekkor $(ABCD) = -1$, míg akkor a midőn B -be jutott $(ABCD) = 0$.

Mialatt tehát D pont A -tól B -ig halad: $(ABCD)$ kettősviszony, ∞ -tól 0 -ig minden negatív jelű értéket elért.

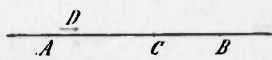
Ha D , B -tól tovább halad ugyanazon értelemben mint előbb, és C -vel mielőtt végtelen távolba jutna egyesül, $(ABCD)$ értéke 0 -tól $+1$ -ig nő, és ha C -tól t -nek végtelen távol fekvő pontjához jutott, úgy $(ABCD)$, $+1$ -tól $\frac{AC}{BC}$ -ig nőtt.

A midőn D , a másik részen képzelt végtelen távol fekvő ponttól A -ig ér, $\frac{AD}{BD}$ mindig pozitív marad és így $(ABCD)$ is $\frac{AC}{BC}$ pozitív értéktől ∞ -ig, minden pozitív jelű értéket elért.

De ha D pont miután B -tól tovább halad, előbb ér végtelen távolba, úgy $(ABCD)$ előbb éri el $\frac{AC}{BC}$ (jelen esetben) valódi törtnek



1. ábra.



2. ábra.

értékét és csak aztán, a midőn a másik oldalon képzelt végtelen távol fekvő pontból C -be jut, $+1$ értéket; ezentúl A -ig haladva értéke minden 1 -nél nagyobb pozitív szám.

Mindkét esetben $(ABCD)$ értéke, ha D , B -tól a végtelenen át A -ig halad, minden pozitív szám lesz.

2. Ha másodszor (2. ábra) feltételezzük, hogy C , AB közön fekszik: $(ABCD)$ értéke míg D , A -tól C -ig mozog, ∞ -tól $+1$ -ig minden pozitív számú értéken végig fut, és C -tól B -ig haladván, $+1$ -tól 0 -ig fogy.

A midőn D , B -tól végtelenig és a másik oldalon képzelt végtelen távol fekvő ponttól A -hoz halad: $(ABCD)$, 0 -tól ∞ -ig minden negatív szám értékét felvette.

Ezek szerint mondhatjuk:

Ha A , B , C , D valamely pontsor négy pontja, melyek közül A , B és C , D egymáshoz rendelt pont, úgy ezek $(ABCD)$ kettősviszonyának értéke nem változik, akármely értelmében mérjük A -tól. vagy más ponttól a pontsorban a távolságokat. A kettősviszony pozitív

vagy negatív, a szerint a mint a C, D pontok A, B által nincsenek, vagy el vannak választva. Ha D pont A vagy B -ben van, úgy a kettősviszony értéke ∞ , illetve 0 , és ha C pont van A vagy B -ben, a kettősviszony 0 , illetve ∞ .

5. A, B, C, D pontok kettősviszonyának $(ABCD)$ -nek értéke ugyanaz marad, ha mindkét egymáshoz rendelt pontot, B -t A -val és D -t, C -vel felcseréljük, továbbá szintén nem változik a kettősviszony értéke, ha két nem egymáshoz rendelt pontot és egyszerismind a másik két nem egymáshoz rendelt pontot, tehát A -t C -vel, és B -t D -vel, vagy A -t D -vel és B -t C -vel felcseréljük, vagyis:

$$(ABCD) = (BADC) = (CDAB) = (DCBA).$$

Ugyanis:

$$(ABCD) = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{AC \cdot BD}{BC \cdot AD},$$

és

$$(BADC) = \frac{BD}{AD} : \frac{BC}{AC} = \frac{BD \cdot AC}{AD \cdot BC},$$

végre

$$(CDAB) = \frac{CA}{DA} : \frac{CB}{DB} = \frac{CA \cdot DB}{DA \cdot CB},$$

és ha ez utóbbi kifejezésben CA, DB, DA, CB helyett a véle egyértékű $-AC, -BD, -AD, -BC$ -t írjuk, úgy

$$(CDAB) = \frac{AC \cdot BD}{AD \cdot BC} = (ABCD).$$

A, B, C, D pontok kettősviszonyának értéke azonban a pontoknak minden más fölcserélésénél változni fog, de tekintettel arra, hogy a négy elemnek 24 permutációja közül, mindig négy complexió értéke megegyező: a négy pont kettősviszonyának következő hat különböző értéke lehet: $(ABCD), (ABDC), (ACBD), (ACDB), (ADBC), (ADCB)$.

Ha $(ABCD)$ értékét röviden λ -val jelöljük, úgy:

$$(ABCD) = \lambda, \quad (ABDC) = \frac{1}{\lambda}, \quad (ACBD) = 1 - \lambda,$$

$$(ACDB) = \frac{1}{1 - \lambda}, \quad (ADBC) = \frac{\lambda - 1}{\lambda}, \quad (ADCB) = \frac{\lambda}{\lambda - 1}.$$

Ez következőkép bizonyítható be:

$$\langle ABDC \rangle = \frac{AD \cdot AC}{BD \cdot BC} = \frac{1}{AC \cdot AD} = \frac{1}{(ABCD)} = \frac{1}{\lambda},$$

$$\begin{aligned} \langle ACBD \rangle &= \frac{AB \cdot AD}{CB \cdot CD} = -\frac{AB \cdot CD}{BC \cdot AD} = -\frac{(AC-BC)(BD-BC)}{BC \cdot AD} = \\ &= -\frac{AC \cdot BD - BC \cdot BD - AC \cdot BC + BC^2}{BC \cdot AD} = -\lambda; \frac{BD+AC-BC}{AD} \\ &= \lambda; \frac{AB+BD}{AD} = 1-\lambda. \end{aligned}$$

Míntogy ezek szerint

$$\langle ABDC \rangle = \frac{1}{\langle ABCD \rangle} \text{ és } \langle ACBD \rangle = 1 - \langle ABCD \rangle$$

következik, hogy:

$$\langle ACDB \rangle = \frac{1}{\langle ACBD \rangle} = \frac{1}{1-\lambda} \text{ és}$$

$$\langle ADBC \rangle = 1 - \langle ABDC \rangle = 1 - \frac{1}{\lambda} = \frac{\lambda-1}{\lambda},$$

vegre

$$\langle ADCB \rangle = \frac{1}{\langle ADBC \rangle} = \frac{\lambda}{\lambda-1}.$$

Ezek folytán mondhatjuk:

Ha valamely egyenesen négy pont vétetik fel és közülök bármely kettő és a másik kettő egymáshoz rendelt pontpárnak tekintetik, úgy az általuk meghatározott kettősviszony értékével kifejezhetők azon kettősviszonyok is, melyeknél a felvett pontok közül más-más tekintetik egymáshoz rendeltnek.

Így pl. ha

$$\langle ABCD \rangle = -1,$$

akkor:

$$\langle ABDC \rangle = -1, \quad \langle ACBD \rangle = 2, \quad \langle ACDB \rangle = \frac{1}{2},$$

$$\langle ADBC \rangle = 2, \quad \langle ADCB \rangle = \frac{1}{2}.$$

Ha t tartón A, B, C, D, E pontokat veszünk fel és A, B -t egymáshoz rendeltnek tekintjük, és azonkívül még $C, D; D, E; E, C$ pontokat

egymáshoz rendeljük, akkor a származó $(ABCD)$, $(ABDE)$, $(ABEC)$ kettősviszonyok között következő, könnyen igazolható *azonosság* létezik.

$$(ABCD) \cdot (ABDE) \cdot (ABEC) = 1,$$

a mi így is írható:

$$(ABCD) \cdot (ABDE) = (ABCE),$$

és mely *Möbius-féle relációnak* nevezetük.* (Möbius 1790—1868).

Ezen reláció folytán A, B, C, D és A, B, D, E pontoknak bármely kettősviszonyából A, B, E, C pontoknak bármely kettősviszonya kifejezhető.

Így pl. ha

$$\text{akkor} \quad (ADCB) = 2, \quad (BDAE) = -3,$$

$$(BCEA) = -1;$$

mert ha

$$(ADCB) = 2, \quad (BDAE) = -3,$$

akkor

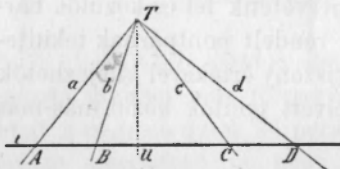
$$(ABCD) = 2, \quad (ABDE) = \frac{1}{4}$$

és a Möbius-féle reláció alapján

$$(ABCE) = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

vegre

$$(BCEA) = -1.$$



3. ábra.

6. Legyen (3. ábra) A, B, C, D ; t egyenesnek négy tetszőleges pontja. Kössük össze ezen pontokat t -n kívül fekvő T ponttal a, b, c, d sugarak (végtelen hosszú egyenesek) által és jelöljük két-két ily sugár pl. a, b hajlásszögei közül azt, melynek szárai

között AB köz fekszik (ab) -vel. Ezen szögét ép úgy mint AB távolságot, tekintve a forgás értelmét, melynél b, a -ból b helyzetbe jut, pozitív vagy negatív előjellel kell ellátva képzelnünk, hogy b helyzete T sugársorban a sugár és (ab) szög nagysága által egyféleképp legyen meghatározva, vagyis legyen: szög $(ab) = - (ba)$ szöggel.

* Möbrus A. F. Gesammelte Werke, Leipzig 1885. I. Band „Der barycentrische Calcul” pag. 225.

Ha mi T -ből t -re bocsátott merőleges talppontját U -nak nevezük, úgy

$$TAC, TBC, TAD, TBD$$

háromszögeknek kettős területeit így fejezhetjük ki :

$$\begin{aligned} AC \cdot TU &= TA \cdot TC \sin(ac), & BC \cdot TU &= TB \cdot TC \sin(bc), \\ AD \cdot TU &= TA \cdot TD \sin(ad), & BD \cdot TU &= TB \cdot TD \sin(bd). \end{aligned}$$

E szerint tehát :

$$\frac{AC \cdot TU}{BC \cdot TU} = \frac{TA \cdot TC \sin(ac)}{TB \cdot TC \sin(bc)},$$

vagy

$$\frac{AC}{BC} = \frac{TA \sin(ac)}{TB \sin(bc)};$$

és hasonlóképen :

$$\frac{AD}{BD} = \frac{TA \sin(ad)}{TB \sin(bd)};$$

vége

$$\frac{AC}{BC} \cdot \frac{AD}{BD} = \frac{\sin(ac) \cdot \sin(ad)}{\sin(bc) \cdot \sin(bd)}.$$

Ezen utóbbi kifejezés : $\frac{\sin(ac)}{\sin(bc)} : \frac{\sin(ad)}{\sin(bd)}$, az a, b, c, d sugarak kettőviszonyának nevezetik és röviden $(abcd)$ -vel lesz jelölve. Az $(abcd)$ symbolumban a és b, c és d elemek, egymáshoz rendelt elemek.

7. Ha a, b, c, d sugarakat egy új egyenessel t_1 -gyel metszük A_1, B_1, C_1, D_1 pontokban, akkor a származott $TA_1C_1, TB_1C_1, TA_1D_1, TB_1D_1$ háromszögekből, mint előbb, szintén levezethető, hogy :

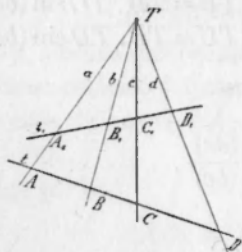
$$\frac{A_1C_1}{B_1C_1} \cdot \frac{A_1D_1}{B_1D_1} = \frac{\sin(ac) \cdot \sin(ad)}{\sin(bc) \cdot \sin(bd)}.$$

Ha az $AC, BC \dots$ valamint A_1C_1, B_1C_1, \dots közők nem is feküdnének $a, c; b, c; \dots$ sugarak által képezett szögek ugyanazon szárai között, hanem pl. AC és A_1C_1 közők a, c sugarak csücs- vagy mellékszögeinek szárai között volnának, azért $\sin(A_1TC_1)$ jelre és nagyságra nézve megegyezik $\sin(ATC)$ -vel, vagyis $\sin(ac)$ -vel.

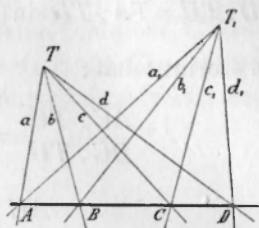
E szerint: egy sugársor négy sugarának kettőviszonya egyenlő azon négy pont kettőviszonyával, melyben a sugársor négy sugara a középponton át nem menő egyenes által metszetik; továbbá két különböző

pontsorhoz tartozó négy-négy pont kettősviszonya egyenlő, ha azon pontok az egyik és másik pontsorban egy sugársor négy sugarán fekszenek. (4. ábra.)

sugársor négy-négy sugarának kettősviszonya egyenlő, ha azon sugarak, az egyik és másik sugársorban, egy pontsor négy pontján mennek át. (4a. ábra.)



4. ábra.



4a. ábra.

8. Vegyünk fel (5. ábra) t tartón egy pontsort, és *projicziáljuk* ezen pontsort tetszőleges T pontból, mint középpontból, T sugársor sugaraival t egyenes és T ponton átmenő síknak tetszőleges t_1 egyenesére; ezáltal t_1 -en egy új pontsort nyerünk.

t egyenes A pontjának *projekciója* T -ből t_1 -re, azon A_1 pont, melyben az A pont *projicziáló sugara*: $|TA| \equiv a$, t_1 -et metszi, és viszont t_1 pontsor A_1 pontjának *projekciója* T -ből t -re nem egyéb, mint A pont; *projiczeáló sugara* pedig $|TA_1| \equiv |TA| \equiv a$.

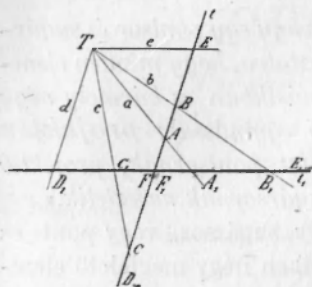
Két-két ily pont, mint A, A_1 , melyek közül az egyik a másiknak *projekciója*: t és t_1 *pontsor egymásnak megfelelő pontjának* neveztetik, úgy szintén A , vagy A_1 pont *projicziáló sugara*: a , az A és A_1 pontnak *megfelelő sugár* T sugársorban.

Minden pontnak t -ben megfelel egy (projicziáló) sugár T -ben és egy pont t_1 -ben, és viszont t_1 minden pontjának megfelel T -ben egy sugár, t -ben egy pont. t végtelen távol fekvő D_∞ pontjának T -ben azon sugár felel meg, mely t -vel párhuzamos, t_1 -ben pedig azon D_1 pont, melyben ezen párhuzamos sugár t_1 -et metszi, mely tehát általában nem lesz végtelen távol. És viszont t_1 végtelen távol fekvő $E_{1\infty}$ pontjának megfelelő E pontja ott lesz, hol T -nek t_1 -gyel párhuzamos e sugara t -t metszi. t és t_1 metszéspontja $F \equiv F_1$ mindkét pontsorban egymásnak megfelelő.

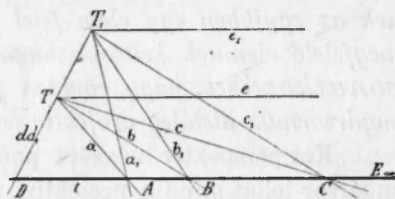
Két ily pontsor $A, B, C \dots; A_1, B_1, C_1 \dots$, melyek közül az egyik a másiknak *projekciója* T középpontra vonatkozólag: *perspek-*

*t*ív helyzetűnek nevezetük, és a sugársor is, melynek $a, b, c \dots$ sugarai a neki megfelelő $A, B, C \dots; A_1, B_1, C_1, \dots$ pontokon mennek át, az egyik és másik pontsorra nézve perspektív helyzetű.

Két sugársor T, T_1 , melynek $a, b, c \dots; a_1, b_1, c_1 \dots$ sugarai (6. ábra) egy t pontsor ugyanazon $A, B, C \dots$ pontjait projicziálják, szintén perspektív helyzetűnek, és a pontsor t tartója, *perspektív tengelynek* nevezetük. Oly két sugár, pl. a, a_1 , mely a pontsor ugyanazon pontján A -n megy át, *egymásnak megfelelő*. A megfelelő sugarak közül T és T_1 sugársornak $|TT_1|$ sugara egymással összeesik, míg t végtelen távol fekvő pontján átmenő sugarak: T és T_1 -nek egymással párhuzamosan menő megfelelő sugarai.



5. ábra.



6. ábra.

9. Ha $A_1, B_1, C_1 \dots$ pontsort, miután t -nek $A, B, C \dots$ pontjait T -ből $a, b, c \dots$ sugarakkal t_1 -re projicziáltuk, ezen helyzetéből elmozdítjuk, általában nem fog bekövetkezni, hogy a perspektív helyzetből származó két megfelelő elemnek: A, A_1 -nek, B, B_1 -nek, C, C_1 -nek stb. összekötő egyenesei: $|AA_1|, |BB_1|, |CC_1|, \dots$ ugyanazon ponton mennek át, sem pedig, hogy az $A_1B_1C_1 \dots$ pontsor minden pontja a neki megfelelő sugáron a, b, c, \dots -n maradnak, vagyis sem a két pontsor, sem pedig az elmozdított pontsor és a, b, c, \dots sugársor nem lesz perspektív helyzetű.

Ugyisint ha A, B, C, \dots pontsorra vonatkozólag perspektív helyzetű $a, b, c, \dots; a_1, b_1, c_1, \dots$, vagy röviden T, T_1 sugársor közül, T_1 -et elmozdítjuk ezen perspektív helyzetéből, az új helyzetnél $a_1, b_1, c_1 \dots$ sugaraknak metszéspontja a neki megfelelő a, b, c, \dots sugarakkal nem fog egyenesen fekvődni, tehát az elmozdított T_1 sugársor nem lesz T -vel perspektív helyzetű.

Egy azonban mindig bekövetkezik, t. i. hogy tetszőleges négy pontnak A_1, B_1, C_1, D_1 -nek, vagy négy sugárnak a_1, b_1, c_1, d_1 -nek kettős-

viszonya, egyenlő a neki megfelelő négy sugár a, b, c, d , és négy pont A, B, C, D kettősviszonyával T sugársorban, illetve t pontsorban, mert A_1, B_1, C_1, D_1 pontok, valamint a_1, b_1, c_1, d_1 sugarak kettősviszonya ugyanaz marad, míg azon elemek kölcsönös helyzetüket nem változtatják (a mi t_1 vagy T_1 tartó elmozdítása által nem történik), a mennyiben $(A_1B_1C_1D_1)$ kettősviszony értéke csak $A_1B_1C_1D_1$ pontoknak kölcsönös távolságaitól, $(a_1b_1c_1d_1)$ pedig a_1, b_1, c_1, d_1 sugarak által képezett szögektől függ.

2. §. A projektív vonatkozás fogalma és projektív sorok szerkesztése.

10. «Két pontsor, vagy két sugársor, vagy egy pontsor és sugársor, mely oly módon van egymásra vonatkoztatva, hogy minden elemnek az egyikben egy elem felel meg a másikban és bármely négy megfelelő elemnek kettősviszonya egyenlő egymással: *projektív vonatkozásu*, vagy röviden *projektív pontsornak, projektív sugársornak, illetőleg projektív pont- és sugársornak* nevezetük.»

Két perspektív helyzetű pontsor, vagy sugársor, vagy pont- és sugársor tehát mindig projektív, a mennyiben négy megfelelő elemnek kettősviszonya (6. szerint) egyenlő.

De kimutatható, hogy a projektív vonatkozásnak értelmezése nem kíván lehetetlenséget, vagyis kielégíthető azon követelmény, hogy bármely négy megfelelő elemnek kettősviszonya egyenlő legyen egymással.

Ha ugyanis két pontsor elemeit projektív akarjuk egymásra vonatkoztatni, a nélkül, hogy azok perspektív helyzetűek legyenek, akkor az egyik pontsor három pontjának A, B, C -nek megfelelő pontjait A_1, B_1, C_1 -et a másik pontsorban tetszőlegesen választhatjuk. Ha ezután az első pontsorban négy tetszőleges, X, Y, Z, U pontot veszünk fel és ezeknek megfelelő X_1, Y_1, Z_1, U_1 pontjait úgy határozzuk meg, hogy azok a projektív vonatkozás értelmezése szerint:

$$\begin{aligned}(ABCX) &= (A_1B_1C_1X_1), & (ABCY) &= (A_1B_1C_1Y_1), \\ (ABCZ) &= (A_1B_1C_1Z_1), & (ABCU) &= (A_1B_1C_1U_1)\end{aligned}$$

egyenleteket kielégítsék, akkor kimutatható, hogy X_1, Y_1, Z_1, U_1 pontok eleget tesznek

$$(XYZU) = (X_1Y_1Z_1U_1)$$

egyenletnek.

A Möbius-féle relációk folytán ugyanis

$$(ABXC) \cdot (ABCY) = (ABXY),$$

és

$$(A_1B_1X_1C_1) \cdot (A_1B_1C_1Y_1) = (A_1B_1X_1Y_1),$$

de ezen egyenleteknek baloldalán levő első, illetőleg második tényezők a föltételi egyenletek alapján egyenlők, tehát

$$(ABXY) = (A_1B_1X_1Y_1),$$

és hasonlóképen

$$(ABXZ) = (A_1B_1X_1Z_1), \quad (ABXU) = (A_1B_1X_1U_1).$$

Továbbá

$$(AXYB) \cdot (AXBZ) = (AXYZ),$$

és

$$(A_1X_1Y_1B_1) \cdot (A_1X_1B_1Z_1) = (A_1X_1Y_1Z_1)$$

relációkból látható, mint előbb, hogy

$$(AXYZ) = (A_1X_1Y_1Z_1),$$

és hasonlókép

$$(AXYU) = (A_1X_1Y_1U_1);$$

$$(XYZA) \cdot (XYAU) = (XYZU)$$

és

$$(X_1Y_1Z_1A_1) \cdot (X_1Y_1A_1U_1) = (X_1Y_1Z_1U_1) \text{-ből következik}$$

végre, hogy :

$$(XYZU) = (X_1Y_1Z_1U_1).$$

Ezzel ki van mutatva : ha a pontsor egy pontja annak tetszőleges három pontjával oly értékű kettősvisszonyt képez, mely egyenlő a megfelelő pontok kettősvisszonyával, akkor azon pont a pontsor bármely más három pontjával is oly kettősvisszonyt fog szolgáltatni, mint a megfelelő négy pont.

Ugyanígy bebizonyítható, hogy a projektív vonatkozás értelmezése kielégíthető, két sugársorra, vagy egy pont- és egy sugársorra nézve is.

A projektív vonatkozás jele STAUDT * (1798—1867) szerint : $\overline{\wedge}$

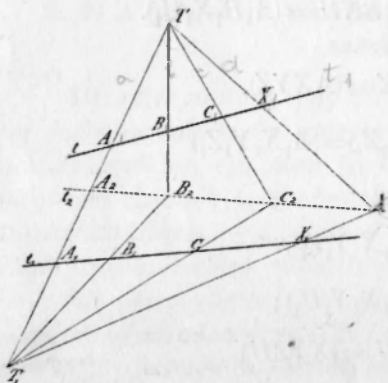
$$(ABCDE \dots) \overline{\wedge} (A_1B_1C_1D_1E_1 \dots),$$

olvasva $ABCDE \dots$ sor projektív $A_1B_1C_1D_1E_1 \dots$ sorral, melyben A, B, C, D, E, \dots elemnek rendre $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 \dots$ elem felel meg,

* STAUDT G. K. Ch. : Geometrie der Lage, Nürnberg 1847. pag. 49.

e szerint azt fejezi ki, hogy bármely négy elemnek kettősviszonya az egyik sorban egyenlő a neki megfelelő négy elem kettősviszonyával a másikban.

11. -Ha t és t_1 tartón fekvő két pontsört projektív akarunk egymásra vonatkoztatni és annak megfelelő pontjait szerkeszteni, úgy a pontsorok három egymásnak megfelelő elemét (7. ábra) $A, A_1; B, B_1; C, C_1$ -et tetszőlegesen választhatjuk. Ha ezután $|AA_1|$ egyenesen két pontot T, T_1 -et felveszünk és $|TB|, |T_1B_1|$, valamint $|TC|, |T_1C_1|$ metszőpontján B_2 , illetve C_2 -n át t_2 egyenest fektetünk, úgy t pontsor tetszőleges X pontjának megfelelő pontját X_1 -t t_1 -en megkapjuk, ha $|TX|$ és t_2 közös X_2 pontját T_1 -ből t_1 -re projicziáljuk.



7. ábra.

t_2 és $|TT_1|$ metszőpontját A_2 -nek nevezvén következik, hogy $ABCX \dots$ pontsor perspektív $A_2B_2C_2X_2 \dots$ -vel T középpontra nézve, $A_2B_2C_2X_2 \dots$ pontsor pedig perspektív $A_1B_1C_1X_1 \dots$ -gyel T_1 középpontra vonatkozólag. Ennélfogva $ABCX \dots$ pontsor négy tetszőleges elemének kettősviszonya egyenlő $A_2B_2C_2X_2 \dots$, valamint

$A_1B_1C_1X_1 \dots$ pontsor neki megfelelő elemének kettősviszonyával, és így $A_1B_1C_1X_1 \dots$ projektív $ABCX \dots$ pontsorról.

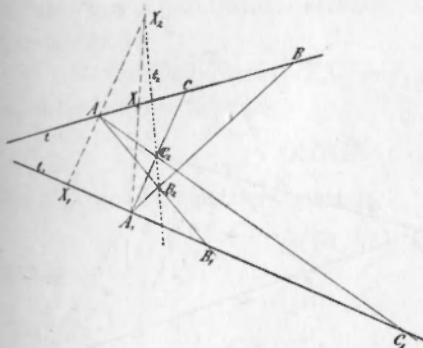
Még egyszerűbb az eljárás, ha (8. ábra) T -t A_1 -ben, T_1 -et A -ban vesszük fel. Ekkor B_2 és C_2 , metszőpontja lesz $|AB_1|, |A_1B|$, illetve $|AC_1|, |A_1C|$ -nek, és $|B_2C_2| = t_2$ tartó tetszőleges X_2 pontjának projekciója A_1 -ből t -re, valamint A -ból t_1 -re: két egymásnak megfelelő X, X_1 pont.

Lehet azonban úgy is eljárunk, hogy (9. ábra) $ABCX \dots$ pontsört $|AA_1|$ tetszőleges T pontjából egy az A_1 ponton átmenő t_2 egyenesre projicziáljuk $A_1B_2C_2X_2 \dots$ -be, ez utóbbi pontsört pedig $|B_2B_1|$ és $|C_2C_1|$ metszőpontjából T_1 -ből ismét t_1 -re projicziáljuk $A_1B_1C_1X_1 \dots$ -be; ezen új pontsor az előbbi okoknál fogva projektív $ABCX \dots$ -szel.

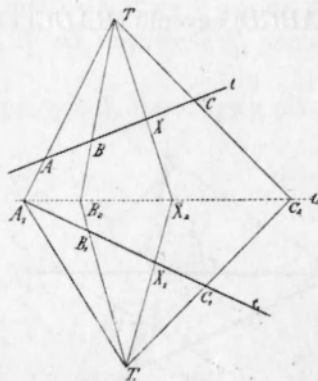
12. Ha t pontsört és T sugársört projektív akarunk egymásra vonatkoztatni, akkor T sugársört tetszőleges t_1 egyenessel metszéshez hozzuk és a T -vel perspektív t_1 pontsört vonatkoztatjuk t -re projek-

tív. Ha X, X_1 két megfelelő pontja t, t_1 -nek, úgy T sugársornak X_1 ponton átmenő $|TX_1| = x$ sugara, szintén megfelel t pontsor X pontjának.

Ugyan így lehet két sugársort T, T_1 -et is projektív vonatkoztatni egymásra, ha T három sugarához a, b, c -hez, T_1 -ben három tetszőleges a_1, b_1, c_1 sugarat választunk, melyről feltételezzük, hogy az előbbieknak megfelelők, és a két sugársort t , illetőleg t_1 egyenessel metszéshez hozzuk. A származott pontsorokat most projektív vonatkoztatjuk egymásra oly módon, hogy t és a, b, c metszéspontjának A, B, C -nek megfelelően t_1 és a_1, b_1, c_1 metszéspontja A_1, B_1, C_1 . T és T_1 sugársor azon két sugara x, x_1 , mely t és t_1 -nek két megfelelő X, X_1 pontján megy át, egymásnak megfelelő.



8. ábra.



9. ábra.

A szerkesztés egyszerűsül, ha (10. ábra) t , a sugársorok két pár megfelelő sugarának a, a_1 és c, c_1 -nek A , illetve C metszéspontján; t_1 pedig a, a_1 ; b, b_1 -nek A , illetve B_1 metszéspontján lesz átfektetve. Ha b, t ; t_1, c_1 és b, c_1 metszéspontja B, C_1 és T_2 , a mi röviden így lesz írva:

$$(bt) = B, (t_1c_1) = C_1, (bc_1) = T_2,$$

továbbá T_2 -n átmenő tetszőleges sugár, t, t_1 -et X, X_1 -ben metszi, úgy $|TX| = x$, és $|T_1X_1| = x_1$, a projektív vonatkozású sugársoroknak két megfelelő sugara.

$$(ABCX \dots) \bar{\wedge} (A_1B_1C_1X_1 \dots),$$

mert T_2 -re nézve perspektív;

$$(abcx \dots) \bar{\wedge} (a_1b_1c_1x_1 \dots),$$

mert a sugársorok $ABCX \dots$ illetve $A_1B_1C_1X_1 \dots$ -re vonatkozólag perspektívek.

Czél szerűen lehet még t és t_1 -et mindjárt a_1 , illetve a sugárban felvenni, mint az a mellékelt 11. ábrából látható.)

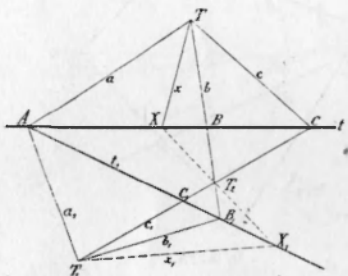
Ezekkel kapcsolatban projicziálás által is kimutathatjuk, hogy ha $A, B, C, D; t$ tartónak négy tetszőleges pontja, akkor (5)

$$(ABCD) = (BADC) = (CDAB) = (DCBA).$$

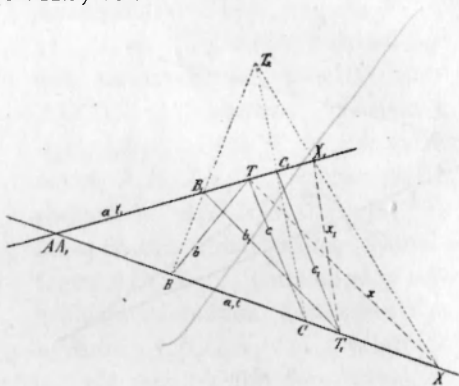
Ha pl. D ponton átmenő tetszőleges egyenesre egy H pontból reá projicziáljuk A, B, C, D -t, E, F, G, D -be, e pontokat C -ből $|HA|$ egyenes E, I, H, A pontjaiba, végre e pontokat F -ből ismét t tartóra, akkor

$$(ABCD) = (EFGD) = (EIHA) = (DCBA).$$

Hasonló úton lehet projicziálás által bebizonyítani, hogy $(ABCD)$ egyenlő $(BADC)$ és $(CDAB)$ -vel.



10. ábra.



11. ábra.

13. Mindezen szerkesztések, melyek két projektív pontsor, pont- és sugársor, vagy két sugársor megfelelő elemeinek felkeresésére vonatkoztak azon alapszanak, hogy más pont- vagy sugársorok vétetnek fel, melyek egyrészt az adottakkal, másrészt önmaguk között perspektívek voltak, mert ha több pont- vagy sugársor közül az első a másodikkal, a második a harmadikkal, a harmadik a negyedikkel stb. perspektív, úgy az első a harmadikkal, negyedikkel stb. is projektív lesz, mint-hogy az első pont- vagy sugársor bármily négy elemének kettősviszonya egyenlő a második, harmadik, negyedik stb. pont- vagy sugársor neki megfelelő négy elemének kettősviszonyával.

Megtörténhetik azonban, hogy az első pont- vagy sugársor a harmadik, vagy negyedik, vagy következő pont- vagy sugársorral azonkíül, hogy — projektív vonatkozású, még — perspektív helyzetű is. Kér-

dés: mi kívántatik ahhoz, hogy két projektív pontsor $ABCX\dots$, $A_1B_1C_1X_1\dots$, mely t, t_1 tartón fekszik, perspektív helyzetű legyen?

A perspektív helyzet értelmezése folytán

$$|AA_1|, |BB_1|, |CC_1|, |XX_1|, \dots$$

és minden más megfelelő pontpár összekötő egyenesének egymást egy és ugyanazon pontban kellene metszeni, és viszont minden ezen T metszésponton átfektetett sugárnak a pontsorok megfelelő pontjain kellene átmenni. De ha

$$|AA_1|, |BB_1|, |CC_1|$$

sugarak, mint megfelelő pontok összekötő egyenesei egymást ugyanazon pontban T -ben metszik, úgy bebizonyítható, hogy T pontot t tetszőleges X pontjával összekötő egyenes, X -nek megfelelő X_1 pontján megy át.

Nevezük ugyanis $|TX|$ és t_1 metszéspontját X'_1 -nek, úgy a perspektív helyzet folytán

$$(ABCX) \bar{\wedge} (A_1B_1C_1X'_1),$$

de a projektív vonatkozás miatt

$$(ABCX) \bar{\wedge} (A_1B_1C_1X_1),$$

tehát

$$(A_1B_1C_1X_1) \bar{\wedge} (A_1B_1C_1X'_1),$$

vagy

$$\frac{A_1X_1}{B_1X_1} = \frac{A_1X'_1}{B_1X'_1},$$

miből következik, minthogy ezen viszonyok jelre és értékre nézve megegyezők, hogy X'_1 összeesik X_1 -gyel, vagyis t pontsor perspektív t_1 -gyel.

Ha továbbá két projektív sugársor T, T_1 három megfelelő sugarának $a, a_1; b, b_1; c, c_1$ -nek, A, B, C metszéspontjai egy egyenesen t -n fekszenek, úgy kimutatható, hogy a többi megfelelő sugarak, pl. x, x_1 , egymást, szintén t -n metszik. Nevezük ugyanis x és x_1 metszéspontját t -vel, X ill. X_1 -nek, úgy

$$(abcx) \bar{\wedge} (ABCX), (a_1b_1c_1x_1) \bar{\wedge} (ABCX_1), \text{ és } (abcx) \bar{\wedge} (a_1b_1c_1x_1)\text{-ből}$$

következik, hogy

$$(ABCX) \bar{\wedge} (ABCX_1)$$

tehát X pont összeesik X_1 -gyel, vagyis x, x_1 egymást t -n metszi.

Ennélfogva: két projektív

<p><i>pontsor perspektív helyzetű, ha három megfelelő pontpár összekötő egyenesé egymást egy pontban metszi.</i></p>	<p><i>sugársor perspektív helyzetű, ha három megfelelő sugárpár metszőpontja egy egyenesen fekszik.</i></p>
--	---

E tételek bebizonyításával egyszersmind kimutattuk, hogy ha két projektív pontsor (sugársor) három megfelelő eleme összeszik, úgy a két pontsor (sugársor) minden megfelelő eleme is össze fog esni, továbbá: ha egy pontsor három eleme, egy vele projektív sugársor három megfelelő elemében fekszik, úgy a pontsor minden eleme, benne fekszik a sugársor megfelelő elemében, és így a sorok perspektívek.

14. A midőn két projektív pontsor $ABCX\dots, A_1B_1C_1X_1\dots$ tartóinak t, t_1 -nek metszőpontja egymásnak megfelelő pont, akkor ezen metszőponton, pl. $A \equiv A_1$ -en átmenő bármely sugár, két megfelelő pont összekötő egyenesének tekinthető. Így tehát $B, B_1; C, C_1$ megfelelő pontok összekötő egyenesének T metszőpontján, átmegegy A, A_1 megfelelő pontoknak összekötő egyenesé is, minek következtében a két pontsor perspektív.

Hasonlókép: ha két projektív sugársorban T, T_1 -ben, a közép-pontokat összekötő sugár egymásnak megfelelő, akkor ezen közös sugárnak minden pontja metszőpontnak tekinthető, tehát más két megfelelő sugár metszőpontján átmenő t egyenesen a közös harmadik sugárpárnak metszőpontja is rajta fekszik, és így a sugársorok perspektívek.

Ennélfogva mondhatjuk: két projektív pont- vagy sugársor, melynek közös eleme egymásnak megfelelő: perspektív helyzetű.

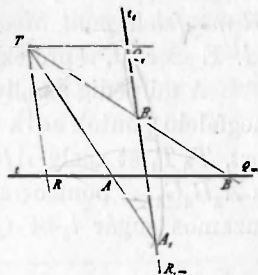
E tételekből következik még: hogy két projektív pontsor, vagy sugársor, mindig perspektív helyzetbe hozható, ha az egyik pont- vagy sugársornak tetszőleges elemét a megfelelő elemre helyezzük. Alább (46. pontban) látni fogjuk, hogyan kell egy pontsort egy hozzá projektív sugársorral, vagy egy sugársort a hozzá projektív pontsorral perspektív helyzetbe hozni.

3. §. Különböző tartóval bíró projektív pont- és sugársorok különös elemei.

15. Eddigélé két projektív pontsor végtelen távol fekvő pontjainak megfelelő pontjait az egyik és másik pontsorban figyelmen kívül

hagytuk. E pontok azonban különös szerepet viselnek, a mennyiben a négy pont kettősviszonya az esetben, ha a négy pont egyike az egyenes végtelen távol fekvő pontja, egyszerű viszonyná fajul.

Hogy ezen pontokat is tekintetbe vesszük, legyen t, t_1 (12. ábra) tartója két, T középpontra vonatkozólag, perspektív pontsornak, és nevezzük t pontsor végtelen távol fekvő pontját Q_∞ -nek, azon pontot, mely Q_∞ -nek t_1 -ben megfelel, mely tehát T -n át t -vel párhuzamos sugárnak metszőpontja t_1 -gyel, Q_1 -nek; végre azon pontot, mely t_1 végtelen távol fekvő $R_{1\infty}$ pontjának megfelel, R -nek. A végtelen távol fekvő $Q_\infty, R_{1\infty}$ pontoknak megfelelő Q_1, R pontokat a két projektív pontsor *ellenpontjainak* nevezik.



12. ábra.

Négy megfelelő pont kettősviszonya akkor is egyenlő, ha azok közül egyik végtelen távolban van, miért is $ABQR$ és $A_1B_1Q_1R_1$ megfelelő pontokra nézve:

$$(ABQ_\infty R) \bar{\wedge} (A_1B_1Q_1R_{1\infty}),$$

vagyis

$$\frac{AQ_\infty}{BQ_\infty} : \frac{AR}{BR} = \frac{A_1Q_1}{B_1Q_1} : \frac{A_1R_{1\infty}}{B_1R_{1\infty}}.$$

De

$$\frac{AQ_\infty}{BQ_\infty} = \frac{A_1R_{1\infty}}{B_1R_{1\infty}}$$

viszonyoknak határértéke 1, mert $AQ_\infty, BQ_\infty, A_1R_{1\infty}, B_1R_{1\infty}$, mint ugyanazon rendű végtelen nagy mennyiségek, melyek egymástól véges mennyiségekben különböznek, egyenlőknek tekinthetők, és így ama kettősviszonyok átmennek következőkbe:

$$\frac{BR}{AR} = \frac{A_1Q_1}{B_1Q_1},$$

vagy

$$AR \cdot A_1Q_1 = BR \cdot B_1Q_1.$$

Ezen egyenlet, TAR, TA_1Q_1 és TBR, TB_1Q_1 hasonló háromszögekből is levezethető, a mennyiben az első pár háromszög

$$AR : TR = TQ_1 : A_1Q_1,$$

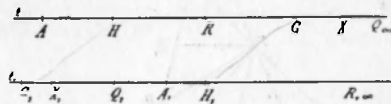
a második

$$BR : TR = TQ_1 : B_1Q_1\text{-et}$$

könnyen belátható perspektív helyzetű pontsoroknál, és mert projektív pontsorok mindig perspektív helyzetbe hozhatók, azért bármily helyzetű projektív pontsorokra nézve is helyes.

Ha tehát (14. ábra) X pont A -tól el van választva R és Q_∞ által, a pontok sorrendje: $ARXQ_\infty$, és így a megfelelő pontok sorrendje: $A_1R_1X_1Q_1$, vagyis X_1 szintén el lesz választva A_1 -től Q_1 és R_1 által.

Ha azon téglányt, melynek területe a projektív pontsorok hatványa négyzetté alakítjuk át, és annak oldalát R és Q_1 -től mérve t , t_1 egyenesekre visszük, G , H és G_1 , H_1 -ig, úgy G , H -ban t -nek oly két különös pontját kapjuk meg, mely R ellenponttól ép oly távolságra van, mint a nekik megfelelő G_1 , H_1 pontok t_1 -en a másik Q_1 ellenponttól. E két pontpár: G, G_1 ; H, H_1 a projektív pontsorok *hatványpontjainak* neveztetik.



14. ábra.

17. Projektív pontsoroknál mindig léteznek *egymással egyenlő közök*, melyeknek végpontjai, egymásnak megfelelő pontok, és melyek *megfelelőleg egyenlő közöknek* neveztetnek.

Legyen ugyanis (15. ábra) a két projektív pontsor hatványa μ^2 , annak ellenpontja R és Q_1 , végre két megfelelő pontpár A, A_1 ; B, B_1 . Minthogy

$$RA = \frac{\mu^2}{Q_1A_1} \text{ és } RB = \frac{\mu^2}{Q_1B_1},$$

$$AB = RB - RA = \mu^2 \left(\frac{1}{Q_1B_1} - \frac{1}{Q_1A_1} \right),$$

tehát

$$AB = \frac{\mu^2 \cdot B_1A_1}{Q_1A_1 \cdot Q_1B_1}.$$

Ezen egyenlet folytán AB és A_1B_1 közök nagyságukra nézve akkor egyenlők, ha:

$$Q_1A_1 \cdot Q_1B_1 = \mu^2,$$

vagy mert:

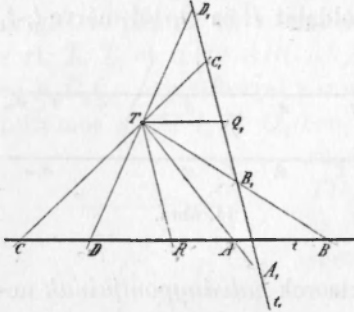
$$\overline{RB} = \frac{\mu^2}{Q_1B_1}, \quad \overline{RA} = \frac{\mu^2}{Q_1A_1},$$

ha

$$RA = Q_1B_1, \text{ és } Q_1A_1 = RB.$$

E két utolsó egyenlet azt fejezi ki, hogy: két projektív pontsorban a megfelelőleg egyenlő közöknek végpontjai az ellenpontoktól felváltva egyenlő távolságra vannak.

Ha tehát A tetszőleges pont t -ben, és RD, Q_1B_1, Q_1C_1 egyenlőnek vétetik RA -val t , ill. t_1 -en, továbbá A, D, B_1, C_1 -nek megfelelő pontja: A_1, D_1, B, C , úgy: $AB=A_1B_1; CD=C_1D_1; AC=A_1C_1; BD=B_1D_1$.



15. ábra.

E közöknél az is látható (l. az ábrát), hogy AB és CD -nek, valamint a megfelelőknek A_1B_1, C_1D_1 -nek végpontjai nincsenek elválasztva, míg AC, BD -nek és így A_1C_1, B_1D_1 -nek végpontjai elvannak választva R, Q_1 ellenpontok által.

Ha A, t -nek G hatvány pontjában vétetett volna fel, akkor B szintén G -be, C és D pedig H -ba, és hasonlóképp a megfelelő pontok G_1 és H_1 -be jutottak volna. Két köz tehát G és H ponttá fajult volna el, a másik két köz pedig összeesett volna GH -val az egyik, és G_1H_1 -gyel a másik pontsoron.

18. Két projektív sugársornál, ép úgy mint projektív pontsoroknál, találhatók oly különös egymásnak megfelelő sugarak, melyek ha kettősviszonyba hozatnak más sugarakkal, a kettősviszonyok egyszerűbb alakot öltenek.

Hogy e sugarak szerkesztését és az egyszerűsített kettősviszony értékét megtalálhassuk vegyük fel, hogy a két projektív sugársor T, T_1 már perspektív helyzetű, mely helyzetbe, mint láttuk, két projektív sugársor mindig az által hozható, hogy egy tetszőleges megfelelő sugárpár egymásra lesz fektetve a nélkül, hogy a középpontok összeesnének.

Ha t tartója azon pontsornak (16. és 17. ábra), mely mindkét sugársorral perspektív, s mi t -n fekvő pontból, mint középpontból, T, T_1 -en át α kört írunk le, úgy ezen körnek és t -nek U, V metszéspontjain átmenő $|TU|=q, |T_1V|=r$ sugarak, valamint ezeknek megfelelő $|T_1U|=q_1, |TV|=r_1$ sugarak, egymásra merőlegesek, és e végből a sugársorok egymásnak megfelelő merőleges sugárpárjainak nevezetnek.

Noha a két projektív sugársor végtelen sokféleképp hozható per-

spektív helyzetbe, mindamellet általában csak egy-egy pár egymásnak megfelelő merőleges sugárpár létezik, mert ha még egy léteznék, akkor t -nek TT_1 köz felezőpontján át TT_1 -re merőlegesen álló egyenesnek kellene lenni, és ekkor végtelen sok ily sugárpárt lehetne szerkeszteni. Ezen eset azonban csak különös projektív sugársoroknál következik be, melyről később szólunk.

Ha $a, a_1; b, b_1$ ezen T, T_1 sugársoroknak két megfelelő sugárpárja, úgy $(abqr) = (a_1b_1q_1r_1)$, vagy mi ugyanaz:

$$\frac{\sin(aq) \cdot \sin(br)}{\sin(bq) \cdot \sin(ar)} = \frac{\sin(a_1q_1) \cdot \sin(b_1r_1)}{\sin(b_1q_1) \cdot \sin(a_1r_1)}$$

de minthogy (szög-)

$$\begin{aligned}(ar) &= (qr) + (aq), & (a_1q_1) &= -(q_1r_1) + (a_1r_1) \\ (br) &= (qr) + (bq), & (b_1q_1) &= -(q_1r_1) + (b_1r_1)\end{aligned}$$

és $q, r; q_1, r_1$ egymásra merőleges:

$$\begin{aligned}\sin(ar) &= \cos(aq), & \sin(a_1q_1) &= -\cos(a_1r_1) \\ \sin(br) &= \cos(bq), & \sin(b_1q_1) &= -\cos(b_1r_1),\end{aligned}$$

miért is a fönnebbi egyenletekből következik:

$$\frac{\sin(aq) \cdot \cos(bq)}{\cos(aq) \cdot \sin(bq)} = \frac{-\cos(a_1r_1) \cdot \sin(b_1r_1)}{-\cos(b_1r_1) \cdot \sin(a_1r_1)}$$

vagy

$$\operatorname{tg}(aq) \cdot \operatorname{tg}(a_1r_1) = \operatorname{tg}(bq) \cdot \operatorname{tg}(b_1r_1).$$

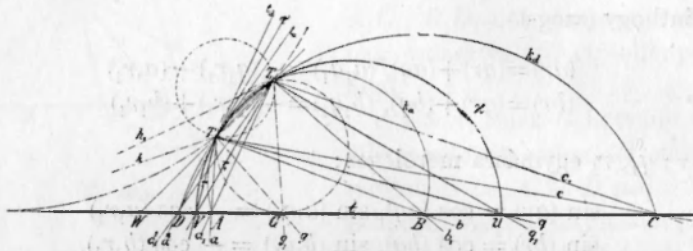
Ezen egyenlet azt fejezi ki, hogy: két projektív sugársorban egy tetszőleges sugárnak hajlásszöge az egymásnak megfelelő merőleges sugárpár egyik szárához, és a felvett tetszőleges sugárnak megfelelő sugár hajlásszöge az egymásnak megfelelő merőleges sugárpár másik — az előbbinek meg nem felelő — szárához, oly két szög, melynek tangense állandó szorzatot ad. Ezen állandó szorzatból, mely a sugársor hatványának nevezetetik, látható, hogy ha a forgás közben közeledik q -hoz, úgy a_1 távolodik r_1 -től, vagyis közeledik q_1 -hez.

19. Projektív sugársoroknál szintén találhatók egyenlő szögek, melyeknek szárai egymásnak megfelelők.

Mielőtt ily sugarakat szerkesztenénk, vegyük tekintetbe, hogy két perspektív helyzetű sugársornál a középpontok vagy el vannak választva a velök perspektív pontsor tartója — a perspektív tengely — által, vagy pedig nincsenek elválasztva. Az első esetben a sugársoro-

kat *ellenkező forgású*, a másodikban *egyenlő forgású* sugársoroknak nevezhetjük, mert ha két megfelelő sugarat, más két megfelelő sugár helyzetébe akarjuk forgatni, az első esetben ellenkező, a másodikban egyenlő értelemben kell forgatni a sugarakat. A sugársoroknak e tulajdonsága akkor is megmarad, ha azokat síkjukban a perspektív helyzetből kimozdítjuk.

Ha két felvett projektív sugársor T, T_1 , egyenlő, vagy ellenkező forgású volt, az marad, miután perspektív helyzetbe hozattott, vagyis középpontjuk vagy nincs, vagy pedig el van választva a perspektív tengely t által.



16. ábra.

Ha most, miután a sugársorok perspektív helyzetbe hozattak, T, T_1 középponton át tetszőleges k_a kört fektetünk (16. ábra), mely t perspektív tengelyt A, B pontokban metszi, úgy

$$|TA| = a, |TB| = b \text{ és } |T_1A| = a_1, |T_1B| = b_1$$

sugarak által képezett szögek egyenlők, még pedig: egyenlő forgásúnál a, b és a_1, b_1 sugarak azon szögei, melynek szára között AB köz fekszik egyenlők; ellenkező forgásúnál pedig (17. ábra) a, b sugarak azon szöge, melynek szára között AB köz fekszik egyenlő, a_1, b_1 azon szögével, melynek szára között AB köz nem fekszik. a, b és a_1, b_1 sugarakat egyenlő forgású soroknál az egymásnak megfelelő derékszög szárai nem választják el, ellenkező forgásúnál pedig elválasztják.

Tekintve TT_1UV és TT_1BA húrnegyszögeket következik:

$$T_1UV \pm T_1TV = T_1BA \pm T_1TA,$$

a szerint, a mint a sugársorok egyenlő vagy ellenkező forgásúak, miből

zők fekszenek, egymásnak kiegészítő szögei, vagy mi ugyanaz, a , b és c , d sugarak (és hasonlóképp a_1 , b_1 ; c_1 , d_1 sugarak) által képezett két-két szög egymással egyenlő.

Mindezekből következik, hogy nemcsak (ab) és (cd) szög egyenlő megfelelő szögével, hanem egyszersmind (ac) és (bd) szög is; továbbá hogy egyenlő forgású soroknál a , b és a_1 , b_1 valamint c , d és c_1 , d_1 , ellenkező forgású soroknál a , c és a_1 , c_1 , valamint b , d és b_1 , d_1 sugarak azon szögei egyenlők, melyek AB , CD közőket tartalmazzák, — vagy mi ugyanaz, melyek r , q ; r_1 , q_1 által nincsenek elválasztva, tehát derékszögnél kisebbek. —

α , k_a , k_d körökről könnyen kimutatható, hogy α felezi k_a és k_d által képezett szögek egyikét.

Nevezzük ugyanis e körök érintőit T vagy T_1 pontban τ , t_a , t_d -nek, úgy az egyenlő forgású soroknál

$$(t_a a) = TT_1 A \sphericalangle, \quad (\tau r) = TT_1 V \sphericalangle,$$

$$(t_a a) - (\tau r) = (t_a \tau) + (\tau r) + (ra) - (\tau r) = TT_1 A \sphericalangle - TT_1 V = (r_1 a_1),$$

miből $(t_a \tau)$, mint α , k_a hajlásszöge:

$$(t_a \tau) = (ar) + (r_1 a_1) = (ar) - (qb).$$

Ugyanígy kimutatható, hogy ellenkező forgású soroknál e körök hajlásszöge szintén $(ar) - (qb)$, valamint hogy k_d , α köröknek hajlásszöge $(t_d \tau) = (dr) - (qc)$, miből már következik, tekintettel $(dr) = (ra)$ és $(qc) = (bq)$ egyenletekre, hogy α kör k_a , k_d -hez egyenlő szögek alatt hajlik.

«Az egymásnak megfelelő egyenlő szögek szárai tehát, mind az egyenlő, mind az ellenkező forgású sugársoroknál azon pontokon mennek át, melyekben T , T_1 középpontokon átfektetett és α -hoz egyenlő szög alatt hajló körök t perspektív tengelyt metszik.»

21. Ezen k_a , k_d körpárok között egyenlő forgású sugársoroknál létezik olyan, mely t tartót érinti, mert T , T_1 pontok t által nincsenek elválasztva. Az érintő pontokon G , H -n átmenő g , h ill. g_1 , h_1 sugarak — a sorok *hatványsugarai* — külön-külön véve nullá fajult egyenlő megfelelő szögeknek tekinthetők, együttvéve pedig [mint (gh) , $(g_1 h_1)$] szintén egyenlő megfelelő szögek.

Ellenkező forgású sugársoroknál nem léteznek oly körök, melyek t tartót érintik, de ekkor α -át T , T_1 -ben derékszög alatt metsző körnek és t -nek közös G , H pontjain átmenő g , h ; g_1 , h_1 sugarak képezik a hatványsugarakat, mert a derékmetszőkör, α -hoz egyenlő szög

alatt hajló körpárok egyesült körének tekinthető. — Bár az egyenlő forgású sugársoroknál is található kör, mely α -át T, T_1 -ben derékszög alatt metszi, de ennek nincs közös pontja a perspektív tengelyvel, t -vel. —

g, h, g_1, h_1 hatványsugarak, melyek az egymásnak megfelelő derékszögek $(qr), (q_1r_1)$ száraival egyenlő szögeket képeznek:

$$(gq) = (qh) = (g_1r_1) = (r_1h_1),$$

itt is hasonló tulajdonsággal bírnak, mint a hatványpontok a pontsoroknál, t. i. hogy:

$\text{tg}(aq) \cdot \text{tg}(a_1r_1) = \text{tg}(gq) \cdot \text{tg}(g_1r_1) = \text{tg}^2(gq) = \text{tg}^2(hq) = \text{tg}^2(g_1r_1)$
 egyenlő a sugársorok hatványával.

4. §. Közös tartóval bíró projektív sorok kettős elemei.

22. Két projektív pontsor $ABC\dots, A_1B_1C_1\dots$ ugyanazon t tartón is képzelhető. Ha ugyanis két perspektív pontsor közül az egyiket, $A_1B_1C_1\dots$ -et, a másiknak, $ABC\dots$ -nek tartójára helyezzük, úgy a közös tartón két projektív pontsort kapunk.

$A_1B_1C_1\dots$ pontsor kétféleképp helyezhető $ABC\dots$ tartójára, t. i. vagy oly módon, hogy ha A -ból B -n át C -hez és A_1 -ből B_1 -en át C_1 -hez haladunk, a haladás értelme ugyanaz, vagy pedig oly módon, hogy a haladás értelme ellenkező. Két ugyanazon tartón fekvő projektív pontsor tehát vagy *egyenlőképp haladó*, vagy pedig *ellenkezőleg haladó* pontsor lehet.

Ily projektív pontsorok megfelelő pontjainak szerkesztése visszavezethető, két különböző tartón fekvő projektív pontsorok megfelelő pontjainak szerkesztésére az által, hogy $A_1B_1C_1\dots$ pontsort tetszőleges T pontból egy új t_2 tartóra projicziáljuk $A_2B_2C_2\dots$ -be, és $ABC\dots$ pontsor X pontjának megfelelő X_2 pontot azon pontsorban, T -ből ismét t -re projicziáljuk X_1 -be.

A kérdés, mellyel most foglalkozunk abban áll, megvizsgálni: vajon van-e két ugyanazon tartón fekvő projektív pontsoron oly pont, melyet ha az egyik vagy másik pontsorhoz tartozónak tekintünk, megfelelő pontjával összeesik és mikép kell ezen különös pontokat, úgynevezett *kettőspontokat* szerkeszteni.

Hogy kettőnél több ily pont nem lehet az könnyen belátható, mert ha ABC pontok összeesnének a megfelelő $A_1B_1C_1$ pontokkal, úgy minden más D pont is, az $(ABCD) \equiv (A_1B_1C_1D_1)$ reláció követ-

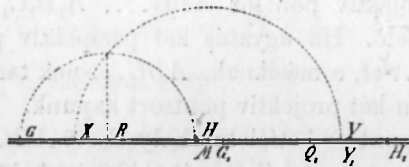
keztében összeesnek megfelelő D_1 pontjával. Ennélfogva a kettős-pontoknak száma legfeljebb kettő.

23. Legyenek az egyes pontsorok végtelen távol fekvő $Q_\infty, R_{1\infty}$ pontjainak megfelelő pontjai, vagyis az ellenpontok: Q_1, R . E pontok általában nem esnek össze, mert a midőn a pontsorokat egymásra helyeztük, csak tőlünk függött, valjon R és Q_1 -et egyesítjük-e, vagy nem.

R, Q_∞ és $R_{1\infty}, Q_1$ pontok által az egyes pontsorok két részre lesznek osztva, melyet következőleg lehet jelezni:

$$\begin{array}{l} Q_\infty \dots\dots R \dots\dots\dots Q_\infty \\ R_{1\infty} \dots\dots\dots Q_1 \dots\dots R_{1\infty} \end{array}$$

Ha most egy X pont R -től balra levő Q_∞ ponttól R felé mozog, úgy ellenkezőleg haladó pontsornál a neki mindig megfelelő X_1 pont



18. ábra.

Q_1 -től azon $R_{1\infty}$ pontig fog mozogni, mely Q_1 -től balra van, s mint-hogy X, X_1 pontok egymással szemben mozognak egyszer megtörté-nik, hogy egymással találkoznak, mely találkozás szükségkép RQ_1 közön kívül R -től balra lesz.

Ha a mozgó X pont a másik Q_∞ pontból mozog R felé, a neki megfelelő X_1 pedig ezen, ellenkezőleg haladó pontsornál, Q_1 -től a másik $R_{1\infty}$ felé, tehát véle ismét szemben, úgy azok ismét egyesülnek RQ_1 közön kívül Q_1 -től jobbra fekvő pontban.

Ellenkezőleg haladó pontsoroknál tehát szükségkép létezik az ellenpontok által határolt közön kívül, két kettőspont.

Hogy ezeket szerkeszthessük, szükségünk van $Q_\infty, Q_1, R, R_{1\infty}$ pontokon kívül (18. ábra) még egy tetszőleges megfelelő pontpárra, pl. G, G_1 (vagy H, H_1) hatványpontokra, melyek különben minden más megfelelő pontpár segélyével szerkeszthetők. Nevezzük RQ_1 felező-pontját M -nek és vegyük tekintetbe, hogy X kettőspontra nézve, fekd-jék az R, Q_1 -től jobbra, vagy balra:

$$RG^2 = RX \cdot Q_1X = (RM + MX)(Q_1M + MX) = (RM + MX)(-RM + MX),$$

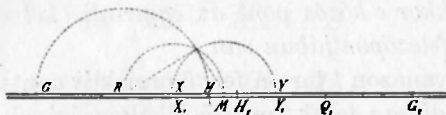
tehát

$$\overline{RG^2} + \overline{RM^2} = \overline{MX^2}.$$

Ezen egyenletből látható, hogy RG és RM befogókkal alakított derékszögű háromszögnek átfogója, megadja a kettőspontok távolságát RQ_1 felezőpontjától.

24. Hogy az egyenlőkép haladó pontsorokra nézve a kettőspontok fekvését megállapíthassuk, vegyük tekintetbe, ha X pont ismét az R -től balra levő Q_∞ pontból kiindulva R -ig mozog, a neki (19. ábra) megfelelő X_1 pont, Q_1 -től azon $R_{1\infty}$ -ig fog mozogni, mely Q_1 -től jobbra van. E mozgás közben X nem eshet össze megfelelő pontjával.

Ha X pont R -től a másik Q_∞ -ig halad, X_1 a másik $R_{1\infty}$ -től közeledik Q_1 -hez. E mozgásnál már megtörténhetik, hogy X , X_1 -gyel egyesül, de ezen egyesülési pont csak RQ_1 közön jöhet létre.



19. ábra.

Ha ily X pont létezik, akkor erre nézve :

$$RX \cdot XQ_1 = \overline{RG^2},$$

vagy mert

$$RX \cdot XQ_1 = (RM + MX)(XM + MQ_1) = (RM + MX)(RM - MX),$$

$$\overline{RM^2} - \overline{MX^2} = \overline{RG^2}.$$

Ezen egyenlet szerint a kettőspont távolsága RQ_1 felezőpontjától M -től, befogója azon derékszögű háromszögnek, melynek átfogója RM , másik befogója RG .

Ha tehát RM átfogó nagyobb mint RG befogó, vagy mi ugyanaz ha RQ_1 nagyobb mint HG , úgy létezik két M -től egyenlő távolságra levő kettőspont; ha ellenben RQ_1 kisebb volna mint HG , úgy nem lehet oly valós pontot találni t -n, mely megfelelő pontjával összeesnék; s végre midőn $RQ_1 = HG$, akkor az M -től 0 távolságra levő pont, vagyis maga M pont az egyedüli, mely megfelelő pontjával összeesik.

Minthogy $HG = G_1H_1$, és felező pontjuk R , ill. Q_1 : az egyenlőkép haladó projektív pontsoroknak két *valós*, vagy nem valós, hanem *képzetes* kettőspontjuk van a szerint, a mint HG , G_1H_1 közök közös részszel nem bírnak, vagy pedig közös részszel bírnak; de ha a közös rész csupán egy pont M , akkor a pontsoroknak ezen egy pontja az egyedüli kettőspont.

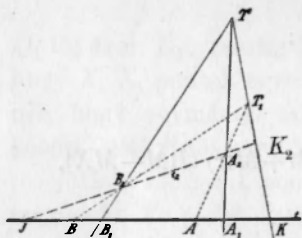
E vizsgálat eredményét így fejezhetjük ki:

Ha két ugyanazon tartón fekvő projektív pontsor ellenpontjai R , Q_1 , hatvány pontjai G , H ; G_1 , H_1 , akkor a két projektív pontsornak kettőspontjai RQ_1 köz felezőpontjától vagy

$$\left(\frac{RQ_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{HG}{2}\right)^2, \text{ vagy } \left(\frac{RQ_1}{2}\right)^2 - \left(\frac{HG}{2}\right)^2$$

távolságra vannak, a szerint a mint a sorok ellenkezőleg, vagy egyenlőkép haladók. A kettőspontok ellenkezőleg haladó pontsoroknál mindig valósak, egyenlőkép haladóknál pedig csak akkor, ha HG és G_1H_1 közök nem bírnak közös részszel. Ha ezen közöknek csak egy pontjuk közös, akkor e közös pont az egyedüli (két egyesült) fedőpont, mely RQ_1 felezőpontjában van.

25. Két ugyanazon t tartón fekvő projektív pontsornak második kettőspontja *vonalosan* (csak vonalzó alkalmazásával) szerkeszthető, ha az egyik kettőspont I , és a pontsoroknak két-két megfelelő pontja: A , A_1 ; B , B_1 , mely a projektív vonatkozás meghatározásához szükséges, adva van.



20. ábra.

Projecizáljuk ugyanis (20. ábra) $IA_1B_1 \dots$ pontsort tetszőleges T pontból, I -n átmenő t_2 tartóra $IA_2B_2 \dots$ -be. Ezen $IA_2B_2 \dots$ pontsor $IA_1B_1 \dots$ -vel nemcsak projektív, hanem, mert I -ben megfelelőleg közös pontjuk van, egyszerűen perspektív is, ennél fogva AA_2BB_2 , egyenesek T_1 metszőpontja, a vélők perspektív sugársornak középpontja. Az $IA_2B_2 \dots$ pontsorról perspektív T , T_1 sugársorok egymás között is perspektívek, miért is $|TT_1|$ sugár, a két sugársorban egymásnak megfelelő. Ezen $|TT_1|$ sugárnak K metszőpontja t -vel a keresett második kettőspont, mert K -nak $IA_2B_2 \dots$ sorban megfelelő $(KT_1, t_2) = K_2$, $IA_1B_1 \dots$ -ben pedig $(K_2T, t) = K$.

Lehet azonban úgy is eljárunk, feltéve, hogy K az adott, I a

keresett második kettőspont, hogy K -n át tetszőleges egyenest húzunk és ennek két pontjából T , T_1 -ből projicziáljuk $A_1B_1 \dots$, illetve $A, B \dots$ sorokat; TA_1 , T_1A és TB_1 , T_1B egyenesek közös A_2, B_2 pontján átmenő $|A_2B_2|$ egyenes t -t a kívánt második kettőspontban I -ben metszi.

Ha az első szerkesztés szerint TT_1 sugár t -t I -ben, vagy a második szerint $|A_2B_2|$ egyenes t -t K -ban metszené, akkor a második kettőspont az elsővel egyesül és a soroknak csak egy kettőspontjuk van.

26. A kettőspontokra vonatkozólag még megjegyezhető a következő tétel: ha két közös tartón fekvő projektív pontsor kettőspontjai I, K -val, azok egymásnak megfelelő tetszőleges pontjai $A, A_1; B, B_1$ -gyel jelöltnék, akkor:

$$(IKAA_1) \overline{\wedge} (IKBB_1).$$

$$(IKAB) \overline{\wedge} (IKA_1B_1).$$

ből következik ugyanis:

$$\frac{IA}{KA} : \frac{IB}{KB} = \frac{IA_1}{KA_1} : \frac{IB_1}{KB_1},$$

vagy

$$\frac{IA}{KA} : \frac{IA_1}{KA_1} = \frac{IB}{KB} : \frac{IB_1}{KB_1},$$

tehát

$$(IKAA_1) \overline{\wedge} (IKBB_1).$$

A számítás azonban kikerülhető, ha meggondoljuk, hogy $(IKAA_1) \overline{\wedge} (K_2KT_1T) \overline{\wedge} (IKBB_1)$, mert az első és utolsó négy pont, projekciója a középső négynek, A_2 , illetve B_2 -ből $|TT_1|$ -re.

27. Ha két projektív pontsor ugyanazon tartón fekszik, de nem bír valós kettőspontokkal, akkor mindig találunk két, a tartó által szimmetrikusan elválasztott pontot, melyek mindegyikéből a megfelelő pontpárokat projicziáló sugárpárok egymással egyenlő szögeket képeznek.

Nevezzük (21. ábra) R, O_1 ellenpontok távolságát felező pontot M -nek, a pontsorok hatványpontjait G, H, G_1, H_1 -nek, és legyen $|RQ_1|$ -re M -ben emelt merőleges O, O' pontja oly helyzetű, hogy

$$\overline{MO'}^2 = \overline{MO}^2 = \overline{RG}^2 - \overline{RM}^2 = (GR + RM)(GR - RM) = GM \cdot MH.$$

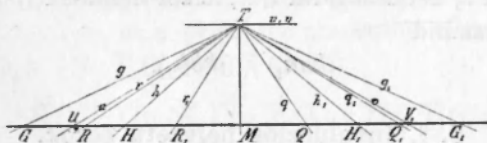
Minthogy

$$\sphericalangle 2OGM = \sphericalangle 2MOH = \sphericalangle ORM,$$

$$|OG|, |OG_1|; |OH|, |OH_1|; |OR|, |OR_1|$$

22. ábra) $q, r; q_1, r_1$ -nek, a hatványsugarakat $g, h; g_1, h_1$ -nek, (rq_1) szög egyik felezőjét $u_1 \equiv v$ -nek és ezen felezőnek megfelelő sugarat az egyes sorokban u, v_1 -nek, végre $u_1 \equiv v$ -vel párhuzamosan menő tetszőleges t egyenesnek metszéspontjait az előbbi sugarakkal, a sugarak nevei szerint, de nagy betűvel.

Mint hogy $(gh) = (h_1g_1)$ szögek felezői: r , ill. q_1 , és $\sphericalangle(rr_1) = (qq_1)$, t egyenes pedig r és q_1 -gyel egyenlő szöget képez: RQ_1, R_1Q, GG_1, HH_1 közöknek ugyanazon M felezőpontjuk van; mint hogy továbbá $\text{tg}(q_1u_1) \cdot \text{tg}(ur) = \text{tg}(q_1v_1) \cdot \text{tg}(vr) = \text{tg}^2(gr)$, és $(q_1u_1) = (vr)$, azért $(ur) = (q_1v_1)$, tehát u és v_1 sugarak t -vel szintén egyenlő szöget képeznek, minek következtében t -n fekvő és a sugársorokkal perspektív pontsorok U, V_1 ellenpontjai, M -től szintén egyenlő távolságra vannak.



22. ábra.

Ha X, X_1 e projektív pontsorok megfelelő pontpárja, úgy U, V_1 ellenpontok miatt:

$$UX \cdot X_1V_1 = UG \cdot G_1V_1 = UH \cdot H_1V_1,$$

s mert az előbbieket szerint

$$UG = G_1V_1; HU = V_1H_1,$$

azért

$$UX \cdot X_1V_1 = \overline{UG}^2 = \overline{HU}^2 = \overline{V_1G_1}^2 = \overline{H_1V_1}^2$$

miből látható, hogy G, H és G_1, H_1 pontok, a pontsoroknak hatványpontjai.

A felvett sugársorokat tehát t oly pontsorok szerint metszi, melyeknek hatványpontjain a sugársoroknak hatványvonalai mennek át, és mert projektív pontsoroknak csak akkor nincs valós kettőspontjuk, ha hatványpontjaik által határolt közök közös résszel (nem ponttal) bírnak, azért e sugársoroknak is csak akkor vannak valós kettőssugarai, ha a hatványsugarak által képezett (hegyes, vagy tompa) szögek szárai nincsenek egymástól elválasztva.

E szerint mondhatjuk: két, közös középponttal bíró ellenkező forgású projektív sugársor, mely ugyanazon síkban fekszik, min-

X, X_1 egy tetszőleges, kapcsolt pontpár. G, H, G_1, H_1 pedig a hatványpontok, úgy ezen projektív pontsoroknál:

$$XM \cdot X_1M = GM \cdot G_1M = HM \cdot H_1M,$$

és mert $GH = G_1H_1$ közök felező pontja M , azért G, G_1 és H, H_1 egyegy pontba esik, melyek az involucziós pontsor kettőspontjai.

Ha az involucziós pontsort alkotó projektív pontsorok egyenlőkép haladók, akkor ezeknek és így az involucziós pontsornak nincs valós kettőspontja; mert $GH = H_1G_1$ hatványpontok által határolt közök egymást teljesen befödik, miután mindkét köznek felezőpontja M , egybeesik. De azon körülményből, hogy a kapcsolt pontok, egyenlőkép haladó projektív pontsorból alkotott involucziós pontsornál, a középponttól el vannak választva szintén következik, hogy két kapcsolt pont nem eshet egybe.

Ily természetű involucziós pontsoroknak kettőspontjai képzetesek; az egybeeső G, H_1 és G_1, H hatványpontokat itt szintén, az involucziós sorok hatványpontjainak nevezik.

Valós kettőspontokkal bíró involucziós pontsorokat *hyperbolikus természetűnek* vagy röviden *hyperbolikusnak*, képzetes kettőspontokkal bírókat *elliptikusnak* szokták nevezni, így tehát: az involucziós pontsorok elliptikusak, vagy hyperbolikusak, a szerint, a mint a kapcsolt pontok nincsenek vagy el vannak választva a középpont által.

A kapcsolt pontoknak a középponttól mért távolságai, ha a pontsor hyperbolikus, pozitív, ha elliptikus negatív szorzatot adnak, mely szorzat: az involucziós pontsor *hatványának* neveztetik.

32. Ha az involucziós pontsor középpontja M , kettőspontjai G, H , annak tetszőleges kapcsolt pontpárja X, X_1 , úgy az involucziós pontsort jellemező reláció:

$$XM \cdot X_1M = GM^2 = MH^2,$$

így is írható:

$$XM \cdot X_1M + MG \cdot MH = 0.$$

Ha ezen egyenletet 2-vel szorozzuk és ahhoz

$$XM \cdot (MH + MG) + X_1M \cdot (MH + MG) = 0$$

egyenletet adjuk, akkor:

$$(XM + MG)(X_1M + MH) + (X_1M + MG)(XM + MH) = 0,$$

vagy egyszerűbben írva:

$$XG \cdot X_1H + X_1G \cdot XH = 0$$

egyenlethez jutunk, miből következik, hogy

$$\frac{XG}{X_1G} : \frac{XH}{X_1H} = (XX_1GH) = -1.$$

Ezen reláció azt fejezi ki, hogy az involucziós pontsor kettőspontjai és egy tetszőleges kapcsolt pontpár kettős viszonyának értéke $= -1$, ha a kettőspontok és a kapcsolt pontok egymáshoz rendelt pontoknak tekintetnek.

Négy pontot, melynek kettősviszonya $= -1$: *harmonikus helyzetű*, vagy *harmonikus* pontnak neveznek. Minthogy harmonikus pontok kettősviszonyának értéke negatív: az egymáshoz rendelt pontok el vannak választva egymástól, és ez rendesen úgy fejeztetik ki, hogy az egymáshoz rendelt pontok *harmonikusan vannak elválasztva*. Ennélfogva mondhatjuk: *involucziós pontsornál a kettőspontok a kapcsolt pontoktól harmonikusan vannak elválasztva*.

33. Tekintve, hogy az involucziós pontsor két különös helyzetű projektív pontsor, annak meghatározásához nem szükséges három egymásnak megfelelő pontpár $A, A_1; B, B_1; C, C_1$, mert két kapcsolt pontpárral $A, A_1; B, B_1$ -gyel az involucziós pontsornak négy pontja és azoknak megfelelő pontjai is adva vannak, a mennyiben A, B, A_1, B_1 pontoknak az egyik pontsorban: A_1, B_1, A, B pontok felelnek meg a másikban. A projektív vonatkozás azonban ezen adatokkal nincs túlterhelve, mert (ABA_1B_1) azonosan egyenlő (A_1B_1AB) -vel (5). E szerint: *az involucziós pontsort két kapcsolt pontpár meghatározza*.

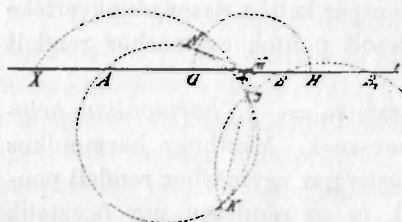
$A, A_1; B, B_1$ kapcsolt pontpárral adott involucziós pontsor tetszőleges X pontjának kapcsolt X_1 pontját oly módon szerkeszthetjük, hogy az ABA_1 és A_1B_1A pontokkal meghatározott projektív vonatkozású pontsorokban az elsőnek X pontjához megkeressük (22) a megfelelő X_1 pontot; ezen X_1 már kapcsolt pontja X -nek. A szerkesztés azonban egyszerűbb úton is eszközölhető.

Fektessünk ugyanis (24. ábra) $A, A_1; B, B_1$ pontokon át két kört, melyek egymást metszik, és nevezzük ezeknek I, K metszéspontjain átmenő egyenesnek és az involucziós pontsor t tartójának közös pontját M -nek. Minthogy

$$AM \cdot A_1M = IM \cdot KM = BM \cdot B_1M:$$

M középpontja, az $A, A_1; B, B_1$ kapcsolt pontokkal bíró involucziós pontsornak, és ha I, K -n valamint t -n fekvő X ponton áthelyezett kör t -t másodizben X_1 -ben metszi, úgy $XM \cdot X_1M = IM \cdot KM$ reláció következtében, X_1 kapcsolt pontja X -nek.

A szerint, a mint a felvett kapcsolt pontok $A, A_1; B, B_1$, egymástól el vannak választva, vagy nincsenek elválasztva, M pont szintén elválasztja, vagy nem választja el a kapcsolt pontokat egymástól, és az involucziós pontsor elliptikus, illetve hyperbolikus lesz. De magá-



24. abra.

ból a szerkesztésből is látható, hogy csak azon esetben, a midőn $A, A_1; B, B_1$ nincsenek egymástól elválasztva, tehát M, AA_1I, BB_1I körön kívül van, lehet I, K pontokon át oly két kört fektetni, mely t -t érinti, azaz összeső kapcsolt pontokban metszi. S ezen érintőpontokat, mint az involucziós pontsor kettőspontjait megkapjuk, ha az IK pontokon átmenő körök egyikéhez M -ből vont érintő hosszával MN -nel, M -ből kört írunk le; ezen kör t -t már a kettőspontokban G, H -ban metszi, mert:

$$\overline{NM}^2 = \overline{GM}^2 = \overline{HM}^2 = IM \cdot KM = AM \cdot A_1M = BM \cdot B_1M.$$

E szerkesztésből következő tételhez jutottunk:

Két ponton, I, K -n, átmenő összes körök (kőrsor), tetszőleges egyenest involucziós pontsor szerint metszik, melyben az egyes körök metszőpontjai kapcsolt pontok, és a két pont összekötő egyenesének — a kőrsor hatványvonalának — metszőpontja, az involucziós pontsor középpontja. Ezen involucziós pontsor elliptikus, vagy hyperbolikus a szerint, a mint tartója I, K pontokat elválasztja, vagy nem választja el egymástól; azon pontok, melyekben a tartó a kőrsor két körét érinti, — s mely csak a hyperbolikus involucziós pontsornál fordulhat elő, — a pontsor kettőspontjait képezik.

Megjegyezhető még, hogy ha a metsző egyenes I (vagy K) ponton megy át, egy különös involucziós pontsor áll elő, melyben minden pontnak egy és ugyanazon pont *t. i.* I (vagy K) a kapcsolt pontja, és mely involucziós pontsor *parabolikusnak* neveztetik. A kapcsolt pontoknak a középponttól mért távolságai parabolikus pontsornál oly szorzatot adnak, melynek értéke $=0$.

34. A hyperbolikus természetű involucziós pontsor egy különös pontsorba megy át, ha a két kettőspont G, H közül egyik pl. H , végtelenbe esik. Ekkor ugyanis a középpont, mely GH közt felezi szintén végtelen távolba esik, és azon szorzat, melynek tényezői két kap-

csolt pontnak a középponttól mért távolságai, vagyis a pontsor hatvány: végtelen nagy lesz. E pontsornál a kapcsolt pontok $A, A_1; \dots$ azon különös helyzetűek, hogy a végesben fekvő kettősponttól G -től egyenlő távolságra vannak. Az ismert $(AA_1GH) = -1$ relációból:

$$\frac{AG}{A_1G} = -\frac{AH}{A_1H}$$

de minthogy ezen egyenlet jobboldalának határértéke -1 , tehát

$$AG = -A_1G = GA_1:$$

A, A_1 kapcsolt pontok G kettősponttól egyenlő távolságra vannak.

De hogy G -től egyenlő távolságra levő $A, A_1; B, B_1; C, C_1; D, D_1; \dots$ pontok projektív pontsört képeznek, mely egyszersmind involúziós helyzetű, onnan következik, mert egyrészt négy tetszőleges $ABCD$ pontnak kettősviszonya egyenlő a megfelelő $A_1B_1C_1D_1$ pontok kettősviszonyával, vagyis $(ABCD) = (A_1B_1C_1D_1)$; másrészt $(ABA_1B_1) = (A_1B_1AB)$, minthogy a kettősvizonyt képező $AC, BC, AA_1, BA_1, \dots$ közők egyenlők a megfelelőekkel: $A_1C_1, B_1C_1, -A_1A, -B_1A, \dots$ -val.

Ezen különös involúziós pontsor: *egyenoldalu hyperbolikusnak* neveztetik.

35. Két ugyanazon tartón fekvő involúziós pontsor közös kapcsolt pontjait (ha olyanok léteznek) az előbbieket szerint könnyen szerkeszthetjük.

Legyen ugyanis t tartón két involúziós pontsor $A, A_1; B, B_1$ és $A', A'_1; B', B'_1$ kapcsolt pontok által adva, és keressünk oly kapcsolt pontpárt, mely mindkét pontsorhoz tartozik. Vegyünk fel e végből tetszőleges I pontot és fektessünk $IAA_1, IBB_1, IA'A'_1, IB'B'_1$ pontokon át köröket; az első két kör, még egy K pontot, a másik kettő K' pontot bír közösen; ezen K, K' és I ponton átmenő kör az involúziós pontsorok tartóját a két pontsor közös kapcsolt pontjaiban C, C_1 -ben metszi.

$KK'I$ kör metszőpontjai a tartóval mindig valóságosak, tehát két ugyanazon tartón fekvő involúziós pontsor mindig bír valóságos közös kapcsolt pontpárral, ha azok közül legalább egyik elliptikus, mert ekkor K, K' közül legalább egyik pont I -től a tartó által el van választva, és így a kör a tartót valóságos pontokban metszi.

Ha mindkét pontsor hyperbolikus, úgy IKK' pontokat a tartó nem választja el, és ezen pontok helyzetéből nem ítéhető meg, hogy a rajta

átmenő kör metszi-e a tartót, vagyis van-e a pontsoroknak közös kapcsolott pontpárja. De tudjuk, hogy a kapcsolott pontpár az összetartozó kettőspontokat harmonikusan választja el. Ha tehát az összetartozó kettőspontokat egy új involucziós pontsor kapcsolott pontjainak tekintjük, úgy az új involucziós pontsor kettőspontjai ezen új sor kapcsolott pontjait, tehát az eredetieknek kettőspontjait harmonikusan választják el. De hogy ezen új involucziós pontsor valós kettőspontokkal bírjon, megkivántatik, hogy kapcsolott pontjai ne legyenek egymástól elválasztva, így tehát: az eredeti két *hyperbolikus természetű involucziós pontsor, akkor bír valós közös kapcsolott pontpárral, ha összetartozó kettőspontjai nincsenek egymástól elválasztva.* (Függelék 1.)

36. Két közös középponttal, T -vel, bíró projektív sugársor szintén hozható oly helyzetbe, melynél az egymásnak megfelelő egyenlő szögek megfelelő száraikkal felcserélve egymást fődik.

Ha mi ugyanis projektív sugársoroknál az egymásnak megfelelő derékszögek (rq) , (r_1q_1) szárait egymásra helyezzük oly módon, hogy r , q_1 és r_1 , q egyesüljön, és egy tetszőleges $x \equiv y_1$ sugárnak, mint az egyik és másik sorhoz tartozónak megfelelő sugarát, x_1 , y -nal jelöljük, úgy

$$\text{tg}(xr) \cdot \text{tg}(x_1q_1) = \text{tg}(yr) \cdot \text{tg}(y_1q_1) = \text{tg}(yr) \cdot \text{tg}(xr)$$

relációból következik, hogy $\text{tg}(x_1q_1) = \text{tg}(yr)$, és mert q_1 és r egy és ugyanazon sugár: x_1 egybeesik y -nal.

Ily két projektív sugársor, *involucziós sugársornak*, az egymásnak megfelelő sugarak *kapcsolott* sugaraknak, az egymásra merőleges *kapcsolott* sugarak $(r \equiv q_1, r_1 \equiv q)$ *tengelyeknek* neveztetnek.

Azon általános reláció, mely projektív sugársorok megfelelő sugarai és az egymásnak megfelelő derékszög szárai által képezett szögek között főnforog, involucziós sugársornál így fejezhető ki: az *involucziós sugársor két tetszőleges kapcsolott sugara x, x_1 a tengelyekkel r -rel és q -val oly szögeket képez, melyeknek tangensei állandó szorzatot adnak, vagyis:*

$$\text{tg}(xr) \cdot \text{tg}(x_1r) = \text{állandó}, \text{ és } \text{tg}(xq) \cdot \text{tg}(x_1q) = \text{állandó}.$$

Ezen állandó szorzat bármelyike az involucziós sugársor hatványa.

37. Az involucziós sugársor *elliptikus* vagy *hyperbolikus* a szerint, a mint az alkotó projektív sugársorok egyenlőkép, vagy ellenkezőleg forgók. Elliptikus involucziós sugársornál két kapcsolott sugár a tengelyek által el van választva, hyperbolikusnál nincs elválasztva, a mi

könnyen belátható, ha a tengelyekből $q_1 \equiv r$; $q \equiv r_1$ -ből kiindulva x , x_1 kapcsolt sugarakat forgatjuk. Ha a forgás ugyanazon értelemben történik: x , x_1 el lesz választva, ha pedig ellenkező értelemben, úgy nem lesz elválasztva r , q tengelyek által, és az involucziós sugársor hatványa $\text{tg}(xr) \cdot \text{tg}(x_1r)$, az első esetben negatív, a másodikban pozitív.

Ha az involucziós sugársorban minden sugárhoz egy és ugyanazon sugár kapcsolt: a sugársort *parabolikusnak* nevezik, melynél mint könnyen látható:

$$\text{tg}(xr) \cdot \text{tg}(x_1r) = 0,$$

hol x , x_1 egy pár kapcsolt sugarat, r azon tengelyt jelenti, mely x -szel egyesül.

Mint hogy a hyperbolikus involucziós sugársornál a kapcsolt sugarak a tengelyek által nincsenek elválasztva, mindig található oly két az egyes tengelyekhez egyenlő szög alatt hajló valós sugár, mely kapcsolt sugarával összeesik és melyek az alkotó projektív sugársorok egyesült hatványsugarai. E különös sugarakat az involucziós sugársor *kettőssugarainak* vagy *asymptotáinak* nevezik. Az elliptikus involucziós sugársornál a hatványsugarak felcserélve kerülnek egymásra (g , h_1 -re és g_1 , h -ra); és ezen kapcsolt sugarakat, melyek tehát a tengelyekhez egyenlő szög alatt hajlanak a sugársor *hatványsugarainak* nevezik.

38. *Mindezen involucziós sugársor metszése a középponton át nem menő t egyenessel, involucziós pontsor, melyben a kapcsolt pontok, a sugársor kapcsolt sugarainak metszései*, mert az involucziós sugársort képező két projektív sugársor t -t két projektív pontsor szerint metszi, melyben az egymásnak megfelelő egyenlő közök végpontjaikkal felcserélve egymásra kerülnek, mint hogy a sugársorokban az egymásnak megfelelő egyenlő szögek szárai felcserélve egymást fődik. Az involucziós sugársor kettőssugarainak, mint két összeeső kapcsolt sugárnak metszéspontjai t -vel, a pontsor kettőspontjai lesznek, és mert ezen kettőspontok bármely kapcsolt pontpárral oly kettősvizonyban levő négy pontot képeznek, melynek értéke -1 , azért a sugársor kettőssugarainak és két kapcsolt sugárnak, mint a sugársorhoz tartozó négysugárnak kettősvizonya szintén: -1 .

Két-két egymáshoz rendelt sugárt, melynek kettősvizonya $=-1$, harmonikus helyzetű, vagy harmonikusan elválasztott sugaraknak neveznek; ennél fogva az involucziós sugársor kapcsolt sugarai a kettőssugarak által harmonikusan vannak elválasztva.

Visszatérve az involucziós sugársor és annak t egyenes által

származott metszéséhez, — az involucziós pontsorhoz, — mondhatjuk: az *involucziós sugársorból kimetszett involucziós pontsor, hyperbolikus, vagy elliptikus lesz, a szerint a mint a sugársor hyperbolikus vagy elliptikus*. A sugársor tengelyeinek metszése t -vel, nem lesz különös pontja az involucziós pontsornak, ellenben a sugársor azon sugarának metszőpontja, mely t -vel párhuzamos sugárhoz kapcsol, az involucziós pontsor középpontja.

De viszont szintén következik: az involucziós pontsor tetszőleges pontból involucziós sugársor által projicziáltatik, mely hyperbolikus, vagy elliptikus a szerint, a mint a pontsor hyperbolikus vagy elliptikus; a pontsor kettőspontjainak projicziáló sugarai, a sugársor kettőssugarai.

39. Minthogy az involucziós pontsor két pár kapcsolt pont által meg van határozva: az öt projicziáló involucziós sugársor, s így *minden involucziós sugársor két pár kapcsolt sugár által meg van határozva, mely a szerint a mint a kapcsolt sugarak el vannak választva vagy nincsenek elválasztva: elliptikus vagy hyperbolikus*.

Ha az involucziós pontsor két kapcsolt pontpár $A, A_1; B, B_1$ által van adva, a pontsort T középpontból projicziáló involucziós sugársor tengelyeit következőképp lehet szerkeszteni: TAA_1 , valamint TBB_1 pontokon átmenő körök T, I metszőpontjain keresztül kört fektetünk, melynek középpontja a pontsor tartóján fekszik, e körnek és a pontsor tartójának C, C_1 metszőpontjain átmenő projicziáló sugarak, mint egymásra merőleges kapcsolt sugarak, az involucziós sugársor tengelyei. E szerkesztésből egyszersmind látható, hogyan kell egy involucziós sugársornak tengelyeit meghatározni, ha a sugársor két pár kapcsolt sugár $a, a_1; b, b_1$ által van adva.

40. Az előbbi szerkesztésnél T -nek oly helyzete lehet, hogy a TAA_1, TBB_1 pontokon átfektetett két körnek középpontja, és így valamennyi a TI pontokon átmenő kör középpontja, a pontsor tartóján fekszik. Ezen esetben a projicziáló sugársornak *valamennyi kapcsolt sugárpárja egymásra merőleges*, és ekkor egy különös involucziós sugársort kapunk, mely *czirkularis involucziós sugársornak* nevezetik. A *czirkularis involucziós sugársor*, minthogy a kapcsolt sugárpárok egymástól el vannak választva, *elliptikus természetű, vagyis nem bír valós kettőssugarakkal; a sornak két tetszőleges sugara oly szöveget képez, mint a hozzá kapcsolt sugarak*.

A fönnebbi szerkesztésből látható, hogy ha valamely involucziós sugársornak két pár kapcsolt sugara egymásra merőleges, úgy vala-

mennyi kapcsolt sugárpár merőleges egymásra, és a sugársor czirkularis. továbbá, hogy két pont létezik a síkban, melyből egy elliptikus természetű involucziós pontsor czirkularis involucziós sugársor által projiciáltatik; e pontok, az AA_1, BB_1, \dots közök, mint átmérő fölött leírt köröknek metszéspontjai.

De a hyperbolikus involucziós sugársornak szintén van egy különös esete, melynél t. i. *a kettőssugarak egymásra merőlegesek*. Ha ugyanis egy involucziós pontsor kettőspontjai G, H , és mi GH mint átmérő fölött leírt kör tetszőleges T pontjából projiciáljuk a pontsort, akkor a projiciáló sugarak oly involucziós sugársort képeznek, melynek kettőssugarai egymásra merőlegesek. Ezen involucziós sugársor, mely *egyenoldalu hyperbolikusnak* neveztetik, azon tulajdonsággal bír, hogy *kapcsolt sugara az egyes kettőssugarakkal egyenlő szöget képeznek*.

Az előbbiekből ugyanis tudjuk, hogy a két kettőssugar g, h és két tetszőleges kapcsolt sugár a, a_1 , oly helyzetű, hogy kettősviszonya $(gha_1) = -1$, vagyis:

$$\frac{\sin(ga)}{\sin(ha)} = -\frac{\sin(ga_1)}{\sin(ha_1)},$$

de minthogy g, h egymásra merőleges:

$$\sin(ha) = \cos(ga), \quad \sin(ha_1) = \cos(ga_1),$$

tehát

$$\operatorname{tg}(ga) = -\operatorname{tg}(ga_1).$$

Ha (ga) és (ga_1) alatt egyidejűleg a hegyes vagy tompa szöget értjük, melyet g, a -val, ill. g, a_1 -gyel képez, úgy azon egyenlet folytán: $(ga) = -(ga_1)$, vagyis a, a_1 kapcsolt sugarak g (és hasonlóképp h) kettőssugárral egyenlő szöget képeznek.

Az egyenoldalu hyperbolikus sugársor e tulajdonságából következik, hogy két tetszőleges sugara a, b oly szöget képez, mint a hozzájuk kapcsolt a_1, b_1 sugarak.

(gb) és (ga) ugyanis egyenlő $(b_1g), (a_1g)$ szöggel, tehát:

$$(ab) = (gb) - (ga) = (b_1g) - (a_1g) = -(a_1b_1).$$

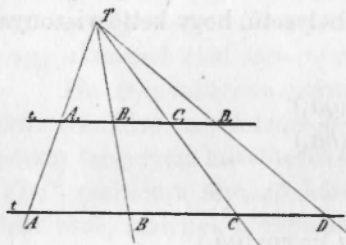
A különbség az egyenoldalu hyperbolikus és az előbbi czirkularis sugársor között, e közös tulajdonságot tekintve abban áll, hogy az őket alkotó projektív sugársorok az előbbinél *ellenkezőleg*, az utóbbinál *egyenlőképp* forgók. —

Könnyen belátható, hogy mindazon pontok, melyekből egy hyperbolikus természetű involúziós pontsor, egyenoldalú hyperbolikus sugársor által projicziáltatik, azon körön fekszenek, melynek egyik átmérője a pontsor kettőspontjai által határolt köz.

Megjegyzendő végre, hogy egy pontsor és véle projektív sugársor, involúziós helyzetű, ha a sugársor metszése a pontsor tartójával, az adott pontsorról involúziós helyzetű pontsort szolgáltat.

6. §. Különös projektív sorok.

41. Az előbbi §-ban láttuk, hogy közös tartón fekvő két projektív pontsor, valamint közös középponttal bíró két projektív sugársor különös helyzetet foglalhat el. Ugyanezen alkalommal tapasztaltuk, hogy maguk a projektív pont- és sugársorok megfelelő elemei, melyek



25. ábra.

az involúziós pont- és sugársort képezik egyszerűbb relációk által lesznek egybekapcsolva, mint azon reláció, mely általában a projektív vonatkozást kifejezi, t. i. hogy bármely négy elem kettősviszonya egyenlő a neki megfelelő négy elem kettősviszonyával. Így: a midőn az involúziós pontsor egyenoldalú hyperbolikus, az alkotó projektív pontsorok egyikének

két eleme oly távolságra van egymástól, mint a a megfelelő két elem a másik sorban; midőn az involúziós sugársor egyenoldalú hyperbolikus, vagy czirkularis, az alkotó projektív sugársorokban két sugár által képezett szög oly nagy, mint a megfelelő sugarak hajlásszöge.

A kérdés, melylyel most szándékunk foglalkozni, annak megállapítása, hogy *miképp egyszerűsülhet az általános projektív vonatkozás, különös esetekben?*

Ha mi t tartón fekvő A, B, C, D, \dots pontsort (25. ábra) tetszőleges T pontból t -vel párhuzamos t_1 egyenesre projicziáljuk $A_1, B_1, C_1, D_1, \dots$ -be, akkor $A, B, C, D, \dots; A_1, B_1, C_1, D_1, \dots$ projektív pontsorokra nézve, nemcsak négy tetszőleges elemnek kettősviszonya egyenlő a megfelelő négy elem kettősviszonyával, hanem az egyik pontsor bármely három elemének A, B, C -nek egyszerű viszonya $AB:BC$, már egyenlő a megfelelő A_1, B_1, C_1 elem egyszerű viszonyával $A_1B_1:B_1C_1$ -gyel, vagyis:

$$AB : BC = A_1B_1 : B_1C_1.$$

Ezen arányból, és a hasonló képzésű

$$BC : CD = B_1C_1 : C_1D_1$$

arányból következik:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \dots,$$

mely már kifejezi, hogy az *ily projektív pontsoroknál a megfelelő közök viszonya állandó*. Ily projektív pontsorok: *hasonlóan-projektív* pontsoroknak neveztetnek.

Mint ezen pontsoroknak perspektív helyzetéből kitűnik, az egyik pontsor végtelen távol fekvő pontjának a másikban szintén végtelen távol fekvő pont felel meg, vagy más szóval kifejezve: *ezen projektív pontsoroknak ellentpontjai végtelenben vannak*.

Azonban fordítva is kimutatható: *ha két projektív pontsor ellentpontjai R, Q_1 , végtelenben vannak, akkor a megfelelő közök viszonya állandó, és így a pontsorok: hasonlóan-projektívek*.

($ACLR$) = ($A_1C_1B_1R_{1\infty}$)-ből ugyanis következik:

$$\frac{AB}{CB} \cdot \frac{CR}{AR} = \frac{A_1B_1}{C_1B_1} \cdot \frac{C_1R_{1\infty}}{A_1R_{1\infty}},$$

és minthogy $\frac{CR}{AR}$, $\frac{C_1R_{1\infty}}{A_1R_{1\infty}}$ viszonyok határértéke = 1, mert R és $R_{1\infty}$ végtelen távol van:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CB}{C_1B_1},$$

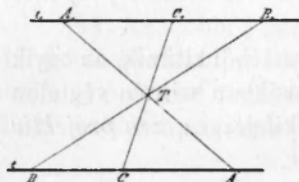
vagyis a megfelelő közök viszonya állandó.

Ezen egyszerű reláció következtében világos, hogy a *hasonlóan-projektív pontsorok meghatározásához elégséges két megfelelő pontpár ismerete*. —

Ha t_1 tartó végtelen távol fekvőnek vétetik, tehát $A_1B_1C_1 \dots$ pontok, az $ABC \dots$ pontsor projekciálósugarainak végtelen távol fekvő pontjai: $ABC \dots, A_1B_1C_1 \dots$ pontsorokat szintén hasonlóan-projektíveknek tekinthetjük, mert t_1 és t metszéspontjának, vagyis t végtelen távolban fekvő pontjának megfelelő pontja az egyik és másik pontsorban, *t. i. a két ellentpont, végtelen távol van*.

42. A hasonlóan-projektív pontsor egy speciális esete áll elő,

ha t_1 tartót (26. ábra) t -vel párhuzamosan, a projekciáló sugársor T középpontjától ép oly távolságra vesszük fel, mint T -nek távolsága az eredeti pontsor t tartójától. Ekkor ugyanis az egymásnak megfelelő közök egymással egyenlők, tehát az egyik pontsor két tetszőleges pontjának távolsága egyenlő a megfelelő pontok távolságával. Ily projektív pontsorokat *egyenlően-projektív*, vagy *összeillő* pontsoroknak nevezik, és meghatározásukra *egy* pont és megfelelő pontjának ismerete szükséges, ha azonkívül még adva van, hogy egy másik pontnak megfelelő pontja a másik tartó mely részén fekszik. —



26. ábra.

Két ugyanazon t tartón fekvő hasonlóan projektív pontsornak A, B, \dots ; A_1, B_1, \dots -nek egyik kettőspontja K , a tartó végtelen távol fekvő pontja; a másik kettőspont I , a 25-dik pontban tanult szerkesztés folytán következőképp található: t -vel párhuzamos egyenes két tetszőleges T, T_1 pontját összekötjük A_1, B_1 , illetve A, B -vel; $|TA_1|, |T_1A|$, és $|TB_1|, |T_1B|$, sugarak A_2 és B , metszőpontját összekötő $|A_2B_2|$ egyenes t -t a keresett második kettőspontban I -ben metszi.

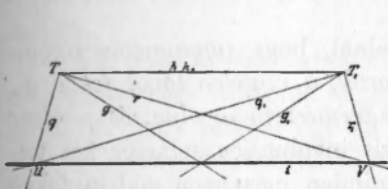
Ha ezen második kettőspont szintén végtelen távol van, a mi csak akkor következhetik be, ha a pontsorok egyenlőképp haladók, úgy a két pontsor egyenlően-projektív. Viszont: közös tartón fekvő egyenlően-projektív pontsorok egyik vagy mindkét kettőspontja végtelen távol van a szerint, a mint a pontsorok ellenkezőleg vagy egyenlőképp haladók; az első esetben a végesben fekvő kettőspont felezi a megfelelő pontokkal határolt közöket, tehát a pontsorok egyenoldalú hiperbolikus természetű involúziós pontsört képeznek.

43. Hátra volna még azon eset megvizsgálása, a midőn t_1 egyenes, t pontsört projekciáló sugársornak T középpontján megy át és t -t metszi. t pontsor mindegyik pontjának projekciója T -ből t_1 -re maga T pont, míg t, t_1 metszőpontjának (t, t_1) -nek projekciója, mint-hogy projekciáló sugara t_1 egyenes, bármely ezen t_1 -en fekvő pont lehet. A két projektív pontsor tehát jelen esetben oly különlegességet mutat, hogy az egyik (t) pontsor minden pontjának a másik (t_1) pontsorban csak egy pont (T) felel meg, és hasonlóképp a második (t_1) pontsor mindegyik pontjának megfelelő pontja az elsőben (t -ben) szintén egy pont (t, t_1 metszőpontja). Ily különös vonatkozású projektív pontsorok *parabolikus* nevet viselnek. — Ha a projekciáló sugársor közép-

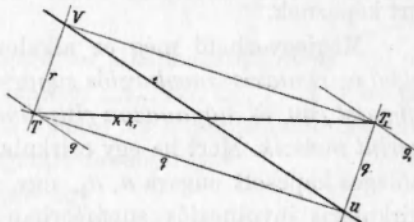
pontja mindkét tartón fekszik, tehát azoknak metszéspontja: akkor az előbbi eset áll elő, csakhogy azon különös pontok, melyeknek az egyik és másik pontsor valamennyi pontja megfelel: egybeesnek.

44. Vegyünk most két sugársort T, T_1 középponttal tekintetbe, melyeket ismét perspektív helyzetben levőknek képzelünk. A perspektív tengely következő különös helyzetet foglalhat el a középpontokhoz képest: a) párhuzamos TT_1 egyenessel, vagy átmegy TT_1 köz felező pontján; b) végtelen távolba kerülhet, vagy merőleges TT_1 köz felező pontjában TT_1 -re; c) átmegy az egyik vagy mindkét középponton.

a) Ha a perspektív tengely párhuzamos TT_1 -gyel, vagy TT_1 köz felezőpontján megy át: a sugársorok projektív vonatkozása nem egyszerűsül, mert bármily két projektív sugársor ezen helyzetbe hozható, ha a megfelelő hatványsugarak egyikét vagy másikat helyezzük egymásra; még pedig az egyenlőkép forgó sugársoroknál a perspektív



27. ábra.



27a. ábra.

tengely párhuzamos lesz TT_1 -gyel, ellenkezőleg forgó sugársoroknál, TT_1 köz felező pontján megy át.

Ha ugyanis (27., 27a. ábra) két projektív sugársor h, h_1 hatványsugarait egymásra helyezzük, úgy $q, r; q_1, r_1$ megfelelő merőleges sugárpárok közül q, r_1 és q_1, r egyenlő szöget képez a közös $h=h_1$ -gyel; ennél fogva q, q_1 és r, r_1 sugarak U, V metszéspontjait összekötő egyenes vagy párhuzamos $h=h_1$ -gyel, vagy pedig átmegy TT_1 köz felezőpontján, a szerint, a mint a sorok egyenlőkép vagy ellenkezőleg forgók. A másik két megfelelő hatványsugár g, g_1 az első esetben UV köz felezőpontján megy át, a másodikban UV egyenessel párhuzamos.

b) A midőn a perspektív tengely végtelenbe távozik, tehát a síknak végtelen távol levő egyenese, g_∞ (3), vagy TT_1 -re a felezőpontban merőlegesen álló egyenes a sugársorok már azon egyszerű vonatkozásban állanak egymáshoz, hogy két tetszőleges sugár hajlásszöge az egyik sugársorban, egyenlő a megfelelő sugarak hajlásszögé-

vel a másikban. Ily két sugársor *egyenlően-projektív sugársornak* nevezetük és meghatározásához a forgás értelmének és *egy* megfelelő sugárpár helyzetének ismerete szükséges.

Ha ellenkezőleg forgó és egyenlően projektív sugársorok középpontjukkal egymásra helyeztetnek, úgy azok szükségkép involúziós helyzetűek, mert ha az első sugársor tetszőleges a sugarának megfelel a_1 , és az első sugársor azon b sugarának, mely a_1 -ben van, megfelel b_1 , úgy az (ab) , (b_1a_1) szögek egyenlősége folytán b_1 is össze esik a -val. A sugársorok tehát *egyenoldalú hyperbolikus* természetű involúziós sugársort alkotnak.

Ha ellenben egyenlőkép forgó és egyenlően-projektív sugársorok középpontjukkal egymásra helyeztetnek, úgy ezek általában nem lesznek involúziós helyzetűek, csupán akkor, a midőn a megfelelő sugárpárok közül egy pár, tehát valamennyi egymásra merőleges. Az egyenlően-projektív sugársorok ezen esetben *czirkuláris* involúziós sugársort képeznek.

Megjegyezhető még ez alkalommal, hogy *ugyanazon síkban fekvő czirkularis involúziós sugársorok, a végtelen távol fekvő g_∞ egyenest egy és ugyanazon elliptikus természetű involúziós pontsor szerint metszik*. Mert ha egy czirkularis involúziós sugársor két tetszőleges kapcsolt sugara a , a_1 , úgy minden más azon síkban fekvő czirkularis involúziós sugársorban létezik a , a_1 -gyel párhuzamos sugárpár, ezek tehát mindannyian a sík végtelen távol fekvő g_∞ egyenesét ugyanazon kapcsolt pontpárban metszik. A sík végtelen távol levő egyenesén ezen különös involúziós pontsor *képzetes kettős-pontjait a végtelen távol fekvő képzetes körpontoknak*, vagy röviden, *képzetes körpontoknak* nevezik.

c) Ha végre a perspektív tengely az egyik, pl. T sugársor középpontján megy át, akkor T_1 sugársor mindegyik sugarának T -ben TT_1 sugár felel meg, kivéven T_1 sugársor T_1T sugarát, melynek T sugársor bármely sugara megfelelhet. Ezen *parabolikus* névvel jelzett projektív sugársorok tehát oly tulajdonságúak, hogy az egyik sugársor bármely sugarának *egy* sugár felel meg a másikban, és viszont a második sugársor sugarainak, *egy* sugár felel meg az elsőben.

Ha a perspektív tengely mindkét középponton megy át, akkor a sugársorok szintén parabolikusak, csak hogy a középpontot összekötő egyenesben egyesül azon két különös sugár.

45. Szólanunk kell végre még oly sugársorokról is, melyeknek középpontja végtelen távol van.

áthelyezni, mely egy adott, a pontsorral projektív a, b, c, \dots sugársorral egyenlően projektív.

Ha ugyanis A, B és B, C pontokon át oly köröket írunk le, melyeknek AB és BC húrok fölött nyugvó kerületi szögei egyenlők ab és bc sugarak hajlásszögeivel, úgy ezeknek metszéspontja közül egyik a kívánt sugársor középpontja. E feladatnak szintén két megoldása van.

7. §. Harmonikus és involúziós elemekre vonatkozó méretes relációk és szerkesztések.

47. Involúziós pont- és sugársoroknál alkalmunk volt látni, hogy a kettössugarak és a kapcsolt elempárok harmonikus helyzetűek, vagy mint mondani szokás, harmonikusan vannak elválasztva. Harmonikus helyzetű pontok és sugarak a synthetikai geometriában nagy fontossággal bírnak, miért is ezeknek tulajdonságaival, szerkesztésével és a velök kapcsolatos relációkkal itt részletesen akarunk foglalkozni.

Két egymáshoz rendelt pont- vagy sugárpárról A, B és C, D -ről azt mondjuk, hogy harmonikus helyzetű, ha kettős viszonyuk egyenlő -1 -gyel, vagyis: $(ABCD) = -1$.

Tudjuk (5), hogy egy pont- vagy sugársor bármely négy elemére $ABCD$ -re nézve:

$$(ABCD) = (BADC) = (CDAB) = (DCBA),$$

továbbá hogy

$$(ABCD) = 1 : (ABDC).$$

Ha tehát $ABCD$ harmonikus helyzetű négy elem, úgy nemcsak $(ABCD) = -1$, hanem egyszersmind:

$$(ABDC) = (BACD) = (DCAB) = (CDBA) = -1.$$

Mig tehát általában a kettősviszony értéke megváltozik, ha csak az egyik, vagy csak a másik egymáshoz rendelt elempár $A, B; C, D$ elemeit cseréljük fel $(ABCD)$ symbolumban: harmonikus helyzetű elempárodnál ezen csere nem bír befolyással a kettősviszony értékére, mert mint láttuk: $(ABCD) = (BACD) = (ABDC)$ stb.

Harmonikus helyzetű elemeknél az egymáshoz rendelteteket közönségesen egymáshoz *harmonikusan rendelt*, vagy egymáshoz *kapcsolt* elemeknek szokták nevezni.

Két kapcsolt pontnak A , B -nek távolsága könnyen kifejezhető a másik kapcsolt elempárnak C , D -nek, az elsőeknek egyike vagy másikatól mért távolságai által.

$$(ABCD) = -1$$

egyenletből ugyanis

$$AC \cdot BD + AD \cdot BC = 0,$$

vagy

$$AC \cdot (AD - AB) + AD \cdot (AC - AB) = 0,$$

miből

$$2 AC \cdot AD = AB \cdot (AC + AD),$$

és

$$\frac{1}{AB} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{AC} + \frac{1}{AD} \right),$$

vagy A -t B -vel fölcserélve :

$$\frac{1}{BA} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{BC} + \frac{1}{BD} \right).$$

Ha tekintetbe vesszük, hogy két mennyiség α , β harmonikus középarányosa γ , azon mennyiség, melynek reciprok értéke α , β reciprok értékeinek számtani középarányosa, következik: *négy harmonikus helyzetű pont közül két kapcsolt pontnak távolsága, harmonikus középarányos, a másik két kapcsolt pontnak az előbbieketől mért távolságai között.*

Az előbbihez hasonló reláció létezik négy harmonikus helyzetű sugár a , b , c , d között is.

$$(abcd) = -1 \text{-ből ugyanis}$$

$$\sin(ac) \cdot \sin(bd) + \sin(ad) \cdot \sin(bc) = 0,$$

tehát

$$\sin(ac) \cdot \sin[(ad) - (ab)] + \sin(ad) \cdot \sin[(ac) - (ab)] = 0,$$

miből egyszerű úton következik

$$\operatorname{tg}(ab) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\operatorname{tg}(ac)} + \frac{1}{\operatorname{tg}(ad)} \right).$$

Egy más tulajdonsága a harmonikus helyzetű pontoknak következő előbb már előfordult reláció:

$$\overline{MA}^2 = \overline{MB}^2 = MC \cdot MD$$

által van adva, hol M pont A, B kapcsolt pontok távolságának felező pontja, C, D pedig a másik kapcsolt pontpárt jelenti, és mely

$$AC \cdot BD + AD \cdot BC = (AM + MC) \cdot (MD - MB) + \\ + (AM + MD) \cdot (MC - MB) = 0$$

egyenletből egyszerűsítés után kapható. Ezen reláció következőkép fejezhető ki: két kapcsolt pont távolságának fele, geometriai közép-arányos a másik két pontnak az előbbieket felezőpontjától mért távolságai között.

Ehhez hasonló tétel vezethető le négy harmonikus sugárra a, b, c, d -re nézve is, ha

$$\sin(ac) \cdot \sin(bd) + \sin(ad) \cdot \sin(bc) = 0$$

egyenletben (ac) , stb. szögek helyett, a velük egymértékű

$$(ac) = (am) + (mc), (bd) = (md) - (mb), \\ (ad) = (am) + (md), (bc) = (mc) - (mb)$$

kifejezéseket helyettesítjük és az egyenletet annak tekintetbe vételével egyszerűsítjük, hogy m , az a, b sugarak egyik szögének felezője. Az egyszerűsítés után ily alakú relációt kapunk:

$$tg^2(ma) = tg^2(mb) = tg(mc) \cdot tg(md).$$

48. Harmonikus elemeknek ezen, és az előbbi $\overline{MA}^2 = \overline{MB}^2 = MC \cdot MD$ egyenlet által kifejezett összefüggéséből következtethető, hogy ha C pont M -ben van, vagyis $MC=0$, úgy $MD=\infty$, tehát D -nek végtelen távol kell lenni: és ha C pont B , vagy A -ban fekszik, D -nek is ugyanazon pontba kell kerülni. Hasonlóképp ha c sugár a, b kapcsolt sugarak által képezett szög egyik felezőjében m -ben van, $tg(mc)=0$, és $tg(md)=\infty$, tehát d -nek m -re merőlegesnek, és így (ab) szög másik felezőjében kell lenni; míg ha c sugár b , vagy a -ban van, d -nek is ugyanazon sugárba kell feküdni. Ennélfogva:

«Ha négy harmonikus helyzetű

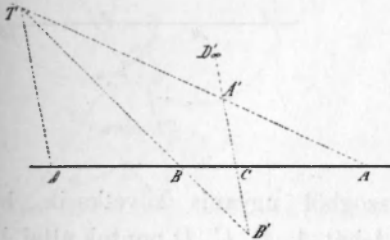
$ABCD$ pont közül egyik, pl. C , felezi A, B kapcsolt pontpár által határolt közt, úgy C -hez kapcsolt D pont végtelen távol fekszik, és fordítva: ha négy harmonikus pont közül egyik végtelen távol fek-

$abcd$ sugár közül egyik, pl. c sugár a, b kapcsolt sugarak egyik szögfelezőjében van, úgy c -hez kapcsolt d sugárnak a másik szögfelezőben kell feküdni; míg ha c sugár a , vagy b -ben van, a hozzá

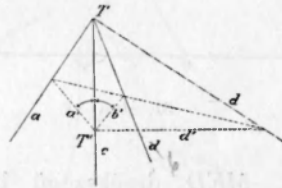
ezik, akkor a hozzá kapcsolt pont felezi a másik kettő által határolt közt; továbbá ha C pont A, B kapcsolt pontok egyikében van, úgy C -hez kapcsolt D pont szintén ott lesz.»

kapcsolt d sugár szintén azon sugárba kerül. De fordítva is következik, mert a szögfelezők egymásra merőlegesek: ha négy harmonikus sugár közül egy pár kapcsolt sugár egymásra merőleges, úgy ezek felezik a másik két sugár által képezett szögeket».

E tételek alapján t egyenesen fekvő ABC pontokhoz a negyedik harmonikus helyzetű C -hez kapcsolt pontot következőkép szerkeszthetjük: C ponton (29. ábra) átmenő tetszőleges egyenesen C -től



29. ábra.

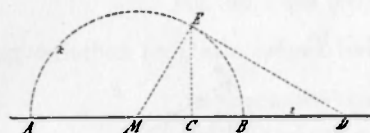


30. ábra.

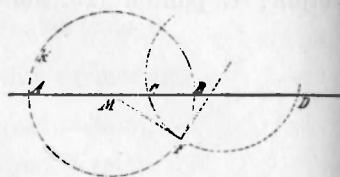
egyenlő távolságra felvesszünk két pontot A', B' -et és $|AA'| \parallel |BB'|$ egyeneseknek T metszéspontján át párhuzamost húzunk $|A'CB'|$ -hez, mely t -t a keresett negyedik harmonikus pontban D -ben metszi. A', B', C pontok és a rajtuk átmenő egyenes végtelen távol fekvő D_∞ pontja ugyanis, az előbbieket szerint, négy harmonikus helyzetű pont; ezeknek projekciója T -ből t -re, vagyis $ABCD$, szintén harmonikus helyzetű négy pont lesz.

Hasonlókép lehet a jobb oldalon álló tétel alapján T ponton átmenő abc sugarakhoz (30. ábra), c -től a, b által harmonikusan elválasztott d sugarat szerkeszteni, ha c -nek tetszőleges T' pontján át, c -hez egyenlő szög alatt hajló a', b' és c -re merőleges d' sugarat húzunk és T -t azon ponttal összekötjük, melyben d' egyenes a, a' és b, b' metszéspontjainak összekötő egyenesét metszi. De tekintettel a bal oldalon álló tételre így is eljárhatunk: a, b -t tetszőleges c -vel párhuzamos egyenes által metszszük A, B -ben; AB felező pontján D -n átmenő $|TD| = d$ sugár a keresett negyedik harmonikus, mert $|AB|$ egyenes $abcd$ sugarakat, harmonikus helyzetű pontok szerint metszi.

C , vagy D -hez kapcsolt negyedik harmonikus pontot, ha még AB kapcsolt pontpár adva van $\overline{MA}^2 = \overline{MB}^2 = \overline{MC} \cdot \overline{MD}$ reláció alapján következőkép szerkeszthetjük: AB pontokon át k kört írunk le (31. ábra), melynek középpontja AB köz felezőpontja M . Ha az adott C , AB pontokat elválasztja, úgy C -ben AB -re merőlegesen álló egyenesnek és k körnek E metszőpontjában érintőt húzunk k -hoz, mely ABC egyenest a negyedik harmonikus pontban D -ben metszi. Ha ellenben az adott D pont AB közön kívül fekszik, úgy D -ből k -hoz vont érintő érintőpontjából AB -re merőlegest bocsátunk, melynek C talppontja A, B, D -hez negyedik harmonikus pont.



31. ábra.



32. ábra.

MED derékszögű háromszögből ugyanis következik, hogy $\overline{ME}^2 = \overline{MA}^2 = \overline{MB}^2 = \overline{MC} \cdot \overline{MD}$, tehát A, B, C, D pontok által harmonikusan vannak elválasztva.

Ugyanezen $\overline{MA}^2 = \overline{MB}^2 = \overline{MC} \cdot \overline{MD}$ reláció alapján C, D kapcsolt pontpár és AB vonaldarab M felezőpontjából, A, B pontpár szerkeszthető.

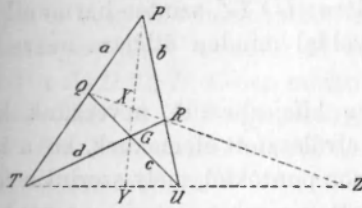
Ha mi (32. ábra) CD -n átmenő tetszőleges körhöz M -ből érintőt húzunk, mely azt F pontban érinti, úgy az MF érintő hosszával M -ből leírt kör CD egyenest, C, D -től harmonikusan elválasztott A, B pontokban metszi, mert $\overline{MA}^2 = \overline{MB}^2 = \overline{MF}^2 = \overline{MC} \cdot \overline{MD}$.

ABF, CDF körök egymást derékszög alatt metszik, és mivel bármely két egymást X, Y pontban derékszög alatt metsző körre nézve, melyek egyikének tetszőleges AMB átmérője a másikat C, D -ben metszi: $\overline{MA}^2 = \overline{MB}^2 = \overline{MX}^2 = \overline{MY}^2 = \overline{MC} \cdot \overline{MD}$, azért: két egymást derékszög alatt metsző kör bármelyikének átmérője, a körök által harmonikus pontokban metszetik és fordítva, ha egy k körnek átmérőjén AB -n oly két pontot C, D -t szerkesztünk, mely az átmérőt harmonikusan osztja, akkor mindazon körök, melyek C, D pontokon átmennek k -t derékszög alatt metszik. Ebből következik: (33.) ha g egyenes pontjaiból, mint középpontokból köröket írunk le, melyek egy

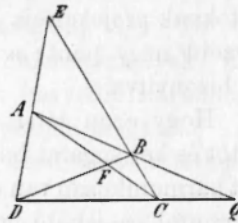
tetszőleges k kört derékszög alatt metszenek, akkor ezen körök g egyenesét egy involúciós pontsor kapcsolt pontpárjaiban fogják metszeni; ezen involúciós pontsor hyperbolikus, parabolikus vagy elliptikus, a szerint, amint k metszi, érinti, vagy nem metszi g egyenest.

49. Mindezen szerkesztések, melyek a negyedik harmonikus pont, vagy sugár felkeresésénél alkalmaztattak, feltételezik a körző használatát. Minthogy azonban csak egy elem létezik, mely két elemet egy harmadiktól harmonikusan választ el: ezen egy elem felkeresése első fokú feladat s mint ilyen, csupán a vonalzó használatával is megoldható.

Hogy a negyedik harmonikus pont, vagy sugár szerkesztését csupán vonalzóval megmutathassuk, ismerni kell a synth. geometriában nagy fontossággal bíró teljes négyszöglet és négyszöget.



33. ábra.



34. ábra.

Teljes négyszöglet, vagy röviden négyszöglet képeztetik, négy ugyanazon síkban fekvő a, b, c, d egyenes által, melyek közül kettőnél több nem megy ugyanazon ponton át. Ezen egyeneseket *oldaloknak*, két-két oldal metszéspontját szögpontnak (33. ábrában: P, Q, R, G, T, U), két oly szögpontot, mely nem fekszik ugyanazon oldalon (P, G ; Q, R ; T, U) *átellenes szögpontoknak*, végre két átellenes szögpont összekötő egyenesét *átlónak* nevezik. A négyszögletnek tehát van: négy oldala, hárompár átellenes szögpontja, és három átlója.

Hasonlóképp a teljes négyszög vagy röviden: négyszög meg van határozva négy ugyanazon síkban fekvő pont (34. ábrában: A, B, C, D) által, melyek közül kettőnél több nem fekszik egyenesen. E pontok a négyszög *szögpontjainak*; két-két szögpont összekötő egyenesét (AB, AC, AD, BC, BD, CD) *oldalnak*; két oly oldal, mely nem metszi egymást egy szögpontban *átellenes oldalnak* (AB, CD ; AC, BD ; AD, BC), végre két átellenes oldal metszéspontja (E, F, Q) *átlópontoknak* neveztetik.

Négy harmonikus pont szerkesztése csupán vonalzóval a teljes négyoldal következő tulajdonságán alapszik :

A teljes négyoldal bármely átlójának metszőpontjai a másik két átlóval, azon első átlón fekvő szögpontoktól harmonikusan vannak elválasztva.

Hogy ezt bebizonyítsuk, képzeljük (33. ábra) $|UP|$, $|UG|$, $|UT|$ sugarakhoz a negyedik UT -hez kapcsolt harmonikus sugarat, valamint $|TP|$, $|TG|$, $|TU$ -hoz a negyedik TU -hoz kapcsolt harmonikus sugarat szerkesztve; e szerkesztett sugarak egymást PG átló azon pontjában fogják metszeni, mely Y -t P , G -től harmonikusan választja el. E sugarak azonban QR átlót is egy és ugyanazon pontban metszik, mely Z -t Q , R -től harmonikusan választja el, miért is a szerkesztett negyedik harmonikus sugarak PG és QR átlók X metszőpontján mennek át. Minthogy továbbá $RXQZ$ harmonikus helyzetű pontoknak projekciója P -ből TU átlóra: $UYTZ$, szintén harmonikus helyzetű négy pont: a tétel a négyoldal minden átlójára nézve be van bizonyítva.

Hogy azon tételt egyszerűbben kifejezhessük, nevezzünk két pontot és két sugarat harmonikusan elválasztott elemeknek, ha a két pont harmonikusan van elválasztva azon pontoktól, mely szerint a felvett pontok összekötő egyenese a felvett sugarakat metszi, — továbbá: egy pontot és egy sugarat két pont által harmonikusan elválasztott elemeknek, ha a három pont egy egyenesben fekszik, melynek metszőpontja a sugárral az első pontot a második kettőtől harmonikusan elválasztja, — végre: egy pontot és egy sugarat két sugár által harmonikusan elválasztott elemeknek, ha a három sugár egymást egy pontban metszi, melynek összekötő egyenese a felvett ponttal, az első sugarat a másik kettőtől harmonikusan választja el.

Ennélfogva mondhatjuk :

«A teljes négyoldal bármely átlóján fekvő szögpontok, a másik két átlót harmonikusan választják el, vagy mi ugyanazt fejezi ki: a teljes négyoldal bármely átlója, a másik két átló metszőpontját, a négyoldal két pár oldalától harmonikusan választja el.»

«A teljes négyszög bármely átlóspontján átmenő oldalak, a másik két átlósponttól harmonikusan vannak elválasztva, vagy a mi ugyanazt mondja: a teljes négyszög bármely átlóspontja, a másik két átlóspont összekötő egyenesét a négyszög két pár szögpontjától harmonikusan választja el.»

Hogy a jobb oldalon álló tételt a mellette levő tétel alapján bebizonyítsuk, vegyük tekintetbe, hogy AF , EB , AE , BF négyoldal EF átlójának metszéspontja AB -vel Q -t A , B -től harmonikusan választja el, tehát $|EA|$, $|EB|$, $|EF|$, $|EQ|$ négy harmonikus sugár, és így EA , EB oldalak F , Q átlópontoktól harmonikusan vannak elválasztva. Ugyanez kimutatható QA , QD oldalak és E , F átlópontokra, valamint FA , FB oldalak és E , Q átlópontokra nézve is.

Ezen tételek alapján T , U , Y ponthoz a negyedik Y -hoz kapcsolt harmonikus pontot egyedül a vonalzó használatával következőkép szerkesztjük: Y ponton át egy, T ponton át két tetszőleges egyenest húzunk, melyek egymást P , G pontokban metszik; $|UG|$, $|TP|$ és $|UP|$, $|TG|$ egyeneseknek Q és R közös pontján átmenő QR egyenes TYU -t a kívánt negyedik harmonikus pontban, Z -ben metszi.

Ha pedig $|EA|$, $|EB|$, $|EF|$ sugarakhoz akarjuk az $|EF|$ -hez kapcsolt negyedik harmonikus sugarat szerkeszteni, úgy $|EF|$ -nek tetszőleges, pl. F pontján át két egyenest húzunk, melyek $|EA|$, $|EB|$ -t A , D ill. B , C -ben metszik; a keresett negyedik harmonikus sugár: $|AB|$ és $|DC|$ egyeneseknek Q metszéspontján megy át.

50. Harmonikus pontok és sugaraknak alkalmazását láthatjuk a következő tételnél.

«Ha egy háromszög síkjának tetszőleges pontját annak szögpontjaival összekötjük, akkor az összekötő egyenesektől az oldalak által harmonikusan elválasztott sugarak a háromszög oldalait, egyenesen fekvő pontokban metszik. Ezen egyenes a felvett pont *harmonikus polárisának* nevezetik a háromszöget illetőleg.»

«Ha egy háromszög oldalain oly pontokat szerkesztünk, melyek a háromszög szögpontjait, egy tetszőleges egyenes és az oldalak metszéspontjától harmonikusan elválasztja, akkor a szerkesztett pontoknak összekötő egyenesei a háromszögoldaloknak átellenes szögpontjaival, egymást egy pontban metszik. E pont a felvett egyenes *harmonikus polusának* nevezetik a háromszöget illetőleg.»

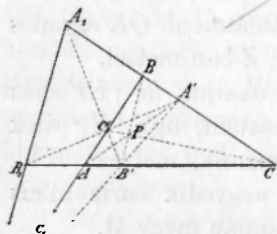
Hogy a baloldalon álló tételt bebizonyítsuk, nevezzük (35. ábra) a háromszög szögpontjait A , B , C -nek, a háromszög síkjának tetszőleges pontját P -nek, $|PA|$, $|PB|$, $|PC|$ egyenesek metszéspontját BC , CA , AB oldalakkal A' , B' , C' -nek, végre e pontoktól, a háromszög szögpontjai által harmonikusan elválasztott pontokat A_1 , B_1 , C_1 -nek.

Minthogy $(A'A_1CB) = (B'B_1CA) = -1$:

$|A'B'|$, $|A_1B_1|$, $|BA|$ egyenesek egymást egy pontban metszik, mely tekintettel $PA'CB'$ teljes négyszögre, C' -et A , B pontokból harmonikusan elválasztja, tehát C_1 pont.

$(A'A_1CB) = (B_1B'CA)$ relációból és $A'B'A_1B_1$ teljes négyszögből látható, hogy nemcsak A' , B' , C_1 , hanem B' , C' , A_1 ; C' , A' , B_1 pontok is egyenesben fekszenek és így $|A_1B_1C_1|$ egyenes egyszerismind harmonikus polarisa P -nek $A'B'C'$ háromszöget illetőleg.

Jegyzet. A jobb oldalon álló tételnek speciális esete a következő: a háromszög-súlyvonalai egymást egy pontban metszik (?).



35. ábra.

51. Láttuk az előbbieken, hogy négy harmonikus helyzetű pont vagy sugár által határolt közök, illetve bezárt szögek között egyszerű relációk léteznek, melyeknek alapján azoknak szerkesztése egyszerű módon eszközölhető. Hasonlóképp lehet involúziós pont- vagy sugársorok, mint speciális helyzetű projektív sorok, kapcsolt elemei által határolt közök vagy bezárt szögek között egyszerű relációkat levezetni, és

azokból, ha az involúziós sorok meghatározásához elegendő elemek advák, az involúziós sorokat szerkeszteni.

Tudjuk, hogy két kapcsolt pontpár A, A_1 ; B, B_1 által az involúziós pontsor, és így minden C pontnak kapcsolt C_1 pontja, meg van határozva. Kell tehát, hogy az involúziós pontsor három kapcsolt pontpárja: A, A_1 ; B, B_1 ; C, C_1 , — melyet *involúziót képező hat pontnak* is neveznek — bizonyos relációk képzésére vezessen, melyek az általuk határolt közök közt léteznek.

Kiindulhatunk az involúziós pontsorok ama tulajdonságából, hogy két kapcsolt pontnak A, A_1 , vagy B, B_1 -nek, a középponttól M -től mért távolságai állandó szorzatot adnak, vagyis $MB \cdot MB_1 = MA \cdot MA_1$ egyenletből, mely így is írható:

$$(MA + AB) \cdot (MA + AB_1) = MA \cdot MA_1.$$

Ebből következik:

$$\begin{aligned} AB \cdot AB_1 &= MA \cdot (MA_1 - MA - AB - AB_1) \\ &= MA \cdot (BA_1 + B_1A) = MA \cdot (BA + B_1A_1); \end{aligned}$$

és ha ezen egyenletben A -t, A_1 -gyel felcseréljük, úgy:

$$A_1B \cdot A_1B_1 = MA_1 \cdot (BA + B_1A_1) = MA_1 \cdot (BA_1 + B_1A).$$

A két utóbbi egyenlet egymással osztva:

$$\frac{AB \cdot AB_1}{A_1B \cdot A_1B_1} = \frac{MA}{MA_1}$$

egyszerű relációhoz vezet.

Ha itt B, B_1 kapcsolt pontok C, C_1 által cseréltetnek fel, az egyenlet jobb oldala nem változik, és ezért

$$1. \quad \frac{AB \cdot AB_1}{A_1B \cdot A_1B_1} = \frac{AC \cdot AC_1}{A_1C \cdot A_1C_1}$$

Ezen, involúciót képező hat pont kölcsönös távolságai között fönálló reláció, az előbbinek általánosítása, tekintettel arra, hogy ha C, M -ben van, úgy C_1 végtelenbe kerül, vagyis $AC_1 = A_1C_1 = \infty$.

Ha 1.-ben A, A_1 -et előbb B, B_1 -gyel, aztán C, C_1 -gyel kölcsönösen felcseréljük, úgy

$$2. \quad \frac{BC \cdot BC_1}{B_1C \cdot B_1C_1} = \frac{BA \cdot BA_1}{B_1A \cdot B_1A_1},$$

$$3. \quad \frac{CA \cdot CA_1}{C_1A \cdot C_1A_1} = \frac{CB \cdot CB_1}{C_1B \cdot C_1B_1}$$

egyenleteket nyerjük, melyek alakjukra nézve az előbbivel megegyeznek.

Ha az 1., 2., 3. egyenleteket így, a mint itt felírva vannak, egymással szorozzuk és a lehetséges rövidítéseket elvégezzük,

$$\left(\frac{AB_1 \cdot BC_1 \cdot CA_1}{A_1B \cdot B_1C \cdot C_1A} \right)^2 = 1$$

alakú egyenletet nyerjük, melyből

$$\frac{AB_1 \cdot BC_1 \cdot CA_1}{A_1B \cdot B_1C \cdot C_1A} = \pm 1.$$

Mint hogy azonban ezen egyenlet baloldala negatív jelű lesz, ha feltételezzük, hogy C, A -val és C_1, A_1 -gyel egyesül, vagyis

$$\frac{AB_1 \cdot BA_1 \cdot AA_1}{A_1B \cdot B_1A \cdot A_1A}$$

azonosan egyenlő -1 -gyel, a fönnebbi egyenletben csak a negatív előjelre nézve helyes, tehát:

$$4. \quad AB_1 \cdot BC_1 \cdot CA_1 = AC_1 \cdot BA_1 \cdot CB_1.$$

Hasonló három egyenletet kapunk még, ha 4.-ben A -t, A_1 -gyel, aztán B -t, B_1 -gyel, végre C -t, C_1 -gyel felcseréljük, ezek:

$$5. \quad \begin{cases} A_1B_1 \cdot B C_1 \cdot C A = A_1C_1 \cdot B A \cdot C B_1, \\ A B \cdot B_1C_1 \cdot C A_1 = A C_1 \cdot B_1A_1 \cdot C B, \\ AB_1 \cdot B C \cdot C_1A_1 = A C \cdot B A_1 \cdot C_1B_1. \end{cases}$$

Megjegyzendő, hogy az 1.—5. egyenletek az involúziós pontsoroknak ama tulajdonságából lettek levezetve, mely az involúziós pontsorok értelmezésének is tekinthető, t. i. hogy «oly (kapcsolt) pontpárok, melyeknek egy ponttól (középpontól) mért távolságai állandó szorzatot adnak, involúziós pontsort képeznek».

Azon egyenleteket azonban levezethetjük az involúziós pontsoroknak eredetileg adott értelmezéséből is, t. i. hogy «az involúziós pontsorok kapcsolt pontjai, két, ugyanazon tartón fekvő és ellenpontokkal egyesített projektív pontsor megfelelő pontjai».

Ha ezen tulajdonságból indulunk ki és tekintetbe vesszük, hogy a pontsor egyes pontjainak az egyik vagy másik pontsorban egy és ugyanazon pont felel meg, úgy:

$$(AA_1BC) = (A_1AB_1C_1) \text{ és } (ABA_1C_1) = (A_1B_1AC) \text{-ből}$$

egyszerűen 1. ill. 4. alatti egyenletet kapjuk. —

Hasonló egyenletek találhatóak involúziós sugársor három pár kapcsolt sugara $a, a_1; b, b_1; c, c_1$ által bezárt szögekre nézve is:

$$(aa_1bc) = (a_1ab_1c_1) \text{ és } (aba_1c_1) = (a_1b_1ac)$$

egyenletekből, nevezetesen:

$$\frac{\sin(a b) \cdot \sin(a b_1)}{\sin(a_1 b) \cdot \sin(a_1 b_1)} = \frac{\sin(a c) \cdot \sin(a c_1)}{\sin(a_1 c) \cdot \sin(a_1 c_1)}, \text{ és}$$

$$\sin(ab_1) \cdot \sin(bc_1) \cdot \sin(ca_1) = \sin(ac_1) \cdot \sin(ba_1) \cdot \sin(cb_1),$$

melyeknek elsejéhez még két, a másodikhoz még három hasonló alkotású egyenlet tartozik.

52. Két kapcsolt elempár által meghatározott involúziós sor tetszőleges eleméhez a kapcsolt elemet csupán vonalzó segítségével lehet szerkeszteni, mert ezen feladat, minthogy *egy* megoldás van, *elsőfoku*.

A szerkesztés következő tételeken alapszik:

Minden teljes négyszög hat oldala, tetszőlegesen egyenes által, involúciót képező hat pont szerint metszetik, melynél az átellenes oldalak metsző pontjai, kapcsolt pontok. (Desargues*-féle tétel.)

Minden teljes négyoldal hat szögpontja, tetszőlegesen ponttól involúciót képező hat sugár által, tetszőlegesen átellenes szögpontokat projicizáló sugarak, kapcsoltak.

Hogy ezt bebizonyítsuk, legyen

$PQRS$ szögpontok által adott négyszög (36. ábra) három átlópontja U, V, W , és ezen pontokon átmenő $PR, QS; PS, QR; PQ, SR$ átellenes oldalak metszőpontja t egyenessel A, A_1, B, B_1, C, C_1 . Ha most a négyszög bármely oldalán, pl. QS -en, fekvő szögpontokat, átlópontot és metszőpontot t -vel, vagyis Q, S, U, A_1 pontot a négyszög másik két szögpontjából P és R -ből, t -re projicizáljuk, úgy a projekciók C, B, A, A_1 és B_1, C_1, A, A_1 kettősviszonya egyenlő a projicizált pontok kettősviszonyával, tehát

$$(CBAA_1) = (B_1C_1AA_1) \text{ és mert}$$

$$(C_1B_1A_1A) = (B_1C_1AA_1) \text{ azért:}$$

$$(CBAA_1) = (C_1B_1A_1A).$$

$pqrs$ oldalak által adott teljes négyoldal (37. ábra) három átlója u, v, w , és ezen átlókon fekvő $(p, r), (q, s)$; ill. $(p, s), (q, r)$; $(p, q), (s, r)$ átellenes szögpontok projicizáló sugarai a sík tetszőlegesen T pontjából: $a, a_1; b, b_1; c, c_1$. Ha q, s oldalak metszőpontjából kiindul q, s, u, a_1 sugarak metszőpontjait p és r -rel T -ből projicizáljuk, úgy a projicizáló sugaraknak c, b, a, a_1 , ill. b_1, c_1, a, a_1 -nek kettősviszonya egyenlő $(qsua_1)$ -el, vagyis:

$$(cbaa_1) = (b_1c_1aa_1), \text{ és}$$

$$\text{mert } (c_1b_1a_1a) = (b_1c_1aa_1), \text{ azért:}$$

$$(cbaa_1) = (c_1b_1a_1a).$$

Ezen talált egyenletek már kifejezik, hogy $A, A_1; B, B_1; C, C_1$ pontok és $a, a_1; b, b_1; c, c_1$ sugarak involúciót képeznek. —

C -hez kapcsolt C_1 pontnak szerkesztése az $A, A_1; B, B_1$ kapcsolt pontok által adott involúziós pontok által ezek szerint következőképp történik: C -n átmenő tetszőlegesen egyenesen felveszünk két pontot P, Q -t és ezeket B, A illetve B_1, A_1 -gyel összekötjük; PB, QA_1 és PA, QB_1 egyenesek közös S, R pontján átfektetett egyenes a keresett C_1 ponton megy át.

Ugyanígy történik q -hez kapcsolt c_1 sugárnak szerkesztése az $a, a_1; b, b_1$ kapcsolt sugarak által meghatározott involúziós sugársorban.

* DESARGUES GERARD, 1593—1662.

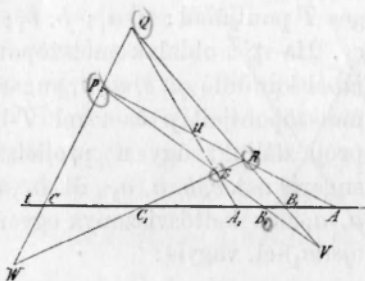


c -nek tetszőleges pontján át két egyenest p, q -t; p, a és q, b_1 , valamint p, b és q, a_1 közös pontjain átmenő r, s egyenesek egymást a keresett c_1 sugáron metszik. —

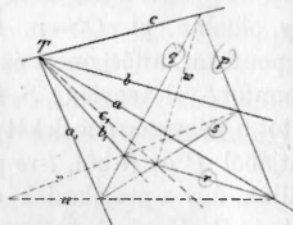
Megjegyezhető még, hogy a midőn a teljes négyszög oldalait metsző t egyenes a négyszög két átlópontján megy át, vagy a teljes négyoldal szögpontjait projicziáló sugarak két átló metszéspontjából indulnak ki, azon átlópontok, illetve ezen átlók a metszés, illetve projicziálás által származott involúciós sorok kettőspontjai lesznek.

A fönnebbi két tétel különben egybefoglalva így is kifejezhető:

Egy tetszőleges háromszög szögpontjait síkjának bármely pontjából projicziáló sugarak involúciós fekvésűek azon pontokkal, melyek szerint egy tetszőleges, a felvett ponton át nem menő egyenes, a háromszög oldalait metszi.



36. ábra.



37. ábra.

PQR háromszög szögpontjai S -ből $|SP|, |SQ|, |SR|$ sugarak által projicziáltatnak, mely sugarak QR, RP, PQ oldalaknak t -n fekvő pontjaival involúciós fekvésűek. — Hasonlóképp pqr háromszög szögpontjai T -ből oly három sugár által lesznek projicziálva, melyek involúciós fekvésűek a háromszögoldalak és s egyenes metszéspontjaival.

Két erre vonatkozó tapasztalati eredményt említünk még itt, melynek ismerete geometriai kutatásoknál gyakran szükséges, s mely annak megítélésére szolgál, hogy a teljes négyszög átellenes oldalai által kimetszett pontpárok, valamint a teljes négyoldal átellenes szögpontjait projicziáló sugárpárok hyperbolikus, vagy elliptikus természetű involúciós sornak kapcsolt elemei-e. Az eredmény következő:

Ha a teljes négyszög négy szögpontja közül egyik pont sem fekszik a többi három által meghatározott háromszög kerületén belől, akkor a négyszög átellenes oldalait metsző egyenesen, e metszéspontot hyperbolikus, illetve elliptikus természetű involúciós pontsor pont-

párjait határozzák meg, a szerint, a mint e szögpontok párosával, vagy páratlan számban vannak elválasztva a metsző egyenes által. Ha pedig egyik szögpont a másik három által meghatározott háromszög határán belül fekszik, akkor ellenkezőleg a páratlan számú szögpont elválasztásánál áll be a hyperbolikus, a páros számú szögpont elválasztásánál pedig az elliptikus természetű involucziós pontsor esete.

A mi pedig a teljes négyoldalt illeti, látható, hogy annak oldalai a síkot tizenegy részre osztják, melyek közül három véges és nyolcz végtelen nagy. A négy oldal átlói nem hatolnak mindegyik részbe. A szerint, a mint a felvett pont, melyből a négy oldal átellenes szögpontjait projicziáljuk, oly síkrészben van, melybe az átlók bejutnak, vagy pedig egy másik síkrészben, a projicziáló sugarak hyperbolikus, illetve elliptikus sugársornak képezik kapcsolt sugárpárjait. (Függelék 2.)

53. «Egy négyszög síkjában mindig szerkeszthető oly pont, mely egy adott pontot, a négyszög átellenes oldalpárjaitól harmonikusan választ el.»

«Egy négyoldal síkjában mindig találunk oly egyenest, mely tetszőleges egyenest a négyoldal átellenes szögpontjaitól harmonikusan választ el.»

Nevezzük a négyszög szögpontjait A, B, C, D -nek, a sík tetszőleges pontját P -nek, és azon két sugár metszéspontját, mely P -t a négyszög $|AD|$, $|BC|$ és $|AC|$, $|BD|$ átellenes oldalpárjaitól harmonikusan elválasztja: Q -nak. $|PQ|$ egyenes a négyszög átellenes oldalait involuczióban metszi, melynek kettőspontjai P, Q pontok, mert P, Q az involucziót képező hat pont két kapcsolt pontpárjától harmonikusan van elválasztva.— Ebből következik, hogy P, Q kettőspontok, a harmadik kapcsolt pontpártól, és így a négyszög harmadik átellenes oldalpárjától is harmonikusan vannak elválasztva.

Ha P pont a négyszög egyik átlópontjában van, akkor azon pont, mely tőle az átellenes oldalpárok által harmonikusan van elválasztva: a másik két átlópont összekötő egyenesének bármely pontja. —

A jobb oldalon álló tételnek, mely hasonlóképp lesz bebizonyítva, speciális esete a következő: *Egy négyoldal három átlójának felező pontjai egyenesben fekszenek.* (Gauss-Bodenmiller-féle tétel.)*

Ha ugyanis a négyoldal síkjában fekvő egyenest végtelen távol

* A négyoldal ezen tulajdonságát Gauss (1777—1855.) találta 1810-ben. Lásd: BALTZER E. Elemente d. Math. 1870. II. kötet, pag. 57.

g_{∞} -ben fekvőnek képzeljük, akkor a másik egyenes, mely az átellenes szögpontokat g_{∞} -től harmonikusan elválasztja, felezi a négyoldal átlóit.

54. Végre még a 35-dik pontban előforduló szerkesztés speciális esetének, a következő feladatnak, megoldását akarjuk tárgyalni.

« AA_1, BB_1 kapcsolt pontpárok által meghatározott involúziós pontsor azon kapcsolt pontpárja D, D_1 szerkesztendő, mely C, C_1 kapcsolt pontokat harmonikusan választja el.»

Jelenleg AA_1, BB_1, CC_1, \dots involúziós pontsor és C, C_1 kettőspontokkal bíró involúziós pontsornak közös D, D_1 kapcsolt pontpárját kell szerkesztenünk.

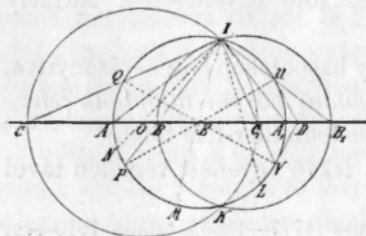
A feladatnak előreláthatólag csak akkor van valós megoldása, ha az első involúziós pontsor elliptikus; mert a harmonikus osztás megkívánja, hogy $D, D_1; C, C_1$ -től el legyen választva és csak az elliptikus természetű involúziós pontsoroknál vannak a kapcsolt elemek egymástól elválasztva.

Ha AA_1, BB_1, CC_1 átmérők fölött köröket írunk le, úgy ezek egymást az involúziós pontsorok tulajdonsága következtében ugyanazon I, K pontokban metszik. Az I, K pontokban CC_1IK kört derékszög alatt metsző kör, a keresett D, D_1 kapcsolt pontokon megy át.

E szerkesztés különös esetét képezi a következő általánosabbnak: «egy elliptikus természetű involúziós pontsorban oly kapcsolt pontpárt kell szerkeszteni, mely egy adott kapcsolt pontpárral adott kettősviszonyt képez».

Mint hogy ily involúziós pontsor kapcsolt elemei egymást elválasztják, azért ha az adott kettősviszony négy pont által van megadva, az egymáshoz rendelt pontpáraknak egymástszintén el kell választani, ha pedig számérték $-\lambda$ által van adva, annak negatívnak kell lenni.

Nevezzük az involúziós sor kapcsolt pontpárjai által határolt közők, mint átmérők fölött leirt körök metszéspontjait (38. ábra)



38. ábra.

I, K -nak, az adott pontpárt A, A_1 -nek, AA_1 köz felezőpontját E -nek és szerkeszszük meg azon D pontot, melyre nézve $(AA_1ED) = \lambda$. Az AA_1IK körön, k -n, szükségkép kívül fekvő D pontból k -hoz vont érintők k -t U, V -ban érintik; IU, IV egyeneseknek B_1, C_1 metszéspontja a sor tartójával, a kívánt kap-

csült pontok egyike lesz; a másik pont IKB_1 és IKC_1 körnek B , illetve C metszéspontja a tartóval.

Hogy ezt bebizonyítsuk, nevezzük k kör UE , VE átmérőjének másik végpontját P , ill. Q -nak; mely P , Q pont PIU és QIV derékszög miatt IB , ill. IC egyenesen fekszik.

Mínthogy $|UA|$, $|UA_1|$, $|UE|$, $|UD|$ és $|VA|$, $|VA_1|$, $|VE|$, $|VD|$ sugaraknak kettősviszonya, a mit röviden $U(AA_1ED)$, $V(AA_1ED)$ -vel szokás jelölni, egyenlő λ -val, továbbá azon sugarak által képezett szögek, k kör kerületi szögeinek tulajdonsága következtében, egyenlők $|IA|$, $|IA_1|$, $|IBP|$, $|IUB_1|$, valamint $|IA|$, $|IA_1|$, $|IQC|$, $|IVC_1|$ sugarak hajlásszögeivel, azért

$$I(AA_1BB_1) = I(AA_1CC_1) = \lambda,$$

és B , B_1 ; C , C_1 a keresett két pontpár, mely A , A_1 pontokkal együtt λ -val egyenértékű kettősviszonyt képez.

Megjegyezhető, hogy CIK , BIK körök k -hoz egyenlő szögek alatt hajlanak. Ha ugyanis CIK kör középpontját O -nak OI , EI egyeneseknek metszéspontját k körrel N , M -nek nevezzük, akkor OIC egyenszerű háromszögből látható, k körnek következő ívei között levő reláció

$$IA_1 - AQ = NQ,$$

és mert

$$(MN + NA) = MA = IA_1,$$

azért

$$MN + NA - AQ = NA + AQ,$$

vége

$$MN \text{ ív} = 2AQ \text{ ív}.$$

Ugyanígy kimutatható, hogy

$$LM \text{ ív} = 2PA \text{ ív},$$

hol L azon pont, melyben BIK körnek I -n átmenő átmérője k -t metszi, és mert PA ív $= AQ$ ívvel, azért LM , MN ívek és így a fölöttük nyugvó LIM , MIN kerületi szögek, melyek BIB_1 és k , valamint CIC_1 és k köröknek hajlásszögei szintén egyenlők.

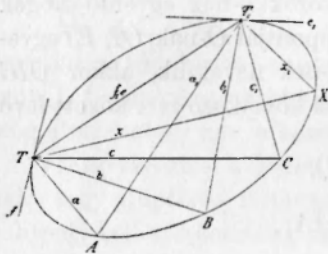
E szerint: «két kör hajlásszögeinek bármelyik felező köre a középpontokon átmenő egyenest oly pontokban metszi, melyek azon egyenesen fekvő kör-átmérők végpontjaival, egyenlő kettősviszonnyal bíró pontokat képeznek».

II. FEJEZET.

A kúpszelet.

8. §. Két általános helyzetű projektív sugársor képződménye.

55. Két ugyanazon síkban fekvő projektív sugársor $abc\dots$ $a_1b_1c_1\dots$, mely különböző középponttal bír, vagy perspektív vagy általános helyzetű lehet. A sugársorok általános helyzeténél (39. ábra) a megfelelő sugaraknak $a, a_1; b, b_1; c, c_1; \dots$ -nek metszéspontjai nem fekszenek egyenes vonalban. De tekintettel arra, hogy perspektív helyzetnél az egyik sugársor közvetlen egymásra következő sugarainak megfelelő sugarai szintén közvetlen következnek egymásra, mely tulaj-



39. ábra.

donság független a perspektív helyzetől, és így a megfelelő sugaraknak metszéspontjai is igen közel jutnak egymáshoz: az összes megfelelő sugarak metszéspontjai, egymásra következő pontjait képezik egy görbe vonalnak, melynek neve — *kúpszelet*.

Mint hogy a kúpszelet pontjai két projektív sugársor megfelelő sugarainak metszéséből származnak, tehát abból képezhetnek — *a kúpszelet*

két általános helyzetű projektív sugársor képződménye. Perspektív helyzetű sugársorok képződménye egyenes vonal, t. i. a perspektív tengely.

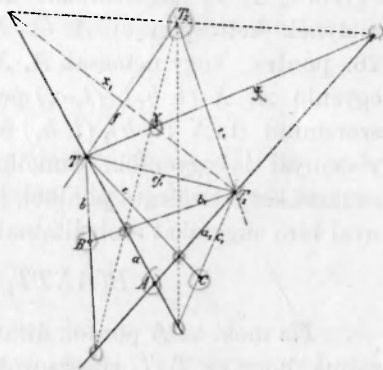
A kúpszelet azon nevezetes tulajdonsággal bír, hogy *tetszőleges egyenessel két (valós vagy képzetes) pontban metszhető*.

Hogy ezt kimutassuk, hozzuk a kúpszeletet képező projektív sugársorokat metszéshez a felvett metsző egyenessel t -vel, mi által t -n két projektív pontsort kapunk, melynek megfelelő pontjai: a sugársorok megfelelő sugarainak metszéspontjai t -vel. A két projektív pontsornak azonban vagy két különvált valós, vagy két egybeeső valós, vagy két képzetes kettőspontja van, és azért a sugársoroknak legfeljebb két pár olyan megfelelő sugara van, mely egymást t -n metszi.

A kúpszelet, azon tulajdonságánál fogva, hogy egyenes által legfeljebb két pontban metszetik: *II. rendű görbe*.

A kúpszeletet képező T, T_1 sugársorok egyes sugarai általában szintén két pontban metszik a kúpszeletet. Ha T sugársor x sugarának metszőpontját a görbével, az előbb mutatott általános eljárás szerint akarjuk szerkeszteni, azt tapasztaljuk, hogy azon projektív pontsorok, melyek szerint $x - T, T_1$ sugársorok által metszetik, parabolikus természetűek; de ekkor is két pont létezik x -en, melyen a sugársoroknak megfelelő sugarai átmennek. Az egyik pont ugyanis x -nek metszőpontja T_1 sugársorban x -nek megfelelő x_1 -gyel, a másik pedig maga T pont, mert ez, T_1 sugársor $|T_1T| \equiv f_1$ sugarának metszőpontja, T sugársor neki megfelelő f sugarával. — Ugyanígy kimutatható, hogy T_1 sugársornak mindegyik sugara két pontban metszi a kúpszeletet, melyek közül egyik maga T_1 pont, mint T sugársor $|TT_1| \equiv e (\equiv f_1)$ sugarának metszőpontja, T_1 sugársor neki megfelelő e_1 sugarával. E szerint: *a kúpszeletet képező sugársorok középpontjai, szintén pontjai a kúpszeletnek.*

56. Hogy T, T_1 középponttal bíró $a, b, c, \dots; a_1, b_1, c_1, \dots$ projektív sugársorok képződményének, a kúpszeletnek, pontjait szerkeszthessük, a projektív vonatkozás meghatározására szolgáló $a, a_1; b, b_1; c, c_1$ három pár megfelelő sugárból új megfelelő sugárpárok kell találni; e megfelelő sugárpárok metszőpontjai: a kúpszeletnek pontjai. E végből (40. ábra) $a, b, c, \dots; a_1, b_1, c_1; \dots$ sugársorokat metszéshez hozzuk két, egymásnak megfelelő sugárral, pl. a_1 , ill. a -val.



40. ábra.

E két sugáron ez által két perspektív helyzetű projektív pontsor származik, mert a_1, a metszőpontja a pontsorok megfelelő pontja, miért is két pár megfelelő pont $(a, b_1), (a_1, b)$ és $(a, c_1), (a_1, c)$ összekötő egyenesének T_2 metszőpontja, a két pontsorral perspektív helyzetű sugársornak középpontja lesz. T sugársor tetszőleges x sugarának megfelelő x_1 sugarát, és így x, x_1 -nek metszésében a kúpszeletnek X pontját, ezek után az által szerkesztjük, hogy (x, a_1) pontot T_2 -ből a -ra projicizáljuk; e projekción átmegy T_1 sugársornak x_1 sugara, mely x -et a kúpszelet X pontjában metszi. Hasonlóképp található T_1 sugársor x ,

sugarának megfelelő x sugara, ha (x_1, a) metszéspont projekciója T_2 -ből a_1 -re, T -vel egyenes által összeköttetik.

Ha T sugársor $|TT_2| \equiv f$ sugarának megfelelő f_1 sugarát ezen eljárás szerint akarjuk szerkeszteni, azt tapasztaljuk, hogy T_1 sugársor f_1 sugara T_1T -vel egyesül. Ennélfogva f sugár, mely T_1 sugársor T_1T sugarának felel meg, a kúpszeletet két T -ben egyesült pontban metszi. Az oly egyenes, mely valamely görbe vonalat, két végtelen közel fekvő pontban metsz, a görbe *érintőjének*, és azon két végtelen közel fekvő, vagyis összeeső metszéspont, az érintő *érintőpontjának* nevezetik. $|TT_2|$ egyenes tehát a görbe érintője T pontban. Hasonlóképp kimutatható, hogy T sugársor $|TT_1| \equiv e$ sugarának megfelelő e_1 sugár T_1 sugársorban: a kúpszeletet T_1 pontban érinti. Ezért mondhatjuk: *a kúpszeletet képező sugársorok közös sugarának megfelelő sugarak az egyes sorokban, a kúpszelet érintői a sugársorok középpontjaiban.*

57. Legyen A, B, C, X négy tetszőleges pontja a kúpszeletnek, mely a kúpszeletet képező T, T_1 sugársorok $a, a_1; b, b_1; c, c_1; x, x_1$ megfelelő sugarainak metszéséből származott. Tudjuk, hogy $|AX| \equiv t$ egyenes, T, T_1 sugársorokat két projektív pontsor szerint metszi, melynek kettőspontjai A és X . Ebből következik, tekintettel a 26. pontra, hogy nemcsak $A, X, (t, b), (t, c)$ pontok kettősviszonya egyenlő $A, X, (t, b_1), (t, c_1)$ pontok kettősviszonyával, hanem egyszersmind $A, X, (t, b), (t, b_1)$ és $A, X, (t, c), (t, c_1)$ pontok kettősviszonyai is egyenlők. Ennélfogva ez utóbbi pontoknak projekciálósugarai két tetszőleges pontból, pl. B , ill. C -ből, egyenlő kettős viszony-nyal bíró sugarakat szolgáltatnak, vagyis:

$$B(AXTT_1) \bar{\wedge} C(AXTT_1).$$

Ha most az A ponton átmenő $|AX|$ egyenest oly módon változtatjuk, hogy az T, T_1 sugársorok más két egymásnak megfelelő sugár $y, y_1; z, z_1; u, u_1; \dots$ metszéspontján, vagyis a kúpszeletnek Y, Z, U, \dots pontján menjen át, akkor szintén:

$$\begin{aligned} B(AYTT_1) \bar{\wedge} C(AYTT_1), \\ B(AZTT_1) \bar{\wedge} C(AZTT_1), \\ B(AUTT_1) \bar{\wedge} C(AUTT_1), \end{aligned} \quad \text{stb.}$$

miből következik (10), hogy:

$$B(XYZU) \bar{\wedge} C(XYZU).$$

Ha tehát a kúpszelet tetszőleges, B, C , pontját annak X, Y, Z, U pontjaival összekötjük, úgy a származtatott két B, C sugársor bármely négy sugarának kettősviszonya egyenlő, és így a sugársorok projektívek. Ennélfogva mondhatjuk: *a kúpszeletnek pontjai annak tetszőleges két pontjából, projektív sugársorok által projicziáltatnak.* Ebből következik még, hogy *a kúpszeletet képező eredeti két projektív sugársor T, T_1 középpontja nem lesz különös pontja a kúpszeletnek*, mert ugyanazon kúpszelet egyszersmind képződménye bármily két projektív sugársornak, melyeknek középpontja a kúpszeleten fekszik és melyeknek három pár megfelelő sugara egymást azon kúpszeleten metszi.

58. Egy más következménye az előbbi tételnek, hogy *minden kúpszelet, öt pontja által, melyek közül tehát kettőnél több nem fekszik ugyanazon egyenesen, meg van határozva, és új pontok, azon öt segítségével szerkeszthetők.*

Mint hogy a kúpszelet öt független helyzetű pont által meg van határozva, kell hogy oly hatszög, melynek szögpontjai egy kúpszeletnek pontjait képezik, mely mint mondani szokás, a kúpszeletbe van írva, különös tulajdonsággal bírjon.

Ha T, A, T_1, B, D, C , egy ily hatszögnek egymásra következő hat szögpontja, tehát (41. ábra)

$$T(ABCD) \wedge T_1(ABCD),$$

akkor az első négy sugárnak a, B, γ, D metszéspontjai $|BD|$ -vel, és a másik négy sugárnak a_1, β_1, C, D metszéspontjai $|CD|$ -vel, oly pontok lesznek, melyekre nézve:

$$(aB\gamma D) = (a_1\beta_1 CD),$$

vagyis melyek két projektív pontsor megfelelő pontjai. E pontsorok D -ben megfelelőleg közös ponttal bírnak, tehát (14) perspektívek, és így a többi megfelelő pontoknak összekötő egyenesei: $|aa_1|, |B\beta_1| \equiv |T_1B|, |\gamma C| \equiv |TC|$, egymást egy pontban a_2 -ben metszik. Ennélfogva: *a kúpszeletbe írt hatszög azon tulajdonsággal bír, hogy átellenes oldalainak metszéspontjai ugyanazon egyenesben fekszenek.* (PASCAL-féle tétel.) (Pascal Balázs, 1623—1662.)

De fordítva is lehet következtetni, hogy ha egy görbe vonalba írt bármely hatszög átellenes oldalainak metszéspontjai egyenesben fekszenek, — mely hatszöget PASCAL-féle hatszögnek nevezik, — úgy a görbének összes pontjai a görbe két pontjából projektív sugársorok által projicziáltatnak, tehát a görbe kúpszelet.

Ha ugyanis az előbbi jelölés szerint $ATCDBT_1$, a görbébe írt egy ily hatszög, melynek átellenes oldalai egymást, egyenesen fekvő a, a_1, a_2 pontokban metszik, vagyis:

$$|AT, BD| = a, |AT_1, DC| = a_1, |T_1B, TC| = a_2$$

és

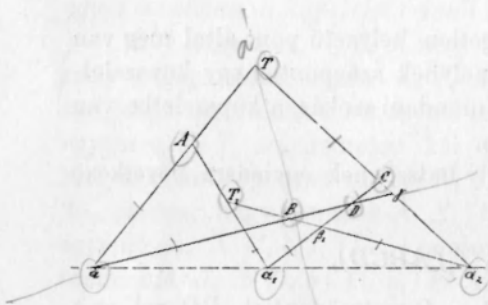
$$|T_1B, CD| = \beta_1, |BD, TC| = \gamma,$$

úgy a, B, γ, D -pontoknak projekciója a_2 -ből $|DC|$ -re: a_1, β_1, C, D , tehát:

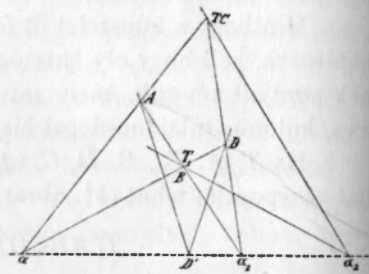
$$(aB\gamma D) \bar{\wedge} (a_1\beta_1 CD).$$

miből következik, hogy:

$$T(ABCD) \bar{\wedge} T_1(ABCD).$$



41. ábra.



42. ábra.

Ha ezután az előbbi hatszögnek $ABCD$ szögpontjai helyett más szögpontokat veszünk fel a görbén, azt látjuk, hogy ismét azon sugarak, melyek az új pontokat T, T_1 -ből projicziálják, egyenlő kettősviszonnyal bírnak: tehát a görbének pontjai, tetszőlegesen választott T, T_1 pontokból projektív sugársorok által projicziálatnak.

A midőn a kúpszeletbe írt TAT_1BDC hatszögnek két egymásra következő szögpontja, pl. D, C végtelen közel van egymáshoz, az őket összekötő egyenes a kúpszelet *érintője* lesz, és az érintőnek azon két végtelen közel fekvő pontja, melyet a görbével közösen bír: *érintőpont*. TAT_1BC pontok által adott kúpszeletnek érintője C pontban e szerint következőképp szerkeszthető: $|TA|, |BC|$, valamint $|T_1B|, |TC|$ egyeneseknek a' , ill. a , metszőpontján át egyenest fektetünk, mely $|AT_1|$ -et a_1 -ben metszi; $|a_1C|$ a keresett érintő.

Ha a kúpszeletbe írt TAT_1BDC hatszögnek C szögpontja T -vel, B pedig T_1 -gyel egyesül, a hatszög (42. ábra) *négyszöggé* fajul és TC ,

T_1B oldalak a kúpszelet érintői lesznek T, T_1 pontokban. De ezen érintőknek, mint az elfajult hatszög két átellenes oldalának metszőpontja a_2 , jelenleg is azon egyenesen lesz, mely a hátra levő átellenes oldalak: AT_1 , DT és AT , DT_1 metszőpontjait a_1 , a -át összeköti. Ugyanígy kimutatható, hogy A és D pontoknak érintői aa_1 egyenes ugyanazon D' pontján mennek át. Eszerint: *a kúpszeletbe írt négyszög két szögpontjának érintői egymást a négyszög egyik átlóján metszik.*

A kúpszeletbe írt háromszög oldalai és ezen háromszög szögpontjainak érintői, szintén a kúpszeletbe írt elfajult hatszög oldalainak tekinthetők, miből következik: *a kúpszeletbe írt háromszög szögpontjainak érintői, a háromszög átellenes oldalait, egyenesen fekvő pontokban metszik.*

59. Ha a kúpszeletbe írt $ATDT_1$ négyszög D pontját és ennek érintőjét oly módon változtatjuk, hogy D a kúpszeletet leírja, és a négyszög többi szögpontjait A, T, T_1 -et és azok érintőit változatlanul hagyjuk, akkor TD és T_1D sugarak két projektív sugársort, az a és a_1 pontok AT és AT_1 egyeneseken az előbbiekkal projektív és perspektív helyzetű pontsort, végre a megfelelő a, a_1 pontok összekötő egyenesei, a_2 középponttal bíró és az a, a_1 által befutott pontsorokkal perspektív sugársort irnak le. Minthogy D pont érintője A pont érintőjét aa_1a_2 sugárban fekvő D' pontban metszi: a mozgó D pont érintője által a szilárd A pont érintőjén kimetszett D' pontsor projektív azon sugársorral, melyet a mozgó TD , valamint T_1D sugár, T , ill. T_1 körül leír. Tekintve, hogy A, T, T_1 tetszőleges pontjai a kúpszeletnek, következik: *azon sugársor, mely a kúpszelet pontjait annak tetszőleges pontjából projicziálja, projektív ama pontsorról, mely szerinti a kúpszelet érintői annak bármely érintőit metszik.* A kúpszelet változó pontján átmenő sugárnak a sugársorban mindig azon pont felel meg, melyben a változó pont érintője a felvett szilárd érintőt metszi.

Megjegyzendő még, hogy a midőn a kúpszeleten mozgó D pont A -hoz közeledik, D és A pont érintőinek D' metszőpontja szintén közeledik A -hoz, és a midőn D, A -val egyesül, D' metszőpont szintén A -ba jut. Ennélfogva: *amint a kúpszelet, vagy bármily más görbe érintője, ezen pont és a hozzá végtelen közel levő pont összekötő egyenesének tekintetik, úgy a kúpszelet (vagy bármely más görbe) érintőjének érintőpontja: ezen érintőnek és a hozzá végtelen közel fekvő érintőnek, metszőpontja.*

Egyik következménye a fentebbi tételnek, hogy *a kúpszelet két*

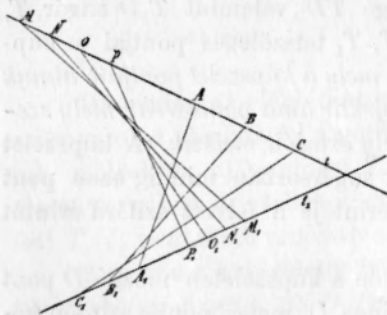
tetszőleges érintője, annak többi érintőjét projektív pontsorok szerint metszi.

Minthogy e tétel szerint, a kúpszelet érintői annak két érintőjét, pl. t, t_1 -et, két projektív pontsorok szerint metszik, kérdezhetjük, hogy ha két tetszőleges egyenesen projektív pontsorokat veszünk fel és annak megfelelő elemeit egyenesekkel összekötjük, vajon létezik-e oly kúpszelet, melynek a két felvett és ezen összekötő egyenesek, érintői? E kérdéssel a következő §-ban foglalkozunk.

9. §. Két ugyanegy síkban fekvő általános helyzetű projektív pontsor képződménye.

60. Legyen ugyanazon síkban fekvő t, t_1 tartón, két projektív pontsor $A, B, C, \dots; A_1, B_1, C_1, \dots$, (43. ábra) mely nem perspektív helyzetű. Ha az ily, mint nevezni szokás, *általános helyzetű projektív pontsorok* megfelelő elemeit $A, A_1; B, B_1; C, C_1; \dots$ -et egyenesekkel összekötjük, úgy ezek nem mennek át ugyanazon ponton, hanem egy görbe vonalat *burkolnak*, mely görbe vonalnak ezen egyenesek érintői, és *mely görbe vonal a projektív pontsorok képződményének neveztetik*.

t pontsor (43. ábra) egymáshoz közel fekvő $M, N, O,$



43. ábra.

P, \dots pontjainak megfelelő $M_1, N_1, O_1, P_1, \dots$ pontok összekötő egyenesei, kis szöget képeznek egymással; azon sokszögnek (kül-) szögei, melyet ezen egyenesek alkotnak, szintén kicsinyek lesznek. Ha M, N, O, P, \dots , tehát egyszersmind $M_1, N_1, O_1, P_1, \dots$ pontok, a pontsoroknak egymáshoz következő pontjai, úgy azon sokszögnek oldalai is végtelen kicsinyek lesznek, és így egy görbe vonalnak egymásra következő ívrészeit képezik. Minthogy $MM_1, NN_1, OO_1, PP_1, \dots$ egyenesek, azon görbe vonalnak végtelen kis ívrészeit tartalmazzák: a görbe vonalnak érintői lesznek.

szeit képezik. Minthogy $MM_1, NN_1, OO_1, PP_1, \dots$ egyenesek, azon görbe vonalnak végtelen kis ívrészeit tartalmazzák: a görbe vonalnak érintői lesznek.

t, t_1 pontsorok megfelelő pontjainak összekötő egyeneseit: $AA_1; BB_1; CC_1; \dots$ -et szintén sugaraknak, és azok összességét *II. osztályu*

sugársornak nevezik, megkülönböztetésül a már ismert sugársortól, melyet I. osztályu sugársornak is neveznek. Ezen elnevezés onnan származik, hogy az I. o. sugársor síkjának tetszőleges pontján át csak egy sugár húzható, mely a sugársorhoz tartozik, míg a II. o. sugársor síkjának bármely pontján át a sugárhoz tartozó két sugár húzható.

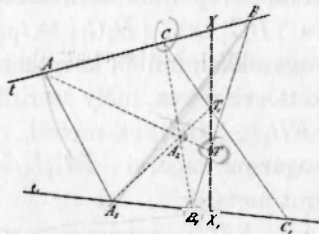
Ha ugyanis (44. ábra) a sugársor meghatározására szolgáló projektív pontsorokat $ABC\dots, A_1B_1C_1\dots$ -et, a sík tetszőleges pontjából projicziáljuk, úgy a projicziáló sugarak két, ugyanazon középponttal bíró projektív sugársort képeznek, s minthogy ily két sugársor két, valós, vagy képzetes, kettőssugárral bír: a projektív pontsoroknak két oly egymásnak megfelelő pontpárja van, melynek valós vagy képzetes összekötő egyenese a felvett ponton megy át. — Tekintettel arra, hogy a II. o. sugársor sugarai által burkolt görbéhez egy pontból két érintő vonható: ezen görbe *másodosztályú görbe* lesz.

A midőn X pont, melyen át a II. o. sugársor sugarai húzandók, a projektív pontsorok egyikének tartóján, pl. t -n vétetik fel, a pontsorokat X -ből projicziáló sugársorok elfajulnak parabolikus természetűvé, de ekkor is két sugár húzható X ponton át, mely a pontsoroknak megfelelő pontjait összeköti. Az egyik sugár ugyanis t tartó X pontjának ~~pedig~~ összekötő egyenese X -nek megfelelő X_1 ponttal t_1 tartón, a másik maga t tartó, mert ez t, t_1 egyeneseknek t_1 -en fekvő F_1 metszéspontját összeköti F_1 -nek megfelelő F ponttal t tartón. Ugyanígy kimutatható, hogy t_1 tartón fekvő pontok mindegyikén általában, a II. o. sugársorhoz tartozó két sugár megy át, melyek közül egyik maga t_1 tartó, mint t, t_1 egyeneseknek t -n fekvő $E(=F_1)$ metszéspontját E -nek megfelelő E_1 pontjával összekötő sugár. Ebből azt látjuk, hogy a projektív pontsorok tartói szintén sugarai a pontsorok által meghatározott II. o. sugársornak, vagy mi ugyanazt fejezi ki: érintői a II. o. sugársor által burkolt görbének.

61. Hogy a II. o. sugársor t tartójának tetszőleges X pontján átmenő $|XX_1|$ sugarat és az E_1, F pontokat szerkeszthessük, összekötünk két tetszőleges megfelelő pontot, pl. A, A_1 -et, a projektív pontsorok $A_1, B_1, C_1\dots$; ill. A, B, C , elemeivel $|AA_1|, |AB_1|, |AC_1|, \dots$, valamint $|A_1A|, |A_1B|, |A_1C|, \dots$, sugarak által. Ezen perspektív sugársorok perspektív tengelye $t_2, |AB_1|, |A_1B|$, valamint $|AC_1|, |A_1C|$ egyeneseknek metszéspontja által meg van határozva. Ha ezután t -nek X pontját A_1 -ből t_2 -re projicziáljuk, X_2 projekciót ismét A -ből t_1 -re projicziáljuk X_1 -be, úgy $|XX_1|$ a II. o. sugársor egy sugara (44. ábra).

Látszólag kivételt képeznek azon szabály alól, hogy a tartók

Ha $|BB_1|$ sugár T pontját L -ben, vagy L_1 -ben vesszük fel, a szerkesztés szerint a második sugár, mely BB_1 -en kívül még azon ponton átmegy: t , ill. t_1 lesz. Van azonban $|BB_1|$ sugáron egy pont, melyből BB_1 -en kívül nem húzható a II. o. sugársorhoz tartozó új sugár, vagyis melyre nézve a második sugár BB_1 -gyel összeesik. Ha ugyanis előbb T_1 pontot, $|CC_1|$, $|BB_1|$ metszőpontjában vesszük fel, és a hozzá tartozó T pontot az által szerkesztjük, hogy $|T_1A_1|$, $|CB_1|$ metszőpontját A -ból BB_1 -re projicziáljuk, úgy ezen T projekezióból kiinduló második sugár, mint látható, BB_1 -gyel esik egybe. Minthogy $|BB_1|$ tetszőleges sugara a II. o. sugársornak, mondhatjuk, hogy nemcsak a pontsorok tartóin, hanem a II. o. sugársornak minden sugarán (vagy mi ugyanaz, a sugársor által burkolt görbe minden érintőjén) van egy pont, melyen át más sugár nem húzható a sorban. Ezen pont, ép úgy, mint a tartón fekvő ily tulajdonságú pont, az illető sugár vagy érintő, *érintőpontjának* nevezetik, és úgy tekintendő, mint két végtelen közel fekvő sugárnak metszőpontja.



45. ábra.

62. Azonban a II. o. sugársor sugarai más tekintetben is közös tulajdonsággal bírnak a tartókkal, nevezetesen: a II. o. sugársor két tetszőleges sugarát, a sugársor többi sugarai projektív pontsorok szerint metszik.

Ha ugyanis A_2 pontot $|B_1C|$ egyenesen tova mozgatjuk, úgy a mozgó A_2 pont T projekeziója A -ból $|BB_1|$ sugárra, valamint T_1 projekeziója A_1 -ből $|CC_1|$ sugárra, A_2 -vel perspektív, tehát egymással projektív pontsorokat ír le; és mert két ily összetartozó pontnak, mint T , T_1 -nek összekötő egyenese, a II. o. sugársornak egy sugara: ezen sugarak a tetszőlegesen választott $|BB_1|$, $|CC_1|$ sugarakat projektív pontsorok szerint metszik.

De az előbbi (44-dik) ábrából is kimutatható ezen tulajdonsága a II. o. sugársornak.

Nevezzük e végből a II. o. sugársor $|AA_1|$, $|XX_1|$ sugarainak metszőpontját T -nek, és vegyük tekintetbe, hogy $|TAA_1|$ és $|TXX_1|$ sugarak, kettőssugarai az $A, X, B, C, \dots; A_1, X_1, B_1, C_1, \dots$ pontsorokat T -ből projicziáló sugársoroknak; tehát nemcsak

$$T(AXBC) \bar{\wedge} T(A_1X_1B_1C_1),$$

hanem egyszersmind :

$$T(AXBB_1) \bar{\wedge} T(A_1X_1CC_1),$$

és így

$$\begin{array}{cccc|cccc} |TA| & |TX| & |TB| & |TB_1| & \text{sugarak} & |BB_1| & \text{egyenest} \\ |TA_1| & |TX_1| & |TC| & |TC_1| & \text{«} & |CC_1| & \text{«} \end{array}$$

oly pontok szerint metszik, melyeknek kettősviszonyai egyenlők. E metszéspontok azonban a II. o. sugársor $|AA_1|$, $|XX_1|$ sugarának és $|BC| \equiv t$, $|B_1C_1| \equiv t_1$ tartóknak közös pontjai $|BB_1|$, $|CC_1|$ sugarakkal, miből következik (tekintettel 10-re), hogy azon pontok kettősviszonya, mely szerint a II. o. sugársornak bármily négy sugara $|BB_1|$, $|CC_1|$ -et metszi, egymással egyenlő, vagyis hogy a II. o. sugársor sugarai $|BB_1|$, $|CC_1|$ sugarakat projektív pontsorok szerint metszik.

A II. o. sugársor ezen tulajdonságának következménye, hogy: *a felvett projektív pontsorok tartói, nem lesznek különös sugarai a sornak, mert annak bármely két sugara által pótolhatók, továbbá hogy a II. o. sugársor öt tetszőlegesen választott sugárból, melyek közül kettőnél több nem megy ugyanazon ponton át, teljesen meg van határozva, és ezekből bárhány új sugár szerkeszthető.*

63. A szerkesztés legegyszerűbben végezhető a 45. ábra szerint. Az öt adott sugár közül bármely kettőt t , t_1 -nek, a többi háromnak metszéspontjait ezekkel A , B , C ill. A_1 , B_1 , C_1 -nek nevezvén, BC_1 egyenesnek tetszőleges A_2 pontját A -ból $|BB_1|$ -re, A_1 -ből $|CC_1|$ -re projicziáljuk; a projekciókat T , T_1 -et összekötő $|TT_1|$ egyenes, új sugara a sugársornak.

A szerkesztés egy egyszerű tételhez vezet, mely a II. o. sugársor hat tetszőleges sugarának helyzeti viszonyát fejezi ki, t. i. *a II. o. sugársor hat tetszőleges sugárból képezett hatoldalnak három fő-átlói* egymást egy pontban metszik. (Brianchon-féle tétel.)*

E tétel alapján bármely sugár érintőpontját szerkeszthetjük, tekintetbe véve, hogy egy sugár érintőpontja, metszéspontja ezen és a közvetlen mellette levő sugárnak. Ha (46. ábra)

* Ha ugyanazon síkban fekvő hat általános helyzetű egyenest a , b , c , d , e , f -fel, ezen egyenesek, vagy oldalakból képezett hatoldal oldalait ugyanazon betűkkel; annak egymásra következő szögpontjait (a, b) , (b, c) , (c, d) , (d, e) , (e, f) , (f, a) -lel jelöljük, akkor ezen hatoldalnak főátlói átmennek: (a, b) , (d, e) ; (b, c) , (e, f) ; (c, d) , (f, a) átellenes szögpontokon. Oly hatoldal, melynek fő-átlói egymást egy pontban metszik, *Brianchon-féle hatoldalnak* nevezik. (Brianchon született 1785-ben.)

rint $|AA_1|$, $|XX_1|$ sugaraknak A' , X' érintőpontjait összekötő egyenes (47. ábra), $|AX_1|$, $|A_1X|$ metszéspontján X_2 -n megy át, megjegyezvén, hogy ugyanazon oknál fogva t és t_1 sugaraknak F , E_1 érintőpontjait összekötő egyenes X_2 ponton megy át, mely utóbbi tulajdonságot már a 44. ábrában láttuk.

$|AA_1|$, t , $|XX_1|$, t_1 sugarak közül $|XX_1|$ -et oly módon változtatjuk, hogy az a II. o. sugársor minden sugarának helyzetét elfoglalja; ekkor A' , F , E_1 érintőpontok állandóak maradnak, X , X_1 pontok t , ill. t_1 -en, X_2 pedig $|FE_1|$ egyenesen projektív pontsorokat írnak le. Ennélfogva az $|A'X_2| \equiv |A'X'|$ által leírt sugársor, melynek sugarai az $|FE_1|$ -en mozgó X_2 pontokon és a mozgó $|XX_1|$ sugárnak X' érintőpontján mennek át szintén projektív X és X_1 által befutott pontsorral. A mozgó $|XX_1|$ sugár minden helyzetéhez, t -n egy X pont, $|A'X'|$ által leírt sugársorban egy sugár tartozik, és mert a II. o. sugársor sugarai folytonosan következnek egymásra: $|A'X'|$ sugarak A' sugársorban szintén folytonosan fognak egymásra következni. Minthogy $|AA_1|$, t , t_1 a II. o. sugársor bármely három sugara lehet, mondhatjuk: *ha a II. o. sugársor egyes sugarainak érintőpontjait a II. o. sugársor tetszőleges sugarának érintőpontjával összekötjük, úgy ezen összekötő egyenesek folytonosan következnek egymásra, és az általuk képezett I. o. sugársor projektív azon pontsorral, mely szerint a II. o. sugársor sugarai annak bármely sugarát metszik.*

Ha a II. o. sugársor $|AA'A_1|$ sugarát és ennek A' érintőpontját, $|BB'B_1|$ sugár és B' érintőpont által pótoljuk, úgy a mozgó $|XX'X_1|$ sugár X , X_1 pontjai által befutott pontsorok projektívek, a B' körül forgó $B'X'$ sugár által leírt sugársorral. Ennélfogva azon két sugársor, mely a mozgó $|XX_1|$ sugár X' érintőpontját A' és B' -ből projicziálja, egymással szintén projektív. E tulajdonsága a II. o. sugársornak így fejezhető ki: *a II. o. sugársor sugarainak érintőpontjai, a sugársor két tetszőleges sugarának érintőpontjából projektív sugársorok által projicziáltak.*

Minthogy a II. o. sugársor érintőpontjai, vagy mi ugyanazt jelenti, a II. o. sugársor által burkolt görbének pontjai, annak két tetszőleges pontjából projektív sugársorokkal projicziáltak: *a II. o. sugársor által burkolt görbe két projektív sugársor képződményének is tekinthető, és ezért — kúpszelet.* Viszont láttuk az előbbi §-ban, hogy a kúpszelet érintői annak tetszőleges két érintőjét projektív pontsorok szerint metszik, tehát: *a kúpszelet érintőinek összessége, II. o. sugársornak sugarai. —*

10. §. Kúpszeletek beosztása.

65. Láttuk az előbbi §§-ban, hogy két ugyanazon síkban fekvő projektív sugársor megfelelő sugarainak metszőpontjai, valamint két ugyanazon síkban fekvő projektív pontsor megfelelő pontjait összekötő sugarak érintőpontjai, ha a sorok általános helyzetűek: egy és ugyanazon görbe vonalon fekszenek, melynek neve *kúpszelet*.

De a kúpszeletek speciális tulajdonságaikra nézve különbözőhetnek egymástól, a szerint, a mint az őket képező sugár- vagy pontsorok különböző kölcsönös helyzettel bírnak, vagy maguk ezen sorok speciális tulajdonságuk.

A kúpszeletek rendszeren végtelen távol fekvő pontjaik minősége szerint osztatnak be, és mert a sík végtelen távol fekvő pontjait, mint már említettük, egyenesen g_{∞} -en fekvőnek tekintjük, egyenes vonal pedig a kúpszeletet két valós és széteső (különböző), két valós de egybeeső, vagy végre két képzetes pont szerint metszheti: a kúpszeletnek 2, 1, vagy 0 valós pontja lehet végtelen távol. A kúpszelet neve azon esetben, ha két (valós) pontja van végtelen távol: *hyperbola*; ha csak egy (valós) pontja van végtelen távol: *parabola*; végre ha a kúpszelet nem bír végtelen távol fekvő valós ponttal: *ellipsis*.

Két projektív sugársor képződményének akkor lesz végtelen távolban fekvő pontja, ha létezik a sugársorokban oly két megfelelő sugár, mely egymással párhuzamos. Ennélfogva a projektív sugársorok képződménye hyperbola, parabola, vagy ellipsis lesz, a szerint, a mint a sugársoroknak 2, 1, 0^o számú egymásnak megfelelő sugara párhuzamos.

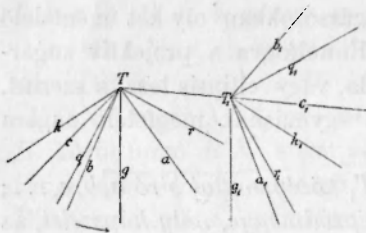
66. Hogy megtudjuk, valjon T, T_1 középponttal bíró $a, b, c, \dots; a_1, b_1, c_1, \dots$ projektív sugársorok képződménye, mily kúpszelet, az egyik, pl. T sugársort párhuzamosan elmozdítjuk, míg T középpontja T_1 -gyel összeesik, vagy mi ugyanaz: T_1 -en át T sugársor a, b, c, \dots sugaraival a_2, b_2, c_2, \dots párhuzamosokat húzunk. A szerint a mint T_1 középponttal bíró $a_1, b_1, c_1, \dots; a_2, b_2, c_2, \dots$ projektív sugársoroknak 2, 1, 0 valós kettőssugaruk van: a, b, c, \dots és a_1, b_1, c_1, \dots sugársoroknak 2, 1, 0 számú megfelelő párhuzamos sugaruk lesz, tehát ezen sugársorok képződménye hyperbola, illetőleg parabola, vagy ellipsis.

Ismeretes az előbbiekből (27., 28.), hogy két ellenkezőleg forgó közös középpontú projektív sugársornak mindig két valós kettőssugara van, és hogy két egyenlőképp forgó ily sugársor akkor bír két

valós kettőssugárral, ha hatványsugaraik egymástól nincsenek elválasztva, és mert a sugársorok párhuzamos elmozdításánál a forgás értelme nem változik, azért: *ugyanegy síkban fekvő általános helyzetű és ellenkezőleg forgó projektív sugársor képződménye szükségkép hyperbola; továbbá két egyenlőképp forgó ily sugársor képződménye ellipsis, vagy hyperbola, a szerint a mint az egyik, illetőleg a másik sugársor hatványsugaraival tetszőleges ponton áthuzott párhuzamosok közül az első kettő az utóbbi kettőt elválasztja, vagy nem választja el egymástól; végre két egyenlőképp forgó ily sugársor képződménye parabola, ha hatványsugaraik közül egy pár megfelelő párhuzamos.*

Az egyenlőképp forgó projektív sugársorok képződménye tehát ellipsis, hyperbola vagy parabola lehet, és csak a hatványsugárpárok végtelen távol fekvő pontjainak kölcsönös helyzetétől, vagyis ezeknek irányától függ, hogy a kúpszelet milyen természetű görbe, miért is az egyik sugársornak a középpont körül eszközözendő forgása által elérhetjük, hogy a sugársorok képződménye ellipsis, hyperbola, vagy parabola legyen.

Kiindulva az egyenlőképp forgó sugársorok azon helyzetéből, melynél két megfelelő hatványsugár, pl. g, g_1 párhuzamos, tehát a



48. ábra.

másik kettő általában nem párhuzamos, és mely helyzetnél a képződmény parabola, forgassuk az egyik, pl. T sugársort középpontja körül, mint a mellékelt 48. ábrában a nyíl mutatja. Mindaddig, míg h sugár nem lesz párhuzamos h_1 -gyel, T_1 -en át g, h -val párhuzamosan huzott sugarak g_1, h_1 -et elválasztják, tehát a sugársorok képződménye

ellipsis marad. A midőn h párhuzamos lett h_1 -gyel, a képződmény ismét parabola. Tovább forgatván T sugársort eredeti helyzetéig, g, h -val T_1 -en át párhuzamosan huzott sugarak g_1, h_1 -et nem választják el, és így a képződmény hyperbola lesz.

Ez utóbbi forgatásnál az egymásnak megfelelő derékszög szárai párhuzamosak lesznek; ekkor tehát a hyperbola végtelen távol levő pontjai két egymásra merőleges egyenesen fekszenek. Ily különös hyperbolát, melynek végtelen távol levő pontjai egymásra merőleges egyenesen vannak: *egyenoldalú hyperbolának* neveznek.

Ugyanezen forgatás alkalmával még előfordul azon eset, hogy a két sugársor egyszer perspektív helyzetű lesz, akkor t. i. a midőn $[T, T_1] = c_1$ -nek megfelelő c sugár, c_1 -gyel összeesik. A kúpszelet ezen esetben *elfajul két egyenessé*, melyek közül az egyik a perspektív tengely, a másik a közös cc_1 sugár, mert mindkét egyenesnek pontjai, a sugársorok két megfelelő sugarainak közös pontjai.

67. Két *egyenlően-projektív* sugársornak 0. vagy 2 megfelelő párhuzamos sugara van, a szerint, a mint a sorok egyenlőkép vagy ellenkezőleg forgók; ez utóbbi esetben a megfelelő párhuzamos sugarak egymásra merőlegesek, tehát a képződmény egyenoldalú hyperbola.

A midőn az egyenlően-projektív sugársorok egyenlőkép forgók, az általuk képezett kúpszelet két tetszőleges pontja a sorok középpontjaiból egyenlő szögek alatt projicziáltatik, tehát a kúpszelet *kör* lesz. Ezért mondhatjuk: *egyenlően-projektív sugársorok képződménye kör, vagy egyenoldalú hyperbola, a szerint a mint a sorok egyenlőkép, vagy ellenkezőleg forgók.*

Ha a projektív sugársorok T, T_1 középpontjai végtelen távol vannak, tehát az egyes sugársorok sugarai párhuzamosak, képződményük közönséges, vagy egyenoldalú hyperbola, a szerint a mint a sugársorok sugarai egymásra nem merőlegesek, vagy merőlegesek, mert mint tudjuk, a sorok középpontjai T, T_1 , pontjai a képződött görbének. A sugársoroknak azon sugarai, melyek a végtelen távol fekvő közös sugárnak felelnek meg: a sugársorok középpontjaiban, tehát a hyperbola végtelen távol fekvő pontjaiban érintik a hyperbolát. A hyperbola végtelen távol fekvő pontjainak érintői, *asymptotáknak* neveztetnek, és ezek természetesen, más projektív sugársorokból képezett hyperbolánál is előfordulnak.

Ha az egyik sugársor T középpontja végtelen távol, a másik T_1 , pedig végesben van, akkor képződményük hyperbola, vagy parabola, a szerint a mint T_1 középponton át az előbbi sorral párhuzamosan vont sugárnak megfelelő sugara, véges vagy végtelen távol van. —

68. Vizsgáljuk most meg, hogy két projektív pontsor képződménye, a sorok mily helyzeténél vagy specialis tulajdonságánál lesz az egyik, vagy másik kúpszelet?

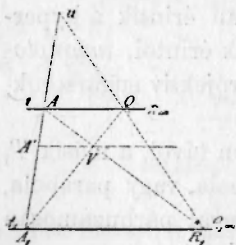
Parabolának, az értelmezés szerint, két egybeeső végtelen távol fekvő pontja van, tehát a sík végtelen távol fekvő egyenese érinti a parabolát. Mint minden más érintője a parabolának, úgy ezen végtelen távol fekvő érintő is a pontsorok tartóit megfelelő pontokban

metszi. Ha tehát a pontsorok képződménye parabola, úgy azoknak végtelen távol fekvő pontjai megfelelők, vagyis a pontsorok hasonlóan-, vagy egyenlően-projektívek. Ennélfogva: *két ugyanazon síkban fekvő hasonlóan-, vagy egyenlően-projektív pontsor képződménye parabola.*

Ugyanazon oknál fogva, mert a sík végtelen távol fekvő egyenese a parabola érintője: *két ugyanazon síkban fekvő projektív pontsor képződménye parabola, ha az egyiknek tartója végtelen távol fekszik.*

69. Más két, ugyanazon síkban fekvő projektív pontsor képződménye csak hyperbola, vagy ellipsis lehet, és hogy melyike ezen görbéknek lesz burkolva a pontsorok megfelelő pontjait összekötő sugarak, vagyis a II. o. sugársor által, attól függ: van-e oly sugár a II. o. sugársorban, melynek érintőpontja végtelen távol fekszik?

Könnyen kimutatható, hogy ha a projektív pontsorok sem hasonlóan — sem pedig egyenlően — nem projektívek, úgy a II. o. sugársor minden sugarával párhuzamos sugár létezik a sorban. Ha ugyanis az első pontsor ellenpontján át a második pontsor tartójával párhuzamosat húzunk, úgy ez a pontsorok két megfelelő pontját köti össze, tehát ez a II. o. sugársornak azon sugara, mely a második pontsor tartójával párhuzamos, és mert a felvett pontsorok, bármely két sugáron a többi sugártól kimetszett pontsorokkal pótolhatók, azért *a II. o. sugársor minden sugárhoz található párhuzamos sugár a sorban.*— Hogy a II. o. sugársor által burkolt görbe természetét megvizsgáljuk, vegyünk fel először



49. ábra.

azon esetet, a melynél a pontsorok tartói t, t_1 párhuzamosak (49. ábra) és nevezzük a projektív pontsorok ellenpontjait Q, R_1 -nek; egy pár megfelelő pontot A, A_1 -nek. Minthogy Q, R_1 a sorok végtelen távol fekvő közös $Q_{1\infty}, R_{1\infty}$ pontjainak felelnek meg, a tartók Q és R_1 -ben érintik a kúpszeletet. $|AA_1|$ sugár érintőpontját azon tétel (63.) alapján szerkeszthetjük, hogy

a kúpszelet körülírt háromszög (vagy a mi ugyanaz: háromoldal) szögpontjait, az oldalak érintőpontjaival összekötő egyenesek, egy ponton mennek át». Ennélfogva $|QA_1|$ és $|R_1A|$ egyenesek V metszéspontján át t -vel párhuzamos egyenes AA_1 -et A' érintőpontban metszi. Ezen A' pont, tekintve $QVR_1R_{1\infty}$ négyoldalt, $|AA_1|, |QR_1|$ egyenesek U metszéspontját, A, A_1 -től harmoniku-

san választja el. A szerint tehát, a mint $|AA_1|$ sugár $|QR_1|$ egyenest QR_1 közön kívül, vagy belül metszi: A' érintőpont AA_1 közön belül, vagy kívül lesz, és csak ez utóbbi esetben juthat A' végtelen távolba. Az U metszőpont helyzete a párhuzamos tartókon fekvő projektív pontsoroktól függ, még pedig ha a pontsorok ellenkezőleg haladók, tehát Q és R_1 -től jobbra, valamint balra fekvő részei felelnek egymásnak: U pont mindig QR_1 közön kívül fekszik; ha pedig a pontsorok egyenlőkép haladók, úgy U pont mindig QR_1 közön van. «Párhuzamos tartókon fekvő projektív pontsorok megfelelő pontjait összekötő sugarak által burkolt görbe tehát ellipsis, vagy hyperbola, a szerint, a mint a pontsorok ellenkezőleg, vagy egyenlőkép haladók. Azon esetben, a midőn a görbe hyperbola, annak asymptotái (a végtelen távol fekvő pontok érintői), a pontsorok megfelelő hatványpontjait összekötő sugarak.»

A tétel utolsó része könnyen belátható, ha megfontoljuk, hogy G, H és G_1, H_1 hatványpontok Q , ill. R_1 -től egyenlő távolságra vannak, tehát GG_1, HH_1, QR_1 közök közös metszőpontja M , egyzersmind azoknak felezőpontja, és hogy ezért G, G_1 ; valamint H, H_1 -től M által harmonikusan elválasztott pont: $|GG_1|, |HH_1|$ sugaraknak végtelen távol fekvő érintőpontja. Ebből látható egyzersmind, hogy a burkolt görbe *egyenoldalú hyperbola*, ha $|GG_1|$, merőleges $|HH_1|$ -re, vagyis ha G, H és így G_1, H_1 hatványpontok távolsága egymástól, egyenlő az ellenpontok QR_1 , távolságával.

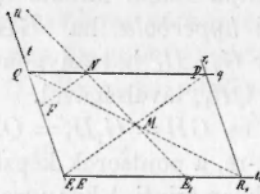
Ha a pontsorok *ellenkezőleg* haladók és $GH = G_1H_1 = QR_1$, továbbá QR_1 egyenes merőleges $GH \parallel G_1H_1$ -re, a pontsorok képződménye azon *kör*, mely a tartókat Q, R_1 pontokban érinti. A kör ugyanis ama tulajdonsággal bír, hogy két párhuzamos érintőről egy változó érintő által lemetszett részek szorzata, egyenlő a kör-küllő négyzetével, és ha X, X_1 a pontsorok két megfelelő pontja, akkor a pontsorok jelen helyzeténél $QX \cdot R_1X_1 = GQ^2 = \left(\frac{OR_1}{2}\right)^2 =$ a pontsorok hatványával.

70. Áttérünk most azon általános eset megvizsgálásához, melynél a pontsorok tartói nem párhuzamosak.

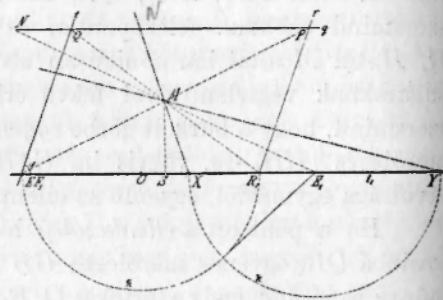
Legyen (50. ábra) t, t_1 két ily tartó, Q, R_1 azoknak ellenpontja; q, r_1 azon két sugár, mely Q , ill. R_1 -en át t_1 , ill. t -vel párhuzamosan halad, P ezeknek metszőpontja, végre E_1, t_1 tartónak érintőpontja. A projektív vonatkozás ezek által meg van határozva, mert $Q_{1\infty}, R_1, E_1$ -nek megfelel $Q, R_{1\infty}$, és a tartóknak E metszőpontja.

q sugár érintőpontja N ezen adatokból könnyen megtalálható,

és nem más (47. ábra), mint t, t_1, q, r négyoldal QR_1, EP átlóinak M közös pontján, és az adott E_1 érintőponton átmenő ME_1 egyenesnek metszőpontja q -val. Ha már most t_1 és q egyeneseket tekintjük, úgy E_1 és N érintőpontok: t_1, q tartókon fekvő projektív pontsoroknak ellenpontjai, míg R_1, P és $E \equiv F_1, Q$ más két megfelelő pontpár. Az előbb tárgyalt esetet szem előtt tartva: a II. o. sugársor által burkolt görbe ellipsis, vagy hyperbola lesz, a szerint a mint $|QE| \equiv t$ sugár érintőpontja F , QE közön belül, vagy kívül fekszik. Ez azonban t_1 érintőpontjának, E_1 -nek helyzetétől függ. Ha ugyanis E_1 pont F_1R_1 közön belül van, úgy N is QP közön belül lesz, tehát NE_1 és QE metszőpontja U által Q, E -től harmonikusan elválasztott F érintőpont QE közön belül lesz, és a kúpszelet ellipsis. Az ellenkező esetben, a midőn E_1, F_1R_1 közön kívül fekszik, F is EQ közön kívül fog lenni, és a kúpszelet hyperbola. E szerint: *Két projektív pontsor képződménye ellipsis, vagy hyperbola, a szerint, a mint az egyik, tehát egyszersmind a másik tartónak érintőpontja, a tartók metszőpontja és azok ellenpontja által határolt közön belül, vagy kívül fekszik.*



50. ábra.



51. ábra.

A midőn a görbe hyperbola, annak asymptotáit megkapjuk, ha t_1 tartó E_1 érintőpontjából k kört írunk le (51. ábra), mely R_1F_1 -en átmenő tetszőleges α kört derékszög alatt metszi, és t_1, k metszőpontjait X, Y -ot M -mel egyenesek által összekötjük. Ezen metszőpontok ugyanis t_1 és q -n képzelt projektív pontsoroknak t_1 -en fekvő hatványpontjai, mert

$$\overline{E_1 X^2} = E_1 R_1 \cdot E_1 E = E_1 R_1 \cdot NP,$$

hol N, E , a q, t_1 tartókon levő projektív pontsorok ellenpontja, P, R_1 pedig két megfelelő pont.

71. E körülményből könnyen levezethető azon reláció, melynek

bekövetkezéssel, t, t_1 tartón fekvő projektív pontsorok képződménye *egyenoldalú hyperbola*. Ha M -ből t_1 -re bocsátott merőlegesnek talppontját S -sel, R_1E felezőpontját O -val, t, t_1 hajlásszögét φ -vel jelöljük és tekintetbe vesszük, hogy egyenoldalú hyperbola esetében :

$$\overline{E_1M}^2 = \overline{E_1X}^2 = E_1R_1 \cdot E_1E,$$

úgy E_1R_1M háromszögből :

$$\overline{MR_1}^2 + \overline{E_1R_1}^2 + 2E_1R_1 \cdot R_1S = \overline{E_1M}^2 = E_1R_1 \cdot E_1E,$$

miből

$$\overline{MR_1}^2 = E_1R_1(E_1E - E_1R_1 - 2R_1S) = E_1R_1 \cdot 2(R_1O - R_1S) = E_1R_1 \cdot 2 \cdot SO,$$

és mert

$$EQ \cos \varphi = 2OM \cos \varphi = 2 \cdot OS,$$

azért :

$$\overline{MR_1}^2 = E_1R_1 \cdot EQ \cos \varphi.$$

Ezen egyenletből látható, hogy «ha az adott t, t_1 tartón levő projektív pontsorok hatványa $E_1R_1 \cdot EQ$, szorozva a tartók hajlásszögének cosinusával, egyenlő a tartókon fekvő ellenpontok féltávolságának négyzetével: úgy a pontsorok képződménye egyenoldalú hyperbola».

Hasonlóképp levezethető azon reláció, melynél t, t_1 tartókon levő pontsorok képződménye *kör*. Ekkor ugyanis, tekintve azon esetre, melynél a tartók párhuzamosak voltak, megkivántatik (69. pont végén), hogy t_1 tartó E_1 érintőpontján és M -en átmenő ME_1 egyenes merőleges legyen t_1 -re, és azonkívül :

$$\overline{E_1M}^2 = E_1R_1 \cdot F_1E_1.$$

De minthogy (52. ábra) a körnél :

$$F_1E_1 = FE = QE - QF = QE - E_1R_1,$$

$$\overline{E_1M}^2 = E_1R_1 \cdot QE - \overline{E_1R_1}^2,$$

vagy

$$\overline{MR_1}^2 = E_1R_1 \cdot QE.$$

«Ha tehát t, t_1 tartókon fekvő projektív pontsorok hatványa egyenlő a tartókon fekvő ellenpontok féltávolságának négyzetével, és a tartók érintőpontjai a metszéspontoktól egyenlő távolságra vannak, a metszéspont és az ellenpont által határolt közön: úgy a pontsorok képződménye kör».

$$|IK|, |KL|, |LN|, |NI|$$

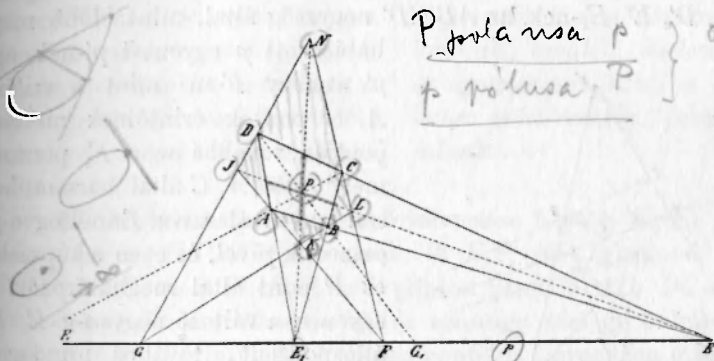
oldalai a kúpszeletet a négyszög A, B, C, D szögpontjaiban érintik, akkor
 a négyszög és négyoldal átellenes oldalainak metszéspontjai:

$$(AB, CD) \equiv E, (AD, BC) \equiv E_1, (IK, LN) \equiv F, (KL, IN) \equiv G,$$

ugyanazon p egyenesen fekszenek, másrészt a négyszög és négyoldal
 átellenes szögpontjait összekötő

$$|AC|, |BD|, |IL|, |KN|$$

egyenesek ugyanazon P ponton mennek át».



53. ábra.

P pontja usa p } a kúpszelet
 p polusa P } által meg-
 határozva.

A négyszög és négyoldal ezen tulajdonságához még az is hozzá-
 járul, hogy $IKLN$ négyoldal IL, NK átlói $ABCD$ négyszögnek E, E_1
 átlópontjait tartalmazzák. Tekintve ugyanis

$$|IN|, |LN|, |IK|$$

kúpszelet-érintőket, melyek

$$|LN|, |IN|, |IK|, |KL|, \dots$$

kúpszelet érintők által projektív pontsorok szerint metszetnek:

$$(NDIG) \bar{\wedge} (CNFL) \bar{\wedge} (FIAK),$$

és így

$$(NDIG) \bar{\wedge} (NCLF), \text{ és } (NDIG) \bar{\wedge} (KAIF),$$

tehát $|IL|$ egyenes, $|DC|$ és $|GF|$ -nek E metszéspontján,

$$|NK| \llcorner AD \llcorner GF \text{-nek } E_1 \llcorner$$

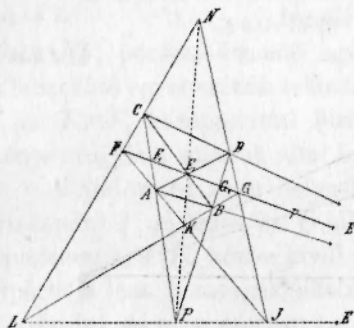
megy át.

Mindezekből következik: p egyenes és P pont a négyszög és négyoldalt illetőleg azon helyzettel bír, hogy a négyszög két-két átellenes szögpontja és a négyoldal két-két átellenes oldala által harmonikusan van elválasztva. Ha mi most először $ABCD$ négyszög B, D szögpontjait oly módon változtatjuk, hogy azok mindig a kúpszeleten maradjanak és összekötő egyenesük P ponton menjen át, akkor a változó négyszögdoldaloknak és a változó B, D pontok érintőinek metszéspontjai:

$$(AB, CD) \equiv E, (AD, BC) \equiv E_1, (KL, IN) \equiv G,$$

a változatlan helyzetű p egyenesen maradnak.

Nevezzük ugyanis B, D, E, E_1 pontokat az új helyzetek egyikében B', D', E', E_1' -nek, az $AB'CD'$ négyszög által, mint előbb meghatározott p egyenest p' -nek, úgy p' átmegy F -en, mint a szilárd



54. ábra.

A, C pontok érintőinek metszéspontján, továbbá azon F_1 ponton, mely P -től A, C által harmonikusan van elválasztva. Ennélfogva p' összeesik p -vel, és ezen a kúpszeleten és P pont által meghatározott p egyenes, a változó négyszög E, E_1 átlóspontjait, továbbá mindazon G_1 pontokat tartalmazza, melyek P -n átmenő BD kúpszelet-húrok végpontjait P -től harmonikusan el-

választják, végre azon G pontokat, melyben a változó BD húr végpontjainak érintői egymást metszik.

Ha másodszer a kúpszelet körül írt $IKLN$ négyoldal IN, KL oldalait oly módon változtatjuk, hogy azok egymást a szilárd p egyenesen messék és a kúpszeletet érintsék, akkor a változó négyoldal átellenes szögpontjait, és a változó érintők érintőpontjait összekötő $|IL|, |KN|, |BD|$ egyenesek ugyanazon P ponton mennek át.

F pont ugyanis a négyoldal változatlan IK, LN oldalainak A, C érintőpontjait összekötő $|AC|$ egyenesen, és még azon egyenesen fekszik, mely p -től $|IK|, |LN|$ oldalak által harmonikusan van elválasztva.

Ezen a kúpszeleten és p egyenes által meghatározott P ponton átmennek mindazon egyenesek, melyek p pontjaiból a kúpszelethez vont érintőpáráktól p által harmonikusan vannak elválasztva, továbbá

ezen érintőpárok érintő-húrjai, végre a változó négyoldal $|IL|$, $|KN|$ átlói is.

A kúpszelet és P pont által az előbbieket szerint meghatározott p egyenes: P pontnak polárisa a kúpszeletet illetőleg; ellenben a kúpszelet és p egyenes által meghatározott P pont, p egyenesnek pólusa a kúpszeletet illetőleg. E vizsgálódás eredményét e szerint így foglalhatjuk össze:

Egy pont polárisa mindazon pontokat tartalmazza, melyek a ponton átmenő kúpszelet-húrok végpontjait, vagy röviden mondva, kúpszelet-húrokat, a ponttól harmonikusan elválasztják; továbbá mindazon pontokat, melyekben a felvett ponton átmenő kúpszelet-húrok végpontjainak érintői egymást metszik.

Egy egyenes pólusa mindazon egyeneseknek metszőpontja, melyek az egyenes pontjaiból a kúpszelethez vont érintőpárokat, az egyenestől harmonikusan elválasztják; továbbá metszőpontja, az egyenes pontjaiból a kúpszelethez vont érintők, érintő-húrjainak.

74. A pólus és poláris ezen értelmezése folytán E , E_1 pontoknak polárisai E_1P , EP egyenesek, és E_1P , EP egyenesek polusai E , E_1 pontok, mert pl. E_1P , az E ponton átmenő AB , DC húrokat E -től harmonikusan választja el, és szintúgy átmegy e húrok végpontjaiban vont érintők K , N metszőpontján. Ugyanazon értelmezésből folyik, hogy a kúpszelet tetszőleges pontjának polárisa, azon pont érintője, mert a ponton átmenő összes húrok végpontjainak érintői egymást azon érintőn metszik, és viszont a kúpszelet érintőjének pólusa, az érintőpont.

Ha most ismét, mint előbb, a kúpszeletbe írt $ABCD$ négyszög B , D szögpontjait oly módon változtatjuk, hogy a változó BD húr P ponton menjen át, úgy a változó E , E_1 átlóspontok bármelyikének polárisa P -n és a másik átlósponton megy át, és ezen átlóspontok befutják p egyenest. Ennélfogva: *egy tetszőleges ponton átfektetett egyenesek pólusai, azon pont polárisán vannak.*

egyenes pontjainak polárisai átmennek azon egyenes pólusán. —

A kúpszelet síkjában fekvő két oly pontot, melyek közül az egyiknek polárisa a másikon megy át, tehát viszont a másodiknak polárisa az első pontot tartalmazza: a kúpszeletet illetőleg *kapcsolt pólus*-nak, és a kúpszelet síkjában fekvő oly két egyenest, melyek közül bármelyiknek pólusa, a másikon fekszik: a kúpszeletet illetőleg *kapcsolt polárisnak* nevezik. E szerint: egy pont polárisán fekvő bár-

mely pont, a felvett ponthoz a kúpszeletet illetőleg kapcsolt pólus, és egy egyenes pólusán átmenő tetszőleges egyenes a felvett egyeneshez a kúpszeletet illetőleg kapcsolt poláris.

A kúpszeletbe írt $ABCD$ négyszögnek E, E_1, P átlópontjai közül bármely kettő kapcsolt pólus, és a kúpszelet körül írt $IKLN$ négyoldalnak IL, NP, GF átlói közül bármely kettő kapcsolt poláris a kúpszeletet illetőleg. — A kúpszelet érintőjének bármely pontja kapcsolt az érintőponthoz, és a kúpszelet bármely pontján átmenő egyenes kapcsolt azon pont érintőjéhez.

75. Hogy p egyenesen fekvő, vagy P ponton átmenő kapcsolt pólus-, illetőleg polárisokról fogalmat szerezzünk magunknak, változtassuk ismét a kúpszeletbe írt $ABCD$ négyszög B, D szögpontjait úgy, hogy összekötő egyenesük AC -nek P pontján menjen át, és nevezzük B, D szögpontokat, valamint E, E_1 kapcsolt pontokat, mint a változó négyszög átlópontjait az új helyzetek egyikében B', D', E', E'_1 -nek. Ha most tekintetbe vesszük, hogy a kúpszelet $A, D, C, D' \dots$ pontjai A és C -ből projektív sugársorok által projicziáltak:

$$A(FDCD' \dots) \overline{\wedge} C(ADFD' \dots),$$

tehát

$$(FE_1F_1E'_1 \dots) \overline{\wedge} (F_1EFE' \dots),$$

mely egyenlet azt fejezi ki, hogy

$$F, F_1; E, E_1; E', E'_1$$

pontpárok, valamint

$$|PF|, |PF_1|; |PE|, |PE_1|; |PE'|, |PE'_1|$$

sugárpárok, involucziós soroknak kapcsolt elemei.

Ebből következik: *tetszőleges*

egyenesen fekvő és a kúpszeletet illetőleg kapcsolt pólusok, involucziós helyzetű pontsorról képeznek; továbbá: egyenesen fekvő pontsor polárisai, a pontsorról involucziós helyzetű, tehát projektív, sugársort képeznek, melynek középpontja, a pontsor tartójának pólusa.

ponton átmenő kapcsolt polárisok involucziós sugársort, továbbá egy sugársor sugárainak pólusai a sugársorral involucziós helyzetű, és így projektív pontsorról képeznek, melynek tartója, a sugársor középpontjának polárisa.

A midőn p egyenes a kúpszeletet két valós pontban metszi, és a változó BD húr a metszőpontok egyikén átmegy, azon metszőpontban a harmonikus osztás miatt a változó húr két végpontja B, D és

a négyszög két átlópontja E, E_1 egyesül. A változó BD húr ekkor a metszőpont érintője, és a metszőpont maga, két összeeső kapcsolt pólus lesz. Ha ellenben p nem metszi a kúpszeletet valós pontokban, úgy $ABCD$ változó négyszög E, E_1 átlópontjai nem eshetnek egybe.

Ennélfogva : valamely

egyenesen fekvő és a kúpszeletet illetőleg kapcsolt pólusok által képezett involúziós pontsor hyperbolikus elliptikus, vagy parabolikus, a szerint a mint az egyenes a kúpszeletet két valós, vagy képzetes pontban metszi, vagy pedig érinti; a kúpszelet és az egyenes közös pontjai képezik az involúziós pontsor kettőspontjait.

ponton átmenő és kúpszeletet illetőleg kapcsolt polárisok által képezett involúziós sugársor hyperbolikus elliptikus, vagy parabolikus, a szerint a mint a pontból a kúpszelethez két valós, vagy képzetes érintő vonható, vagy pedig a pont maga a kúpszeleten fekszik; a ponton átmenő kúpszelet-érintők képezik az involúziós sugársor kettőssugarait.

Ha a kúpszelet síkjának azon részét, melyből a kúpszelethez két valós érintő vonható : a kúpszeleten kívül fekvőnek, a másikat : a kúpszeleten belül fekvőnek nevezzük : úgy egy ponton átmenő és a kúpszeletet illetőleg kapcsolt polárisok, valamint a pont polárisán levő és a kúpszeletet illetőleg kapcsolt pólusok hyperbolikus, vagy elliptikus természetű involúziós sort képeznek, a szerint, a mint a pont a kúpszeleten kívül, vagy belül fekvő síkrészen van, és így a pont polárisa a kúpszeletet, valós vagy képzetes pontokban metszi.

A kúpszeleten kívül fekvő rész bármely pontjának polárisa a kúpszeletet azon valós pontokban metszi, melyben a ponton átmenő kúpszelet-érintők azt érintik, és viszont; a kúpszeletet valós pontokban metsző egyenes pólusa, a metszőpontok érintőinek közös pontja.

76. Ha egy háromszög P, E, E_1 szögpontjai valamely kúpszeletet illetőleg páronként kapcsolt pólusok, akkor mindegyik szögpont polárisa, a másik két szögpont összekötő egyenese, és így a háromszög oldalai páronként kapcsolt polárisok. Oly háromszög, melynek szögpontjai és így oldalai egy kúpszeletet illetőleg kapcsoltak : kapcsolt háromszögnek vagy polárháromszögnek neveztetik.

Egy polárháromszög szögpontjai közül kettő a kúpszeleten kívül, egy azon belül fekszik, és így oldalai közül kettő a kúpszeletet valós, egy pedig képzetes pontpárban metszi. Egy polárháromszög szerkesztésénél ugyanis, annak egyik szögpontját tetszőlegesen vehetjük fel, a

másik két szögpont pedig az elsőnek polárisán fekvő két tetszőleges kapcsolt pontpár. Ha tehát a polárháromszög első szögpontja a kúpszeleten kívül lett felvéve, úgy azon szögpont polárisa a kúpszeletet valós pontokban metszi, és így azon polárison fekvő kapcsolt pólusok közül egy a kúpszeleten kívül, egy pedig belül lesz. Ha pedig az első szögpont a kúpszeleten belül lett felvéve, úgy polárisa a kúpszeletet nem metszi valós pontokban, miért is ezen polárison fekvő bármely két kapcsolt pólus, mint a polárháromszög másik két szögpontja, a kúpszeleten kívül lesz.

A polárháromszög még egyszerűbben szerkeszthető következő tétel alapján.

A kúpszeletbe írt tetszőleges négyszög átlópontjai, egy polárháromszög szögpontjai,

A kúpszelet körül írt tetszőleges négyoldal átlói, egy polárháromszög oldalai,

mert az előbbieket szerint, az átlópontok, illetőleg átlók, kapcsolt pólus és polárisok, a kúpszeletet illetőleg.

77. Térjünk ismét vissza a kúpszeletbe írt $ABCD$ négyszöghez, melynek szerkesztését oly módon képzelhetjük, hogy tetszőleges P ponton át két tetszőleges egyenest AC , BD -t húzunk, és metszéspontjait a kúpszelettel egyenesek által összekötjük. Minthogy $ABCD$ négyszög E , E_1 átlópontjai P polárisán, p -n, kapcsolt pólusok lesznek, és P -n átmenő BD húr változása következtében a változó AB , AD oldalak p -t a változó négyszög E , E_1 átlópontjaiban, tehát mindig kapcsolt pólusokban metszik, végre minthogy a kapcsolt pólusok p -n involúciós pontsört (75.) képeznek mondhatjuk:

Ha egy tetszőleges ponton átmenő kúpszelet-húrok végpontjait a kúpszelet bármely pontjából projicziáljuk; a projicziáló sugarak involúciós sugársort képeznek, mely hyperbolikus vagy elliptikus a szerint, a mint a felvett pont a kúpszeleten kívül vagy belül fekszik.

Ha egy tetszőleges egyenes pontjaiból a kúpszelethez érintőket húzunk, úgy ezek a kúpszelet bármely érintőjét involúciós pontsör szerint metszik, mely hyperbolikus vagy elliptikus a szerint, a mint az egyenes a kúpszeletet valós vagy képzetes pontokban metszi.

A jobb oldalon álló tételnek helyes volta szintén könnyen belátható. Ha ugyanis $IKLN$ négyoldal $|IN|$, $|KL|$ oldalait úgy változtatjuk, hogy azok a kúpszeletet érintsék és egymást p -n messék, úgy

a változó $|IP|$, $|KP|$ kapcsolt polárisok involucziós sugársort, és I , K pontok involucziós pontsort irnak le. Mindkét tétel meg is fordítható, t. i.:

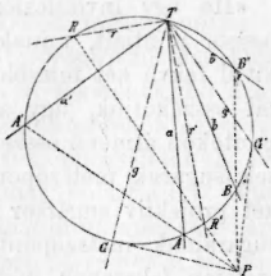
«Ha egy tetszőleges involucziós sugársor középpontja valamely kúpszeleten fekszik, úgy ezen involucziós sugársor kapcsolt sugárainak (második) metszőpontjait összekötő egyenesek, egy ponton mennek át. Ezen pont a kúpszeleten kívül vagy belül fekszik, a szerint a mint a felvett sugársor hyperbolikus vagy elliptikus.»

«Ha a kúpszelet valamely érintőjében fekvő involucziós pontsor kapcsolt pontjaiból a kúpszelethez érintőket húzunk, úgy ezeknek metszőpontjai egyenesen fekszenek, mely a kúpszeletet valós vagy képzetes pontokban metszi, a szerint a mint a felvett pontsor hyperbolikus vagy elliptikus.»

Hogy ezt bebizonyítsuk, nevezzük az involucziós sugársor középpontját A -nak, két pár kapcsolt sugár metszőpontját a kúpszelettel B, D ; B', D' -nek, végre $BD, B'D'$ húr közös pontját P -nek. P -n átmenő hurok végpontjait A -ból projecziáló sugársor involucziós; ez az adott involucziós sugársorral két pár kapcsolt sugarat AB, AD ; AB', AD' -et közösen bír, miért is az utóbbi sornak minden sugárpárja összeesik az adott sornal, és így az összes sugárpárok és a kúpszelet metszőpontját összekötő egyenes, P ponton megy át.

Ha P a kúpszeleten kívül fekszik, akkor nem minden P -n átmenő szelő metszi a kúpszeletet valós pontokban, ezért a *hyperbolikus involucziós sornak képzetes kapcsolt elempárjai is vannak*.

E tétel alapján könnyű egy involucziós sugársor tengelyeit, kettőssugarait (ha azok valóságosak), továbbá két ugyanazon középponttal bíró involucziós sugársor közös kapcsolt sugárpárját szerkeszteni. Ha ugyanis a sornak T középpontján át kört fektetünk, mely az involucziós sugársor meghatározására szolgáló a, a' ; b, b' sugárpárt A, A' ; B, B' pontokban metszi, úgy az AA', BB' egyenesek P metszőpontján átmenő körátmérő RR' végpontjai és P -n átmenő kör-érintők G, G' érintőpontjai, T -ből a sugársor r, r' tengelyei, illetőleg g, g' kettőssugarai által projecziálódnak. Ha továbbá a második involuczióssugársor a_1, a'_1 ; b_1, b'_1 kapcsolt sugárpárjai a kört A_1, A'_1 ; B_1, B'_1 pontokban



55. ábra.

metszik és $A_1A'_1$, $B_1B'_1$ egyenesek közös pontja P_1 , úgy a két involúciós sugársor közös kapcsolts sugárpárja PP_1 egyenes és a kör valóságos vagy képzetes metszőpontjain megy át (55. ábra).

78. A kapcsolts pólus és polárisokról egyszerű úton bebizonyítható következő tétel:

A kúpszeletbe írt háromszög két oldalának metszőpontjai a harmadiknak polusán átmenő egyenessel: kapcsolts pólusok a kúpszeletet illetőleg.

Azon sugarak, melyek a kúpszelet körül írt háromszög két szögpontját a harmadiknak polárisán fekvő tetszőleges pontból projicziálják: kapcsolts polárisok a kúpszeletet illetőleg.

A kúpszeletbe írt ABD háromszög AB , AD oldalait metszéshez hozzuk BD -nek polusán G -n átmenő tetszőleges p egyenessel E , E_1 -ben. Minthogy p egyenes BD -nek pólusán megy át, p -nek polusa P , rajta fekszik BD -n, és ha AP -nek második metszőpontját a kúpszelettel C -nek nevezzük, úgy $ABCD$ négyszög átlópontjai közül egyik P lesz, a másik kettő pedig P -nek polárisán tartozik feküdni, — miért is E és E_1 gvel összeesik.

A tétel így is kifejezhető:

«Ha a kúpszeletbe írt háromszög egyik szögpontja a kúpszeleten mozog, úgy a változó oldalak, az állandó oldal pólusán átmenő tetszőleges egyenest (kapalts pólusokban, tehát) involúciós pontsor szerint metszik.»

«Ha a kúpszelet körül írt háromszög egyik oldala a kúpszeletet érintőleg mozog, úgy a változó szögpontok, az állandó szögpont polárisának bármely pontjából involúciós sugársor által projicziáltnak.»

De fordítva is következik, hogy:

«Ha egy involúciós pontsor összes pontjait, annak tartóján kívül fekvő két tetszőleges ponttal összekötjük, úgy a kapcsolts pontokon átmenő összes egyenesek (sugarak) metszőpontjai, mint két projektív sugársor megfelelő sugarainak metszőpontjai: kúpszeleten fekszenek, mely átme-

«Ha egy involúciós sugársor összes sugarait két tetszőleges egyenessel metszéshez hozzuk, akkor két-két megfelelő kapcsolts sugár metszőpontjait összekötő egyenesek: kúpszeletet burkolnak; e kúpszelet a két egyenest érinti, és erre vonatkozólag a sugársor középpontja és a két egyenes

a két felvett ponton, és melyre vonatkozólag a két pont összekötő egyenese és a pontsor tartója kapcsolt poláris, az involúciós pontsor kapcsolt pontjai pedig kapcsolt pólusok.»

metszőpontja, valamint a sugársor kapcsolt sugarai, kapcsolt pólus, illetőleg polárisok.»

79. Az előbbi tételből folyik, hogy végtelen sok polárháromszög szerkeszthető, melynek szögpontjai egy kúpszeletbe írt háromszög oldalain fekszenek, vagy melynek oldalai egy a kúpszelet körül írt háromszög szögpontjain mennek át.

De fordítva is következik, hogy végtelen sok háromszöget lehet egy kúpszeletbe írni, melynek oldalai egy polárháromszög szögpontjain átmennek, vagy mint mondani szokás, mely egy polárháromszög körül van írva; és végtelen sok háromszöget lehet a kúpszelet körül és egy polárháromszögbe írni.

Nevezzük ugyanis a polárháromszög szögpontjait P , E , E_1 -nek, a kúpszelet tetszőleges pontját A -nak, AE , AE_1 metszőpontjait a kúpszelettel B , D -nek. Ha BD egyenesnek polusát E_1 -gyel egyenes által összekötjük, úgy ez AB -t, E_1 -hez kapcsolt pontban metszi, de AB -n E_1 -hez kapcsolt pont csak egy létezik, mert E_1 polárisa AB -t csak egy pontban metszheti, t. i. E -ben, és így mert BD -nek polusa EE_1 -en fekszik, BD átmegy EE_1 -nek polusán P -n. Ugyanígy bizonyíttatik be a tétel második része.

Ezen bebizonyításból az is következik, hogy ha két egymást a kúpszeleten metsző egyenes egyikének pontjait a másikon fekvő és hozzá kapcsolt pólusaival egyenesek által összekötjük, úgy ezek I. o. sugársort képeznek. E tétel általánosítása így hangzik:

«Ha két egyenes nem metszi egymást k kúpszeleten és az egyik egyenes pontjait a másik egyenesnek az előbbihez k -t illetőleg kapcsolt pólusaival egyenesek által összekötjük, úgy ezen összekötő sugarak, k' kúpszeletet burkolnak, mely a felvett két egyenest érinti. A felvett egyenesek bármelyikének k -ra vonatkozó pólusán átmenő, kapcsolt polárisok, kapcsolt

«Két állandó ponton átmenő és k kúpszeletre vonatkozólag kapcsolt polárisok metszőpontjai, a két állandó ponton átmenő új kúpszeleten k' -n fekszenek, ha azon állandó pontok összekötő egyenese nem érinti a kúpszeletet. A két állandó pont polárisán k által indukált involúciós pontsor kapcsolt elemei, k' -re nézve is kapcsolt pólusok, és a két állandó

polárisokegyszersmind k' -re nézve is, és a felvett egyenesek metszőpontjának polárisa k és k' kúpszeletet illetőleg egy és ugyanazon egyenes.»

ponton átmenő egyenes pólusa, mindkét kúpszeletet illetőleg, egy és ugyanazon pont.»

Az első egyenesen, t -n fekvő A, B, C, \dots pontsor ugyanis, e pontoknak k -ra vonatkozó polárisai által képezett sugársorral involúciós helyzetű s mint ilyen projektív, tehát a sugársor metszése a második t_1 egyenessel, vagyis a második egyenesen fekvő és az elsőnek pontjaihoz k -t illetőleg kapcsolt A_1, B_1, C_1, \dots pólusai, az elsővel szintén projektívek. De két projektív pontsor megfelelő elemeit összekötő egyenesek I. o. vagy II. o. sugársort képeznek, a szerint a mint a tartók metszőpontja egymásnak megfelelő vagy nem. Jelen esetben t, t_1 metszőpontja P , nem lesz egymásnak megfelelő, mert a metszőpont nem fekszik k kúpszeleten, tehát polárisa nem megy át a metszőponton, és így a megfelelő kapcsolt pontok összekötő egyenesei egy k' kúpszeletet burkolnak. Azt látjuk továbbá, hogy ha t -nek pólusán T -n átmenő két tetszőleges k -ra nézve kapcsolt poláris t -t E, F -ben, t_1 -et megfelelőleg F_1, E_1 -ben metszi, úgy: $|EE_1|, |FF_1|$ sugarak érintői k' -nek; miből következik, tekintve k' körül írt EFF_1E_1 négyoldalt (76.), hogy azon kapcsolt polárisok, k' -re nézve is kapcsolt polárisok lesznek. Ha végre meggondoljuk, hogy t, t_1 egyeneseknek érintőpontjai k' -tel, t, t_1 metszőpontjához, P -hez kapcsolt pólusok k -t illetőleg következik, hogy P pontnak k -ra vonatkozó polárisa, polárisa egyszersmind P pontnak k' -re nézve is. —

Ha még tekintetbe vesszük, hogy

$$|AA_1|, |BB_1|, |AB| \equiv t, |A_1B_1| \equiv t_1$$

egyenesek, k' körül írt négyoldalnak oldalai, melynek tehát $|AB_1|, |A_1B|$ átlói egymást $|AB|, |A_1B_1|$ érintők érintő-húrján, p -n metszik, és ezen p -n fekvő metszőpont P_1 , k -t illetőleg kapcsolt pólus P -hez, mondhatjuk: ha $A, A_1; B, B_1$ pontok kapcsolt pólusok valamely kúpszeletet illetőleg, akkor $|AB|, |A_1B_1|$ és $|AB_1|, |A_1B|$ egyeneseknek P, P_1 metszőpontjai szintén kapcsoltak azon kúpszeletre nézve, vagy más szóval:

Ha egy négyoldal két pár átellenes szögpontja kapcsolt pólus valamely kúpszeletet illetőleg, úgy a harmadik pár átellenes szög-

Ha egy négyszögnek két pár átellenes oldala valamely kúpszeletet illetőleg kapcsolt poláris, akkor a harmadik pár át-

p pont szintén kapcsolt lesz. (HESSE-ellenes oldal szintén kapcsolt féle tétel). (HESSE O. L. 1811—74.)* lesz.

Ugyanígy bizonyíttatik be ezen és az előbbi tételnek jobb oldalán levő tétel is, ha csak az adott egyeneseken levő kapcsolt pólusok helyett, az adott pontokon átmenő kapcsolt polárisokat vesszük figyelembe.

80. Ezekkel kapcsolatban, még más, a kúpszeletre vonatkozó tételek könnyen lezármasztathatók.

Ha az utóbb leírt ábrában t, t_1 -nek p -n fekvő pólusait k -t illetőleg T, T_1 -nek nevezjük, azt látjuk, hogy ABT_1 háromszög szögpontjai- és oldalainak polárisai, ill. pólusai, A_1B_1T háromszögnek oldalai, ill. szögpontjai. De előbb bebizonyítottuk, hogy $|A_1B|, |AB_1|$ egyenesek, $p \equiv |TT_1|$ egyenesen jutnak metszéshez, tehát

$$ABT_1, B_1A_1T$$

háromszögek oly helyzetűek, hogy

$$A, B_1; B, A_1; T_1, T$$

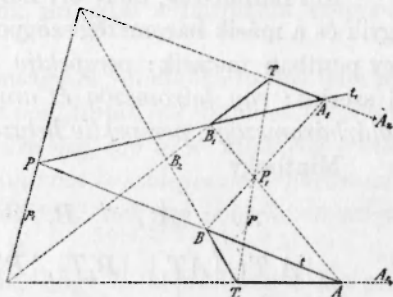
szögpontokat összekötő egyenesek egy ponton P_1 -en mennek át. Ezen

$$|AB_1|, |BA_1|, |T_1T|$$

egyenesek pólusai nem egyebek, mint az ABT_1, B_1A_1T háromszögek

$$|BT_1|, |A_1T|; |AT_1|, |B_1T|; |AB|, |B_1A_1|$$

oldalainak metszéspontjai; és mert azon egyenesek egy ponton P_1 -n mennek át, azért pólusai, vagyis e metszéspontok, ugyanazon egyenesen p_1 fekszenek. Minthogy ABT_1 háromszög k kúpszeletre nézve egészen tetszőleges, a talált eredmény így fejezhető ki: egy tetszőleges háromszög szögpontjainak és oldalainak polárisai, ill. pólusai valamely kúpszeletet illetőleg, egy és ugyanazon háromszögnek — a felvett háromszög úgynevezett polár-háromszögének — oldalai és szög-



56. ábra.

* E tétel irodalmára vonatkozó részletes jegyzék található FRITZ HOFMANN, «Die Constructionen doppelt berührender Kegelschnitte» Teubner. 1886, című könyv 73. lapján.

pontjai; és viszont ez utóbbi háromszög polárháromszöge: az eredeti háromszög. A felvett- vagy a polár-háromszög szögpontjainak összekötő egyenesei az átellenes oldalak pólusaival: egy ponton mennek át, és a felvett- vagy polár-háromszög oldalainak metszéspontjai az átellenes szögpontok polárisaival: ugyanazon egyenesen fekszenek, mely egyenes pólusa az előbbi pontnak.

Két háromszög, mely oly helyzetű mint a találtak, t. i. hogy az egyik és a másik háromszög szögpontjait összekötő egyenesek egymást egy pontban metszik: *perspektív helyzetű* háromszögnek nevezetetik. E szerint: *egy háromszög és annak bármely kúpszeletre vonatkozó polárháromszöge, perspektív helyzetű.* (Függelék 3.)

Minthogy

A, A_1, B, B_1 pontoknak polárisai,

$|A_1T|, |AT_1|, |B_1T|, |BT_1|$ egyenesek: az

$|AA_1|$, és $|BB_1|$ egyeneseknek pólusai

$|A_1T|, |AT_1|$, és $|B_1T|, |BT_1|$ egyeneseknek A_2 , ill. B_2

metszéspontjai. E szerint AA_1A_2, BB_1B_2 háromszögek külön-külön polárháromszögek k kúpszeletre nézve, mert a háromszögek egyes szögpontjainak polárisai az átellenes oldalak.

De tekintve, hogy $AA_2A_1B_1B_2B$, PASCAL-féle hatszög, mert átellenes oldalai:

$$|AA_2| \equiv |AT_1|, |B_1B_2| \equiv |TB_1|; |A_2A_1| \equiv |A_1T|, |B_2B| \equiv |BT_1|;$$

$$|A_1B_1|, |AB|$$

egymást p egyenesen metszik, és $AT_1BB_1TA_1$, BRIANCHON-féle hatoldal, mert főátlói

$$|AB_1|, |T_1T|, |BA_1|,$$

mint előbb láttuk, ugyanazon P_1 ponton mennek át, és azon hatszög szögpontjai, valamint ezen hatoldal oldalai, AA_1A_2, BB_1B_2 polárháromszögnek szögpontjai, illetve oldalai, mondhatjuk:

Egy kúpszelet két tetszőleges polárháromszögének

szögpontjai, egy új kúpszeleten fekszenek. Továbbá: ha egy kúpszelet átmegy egy másik kúpszeletre vonatkozó polárháromszög	oldalai, egy új kúpszeletnek érintői. Ha egy kúpszelet egy másik kúpszeletre vonatkozó polárháromszög oldalait érinti; akkor a
--	--

szögpontjain, akkor az első kúpszelet. a másik kúpszeletre vonatkozó végtelen sok polárháromszögnek szögpontjait tartalmazza. | második kúpszeletre vonatkozó végtelen sok polárháromszög oldalai érinteni fogják az első kúpszeletet.

Ez utóbbi tétel onnan következik, hogy egy polárháromszögnek egyik szögpontját egész tetszőlegesen, annak második szögpontját az elsőnek polárisán bárhol fölvehetjük, mi által a harmadik szögpont teljesen meg van határozva.

81. A kúpszelet polártulajdonságaira vonatkozó fontos tétel így hangzik: *egy tetszőleges k kúpszelet pontjainak és érintőinek polárisai, ill. pólusai egy másik α kúpszeletet illetőleg, egy új k' kúpszelet érintői és pontjai lesznek; k kúpszeletre vonatkozó tetszőleges polárháromszög szögpontjainak polárisai α -at illetőleg: k' -nek egy polárháromszöget képezik.*

Ezt bebizonyítandó képzeljük, hogy k , képződménye két projektív sugársornak, melynek T, T_1 középpontja, k -n fekszik, és melynek α -ra vonatkozó polárisa t, t_1 . — k kúpszelet P pontjának α -ra vonatkozó polárisa azon p egyenes, mely TP, T_1P egyenesek t és t_1 -en fekvő pólusait összeköti. De minthogy k -t képező két projektív sugársor sugarainak t, t_1 -en fekvő pólusai, a sugársorokkal és így önmaguk között is projektív (74.) pontsorok lesznek: a k -n változó P pont polárisai α -át illetőleg, t, t_1 -et két projektív pontsorban metszik, és ezért egy k' kúpszeletet burkolnak. Minthogy továbbá két pont összekötő egyenesének pólusa valamely kúpszeletet illetőleg, a két pont polárisának metszéspontja, azért k érintőjének, mint k -n két végtelen közel fekvő pont összekötő egyenesének pólusa α -t illetőleg: k' két végtelen közel fekvő érintőjének metszéspontja, — vagyis k' -nek egy pontja.

A tétel második részének helyes volta azonnal látható, ha tekintetbe vesszük, hogy k kúpszeletbe írt négyszög átlós- és szög-pontjainak polárisai α -át illetőleg, k' kúpszelet körül írt négyoldal átlói és oldalai.

k kúpszelet számos tulajdonsága e tétel alapján átvihető k' -re. Így a PASCAL-féle tételből, mely így hangzik: « k -ba írt hatszög átellenes oldalainak metszéspontjai, egyenesen fekszenek», következik BRIANCHON tétele, t. i.: « k' körül írt hatoldal átellenes szögpontjait összekötő egyenesek (főátlók), egy ponton mennek át».

A hatszög: oldalai, szögpontjai, és átellenes oldalak metszéspontjainak α -ra vonatkozó pólus és polárisai ugyanis, a hatoldal: szögpontjai, oldalai, és az átellenes szögpontokat összekötő egyenesek, s

minthogy a hatszög átellenes oldalainak metszéspontjai egyenesben fekszenek, a hatoldal főátlói ezen egyenes pólusán, tehát egy ponton, mennek át. Tekintve, hogy k' egy tetszőleges kúpszelet lehet, a megnyílt k' -ből k is szerkeszthető, mondhatjuk: ha a PASCAL-féle tétel minden kúpszeletre érvényes, úgy a BRIANCHON-féle tétel szintén érvényes lesz.

k' kúpszeletről, vagy bármely pont és egyenesekből álló idomról, melynek egyenesei és pontjai, egy k idom pontjainak, és egyenesének α -ra vonatkozó polárisai és pólusai azt mondjuk, hogy k -nak *recziprok-polár*, vagy röviden *polár* idoma, α *alap-*, *polarizáló-* vagy *vezérlő* kúpszeletre vonatkozólag; a két idom között fönnálló vonatkozást, *recziprok-polár vonatkozásnak*, és oly tételt, melyet valamely ismert tételből a recziprok-polár vonatkozás alapján képezni lehet, az ismert tétel *dualis tételének* nevezik.

Az előbbieken két-két dualis tételt többnyire egymás mellé helyeztük, hogy a *recziprocitás elvére* a figyelmet előre felköltjük.

Síkidomok recziprok-polár vonatkozása e szerint abban nyilvánul, hogy *az egyik idom minden pontjának és azon ponton átmenő egyenesnek, a másikban egy egyenes és azon fekvő pont felel meg.*

Ez képezi egyszersmind értelmezését az általános recziprok vonatkozásnak, melylyel később találkozunk. — A következőkben az egyes tételeknek megfelelő dualis tételeket csak helyenként fogjuk bebizonyítani.

12. §. Kúpszeleten fekvő projektív sorok.

82. A kúpszeletek projektív tulajdonsága alapján, projektív és involúziós sorokról egyszerű úton tételek vezethetők le, melyekből látható, hogy mikép lehet egy involúziós sort közönséges sorra, vagy két involúziós sort egymásra projektív vonatkoztatni. E végből szükséges a következő értelmezéseket előre bocsátani.

Ha valamely sugársor középpontja T , kúpszeleten fekszik, és annak a, b, c, \dots sugarai a kúpszeletet másodízben A, B, C, \dots pontokban metszik, akkor ezen a kúpszeleten fekvő A, B, C, \dots pontsort, $TA |, | TB |, | TC |, \dots$ sugársorral projektívnek és ezenkívül perspektívnek nevezzük. Két ugyanazon vagy különböző kúpszeleten fekvő $A, B, C, \dots; A_1, B_1, C_1, \dots$ pontsort projektívnek nevezünk, ha azon sugársorok, melyek e két pontsort az illető kúpszelet pontjaiból projiciálják: projektívek.

Hasonlóképp lehet egy kúpszelet érintőiből képezett II. o. sugár-

sor projektív vonatkoztatni azon pontsorra, mely szerint a sugársor elemei egy tetszőleges szilárd sugarát a sornak, vagyis egy szilárd kúpszelet-érintőt metszenek; továbbá lehet két ily II. o. sugársort, legyenek azok egy és ugyanazon kúpszelet, vagy két különböző kúpszeletnek érintői, projektívnek tekinteni, ha azon sugarak az illető sornak egy szilárd sugarát oly pontsorok szerint metszik, melyek projektívek. —

Kúpszeleten fekvő két projektív pontsor involucziós is lehet, ha t. i. ezen pontsorokat a kúpszelet egyik pontjából projicziáló sugársorok is involucziós helyzetű projektív sugársorok.

Ezen értelmzések alapján egy kúpszelet pontjai és érintőire lehet egy

egyenesen fekvő pontsort projektív vonatkoztatni, ha a pontsort a kúpszelet tetszőleges pontjából a kúpszeletre projicziáljuk; a projekciókból álló pontsor projektív az egyenesen levő pontsorrall,

sugársort projektív vonatkoztatni, ha a sugársort a kúpszelet tetszőleges érintőjével metszéshez hozzuk és e metszőpontokból a kúpszelethez érintőket húzunk; az érintőkből képezett II. o. sugársor projektív a felvett sugársorral,

mert a közvetítő sor mindig perspektív az eredeti és a leszármaztatott sorral.

83. Kúpszeleten fekvő involucziós pontsorról a 77. pont alatt tanultunk egy tételt, mely ezen értelmzések folytán így fejezhető ki: «kúpszeleten fekvő involucziós pontsor kapcsolt pontpárjait összekötő egyenesek egy ponton mennek át» és fordítva «egy ponton átmenő összes szelők a kúpszeletet involucziós pontsor szerint metszik». Ezen pontot, melyben a kúpszeleten fekvő involucziós pontsor kapcsolt pontpárjait összekötő egyenesek egymást metszik, valamint annak polárisát ezentúl: *az involucziós pontsor pólus, illetve polarisának* fogjuk nevezni. E szerint: ha $A, A_1; B, B_1; C, C_1; \dots$ pontpárok, valamely kúpszeleten fekvő involucziós pontsornak kapcsolt pontpárjai, akkor a kapcsolt pontpárok összekötő egyenesei $|AA_1|, |BB_1|, |CC_1|, \dots$ az involucziós pontsor pólusán, P -n, mennek át és az $|AB_1|, |A_1B|; |AC_1|, |A_1C|; |BC_1|, |B_1C|; \dots$ valamint $|AB|, |A_1B_1|; |AC|, |A_1C_1|; \text{stb.}$ egyenesek metszőpontjai, egy és ugyanazon egyenesen, t. i. P -nek polárisán p -n fekszenek. Az involucziós pontsor valós vagy képzetes kettőspontjai, p polárisnak valós vagy képzetes metszőpontjai a kúpszelettel.

A kúpszeletbe irt AA_1BB_1 , AA_1CC_1 , BB_1CC_1, \dots négyszögek átlóháromszögei, melyek a kúpszeletnek polárháromszögei: P -ben közös szögpponttal bírnak, tehát a nevezett $|AB_1|$, $|A_1B|$; stb. egyenesek metszőpontjai P -nek polárisán p -n fekszenek.

Az involúciós pontsor kettőspontjai az egyes kapcsolt pontpárokat itt is harmonikusan választják el, mert ha A, A_1 egy ily pontpár I, K pedig a pontsor két kettőspontja, hol $|AA_1|$ átmegy IK egyenesnek pólusán P -n, úgy $|IA|$, $|IA_1|$, $|IK|$, $|IP|$ sugarak a pólus és poláris értelmezése folytán harmonikusak és ezért AA_1KI pontok, melyek a kúpszelet I , tehát bármely pontjából harmonikus sugarak által projicziáltatnak, harmonikusak.

Azon tulajdonságból folyólag, hogy $|IK|$ pólusa rajta fekszik $|AA_1|$ egyenesen, tehát a két egyenes egymáshoz kapcsolt poláris, mi a kúpszeleten fekvő harmonikus pontokat következőkép értelmezzük: *egy kúpszelet kapcsolt polárisai a kúpszeletet harmonikus pontok szerint metszik.* Ezen értelmezést kiterjesztjük azon esetre is, a midőn az egyik kapcsolt poláris nem metszi a kúpszeletet valós pontokban, a mi csak akkor következhetik be, ha a két kapcsolt poláris metszőpontja a kúpszeleten kívül van, tehát ezen metszőpont mint pólus által a kúpszeleten meghatározott involúciós pontsor hyperbolikus természetű. *Hyperbolikus természetű involúciós pontsornak a kúpszeleten vagy egyenesen képzetes kapcsolt pontpárjai is vannak; az elliptikus involúciós kapcsolt pontpárjai mindig valóságok (77.).*

84. Két a kúpszeleten fekvő általános helyzetű projektív pontsor szintén nevezetes tulajdonsággal bír, melyet következő tétellel fejezünk ki:

Ha valamely kúpszeleten két projektív pontsor van adva,

és $X, X_1; Y, Y_1$ két egymásnak megfelelő tetszőleges pontpár, akkor $|XY_1|$, $|X_1Y|$ egyenesek metszőpontja egy, a projektív sorok által meghatározott szilárd egyenesen, p -n fekszik, és $|XY|$, $|X_1Y_1|$, valamint $|XX_1|$, $|YY_1|$ egyenesek metszőpontjait összekötő egyenes, ugyanazon P ponton megy át; e P pont p -nek pólusa a kúpszeletre nézve.

és $x, x_1; y, y_1$, két megfelelő pontpár $X, X_1; Y, Y_1$ érintője, akkor (x, y) és (x_1, y) metszőpontok összekötő egyenese egy, a projektív pontsorok által meghatározott szilárd P ponton megy át, és (x, y) , (x_1, y_1) , valamint (x, x_1) , (y, y_1) pontok összekötő egyenesének metszőpontja, egy szilárd p egyenesen fekszik; P és p pólus és poláris a kúpszeletre nézve.

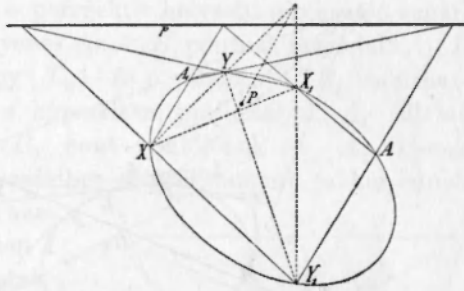
Ez a perspektív helyzetű sugársorok egy tulajdonságának és a PASCAL-féle hatszögnek következménye. Ha ugyanis a kúpszeleten fekvő $A, X, Y, \dots; A_1, X_1, Y_1, \dots$ projektív pontsorokat A_1 , ill. A középpontból projicziáljuk, akkor (57. ábra):

$$A_1(AXY\dots) \bar{\wedge} A(A_1X_1Y_1\dots),$$

és mert ezen sugársorok AA_1 -ben közös megfelelő sugárral bírnak: perspektív helyzetűek; tehát

$$|A_1X|, |AX_1|; |A_1Y|, |AY_1|; \text{ stb.}$$

sugárpárok egymást a perspektív-tengelyben p -ben, metszik. De hogy $|XY_1|, |X_1Y|$ egyenesek metszőpontja, szintén ezen p egyenesen van, az $AX_1YA_1XY_1$ PASCAL-féle hatszögből látható, melynek átellenes oldalai egymást egyenesen fekvő pontokban metszik. Minthogy továbbá a kúpszeletbe írt XX_1YY_1 változó négyszögnek egyik átlós-pontja ($|XY_1|, |X_1Y|$) a szilárd p egyenesen mozog: a másik két átlós-pont összekötő egyenese, mely az első átlós-pontnak polárisa átmegegy azon szilárd p egyenes pólusán,



57. ábra.

P -n. A jobb oldalon álló tétel hasonlókép lesz bebizonyítva; és mert XX_1YY_1 négyszög és xx_1yy_1 négy oldalnak közös átlósháromszöge van, azért P pont és p egyenes a jobb és baloldalon álló tételben egy és ugyanazon pontot és egyenest jelent. Azon pontok, melyekben p egyenes a kúpszeletet metszi, a projektív pontsorok kettőspontjai; ha ezen p egyenes a kúpszeletet nem metszi valós pontokban, akkor a projektív pontsorok nem bírnak valós kettőspontokkal. —

84a. Két ugyanazon κ kúpszeleten fekvő projektív pontsor megfelelő pontjait összekötő egyenesek egy II. o. sugársort képeznek; e sugársor által burkolt k kúpszelet

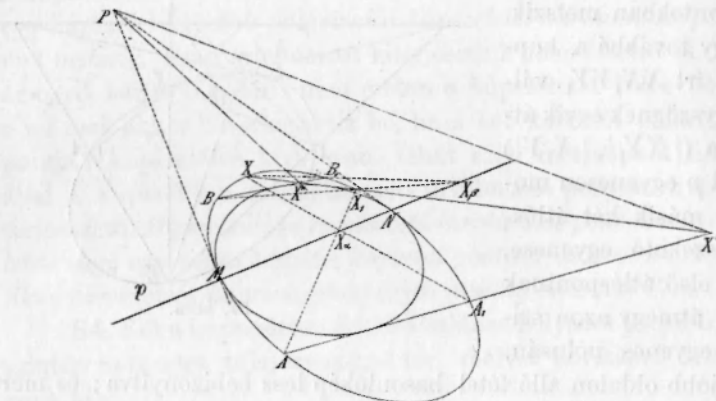
Két ugyanazon κ kúpszeleten fekvő projektív pontsor megfelelő pontpárjain átmenő érintők egymást egy k' kúpszeleten metszik; ezen k' kúpszelet

és az eredeti kúpszelet azon p egyenesén, melyben két meg nem felelő pont X, Y_1 összekötő egyenese, az ezeknek megfelelő X_1, Y pontok összekötő egyenesét metszi, ugyanazon kapcsolt pólusokat indukálja továbbá p egyenesnek pólusa a kúpszeletekre vonatkozólag egy és ugyanazon P pont.

Hogy a baloldalon álló tételt bebizonyítsuk, nevezzük (58. ábra) κ kúpszeleten fekvő projektív pontsor megfelelő pontjait A, B, X, \dots ill. A_1, B_1, X_1, \dots -nek,

$$\begin{array}{l} |AA_1| \text{ és } |XX_1| \text{ metszőpontját } X' \text{-nek,} \\ |BB_1| \text{ " } |XX_1| \text{ " } X'' \text{ " } \\ p, |AX_1| \text{ " } |A_1X| \text{ " } X_\alpha \text{ " } \\ p, |BX_1| \text{ " } |B_1X| \text{ " } X_\beta \text{ " } \end{array}$$

és p pólusát P -nek.



58. ábra.

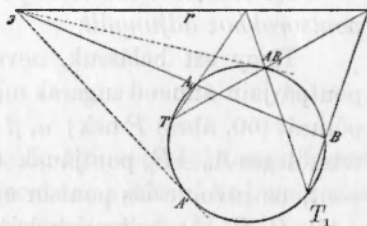
Mialatt X, κ kúpszeleten tovahalad, $|AX_1|$ és $|BX_1|$ sugarak, A és B körül két projektív sugársort irnak le, mely p egyenest két projektív pontsor X_α, \dots , ill. X_β, \dots szerint metszi. Az X_α és X_β pontok által leírt pontsor egyes pontjainak polárisai a felvett κ kúpszeletre nézve: $|PX'|$ ill. $|PX''|$ sugarak P körül szintén projektív sorokat irnak le, és ezért az $|AA_1|$ és $|BB_1|$ egyeneseken változó X', \dots és X'', \dots pontok projektív pontsorokat futnak be.

De a megfelelő X', X'' pontok összekötő egyenese: $|X'X''| \equiv |XX_1|$ -gyel, tehát a változó $|XX_1|$ a szilárd $|AA_1|, |BB_1|$ sugarakat projektív pontsorok szerint metszi és így a változó és szilárd sugarak

III. o. sugársort képeznek. AA_1X_1X és BB_1X_1X négyszögek harmonikus tulajdonsága folytán $|PX'|$, $|PX''|$ egyenesek polárisai X_α ill. X_β pontoknak nemcsak az adott, hanem azon k kúpszeletre nézve is, melynek $X'AA_1$, $X''XX_1$; $X''BB_1$, $X''XX_1$ egyenesek érintői.

85. Ha valamely kúpszeleten (vagy egyenesen) két projektív pontsor van adva és a sor egyik pontjának, mely az első pontsorban A -val a másodikban B_1 -gyel lesz jelölve, úgy hogy $A \equiv B_1$ -gyel, megfelelő pontjait A_1 , ill. B -nek nevezzük, és oly A' pontot szerkesztünk, mely A -t A_1 , B -től harmonikusan választ el, akkor A , A' pontmialatt A a kúpszeletet (vagy egyenest) befutja, egy involúciós pontsört írnak le, melynek valós vagy képzetes kettőspontjai összeesnek az eredeti projektív pontsorok kettőspontjaival.

Hogy ezt belássuk, projicziáljuk (59. ábra) az első pontsört a másodiknak tetszőleges T_1 pontjából, és a második pontsört az elsőnek megfelelő T pontjából, és legyen e perspektív helyzetű projicziáló sugársorok perspektív-tengelye p egyenes. Az $A \equiv B_1$ pontnak megfelelő A_1 , B pontot akképp szerkesztjük, hogy $|T_1A|$ és p , valamint $|TB_1|$ és p metszőpontját T , ill. T_1 pontból a kúpszeletre projicziáljuk A_1 , illetve B pontokba. Ha még $A \equiv B_1$ pont érintőjének és $|A_1B|$ -nek I metszőpontjából a kúpszelethez érintőt húzunk, akkor ennek A' érintőpontja, A -t B , A_1 -től harmonikusan választja el. De ezen I pont, mely $|AB_1|$, $|A_1B|$ sugaraknak metszőpontja, mint előbb kimutattuk és mint az ötszöggé fajult $BT_1AB_1TA_1$ PASCAL-féle hatszögből is látható p egyenesen fekszik; a miért is AA' egyenes p -nek pólusán megy át. Az összes ily módon szerkesztett AA' egyenesek tartalmazzák p -nek pólusát, tehát AA' pontpárok involúciós pontsört képeznek a kúpszeleten. Ha A a projektív pontsornak egyik valós kettőspontja, akkor I és A' pont szintén A -ba jut.



59. ábra.

Az eredeti projektív pontsorokból ily módon képezett involúciós pontsört, azon projektív pontsorokhoz adjungált* involúciós pontsornak nevezik. E szerint kúpszeleten, vagy egyenesen fekvő két projektív pontsör kettőspontjainak szerkesztése vissza van vezetve a hozzájuk adjungált involúciós pontsör kettőspontjainak szerkesztésére.

* BOBEK K. «Projektivische Geometrie der Ebene» Teubner 1889; 77. lap.

86. Ha valamely kúpszeleten egy involúciós pontsor van adva, és mi a kúpszeleten oly X_α pontokat szerkesztünk, melyek a kúpszelet tetszőleges, de állandó α pontját, az involúciós pontsor X, X_1 kapcsolt pontjaitól harmonikusan elválasztják, akkor ezen X_α pontok az involúciós pontsor pontpárjain átmenő $|XX_1|$ sugarak által leírt sugársorral, projektív pontsort képeznek.

α pont érintőjét t_α -nak nevezvén, az X_α pontok, az előbbieket szerint, érintőpontjai azon érintőknek, melyek az állandó t_α és a változó $|XX_1|$ egyenesek metszéspontjaiból a kúpszelethez húzhatók; ezen metszéspontok sorozata tehát projektív X_α pontsorral. De mivel $|XX_1|$ által leírt sugársor perspektív helyzetű ama metszéspontokból képezett pontsorral, azért e sugársor szintén projektív X_α pontsorral. —

E tételből következik: Ha valamely kúpszeleten (vagy egyenesen) egy involúciós pontsor van adva és mi oly X_α , valamint X_β pontokat szerkesztünk, melyek ezen involúciós pontsor kapcsolt pontpárjait a kúpszeleten (vagy egyenesen) fekvő tetszőleges állandó α , valamint β ponttól harmonikusan elválasztják, akkor a változó X_α és X_β pontok projektív pontsorokat írnak le, mert ezen pontsorok mindegyike projektív azon sugársorral, mely az involúciós pontsor kapcsolt pontpárjait összekötő sugarakból lesz képezve.

Az eredeti involúciós pontsor, az X_α és X_β által leírt projektív pontsorokhoz adjungált.

Hogy ezt belássuk, nevezzük az involúciós pontsor kapcsolt pontpárjain átmenő sugarak metszéspontját, az involúciós pontsornak pólusát (60. ábra) P -nek; α, β pontok érintőit t_α, t_β -nek; a kúpszelet tetszőleges $A_\alpha \equiv B_\beta$ pontjának érintőjét szintén $A_\alpha \equiv B_\beta$ -nak. $A_\alpha \equiv B_\beta$ pont, az involúciós pontsor egy bizonyos A, A_1 kapcsolt pontpárját α -tól, B, B_1 kapcsolt pontpárját β -tól harmonikusan választja el. Projicziáljuk A_α, t_α és A_α, t_β érintők metszéspontjait P -ből t_β , ill. t_α -ra és nevezzük ezen projekciókból a kúpszelethez vonható új érintőket, valamint azoknak érintőpontjait A_β , ill. B_α -nak. Mint könnyen látható ekkor

$$(AA_1\beta A_\beta) = (BB_1\alpha B_\alpha) = -1.$$

$t_\beta A_\beta B_\alpha t_\alpha A_\alpha$ érintőkből képezett ötoldal, elfajult BRIANCHON-féle hatoldalnak tekinthető, melynél A_α érintő kétszeresen számíttatik, tehát:

(t_β, A_β) és (t_α, A_α) érintők metszéspontjainak összekötő egyenese

(t_α, B_α) " (t_β, A_α) " " " " "

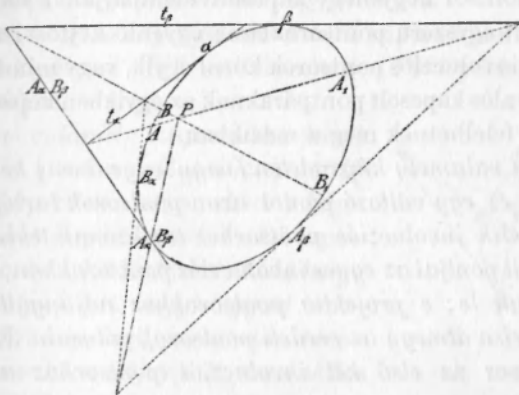
(A_β, B_α) metsző- és $A_\alpha \equiv B_\beta$ érintőpont " "

ugyanazon P ponton megy át.

E szerint azon pont, mely $A_\alpha \equiv B_\beta$ -at A_β, B_α -tól harmonikusan elválasztja: az adott involúciós pontsorban $A_\alpha \equiv B_\beta$ -nak kapcsolt pontja; vagyis $A_\alpha, B_\alpha, C_\alpha, \dots; A_\beta, B_\beta, C_\beta, \dots$ projektív pontsorokhoz az eredeti involúciós pontsor — adjungált. (85.)

87. Minden involúciós pontsort projektív vonatkozathatunk egy közönséges pontsorra a következő értelmezés alapján: *ha valamely involúciós pontsor két projektív pontsorhoz adjungált, akkor az involúciós pontsort azon pontsorok mindegyikéhez projektívnek nevezzük.*

Ezen értelmezés és az előbbi tétel folytán, *azon pontsor, melynek pontjai egy involúciós pontsor kapcsolt pontpárjait az involúciós*



60. ábra.

pontsor tartóján tetszőlegesen felvett állandó ponttól harmonikusan elválasztják: az adott involúciós pontsorhoz projektív. Az involúciós pontsor egy bizonyos kapcsolt pontpárjának, pl. X, X_1 -nek azon X_α pont felel meg, mely a felvett állandó a pontot, X, X_1 kapcsolt ponttól harmonikusan elválasztja. Az X, X_1 kapcsolt pontpárból álló involúciós pontsorról azt mondjuk, hogy az, a hozzá projektív és X_α pontokból álló egyszerű pontsorra van *redukálva*.

Láttuk előbb, hogy ha az involúciós pontsor kúpszeleten fekszik és a változó X_α pont, az involúciós sor változó X, X_1 kapcsolt pontpárját az a állandó ponttól harmonikusan elválasztja: akkor $|XX_1|$ sugár által leírt I. o. sugársor perspektív és így projektív X_α pontsorrall. Ennélfogva: *kúpszeleten fekvő involúciós pontsor projektív azon sugársorral, melynek sugarai az involúciós pontsor kapcsolt pontpárjait projicziálják.*

Két involúziós pontsor projektív van egymásra vonatkoztatva, ha azon két egyszerű pontsor, melyre az egyik, illetve másik involúziós pontsor redukálható, projektív van vonatkoztatva egymásra. Hasonlókép: egy involúziós pontsor projektív egy egyszerű pontsorról, ha azon pontsor, melyre az involúziós sor redukálható, projektív az egyszerű sorral.

Ha két tetszőleges involúziós pontsört projektív akarunk egymásra vonatkoztatni, úgy az egyiknek három kapcsolt elempárjához a másiknak három kapcsolt elempárját tetszőlegesen választhatjuk. Minden kapcsolt elempárnak az egyikben úgy kell szerkeszteni a megfelelő kapcsolt elempárját a másikban, hogy az első és második involúziós pontsor négy-négy kapcsolt elempárjának megfelelő pontok a redukált egyszerű pontsorokban: egyenlő kettősviszonyt képezzenek. Ha az involúziós pontsorok közül egyik, vagy mindkettő hyperbolikus, úgy valós kapcsolt pontpáraknak az egyikben képzetes kapcsolt pontpárak is felelhetnek meg a másikban.

88. *Ha valamely kúpszeleten (vagy egyenesen) két involúziós pontsor van és egy változó pontot azon pontsorok tartóján, mint az első és második involúziós pontsorhoz tartozónak tekintjük, akkor ennek kapcsolt pontjai az egyes involúziós pontsorokban, két projektív pontsört írnak le; e projektív pontsorokhoz adjungált involúziós pontsor polárisa átmegy az eredeti pontsorok pólusain. Ezen új involúziós pontsor az első két involúziós pontsorhoz adjungáltak nevezhető.*

Képzeljünk valamely kúpszeletbe (61. ábra) egy $AA_1B_1BB_1$ ötszöget írva; jelöljük ennek A, B, B_1 pontját még $A',$ ill. B', A_1 betűkkel, úgy, hogy

$$A \equiv A', B \equiv B', B_1 \equiv A_1,$$

és nevezzük

$$|A A_1|, |B B_1| \text{ metszéspontját } P\text{-nek.}$$

$$|A' A'_1|, |B' B'_1| \quad \text{''} \quad P'\text{-nek.}$$

P és hasonlókép P' ponton átmenő szelők a kúpszeletet egy-egy involúziós pontsorban metszik, melynek kapcsolt pontjai $A, A_1; B, B_1; \dots$; valamint $A', A'_1; B', B'_1; \dots$

A kúpszelet $A \equiv A'$ pontjához kapcsolt pont az első involúziós sorban A_1 , a másodikban A'_1 ; hasonlókép $B \equiv B'$ ponthoz B_1 , valamint B'_1 . — A_1, B_1, \dots és A'_1, B'_1, \dots pontsorok projektívek, mert mindegyike projektív $A \equiv A', B \equiv B', \dots$ által leírt pontsorról.

Mínt hogy $A_1 \equiv B'_1$, azért ezen ponthoz kapcsolt pont az A_1 , A'_1, B'_1, \dots ; A'_1, B'_1, \dots projektív pontsorokhoz adjungált involúzióban az lesz, mely $A_1 \equiv B'_1$ -et A'_1, B'_1 pontoktól harmonikusan elváltasztja.

De mert

$$AA'_1B_1BB'_1B'_1$$

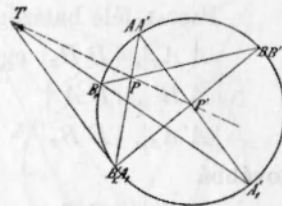
PASCAL-féle hatszögben

$$\begin{array}{|l|} \hline AA'_1 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|l|} \hline BB'_1 \\ \hline \end{array} \text{ átellenes oldalak metszéspontja } P', \\ \begin{array}{|l|} \hline BB'_1 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|l|} \hline AB' \\ \hline \end{array} \text{ " " " " " } P,$$

azért $|A'_1B_1|$ hatszögoldal B'_1 pont érintőjét, $|PP'|$ egyenesen metszi, mely metszéspont pólusa az adjungált involúzióban $A_1 \equiv B'_1$ pont és $A_1 \equiv B'_1$ -hez kapcsolt pont összekötő egyenesének.

Tekintve, hogy az adjungált involúzió kapcsolt pontpárjait összekötő egyenesek pólusai $|PP'|$ -en fekszenek: $|PP'|$ polárisa az adjungált involúciónak.

89. Ha valamely kúpszeleten fekvő két involúziós pontsor pólusai kapcsolt pólusok a kúpszeletre nézve, akkor a kúpszelet pontjaihoz kapcsolt pontok a két involúziós pontsorban, két involúziós helyzetű projektív pontsört, vagyis egy új involúziós pontsört képeznek, mely azon involúziós pontsorokhoz adjungált involúziós pontsor. Az ily három involúziós pontsor közül mindegyik a másik kettőhöz adjungált, és egyik mindig elliptikus a másik kettő hyperbolikus.



61. ábra.

E tétel következménye a kapcsolt háromszög ama tulajdonságának, hogy «ha egy kúpszeletbe írt háromszög két oldala egy kapcsolt háromszög két szögpontján megy át, akkor a harmadik oldal is a kapcsolt háromszög harmadik szögpontján fog átmenni.» —

Ily három involúziós pontsört az által szerkeszthetünk a kúpszeleten, hogy beirunk abba egy tetszőleges $ABCD$ négyszöget; $A, B; C, D$ az első, $A, C; B, D$ a második és $A, D; B, C$ a harmadik involúziós sor két kapcsolt pontpárja. Ha a kúpszelet tetszőleges E pontjához az első, második és harmadik sorban E_1, E_2, E_3 pont kapcsolt, akkor $ABCD, EE_1E_2E_3$ négyszögek közös átlóháromszöggel bírnak és így $E_2, E_3; E_3, E_1; E_1, E_2$ pontpárok az első, illetve a második és harmadik involúziós sorban kapcsoltak. (62. ábra)

90. Ha valamely kúpszeleten (vagy egyenesen) két projektív pont-

sor van adva, akkor azon végtelen sok oly pontsor szerkeszthető, melyeknek mindegyike úgy az első, mint a második pontsorról involúciós helyzetű; azon involúciós pontsorok pólusai, melyek a változó pontsor és az első, valamint a változó pontsor és a második adott pontsor által meg vannak határozva, két projektív pontsorra írhatók le, az eredeti két projektív pontsor valós vagy képzetes kettőspontjait összekötő p egyenesen fekszenek. A két projektív pontsorhoz adjungált involúciós sornak minden kapcsolt elempárja, kettőspontja az egyes involúciós soroknak.*

Ha az adott két projektív pontsor elemeit $A, B, C, \dots; A', B', C', \dots$ -nek, p egyenes tetszőleges X pontjának projekcióját A, B, C, \dots pontokból a kúpszeletre A_x, B_x, C_x, \dots -nek nevezzük, akkor kimutatandó, hogy $|A'A_x|, |B'B_x|, |C'C_x|, \dots$ egyenesek egymást p -nek egy pontjában, pl. X' -ben metszik.

$$AA_xA'BB_xB' \text{ és } BB_xB'CC_xC'$$

PASCAL-féle hatszögeket tekintve

$|A A_x|, |B B_x|$ egymást p -nek X pontjában metszi,

$|A B'|, |B A'|$ „ p -ben metszi, tehát

$|A'A_x|, |B'B_x|$ „ p -ben metszi,

továbbá

$|B B_x|, |C C_x|$ „ p -nek X pontjában metszi,

$|B'C|, |B'C|$ „ p -ben metszi;

$|B'B_x|, |C'C_x|$ „ p -ben metszi;

e szerint

$|A'A_x|, |C'C_x|$ is azon X' ponton megy át, melyben $|B'B_x|$, p egyenest metszi.

De hogy az X és X' pólusok által p -n leírt pontsorok, mialatt az adottakkal involúciós helyzetű A_x, B_x, C_x, \dots pontsorok változnak, két projektív sort írhatók le, onnan következik, hogy X, X' pontok a változó A_x -nek (vagy B_x, \dots -nek) projekciói A , ill. A' pontokból p egyenesre.

Ha végre meggondoljuk, hogy a két adott projektív pontsorhoz adjungált involúciós pontsor pólusa egyszersmind p -nek pólusa a kúpszeletre vonatkozólag, a tétel utolsó részének helyes volta is könnyen belátható.

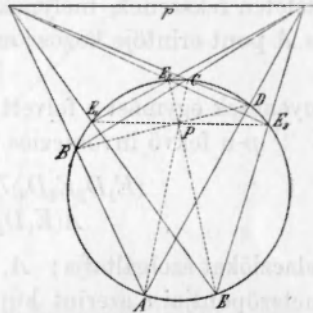
* KLUG: Beitrag zur Geometrie der Lage; Archiv der Math. u. Physik-1883. LXX. Teil pag. 446, és 1884. I. Teil pag. 293.

Jegyzet. 1. A midőn p a kúpszeletet valós pontokban metszi, tehát az adott projektív pontsoroknak valós kettőspontjuk van, az A_x, B_x, C_x, \dots pontsorok kétszer ponttá fajulnak és így az involúciós sor parabolikus természetű lesz.

2. Ha a kúpszeleten egy más $A'', B'', C'', \dots; A, B, C, \dots$ -vel projektív pontsor van, melynek kettőspontjai összeesnek az első két projektív pontsor kettőspontjaival, vagyis $A, B, C, \dots; A'', B'', C'', \dots$ sorok ugyanazon p egyenest határozzák meg, (83. szerint) mint az előbbieket, akkor $A'', B'', C'' \dots$, a talált $A_x, B_x, C_x \dots$ pontsorok mindegyikével szintén involúciós helyzetű.

91. Ha valamely kúpszeletek (vagy egyenesen) három projektív pontsor fekszik, melyek nem bírnak közös kettőspontokkal és páronként nem involúciós helyzetűek, akkor mindig lehet oly pontsort találni, mely mind a hárommal involúciós helyzetű.

Nevezük a kúpszeleten fekvő $A, B, C, \dots; A', B', C', \dots$; valamint $A', B', C', \dots; A'', B'', C'', \dots$ projektív pontsorok valós képzetes kettőspontjain átmenő egyenest p'' , illetve p -nek; ezeknek metszőpontját P' -nek, végre A', B', C', \dots pontsor projekcióját P' -ből a kúpszeletbe $A_p, B_p, C_p \dots$ -nek. Minthogy P', p'' és p -ben fekszik, azért az előbbi tétel szerint A_p, B_p, C_p, \dots pontsor A, B, C, \dots -vel p'' -en fekvő P pólusra nézve, és A'', B'', C'', \dots sorral p' -en fekvő P'' pólusra nézve, tehát mind a három felvett sorral involúciós helyzetű, és P, P' pontoknak összekötő egyenese p' : az $A, B, C, \dots; A'', B'', C'' \dots$ projektív pontsoroknak kettőspontjain megy át.



62. ábra.

Jegyzet. 1. A midőn a három adott pontsornak egy közös kettőspontja van, a velők involúciós pontsor minden pontja ezen kettőspontba jut és azért az involúciók parabolikus természetűek.

2. Ha a három adott projektív pontsor páronként involúciós helyzetű, akkor $PP'P''$ kapcsolt háromszög, és a pontsorok ezen kapcsolt háromszög csúspontjaiból egymásba projicziáltatnak, tehát nem található új pontsor, mely ezekkel involúciós fekvésű.

92. «Ha valamely kúpszeleten (vagy egyenesen) tetszőleges három pont van adva, akkor annak minden pontjához lehet még két pontot

szerkeszteni úgy, hogy ezen pontok a három adottal mint kapcsolt ponttal háromféleképp képezzenek involúziós pontokat; e három mindig hyperbolikus involúciónak kettőspontjai egy elliptikus involúziót képeznek». (63. ábra.)

Nevezzük a kúpszelet három adott pontját A, B, C -nek, a tetszőlegesen választott pontot A_1 -nek. A, B, C pontok érintői $|BC|, |CA|, |AB|$ egyeneseket a kúpszeleten kívül fekvő D_1, D_2, D_3 pontokban metszik, melyek (58. pont végén) p egyenesen fekszenek; p az $ABCA_1$ teljes négyszög átellenes oldalait $D_1, E_1; D_2, E_2; D_3, E_3$ pontokban metszi és ezen pontok p -n involúziót képeznek. E szerint:

$$(E_1D_3E_2D_1) \wedge (D_1E_3D_2E_1) \wedge (E_3D_1E_1D_2),$$

és így

$$A(E_1D_3E_2D_1) \wedge C(E_3D_1E_1D_2),$$

tehát a megfelelő sugarak metszőpontjai A, C pontokkal együtt kúpszeleten fekszenek, melynek a felvett kúpszelettel A, B, C, A_1 pontja és A pont érintője közös; ennél fogva

$$|AE_2|, |CE_1|$$

egyenesek egymást a felvett kúpszelet C_1 pontjában metszik.

p -n fekvő involúziós hat pont továbbá:

$$(E_1D_2E_2D_3) \wedge (D_1E_2D_2E_3) \wedge (E_2D_1E_3D) \\ A(E_1D_2E_2D_3) \wedge B(E_2D_1E_3D)$$

relációkat szolgáltatja; A, B pontok és a megfelelő sugárpárok metszőpontjai e szerint kúpszeleten fekszenek, mely a felvettel szintén azonos, mivel mindkét kúpszelet A, B, C, A_1 pontokon megy át és B -ben közös érintővel bír, tehát

$$|AE_2|, |BE_3|$$

sugarak egymást a felvett kúpszeletnek $|AE_2|$ -n fekvő C_1 pontjában metszik.

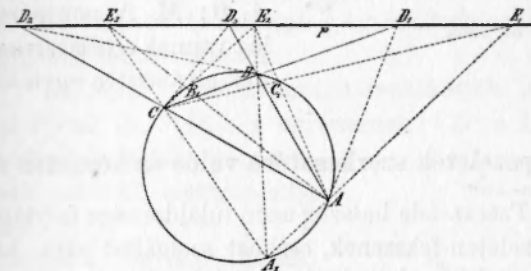
A mint most kimutattuk, hogy $|AE_2|, |BE_3|, |CE_1|$ sugarak a kúpszelet C_1 pontján mennek át, hasonlóképp bebizonyítható, hogy $|AE_3|, |BE_1|, |CE_2|$ egymást a kúpszelet B_1 pontjában metszik és mert ebből folyólag:

$$\begin{array}{l} |AA_1|, |BB_1|, |CC_1| \text{ sugarak } E_1 \text{ ponton} \\ |AC_1|, |BA_1|, |CB_1| \quad \text{''} \quad E_2 \quad \text{''} \\ |AB_1|, |BC_1|, |CA_1| \quad \text{''} \quad E_3 \quad \text{''} \end{array}$$

mennek át: A_1, B_1, C_1 pontok az A, B, C -nek háromféle involúzióban kapcsolt pontjai.

Ha meggondoljuk, hogy E_1, E_2, E_3 pontok, mint az involúciók pólusai a kúpszeleten mindig kívül fekvő p egyenesen vannak, látható, hogy azon involúciók hyperbolikus természetűek és kettőspontjai oly elliptikus involúciót képeznek, melynek pólusa egyszersmind p -nek pólusa a kúpszeletre vonatkozólag.

$D_1D_2D_3E_1E_2E_3$ pontok p -n szintén háromféleképp képeznek involúciót, mert e pontok $ABCA_1, ABCB_1, ABCC_1$ teljes négyszögek átellenes oldalainak metszőpontjai p -vel. Látható továbbá még, hogy A, B, C pontok ép úgy függenek A_1, B_1, C_1 pontoktól, mint ezek amazoktól vagyis, hogy $A_1B_1C_1$ háromszög szögpontjainak érintői az átellenes oldalakat, p egyenes pontjaiban metszik, mert pl. $AB_1C_1CA_1A_1$ PASCAL-féle hatszög $|AB_1|, |CA_1|; |CC_1|, |AA_1|$ át-



63. ábra.

ellenes oldalainak közös E_3, E_1 pontjai p -n fekszenek, mely p egyenes e végből $|B_1C_1|$ -nek és A_1 érintőjének metszőpontját is tartalmazza.

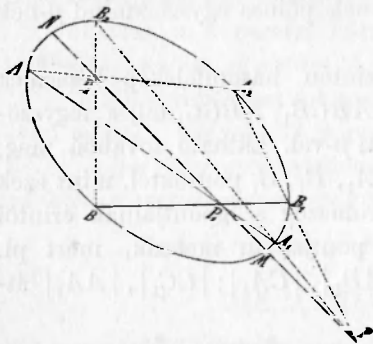
93. Ha valamely kúpszeleten, vagy egyenesen két elliptikus természetű involúciós pontsor van adva, akkor könnyen megítélhető, hogy a sornak két tetszőleges eleme a közös kapcsolt elem pár által el van-e választva, vagy nincs elválasztva (64. ábra).

Legyen e végből a kúpszeleten fekvő két pont A, B ; a két involúciós pontsor meghatározására szolgáló kapcsolt elem pár $A, A_1; B, B_1$, illetve $A, A_2; B, B_2$.

$$\begin{array}{l} |AA_1|, |BB_1| \text{ metszőpontját } P_1\text{-nek,} \\ |AA_2|, |BB_2| \quad \quad \quad \text{« } P_2\text{-nek,} \\ |A_1B_2|, |A_2B_1| \quad \quad \quad \text{« } P\text{-nek,} \end{array}$$

a közös elem párt vagyis $|PP_1P_2|$ -nek e feltételek mellett mindig valós metszőpontját a kúpszelettel M, N -nek nevezvén, $AA_1B_2BB_1A_2$ PAS-

CAL-féle hatszögből következik, hogy $A_1, B_2; B_1, A_2; M, N$, kapcsolt pontpárjai egy involúziós pontsornak, melynek pólusa P . A szerint



64. ábra.

a mint ezen P pont a kúpszeleten kívül van, belül fekszik, tehát ezen involúziós pontsor hyperbolikus vagy elliptikus: A, B pontok nincsenek elválasztva M, N által, vagy pedig el vannak választva. Ez még így is kifejezhető: «ha két elliptikus természetű involúziós pontsorban A elemhez kapcsolt $A_1, A_2; B$ elemhez B_1, B_2 , és a közös elem-pár M, N , akkor $A_1, B_2; B_1, A_2$ és $A, B; M, N$ pontpárok egyidejűleg vannak elválasztva vagy nincsenek elválasztva egymástól».

13. §. Kúpszeletek szerkesztése valós és képzetes elemekből.

94. A PASCAL-féle hatszög azon tulajdonsága folytán, hogy szög-pontjai kúpszeleten fekszenek, eszközt szolgáltat arra, hogy öt adott ponton átmenő kúpszeletnek új pontjait szerkeszthessük; mert mindazon PASCAL-féle hatszögek hatodik szögpontja, melynek szög-pontja az adott öt pont: ezen öt ponton átmenő és ezek által egyféleképp meghatározott kúpszeleten fekszik.

Ugyanez mondható a reciprocity elve szerint az öt érintő által meghatározott kúpszeletről is, t. i. hogy mindazon BRIANCHON-féle hatoldalak hatodik oldalai, melyek öt közös oldallal bírnak, az öt közös oldal, mint érintő, által egyféleképp meghatározott kúpszeletnek érintői.

De a PASCAL-féle hatszög és a BRIANCHON-féle hatoldal, mint az előbbi tárgyalások folyamán láttuk, elfajulhat öt-, négy-, és háromszöggé, illetve öt-, négy-, és háromoldallá; a hiányzó és változó hatodik szögpontok és oldalak az öt adott által olyképen vannak meghatározva, hogy azok egy kúpszeletnek pontjai, illetve érintői lesznek.

E szerint magára a PASCAL- és BRIANCHON-féle hatszög és hatoldalra alapítva, következő feladatokat oldhatunk meg:

Egy kúpszelet új pontjainak és érintőinek szerkesztése, ha adva van a kúpszeletnek

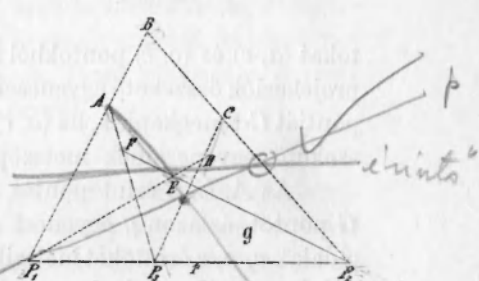
- | | |
|--|--|
| <p>a) öt pontja,
 b) négy pontja és azok egyikének érintője,
 c) három pontja és ezek közül kettőnek érintője.</p> | <p>a_1) öt érintője,
 b_1) négy érintője és azok egyikének érintőpontja,
 c_1) három érintője és kettőnek érintőpontja.</p> |
|--|--|

a) Az adott öt pontot A, B, C, D, E -nek nevezvén (65. ábra) $|AB|$, $|DE|$ -nek közös P_1 pontján át tetszőleges p egyenest húzunk, mely $|BC|$, és $|CD|$ -t, P_2 , illetve P_3 pontokban metszi; $|EP_2|$, $|AP_3|$ egyeneseknek metszéspontja a kúpszeletnek új F pontja lesz. — Ha p -t P_1 körül forgatjuk, F -nek új helyzetét, tehát a kúpszeletnek új pontjait fogjuk találni, melyeket ép úgy mint az adottakat, más pontok szerkesztésére használhatjuk.

A szerkesztésből látható, hogyan lehetett volna az adott pontok egyikén, pl. E -n átmenő tetszőleges g egyenesnek második metszéspontját a kúpszelettel szerkeszteni.

$|AB|$, $|DE|$ -nek P_1 metszéspontját összekötjük $|BC|$ és g metszéspontjával P_2 -vel, és $|P_1P_2| \equiv p$ egyenesnek $|CD|$ -n fekvő P_3 pontját A -ból g -re projicizáljuk, mely projekció g -nek második metszéspontja a kúpszelettel.

Ha a kúpszelet egyik pontjának, pl. E -nek érintőjét akarjuk szerkeszteni, egy elfajult PASCAL-féle hatszöget kell képzelni, melynek két szomszéd szögpontja E -ben van; e két szomszéd szögponton átmenő egyenes: E pont érintője. E végből $|AB|$, $|DE|$ -nek P_1 metszéspontját összekötjük



65. ábra.

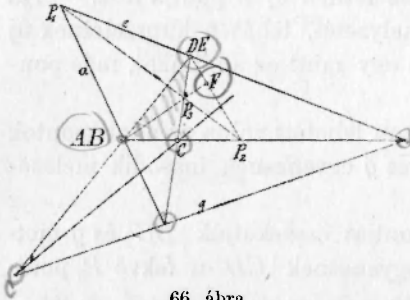
$|AE|$, $|CD|$ -nek P_2 metszéspontjával $|P_1P_3| \equiv p$ egyenes által; E pont érintője átmegy $|BC|$ és p közös pontján. —

b) Hasonló eljárást követünk, ha a kúpszeletnek A, C, D, E pontja, és A -ban az érintő t van adva, csak t -t, A és az A -val egyesült B pont összekötő egyenesének kell tekintenünk.

c) A midőn a kúpszelet A, C, E pontja és A, E pontoknak a, e érintője van adva (66. ábra), az elfajult hatszögnek B szögpontját A -ban, D szögpontját E -ben fekvőnek képzeljük. E szerint a, e közös P_1 pontján átmenő tetszőleges p egyenes $|BC|$ -t P_2 -ben, $|CD|$ -t P_3 -ban metszi; $|AP_3|$, $|EP_2|$ sugarak a kúpszeletnek új F pontján mennek

át. C és bármely más pont érintőjét azon körülményből szerkesztjük, hogy «a kúpszeletbe írt háromszög szögpontjainak érintői az áttelleges oldalakat egyenesen fekvő pontokban metszik», tehát $|AC|$ és e , valamint $|EC|$ és a metszéspontjain átmenő g egyenes $|AE|$ -t, C pont érintőjének, c -nek, egyik pontjában metszi.

a_1) Ugyanígy lehet az a, b, c, d, e érintőkkel adott kúpszelet új érintőjét és azok érintőpontját is szerkeszteni. $(a, b), (d, e)$ pontok összekötő egyenesének $|(a, b), (d, e)| \equiv p_1$ -nek tetszőleges P pontját (b, c) és



66. ábra.

(c, d) pontokból e illetve a -ra projicziáljuk, e projekció összekötő egyenes az új f érintő. — e érintőnek E érintőpontját megkapjuk, ha p_1 és $(ae), (cd)$ egyeneseknek metszéspontját (b, c) pontból e -re projicziáljuk.

c_1) Ha a, c, e valamely kúpszeletnek érintője, A, E pontok a, e -nek érintőpontjai, akkor az $|AE|$ egyenesen változó pon-

tokat (a, c) és (c, e) pontokból e , illetve a -ra projicziáljuk, a megfelelő projekciók összekötő egyenesei, a kúpszeletnek új érintői. c -nek érintőpontját C -t megkapjuk, ha (a, c) és E , valamint (c, e) és A pontok összekötő egyenesének metszéspontját G -t, (a, e) -ből c -re projicziáljuk.

Az A, E, C érintőpontot, azok a, e, c érintőiből álló háromszöget, G pontot, és azon g egyenest tekintve, melyben $|AE|, |EC|, |CA|$ oldalak c, a, e érintőket metszik, — azt látjuk: hogy g egyenes G pontnak harmonikus polárisa mindkét háromszöget és a szerkesztett kúpszeletet illetőleg (50.).

95. A kúpszelet nemcsak *valós*, hanem *képzetes* pontok által is lehet megadva. Hogy képzetes elemek által adott kúpszeletet szerkeszthessünk, tudnunk kell mit értünk azalatt, hogy «egy kúpszelet képzetes pontokon megy át vagy képzetes egyeneseket érint.»

Tanultuk, hogy egy kúpszelet, minden síkjában fekvő p egyenesen involúciós pontsört indukál, melynek kapcsolt pontpárjai, kapcsolt pólusok a kúpszeletre vonatkozólag; továbbá, hogy p egyenesen fekvő kapcsolt pólusok projekciói a kúpszelet tetszőleges pontjából a kúpszeletre, a kúpszeleten involúciós pontsört képeznek, melynek polárisa p egyenes; végre hogy a kúpszelet átmegy p egyenesen, a kapcsolt pólusokból álló involúciós sornak valós kettőspontjain, valamint hogy

p egyenes átmegy a kúpszeleten fekvő involúziós sornak valós kettőspontjain. Ebből folyólag a következő értelmezést adjuk:

«Ha valamely egyenesen egy elliptikus természetű involúziós pontsor fekszik és ennek kapcsolt pontpárjai, kapcsolt polusok egy kúpszeletre vonatkozólag, akkor a kúpszeletről azt mondjuk, hogy átmegy az involúziós pontsor képzetes kettőspontjain,

Ha egy elliptikus természetű involúziós sugársort kapcsolt sugarai, kapcsolt polárisok egy kúpszeletre vonatkozólag, akkor a kúpszeletről azt mondjuk, hogy az, az involúziós sugársor képzetes kettőssugarait érinti,

mert ez a valós kettőselemekkel biró, tehát hyperbolikus természetű, involúziós soroknál is bekövetkezik.»

Az előbbi pont c , c_1 feladatait e szerint így fogalmazhatjuk.

«Adva van C és P pont, p egyenes és p -n fekvő involúziós pontsor; szerkesszük meg azon C ponton átmenő kúpszeletet, melyre vonatkozólag P pontnak polárisa p , és p -n fekvő involúziós pontsor kapcsolt pontpárjai, kapcsolt polusok».

«Adva van c és p egyenes, P pont, és P átmenő involúziós sugársor, szerkesszessék azon kúpszelet, melyre vonatkozólag P sugársor kapcsolt sugarai, kapcsolt polárisok, P -nek polárisa p , és mely c -t érinti».

Nevezzük azon pontot, mely P és p -t, C -től harmonikusan elválasztja A -nak, $|CP|$ és p metszőpontját F_1 -nek, p tetszőleges kapcsolt pontpárját E, E_1 -nek $|AE|$, $|CE_1|$, és $|AE_1|$, $|CE|$ metszőpontját B , illetve D -nek (53. és 54. ábra).

$|BD|$ egyenes P ponton megy át és B, D pontok P, p -t harmonikusan választják el, mert $ABCD$ teljes négyoldal átlói: $|BD|$, $|AC|$ és p egyenesek. Mialatt E, E_1 kapcsolt pontpár az involúziós pontsoron végig halad $|AE|$, $|CE_1|$ sugarak, A és C körül projektív sugársorokat irnak le, melynek képződménye kúpszelet. E kúpszelet átmegy A, C és a változó B, D pontokon; érinti A, C -ben $|FA|$, ill. $|FC|$ egyeneseket; erre vonatkozólag P -nek polárisa p , és a változó $ABCD$ négyoldal következtében, p -n fekvő kapcsolt pontok kapcsolt polusok.

Ha C pont helyett c érintő lett volna adva, akkor vagy a dualisan megfelelő eljárást követjük, vagy a szerkesztést visszavezetjük az előbbire akkép, hogy c, p metszéspontján átmenő $|PF|$ sugárhoz kap-

csolt $|PF_1|$ sugarat felkeressük, mely c érintőt, annak C érintő pontjában metszi. C pont, mint a kúpszelet egy pontja, P, p mint polus és poláris, és P involucziós sugársor által p -n kimetszett involucziós pontsor, mint előbb meghatározza a kúpszeletet. A szerkesztések függetlenek attól, hogy p -n fekvő vagy P -n átmenő involucziós sorok hyperbolikus vagy elliptikus természetűek-e.

Jegyzet. Ha fönnebbi szerkesztésnél p a sík végtelen távol fekvő egyenese g_∞ , a rajta fekvő involucziós pontsor pedig egy czirkuláris involucziós sugársor által van rajta kimetszve, akkor a kúpszelet — kör lesz. Azon A pont ugyanis, mely P és C által harmonikusan van elválasztva, P -től ép oly távolságra van, mint C pont; az A, C pontokon átmenő és egymásra merőleges egyenesek, melyek tehát g_∞ -en fekvő involucziós pontsornak kapcsolt pontpárjain átmennek, egymást oly körön metszik, a melynek középpontja P . — A kör e szerint középpontja, és egy pontja, vagy érintője által meg van határozva.

96. Vegyük most a 94-dik pont a) és a_1) feladatát, de mondjuk, hogy az öt adott pont vagy érintő közül, két pont, illetve két érintő, mint egy involucziós sornak két kettőspontja van adva. A feladat e szerint így szól: «Szerkesszünk három adott

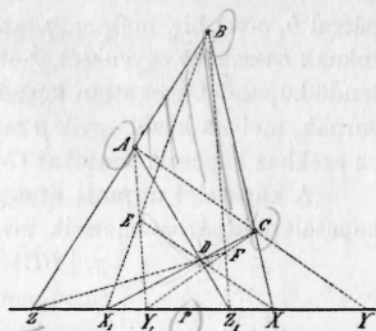
ponton A, B, C -n átmenő kúpszeletet, melyre vonatkozólag adott p egyenesen fekvő involucziós pontsor kapcsolt pontpárjai, kapcsolt pólusok, ha A, B, C pontok p -n kívül fekszenek».

egyeneset a, b, c -t érintő kúpszeletet, melyre vonatkozólag adott P ponton átmenő involucziós sugárpárok kapcsolt polárisok, ha P nem fekszik, a, b, c egyeneseken».

Nevezzük (67. ábra) $|BA|, |CB|$ egyenesek metszőpontjait p -vel, Z , illetve X -nek; e pontokhoz kapcsolt pontokat az involucziós sorban Z_1, X_1 -nek; $|AZ_1|, |CX_1|$ metszőpontját D -nek. Ha p -nek összes pontjait B -vel, és ezekhez kapcsolt pontokat D -vel sugarak által összekötjük, akkor a két sugársor képződménye oly kúpszelet lesz, mely átmegy A, B, C, D pontokon és melyre vonatkozólag p -n fekvő kapcsolt pontok, kapcsolt pólusok (78. és 95.). — A szerkesztés független attól, hogy az involucziós sor hyperbolikus vagy elliptikus-e, tehát hogy annak kettőspontjai valósak-e vagy képzetesek. —

E szerkesztésnél B pontnak különös szerep jutott A, C pontok mellett, de kimutatható, hogy ugyanazon kúpszeletet találjuk, ha A -t vagy C -t a szerkesztésnél B -vel fölcseréljük.

$|DX|$, $|BX_1|$ metszéspontját, mint a szerkesztett kúpszeletnek egy pontját E -nek nevezvén látható, hogy $|AE|$, $|AC|$ egyenesek p -t az adott involúziós pontsor két kapcsolt pontjában Y_1 , Y -ban metszik, mert $EDCB$ négy oldalnak hat szögpontja: $E, C; D, B; X, X_1$ involúziót képező sugárpárrakkal projiciáltatik A -ból. Ebből következik, hogy E , C pontokat az involúziós sor kapcsolt pontjaival összekötő egyenesek egymást ugyanazon az A, B, C, D, E pontokon átmenő kúpszeleten metszik, mint az előbbi kúpszelet.



67. ábra.

Ugyan így kimutatható, ha $|DZ|$, $|BZ_1|$ metszéspontja F : hogy azon sugárpárok, melyek A, F pontokat az adott involúziós pontsor kapcsolt pontjaival összekötik, egymást a talált kúpszeleten metszik.

Jegyzet. Ha p a sík végtelen távol fekvő g_∞ egyenese, és a rajta fekvő involúziós pontsor egy cirkuláris involúziós sugársor által van kimetszve, akkor $AD \perp AB$, $CD \perp BC$, és a B, D pontokon átfektetett egymásra merőleges egyenesek g_∞ -t azon involúzió kapcsolt pontjaiban metszik. De két ponton átmenő és egymásra merőleges egyenesek metszéspontjai körön fekszenek, tehát a három ponton átmenő kör szerkesztése, specziális esetét képezi a tárgyaltaknak.

97. Az $a)$ és $a_1)$ feladatnál azonban két pár elem is lehet képzetes, és így, mint egy-egy involúziós sor kettőspontja által adva. A feladat akkor így szól:

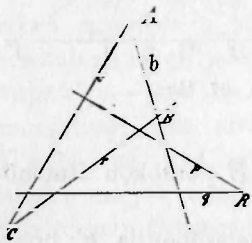
«Fektesünk A ponton át kúpszeletet, melyre vonatkozólag p és q egyeneseken fekvő involúziós pontsorok kapcsolt pontpárjai, kapcsolt pólusok».

«Szerkesszünk a egyenest érintő kúpszeletet, melyre vonatkozólag P és Q középponttal bíró involúziós sugársorok kapcsolt sugarai kapcsolt polárisok».

Tételezzük fel, hogy az involúziós sorok közül legalább egyik elliptikus, mert ha mindkettő hyperbolikus természetű volna, úgy a két pár valós kettőspont és az adott pont vagy érintő szerkesztése után a feladat az $a)$ illetve $a_1)$ feladatra lenne visszavezetve. Azon két involúziós sugársor, mely p és q -n fekvő involúziós pontsorokat A -ból projiciálja, ekkor szükségkép (35) közös kapcsolt sugár-

párral b , c -vel bir, mely p , q tartók R metszőpontjához kapcsolt pontoknak összekötő egyenesét, r -et, B , C pontokban metszi. A szerkesztendő kúpszelet ezek után képződménye lesz azon két projektív sugársornak, melyek közül egyik p tartónak összes pontjait B -ből, a másik az ezekhez kapcsolt pontokat C -ből projiciálja.

A kúpszelet ugyanis átmegy A -n mert $|BA|$, $|CA|$ sugarak p -t kapcsolt pontpárban metszik, továbbá $|BC| \equiv r$ egyenes pólusa, R ; mert p , $|BC|$ egyenesek kapcsolt polárisok és R , (p, r) pontok kapcsolt polusok azon kúpszeletre vonatkozólag. De $|BA|$, $|CA|$; és $|BR|$, $|CB|$ sugarak q -t is a q -n fekvő involúziós pontsor kapcsolt pontjaiban metszik, mely metszőpontok egyszersmind kapcsolt pólusok a szerkesztett kúpszeletre vonatkozólag, tehát q -n fekvő összes kapcsolt pontpárak kapcsolt pólusok lesznek azon kúpszeletet illetőleg.



68. ábra.

A jobb oldalon álló feladat hasonlóképp lesz megoldva. a érintőn P , Q involúziós sugársorok involúziós pontsorokat metszenek ki, melyeknek (ha legalább egyik sugársor elliptikus) B , C -ben közös kapcsolt pontpárjuk van; ezek $|PQ| \equiv r$ -hez mindkét adott sugársorban kapcsolt sugarak R metszőpontjából $|RB| \equiv b$, $|RC| \equiv c$ sugarakkal projiciáltatnak. Azon kúpszelet, mely a , b , c -t érinti és melyre vonatkozólag P , Q involúziós sugársor egyikének kapcsolt sugarai kapcsolt polárisok: a kívánt kúpszelet.

98. A kúpszeletet azonban más adatok is egyféleképp határozzák meg, mint a következő feladatokból látható.

Szerkesztendő kúpszelet, melyre vonatkozólag:

α) egy P pontnak polárisa p egyenes, és mely A , B , C pontokon átmegy, vagy a , b , c egyeneseket érinti.

β) P , Q pontoknak polárisai p , q egyenesek, és mely A ponton átmegy, vagy a egyenest érinti.

γ) PQR háromszög polárháromszög, és A , R pontokon átmegy, vagy a , b egyeneseket érinti.

Megoldás. α) Ha D , E , F pontok A , B , C -t P , p -től harmonikusan elválasztják, akkor ezek az adott pontokkal meghatározzák az α) alatt keresett kúpszeletet. De hogy A , B , C , D , E , F pontok tényleg kúpszeleteken fekszenek onnan következik, hogy $ABCDEF$ PASCAL-féle hatszög. Nevezzük ugyanis $|AP|$, $|BP|$, $|CP|$ sugarak metszőpontját p -vel A_1 , B_1 , C_1 -nek, akkor

$$(ADPA_1) = (BEPB_1) = (CFPC_1) = -1;$$

tehát

$$|AB|, |ED|; |BC|, |FE|$$

egymást p -ben metszik, és mert

$$(ADPA_1) = (FCPC_1) = -1,$$

azért

$$|AF|, |DC|$$

is egymást p -ben metszi. —

β) Ha a kúpszelet A pontja vagy a érintője és $P, p; Q, q$ pólus és polárisa van adva, akkor p, q polárisok $|PQ|$ egyenest P_1, Q_1 pontokban metszik, és P, Q pontok (p, q) pontból p_1, q_1 sugarakkal projiciáltatnak. Azon kúpszelet, melyre vonatkozólag $P, P_1; Q, Q_1$ pontok kapcsolt pólusok, és $|PQ|$ -nak pólusa (p, q) , vagy a mi ugyanaz, $p, p_1; q, q_1$ sugarak kapcsolt polárisok és (p, q) -nak polárisa $|PQ|$: (95. szerint) teljesen meg van határozva és szerkeszthető. E szerint a pólus és poláris együttvéve annyi adatnak felel meg, mint két pont, vagy két érintő.

γ) Szerkesztünk két négyszöget, melyeknek átlós háromszöge PQR , és melyek elsejének egyik szögpontja A , a másodiknak egyik szögpontja B ; azon kúpszelet, mely az első négyszögnek négyszögpontján és B -n átmegy, a második négyszögnek mind a négy szögpontját tartalmazza.

Ebből látható, hogy ha két négyszögnek ugyanazon átlósháromszöge van, akkor annak nyolcz szögpontja kúpszeleten fekszik; hasonlóképp két négyoldalnak nyolcz oldala egy kúpszeletnek érintője, ha azok közös átlósháromszöggel bírnak.

E tulajdonságából a négyszögek és négyoldaloknak következik:

Két ugyanazon négyoldalba írt kúpszeletnek nyolcz érintőpontja az oldalakkal, új kúpszeleten fekszik, mert (72.) a négyoldal és a két kúpszelet érintőpontjai által meghatározott két négyszög, közös átlósháromszöggel bír.

Egy négyszög körül írt két kúpszelet négy pár érintője a négyszög szögpontjaiban, egy új kúpszeletnek érintője, mert azon négyoldal, melyek ugyanazon kúpszelethez tartozó négy érintőből képeztetnek, a négyszöggel együtt közös átlósháromszöggel bírnak.

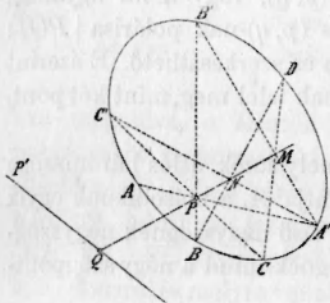
Magából a szerkesztésből következik még, hogy egy polárháromszög annyi adatnak felel meg, mint három pont, vagy három érintő.

99. Vegyünk fel A, B, C, D, P, P' pontokat és szerkesszünk kúpszeletet, mely az első négy ponton átmegy, és melyre vonatkozólag P, P' pontok kapcsolt polárusok.

Oly kúpszelet szerkesztendő, mely négy egyenest érint és melyre vonatkozólag két tetszőleges egyenes kapcsolt poláris.

Ha azon pontot, mely A, B, C, D négyszög átellenes oldalait P -től harmonikusan elválasztja (53) Q -nak nevezzük, akkor a kereset kúpszelet az lesz, mely A, B, C pontokon átmegy és melyre vonatkozólag P pont polárisa $|P'Q|$ egyenes.

Hogy ezt bebizonyítsuk, nevezzük azon pontokat (69. ábra), melyek A, B, C -től P pont és $|P'Q|$ egyenes által harmonikusan vannak elválasztva A', B', C' -nek. $|AB|, |A'B'|$,



69. ábra.

valamint $|AB|, |CD|$ egyenespárok P, Q -től harmonikusan vannak elválasztva, ezért $|A'B'|$ és $|CD|$ metszéspontja M , — $|IQ|$ egyenesen fekszik; hasonlóképp $|AC|, |A'C'|$, valamint $|AC|, |BD|$ egyenespárok, P, Q -től harmonikusan vannak elválasztva, ezért $|A'C'|$ és $|BD|$ metszéspontja N , — $|PQ|$ egyenesen fekszik. Minthogy továbbá $C'A'B'BDC$ hatszög átellenes oldalpárjai:

$|C'A'|, |BD|; |A'B'|, |DC|$ és $|B'B|, |C'C|$

egymást $|PQ|$ egyenes M, N, P pontjában metszik: $C'A'B'BDC$ PASCAL-féle hatszög; tehát D pont rajta fekszik a C', A', B', B, C pontokon átmenő kúpszeleten, mely mint könnyen látható, A pontot is tartalmazza.

14. §. Kúpszeletek szerkesztése oly adatokból, melyek azt többféleképp határozzák meg.

100. Mindazon adatok, melyekből az előbbi fejezetben kúpszeletet szerkesztettünk, csak egyféleképp határozták meg a kúpszeletet, vagyis csak *egy* kúpszeletet lehetett szerkeszteni, mely az adott követelményeknek megfelelt. Lehet azonban oly adatokat is választanunk, melyek egynél több — de nem végtelen sok — kúpszeletet határoznak meg.

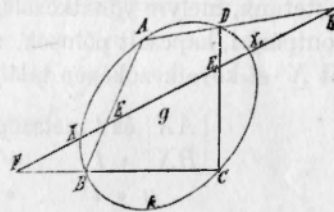
Hogy az erre vonatkozó szerkesztéseket megmutassuk, előre kell bocsátanunk a következőket.

Négy pont A, B, C, D , mint tudjuk, nem határozza meg a kúpszeletet egyféleképp, mert a sík tetszőleges pontján és ezen négy ponton mindig lehet kúpszeletet átfektetni, mely azonban azon esetben, a midőn az ötödik pont a négy pont összekötő egyenesének egyikén, pl. $|AB|$ -n fekszik, elfajul $|AB|, |CD|$ egyenespárrá. A négy ponton átmenő kúpszeletek tehát a négy pont síkját teljesen betöltik. Mind ezen kúpszeletek, melyek négy ponton átmennek, nevezetes tulajdonsággal bírnak, mely következő DESARGUES-tól eredő tétellel fejezhető ki:

Négy ponton átmenő összes kúpszelet a sík tetszőleges egyenesét egy involucziós pontsornak kapcsoló pontpárjaiban metszik; a négy ponton átmenő egyenespárok metszéspontjai az egyenessel, az involucziós sornak kapcsoló pontjai.

Azon érintőpárok, melyek egy négyszögbe írható összes kúpszelethez egy tetszőleges pontból vonhatók: involucziós sugársort képeznek; a négy oldal átellenes szögpontjait projicziáló sugárpárok, kapcsoló sugarai az involucziós sornak.

Nevezzük $ABCD$ négyszög $|AB|, |CD|; |BC|, |AD|$ átellenes oldalainak és egy a négyszög szögpontjain átmenő tetszőleges kúpszeletnek metszéspontjait g egyenessel $E, E_1; F, F_1; X, X_1$ -nek, és vegyük tekintetbe, hogy



70. ábra.

$$A(XX_1, BD) \wedge C(XX_1, BD).$$

Az első négy és második négy sugárnak metszését képezve g -vel:

$$(XX_1EF_1) \wedge (XX_1FE_1),$$

és

$$(XX_1EF_1) \wedge (X_1XE_1F),$$

a miből már következik, hogy X, X_1 kapcsoló pontpárja azon involucziós sornak, melynek kapcsoló pontpárjai $E, E_1; F, F_1$. Ugyanígy bizonyíttatik be a jobb oldalon álló tétel is.

101. A tétel bizonyításánál föltételeztük, hogy A, B, C, D pontok valóságok, de a tétel akkor is igaz, ha a négy pont közül kettő, egy

elliptikus természetű involúziós pontsornak képzetes kettőspontja, a midőn a tétel így fejezhető ki:

Mindazon kúpszeletek, melyek két ponton átmennek és melyre vonatkozólag egy adott involúziós pontsor kapcsolt pontpárjai kapcsolt pólusok, tetszőleges egyenest involúziós pontsor szerint metszenek; ezen involúziós sornak egyik kapcsolt pontpárja az adott két pont összekötő egyenesének és az involúziós sor tartójának metszőpontja az egyenessel.

Ha mindazon kúpszeletekhez, melyek két egyenest érintenek és melyre vonatkozólag egy adott involúziós sugársornak kapcsolt sugarai kapcsolt polárisok, tetszőleges pontból érintőket húzunk, úgy ezen érintők involúziós sugársort képeznek, melynek egyik kapcsolt sugárpárja a két érintő metszőpontját és az adott sornak középpontját projicziálja.

Nevezzük a két adott pontot A , B -nek, az involúziós pontsor tartóját t -nek, a kúpszeleteket metsző egyenest g -nek; (g, t) metszőpontját γ -nak (71. ábra).

Ha A , B -n és g -nek tetszőleges X pontján át kúpszeletet, k -t fektetünk, melyre vonatkozólag t -n fekvő involúziós pontsor kapcsolt pontpárjai, kapcsolt pólusok, akkor k és g -nek második metszőpontját X' -et következőképen találjuk meg:

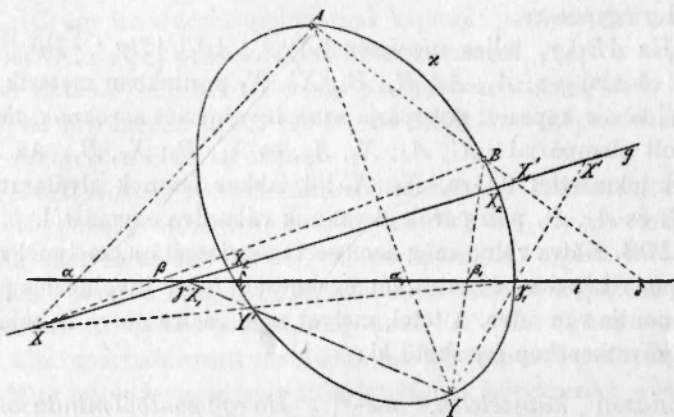
$|AX|$ és t metszőpontja α , ennek kapcsolt pontja t -n, α_1 ,
 $|BX|$ " t " " β , " " " t -n, β_1 ,
 g " t " " γ , " " " t -n, γ_1 ,
 ha végre $|A\alpha_1|$ " $|B\beta_1|$ " " Y , akkor $|Y\gamma_1|$, g egyenest X'

pontban metszi, mert k kúpszelet képződménye azon két projektív sugársornak, mely az adott involúziós pontsor kapcsolt elemeit X , Y -ből projicziálja (96). Ugyane k kúpszeleten fekszik ezért $|X\gamma_1|$ és $|Y\gamma|$ egyeneseknek metszőpontja Y' is, és mert $|X'Y'|$, szintúgy mint $|XY|$, t -nek k -ra vonatkozó pólusán megy át, a mint az k kúpszeletbe írt $XX'YY'$ négyszögből látható: k kúpszelet egyszersmind képződménye azon két projektív sugársornak, melynek megfelelő sugarai t -n fekvő involúziós pontsor kapcsolt pontpárjait X' , Y' -ből projicziálják.

k kúpszelet X , X' metszőpontjai g -vel, oly összefüggésben állanak Y , Y' pontokkal, hogy X , X' pontok Y' , Y -nak projekciói g és t metszőpontjához, γ -hoz, kapcsolt γ_1 pontból g -re; maguk az Y , Y' pontok pedig γ -val együtt egyenesen fekszenek.

Y, Y' pontokról kimutatható, hogy ezek, mialatt X és így egyszerűsre X' pont g -n változik, γ_1 ponton átmenő κ kúpszeletet írnak le, a miből már következni fog, tekintettel arra, hogy $|YY'|$ egyenes az állandó γ ponton megy át, hogy Y, Y' pontpárok κ -n, és így ezeknek projekceiói γ_1 -ből g -re, vagyis X, X' pontpárok g egyenesen, involúziós pontsört képeznek.

Ha ugyanis X pont g -n tova halad, $|A\alpha|$ és $|B\beta|$ sugarak, melyek X -ben találkoznak, két projektív sugársort, és így $|A\alpha_1|$ és $|B\beta_1|$ sugarak szintén két projektív sugársort írnak le; ez utóbbi sorok megfelelő sugarainak metszőpontjai pedig az Y pontok.



71. ábra.

A midőn X, γ -ba kerül, a hozzá tartozó $Y, -\gamma_1$ lesz; tehát γ_1 rajta fekszik azon projektív sorok képződményén, vagyis κ kúpszeleten, melylyel azon állításunk, hogy X, X' pontok, mint a változó k kúpszeletnek metszőpontjai g -vel, involúziós pontsört képeznek, — be van bizonyítva.

A midőn X pont t egyenes γ pontjába jut, k kúpszelet elfajul ezen t és $|AB|$ egyenessé, tehát e két egyenesnek X_1, X'_1 metszőpontja g -vel szintén egy kapcsolt pontpárja lesz az involúziós sornak.

Jegyzet. 1) Ha g egyenes $|AB|$ és t metszőpontjához δ -hoz kapcsolt δ_1 ponton megy át, κ kúpszelet két egyenessé fajul, mert $|A\alpha_1|$ és $|B\beta_1|$ sugarak által leírt sugársorok perspektív helyzetűek lesznek; ezen egyenesek közül az egyik $|AB|$, a másik pedig átmegy δ_1 ponton. Minden X ponthoz tartozik egy második metszőpont X' , és

ehhez egy Y' pont; Y és Y' pontoknak projekciói δ -ból g -re: X' illetve X .

X és Y pontok g , illetve α -án projektív pontsorokat írnak le, és mert Y -nak projekciója δ -ból g -re X' , tehát X és X' pontsor is projektív. De ezek azonkívül involúciós helyzetű, mert X -nek megfelel a második sorban X' és X' -nek megfelel a második sorban (Y' közvetítésével) X pont.

2.) α kúpszelet metszőpontjai g -vel szintén kapcsolt pontjai az X , X' pontpárok által leírt involúciós sornak, és előre megszerkeszthetők, mint azon két involúciós pontsor közös kapcsolt pontpárjai X_2 , X'_2 , mely involúciós sorok projekciói az adottnak A és B pontokból g egyenesre.

Ha $AB\delta_1\gamma_1$ teljes négyszög $|A\gamma_1|$, $|A\delta_1|$, $|B\gamma_1|$, $|B\delta_1|$, $|AB|$, $|\delta_1\gamma_1|$ oldalai g -t: A_γ , A_δ , B_γ , B_δ , X'_1 , X_1 pontokban metszik, akkor X_2 , X'_2 közös kapcsolt pontpárja azon involúciós soroknak, melynek kapcsolt elempárjai: X'_1 , A_δ ; X_1 , A_γ , és X'_1 , B_δ ; X_1 , B_γ . Az X_2 , X'_2 pontok tekintettel 93.-ra, X_1 , X'_1 -től, akkor lesznek elválasztva, ha A_γ , B_δ és A_δ , B_γ pontpárok el vannak választva egymástól.

102. Hátra volna még azon eset megvizsgálása, melynél mind a négy pont képzetes és mint két egyenesen fekvő involúciós pontsor kettőspontja van adva. A tétel, melyet ezen esetre nézve is bebizonyítunk, következőkép fejezhető ki:

Mindazon kúpszeletek, melyekre vonatkozólag, két egyenesen fekvő két involúciós pontsor kapcsolt pontpárjai, kapcsolt pólusok, egy tetszőleges egyenest involúciós pontsor szerint metszenek; a két involúciós pontsor tartójának metszőpontjai a felvett egyenessel: kapcsolt pontpárja az involúciós pontsornak.

Ha egy pontból mindazon kúpszeletekhez, melyekre vonatkozólag két adott involúciós sugársor kapcsolt sugarai, kapcsolt polárisok, érintőket húzunk, akkor ezek egy involúciós sugársornak kapcsolt sugarait képezik; e sornak egyik sugárpárja azon két sugár, mely a két involúciós sornak középpontját a felvett pontból projiciálja.

Hogy a baloldalon álló tételt bebizonyítsuk, nevezzük a két involúciós pontsor tartóját a , b -nek; ezeken fekvő involúciós sorok kapcsolt pontpárjait általánosan A_i , A'_i -nek, illetve B_i , B'_i -nek; a , b metszőpontját $A \equiv B$ -nek, az ehez kapcsolt pontot a -n, valamint b -n A' , illetve B' -nek, végre $|A'B'|$ egyenest röviden c -nek.

Először kimutatjuk, hogy «ha a és b egyeneseken fekvő involúziós pontsor tetszőleges $A_i, A'_i; B_i, B'_i$ kapcsolt pontpárjain át kúpszeletet fektetünk, ezen kúpszeletek, bármint válaszszuk is az $A_i, A'_i; B_i, B'_i$ kapcsolt pontpárakat, az (a, b) ponthoz kapcsolt A', B' pontok összekötő egyenesét $|A'B'| \equiv c$ -t egy és ugyanazon involúziós pontsor kapcsolt pontpárjaiban C_i, C'_i -ben metszik, melynek egy kapcsolt pontpárja A', B' ».

Ha $A_i, A'_i; A_j, A'_j$ az a -n, $B_i, B'_i; B_j, B'_j$ a b -n fekvő involúziós pontsornak kapcsolt pontpárja, és az A_i, A'_i, B_i, B'_i , valamint az A_j, A'_j, B_j, B'_j pontokon átmenő tetszőleges kúpszelet metszőpontja c -vel C_i, C'_i , illetve C_j, C'_j , — akkor kimutatandó, hogy $A', B'; C_i, C'_i; C_j, C'_j$ egy involúziós pontsornak kapcsolt pontpárjai lesznek.

$A_i A'_i C_i C'_i B_j B'_j$ pontok kúpszeleten fekszenek, mert a négy első ponton átmenő kúpszelet b -t oly pontpárban metszi, mely $B, B'; B_i, B'_i$ -tel involúziót képez (100.); ha tehát ama kúpszelet átmegy B_j -n, akkor B_j -n is át fog menni.

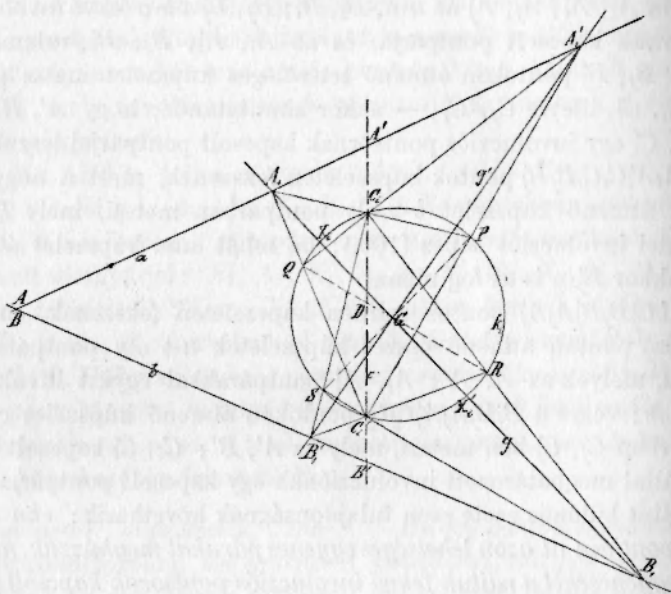
$C_i C'_i B_j B'_j A_j A'_j$ pontok szintén kúpszeleten fekszenek, mert a négy első ponton átmenő összes kúpszeletek a -t oly pontpárakban metszik, melyek az $A, A'; A_i, A'_i$ pontpárakkal együtt involúziót képeznek; végre a $B_j B'_j A_j A'_j C_j C'_j$ pontokon átmenő kúpszelet c -t oly pontpárban C_j, C'_j -ben metszi, mely az $A', B'; C_i, C'_i$ kapcsolt pontpárak által meghatározott involúciónak egy kapcsolt pontpárja.

Mint különös esete ezen tulajdonságnak következik: «ha a sík összes pontjain át azon lehetséges egyenes párokat meghúzzuk, melyek a és b egyeneseket a rajtuk fekvő involúziós pontsorok kapcsolt pontpárjaiba nemetszik, akkor az összes ily tulajdonságú egyenespárak, (a, b) ponthoz kapcsolt A', B' pontok összekötő $|A'B'| \equiv c$ egyenesét, egy és ugyanazon involúziós pontsor kapcsolt pontpárjaiban C_i, C'_i -ben fogják metszeni», — mert ama egyenespárak elfajult kúpszeleteknek tekinthetők.

Figyelembe véve már most a 97-dik pont alatt tárgyalt szerkesztést, tiszta fogalmat szerezhethünk magunknak, az összes k_i kúpszeletekről, melyekre vonatkozólag az a és b -n fekvő involúziós pontsorok kapcsolt pontjai, kapcsolt pólusok; mert ezek képződményei ama projektív sugársoroknak, melyeknek C_i, C'_i középpontjai a c -n fekvő, és a két adott involúziós pontsor által meghatározott, involúziós pontsor kapcsolt pontpárjai, és mely projektív sugársorok megfelelő sugarai, az a -n, vagy b -n fekvő involúziós pontsorok kapcsolt pontjait projicziálják. Ezután bebizonyítandó, hogy mindazon k_i kúp-

szeletek, melyek ily módon származtathatók, egy tetszőleges g egyenest involúziós pontsor szerint metszenek.

Legyen (72. ábra) k_i egy ily kúpszelet, mely C_i, C'_i pontokon megy át s melyre vonatkozólag az összes $A_i, A'_i; B_i, B'_i$ kapcsolt pontpárok, kapcsolt pólusok; és nevezzük g egyenes metszőpontját a, b -vel A_1, B_1 -nek, az ehhez kapcsolt pontokat A'_1, B'_1 -nek; $|A'_1B'_1|$ egyenest



72. ábra.

g' -nek; g, g' metszőpontját G -nek; g, c metszőpontját D -nek, k_i kúpszelet és g egyenes metszőpontjait X_i, X'_i -nek. E szerint:

$$|A_1B_1| \equiv g; |A'_1B'_1| \equiv g'; (g, g') \equiv G; (g, c) \equiv D; (g, k_i) \equiv X_i \text{ és } X'_i.$$

Ha kimutatjuk, hogy $A_1, B_1; G, D; X_i, X'_i$ involúziót képező hat pont, akkor a tételben kifejezett tulajdonság be van bizonyítva, mert C_i, C'_i pontok változásával k_i , és így X_i, X'_i is változik, de $A_1, B_1; G, D$ pontok állandók maradnak és ezért az összes X_i, X'_i pontpárok egy involúziós pontsor kapcsolt pontjai, mely már $A_1, B_1; G, D$ kapcsolt pontpárok által meg van határozva.

$ A_1 C_i $	$ A'_1 C'_i $	egyenesek metszéspontját P -nek,
$ A'_1 C_i $	$ A_1 C'_i $	" " Q "
$ B_1 C_i $	$ B'_1 C'_i $	" " R "
$ B'_1 C_i $	$ B_1 C'_i $	" " S "

nevezvén, $PQRS$ pontok $C_i C'_i$ -vel együtt k_i kúpszeleten fekszenek és $PC_i RQC'_i S$ PASCAL-féle hatszögnek átellenes oldalai egymást

$$|A_1 G B_1| = g\text{-ben,}$$

$PC'_i RQC_i S$ PASCAL-féle hatszögnek átellenes oldalai egymást

$$|A'_1 G B'_1| = g'\text{-ben}$$

metszik, tehát a két hatszögnek közös $|PS|$, $|RQ|$ átellenes oldalai: g , g' -nek G metszéspontján mennek át.

Ha még k_i kúpszeletbe írt $QC_i RC'_i$ négyszöget tekintjük, melynek $|QC'_i|$, $|RC_i|$ átellenes oldalai g -t A_1 és B_1 -ben; $|C_i C'_i| = c$, és $|RQ|$ átellenes oldalai g -t, D és G -ben metszik, következik, (97.): hogy $A_1, B_1; D, G; X_i, X'_i$ pontok ugyanazon involúciónak kapcsolt pontpárjai, melylyel — a tételben kifejezett tulajdonság be van bizonyítva.

103. Ezen a kúpszeletek tanában fontos és általános tételek alapján képesek leszünk már a következő feladatokat megoldani.

Adva van négy pont és egy egyenes; szerkesztendő oly kúpszelet, mely a négy ponton átme gy és az egyenest érinti.

Az egyenes a négy ponton átmenő összes kúpszeletek által involúziós pontsor szerint metszetik, melynek kettőspontjai a keresett kúpszeletnek érintőpontjai az adott egyenessel.

Ha a négy pont valós, úgy a négy ponton átmenő egyenes pára k, mint elfajult kúpszeletek az egyenest azon involúziós pontsor kapcsolt pontpárjaiban metszik; ezekből már a kettőspontok szerkeszthetők.

Adva van négy egyenes és egy pont; e ponton át szerkesztendő kúpszelet, mely a négy egyenest érinti.

A pontból a négy egyenest érintő kúpszeletekhez húzható érintőpárok involúziós sugársort képeznek; e sornak egyes kettőspontjai, mint érintők, meghatározzák a keresett kúpszeleteknek ötödik érintőjét.

Ha a négy egyenes valós, akkor az általuk meghatározott négy oldal átellenes szögpontjai, mint két-két ponttá fajult kúpszeletek, a felvett pontból az involúziós sugársor kapcsolt sugaraival által projicziáltatnak; ezekből a kettőspontok szerkeszthetők.

A mi annak megítélését illeti, hogy az adatok mily helyzeténél van a feladatnak két valós, vagy két képzetes megoldása, és mely attól függ, hogy a szóban forgó involucziós sorok hyperbolikus avagy elliptikus természetűek-e, az az 52-dik pont végén adott tapasztalati eredményekből könnyen leolvasható. A feladatnak egy megoldása van, ha az adott egyenes a négy pont egyikén megy át, illetve, ha az adott pont a négy egyenes egyikén fekszik. —

Ha a négy pont közül A, B valós, a másik kettő, mint t -n fekvő involucziós pontsor képzetes kettőspontja van adva, akkor (71. ábra) g -n levő kettőspontok felkeresésére czélszerű t és $|AB|$ -nek metszőpontjait X_1, X'_1 -et az adott g egyenessel, egyik kapcsolt pontpárnak választani.

Az adott involucziós pontsor projekciói A és B pontból g -re: szintén elliptikus természetűek, s mint ilyenek, közös kapcsolt pontpárral X_2, X'_2 -vel bírnak, melyet a g -n származó involucziós pontsor második kapcsolt pontpárjának tekinthetünk.

A feladat ezen esetben két valós, vagy két képzetes megoldással bír, a szerint, a mint $X_1, X'_1; X_2, X'_2$ pontpárok egymástól nincsenek, vagy pedig el vannak választva. De ezen kritérium (tekintettel a 101. pont 2. jegyzetére) visszavezethető még egyszerűbbre, mely magukból az adatokból leolvasható és mely tapasztalási eredmény így szól: «ha a két adott valós pont g és t egyenes közül csak egyik által van elválasztva, akkor a feladat nem ad valós megoldást, minden más esetben a feladatnak két valós megoldása van».

A dualisan megfelelő feladat diskussiójára nézve következő mondható. Ha a négy egyenes közül kettő a, b valós, kettő pedig T involucziós sugársor képzetes kettőssugara, és G azon pont, melyen a négy egyenest érintő kúpszelet átfektetendő, akkor a, b egyenesek metszéshez hozatnak T sugársorral és a származott involucziós pontsorokat G -ből projicziáló sugársorok közös kapcsolt sugárpárjának x_2, x'_2 -nek helyzete $|GT| \equiv x_1, |G, (a, b)| \equiv x'_1$ sugárpárhoz meghatározza, hogy két valós vagy pedig képzetes kúpszelet felel-e meg a feladat követelményeinek. Ha ugyanis $x_2, x'_2; x_1, x'_1$ sugárpárok egymástól nincsenek elválasztva, akkor a feladatnak két valós megoldása van; ellenkező esetben nincs oly valós kúpszelet, mely a követelményeknek megfelel. Ez ismét visszavezethető még egyszerűbb kritériumra, t. i.: «ha G, T pontokat a, b egyenesek közül csak egyik választja el, akkor a megoldások képzetesek; különben valóságok». —

Hátra volna végre azon eset megvizsgálása, a melynél a négy

pont. illetve a négy egyenes, képzetes, és mint két elliptikus természetű involúziós pontsor kettőspontja van adva.

Ezen esetben a feladatnak mindig két valós megoldása van, mert bármily helyzetű g egyenes, a rajta kimetszett involúziós sor — melynek $A_1, B_1; D, G$ kapcsolt elempárja a 72. ábrában egymástól soha sincsen elválasztva — mindig hyperbolikus természetű. —

104. E §-ban tanult alaptétel azonban fordítva is igaz, t. i. :

Mindazon kúpszeletek, melyek három ponton és egy involúziós pontsor kapcsolt pontpárjain átmennek, egymást még egy negyedik pontban metszik. Mert ha A, B, C azon három pont és $P, Q; P_1, Q_1$, az involúziós pontsor két kapcsolt pontpárja, t annak tartója, úgy A, B, C, P, Q és A, B, C, P_1, Q_1 ponton átmenő két kúpszelet, mint később látni fogjuk, még egy negyedik közös ponttal D -vel bír. A, B, C, D ponton átfektetett kúpszeletek t -t egy involúziós pontsorban metszik, melynek két kapcsolt pontpárja $P, Q; P_1, Q_1$, mely tehát az adott involúzió pontsorról azonos. Innen következik, hogy az adott involúziós pontsor más kapcsolt pontpárján P_i, Q_i -n és A, B, C -n áthelyezett kúpszeletek D ponton is átmennek.

E tulajdonság tekintetbe vételével *szerkeszthetünk kúpszeletet, mely három adott ponton megy át és melyre vonatkozólag két adott pontpár kapcsolt pólus.*

Ha ugyanis A, B, C az adott három pont; P, Q és P_1, Q_1 a két pontpár, úgy A, B, C pontokon át oly két kúpszeletet (legegyszerűbben egyenespárt) fektetünk, mely $|PQ|$ egyenest két-két, P, Q pontoktól harmonikusan elválasztott pontban metszi. E két kúpszelet A, B, C pontokon kívül még egy negyedik közös ponttal, D -vel bír. Ha most A, B, C, D pontokon át kúpszeletet fektetünk, melyre (99) vonatkozólag F_1, Q_1 kapcsolt póluspár, úgy ez lesz a keresett kúpszelet, mert ez $|PQ|$ egyenest azon involúziós pontsor kapcsolt pontjában metszi, melynek két kettőspontja P, Q pont.

105. A négy ponton A, B, C, D -n átmenő kúpszeletek ama tulajdonsága, hogy azok tetszőleges egyenest involúziós pontsor szerint metszenek, igaz marad még akkor is, ha a négy pont közül kettő-kettő, pl. A és C , valamint B és D egybe esik. $ABCD$ négyszögnek AC, BD oldalai ekkor a kúpszeletek érintőivé, $|AB| \equiv |CD|$ egybeeső oldalak pedig azon kúpszeletek érintő húrjává változnak. Ennélfogva mondhatjuk :

«Az összes kúpszeletek, melyek két egyenest ugyanazon két pontban érintenek, azon tulajdonsággal bírnak, hogy tetszőleges

egyenest involucziós pontsor szerint metszenek. A két érintő metszőpontja a metsző egyenessel az involucziós pontsornak egy kapcsolt pontpárja, az érintőhúr metszőpontja pedig egy kettőspontja.

pontból a kúpszeletekhez vonható érintőpárok involucziós sugársort képeznek. Azon sugárpár, mely a két érintő érintőpontját projiciálja a felvett pontból: a sornak két kapcsolt sugara; az érintők metszőpontját projiciáló sugár pedig annak egyik kettőssugara.

Ily kúpszeletek nemcsak ama két egyenest, hanem egymást is a két érintőn fekvő pontban érintik és *kettős érintésű* kúpszeleteknek neveztetnek.

Kettős érintésű kúpszeletekre vonatkozólag a két közös érintő metszőpontjának polárisa: a két ponton átmenő egyenes; továbbá az érintők metszőpontján átmenő, valamint annak polárisán fekvő és egy kúpszeletre vonatkozólag kapcsolt polárisok, illetve kapcsolt pólusok, valamennyi kúpszeletre nézve kapcsolt polárisok és kapcsolt pólusok.

Minthogy ezen kapcsolt pólus és polarisokból képezett involucziós sorok, melyek mindig perspektív helyzetűek, elliptikus természetűek is lehetnek, a midőn ugyanis a két érintő és azok érintőpontja képzetes, ezért mi általában, «mindazon kúpszeleteket, melyekre vonatkozólag egy perspektív helyzetű involucziós pont- és sugársor tartói poláris és pólus, és azon involucziós sorok kapcsolt elemei, kapcsolt pólusok, illetve kapcsolt polárisok: *kettős érintésű* kúpszeleteknek nevezzük», tekintet nélkül arra, hogy a felvett involucziós sorok elliptikus vagy hyperbolikus természetűek-e.

Ily helyzetű kúpszeleteket már volt alkalmunk megismerni a 84a-ik pontnál, mert «kúpszeleten fekvő két projektív pontsor megfelelő pontjait összekötő egyenesek által beburkolt kúpszelet az eredetivel kettős érintésű», valamint «egy kúpszelet projektív vonatkozású érintői közül a megfelelőknek metszőpontjai, az eredetivel kettős érintésű kúpszeleten fekszenek».

Ha a kettős érintésű kúpszeleteknek két közös érintője és így egyszersmind ezeknek érintőpontja képzetes, kérdezhetjük, valjon az előbbi alaptétel ily *képzetes kettős érintésű* kúpszeletekre is vonatkozik-e vagy nem?

Hogy ezt megvizsgálhassuk, nevezzük az összes kúpszeletekre nézve közös pólust és polárist P és p -nek, a metsző egyenest g -nek; g és p metszőpontját γ -nek, az ehez kapcsolt pólust $p-n$, γ_1 -nek;

szeletek összes érintőhúrjai, a két adott pont összekötő egyenesét ugyanazon két pontban metszik».

106. A szerkesztési feladat, melyet ezen tételt alapul véve, megoldhatunk, így szól:

«Adva van egy kúpszelet és három

pont; szerkesztendő oly kúpszelet, mely a három ponton átme-
gy és az adott kúpszelettel
kettős érintésü.»

egyenes; szerkesztendő oly kúpszelet, mely a három egyenest érinti és a kúpszelettel kettős érintésü.»

Ha az adott kúpszeletet k -nak, a három pontot A , B , C -nek, azon k -ra nézve két kapcsolt póluspárt, mely A és C -től, valamint B és C -től harmonikusan van elválasztva Y , Y' ; illetve X , X' -nek nevezzük: $|XY|$, $|XY'|$, $|X'Y|$, végre $|X'Y'|$ egyenesek k -t a szerkesztendő kúpszeletek két-két érintőpontjában metszik (74. ábra).

Hogy ezt belássuk, nevezzük azon kúpszeletet, mely k -t pl. k és $|XY|$ valós vagy képzetes metszőpontjaiban érinti és C ponton átme-
gy, s mely ezen adatokból teljesen meg van határozva (95.), k_1 -nek. AC egyenes k , k_1 -et egy involucziós pontsor kapcsolt pontpárjaiban metszi, melynek egyik kettőspontja Y ; ezen involucziós sor meg van határozva k és $|AC|$ metszőpontjai, mint egy kapcsolt pontpár és Y kettőspont által, mert ezekből a másik kettőspont Y' szerkeszthető. Ennélfogva k_1 -nek második metszőpontja $|AC|$ -vel azon pont lesz, mely C -t Y , Y' -től harmonikusan elválasztja, vagyis az adott A pont. E szerint k_1 átme-
gy A -n és hasonlókép bebizonyítható, hogy k_1 átme-
gy B ponton is.

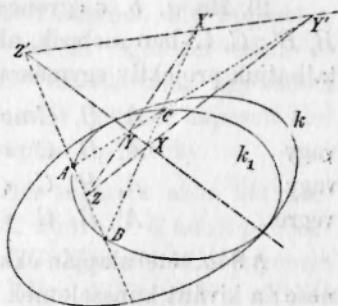
Az $XYX'Y'$ teljes négyszög harmonikus tulajdonsága folytán $|XY|$, $|X'Y'|$; $|XY'|$, $|X'Y|$ egyenespárok egymást ABC átlós háromszög AB átlóján metszik, mely Z' , Z metszőpontok A , B pontokat szintén harmonikusan választják el. Ezért nem nyerünk új kúpszeleteket, ha a szerkesztésnél C pont szerepét A vagy B pont szerepével föleseréljük.

A feladatnak általában *négy megoldása van*; a megoldások valóságok, ha lehet oly két kapcsolt pólust találni, mely A , C és B , C -től harmonikusan van elválasztva, a mi csak akkor következik be, ha mind a három pont A , B , C a kúpszelet egyik oldalán fekszik, vagyis: ha vagy mind a három pont a kúpszeleten kívül, vagy mind a három pont a kúpszeleten belül fekszik. —

Ha A , B , C pontok k kúpszeleten belül fekszenek, akkor

X, X' ; Y, Y' pontokat következőkép szerkeszthetjük. $|BC|$ egyenes pólusát B, C pontokkal összekötő egyenesek a kúpszeletet egy négyszög szögpontjaiban metszik, melynek $|BC|$ -n fekvő átlópontja: X, X' ; mert X, X' a kúpszelettől és B, C pontoktól harmonikusan van elválasztva. Ugyanígy Y, Y' pont átlópontja azon k kúpszeletbe írt négyszögnek, melynek két átellenes oldala A és C pontokon átmegy és egymást $|AC|$ pólusában metszi.

A midőn A, B, C pontok k -n kívül fekszenek, B, C , valamint A, C pontokból érintőket huzunk k -hoz; az első két érintőpár, valamint a másik kettő, két a kúpszelet körül írt négy oldalnak négy-négy oldala, melyeknek átlói $|BC|$ illetve $|AC|$ átlókat X, X' és Y, Y' pontokban metszik. —



74. ábra.

Lehet azonban e feladatot, t. i. « A, B, C ponton át kúpszeletet szerkeszteni, mely k kúpszelettel kettős érintésű», a 84a. tétel felhasználásával is megoldani, ha A, B, C pontok k kúpszeleten kívül fekszenek.

Nevezzük A, B, C pontokból k -hoz vont érintőpárokat a, a' ; b, b' ; c, c' -nek és vonatkoztassuk k kúpszelet érintőit oly módon projektív egymásra, hogy a, b, c -nek a', b', c' feleljen meg: ekkor minden új megfelelő érintőpárnak x, x' -nek metszőpontja, az idézett tétel alapján a keresett kúpszeletnek egy pontja. Lehet azonban a, a' ; b, b' ; c, c' érintőpárokat úgy is egymásra projektív vonatkoztatni, hogy

$$a, b, c\text{-nek megfeleljen } a', b', c,$$

vagy a, b', c " " " a', b, c' ,

vége a', b, c " " " a, b', c' ,

mert ekkor is a három ismert egymásnak megfelelő érintőpárnak metszőpontja A, B , illetve C pont. A feladat tehát ezen eljárás szerint szintén négy megoldást szolgáltat.

A jobb oldalon álló feladat hasonló eljárások szerint oldható meg.

1). Megszerkesztjük k kúpszeletre vonatkozólag azon kapcsolt

polárisokat, melyek az adott a, c és b, c egyenesektől harmonikusan vannak elválasztva; ezen y, y' és x, x' egyenespárok $(x, y), (x', y), (x, y'), (x', y')$ közös pontjaihoz tartozó és k -ra vonatkozólag kapcsolt polárisok: kapcsolt polárisok egyszersmind a kivánt kúpszeletekre nézve is, melyek már ezen adatokból (95. szerint) szerkeszthetők.

2). Ha a, b, c egyenesek k kúpszeletet valós pontokban $A, A'; B, B'; C, C'$ -ben metszik, akkor a kúpszelet pontjait úgy vonatkoztatathatjuk projektív egymásra, hogy

	A, B, C -nek megfelelően	$A', B', C',$
vagy	A, B, C' „	„ $A', B', C,$
vagy	A, B', C „	„ $A', B, C',$
vége	A', B, C „	„ $A, B', C'.$

A 84a. tétel alapján ekkor két-két megfelelő pont összekötő egyenese: a kivánt kúpszeletnek érintője és pl. az első projektív vonatkozásnál $|AB'|, |A'B|; |AC'|, |A'C|$ egyenespárok metszőpontjainak összekötő egyenese k -t, az első projektív vonatkozásból lezármaztatott kúpszeletnek két érintőpontjában metszi.

A feladatnak négy megoldása van, ha vagy mind a három egyenes a, b, c a kúpszeletet valós, vagy pedig mind a három képzetes pontok szerint metszi.*

107. Mindkét feladat speciálizálható, miből következő új feladatok származnak:

«Három ponton át kúpszelet fektetendő, mely két egyenest érint.»	«Két ponton át kúpszelet fektetendő, mely három egyenest érint.»
--	--

Ha a bal oldalon álló feladatnál a két egyenest elfajult kúpszeletnek, a jobb oldalon levő feladatnál pedig a két pontot elfajult kúpszeletnek tekintjük és meggondoljuk, hogy két egyenes vagy két pont, mely akár az egyenespártól, akár a pontpártól harmonikusan van elválasztva, ezen egyenes- vagy pont-párra elfajult kúpszeletre vonatkozólag kapcsolt poláris, illetve kapcsolt pólus, a feladatot az előbbieket szerint megoldottnak tekinthetjük. A feladatnak négy megoldása valós, ha a három pont közül kettő nincs elválasztva egy egyenes által, tehát ha a pontok nem fekszenek az egyenesek által képezett mellékszögek szárjai között; továbbá a második feladatnál a négy megoldás valós, ha a két pont összekötő egyenesének

* CHARLES M. (1793—1880): «Traité des sections coniques» Paris, 1865, 351. lap.

metszőpontjai a három adott egyenessel oly helyzetűek, hogy egy metszőpont sincs elválasztva a többiektől, csak *egy* adott pont által.

A bal oldalon álló feladatnál azonban a két egyenes, a jobb oldalon levőnél a két pont képzetes is lehet, azért a feladat általánosabban így fejezhető ki.

«Három ponton át kúpszelet fektetendő, melyre vonatkozólag egy adott involucziós sugársor kapcsolt sugarai kapcsolt polárisok».

«Szerkesztendő oly kúpszelet, mely három egyenest érint, és melyre vonatkozólag egy adott involucziós pontsor kapcsolt elemei kapcsolt pólusok».

Ha az elliptikus természetű involucziós sugársor azon két mindenkor valós kapcsolt sugárpárja, mely A, C , illetve B, C adott pontoktól harmonikusan van elválasztva (54.), $|BC|$, illetve $|AC|$ egyenest X, X' és Y, Y' pontokban metszi, akkor $|XY|$, $|X'Y|$, $|XY'|$, $|X'Y'|$ egyenesek az involucziós sugársor sugarait involucziós pontsor szerint metszi; a három adott ponton A, B, C -n átmenő négy kúpszelet, melyekre vonatkozólag ezen négy involucziós pontsor kapcsolt pontpárjai kapcsolt pólusok (96.): a keresett négy kúpszelet.

Jegyzet. A 106-dik feladatnak és speciális eseteinek megoldása azon esetben, a midőn a három pont közül kettő képzetes, megtalálható a 97-dik lapon idézett: HOFMANN F. könyvében, mely ezen érdekes feladatnak különböző megoldását tartalmazza. —

15. §. Képzetes kúpszelet. Polárrendszer.

108. A 78. pont alatt tanultuk a következő tételt: «ha két pontot egy involucziós pontsor kapcsolt pontjaival sugarak által összekötjük, akkor egy-egy kapcsolt pontpáron átmenő sugárpárok egymást oly kúpszeleten metszik, melyre vonatkozólag az involucziós pontsor kapcsolt pontjai, kapcsolt pólusok, annak tartója és a két pont összekötő egyenese kapcsolt polárisok, s mely kúpszelet átmegy a két ponton».

Ezen kúpszeletre vonatkozólag egy tetszőleges g egyenes pólusát szerkeszthetjük a nélkül, hogy a kúpszeletnek pontjait ismernők. Ha ugyanis a két pontot P, Q -t összekötő $|PQ| = b$ egyenesnek és az involucziós sor a tartójának C metszőpontjához kapcsolt pont az involucziós sorban B (75. ábra); azon pont, mely C -t P, Q -tól harmonikusan elválasztja A ; továbbá g és a metszőpontjához A_1 -hez kapcsolt pont A'_1 ; g és b metszőpontjától B_1 -től P, Q által harmonikusan elválasztott pont B'_1 : akkor g -nek pólusa a kúpszeletre vonatkozólag $|AA'_1|$ és

$|BB_1|$ egyeneseknek metszőpontja G . Mert tekintetbe véve, hogy a és b a kúpszeletre vonatkozólag kapcsolt poláris, tehát a és b -nek pólusa A és B ; A_1 és B_1 pontoknak polárisa $|AA_1|$, illetve $|BB_1|$, azonnal következik: hogy $|A_1B_1| \equiv g$ egyenesnek pólusa $|AA_1|$, $|BB_1|$ -nek metszőpontja G .

E szerkesztésből látható, hogyan lehetett volna egy általános helyzetű G pontnak polárisát g -t, a kúpszeletre vonatkozólag megszerkeszteni, a nélkül, hogy a kúpszeleteknek újabb pontjait szerkesztettük volna.

Ha g egyenes A ponton megy át, akkor pólusa: (g, a) metszőpontjához kapcsolt pont az a -n adott involúziós sorban, és viszont: az a -n fekvő pontok polárisai A -nak és a felvett ponthoz kapcsolt pontnak összekötő egyenesei. Ha g egyenes B ponton megy át, annak pólusa P, Q -tól (g, b) pont által harmonikusan elválasztott pont.

A szerkesztésre nézve kivételt képeznek $(a, b) \equiv C$ -n átmenő g egyenesek, melyeknek pólusai $|AB| \equiv c$ -n fekszenek, valamint a c -n fekvő G pontok, melyeknek polárisai C ponton mennek át.

Ily egyenesek és pontok pólusai és polárisainak szerkesztése egy általános helyzetű pólus és poláris közvetítésével történik, mert C -n átmenő g egyenes tetszőleges pontjának polárisa, c -t g -nek pólusában metszi, és fordítva c -n fekvő G ponton átmenő tetszőleges egyenes pólusának összekötő egyenese C -vel, azon G pont polárisa.

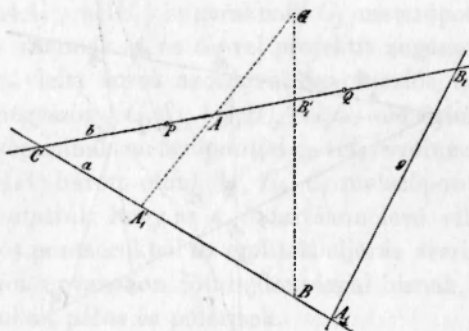
109. g egyenes pólusának (vagy G pont polárisának) szerkesztésénél követett eljárást rövidebben is kifejezhetjük, ha P, Q pontokat b -n fekvő hyperbolikus természetű involúziós pontsor kettőspontjainak tekintjük, t. i. ilyképen: «Miután $(a, b) \equiv C$ ponthoz kapcsolt pontot A és B -t, mint a és b -nek pólusát megszerkesztettük, g és a , valamint g és b metszőpontjához A_1 , illetve B_1 -hez kapcsolt A'_1, B'_1 pontokat összekötjük A , illetve B -vel, mely $|AA'_1|$, $|BB'_1|$ egyenesek metszőpontja a keresett pólus G'' ». A szerkesztés nem kívánja P, Q kettőspontok ismeretét, mert involúziós pontsor kapcsolt pontpárjait, két pontpárból a kettőspontok felhasználása nélkül is szerkeszthetjük.

Ebből látható, hogy a pólus és poláris szerkesztésénél nem is lényeges az, hogy P, Q pontok valósak legyenek, vagyis a b -n fekvő involúziós pontsor hyperbolikus természetű legyen; g egyeneshez tartozó G pont ép úgy szerkeszthető akár hyperbolikus, akár elliptikus természetű a és b -n adott involúziós pontsor.

Vizsgáljuk meg, hogy ezen esetben, a midőn az a -n és b -n adott involúziós pontsorok elliptikus természetűek, és a és b -nek pólusa,

b illetve a -n fekvő és $(a, b) \equiv C$ metszőponthoz kapcsolt A és B pont, hogy akkor a «sík minden pontjához és egyeneséhez lehetséges-e *egy* egyenest és *egy* pontot, mint polárist és pólust hozzárendelni, és hogy e pólus és poláris bír-e azon tulajdonsággal, melyet a kúpszeletnél róla tanultunk? t. i.: hogy egy ponton átmenő összes sugarak pólusai a pont polárisán fekszenek és azon sugársorral involucziós fekvésű pontsört képeznek».

Hogy egy az A , vagy B ponton átmenő g egyenes pólusa, az a -n, illetve b -n fekvő ama egy pont, mely (g, a) illetve (g, b) ponthoz



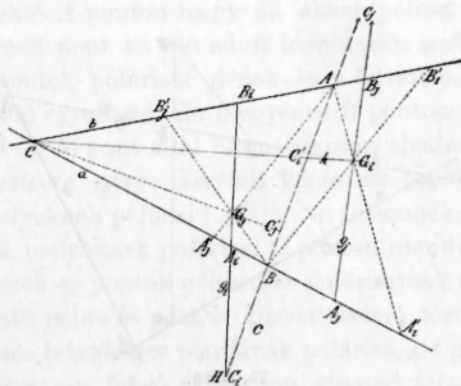
75. ábra.

kapcsolt, továbbá hogy ebből folyólag egy általános helyzetű g egyenesnek pólusa oly G pont, melyben (g, a) , illetve (g, b) -hez az involucziós sorban kapcsolt pontnak összekötő egyenes A , illetve B -vel egymást metszi, — az az előbbi szerkesztésből látható. De hogy egy a C ponton átmenő h egyenes pólusa jelen esetben is c egyenesen fekvő H pont-e, az által lesz kimutatva, ha bebizonyítjuk, hogy h -n fekvő tetszőleges G_i pontnak polárisa c -t egy és ugyanazon C_i pontban metszi.

Ha G_i projekcióját A és B -ből a és b -re A'_i , B'_i -nek, ezekhez kapcsolt pontot A_i , B_i -nek nevezzük, úgy kimutatandó, hogy $|A_i B_i|$, és c metszőpontja C_i állandó pont, bármint változik is G_i , h egyenesen. Ha G_i (76. ábra), h -n tovamozog, akkor A'_i , B'_i és így egyszersmind A_i , B_i két projektív pontsört ír le; ez utóbbi sorok azonban perspektivék, mert ha G_i , c -nek C'_i pontjába jut, akkor A_i és B_i , C -be kerül. Mint-hogy továbbá A és B két megfelelő pontja az A_i és B_i által leírt projektív pontsoroknak, azért a mozgó $|A_i B_i|$ egyenes, $c \equiv |AB|$ -nek ugyanazon C_i pontján megy át.

Ezzel kimutattuk, hogy a fönnebbi szerkesztés szerint, *minden pontnak a síkban egy egyeneses és minden egyenesnek egy pont felel meg.*

Egy ponton átmenő sugaraknak azon tulajdonságát bebizonyítandó, hogy involucziós fekvésűek pólusai által képezett pontsorról, és mely tulajdonság az A -n és B -n átmenő sugársorra nézve a származtatás folytán igaz, — azt előbb C ponton átmenő sugarak és azoknak c -n fekvő pólusaira nézve akarjuk megvizsgálni.



76. ábra.

Ha az előbbi (76.) ábrában $|AA_i|$ állandó, h pedig C körül forog, akkor G_i pont $|AA_i|$ -n, B_i és így B_i , b -n, végre $|A_iB_i| \equiv g_i$ sugár A_i körül projektív sort ír le, miből következik, hogy a változó h és $|A_iB_i|$ által c -n kimetszett pontsorok, vagyis C_i és C_i által befutott pontsorok projektívek. De ezek azon kívül involucziós fekvésűek is, mert az első sor A és B pontjának megfelel a másodikban B és A miből következik (30), hogy h által leírt sugársor involucziós fekvésű annak C_i pólusa által képezett pontsorról.

Ezen a c -n fekvő involucziós pontsor, melynek kapcsolt elemei az előbbi C_i , C_i pontok, oly összefüggésben áll az a és b -n adott involucziós pontsorokkal, melyeknek kapcsolt pontpárjai A_i , A_i' ; B_i , B_i' , hogy ha egy tetszőleges g_i egyenes a , b , c -t A_i , B_i , C_i pontokban metszi, akkor $|AA_i|$, $|BB_i|$, $|CC_i|$ egyenesek g_i -nek pólusán G_i -n mennek át.

A pólus és polárisnak a kúpszeleteknél tanult azon tulajdonsága, «hogy ha G_i pont g_i egyenesen pontsört ír le, akkor a mozgó G_i -nek

Polárisai, vagyis g_i egyenesek, átmennek g_j -nek pólusán G_j -n és G_i sorral involúciós fekvésű sugársort képeznek», itt szintén bekövetkezik.

Ha ugyanis G_i , g_j -n tovamozog, akkor a mozgó G_i pontnak A_i , B_i projekciói A és B -ből a és b -re, és A_i , B_i pontok, melyeknek összekötő egyenese $|A_i B_i| \equiv g_i$, polárisa G_i -nek, G_i -vel projektív pontsort írnak le; A_i , B_i pontsorok azonban perspektív helyzetűek, mert ha G_i , (c, g_j) pontba jut, akkor annak mindkét projektív sorban G felel meg. De g_j -n fekvő $(a, g_j) = A_j$, és $(b, g_j) = B_j$ pontoknak polárisai $|AA_j|$, $|BB_j|$ sugarak, tehát a mozgó G_i ponttal változó q_i polárisok is mindannyian $|AA_j|$, $|BB_j|$ sugaraknak G_j metszéspontján — mely g_j -nek pólusa — mennek át, és G_i -vel projektív sugársort írnak le. De ezen G_i , g_i által leírt sorok azonkívül involúciós fekvésűek, mert $ABCG_j$ teljes négyszög $|G_j A|$, $|G_j B|$, $|G_j C|$ oldalainak, mint g_i sugársor három sugarának metszéspontjai g_j -vel, involúciós fekvésűek a $|BC|$, $|CA|$, $|AB|$ három oldal A_j , B_j , C_j metszéspontjaival.

Ezzel kimutattuk, hogy az a , b tartókon levő elliptikus természetű involúciós pontsorokból az említett eljárás szerint szerkesztett pólus és polárisok ugyanazon főtulajdonsággal bírnak, mint egy kúpszelet által indukált pólus és polárisok.

110. *A sík pontjai és egyenesének összességét, melyek olynemű vonatkozásban állanak, hogy minden pontnak és rajta átmenő sugarakból álló sugársornak, egyenes és ezen fekvő pontsor felel meg, s mely pontsor az előbbi sugársorral involúciós fekvésű: polárrendszernek nevezzük.* Az egymásnak megfelelő pontot és egyenest: pólus és polárisnak; az egyenes pólusán átmenő bármely egyenest az előbbi egyeneshez kapcsolt polárisnak; egy pont polárisán fekvő bármely pontot, azon ponthoz kapcsolt pólusnak nevezik.

Hogy pontok és egyeneseknek ilyenemű vonatkozása létesíthető, azt láttuk először a kúpszelet pólus és polárisainál, de láttuk másodszor a kúpszelettől függetlenül az imént szerkesztett pólus és polárisoknál is. Lényeges különbség nincs is a két polárrendszer között, csupán az, hogy *oly polárrendszernél, mely két elliptikus természetű involúciós pontsorból A_i , A_i ; B_i , B_i -ből lett szerkesztve, nem található oly valós pont, mely polárisán fekédnék, vagy a mi ugyanaz: tetszőleges egyenesen fekvő kapcsolt pólusokból, valamint tetszőleges ponton átmenő kapcsolt polárisokból álló involúciós sorok kettőseleme: képzetesek*; míg ha a két involúciós pontsor közül egyik (vagy mindkettő) hyperbolikus, tehát P , Q kettőspontokkal bír, akkor végtelen sok

oly valós pont található, mely polárisán fekszik. Mind e pontok azon kúpszeletnek pontjai, melyben a másik involúziós pontsor kapcsolt elemeit P, Q kettőspontokból projicziáló sugársorok megfelelő sugarai egymást metszik.

Ha ugyanis az adott elliptikus természetű involúziós sorok a, b tartóinak pólusa A, B ; azoknak metszőpontja C ; a tetszőleges g_j egyenesnek pólusa G_j , akkor $ABCG_j$ négyszög és g_j egyenes kölcsönös helyzetéből következik, tekintettel az 53-ik pontban adott tapasztalati eredményre, hogy a négyszögnek átellenes oldalai g_j -t, elliptikus involúzióban metszik, tehát g_j -n fekvő és G_j -n átmenő kapcsolt pólusok, illetve kapcsolt polárisok által képezett involúziós sorok közül egyiknek sincsenek valós kettőselemei. Ugyanez mondható c -n fekvő, és C -n átmenő egyenesekről is.

Mínthogy a polárrendszer egyes egyenesein fekvő kapcsolt pólusokból képezett involúziós pontsorok kettőspontjai, a midőn a polárrendszer valós kúpszelet által indukáltatik, ezen valós kúpszeleten fekszenek: ezért mi *azon esetben, a midőn az összes egyeneseken fekvő kapcsolt pólusokból képezett involúziós sorok kettőspontjai képzetesek, ezen képzetes kettőspontokat egy a polárrendszer által meghatározott képzetes kúpszeleten fekvőnek tekintjük, és ama polárrendszerről azt mondjuk, hogy e képzetes kúpszelet által indukáltatik.*

Képzetes és valós kúpszeletek által indukált polárrendszerek, mindazon tulajdonságban megegyeznek egymással, mely nem vonatkozik egyeneseken fekvő vagy ponton átmenő kapcsolt pólusok, illetve kapcsolt polárisokból álló involúziós sorok kettőselemeire, vagyis a kúpszelet pontjai és érintőire.

Igy PASCAL- vagy BRIANCHON-féle hatszög és hatoldalról nem szólhatunk képzetes kúpszeletnél, mert ha egy PASCAL-féle hatszög egyik oldalán fekvő szögpontokat egy involúziós pontsor képzetes kettőspontjainak tekintjük is, nem lehet ezt azon oldallal szomszédos oldalra nézve tenni; mert két valós egyenes ugyanazon síkban egymást mindig valós pontban metszi.

De magára a polárrendszerre vonatkozó tulajdonságok megegyezők, legyen a kúpszelet mely a polárrendszert indukálja valós vagy képzetes.

Tanultuk, pl. hogy k kúpszelet pontjainak κ kúpszeletre vonatkozó polárisai egy k' kúpszeletet burkolnak, és ezen tulajdonság igaz marad akkor is, ha κ képzetes, mert a 81-ik pontban adott bebizonyítás szóról-szóra itt is alkalmazható.

A 79-ik pont alatt előfordult azon tétel, hogy «ha egy kúpszelet síkjában két tetszőleges egyenest a , b -t veszünk fel, és az egyiknek A_i pontjait a másiknak ezen pontokhoz α -ra vonatkozólag kapcsolt B_i pontjaival $|A_i B_i|$ egyenesek által összekötjük, akkor A_i változásával, változó $|A_i B_i|$ sugarak: kúpszeletet burkolnak», és az ebből folyó «HESSE-féle» tétel bebizonyításai nem kívánják, hogy α pontjai valósak legyenek, tehát képzetes α -ra nézve is érvényesek.

Ugyanez mondható azon tételre nézve is, mely szerint «két polárháromszög szögpontjai egy új kúpszeletnek pontjai», stb. stb. —

111. A képzetes kúpszeletet, vagy a mi ugyanazt fejezi ki, az általa indukált polárrendszert más, adatokból is meg lehet határozni, mint azt az előbbi pontban tanultuk s melyek következők voltak:

<p><i>a) két egyenesen adott kapcsolt polusokból álló involucziós pontsor, melyeknek tartói a polárrendszer kapcsolt polárisai;</i></p>	<p><i>a₁) két ponton átmenő kapcsolt polárisokból álló involucziós sugársor, ha a sorok középpontjai kapcsolt pólusok;</i></p>
---	---

mert ha képesek vagyunk más adatokból ezeket meghatározni, a nélkül, hogy még más föltételekre volna szükségünk, akkor ezekből a polárrendszer, mint láttuk, mindig szerkeszthető.

Oly adatok, melyekből egyszerű úton következtetni lehet, *a)* vagy *a₁)* alatt levő adatokra, melyekből tehát a polárrendszer egyszerűen szerkeszthető, következők:

b) és b₁). Egy polárháromszög ABC és egy általános helyzetű G pontnak polárisa g.

c) és c₁). Egy polárháromszög ABC és g egyenesen fekvő involucziós pontsor vagy ez utóbbi helyett, G ponton átmenő involucziós sugársor, ha a sorok elempárjai kapcsolt pólusok, illetve kapcsolt polárisok.

g, |AB|; g, |BC|; g, |CA| egyenesek metszéspontjaihoz kapcsolt pontokat *C*, ill. *A* és *B*-vel egyenesek által összekötjük; ezek *g*-nek polusán, *G*-n átmenő egyenesek lesznek. A feladat e szerint az előbbire van visszavezetve.

d) és d₁). A pont, annak polárisa a, és ezen fekvő involucziós pontsor, melynek kapcsolt pontpárjai kapcsolt pólusok; végre egy kapcsolt pontpár X, X', vagy (ez utóbbi helyett) egy kapcsolt egyenes pár x, x'.

|XX'| és *a* metszéspontjának polárisa *A*-n és az *a* involucziós

sorban a metszőponthoz kapcsolt póluson megy át, és $|XX'|$ -et ($|XX'|$, a) ponthoz kapcsolt pólusban metszi. A feladat ez által az előbbire van visszavezetve, mert A szögpont és a átellenes oldallal végtelen sok polárháromszöget szerkeszthetünk, és $|XX'|$ -en ismeretes a kapcsolt pólusokból álló involúciós pontsor.

e) Két involúciós pontsor, melynek kapcsolt pontpárjai kapcsolt pólusok, a nélkül, hogy a pontsorok tartói kapcsolt polárisok volnának, és még egy az előbbi sorokhoz nem tartozó kapcsolt póluspár X, X' . (99).

e_1) Két involúciós sugársor, melynek kapcsolt sugarai kapcsolt polárisok, a nélkül, hogy középpontjai kapcsolt pólusok volnának, és még két tetszőleges kapcsolt poláris.

Ha X ponton át azon sugárpárt megszerkesztjük, mely a és b pontsört kapcsolt pontokban metszi, akkor ez utóbbi két kapcsolt pontpár egy négyszögnek szögpontja; e négyszögnek átlóháromszögének egyik szögpontja (a, b), a másik X , — a harmadik Y , a HESSE-féle tétel (79) szerint X -hez kapcsolt pólus. Ebből következik, hogy X -nek pólusa $|X'Y|$. Ha ugyanígy megszerkesztünk X' -hez, egy kapcsolt pólust Y' -et, akkor $|XY'|$, X' -nek polárisa; és ezért $|XY'|$, $|X'Y|$ egyenesek metszőpontja X'' , $|XX'|$ egyenesnek pólusa. $XX'X''$ polárháromszög és az adott involúciós pontsorok egyike b) szerint meghatározza a polárrendszert. —

A polárrendszer meghatározására vonatkozó szerkesztéseket más adatokból, «SCHRÖTER H.: Theorie der Kegelschnitte» című mű 58. §-ában találhatunk.

Természetes, hogy ezen szerkesztések akkor is érvényesek, ha az általuk meghatározott polárrendszerhez tartozó kúpszelet nem képzetes, hanem valós pontokkal bír; vagyis egy valós kúpszelet szintén meg van ez adatokból határozva, mint ezt részben már a 13. §. alatt láttuk. —

16. §. Kúpszeletek átmérői.

112. Mondottuk a 65. pontban, hogy a kúpszeletek azon pontok minősége szerint osztályozhatnák, melyet közösen bírnak síkjuk végtelen távol fekvő egyenesével.

A sík végtelen távol fekvő egyenesének g_∞ -nek, más tekintetben is fontos szerepe van a kúpszeletek tanában, a mennyiben a kúpszeletek polártulajdonságairól tanult tételek egyszerűbb alakot ölte-

nek, ha a bennük fellépő egyenesek közül egyik vagy másik g_∞ -nél lesz pótolva. Különös fontos e tekintetben azon polárháromszögek megvizsgálása, melyeknek egyik oldalát g_∞ képezi, s melyek ellipsis és hyperbolánál nem fajulnak el, mert g_∞ e görbéknek nem érinti. Mi tehát előbb azon két kúpszeletre nézve fogjuk megvizsgálni ama polárháromszögeket, melyeknek egyik oldala g_∞ , de könnyen föl ismerhető, hogy a levezetett tételek közül, melyek érvényesek minden kúpszeletre, a menynyiben az nem fajul el, hanem görbe vonal marad; tehát épp úgy parabolára, mely g_∞ -t érinti, mint ellipsis vagy hyperbolára nézve egyaránt alkalmazhatók.

Legyen E_∞ , k kúpszelet síkjában felvett l egyenesnek végtelen távol fekvő pontja. E_∞ pont polárisa e , mindazon pontokat tartalmazza, melyek E_∞ -en átmenő vagyis l -vel párhuzamos húrokat E_∞ -től harmonikusan elválasztják, és jelen esetben azokat (72) felezik. Az e egyenes végtelen távol fekvő $E_{1,\infty}$ pontjának polárisa e_1 , átmege E_∞ -en és szintén tartalmazza mindazon pontokat, melyek az e -vel párhuzamos húrokat felezik.

e , e_1 egyenesek, mint g_∞ -n fekvő E_∞ , $E_{1,\infty}$ pontoknak polárisai egymást g_∞ -nek pólusában M -ben metszik, és g_∞ -nel együtt egy polárháromszögnek $ME_\infty E_{1,\infty}$ -nek oldalait képezik. Minthogy M pont polárisa végtelen távol fekszik, az M ponton átmenő kúpszelet-húrok általa feleztetnek.

Egy görbe vonal síkjának azon pontja, mely valamennyi rajta átmenő húrt felezi: a görbe vonal *középpontjának*; minden a középponton átmenő húr, és általában minden a görbe síkjában annak középpontján átmenő egyenes: a görbe *átmérőjének* neveztetik.

Ezen értelmezés szerint mondhatjuk: *kúpszelet síkjában végtelen távol fekvő egyenesnek pólusa, a kúpszelet középpontja; és a végtelen távol fekvő egyenes pontjainak polárisai, a kúpszelet átmérői.*

E szerint: *a parabola középpontja végtelen távol, az ellipsis és hyperbola középpontja pedig véges távolságban van.* Ez utóbbi két kúpszeletet ezért: (véges távolságban) *középponttal bíró kúpszeletnek* is szokás nevezni.

113. A kúpszelet középpontján átmenő kapcsolt polárisokat, mint $ME_\infty \equiv e_1$, $ME_{1,\infty} \equiv e$, *kapcsolt átmérőknek* nevezik. Minthogy e , ill. e_1 -gyel párhuzamos húrok, e_1 ill. e által feleztetnek, mondhatjuk: *a kúpszelet bármely kapcsolt átmérőpárja azon tulajdonsággal bír, hogy az egyik átmérővel párhuzamos húrok a hozzá kapcsolt átmérő*

által feleztetnek, a minek további következménye, hogy egy átmé-
végpontjában vont érintő párhuzamos a hozzá kapcsolt átmérőhöz.

Mínthogy a kúpszelet körül írt négyoldal átlói, egy polár-
háromszögnek oldalai, és a kúpszeletbe írt négyszög átlópontjai egy
polárháromszögnek szögpontjai, következik: a kúpszelet körül írt
parallelogramm átlói, valamint a kúpszeletbe írt parallelogramm
oldalaival párhuzamos átmérők: a kúpszelet kapcsolt átmérői. —

Mint minden ponton, úgy a kúpszelet középpontján M -en
átmenő kapcsolt polárisok vagyis a kúpszelet kapcsolt átmérői, invo-
lucziós sugársort képeznek, mely g_{∞} -t, végtelen távol fekvő kapcsolt
pontokban metszi. A kapcsolt átmérők által képezett involucziós su-
gársor hyperbolikus vagy elliptikus, a szerint a mint g_{∞} a kúpsze-
letet valós vagy képzetes pontpárban metszi, vagyis a szerint, a mint
a kúpszelet hyperbola vagy ellipsis.

Mínthogy g_{∞} a hyperbolát valós pontokban metszi, g_{∞} -nek
pólusa, a hyperbola középpontja, a hyperbolán kívül fekszik; a kö-
zéppontból a hyperbolához valós érintők húzhatók, melyek a kap-
csolt átmérők által képezett sugársornak és egyszersmind a hyper-
bolának valós asymptotáit képezik és a hyperbolát a végtelen távol
fekvő pontokban érintik. A hyperbola két-két kapcsolt átmérőpárja
egymástól nincsen elválasztva; a kapcsolt átmérők közül egyik a
hyperbolát valós, a másik képzetes pontokban metszi. Ellenben az
ellipsis középpontja, mert polárisa (g_{∞}) az ellipsist nem metszi valós
pontokban, az ellipsisben belül van; a középpontból nem húzhatók
valós érintők az ellipsishez; annak asymptotái képzetesek. Mind a
hyperbola, mind pedig az ellipsis középpontja, középpontja egyszer-
smind az átmérőkön fekvő kapcsolt pontok által képezett involucziós
pontosoroknak, mert a középpont az egyes átmérők végtelen távol levő
pontjának kapcsolt pontja.

Ehhez járul még, hogy az egyenoldalú hyperbola kapcsolt
átmérői által képezett involucziós sugársor: egyenoldalian hyper-
bolikus, mert asymptotái egymásra merőlegesek, és így a kapcsolt
átmérők szögei, az asymptoták által feleztetnek. Ellenben a körnek,
mint speciális ellipsisnek, kapcsolt átmérői egymásra merőlegesek,*
tehát a kör kapcsolt átmérői által képezett involucziós sugársor:

* Ezt a kapcsolt átmérők azon általános tulajdonságából tudjuk, hogy
az egyik átmérővel párhuzamos húrok a másik által feleztetnek. A körnél, egy
átmérővel párhuzamos húrok felezőpontja, a reá merőleges átmérőben fekszik.

szirkularis. Egy sík valamennyi körére nézve g_{∞} -en fekvő kapcsolt pontpárok egy és ugyanazon involúziós pontsört képeznek, melynek kettőspontjai, mint a sík összes köreinek képzetes metszőpontjai g_{∞} -nél: a síknak végtelen távol fekvő képzetes körpontjai (44).

A kapcsolt átmérők által képezett involúziós sugársornak egy-
 másra merőleges kapcsolt sugarai, vagyis a sugársor tengelyei: *a kúpszelet tengelyeinek*; ezeknek valós metszőpontjai a kúpszelettel *csúcsonak* neveztetnek. Az *ellipsis*, mert mindkét tengely által valós pontokban metszetik, *négy csúcscsal bír*; *a hyperbola csak kettővel*. A hyperbola tengelyeiről megjegyzendő, hogy ezek felezik az asymp-
 toták által képezett szögeket, mert minden hyperbolikus természetű involúziós sugársor tengelyei, a kettőssugarak szögfelezői.

114. Az előbbi §-ban kimutattuk, hogy két egyenes és ezeken fekvő involúziós pontsorok által, egy kúpszelet van meghatározva, melyre vonatkozólag a pontsorok tartói kapcsolt polárisok, és a pontsorok kapcsolt pontjai, kapcsolt pólusok. A sík végtelen távol fekvő egyenesének pólusa azon adatok által meghatározott valós vagy képzetes kúpszeletnek középpontja.

Ha az involúziós pontsorok tartóinak metszőpontja mindkét involúziós pontsor középpontja, akkor azon tartók az általuk meghatározott kúpszeletnek átmérői, metszőpontjuk már a kúpszeletnek középpontja; és ha azon tartók még egymásra merőlegesek, akkor azok a kúpszeletnek tengelyei lesznek. A kúpszelet maga ellipsis, vagy hyperbola, vagy *képzetes kúpszelet* a szerint, a mint a felvett involúziós pontsorok közül mindkettő vagy csak az egyik, vagy egyik sem hyperbolikus, hanem elliptikus természetű.

Ebből következik, hogy *az ellipsis, hyperbola, és a képzetes kúpszelet egy kapcsolt átmérőpárja és a rajtuk fekvő involúziós pontsorok által meg van határozva*. Ugyanez ily módon is kifejezhető: egy ellipsis meg van határozva, ha ismeretesek egy kapcsolt átmérőpárnak (valós) metszőpontjai az ellipsissel; a hyperbola pedig meg van határozva ha ismeretes egy átmérőjének metszőpontja a hyperbolával és a hozzá kapcsolt átmérőn fekvő elliptikus természetű involúziós pontsornak egy kapcsolt pontpárja.

Legyen AC , BD valamely ellipsis egy kapcsolt átmérőpárja, mely az ellipsist A , C ; B , D pontokban, egymást pedig annak középpontjában M -ben metszik; *szerkeszszük meg az ellipsis tengelyeit*.

AC valamint BD átmérők pólusai, BD ill. AC végtelen távol fekvő pontjai, tehát azon négyoldal, melynek oldalai az ellipsis

mindegyik involucziós pontsornak két pár kapcsolt pontját; de mert M középpontja az egyes átmérőkön levő involucziós pontsoroknak: elégséges *egy* kapcsolt pontpárnak ismerete.

$|MU|$, $|MV|$ tengelyek U , V pontjainak kapcsolt pontjai X , Y ott lesznek, hol az U és V pontokon átmenő $IVDNU$ ellipsis-érintő D érintőpontjából a tengelyekre bocsátott merőlegesek, a tengelyeket metszik; mert ezen $|DX|$, $|DY|$ egyenesek U , V pontoknak az ellipsisre vonatkozó polárisai. $|MU|$, $|MV|$ -n fekvő S , S' és S_1S_1' csúcs-pontoknak meghatározása

$$MS^2 = \overline{MS'}^2 = MX \cdot MU; MS_1^2 = \overline{MS_1'}^2 = MY \cdot MV$$

egyenletek alapján történik.

Megjegyezhető még, hogy ha AC , BD kapcsolt átmérők egyenlő hosszúak lennének, úgy PMQ kör, IN egyenest I , N pontokban metszené és a tengelyek $IKLN$ rhombusnak szögpontjain mennének át. E szerint az *ellipsis tengelyei felezik az egyenlő hosszú kapcsolt átmérők által képezett szögeket.* —

114a. Az ellipsis átmérői által képezett involucziós sugársor hatványa $\text{tg}(UMD) \cdot \text{tg}(UMC)$ kifejezhető MS_1 , MS' közőkkel. A 77. ábrából látható, hogy

$$\text{tg}(UMD) = \frac{MY}{MX}, \text{tg}(UMC) = \text{tg}(VUM) = \frac{MV}{MU},$$

tehát az involucziós sugársor hatványának értéke:

$$\frac{MY \cdot MV}{MX \cdot MU} = \frac{MS_1^2}{MS'^2},$$

de mert $MS_1^2 : MS'^2$ viszony az ellipsisnél lényegesen pozitív UMD , UMC hegyes szögek pedig ellenkező jelűek és így tangenseiknek szorzata negatív, azért

$$\text{tg}(UMD) \cdot \text{tg}(UMC) = - \frac{MS_1^2}{MS'^2}.$$

Az ellipsis átmérői által képezett involucziós sugársor hatványa egyenlő a tengelyek négyzetének viszonyával negatív előjellel véve.

115. Az ellipsis tetszőleg kapcsolt átmérőpárjának, pl. AMC BMD -nek hajlásszöge: $DMC = \varphi$, az átmérők hossza: $AC = 2a_1$, $BD = 2\bar{b}_1$, és a tengelyek hossza: $SS' = 2a$, $S_1S_1' = 2b$ között igen egyszerű relációk léteznek, melyek az előbbi ábrából levezethetők.

MVD , MUD háromszögek kettős területei:

$$MV \cdot MX = MV \cdot YD = VD \cdot MD \sin \varphi,$$

$$MU \cdot MY = MU \cdot XD = DU \cdot MD \sin \varphi,$$

miből

$$MX \cdot MU \cdot MY \cdot MV = VD \cdot DU \cdot \overline{MD}^2 \cdot \sin^2 \varphi =$$

$$= \overline{PD}^2 \cdot \overline{MD}^2 \cdot \sin^2 \varphi = \overline{MA}^2 \cdot \overline{MD}^2 \cdot \sin^2 \varphi,$$

avagy

$$a^2 \cdot b^2 = a_1^2 \cdot b_1^2 \sin^2 \varphi,$$

és így

$$ab = a_1 b_1 \sin \varphi \dots \dots \dots 1)$$

Másrészt

$$\overline{MX}^2 + \overline{MY}^2 + VD \cdot DU = \overline{MD}^2 + \overline{PD}^2,$$

és mert

$$VD : MX = VU : MU$$

$$DU : MY = VU : MV$$

azért:

$$VD \cdot DU = \frac{MX \cdot MY}{MU \cdot MV} \cdot \overline{VU}^2 = \frac{MY \cdot MX}{MU \cdot MV} (\overline{MU}^2 + \overline{MV}^2);$$

ezt az előbbi egyenletbe helyettesítve:

$$(MX \cdot MU + MY \cdot MV) \left(\frac{MX}{MU} + \frac{MY}{MV} \right) = \overline{MD}^2 + \overline{PD}^2.$$

Tekintve azonban, hogy

$$\frac{MX}{MU} = \frac{VD}{VU}, \quad \frac{MY}{MV} = \frac{DU}{VU};$$

tehát

$$\frac{MX}{MU} + \frac{MY}{MV} = \frac{VD}{VU} + \frac{DU}{VU} = 1,$$

leszen

$$MX \cdot MU + MY \cdot MV = \overline{MD}^2 + \overline{PD}^2,$$

végre

$$a^2 + b^2 = a_1^2 + b_1^2 \dots \dots \dots 2)$$

Az 1) egyenlet következő egyszerű tétellel fejezhető ki: «az ellipszibe írt parallelogrammok területei állandók, ha azoknak szögpontjai az ellipsz kapcsolt átmérőinek végpontjai; továbbá az ellipsz körül írt parallelogrammok területei állandók, ha azoknak oldalai annak kapcsolt átmérőivel párhuzamosak».

1) és 2) egyenletek alapján a tengelyek hosszúsága egyszerűen

szerkeszthető. Ha ugyanis 1)-nek kétszeresét 2)-hez adjuk és abból kivonjuk, úgy lesz:

$$(a+b)^2 = a_1^2 + b_1^2 + 2a_1b_1 \sin \varphi = a_1^2 + b_1^2 = 2a_1b_1 \cos MDQ,$$

$$(a-b)^2 = a_1^2 + b_1^2 - 2a_1b_1 \sin \varphi = a_1^2 + b_1^2 - 2a_1b_1 \cos MDQ,$$

mely egyenletek jobb oldalai az MDP , ill. MDQ háromszögek MP , ill. MQ oldalainak négyzeteit jelentik. Ennélfogva

$$MP = a + b, \quad MQ = a - b,$$

tehát

$$SM = MS = a = \frac{MP + MQ}{2}, \quad S_1M = MS_1 = b = \frac{MP - MQ}{2},$$

miből az ellipsis csúcsai egyszerűen szerkeszthetők.

Az ellipsis nagyobb tengelyét SS' -et, fő-, kisebb tengelyét S_1S_1' -et *melléktengelynek* nevezik és rendszeren $2a$, illetve $2b$ -vel jelölik.

Az MP , MQ egyenesek, melyek a tengelyek hosszúságnak meghatározására szolgáltak, helyzetük által a tengelyek helyzetének szerkesztésére is alkalmasak. $PVMQU$ kört tekintve:

$$PU \text{ ív} = UQ \text{ ívvel},$$

és így

$$PMU \sphericalangle = UMO \sphericalangle,$$

tehát $|MU|$, $|MV|$ tengelyek felezik az MP , MQ egyenesek által képezett szögeket.

Az ellipsis tengelyei ezek szerint AC , BD kapcsolt átmérőkből következőkép szerkeszthetnek: «az egyik, pl. BD átmérő D végpontjából a hozzá kapcsolt átmérőre merőlegeset bocsátunk és erre D -től mérve reárajuk a BD -hez kapcsolt AC átmérő felét P , Q -ig; PMQ -szög felezője, a fő-, a reá M középpontban emelt merőleges a melléktengely. Ha még MQ , M -től mérve P -felé MP -re reárajuk R -ig ($MQ < MP$) úgy RP felezőpontjának T -nek távolsága M és P -től a fő-, ill. melléktengely félhosszúsága, a , b lesz». (FRÉZIER-féle szerkesztés). FRÉZIER (1689—1776.)

Vigyük fel az M pontban AC -re emelt merőlegesre $AM = MC$ félátmérőt E -ig, és nevezzük ED köz- O felezőpontjából M -en át leírt körnek metszőpontjait ED -vel: G , H -nak. Minthogy $EM \# PD \# DQ$, $EMDP$ és $EDMQ$ négyszögek parallelogrammok, tehát MP egyenes

átmegy O -n és $MQ \parallel GH$. — $|MH|$, $|MP|$, $|MG|$, $|MQ|$ sugarak, melyek ED egyenes által négy harmonikus helyzetű pontban (H , O , G és a végtelen távol levő pontban) metszenek: harmonikusak; és mert $MH \perp MG$: $|MG|$ és $|MH|$ felezi $|MP|$, $|MQ|$ egyenesek által képezett szögeket. Ezen $|MH|$, $|MG|$ egyenesek tehát a kúpszelet tengelyei.

Ha még meggondoljuk, hogy

$$EO = OD = \frac{MQ}{2}, \quad HO = OG = OM = \frac{MP}{2},$$

azt látjuk, hogy

$$HD = HO + OD = \frac{MP + MQ}{2}, \quad \text{és} \quad DG = OG - OD = \frac{MP - MQ}{2},$$

tehát HD és DG a féltengelyeket szolgáltatják.

E szerint az ellipsis tengelyei helyzetük és nagyságukra nézve AMC , BMD kapcsolt átmérőkből következőkép szerkeszthetők: «az egyik pl. AC átmérőre az ellipsis M középpontjában merőlegest emelünk és erre M -től rárajtuk AM -et E -ig; E pontnak a másik átmérő D végpontjával összekötő ED egyenesét metszéshez hozzuk G , II pontokban azon körrel, mely ED köznek O felezőpontjából M -en át leírható; MG , MH a tengelyek helyzetét, DG , DH azoknak félhosszát adják meg olyképen, hogy DH , M -től mérve MG -re, DG pedig M -től mérve MH -ra helyezendő fel.» (Ryryz-féle szerkesztés.)*

116. Azon körülményből, hogy HD és DG a tengelyek félhosszával egyenlő, következtetni lehet az ellipsis pontjainak szerkesztésére, ha annak tengelyei helyzet és nagyságra nézve ismeretesek.

Minthogy BD és így D tetszőleges átmérője, ill. pontja az ellipsisnek és HD , DG az ellipsis tengelyeinek félhosszával egyenlő, azt látjuk, hogy: ha GHD egyenes úgy mozog, hogy H pontja mindig az ellipsisnek egyik tengelyén, G pontja annak másik tengelyén marad, úgy HG egyenesnek D pontja leírja azon ellipsist, melynek tengelyei $2GD$, $2DH$ hosszúságak.

Ha mi továbbá D ponton át DG_1H_1 egyenest fektetünk, mely a tengelyekhez ép oly szög alatt hajlik, mint G_1DH_1 , és MG tengelyt G_1 -ben, MH -t H_1 -ben metszi, úgy $DG_1 = DG$, $DH_1 = DH$. Ha ezen H_1G_1D egyenest úgy mozgatjuk, hogy H_1 pontja az ellipsisnek MH tengelyén, G_1 pontja MG tengelyén maradjon, akkor H_1G_1D egye-

* Wiener Christian: Darstellende Geometrie, 1884 Teubner; I. k. 293 l.

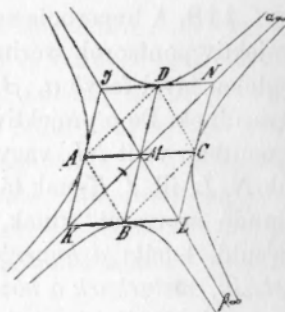
nesnek D pontja szintén leírja azon ellipsist, melynek tengelyei $2G_1D$, $2H_1D$ hosszúságúak.

Ennélfogva: «ha egy egyenesnek két szilárd pontja egy derékszög szárain mozog, akkor azon egyenesnek minden pontja leír egy ellipsist; ennek tengelyei egybeesnek a derékszög száaraival és hosszúságuk a leíró pontnak a szilárd pontoktól mért távolságainak kétszerese».

Ezen leírási módja az ellipsisnek tiszta fogalmat ad annak alakjáról és a szerkesztésből látható, hogy a tengelyek az ellipsist szimmetrikus részekre osztják.

Megjegyzendő még, hogy a szilárd pontok által határolt közfelezőpontja, minthogy az egyenes mozgása alkalmával egyenlő távolságra marad a derékszög csucsától, kört ír le. A kör tehát oly ellipsisnek tekinthető, melynek tengelyei egyenlő hosszúak.

117. Áttérünk most a hyperbola asymptotáinak, az érintők érintőpontjainak, és tengelyeinek szerkesztéséhez, ha az, egy pár kapcsolt átmérőjének helyzete és a rajtuk fekvő, a hyperbolát illetőleg, involúciós pontsorok által van adva, melynek kapcsolt pontjai, kapcsolt pólusok a hyperbolát illetőleg. E pontsorok közül az egyik mindig hyperbolikus, a másik elliptikus természetű. Legyen a 78. ábrában a hyperbolikus involúciós pontsor A, C kettőspontjai által, az elliptikus pedig B, D hatványpontjai által adva. Minthogy AC átmérőnek pólusa BD -n fekszik és B, D pontok kapcsoltak: AD, BC valamint AB, CD egyenesek (78) egymást a hyperbolának, nevezzük α, β pontjaiban, és a hyperbolába írt $A\alpha C\beta$ négyszög átellenes szögpontjainak A, C és α, β -nak érintői egymást BD -n fekvő kapcsolt pólusokban (76) metszik. AC egyenesnek pólusa azonban BD -nek végtelen távol fekvő pontja, miért is α, β pontoknak érintői BD átmérőnek végtelen távol fekvő pontjához kapcsolt M ponton, a hyperbola középpontján mennek át; $|M\alpha|, |M\beta|$ egyenesek tehát a hyperbola asymptotái.



78. ábra.

Ha A, C pontokon át BD -vel és B, D pontokon át AC -vel párhuzamosan húzott egyenesek metszőpontjait I, K, L, N -nel jelöljük, úgy a hyperbola asymptotái ezen $IKLN$ paralelogramm KN, IL átlói,

mert ezek M -en és AD , BC -nek, ill. AB , CD -nek végtelen távol fekvő α , β metszéspontján, tehát a hyperbolának végtelen távol fekvő két pontján mennek át. Minthogy AC , BD a hyperbolának tetszőlegesen választott átmérőpárja következik: *a hyperbola asymptotái azon parallelogrammnak átlói, melynek oldalai egy kapcsolt átmérőpárral párhuzamosak és melyek azon átmérőkön fekvő kapcsolt pólusokból álló involúciós pontsorok kettőspontjain, illetve hatványpontjain mennek át.*

Bármely, a kúpszeleten kívüli tetszőleges ponton átmenő kapcsolt poláris közül egyik a kúpszeletet valós, a másik képzetes pontban metszi, és ezen egyenesek egymástól a ponton átmenő érintők által harmonikusan vannak elválasztva. A hyperbola asymptotái is, mint M középponton átmenő érintők, a kapcsolt átmérőket harmonikusan választják el, még pedig úgy, hogy az egyik átmérő mindig valós, a másik képzetes pontokban metszi a hyperbolát, miért is: *a hyperbola (valós) pontjai az asymptoták által képezett négy szög közül, két csúcsszögnek szárjai között fekszenek.*

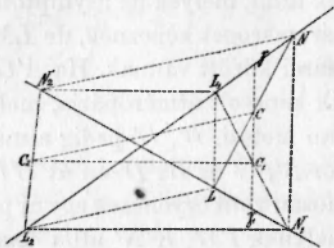
118. A hyperbola asymptotáit, mint két érintőt, a többi érintők projektív pontsorok szerint metszik, melyeknek ellenpontja, mint a végtelen távol fekvő α , β érintőpontoknak megfelelő pontok, M -ben egyesülnek. De e projektív pontsorok két megfelelő pontjának, mint C pontban vont NL , vagy A pontban vont IK érintő metszéspontjának N , L , ill. I , K -nak távolságai az ellenpontoktól (jelenleg M -től) állandó szorzatot adnak, mely a projektív pontsorok hatványával egyenlő, tehát: *a hyperbola érintői az asymptotákat oly pontokban metszik, melyeknek a középponttól mért távolságai állandó szorzatot képeznek.* E tétel így is kifejezhető: *a hyperbola asymptotái és az egyes érintőkből, mint oldalakból képezett háromszögeknek területe állandók, mert egy ily háromszögnek pl. LMN -nek kettős területe $ML \cdot MN \cdot \sin LMN$.*

E tétel alapján a hyperbola bárhány érintőjét szerkeszthetjük, ha a két asymptota IL , KN és egy érintő NL ismeretes. L , N pontokon át ugyanis párhuzamosokat húzunk, melyek az asymptotákat $L_1, N_1; L_2, N_2; \dots$ pontokban metszik; e pontok összekötő egyenesei: L_1N_1, L_2N_2, \dots érintői a hyperbolának. (79. ábra.)

De az egyes érintők érintőpontja is egyszerűen szerkeszthető, mert az érintőről az asymptoták által lemetszett résznek felezőpontja az érintőpont. Az érintőponton átmenő átmérőhöz kapcsolt átmérő ugyanis párhuzamos az érintővel, az érintő pedig a kapcsolt átmé-

rők, valamint az asymptoták által harmonikus pontok szerint metszetik, mely metszéspontok közül egyik végtelen távol van.

Két tetszőleges érintőponton C , C_1 -en átmenő és így (az előbbi tétel szerint) LL_1 -gyel párhuzamos CC_1 egyenes az asymptotákat oly γ , γ_1 pontokban metszi, melyek C , ill. C_1 -től egyenlő távolságra vannak, mert $2C\gamma = LL_1 = 2C_1\gamma_1$. Ennélfogva a hyperbola pontjai, ha az egy C pontja és az asymptoták által van adva, oly módon szerkeszthetők, hogy C -n átmenő tetszőleges egyenesre, mely az asymptotákat γ , γ_1 pontokban metszi, γ_1 -től mérve felvisszük $C\gamma$ közt C_1 -ig, tekintettel lévén arra, hogy C_1 pont, mint a hyperbola új pontja, ugyanazon szög, vagy csúcsszögének szárai közé kerüljön, mely között C pont fekszik.



79. ábra.

119. Az előbbi tételekből fordítva is következik: ha egy háromszögnek egyik oldala úgy mozog, hogy a háromszögnek területe és a mozgó oldal átellenes szöge állandó marad, akkor a mozgó oldal felezőpontja által leírt, és a mozgó oldal által burkolt görbe, egy és ugyanazon hyperbola, melynek asymptotái az állandó szög szárai. A háromszögek területeinek állandó volta miatt ugyanis a változó két csúc, az állandó szögnek és csúcsszögének szárain projektív pontsorokat ír le, melyeknek ellenpontja az állandó szög csúcsába esik.

Ha a mozgó oldal az állandó szög mellékszögeinek szára között mozog, de szintén úgy, hogy a származott háromszögek területei az előbbieknél területével egyenlőek maradjanak, akkor a mozgó oldal valamint felezőpontja által egy új hyperbola lesz burkolva ill. leírva, melynek az előbbitel közös asymptotái vannak. Az előbbi és ezen új hyperbola, egymáshoz kapcsolt hyperbolának nevezetük és a két hyperbola nem csak közös asymptotákkal, hanem közös kapcsolt átmérőpárok is bír. Azonkívül az egyes kapcsolt átmérőpárok közül az egyik átmérő az egyik hyperbolát, a másik a hozzá kapcsolt hyperbolát metszi valós pontokban, mely metszéspontok egyszersmind az egyes hyperboláknak átmérőjén levő hatványpontok.

Hogy ezt belássuk, térjünk vissza az AC , BD kapcsolt átmérők és a rajta fekvő involúziós pontsorok A , C kettőspontjai és B , D hat-

ványpontjai által adott hyperbolához (78. ábra). E hyperbola burkolva lesz azon mozgó LN egyenesek által, melyek az asymptotákkal együtt LMN -nel egyenlő területű háromszögeket képeznek és LMN - Δ , valamint csúcshözéneke IMK - Δ -nak szárjai között vannak. A kapcsolt hyperbola pedig burkolva lesz azon mozgó IDN , vagy KBL egyenesek által, melyek az asymptotákkal együtt LMN -nel egyenlő területű háromszöget képeznek, de LMN - Δ mellékszögeinek NMI - Δ és LMK - Δ szárjai között vannak. Ha $A'C'$ és $B'D'$ az első hyperbolának egy másik kapcsolt átmérőpárja, melyek közül $A'C'$ azt valós A', C' pontokban metszi, B', D' pedig a másik átmérőn levő két hatványpont, akkor A', C' és B', D' -en át $B'D'$, valamint $A'C'$ egyenessel párhuzamosan vont egyenesek egy új parallelogrammot $I'K'L'N'$ -et képeznek, melynek $I'L', K'N'$ átlói ismét az előbbi asymptoták és $I'K', L'N'$ oldalai, érintői a hyperbolának A', C' pontokban, végre $M'I'K', ML'N'$ háromszögek egyenlő területűek MNL háromszöggel. De $I'K'L'N'$ parallelogramm másik két oldala $I'N', K'L'$ szintén oly két háromszöget képez az asymptotákkal, mely MNL -vel egyenlő területű, tehát azon oldalak érintik a kapcsolt hyperbolát $K'L', I'N'$ közök B', D' felezőpontjaiban, és $B'D', A'C'$ kapcsolt átmérőpárja e hyperbolának. Ezen $B'D', A'C'$ átmérők közül $B'D'$ metszi a kapcsolt hyperbolát B', D' pontokban, míg a másinak A', C' pontjai, mint a leírt $\alpha B'\beta D'$ négyszögnek átlópontjai kapcsoltak ezen hyperbolát illetőleg, tehát $A'C'$ átmérőnek hatványpontjai.

120. A hyperbola tengelyei, mint az M pontból kiinduló kapcsolt egyenespárok által képezett involúziós sugársor tengelyei, felezik az asymptoták hajlásszögeit és egymásra merőlegesek, miért is azon $I_1K_1L_1N_1$ parallelogramm, melynek két oldala I_1K_1, L_1N_1 a hyperbolát a metsző — vagy mint mondani szokás — főtengely végpontjaiban, S, S' csúcokban érinti, és melynek másik két oldala I_1N_1, K_1L_1 a másik tengely S_1, S'_1 hatványpontjain át a főtengelylyel párhuzamosan : téglány lesz.

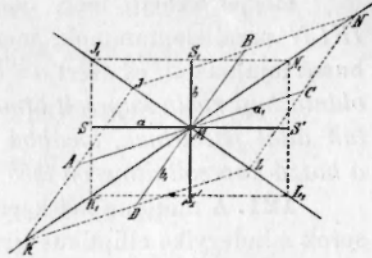
Mínthogy (80. ábra)

$$MI_1 \cdot MK_1 = MN_1 \cdot ML_1 = MN \cdot ML :$$

$I_1K_1L_1N_1$ téglány csücsainak távolsága M -től azon négyzetnek oldala, mely az MN, ML oldalakból alakított téglánynyal egyenlő területű, és ha $I_1K_1L_1N_1$ téglány meg lett szerkesztve, úgy általa a főtengelyen fekvő S, S' csücsok és a melléktengelyen fekvő S_1, S'_1 hatványpontok ismereteseek.

A hyperbola érintői valamint pontjai, úgy mint az ellipsisé, szimmetrikusan vannak elhelyezve a tengelyeket illetően.

Ha a hyperbola AC átmérőjén A, C pontok távolságát — az *átmérőnek* úgynevezett hosszát — $2a_1$ -gyel; a hozzá kapcsolt BD átmérőn B, D hatványpontok távolságát $2b_1$ -gyel; az AC, BD átmé-



80. ábra.

rők hajlásszögét φ -vel; S, S' csúcsok távolságát, vagyis a főtengely hosszát $2a$ -val; végre a melléktengelyen fekvő S_1, S'_1 hatványpontok távolságát $2b$ -vel jelöljük, úgy ezen a_1, b_1, φ, a, b , mennyiségek között az ellipsisnél talált relációkhoz hasonlók vezethetők le.

MLN és $M_1N_1L_1$ háromszögek területei egyenlők lévén:

$$LC \cdot MC \sin \varphi = L_1S' \cdot MS'$$

vagy

$$a_1b_1 \sin \varphi = ab \dots 1)$$

De MLN háromszög $MN, ML, NL=2b_1$ oldalai és $MC=a_1$ középvonala között ismeretes ezen reláció:

$$\overline{MN}^2 + \overline{ML}^2 = 2b_1^2 + 2a_1^2,$$

miből

$$\begin{aligned} (MN + ML)^2 - (2b_1)^2 &= 2MN \cdot ML + 2(a_1^2 - b_1^2), \\ (2b_1)^2 - (MN - ML)^2 &= 2MN \cdot ML - 2(a_1^2 - b_1^2). \end{aligned}$$

E két utóbbi egyenlet baloldalainak szorzata MLN háromszög négyszeres területének négyzete, tehát:

$$(4 \cdot MLN)^2 = 4 \cdot \overline{MN}^2 \cdot \overline{ML}^2 - 4(a_1^2 - b_1^2)^2;$$

de minthogy ML_1N_1 háromszög négyszeres területének négyzete szintén kifejezhető ily módon, t. i.

$$(4 \cdot ML_1N_1)^2 = 4 \cdot \overline{MN_1}^2 \cdot \overline{ML_1}^2 - 4(a^2 - b^2)^2$$

és MLN, ML_1N_1 háromszögek területei valamint $MN \cdot ML, MN_1 \cdot ML_1$ szorzatok egyenlők következnek, hogy

$$a^2 - b^2 = a_1^2 - b_1^2 \dots \dots 2)$$

mely egyenlet az ellipsisnél előforduló 2) egyenletre emlékeztet.

Megjegyezhető még, hogy az egyenoldalú hyperbolánál azon $IKLN$ parallelogrammok, mert átlói egymásra merőlegesek, rhombussá fajulnak el, és ezért $a=b$, valamint $a_1=b_1$, tehát: az egyenoldalu hyperbola kapcsolt átmérői által képezett szögek az asymptoták által felezetnek, továbbá bármely átmérő hosszúsága egyenlő a hozzá kapcsolt átmérőn levő hatványpontok távolságával.

121. A midőn a két kapcsolt átmérőn adott involucziós pontsorok mindegyike elliptikus természetű: a kúpszelet képzetes.

Nevezzük ezen kapcsolt átmérők hajlásszögét φ -nek, a rajtuk fekvő involucziós sorok hatványpontjait A, C , illetve B, D -nek, azoknak középpontját, mely egyszersmind a kúpszeletnek is középpontja M -nek, azoknak hatványát, mely negatív jelű, $-a_1^2$, $-b_1^2$ -nek.

E szerint (77. ábra):

$$AM = -MC, MB = -MD,$$

és

$$MA \cdot MC = -MA^2 = -a_1^2, \quad MD \cdot MB = -MD^2 = -b_1^2.$$

A és D pont polárisa azon $|CL|$, és $|BL|$ egyenes, mely C -n át BD -vel, illetve B -n át AC -vel párhuzamosan húzható; ez utóbbiaknak L metszőpontja $|AD|$ -nek pólusa. $|ML|$ átmérőhöz kapcsolt átmérő e szerint: M -en át $|AD|$ -vel párhuzamosan menő $|MN|$ egyenes.

$|ML|$, $|MN|$ és $|MD|$, $|MA|$ kapcsolt átmérőpárból a tengelyek ép úgy mint az ellipsis eseténél szerkeszthetők. Ezen átmérők ugyanis D ponton át AC -vel párhuzamos $|IDN|$ egyenessel I, D, N , és a végtelen távol fekvő pontokban metszetnek, és ha

$$PDQ \perp ID, PD = DQ = ID,$$

akkor PQM -en átmenő körnek közös U, V pontjai $|IN|$ -nel, a tengelyeknek pontjai lesznek.

Hogy ezen U_1MU, V_1MV tengelyeken fekvő kapcsolt pólusok által képezett elliptikus természetű involucziós pontsorok hatványpontjait S, S' ; $S_1S'_1$ -et és hatványait, $-MS^2 = -a^2$, $-MS_1^2 = -b^2$ megtaláljuk, vegyük tekintetbe, hogy D pontból U_1MU, V_1MV tengelyekre bocsátott merőlegeseknek X, Y talppontjai, kapcsolt pontjai azon U_1, V_1 pontoknak, melyekben a tengelyek D pontnak polárisát BL -et metszik.

Minthogy

$$MU_1 = -MU, MV_1 = -MV,$$

$$MX \cdot MU = -MX \cdot MU_1 = a^2, MY \cdot MV = -MY \cdot MV_1 = b^2,$$

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ezen egyenlet, mely a kúpszeleten változó P pont x, y koordinátái, valamint $AC=a, BD=b$ átmérők hosszúsága között lévő relációt fejezi ki, az analitikai geometriában: az *ellipszis illetve hyperbola egyenletének* neveztetik, vonatkoztatva AC, BD kapcsolt átmérő párba helyezett tengelyrendszerre.

Ha tekintetbe vesszük, hogy Q, R pontpár A, C -t harmonikusan választja el, tehát

$$QA \cdot QC = QM \cdot QR;$$

továbbá $UMR \sim PQR$ hasonló háromszögekből folyó egyenletet:

$$MU \cdot QR = MR \cdot QP,$$

vége az imént talált

$$\pm MD^2 = MU \cdot QP \\ MQ \cdot MR = MC^2$$

relációkat, úgy ezen négy egyenlet szorzatából következik:

$$\mp QA \cdot QC \cdot MD^2 = MC^2 \cdot QP^2,$$

vagy

$$\frac{QP^2}{AQ \cdot QC} = \pm \frac{MD^2}{MC^2} = \text{állandó.}$$

Ez utóbbi egyenletben Apollonius (mint HANKEL * megjegyzi), a kúpszeletek alaptulajdonságait látta kifejezve, mert mint alább kimutatjuk, a parabolára nézve is érvényes.

123. Már említve lett, hogy a parabola két hasonlóan projektív pontsor képződménye, s mint ilyen síkjának végtelen távol fekvő g_∞ egyenese által érintetik, miért is g_∞ -nek pólusa, vagyis g_∞ -nek érintőpontja, tehát a *parabolának középpontja, végtelen távol van.*

A parabola középpontján átmenő egyenesek szintén átmérőknek neveztetnek és ezeknek pólusai g_∞ -en, mint a középpont érintőjén vannak, tehát a *parabola átmérői egymással párhuzamosak és pólusai végtelen távol fekszenek.*

A parabolának nincsenek kapcsolt átmérői, mert minden átmérőnek a középponton átmenő kapcsolt egyenese maga g_∞ egyenes.

Minden parabola átmérőn levő kapcsolt pólusok egyenoldalú hyperbolikus természetű involúziós pontsort képeznek, mert e pontsor egyik kettőspontja végtelen távol van (42.); ennél fogva az átmé-

* HANKEL H.: Die Elemente der projectivischen Geometrie. 1875. p. 223.

rőn fekvő kapcsolt pontok távolságát az átmérőnek metszőpontja felezi. Továbbá a parabola-átmérő összes pontjainak polárisai egymással párhuzamosak, és e polárisok a mennyiben a parabolát valós pontokban metszik, azon átmérőhöz kapcsolt húrrendszert képezik, mely húrrendszer minden egyes húrját azon átmérő felezi. Minden átmérőhöz más irányú kapcsolt húrrendszer, és fordítva minden párhuzamos húrrendszerhez más átmérő tartozik. Azon átmérő, melyre a hozzá kapcsolt húrrendszer merőleges, a parabola *tengelye*; a tengelynek végesben levő metszőpontja: a parabola *csúcsa*.

124. Mint minden kúpszelet, úgy a parabola is meg van határozva egy átmérője, egy ehhez kapcsolt húr és ezeken fekvő kapcsolt pólusokból álló involúziós pontsorok által. Legyen CD a parabola egyik húrja, mely azt C, D -ben metszi, továbbá annak B felezőpontján átmenő AB egyenes azon átmérő, mely $|CD|$ -hez kapcsolt és mely a parabolát A -ban metszi; a parabola ezen adatokból meg van határozva és annak érintői, pontjai, tengelye és csúcsa szerkeszthető.

CD húrnak pólusa, AB egyenesnek azon (másik) pontja E , mely A -tól AB távolságra van; EC, ED egyenesek a parabolának érintői C, D pontokban. Ha a parabolát azon hasonlóan-projektív pontsorok képződményének tekintjük, melyeknek tartói EC, ED érintők, mely pontsorokban tehát E, C -nek megfelel D , illetve E , úgy látható, hogy EC egyenes bármely X pontjából kiinduló második érintőt megkapjuk, ha DE -t, D -től mérve $EX:XC$ (külső, illetve belső) viszony szerint osztjuk X_1 -ben; $|XX_1|$ a kívánt új érintő. Ennek érintőpontja X' , XX_1 közt oly XX' , $X'X_1$ részekre osztja, melyek viszonya egyenlő $CX:XE$ viszonyával, mert ha a parabolát EC és XX_1 tartón levő hasonlóan-projektív pontsorok képződményének tekintjük, úgy az egymásnak megfelelő pontok

$$C, X, E; X, X', X_1$$

tehát:

$$CX:XE = XX':X'X_1.$$

Innen következik: ha egy mozgó egyenes valamely háromszög két oldalát egyenlő viszony szerint osztja anélkül, hogy a harmadik oldallal párhuzamos maradna, úgy azon mozgó egyenes parabolát burkol, melyek háromszög két első oldala szintén érintője. E két oldal által a mozgó egyenesről lemetszett rész az egyenes érintőpontjában oly viszony szerint osztatik, mint a mily viszony szerint a mozgó egyenes az oldalakat osztja. Ha tehát EC, DE közőket egyenlő



részekre osztjuk, a részeket a közökön kívül is felvisszük az egyes egyenesekre, és az egymásra következő osztáspontokat E , ill. D -től számítva, összekötjük, úgy ezen összekötő egyenesek burkolója: parabola. —

Hogy egy tetszőleges, CD -t G -ben metsző, átmérőhöz kapcsolt húr irányát, és az átmérő metszéspontját a parabolával szerkeszthesük, ha CD húr, és a hozzá kapcsolt AB átmérőnek A metszéspontja a parabolával ismeretes, megkeressük azon H pontot, mely G -t C , D -től harmonikusan választ el (82. ábra). EGH , polárháromszög a parabolát illetően, tehát EH lesz iránya azon húrrendszernek, mely a felvett átmérőhöz kapcsolt. Ha G -n át felvett átmérőnek metszéspontját EH -val I -nek nevezzük, úgy I , G kapcsolt pólusok által határolt köznek S felező pontja, azon átmérőnek metszéspontja a parabolával.

E szerkesztés szerint könnyen megtalálható azon SG átmérő, mely egy tetszőleges EH irányú húrrendszerhez kapcsolt, továbbá, ha EH merőlegesen vétetik fel AB -re, azon átmérő, mely a hozzá kapcsolt húrrendszerre merőleges, tehát mely a parabola *tengelyét* képezi.

125. Ha egy parabola C , P pontján átmenő két átmérő valamint $|CP|$ egyenes, a parabola tetszőleges P_1 pontján át C pont érintőjével párhuzamos húr: Q_1 , illetve U , V -ban metszi, és P -n át $|VQ_1|$ -gyel párhuzamos $|PQ|$ egyenes közös pontja $|CQ_1|$ átmérővel: Q , akkor:

$$\begin{aligned} QP: Q_1V &= QC: Q_1C \\ QP^2: Q_1V \cdot Q_1U &= QC: Q_1C. \end{aligned}$$

De minthogy V , U kapcsolt pólus a parabolára nézve, mert $|VU|$, $|CQ_1|$ átmérőnek pólusán megy át (88.), azért

$$Q_1V \cdot Q_1U = Q_1P_1^2,$$

tehát

$$\frac{QP^2}{QC} = \frac{Q_1P_1^2}{Q_1C} = \text{állandó}$$

bárhol vegyük is fel P_1 vagy P pontot a parabolán.

Ha

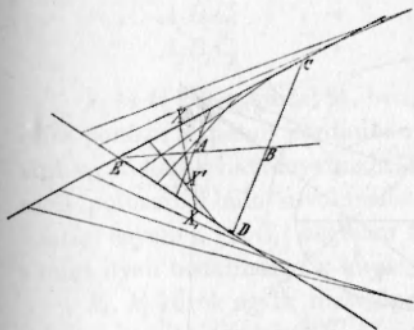
$$QP_1 = y, CQ_1 = x,$$

akkor

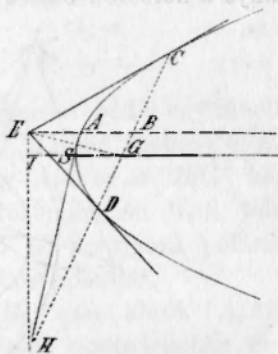
$$\frac{y^2}{x} = \text{állandó}$$

a parabolának egyenlete, C ponton átmenő átmérő és C érintőjére mint X , illetve Y tengelyre vonatkoztatva.*

126. Tanultuk (33.), hogy két ponton átmenő körök, vagyis egy körsor körei, tetszőleges egyenest involucziós pontsor szerint metszenek, a miből fordítva is következik, hogy ha I ponton át köröket fektetünk, melyek egy involucziós pontsor $A, A'; B, B'; X, X'$ kapcsolt pontpárjain át mennek, úgy ezek egymást még egy K pontban metszik; mert ha IAA', IBB' körök második metszéspontja K , akkor IKX kör az involucziós pontsor tartóját szükségkép az X -hez kapcsolt X' pontban fogja metszeni, tehát IXX' kör, mely egybe esik IKX körrel, szintén átmegy K ponton.



81. ábra.



82. ábra.

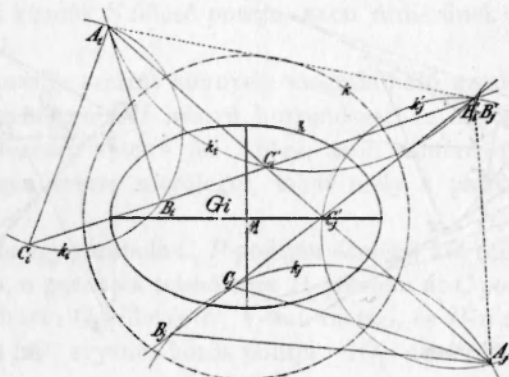
Az involucziós pontsor középpontja G , mint az involucziós pontsor végtelen távol fekvő G_∞ pontjához kapcsolt pont, IKG egyenessé elfajult körön, a körsornak úgynevezett *hatványvonalán* van, mely hatványvonal tudvalevőleg azon tulajdonsággal bír, hogy minden pontjának hatványa a körsor összes köreit illetőleg egyenlő; mert ha P az IK hatványvonal tetszőleges pontja, és a körsor körei IK ponton mennek át, úgy P pont hatványa a körsor összes köreit illetőleg $PI \cdot PK$ szorzattal egyenlő. Ha P pont, IK közön lett felvéve, akkor $PI \cdot PK$ szorzat negatív, ha pedig P , IK közön kívül fekszik, akkor $PI \cdot PK$ szorzat pozitív, és ha P -ből kört írunk le, mely kör külöljének négyzete az első esetben P -nek negatív hatványával $PI \cdot PK$ -val, a második esetben P -nek pozitív hatványával, $PI \cdot PK$ -val egyenlő,

* A kúpszeletekre vonatkozó számos metrikus relációk találhatók STAUDT utolsó művében: Von den reellen und imaginären Halbmessern der Kurven und Flächen II. Ordnung. 1867.

akkor ezen kör az első esetben a körsor körei által átmérőinek végpontjaiban, a második esetben pedig a derékszög alatt metszetik.

Ha továbbá két körsor egy közös körrel bír, akkor mindig létezik oly kör, mely a körsorok körei által derékszög alatt, vagy átmérőinek végpontjaiban metszetik; ennek középpontja a két körsor hatványvonalának metszéspontja; sugarának négyzete, ezen metszéspont pozitív illetve negatív hatványa a két körsor közös körét, és így a sorok összes köreit illetőleg.

Ha végre több körsor hatványvonalai egymást egy pontban metszik és az első és második, a második és harmadik stb. körsor mindig közös körrel bír, akkor a hatványvonalak metszéspontjának hatványa a körsorok összes köreit illetőleg egyenlő; és ha a hatvány-



83. ábra.

vonalak ezen metszéspontjából, mint középpontból kört írunk le, mely kör küllőjének négyzete, a metszéspont pozitív vagy negatív hatványa a körök egyikét illetőleg, akkor azon kör a körsor összes körei által derékszög alatt, vagy átmérőinek végpontjaiban metszetik, a szerint, mint a hatvány pozitív vagy negatív.

Ezen a körsorok tulajdonságaira vonatkozó elemi tételeket előre bocsátva bebizonyítható, hogy: *egy kúpszelet középpontjának hatványa mindazon köröket illetőleg, melyek a kúpszelet polárháromszögei körül írhatók egymás között egyenlők, vagy másszóval: ha a kúpszelet középpontjából kört írunk le, mely kör küllőjének négyzete oly nagy, mint a középpontnak egy polárháromszög körül írt körre vonatkozó hatványa, pozitív vagy negatív jellel véve: akkor azon kör valamennyi polárháromszög körül írt kör által derékszög alatt, vagy átmérőinek végpontjaiban metszetik.*

A tétel akkor lesz bebizonyítva, ha kimutatjuk, hogy a kúpszelet középpontjának hatványa két tetszőleges polárháromszög körül írt kört illetőleg egyenlő. (83. ábra.)

Legyen e végből $A_i B_i C_i$, $A_j B_j C_j$ két polárháromszög α kúpszeletre vonatkozólag; M a kúpszeletnek középpontja. Jelöljük $|B_i C_i|$, $|B_j C_j|$ egyenesek metszéspontját két betűvel $B'_i \equiv B'_j$ -vel; e ponthoz kapcsolt pólust $|B_i C_i|$ -n, C'_i -vel; $|B_j C_j|$ -n, C'_j -vel; mely C'_i , C'_j pontok, mint $(|B_i C_i|, |B_j C_j|) \equiv B'_i \equiv B'_j$ ponthoz kapcsolt pólusok, $|B_i C_i|$, $|B_j C_j|$ pólusait összekötő egyenesen $|A_i A_j|$ fekszenek. Nevezzük végre:

$A_i B_i C_i$ polárháromszög körül írt kört k_i -nek				
$A_i B'_i C'_i$	"	"	"	" k'_i "
$A_j B'_j C'_j$	"	"	"	" k'_j "
$A_j B_j C_j$	"	"	"	" k_i "

k_i és k'_i kör egymást A_i -ben, $|B_i C_i|$ egyenest pedig egy involucziós pontsor kapcsolt pontjaiban, B_i , C_i ; B'_i , C'_i -ben metszi; e szerint k_i , k'_i körök hatványvonala $A_i G_i$ átmegy A_i -n és az $|B_i C_i|$ kapcsolt pólusaiból álló involucziós pontsor középpontján G_i -n, tehát $|A_i G_i|$ egyenes, $|B_i C_i|$ végtelen távol fekvő G_i pontjának polárisa, s mint ilyen tartalmazza α kúpszeletnek M középpontját.

k_i , k'_j körök egyik metszéspontja $B'_i \equiv B'_j$; ezen körök $|A_i A_j|$ -t egy involucziós pontsor A_i , C'_i ; A_j , C'_j kapcsolt pontpárjaiban metszik, ennél fogva $|A_i A_j|$ végtelen távol fekvő pontjának polárisa, mely $|A_i A_j|$ -nek, $B'_i \equiv B'_j$ pólusán és M középponton megy át: k'_i , k'_j körök hatványvonala.

Az A_j ponton átmenő k'_j , k_j körök végre, $|B_j C_j|$ egyenest egy involucziós pontsor B_j , C_j ; B_j , C_j kapcsolt pontpárjaiban metszik és hatványvonala $|B_j C_j|$ végtelen távol fekvő pontjának polárisa, mely $|B_j C_j|$ -nek pólusán és α -nak középpontján, M -en, megy át.

E szerint k_i , k'_i ; k'_i , k'_j ; k_j , k_j körpárok hatványvonalai átmennek M -en, és ezen M pont hatványai k_i , k'_i , k'_j , k_j köröket, tehát a tetszőlegesen választott $A_i B_i C_i$, $A_j B_j C_j$ polárháromszögek körül írt k_i , k_j köröket illetőleg, egyenlő. —

127. A kúpszelet polárháromszögei körül írható körök derékmetsző köre k , azon tulajdonsággal bír, hogy egyes pontjain átmenő kapcsolt polárisok egyenoldalian hyperbolikus természetű involucziós sugársort képeznek; vagy a mi ugyanaz: k kör pontjaiból a kúp szelethez vont érintőpárok egymásra merőlegesek.

Nevezzük k kör tetszőleges pontját X -nek, ennek a kúpszeletre vonatkozó polárisát x -nak; az x -n változó kapcsolt pólusokat X_i , X'_i -nek.

Minthogy k , az X , X_i , X'_i -n átmenő változó k_i köröket X -ban derékszög alatt metszi, ezen k_i körök egymást $|MX|$ -nak X pontjában érintik. Ily körsorban mindig létezik két kör, mely minden X ponton át nem menő egyenest, tehát X -nek polárisát, egy-egy pontban P , Q -ban, az X_i , X'_i kapcsolt pólusokból álló involúziós pontsor asymptotáiban érinti. Ezen érintőpontok, azonban $|MX|$ hatványvonal és x poláris metszéspontjától S -től egyenlő távolságra vannak, mert SX , SP , SQ körérintők egyenlő hosszúak, tehát P , Q pontok X -ből derékszög száraival projekciáltatnak. $|XP|$, valamint $|XQ|$ azonban egy-egy egyenessé elfajult polárháromszög, s mint ilyen a kúpszeletnek érintője P , illetve Q pontban, tehát X pontból a kúpszelethez vont érintők egymásra merőlegesek.

Minthogy az ellipsis fő- és melléktengelyén fekvő S , S_1 csúcspontjain át húzott érintők egymásra merőlegesek, azért ha a és b az ellipsis féltengelyeit jelenti: az ellipsis polárháromszögei körül írható köröket derékszög alatt metsző kör küllője egyenlő $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Ha a hyperbola egyik asymptotájára (78. ábra) ML -re, LN merőleges érintőt bocsatok, mely a hyperbolát C -ben érinti, az asymptotákat L , N pontban metszi, akkor $MC = a_1$, $LC = b_1$, egyenlő a hyperbola egy kapcsolt átmérőpárjának hosszával, tehát MLC derékszögű háromszög folytán, ha a és b a fő- és melléktengely:

$$ML^2 = \overline{MC}^2 - LC^2 = a_1^2 - b_1^2 = a^2 - b^2,$$

és mert L pontból kiinduló két érintő LM , LN egymásra merőleges: L pont k körön fekszik, tehát a hyperbola polárháromszögei körül írható kört derékszög alatt metsző kör küllője egyenlő $\sqrt{a^2 - b^2}$.

Ha a hyperbola az asymptotáknak azon csúcshézag között fekszik, melyek tompa szöget képeznek, akkor egy asymptotára merőleges érintőt húzni nem lehet; ezen esetben M pont hatványa negatív, és a derékmetsző k kör átmegy azon másik körbe, mely a polárháromszögek körül írható körök által átmérőinek végpontjaiban metszetik. A midőn a hyperbola egyenoldalú ($a^2 = b^2$), k kör ponttá fajul és így: az egyenoldalú hyperbola minden polárháromszöge körül írt kör átmegy a hyperbola középpontján.

A parabolánál, melynek középpontja a tengely végtelen távol fekvő pontja, a polárháromszög körül írható köröket derékszög alatt

pontsor szerint metszik, mely az egyik tengelyen hyperbolikus s a másikon elliptikus természetű.

Hogy ezt bebizonyítsuk, nevezzük x átmerőn változó ξ pont polárisának metszését k kúpszelet tengelyeivel X'_a , X'_b -nek és ξ -ből azon polárisra bocsátott merőlegesnek metszését k -nak tengelyeivel X_a , illetve X_b -nek (84. ábra).

k -nak tengelyei és $|\xi X_a X_b|$, $|\xi' X'_a X'_b|$ egyenesek egymásra merőlegesek lévén, vagy X_a , X'_a , vagy pedig X_b , X'_b metszőpontok nem lesznek elválasztva k -nak M középpontja által, tehát a változó és egymásra mindig merőleges kapcsolt polárisok $|\xi X_a X_b|$, $|\xi' X'_a X'_b|$, az egyik tengelyt elliptikus, a másikat hyperbolikus természetű involúziós pontsor szerint metszik. Ez utóbbi involúziós pontsor kapcsolt pontjait X_a , X'_a -nak, kettőspontjait F , F' -nek nevezvén kimutatható, hogy F , valamint F' -en átmenő összes kapcsolt polárisok egymásra merőlegesek, vagyis *czirkularis természetű involúziós sugársort* képeznek. Minthogy F , úgyszintén F' az X_a , X'_a involúziós pontsor kettőspontja, azon átmenő és $|\xi X_a X_b|$, $|\xi' X'_a X'_b|$ -vel párhuzamos két egyenes k -t illetőleg kapcsolt, minthogy továbbá FM tengelyre F pontban emelt merőleges FM tengelyhez kapcsolt poláris: F -ből két pár egymásra merőleges kapcsolt poláris indul ki, miből már következik, hogy minden egymást F -ben metsző kapcsolt poláris egymásra merőleges.

Nevezzük most k kúpszeletnek x -től különböző átmérőjét y -nak, y -on változó kapcsolt pontpárt η , η' -nek, η polárisának és η -ből a polárisokra bocsátott merőlegeseknek metszőpontjait k tengelyeivel Y'_a , Y'_b és Y_a , Y_b -nek, hol Y_a , Y'_a az F , F' pontokon átmenő tengelyen fekszik. Y_a , Y'_a által képezett involúziós pontsor: metszése az F , F' pontokon átmenő tengelynek $|\eta Y_a Y_b|$, $|\eta' Y'_a Y'_b|$ -gyel párhuzamos és egymásra merőleges kapcsolt polárisokkal; de minthogy F -en, és szintúgy F' -en át $|\eta Y_a Y_b|$, $|\eta' Y'_a Y'_b|$ -gyel párhuzamosan menő egyenesek szintén kapcsoltak k -t illetőleg: F , F' kettőspontjai egyszersmind az Y_a , Y'_a pontpárok által befutott involúziós pontsornak, a miből már következik, hogy az X_a , X'_a , valamint Y_a , Y'_a által leírt involúziós pontsorok egymástól nem különböznek. Bármely irányú egymásra merőleges kapcsolt polárisok F , F' -en átmenő tengelyt, mely mint látni fogjuk a főtengety, ugyanazon involúziós pontsor szerint metszik, melynek kettőspontjai F , F' pontok.

Ha az

$$MX_a X_b, MX'_a X'_b, \text{ és } MY_a Y_b, MY'_a Y'_b$$

hasonló háromszögeket tekintjük, ugy

$$MX_a : MX_b = XM'_b : MX'_a, \text{ és } MY_a : MY_b = YM'_b : MY_a$$

tehát

$$-MX_b \cdot MX'_b = MX_a \cdot MX'_a = MF^2 = MY_a \cdot MY'_a = -MY_b \cdot MY'_b,$$

vagyis a másik tengelyen kimetszett X_b , X'_b és Y_b , Y'_b involúziós pontsorok is azonosak, mert M középpontjuk közös és MF^2 hatványuk egyenlő.

129. Az egymásra merőleges kapcsolt polárisok még a sík végtelen távol fekvő g_∞ egyenesét is involúziós pontsor szerint metszik, t. i. azon involúziós pontsor szerint, melynek kettőspontjai a végtelen távol fekvő *körpontok*. Ezen g_∞ -en fekvő involúziós pontsor perspektív a melléktengelyen fekvő X_b , X'_b pontok által képezett involúziós pontsorról F , valamint F' középpontra nézve, mert X_b , X'_b pontsor kapcsolt pontjai F , valamint F' -ből $-MX_b \cdot MX'_b = MF^2 = MF'^2$ reláció következtében, derékszögek száraival projekciáltatnak.

Ha föltételezzük, hogy F (valamint F') középponttal bíró czirkularis sugársornak nemcsak valós kapcsolt sugarai mennek át a melléktengelyen és g_∞ -en fekvő involúziós pontsoroknak kapcsolt elemein, hanem egyszersmind azon sugársoroknak képzetes kettőssugarai is tartalmazzák a melléktengely és g_∞ -n fekvő involúziós pontsorok kettőspontjait, mely képzetes kettőssugarak tulajdonkép az F , és F' pontokból a kúpszelethez menő képzetes érintők, úgy mondhatjuk: *a kúpszeletet illetőleg egymásra merőleges kapcsolt polárisok, a kúpszelet tengelyeit, valamint a végtelen távol fekvő g_∞ egyeneset oly involúziós pontsorok szerint metszik, melyeknek valós és képzetes kettőspontjai, egy a kúpszelet körül írt képzetes négyoldal, három pár átellenes szögpontjainak tekinthetők.* Az F , F' pontokat tehát ezen felfogás szerint úgy értelmezhetjük, hogy *ezek valós metszőpontjai a sík végtelen távol fekvő képzetes körpontjaiból a kúpszelethez vont képzetes érintőknek.*

A kúpszelet síkjának azon pontjait, melyből kiinduló és a kúpszeletet illetőleg kapcsolt polárisok czirkularis sugársort képeznek, a kúpszelet *gyújtópontjainak* nevezik.

Az előbb talált F , F' pontokon kívül nincsen a síkban oly valós pont, melyből kiinduló kapcsolt polárisok czirkularis természetű involúziós sugárt képeznének. Ha ugyanis P egy tetszőleges pont, úgy P -n átmenő átmérőhöz kapcsolt egyenes, párhuzamos ezen átmérő kapcsolt átmérőjéhez, tehát nem lesz merőleges az első átmérőre,

kivén, ha P a kúpszeletnek egyik tengelyén fekszik. De ha P_a kúpszeletnek egyik tengelyén vétetik fel, úgy P -n átmenő és a tengelytől különböző egyenesre merőleges kapcsolt egyenes, az előbbieket szerint, ezen tengelyt oly P_1 pontban metszi, mely az előbb tárgyalt X_a, X'_a , vagy X_b, X'_b pontpárok által képezett involúziós pontsornak P -hez kapcsolt; P_1 tehát csak azon esetben esik össze P -vel, ha ez F , vagy F' -ben lett felvéve.

130. Minthogy a gyújtópontokon átmenő kapcsolt polárisok czirkularis, tehát elliptikus természetű, involúziós sugársort képeznek; *a valós gyújtópontok kúpszeleten belül fekszenek*, és így a hyperbolánál a fő-, tehát azon tengelyen, mely a hyperbolát valós pontokban metszi. De az ellipsis gyújtópontjai is a fő- vagyis hosszabb tengelyen lesznek, mert az ellipsis csúcaiban vont érintők által képezett téglány egyik szögpontjának polárisa a fő- és melléktengelyhez fekvő egy-egy csúcshoz, pl. S, S_1 -nek, összekötő egyenese, tehát ezen szögpontból a polárisra bocsátott merőlegesnek a tengelyekkel való metszéspontjai közül a hosszabb tengelyen fekvő, az illető csúcstól S -től, M által nincs elválasztva, a kisebb tengelyen fekvő pedig M által el van választva.

A képzetes kúpszeletnek valós gyújtópontjai azon tengelyen lesznek, melyen fekvő kapcsolt pólusokból képezett involúziós pontsornak hatványa kisebb, mint a másik tengelyen fekvő involúziós pontsornak hatványa.

A parabolánál az egymásra merőleges kapcsolt polárisok metszése a tengelylyel egyenoldalúan-hyperbolikus, mert középpontja M , és a metszési pontsor középpontja, végtelen távol van. A parabolának tehát csak egyik gyújtópontja van véges távolságban és felezi az egymásra merőleges kapcsolt polárisok által a tengelyről lemetesztett közöket.

A körnek két gyújtópontja, annak középpontjába esik, mert párhuzamos egyenesekre merőleges kapcsolt polárisok, mind egy átmérőbe jutnak, tehát az egymásra merőleges kapcsolt polárisok a körnek átmérőin parabolikus természetű involúziós pontsort metszenek ki, melyben a középpont képezi a közös kapcsolt pontot.

A kúpszeletek gyújtópontjainak polárisait, *vezérvonalnak*, és a kúpszelet tetszőleges pontját a gyújtópontokkal összekötő egyeneseket, a *kúpszeleten felvett pont vonósugarainak* nevezik. A kör vezérvonala e szerint végtelen távol van, és a vonósugarak a kör sugaraival esnek össze; az ellipsis és hyperbolának két vezérvonala merőleges

azon tengelyre, melyen a gyújtópontok fekszenek. A parabola végesben fekvő gyújtópontjának vezérvonala szintén merőleges a parabola tengelyére és a csúcstól ép oly távolságra van, mint a gyújtópont. A parabola minden pontjához tartozó vonósugár közül egy a gyújtóponton megy át, a másik párhuzamos a tengelylyel.

131. A kúpszeleteknek számos a gyújtópontokkal kapcsolatos relációi vannak, melyek egyszerűségüknél fogva már régóta ismertek, és a kúpszelet pontjainak és érintőinek egyszerű szerkesztéséhez vezetnek.

E tételeket és szerkesztéseket tárgyalandó, kiindulunk a gyújtópontoknak ama tulajdonságából, hogy ezek kettőspontjai az egymásra merőleges kapcsolt polárisok által a főtengelyen kimetszett involúziós pontsoroknak és mint ilyenek a síknak bármily két egymásra merőleges kapcsolt polárisát harmonikusan választják el. E tulajdonság így is kifejezhető: «a kúpszelet síkjának tetszőleges P pontját F, F' gyújtópontokkal összekötő $|PF|$ $|PF'|$ egyenesek hajlásszögeinek felezői. a felvett ponton átmenő egymásra merőleges kapcsolt polárisok». De tekintve, hogy P ponton átmenő összes kapcsolt polárisokból képezett involúziós sugársornak kettőssugarai, P -ből a kúpszelethez vonható érintők, továbbá ezen kettőssugarak szögfelezői az involúziós sugársornak tengelyei, vagyis az egymásra merőleges kapcsolt egyenesek: P -ből a kúpszelethez vont érintők, valamint $|PF|$, $|PF'|$ egyenesek által képezett szögeknek ugyanazon szögfelezőjük vannak. Innen következik, hogy *azon egyenesek, melyek a kúpszelet síkjának tetszőleges pontját a gyújtópontokkal összekötik, a felvett ponttól a kúpszelethez vonható érintőkhöz egyenlő szögek alatt hajlanak.*

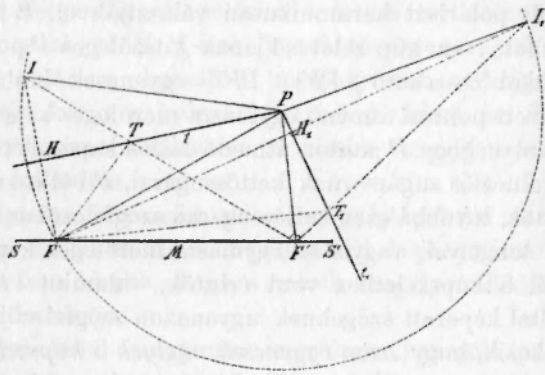
Ha P pont a kúpszeleten vététk fel, úgy a két érintő egyesül és ezen érintő $|PF|$, $|PF'|$ egyenesekhez — P pontnak vonósugaraihoz — egyenlő szögek alatt hajlik. Ha, mint szokás, azon egyenest, mely valamely görbe érintőjére az érintőpontban merőlegesen áll, *azon pont deréklőjének* (normális) nevezzük, úgy a talált eredmény így is kifejezhető: *a kúpszelet tetszőleges pontjának érintője és deréklője felezi azon ponthoz tartozó vonósugarak hajlásszögeit.*

Tekintve, hogy a parabola egyik gyújtópontja a tengelynek végtelen távol fekvő pontja: *a parabola bármely pontjának érintője és deréklője annak tengelyét és azon ponthoz tartozó (véges) vonósugarat egyenlő szög alatt metszi; az érintő és deréklő metszéspontja a tengelylyel, a gyújtóponttól ép oly távolságra van, mint a milyen a vonósugár hossza.*

Mint hogy a gyújtópontok az ellipsis főtengelyén levő csúcspon-
tok által határolt közön belül, a hyperbola gyújtópontjai pedig azon
csúcsponatok által határolt közön kívül fekszenek: az ellipsis érintői
a gyújtópontokat nem választják el, ellenben a hyperbola érintői a
gyújtópontokat elválasztják egymástól.

132. Az utóbb talált két tétel alapján a kúpszeletnek bárhány
érintőjét és azoknak érintőpontját egyszerűn szerkeszthetjük, ha a
kúpszelet két gyújtópontja F, F' és egy érintője t , ismeretes. (85. és
86. ábra.)

t -nek érintőpontját T -t ugyanis megkapjuk, ha F -ből t -re bocsá-
tott merőlegesre, H talpponttól mérve HF közt reá viszzük J -ig, úgy
hogy $FH=HI$; $I'F'$ egyenes t -t az érintőpontban T -ben metszi, mert.



85. ábra.

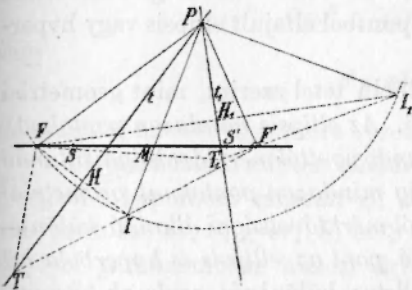
T -nek összekötő egyenesei F, F' -tel t -hez egyenlő szög alatt haj-
lanak.

Ha továbbá t -nek tetszőleges P pontját F, F' -tel összekötjük
és P -n át t_1 egyenest húzunk, mely $|PF'|$, $|PF|$ -tel ugyanoly szöge-
ket képez, mint t érintő $|PF'|$, $|PF|$ -fel, akkor t_1 szintén érintője
a kúpszeletnek. t_1 -nek érintőpontja T_1 épp úgy, mint t -é az által
lesz szerkesztve, hogy az egyik gyújtópontból, pl. F -ből t_1 -re bocsá-
tott merőlegesre H_1 talpponttól mérve FH_1 közt reá rakjuk I_1 -ig, és
 I_1F' egyenest metszéshez hozzuk t_1 -gyel T_1 -ben.

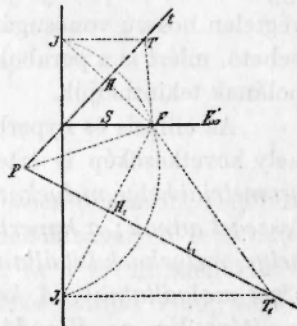
Mint hogy P tetszőleges pontja volt t -nek, e szerkesztés alapján
a kúpszeletnek valamennyi érintőjét és azok érintőpontját meg lehet
találni, még pedig egyféleképp, mert: *a kúpszelet, két gyújtópontja és
egy érintője által egyféleképp van meghatározva.* A két gyújtópont

által ugyanis két circularis involucziós sugársor van megadva, melynek középpontja a két gyújtópont; de két involucziós sugársor és egy egyenes, csak egy kúpszeletet határoz meg, melyre nézve annak kapcsolt sugarai, kapcsolt polárisok és mely az egyenest érinti (97).

Ha ezen szerkesztésből származó IPF' és I_1PF' háromszögeket tekintjük, azt látjuk, hogy ezek két oldalban és az általuk bezárt szögben megegyeznek ($PF' = PF'$; $IP = PF = PI_1$; $\sphericalangle IPF' = \sphericalangle IPT + \sphericalangle TPF' = \sphericalangle TPF + \sphericalangle FPT_1 = \sphericalangle F'PT_1 + \sphericalangle T_1PI_1 = \sphericalangle F'PI_1$), tehát a harmadik oldal IF' , $F'I_1$ is egyenlő. Ebből következik, hogy az egyik gyújtópontnak, pl. F -nek, tükörképei (I, I_1), két tetszőleges érintőt t, t_1 -et illetőleg, a másik gyújtóponttól egyenlő távolságra vannak, vagy mi ugyanaz: *a kúpszelet bármely gyújtópontjának tükörképei*



86. ábra.



87. ábra.

annak összes érintőjét illetőleg, oly körön fekszenek, melynek középpontja a másik gyújtópont. Ezen körnek sugara a kúpszelet bármely pontjához tartozó két vonósugár összege illetve különbsége, a szerint a mint a kúpszelet ellipsis vagy hyperbola. A tétel utolsó részét bebizonyítandó, vegyük tekintetbe, hogy IF' egyenlő $TF' \pm IT = TF' \pm TF$, mely utóbbi kifejezésben a felső illetve alsó jel érvényes, a szerint, a mint t a gyújtópontokat nem választja el, vagy pedig elválasztja, tehát a kúpszelet ellipsis vagy hyperbola.

Parabolánál ugyanazon oknál fogva, mint előbb $IPF'_\infty, I_1PF'_\infty$ szögek egyenlők, tehát FP -vel egyenlő IP, I_1F közök a parabola tengelyével egyenlő szöget képeznek, miért is $I, I_1 \dots$ pontok, mint F gyújtópontnak tükörképei a parabola érintőit illetőleg, a parabola tengelyére merőleges egyenesen lesznek. — Tekintve, hogy a gyújtópontnak tükörképe a csúc érintőjére vonatkozólag a tengely azon pontja, mely

a csúcstól ép oly távolságra van mint a gyújtópont, következik, hogy azon egyenes, mely a parabola gyújtópontjának tükörképeit az érintőkre vonatkozólag, tartalmazza : a parabola vezérvonala. (Függelék 4.)

133. A főtengelyen fekvő S, S' csúcsokhoz, mint az ellipsis, vagy hyperbola csúcsaihoz tartozó vonósugarak összege ill. különbsége szintén egyenlő ama kör sugarával, mely az egyik (v. másik) gyújtópontnak az érintőkre vonatkozó tükörképeit tartalmazza ; de minthogy S, S' csúcsok és F, F' gyújtópontok a kúpszelet középpontját illetőleg symmetrikus fekvésűek, tehát FS és $F'S', F'S$ és FS' közök egyenlő hosszúak, azért az ellipsis csúcsaihoz, és így bármely pontjához tartozó vonósugarak összege egyenlő annak főtengelyével a hyperbola csúcsaihoz, tehát bármely pontjához tartozó vonósugarak különbsége egyenlő annak főtengelyével. A parabola pontjaihoz tartozó véges és végtelen hosszú vonósugár összege, vaia mint különbsége állandónak vehető. miért is a parabolát e szempontból elfajult ellipsis vagy hyperbolának tekinthetjük.

Az ellipsis és hyperbola az előbbi tétel szerint, mint geometriai hely következésképp is értelmezhető. Az ellipsis mindazon pontoknak geometriai helye, melyeknek két állandó ponttól mért távolságai állandó összeget adnak ; a hyperbola pedig mindazon pontoknak geometriai helye, melyeknek két állandó ponttól mért távolságai állandó különbséget szolgáltatnak. A két állandó pont az ellipsis és hyperbola két gyújtópontja, az állandó összeg illetve különbség azoknak főtengelyével egyenlő. Hogy a geometriai hely valós pontokkal bírjon, megkivántatik, hogy azon köz, mely a két állandó ponttól mért távolsok összegét adja, nagyobb legyen, ellenben azon köz, mely a két állandó ponttól mért távolsok különbségét képezi, kisebb legyen, mint a két állandó pont távolsága, vagy más szóval, az ellipsisnél a gyújtópontok távolságának kisebbnek, a hyperbolánál nagyobboknak kell lenni, mint a főtengely.

Az ellipsis melléktengelyén fekvő bármely csúcsnak vonósugarai egyenlők és mert összegük oly nagy, mint a főtengely $2a$, azért a melléktengelyen levő csúcsok a gyújtópontoktól a távolságra vannak.

Ha, mint szokás, az ellipsis vagy hyperbola gyújtópontjainak távolságát középpontkivüliségnek (excentricitásnak) nevezzük, és $2c$ -vel jelöljük, úgy az imént kimutatott tulajdonság következtében

$$c^2 = a^2 - b^2,$$

hol a, b az ellipsis féltengelyeinek hosszúságát jelenti.

E reláció különben a gyújtópontok értelmezéséből is lezármaztatható. Ha az ellipsis fő- és melléktengelyén levő egy-egy csúcspontot S , ill. S_1 -gyel, e pontok érintőinek metszéspontját P -vel, végre P -ből SS_1 -re bocsátott merőlegesnek metszéspontját MS főtengelylyel, Q -val jelöljük, úgy PQS, SS_1M hasonló háromszögekből következik (88a. ábr.)

$$MS - MQ : SP = MS_1 : MS,$$

vagy

$$MS^2 - MQ \cdot MS = SP \cdot MS_1 = \overline{MS_1^2}.$$

De $MQ \cdot MS$, hatványa azon involúziós pontsornak, melyet az egymásra merőleges kapcsolt egyenesek a főtengelyen kimetszenek, és ezért

$$MQ \cdot MS = \overline{MF^2},$$

tehát

$$MS^2 - \overline{MF^2} = \overline{MS_1^2},$$

vagy

$$c^2 = a^2 - b^2$$

mi már a fönnebbi egyenletre vezet.

A hyperbolánál szintén találunk ehhez hasonló relációt. Jelöljük e végből a hyperbola csúcseit S, S' -tel, a melléktengelyen levő hatványpontokat S_1, S_1' -gyel; S_1' és S pontokon át a fő- ill. melléktengelylyel párhuzamosan huzott egyenesek közös pontját P -vel, végre P -ből $S_1 S$ -re bocsátott merőlegesnek metszéspontját a főtengelylyel Q -val (88b. ábra).

MS_1S, SQP hasonló háromszögek következtében

$$MQ - MS : PS = MS_1 : MS,$$

vagy

$$MQ \cdot MS - MS^2 = PS \cdot MS_1 = \overline{MS_1^2}.$$

De S_1, S pontok polárisa $|S_1'P|, |SP|$, tehát S_1S egyenes pólusa P pont, és S_1S, PQ két egymásra merőleges kapcsolt egyenes. Ennél fogva $MS.MQ$, mint hatványa az egymásra merőleges kapcsolt egyenesek által a főtengelyről kimetszett involúziós pontsornak, egyenlő $\overline{MF^2}$, tehát

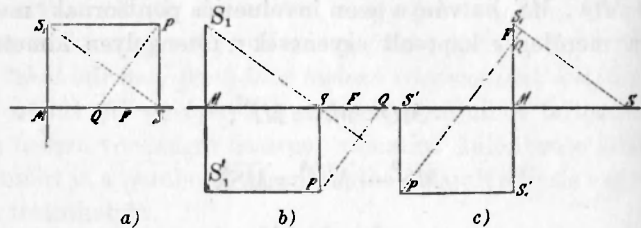
$$\overline{MF^2} - \overline{MS^2} = \overline{MS_1^2},$$

s ha mint már előbb történt, a hyperbola melléktengelyén levő S_1, S_1' hatványpontok távolságát $2b$ -vel jelöljük, a talált reláció így is írható:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Ha a képzetes kúpszelet tengelyein levő involúziós sorok hatványpontjait S, S' ; S_1, S'_1 -tel, azon sorok negatív hatványát MS^2, MS'^2 -et röviden a^2, b^2 -tel; jelöljük, akkor a, b és a gyújtópontoknak F, F' -nek féltávolsága $c = MF = F'M$ között szintén találunk az előbbiekkel hasonló relációt.

$|SS_1|$ egyenes pólusa nem egyéb, mint S', S'_1 pontokon át a tengelyekkel párhuzamosan menő egyeneseknek P metszőpontja, s ha



88. ábra.

P -ből $|SS_1|$ -re bocsátott merőlegesnek metszőpontját $|S_1S'_1|$ -el ($MS > MS_1$), Q -nak nevezzük, akkor MSS_1, S'_1OP hasonló háromszögekből:

$$MS : MS_1 = S'_1M + MQ : PS'_1,$$

vagy

$$MS_1 \cdot PS'_1 = MS_1 \cdot S'_1M + MQ \cdot MS_1,$$

és mert

$$MQ \cdot MS_1 = MF^2 = c^2,$$

azért

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

134. A 85. 86. ábra alapján *gyújtópontjai és főtengelyén levő csúcsai által adott kúpszelethez tetszőleges P pontból kiinduló érintők következőkép szerkeszthetők.* Az egyik gyújtópontból, pl. F' -ből a főtengely hosszával kört írunk le és ezt metszéshez hozzuk I, I_1 pontokban azon körrel, mely P -ből a másik gyújtóponton F -en át leiratott: IF, I_1F -re P -ből bocsátott PT, PT_1 merőlegesek a kívánt t, t_1 érintők; IF', I_1F' egyeneseknek T, T_1 metszőpontja az érintőkkel az érintőpontok.

A parabola eseténél a vezérvonal képezi, az előbbi F' -ből a főtengely hosszával leírt kört; a vezérvonal pedig a tengelyre merőleges egyenes, mely a csúcstól ép oly távolságra van, mint a gyújtópont F (87. ábra). —

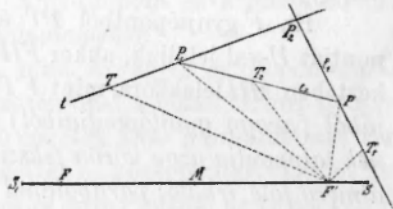
A szerkesztésnél előforduló IPF'' , I_1PF' háromszögek összeillőségéből következtetni lehet, hogy $\sphericalangle IF''P = \sphericalangle PF'I_1$ (parabolánál $\sphericalangle TFP = \sphericalangle PFT_1$), de minthogy az érintők T , T_1 érintőpontja azon szögeknek IF'' , I_1F' szárán fekszik mondhatjuk: *a kúpszelet két tetszőleges pontját bármely gyújtóponttal összekötő egyenesek hajlásszöge felezve lesz azon egyenes által, mely a gyújtópontot a felvett pontok érintőinek metszőpontjával összeköti.*

A tétel különben a gyújtópontok ama értelmezésének egyszerű következménye, hogy «a gyújtópontokból kiinduló kapcsolt polárisok egymásra merőlegesek». PF'' egyenesnek ugyanis pólusa Q , TT_1 egyenesen fekszik és harmonikusan választja el T , T_1 pontokat PF'' -től, tehát $|F'T|$, $|F'P|$, $|F'T_1|$, $|F'Q|$ harmonikus sugarak, — de mert $|F'P|$, $|F'Q|$ mint kapcsolt polárisok egymásra merőlegesek: $|F''P|$ és hasonlóképp $|F''Q|$ felezi $|TF''|$, $|T_1F''|$ egyenesek hajlásszögeit.

Hogy az előbbi tételt általánosíthatassuk, nevezzük a kúpszelet t , t_1 , t_2 érintőinek érintőpontjait T , T_1 , T_2 -nek; t , t_1 , t_2 érintők metszőpontját P_2 , P , P_1 -nek, végre a kúpszelet egyik gyújtópontját F' -nek. A tétel folytán (89. ábra):

$$\sphericalangle P_1F'P = \sphericalangle P_1F'T_2 + \sphericalangle T_2F'P = \frac{1}{2}(\sphericalangle TF''T_2 + \sphericalangle T_2F''T_1) = \frac{1}{2}\sphericalangle TF''T_1,$$

ha tehát t , t_1 érintő állandó marad, t_2 pedig változik, $\sphericalangle TF''T_1$ fele, és így a vele egyenlő $\sphericalangle P_1F'P$ is állandó marad. Ebből következik: *a kúpszeletnek két szilárd érintője egy változó érintőről oly részt metsz le, mely a kúpszeletnek bármely gyújtópontjából egyenlő szög alatt mutatkozik.*



89. ábra.

Minthogy a kúpszelet egyik gyújtópontja és három érintője által egyféleképp van meghatározva (96), a tétel folytán három érintőből és a gyújtópontból bárhány érintő egyszerű úton szerkeszthető. A kúpszeletnek hiányzó gyújtópontja azon körnek középpontja, mely az adott gyújtópontnak a három érintőre vonatkozó tükörképén megy át.

Ha az új t_2 érintők szerkesztésénél tekintetbe vesszük, hogy a változó t_2 érintő a szilárd t , t_1 érintőket projektív pontsorok szerint metszi, úgy a tételből következik: *két projektív pontsor megfelelő pontjait összekötő véges egyenesek, egyenlő hosszuknak látszanak*

azon kúpszelet gyújtópontjaiból tekintve, mely a projektív pontsorok képződménye. Vagy «két projektív pontsor síkjában két oly pont van, melyből a két pontsort, két egyenlően-projektív konzentrikus sugársor sugarai projicziálják; e két pont gyújtópontja ama kúpszeletnek, mely a két projektív pontsor képződménye». (Összehasonlítandó a 27. alatt tárgyalttal).

135. Térjünk ismét vissza a 85—87. ábrához, melyben a kúpszelet F gyújtópontjának I tükörképe PT érintőre vonatkozólag, továbbá PF érintőnek T érintőpontja és a másik gyújtópont F' , $|ITF'|$ egyenesen fekszenek.

Míthogy PT érintő változásánál I tükörkép, $2a$ sugaru kört ír le, melynek középpontja F' , a változó T érintőpont pedig $TF=TI$ egyenlet következtében azon körtől ép oly távolságra van, mint F gyújtóponttól, mondhatjuk: *mindazon pontok, melyek egy állandó ponttól (F) és egy körtől (IFI_1) egyenlő távolságra vannak, kúpszeleten fekszenek, melynek egyik gyújtópontja a kör középpontja F' , a másik pedig az állandó pont; e kúpszelet főtengelye egyenlő a kör sugarával. A kúpszelet ellipsis vagy hyperbola a szerint, a mint az állandó pont a körön belül, vagy kívül fekszik; a kúpszelet parabola, ha a kör egyenessé fajul, és ezen egyenes a parabola vezérvonala.*

Ha F gyújtópontból PT érintőre bocsátott merőlegesnek talppontját H -val jelöljük, akkor FIF' , FHM hasonló háromszögek következtében MH félakkora, mint $F'I=2a$, tehát: *a kúpszelet gyújtópontjából (avagy gyújtópontjaiból) az érintőkre bocsátott merőlegeseknek talppontja azon körön fekszik, mely a kúpszelet főtengelye, mint átmérő fölé írható; parabolánál ezen kör a csúcserintőbe megy át.*

E tétel alapján az előbbi szerkesztéstől némileg eltérőleg szerkeszthetünk egy pontból a kúpszelethez érintőket, ha az, gyújtópontjai és főtengelye által van adva, nemkülönben a kúpszeletet mint burkolt görbét következőkép származtathatjuk. «Ha egy derékszög úgy mozog, hogy egyik szára állandó ponton megy át, csúcsa pedig egy körön marad, akkor a másik szár kúpszeletet burkol, melynek egyik gyújtópontja az állandó pont; középpontja egyszersmind a kör középpontja; főtengelyének hossza, a kör átmérője. A kúpszelet ellipsis vagy hyperbola a szerint, a mint az állandó pont a körön belül vagy kívül fekszik; a kúpszelet parabola, ha a kör, melyen a derékszög csúcsa mozog, egyenessé fajul.»

Felhasználjuk végre az utóbb talált tételt a következőnek igazolására: *a kúpszelet gyújtópontjaiból az egyes érintőkre bocsátott*

merőlegeseknek szorzata állandó és az ellipsisnél egyenlő félmelléktenegyelének négyzetével, a hyperbolánál pedig a jeltől eltekintve, a melléktenegyelyen fekvő hatványpontok féltávolságának négyzetével.

Ha ugyanis az ellipsis vagy hyperbola F, F' gyújtópontjaiból tetszőleges érintőre bocsátott merőlegesnek talppontját H, H' -nek, a főtengelyen egyik csúcsot S -nek nevezzük (90. ábra), akkor $FHS, F'H'S$ háromszögek hasonlóak, mert

$$\sphericalangle HFS = \sphericalangle H'F'S; \sphericalangle FSH = \sphericalangle F'H'S$$

(egyenlő körívek fölött nyugszanak), tehát

$$FH : FS = F'S : F'H',$$

vagy

$$FH \cdot F'H' = FS \cdot F'S;$$

de ellipsisnél ez utóbbi szorzat: $(a-c) \cdot (a+c) = b^2$, hyperbolánál pedig a jeltől eltekintve: $(c+a)(c-a) = b^2$. —

136. Láttuk az előbbieken, hogy a parabola pontjai a gyújtóponttól és a vezérvonaltól egyenlő távolságra vannak, ezért vizsgáljuk még meg, hogy a középponttal bíró kúpszeletek — ellipsis és hyperbola — pontjai, nem mutatnak-e a gyújtópont és a hozzá tartozó vezérvonal irányában hasonnemű tulajdonságot?

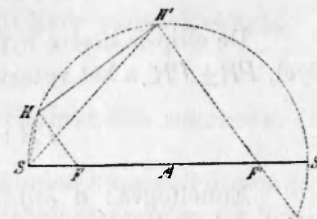
A kúpszeletek vezérvonalait, mint az egyes gyújtópontoknak polárisait értelmeztük. E szerint a vezérvonal a hozzá tartozó gyújtóponttól a kúpszelet főtengelyén levő csúcsok által harmonikusan van elválasztva és ha a kúpszelet főtengelyét és középpontkivüliségét $2a$, illetve c -vel jelöljük, úgy az ellipsis és hyperbolánál az egyes vezérvonalak távolsága a középponttól: $a^2 : c$.

Nevezzük az ellipsis vagy hyperbola tetszőleges P pontjában vont érintőnek metszőpontját F, F' gyújtópontokhoz tartozó f, f' vezérvonalakkal Q, Q' -nek; P -ből a vezérvonalakra bocsátott merőlegeseknek talppontjait R, R' -nek (91. és 92. ábra).

Q pontnak polárisa PF , mert Q, F -nek polárisán van és P , érintőpontja Q -ből a kúpszelethez vonható egyik érintőnek; QF tehát kapcsolt FP -hez és így merőleges FP -re. Ugyanezen oknál fogva $Q'F'$ is merőleges $F'P$ -re. $QFP, Q'F'P$ derékszögű háromszögek $\sphericalangle QPF = \sphericalangle Q'PF'$ következtében hasonlóak, azért

$$PQ : PF = PQ' : PF',$$

és $QRP, Q'R'P$ hasonló háromszögek folytán:



90. ábra.

mely arányokból $PR : PQ = PR' : PQ'$,

és $PR : PF = PR' : PF'$,

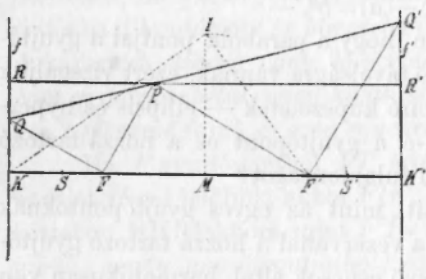
és

$$PR : PF = PR \pm PR' : PF \pm PF'.$$

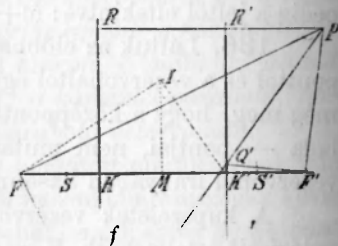
De ellipsis illetve hyperbolánál $PF \pm PF'$ egyenlő a főtengelyvel, $PR \pm PR'$ a két vezérvonal távolságával, tehát

$$PR : PF = \frac{2a^2}{c} : 2a = a : c$$

Ennélfogva: a kúpszelet tetszőleges pontjának a gyújtóponttól és a hozzá tartozó vezérvonaltól mért távolságai állandó viszonyban vannak. E viszony értéke az ellipsisnél, $a > c$ következtében, nagyobb; hyperbolánál, hol $a < c$, kisebb, a parabolánál pedig — mint láttuk — egyenlő, egygyel.



91. ábra.



92. ábra.

A kúpszelet meg van határozva egyik gyújtópontja, a hozzá tartozó vezérvonal és még egy pontja vagy érintője által (95-dik pont c) és c_1), és új pontoknak szerkesztése az előbbi tétel és annak levezetésénél alkalmazott ábra alapján egyszerűen eszközölhető.

Ha ugyanis a kúpszeletnek adott H' gyújtópontjából f vezérvonalra merőlegest bocsátunk, mely azt K -ban metszi, és FK -t H' -től mérve harmonikusan úgy osztjuk, mint a milyen az adott P pontnak távolsága F' és f -től, akkor az osztáspontok a kúpszeletnek főtengelyén fekvő csúcspontok. Ha továbbá P pont helyett a kúpszeletnek p érintője van adva, mely f vezérvonalat Q -ban metszi, akkor QF' -re F -ben emelt merőleges p érintőnek P érintőpontján megy át, mely P ponttal a szerkesztés az előbbire van visszavezetve.

III. FEJEZET.

Kúpszelet-sorok és seregek projektív vonatkozása.

18. §. Két kúpszelet közös elemei. A Steiner-féle rokonság.

137. Tanultuk az előbbieken, hogy minden kúpszelet öt pontja által meg van határozva, és hogy négy ponton át végtelen sok kúpszelet fektethető. Ebből következik, hogy két kúpszelet egymást négy pontban metszheti. Hogy a metszéspontok száma nem lehet páratlan, tehát sem egy, sem három, azt ily módon szokás kimutatni.

Minden kúpszelet a sikot két részre osztja, melynek határvonalát maga a kúpszelet képezi; e részek egyikében azon pontok fekszenek, melyekből valós érintők nem húzhatók a kúpszelethez, ezekről azt mondjuk, hogy a kúpszeleten belül vannak; a másik rész pontjából valós érintők vonhatók a kúpszelethez, és ez a kúpszeleten kívül fekszik.

Ha a két kúpszelet k , k' egy közös A ponttal bír, akkor ezen pontnak két szomszédos pontja az egyik kúpszeleten, pl. k' -en, a másik kúpszelet által meghatározott két különböző síkrészben fekszik; e szerint k -n vannak pontok, melyek k -n kívül és olyanok, melyek k -n belül fekszenek. Minthogy a kúpszelet zárt görbe, tehát az A pontból kiinduló és k' -en haladó pont ismét A -ba jut, ezért ha k' -en A -ból kiinduló pont k -n belül fekvő síkrészben halad, nem juthat a k -n kívül fekvő részbe a nélkül, hogy a határon t. i. k görbén még egyszer át ne menne; ezen átmeneti pont képezi k' és k -nak új metszéspontját. Ha azonban a k' -en tova mozgó pont még egyszer azon síkrészbe jutna, mely k -n belül fekszik, vagyis k' , k -t harmadízben metszené, akkor ismét ki kellene onnan kerülnie, hogy A -val egyesülhessen, a k -n kívül fekvő és A -val szomszédos ponton át.

Ha k , k' kúpszeleteknek egy tetszőleges α kúpszeletre vonatkozó polár kúpszeleteit megszerkesztjük (81.), akkor ezen polár kúpszeletekről is mondhatjuk, hogy 0, 2 vagy 4 metszéspontjuk lehet. Azonban minden ily metszéspontnak α -ra vonatkozó polárisa, k , k' -nek közös érintője; tehát k , k' kúpszeletek közös érintőinek száma is páros. E szerint:

Két ugyanazon síkban fekvő kúpszelet valós metszéspontjainak száma mindig páros, tehát: 0, 2 vagy 4. | *közös érintőinek száma mindig páros, tehát: 0, 2 vagy 4.*

138. Két kúpszelet közös pontjai és érintőinek szerkesztése szoros összefüggésben áll azon pontok meghatározásával, melyeknek polárisai mindkét kúpszeletre vonatkozólag ugyanegy egyenesbe esnek, és oly egyenesek meghatározásával, melyeknek pólusai egy pontba esnek.

Hogy az ily pontokról fogalmat szerezzünk magunknak, nevezük k, k' kúpszeletek síkjának tetszőleges pontját P -nek; ennek k, k' -re vonatkozó polárisát p, p' -nek ezek metszéspontját Q -nak. Q pont, mint könnyen belátható, P -hez kapcsolt pólus mindkét kúpszeletet illetőleg, és viszont Q -hoz, P a kapcsolt pólus, mert Q -nak polárisai egymást P -ben metszik. Ily két pontot mint P, Q : közös kapcsolt pólusnak lehet nevezni.

Vizsgáljuk meg, mily geometriai helyet ír le a P -hez mindkét kúpszeletre vonatkozólag kapcsolt pólus Q , mialatt P a síknak tetszőleges g egyenesén végig halad. Ha g -nek k és k' -re vonatkozó pólusa G, G' látható, hogy: mialatt P, g egyenesen tova mozog, P -nek k, k' -re vonatkozó polárisai p , illetve p' ; G, G' körül két sugársort írnak le, mely külön-külön a pontsorról involúciós fekvésű, tehát egymás között projektív. E két projektív sugársor képződménye γ kúpszelet, melynek származásánál fogva minden Q pontja P -hez kapcsolt pólus a két kúpszeletet k, k' -et illetőleg. E szerint:

«Ha valamely síkban két kúpszelet van adva, akkor a sík minden P pontjához általában egy Q pont tartozik, mely mindkét kúpszeletre vonatkozólag kapcsolt pólus; mialatt P egy tetszőleges g egyenesen végig halad, P -hez mindkét kúpszeletre vonatkozólag kapcsolt pólusok egy γ kúpszeletet írnak le, mely átmegy g -nek k, k' -re vonatkozó pólusán G, G' ponton.»

Vegyünk fel már most a két kúpszelet síkjában két egyenest g, g_1 -et; e két egyeneshez két kúpszelet γ, γ_1 tartozik, mely g, g_1 pontjaihoz mindkét kúpszeletre vonatkozó kapcsolt pólusokat tartalmazza. g, g_1 egyenesek közös P_0 pontjához kapcsolt Q_0 pólus, γ és γ_1 kúpsze-

leten fekszik, tehát γ, γ_1 egymást Q_0 valós pontban metszi; ennél fogva még egy vagy három valós közösponttal X, Y, Z -vel bír. Minthogy X pont γ -n fekszik, a hozzá mindkét kúpszeletre vonatkozó kapcsolt pólus g -n lesz, de minthogy X, γ_1 -nek is pontja, g_1 -en is létezik X -hez mindkét kúpszeletre vonatkozólag kapcsolt pólus; e két g és g_1 -en fekvő és X -hez mindkét kúpszeletre vonatkozólag kapcsolt pólus összekötő egyenese x : X pontnak polárisa k és k' kúpszeleteket illetőleg. Ugyanez mondható γ, γ_1 más két metszéspontjáról Y és Z -ről, ha azok valósak, t. i.: Y és hasonlóképp Z pontnak k és k' -re vonatkozó polárisai egy és ugyanazon egyenesbe y , illetve z -be esnek.

Könnyen belátható, hogy az X, Y, Z pontok és x, y, z egyenesek által képezett háromszögek egybe esnek. Ha ugyanis X és Y pontnak polárisai k, k' kúpszeletekre vonatkozólag x, y egyenesek, úgy ezek metszéspontjának, pl. U -nak polárisa, amazoknak összekötő egyenese $|XY| \equiv u$, mely u egyenes minden pontjához kapcsolt pólus U pont volna. De (u, g) metszésponthoz k, k' -re vonatkozó kapcsolt pólus γ -n; (u, g_1) metszésponthoz kapcsolt pólus γ_1 -en fekszik; e szerint U pont γ, γ_1 -nek egy új metszéspontja volna. γ, γ_1 kúpszeleteknek azonban Q_0, X, Y, Z pontjuk közös, nem metszhetik tehát egymást egy új U pontban; e végből x, y metszéspontja U egybeesik Z -vel, és így $|XY| \equiv u$ egyenes, z egyenessel.

Vizsgálatunkat egybefoglalva így fejezhetjük ki:

Két kúpszelet közös síkjában általában három oly pont van, melyek mindegyikének polárisa mindkét kúpszeletre vonatkozólag egy egyenesbe esik, mely pontokhoz tehát végtelen sok kapcsolt pólus tartozik; azon három pont és annak három polárisa, egy és ugyanazon háromszögnek, a kúpszeletek közös polárháromszögének szögpontja, illetve oldala. E közös polárháromszögnek egyik szögpontja és átellenes oldala mindig valós, a másik két szögpont és így a másik két oldal képzetes is lehet.

139. Vizsgáljuk meg, hogy a két kúpszelet k, k' mily helyzeténél és valós vagy képzetes mivoltánál, lesznek ezen közös polárháromszög oldalai valósak vagy részben képzetesek.

Ha k, k' kúpszelet közös polárháromszögének XYZ -nek valós szögpontja X , akkor Y, Z szögpontok X -nek polárisán x -en fekszenek és azon két involúziós pontsornak közös kapcsolt pontpárját képezik, melyet a két kúpszeletnek kapcsolt pólusai x -en indukálnak. Ha ezen involúziós pontsorok mindegyike, vagy csak egyike elliptikus természetű, akkor azoknak mindig van közös kapcsolt pontpárjuk,

ha pedig mindkét involucziós pontsor hyperbolikus, akkor azon egy esetben, a midőn a kettőspontok egymást elválasztják, nincs a két involucziós pontsornak közös kapcsolt pontpárja. Ennélfogva:

α) Ha mindkét kúpszelet k, k' , vagy csak az egyik képzetes, a két kúpszeletnek közös polárháromszöge valós, mert X -nek közös polárisán x -en mindig van két valós közös kapcsolt pontpár Y, Z .

β) Ha a két kúpszelet egymást négy valós pontban metszi; a négy metszőpont által meghatározott teljes négyszög átlóháromszöge, képezi a két kúpszeletnek valós polárháromszögét.

β_1) Ha a két kúpszelet négy közös valós érintővel bír, úgy ezen érintők által képezett teljes négyoldal átlóháromszöge, képezi a két kúpszeletnek valós polárháromszögét.

γ) Ha a két kúpszelet nem bír valós közös pontokkal, mely eset akkor következik be, ha az egyik kúpszeletnek összes pontjai a másikon kívül, vagy pedig belül fekszenek, tehát X -nek polárisán x -en a két kúpszelet kapcsolt pólusai által indukált involucziós pontsorok kettőspontjai, vagyis a kúpszeleteknek metszőpontjai x -szel, egymástól nincsenek elválasztva, a két kúpszeletnek közös polárháromszöge valós.

γ_1) Ugyanez mondható, ha a két kúpszelet nem bír valós közös érintőkkel, mert a két kúpszeletnek tetszőleges α kúpszeletre vonatkozó polár kúpszeletei ezen esetben nem bírnak valós közös metszőpontokkal. Ekkor tehát, γ) szerint, a polár kúpszeleteknek közös polárháromszöge valós, melynek α -ra vonatkozó polár ábrája: az eredeti két kúpszelet közös polárháromszöge.

δ) és δ_1) Ha végre a két kúpszelet egymást csak két valós pontban metszi, akkor X pont szükségkép a metszőpontok összekötő egyenesén s -en fekszik és a metszőpontoktól x által harmonikusan van elválasztva. Mert (s, x) ponthoz, mint x -en fekvő ponthoz kapcsolt pólus X -ben van, és mint s -en fekvő pont, k, k' -nek s -en levő metszőpontjaitól (s, x) által harmonikusan van elválasztva.

Ezen X pont szükségkép a két metszőponttal határolt közör kívül, (s, x) pedig azon belül fekszik, úgy hogy x a metszőpontokat elválasztja egymástól. Ha ugyanis x nem metszené k, k' -et valós pontokban, x -en találnánk két valós közös kapcsolt pólust Y, Z -t. XYZ ekkor a két kúpszelet közös polárháromszöge volna és ezért X, Y pontok harmonikusan volnának elválasztva a kúpszeletek által. Ámde $|XY|$ és k metszőpontjai közül egyik k' -en belül, a másik azonkívül van, és hasonlóképp $|XY|$ és k' metszőpontjai, k által el vannak választva. Minthogy e szerint $k, |XY|$ és $k', |XY|$ metszőpontjai egy-

mást elválasztják, nem létezik oly valós pontpár X, Y, melyet azok harmonikusan választanak el. X pont tehát k, k' két metszőpontjával határolt közön kívül (s, x) pedig azon belül fekszik. E végből x-en a kapcsolt pólusok által indukált involúciós pontsorok hiperbolikus természetűek, melyeknek kettőspontjai egymást elválasztják, tehát az involúciós sorok nem bírnak közös kapcsolt pontpárral.

Ha tehát két kúpszeletnek csak két valós közös pontja vagy csak két valós közös érintője van, a közös polárháromszög két szögpontja és ezeknek átellenes oldalai képzetesek.

140. Két kúpszelet közös polárháromszöge azon nevezetes tulajdonsággal bír, hogy a kúpszeleteknek közös kapcsolt pólusai a polárháromszög szög- | polárisai a polárháromszög oldalaiból involúciós pontsorok- | lait involúciós pontsorok szerint kal projicziáltnak. | metszik.

Hogy ezt bizonyítsuk, nevezzük ismét g egyenesen változó P_i pont kapcsolt pólusát Q_i -nek; Q_i pontok geometriai helyét γ -nak; a közös polárháromszög egyik szögpontját X-nek, az ennek átellenes x oldal metszőpontját g-vel P_x -nek, mely P_x -hez γ kúpszeleten kapcsolt pólus, X pont.

Minthogy P_i és P_x , kapcsolt pólusai Q_i és X, a HESSE-tétel szerint

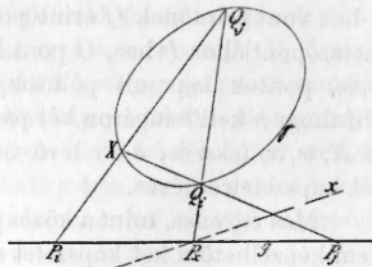
$$\begin{array}{l} |P_i P_x| \text{ és } |Q_i X| \text{ metszőpontja } P_j, \text{ és} \\ |P_i X| \text{ " } |P_x Q_i| \text{ " } Q_j \end{array}$$

is kapcsolt pólus, és mert P_j pont g-n fekszik: Q_j, γ kúpszeleten lesz.

Ha P_i, g egyenesen tova mozog, Q_i, Q_j pontok szintén változnak γ -án, P_j pedig g-n; P_x és X pontok azonban állandók maradnak, és mert Q_i, Q_j pontok összekötő egyenese mindig átmegy P_x -en: P_i, Q_i pontok X-ből oly $|XQ_j|, |XQ_i|$ sugárpárrakkal projicziáltnak

melyek involúciós sugársort képeznek (77). Ezen involúciós sugársor kettőssugarai, P_x -ből γ -hoz vonható érintők érintőpontján mennek át, tehát csak akkor valóságosak, ha $P_x \equiv (g, x)$ pont γ -án kívül fekszik.

Azon három involúciós sugársor, mely két kúpszelet kö- | pontsor, melyben a két kúpszelet



93. ábra.

zök kapcsolt pólusait a közös polárháromszög szögpontjaiból prociálja, vagy mindegyike hyperbolikus vagy egyik hyperbolikus, a másik kettő elliptikus természetű. A hyperbolikus természetű involucziós sugársor kettőssugarain, a két kúpszelet kapcsolt pólusai ugyanazon involucziós pontsört indukálják.

közös polárisai, a közös polárháromszög oldalait metszik, vagy mindegyike hyperbolikus, vagy egyik hyperbolikus, a másik kettő elliptikus természetű. A hyperbolikus természetű involucziós pontsör kettőspontjain átmenő kapcsolt polárisok mindkét kúpszeletre nézve, ugyanazon involucziós sugársort képezik.

Tetszőleges g egyenes a két kúpszelet közös polárháromszögének szögpontjai közül vagy csak egyet választ el a többi kettőtől, vagy egyet sem; tehát g egyenes és XYZ háromszög oldalainak P_x , P_y , P_z metszéspontjai közül vagy egy, vagy mind a három a szögpontokon túlhosszabbított \overline{YZ} , \overline{ZX} , \overline{XY} oldalakon fekszik. Azon γ kúpszelet, melynek pontjai g pontjaihoz a két kúpszeletet, illetőleg kapcsolt pólusok: XYZ háromszög körül van írva; és azon involucziós sugársoroknak kettőssugarai, melyeknek sugárpárja X , valamint Y és Z pontokból, a két kúpszeletre vonatkozó kapcsolt pólusokat projiciálják P_x , valamint P_y és P_z pontokból γ -hoz vonható érintők érintőpontjain mennek át. Minthogy P_x , P_y , P_z pontok közül, az előbbi szerint, csak egy, vagy mind a három γ -án kívül fekszik: a tetel első része be van bizonyítva.

Ha s , az X pontból kiinduló egyik valós kettőssugár, mely P_x -ből γ -hoz vont érintőnek Q érintőpontján megy át, akkor $|XQ| = s$ és g metszéspontjához P -hez, Q pont közös kapcsolt pólus; másrészt X és (s, x) pontok kapcsolt pólusok mindkét kúpszeletre vonatkozólag. Minthogy s kettőssugáron két pár közös kapcsolt pólus: Q , $P \equiv (s, g)$, és X , (s, x) fekszik; s -en levő összes kapcsolt póluspárak közösek a két kúpszeletre nézve.

Más egyenes, mint a közös polárháromszög szögpontjain átmenő nem képzelhető a két kúpszelet síkjában, melyen a két kúpszelet kapcsolt pólusai ugyanazon involucziós pontsört indukálnák. Mert ha u egy ily egyenes volna, mely a közös polárháromszög x oldalát (u, x) pontban metszené, a nélkül, hogy annak X , Y , Z szögpontjain átmenne, akkor (u, x) ponthoz mindkét kúpszeletre vonatkozólag kapcsolt X pontnak u -n kellene feküdni, vagy mi ugyanaz, u -nak X -en kellene átmenni. De az X -en átfektetett tetszőleges $|XQ_jP_i|$ egyenes, mely γ -át Q_j -ben, g -t P_i -ben metszi (93. ábra) olyan, hogy P_i -hez kap-

csolt pólus nem fekszik $|XQ_jP_i|$ -n, hanem γ -nak egy másik pontjában, t. i. $|XQ_iP_j|$ egyenesen, kivéven ha $|XQ_jP_i|$ és $|XQ_iP_j|$ egybe esik, vagyis ha azon közös egyenes kettőssugara a kapcsolt pólusokat X ből projicziáló involucziós sugársornak. Ennélfogva mondhatjuk:

Két kúpszelet síkjában általában hat, vagy két oly valós

egyenes van, melyen a két kúpszelet kapcsolt pólusai ugyanazon involucziós pontsort indukálják; ezen egyenesek kettejével átmennek a két kúpszelet közös polárháromszögének szögpontjain, és kettőssugarai azon involucziós sugársoroknak, melyek a kúpszeletekre vonatkozó közös kapcsolt póluspárat a nevezett polárháromszög szögpontjaiból projicziálják.

pont van, melyen átmenő és mindkét kúpszeletre vonatkozó kapcsolt polárisok ugyanazon involucziós sugársort képezik; e pontok kettejével a két kúpszelet közös polárháromszögének oldalain fekszenek és kettőspontjai azon involucziós pontsoroknak, melyeknek pontpárjai az összes kapcsolt polárisoknak metszőpontjai a nevezett polárháromszög oldalaival.

141. Könnyen kimutatható, hogy a midőn két kúpszelet közös polárháromszögének csak egy szögpontja és ennek átellenes oldala valós, akkor azon involucziós sugársor, melynek kapcsolt sugara a két kúpszelet közös kapcsolt pólusait, azon valós szögpontból projicziálják, és azon involucziós pontsor, mely szerint a kapcsolt polárisok azon valós oldal által metszetnek: mindenkor hyperbolikus természetű.

Nevezzük a két kúpszelet közös polárháromszögének valós szögpontját és oldalát X , x -nek; azon az X ponton átmenő kúpszeletet, melyen g egyenes pontjaihoz kapcsolt pólusok fekszenek γ -nak.

Minthogy a közös polárháromszög két szögpontja Y , Z , mely x -en fekszik képzetes, ezen Y , Z pontok pedig γ és x -nek metszőpontjai: x nem metszi γ -át valós pontokban; tehát x -nek minden pontja és így g és x metszőpontja is γ -án kívül fekszik. (g , x) metszőpontból e végből két valós érintő húzható γ -hoz, melynek valós érintőpontjai X -ből az említett involucziós sugársor valós kettőssugaraival projicziáltnak.

A dualis tétel bebizonyítása hasonlóképp történik, és mert ezen esetben, a midőn a közös polárháromszögnek csak X szögpontja és annak átellenes x oldala valós, a két kúpszelet két valós és két képzetes metszőponttal bír, melyek azon sugársornak egy-egy valós kettőssugarain fekszenek: az x -en fekvő és a tétel által kifejezett involucziós pontsor kettőspontjainak egyikéből a kúpszeletekhez két valós, a másikkól két képzetes érintő húzható. Ennélfogva: *ha két kúpszeletnek*

két valós és két képzetes metszópontja van, akkor azoknak közös érintőjei közül is kettő valós, kettő pedig képzetes.

142. Két kúpszelet k, k' közös pontjai és érintőinek szerkesztése a tárgyalta szerint következőben áll:

«Miután két tetszőleges g, g_1 egyenes pontjaihoz kapcsolt pólusokból álló geometriai hely, vagyis γ, γ_1 kúpszelet meg lett szerkesztve, meghatározatnak ezeknek közös pontjai Q_0, X, Y, Z ; ezek közül Q_0 , mint (g, g_1) ponthoz kapcsolt pólus, és még egy metszópont, pl. X mindig valós. XYZ háromszög $|YZ|, |XZ|, |XY|$ oldalai g egyenest P_x, P_y, P_z pontokban metszik, melyekből γ -hoz érintők huzatnak; az első két érintőpontot X -ből; a másik kettőt Y -ből, az utolsókat Z -ből projekciálólugarak, a két kúpszeletnek hat közös szelői, melyek egymást a két kúpszelet négy metszópontjában metszik.

Ha továbbá tetszőleges G, G_1 pontokon átmenő egyenesekhez kapcsolt polárisok I, I_1 kúpszeletet burkolnak, úgy ezeknek egy közös érintője $|GG_1|$ -hez kapcsolt poláris; I, I_1 tehát általában még három közös érintővel x, y, z -vel bír, melyek egybeesnek az előbbi XYZ háromszög oldalaival. $|GX|, |GY|, |GZ|$ egyenesek I kúpszeletet két-két pontban metszik; az első két metszópont érintői x -et, a másik két metszóponté y -ot, az utolsó két metszópont érintői z -t; k, k' kúpszeletek közös érintőinek metszópontjaiban metszik.»

Mint látjuk két kúpszelet négy közös pontjának és négy közös érintőinek szerkesztése, mely *negyedrendű feladat*, vissza van vezetve két kúpszelet γ, γ_1 három közös pontjának, vagy I, I_1 kúpszelet három közös érintőinek szerkesztésére, melyeknek egy közös pontja, illetve egy közös érintője ismeretes, mely utóbbi *harmadrendű feladat*, és csupán körző és vonalzó használatával nem eszközölhető. A további szerkesztés, mely pontból kúpszelethez való érintők huzásán, és egyenes és kúpszelet metszópontjának szerkesztésén alapszik, már *másodrendű feladat* és azért körző és vonalzóval megoldható. A szerkesztésnél előforduló harmadrendű feladat a kúpszeletek általános helyzeténél mindig az marad és csak azoknak különös helyzeténél válhatik szét első- és másodrendű feladattá.

(KORTUM * megmutatta, hogy ha a síkban egy kúpszelet van rajzolva úgy, hogy annak metszópontjai tetszőleges kör vagy egyenessel ismereteseznek tekinthetők, hogyan lehet ezen megrajzolt

* KORTUM: Geometrische Aufgaben dritten und vierten Grades. Bonn 1868.

kúpszelet, és körző és vonalzó segélyével negyed- és harmadrendű feladatokat megoldani.) (Függelék 5. és 6.)

143. Ha k, k' kúpszelet közös polárháromszögének egy szög-pontja és így annak átellenes oldala x , mint X -nek polárisa a két kúpszelet bármelyikét illetőleg ismeretes, akkor a közös pontok és érintők szerkesztése körző és vonalzóval következőképp történik:

«A sik két tetszőleges pontjához P, P_1 -hez felkeressük a közös kapcsolt pólusokat Q, Q_1 -et; továbbá azon involúciós sugársor s, t kettőssugarait, melyeknek kapcsolt sugárpárjai $|XP|, |XQ|; |XP_1|, |XQ_1|$; ezen s, t kettőssugarakon fekszenek a metszéspontok, tehát ezeknek kell metszéspontjait a kúpszeletek egyikével szerkeszteni (55).

Ha azonban az involúciós sugársor elliptikus természetű volna, akkor a közös polárháromszögnek másik két szögpontja Y, Z szükségkép valós, és ezek a kúpszeletek által x -en indukált involúciós pontsorok közös pontpárjai. E pontok egyikéből $P, Q; P_1, Q_1$ pontpárok hyperbolikus természetű involúciós sugársorok által projiciáltnak és ezeknek kettőssugarain fognak a keresett (képzetes) metszéspontok feküdni.

Hogy k, k' kúpszeleteknek közös érintőit megszerkesszük x -et metszéshez hozzuk két tetszőleges egyenes p, p_1 -gyel és azokhoz kapcsolt egyenessel q, q_1 -gyel, és felkeressük $(x, p), (x, q); (x, p_1), (x, q_1)$ kapcsolt pontpárakkal bíró involúciós sorok kettőspontjait S, T -t; e pontokból k, k' -hez vonható érintők képezik a kúpszeletek közös érintőit.

Ha azon involúciós pontsornak kettőspontjai képzetesek, akkor k, k' -nek van x -en közös kapcsolt pontpárja Y, Z és a közös polárháromszögnek $|XZ| \equiv y, |XY| \equiv z$, oldalai közül egyik $p, q; p_1, q_1$ kapcsolt egyeneseket szükségkép oly pontpárakban metszi, melyek egymástól nincsenek elválasztva, tehát az általuk meghatározott involúciós pontsor kettőspontjai valósak; e valós kettőspontokból kiinduló érintők képezik a két kúpszelet közös érintőit.»

144. Az előbbi tárgyalásoknál felvettük, hogy azon γ, γ_1 kúpszeletek, melyek g, g_1 egyenes pontjaihoz k, k' kúpszeletre vonatkozó kapcsolt pólusok fekszenek, legfőlebb négy közös ponttal bírnak. γ és γ_1 azonban végtelen sok közös ponttal is bírhat a nélkül, hogy minden pontja közös lenne, t. i. ha γ és γ_1 két-két egyenessé fajul és az első két egyenes közül egyik összeesik a másik két egyenes egyikével. Ezen eset bekövetkezik, ha k, k' kúpszelet egymást két, valós

vagy képzetes pontban érinti, vagyis ha egy X pont polárisa mindkét kúpszeletre nézve ugyanazon x egyenes, és az x -en fekvő kapcsolt pólusok, tehát egyszersmind X -en átmenő kapcsolt polárisok, mindkét kúpszeletre vonatkozólag ugyanazon involucziós sort képezik.

Hogy ezt beláthassuk, nevezzük tetszőleges g egyenesnek metszőpontját x -szel, (g, x) -nek; g pólusát k, k' -re vonatkozólag G, G' -nek. (g, x) pont polárisa k -ra vonatkozólag $|GX|$, k' -re vonatkozólag $|G'X|$ egyenes; de minthogy (g, x) pont x -en fekszik, (g, x) -nek a két kúpszelet különös helyzeténél fogva ugyanazon $|GX| \equiv |G'X|$ egyenes, polárisa. Ha továbbá P pont g -nek tetszőleges pontja, akkor $|XP|$ -nek pólusa mindkét kúpszeletre vonatkozólag ugyanazon x -en fekvő Q pont, mely tehát P -hez kapcsolt pólus k, k' -re nézve. g egyenes összes pontjaihoz kapcsolt pólusok e szerint x -be esnek, kivéven (g, x) pontot, melyhez kapcsolt pólusok $|XGG'|$ egyenes összes pontjai; γ kúpszelet tehát x és $|XGG'|$ egyenessé fajul. Ugyanez mondható valamennyi más γ kúpszeletről is, t. i., hogy két egyenessé fajulnak, melyeknek egyike x egyenes.

Az egymást két pontban érintő, — úgynevezett kettős érintésű k, k' kúpszeletek tehát végtelen sok közös polárháromszöggel bírnak, melyeknek egyik szögpontja az érintőpontokon átmenő x egyenes pólusa X , a többi két-két szögpont pedig x egyenes bármely kapcsolt pólus párja lehet.

145. E §-ban tanult főfeladatnál, «két kúpszelet közös elemeinek szerkesztésénél» egyszerűbb a következő feladat:

Adva van két kúpszeletnek k, k' -nek két közös pontja A, B , vagy csak e két valós vagy képzetes pont összekötő egyenese s , és még minden kúpszeletnek három-három pontja C, D, E , illetve C', D', E' ; szerkesztendő a másik két metszőpont, és a közös érintők.

s -nek a két kúpszeletre vonatkozó pólusait összekötő egyenes x : a két kúpszelet közös polárháromszögének egyik oldala; ennek pólusa X , a közös polárháromszög egyik szögpontja. Meglévén X és x , a feladat ezzel vissza van vezetve az előbbi szerkesztésre.

Lehet azonban a feladat megoldásánál más eljárást is követni.

Ha $|CC'|$ egyenes a két kúpszeletet és $|AB| \equiv s$ -t: $C, C_1; C', C'_1$; és F -ben metszi, akkor a két kúpszelet hiányzó metszőpontjait összekötő t egyenes, $|CC'|$ -nek azon P' pontján megy át, mely $C, C_1; C', C'_1$ kapcsolt pontpárakkal adott involuczióban P -hez kapcsolt. Hasonlókép mondható: ha $|DD'|$ egyenes a két kúpszeletet és s -et: $D, D_1; D', D'_1$, és Q -ban metszi, és $D, D_1; D', D'_1; Q, Q'$ kapcsolt pontpárak

involucziót képeznek, akkor t egyenes Q' ponton megy át; tehát a két új metszőpont összekötő egyenese: $|P'Q'| \equiv t$. — s és t egyenes X metszőpontja a két kúpszelet közös polárháromszögének egyik szögpontja.

E szerkesztés a DESARGUES-féle tételen alapszik, mely mint tanultuk, így szól: minden általános helyzetű egyenes, négy ponton átmenő összes kúpszeleteket egy involucziós pontsor kapcsolt pontpárjaiban metszi.

146. A szerkesztés némileg egyszerűbb, ha k, k' kúpszeletnek három metszőpontja ismeretes; a feladat ekkor így szól:

Adva van két kúpszeletnek három közös pontja, szerkesztessék a negyedik metszőpont, ha a kúpszeleteknek a metszőpontokon kívül még két-két pontja ismeretes.

Nevezzük k, k' kúpszelet három közös pontját A, B, C -nek, k, k' -nek még két-két pontját $E, F; E', F'$ -nek.

Ha $|AB| \equiv s$ egyenes pólusai k, k' kúpszeletet illetőleg σ, σ' , akkor azon X pont, mely A, B pontokat $|\sigma\sigma'| \equiv x$ egyenestől harmonikusan elválasztja: a két kúpszelet polárháromszögének egyik szögpontja, x pedig annak átellenes oldala. Ama D -pont, mely X, x -et C -től harmonikusan választja el: a kúpszeleteknek negyedik közös pontja.

A szerkesztés ily módon is végezhető:

Nevezzük $|EE'|$ egyenes metszőpontjait $k, k' |AB|$, és $|AC|$ -vel: E, E_1 ; illetve E', E'_1 ; G és H -nak, és ez utóbbi két ponthoz kapcsolt pontot az $E, E_1; E', E'_1$ kapcsolt pontpárakkal meghatározott involucziós sorban G', H' -nek. $|CG'|$ és $|BH'|$ egyenesek közös D pontja, a kúpszeletnek negyedik metszőpontja. E szerkesztés szintén a DESARGUES-féle tételen alapszik.

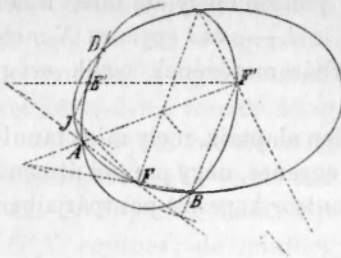
Lehet azonban e feladat megoldásánál így is eljárunk (94. ábra): Szerkesztünk F -en át oly FI sugarat, hogy:

$$F(ABCI) = F'(ABCE'),$$

és felkeressük FI -nek második metszőpontját I -t, és $E'I$ -nek szintén második metszőpontját D -t, k -val. Minthogy

$$D(ABCE') = D(ABCI) = F(ABCI) = F'(ABCE'),$$

A, B, C, E' pontok D és F' -ből oly négy sugárral projicziáltatnak, melyeknek kettősviszonya egyenlő, tehát D pont az A, B, C, E', F' pontokon átmenő kúpszeleten fekszik.



94. ábra.

Mind a három szerkesztési mód, melyet ezen feladat megoldásánál követtünk, csak a vonalzó használatát kívánja, és ezért a feladat vonalós.

147. Geometriai vizsgálatoknál gyakran előfordul a következő feladat, melyet az imént mutatott, szerkesztések alapján megoldhatunk. A feladat így hangzik:

Adva van a síkban öt sugár a, b, c, d, e , mely ugyanazon T ponton megy át, és még öt pont A, B, C, D, E ; szerkesztendő X pont úgy, hogy:

$$(abcde) \frown X(ABCDE).$$

A megoldás következő: D ponton át $|DF|$ és E ponton át $|EG|$ egyenest szerkesztünk, melyre nézve

$$(abcd) \frown D(ABCF) \text{ és } (abce) \frown E(ABCG).$$

A, B, C, D ponton átmenő és $|DF|$ -et D -ben érintő k kúpszeletnek minden pontja A, B, C, D pontokat oly négy sugárral projicziálja, melyeknek kettősviszonya: $(abcd)$; A, B, C, E ponton átmenő és $|EG|$ -t E -ben érintő k' kúpszeletnek minden pontja A, B, C, E pontokat oly négy sugárral projicziálja, melyeknek kettősviszonya: $(abce)$; k, k' kúpszeletnek negyedik metszéspontja X , a kívánt tulajdonsággal bír.

148. Végül még egyszer ki akarjuk emelni ezen § főfeladatánál előforduló vonatkozását a sík pontjai és egyeneseknek.

Láttuk, hogy ha egy síkban két általános helyzetű kúpszelet k, k' van adva, akkor a sík minden P pontjához egy Q pont tartozik, mely P -hez k, k' kúpszeletekre vonatkozólag kapcsolt pólus.

Láttuk továbbá, hogy a síkban általában három oly pont van, — mi azokat X, Y, Z -vel jelöltük, — melyhez nem egy, hanem végtelen sok pont tartozik, mint kapcsolt pólus, s melyek egy-egy egyenesen x, y, z -n fekszenek; s viszont ezen egyeneseknek, pl. x -nek minden pontjához egy pont, X , tartozik mint kapcsolt pólus. E három pont és e három egyenes egy és ugyanazon háromszögnek, k, k' kúpszelet közös polárháromszögének szögpontja és oldala, mely háromszögnek egy szögpontja és átellenes oldala mindig valós, a többi két-két alkotó rész egyidejűleg képzetes is lehet.

Kimutattuk továbbá, hogy ha P pont egy g egyenest ír le, akkor a hozzátartozó Q pontok egy γ kúpszeleten lesznek, mely XYZ háromszög körül van írva és viszont minden az XYZ háromszög körül írható kúpszelet pontjaihoz k, k' -re vonatkozó kapcsolt pólusok egy egyenesen (tulajdonképp XYZ háromszög oldalain és még egy egyenesen) fekszenek. Mert ha XYZ háromszög körül írt γ kúpszeletnek Q_1, Q_2 pontjához P_1, P_2 tartozik, mint kapcsolt pólus, akkor $|P_1P_2| \equiv g$ egyenes összes pontjaihoz kapcsolt pólusok: X, Y, Z, Q_1, Q_2 pontokon átmenő kúpszeleten, tehát γ -n fekszenek.

Ebből következik továbbá, hogy tetszőleges P_0 ponton átmenő összes g egyenesekhez oly γ kúpszeletek fognak tartozni, melyek négy ponton: X, Y, Z és F_0 -hoz kapcsolt póluson Q_0 -on mennek át.

A midőn g , az XYZ háromszög egyik szögpontját pl. X -et tartalmazza: γ elfajul két egyenessé, melyeknek egyike XYZ háromszög $|YZ| \equiv x$ oldala, a másik pedig g tetszőleges P pontjához kapcsolt Q pontnak összekötő egyenese X -szel.

A pontoknak ilyenemű vonatkozását a síkban, melynél minden P pontnak egy Q pont, és tetszőleges egyenesen fekvő pontoknak, három állandó ponton átmenő kúpszelet felel meg: «Steiner-féle rokonság»-nak nevezik.* STEINER JAKAB (1796—1863.)

A STEINER-féle rokonság a síkban legegyszerűbben állapítható meg, ha k, k' két valós egyenespárra elfajult kúpszeletnek vétetik fel. A közös polárháromszög ekkor a két egyenespár $ABCD$ metszéspontjai által képezett teljes négyszögnek átlóháromszöge. Két kapcsolt pólus, vagy másképp kifejezve, két megfelelő pont ekkor a teljes négyszög három pár átellenes oldalaitól harmonikusan van elválasztva (53).

Ha g egyenes a négyszög oldalait hat pontban metszi, és mi ezen hat ponthoz az egyes oldalakon a szögpontoktól harmonikusan elválasztott hat pontot megszerkesztjük, akkor g -nek megfelelő γ kúpszelet átmegy: ez utóbbi hat ponton; a négyszög átlóháromszögének szögpontjain; és azon involúciós pontsor valós vagy képzetes kettőspontjain, melynek három kapcsolt pontpárja g egyenes és a négyszög átellenes oldalainak metszéspontja.

* A dualisan megfelelő vonatkozásnál, a sík p egyenesének egy q egyenes, G pontnak egy az XYZ háromszög oldalait érintő Γ kúpszelet felel meg.

19. §. A kúpszeletsorról.

149. Tudjuk az előbbiekből, hogy négy ponton át végtelen sok kúpszelet fektethető. A pontok valós vagy képzetes mivoltukra nézve lehetnek:

- a) mind a négy pont valós;
- b) két pont valós, kettő képzetes és ez utóbbiak egy elliptikus természetű involucziós pontsor képzetes kettőspontjai.
- c) mind a négy pont képzetes, melyek két különböző tartón fekvő elliptikus természetű involucziós pontsorok képzetes kettőspontjai.

Mindazon kúpszeletek, melyek ily négy ponton átmennek: *kúpszeletsort* képeznek; a négy pontot, melyen a kúpszeletsornak minden egyes kúpszelete, vagyis a sornak minden egyes eleme átmegy, a *kúpszeletsor alappontjainak* nevezik.

Mínthogy két kúpszelet egymást mindig oly pontokban metszi, melyek egy kúpszeletsornak alappontjai lehetnek, azért mondhatjuk, *egy kúpszeletsor két kúpszelet által teljesen meg van határozva.*

Láttuk a 13. §-ben, hogy a sik minden pontján *egy* kúpszelet fektethető át, mely alappontjai által meghatározott kúpszeletsorhoz tartozik; tehát a kúpszeletsor egyes elemeinek pontjai a sikot teljesen befödik.

A kúpszeletsornak egyes kúpszelete nemcsak egy pont által van meghatározva, a melyen az, az alappontokon kívül még átmegy, hanem egy tetszőleges pontpár P, P' által is, mely azon kúpszeletre nézve kapcsolt póluspár. Mert láttuk (99. és 111. alatt), hogy két egyenesen adott involucziós pontsor és egy pontpár egy valós vagy képzetes kúpszeletet határoz meg, melyre nézve ezen pontpár és az involucziós pontsorok kapcsolt pontpárjai kapcsolt pólusok. A kúpszelet képzetes is lehet, ha az adott involucziós pontsorok elliptikus természetűek. E szerint képzetes alappontokkal bíró kúpszeletsorban képzetes kúpszeletek is fordulnak elő; míg az oly kúpszeletsorban, melynek két, vagy négy valós alappontja van, nem található (a 15. §-ben értelmezett) képzetes kúpszelet.

A kúpszeletsor egyes elemei tetszőleges g egyenest egy involucziós pontsor kapcsolt pontpárjaiban metszik, mely c) esetben, vagyis midőn az alappontok képzetesek, mindig hyperbolikus természetű; az a) és b) esetekben, midőn az alappontok nem mind képzetesek, azon involucziós pontsor elliptikus, hyperbolikus vagy parabolikus természetű lehet, mint azt a 12. §. 101—103. pontjai alatt kimutattuk. Para-

bolikus különben akkor lesz a kúpszeletsor által g egyenesen kimetszett pontsor, ha g egyenes átmegy a kúpszeletsornak egyik alap-pontján.

Ha a kúpszeletsor g egyenest hyperbolikus természetű involucziós pontsorban metszi, akkor a sorban két oly kúpszelet van, mely g -t érinti azon involucziós pontsor valós kettőspontjaiban. Ezen esetben oly kúpszeletek is vannak a sorban, melyek g -t nem metszik valós pontokban; mert a hyperbolikus természetű involucziós pontsornak képzetes kapcsolt pontpárjai is vannak (77). Ha ellenben g -n kimetszett involucziós pontsor elliptikus természetű, akkor nincs oly kúpszelet a sorban, mely g -t érintené, hanem a sor minden kúpszelete g -vel két valós pontot bír közösen.

150. A kúpszeletsorban előforduló kúpszeletek nemére következtetni lehet azon involucziós pontsorból, mely szerint a sík végtelen távol fekvő egyenese g_{∞} , a kúpszeletsort metszi.

Ha g_{∞} a kúpszeletsort elliptikus természetű involucziós pontsorban metszi, akkor a sor minden kúpszeletének két valós végtelen távol fekvő pontja van; a sor kúpszeletei tehát mind hyperbolák. E hyperbolák közé számíttatnak azon egyenes párok is, melyek a kúpszeletsorban előfordulnak, és melyeknek száma három vagy egy, a szerint, a mint a kúpszeletsornak mind a négy alappontja valós, vagy nem minden alappont valós. Ezen eset, hogy a kúpszeletsornak minden kúpszelete hyperbola, csak akkor következhetik be, ha a kúpszeletsornak mind a négy alappontja valós, vagy pedig ha két alappont valós, kettő képzetes, tehát az *a*) és *b*) esetekben. *a*) esetben a kúpszeletsor minden kúpszelete hyperbola, ha a négy alappont közül egyik a többi három által képezett háromszög kerületén belül van (52.); *b*) esetben pedig, ha a két képzetes pont tartója a valós pontokat elválasztja egymástól (103).

Ha ellenben a négy valós alappont közül mindegyik a másik három által képezett háromszög kerületén kívül fekszik; vagy a két valós alappont nincs elválasztva a két képzetes alappont tartója által; vagy végre ha a négy alappont képzetes, akkor a kúpszeletsor g_{∞} -t hyperbolikus természetű involucziós pontsorban metszi, melynek képzetes kapcsolt pontpárjai vannak. Ily kúpszeletsorban tehát lesznek hyperbolák, ellipsisek és két parabola; ez utóbbiak g_{∞} -t a kimetszett involucziós pontsor kettőspontjaiban érintik.

A midőn a valós alappontok közül egyik végtelen távol van, a kúpszeletsor g_{∞} -t parabolikus természetű involucziós pontsorban met-

szi; az ily kúpszeletsornak egyik kúpszelete parabola, a többi hyperbola.

Minthogy a czirkuláris involucziós sugársor metszése g_∞ -nel elliptikus természetű involucziós pontsor, az ilyennek pedig minden involucziós pontsorról van egy közös kapcsolt pontpárja, azért minden kúpszeletsorban, melynek két alappontja nincs g_∞ -en, van egy kúpszelet, mely g_∞ -t két egymásra merőleges egyenes végtelen távol fekvő pontjában metszi; tehát minden kúpszeletsorban van egy *egyenoldalú hyperbola*.

De ha a kúpszeletsorban két egyenoldalú hyperbola volna, akkor g_∞ ezeket két oly pontpárban metszetné, melyek egymásra merőleges egyenespárok végtelen távol fekvő pontjai; a kúpszeletsor ekkor g_∞ -t oly involucziós pontsorról metszené, mely perspektív egy czirkuláris involucziós sugársorral, tehát ekkor *a kúpszeletsor minden kúpszelete egyenoldalú hyperbola*. Minthogy a kúpszeletsorban előforduló egyenespárrá elfajult kúpszeletek szintén elfajult egyenoldalú hyperbolák, vagyis egymásra merőleges egyenespárok, azért ha a sornak alappontjai valóságok, ezek egy háromszögnek szögpontjait és magasságpontját képezik.

E körülményből fordítva is következtethetünk, *ha egy egyenoldalú hyperbola valamely háromszögnek három szögpontján megy át, akkor ezen hyperbola annak magasságpontját is tartalmazza*. Mert ha az ABC háromszög szögpontjain átmenő h egyenoldalú hyperbola A pontjából merőlegest bocsátunk BC oldalra, mely h -t D -ben metszi, akkor az $ABCD$ alappontokkal bíró kúpszeletsorban két egyenoldalú hyperbola van, t. i. h és $|AD|$, $|BC|$ egyenespárrá elfajult egyenoldalú hyperbola. A sornak ekkor minden kúpszelete egyenoldalú hyperbola lesz, melyekhez $|AB|$, $|CD|$; $|AC|$, $|BD|$ egyenespárok tartoznak; ezek tehát szintén merőlegesek egymásra és így D pont, ABC háromszögnek magasságpontja.

De midőn a kúpszeletsornak két alappontja A , B valós, kettő képzetes, akkor is lehet a sornak minden kúpszelete egyenoldalú hyperbola. Ha azon elliptikus természetű involucziós pontsornak, melynek kettőspontjai a képzetes alappontok: tartója t , hatványa $-\mu^2$, középpontja γ_1 , és $(|AB|, t)$ pont δ , úgy a kúpszeletsornak minden eleme egyenoldalú hyperbola, ha:

$$A\delta \cdot \delta B = \delta\gamma_1^2 + \mu^2,$$

és t merőleges $|AB|$ -re.

Hogy ezt bebizonyítsuk emlékezzünk vissza a 101. pontban meg-

ismert α kúpszeletre. E kúpszelet tetszőleges g egyenest azon involu-
 cziós pontsor egy kapcsolt pontpárjában metszi, melyet az A, B valós
 és t -n fekvő két képzetes ponton átmenő kúpszeletek g -n kimetsze-
 nek. α kúpszelet átmegy A, B ponton, továbbá $|AB|$ és t egyenes
 δ metszéspontjához, valamint g és t egyenes γ metszéspontjához, az
 adott t -n fekvő involu-
 cziós pontsorban kapcsolt δ_1 , illetve γ_1 ponton.

Tekintsük jelenleg g -t végtelen távol fekvőnek, g_∞ -nek; γ_1 ak-
 kor t -n adott involu-
 cziós sornak középpontja; $|AB|$ és t metszéspont-
 jához δ -hoz kapcsolt δ_1 pont pedig

$$\delta\gamma_1 \cdot \gamma_1\delta_1 = \mu^2$$

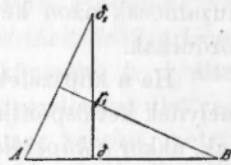
relációból lesz meghatározva. Minthogy a föltétel szerint

$$A\delta \cdot \delta B = \delta\gamma_1^2 + \mu^2,$$

tehát

$$A\delta \cdot \delta B = \delta\gamma_1^2 + \delta\gamma_1 \cdot \gamma_1\delta_1 = \delta\gamma_1 \cdot \delta\delta_1,$$

és $|\delta\delta_1| \equiv t$ merőleges AB -re δ pontban, azért
 γ_1 magasságpontja $AB\delta_1$ háromszögnek. Innen
 következik, hogy α kúpszelet, mely $AB\gamma_1\delta_1$
 pontokon átmegy egyenoldalú hyperbola, és
 mert α metszéspontja g_∞ -nel azon involu-
 cziós pontsornak egy kapcsolt pontpárja, melyet a
 kúpszeletsor g_∞ -en kimetsz, azért g_∞ -en két
 oly kapcsolt pontpár van, mely két egymásra merőleges egyenespáron
 fekszik, tehát g_∞ -en valamennyi kapcsolt pontpár ily tulajdonságú.



95. ábra.

Jegyzet. Ha az előbbi szerkesztésben B -t azon háromszög ma-
 gasságpontjának tekintjük, melynek egyik szögpontja A , a másik
 kettő pedig a t -n fekvő involu-
 cziós pontsor két kettőspontja, úgy «egy
 háromszögnek magasságpontját, melynek egyik szögpontja A , másik két
 szögpontja t tartón fekvő involu-
 cziós pontsor két kettőspontja, függet-
 lenül attól, hogy ezen involu-
 cziós pontsor valós vagy képzetes kettős-
 pontokkal bír, következésképen lehet szerkeszteni». Ha az involu-
 cziós pontsor középpontja N ; A -tól t -re bocsátott merőleges M talppontjá-
 hoz a kapcsolt pont M_1 ; akkor $|AN|$ -re M_1 -ből, vagy $|AM_1|$ -re N -ből
 bocsátott merőleges metszéspontja $|AM|$ -mel: azon háromszögnek
 magasságpontja. Ez valós háromszögnél is könnyen igazolható.

151. A sík tetszőleges egyenesén a kúpszeletsornak minden
 eleme egy-egy involu-
 cziós pontsört indukál, melynek kapcsolt pont-
 párijai, az egyes kúpszeletekre vonatkozó kapcsolt pólusok. E végtelen

sok involúciós sor egy valós közös kapcsolt pontpárral bír, ha a kúpszeletsor g -t hyperbolikus természetű involúciós pontsor szerint metszi. Ez utóbbi involúciós sornak kettőspontjai a közös kapcsolt pontpár, mert a kettőspontok a kapcsolt pontpárakat harmonikusan választják el; ha tehát a sornak egy kúpszelete g -t, X , X_1 -ben metszi, úgy X , X_1 pontok a kettőspontoktól harmonikusan vannak elválasztva, és így a kettőspontok a sornak azon kúpszeletére vonatkozólag kapcsolt pólusok.

Képzeljük g -t a sík végtelen távol fekvő egyenesén. A kúpszeletsor egyes elemei által g_∞ -en indukált involúciós pontsorok nem egyebek, mint az egyes kúpszeletek kapcsolt átmérőpárjainak metszőpontjai g_∞ -nel. Ennélfogva ha a kúpszeletsor g_∞ -t hyperbolikus természetű involúciós pontsorban metszi: a kúpszeletsor minden kúpszeletének van egy oly kapcsolt átmérőpárja, mely g_∞ -t az involúciós pontsor kettőspontjaiban metszi, vagyis mely kapcsolt átmérőpárak egymással párhuzamosak. E kapcsolt átmérőpárak egyszersmind párhuzamosak azon két parabola tengelyével, melyek ily sorban előfordulnak.

Ha a kúpszeletsor g_∞ -t oly involúciós pontsor szerint metszi, melynek kettőspontjai egymásra merőleges egyenesekkel projicziáltatnak, akkor a kúpszeletsor kúpszeleteinek tengelypárjai lesznek egymással párhuzamosak. Ha az ily kúpszeletsornak négy valós pontja van, úgy ezeken átmenő három egyenespár szögfelezői egymással párhuzamosak, mert ezen szögfelezők tengelyei az egyenspárrá elfajult kúpszeleteknek.

Minthogy a kúpszeletsorban mindig létezik egy valós vagy képzetes kúpszelet, melyre vonatkozólag egy adott P , P' pontpár kapcsolt pólus, azért lehet minden, tehát az előbbi kúpszeletsorban is oly k kúpszeletet találni, melyre vonatkozólag P , P' egy egymásra merőleges egyenespárnak végtelen távol fekvő pontja. E k kúpszeletnek két pár egymásra merőleges kapcsolt átmérőpárja lesz; az első az előbbi közös irányú tengelypárral párhuzamos, a másik pár végtelen távol fekvő pontja P , P' . — k kúpszelet e tulajdonsága következtében kör. Tekintve, hogy ezen sorban előforduló két parabola tengelye merőleges egymásra, mondhatjuk: *ha valamely kúpszeletsorban két parabola fordul elő, melynek tengelyei egymásra merőlegesek, úgy ezen kúpszeletsornak egyik kúpszelete kör*. E kör képzetes is lehet, ha a kúpszeletsor alappontjai képzetesek; de ha az alappontok valósak, úgy azon kör is valós lesz. Ezért: *két egymásra merőleges tengelyű parabola négy*

metszőpontja mindig körön fekszik; továbbá egybevetve az előbbivel: egy körnégyszög átellenes oldalpárjainak szögfelezői egymással párhuzamosak, a mi így is kifejezhető: ha egy kör és kúpszeletet négy pontot bír közösen, akkor a kúpszelet tengelyei párhuzamosak a négy közös ponton átmenő egyenespárák szögfelezőivel.

Ha a kúpszelet sor kúpszeleteinek tengelypárjai egymással párhuzamosak és mi g_∞ -en két pontpár P, P' ; P_1, P'_1 -et veszünk fel, mely egymásra merőleges egyenespár végtelen távol fekvő pontja, akkor a kúpszeletsornak azon két köre, melyre vonatkozólag P, P' ; illetve P_1, P'_1 kapcsolt pólus, egymástól nem különböz, mert P_1, P'_1 körre vonatkozólag is kapcsolt póluspár. *Egy kúpszeletsorban tehát két kör nem fordulhat elő, kivévn azon esetet, a midőn a sornak minden kúpszelete kör.* Ekkor ugyanis g_∞ -en kimetszett czirkularis involucziós pontsornak kettőspontjai — az ismert végtelen távol fekvő képzetes körpontok — a sornak alappontjait képezik; a sornak másik két alappontja lehet valós, vagy pedig képzetes.

152. *A kúpszelet sor síkjában fekvő tetszőleges P pontnak van egy kapcsolt pólusa Q , a kúpszelet sor valamennyi elemeit illetőleg.* Hogy ezt belássuk, képzeljük, hogy a kúpszelet sor két kúpszelet k_i, k_j által van adva és hogy P -hez, Q kapcsolt pólusa k_i, k_j kúpszeleteket illetőleg. $|PQ|$ egyenes a kúpszelet sort involucziós pontsori szerint metszi, mely ha hyperbolikus természetű, úgy kettőspontjai kapcsolt pólusok a kúpszelet sor összes kúpszeleteit illetőleg. De $|PQ|$ egyenes P, Q pontja már a kúpszelet sor k_i, k_j kúpszeleteit illetőleg kapcsolt póluspár, és mert $|PQ|$ egyenesen nem lehet két közös kapcsolt póluspár k_i, k_j kúpszeleteket illetőleg, ha csak $|PQ|$ nem közös szelője k_i, k_j -nek: azért P, Q kapcsolt póluspár a kúpszelet sor valamennyi kúpszeletére nézve.

Ha P pont k_i, k_j kúpszelet közös polárháromszögének XYZ -nek egyik valós szögpontja, pl. X , úgy X -hez kapcsolt pólusok nemcsak k_i, k_j hanem a kúpszelet sor valamennyi kúpszeletére vonatkozólag $|YZ| \equiv x$ polárisban fekszenek. A kúpszelet sor minden kúpszelete ugyanis az X ponton átmenő s, t egyeneseken, mint k_i, k_j közös szelőin, melyeken a kúpszelet sor, két-két valós vagy képzetes alappontja fekszik, ugyanazon involucziós pontsori indukálja. E szerint X -hez kapcsolt pólus s -en, (s, x) ; t -n, (t, x) pont, tehát x polárisa X -nek a sor valamennyi kúpszeletére vonatkozólag. Ezen XYZ háromszög a kúpszelet sornak közös polárháromszöge.

Tetszőleges g egyenes pontjaihoz kapcsolt pólusok egy kúp-

szeletsor összes kúpszeleteit illetőleg, a kúpszeletsor közös polárháromszögének szögpontjain átmenő kúpszeleten fekszenek. Ez onnan következik, hogy g egyenes pontjaihoz kapcsolt pólusok a kúpszeletsor két tetszőleges k_i , k_j kúpszeletét illetőleg e kúpszeletek közös polárháromszöge körül írt γ kúpszeleten fekszenek (135).

A kapcsolt pólusok fogalmából folyik továbbá, hogy P pont polárisai egy kúpszeletsor kúpszeleteit illetőleg, P -hez kapcsolt póluson, Q -n mennek át. De fordítva is kimutatható, hogy ha P , Q pontok kapcsolt pólusok egy kúpszeletsort illetőleg, úgy Q ponton átmenő tetszőleges p egyenes polárisa P -nek a kúpszeletsor bizonyos k kúpszeletére nézve.

Vegyük fel e végből p -n tetszőleges P' pontot. A kúpszeletsorban mindig van oly kúpszelet, melyre vonatkozólag P , P' kapcsolt póluspár, de minthogy P , Q a föltétel szerint szintén kapcsolt póluspár k -ra vonatkozólag, azért $|P' Q| \equiv p$ egyenes polárisa P -nek k -ra nézve. k kúpszelet csak akkor lehet képzetes, ha a sornak alappontjai is képzetesek.

Minthogy Q sugársor minden p sugarához tartozik egy kúpszelet a kúpszeletsorban, melyre vonatkozólag P és p , pólus és poláris, azért a kúpszeletsorban annyi kúpszelet van, a mennyi a Q ponton átmenő sugarak száma, vagyis a kúpszeletsorban egyszer végtelen kúpszelet van.

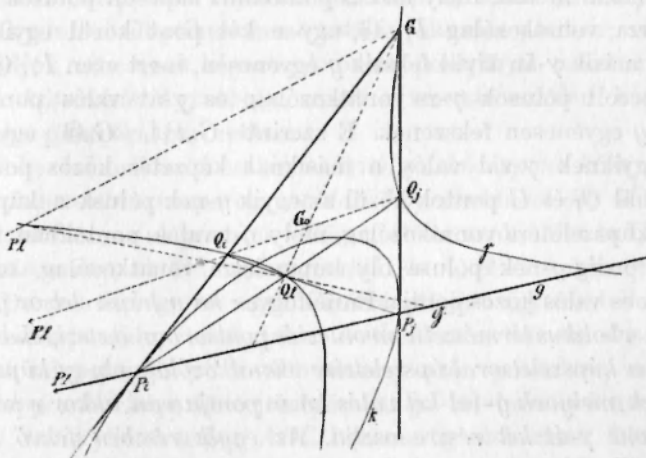
153. Azon γ kúpszelet, melynek pontjai kapcsolt pólusok egy g egyenes pontjaihoz a kúpszeletsort illetőleg: egyszersmind geometriai helye g egyenes pólusainak a kúpszeletsor kúpszeleteire nézve. g egyenesen ugyanis van oly P pont, mely γ tetszőleges Q pontjához kapcsolt pólus a kúpszeletsor összes kúpszeleteit illetőleg; ennél fogva a kúpszeletsorban van oly kúpszelet, melyre vonatkozólag P -n átmenő g egyenes polárisa Q -nak, vagyis melyre vonatkozólag g -nek pólusa Q pont.

A tétel így is kifejezhető:

Tetszőleges g egyenes pólusai valamely kúpszeletsor kúpszeleteit illetőleg a kúpszeletsor közös polárháromszögének szögpontjain átmenő γ kúpszeleten fekszenek. A kúpszeletsor kúpszeletei által g egyenesen kimetszett involucziós pontsor kapcsolt pontjai: kapcsolt pólusok γ kúpszeletre vonatkozólag.

Hogy e tétel utolsó részét is bebizonyítsuk, nevezzük a kúpszeletsor tetszőleges k kúpszeletének metszőpontjait g -vel P_i , P_j -nek, az ezekhez kapcsolt pólusokat a kúpszeletsorra vonatkozólag Q_i , Q_j -nek; $|Q_i Q_j|$ és $|P_i P_j| \equiv g$ metszőpontját P_l -nek; P_l -hez kapcsolt pólust Q_j -

nek; végre g -nek k -ra vonatkozó pólusát G -nek (96. ábra. Q_i, Q_j pontok γ kúpszeletnek pontjai és $|P_i Q_i|, |P_j Q_j|$ egyenesek érintői k -nak P_i, P_j pontokban, mert ha két kapcsolt pólus közül egyik a kúpszeletnek pontja, akkor a másik annak érintőjén, mint azon pont polárisán tartozik feküdni. k kúpszelet $|P_i Q_i|, |P_j Q_j|$ érintői P_i, P_j pontokban, egymást γ -nak G pontjában metszik, mert G pólusa $|P_i P_j| \equiv g$ -nek k -t illetőleg. Végre $|P_i P_j|, |Q_i Q_j|$ metszéspontjához P_i -hez kapcsolt polus Q_i , mely $|P_i Q_j|, |P_j Q_i|$ -nek közös pontja szintén γ -n fekszik, miután $P_i, |P_i P_j| \equiv g$ -nek egyik pontja (HESSE). Minthogy ezek szerint P_i, P_j , a γ kúpszeletbe írt $Q_i G Q_j Q_i$ négyszögnek átlópontjai: k kúpszeletnek P_i, P_j metszéspontjai g -vel, γ -nak kapcsolt pólusai (76). —



96. ábra.

Mint $G Q_i Q_j Q_i$ négyszögből következik g egyenesnek γ kúpszeletre vonatkozó pólusa G_0 , $|G Q_i|$ és $|Q_i Q_j|$ egyeneseknek metszéspontja, és így a kúpszeletsor által g -n kimetszett pontpáraknak, mint P_i, P_j -nek kapcsolt pólusait Q_i, Q_j -t összekötő $|Q_i Q_j|$ egyenes, mindig átmegy g -nek γ -ra vonatkozó pólusán G_0 -on.

g -n levő involúziós pontsor minden kapcsolt pontpárjához, pl. P_i, P_j -hez, tartozik egy G pont γ kúpszeleten, és viszont γ minden pontja pólusát képezi g -nek a kúpszeletsor egy-egy kúpszeletére nézve. Ha G , γ -n tetszőlegesen lesz felvéve, akkor azon k kúpszeletnek P_i, P_j metszéspontjait g -vel, melyre vonatkozólag g -nek pólusa G , így lehet megtalálni. G -t, γ -nek g -ra vonatkozó G_0 pólusából γ -ra projicziáljuk Q_i -be; ezen Q_i projekcióhoz a kúpszeletsorban kapcsolt

P pólust G_0 -val $|P_1G_0|$ egyenes által összekötjük, mely összekötő egyenes γ -át, Q_i , Q_j -ben, a kívánt k kúpszelet és g metszéspontjához P_i , P_j -hez kapcsolt pólusokban metszi.

G -hez kapcsolt pólus a kúpszeletsorra vonatkozólag g -nek azon \mathcal{G} pontja, mely P_i -hez kapcsolt pont a kúpszeletsor által g -n kimetszett involucziós pontsorban. Mert, mint láttuk, G_0 -n átmenő szelők γ -át oly két pontban metszik, melyeknek kapcsolt pólusai a kúpszeletsorra vonatkozólag a g -n kimetszett involucziós pontsornak kapcsolt pontpárjai.

Ha g egyenes és γ kúpszeletnek két valós közös pontja van, és g -nek γ -ra vonatkozó G_0 pólusán átmenő tetszőleges egyenes γ -t Q_i , G pontokban metszi, mely metszéspontokhoz kapcsolt pólusok a kúpszeletsorra vonatkozólag P_i , \mathcal{G} , úgy e két pont közül egyik γ -án belül, a másik γ -án kívül fekszik g egyenesen, mert ezen P_i , \mathcal{G} pontok kapcsolt pólusok γ -ra vonatkozólag, és γ -át valós pontokban metsző g egyenesen fekszenek. E szerint $|G_0P_i|$, $|G_0\mathcal{G}|$ egyenesek közül egyiknek γ -val valós, a másiknak képzetes közös pontpárja van; tehát Q_i és G pontok közül az egyik g -nek pólusa a kúpszeletsor oly kúpszeletére vonatkozólag, mely g -t valós pontokban metszi, a másik pedig g -nek pólusa oly kúpszeletre vonatkozólag, melynek g -vel nincs valós közös pontja. Ennélfogva: *ha a kúpszeletsor g egyenest hyperbolikus természetű involucziós pontsorban metszi, tehát g -nek pólusai a kúpszeletsor kúpszeleteire vonatkozólag oly γ kúpszeleten fekszenek, melynek g -vel két valós közös pontja van, akkor e két valós közös pont γ -át két részre osztja. Az egyik részben fekvő pontok g -nek pólusai a sor azon kúpszeleteire vonatkozólag, melyek g -t valós pontokban metszik; a másik részen levő pontok pedig g -nek pólusai a kúpszeletsornak g -t képzetes pontokban metsző kúpszeleteire nézve; g és γ két metszéspontja, g -nek pólusa a kúpszeletsornak g -t érintő kúpszeleteit illetőleg, γ kúpszelet csak akkor érintheti g -t, ha az a kúpszeletsornak egyik alappontján megy át; az érintés ezen alappontban történik.*

Ha g egyenes a kúpszeletsor polárháromszögének egyik szögpontján megy át, úgy γ két egyenessé fajul, melyek közül az egyik egyenes ugyanazon szögponton megy át, a másik pedig a polárháromszög másik két szögpontját köti össze. Mert a kúpszeletsor két kúpszelete által megállapított STEINER-féle rokonságnál szintén a közös polárháromszög egyik szögpontján átmenő egyeneshez a közös kapcsolt pólusok két egyenessé fajult kúpszeleten fekszenek. (148). — Ha végre

g egyenes a polárháromszögnek egyik oldala, úgy γ , azon polárháromszög oldalának átellenes szögpontjává fajul.

154. Az előbbi általános tételek alapján a kúpszeletsorban előforduló kúpszeletek középpontjainak geometriai helyét, és a sor kúpszeleteinek nemét könnyen fölismerhetjük. Ha ugyanis fölveszszük, hogy g egyenes a sík végtelen távol fekvő g_∞ egyenesese, akkor azon γ_∞ kúpszelet, mely g_∞ -nek a kúpszeletsor kúpszeleteire vonatkozó pólusokat tartalmazza: geometriai helye a kúpszeletsor középpontjainak. Ezen γ_∞ kúpszelet, melyen a kúpszeletsor kúpszeleteinek középpontjai fekszenek s mely e végből középponti kúpszeletnek nevezetik, felvilágosítást nyújt a sorban előforduló kúpszeletek neméről.

Ha a középponti kúpszelet γ_∞ ellipsis, tehát g_∞ -en γ_∞ által indukált pontsor elliptikus természetű involucziós pontsor, melynek, mint tudjuk, nincsenek képzetes kapcsolt pontpárjai, akkor a sornak minden kúpszelete hyperbola; mert a sornak minden kúpszelete g_∞ -t valós pontpárakban metszi.

Ehhez tartozik azon eset is, melynél γ_∞ középponti kúpszelet kör, tehát a kúpszeletsor csupa egyenoldalú hyperbolákból áll. Ha az ily kúpszeletsorban az alappontok valósak, akkor azok, mint tudjuk, egy ABC háromszögnek D magasságpontját és A, B, C szögpontjait képezik. De γ_∞ átmegy az egyenespárrá elfajult egyenoldalú hyperbolák középpontján, tehát jelen esetben azon háromszög magasságainak talppontjain. γ_∞ tovább átmegy azon pontokon, melyek a négy alappontból képezhető pontpárakat g_∞ -től harmonikusan elválasztják, tehát jelen esetben ABC háromszög oldalainak felezőpontjain, és AD, BD, CD magasságrészek felezőpontjain. Ennélfogva a kúpszeletsor középponti kúpszelete, azon esetben, a midőn a kúpszeletek (egyenoldalú hyperbolák) egy háromszög magasság-pontján és szögpontjain átmennek, ezen háromszögnek kilencz pontos köre. Ezen a háromszöggel kapcsolatos kör Feuerbachtól lett először ismertetve (1827.),* azért FEUERBACH-féle körnek is nevezetik.

A midőn a középponti kúpszelet γ_∞ parabola, a kúpszeletsornak minden kúpszelete hyperbola, kivéven, azon egyet, melynek középpontja γ_∞ -nek érintőpontja g_∞ -nel és mely parabola. A kúpszeletsornak ekkor egy alappontja végtelen távol fekszik.

Ha a kúpszeletsor középponti kúpszelete γ_∞ hyperbola, tehát γ_∞ által g_∞ -en indukált involucziós pontsor hyperbolikus természetű,

* FEUERBACH K. W. (1800—1834.)

melynek képzetes kapcsolt pontpárjai is vannak, akkor a kúpszeletsorban végtelen sok ellipsis, hyperbola és két parabola van. Ezen hyperbola egyik ágán fekszenek a kúpszeletsorban előforduló ellipsiseknek, a másik ágon pedig a hyperboláknak középpontjai; a hyperbola asymptotái pedig párhuzamosak azon sorban előforduló két parabola tengelyeivel.

A midőn γ_∞ egyenoldalú hyperbola, a kúpszeletsor egyik kúpszelete kör, mert a kúpszeletsorban előforduló két parabolának tengelyei egymásra merőlegesek.

A kúpszeletsor középponti kúpszelete γ_∞ egyenessé fajul, ha a kúpszeletsor polárháromszögének egyik szögpontja végtelen távol van, vagy a mi ugyanaz, ha a kúpszeletsor közös szelői közül oly kettő, mely mind a négy alappontot tartalmazza, egymással párhuzamos. A kúpszeletsor összes kúpszeleteinek középpontjai ekkor azon egyenesen fekszenek, mely a szelőkön adott involucziós pontsorok középpontjait összeköti; a párhuzamos szelőpár középpontja e szelők által határolt szalag felezőjének bármely pontja.

Ha azonban a kúpszeletsornak két szelőpárja párhuzamos egyenespár, akkor g_∞ a kúpszeletsor polárháromszögének egyik oldala, és így a kúpszeletsor összes kúpszeletének középpontja egy pontba esik; ily kúpszeletsor tehát közös középponttal bír.

A midőn a kúpszeletsornak egy közös szelője végtelen távol van, a középponti kúpszelet szintén egyenessé fajul, mert ekkor a polárháromszögnek e szelőn fekvő szögpontja szintén végtelen távol lesz.

155. Két oly kúpszelet, mely g_∞ -en ugyanazon involucziós pontsört indukálja, melynek tehát kapcsolt átmérőpárja megfelelőleg párhuzamosak, hasonló és perspektív helyzetű kúpszeletnek neveztetik. A két kúpszelet hasonló marad akkor is, ha az egyiket e helyzetéből elmozdítjuk, de nem lesz a másikkal perspektív helyzetű, ha csak az elmozdítás úgy nem történik, hogy a kapcsolt átmérőpárok párhuzamosak maradnak.

Két hasonló kúpszelet mindig egyenmű, mert csak ilyenek indukálhatnak g_∞ -en egy és ugyanazon involucziós pontsört. Két kör mindig hasonló és perspektív helyzetű; két parabola mindig hasonló és ha tengelyei párhuzamosak, akkor még perspektív helyzetű is. Két hyperbola hasonló, ha asymptotái egyenlő szöget képeznek és a két hyperbola ág az asymptoták által képezett egyenlő csúcshögek szárjai között fekszik.

«Ha két ellipsis hasonló, akkor az egyenlő szöget bezáró kapcsolt átmérőpárok, mint hosszmenyiségek helyes geometriai arányt képeznek». Nevezzük ugyanis az egyik k ellipsis tetszőleg kapcsolt átmérőpárját AC , BD -nek, a másik k_1 kúpszeletnek azon kapcsolt átmérőpárját, mely ugyanily szöget képez, mint AC , BD ; A_1C_1 , B_1D_1 -nek. Minthogy $ABCD$ és $A_1B_1C_1D_1$ paralelogramm-nak oldalai, szintén párhuzamosak k , illetve k_1 egy-egy kapcsolt átmérő párjával (113.), azért úgy az oldalak, mint az átlók által képezett szögek egyenlők, tehát azon paralelogrammok hasonlók és így:

$$AB : CD = A_1B_1 : C_1D_1.$$

20. §. A kúpszeletseregéről.

156. Mindazon kúpszeletek, melyekre vonatkozólag két involucziós sugársor kapcsolt sugarai, kapcsolt polárisok: kúpszeletsereget képeznek. Ama két involucziós sugársor közül, melynek kapcsolt sugarai kapcsolt polárisok a kúpszeletsereg egyes kúpszeleteire vonatkozólag, vagy mindkettő hyperbolikus, vagy egyik hyperbolikus, a másik elliptikus, vagy végre mindkettő elliptikus természetű lehet. Ennek megfelelőleg a kúpszeletsereg kúpszeleteinek, vagy

a) négy valós, vagy

b) két valós és két képzetes, vagy végre

c) négy képzetes közös érintője van. Ezen közös érintőket a kúpszeletsereg alapérintőinek nevezük.

A kúpszeletsereg nemcsak két involucziós sugársor, hanem két kúpszelete által is teljesen meg van határozva, mert mindig két vagy hat oly involucziós sugársor létezik a kúpszelet síkjában, melynek kapcsolt sugárpárjai azon két kúpszeletre vonatkozólag kapcsolt polárisok, és melyek a kúpszeletsereg többi kúpszeleteire nézve is kapcsolt polárisok. Azon két kúpszelet közös polárháromszöge egyszersmind polárháromszöge a kúpszeletsereg összes kúpszeleteinek.

A polárháromszög egyik oldala x , a kúpszeletsereg meghatározására szolgáló involucziós sugársor S , T középpontjait összekötő egyenes; ennek átellenes szögpontja X : a sugársorok azon közös sugarához $x \equiv |ST|$, illetve $x \equiv |TS|$ -hez kapcsolt $|SX|$, $|TX|$ két sugár metszéspontja.

Ha S , T involucziós sugársorok hyperbolikusak, akkor azok a , b ; c , d kettőssugarainak (a, c) , (b, d) ; (a, d) , (b, c) metszéspontjait összekötő y , z egyenesek a polárháromszög másik két oldalát adják (97. ábra.) Ha pedig az involucziós sugársorok elliptikus természetűek és a , b ,

Ha ellenben G ponton át nem lehet valós kúpszeletet fektetni, mely a kúpszeletsereghez tartozik, akkor G -ből a kúpszeletsereg minden kúpszeletéhez valós érintőpárok vonhatók.

Ha a kúpszeletseregnek *alapérintői képzetesek*, akkor $\{G\}$ mindig hyperbolikus természetű, tehát a kúpszeletseregben végtelen sok kúpszelet van, melyhez G -ből valós és végtelen sok, melyhez G -ből nem húzhatók valós érintőpárok; végre van két kúpszelet, melyhez G -ből csak egy-egy érintő húzható, vagyis mely átmege G ponton. Ily kúpszeletsereg kúpszeletei tehát a síkot teljesen betöltik.

A midőn a kúpszeletsereg *két érintője* a, b valós, *kettő pedig képzetes*, mely utóbbiak egymást T valós pontokban metszik, úgy $\{G\}$ sugársor elliptikus, ha a, b alapérintők közül egyik G, T pontokat elválasztja egymástól; ellenben hyperbolikus, ha a, b alapérintők közül vagy mindakettő, vagy egyik sem választja el G, T pontokat egymástól. G ponton át tehát azon esetben nem lehet kúpszeletet fektetni, mely a kúpszeletsereghez tartozik, a midőn G, T pontok a, b alapérintők által képezett mellékszögek szárai között fekszenek.

Ha *az alapérintők mind valósak* és G pont a négy érintő által szétosztott síknak azon részében fekszik, melybe a négy érintő által képezett négyoldal átlói nem jutnak, úgy $\{G\}$ elliptikus, ha G a többi síkrészekben van, úgy $\{G\}$ hyperbolikus természetű; ily kúpszeletseregnek kúpszeletei tehát nem töltik be teljesen a síkot.

158. *A kúpszeletsereg síkjának tetszőleges p egyeneséhez létezik egy kapcsolt poláris q a kúpszeletsereg összes kúpszeleteire vonatkozólag.*

Ha ugyanis p -nek a kúpszeletsereg két tetszőleges kúpszeletére vonatkozó pólusát q egyenes által összekötjük, úgy p, q egyenesek kapcsolt polárisok, a kúpszeletsereg összes kúpszeleteire vonatkozólag, és (p, q) pontból a kúpszeletsereg kúpszeleteihez vont érintőpárok oly involucziós sugársort alkotnak, melynek kettőssugarai minden érintőpárt harmonikusan választanak el. De minthogy csak egy sugárpár létezik, mely (p, q) pontból a tekintetbe vett két kúpszelet-hez vont érintőpárokat harmonikusan választja el, és ez azon p, q kapcsolt polárispár: azért p, q kapcsolt poláris a kúpszeletsereg összes kúpszeleteire vonatkozólag. — Ha p a kúpszeletsereg közös polárháromszögének egyik oldala, akkor ezen oldal átellenes szögpontján átmenő tetszőleges egyenes a hozzá kapcsolt poláris.

Ha egy általános helyzetű p egyeneshez a kapcsolt polárist q -t a kúpszeletsereg kúpszeleteit illetőleg szerkeszteni akarjuk, nem szük-

ség p -nek pólusát a kúpszeletsereg két kúpszeletére meghatározni, hanem következőképen lehet eljárni:

A midőn az alapérintők a, b, c, d valóságok, úgy $(a, b), (c, d), (a, c), (b, d), (a, d), (b, c)$ pontpárok a kúpszeletsereg elfajult kúpszeletei; tehát azon három pont, mely p -től e pontpárok által harmonikusan van elválasztva a p -hez kapcsolt polárison — q egyenesen fekszik. Ha másodszor az alapérintők S, T középponttal bíró invol. sugársorok kettőssugarai, melyek közül legalább egyik elliptikus természetű, akkor felkeressük a sugársorok által p -n kimetszett involucziós pontsoroknak szükségkép valós közös pontpárját M, N -et.

$$|SM|, |TN| \text{ és } |SN|, |TM|$$

sugarak metszőpontjait összekötő q egyenes p -hez kapcsolt poláris a kúpszeletsereg összes kúpszeleteit illetőleg, mert ha

$$|SM|, |SN|, \text{ és } |TM|, |TN|$$

sugárpárok kapcsolt polárisok valamely kúpszeletre vonatkozólag, úgy

$$|SM|, |TM|; |SN|, |TN|$$

és

$$|SM|, |TN|; |SN|, |TM|$$

sugárpárok metszőpontjain átmenő egyenesek (melyek közül az első: $|MN| \equiv p$), szintén kapcsolt polárispár (HESSE). A talált q egyenes, a kúpszeletseregben előforduló egyedüli pontpár S, T által itt is p -től harmonikusan van elválasztva, mint az $STMN$ négyszögből látható.

159. *Tetszőleges egyenes pólusai valamely kúpszeletsereg kúpszeleteit illetőleg egy másik egyenesen fekszenek, mely az előbbihez kapcsolt poláris a kúpszeletsereg kúpszeleteit illetőleg.* Ez a kapcsolt polárisok fogalmából következik; mert ha p, q kapcsolt polárispár a kúpszeletet illetőleg, úgy p -nek pólusa q -n, és q -nak pólusa p -n tartozik feküdni.

Ha p -nek a kúpszeletsereg tetszőleges k_i kúpszeletére vonatkozó pólusa G_i , akkor könnyen fölismerhető azon $\{G_i\}$ involucziós sugársor természete, melyet G_i -n átmenő és k_i -re vonatkozó kapcsolt polárisok képeznek. Nevezzük a kúpszeletsereg közös polárháromszögét XYZ -nek. $|XY|, |YZ|, |ZX|$ és p egyenesek oldalai egy teljes négyoldalnak; ha G_i pont ezen négyoldal által szétosztott síkrészek közül olyanban van, melybe a négyoldal átlói behatolnak, akkor $\{G_i\}$ sugársor hyperbolikus, különben elliptikus természetű. — XYZ háromszögnek azonban két oldala, pl. $|XZ|, |XY|$: X -ből a kúpszeletsereghez vonható érintőpárból álló elliptikus természetű involucziós sugársornak képzetes kettőssugarai is lehetnek. $\{G_i\}$ involucziós sugársor ezen esetben

elliptikus, ha X és G_i pontok, XYZ polárháromszög $= |YZ|$ valós oldala és p egyenes közül csak egyik által vannak elválasztva egymástól; ellenben hyperbolikus ha X, G_i pontok $|YZ|$ és p egyenesek által nincsenek elválasztva, vagy pedig mindkettő által el vannak választva egymástól (103.).

160. Ha p egyenest a sík végtelen távol fekvő g_∞ egyenesébe helyezzük, akkor a hozzá kapcsolt poláris, g_∞ -nek a kúpszeletsereg kúpszeleteire vonatkozó pólusait, vagyis a kúpszelet középpontjait tartalmazza. Ennélfogva: *a kúpszeletsereg kúpszeleteinek középpontjai egyenesben fekszenek, mely kapcsolt poláris a sík végtelen távol fekvő egyeneséhez.* Ezen egyenes a kúpszeletsereg középponti vonalának neveztetik.

Az előbbieket alapján *a kúpszeletseregben előforduló kúpszeletek nemét* könnyen felismerhetjük.

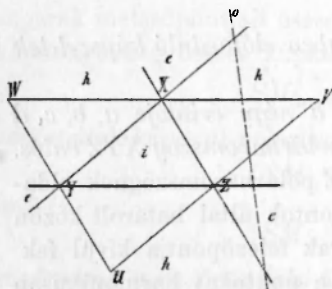
A midőn a kúpszeletseregnek mint a négy érintője a, b, c, d valós, vagy mind a négy képzetes: a közös polárháromszög XYZ valós. A középponti vonal o az első esetben XYZ polárháromszögnek oldalait a meghosszabbításban, tehát a szögpontok által határolt közön kívül metszi, mert pl. $(a, b), (c, d)$ pontpárok felezőpontja kívül fekszik azon XY közön, melynek végpontjai e pontokat harmonikusan elválasztják.

Ha ellenben a, b, c, d közös érintők képzetesek, tehát az általuk képezett négyoldalnak csak egy pár átellenes szögpontja, pl. $(a, b) \equiv S, (c, d) \equiv T$, mely XYZ polárháromszögnek YZ oldalán fekszik valós, a többi két pár képzetes, úgy o középponti vonal XYZ háromszögnek YZ oldalát a meghosszabbításban, $|XY|, |XZ|$ oldalát pedig a szögpontokon belül metszi. Ez onnan következik, hogy o és g_∞ kapcsolt poláris, a kúpszeletsereg kúpszeleteire nézve; más két kapcsolt poláris pedig Z -n átmenő tetszőleges egyenes és $|XY|$. De az összes polárispárok a polárháromszögnek $|XZ|$ oldalát involucziós helyzetű pontpárokban metszik, melyeknek valós vagy képzetes kettőspontjai oly tulajdonságú pontok, mint S és T , t. i. hogy a rajtuk átmenő és a kúpszeletsereg egy kúpszeletére vonatkozó kapcsolt polárispárok, a többi kúpszeletre vonatkozólag is kapcsolt polárispárok. Minthogy jelen esetben, a midőn a kúpszeletseregnek közös érintői képzetesek, csak egy ily valós pontpár S, T létezik, mely a feltétel szerint $|YZ|$ oldalon fekszik: azért $|XZ|$ oldalon ezen S, T pontok képzetesek; a kapcsolt polárispárok $|XZ|$ -t elliptikus természetű involucziós pontsorban metszik, tehát X, Z pontok, $(o, |XZ|)$ pont és $|XZ|$ -nek végte-

len távol fekvő pontja által el vannak választva, vagyis o középponti vonal $|XZ|$ -t X, Z pontok által határolt közön belül metszi. —

$$|XY|, |YZ|, |ZX| \text{ és } g_{\infty}$$

oldalakkól álló négyoldal átlóháromszögének UVW -nek oldalai, párhuzamosak XYZ háromszög oldalaiival és ennek szögpontjain mennek át. UVW háromszög oldalai nem hatolnak XYZ háromszög által hét részre osztott síknak minden részébe, hanem csak háromba; ezen utóbbi síkrészeket h -val, a véges síkrészt i -vel, a többieket e -vel jelöljük, mint azt a mellékelt 98. ábra mutatja.



98. ábra.

A h részekben levő pontok, mint általánosan (159.), csak hyperboláknak, vagyis oly kúpszeleteknek lehetnek középpontjai, melyeken átmenő kapcsolt polárisok, — jelen esetben kapcsolt átmérőpárok — hyperbolikus természetű involúciós sugársort képeznek; az e részekben levő pontok pedig ellipsiseknek középpontjai; végre az i részben levő pontok csak képzetes kúpszeleteknek lehetnek középpontjai, mivel valós kúpszeletnek

középpontja, minden polárháromszögén kívül fekszik.

o középponti vonal, akár metszi XYZ háromszögnek mind a három oldalát a meghosszabbításban akár csak egyet: az e és i részek közül, valamint a h részek közül kettőbe jut, melyek felváltva következnek egymásra. Ennélfogva:

Ha a kúpszeletseregnek alapérintői valósak, akkor a kúpszeletseregben előforduló kúpszeletek négy csoportra osztva fordulnak elő, melyek felváltva ellipsisek és hyperbolák; az átmenet az egyik csoportból a másikba a három pontpárra elfajult kúpszeleten és a kúpszeletseregben előforduló egyedüli parabolán át történik, mely utóbbinak középpontja, a középponti vonal végtelen távol fekvő pontja. A midőn a kúpszeletseregnek négy alapérintője képzetes: az egyik ellipsis csoport, és e csoportnak két pontpárra elfajult két határkúpszelete képzetes.

Ha a kúpszeletseregnek középponti vonala a közös polárháromszög körül írt kört két valós pontban metszi vagy érinti, úgy ezen metsző- vagy érintőpont a kúpszeletseregben előforduló két vagy egy egyenoldalú hyperbolának középpontja. Ha végre a középponti

vonal a közös polárháromszögnek magasság pontján megy át, úgy ezen magasságpont a kúpszeletseregben előforduló egyedüli valós vagy képzetes körnek középpontja.

A tétel ezen utolsó része onnan következik, hogy az egyenoldalu hyperbola tetszőleges polárháromszöge körül írt kör annak középpontján megy át (127.), továbbá, hogy $|XY|$, $|YZ|$, $|ZX|$ és g_∞ oldalakból képezett négyoldalnak átellenes szögpontjai XYZ háromszög magasságpontjából czirkularis involucziós sugársor által projicizáltatnak.

161. Térjünk most azon eset megvizsgálásához, melynél a kúpszeletseregnek két valós és két képzetes érintője van, tehát a polárháromszögnek csak egy szögpontja X és átellenes oldala $|YZ|$ valós.

o középponti vonal $|YZ|$ -t két részre osztja; az egyik résznek pontjai X -től $|YZ|$ által nincsenek elválasztva, a másik részen levő pontokat pedig $|YZ|$ elválasztja X -től. A végből az első részen fekvő pontok középpontjai a kúpszeletseregben előforduló hyperboláknak, a másik rész pontjai, pedig középpontjai az ellipsiseknek. Ezért mondhatjuk: *ha a kúpszeletseregnek két valós és két képzetes érintője van, akkor a kúpszeletseregben két csoport kúpszelet fordul elő; az egyik csoport kúpszeletei hyperbolák, a másiké ellipsisek; az átmenetet a két csoport között a kúpszeletseregben előforduló egyedüli valós pontpár, és parabola képezi.*

Ha a polárháromszög valós szögpontján X -en kört fektetünk át, melyre vonatkozólag a kúpszeletsereg által $|YZ|$ -n kimetszett involucziós pontsor kapcsolt pontpárjai kapcsolt pólusok, mely tehát XYZ polárháromszögnek X valós és Y, Z képzetes szögpontjain átmege, és ha ezen kör o -t valós pontokban metszi vagy érinti, akkor e metszővagy érintőpont a kúpszeletseregben előforduló két, vagy egy egyoldalú hyperbola középpontja (127).

Tudjuk, hogy ha o középponti vonal XYZ valós polárháromszög magasságpontján megy át, akkor a kúpszeletseregnek van egy köre, melynek középpontja e magasságpont. Ugyanezt mondhatjuk jelen képzetes polárháromszög eseténél is. Az XYZ polárháromszög Y, Z szögpontjai: kettőspontjai azon involucziós pontsornak, mely szerint X -nek polárisa $|YZ| \equiv x$, a kúpszeletsereget metszi. Ha ezen involucziós pontsor középpontja N , X -ből x -re bocsátott merőleges talppontja M , az ehez kapcsolt pont ezen involucziós pontsorban M_1 , akkor XYZ képzetes háromszögnek magasságpontja, XM -nek O metsző-

pontja azon egyenessel, mely N -ből $|XM_1|$ -re merőlegesen lesz bocsátva.

Ezen a valós polárháromszög esetéből vont következtetést, direkt úton következőképp lehet igazolnunk (99. ábra).

X -ből x -re bocsátott $|XM|$ merőleges mindenestre tengelyét képezi a kúpszeletsereg azon k kúpszeletének, melynek középpontja $|XM|$ és o metszéspontja O . — k -nak P, P_1 metszéspontjai x -szel, ezért M -től egyenlő távolságra vannak és kapcsolt pontpárját képezik a kúpszeletsereg által x -en kimetszett involúciós pontsornak. Ha ezen pontsor N középpontjához és M -hez kapcsolt pont $N_{1\infty}$ és M_1 , úgy

$$(PP_1NM) = (P_1PN_{1\infty}M_1) = (PP_1M_1N_{1\infty});$$

mely egyenlet szorozva

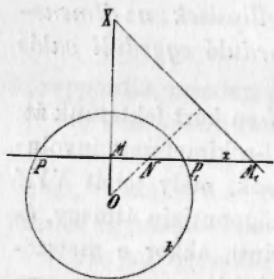
$$-1 = (PP_1N_{1\infty}M),$$

és

$$-(PP_1MM_1) = -(PP_1MM_1)$$

gyel következő egyenlethez vezet:

$$(PP_1NM_1) = -1.$$



99. ábra.

E szerint $P, P_1; N, M_1$ pontpárok harmonikusan vannak elválasztva, tehát $|XM_1|$ egyenes pólusa N pont. k kúpszelet már most akkor lesz kör, ha $|XM_1|$ polusát N -et a középponttal O -val összekötő egyenes merőleges $|XM_1|$ -re, vagy más szóval: *a két valós és két képzetes alapérintővel bíró kúpszeletseregnak akkor van egy köre, ha a középponti vonal átmegy $|XM|$ egyenes és N -ből $|XM_1|$ -re bocsátott merőlegesnek metszéspontján, vagy a mi ugyanaz, XYZ*

képzetes polárháromszög magasságpontján. —

Ha valamely kúpszeletseregben két kör fordul elő, akkor kell, hogy ezen kúpszeletsereg közös polárháromszögének két magasságpontja legyen, mi csak úgy lehetséges, ha a polárháromszög két oldala merőleges a harmadikra; ezen harmadik oldal képezi a kúpszeletsereg középponti vonalát.

162. Minthogy a kúpszeletsereg, polár-ábrája egy kúpszeletsornak azért: *egy tetszőleges G ponton átmenő p egyenesekhez kapcsolt*

polárisok valamely kúpszeletseregre vonatkozólag, egy Γ kúpszeletet burkolnak, mely a kúpszeletsereg közös polárháromszögébe van írva. Ezen Γ kúpszelet egyszersmind burkoló görbéje G pont polárisainak a kúpszeletsereg kúpszeleteit illetőleg. G pontból Γ -hoz vonható érintők kapcsolt polárisai a kúpszeletseregnak és G -ből a kúpszeletsereghez vonható érintőpárok kapcsolt polárisai Γ -nak. E tételnek megfelelő dualis tétel az előbbi §-ban lett tárgyalva.

163. A kúpszeletsereg egy különös esetét kapjuk, ha egyik alapérintőt végtelen távol veszszük fel, mert ha egy kúpszeletsereg egyik alapérintője végtelen távol van, akkor annak minden kúpszelete parabola.

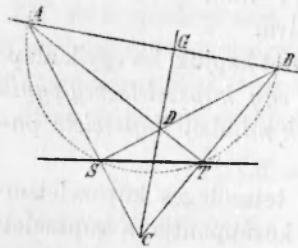
Az ily kúpszeletsereg polár-ábrája egy tetszőleges kúpszeletsornak, oly kúpszeletre vonatkozólag, melynek középpontja, a kúpszeletsornak egyik végesben fekvő valós alappontja. Ha azon tetszőleges kúpszeletsor helyett egyenoldalu hyperbola sort, polárizáló kúpszeletnek pedig az egyenoldalu hyperbola sor A, B, C, D alappontjainak egyikéből, pl. D -ből, tetszőleges sugárral leírt x kört választunk, úgy A, B, C, D pontoknak x körre vonatkozó a, b, c, d_{∞} polárisai képezik a parabola sor alapérintőit; a parabolator tehát abc háromszögbe van beírva. D pont úgy az ABC , mint abc háromszögnek magasságpontja, mert a két háromszög oldalai párhuzamosak ($AB \parallel c$, stb.) és a megfelelő szögpontjukat összekötő egyenesek D ponton mennek át.

Minthogy az egyenoldalu hyperbola asymptotái egymásra merőlegesek, azért ezek végtelen távol fekvő pontjainak polárisai, x középpontján D -n átmenő, reájuk és így egymásra is merőleges egyenesek, melyek a parabolator egy parabolájának érintői. De minden parabola két egymásra merőleges érintője egymást a parabola vezérvonalában metszi (127.), és így a parabolator vezérvonalai D -n mennek át, vagy más szóval: *egy háromszögbe írható parabolák vezérvonalai a háromszög magasságpontján mennek át.*

Azon tétel, hogy «minden háromszögbe abc -be írt parabola vezérvonalai, a háromszög magasságpontján megy át» különben így is bebizonyítható: Ha abc háromszög körül egy új háromszöget UVW -t írunk, melynek oldalai abc háromszög oldalaival párhuzamosak, akkor UVW körül írt kör középpontja abc háromszögnek magasságpontja és UVW háromszög a parabolának polárháromszöge. De a parabola minden polárháromszöge körül írt kör a vezérvonalat derékszög alatt metszi, e végből UVW háromszög körül írt körnek közép-

pontja, vagyis abc háromszögnek magasságpontja, a vezérvonalon fekszik.

E tételnek következménye, hogy «egy tetszőleges négyoldal oldalaiból alakított négy háromszög magasságpontjai egyenesben fekszenek, mely a négyoldalba írható parabola vezérvonala».



100. ábra.

Mint hogy minden kúpszelet két érintőjének metszéspontját a gyújtópontokkal összekötő egyenesek az érintőkhöz felváltva egyenlő szög alatt hajlanak (131.), azért a parabolánál, melynek egyik gyújtópontja tengelyének végtelen távol fekvő pontja, a, b, c érintők (a, b) és (b, c) metszéspontját annak gyújtópontjával összekötő két egyenes a , illetve c érintővel ép oly szöget képez, mint a parabola tengelye b érintővel. Ebből következik: minden háromszögbe írt parabola gyújtópontja, azon háromszög körülírt körön fekszik; továbbá, hogy «egy négy oldalba írt parabola gyújtópontja azon pont, melyben a négyoldal oldalaiból képezett négy háromszög körül írt négy kör egymást metszi.»

164. A kúpszeletseregnek más különös esetét találjuk, ha azon két általános involúziós sugársor helyett, melynek kettőssugarai a kúpszeletseregnek alapérintői, czirkularis természetű involúziós sugársort választunk. Ekkor ugyanis a két sugársor középpontja S, T a kúpszeletsereg minden kúpszeletének gyújtópontja — fókusz-a — lesz, miért is ily kúpszeletsereget *konfokális* kúpszeletseregnek nevezik. — E kúpszeletsereg közös polárháromszögének oldalai: $|ST| \equiv |XZ_\infty|$, és $|ST|$ -re a felezőpontban emelt $|XY_\infty|$ merőleges, és a sík végtelen távol fekvő $g_\infty \equiv |Y_\infty Z_\infty|$ egyenese.

A *konfokális kúpszeletseregnek két tetszőleges közös kapcsolt polárisa egymásra merőleges*. Mert ha S valamint T gyújtópontokon át két tetszőleges egymásra merőleges sugárpárt (100. ábra)

$$|SA|, |SB|; |TA|, |TB|$$

húzzunk, melyek egymást A, B, C, D pontokban metszik, úgy e metszéspontok egy háromszögnek magasság- és szögpontjai: tehát $|AB|$, merőleges $|CD|$ -re és S, T gyújtópontokat harmonikusan választják el egymástól. De az előbbi sugárpárok kapcsolt polárisok, tehát $|AB|, |CD|$ szintén kapcsolt polárispár lesz. Innen következik:

egy tetszőleges G pontból a konfokális kúpszeletsereghez vont érintőpárok egyenoldalúan-hyperbolás természetű involúziós sugársort képeznek, mert kettőssugarai — a G -n átmenő kapcsolt polárisok — egymásra merőlegesek. Továbbá: a sík minden pontján két kúpszelet, egy ellipszis és egy hyperbola, fektethető át, mely egy konfokális kúpszeletsereghez tartozik; ezek egymást a felvett pontban derékszög alatt metszik. A felvett ponton átmenő kapcsolt polárisok azon kúpszeleteknek érintői a felvett pontban, és mert a kapcsolt polárisok egymásra merőlegesek, és egyik közülök S, T gyújtópontokat egymástól elválasztja, azért a kúpszeletek derékszög alatt metszik egymást és különböző neműek, t. i.: ellipszis és hyperbola.

Ha S, T pontok közül T végtelen távol vétetik fel, akkor a kúpszeletsor kúpszeletei *konfokális parabolák*. A sík minden pontján két egymást derékszög alatt metsző ily konfokális parabola megy át.

Könnyen belátható, hogy *tetszőleges G pont polárisai egy konfokális kúpszeletsereget illetőleg parabolát burkolnak, melynek vezérvonala G ponton és a kúpszeletsereg középpontján megy át*. E burkoló görbe ugyanis a kúpszeletsereg polárháromszögének oldalaít érinti, mely oldalak közül egyik végtelen távol van, tehát a burkoló görbe parabola. A polárháromszög másik két oldala a konfokális kúpszeletseregnek két közös tengelye, és mert ezen tengelyek valamint a G ponton átmenő kapcsolt polárisok egymásra merőleges érintői a burkoló görbének, azért a burkoló parabola vezérvonala, a kúpszeletsereg középpontján és G -n megy át.

165. A kúpszeletseregnek különös esete áll elő, ha a négy valós közös érintő a, b, c, d közül kettő-kettőt, pl. a és b, c és d -t, egy-egy egyenesbe fekvőnek vesszük fel, és megadjuk ezen egyesült a, b és c, d érintők A , illetve C metszéspontját: A -t az a -n, C -t a c -n. Ily kúpszeletsereg kúpszeletei, minthogy az a, c egyeneseket A, C pontokban, tehát egymást is e két pontban érintik, és mint ilyenek négy ponton mennek át, — kúpszeletsort is képeznek. E különös kúpszeletsereg- és kúpszeletsorhoz tartozó kúpszeleteket: *kettős érintésűeknek* neveztük (105., 144).

A kettős érintésű kúpszeletsereg A, C érintőpontjain átmenő x egyenes, polárisa ezen pontokban vont a, c érintők X metszéspontjának; x egyenesen fekvő kapcsolt pólusok, valamint X ponton átmenő kapcsolt polárisok valamennyi kúpszeletre nézve, egy perspektív helyzetű involúziós pont- és sugársort képeznek. Ezért a

kettős érintésű kúpszeletsereget így is értelmezhetjük: *mindazon kúpszeletek, melyekre vonatkozólag tetszőleges X ponton átmenő és x egyenesen fekvő perspektív helyzetű involúciós sugár- és pontsorok kapcsolt elemei kapcsolt polárisok, illetve kapcsolt pólusok: kettős érintésű kúpszeletsereget képeznek.* E kúpszeletekre vonatkozólag X és x szükségkép pólus és poláris. Ha az adott involúciós sorok hyperbolikusak, akkor a kúpszeletsereg kúpszeletei két valós érintőponttal és érintővel bírnak; ha pedig az involúciós sorok elliptikus természetűek, akkor az érintőpontok és érintők képzetesek.

Az ily kúpszeletsereg bizonyos tekintetben magában egyesíti a kúpszeletsor és kúpszeletsereg tulajdonságait, melyeket itt röviden felemlítünk.

A kettős érintésű kúpszeletseregnek végtelen sok közös polárháromszöge van, melyeknek egyik szögpontja a közös érintők metszőpontja X , és egyik oldala X -nek polárisa x ; a többi két szögpont x -en adott involúciós pontsor két tetszőleges kapcsolt póluspárja.

Egy ponton át, és hasonlóképp egy egyenest érintőleg csak egy kúpszelet szerkeszthető, mely a kettős érintésű kúpszeletsereghez tartozik. Tetszőleges g egyenes a kettős érintésű kúpszeletsereget involúciós pontsor szerint metszi, melynek egyik kettőspontja g és x metszőpontja; és tetszőleges G pontból az ily kúpszeletsereghez vont érintők involúciós sugársort képeznek, melyek egyik kettős-sugara $|GX|$ sugár.

Egy P pont polárisai a kettős érintésű kúpszeletseregbe vonatkozólag egymást x egyenes egy Q pontjában metszik, mely $|PX|$ és x metszőpontjához kapcsolt; hasonlóképp tetszőleges p egyenes pólusai egy q egyenesen fekszenek, mely X -n átmegy és (x, p) , X pontok összekötő egyeneséhez kapcsolt.

A kettős érintésű kúpszeletsereg o középponti vonala X ponton és x -en adott involúciós pontsor középpontján megy át; a kúpszeletek: ellipsisek, hyperbolák, egy egyenoldalú hyperbola, és egy parabola; ha o merőleges x -re, akkor a kúpszeletseregben egy kör is előfordul, mely képzetes is lehet.

21. §. Kúpszeletsorok projektív vonatkozása.

166. Tanultuk a 152. pontban, hogy «ha P , Q egy kapcsolt póluspár valamely kúpszeletsorra vonatkozólag, akkor Q ponton átmenő tetszőleges p ; egyenes, polárisa P pontnak a kúpszeletsor egy

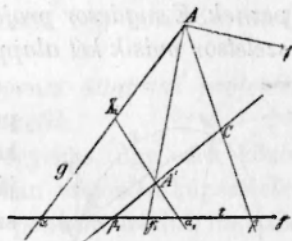
bizonyos kúpszeletére vonatkozólag». Másrészt tudjuk, hogy két tetszőleges P, P' pont p_i, p'_i polárisai a kúpszeletsorban változó k_i kúpszeletre vonatkozólag: két projektív sugársort képeznek; mert p_i, p'_i sugarak által leírt sorok képződménye azon γ kúpszelet, melyben $|PP'| \equiv g$ egyenesnek a kúpszeletsor kúpszeleteire vonatkozó pólusai fekszenek. Ezen tulajdonságok alapján a kúpszeletsor k_i elemeit projektív vonatkoztathatjuk azon sugársorra, melyet egy tetszőleges P pont p_i polárisai képeznek; k_i kúpszeletnek megfelel a sugársorban, P pontnak k_i -re vonatkozó p_i polárisa.

Ha a kúpszeletsor két vagy négy alappontja valós, akkor ezen alappontokban a kúpszeletsor elemeihez vont érintők: az alappontok polárisai, ezért: a kúpszeletsor alappontjaiban a kúpszeletsor elemeihez vont érintők projektív sugársort képeznek, mely egyszersmind projektív a kúpszeletsorral.

A kúpszeletsor elemei, annak egyik alappontján átmenő tetszőleges egyenest, a kúpszeletsorral projektív pontsor szerint metszik.

Ha a kúpszeletsor két valós alappontja A, C (101. ábra); a másik kettő pedig t -tartón fekvő involúziós pontsor valós vagy képzetes kettőspontja, és A -n átmenő g egyenes a kúpszeletsornak egyik kúpszeletét k_i -t X_i -ben metszi, akkor ezen k_i kúpszeletnek egy új pontja A' : az $|X_i\alpha_1|, |C\beta_1|$ egyeneseknek metszőpontja; hol α_1, β_1 — t -n adott involúziós pontsorban $|AX_i|$ és t , valamint $|AC|$ és t egyenesek α, β metszőpontjához kapcsolt pont (96.). A, A' pont érintői egymást az $|AA'|$ és t közös γ_1 pontjához kapcsolt γ pontban metszik. k_i változásával a kúpszeletsorban, k_i -nek $|A\gamma|$ érintője A pontban, egy sugársort; γ_1 az $|A\gamma|$ sugársorral projektív pontsört; A' pont, mint γ_1 -nek projekciója A -ból $|C\beta_1|$ -re, γ_1 -gyel projektív pontsört; végre X_i , vagyis a változó k_i kúpszeletnek második metszőpontja $|AX_i| \equiv g$ -vel, mint A' -nek projekciója α_1 -ből g -re: $A', \gamma_1, \gamma, |A\gamma|$ sorokkal projektív pontsört ír le.

E tételnek következménye: a kúpszeletsor két egyenest, mely ugyanazon vagy különböző alapponton megy át projektív pontsorok szerint metsz; e projektív pontsorok általános vagy perspektív helyzetűek a szerint, a mint a két egyenes ugyanazon, vagy különböző alapponton megy át.



101. ábra.

Ha ugyanis a két egyenes különböző alapponton lett átfektetve, úgy azoknak közös pontján átmenő és a kúpszelet sorhoz tartozó kúpszelet, a két egyenes egymásnak *megfelelő* közös pontban metszi, tehát a két egyenesen a kúpszelet sor által kimetszett projektív sor perspektív helyzetű. Ez utóbbi tulajdonság specialis esetét képezi a következőnek:

167. Ha egy kúpszelet sor két alappontján át egy tetszőleges α kúpszeletet fektetünk, akkor α a kúpszelet sor egyes elemei még két-két pontban metszi, melyeknek összekötő egyenesét egy sugársort képeznek. E sugársor projektív a kúpszelet sorral és középpontja a kúpszelet sor másik két alappontján átmenő egyenesen fekszik.

Nevezzük a kúpszelet sor azon két alappontját, melyen α át megy A, B -nek; a másik két alappontot C, D -nek; α -nak metszéspontját $|CD|$ -vel E, F -nek; $|AB|$ és $|CD|$ metszéspontját U -nak, végre a kúpszelet sorban változó k kúpszelet és α más két metszéspontját, P, Q -nak; $|PQ|$ és $|CD|$ közös pontját T -nek (102. ábra).

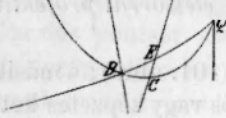
$|AB|, |PQ|$ egyenespár, k , és α kúpszelet, három ugyanazon négy ponton átmenő kúpszelet, mely minden egyenest, és így $|CD|$ -t is involúziót képező hat pontban metsz, tehát

$C, D; E, F; U, T$

102. ábra.

egy involúziós pontsornak három kapcsoló pontpárja. E pontok közül k változáskor a kúpszelet sorban, csak T , mint a változó $|PQ|$ -n fekvő pont, változhat; de mert T az állandó U pontnak kapcsoló pontja, azért T is állandó marad, és így: $|PQ|$, mint α és a változó k metszéspontjait P, Q -t összekötő egyenes, mindig T ponton megy át. Minthogy T -nek a változó k kúpszeletre vonatkozó t polárisai a kúpszelet sorral projektív sugársort képeznek; T -nek α és k -ra vonatkozó τ és t polárisai pedig egymást $|PQ|$ -nak egy pontjában, (mely P, Q -t T -től harmonikusan elválasztja) metszi; végre minthogy a változó $t, |PQ|$ metszéspontjai mindig τ egyenesen vannak; azért T pontnak a kúpszelet sorra vonatkozó t polárisai, $|PQ|$ sugár által leírt sugársorral projektív sugársort képeznek.

Az imént bebizonyított tétel különben így is kifejezhető: Egy kúpszelet sor bármely α kúpszeletet, mely a kúpszelet sor két alap-



pontján megy át: egy involucziós pontsor kapcsolt pontpárjaiban metszi; vagy fordítva: «mindazon kúpszeletek, melyek egy κ kúpszeleten fekvő involuczió pontsor kapcsolt pontpárjain, továbbá κ -nak két tetszőleges állandó pontján, végre a síknak egy állandó pontján átmennek, kúpszeletsort képeznek, — tehát még egy negyedik közös ponttal bírnak».

Ha a kúpszeletsornak csak két elemét vesszük tekintetbe, akkor a tételt így is fogalmazhatjuk: *Ha három kúpszelet egy közös szelővel bír, akkor két-két kúpszeletnek azon szelői, melyek az előbbi szelővel nem metszik egymást a kúpszeleteken, egy pontban találkoznak.*

168. *A kúpszeletsor két tetszőleges egyenes által két projektív vonatkozású involucziós pontsor szerint metszetik.*

Ha g, l a kúpszeletsort metsző két egyenes, úgy ezek közös $(g, l) \equiv P$ pontjának polárisai a kúpszeletsorban változó k kúpszeletre nézve, g, l egyeneseket oly két projektív pontsor szerint metszik, melyeknek elemei: a kúpszeletsor által g -n és l -n kimetszett involucziós pontsor kapcsolt pontpárjait P -től harmonikusan választják el. Ebből következik, hogy a kúpszeletsor g és l -et projektív vonatkozású involucziós pontsorban metszi (86.).

169. *Két kúpszeletsort projektív vonatkoztatunk egymásra, ha azon két sugársort, melyet egy P pont polárisai az első kúpszeletsorban és egy P' pont polárisai a második kúpszeletsorban képeznek, egymásra projektív vonatkoztatjuk; a kúpszeletsorokban oly két kúpszelet felel meg egymásnak, melyekre vonatkozólag P illetve P' -nek polárisai, a polárisokból álló sugársorokban, egymásnak megfelelők.*

Ha két kúpszeletsor közül az egyiket g , a másikat tetszőleges g' egyenessel metszéshez hozzuk, és a kimetszett involucziós pontsorokat egymásra projektív vonatkoztatjuk, akkor a kúpszeletsorok is projektív vannak egymásra vonatkoztatva; oly két kúpszelet, mely az involucziós sorok egymásnak megfelelő kapcsolt pontpárjain átmegegy, egymásnak megfelelő. Ezen, és az előbbi vonatkoztatása a kúpszeletsoroknak lényegében nem különbözik egymástól, mert g és g' -en kimetszett involucziós pontsorok vonatkoztatása oly két egyszerű pontsor által történik, mely projektív, P, P' pont polárisaiból képezett sugársorokkal.

Ha egy pont polárisai valamely kúpszeletsorra nézve, projektívek egy egyszerű sugársorral, akkor a kúpszeletsor is projektív

ezen egyszerű sugársorral; a kúpszeletsor egyik k kúpszeletének azon sugár felel meg a sugársorban, mely a felvett k kúpszeletre vonatkozó polárisnak megfelelő sugár.

170. *Két ugyanazon tartón fekvő projektív vonatkozású involúziós pontsornak négy megfelelőleg közös pontja van, mely párosával képzetes is lehet.*

Tegyük fel, hogy a két involúziós pontsor egy k kúpszeleten fekszik, és hogy ezen soroknak pólusa P, P' pont (82). A két projektív involúziós pontsor kapcsolt pontpárjait összekötő sugarak, két projektív sugársort írnak le P és P' körül, melynek képződménye α kúpszelet. k és α -nak négy közös pontja oly tulajdonságú, hogy azok mindegyikében az egyik és másik involúziós pontsor megfelelő kapcsolt pontpárjának egy-egy eleme egyesül.

Ha a két involúziós pontsornak egy megfelelőleg közös kapcsolt pontpárja van, akkor P, P' sugársorok perspektivek, tehát α két egyenesből áll. Ezek közül $|PP'|$ egyenes k -t a megfelelőleg közös kapcsolt pontpárban, a másik egyenes pedig a másik két megfelelő pontban I, K -ban metszi. Ha A, A_1 ; és A', A'_1 két egymásnak megfelelő kapcsolt pontpár a projektív vonatkozású involúziós sorokban, akkor $|AA_1|, |A'A'_1|$ két egymásnak megfelelő sugár az egyszerű P, P' sugársorokban, és mert ez utóbbiak jelen esetben perspektív helyzetűek: $|AA_1|, |A'A'_1|$ sugarak egymást $|IK|$ -ban metszik, tehát $A, A_1; A', A'_1; I, K$ pontpárok involúziót képeznek. Ezért mondhatjuk: *ha két, közös tartón fekvő, projektív vonatkozású involúziós pontsor egy megfelelő közös kapcsolt pontpárral bír, akkor a másik két megfelelő közös pont, két tetszőleges megfelelő kapcsolt pontpárral involúziót képez.* —

Egy involúziós pontsor és egy véle projektív és ugyanazon kúpszeleten (vagy egyenesen) fekvő egyszerű pontsor, három megfelelőleg közös ponttal bír, melyek közül egyik mindig valós, a másik kettő képzetes is lehet.

Ha a projektív pontsorok k kúpszeleten fekszenek, és az involúziós pontsornak pólusa P , k -nak tetszőleges pontja Q , akkor az involúziós pontsor kapcsolt pontpárjait projicziáló $\{P\}$ sugársor, és az egyszerű pontsornak pontjait Q -ból projicziáló $\{Q\}$ sugársor projektív egymással, és ezért képződményük α kúpszelet. α és k -nak négy közös pontja van, melyeknek egyike Q ; a többi egy vagy három valós közös pontban az involúziós és az egyszerű pontsornak egy-egy megfelelő eleme egyesül.

171. *Két projektív kúpszeletsor, valamint két projektív involúziós sugársornak képződménye oly görbe, melyet minden egyenes négy pontban metsz, — tehát negyedrendű görbe. E negyedrendű görbe átmegy a kúpszeletsoroknak alappontjain.*

Tetszőleges egyenes a kúpszeletsorokat két projektív involúziós pontsor szerint metszi, melyeknek általában négy megfelelő közös pontjuk van. Minden ily pontban az első kúpszeletsornak egyik kúpszelete, a második sorban neki megfelelő kúpszeletét metszi; tehát azon négy pont a két projektív kúpszeletsor képződményének egy-egy pontja. Ha az első kúpszeletsor egyik alappontja A , akkor azon a második kúpszeletsornak egy kúpszelete fektethető át; ezért A -ban a két kúpszeletsor két kúpszelete metszi egymást.

Az involúziós sugársor sugárpárjai elfajult kúpszeletek; és mert az involúziós sugársor azon tulajdonsággal bír, mint a kúpszeletsor t. i. hogy egyenes által involúziós pontsor szerint metszetik, azért az involúziós sugársor elfajult kúpszeletsornak tekinthető. —

Egy sugársor és egy véle projektív kúpszeletsor vagy involúziós sugársor képződménye oly görbe, mely egyenes által három pontban metszhető, — tehát harmadrendű. E görbe átmegy a kúpszeletsornak alappontjain és a sugársornak középpontján.

Tetszőleges egyenes a kúpszeletsort involúziós pontsorban, a sugársort egyszerű pontsorban metszi, melyek három közös ponttal bírnak. E pontok mindegyikében a kúpszeletsor egy kúpszelete, a sugársorban neki megfelelő sugarat metszi, tehát e pontok a képződménynek pontjai. Ugyanigy bizonyítható be, hogy egy involúziós sugársor és egy véle projektív egyszerű sugársor képződménye harmadrendű görbe; ez az előbbtől abban különbözik, hogy ennek az involúziós sugársor középpontjában valós kettőspontja van.

Ha két involúziós sugársor, mely projektív van egymásra vonatkoztatva, egy megfelelőleg közös sugárral bír, akkor a többi megfelelő sugarak metszőpontja egy harmadrendű görbét képez. Ily involúziós sugársorok, félig-perspektív helyzetű involúziós sugársoroknak neveztetnek. (Schröter: «Theorie der ebenen Kurven dritter Ordnung». 1888. 14. lap.)

Két involúziós sugársor képződménye tetszőleges egyenes által négy pontban metszetik, melyek közül az egyik mindig a megfelelő közös sugáron van; ezen közös sugár tehát egy része a képződménynek; a másik rész, melyet minden egyenes három pontban metsz; harmadrendű görbe.

ugyanaz:

x, k_2 és k'_1, k_3 metszőpontjai — kúpszeleten fekszenek, tehát
 x, k_3 „ k'_1, k'_2 „ „ „ „

De mert:

k_1, k'_1 és k_2, k'_2 metszőpontjai x kúpszeleten fekszenek, azért
 k_1, k_2 „ k'_1, k'_2 „ vagyis a kúpszeletsorok alappontjai

szintén egy k kúpszeleten fekszenek. x tehát a k_1, k_2, k_3, \dots ; és k'_1, k'_2, k'_3, \dots kúpszeletsorok megfelelő elemeinek metszőpontján megy át, mely kúpszeletsoroknak alappontjai k -n vannak, s ezért a két kúpszeletsor projektív egymáshoz.

Ebből látható, hogy mikép lehet egy $k_1, k_2, k_3; \dots$ kúpszelet-sort, más kúpszeletsorra, melynek egyik alappontja A' adva van, egy x kúpszelet közvetítésével, projektív vonatkoztatni (169).

IV. FEJEZET.

A kollineáció és recziprocitás.

22. §. A kollineáció és különös esetei.

173. Az előbbi két fejezetben projektív sugársorok és pontsorok képződményével, a kúpszelettel foglalkoztunk. Megismerkedtünk ennek számos tulajdonságával és e tulajdonságon alapuló szerkesztésekkel. Projektív sugársorok és pontsorok alatt pedig sugársorok és pontsoroknak egy bizonyos kölcsönös vonatkozását értettük, olyképen: hogy minden elemnek az egyik sorban megfelelt egy elem a másikban és hogy négy megfelelő elem kettős viszonya mindig egyenlő volt egymással.

De nemcsak két egyenes pontjait, vagy két sugársor sugarait lehet egymásra vonatkoztatni, hanem *egy sík összes pontjait és egyeneseit egy másik sík összes pontjaira és egyeneseire oly módon lehet vonatkoztatni, hogy az egyik S sík minden P pontjának és azon ponton átmenő g sugársornak egy P_1 pont és azon átmenő g_1 sugár feleljen meg a másik — S_1 — síkban.* E vonatkozását két sík pontjai- és sugarainak *kollinear vonatkozásnak*, vagy *kollineációnak* nevezzük.* Hogy S sík pontjait és sugarait, melyet együttvéve *sík-rendszernek*, külön-külön pedig *pont-mező-*, és *sugár-mezőnek* lehet nevezni, egy más sík S_1 pontjai és sugaraira ily módon vonatkozathatjuk, kitűnik a következőkből:

Vegyünk fel S síkban két sugársort A, B középponttal; S_1 síkban két sugársort A_1, B_1 középponttal, és vonatkoztassuk A, A_1 , valamint B, B_1 középponttal bíró sugársorokat projektív egymásra, de úgy, hogy $|AB|$ és $|A_1B_1|$ sugarak A, A_1 sugársorokban, úgyszintén $|BA|$, $|B_1A_1|$ sugarak B, B_1 sugársorokban egymásnak megfelelők legyenek. S sík-mező minden P pontjának, melyben A, B sugársorok $|AP|$, $|BP|$ sugarai egymást metszik, feleljen meg S_1 síkban

* MÖBIUS: Der barycentrische Calcul; 1886. 266 lap.

azon P_1 pont, melyben $|AP|$, $|BP|$ -nek megfelelő $|A_1P_1|$, $|B_1P_1|$ sugarak az A_1 , B_1 sugársorokból találkoznak.

E szerint S sík-mező minden pontjának — $|AB|$ sugár pontjainak kivételével — az S_1 síkban megfelelő pont, a nevezett projektív sugársorok vonatkozása alapján vonalosan szerkeszthető.

S síkban fekvő tetszőleg g egyenes pontjainak, e vonatkozás alapján megfelelő pontok egy g_1 egyenesen fekszenek. g pontjait A , B -ből projicziáló sugársorok sugarai ugyanis g pontsor által projektív lesznek egymásra vonatkoztatva, és e projektív vonatkozáson kívül még perspektív helyzetűek; úgyszintén A_1 , B_1 sugársorok is, melyek g -pontjainak megfelelő pontokat projicziálják, projektívek egymáshoz. De mert g és $|AB|$ metszéspontját projicziáló $|AB|$. $|BA|$ sugárnak megfelelő sugara A_1 , B_1 sugársorban: $|A_1B_1|$, illetve $|B_1A_1|$; ezek pedig megfelelőleg közös sugarak, azért: g pontjainak megfelelő pontokat projiczeáló sugársorok perspektív helyzetűek, és így metszőpontjaik egyenesen fekszenek.

Ehhez járul még, hogy S sík g egyenesén fekvő pontsornak megfelelő pontjai S_1 síkban, g pontsorról projektív pontsort képeznek g_1 -en, mert az első pontsort A -ből projicziáló sugársor projektív, a másodikat A_1 -ből projicziáló sugársorral.

Ha T , T_1 pontpár S , S_1 pont mezőnek megfelelő pontja, akkor g pontsort T -ből projicziáló sugársor is projektív g_1 pontsort T_1 -ből projicziáló sugársorral, és mert ezen T , T_1 sugársorok azon sugarai, melyek g , illetve g_1 -nek megfelelő pontjain átmennek, egymásnak megfelelő egyenesek S , S_1 síkrendszerben, azért: *ha S síkrendszer S_1 síkrendszerre kollinear van vonatkoztatva, akkor S -ben fekvő minden pontsornak és sugársornak, S_1 síkban egy az előbbivel projektív pontsor és sugársor felel meg.*

T , T_1 sugársor két megfelelő sugara $|AB|$, illetve $|A_1B_1|$ -et két megfelelő pontban metszi, miből látható, hogy: $|AB|$, $|A_1B_1|$ -en fekvő pontsorok szintén projektívek egymáshoz.

174. «Ha két síkrendszert kollinear akarunk egymásra vonatkoztatni, akkor az egyik síkrendszer négy

pontjának A , B , C , D -nek, melyek közül kettőnél több nem fekszik egyenesben, megfelelő négy pontját A_1 , B_1 , C_1 , D_1 -et, melyek közül szintén kettőnél több nem fekszik egyenesben,

egyenesének a , b , c , d -nek, melyek közül kettőnél több nem megy ugyanazon ponton át, négy megfelelő egyenesét a_1 , b_1 , c_1 , d_1 -et, melyek közül szintén kettőnél több nem metszi egymást, egy pontban

tetszőlegesen választhatjuk, mi által a collinear vonatkozás teljesen meg van határozva».

Ha ugyanis X, S sík-mezőnek tetszőleges pontja, és $|A_1X_1|, |B_1X_1|$ sugarakat úgy szerkesztjük, hogy :

$$A(BCDX) \bar{\wedge} A_1(B_1C_1D_1X_1), \text{ és } B(ACDX) \bar{\wedge} B_1(A_1C_1D_1X_1),$$

akkor, $|A_1X_1|, |B_1X_1|$ sugarak X_1 metszőpontja X -nek megfelelő pont.

Ha továbbá a jobb oldalon lévő adatokat tekintjük és a két sík-rendszert úgy vonatkoztatjuk egymásra, hogy

$$(a, b), (b, c), (c, d), (d, a) \text{ pontoknak,} \\ (a_1, b_1), (b_1, c_1), (c_1, d_1), (d_1, a_1) \text{ pontok}$$

feleljenek meg, akkor a, b, c, d egyeneseknek megfelelnek a_1, b_1, c_1, d_1 egyenesek, és ezen eset az előbbire van visszavezetve.

Ebből következik, hogy «ha két ugyanazon síkban fekvő kollinear síkrendszer négy megfelelőleg közös ponttal bír, melyek közül három nem fekszik egyenesben, akkor a két a kollinear síkrendszer minden megfelelő pontja és egyenese közös».

175. Nevezzük két egymásra kollinear vonatkoztatott S, S_1 síkrendszer végtelen távol fekvő egyenesét q_∞ -, illetve $r_{1\infty}$ -nek, az ezeknek megfelelő egyeneseket q_1 , illetve r -nek. q_1, r egyenesek általában nem lesznek végtelen távol, mert S sík q_∞ egyenesének pontjait A, B pontokból projicziáló sugársoroknak megfelelő A_1, B_1 sugársorok nem lesznek egymással párhuzamosak, és viszont A_1, B_1 sugársorok párhuzamos sugarainak megfelelő sugarak A, B sugárookban, nem párhuzamosak egymással.

S, S_1 kollinear síkrendszer azon r, q_1 egyenseit, melyek S_1, S síkok végtelen távol fekvő $r_{1\infty}, q_\infty$ egyenseinek megfelelnek: *ellentengelyeknek* nevezzük.

Az ellentengelyek értelmezéséből következik, hogy S síkrendszer tetszőleges párhuzamos sugársorának oly sugársor felel meg, melynek középpontja q_1 ellentengelyben van, és S_1 síkrendszer bármely párhuzamos sugársorának megfelelő sugársor középpontja r -ben fekszik; de q_1 -gyel párhuzamos sugársornak r -rel párhuzamos sugársor fog megfelelni, mert q_1 és r végtelen távol fekvő pontjai egymásnak megfelelő pontok.

Mínthogy S, S_1 síkrendszer r, q_1 ellentengelyének R, O_1 metszőpontja két megfelelő g, g_1 egyenessel, ellenpontját képezi a kollinear rendszerekben megfelelő g, g_1 -en fekvő projektív pontsoroknak,

azért az *ellentengelyekkel párhuzamos megfelelő egyeneseken fekvő projektív pontsorok hasonlóan-projektívek*. Ezt tekintve, kérdezzük: «létezik-e az ellentengelyekkel párhuzamos megfelelő egyenespár, melyen a megfelelő projektív pontsorok *egyenlően-projektívek*?»

Hogy e kérdésre felelhessünk, vegyünk fel S síkban (103. ábra) két párhuzamos egyenest g, l -et, mely r ellentengelyt G, L -ben metszi; g és l -nek megfelelő g_1, l_1 egyenesek q_1 -nek egy pontján Q_1 -en mennek át. q_1 -gyel két egyenes s_1, s'_1 húzható párhuzamoson q_1 -től egyenlő távolságra, melyről q_1, l_1 ép oly hosszúságú részt metsz le, mint GL köz hosszúsága; és ezen s_1, s'_1 -nek megfelelő s, s' egyenesekről, melyek szintén párhuzamosak r -rel, g, l egyenesek GL közzel egyenlő részt metszenek le. Ebből látható, hogy s, s_1 , valamint s', s'_1 egymásnak megfelelő egyenespárokban fekvő projektív pontsorok nemcsak hasonlóan-projektívek, mint minden az r, q_1 ellentengelyekkel párhuzamos megfelelő egyeneseken fekvő pontsorok, hanem egyszersmind *egyenlően-projektívek*. s, s' egyenesek szintén egyenlő távolságra vannak r ellentengelytől, mert $(ss'r q_\infty) \wedge (s_1 s'_1 r_\infty q_1) = -1$, tehát ss' szalagot, r ellentengely felezi.

176. S, S₁ kollinear vonatkozású síkrendszerekben mindig létezik oly egymásnak megfelelő egyenespár m, m_1 , mely merőleges az ellentengelyekre: m az r -re, m_1, q_1 -re. r -re merőlegesen álló, tehát párhuzamos sugaraknak ugyanis oly sugársor felel meg, melynek Q_1 középpontja q_1 -ben fekszik; ez utóbbi sugarak között van egy, mely merőleges q_1 -re, és ezen egy m sugárnak megfelelő m_1 sugár merőleges r -re. (Kollinear síkrendszerekben különben oly megfelelő egyenesek g, g_1 is találhatóak, melyek az ellentengelyekkel bármily nagyságú egyenlő szögeket képeznek.)

Az ellentengelyekre merőlegesen álló megfelelő m, m_1 egyeneseken két oly pontpár található, mely két egymásnak megfelelő és *egyenlően projektív sugársoroknak* középpontja (104. ábra).

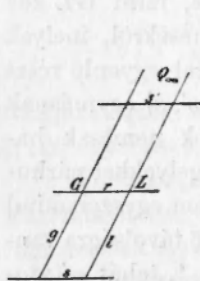
Nevezzük r ellentengely és az előbb talált s, s' egyeneseknek metszéspontját m -el R , illetve: S, S' -nek; m_1 -nek metszéspontját q_1, s_1, s'_1 -gyel: Q_1, S_1, S'_1 -nek. m, m_1 egyeneseken fekvő projektív pontsorokban az egymásnak megfelelő egyenlő közök egyikének végpontja S ; ezen köz másik végpontjának O -nak megfelelő pontja O_1, Q_1 -től ép oly távolságra van, mint S, R -től, úgy hogy: $RS = Q_1 O_1$, és $OS = S_1 O_1$ (17).

Hasonlóképp lehet m, m_1 -ben oly két megfelelő pontot O', O_1 -et szerkeszteni, hogy: $O'S' = S_1O_1$.

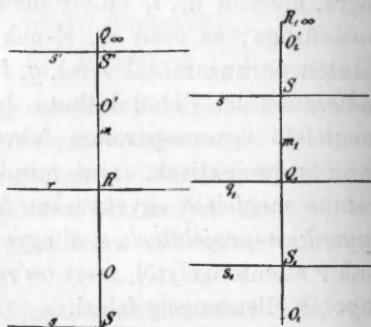
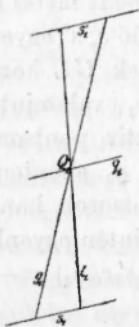
Ezen O, O_1 és O', O_1 megfelelő pontpárok a két kollinear síkrendszer egyenlően projektív sugársorainak középpontjai.

Ha ugyanis X, X_1 az s, s_1 egyeneseknek megfelelő pontpárja, akkor s, s_1 egyenesek ama kiváló tulajdonságát tekintve, hogy a rajta fekvő pontsorok egyenlően-projektívek: $XS = X_1S_1$, és mert $OS = S_1O_1$,

$$\sphericalangle XOS = \sphericalangle X_1O_1S_1,$$



103. ábra.



104. ábra.

tehát O, O_1 -en átmenő tetszőleges megfelelő $|OX|, |O_1X_1|$ sugarak m , illetve m_1 -gyel egyenlő szöget képeznek, a miből következik, hogy: O, O_1 középponttal bíró megfelelő sugársorok egyenlően-projektívek. Ugyanígy bebizonyítható O', O_1 pontoknak e tulajdonsága.

Az egyenlően-projektív sugársorok középpontjait: O, O' és O_1, O_1 -et, az egyenlően-projektív pontsorok tartóitól s, s' ; s_1, s_1 -től függetlenül is szerkeszthetjük:

S sík tetszőleges párhuzamos sugársorának, melynek sugarai r -hez φ szög alatt hajlanak, megfelel S_1 -ben egy sugársor, melynek középpontja q_1 -ben van. Ez utóbbi sorban két oly sugarat g_1, g_1 -et találunk, mely q_1 -hez φ szög alatt hajlik; ezeknek megfelelő g, g' sugarak r -rel szintén φ szöget képeznek. Ha l, l_1 és l', l_1 más két megfelelő sugárpár, mely r, q_1 -hez egyenlő szögek (pl. ψ szög) alatt hajlik, akkor $g, l, r; g_1, l_1, q_1; g', l', r'; g_1, l_1, q_1$ oldalakból képezett háromszög szögei egyenlők és így: $(g, l) \equiv O, (g', l') \equiv O'; (g_1, l_1) \equiv O_1, (g_1', l_1') \equiv O_1$ pontok az egyenlően projektív megfelelő sugársoroknak középpontjai.

A talált eredményeket egybefoglalva, így fejezhetjük ki:

Ha S, S_1 két kollinear vonatkozású síkrendszer, akkor S -ben mindig van két oly az r ellentengelytől egyenlő távolságra levő egyenes s, s' , melyen fekvő pontsorok egyenlően-projektívek a neki megfelelő és q_1 ellentengelytől egyenlő távolságra levő s_1, s'_1 egyeneseken fekvő pontsorokkal. Úgyisint találunk S -ben oly két sugársort O, O' középponttal, melyeknek ezekkel egyenlően-projektív O_1, O'_1 sugársorok felelnek meg; O, O' és O_1, O'_1 pontok r , illetve q_1 ellentengelytől ép oly távolságra vannak az ellentengelyekre merőleges megfelelő m, m_1 egyeneseken, mint s_1, s'_1 egyenesek q_1 -től, illetve s, s' egyenesek r -től.

177. Helyezzük most a két kollinear síkrendszert S, S_1 -et egymásra úgy, hogy az s -en fekvő pontsor elemei a vele egyenlően-projektív s_1 pontsor megfelelő elemeivel egybeesnek. Ezen elhelyezésnél m összeesik m_1 -gyel, S, S_1 -gyel, és vagy O pont kerül O_1 -re, vagy O', O'_1 -re és így, vagy az $O \equiv O_1$ ponton vagy $O' \equiv O'_1$ ponton átmenő összes megfelelő sugarak egymásra esnek. Ha P, P_1 két megfelelő pont, akkor $|OP|, |O_1P_1|$ két megfelelő sugár, és mert ezek $O \equiv O_1$ -en mennek át, azért egybeesnek, vagyis két tetszőleges megfelelő pontpár P, P_1 összekötő egyenese $O \equiv O_1$ -en (vagy $O' \equiv O'_1$ -en) megy át. Ugyanígy: ha p, p_1 két tetszőleges megfelelő egyenes, akkor $(s, p), (s_1, p_1)$ két megfelelő pont; de most a közös $s = s_1$ -en a megfelelő pontok egybeesnek, azért $(s, p) \equiv (s_1, p_1)$, tehát: két tetszőleges megfelelő egyenes, ezen elhelyezésnél egymást $s \equiv s_1$ -en metszi.

Ugyanezen helyzetet, melynél a megfelelő pontpárok összekötő egyenesei egy ponton mennek át és a megfelelő egyenespárok metszéspontjai egyesén fekszenek, az által is elérhetjük, hogy a két síkrendszernek s', s'_1 egyenesein fekvő egyenlően-projektív pontsorait megfelelő elemeivel egymásra helyezzük, a mi szintén kétféleképp lehetséges, t. i. hogy vagy O, O_1 , vagy O', O'_1 pontok kerülnek egybe.

«Ha két ugyanazon síkban fekvő kollinear síkrendszer megfelelő egyeneseseinek metszéspontjai egy egyenesen ($s \equiv s_1$, vagy s', s'_1 -en) fekszenek, mely önmagának megfelelő, tehát egyszersmind a megfelelő pontok összekötő egyenesei, egy önmagának megfelelő ponton ($O \equiv O_1$, vagy $O' \equiv O'_1$ -en) mennek át, akkor a két síkrendszert perspektív helyzetűnek nevezzük. Azon egyenes, melyben a megfelelő egyenespárok egymást metszik; kollineáció-tengely, azon pont, melyen a megfelelő pontpárok összekötő egyenesei átmennek: kollineáció-középpont».

E szerint két kollinear vonatkozású síkrendszer négyféleképp

hozható egy síkban perspektív helyzetbe, t. i. úgy, hogy az s, s', s_1, s'_1 vonalak és O, O', O_1, O'_1 pontok közül:

		s összeesik s_1 -gyel és O összeesik O_1 -gyel,			
vagy	s	«	s_1	«	O' « O'_1
vagy	s'	«	s'_1	«	O « O_1
vége	s'	«	s'_1	«	O' « O'_1

Ebből látható, tekintettel arra, hogy a kollinear vonatkozás két négyszög megfelelő szögpontjai vagy oldalai által meg van határozva, hogy «két tetszőleges négyszög $ABCD, A_1B_1C_1D_1$ négyféleképp hozható perspektív helyzetbe, vagyis oly helyzetbe, hogy $|AA_1|, |BB_1|, |CC_1|, |DD_1|$ sugarak egymást egy pontban messék és $|AB|, |A_1B_1|; |BC|, |B_1C_1|$ stb. négyszögdoldalak és átlók metszéspontjai egyenesben fekszenek». A szerkesztés következőképp történik:

Ha $|AB|, |CD|$ és $|A_1B_1|, |C_1D_1|$ oldalak metszéspontja E , illetve E_1 , úgy ezen egyeneseken R, R', Q_1, Q'_1 pontokat szerkesztünk következő relációk alapján:

$$\begin{aligned} (ABER) &= (A_1B_1E_1R_1\infty) = A_1E_1 : B_1E_1, \\ (CDER') &= (C_1D_1E_1R_1\infty) = C_1E_1 : D_1E_1, \\ (A_1B_1E_1Q_1) &= (ABEQ_\infty) = AE : BE, \\ (C_1D_1E_1Q'_1) &= (CDEQ'_\infty) = CE : DE; \end{aligned}$$

$|RR'| = r$, és $|Q_1Q'_1| = q_1$ képezik a kollinear síkrendszerek ellentengelyeit.

$Q_1Q'_1$, illetve RR' oldal fölé két-két $RR'E$, illetve $Q_1Q'_1E_1$ háromszöggel hasonló háromszöget: $Q_1Q'_1O_1 \sim Q_1Q'_1O'_1$, illetve $RR'O \sim RR'O'$, szerkesztünk, és a két így előkészített idomot oly módon egyesítjük, hogy $O, O_1; O, O_1; O', O_1; O' O_1$ pontpárok közül egyik összeessék, és a mellett r párhuzamos legyen q_1 -gyel. $ABCD, A_1B_1C_1D_1$ négyszögek akkor már perspektív helyzetben lesznek. Az egyesített pontpár, pl. O, O_1 , képezi a kollineáció-középpontot, és két megfelelő oldal $|AB|, |A_1B_1|$ metszéspontján át húzott s egyenes, a kollineáció-tengelyt.

178. Ha két síkrendszert kollinear akarunk egymásra vonatkoztatni úgy, hogy azok mindjárt perspektív helyzetben legyenek, akkor s kollineáció-tengelyt és O kollineáció-középpontot tetszőlegesen választhatjuk, és azonkívül az O -n átmenő egyenesen két egymásnak megfelelő pontot A, A_1 -et, melyek közül egyik sincs O -ban vagy s -ben. s -nek két pontját E, F -nek nevezvén, látható, hogy e felvétellel az

egyik síkrendszer négy pontja O, A, E, F , és a másik síkrendszerben ezeknek megfelelő négy pont $O_1 \equiv O, A_1, E_1 \equiv E, F_1 \equiv F$ szintén meg van adva, és két síkrendszerben négy egymásnak megfelelő pontpár, melyek közül kettőnél több nem fekszik egyenesben, meghatározza a kollinear vonatkozást (105. ábra.).

Ha B, B_1 más két megfelelő pontja a kollinear síkrendszereknek, akkor $|BB_1|$ átmegy O -n és $|AB|, |A_1B_1|$ megfelelő egyenesek egymást s -en metszik; tehát B pontból, B_1 szerkeszthető. O -n át $|AB|$ -vel, és $|A_1B_1|$ -gyel párhuzamosan menő $|OQ_1|$, illetve $|OR|$ egyenes $|A_1B_1|$ és $|AB|$ -t: Q_1 és R -ben metszi, mely pontok q_1, r ellentengelyeknek pontjai. A kollineáció középponton át húzott tetszőleges $g \equiv g_1$ egyenesen fekvő megfelelő projektív pontsorok ellenpontjai: az ellentengelyeknek $(g, r), (g, q_1)$ metszéspontjai g -vel, és a mindenkor valós két kettőspont: O és $(g, s) = S$.

Ha $B, B_1; C, C_1$, két ugyanazon g egyenesen fekvő, A, A_1 azon kívül levő megfelelő pontpár, és $|AA_1|$, s -et S' -ben metszi, akkor nemcsak (26.)

$$(OSBB_1) \bar{\wedge} (OSCC_1),$$

hanem a perspektív helyzet következtében

$$(OSBB_1) \bar{\wedge} (OS'AA_1), \text{ tehát}$$

$$\frac{OA}{OA_1} : \frac{S'A}{S'A_1} \text{ viszony értéke állandó.}$$

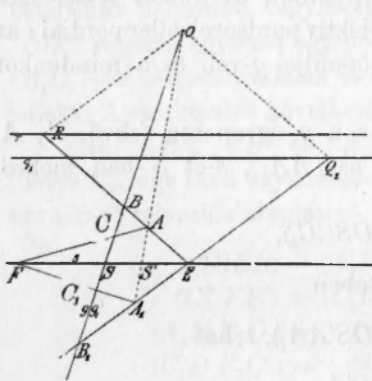
E szerint: két perspektív helyzetű kollinear síkrendszer két tetszőleges megfelelő pontjának távolsági viszonya a kollineáció-középponttól és kollineáció-tengelytől, egymással osztva, állandó hányados ad. Ezen hányados, mely adott kollineáció középpont és tengely mellett a kollinear vonatkozást meghatározza, ép úgy, mint egy adott megfelelő pontpár A, A_1 , vagy egyenespár $|AB|, |A_1B_1|$: a perspektív helyzetű kollinear-rendszer *charakteristikájának* neveztetik. A szerint, a mint ezen Δ karakteristika negatív vagy pozitív előjelű, a megfelelő pont- és egyenespárak el vannak választva vagy nincsenek elválasztva a kollineáció-középpont és tengely által.

179. Ha a karakteristika értéke: $\Delta = -1$, akkor egy különös perspektív helyzetű kollinear síkrendszert nyerünk, mely involucziós helyzetű vagy röviden *involucziós* síkrendszernek neveztetik: a kollineáció-tengely és középpont neve ekkor: involuczió-tengely és középpont. Az involucziós síkrendszer r, q_1 ellentengelyei egy egyenesbe

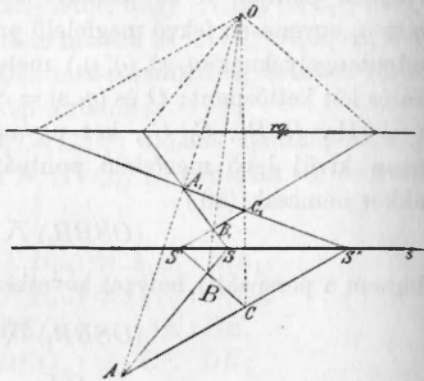
esnek, mely az involúció-tengely és középponttól egyenlő távolságra van; a megfelelő pontok, valamint egyenesek: az involúció-tengely és középponttól harmonikusan vannak elválasztva (106. ábra).

Involúciós síkrendszerél az involúció középponton átmenő egyenesen fekvő projektív pontsorok, azon tulajdonságnál fogva, hogy megfelelő pontpárok az involúció-tengely és középponttól harmonikusan vannak elválasztva: hiperbolikus természetű involúciós pontsört képeznek, melynek középpontja az egyesült két ellenpont.

Két tetszőleges kollinear vonatkozású síkrendszer S, S_1 általában nem hozható involúciós helyzetbe, mert az involúciós helyzet



105. ábra.



106. ábra.

egyszersmind perspektív. De S, S_1 négyféleképp hozható mindig perspektív helyzetbe, és ha ezen műveletnél az ellentengelyek nem esnek egybe, a mi csak S, S_1 kölcsönös vonatkozásától függ, úgy S, S_1 -et nem lehet involúciós helyzetbe hozni. —

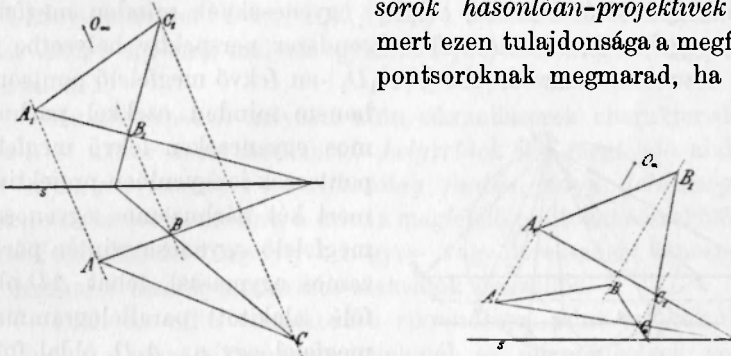
Ha $\Delta = +1$, akkor O, s -ben van, és s felezi az ellentengelyek távolságát.

180. Perspektív helyzetű kollinear síkrendszerél, mint említettük, a kollineáció-középpont és tengely O és s , valamint egy pár megfelelő pont az O -n átmenő egyenesen, O és s -en kívül, tetszőlegesen választható. A szerint a mint O -t, vagy s -et, vagy O és s -et végtelen távol veszszük fel a síkban, specialis természetű kollinear síkrendszert kapunk, melyeket: *affin*, illetve *hasonló*, végre *összeillő* síkrendszernek nevezünk.*

* Az *affinitást* már Euler (1707—1783) ismerte. L. Möbius: Der barycentrische Calcul, 147. §.

Ha a kollineáció középpont a sík egyik végtelen távol fekvő O_∞ pontja, mely nem fekszik a kollineáció tengelyen, akkor s és egy megfelelő pontpár A, A_1 meghatározza az *affin* vonatkozást; O_∞ az $|AA_1|$ sugárnak végtelen távol fekvő pontja; a karakteristika: $\Delta = AS : A_1S$; hol S az $|AA_1|$ sugár metszéspontja s *affinitási tengelylyel* (107. ábra).

Mínthogy két tetszőleges megfelelő egyenesen a megfelelő pontsorok párhuzamos sugársorokat metszetnek ki: *affin vonatkozású síkrendszereknél a megfelelő pontsorok hasonlóan-projektívek*, és mert ezen tulajdonsága a megfelelő pontsoroknak megmarad, ha azok



107. ábra.

a perspektív helyzetből kimozdíttatnak, és hasonlóan-projektív pontsorok ellenpontjai végtelen távol vannak, azért: *affin síkrendszert oly különös kollinear síkrendszernek értelmezzük, melynél az ellentengelyek végtelen távol fekszenek.*

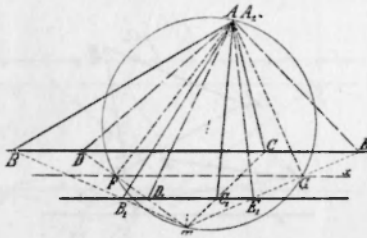
Ha két síkrendszer S, S_1 között affin vonatkozást akarunk létesíteni, akkor az egyik síkrendszer három pontjának A, B, C -nek megfelelő A_1, B_1, C_1 pontját tetszőlegesen választhatjuk, de úgy, hogy sem A, B, C , sem pedig A_1, B_1, C_1 pontok ne fekjdenek egy egyenesen. Mínthogy az affin síkrendszerek két egymásnak megfelelő egyenese S és S_1 sík végtelen távol fekvő egyenese $g_\infty, g_{1\infty}$, tehát az $ABC, A_1B_1C_1$ háromszögek megfelelő oldalai szükségesek és elégségesek ezen kollinear vonatkozás megállapítására.

181. Ha két affin síkrendszert S, S_1 -et, mely $ABC, A_1B_1C_1$ megfelelő háromszög által van adva, perspektív helyzetbe akarunk hozni, e háromszögeknek két megfelelő pontját A, A_1 -et egyesítjük akkép, hogy az átellenes oldalak $|BC|, |B_1C_1|$, párhuzamosak legyenek (108. ábra) $|BC|, |B_1C_1|$ -en fekvő hasonlóan-projektív pontsorok perspektív hely-

zetűek, mert tartójuk metszéspontja megfelelő pont, tehát megfelelő pontjainak összekötő egyenesei $|BB_1|$, $|CC_1|$ metszéspontján T -n mennek át.

Ha AT köz felezőpontjából A , T -n át leírt kör, $|BC|$, $|B_1C_1|$ között levő szalag felezővonalát x -et F , G pontokban metszi, akkor $|FT|$ -nek D , D_1 metszéspontjai $|BC|$, $|B_1C_1|$ -gyel $A \equiv A_1$ -től egyenlő távolságra fekvő megfelelő pontok. E szerint $|AD|$, $|A_1D_1|$ egyeneseken a megfelelő hasonlóan-projektív pontsorok, egy megfelelőleg egyenlő közzel bírnak: tehát *egyenlően-projektívek*. AD , A_1D_1 közök egyesítésével $|AD|$, $|A_1D_1|$ egyeneseknek minden megfelelő pontja egybeesik, és a két affin síkrendszer perspektív helyzetbe jut.

Azonban nemcsak $|AD|$, $|A_1D_1|$ -en fekvő megfelelő pontsorok, hanem minden ezekkel párhuzamos egyeneseken fekvő megfelelő pontsorok is egyenlően-projektívek, mert két párhuzamos egyenesnek megfelelő egyenes szintén párhuzamos egymással, tehát AD oldal fölé alakított parallelogramnak megfelel egy az A_1D_1 oldal fölött fekvő parallelogram, és így az AD , A_1D_1 oldalakkal szemben



108. ábra.

fekvő oldalak, melyek egymásnak megfelelő közök, szintén egyenlők.

Ugyanígy mondhatjuk: ha $|GT|$ metszéspontjai $|BC|$, $|B_1C_1|$ -gyel E , E_1 , akkor $AE = A_1E_1$; tehát $|AE|$, $|A_1E_1|$ -en és a véle párhuzamos egyeneseken levő projektív pontsorok, szintén egyenlően-projektívek.

Ha A , T -n át leírt kör nem metszi x -et valós pontokban, úgy a két affin-rendszer nem hozható perspektív helyzetbe. E szerint: *két affin síkrendszer síkjában általában 0, 1, vagy 2 különböző párhuzamos sugársor található, melynek sugarai egyenlően-projektív megfelelő pontsoroknak tartói; az első esetben az affin-rendszerek nem hozhatók perspektív helyzetbe; a második és harmadik esetben az affin-rendszerek két megfelelő egyenlően-projektív pontsor egyesítése által perspektív helyzetbe jutnak.*

Hogy a második eset lételéről meggyőződjünk, tételezzük fel, hogy azon tetszőlegesen választott ABC , $A_1B_1C_1$ megfelelő háromszögek BC , B_1C_1 oldalai egyenlők, tehát már a $|BC|$, $|B_1C_1|$ -en fekvő megfelelő pontsorok egyenlően-projektívek. Ekkor a másik

irányú egyenlően-projektív pontsor tartóit megkapjuk, ha ABC , $A_1B_1C_1$ háromszögeket, úgy mint előbb, egy síkba helyezzük, t. i. hogy A összeesék A_1 -gyel és $|BC|$ párhuzamos legyen $|B_1C_1|$ -gyel. $A=A_1$ pontból $|BB_1|$ és $|CC_1|$ -re bocsátott merőleges $|BC|$, $|B_1C_1|$ határvonallal bíró szalag α felezőjét H -ban metszi; H -n át $|BB_1|$ -gyel párhuzamosan menő egyenes $|BC|$, $|B_1C_1|$ -nek D , illetve D_1 pontján megy át, és $|AD|$, $|A_1D_1|$ az egyes síkrendszereknek azon új irányú tartója, melyen egyenlően-projektív pontsorok vannak. Ha ezen szerkesztésnél $|BB_1|$ és hasonlóképp $|CC_1|$, merőleges $|BC|$ -re, akkor a két síkrendszerben $|BC|$, $|B_1C_1|$ irányú tartókon kívül nem található más irányú egyenes, melyen egyenlően-projektív megfelelő pontsorok léteznének.

Ha a perspektív helyzetű affín síkrendszerek karakteristikája: $A=-1$, akkor azok *involucziós helyzetűek* és a megfelelő alakzatok *az affinitási tengelyre vonatkozólag ferdén, vagy derékszög alatt szimmetrikusak*, a szerint, a mint a megfelelő pontokat összekötő egyenesek az affinitási tengellyel hegyes- vagy derékszöveget képeznek. — A derékszög alatt szimmetrikus alakzatok összeillők.

182. Az affín vonatkozású síkrendszer, mint említettük, oly különös kollinear síkrendszer, melynél az ellentengelyek végtelen távolba kerülnek. De az ellentengelyeken fekvő pontsorok általában nem lesznek egyenlően-projektívek.

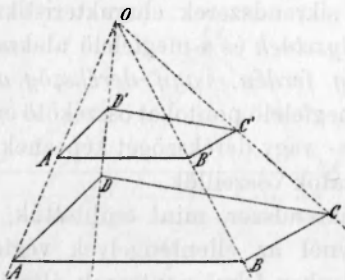
Képzeljünk most két oly kollinear síkrendszert, melynél a végtelen távol fekvő egyeneseken a megfelelő pontsorok egyenlően-projektívek, vagy a mi ugyanaz: a megfelelő sugársorok mind egyenlően-projektívek, tehát két-két megfelelő egyenes hajlásszöge egyenlő. Ily kollinear síkrendszerek *hasonló-*, vagy *összeillőknek* neveztetnek, a szerint, a mint bármely két megfelelő végesben fekvő pontsor: hasonlóan-, vagy egyenlően-projektív.

E rendszerek meghatározásához csupán két megfelelő pontpár $A, A_1; B, B_1$ szükséges; AB, A_1B_1 közöknek a hasonló vonatkozásnál különbözőknek, az összeillősnél pedig egyenlőknek kell lenni. Az egyik síkrendszer C, D, E, \dots pontjához a megfelelő pontokat C_1, D_1, E_1, \dots megkapjuk, ha A_1B_1 fölé ABC, ABD, ABE, \dots -vel hasonló vagy összeillő $A_1B_1C_1, A_1B_1D_1, A_1B_1E_1$ háromszögeket szerkesztünk, mert A, A_1 középponttal bíró megfelelő sugársorok sugarai: $|AB|$, $|AC|$, illetve $|A_1B_1|$, $|A_1C_1|$ egyenlő szöveget képeznek.

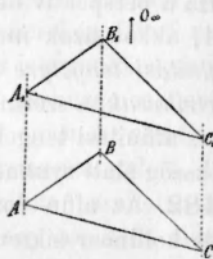
Ha két hasonló- vagy összeillő síkrendszer két megfelelő egyenes-

párját párhuzamos helyzetbe hozzuk, akkor a két síkrendszer perspektív helyzetű lesz. Ekkor minden megfelelő egyenespár párhuzamos, és a megfelelő pontpárok összekötő egyenesei egy véges illetve végtelen távol fekvő O ponton mennek át a szerint, a mint a síkrendszerek hasonló vagy összeillők. Ezen O pontot a perspektív helyzetű hasonló síkrendszerek *hasonlósági pontjának* nevezik (109—110. ábra).

Ha hasonló és perspektív helyzetű síkrendszerek karakteristika Δ pozitív, akkor a hasonlósági pont nem választja el a megfelelő pontokat; ha $\Delta = -1$, akkor a hasonlósági pont két-két megfelelő pont távolságát felezi, tehát $\Delta = -1$ mellett a hasonló alakzatok a hasonlósági pontra nézve *középpontilag szimmetrikus* fekvésűek, és ily alakzatok egyszersmind összeillők.



109. ábra.



110. ábra.

183. A kollinear síkrendszerek ezen különös eseteinek tárgyalása után vizsgáljuk meg, hogy két ugyanazon síkban tetszőlegesen elhelyezett kollinear síkrendszernek S, S_1 -nek hány megfelelő összeeső pontja és egyenesé lehet?

Legyen $A, A_1; B, B_1$, két tetszőleges megfelelő pontpár a közös síkban. A és A_1 ponton átmenő megfelelő sugarak két projektív sugársort képeznek, melynek képződménye egy k kúpszelet; ugyanígy B és B_1 ponton átmenő megfelelő sugarak metszőpontjainak geometriai helye egy új kúpszelet k' , mely B, B_1 pontokon átmegey. k, k' kúpszeletek egymást általában négy pontban metszik; ezek közül egyik: $|AB|, |A_1B_1|$ megfelelő sugarak metszőpontja C , mely azonban nem esik össze megfelelő pontjával, mint-hogy $|AB|, |A_1B_1|$ két tetszőleges megfelelő egyenespárnak tekinthető. k, k' -nek többi három metszőpontja: P, Q, R , megfelelő pontjával egybeesik, mert ezen pontok mindegyikében az A és B sugársor két sugara és az ezeknek megfelelő sugarak A_1, B_1 sugársorból, egymást metszik. Háromnál több ily egymásnak megfelelő összeeső pont

nem létezhetik a kollinear síkrendszerek közös síkjában, hacsak a síkrendszerek nem perspektív helyzetűek, mert ha két collinear síkrendszer négy megfelelő közös ponttal bír, melyek egy négyszögnek szögpontjai, akkor minden megfelelő pontpár egybeesnek.

A talált PQR háromszögnek minden oldala, szintén megfelelőleg összeeső egyenes, mert minden oldalon két egymásnak megfelelő összeeső pontpár fekszik. Ha k, k' kúpszelet csak két valós közös ponttal C, P -vel bír, hogy PQR háromszögnek egy szögpontja P és átellenes oldala $|QR|$ valós, a többi két oldal $|PQ|, |PR|$ és két szögpont Q, R képzetes.

Ezen PQR háromszöget meghatározhatjuk a dualis eljárás szerint is. Ha $a, a_1; b, b_1$ két egymásnak megfelelő egyenespár, akkor a, a_1 -en, valamint b, b_1 -en fekvő megfelelő pontpárok összekötő egyenesei egy x , ill. x' kúpszeletet burkolnak, melynek egyik közös érintője $(a, b), (a_1, b_1)$ pontok összekötő egyenese; a másik három vagy egy valós közös érintő: a kollinear síkrendszerek megfelelő összeeső egyenese.

A midőn a két collinear síkrendszer perspektív helyzetű: k , és hasonlókép k' egyenes párrá fajul, melyeknek egyik közös egyenese a kollineáció-tengely, a másik két egyenes metszéspontja a kollineáció-középpont. Ezen esetben tehát a kollineáció-tengelynek minden pontja egymásnak megfelelő, úgy szintén a kollineáció-középpont is. Ezek után e vizsgálat eredményét így fejezhetjük ki:

Két ugyanazon síkban fekvő kollinear síkrendszer, mely nem perspektív helyzetű, három megfelelőleg közös ponttal és ugyanannyi megfelelőleg közös egyenessel bír, mely utóbbiak ama pontok összekötő egyenesei. Azon három pont és egyenes közül kettő egy ponttá, illetve egy egyenessé egyesülhet, úgy szintén két pont és két egyenes képzetes is lehet; egy megfelelőleg közös pont és egyenes azonban mindig valós.

23. §. Kúpszeletek kollineációja.

184. Ha két síkrendszer S, S_1 kollinear van egymásra vonatkoztatva, akkor az egyik síkrendszer minden pontjának és egyenesének az előbbi §-ban adott értelmezések folytán egy pont és egyenes felel meg. S síkjában fekvő k kúpszelet pontjai és érintőinek S_1 -ben egy k_1 kúpszelet pontjai és érintői felelnek meg; mert ha k -t két projektív sugársor képződményének tekintjük, melyeknek középpontja

k -nak A, B pontja, úgy ezen projektív sugársoroknak megfelelő sugársorok szintén projektívek és így ez utóbbiaknak képződménye: k -nak megfelelő k_1 kúpszelet.

«Ha két síkrendszert S, S_1 -et úgy akarunk egymásra kollinear vonatkoztatni, hogy az S síkjában fekvő k kúpszelet pontjai- és érintőinek, egy az S_1 síkjában fekvő tetszőleges k_1 kúpszelet pontjai és érintői feleljenek meg, akkor k kúpszelet három pontjának A, B, C -nek megfelelő A_1, B_1, C_1 pontját k_1 -en tetszőlegesen választhatjuk, mi által a collinear vonatkozás teljesen meg van határozva».

Nevezzük A, A_1, B, B_1 pontok érintőit a, a_1, b, b_1 -nek; $(a, b), (a_1, b_1)$ pontokat D, D_1 -nek és vonatkoztatassuk a két síkrendszert úgy kollinear egymásra, hogy A, B, C, D pontoknak A_1, B_1, C_1, D_1 pontok feleljenek meg. Ekkor az $a = |AD|, b = |BD|$ érintőknek megfelelően $a_1 = |A_1D_1|, b_1 = |B_1D_1|$ érintők; C pont c érintőjének, mely $(|BC|, |AD|), (|AC|, |BD|)$ pontok összekötő egyenesének és $|AB|$ -nek metszéspontján megy át (58. végén), oly c_1 egyenes felel meg, mely $(|B_1C_1|, |A_1D_1|), (|A_1C_1|, |B_1D_1|)$ pontok összekötő egyenesének és $|A_1B_1|$ -nek metszéspontján átmegy, — mely tehát k_1 -et C_1 -ben érinti.

k minden X pontjának megfelel egy X_1 pont, melyre nézve:

$$\begin{aligned} (a, |AB|, |AC|, |AX|) &= (a_1, |A_1B_1|, |A_1C_1|, |A_1X_1|) \\ (|BA|, b, |BC|, |BX|) &= (|B_1A_1|, b_1, |B_1C_1|, |B_1X_1|); \end{aligned}$$

de minthogy e két egyenlet baloldala egyenlő, mert X, k -n, azért a jobb oldalak is egyenlők, és így X_1, k_1 -en lesz.

k és k_1 pontjai és érintői ezen vonatkozás következtében projektívek egymáshoz és mert egy sugársor, mely k -nak pontjait annak tetszőleges pontjából projicziálja: projektív oly sugársorral, mely a megfelelő pontokat k_1 -nek tetszőleges pontjából projicziálja: k, k_1 kúpszeleten fekvő projektív pontsorok megfelelő elemei által a két görbe síkjában fekvő összes pontok és egyenesek kollinear vannak egymásra vonatkoztatva.

Ha S, S_1 kollinear vonatkozású síkrendszerben k, k_1 kúpszeletek egymásnak megfelelők és p egyenesnek pólusa k -t illetőleg P pont, akkor p és P -nek megfelelő p_1 egyenes és P_1 pont: poláris és pólus k_1 -re nézve.

P -n át két egyenest húzunk, mely k -t $A, C; B, D$ -ben metszi; e pontoknak megfelelően k_1 kúpszeleten $A_1, C_1; B_1, D_1$. Minthogy $ABCD$ -négyzögnek egyik átlója és átlópontja: p, P , azért p_1, P_1 is

átló és átlópontja lesz a k_1 -be írt $A_1B_1C_1D_1$ kúpszeletnek, miből következik: hogy p_1, P_1 poláris pólus k_1 -re nézve.

E tételből következik, hogy: « k kúpszelet minden kapcsolt pólus- és poláris-párjának, k_1 kúpszeletnek egy kapcsolt pólus- és polárispárja felel meg a kollinear rendszerekben».

185. Két ugyanazon síkban fekvő tetszőleges k, k_1 kúpszelet, perspektív helyzetű kollinear vonatkozású görbének tekinthető; a kollineáció-középpont azon O, O' pontok bármelyike, melyen átmenő összes kapcsolt polárispárak mindkét kúpszeletre nézve ugyanazon involucziós sugársort képezik és mely involucziós sugársornak, ha valós kettőssugarai vannak, vagy mindkét vagy egyik kettőssugár sem választja el a kúpszeleteket egymástól; a kollineáció-tengely a két kúpszelet azon közös szelőinek s, s' -nek egyike vagy másika, mely $|OO'|$ egyenesnek a kúpszeletekre vonatkozó közös pólusán, P -n megy át. s, s' közös szelők O -nak, valamint O' -nek k, k_1 -re vonatkozó polárisaitól o, o_1 , illetve o', o'_1 -től harmonikusan vannak elválasztva; úgy szintén O, O' pontok s -nek, valamint s' -nek k, k_1 -re vonatkozó S, S_1 , illetve S', S'_1 pólusait harmonikusan választják el.

Nevezzük O -nak k, k_1 -re vonatkozó polárisait: o, o_1 -nek; O -n átmenő tetszőleges egyenesnek metszéspontjait k, k_1 -gyel: A, B ill. A_1, B_1 -nek; $|AA_1BB_1|$ egyenesnek pólusát k, k_1 -re vonatkozólag: C, C_1 -nek (111. ábra).

$|OC|, |OA|$ és $|OC_1|, |OA_1|$ egyenespárak, kapcsolt polárisok k illetve k_1 -re nézve, de minthogy O -ból kiinduló kapcsolt egyenespárak mindkét kúpszeletre nézve azonosok és $|OA| \equiv |OA_1|$, azért $|OC| \equiv |OC_1|$, tehát: O, C, C_1 pontok egyenesben fekszenek.

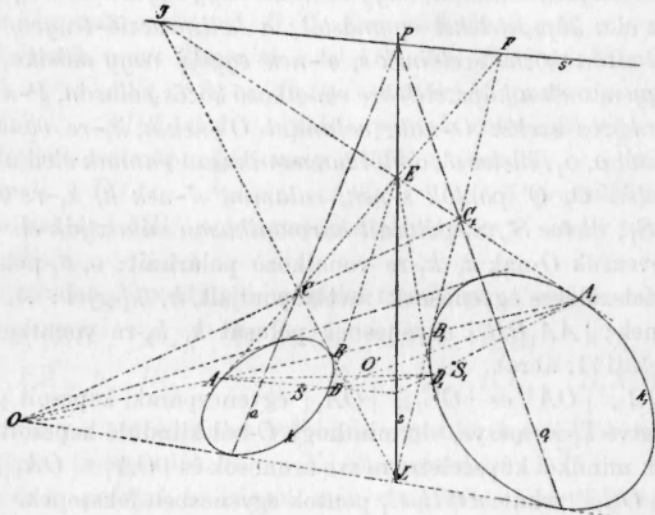
Ha most a két síkrendszert úgy vonatkoztatjuk egymásra kollinear, hogy A, C, O és $(o, o_1) = P$ pontoknak az egyikben, A_1, C_1, O, P pontok feleljenek meg a másikon, tehát $|OA| \equiv |OA_1|, |OC| \equiv |OC_1|, |OP|$ sugarak egymásnak megfelelők, akkor a két kollinear síkrendszer perspektív helyzetű: O képezi a kollineáció-középpontot; $|PE| \equiv s$, a kollineáció-tengelyt, hol E , metszéspontja $|AC|, |A_1C_1|$ -nek.

E perspektív síkrendszerekben $|PC| \equiv o, |P_1C_1| \equiv o_1$ egyenesek; és o, o_1 egyeneseknek metszéspontjai $|OAA_1|$ -gyel egymásnak megfelelők, tehát azon B, B_1 pontok is, melyek O és o -t, A -tól; illetve O és o_1 -et, A_1 -től harmonikusan elválasztják.

Ha X, k kúpszeletnek tetszőleges pontja, akkor $|AX|, |BX|$ egyenesnek o -t kapcsolt pólusokban G, H -ban metszik, melyeknek

G_1, H_1 projekciója O -ból o_1 -re (miután a projekciálás mindkét kúpszeletre vonatkozólag kapcsolt sugárpárral eszközöltetik), szintén kapcsolt póluspár k_1 -re, tehát $|G_1A_1|, |H_1B_1|$ -et, k_1 -nek X_1 pontjában metszi, mely X_1, X -nek megfelelő pontja lévén: O, X -szel egyenesben fekszik.

Mínthogy s kollineáció-tengelynek összes pontjai egymásnak megfelelők és egy tetszőleges k -ra vonatkozólag kapcsolt póluspárnak megfelelő pontpár kapcsolt pólus k_1 -re nézve: azért s kollineáció-tengelyen k, k_1 ugyanazon póluspárat indukálja és így s közös szelője k, k_1 -nek.



111. ábra.

Ha a két sikrendszert úgy vonatkoztattuk volna egymásra, hogy A, C, P, O pontoknak B_1, C_1, P, O pontok feleljenek meg, akkor k ismét projektív helyzetű k_1 -gyel: O kollineáció-középpontra nézve; de a kollineáció-tengely $s: P$ -n és $|AC|, |B_1C_1|$ -nek F metszőpontján megy át, és s', P pontból kiinduló második közös szelőjét képezi, k, k_1 -nek.

B -nek ekkor megfelel A_1 pont és $|BC|, |A_1C_1|$ kúpszelet-érintők egymást s' -nek I pontjában, $|BC|, |B_1C_1|$ érintők s -nek L pontjában metszik. $|AC|, |BC|, |A_1C_1|, |B_1C_1|$ négyszögből látható, hogy s, s' átlók, C, C_1 átellenes szögpontokat, tehát egyszersmind o, o_1 polárisokat harmonikusan választják el.

Ha e vizsgálatnál O helyett O' pontból indulunk ki, ugyanazon s, s' kollineáció-tengelyeket találjuk, melyekre nézve k, k_1 perspektív helyzetű kollinear alakzat, mert ezek az egyedüli $|OO'|$ -nek P pólusából kiinduló közös szelői k, k_1 -nek; tehát s, s' kollineáció-tengelyek O' -nek o', o_1 polárisait k, k_1 -re nézve harmonikusan választják el.

Hogy a tétel utolsó részét is bebizonyítsuk, nevezzük s -nek pólusait k, k_1 -re nézve S, S_1 -nek; $|AS|, |A_1S_1|$ -nek második metszőpontját k , illetve k_1 -gyel D, D_1 -nek; hol D, D_1 egymásnak megfelelő pont O kollineáció-középpont és s kollineáció-tengelyre nézve, tehát $|AD|, |A_1D_1|$ egymást s -ben metszi és $|ED|, |ED_1|$ sugarak k, k_1 -et D, D_1 -ben érintik. De O' és s kollineáció-középpont és tengelyre nézve A_1 -nek D ; A -nak D_1 felel meg; mert k_1 kúpszelet $|EA_1|$ érintőjének, megfelel E -ből k -hoz húzható érintő, mely csak $|ED|$ lehet. Ebből látható, hogy: ADD_1A_1 négyszögnek O, O' átellenes szögpontja, S, S_1 átlóspontokat harmonikusan választja el. Ugyanígy következik: hogy s' -nek k, k_1 -re vonatkozó S', S'_1 pólusai harmonikusak O, O' pontpárral.

186. Tanultuk, hogy egy k kúpszelet végtelen sokféleképp lehet kollinear ábrája egy tetszőleges k_1 kúpszeletnek, és hogy a kollinear vonatkozás, k, k_1 -nek három tetszőlegesen választott megfelelő pontpárja által van teljesen meghatározva. De két kollinear sikrendszer mindig perspektív helyzetbe hozható; ennél fogva: két kúpszelet mindig perspektív helyzetbe hozható úgy, hogy az egyiknek három pontja, a másik kúpszelet három tetszőlegesen választott pontjának feleljen meg.

Két perspektív helyzetű kollinear sikrendszerben k kúpszelet kollinear k_1 kúpszelete: ellipszis, parabola vagy hyperbola lesz a szerint, a mint r ellentengely k kúpszeletet nem metszi, érinti, vagy valós pontokban metszi. r ellentengely k -ra vonatkozó pólusának M -nek megfelelő M_1 pont: középpontja k_1 -nek, és viszont q_1 ellentengely k_1 -re vonatkozó pólusának megfelel k -nak középpontja. k kúpszelet M -en átmenő kapcsolt polárisainak: k_1 kúpszelet kapcsolt átmérői felelnek meg. — r pólusán átmenő kapcsolt polárisok között mindig van egy pár, melynek metszőpontjai r -rel O kollineáció-középpontból derékszög száraival prójicziáltak; e különös kapcsolt polárisoknak megfelelő sugarak: k_1 -nek tengelyei. Ha O kollineáció-középpont oly helyzetű, hogy k kúpszeletnek r -en fekvő összes kapcsolt póluspárjai O -ból derékszög alatt prójicziáltak, akkor k_1 -nek minden kapcsolt átmérőpárja egymásra merőleges, tehát k_1 — kör.

E szerint «ha r egyenes k kúpszeletet nem metszi valós pontokban és mi két, az r egyenesen fekvő k -ra vonatkozólag kapcsolt póluspáron át köröket írunk le, melyeknek középpontja r -en fekszik, úgy ezek egymást O , O' pontokban metszik: k -nak perspektív helyzetű kollinear ábrája O (vagy O') kollineációközéppontra és az r ellentengelylyel párhuzamos tetszőleges s kollineáció-tengelyre vonatkozólag: k_1 kör lesz».

Viszont, ha k kúpszelet és O pont adva van, határozzuk meg úgy r ellentengelyt, hogy k -nak O kollineáció-középpontra vonatkozólag perspektív helyzetű kollinear ábrája kör legyen.

Az r ellentengelynek oly egyenesnek kell lenni, mely O középponttal bíró czirkuláris sugársor kapcsolt sugarait k -ra vonatkozólag kapcsolt póluspárok szerint metszi. E szerint: r közös szelőjét képezi k kúpszelet és azon végtelen kis körnek, melynek középpontja O . O -ból végtelen sok k -ra vonatkozólag kapcsolt polárispár húzható; ezek között általában egy pár van, mely egymásra merőleges. Ha ezen különös kapcsolt polárispár metszését O -nak k -ra vonatkozó o polárisával A , B -nek nevezzük úgy OAB , O -nál derékszögű polárháromszöge k -nak, tehát minden az A (valamint B) ponton átmenő egyenes: $|OA|$, $|OB|$ -t oly kapcsolt póluspárban metszi, mely O -ból derékszög alatt projicziáltatik. Ha g , l két tetszőleges O -n átmenő merőleges egyenes, akkor mindazon egyenesek, melyek g , l -et k -ra vonatkozólag kapcsolt poluspárban metszik (79.), α kúpszeletet burkolnak. A , valamint B pontból α -hez vonható érintők e szerint azon tulajdonsággal bírnak, hogy rajtuk két k -ra vonatkozó kapcsolt póluspár létezik, mely O -ból derékszög alatt lesz projicziálva, tehát minden ily érintő már a kívánt tulajdonsággal bír, mert a rajta fekvő összes kapcsolt póluspárok O -ból derékszögű sugarakkal lesznek projicziálva, és így mindegyike ezen A , valamint B -ből α -hoz vont érintőknek a rendszer ellentengelyének vehető. O -nak α és k -ra vonatkozó polárisa egy és ugyanazon egyenes (79.), mely g , l -et α -nak érintőpontjaiban metszi. E végből A , B pontok, úgy mint $|OA|$, $|OB|$ sugarak g , l által el vannak választva és ezért A , B pontok közül egyik α -án belül, a másik kívül fekszik; de csak ez utóbbiból lehet α -hoz érintőket húzni. A kitértített feladatnak e szerint általában két megoldása van.

187. A midőn O , k -nak egyik gyújtópontja, e gyújtópont polárisa r az egyedüli egyenes, melyen a kapcsolt pólusok O -ból derékszög alatt projicziáltatnak, és mert ezen r -nek pólusa k -ra nézve O , mely mint kollineáció-középpont önmagának megfelelő: azért O képezi egyszer-

smind középpontját mindazon köröknek, melyeknek perspektív helyzetű kollinear ábrája O kollineáció-középpontra nézve k kúpszelet. De fordítva is következik, hogy egy kör projektív helyzetű kollinear ábrája O középpontjára, mint kollineáció-középpontra mindig oly k kúpszelet, melynek egyik gyújtópontja a kör középpontja. O -ból kiinduló kapcsolt polárisok a körre és k -ra nézve ugyanazon involúciós sugársort képezik; de a körre nézve ezen sugársor czirkularis és mert a kúpszeletek csak gyújtópontjukban indukálnak czirkularis involúciós sugársort: azért k -nak gyújtópontja O pont.

188. Ha másodszor, O k -nak egyik pontja, akkor azon OAB , O -nál derékszögű polárháromszög két oldala: O pont érintője, és normalisa és a harmadik oldal is az érintőbe esik; szögpontjai közül kettő O -ban van, a harmadik A , a normálisnak pólusa. α kúpszeletet burkoló II. o. sugársor, minthogy g , l egymást k kúpszelet O pontjában metszi (79.), I. o. sugársorra bomlik, melynek középpontja g , l derékszög által kimetszet p húr pólusa P . Jelen esetben tehát csak egy ellentengelyt r -et találunk, mely O pont normálisának és p húrnak A , illetve P pólusán átmegy, s mint ilyen azon normális és p húr metszéspontjának, R -nek polárisa (112. ábra).

Azon végtelen sok kör, mely k -nak kollinear ábrája, k -nak O pontjára, mint kollineáció-középpontra és az imént szerkesztett r ellentengelyre: mind érinti k -t O pontban. Ha e körök közül egyik k -t még O -n kívül két valós pontban metszi, akkor azok összekötő egyenese, mint kollineáció-tengely r -rel párhuzamos; és viszont, ha r -rel párhuzamos húr huzunk k kúpszeletben, akkor annak végpontjain és O -n átmenő kör, mint k -nak perspektív helyzetű kollinear ábrája, k -t érinti O -ban.

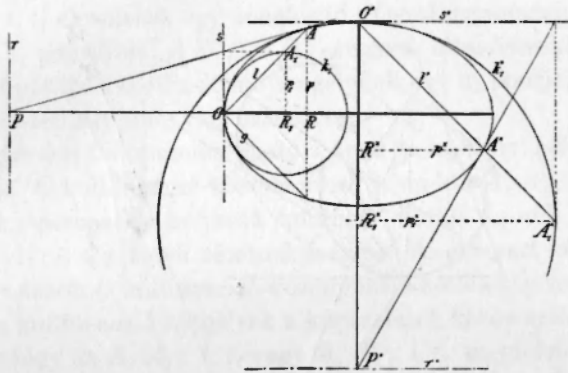
A midőn a kollineáció-tengelyt s -t O -n át helyezzük r -rel párhuzamosan, a kör, mely ezek által meg van határozva, k -val O -ban három pontot bír közösen. Az oly kör, mely egy kúpszeletnek, vagy bármily más görbének, három végtelen közel fekvő pontján átmegy: a görbe görbületi vagy simuló köre ezen (összeeső három) pontban.

E szerint «egy megrajzolt k kúpszelet görbületi körét O pontban megtaláljuk, ha O -ban t érintő és n normalist huzunk k -hoz, és O -n át t -t érintőleg kört írunk le, mely k -t két pontban metszi; e metszéspontok összekötő egyenesével O -n át párhuzamosot huzunk, mely k -t már a görbületi kör negyedik metszéspontjában, D -ben metszi».

Ha azonban k , — pontok vagy érintőkkel van megadva, úgy O

kollinear ábrája kör lehet, arra képesít, hogy «ha k kúpszeletnek négy pontja A, B, C, O és azok egyikében, pl. O -ban, az érintő t adva van, k -nak új pontjait, érintőit, tengelyeit a kollinear vonatkozás alapján szerkeszthessük» (114. ábra).

Fektsünk e végből A, O pontokon át k_1 kört, mely t -t érinti. Ezen kör k -val perspektív helyzetű kollinear alakzat, mely kollineaczióban A, O , és O -nak szomszédpontja t -n, önmagának megfelelő. Minthogy O pont és azon átmenő t egyenes valamint $|OA|$ szintén önmagának megfelel: O képezi a kollineaczió-középpontot. B, C pontoknak megfelelő B_1, C_1 pontok k_1 körön, B, C -nek projekciói O -ból k_1 -re, miért is s kollineaczió-tengely: $|BC|, |B_1C_1|$ megfelelő egyeneseknek metszőpontján és A -n megy át.



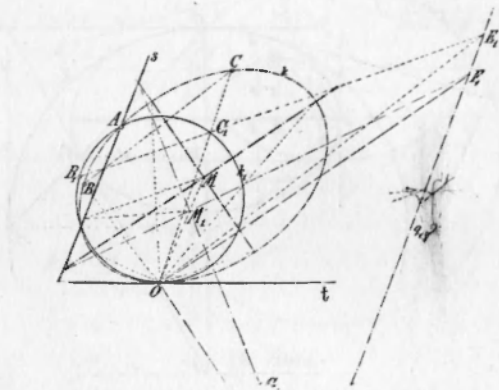
113. ábra.

O -n át $|BC|$ -vel párhuzamosan menő egyenes $|B_1C_1|$ -et E_1 -ben metszi, melyen át q_1 ellentengely s -sel párhuzamosan húzatik. q_1 -nek k_1 -re vonatkozó M_1 pólusa, k középpontjának M -nek felel meg; miből már M szerkeszthető. Ha F_1, G_1 pontok, q_1 -nek azon k_1 -re vonatkozó kapcsolt póluspárjai, melyek O -ból derékszög száraival lesznek projicizálva, akkor $|M_1F_1|, |M_1G_1|$ kapcsolt egyenespárok, k kúpszelet tengelyeinek felelnek meg.

190. Egy ponton A -n átmenő k kúpszelet, melyre vonatkozólag O -ból kiinduló $\{O\}$ involucziós sugársornak kapcsolt sugarai kapcsolt polárisok, és t -n fekvő $\{t\}$ involucziós pontsornak kapcsolt pontpárjai kapcsolt pólusok, ezen föltételekből akképp szerkeszthető, hogy perspektív helyzetű kollinear vonatkozást létesítsünk k kúpszelet és egy még ismeretlen k_1 kör között.

1. Először azon esetet fogjuk tárgyalni, melynél a két involúziós sor $\{O\}$, $\{t\}$ elliptikus természetű.

Ha O -t kollineáció-középpontnak vesszük, akkor k_1 kört kell szerkesztenünk, melyre vonatkozólag $\{O\}$ involúziós sugársor kapcsolt sugarai kapcsolt polárisok. $\{O\}$ minden kapcsolt sugárpárja l, p azon sugársor x, y tengelyeitől el van választva, úgy hogy x , az (l, p) tompaszög, y pedig (l, p) hegyesszög szárai között fekszik. x tetszőleges H pontjából merőlegest bocsátunk l -re és p -re, melyek p , illetve l -t egy-egy pontban metszik; e metszéspontokat összekötő o_1 egyenes merőleges $|HO|$ -re és (HO) -val G -ben találkozik, és H pontból $(GH \cdot GO)^2$ küllővel leírt k_1 körre vonatkozólag már $\{O\}$ involúziós sugársor kapcsolt sugarai, kapcsolt polárisok.



114. ábra.

Hogy a kollineáció-tengelyt megtaláljuk $\{t\}$ involúziós pontsor t tartójának megfelelő t_1 egyenesét kell szerkesztenünk. Minthogy $\{t\}$ kapcsolt pontpárjai k nézve kapcsolt pólusok: t_1 -en ezeknek megfelelő pontpárok kapcsolt póluspárok lesznek k_1 körre nézve. Nekünk tehát azon $[o]$ involúziós sugársort, mely $\{t\}$ involúziós pontsört O -ból projicziálja, oly t_1 egyenessel kell metszenünk, hogy a kimetszett kapcsolt pontpárok kapcsolt pólusok legyenek k_1 körre nézve.

$\{O\}$ és $[O]$ elliptikus természetű involúziós sugársoroknak két közös kapcsolt sugárpárja: m, n van; ezeknek közös pontja O -nak k_1 -re vonatkozó o_1 polárisával: M_1, N_1 . E pontok bármelyikén átmenő egyenesnek metszéspontjai $|OM_1|$, $|ON_1|$ sugarakkal, k_1 körre vonatkozólag kapcsolt pólusok, mert OM_1N_1 polárháromszöge k_1 -nek. Ha most oly x kúpszeletet határozunk meg (79.), melynek érintői $[O]$

sugársor két tetszőleges g, g' kapcsolt sugarát k_1 körre vonatkozólag kapcsolt póluspárákban metszik, úgy M_1, N_1 -ből α -hoz vonható érintők már azon tulajdonsággal bírnak, hogy $[O]$ -t, k_1 -re vonatkozólag kapcsolt póluspárákban metszik.

Mínthogy $[O]$ sugársor elliptikus, azért $|OM_1|, |ON_1|$ el van választva g, g' -től, tehát M_1, N_1 pontok közül egyik α -n belül, a másik α -n kívül van, és csak ez utóbbi pontokból lehet α -hoz valós érintőket, t_1, t_1' -et húzni.

Ha t_1, t egyeneseket tekintjük a kollinear rendszerekben megfelelőeknek: t_1, t egyenesek S metszéspontja, már egy pontja a kollinearáczió-tengelynek, míg k kúpszelet A pontjának azon A_1, A_1' pontok bármelyike felel meg, melyben $|OA|$ sugár k_1 -et metszi.

A kollinearáczió-tengelynek egy másik pontját megkapjuk, ha A, A_1 -et, t, t_1 egyenesek egy megfelelő (O -val ugyanazon egyenesen fekvő) X, X_1 pontjával $|AX|, |A_1X_1|$ sugarak által összekötjük; ezeknek metszéspontja a kollinearáczió-tengelynek egy új pontja, melylyel a kollinearáczió-tengely meg van határozva.

Ugyanezen k kúpszelet, mely k_1 -nek perspektív helyzetű kollinear ábrája O kollinearáczió-középpontra, a midőn $A, A_1; t, t_1$ elemek megfelelőek: perspektív helyzetű kollinear ábrája k_1 -nek akkor is, a midőn $A, A_1'; t, t_1'$ elemek vétetnek megfelelőeknek, mert két kúpszelet (k, k_1) ugyanazon O kollinearáczió-középpontra kétféleképp kollinear egymáshoz; a kollinearáczió tengelyek a kúpszeletek közös szelői.

Ugyanígy az $A, A_1; t, t_1$ vagy $A, A_1'; t, t_1$ megfelelő elemekből származó kollinearáczió-nál k_1 körnek ugyanazon k' kúpszelet felel meg, mely szintén eleget tesz a feladat követelményeinek. *A feladatnak e szerint két megoldása van.* (CHASLES a «Traité des sections coniques» című mű 344. pontjában 4 megoldást említ, melyek azonban nem mind különbözők.)

2. Ha másodszor az $\{O\}$ involucziós sugársor hyperbolikus, $\{t\}$ pedig elliptikus, akkor a feladatnak megoldása az előbbtől abban különbözik, hogy azon k_1 kör, mely $\{O\}$ kettőssugarait érinti és a kettőssugarak azon szögének szárai között fekszik mint A pont, egyszerűbben szerkeszthető. A feladatnak ekkor szintén két megoldása van.

3. Ha $\{O\}$ sugársor elliptikus, $\{t\}$ pontsor pedig hyperbolikus, melynek kettőspontjai B, C pontok, akkor mint előbb szerkesztünk oly k_1 kört, melyre vonatkozólag $\{O\}$ sugársor kapcsolt sugarai, kapcsolt polárisok, és $|OA|, |OB|, |OC|$ sugarakat metszéshez hoz-

zuk $A_1, A'_1; B_1, B'_1; C_1, C'_1$ pontokban k_1 körrel. A szerint a mint $A_1, B_1, C_1; A'_1, B'_1, C'_1; A_1, B'_1, C_1; A'_1, B_1, C_1$ tekintetnek A, B, C megfelelő pontjainak, négy különböző kollineáció származik, és k_1 -nek megfelelő kollinear kúpszeletek egymástól különbözők. Ha $A'_1, B'_1, C'_1; A_1, B_1, C_1; A'_1, B_1, C'_1; A_1, B'_1, C_1$ pontok felelnek meg A, B, C -nek, ugyanazon kúpszeleteket nyerjük, mint előbb, és ezért a feladatnak csak *négy* megoldása (106.) van. Mint látható, jelenleg $|BC| \equiv t$ -nek nem két, hanem négy egyenes felelhet meg, t. i. $|B_1C_1|, |B'_1C'_1|, |B_1C'_1|, |B'_1C_1|$.

4. Ha $\{O\}, \{t\}$ involucziós sorok hyberbolikusak, akkor a feladat ép úgy oldatik meg mint előbb, csak k_1 szerkesztése egyszerűbb. De hogy a feladatnak megoldása legyen, megkivántatik, hogy A, B, C pontok $\{O\}$ kettőssugarai által képezett egyik szög szárjai között, vagy pedig két csúcsszög szárjai között feküdjenek (106.).

191. Gondoljunk vissza az előbbi feladat megoldására az első esetben, a midőn t -nek két egyenes t_1, t'_1 felel meg a kollinear vonatkozásnál. t_1, t'_1 egyenesek egymást azon két sugár $|OM_1|, |ON_1|$ egyikében, pl. $|OM_1|$ -ben metszik, melyek $\{O\}$ involucziós sugársorban megfelelők és $\{t\}$ involucziós pontsor két kapcsolt pontján mennek át. t_1, t'_1 egyenesek pólusai k_1 körre nézve ekkor $|NO_1|$ -ben fekszenek, és így e pólusoknak megfelelő pontok, vagyis t -nek pólusai a szerkesztendő kúpszeleteket illetőleg, bárhol feküdjék A pont, $|ON_1|$ -en lesznek.

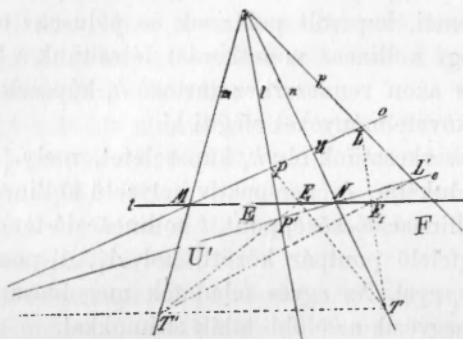
Másrészt O -nak k_1 körre vonatkozó o_1 polárisa: $|M_1N_1|$, és t_1, t'_1 egyenesek M_1 metszéspontjának megfelelő M pont, mindig t -n van; tehát O -nak mindegyik szerkesztendő k kúpszeletre vonatkozó polárisa átmegy $(t, |OM_1|) = M$ -en. Ha ellenben t_1, t'_1 egyenesek egymást N_1 -ben metszenék, úgy O pontnak k kúpszeletre vonatkozó polárisa $(t, |ON_1|) = N$ ponton menne át. Innen következik:

Ha O pontból kiinduló sugárpárok és t -n fekvő pontpárok $\{O\}, \{t\}$ involucziós sorokat képeznek, melyek nem perspektivék, de $\{O\}$ -nek egy m, n kapcsolt sugárpárja $\{t\}$ -nek egy kapcsolt pontpárján M, N -en megy át: akkor mindazon kúpszeletekre vonatkozólag, melyek $\{O\}, \{t\}$ involucziós sorokat indukálják, O pontnak polárisai M, N ponton mennek át, és t -nek pólusai megfelelőleg n , vagy m egyeneseken fekszenek. A midőn $\{O\}$, és $\{t\}$ elliptikus, a kúpszeleteknek csak egyik rendszere valós, t. i. vagy az, melyre vonatkozólag O -nak polárisai M ponton mennek át, és így t -nek pólusai n -en fekszenek, vagy pedig azon kúpszeletrendszer, melyre vonatkozólag

O -nak polárisai N ponton mennek át és így t -nek pólusai m -en fekszenek. Minden más esetben, míg m, n, M, N valós, mindkét kúpszeletrendszer is valós. A midőn m, n és így M, N képzetes, tehát $\{O\}, \{t\}$ involúziós sorok kettőselemei egymást elválasztják: nem létezik oly kúpszelet, mely ezen involúziós sorokat indukálná. —

Direkt uton is bebizonyítható, hogy a midőn $\{O\}, \{t\}$ involúziós sorok elliptikus természetűek és az M ponton átmenő o egyenesből mint O pont polárisából meghatározott kúpszelet valós, akkor N ponton átmenő o' egyenesből mint O polárisából meghatározott kúpszelet képzetes lesz (115. ábra).

Nevezzük $\{O\}$ -nak két kapcsolt sugarát, l, p -nek, e sugarak metszéspontját o, o' , t -vel rendre: $P, L; P', L', E, F$ -nek; E, F -hez kapcsolt pontokat $\{t\}$ -ben E_1, F_1 -nek; $|LE_1|, |PF_1|$ egyeneseknek



115. ábra.

n -n fekvő metszéspontját T -nek; $|LE_1|, |PF_1|$ egyeneseknek m -en fekvő metszéspontját T' -nek; végre o, n és o', m egyenespárok közös pontját U, U' -nek.

t -nek pólusa azon k kúpszeletre nézve, melynek polárháromszöge OPL , és mely t -n a $\{t\}$ involúziós pontsort indukálja (111. c)): T pont; úgy szintén t egyenes pólusa azon k' kúpszeletre vonatkozólag, melynek kapcsolt háromszöge OPL' , és melyre $\{t\}$ kapcsolt elemei kapcsolt pólusok: T' pont.

Az adott involúziós pontsor következtében

$$(FMNE_1) \overline{\wedge} (F_1NME),$$

és így

$$(OUNT) \overline{\wedge} (T'UMO),$$

mert e pontsorok az előbbieknél projekciói L , illetve P' -ből. Innen következik:

$$(OUNT) \sim (OMU'T');$$

de ha a pontok a felírt sorrendben következnek n, m -en egymásra, akkor O, U nincs elválasztva N, T -től, míg O, U' el van választva M, T' -től.

Ha tehát n -en fekvő és k -ra vonatkozó involúziós pólusok sora hyperbolikus, úgy m -en fekvő és k' -re vonatkozó pólusok sora elliptikus, és így midőn k valós (képzetes), k' képzetes (valós). k, k' kúpszeletet OPL , illetve $OP'L'$ polárháromszög és $\{t\}$ involúziós pontsor határozza meg.

Az előbb tárgyalt feladatot: «A ponton át kúpszeletet fektetni, melyre vonatkozólag $\{O\}$ involúziós sugársor, és $\{t\}$ involúziós pontsor kapcsolt elemei, kapcsolt polárisok és pólusok» még akkép oldhatjuk meg, hogy kollinear vonatkozást létesítünk a keresett k kúpszelet és egymás azon rendszerhez tartozó k_1 kúpszelet között, mely csak az utóbbi követelményeket elégíti ki.

E végből szerkesztünk oly k_1 kúpszeletet, mely $\{O\}, \{t\}$ involúziós sorokat indukálja, és perspektív helyzetű kollinear vonatkozást létesítünk O kollineáció-középpont, t kollineáció-tengely és A, A_1 ; vagy A, A_1' megfelelő pontpár között, hol A_1, A_1' pontok $|OA|$ -nak metszéspontjai k_1 -gyel. Az egyes feladatok megoldásának száma természetesen megegyezik az előbb talált számokkal.

192. Ugyan így járunk el a dualisan megfelelő feladatnál, mely így szól: *szerkesztendő a egyenest érintő k kúpszelet, mely adott $\{O\}, \{t\}$ involúziós sugár- és pontsorokat indukálja.*

Leírunk oly k_1 kört, melyre vonatkozólag $\{O\}$ sugársor kapcsolt sugarai kapcsolt polárisok és oly t_1 egyenest szerkesztünk, melyen k_1 által indukált involúziós pontsor, $\{t\}$ sornak projekciója O -ból. t és a metszéspontját O -ból t_1 -re projekciáljuk és ezen projekcióból a_1, a_1' érintőket húzunk k_1 -hez; $a, a_1; t, t_1$ megfelelő egyenespárak, valamint O kollineáció-középpont oly kollinear vonatkozást létesít, melyben k_1 -nek a keresett k kúpszelet felel meg.

A másik eljárás szerint k_1 kúpszeletet szerkesztünk, mely $\{O\}, \{t\}$ involúziós sorokat indukálja, és t és a metszéspontjából k_1 -hez a_1, a_1' érintőket húzunk. A kollinear vonatkozást, melyben k_1 -nek k felel meg most: O kollineáció-középpont, t kollineáció-tengely, valamint a, a_1 , vagy a, a_1' megfelelő egyenespár határozza meg. —

193. Miután egy kör végtelen sokfélekép lehet perspektív helyzetű, kollinear ábrája k kúpszeletnek vizsgáljuk meg: *lehet-e a kollineaczió-középpontot és ellentengelyt úgy meghatározni, hogy két ugyanazon síkban fekvő k, k' kúpszelet (és a velük meghatározott kúpszeletsor) perspektív helyzetű kollinear ábrája két kör (kőrsor) legyen?*

A megoldás akkor lehetséges, ha k, k' nem bír négy valós közös ponttal. A rendszer ellentengelye r , azon közös szelője k, k' kúpszeletnek, mely nem metszi a kúpszeleteket valós pontokban; a kollineaczió-középpont pedig azon pontok bármelyike, melyből az r -en fekvő, k, k' -re vonatkozólag kapcsolt póluspárok, derékszög alatt projicziáltatnak.

Ha k, k' kúpszelet kettősérintésű, de az érintési pontok r közös szelőn képzettek, akkor k, k' kúpszeletek perspektív helyzetű kollinear ábrái r ellentengelyre és azon kollineaczió-középpontra nézve, melyből az r -en fekvő kapcsolt póluspárok derékszög alatt projicziáltatnak: két koncentrikus kör lesz.

194. Egy más ide tartozó kérdés volna a következő: k kúpszeleten belül két pont van: A, B ; határozzuk meg a kollineaczió-középpontot és ellentengelyt akképp, hogy k kúpszelet perspektív helyzetű kollinear ábrája oly kúpszelet legyen, melynek gyújtópontjai az A, B pontoknak megfelelő pontok.

Nevezük azon kapcsolt póluspárt $|AB|$ egyenesen, mely A, B pontokat harmonikusan elválasztja M, N -nek; e pontok egyike pl. M, k -n belül van. Nevezzük M -nek k -ra vonatkozó pólusát r -nek; azon pontokat, melyből az r -en fekvő k -ra vonatkozó kapcsolt póluspárok derékszög alatt projicziáltatnak O, O' -nek. k kollinear ábrája O (vagy O') kollineaczió-középpont r ellentengely és bármely az r -rel párhuzamos s kollineaczió-tengelyre vonatkozólag, oly k_1 kúpszelet, melynek A_1, B_1 gyújtópontjai: A, B pontoknak megfelelők.

B -ből kiinduló k -ra vonatkozó kapcsolt polárispárokban ugyanis oly polárispárok felelnek meg k_1 -ben, melyek egymásra merőlegesek, vagyis ciklikus involucziót képeznek, mert az előbbi polárispárok r -en oly közeget metszenek ki, melyek O -ból derékszög száraival projicziáltatnak; tehát B -nek megfelelő B_1 pont, k_1 -nek gyújtópontja. r ellentengely k -ra vonatkozó M pólusának megfelel továbbá k középpontja M_1 , és azon A pontnak, mely M, r -et B -től harmonikusan elválasztja, oly A_1 pont, mely M_1, r_1 -et B_1 -től harmonikusan elvá-

lasztja, vagyis, mely $|M_1B_1|$ -en M_1 -től M_1B_1 távolságra van. De ez utóbbi pont k_1 -nek másik gyűjtőpontja.

Ha két kúpszeletnek k, k' -nek (vagy kúpszeletseregnek) nincs közös érintője, akkor ezeknek perspektív helyzetű kollinear ábrái egy bizonyos kollineáció-középpont és ellentengelyre nézve két konfokális kúpszelet k_1, k'_1 (vagy konfokális kúpszeletsereg) lehet.

k, k' kúpszeleteknek közös polárháromszögük valós; ennek egyik oldalán két oly valós A, B pont fekszik, melyből kiinduló és az egyik kúpszeletre vonatkozólag kapcsolt polárisok a másikra nézve is kapcsoltak. E pontok a kúpszeleteken belül fekszenek, különben azokból valós közös érintőket lehet a kúpszeletekhez húzni. Ezt előre bocsátva, ha az előbbi eljárás szerint a kollineáció-középpontot és ellentengelyt akkép határozzuk meg, hogy k -nak és A, B pontoknak megfelelő alakzata egy kúpszelet és annak két gyűjtőpontja, akkor k' -nek megfelelő kúpszeletnek is e pontok lesznek gyűjtőpontjai.*

195. k kúpszelet kollinear ábrája ugyanazon kúpszelet is lehet. Ha ugyanis $k \equiv k_1$ -en A, B, C és A_1, B_1, C_1 pontokat tetszőlegesen választjuk és k -t akkép vonatkoztatjuk k_1 -re kollinear, hogy A, B, C pontoknak A_1, B_1, C_1 pontok feleljenek meg, akkor (184.) a kollinear vonatkozás teljesen meg van határozva. Minden X pontnak k -ban megfelel egy X_1 pont $k_1 \equiv k$ -ban, $(ABCX) \bar{\wedge} (A_1B_1C_1X_1)$ reláció alapján. Ha $k \equiv k_1$ -ben fekvő projektív pontsorok két valós kettősponttal I, K -val bírnak, akkor a két egyesített kollinear síkrendszer megfelelőleg közös háromszögének (183.) oldalai: $|IK|$, és I, K pontok érintői. De ha I, K pontok képzetesek, akkor is a megfelelőleg közös háromszögnek egyik oldala és szögpontja: $AB_1CA_1BC_1$ PASKAL-féle hatszögnek PASKAL-féle egyenese, és annak k -ra vonatkozó pólusa. —

k kúpszeletnek kollinear ábrája azonkívül, hogy k -val egybeesik, még k -val perspektív helyzetű is lehet. Ha ugyanis k -ba irt $ABC, A_1B_1C_1$ háromszögeket akkép választjuk, hogy $|AA_1|, |BB_1|, |CC_1|$ egyenesek egymást egy O pontban messék, akkor a kúpszelettel és azon háromszögekkel meghatározott kollinear síkrendszerek perspektív helyzetűek.

A kúpszeleten fekvő megfelelő pontsorok: $ABCX \dots; A_1B_1C_1X_1 \dots$, ekkor nemcsak projektívek, hanem involúciós

* E tárgyalás összehasonlítható szerzőnek •Construction der den Brennpunkten eines Kegelschnitts etc.• című «Archiv f. Math. und Physik» folyóiratban (1886.) megjelent cikkével.

helyezték is. A kollinear síkrendszerek ekkor szintén involúziós helyzetűek; az involúziós középpont és tengely: O és annak k -ra vonatkozó polárisa. E szerint: *ha két ugyanazon síkban fekvő perspektív helyzetű kollinear síkrendszerben egy kúpszelet önmagának megfelel, akkor a síkrendszerek involúziós helyzetűek: az involúzió-középpont és tengely a kúpszeletnek egy pólus és polárisa.*

De fordítva is következtethető: ha O pont és s egyenes valamely k kúpszeletnek pólus és polárisa, ha továbbá A, A_1 két pontja k -nak, mely O -val ugyanazon egyenesben fekszik, és mi egy perspektív helyzetű kollinear vonatkozást O, s kollineáció-középpont és tengely, valamint A, A_1 megfelelő pontpárral létesítünk: akkor k kúpszelet minden pontjának megfelelő pont k -n fekszik, vagyis k kúpszelet önmagának megfelel. —

196. *k kúpszelet affin alakzata k_1 szintén kúpszelet, mely k -val egynemű.* Ez onnan következik, hogy az affin vonatkozásnál az ellentengelyek végtelen távol vannak és így r_∞ ellentengely k -val ugyanannyi valós pontot bír közösen mint $r_{1\infty}, k_1$ -gyel.

Ha két egynemű kúpszeletet k, k_1 -et, affin akarunk egymásra vonatkoztatni, akkor k , két vagy egy pontjának megfelelő pontját k_1 -ben tetszőlegesen választhatjuk, a szerint a mint k és k_1 parabola, vagy más kúpszelet.

k, k_1 parabola ugyanis r_∞ , illetve $r_{1\infty}$ -et C_∞ és $C_{1\infty}$ pontban érinti, és hogy a parabolák az affin vonatkozásban megfeleljenek, kell hogy $r_\infty, r_{1\infty}$ végtelen távol fekvő érintők és azok $C_\infty, C_{1\infty}$ érintőpontjai egymásnak megfeleljenek. Ha tehát k parabola A, B pontjának megfelelő A_1, B_1 pontot k_1 -en tetszőlegesen választjuk, akkor a két kúpszelet kollinear van egymásra vonatkoztatva. A vonatkozás azonban affin, mert C_∞ és $C_{1\infty}$ pont érintői, tehát a két síkrendszer végtelen távol fekvő egyenesei: megfelelők.

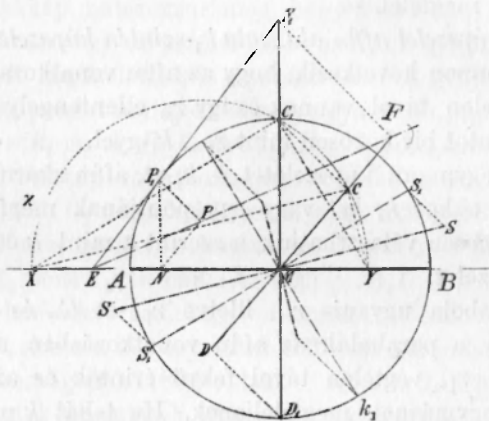
Ha másodszer k és k_1 ellipsisek A, A_1 pontja tetszőleges; EF, E_1F_1 pedig A , illetve A_1 ponton átmenő átmérőhöz kapcsolt, úgy a két rendszert akkép lehet egymásra kollinear vonatkoztatni, hogy $|AE|, |AF|, |EF|, r_\infty$ egyeneseknek: $|A_1E_1|, |A_1F_1|, |E_1F_1|, r_{1\infty}$ egyenesek feleljenek meg. M, M_1 középpontok, melyek E, F -t r_∞ -tól, illetve E_1, F_1 -et $r_{1\infty}$ -tól harmonikusan elválasztják: megfelelők, tehát $|AM|, |A_1M_1|$ egyenesek, valamint E és F ponton át $|AM|$ -mel és E_1, F_1 ponton át $|A_1M_1|$ -mel párhuzamosan haladó egyenesek szintén megfelelők. Minthogy ez utóbbiak k, k_1 -nek érintői E, F , illetve E_1, F_1 pontokban, ezen érintők, és A , illetve A_1 pont pedig a kúpsze-

leteket meghatározzák: azért a kollinear vonatkozásban k -nak k_1 felel meg. E kollinear vonatkozás azonban *affinitás*, mert a kúpszeletek síkjának végtelen távol fekvő $r_\infty, r_{1\infty}$ egyenesei megfelelők.

Ha végre k, k_1 kúpszeletek hyperbolák, akkor ezeket akkép lehet egymásra kollinear vonatkoztatni, hogy az egyik hyperbola két végtelen távol fekvő és egy végesben levő A pontjának, a másik hyperbola két végtelen távol fekvő és egy végesben levő A_1 pont feleljen meg.

A két hyperbola ekkor kollinear van egymásra vonatkoztatva, mely kollineaczió azonban affinitássá fajul.

197. Ha valamely k ellipsis M középpontjából annak tetszőleges A pontján át k_1 kört írunk le, akkor ezen kör kétféleképp lehet k



116. ábra.

ellipsisnek perspektív helyzetű affin alakzata $|AM|$ affinitástengelyre vonatkozólag. AM -hez kapcsolt kör és ellipsis átmérőt C_1D_1, CD -nek nevezvén: C, C_1 , vagy C, D_1 pontokat lehet megfelelőknek tekinteni, az első esetben a kollineaczió-középpont $|CC_1|$ -nek, a másodikban $|CD_1|$ -nek végtelen távol fekvő pontja (116. ábra).

E tulajdonság tekintetbe vételével $\overline{AB}, \overline{CD}$ kapcsolt átmérő-párral adott k ellipsis: pontjait, érintőit, tengelyeit egyszerűen szerkeszthetjük.

\overline{AB} átmérő fölött M középpontból leírt k_1 kör ugyanis affin k -val $|AB|$ affinitástengelyre vonatkozólag; a megfelelő pontpárokat összekötő sugarak párhuzamosak $|CC_1|$ -gyel, hol C_1 , az $|AB|$ -re merőleges körátmérőnek $|C_1D_1|$ -nek egyik végpontja.

k_1 tetszőleges P_1 pontjának és e pont p_1 érintőjének megfelelő P pontját és p érintőjét megkapjuk, ha p_1 -et metszéshez hozzuk $|AB|$, $|C_1D_1|$ -gyel E, F_1 -ben. E pont önmagának felel meg, míg F_1 -nek megfelelő F pont $|CD|$ -n fekszik és $|FF_1| \parallel |CC_1|$; $|EF_1| \equiv p_1$ -nek megfelel $|EF| \equiv p$, P_1 -nek pedig P pont, hol $|PP_1| \parallel |CC_1|$. Ha csak P_1 -nek megfelelő P pontját keressük, úgy MCC_1 -gyel hasonló és hasonló fekvésű NPP_1 háromszöget szerkesztünk, melynek N szög-pontja $|AB|$ -n fekszik.

Ha C, C_1 -en át α kört írunk le, melynek középpontja $|AB|$ -n van és mely $|AB|$ -t X, Y pontokban metszi, úgy $|XC_1|, |YC_1|$ egymásra merőleges egyeneseknek $|XC|, |YC|$ egymásra merőleges egyenesek felelnek meg. $|XC_1|, |YC_1|$ -gyel párhuzamos körátmérőknek, melyek kapcsolnak, megfelelnek $|XC|, |YC|$ -vel párhuzamos ellipszis átmérők, melyek szintén kapcsolnak, s mert merőlegesek egymásra, azért ezek k ellipszisnek tengelyei.

24. §. A reciprok vonatkozás.

198. A kollineáció, mint láttuk, olynemű vonatkozása két síkrendszer pontjai- és egyenesének, hogy az egyik síkrendszer bármely pontjának és azon átmenő egyenesnek, egy pont és azon átmenő egyenes felel meg. Ismeretes továbbá, hogy egy valós vagy képzetes kúpszelet, egy síkrendszer pontjai és egyenesei között oly vonatkozást állapít meg, mely szerint a sík bármely pontjának mint pólusnak, egy egyenes felel meg, mint azon pont polárisa, és viszont bármely egyenesnek mint polárisnak, bizonyos pont felel meg, mely azon egyenesnek pólusa. Lehet azonban két síkrendszer S, S_1 pontjai és egyenesei között is oly vonatkozást létesíteni, melynél S síkrendszer minden pontjának X -nek és egy ezen ponton átmenő y egyenesnek, S_1 síkrendszerben egy x_1 egyenes és azon fekvő Y_1 pont felel meg.

Hogy ezt kimutassuk, vegyünk fel S síkrendszerben $ABCD$ négyszöget, S_1 -ben a_1, b_1, c_1, d_1 négyoldalt és mondjuk, hogy S síkrendszer A, B, C, D pontjainak feleljenek meg a_1, b_1, c_1, d_1 egyenesek S_1 -ben. S rendszer X pontjának megfelelő x_1 egyenes S_1 -ben akképp lesz meghatározva, hogy

$$A(BCDX) \wedge a_1(b_1c_1d_1x_1), \text{ és } B(ACDX) \wedge b_1(a_1c_1d_1x_1);$$

az első föltételből (a_1, x_1) pont, a másodikból (b_1, x_1) pont szerkeszthető, melyeknek összekötő egyenese: x_1 .

Ha X pont g egyenesen végig halad, $|AX|$, $|BX|$ sugarak két perspektív helyzetű sugársort, (a_1, x_1) , (b_1, x_1) pontok két az egyes sugársorokkal projektív és egymás között perspektív pontsört írnak le a_1 , b_1 tartókon; mert a_1 , b_1 tartók metszéspontja egymásnak megfelelő pont, minthogy ez: $|AB|$ és $|BA|$ sugárnak megfelel. A mozgó X pontnak megfelelő x_1 sugarak tehát X -szel projektív sugársort írnak le, melynek középpontja g -nek megfelelő G_1 pont.

S síkrendszer tetszőleges Y pontjának összekötő egyenesei a mozgó X pontokkal, egy $\{Y\}$ sugársort képeznek, mely projektív, Y pontnak megfelelő y_1 egyenesen x_1 sugársor által kimetszett $\{y_1\}$ pontsorrall, és ezért $|AB|$ -nek metszése $\{Y\}$ -mal, és $\{y_1\}$ -nek projekciója (a_1, b_1) pontból: egymásnak megfelelő projektív pontsor, illetve sugársor. Ebből látható, hogy $|AB|$ egyenes tetszőleges pontjának megfelelő sugarat akkép kapjuk meg, ha azon ponton átmenő egyenesnek megfelelő pontját (a_1, b_1) -gyel összekötjük.

Két síkrendszer, mely oly módon van egymásra vonatkoztatva, hogy az egyik síkrendszer bármely pontjának és azon átmenő egyenesnek, a másikban egy egyenes és azon fekvő pont felel meg, és így az egyik síkrendszerben minden pontsor vagy sugársornak, a másikban az előbbiekkal projektív sugársor, illetve pontsor felel meg: reciprok síkrendszernek nevezetük.

Ezen értelmezésből következik, hogy ha két síkrendszer S_1 , S'_1 egy harmadikkal S -sel reciprok, akkor azon két síkrendszer egymással collinear. S -ben fekvő pontsornak és avval perspektív sugársornak ugyanis S_1 -ben, úgyszintén S'_1 -ben azokkal projektív és perspektív helyzetű sugársor és pontsor felel meg, miért is S_1 , S'_1 síkrendszerek egymással kollinear vonatkozásban állanak.

199. S , S_1 síkrendszer q_∞ , illetve $r_{1\infty}$ egyenesének, S_1 -ben Q_1 pont, S -ben R pont felel meg. Ezen Q_1 , R pontok, melyek általában nem fekszenek végtelen távol, a reciprok rendszerek középpontjainak; minden rajtuk átmenő egyenes: a rendszerek átmérőjének nevezetük.

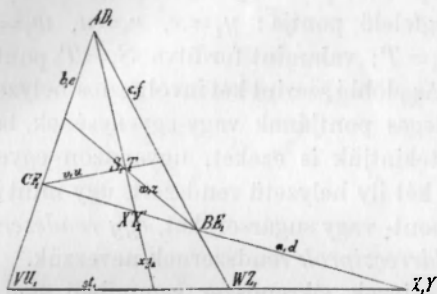
Mialatt X_∞ pont q_∞ -en pontsört ír le, a neki megfelelő x_1 átmérő O_1 körül a pontsorrall projektív sugársort fog leírni; minden ily x_1 átmérő végtelen távol fekvő $Y_{1\infty}$ pontjának S -ben egy y átmérő felel meg. Két-két oly átmérő, melyek közül egyik, tehát mindegyik, a másik végtelen távol fekvő pontjának felel meg: kapcsolt átmérőnek nevezetük.

Az egyik síkrendszer átmérőiből alkotott sugársor projektív

ezen átmérőkhöz kapcsolt átmérőkből képezett sugársorral, és mert két projektív sugársorban mindig van egy vagy végtelen sok oly egymásra merőleges sugárpár, melynek megfelelő sugárpárja szintén merőleges egymásra, azért: ha két síkrendszer reciproklík, akkor az egyikben mindig van oly egymásra merőleges átmérőpár m, n , melyhez kapcsolt átmérők m_1, n_1 , szintén merőlegesek egymásra.

Ha e különös átmérőpárok — a reciproklík rendszerek *tengelyei* — úgy lesznek egymásra fektetve, hogy m, n_1 -re, m_1 pedig n -re kerüljön, mely elhelyezésnél, mint magától értetődik, $r_{1\infty}, q_{\infty}$ -nel egyesül: a két reciproklík rendszer *involucziós helyzetűnek* neveztetik.

200. Két reciproklík síkrendszer S, S_1 , mely úgy van egymásra fektetve, hogy egy háromszög szögpontjainak megfelelő egyenesek, akármelyik rendszerhez tartozónak tekintsük is a szögpontokat, a



117. ábra.

háromszög átéllenes oldalai felelnek meg, azon tulajdonsággal bír: hogy a két síkrendszer minden pontjának, mint az egyes síkrendszerekhez tartozó pontnak, megfelelő egyenesei egybeesnek, és így m, n tengelyek $M_{\infty} = \bar{N}_{1\infty}$, valamint $N_{\infty} = \bar{M}_{1\infty}$ végtelen távol fekvő pontjainak megfelelő m_1, n , illetve n, m_1 egyenesei is egybeesnek, tehát a síkrendszerek involucziós helyzetűek.

Nevezzük (117. ábra) $A = D_1, B = E_1, C = F_1$ szögpontokkal bíró háromszög azon oldalait, melyek e szögpontokkal átéllenesek: $a_1 = d, b_1 = e, c_1 = f$ -nek; $a_1 = d$ oldal tetszőleges $X_1 = Y_1$ pontjának megfelelő egyeneseket, melyek $A = D_1$ ponton mennek át, x, y_1 -nek; ezek metszéspontjait $a_1 = d$ -vel X', Y'_1 -nek.

Mint hogy $a_1 = d$ egyenes E_1 és F_1 pontjának e és f egyenes; X' pontnak, mely d, x metszéspontja $|D_1 X_1|$ egyenes; Y'_1 pontnak, mely a_1, y_1 metszéspontja $|A Y|$ egyenes felel meg, azért:

$$(X_1, Y_1, E_1, F_1) \wedge (x, |AY|, e, f) \wedge (X', Y, C, B) \wedge (Y, X', B, C),$$

miből következik, mert

$$X_1 = Y, E_1 = B, F_1 = C,$$

hogy

$$Y_1 = X', \text{ tehát } x = y_1.$$

Ennélfogva $a_1 = d$ oldal tetszőleges pontjának, mint az egyik és másik rendszerhez tartozó pontnak ugyanazon egyenes, és $A = D_1$ szögpontra átmenő egyenesnek, ugyanazon pont felel meg. E tulajdonsággal bír $ABC = D_1 E_1 F_1$ háromszögnek többi szögpontja és oldala is.

Egy tetszőleges $s = t_1$ egyenes, $d = a_1$, $e = b_1$, $f = a_1$ háromszög-
oldalakat $Y = X_1$, $V = U_1$, $W = Z_1$ pontokban metszi; e metszópontoknak $y_1 = x$, $v_1 = u$, $w_1 = z$ egyenesek felelnek meg, miért is $s = t_1$ egyenesnek megfelelő pontja: $y_1 = x$, $v_1 = u$, $w_1 = z$ egyeneseknek metszópontja $S_1 = T$; valamint fordítva $S_1 = T$ pont megfelelő egyenese: $s = t_1$. — Az előbbi szerint két involúciós helyzetű reciprok síkrendszer tetszőleges pontjának vagy egyenesének, bármely rendszerhez tartozónak tekintjük is ezeket, ugyanazon egyenes illetve pont felel meg, ezért két ily helyzetű rendszert, úgy mint involúciós helyzetű projektív pont- vagy sugársorokat, *egy rendszernek* tekintünk és mint ilyent, *polárrecziprok rendszernek* nevezzük.

A polárrecziprok síkrendszer semmiben sem különbözik egy valós vagy képzetes kúpszelet által indukált polárrendszertől, a menynyiben a polárrecziprok síkrendszerénél is: a sík minden egyenesén s -en fekvő pontsornak, egy a pontsorról projektív és involúciós helyzetű S_1 sugársor felel meg; mert s , $ABCT$ négyszög oldalaitól involúciót képező hat pont szerint metszetik, tehát $YUW \dots$ pontsor involúciós helyzetű $y_1 u_1 w_1 \dots$ sugársorral. A megfelelő elempárok úgy mint: s , S_1 , képezik a polárrendszer polárisait és pólusait.

201. Két tetszőlegesen egymásra fektetett reciprok síkrendszer S, S_1 nem lesz involúciós helyzetű, és ezért egy tetszőleges pontnak, mint az egyik és másik rendszerhez tartozónak megfelelő egyenesei egymástól különböznek. *De ugyanazon síkban fekvő két reciprok síkrendszerben mindig létezik oly $P = P_1$ pont, melynek megfelelő p_1, p egyenesei egybeesnek*, vagyis mely pont és egyenes egymásnak involúciósan megfelel.

Hogy ezt belássuk, nevezzük a közös síkban fekvő $C = C_1$ pont megfelelő c_1, c egyeneseknek metszópontját $C' = C'_1$ -nek, e metsző-

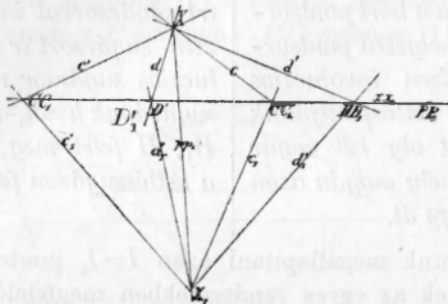
pontnak megfelelő és így $C=C_1$ ponton átmenő egyeneseket c', c' -nek; $|CC'|=|C_1C'_1|=x=x_1$ egyeneseknek megfelelő pontjait, melyek szintén különbözők: X_1, X -nek.

$x=x_1$ egyenes tetszőleges $D=D_1$ pontjának (118. ábra) megfelelő, tehát X_1 , illetve X -en átmenő két egyenes: d_1, d ; ezek metszéspontja $x=x_1$ -gyel: D'_1, D' ; végre $(x_1, d_1)=D'_1$ -nek és $(x, d)=D'$ -nek megfelelő két egyenes $|XD|=d'$, illetve $|X_1D_1|=d'_1$.

Mintthogy

$$(CC'DD') \wedge (c_1c'_1d_1d'_1) \wedge (C'_1CD_1D) \wedge (CC'_1DD'_1),$$

azért D' összeesik D'_1 -gyel: tehát $x=x_1$ egyenes tetszőleges pontjának megfelelő egyenesek egymást $x=x_1$ -nek ugyanazon pontjában metszik.



118. ábra.

Ha $E=E_1$, ezen $x=x_1$ -nek egy új pontja, melynek megfelelő e_1, e egyenesek $x=x_1$ -et, $E'=E'_1$ -ben metszik, akkor

$$(CDEC') \wedge (c_1d_1e_1c'_1) \wedge (C'D'E'C),$$

miből látható, hogy: C, C' ; D, D' ; E, E' pontpárok involúciót képeznek.

Mialatt tehát egy pont $x=x_1$ -en végig halad, a neki az egyes rendszerekben megfelelő sugarak $x=x_1$ -et, egy a leírt pontsorról involúciós helyzetű pontsorról metszik. A mozgó pont egy helyzeténél pl. $P=P_1$ -nél: a neki megfelelő p_1, p sugarak $|XX_1|$ -be esnek, és így $P=P_1$ pont lesz a recziprok síkrendszereknek azon pontja, melynek megfelelő egyenesei egybeesnek. Más ily pont, melynek megfelelő két egyenes egybeesik, és mely egybeeső két egyenes nem megy át magán a ponton, nem található a síkban, mert ha még egy ily pont

léteznék, akkor a reciprok síkrendszerek involucziós helyzetűek volnának. Ebből és az előbbi bebizonyításból következik:

Ha két reciprok síkrendszer közös síkban fekszik, és egy tetszőleges

$C=C_1$ pont megfelelő c_1, c egyeneseknek $C' = C'_1$ metszőpontját $C=C_1$ -gyel összekötjük, akkor az összekötő $x=x_1$ egyenes a síknak azon különös $P=P_1$ pontján megy át, melynek megfelelő egyenesei $p_1=p$ egybeesnek. Mialatt $C=C_1$ pont $x=x_1$ -en végig halad, a neki megfelelő sugarak $x=x_1$ -et egy és ugyanazon a leírt pontsorról involucziós helyzetű pontsorbán metszik. Ezen involucziós pontsorra minden kettőspontjának $I=I_1$ -nek, tehát oly két sugár i_1, i felel meg, mely magán azon kettősponton megy át.

$d=d_1$ egyenes megfelelő D_1, D pontjait $|DD_1|$ egyenes által összekötjük, akkor $|DD_1|=d'=d'_1$ egyenes $d=d_1$ -et a sík azon különös $p=p_1$ egyenesén metszi $Y=Y_1$ pontban, melynek megfelelő $P_1=P$ pontjai egybeesnek. Mialatt $d=d_1$ sugár $Y=Y_1$ körül forog, $d'=d'_1$ sugár, d által leírt sugársorral involucziós helyzetű sugársort ír le. Ezen involucziós sugársor minden kettőspontjának $h=h_1$ -nek oly két pont H_1, H felel meg, mely magán a kettősponton fekszik.

202. Célunk megállapítani azon $I=I_1$ pontnak geometriai helyét, melyeknek az egyes rendszerekben megfelelő i_1, i sugarak magán a ponton $I=I_1$ -en mennek át, továbbá azon $h=h_1$ sugarak által burkolt görbét, melyeknek megfelelő H_1, H pontjai $h=h_1$ sugáron fekszenek. Mielőtt ezt tennők, előre kell bocsátanunk a következőket:

Ha két reciprok síkrendszer közös síkjában fekvő

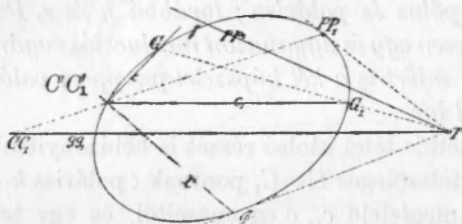
$C=C_1$ pontot a sík tetszőleges $g=g_1$ egyenesén tova mozgatjuk, akkor a megfelelő c_1, c egyenesek egymást egy γ kúpszelet $C' = C'_1$ pontjaiban metszik; e kúpszelet átmegy $g=g_1$ -nek megfelelő G_1, G ponton, és a síknak azon $P=P_1$ pontján, melynek involucziósan megfelelő $p_1=p$ egyenesese van. Mialatt $C=C_1$ pont, $g=g_1$ -en fekvő pontsorra befutja azon c su-

$d=d_1$ sugarat $L=L_1$ pont körül forgatunk, akkor a megfelelő D_1, D pontok összekötő egyenesei $d'=d'_1$, egy λ kúpszeletet burkolnak, melynek érintői: $L=L_1$ -nek megfelelő l_1, l egyenesek, valamint $p=p_1$. Mialatt $d=d_1, L=L_1$ körül forog azon \mathfrak{D} pont, mely D, D_1 -et $p=p_1$ -től harmonikusan elválasztja, λ -nak egy érintőjén l -en, a forgó $d=d_1$ sugárral in-

gár, mely c, c_1 -et $|PCC'|$ -től harmonikusan elválasztja, γ -nak egy \mathcal{G} pontja körül forog és C -vel involúziós helyzetű sugársort ír le. g és γ metszőpontjának az egyes reciprok rendszerekben megfelelő sugarak átmennek azon metszőponton.

volúziós helyzetű pontsört ír le. $L=L_1$ -ből λ -hoz vonatkozó érintőnek megfelelő pontjai az egyes rendszerekben, magán az érintőn fekszenek.

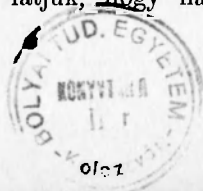
$g=g_1$ egyenesen mozgó $C=C_1$ pontnak megfelelő c_1, c sugarak, G_1, G körül két, C -vel és így önmaguk között is projektív sugársort írnak le, ennél fogva e sugársorok képződménye, vagyis c_1, c sugarak $C'=C'_1$ metszőpontjának geometriai helye: G_1, G ponton átmenő γ kúpszelet. A midőn a mozgó $C=C_1$ pont g és p metszőpontjába T -be kerül, a neki megfelelő c_1, c sugarak egymást $P=P_1$ -ben metszik, és γ -nak érintője P pontban: $|PT|$ egyenes (119. ábra).



119. ábra.

Ha γ azon pontját, mely P -t, G, G_1 -től harmonikusan elválasztja, \mathcal{G} -nek nevezzük, úgy $C=C_1$ bármely helyzeténél $g=g_1$ egyenesen, azon c sugár, mely $|C'CP|$ -t, c, c_1 -től harmonikusan elválasztja \mathcal{G} -n megy át. E pontban érinti a T -ből kiinduló második érintő γ kúpszeletet, mert $(GG_1P\mathcal{G})=-1$, és P érintője, valamint $|GG_1|, T$ ponton megy át. Tekintve, hogy $|P\mathcal{G}|$ -nek γ -ra vonatkozó pólusa T, g -n fekszik; $|C'CP|, |C'\mathcal{G}|=c$ sugarak g -t kapcsolt pólusokban metszik tehát C által g -n és c által \mathcal{G} körül leírt projektív sorok $\{g\}$, illetve; $\{\mathcal{G}\}$, involúziós helyzetűek. Ha $\{\mathcal{G}\}$ sugársor egy c sugara a $\{g\}$ pontsornak c -hez tartozó C pontján megy át, a mi akkor következik be, a midőn $C=C_1$ pont g és γ -nak metszőpontja: $C=C_1$ pontnak a reciprok rendszerekben megfelelő c_1, c egyenesek szintén átmennek $C\equiv C_1$ ponton.

Mindezekből azt látjuk, hogy ha két reciprok síkrendszer



ugyanazon síkban fekszik, akkor ezen sík minden g egyenesén fekvő $\{g\}$ pontsorhoz egy $\{\mathcal{G}\}$ sugársor tartozik, mely a pontsorról involúziós helyzetű. De valamely sík összes egyenesi és pontjai, melyek oly módon vannak egymásra vonatkoztatva, hogy minden egyenesen fekvő pontsornak, egy a pontsorról involúziós helyzetű sugársor tartozik, mint tudjuk: *polárrendszert* alkotnak; e polárrendszer azon pontjai, melyek a pontokhoz tartozó egyenesen fekszenek: egy kúpszeletnek pontjai. Ebből következik:

Két ugyanazon síkban fekvő reciprokok síkrendszer azon

$C = C_1$ pontjai, melyeknek az egyes rendszerekben megfelelő c_1 , c egyenesi magán a ponton átmennek: egy valós vagy képzetes k kúpszeletnek pontjai.	$d = d_1$ egyenesi, melyeknek az egyes rendszerekben megfelelő D_1 , D pontok, magán az egyenesen fekszenek: egy valós vagy képzetes x kúpszeletet burkolnak.
---	---

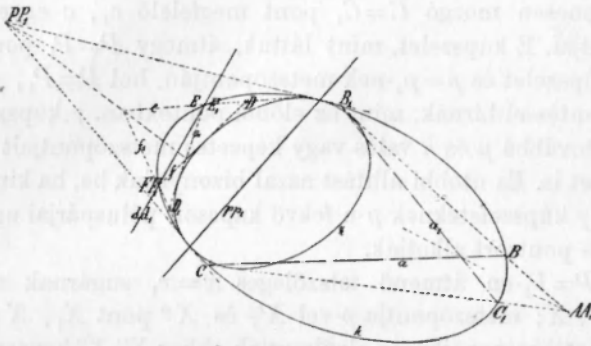
Az involúziósan megfelelő $P = P_1$ pont és $p = p_1$ egyenes k és x kúpszeletnek pólus és polárisa; továbbá k és x , $P = P_1$ pont körül és $p = p_1$ egyenesen egy és ugyanazon involúziós sugár — illetve pontsört indukálja, miért is a két kúpszelet $p = p_1$ -en valós vagy képzetes kettős érintéssel bír.

Hogy e kettős tétel utolsó részét is bebizonyítsuk, vegyük tekintetbe, hogy egy tetszőleges $C = C_1$ pontnak c polárisa k -ra vonatkozólag. C , C_1 pontnak megfelelő c_1 , c egyeneseitől, és egy tetszőleges $d = d_1$ egyenes \mathcal{D} pólusa x -át illetőleg, a megfelelő D_1 , D pontoktól, harmonikusan van elválasztva. Ha tehát $C = C_1$ pont $p = p_1$ -en vétetik fel: C , C_1 -nek megfelelő c_1 , c sugarak $P = P_1$ -en mennek át, és $|PC| = |P_1C_1|$ sugárnak megfelelő (p_1c_1) , (p, c) pontok: $p = p_1$ -en fekszenek. Ennélfogva $p = p_1$ -en mozgó $C = C_1$ pontnak k -ra vonatkozó polárisa átmeny $|PC| = |P_1C_1|$ -nek x -ra vonatkozó és $p = p_1$ -en fekvő pólusán, — melylyel a tételnek utolsó része is be van bizonyítva.

k és x kúpszelet származtatásánál fogva azon tulajdonsággal bír, hogy k tetszőleges $E = E_1$ pontjából x -hoz vonható e_1 , e érintők: az EE_1 pont megfelelő egyenesi; továbbá x bármely érintője $b = b_1$, k -t a két megfelelő pontban B_1 , B -ben metszi. Ebből látható, hogy k és x kúpszelet egyidejűleg valós vagy képzetes; továbbá ha k és x kúpszelet két érintőpontja: Q , R , és így ezeknek érintője q , r valós, akkor $Q = Q_1$ -nek és $R = R_1$ -nek megfelelő $q = q_1$, illetve $r = r_1$, szintén involúziósan felelnek meg egymásnak. De ezen utóbbi pontok abban különböznek a már előbb ismert $P = P_1$, $p = p_1$ involúziósan

megfelelő elempártól, hogy azok képzetesek is lehetnek, míg $P=P_1$, $p=p_1$ mindig valós; továbbá hogy $Q=Q_1$ rajta fekszik $q=q_1$ -en, $R=R_1$ pedig $r=r_1$ -en, míg $P=P_1$ pont $p=p_1$ -en kívül van.

203. Bármily két kettős érintésű kúpszelet: k , x , két recziprok síkrendszert határoz meg, melyben az egyik kúpszeletnek, pl. k -nak tetszőleges pontján, az ezen pontnak a recziprok vonatkozásban megfelelő egyenesek mint x érintői, átmennek, és így x érintőinek megfelelő pontok, ezen érintők metszéspontjai k -val; az involúziósan megfelelő elempár $P=P_1$, $p=p_1$, k és x közös érintőinek metszéspontja, illetve az érintőpontok összekötő egyenese. Egy tetszőleges $A=A_1$ pontnak megfelelő egyenesek k , x segélyével következő-



120. ábra.

kép szerkeszthetők (120. ábra): $A=A_1$ -ből x -hoz vonható $b=b_1$, $c=c_1$ érintők, k -t: B, B_1 , illetve C, C_1 -ben metszik. $b=b_1$ -en, B, B_1 pontokra nézve a jelölés tetszőleges; C, C_1 -nél azonban a jelölés oly módon eszközözendő, hogy $|BC_1|$, $|B_1C|$ sugarak $p=p_1$ -ben találkozzanak (84); $|B_1C_1|=a_1$, és $|BC|=a$ egyenesek lesznek $A=A_1$ pont megfelelő egyenesei. a, a_1 metszéspontja $A'=A'_1$, mint könnyen látható $|PAA_1|$ egyenesen fekszik, mert $|PAA_1|$ polárisa, $|BC_1|$, $|B_1C|$ metszéspontjának.

Ugyanígy lehet $d=d_1$ egyenesnek megfelelő D_1, D pontjait szerkeszteni: $d=d_1$ és k kúpszelet $E=E_1, F=F_1$ metszéspontjaiból e_1, e, f_1, f érintőket húzunk x -hoz; ezen érintők négy metszéspontja közül kettő: $(ef_1), (ef), PP_1$ -gyel ugyanazon egyenesen fekszik; a másik két metszéspont $(e_1f_1)=D_1, (ef)=D$: d, d_1 -nek megfelelő pontja; ezeknek összekötő egyenese $|DD_1|$, átmege $d=d_1$, és $p=p_1$ -nek közös pontján.

Ha $A=A_1$ -ből nem vonható valós érintő k -hoz, vagy $d=d_1$ nem metszi k -t valós pontokban, akkor az első esetben a_1, a meghatározása, két az $A=A_1$ ponton átmenő segédegyenessel, a másodikban D_1, D , két $d=d_1$ -en fekvő segédponttal eszközöltetik, mely segédelemek úgy lesznek választva, hogy azokkal az előbbi szerkesztés keresztül vihető.

A szerkesztésekből még látható, hogy ha k és x egybeesik, akkor $A=A_1$ pontnak megfelelő a_1, a egyenesek, valamint $d=d_1$ -nek megfelelő D_1, D pontok is egyesülnek és a szerkesztés maga nem egyéb, mint pont polárisának, illetve egyenes pólusának ismert szerkesztése.

204. Térjünk ismét vissza a 202. pontban ismert γ kúpszelethez, melynek $C=C_1$ pontjai a reciprok vonatkozásban, egy tetszőleges g egyenesen mozgó $C=C_1$ pont megfelelő c_1, c egyeneseknek metszéspontjai. E kúpszelet, mint láttuk, átmeny $P=P_1$ ponton, továbbá k kúpszelet és $p=p_1$ -nek metszéspontján, hol $P=P_1, p=p_1$ és k azon jelentéssel bírnak, mint az előbbi pontokban. γ kúpszelet tartalmazza, továbbá p és k valós vagy képzetes metszéspontjait $Q=Q_1$, és $R=R_1$ -et is. Ez utóbbi állítást azzal bizonyítjuk be, ha kimutatjuk, hogy k és γ kúpszeleteknek p -n fekvő kapcsolt póluspárjai ugyanazon involucziós pontsört alkotják.

Ha $P=P_1$ -en átmenő tetszőleges $x=x_1$ sugárnak megfelelő pontjai X_1, X ; metszéspontja p -vel X' , és X^* pont X_1, X pontokat $x=x_1$ sugártól harmonikusan elválasztják, akkor X', X^* kapcsolt pólusa k -nak. Ha továbbá $x=x_1$ sugár g -t, $C=C_1$ metszi, úgy CC_1 pontnak megfelelő, egymást $C'=C_1$ -ben metsző c_1, c egyenesek: X_1 , illetve X -en mennek át, tehát azon $|C'G|$ sugár, mely $|C'CP|$ -t, c_1, c -től harmonikusan elválasztja, szintén átmeny X^* ponton. Tudjuk továbbá, hogy $p=p_1$, $|PQ|$ -nek pólusát T -t tartalmazza; ebből következik: hogy $|C'G|$, $|C'CP|$ sugarak p -t, γ -ra vonatkozólag is kapcsolt póluspárakban X^*, X' metszik. Ha tehát egy síkban két reciprok síkrendszer fekszik és mi a sík minden $C=C_1$ pontjának a reciprok rendszerekben megfelelő c_1, c egyenesek $C'=C_1$ metszéspontját, C -hez tartozó pontnak tekintjük, akkor egy g egyenes pontjaihoz tartozó pontok, a reciprok rendszereknek azon három állandó pontján $P=P_1, Q=Q_1, R=R_1$ átmenő γ kúpszeleten fekszenek, melyek involucziósan felelnek meg $p=p_1, q=q_1, r=r_1$ egyeneseknek.

C, C_1 pontoknak, valamint g egyenes és γ kúpszeletnek e vonatkozása hasonlít a STEINER-féle rokonság által megállapított vonatkozáshoz és másodfoku geometriai rokonságnak neveztetik (REYE TH.

Die Geometrie der Lage, II. kötet; 16. előadás). Itt is, mint a STEINER-féle rokosságnál P , Q , vagy R ponton átmenő egyenesekhez tartozó pontok egyenespárrá elfajult kúpszeleten fekszenek; de a STEINER-féle rokosságnál P , Q , R alappontok bármelyikén átmenő egyeneshez tartozó egyenespár: a másik két alappont összekötő egyenese és az első alapponton átmenő egyenes, míg itt a Q vagy R ponton átfektetett egyeneshez tartozó egyenespár: $|QP|$ és egy az R -en átmenő egyenes, illetve: $|RP|$ és Q -n átmenő egyenes.

TÖRÖK

BÜGGELER.

FÜGGELÉK.

(35)

1) Tanultuk (26), hogy ha $A, B, C, \dots; A_1, B_1, C_1, \dots$ projektív pontsorok kettőspontjai I, K , akkor

$$(AA_1IK) \wedge (BB_1IK) \wedge (CC_1IK),$$

tehát

$$(AA_1IK) \wedge B_1BKI, \text{ és } (AA_1IK) \wedge (C_1CKI),$$

a mi kifejezi, hogy

$$A, B_1; A_1, B; I, K, \text{ és } A, C_1; A_1, C; I, K$$

két involúziós sornak kapcsolt elempárjai. Az $A, B, C, \dots; A_1, B_1, C_1, \dots$ projektív pontsorok kettőspontjai tehát kapcsolt elempárját képezik az $A, B_1; A_1, B$, és $A, C_1; A_1, C$ kapcsolt elempárrakkal meghatározott involúziós soroknak; ennél fogva (fordítva is) «két projektív pontsor kettőspontjainak szerkesztése visszavezethető két involúziós pontsor közös elempárjának szerkesztésére».

2) Ha a teljes négyszög oldalait a végtelen távol fekvő egyenessel g_∞ -nel metszük, a g_∞ -en szintén hat involúziót képező pontot nyerünk, mely bármely pontból involúziót képező hat sugárral projicziáltatik. Ennél fogva: «ponton át egy teljes négyszög oldalaival párhuzamosan menő sugarak involúziót képeznek». Ha teljes négyszög két pár átellenes oldala egymásra merőleges, akkor az involúzió csirkuláris, tehát a harmadik pár átellenes oldal is merőleges lesz egymásra; a mi ezen ismert elemi tételre vezet: «egy háromszög magasságvonalai egymást egy pontban metszik».

3) «Ha két háromszög $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2$ oly helyzetű, hogy $A_1, A_2; B_1, B_2; C_1, C_2$ megfelelő szögpontjait összekötő egyenesek egymást egy pontban O -ban metszik, akkor a megfelelő oldalak metszőpontjai:

$$(|A_1B_1|, |A_2B_2|) = N, (|B_1C_1|, |B_2C_2|) = L, (|C_1A_1|, |C_2A_2|) = M$$

egyenesen fekszenek (DESARGUES).»

$|MN|$ egyenes metszéspontjait $|OA_1A_2|$, $|OB_1B_2|$, $|OC_1C_2|$ -vel, α , ill. β , γ -nak nevezvén:

$(OA_1A_2\alpha) \bar{\wedge} (OC_1C_2\gamma)$, mert persp. M középpontra nézve

$(OA_1A_2\alpha) \bar{\wedge} (OB_1B_2\beta)$, " " N " "

ennélfogva $(OB_1B_2\beta) \bar{\wedge} (OC_1C_2\gamma)$ és perspektív helyzetű, tehát $|B_1C_1|$, $|B_2C_2|$ egyenesek L metszéspontja $|\beta\gamma|$ egyenesen és így L pont $|MN|$ -en fekszik.

A tétel megfordítható t. i.: «ha két háromszög megfelelő oldalainak metszéspontjai egyenesen fekszenek, akkor megfelelő szögpontjait összekötő sugarak egy ponton mennek át»; a bebizonyítás hasonló az előbbihez.

Az alakzatban 10 pont: O , A_1 , B_1 , C_1 , A_2 , B_2 , C_2 , L , M , N és 10 egyenes van kitüntetve; minden ponton 3 egyenes megy át és minden egyenesen 3 pont fekszik. Az ily alakzat *konfiguráció*-nak neveztetik, és symbolikus jelölése ezen konfigurációnak: $(10_3, 10_3)$.

Egy más konfigurációt $(9_3, 9_3)$ nyerünk, ha $A_1C_2B_1A_2C_1B_2$ PASCAL-féle hatszögnek $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ szögpontjait egy-egy egyenesen, mint egyenespárrá elfajult kúpszeleten fekvőnek képzeljük; e hat szögpont és az átellenes oldalpárok három metszéspontja, mely PASCAL-féle egyenesen fekszik, a konfigurációnak 9 pontját; a hatszög oldalai az egyenespárrá elfajult kúpszelet, valamint a PASCAL-féle egyenes, a konfigurációnak 9 egyenesét képezi.

Hasonnemű konfigurációkra vonatkozólag I. SCHROETER HENRIK értekezését a Journal für r. u. a. Mathematik 108. kötet 4. füzetében ezen a czímen: «die Hesse'sche Configuration $(12_4, 16_3)$ », valamint: KLUG «Perspektív helyzetű alakzatokról» a M. T. Akad. Értekezései 1882, IX. kötet; és «Perspektív helyzetű tetraederek az n méretű térben», Pozsony, 1886.

4) E tétel alapján a kúpszeletnek második gyújtópontját és így a kúpszeletet szerkeszthetjük, ha annak három érintője és egyik gyújtópontja ismeretes, még pedig függetlenül a 96. pont alatt tanult általános eljárástól. F' gyújtópont I , I_1 , I_2 tükörképein át, a három érintőt t , t_1 , t_2 -öt illetőleg, kört fektetünk; ennek F' középpontja a kúpszeletnek második gyújtópontja. Ha I , I_1 , I_2 tükörképek egyenesen fekszenek (a mi akkor következik be, ha F' a tt_1t_2 háromoldal körül írható körön fekszik), akkor a kúpszelet parabola és $|II_1I_2|$ egyenesre merőleges egyenes párhuzamos a parabola tengelyével; ha pedig a

I, I_1, I_2 tükörképek tt_1t_2 háromoldal körülírható körön vannak, akkor F pont F' -be esik és a kúpszelet kör lesz.

5) Két kúpszelet metszéspontjainak vagy közös érintőinek szerkesztésére minden negyedrendű feladat vissza vezethető. Ezek közül fölemlítjük a következőt:

Egy adott N ponton át ellipsis vagy hyperbolához deréklő fektetendő. N pontból merőlegeseket bocsátunk az ellipsis vagy hyperbola átmérőire; ezen merőlegesek az egyes átmérőkhez kapcsolt átmérőket egy egyenoldalu hyperbolának pontjaiban metszik, melynek asymptótái párhuzamosak a kúpszelet tengelyeivel. Az átmérőkből álló sugársor projektív a hozzá kapcsolt átmérőkből alkotott sugársorral, és a reájuk merőleges sugarakból képezett sugársorral; a képződmény tehát kúpszelet. De minthogy N -ből a tengelyekre bocsátott merőlegeseken a metszéspontok végtelen távol vannak — a képződmény egyenoldalu hyperbola. Ezen egyenoldalu hyperbola és az adott kúpszelet egyik P metszéspontját N -nel összekötő $|NP|$ egyenes a kúpszeletnek deréklője, mivel NP merőleges P -n átmenő kúpszelet-átmérőhöz kapcsolt átmérőre, vagyis merőleges P pont érintőjére.

Ha az adott kúpszelet parabola, akkor N -ből a parabola érintőire bocsátott merőlegesek és az egy érintők érintőpontjain átmenő parabola átmérők alkotják azon két sugársort, melynek képződménye az egyenoldalu hyperbola. (Lásd: CHASLES: Traité des sections coniques. 142. lap.)

Ugyanezen feladat a STEINER-féle parabolával is egyszerűen oldható meg.

Az N ponton átmenő sugarakra merőlegesen álló és a kúpszeletet illetőleg kapcsolt polárisok ugyanis egy parabolát burkolnak, melyet PELZ: STEINER-féle parabolának nevez. Ezen parabola érintőihez tartoznak N pont polárisa, a kúpszelet tengelyei és N -en átmenő egymásra merőleges kapcsolt polárisok; tehát a kúpszelet M középpontján és N ponton átmenő egyenes: a parabola vezérvonala (127.). A parabola és a kúpszelet közös érintői a kúpszeletet oly pontokban érintik, melyeknek deréklői N ponton mennek át, mert ezen érintők és a deréklők egymásra kapcsolt polárisai a kúpszeletnek.

6) *Egy AOB szögnek három egyenlő részre osztása,* két kúpszelet metszéspontjainak szerkesztésére vezethető vissza. (Chasles: Traité des sections coniques, 36. lapján egy könnyen felismerhető hibás kitétel van.)

Ha az AOB szög O csúcsából leírt k kör a szög szarait A, B pon-

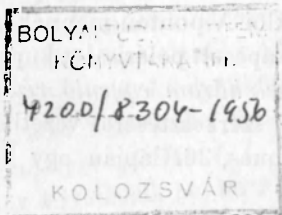
tokban metszi és k körön változó X pontból X' -et akkép határozzuk meg, hogy $2AX$ ív egyenlő legyen $X'B$ ívvel, akkor a változó $|OX|$, $|BX'|$ sugarak két összeálló, de ellenkezőleg forgó sugársort írnak le, mert $|OX|$ sugár $|OA|$ -val ugyanoly szöget képez, mint $|BX'|$ sugár k körnek B pontban vont érintőjével. Ennélfogva a változó $|OX|$, $|BX'|$ sugarak metszéspontjainak geometriai helye h egyenoldalú hyperbola (67). E hyperbola átmegy $|AO|$ és t metszéspontján, k körnek O középpontján, B ponton, és AB húrnak felezőpontján; a hyperbola asymptotái $|AO|$ és t egyenesek hajlásszögeinek felezőivel párhuzamosak; O és B pont érintői merőlegesek $|OA|$ -ra és így h -nak középpontja OB kör-küllő felezőpontja. h és k egymást B -n kívül még egy egyenoldalú háromszög három csúcspontjában P_1, P_2, P_3 -ban metszi, mely P_i metszéspontok h -nak származtatása folytán oly tulajdonságuk, hogy

$$2AP_i \text{ ív} = P_iB \text{ ív},$$

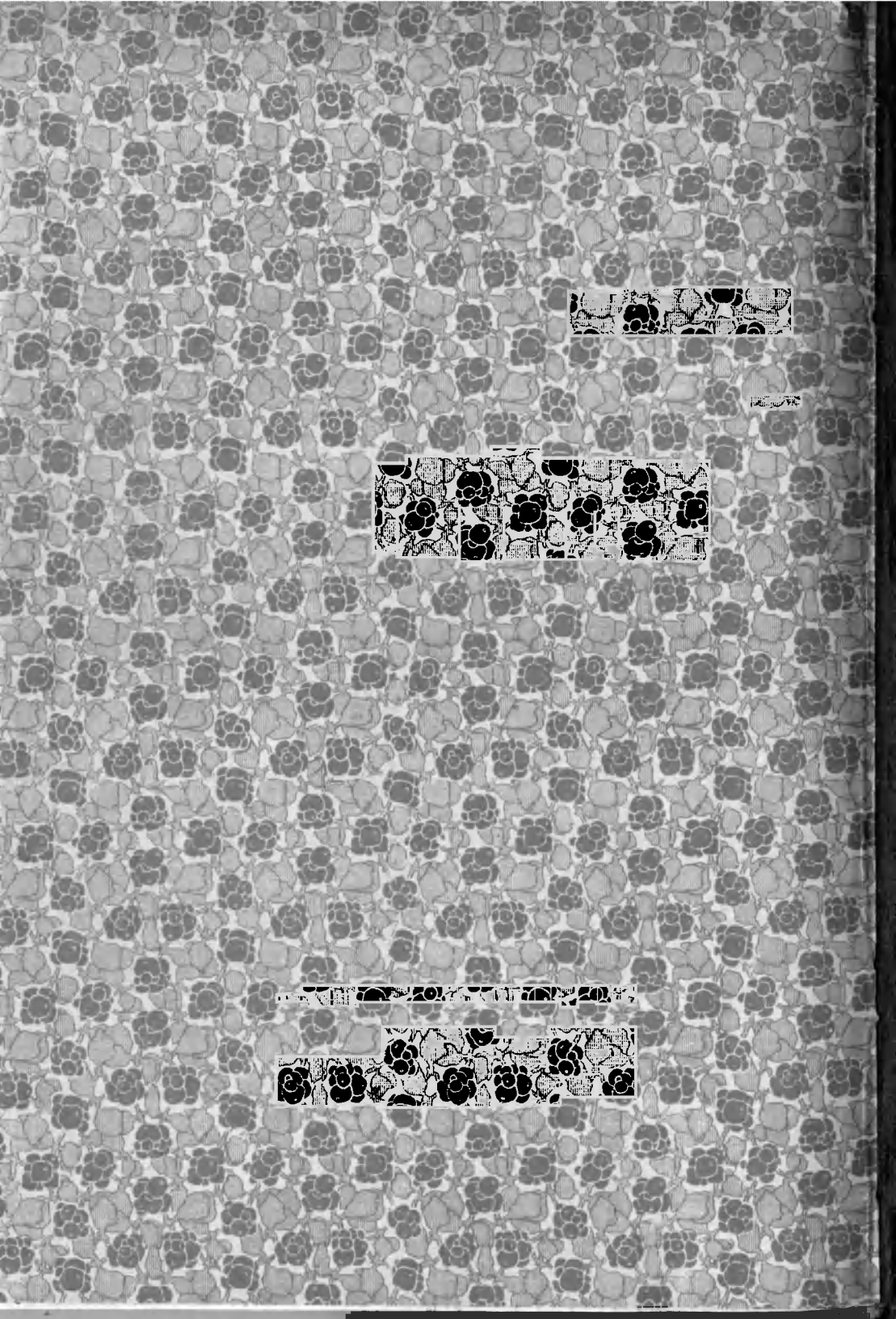
tehát OP_i sugarak AOB szöget, annak kiegészítő szögét két, illetve négy derékszögre: $1:2$ -höz viszony szerint osztják.

Ha AOB derékszög, akkor h elfajul két egymásra merőleges egyenessé, mely $|OB|$ -vel egybeesik, illetve OB -re a felező pontban merőleges. A derékszögnek három egyenlő részre osztása tehát körző és vonalzóval eszközölhető.

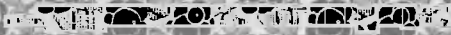
Viszont könnyen következtethető, hogyan lehet: egy megrajzolt egyenoldalú hyperbola, valamint körző és vonalzó, vagy csak körző (Mascheroni!) használatával bármily szöget három egyenlő részre osztani.



1500/8304-1870



100



5.304

KOLOZSVÁRI BOLYAI
TUDOMÁNYEGYETEM
GEOMETRIAI INTÉZET
KÖNYVTÁRA

Szaki. sz.: 304