ÁBRÁZOLÓ GEOMETRIA

A REÁLISKOLÁK VI., VII. ÉS VIII. OSZTÁLYA SZÁMÁRA

A LEGUJABB TANTERVNEK MEGFELELŐLEG

IRTA

DR. KLUG LIPÓT,

KOLOZSVÁRI TUD. EGYETEMI MAGÁNTANÁR.

BUDAPEST, 1900.

LAMPEL RÓBERT (WODIANER F. ÉS FIAI)

CS ÉS. KIR. UDVARI KÖNYVKERESKEDÉSÉNEK KIADÁSA.

1047—99. Budapest Nyomatott Wodianer F. és Fiainál.

ELŐSZÓ.

Az ábrázoló geometria oktatásának a középiskolában kettős czélja van. Az egyik czél, hogy a tanulót az ábrázoló geometria legegyszerűbb módszereivel, a Monge-féle orthogonális projectió tanával megismertesse; a másik, hogy a szerkesztésektől függetlenül is növelje a tanuló geometriai ismereteit.

E könyv megírásakor arra törekedtem tehát, hogy az olvasó abból ne csak ábrázoló geometriát, hanem általánosabb értelemben vett geometriát is tanulhasson. E végből az egyes feladatok megoldásánál kiterjeszkedtem a szerkesztések pontosságát és finomságát előmozdító viszonyokra; kiegészítettem a feladatok megoldásait, a belőlök következtethető geometriai igazságok kiderítésével; utaltam az egyes feladatoknak más hasonneműekkel való összefüggésére; végre a hol csak czélszerűnek találtam, akkép választottam a feladatok anyagát, hogy azokból geometriai igazságokra lehessen következtetni.

Könyvem foglalatát és beosztását illetőleg a tartalomjegyzékre utalok, de meg kell említenem, hogy a síklapú testek ábrázolása czímű fejezetbe fölvettem a kristálytan szabályos rendszerének egyszerű alakjait. E rendszer alakjainak határlapjai, három derékszögű tengelyre nézve szabályosan helyezkednek el; e szabályszerűség ismerete s ennek alapján az alakok képeinek és ezekből a hálóknak megrajzolása, mely több külön álló feladat megoldását kívánja, nagyobb érdeklődést kelt, mint a melyet e szétszórt feladatok önmagukban nyújtanak. A tanuló ezekben az ábrázoló geometria alkalmazását látja; meggyőződést szerez annak nemcsak elméleti, hanem gyakorlati értékéről is, — figyelmes lesz és gondolkozik, hogy hol és mire használhatja még fel a tanultakat. S jóllehet, hogy a szabályos rendszer egyszerű alakjait egész teljességükben tárgyalom, nem szükséges, hogy az iskolában minden egyes alak megrajzoltassék. A tárgy iránt érdeklődő tanuló átdolgozza majd azokat a példákat is, a melyek idő rövidsége miatt az iskolában elmaradtak.

A midőn végezetül kiadómnak áldozatkészségeért, hogy e könyv csinos és tetszetős kiállítása érdekében költségeket nem sajnált, köszönetet mondok, a magyar tanuló ifjúság nemes szorgalmába ajánlom e könyvet, melyet *a legujabb középiskolai tantervnek megfelelően* írtam, — merítsen belőle annyit, a mennyit jövendő életpályájára szükségesnek, hasznosnak talál.

Kolozsvárt, az 1900. év április havában.

A szerző.

TARTALOMJEGYZÉK.

I. FEJEZET.

A pont-, az egyenes és a sík ábrázolása.

Feladatok.

II. FEJEZET.

Árnyékszerkesztések.

III. FEJEZET.

Egymásra merőleges egyenesek és síkok ábrázolása.

Feladatok

IV. FEJEZET.

Távolságok szerkesztése és ezekkel kapcsolatos feladatok.

Feladatok.

V. FEJEZET.

Egyenesek és síkok hajlásszögei a képsíkokhoz.

Feladatok.

VI. FEJEZET.

A sík forgatása nyoma vagy fővonala körül és erre vezető feladatok.

Feladatok.

VII. FEJEZET.

Forgatás a képsíkra merőleges tengely körül.

VIII. FEJEZET.

Új képsíkok alkalmazása.

IX. FEJEZET.

Síklapú testek ábrázolása, árnyékolása és ezekkel kapcsolatos feladatok.

X. FEJEZET.

Síklapú testek metszései síkkal és egyenessel.

XI. FEJEZET.

A gömb.

XII. FEJEZET.

Kúp és a henger.

FÜGGELÉK.

A trieder descriptiv megoldása.

I. FEJEZET.

A pont-, az egyenes- és a sík ábrázolása.

A pont ábrázolása.

1. A képsíkok. A tér összes pontjait két egymásra merőleges síkra lehet vonatkoztatni. E két végtelen nagynak képzelt síkot *képsíknak*, azoknak metszővonalait pedig *képtengelynek* nevezzük. A képsíkok közül az egyik vízszintes, tehát a másik függőleges helyzetben vehető fel. A vízszintes helyzetű képsíkot *első-*, *vízszintes-* vagy *alapképsíknak*, a másikat pedig *második-*, *függőleges-* vagy *homlok képsíknak* nevezzük.

2. A térnegyedek. A két egymásra merőleges képsík a tért négy *térnegyedre*, a képtengely pedig a képsíkokat két-két részre — *félsíkokra* — osztja. A félsíkok képezik a végtelen nagy térnegyednek határló síkjait.

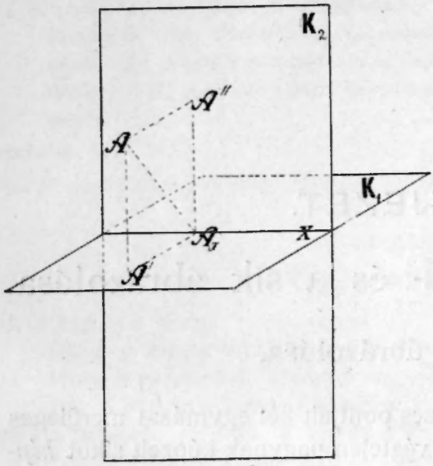
Az első képsík fölött levő két térnegyed közül az egyiket *elsőnek*, a másikat pedig *másodiknak* nevezzük. A második térnegyed alatt van a *harmadik*, az első alatt pedig a *negyedik* térnegyed.

Az első és második, úgyszintén a harmadik és negyedik térnegyed közös határló síkja a második képsíknak egy-egy félsíkja, mig a második és harmadik, valamint a negyedik és első térnegyedek közös határló síkja az első képsíknak egy-egy félsíkja.

Az első és harmadik, valamint a második és negyedik térnegyednek nincs közös határló félsíkja, e térnegyedeknél a képtengely képezi a közös határló vonalat.

Az első képsík pontjai az első és a negyedik avagy a második és harmadik térnegyedhez tartoznak; a második képsík pontjai pedig az első és a második, avagy a harmadik és negyedik térnegyedhez számíttatnak; végre a képtengely pontjait bármely térnegyedben fekvőnek tekinthetjük.

3. A pont vonatkoztatása a képsíkokra; az első és második kép és a tengelykép. A térnegyedek egyikében pl. az elsőben egy A pontot képzelünk (1. ábra), mely nem fekszik a képsíkokon. Az A pontból bocsássuk az (egyedül lehető) merőleges egyenest az első képsíkra; ez az 1-ső képsíkot K_1-et egy A' pontban metszi. A végtelen nagy AA' egyenes *az A pontnak derékszögű* (orthogonalis) *projiciáló sugara az első képsíkra*; az A' pont pedig az *A pontnak derékszögű első képe,* vagy *projectiója.* Az az eljárás, mely szerint az A pontból — térpontból — annak első képét (képét az első képsíkon) A'-t a leírt módon nyerjük, a *projiciálás művelete.*



1. ábra.

Határozzuk most meg az A pontnak második derékszögű képét, azaz projiciáljuk az A pontot a második képsíkra K_2-re. Bocsássuk tehát az A pontból a második képsíkra a merőleges egyenest, mely azt az A'' pontban metszi. Az AA'' egyenes az A pontnak derékszögű projiciáló sugara a *második képsíkra,* az A'' pont pedig az A pontnak *második derékszögű képe.*

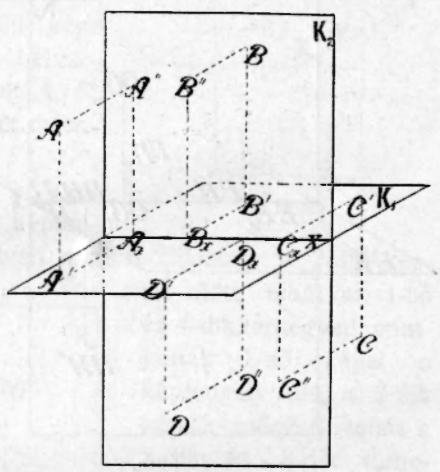
(Minthogy tárgyalásunk folyamán általában a képsíkhoz *csakis* derékszög alatt hajló sugarakkal projiciálunk, a képek tehát a projiciálandó alakzatoknak mindig derékszögű képei lesznek, a derékszögű jelzőt a következőkben elhagyjuk.)

Az $A'A$, $A''A$ egyeneseken keresztül menő sík mindkét képsíkra, tehát a képtengelyre, x-re, merőleges és a képtengelyt egy A_x pontban, az *A pont tengelyképében,* a képsíkokat pedig az $A'A_x$, $A''A_x$ egyenesekben metszi. Az $A'A_x$, $A''A_x$, AA_x egyenesek, mert a képtengelyre merőleges síkban fekszenek, merőlegesek a képtengelyre; azonkivül $A'A_x$ $A''A_x$, az $A'A$ $A''A_x$ négyszög derékszögű és igy szemben fekvő oldalai: $AA' = A'' A_x$, $AA'' = A'A_x$. Az A pont tengelyképe A_x tehát közös metszőpontja a képtengelynek azokkal az egyenesekkel, melyek az A', vagy az A'' vagy az A pontból a képtengelyre merőlegesen bocsáthatók.

Az AA' vonaldarab az A pontnak távolsága az első képsíktól, az AA'' vonaldarab pedig az A pontnak távolsága a második képsíktól; az AA'-t és az AA'' vonaldarabot az A pont *első* ill. *második képtávolságának* nevezzük. Minthogy az $A''A_x$ vonaldarab az A'' pont távolsága a képtengelytől és $A'A_x$ vonaldarab az A' távolsága a képtengelytől, az előbbi $AA' = A''A_x$, $AA'' = A'A_x$ egyenlőségek értelme következő: *Egy pont távolsága az első (második) képsíktól oly nagy, mint a pont második (első) képének távolsága a tengelytől.* Ehhez járul még: *Egy pont első és második képéből a képtengelyre bocsátott merőlegesek egymást egy pontban, a felvett pont tengelyképében metszik.*

Jegyzet. A térpontok jelölésére a következőkben nagy betüket használunk; azoknak 1-ső képét ugyanolyan, de egy vesszővel ellátott betüvel, 2-dik képét pedig ugyanolyan két vesszővel ellátott betüvel, végre tengelyképét (melyet gyakran el is hagyunk), ugyanolyan, de x mutatóval jellemzett betüvel szándékunk jelöini.

4. A különböző térnegyedekben fekvő pontok képeinek helyzete a képtengely irányában. Képzeljünk még három pontot B, C, D-t, melyek közül B a második, C a harmadik, D a negyedik térnegyedben, de a képsíkokon kivül fekszik. E pontoknak határozzuk meg első és második képét, azaz projiciáljuk azokat az első és második képsíkra. Ennélfogva (2. ábra) a B, C, D pontokon keresztül merőleges egyeneseket bocsátunk az első képsíkra, melyek azt a B', C', D' pontokban metszik, és a B, C, D pontokon keresztül merőleges egyeneseket bocsátunk a második képsíkra, melyek azt a B'', C'', D'' pontokban metszik, végre akár a B', C' D', akár a B'' C'', D'' pontokból bocsátunk merőlegeseket a képtengelyre, melyek azt a B_x, C_x, D_x, pontokban metszik.



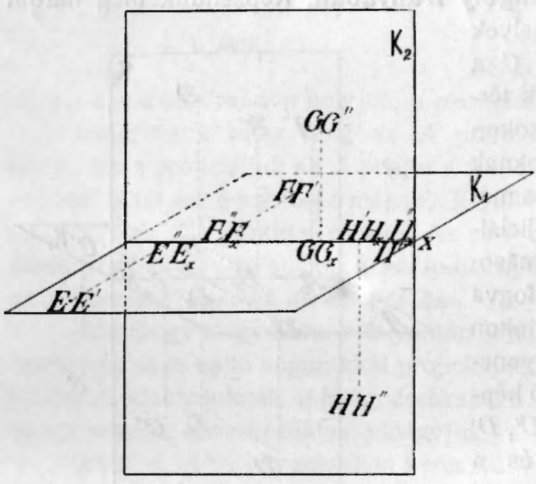
2. ábra.

Ha most $B'B\,B''B_x$, $C'C\,C''C_x$, $D'D\,D''D_x$, derékszögű négyszögeket tekintjük, azt tapasztaljuk, hogy az előbbi § végén álló két tétel a 2-dik, 3-dik és 4-dik térnegyedekben fekvő pontokra nézve is érvényben marad. Továbbá, hogy az egyes térnegyedekben fekvő pontok helyzete a képtengely irányában következő:

az 1-ső képsíkban a képtengely elválasztja az A', D' pontokat a B', C' pontoktól
a 2-dik „ „ „ A'', B'' „ C'', D'' „

Hogy ezt általánosan kifejezhessük, képzeljünk egy az 1-ső térnegyedben levő, az 1-ső képsíkon álló és a 2-dik képsíkra néző egyént. E néző az 1-ső és 2-dik térnegyedben fekvő pontokat az 1-ső képsík fölött, azoknak 2-dik képeit a képtengely fölött látja; míg a 3-dik és 4-dik térnegyedben levő pontokat az 1-ső képsík alatt, azoknak 2-dik képeit szintén a képtengely alatt látja. Ellenben a néző az 1-ső és 4-dik térnegyed pontjait a 2-dik képsík előtt, azoknak 1-ső képeit a képtengely előtt, míg a 2-dik és 3-dik térben fekvő pontokat a 2-dik képsík mögött, azoknak 2-dik képeit szintén a képtengely mögött látja.

5. A képsíkon fekvő pontok képei. Az 1-ső képsíkon felveszünk egy E pontot a 2-dik képsík előtt és egy F pontot a 2-dik képsík mögött (3. ábra). Mindkét pontnak a 2-dik képe E'', F'' a képtengelyben van, tehát az E és F pontnak E_x, F_x tengelyképével egyesül. Ugyancsak mindkét pontnak 1-ső képe E', F' magával az illető ponttal E, F-fel esik egybe, mert az E és az F pontból az 1-ső képsíkra bocsátott merőleges azt az E, illetve F pontban metszi.



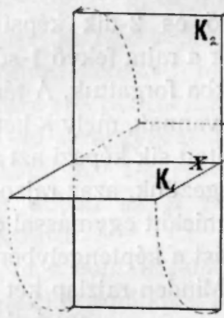
3. ábra.

Az $E'E\ E''E_x$ és $F'F\ F''F_x$ derékszögű négyszög egy egyenes vonallá EE'' és FF'' fajul el, mert $EE' = E''E_x = o$, és $FF' = F''F_x = o$.

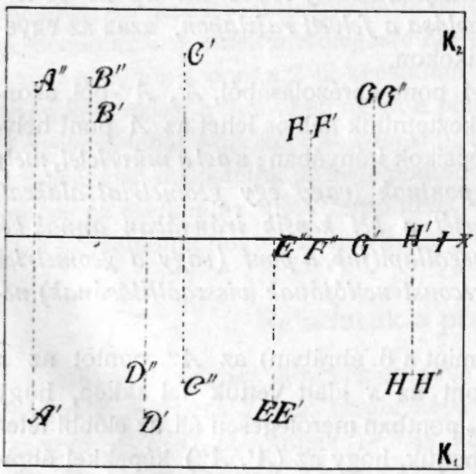
Ha továbbá G az 1-ső és 2-dik térnegyed határán, H a 3-dik és 4-dik térnegyed határán, tehát mindkét pont a 2-dik képsíkban fekszik, akkor azoknak 1-ső képe G', H' a képtengelyben van és 2-ik képe maga a G, illetve a H. A $G'G\ G''G_x$, $H'H\ H''H_x$, derékszögű négyszögek szintén a GG', $H'H$ vonaldarabokká fajulnak el, mert jelenleg $GG'' = G'G_x = o$, $HH'' = H'H_x = o$. Ennélfogva: *az 1-ső (2-dik) képsíkon fekvő pontok egybeesnek 1-ső (2-dik) képükkel, azoknak 2-dik (1-ső) képe pedig a képtengelyben van.* — Minthogy a képtengely bármely I pontja mindkét képsíkban fekszik, annak 1-ső, 2-dik és tengelyképe I', I'', I_x az I ponttal magával esik egybe. Az $I'I\,I''I_x$ derékszögű négyszög ekkor egy ponttá fajul el, mert oldalai $II' = II'' = o$.

6. A képsíkok egyesítése. A két képsík közül az egyiket a képtengely körül a másikba akarjuk forgatni és az egyes térnegyedekben fekvő pontok képeinek helyzetét ez egyesített két képsíkon meghatározni.

Forgassuk e végből az 1-ső képsíkot az x tengely körül a 2-dik képsíkba mint szokás akképen, hogy a forgatandó 1-ső képsík a 4-dik és 2-dik térnegyedet irja le (tehát mint a 4. ábrában a nyíl mutatja). Minthogy a 2-dik képsík és a képtengely változatlan marad, azért a pontoknak 2-dik képe és tengelyképe sem változtatja helyzetét, tehát az előbbiekben tárgyalt A, B, C, D, E, F, G, H, I pontoknak második képe A'', B'', C'', D'', E'', F'', G'', H'', I'' közül A'', B'', G'', a képtengely fölött, C'', D'', H'' a képtengely alatt, E'', F'', I'' a tengelyen marad. Ellenben a 2-dik képsík előtt, tehát az 1-ső és 4-dik térnegyed pontjainak 1-ső képei a képtengely alá, a 2-dik képsík mögött, tehát a 2-dik és 3-dik térnegyedben fekvő pontoknak 1-ső képei a képtengely fölé kerülnek. E szerint az A', D', E' képek a képtengely alá, a B', C', F' pontok a képtengely fölé kerülnek, a G', H', I' pontok pedig a képtengelyen maradnak (5. ábra).



4. ábra.



5. ábra.

Jellemző, hogy a leírt módon az 1-ső képsíknak a 2-dikba történt forgatása után *a) bármely pont 1-ső és 2-dik képének összekötő egyenese a pont tengelyképében a képtengelyre merőlegesen áll*; továbbá, hogy *b) bármely pont 1-ső (2-dik) képének távolsága a képtengelytől egyenlő a pont távolságával a 2-dik (1-ső) képsíktól*, végre *c)*

az 1-ső térnegyed pontjainak 1-ső képe a képt. fölött, 2-dik képe a képteng. alatt van

a 2-dik „ „ „ „ „ fölött, „ „ „ fölött „

a 3-dik „ „ „ „ „ alatt „ „ „ fölött „

a 4-dik „ „ „ „ „ alatt „ „ „ alatt „

az 1-ső képsík pontjainak 2-dik képe a képtengelyen fekszik

a 2-dik „ „ 1-ső „ „ „ „

7. A pontok ábrázolása és reconstructiója. Az előbbiekben láttuk, hogy a tér egyes pontjait a két egymásra merőleges képsíkra, az 1-ső és 2-dik képsíkra projiciáltuk és az 1-ső képsíkot a pontoknak a rajta fekvő 1-ső képeivel együtt a képtengely körül a 2-dik képsíkba forgattuk. A tér pontjainak képei tehát jelenleg ugyanegy síkon vannak, mely a két egyesített képsíknak tekintendő. Ez a két egyesített sík képezi azt a síkot (a rajzlapot), melyen szerkesztéseket végezünk, azaz rajzolunk és a mely két síkról annyit tudunk, hogy mielőtt egymással egyesültek, egymásra merőlegesek voltak és egymást a képtengelyben x-ben metszették.

Minden rajzlap két egyesített képsíknak tekinthető. Egy tetszés szerinti x egyenes (6. ábra) képezheti a képtengelyt; bármely az x-re merőleges egyenesen fekvő két pontot A', A'', egy A térpont 1-ső és 2-dik képének tekinthetjük, s mely *A', A'' két kép az A térpont ábrázolása a felvett rajzlapon*, azaz az egyesített képsíkokon.


6. ábra.

Az A pont ábrázolásából, A', A''-ból, azonban következtetnünk kell és lehet az A pont helyzetére a képsíkok irányában; s *azt a műveletet, mely szerint a pontnak (vagy egy geometriai alakzatnak) helyzetét a két képsík irányában annak két képéből megállapítjuk, a pont (vagy a geometriai alakzat) reconstructiójának (visszaállításának) nevezzük.*

Feltételezvén, hogy (mint a 6. ábrában) az A'' pontot az x képtengely fölött, az A' pont az x alatt vettük fel akkép, hogy A' A'' egyenes az x-re az A_x pontban merőlegesen áll, az előbbi tételekből folyólag következtethetjük, hogy az (A', A'') képekkel ábrázolt A pont az 1-ső térnegyedben fekszik és az 1-ső képsíktól mért távolsága A'' A_x, a 2-dik képsíktól mért távolsága pedig A' A_x. De ennyi épen elegendő arra, hogy az A pontnak helyzetét a képsíkok irányában ismerjük. Mert ha bárhol egy vízszintes és egy függőleges síkot (pl. egy derékszög alatt kinyitott könyvet, mely az első térnegyedet ábrázolja) 1-ső és 2-dik képsíknak tekintünk, s ezek x metszővonalának egy A_x pontján keresztül az 1-ső és a 2-dik képsíkban egy-egy merőleges egyenest húzunk, és az elsőre az A_xA' vonaldarabot, a másodikra az A_xA'' vonaldarabot az A_x ponttól mérve reá rakjuk A', A''-ig, de úgy, hogy a vonaldarabok az első térnegyedet határló félsíkokon feküdjenek, akkor az A' pontban az 1-ső képsíkra, és az A'' pontban a 2-dik képsíkra emelt merőlegesek egymást a kivánt A pontban metszik.

Még egyszerűbb a reconstructió, ha magát a rajzlapot tekintjük pl. 2-dik képsíknak, s az ott levő x tengelyen keresztül egy merőleges síkot állítunk a rajzlapra, mely már az 1-ső képsíkot ábrázolja. Ebben az 1-ső képsíkban az A_x ponton keresztűl menő és az x-re merőleges egyenesen álló egyenesre reá rakjuk az A_xA' vonaldarabot ismét akképen, hogy az az 1-ső térnegyedet határló félsíkon feküdjék. Az A' és A'' pontokban az 1-ső, illetve a 2-dik képsíkon emelt merőlegesek egymást abban az A pontban metszik, mely az A', A'' képekkel van ábrázolva.

Ugyanezt az eljárást kell követnünk, ha a pont a 2-dik, 3-dik vagy 4-ik térnegyedben fekszik, tehát megfelelőleg mindkét képe az x fölött vagy az 1-ső képe az x fölött, a 2-dik az x alatt, vagy végre mindkét képe az x alatt van, csupán arra kell ügyelnünk, hogy a tengelykép és az 1-ső képtől határolt vonaldarabot (az előbbinél A_xA') az illető térnegyedet határló félsíkon a pont tengelyképében az x-re emelt merőlegesre rakjuk reá.

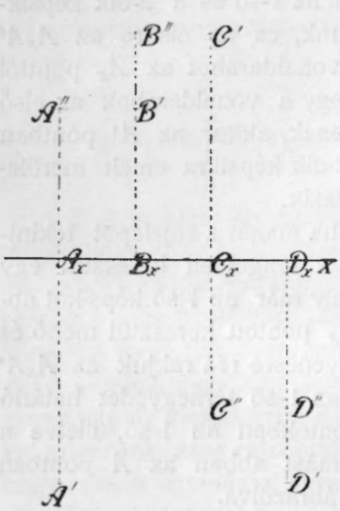
A midőn a pont a 2-ik képsíkban fekszik, tehát 1-ső képe az x-en van, akkor a 2-dik kép maga a pont, s ha végre a pont az 1-ső képsíkon, tehát 2-dik képe az x-en van, akkor az 1-ső képének reconstruálásával megkaptuk az illető pontot. Magát az első képet is lehet ebben az esetben az illető térpontnak tekintenünk, de akkor azt kell képzelnünk, hogy a 2-dik képsík lett az elsőre ráborítva.

Feladatok a pontról.

8. — *1. feladat.* A rajzlapon adva van a képtengely x és négy pontnak A, B, C, D-nek tengelyképe A_x, B_x, C_x, D_x; határozzuk meg az A, B, C, D pontnak 1-ső és 2-dik képét A', A''; B', B''; C' C''; D', D''-ét, ha tudjuk a pontok az 1-ső képsíktól 2 cm, a 2-dik

3 cm. távolságra vannak és A az 1-ső, B a 2-dik, C a 3-dik, D a 4-ik térnegyedben fekszik. A megoldást a 7. ábra mutatja. (B' a B''-vel fel van cserélve a 7. ábrában.)

2. feladat. Ha az 1-ső feladat adataival az A, B, C, D pontoknak közös tengelyképe van, akkor az A, B, C, D pontok mily sokszögnek képezik szögpontjait? Mily helyzetű e sokszög síkja, milyenek oldalainak hosszúsága és mily helyzetű a szögpontoknak a közös tengelyképe a sokszög irányában?



7. ábra.

3. feladat. Mily vonalokon feküsznek az 1-ső (vagy 2-dik, 3-dik, 4-dik) térnegyed összes pontjainak 1-ső és milyenen 2-dik képei, ha a pontok az első képsíktól 2 cm, a 2-diktól 3 cm. távolságra vannak.

4. feladat. Ábrázoljuk az A és B pontot, ha azoknak tengelyképe A_x B_x közös, de az A pont az 1-ső, a B pont a 3-ik térnegyedben fekszik és az A pont az 1-ső képsíktól 3 cm, a 2-ik képsíktól 2 cm távolságra van, ellenben a B pont az 1-ső képsíktól van 2 cm, a 2-diktól pedig 3 cm. távolságra.

5. feladat. Oldjuk meg a 4-dik feladatot, ha az A pont a 2-dik, a B pont a 4-dik térnegyedben fekszik. A két pont A, B tengelyképétől egyenlő távolságra van; szerkeszszük meg e távolságot.

6. feladat. Az A és B pontnak közös tengelyképe A_x az egyik pont az 1-ső és 2-dik képsíktól ép oly távolságra van, mint a másik pont a 2-diktól, illetve az 1-sőtől, kérdés, mily háromszög $A\ B\ A_x$, ha a két pont ugyanabban, vagy ha különböző térnegyedben fekszik?

7. feladat. Ha két pontnak közös 1-ső, de különböző 2-dik képe van és ugyanegy térnegyedben fekszik, akkor e két pont az egyik képsíktól egyenlő, a másiktól pedig különböző távolságra van. Melyik képsíktól van a két pont egyenlő távolságra és melyik pont lesz a másik képsíktól távolabb?

8. feladat. Ábrázoljunk adott tengelykép mellett *a*) oly pontot, mely az első képsíkon fekszik és 2-diktól 2 cm távolságra van, *b*) oly pontot, mely a 2-ik képsíkon fekszik és az első képsíktól 2 cm távolságra van. (Mindkét feladatnak két megoldása van.)

9. feladat. Mily helyzetűek az 1-ső (vagy a 2-dik, a 3-dik, a 4-dik) térnegyed azon pontjainak képei, melyek mindkét képsíktól egyenlő távolságra, pl. 2. cm-re vannak.

9. A pontok symmetrikus és coincidáló képei. Képzeljünk a két képsík egyesítése előtt az 1-ső térnegyedben egy A pontot, mely a két képsíktól egyenlő távolságra van. Ekkor az A pontnak 1-ső és 2-dik képe A', A'' az A_x tengelyképétől egyenlő távolságra van ($A'A_x = A_xA''$), és az A pontból meghatározott $A'\ A\ A''\ A_x$ derékszögű négyszög négyzetté fajul el. E négyzet AA_x átlója a szögpontokon túlhosszabbítva az 1-ső és 3-dik térnegyedben nyúlik el; minden pontjának távolsága a két képsíktól egyenlő, tehát az AA_x végtelen hosszú egyenes, minden pontjának két képe a képtengelytől egyenlő távolságra van.

Mozgassuk most az $A'\ A\ A''\ A_x$ négyzetet jobbra, avagy balra, de úgy, hogy síkja mindig merőleges maradjon a képtengelyre, és A_x szögpontja a tengelyt, az $A'\ A_x$, $A''\ A_x$ oldalai pedig az 1-ső, illetve a 2-dik képsíkot írják le. E mozgásnál az $A'A_x$ átló mindig párhuzamos marad önmagával és egy síkot ír le, mely a képtengelyen megy keresztül és fele az 1-ső, fele a 3-dik térnegyedben fekszik. E síknak minden pontja származásánál fogva az 1-ső és 2-dik képsíktól egyenlő távolságra van, tehát azoknak 1-ső és 2-dik képe a képtengelytől szintén egyenlő távolságra lesznek. Ha tehát a képsíkot a szokott módon egyesítjük, akkor ama sík pontjainak 1-ső és 2-dik képe az x képtengely irányában symmetrikus, azaz az 1-ső és 2-dik kép az x-től egyenlő távolságra van, az x-től el van választva és az azokat összekötő egyenes merőleges x-re.

E tulajdonságnál fogva azt a síkot, melynek pontjai a képtengely irányában symmetrikus képeket szolgáltatnak, *symmetriasíknak* nevezzük és $\mathbf{H}_1$-gyel jelöljük.

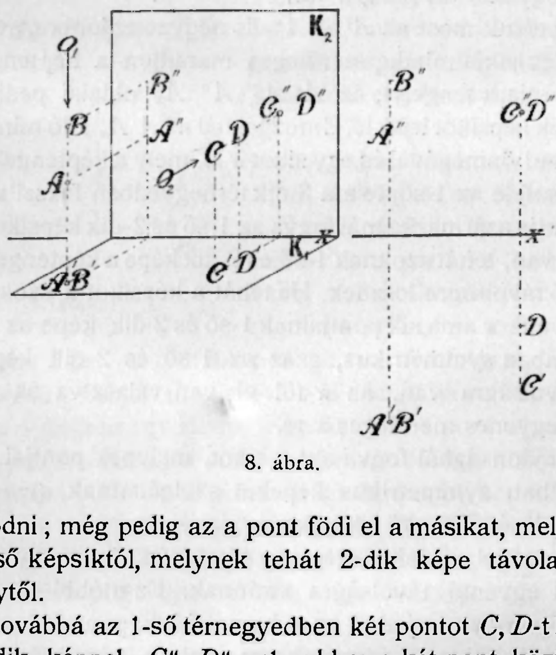
A képtengelyen lehet még egy síkot átfektetni, melynek pontjai a képsíktól egyenlő távolságra vannnak. Ez utóbbi sík a 2-dik és 4-dik térnegyedben terjed el és a benne fekvő pontok 1-ső és 2-dik képének az a tulajdonsága van, hogy azok a képsíkok egyesítése után összeesnek, coincidálnak, mert a képtengely ugyanegy oldalán a képtengelytől egyenlő távolságra vannak. Ez utóbbi síkot pontjai képeinek leírt tulajdonsága folytán *coincidentiasíknak* nevezzük és $\mathbf{H}_2$-vel jelöljük.

A symmetriasík pontjainak képei tehát a képtengely irányában symmetrikusan, a coincidentiasík pontjainak képei pedig egybeesőleg (coincidálólag) ábrázoltatnak.

10. A fedőpontok. Vegyük figyelembe a két képsíkot az egyesítés előtt, az elsőt vízszintes, a másodikat függőleges helyzetben és tekintsük azokat átlátszatlanoknak. Legyen az A és a B egy az 1-ső térnegyedben fekvő szintén átlátszatlannak képzelt pont.

Gondoljunk egy az első képsík fölött levő és az 1-ső képsíkra néző egyénre, melynek O_1 szeme, egy az 1-ső képsíkra merőleges egyenesnek igen távol fekvő pontja. A néző szeméből kisugárzó látósugarak közül egy az A, egy pedig a B ponton megy keresztül és egybeesik az A és a B pont projiciáló sugarával, tehát az átlátszatlan A pont annak első képét A'-et és az átlátszatlan B pont, annak 1-ső képét B'-et az 1-ső képsíkra nézőtől elfödi.

Ha azonban (8. ábra) az A és B pontnak közös első képe van, akkor már az A, B pontok közül egyik a másikat, O_1-ból tekintve



8. ábra.

el fogja födni; még pedig az a pont födi el a másikat, mely távolabb van az 1-ső képsíktól, melynek tehát 2-dik képe távolabb van a képtengelytől.

Ha továbbá az 1-ső térnegyedben két pontot C, D-t képzelünk, közös 2-dik képpel, C'', D''-vel, akkor e két pont közül egy oly nézőre, melynek szeme a 2-dik képsík előtt egy a második képsíkra merőleges egyenesnek igen távol fekvő O_2 pontjában van, el lesz födve; és pedig az a pont födi el a másikat, melynek 1-ső képe a képtengelytől nagyobb távolságra van.

A mellékelt 8. ábrában a B pont födi el az A-t az 1-ső képsíkra nézve, és a C pont födi el a D-t, a 2-dik képsíkra nézve, a mit akkép fejezünk ki, hogy *a B pont födőpontja az A-nak az 1-ső képsíkra nézve és a C pont födőpontja a D*-nek *a 2-dik képsíkra nézve,* alattomban értvén, hogy a néző az 1-ső, illetve a 2-dik képsíkra merőleges egyenes igen távol fekvő O_1, O_2 pontjából tekint a pontokra.

Ha tehát az első térnegyed két pontjának közös 1-ső (2-dik) képe van, akkor a két pont közül az lesz a másiknak födőpontja az 1-ső (2-dik) képsíkra nézve, melynek 2-dik (1-ső) képe a képtengelytől távolabb van. E szabályt még arra az esetre is érvényesnek mondjuk, a midőn a két képsík a szokott módon egyesítve van. Tekintsük általában az ábrázolandó pontoknak vagy más alakzatoknak a két egyesített képsíkon levő 1-ső és 2-dik képeit olyanoknak, melyek a pontok vagy más alakzatok képeinek szemléltetésére szolgálnak a képsíkok egyesítése előtt (tehát a midőn azok az egymásra merőleges képsíkokban vannak), mert a képeknek az utóbbi helyzete egyszerű művelet végzésével ad fogalmat a pontok és alakzatok kölcsönös és a képsíkok iránt való helyzetéről. És az ábrázoló geometriának egyik főfeladata egy tárgyról vagy egy geometria alakzatról oly képeket készíteni, azokat oly képekkel ábrázolni, melyek könnyű szerrel a szemlélőben fogalmat keltenek magáról a tárgyról vagy alakzatról, melyet ábrázolnak.

Az egyenes ábrázolása.

11. Az egyenes képei. Két pontot A, B-t képzelünk az 1-ső térnegyedben; ezeknek képei A', A''; B', B'' (9. ábra). Jelöljük az AB, $A'B'$, $A''B''$ pontokon keresztül menő egyeneseket e-vel, e'-sel, e''-sel. Az e egyenes pontjait az 1-ső képsíkra projiciáló sugarak egy az 1-ső képsíkra merőleges síkban — *az e egyenes 1-ső projiciáló síkjában* — feküsznek, mely az 1-ső képsíkot az e' egyenesben metszi. Az e' egyenesen feküsznek tehát az e egyenes pontjainak 1-ső képei, s ezért *az e' egyenest az e egyenes 1-ső képének* nevezzük.

Az e egyenes pontjait a 2-dik képsíkra projiciáló sugarak szintén egy a 2-dik képsíkra merőleges síkban — az *e egyenes 2-dik projiciáló síkjában* — vannak, mely a 2-dik képsíkot az e'' egyenesben metszi. e'' tartja tehát az e egyenes pontjainak 2-dik képeit, és mint ilyen, *az egyenes 2-dik képének* neveztetik.

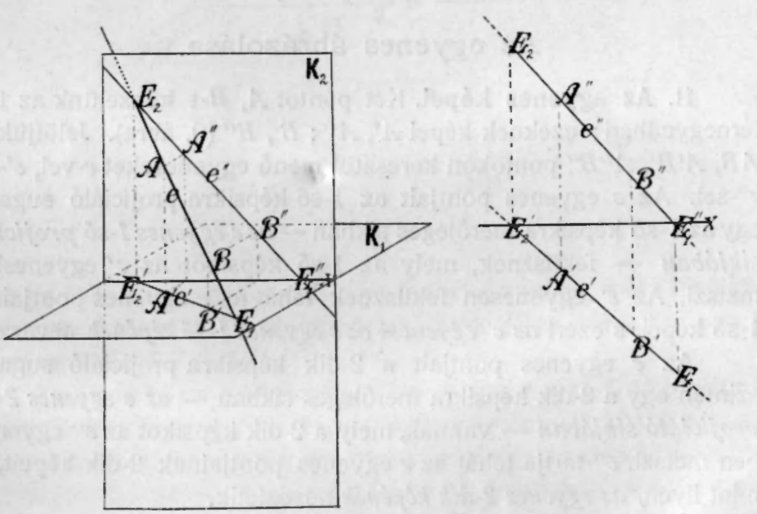
Általában: *az egyenes vagy bármily görbe vonal 1-ső (2-dik) képe a vonalon fekvő pontok 1-ső (2-dik) képének geometriai helye.*

Az egyenes 1-ső és 2-dik képe általában egyenes lesz, mely abban az esetben fajul el ponttá, ha az egyenes az 1-ső, illetve a 2-dik képsíkra merőleges. Ha ugyanis az A, B, pontot, melyen az e egyenest keresztűl fektetjük akkép választjuk, hogy az egyik pont a másiknak fedőpontja az 1-ső képsíkra nézve, akkor az e egyenes minden pontjának projiciáló sugara az e egyenes, tehát az e pontjainak ugyanegy 1-ső képe van. Hasonlókép egybeesnek az e egyenes pontjainak 2-dik képei, ha az e két pontjának közös 2-dik képe van, azaz ha e a 2-dik képsíkra merőleges.

12. **Az egyenes nyomai.** Egy egyenesnek és egy síknak mindig van közös pontja; e közös pontot *az egyenes és a sík metszőpontjának, vagy az egyenes nyomának a síkon* szokás nevezni. Ha az egyenes a síkban fekszik, akkor annak minden pontja közös a síkkal, tehát az egyenes minden pontja nyomnak tekinthető. Ha pedig az egyenes a síkot egy igen távol fekvő pontban metszi, akkor azt mondjuk, hogy az egyenes *párhuzamos a síkkal, vagy a síkhoz*, de ekkor is van az egyenesnek nyoma a síkon, melyet a szerkesztéseknél rendesen ép úgy kezelünk, mintha a nyom nem feküdnék a szerkesztési mezőtől igen nagy távolságra.

Az egyenesnek azt a pontját, melyben az 1-ső képsíkot metszi, *1-ső* vagy *vízszintes nyomnak*, és melyben a 2-dikat metszi, *2-dik* vagy *függőleges nyomnak* nevezzük.

Minthogy az e egyenes 1-ső nyoma E_1 az 1-ső képsíkon fekszik



9. ábra.

(9. ábra), azért annak E'_1 1-ső képe egybeesik E_1-gyel, 2-dik képe E_1'' pedig a képtengelyen van. Ugyanígy az e egyenes 2-dik nyomának E_2-nek, mint a 2-dik képsík egy pontjának 2-dik képe E_2'' az E_2 pont, első képe E_2' pedig a tengelyen fekszik. E szerint jól meg-

jegyzendő, hogy *az egyenes 1-ső nyomának 2-dik képe, és 2-dik nyomának 1-ső képe a képtengelyen fekszik.*

Jegyzet. 1. A téregyenes jelölésére a kis betüket használjuk; annak 1-ső és 2-dik képét ugyanolyan, de egy, illetve két vesszővel ellátott kis betüvel, annak 1-ső nyomát ugyanolyan, de 1-es mutatóval ellátott nagybetüvel, végre 2-dik nyomát ugyanolyan, de 2-es mutatóval ellátott nagy betűvel fogjuk jelölni.

2. A téregyenes 1-ső térnegyedben fekvő részének képei *teljes*, a többi térnegyedekben fekvő részeinek képei pedig rövidre *szaggatott* vonallal rajzoltatnak. A rövidre szaggatott vonalak mindenkor az 1-ső térnegyedben levő nézőtől elfödött vonalaknak képei. Jelen esetben az átlátszatlan képsíkok födik el az egyenes képeit.

13. A képsíkok irányában általános és különös helyzetű egyeneseknek képei. Ha a térben két, a képsíkokon kivül fekvő pontot A, B-t képzelünk, melynek helyzete a képsíkok irányában egymástól egészen független, akkor a rajtuk keresztül menő egyenes a képsíkok irányában *általános helyzetű* lesz. Az ilyen egyenes mindig három térnegyedben terjed el, azaz a képsíkoktól három részre lesz osztva. E részek közül egynek határlópontjait az egyenes nyomai képezik, és ez *véges* hosszúságú, és melyet az *egyenes véges részének* akarunk nevezni; a többi két rész igen nagy, vagy mint mondani szokás: *végtelen nagy,* és azoknak egyik határló pontja szintén az 1-ső, illetve a 2-dik nyom.

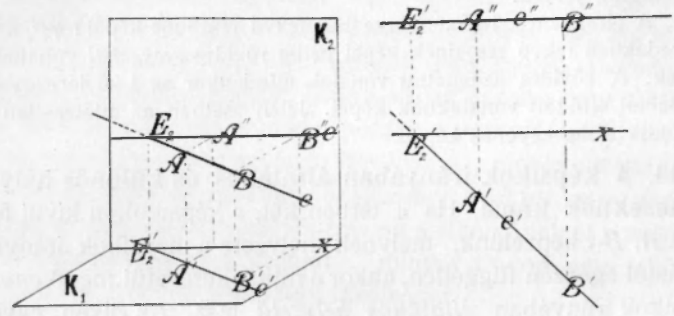
Az egyenes véges része bármelyik térnegyedben lehet, a többi két rész az e térnegyeddel szomszédos két térnegyedben van. Igy pl. ha az egyenes véges része a 2-dik térnegyedben van, akkor a többi két rész az 1-ső és a 3-dik térnegyedben lesz.

Az egyenes azonban a képsíkok irányában *különös helyzetű* is lehet, mint azt a következőkben látni fogjuk.

14. A képsíkokkal és a képtengelylyel párhuzamos egyenesek. Induljunk ki ismét a képsíkokon kivül fekvő A és B pontból, melynek összekötő egyenesét e-t figyelembe vesszük. Tartsuk meg az A pontot abban a helyzetben, melyben volt, de mozgassuk a B pontot az 1-ső képsíkra projiciáló sugarában mindaddig, míg az 1-ső képsíktól ép oly távolságra lesz, és az 1-ső képsík ugyanazon oldalán fekszik, mint az A pont. Az $e = AB$ egyenes akkor (10. ábra) az *1-ső képsíkkal párhuzamos,* az 1-ső képsíkot csak igen távol, mint mondani szokás, *végtelen távol* metszi.

Eltekintve e végtelen távol fekvő 1-ső nyomától, az egyenesnek pontjai az 1-ső képsíktól ép oly távolságra lesznek, mint az A és a B pont.

Ez az egyenes már csak két negyedben terjed el végtelen nagy részekkel, és pedig vagy az 1-ső és 2-dik, vagy a 3-dik és 4-dik térnegyedben. Az egyenes két képe közül az 1-ső *e'* általában metszi a képtengelyt, a 2-dik *e''* pedig mindig párhuzamos a képtengelylyel, és az egyenesnek 2-dik projiciáló síkja párhuzamos az 1-ső képsíkkal.



10. ábra.

Ha továbbá a *B* pontot oly helyzetbe hozzuk, hogy a 2-dik képsíktól ép oly távolságra és e képsík ugyanazon oldalán van mint az *A*, akkor az $AB = e$ egyenes a *2-dik képsíkkal lesz párhuzamos*, annak 2-dik projiciáló síkja lesz párhuzamos a 2-dik képsíkkal, annak 2-dik nyoma jut végtelen távol, és végre annak 1-ső képe lesz a képtengelylyel párhuzamos. Az egyenes pedig vagy az 1-ső és 4-dik, vagy a 2-dik és 3-dik térnegyedben fekszik.

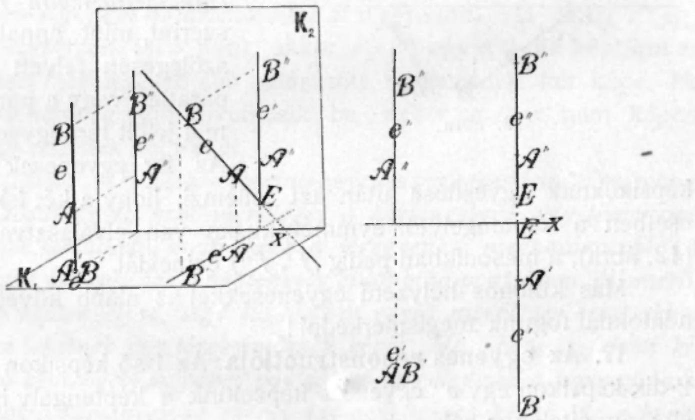
Ha végre a *B* pont mind a két képsíktól ép oly távolságra van, mint az *A* pont és ugyanabban a térnegyedben is fekszik, akkor az $AB = e$ *egyenes mindkét képsíkkal, tehát a képtengelylyel párhuzamos*, annak projiciáló síkjai a képsíkokkal, *e'*, *e''* képei pedig a képtengelylyel párhuzamosak. Az *e* egyenes egész terjedelmében egy térnegyedben fekszik, mindkét nyoma végtelen távol van. Megjegyzendő tehát, mert ez a képsíkok egyesítésénél is igaz marad, hogy *ha az egyenes párhuzamos az 1-ső (2-dik) képsíkkal, akkor annak 2-dik (1-ső) képe párhuzamos a képtengelylyel, és ha az egyenes párhuzamos a képtengelylyel, akkor annak mindkét képe szintén párhuzamos a képtengelylyel.*

De fordítva is következtethetünk: ha az egyenes 1-ső, 2-dik, vagy mindkét képe párhuzamos a képtengelylyel, akkor az egyenes a 2-dik, 1-ső, illetve mindkét képsíkkal párhuzamos.

Ide sorozhatók még azok az esetek, a midőn az egyenes az egyik vagy a másik, vagy mindkét képsíkban fekszik, melyekről könnyen belátható, hogy *az 1-ső, 2-dik, avagy mindkét képsíkban fekvő egyenesnek 2-dik, 1-ső, illetve mindkét képe a képtengelyben van.*

15. A képsíkra és a képtengelyre merőleges egyenesek. Helyezzük folytatólag a B pontot az A pontnak az 1-ső képsíkra projiciáló sugarába. Az $AB = e$ egyenes (11. ábra balra) ekkor *az 1-ső képsíkra merőleges* és 1-ső képe e' az AB pontok közös 1-ső képében van, míg a 2-dik képe e'' a képtengelyre merőleges. Az e egyenes 1-ső projiciáló síkja határozatlan, a 2-dik merőleges a képtengelyre; az egyenes, minthogy a 2-dik képsíkkal párhuzamos, csak két térnegyedben terjed el.

Ha ellenben az A és a B pontnak 2-dik képe közös, akkor az $AB = e$ egyenes *merőleges a 2-dik képsíkra,* annak 2-dik képe egy pont és 1-ső képe merőleges a képtengelyre; a 2-dik projiciáló sík



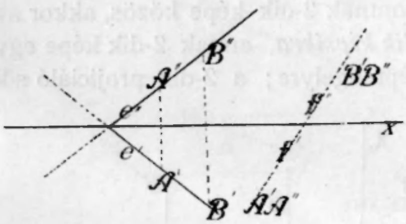
11. ábra.

határozatlan, az 1-ső pedig merőleges a képtengelyre; végre az egyenes, mert az 1-ső képsíkkal párhuzamos, két térnegyedben fekszik.

Vegyük fel továbbá a B pontot akképen, hogy annak tengelyképe B_x, az A pont tengelyképében A_x-ben feküdjék (11. ábra jobbra). Ekkor az $A'AA''A_x$, $B'BB''B_x$ derékszögű négyszögek síkjai egybeesnek, az $AB = e$ egyenes merőleges a képtengelyre, annak mindkét képe és mindkét egybeeső projiciáló síkja szintén merőleges a képtengelyre és az egyenes általában három térnegyedben terjed el. Ennélfogva: *az 1-ső (2-dik) képsíkra merőleges egyenesnek 1-ső (2-dik) képe egy pont, a 2-dik (1-ső) képe merőleges a képtengelyre, és a képtengelyre merőleges egyenesnek mindkét képe merőleges a képtengelyre.* E szabály fordítva is igaz marad.

16. Más különös helyzetű egyenesek. Az egyenesnek 1-ső és 2-dik nyoma általában két különböző pont. De ha a két nyom egybeesik, akkor az *egyenes metszi a képtengelyt*. és így képei a képtengely ugyanazon pontján mennek keresztül. Az ily egyenes ekkor két nem szomszédos térben fekszik, tehát vagy az 1-ső és 3-dik, vagy pedig a 2-dik és 4-dik térben, és véges részének hosszúsága $= 0$.

A midőn az egyenes a képtengelyt metszi és e metszőponton kivül már egy pontja a két képsiktól egyenlő távolságra van, akkor annak minden pontja a két képsiktól egyenlő távolságra lesz, tehát *az egyenes vagy a symmetriasikban, vagy a coincidetiasikban fekszik*, a szerint, mint annak egy tetszőlegesen felvett pontja a páratlan vagy a páros számmal jelölt térnegyedben van.



12. ábra.

Az ily egyenesek képeit a képsikoknak egyesitése után azt jellemzi, hogy a két kép az első esetben a képtengelytől symmetrikusan van elválasztva (e', e'') (12. ábra), a másodikban pedig (f', f'') coincidál.

Más különös helyzetű egyenesekkel az alább következő feladatoknál fogunk megismerkedni!

17. Az egyenes reconstructiója. Az 1-ső képsikon egy e', a 2-dik képsikon egy e'' egyenest képzelünk a képtengely irányában egészen általános helyzetben. Kérdés, van-e oly egyenes e, melynek 1-ső és 2-dik képe e', e'', és ha van, hogyan szerezhetünk erről az egyenesről fogalmat?

a) A képtengelyen két pontot A_x, B_x-et veszünk fel; ezeken keresztül az 1-ső és a 2-dik képsikban a képtengelyre merőleges egyeneseket állitunk, melyek e'-t az A', B', és e''-t az A'', B'' pontokban metszik. Ha ezután azt az A pontot, melynek képei A', A'' összekötjük avval a B ponttal, melynek képei B', B'', akkor az összekötő $AB = e$ egyenesnek képei a tetszés szerint felvett e', e'' egyenesek. Vagy pedig:

b) az e' egyenesen keresztül az 1-ső képsikra és az e'' egyenesen keresztül a 2-dik képsikra merőleges sikot állitunk, e két sik egymást egy e egyenesben metszi, melynek ama két sik projiciáló sikja és igy az e', e'' egyenes két képe.

A kérdéses e egyenesről tehát szerezhetünk fogalmat, ha ezek a műveletek kivitelének egyike vagy másika nem ütközik akadályokba, tehát kérdés, mikor nem nyerünk e műveletek folytán egy határozott e egyenest?

A képtengely A_x, B_x pontjain keresztülmenő és a képtengelyre merőleges egyenesek az 1-ső képsíkban az e' egyenest mindig végesben metszik, ha e' nem merőleges a képtengelyre. De ha e' merőleges a képtengelyre x-re, akkor ez csak vagy a képtengelyre, vagy a 2-dik képsíkra merőleges egyenesnek lehet 1-ső képe. Az első esetben e''-nek a képtengelyre az e' és a képtengely metszőpontjában merőlegesen álló egyenesnek kell lenni, a másodikban pedig egy ez utóbbi egyenesen fekvő pontnak. Ha az első eset következik be, tehát e', e'' a képtengely ugyanegy pontjában merőleges a képtengelyre, akkor e', e'' egy e egyenesnek két képe lehet, de ez a *két kép nem határozza meg az e egyenest.* Ha pedig e'' egy a leírt helyzetben levő pont, akkor e', e'' egy a 2-dik képsíkra az e'' pontban merőlegesen álló határozott egyenesnek két képe. Ha ez a két lehetőség nem következik be, akkor az e', e'' nem képezi egy téregyenesnek két képét.

E szerint: *Két tetszés szerinti egyenes az (egyesített) képsíkokon, melyek közül egyik sem merőleges a képtengelyre, egy téregyenes két képének tekinthető, mely képek a téregyenest meghatározzák. De ha a felvett két egyenes a képtengely különböző pontjában áll merőlegesen a képtengelyre, vagy ha csak az egyik merőleges erre, akkor azok nem lehetnek egy téregyenesnek képei. Ha végre a felvett két egyenes a képtengely ugyanez pontjában merőlegesek a képtengelyre, akkor azok a képtengelyre merőleges egyenesnek képei, de e képek nem határozzák meg a téregyenest.*

Az egyenes reconstructiója az egyesített képsíkon felvett képeiből akkép történik, hogy előbb a két képsíkot, a rajta fekvő képekkel együtt, az eredeti (egymásra merőleges) helyzetbe hozzuk, és az így nyert képekből a mondottak alapján a téregyenest képzeletünkben construáljuk.

Minthogy a téregyenest annak képei általában meghatározzák, azért megadottnak tekintjük a téregyenest, ha annak képei vannak adva. Ennélfogva e kifejezéseknek: *adva van egy e egyenes, vagy adva van egy* (e', e'') *egyenes, egy és ugyanazon jelentésük van,* mert az (e', e'') symbolumon azt az e egyenest értjük, melynek 1-ső képe e', 2-dik képe e''. Ugyanígy jelentse symbolikusan a (P', P'') pont azt a P pontot, melynek 1-ső képe P', 2-dik képe P'', s mely képek a térpontot P-t meghatározzák.

E szólásokon: szerkesztendő egy e egyenes vagy egy P pont, mindig az értendő, hogy szerkesztendő (e', e''), illetve (P', P''), azaz az e egyenesnek és a P pontnak két képe e', e'', illetve P', P''.

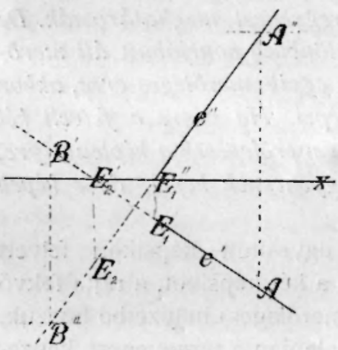
Megjegyzendő, hogy két egyenes, pl.: a p és a q egyenes metszőpontjának jelölésére szintén a (p, q) symbolumot szokás használni, de a zárójelben itt különböző betűk vannak, melyek tehát nem képei egy téregyenesnek.

A következő feladatoknál az adott vagy szerkesztendő egyenesek és pontok képei a rajzlappal egyesített képsíkon levőknek veendők, vagy azon szerkesztendők. A rajzlapon mindig meg van adva a képtengely és a megoldandó feladatokhoz szükséges adatok.

Feladatok az egyenesről.

18. — *10. feladat. Adva van egy egyenes* (e', e''); *vegyünk fel ez e egyenesen oly pontot, mely az 1-ső képsíktól 2 cm távolságra van,* azaz szerkeszszük meg az e egyenes azon pontjainak képeit, melyek az 1-ső képsíktól 2 cm távolságra vannak.

Megoldás. (13. ábra). Az 1-ső képsíktól 2 cm távolságra levő pontoknak 2-dik képei a képtengelytől ugyanily távolságra vannak. Meghúzzuk tehát a képtengelylyel párhuzamos és attól 2 cm távolságra levő két egyenest, mely e''-t az A'', B'' pontokban metszi; e pontokból a képtengelyre merőlegesen bocsátott egyenesek az e'-t A', B' pontokban találják, és az A', A'' és B', B'' pontok már a keresett A, B pontoknak képei.



13. ábra.

Mily egyenesen nem vehető fel (mert nincs rajta) oly pont, mely a feladatnak eleget tesz?

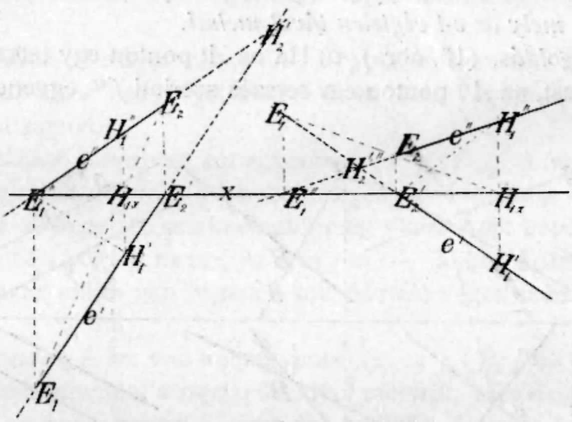
11. feladat. Szerkesztendő az (e', e'') *egyenesnek 1-ső és 2-dik nyoma* E_1, E_2.

Megoldás. (13. ábra). Az E_1-nek 2-dik képe az e'' és x metszőpontja $(e'', x) = E_1''$, tehát $E_1 = E_1'$ az E_1'' pontban az x-re állított merőlegesnek metszőpontja e'-el. Hasonlókép az E_2-nek 1-ső kepe az $(e', x) = E_2'$ és e pontban az x-re állított merőleges e''-t az $E_2 = E_2''$ pontban metszi.

12. feladat. Oldassék meg a 11. feladat az e egyenes különböző, általános és különős helyzeteinél; és állapíttassék meg mindenkor, hogy az e mily térnegyedeken halad keresztül, és mely térnegyedben van véges része.

13. feladat. Vegyünk fel olyan egyenest (azaz adjuk meg képeit), a melynek *a)* 1-ső nyoma, *b)* melynek 2-dik nyoma, *c)* melynek mindkét nyoma végtelen távol van. Vegyünk fel továbbá olyan egyenest, mely az 1-ső képsíkon, és olyant, mely a 2-dik képsíkon fekszik.

14. feladat. Szerkesztendő egy (e', e'') *egyenesnek symmetria- és coincidentiapontja* H_1, H_2, vagyis az a két pont, mely mindkét képsíktól egyenlő távolságra van.



14. ábra.

Megoldás. (14. ábra). Az egyenes coincidentiapontjának H_2-nek mindkét képe egybeesik, tehát $H_2' = H_2''$ az e', e'' egyeneseknek metszőpontja.

A symmetriapontnak H_1-nek mindkét képe egyenlő távolságra lévén az x-től, egy az e''-vel az x-re vonatkozólag symmetrikus egyenes az e'-t a H_1'-ben metszi, melyből H_1'' szerkeszthető. A H_1 pont tengelyképe H_{1x}, mint könnyen belátható, az $E_2 E_2' E_1 E_1''$ trapez $E_1 E_2$ átlóján fekszik, melyből a H_1', H_1'', ha az e-nek E_1, E_2 nyomai még a rajzlapon feküsznek, egyszerűbben határozhatók meg.

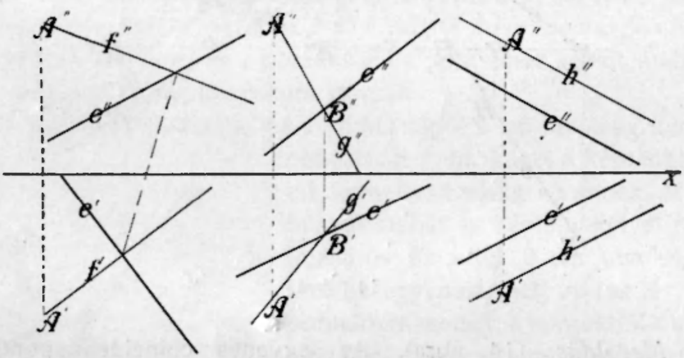
Szerkesztendők különös helyzetű egyeneseknek symmetria- és coincidentiapontjai.

A 14. feladat megoldása mutatja, hogy ha egy egyenes képei a képtengelylyel egyenlő szöget képeznek, akkor az egyenes vagy symmetriasíkkal $\mathbf{H}_1$-gyel vagy a coincidentiasíkkal $\mathbf{H}_2$-vel párhuzamos. *Ennélfogva oly egyenes, melynek a képsíkok egyesítése után,* *párhuzamos (parallel) képei vannak, a coincidentiasíkkal párhuzamos, mig az oly egyenes, melynek a képtengely irányában antiparallel képei vannak, (a képtengelyhez bár egyenlő szögek alatt hajlanak, de nem párhuzamosak): a symmetriasíkkal párhuzamos.*

15. feladat. Fektessünk az (A', A'') ponton keresztűl egy e egyenest, mely a $\mathbf{H}_1$ síkkal, és egy f egyenest, mely a $\mathbf{H}_2$ síkkal párhuzamos, ha e-nek és f-nek 1-ső képe $e' = f'$ ismeretes. — Mily helyzetű legyen e', hogy e és f egybeessék?

19. — *16. feladat. Adva van az (e', e'') egyenes és kivüle az (A', A'') pont; fektessünk e ponton keresztül a) egy f egyenest, mely az e-t nem metszi; b) egy g egyenest, mely az e-t metszi; c) egy h egyenest, mely az e-t végtelen távol metszi.*

Megoldás. (15. ábra). *a*) Ha az A' ponton egy tetszés szerinti f' egyenest, az A'' ponton egy tetszés szerinti f'' egyenest húzunk



15. ábra.

keresztül, akkor (f', f'') az (e', e'') *irányában általános helyzetű, azaz az e, f egymást nem metsző (kitérő) egyenes.*

b) Ha az (A', A'') ponton és e-nek bármely pontján, pl.: a (B', B'') ponton keresztül egy (g', g'') egyenest fektetünk, akkor *g az e egyenest* a B pontban *metszi.*

c) Ha végre a (B', B'') pontot az e egyenesen végtelen távol képzeljük felvéve, úgy hogy a B' pontnak h' összekötő egyenese az A'-sel, e'-sel párhuzamos, és a B'' pontnak h'' összekötő egyenese az A''-sel, az e''-vel párhuzamos, akkor a (h', h'') egyenes az (e', e'')-őt végtelen távol metszi, azaz *h az e-vel párhuzamos.*

Ennélfogva *általában két egyenes egymást metszi vagy nem metszi a szerint, a mint egynevű képeinek (az 1-ső képeknek és a 2-dik képeknek) metszőpontjait összekötő egyenes a képtengelyre* *merőleges vagy nem merőleges; továbbá két egyenes párhuzamos, ha egynevű képei párhuzamosak.*

E szabály nem alkalmazható a képtengelyre merőleges egyenesekre, melyekről alább fogunk szólani.

Az A ponton keresztül kétszeresen végtelen sok (∞^2) oly f egyenest lehet fektetni, mely az e egyenest nem metszi, mert f-nek 1-ső és 2-dik képét tetszés szerint fektethetjük az A', illetve az A'' ponton keresztűl. Ellenben az A ponton csak egyszeresen végtelen sok (∞^1) oly g egyenest képzelhetünk, mely az e-t metszi; mert minden g'-hez csak egy g'' tartozik. Végre az A ponton keresztül az e-vel párhuzamosan csak egy, azaz véges számú egyenest lehet húznunk.

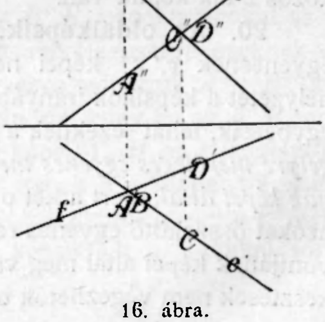
17. feladat. Fektessünk az (A', A'') ponton keresztűl oly egyenest, mely az (e', e'') egyenest metszi és az 1-ső vagy a 2-dik képsíkkal párhuzamos.

18. feladat. Adva van két egyenes (e', e''), (f', f'') (mely nem metsző, vagy metsző, vagy párhuzamos), és egy harmadik egyenesnek g-nek 1-ső képe g'; szerkeszszük meg g-nek 2-dik képét g''-et, azon feltételből, hogy g metszi az e és f-et. — Mikor *határozatlan a feladat*, azaz mikor van végtelen sok és nem véges számú megoldása?

19. feladat. Adva van két egyenes (e', e''), (f', f''), melynek egynevű képei egymást a rajzlapon kívül metszik, megvizsgálandó, hogy e két egyenes metszi-e egymást, anélkül, hogy a képeknek hozzáférhetlen metszőpontjait felhasználnók.

Megoldási utasítás. Két egyenest szerkesztünk, melyek az adottakat metszik; a szerint, mint ez utóbbiak egymást metszik vagy nem metszik, az adottak is ekkép viselkednek. (Miért?)

20. feladat. Adva van két egymást nem metsző egyenes (e', e''), (f', f'') szerkeszszük meg az egyiknek azt a pontját, mely a másiknak egy pontját *a)* az 1-ső képsíkra nézve elfödi, *b)* a 2-dik képsíkra nézve elfödi.



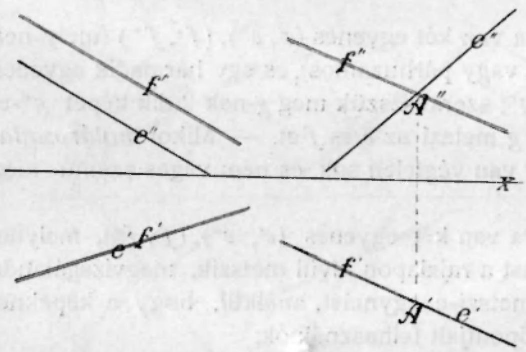
16. ábra.

Megoldás. (16. ábra.) Megszerkesztjük az e és az f egyenes azon pontjainak 2-dik képét, melyeknek 1-ső képei (e', f') pontban vannak, amennyiben e pontok az 1-ső térnegyedben fekszenek, az a pont födi a másikat az 1-ső képsíkra nézve, melynek 2-dik képe a képtengelytől távolabb van. Hasonló eljárás követendő a *b*) kérdésnél.

A mellékelt 16. ábrában az *f* egyenes *B* pontja födi el az *e* egyenes *A* pontját az 1-ső képsíkra nézve, és az *e* egyenes *C* pontja födi el az *f* egyenes *D* pontját a 2-dik képsíkra nézve.

21. feladat. Adva van az *e* egyenesnek mindkét képe, az *f* egyenesnek csak az egyik képe; vegyük fel az *f*-nek másik képét, de úgy hogy: *a*) az *f*-nek egy pontja az *e*-nek egy pontját az 1-ső képsíkra nézve és az *f*-nek egy másik pontja az *e*-nek egy pontját a 2-dik képsíkra nézve elfödje; *b*) az *f*-nek egy pontja az *e*-nek egy pontját az 1-ső képsíkra nézve és az *e*-nek egy pontja az *f*-nek egy pontját a 2-dik képsíkra nézve elfödje.

Ha két egyenesnek közös 1-ső projiciálósíkja, tehát közös 1-ső képe van, akkor az egyiknek több pontja fogja a másiknak pontjait az 1-ső képsíkra nézve elfödni. A midőn az egyeneseknek 2-dik képei párhuzamosak, akkor (a mennyiben azoknak az 1-ső térnegyedben van pontjuk), csak az egyik egyenesnek pontjai födik el a másiknak pontjait.



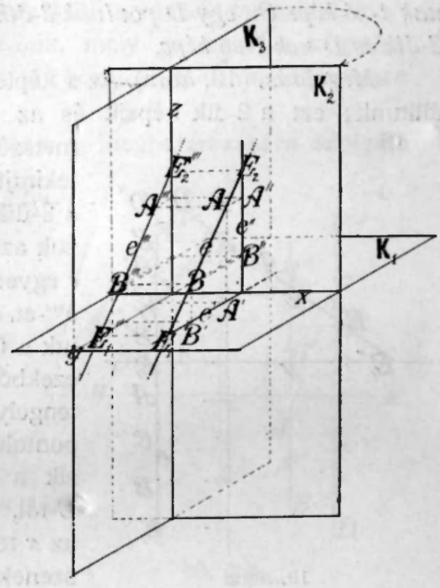
17. ábra.

De ha az egyenesek nem párhuzamosak, tehát egymást az első térnegyedben metszik, a metszőponttól számítva fölváltva födik el egymást az egyes egyeneseknek pontjai az 1-ső képsíkra nézve. (17. ábra.)

Hasonlóakat kell megjegyeznünk oly egyenesekről, melyeknek közös 2-dik képük van.

20. Az oldalképsík. — Az *x* képtengelyre merőleges *e* egyenesnek *e,' e''* képei nem határozzák meg az *e* egyenesnek helyzetét a képsíkok irányában, mert *e*-nek mindkét projiciálósíkja egybeesik, tehát ezeknek a metszővonala határozatlan. *A képtengelyre merőleges egyenes meg van határozva két benne fekvő pontnak képei által*, mert a két pont képeiből, a két térpont és így az azokat összekötő egyenes reconstruálható. Noha az ily egyenes két pontjának képei által meg van határozva, a vele kapcsolatos szerkesztések nem végezhetők oly egyszerűen, mint bármily más helyzetű egyenessel, és pedig azért, mert az egyenes egy pontjának egyik képéből közvetlenül nem található meg annak másik képe. Célszerűnek mutatkozik e végből az ily egyenest egy az x képtengelyre merőleges helyzetű új képsíkra, *oldal- vagy 3-dik képsíkra* K_3-ra projiciálni és a K_3-mat az e egyenesnek rajta fekvő e''' *3-dik* vagy *oldalképével* együtt annak $z = (K_3, K_2)$ metszővonala a 2-dik képsíkkal, ebbe a képsíkba, vagy $y \doteq (K_3, K_1)$ metsző vonala körül az 1-ső képsíkkal, az 1-ső képsíkba forgatni.

Az x képtengely egy pontján keresztűl menő és az 1-ső, illetve a 2-dik képsíkban az x-re merőlegesen álló y, illetve z egyenes — y-tengely, z-tengely — meghatározza a K_3 3-dik képsíkot. (18. ábra).



18. ábra.

Ha a 3-dik képsíkot a z tengely körül a 2-dik képsíkba képzeljük forgatva, akkor az y tengely az x-be kerül és az e egyenes 3-dik képét e''' könnyen megszerkeszthetjük. Tekintve, hogy K_3 a K_2 irányában oly helyzetű, mint a K_1, (t. i. K_2-re merőleges) az egyenes A és B pontjának 3-dik képe A''', B''', az A'' B'' pontokból a z tengelyre merőlegesen bocsátott egyeneseken lesz. Az A''', B''' pontok távolsága a z tengelytől egyenlő lesz az A, B pontok távolságával a 2-dik képsíktól, s mely távolságok mint tudjuk egyenlők $A' A_x$. $B' B_x$-szel.

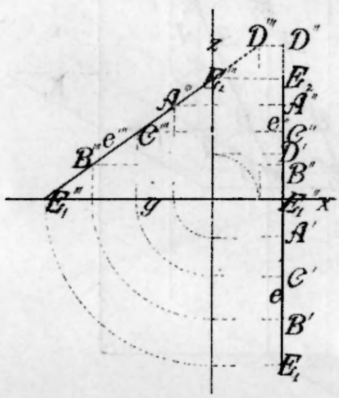
Ennélfogva (19. ábra) az $A' A_x$, $B' B_x$ vonaldarabokat az A'', B'' pontokból a z tengelyre bocsátott merőlegesekre ezeknek a z tengelyen levő A_z. B_z talppontjától mérve reárakjuk A''', B'''-ig. E műveletnél pedig csak arra kell ügyelnünk, hogy ha az A, B pontok a 2-dik képsíktól, tehát azoknak 1-ső képei A', B' az x tengelytől el voltak választva, akkor az a A''', B''' képek a z tengelytől szintén el legyenek választva. A''', B''' pontok összekötő egyenese e''' képezi az e egyenesnek 3-ik képét, a 3-dik képsíknak a 2-dikkal történt egyesítése után.

Az e egyenesnek e'', e''' képei és a z tengely pótolja az e', e'' képeket és az x tengelyt, azaz alkalmas mindazon szerkesztésekre, melyeket az e egyenesen végezni akarunk; annak megtörténte után a 3-dik képekből az 1-ső képekre lehet következtetnünk.

Feladatok a képtengelyre merőleges egyenesre vonatkozólag.

21. — 22. *feladat. Adva van egy a képtengelyre merőleges e egyenesnek két pontja* (A', A''), (B', B''), *és egy rajta fekvő C pontnak 1-ső képe* C', *egy D pontnak 2-dik képe* D''; *szerkesztendő C-nek 2-dik és D-nek 1-ső képe.*

Megoldás. (19. ábra). Az x képtengelyre z merőleges egyenest állítunk; ezt a 2-dik képsík és az x-re merőleges 3-dik képsík metszővonalának, a z képtengelynek tekintjük, mely körül a 3-dik képsík a 2-dikra lett borítva. Meghatározzuk az A, B pontoknak és ezzel az e egyenesnek 3-dik képeit, A''', B''', e'''-et. A C', D'' pontokból megkapjuk a C''' és D''' pontokat e'''-on, s ezekből C'' és D'-et. Minthogy a z tengely a D''' pontot az A''', B''', C''' pontoktól elválasztja, a 2-dik képsík a D pontot elválasztja A, B, C-től, tehát D' és A', B', C' pontok az x tengely különböző oldalán fekszenek.



19. ábra.

23. *feladat.* Szerkesztendő a képsíkra merőleges e egyenesnek 1-ső és 2-dik nyoma E_1, E_2. A megoldást a 19. ábra mutatja.

24. *feladat.* A (C', C'') ponton keresztül egy a képtengelyre merőleges és két pontjával A, B-vel adott e egyenessel párhuzamos f egyenes fektetendő.

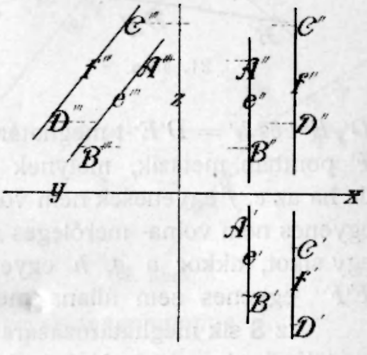
Megoldás. (20. ábra). f-nek f', f'' képei a C', C'' ponton keresztül menő és az x képtengelyre merőleges egyenesek. Az f egyenes még egy pontjának D-nek kell tehát képeit D', D''-et szerkesztünk. E végből az e egyenesnek és a C pontnak meghatározzuk 3-dik képét e''', C'''-t; a C''' ponton keresztül menő és e'''-mal párhuzamos f''' egyenes az f-nek 3-dik képe, végre az f''' tetszés szerinti D''' pontjából meghatározható D', D''.

25. feladat. Két adott egyenes (e', e''), (f, f'), egyike a képtengelyre merőleges (és két pontja által van adva); megvizsgálandó, hogy az e és f metszi-e egymást, *a*) oldalképsík alkalmazásával, *b*) oldalképsík alkalmazása nélkül a 19. feladat alapján.

A sík ábrázolása és nevezetes vonalai.

22. A sík értelmezése és meghatározása. Három pont, mely nem fekszik ugyanegy egyenesen, síkot határoz meg. E sík *tartója* azoknak a (∞^1) egyeneseknek, melyek ama pontok bármelyikén keresztül menve a másik két pont összekötő egyenesét metszik. S mert minden egyenest olyannak tekintünk, mely *egyszeresen* végtelen sok (∞^1) pontnak a tartója, azért a *sík pontjainak száma kétszeresen végtelen sok* $(\infty^2.)$

A síknak azonban nem csak a meghatározására szolgáló három pontján, hanem minden pontján ∞^1 egyenes (sugár) húzható keresztűl, mely a síkban fekszik; ezek az egyenesek minden egyenest, mely a síkban fekszik, metszeni fognak és ezért jellemző a síkra nézve, (azaz a síkot e jellemző tulajdonsággal felruházottnak akarjuk képzelni): *a*) *hogy ha egy egyenesnek két pontja egy síkban van, akkor annak minden pontja abban a síkban lesz, b*) *hogy ha két egyenes egymást metszi* (*véges, avagy végtelen távolban*), *akkor az ugyanegy síkban fekszik*, és fordítva, *ha két egyenes egy síkban fekszik, akkor egymást mindig metszi.*



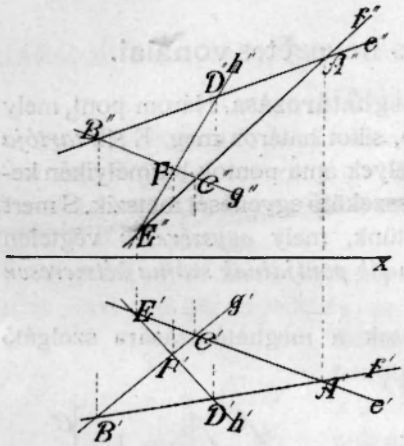
20. ábra.

Minthogy a sík bármely egyenesének e-nek minden pontján keresztűl ∞^1 egyenes húzható a síkban, és olyan egyenes nem vehető fel a síkban, mely ezek között elő nem fordulna, másrészt, mert az e kivételével minden egyenes csak egyszer lett számítva, azért a *síkban kétszeresen végtelen sok* (∞^2) *egyenes van.*

Azonban nemcsak *három pont, hanem egy egyenes és egy kivüle fekvő pont, vagy két egymást* (*véges avagy végtelen távol*) *metsző egyenes is meghatároz egy síkot*, mely t. i. azokon keresztűl megy.

Nem fektethető egy sík két egymást nem metsző egyenesen keresztül, mert akkor a síkban oly két egyenes volna, mely egymást nem metszi, a mi a sík jellemző tulajdonságával ellenkezik.

23. A sík ábrázolása. Két egymást egy A pontban metsző egyenes e, f, melynek (21. ábra.) képei (A', A''), (e', e''), (f', f''), meghatároz egy síkot $\mathbf{S} = [e, f]$-et. Minden egyenes g, mely az e és f egyenest két különböző pontban metszi, az $\mathbf{S}$ síkban fekszik. Ha tehát g-nek egyik, pl. 1-ső képét g'-t tetszőlegesen vesszük fel és ez az e', f',-et $B' C'$ pontokban metszi, akkor a B pontnak az e''-n, és a C pontnak az f''-n fekvő B'', C'' képei meghatározzák a g egyenes 2-dik képét g''-et. Ugyanígy lehetett volna az $\mathbf{S}$ sík egy h egyenesének 2-dik képét h''-et, mely e'', f''-et a D'', E'' pontokban metszi, felvenni, és ezekből D', E'-t és $h' = D'E'$-t meghatározni. A g, h egyenesek egymást egy F pontban metszik, melynek képei $F' = (g', h')$, $F'' = (g'', h'')$, de ha az e, f egyenesek nem volnának metsző egyenesek (az $A' A''$ egyenes nem volna merőleges x-re), tehát e, f nem határozna meg egy síkot, akkor a g, h egyenesek sem metszenék egymást (az $F'F''$ egyenes sem állana merőlegesen az x-re).



21. ábra.

Az $\mathbf{S}$ sík meghatározására az e, f egyenesek helyett, az e egyenest és f-nek egy pontját, pl. C-t, vagy e-nek két pontját A, B-t és a C pontot lehetett volna felvennünk, mely felvételek az előbbire könynyen visszavezethetők.

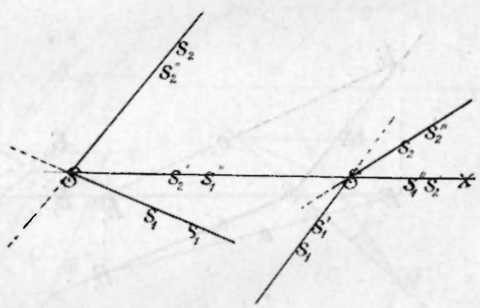
Tudván azt, hogy az $\mathbf{S}$ sík meghatározására szolgáló e, f egyenesek közül pl. az f egyenes bármely más az f-en fekvő és az e-t metsző egyenessel pótolható, az $\mathbf{S}$ síkban oly egyeneseket is felvehetünk, melyek az e, f metszőpontján A-n mennek keresztül, mert f helyett pl. a már megszerkesztett g-t és az e egyenest kell az $\mathbf{S}$ sík meghatározására adottnak tekinteni, és úgy mint előbb eljárni.

24. A sík nyomai és reconstructiója. Minthogy egy síknak bármily két egyenese alkalmas annak meghatározására, kérdezhetjük, melyek lesznek ama egyenespárak közül a legalkalmasabbak? A felelet általánosan mondva csak az lehet: a mely egyeneseknek képei legegyszerübb helyzetűek, s ilyeneknek mutatkoznak a képsíkokban fekvő egyenesek, mert ezeknek egyik képe mindig a képtengelyben van. Minthogy két különböző *sík egymást mindig metszi egy egyenes vonalban* (mely végtelen távol is lehet), azért bármily helyzetű legyen is a sík, melyet ábrázolni akarunk, az a két képsíkot két egyenes vonalban metszi.

A síknak azt az egyenesét, melyben az az 1-ső képsíkot metszi, a sík 1-ső vagy vízszintes nyomának, és melyben a 2-dik képsíkot metszi, 2-dik vagy függőleges nyomának nevezzük.

Az előrebocsátottaknak és a nyomoknak értelmezéséből következik, hogy a sík nyomának két metszőpontja a képtengelyen van, és *ez a sík tengelypontja vagy tengelynyoma*, továbbá amit az egyenes nyomairól is mondtunk: *a sík 1-ső nyomának 2-dik képe és a 2-dik nyomnak 1-ső képe a képtengelyen van.*

A sík 1-ső és 2-dik nyomát ugyanolyan, de 1-es, illetve 2-es mutatóval ellátott kis betűvel akarjuk jelölni, annak tengelypontját ugyanolyan nagybetűvel akarjuk jelölni, mint a síkot, melynek jelölésére a kövéren nyomatott nagybetűket fogjuk használni. E szerint a 22. ábra egy **S** = $[s_1\ s_2]$ síkot ábrázol, melynek 1-ső nyoma s_1, 2-dik nyoma s_2, tengelypontja S.



22. ábra.

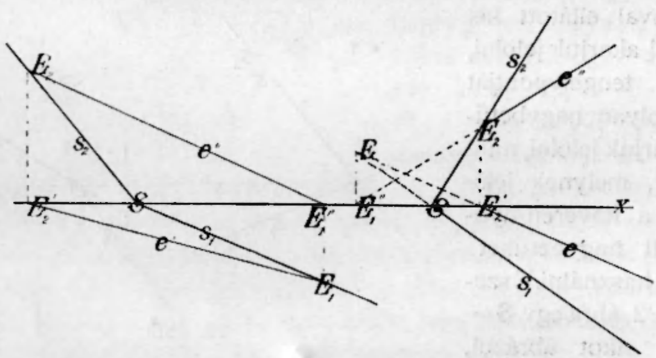
A sík nyomainak azon részét, mely az 1-ső térnegyed határán van, teljes, a többit szaggatott vonallal rajzoljuk, továbbá rendesen a sík tengelypontját, és a nyomok képeit nem szokás külön megjelölni, hanem a nyomokhoz azokat a betüket írjuk, melyekkel azok a térben jelöltetnek, tehát az **S** sík 1-ső nyomához s_1-et, a 2-dik s_2-t. De annál inkább emlékezetbe vésendő, a mit már előbb megemlítettünk, hogy s_1-nek 1-ső képe s_1, 2-dik képe a képtengely, és s_2-nek 2-dik képe s_2, 1-ső képe pedig a képtengely.

Az s_1, s_2 nyommal megadott **S** síknak reconstructiója a következő: Miután az 1-ső képsík az x tengely körül az s_1-gyel együtt a 2-dik képsíkra merőleges helyzetbe lett forgatva, az s_1-et és az s_2-t metsző egyeneseket képzelünk, melyeknek összesége egy síkot tölt be, és az a sík lesz az, mely az s_1, s_2 nyomokkal van ábrázolva.

25. Egyenes felvétele egy síkban. Lássuk, *miképen kell az oly síkban egyenest felvenni, melynek nyomai adva vannak*, vagy mint mondani akarjuk, *mely nyomaival van megadva?*

Az **S** síkban felvendő e egyenesnek (23. ábra.) egyik, pl. 1-ső képét e'-et általában tetszés szerint lehet felvenni, ez az s_1-et, E_1-ben az $s'_2 = x$-et, E'_2-ben metszi. Az E_1 pontnak 2-dik képe E_1'', az $x = s''_1$-en és az E'_2-nek 2-dik képe az s_2-őn E_2-ben fekszik; $E_2\,E''_1$ lesz az e egyenesnek 2-dik képe e''.

E szerkesztésből látható e jól megjegyzendő szabály: *Ha egy egyenes egy síkban fekszik, akkor az egyenesnek 1-ső nyoma a sík 1-ső nyomában, 2-dik nyoma pedig a síknak 2-dik nyomában van; és fordítva, ha egy sík egy egyenesen megy keresztül, akkor annak a síknak 1-ső és 2-dik nyoma az egyenesnek 1-ső, illetve 2-dik nyomán tartozik keresztül menni.*

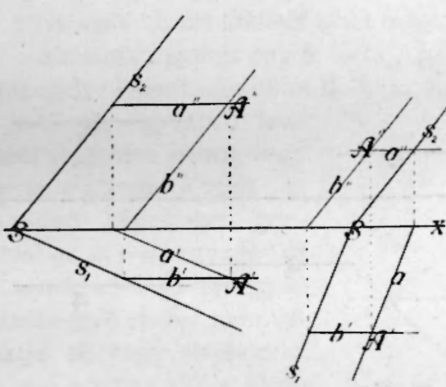


23. ábra.

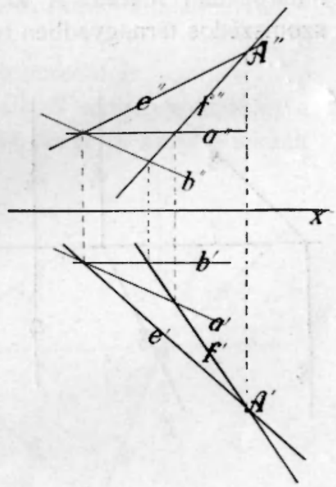
26. A sík fővonalai. A síknak 1-ső nyomával párhuzamos egyeneseket a *sík 1-ső fővonalainak* (*nyompárhuzamosainak*) és a 2-dik nyomával párhuzamos egyeneseit a sík *2-dik fővonalainak* nevezzük. A síknak ∞^1 1-ső, ugyanennyi 2-dik fővonala van; a sík minden pontján egy 1-ső és egy 2-dik fővonal megy keresztül. Ezen értelmezés folytán a *sík minden 1-ső fővonalának 1-ső képe párhuzamos az 1-ső nyomával, 2-dik képe párhuzamos a képtengelylyel, és a sík minden 2-dik fővonalának 2-dik képe párhuzamos a 2-dik nyomával, 1-ső képe pedig párhuzamos a képtengelylyel.* A mellékelt 24. ábrában az a 1-ső, a b pedig 2-dik fővonala az **S** síknak.

Lehet azonban az oly síkban is felvenni fővonalakat (a nélkül, hogy a nyomokat meghatároznók), melyet két metsző egyenes határoz meg: Minden egyenes, mely a képtengelylyel párhuzamos, egy 1-ső fővonalnak 2-dik és egy 2-dik fővonalnak 1-ső képe lehet, ebből az egy képből pedig a másik képet az általános eljárás szerint szerkeszthetjük. A 25. ábrában *e*, *f* a sík meghatározására szolgáló két egyenes, *a*, *b* pedig egy 1-ső, illetve 2-dik fővonala annak a síknak. A mit még megjegyzeni akarunk az, hogy a nyert 1-ső fővonal 1-ső képével a síknak 1-ső nyoma és a 2-dik fővonal 2-dik képével a síknak 2-dik nyoma párhuzamos lesz.

27. Általános és különös helyzetű síkok. Akkép, mint a tér egyenesei, a tér síkja is a képsíkok irányában általános és különös helyzetűek lehetnek. Lássuk először a különös helyzetű síkokat.



24. ábra.



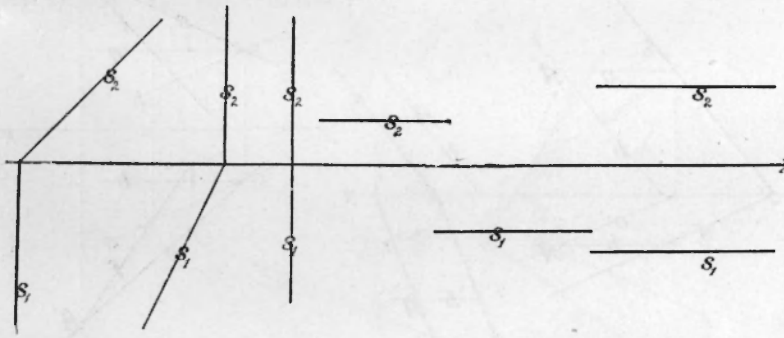
25. ábra.

Egy **S** sík az 1-ső vagy a 2-dik, vagy az 1-ső és a 2-dik képsíkra merőleges lehet. E síkokat rendre az *1-ső képsíkra projiciáló*, vagy *a 2-dik képsíkra projiciáló*, vagy *végre a képtengelyre projiciáló* (azaz merőlegesen álló) *síknak* nevezzük. Mily helyzetűek e síkoknak nyomai a képtengely irányában?

Az 1-ső képsíkra projiciáló síknak 2-dik nyoma és a 2-dik képsíkra projiciáló síknak 1-ső nyoma, végre a képtengelyre projiciáló síknak mindkét nyoma merőleges a képtengelyre. (26. ábra). Továbbá: *Az 1-ső (2-dik) képsíkra projiciáló síkban fekvő minden egyenesnek és pontnak 1-ső (2-dik) képe a sík 1-ső (2-dik) nyomában van.*

Minthogy a képsíkok egyikére vagy mindkettőre projiciáló sík nyomai a térben egymásra merőlegesek, azért a fővonalak rendszere szintén merőleges lesz egymásra.

A midőn két egyenesnek 1-ső, vagy 2-dik képe egybeesik, a két egyenes egy az 1-ső, illetve egy a 2-dik képsíkra projiciáló síkot határoz meg, és ha a két egyenes közös képei merőlegesek a képtengelyre, akkor azokon a képtengelyre projiciáló sík megy keresztűl. A képsíkokra projiciáló síkoknak különös esetét képezik *az 1-ső vagy a 2-dik képsíkkal párhuzamos síkok.* (26. ábra). Az elsőnek a 2-dik nyoma párhuzamos a képtengelylyel, 1-ső nyoma pedig végtelen távol van; az utóbbinak 1-ső nyoma párhuzamos a képtengelylyel, a 2-dik nyom pedig végtelen távol van. Itt a fővonalaknak csak egyik rendszeréről szólhatunk, a másik rendszer határozatlan marad. A képsíkokkal párhuzamos síkok csak két szomszédos térnegyedben terjednek el.



26. ábra.

A képtengelylyel párhuzamos síkok nyomait az jellemzi, hogy azok párhuzamosak a képtengelyhez (26. ábra jobb); e síkok fővonalainak két rendszere egybe esik és e síkok legfeljebb három térnegyeden vonulnak keresztül

A képtengelylyel párhuzamos síkok különös esetét képezik *a képtengelyen keresztül menő síkok.* Minthogy ezeknek mindkét nyoma a képtengelyben van, a mely csak egy egyenes: a képtengelyen keresztül menő síkok meghatározására a nyomok nem elegendők, hanem még egy bennök fekvő egyenes vagy pont szükséges.

Ha egy síknak két nyoma a képtengelylyel egyenlő szöget képez, akkor az a *sík merőleges a symmetria- vagy a coincidentiasíkra* a szerint, a mint a képsíkok egyesítése után a nyomok nem esnek egybe, vagy pedig egybeesnek.

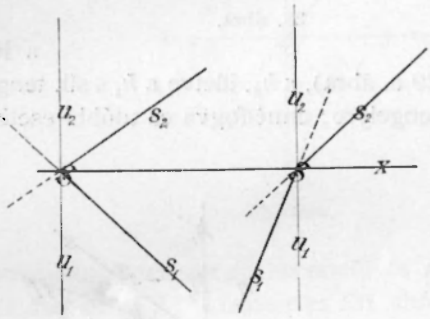
Ugyanis minden az ily síkban fekvő és a képtengelyre merőleges egyenes (és ilyen ∞^1 van bármily helyzetű síkban) merőleges a symmetria-, illetve a coincidentiasíkra $\mathbf{H}_1$ vagy $\mathbf{H}_2$-re. Ugyanis ha a $\mathbf{H}_1$, vagy $\mathbf{H}_2$-re merőleges egyenest elképzelünk, akkor ennek képei a képtengelyre merőlegesen állnak és nyomai a képtengelytől egyenlő távolságra vannak. De az ily egyenesen keresztül menő bármily síknak nyomai (mert a képtengelyben találkoznak) a képtengelyhez egyenlő szögek alatt hajlanak.

Ennek különös esetét képezik azok a síkok, *melyeknek nyomai a képtengelytől egyenlő távolságra* vannak, tehát vagy egybeesnek, vagy pedig a képtengely felezi, a tőlük határolt párhuzamos szalagokat. Az első esetben a síkok a symmetriasíkkal, a másodikban a coincidentiasíkkal párhuzamosak.

Minden más sík, melyről itt nem szólottunk általános helyzetű a képsíkok irányában.

De ezek között kétfélét lehet megkülönböztetni.

Állítsunk ugyanis egy $\mathbf{S} = [s_1, s_2]$ sík S tengelypontjában a képtengelyre merőleges síkot $\mathbf{U} = [u_1, u_2]$-t. Az $\mathbf{U}$ sík az az $\mathbf{S}$ síknak az 1-ső térnegyedben levő részét vagy nem metszi, vagy metszi, a szerint, a mint (az egyesített képsíkokra gondolva) az $u_1 = u_2$ egyenes az s_1, s_2-nek az 1 ső térnegyed határán levő részeit nem választja el, vagy elválasztja. Az első esetben (27 a. ábra) a síkot *dűlt*, a másodikban (27 b. ábra) *feszített* síknak akarjuk nevezni. A feszített, projiciáló, vagy dűlt sík nyomainak az 1-ső térnegyed határán levő részei megfelelőleg: tompa-, derék-, vagy hegyesszöget képeznek.



27 a. ábra. 27 b. ábra.

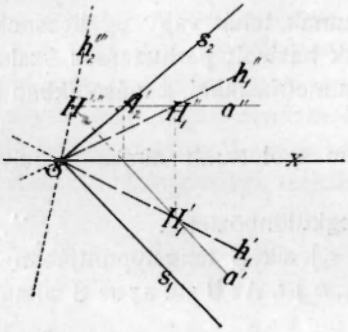
Hogy mi különbség van még a feszített és dűlt sík között és hogy mikép lehet tudni egy síkról, melynek nyomai nem ismeretesek, hogy feszített vagy dűlt sík-e, azt alább (a 34. feladatnál) látni fogjuk.

Ha egy $\mathbf{S}$ síkot egyik nyoma körül forgatunk, akkor az a dűlt helyzetből az egyik képsíkra projiciáló helyzeten keresztül a feszített helyzetbe megy át s közben egyszer a $\mathbf{H}_1$ és egyszer a $\mathbf{H}_2$ síkra lesz merőleges.

28. **A sík symmetria- és coincidentia-vonalai.** A síknak azon egyeneseit, melyben az a symmetria-síkot $\mathbf{H}_1$-et és a coincidentiasíkot $\mathbf{H}_2$-t metszi, a *sík symmetria-, illetve coincidentia-vonalának nevezzük* és h_1, h_2-vel jelöljük.

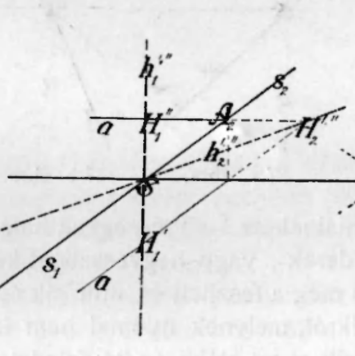
Ha a sík tetszés szerinti egyenesének symmetria- és coincidentiapontjait, H_1, H_2-t a sík tengely pontjával összekötjük, megkapjuk a sík h_1, h_2 vonalait.

Igy ha az (s_1, s_2) sík (28. ábra) egy a fővonalának symmetria- és coincidentiapontja (H'_1, H''_1), illetve (H'_2, H''_2), akkor e pontok összekötő egyenese az S tengelyponttal a (h'_1, h''_1), (h'_2, h''_2) egyenesek. A szerkesztés mutatja, hogy bármily a képtengelylyel párhuzamos egyenesnek a h_1', h_2'-től és a h_1'', h_2''-től határolt vonaldarabja az s_1, illetve az s_2-től feleztetik, melyet tekintetbe véve a h_1 h_2 egyikéből a másik és mindkettőtől a sík nyomai egyszerűen szerkeszthetők.

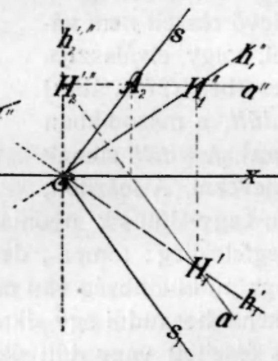


28. ábra.

A midőn az **S** sík a $\mathbf{H}_1$, vagy a $\mathbf{H}_2$ síkra merőleges (29 b. és 29 a. ábra), a h_2, illetve a h_1 a sík tengelypontjában merőleges a képtengelyre; ennélfogva ez utóbbi esetben nemcsak a h_2-nek, hanem



29 a. ábra.

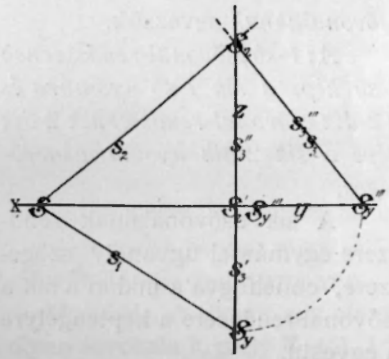


29 b. ábra.

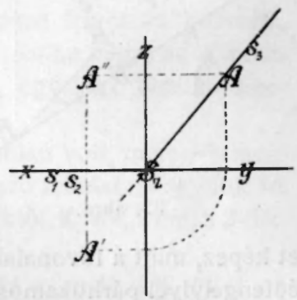
h_1-nek képei is egybeesnek; de megjegyezendő, hogy mig a h_2 pontjainak képei egybeesnek, a h_1 pontjainak képei a képtengely irányában symmetrikusok. Minthogy a sík coincidentia vonalának képei egybeesnek: *egy sík bármely egyenesének két képe egymást a sík coincidentia vonalának képében metszi.*

29. A sík oldalnyoma. Minden sík a képtengelyre merőleges oldalképsíkot $\mathbf{K}_3$-mat egy egyenes szerint metszi, mely a sík *oldal-*, *vagy 3-dik nyomának* neveztetik. A K_3 képsíkon fekvő 3-dik nyomot a $(K_2, K_3) = z$ tengely körül a K_2 képsíkba akarjuk forgatni, azaz a sík 1-ső és 2-dik nyomából annak oldalnyomát akarjuk meghatározni, a midőn a K_3 sík a K_2-vel egyesült. Az oldalképsík (30. ábra) az 1-ső és 2-dikat a z és y egyenesben, az $S = [s_1, s_2]$ síkot egy s_3 egyenesben metszi; s_3-nak 2-dik nyoma S_z az s_2-ben, 1-ső nyoma S_y az s_1-ben van.

Az S_y pontnak 3-dik képe S_y''' az x tengelyen ép oly távolságra van a z tengelytől, mint az S_y pont az x-től; S_z pedig 3-dik képével esik egybe. Ennélfogva S_z S_y''' egyenes lesz az S síknak 3-dik nyoma s_3.



30. ábra.



31. ábra.

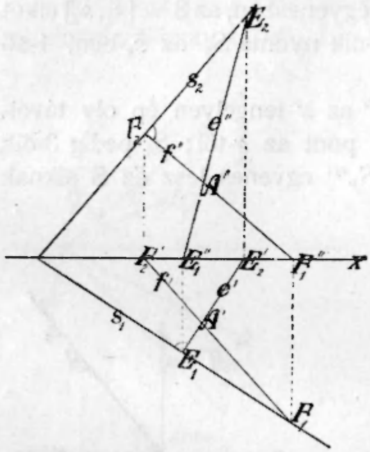
A midőn az S sík az x képtengelyen megy keresztül és az x-ben fekvő s_1, s_2 nyomain kivül még az (A', A'') ismeretes (31. ábra) az S síknak 3-dik nyomát s_3-mat megkapjuk, ha az A-nak 3-dik képét A'''-t a $(z, x) = S_z$ ponttal összekötjük. E sík ugyanis a 3-dik képsíkra projiciáló lévén, minden pontjának 3-dik képe a sík 3-dik nyomában fekszik. (Az ábrában az A pont helyére A''' irandó.)

Feladatok a síkra vonatkozólag, kapcsolatban a ponttal és az egyenessel.

A következő feladatoknál a sík rendesen nyomaival van megadva, a hol pedig a síkot más adatokkal akarjuk meghatározni, ugy ezen adatok minéműségét meg kell mondanunk.

30. — *26. feladat. Adva van egy sík* $S = [s_1, s_2]$; *szerkesztendő e síkban oly egyenes e, mely az 1-ső nyomra, és oly egyenes f, mely a 2-dik nyomra merőleges.*

Megoldás (32. ábra). Minden az **S** sík s_1 nyomára merőleges egyenesnek 1-ső projiciáló síkja merőleges lévén az s_1-re, a keresett e egyenesnek 1-ső képe e' is merőleges s_1-re; az e'-ből az e'' az általános eljárás szerint szerkeszthető.



32. ábra.

Ugyanígy a sík s_2 nyomára merőleges egyenesnek 2-dik képe f'' merőleges s_2-re, és f' abból meghatározható.

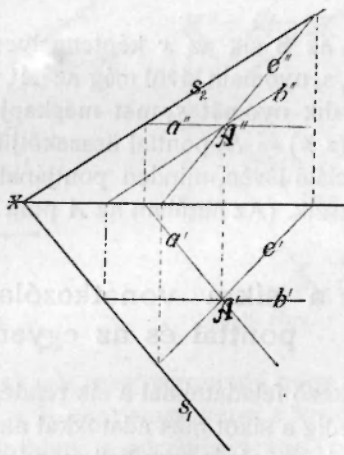
A sík 1-ső (2-dik) nyomára és így az 1-ső (2-dik) fővonalak rendszerére merőleges egyeneseknek rendszerét *1-ső (2-dik) esővonalaknak* nevezzük.

Az 1-ső esővonal-rendszernek 1-ső képe a sík 1-ső nyomára és a 2-dik esővonal-rendszernek 2-dik képe a sík 2-dik nyomára merőleges.

A sík esővonalainak rendszere egymással ugyanoly szögeket képez, mint a fővonalak rendszere, ennélfogva a midőn a sík a képtengelylyel párhuzamos, a két esővonal rendszere a képtengelyre merőleges egyenesek rendszerében egyesül.

27. feladat. Vegyünk fel egy **S** *síkban egy A pontot,* azaz szerkeszszük meg egy oly A pontnak képeit, mely az adott **S** síkban fekszik.

Megoldás (33 a. ábra). Az A pontnak egyik, pl. 1-ső képét A'-t tetszés szerint lehet felvenni s ezzel a 2-dik kép már általában meg van határozva. Egy az A ponton keresztül menő és az **S** síkban fekvő e egyenesnek 1-ső képe e' az A' ponton megy keresztül; e'-ből az e'' és a rajta fekvő A'' pont szerkeszthető. Célszerű (mert egy



33 a. ábra.

33 b. ábra.

vonallal kevesebb jön használatba) az általános helyzetű e egyenes helyett egy fővonalat, pl. egy 1-ső fővonalat, a-t, vagy egy 2-dik fővonalat b-t alkalmazni a szerkesztésnél. (A kezdő hajlandó egy síkban felveendő pontnak képeit a sík nyomain felvenni, mint a hogy az egyenesen fekvő pont képeit az egyenes képein veszi fel. Ámde általában a sík 1-ső nyomán levő pontnak 2-dik képe a képtengelyen van, míg a sík 2-dik nyomán felvett pontnak 1-ső képe a képtengelyen lesz!)

A midőn a sík az 1-ső (2-dik) képsíkra projiciáló, akkor a felveendő pontnak 1-ső (2-dik) képe a síknak *csak* az 1-ső (2-dik) nyomában fekhetik, tehát csak itt vehető fel; a pontnak 2-dik (1-ső) képe pedig jelen esetben határozatlan marad. (33 b. ábra).

Ha a sík a képtengelyen megy keresztűl és ezen kivül fekvő (B', B'') pont által van adva, akkor az A pont felvételét közvetítő egyenest e-t a B ponton fektetjük keresztül; és ha végre az A pontnak tengelyképe a B tengelyképében van, úgy egy oldalképsíkot alkalmazunk az A pont meghatározására.

28. feladat. Az előbbi feladat határozatlan volt, mert ∞^2 megoldást szolgáltatott; de határozott a következő feladat: Vegyünk fel egy síkban oly A pontot, mely az 1-ső képsíktól, K_1-től, 2 cm, a 2-diktól, K_2-től, 1·5 cm távolságra van.

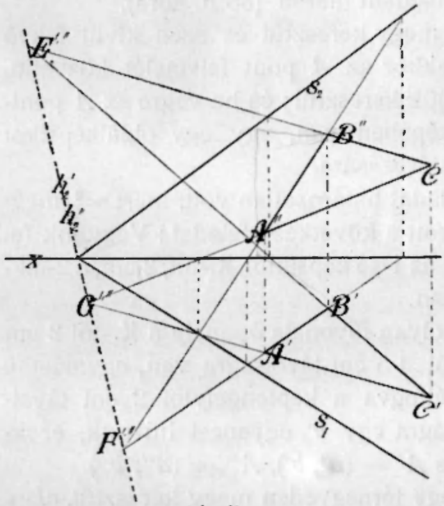
Megoldás. A síknak egy olyan fővonala a, mely a K_1-től 2 cm és olyan fővonala b, mely K_2-tól 1·5 cm távolságra van, egymást a keresett pontban metszi. Ennélfogva a képtengelytől 2 cm távolságra egy a'' és 1·5 cm távolságra egy b' egyenest húzunk, ezekből a', b''-t megszerkesztjük és $A' = (a', b')$, $A'' = (a'', b'')$.

A feladatnak, ha a sík négy térnegyeden megy keresztűl, négy megoldása van, t. i. minden térnegyedben fekszik ily pont. De ha a sík kevesebb mint négy térnegyeden megy keresztűl, akkor a feladatnak O, vagy ∞^1 megoldása van. A síknak mily helyzeteinél következnek be ezek az esetek és a négy pont az általános esetben mily négyszögnek képezi szögpontjait?

29. feladat. Adva van egy síknak két nyoma $[s_1, s_2]$ *és egy benne fekvő ABC,... sokszögnek egyik képe; szerkesztendő a sokszögnek második képe.*

Megoldás (34. ábra). Ha az ABC... sokszögnek 1-ső képe $A'B'C'$... ismeretes, akkor a 2-dik képnek az $A''B''C''$... sokszögnek oldalait vagy szögpontjait megkapjuk, ha vagy az ABC... sokszög AB, BC... oldalainak, mint egyeneseknek, vagy a sokszög ABC... szögpontjainak, mint pontoknak, 1-ső képéből a 2-dik képet meghatározzuk.

Célszerű e szerkesztésnél a sík coincidentiavonalának, h_2-nek képeit $h_2' \equiv h_2''$-t fölhasználni. Ugyanis ha az A'' pont a sokszög A szögpontjának bármily módon meghatározott 2-dik képe és az $A'B'$ egyenes a h_2' (h_2'')-et az F' (F'') pontban metszi, akkor az A'' B'' egyenes is e ponton megy keresztűl, mely körülményből az A'' B'' egyenes és ezen a B'' pont szerkeszthető. Ugyanígy lehet a (B', B'') használatával a (C', C'') pontot, s ezzel a következő pontot stb. meghatározni. E szerint egy sík sokszög két képének helyzetét a sík $h_2' \equiv h_2''$ coincidentiavonalának képe irányában és az x képtengely irányában az jellemzi, hogy ugyanegy sokszögoldalnak képei (a sokszög képeinek *megfelelő oldalai*) egymást a h_2'-en metszik és ugyanegy sokszög — szögpontnak képei (a sokszög képeinek *megfelelő szögpontjai*) az x-re merőleges egyenesen feküsznek. Igy tehát: *egy síksokszög képeinek megfelelő oldalai egymást egy egyenesen (a sík coincidentia vonalának képén) metszik, és megfelelő szögpontjai (a képtengelyre merőleges tehát) párhuzamos egyeneseken feküsznek.*



34. ábra.

Két sokszögről azt mondjuk, hogy *egymásra van vonatkoztatva*, ha az egyik sokszög minden szögpontjának és az azon keresztűl menő oldalaknak és átlóknak egy szögpont és az ezen keresztűl menő oldalak és átlók *felelnek meg* a másikban. Továbbá:

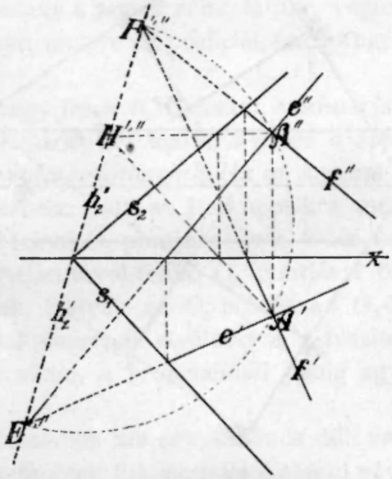
Két egymásra vonatkoztatott síksokszöget *perspectiv helyzetű affin* sokszögnek nevezünk, ha a sokszögek megfelelő oldalai egymást egy egyenesen, az *affinitási tengelyen*, metszik és megfelelő szögpontjait összekötő egyenesek, *a projiciáló sugarak*, párhuzamosak. Ezt az értelmezést alapul véve mondhatjuk:

Egy síksokszög két képe perspectiv helyzetű affin sokszög; a sík coincidentiavonalának képe az affinitási tengely és a képtengelyre merőleges sugarak a projiciáló sugarak.

Egy síksokszög és annak 1-ső (vagy 2-dik) képe perspectiv helyzetű affin; a sík 1-ső (2-dik) nyoma az affinitási tengely, azok a sugarak pedig, melyek a sokszög szögpontjait az 1-ső (2-dik) képsíkra projiciálják, a projiciáló sugarak.

30. feladat. Vegyünk fel az $[s_1, s_2]$ síkban az adott (A', A'') ponton keresztűl oly két egyenest, melynek 1-ső képei és 2-dik képei egymásra merőlegesek.

Megoldás (35. ábra). Miután a sík coincidentiavonalának képét $h_2' = h_2''$ megszerkesztettük, az A', A'' pontokon keresztűl kört fektetünk, melynek középpontja a h_2' egyenesen van. E kör a h_2'-et az $E' = E''$, $F' = F''$ pontokban metszi és $E'A' = e'$, $E''A'' = e''$ az egyik, $F'A' = f'$, $F'A'' = f''$ a másik kivánt egyenesnek két képe.



35. ábra.

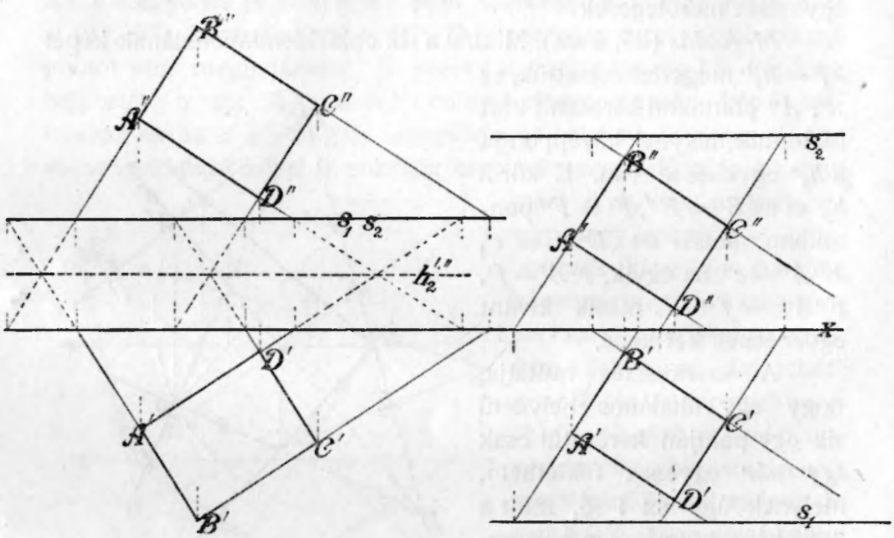
A szerkesztés mutatja, hogy egy általános helyzetű sík egy pontján keresztűl csak *egy pár* egyenes fektethető, melynek úgy az 1-ső, mint a 2-dik képe egymásra merőleges, de ha a sík a coincidentia- vagy a symmetriai-síkkal párhuzamos, akkor minden egyenespárnak, melynek 1-ső képe merőleges, annak 2-dik képe is az lesz. A két egyenes a térben általában nem lesz merőleges.

A 36 a. és 36 b. ábra a symmetria-, illetve a coincidentia-síkkal párhuzamos síkban fekvő parallelogrammának képeit ábrázolja. Az elsőnek képei a $h_2' - h_2''$ egyenesre symmetrikusak, tehát ellenkező értelemben fekve congruensek; a másiknak képei, mert $h_2' = h_2''$ végtelen távol van, ugyanegy értelműleg congruensek.

31. — *31. feladat. Adva van egy* **S** $[s_1, s_2]$ *sík és egy az 1-ső térnegyedben fekvő* (A', A'') *pont, megállapitandó, hogy az átlátszatlannak képzelt* $[s_1, s_2]$ *sík az egyik vagy a másik, vagy mindkét képsíkra nézve elfödi-e az* (A', A'') *pontot?*

Megoldás. (37. a) b) c) ábrák). Az A pontot az 1-ső képsíkra nézve az **S** síknak csak az a B pontja födheti el, melynek 1-ső képe B' az A'-ban van; ellenben az A-t a 2-dik képsíkra nézve az **S**-síknak az a C pontja födheti el, melynek az A-val közös 2-dik képe van.

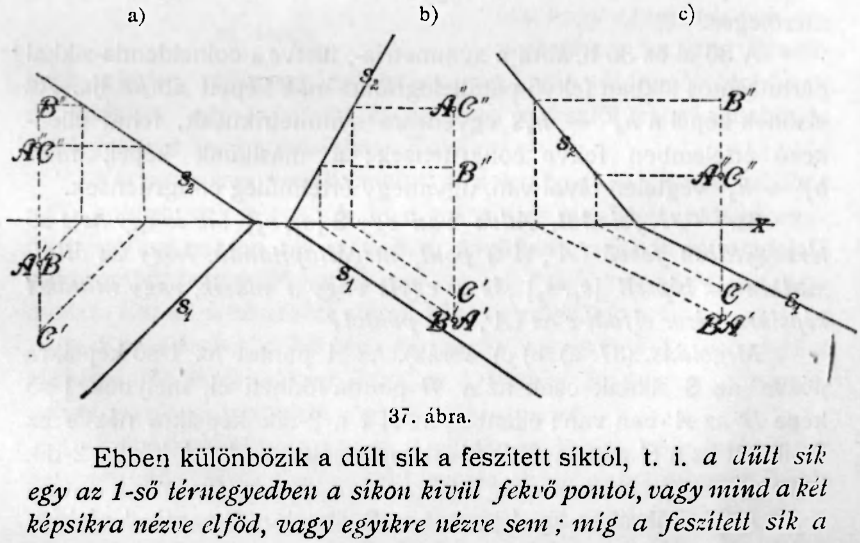
A 37 a. ábrában az A pontot az **S** síknak a B pontja 1-ső képsíkra nézve és a C pontja a 2-dik képsíkra nézve elfödi; a B, C pontok tehát az A-nak *födőpontjai az* **S** *síkban.* A 37 b. ábrából látható, hogy sem a B, sem a C nem födőpontja az A-nak; itt a sík egyik képsíkra nézve sem födi el az A pontot.



a) 36. ábra. b)

A 37 c. ábrában a B födőpontja az A-nak, C pedig nem; tehát az A pont az 1-ső képsíkra nézve el van födve, a 2-dikra nincsen elföldve az **S** síktól.

a) b) c)



37. ábra.

Ebben különbözik a dűlt sík a feszitett síktól, t. i. *a dűlt sík egy az 1-ső térnegyedben a síkon kivül fekvő pontot, vagy mind a két képsíkra nézve elföd, vagy egyikre nézve sem; míg a feszitett sík a* *pontot fekvése szerint vagy az egyik, vagy a másik, de minden esetre csak egy képsíkra nézve födi el. A projiciáló sík pedig egy kivüle fekvő pontot arra a képsíkra nézve, melyre projiciál, egyáltalán nem födheti el.* Meg akarjuk még e helyen a következőket jegyezni: ha egy síknak két oldalát két különböző szinűnek képzeljük, akkor e szinek közül, ha a sík dűlt, az 1-ső és a 2-dik képsíkra nézve csak egyet látunk, míg ha a sík feszített, akkor az első képsíkra nézve az egyik, a 2-dikra nézve a másik színt látjuk, végre a projiciáló síknál arra a síkra nézve, melyre az projiciál, sem az egyik, sem a másik színét nem látjuk.

Ennélfogva: *egy sík dűlt, vagy feszített, a szerint, a mint a (szokott módon az első térnegyedet határló) két képsíkra nézve a síkoknak csak az egyik vagy mindkét oldalát láthatjuk.* Ha mi ugyanis a sík egy pontját (a képsíkok egyesítése előtt) az 1-ső képsíkra merőleges egyenesnek végtelen távol fekvő O_1 pontjával és a 2-dik képsíkra merőleges egyenesnek végtelen távol fekvő O_2 pontjával öszszekötjük, akkor ezek a sugarak, melyek az O_1-ből és az O_2-ből nézőnek látósugarai, a dűlt síknál nincsenek elválasztva, a feszítettnél el vannak választva az illető síktól, a projiciálónál pedig egyik látósugár a síkban fekszik.

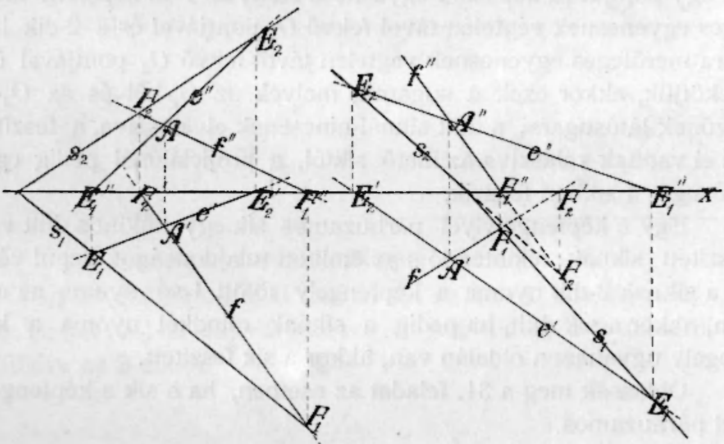
Egy a képtengelylyel párhuzamos sík egy különös dűlt vagy feszített síknak tekintendő s az említett tulajdonságot alapul véve: ha a síknak 2-dik nyoma a képtengely fölött 1-ső nyoma az alatt van, akkor a sík dűlt, ha pedig a síknak mindkét nyoma a képtengely ugyanazon oldalán van, akkor a sík feszített.

Oldassék meg a 31. feladat az esetben, ha a sík a képtengelylyel párhuzamos.

32. — *32. feladat. Fektessünk három ponton, vagy egy ponton és egy egyenesen, vagy végre két egymást akár véges, akár végtelen távolban metsző egyenesen keresztül síkot.* (Az a feladat *síkot fektetni*, mint szerkesztési feladat az ábrázoló geometriában rendszerint annyit jelent, mint a *síknak nyomait meghatározni.* Ha nem szerkesztésről van szó, akkor a sík fektetés kifejezésén az értendő, hogy az adatoktól meghatározott sík egészére, tehát a benne fekvő pontok és egyenesek összességére g o n d o l j u n k.)

Megoldás (38. ábra). A három ponton keresztül menő sík tartója annak a két egyenesnek, mely a pontok egyikét a másik kettővel összeköti. A ponton és az egyenesen keresztül menő síkon pedig rajta feküsznek mindazon egyenesek, melyek a pontból az egyeneshez metszőleg huzhatók. A két első feladat tehát egyszerű uton visszavezethető a harmadikra, melytől lényegében alig külömbözik.

Ha tehát az (e', e''), (f', f'') egyeneseken keresztűl menő sík nyomait akarjuk meghatározni, visszaemlékezünk arra, hogy ha egy sík egy egyenesen megy keresztűl, akkor a sík 1-ső és 2-dik nyoma keresztűl megy az egyenesnek 1-ső, illetve 2-dik nyomán. Ennélfogva az egyenesek 1-ső nyomainak, E_1, F_1-nek, összekötő egyenese s_1 a sík 1-ső nyoma, és az egyenesek 2-dik nyomának, E_2, F_2-nek, összekötő egyenese s_2 a sík 2-ik nyoma. A két nyom egymást (pontos szerkesztésnél), ha az e, f egyenesek metszőegyenesek voltak mindig a képtengelyen, a sík tengelypontjában metszik: ellenkezőleg, ha az e, f nem volna metsző egyenespár, akkor egynevű nyomaiknak összekötő egyenesei a képtengelyt két különböző pontban metszenék. E körülmény felhasználható a szerkesztésre abban az esetben, ha az egyenesek nyomai közül egyik a képsíkon kívül van.



38. ábra.

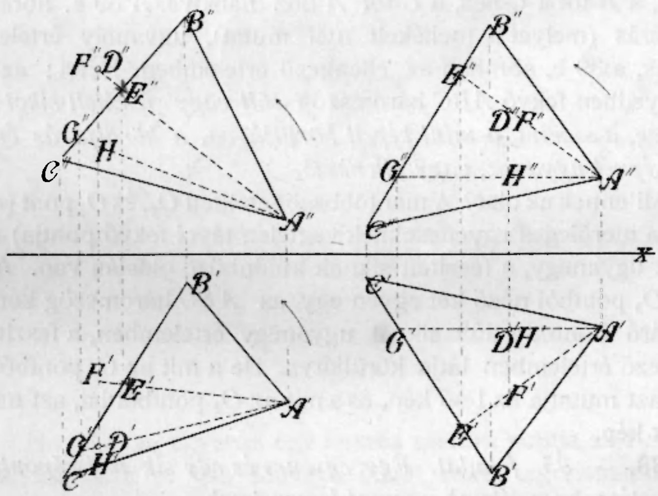
A feladat számos tanulságos példában gyakorlandó. E példákban a sík meghatározására szolgáló egyenesek a képsíkok irányában különböző általános vagy különös helyzetben veendők fel. Ime néhány példa: legyen az e vagy az f, vagy az e és az f párhuzamos a képsíkok egyikével, avagy a képtengelylyel; legyen az e az egyik, az f a másik képsíkkal párhuzamos; legyen az e egy coincidáló $(e' = e'')$, f egy általános egyenes; feküdjék e az egyik képsíkban; messe egymást az e és f a képtengelyen; vagy essék az egyenesek nyomai közül több vagy valamennyi a rajzlapon kivül, stb.

E két utóbbi esetben és egyikénél az előbbieknek, mely különben ehez számítható, egy vagy két segédegyenest alkalmazunk, melyek az adottakat metszik, és így azokat a szerkesztésnél pótolják.

33. feladat. Vegyünk fel egy **S** síkban, mely két egymást metsző egyenessel *e, f*-fel van adva *a*) egy 1-ső rendszerbeli fővonalat és esővonalat, *b*) egy 2-dik rendszerbeli fővonalat és esővonalat, *c*) egy pontot, mely a képsíkoktól adott távolságokra van a nélkül, hogy a sík nyomait felkeresnők.

34. Adva van négy pontnak *A, B, C, D*-nek két képe; megvizsgálandó: *a*) hogy azok a pontok egy síkban feküsznek-e; *b*) hogy a *D* pont az *A, B, C* pontokon keresztül menő **S** síktól egész terjedelmében, vagy csak az *ABC* háromszög oldalaitól határolt síkrésztől az egyik vagy a másik képsíkra nézve el van-e födve; *c*) hogy az **S** sík dűlt vagy feszített-e?

Megoldás (39. a. és 39 b. ábra). *a*) Ha az *AD* egyenes metszi *BC*-t, akkor a négy pont egy síkban fekszik. A 39. ábrákban



39. ábra.

az $A''D''$, $B''C''$ egyeneseknek E'' metszőpontja és az $A'D'$, $B'C'$ egyeneseknek G' metszőpontja nem fekszik egy a képtengelyre merőleges egyenesen, tehát az *AD, BC* egyenesek nem metszik egymást és így a négy pont nem fekszik egy síkban.

b) Tekintsük a D' pontot, mint egy az **S** síkban fekvő *H* pont 1-ső képének H'-nek és keressük fel *H*-nak 2-dik képét. Az *AH, BC* egyenesek metszőpontjának képei G', G''; H'' az $A''G''$ egyenesen fekszik, tehát a *H* pont az ábrákban nem födőpontja *D*-nek az 1-ső képsíkra nézve.

Tekintsük továbbá a D'' pontot, egy az **S** síkban fekvő F pont 2-dik képének és keressük F-nek 1-ső képét. Az AF, BC egyenesek metszőpontjának képei E', E''; F' az $E'F'$ egyenesen fekszik, tehát F a 39 a. ábrában szintén nem födőpontja D-nek, a 39 b. ábrában pedig födőpontja.

Ennélfogva a 39 a. ábrában D egyik képsíkra nézve sincs elfödve az **S**-től, a 39 b. ábrában pedig az **S** sík (sőt annak ABC része is) a 2-dik képsíkra nézve elfödi, az 1-sőre nézve nem födi el a D pontot. Ebből már következtetni lehet arra, hogy az ABC sík a 39 a. ábrában dűlt, a 39. b. ábrában feszített.

c) A nélkül, hogy az előbbi szerkesztést végeznők, könnyen megállapíthatjuk, hogy az ABC pontokon keresztűl nem sík dűlt-e vagy feszitett.

Járjuk körül az ABC háromszög képeinek kerületeit az A-tól a B-hez, a B-től a C-hez, a C-től A-hoz haladva. A 39 a. ábrában a körüljárás (melyet a mellékelt nyil mutat), ugyanoly értelemben történik, a 39 b. ábrában az ellenkező értelemben. Ezért: az 1-ső térnegyedben fekvő ABC háromszög *dűlt vagy feszített síkot határoz meg, a szerint, a mint képeit körüljárva, a körüljárás értelme a két képnél ugyanaz, vagy ellenkező.*

Mi ennek az oka? A már többször említett O_1, és O_2 pont (a képsíkokra merőleges egyeneseknek végtelen távol fekvő pontja) a dűlt síknak ugyanegy, a feszített síknak különböző oldalán van. Az O_1 és az O_2 pontból néző két egyén egy az ABC háromszög kerületét körüljáró pontot a dűlt síknál ugyanegy értelemben, a feszítettnél ellenkező értelemben látja körüljárva. De a mit az O_1 pontból lát a néző, azt mutatja az 1-ső kép, és a mit az O_2 pontból lát, azt mutatja a 2-dik kép.

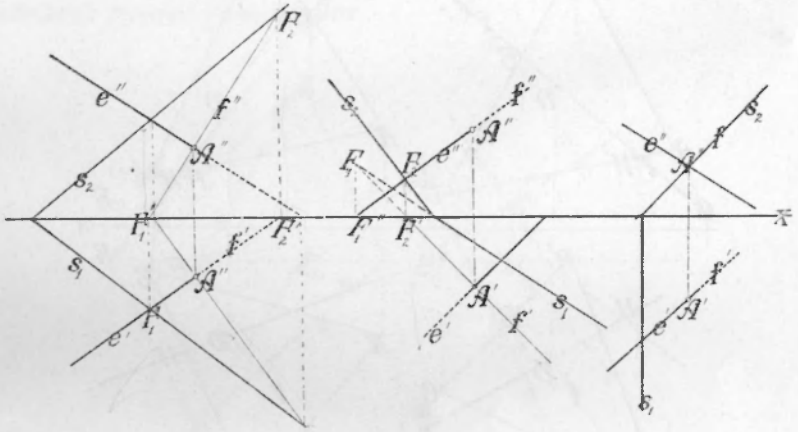
33. — *35. feladat. Egy egyenes és egy sík metszőpontjának szerkesztése, ha a síknak nyomai ismeretesek.*

Megoldás. (40 a., 40 b. és 40 c. ábrák). Legyen $\mathbf{S} = [s_1, s_2]$ az adott sík, $e = (e', e'')$ az adott egyenes. Tekintsük az egyenesnek egyik képét egy a síkban fekvő f egyenes hasonnevű képének és szerkeszszük meg f-nek másik képét. Minthogy az e és f-nek egyik képe közös, azok egymást szükségkép metszik egy pontban, mely már az $[s_1, s_2]$ sík és az e egyenes metszőpontja. A metszőpontnak pedig 2-dik vagy 1-ső képét nyerjük előbb a szerint, a mint az f-et úgy vettük fel, hogy annak 1-ső vagy 2-dik képe van az e-nek illető képében.

A 40. ábrák a szerkesztést dűlt, feszített és projiciáló síkra nézve mutatják. A dűlt sík esetében a segédegyenesnek f-nek

1-ső képe az e 1-ső képében lett felvéve, a feszített síknál pl. e-nek 2-dik képét tekintettük a síkban fekvő f egyenes második képének és megszerkesztettük f-nek hiányzó képeit. A dűlt síknál $(e'', f'') = A''$ az **S** sík és az egyenes metszőpontjának 2-dik képe, a feszítettnél $(e', f') = A'$ annak 1-ső képe, melyből az A-nak hiányzó képe azonnal kiadódik. A projiciáló síknál a metszőpont egyik képe és ebből a másik közvetlenül megkapható.

Az **S** sík az e egyenest két részre osztja, melyek a sík különböző oldalain fekszenek; ezért az egyik rész az *átlátszatlannak* képzelt síktól egy a síkon kivül fekvő pontból nézve el van födve, a másik nincs elfödve.



a) 40. b) ábra. c)

Ha tehát az egyenes egy tetszés szerinti pontja az 1-ső vagy a 2-dik képsíkra el van födve a síktól, akkor egyszersmind az a része az egyenesnek, melyben ez a pont fekszik, szintén el lesz födve az illető képsíkra nézve a síktól.

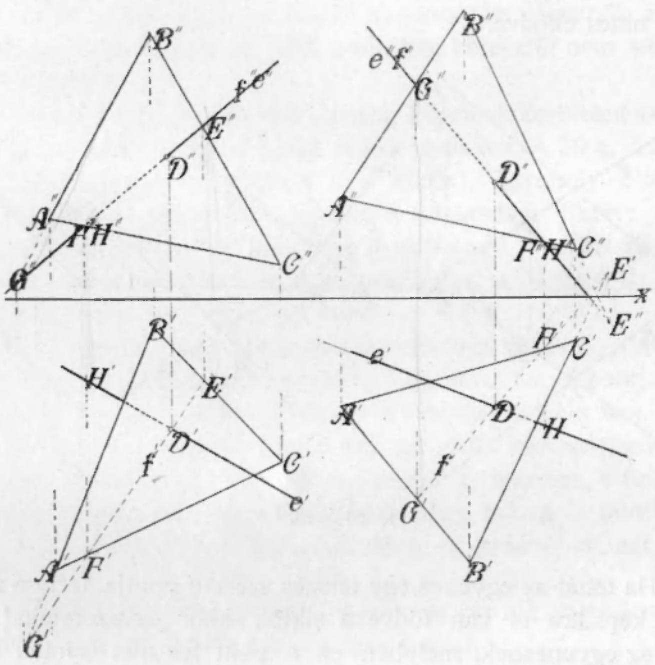
De fölhasználhatjuk annak eldöntésére a metszőpont meghatározására szolgáló segédegyenest is. A 40 a. ábrában az 1-ső képsíkra nézve e elfödi f-nek azt a részét, melyben az F_1 pont van, tehát e-nek a teljes vonallal rajzolt része látszik az 1-ső képsíkra nézve, s mert a sík dűlt, azért az e ugyanazon részének 2-dik képe is látszó.

A 40 b. ábrában a 2-dik képsíkra nézve e elfödi az f egyenesnek azt a részét, melyben az F_2 pont van, tehát e-nek a teljes vonallal rajzolt része látszik a 2-dik képsíkra nézve. Minthogy azonban a sík feszített, az 1-ső képsíkra nézve nem azt a részét látjuk az e-nek, mint az 1-sőre nézve, tehát itt a másik rész 1-ső képét rajzoljuk teljes vonallal.

A 2-dik képsíkra projiciáló síknál 40. c) ábra az e-nek 2-dik képe egészen látható, az 1-ső képből pedig a teljes vonallal rajzolt rész.

36. feladat. Szerkeszszük meg az e egyenes metszőpontját oly síkkal, melynek három pontja ABC van adva.

Megoldás. (41 a. és 41 b. ábra). Tekintsük e-nek 2-dik képét, egy az **S** $= ABC$ síkban fekvő f egyenes 2-dik képének f''-nek és szer-



a) 41. ábra. b)

keszszük meg f'-t. f metszi a BC, CA, AB egyenest az E, F, G pontban, ezeknek 2-dik képéből E'', F'', G''-ből az E', F', G' 1-ső képek, az f' egyenes, végre az **S** sík és e egyenes D metszőpontjának $(e', f') = D'$, $(e'', f'') = D''$ képei megkaphatok.

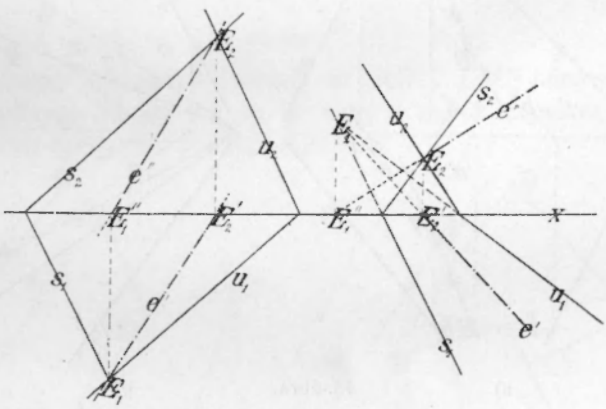
A 41 a. ábrában az f egyenes F pontja a 2-dik képsíkra nézve födőpontja az e egyenes H pontjának; az e'' egyenesnek tehát az a része, a melyben a H pont fekszik a D metszőponttól mérve (az ABC háromszög oldalaitól bekerített síkrésztől) el van födve, a másik rész ellenben látható.

E háromszög síkja dűlt, ezért az 1-ső képsíkra nézve ugyanez a rész lesz látható.

A 41 b. ábrában az e egyenes H pontja födőpontja F-nek a 2-dik képsíkra nézve; itt tehát a DH rész látható, a másik nem, s mert a sík feszített, azért az 1-ső képsíkra nézve látható lesz, a 2-dikra elfödött rész.

Oldassék meg e feladat a sík és egyenes különböző helyzeténél a képsíkok irányában, nevezetesen: ha az egyenes az egyik képsíkra merőleges, ha a képtengelyre merőleges (az oldalképsík felhasználásával); ha az egyenes a $\mathbf{H}_2$ síkban van, a sík a képtengelylyel párhuzamos és az 1-ső, 2-dik és 3-dik térnegyeden megy keresztűl, stb.

34. — *37. feladat. Két sík metszővonalának szerkesztése, ha a síkoknak nyomai vannak adva.*



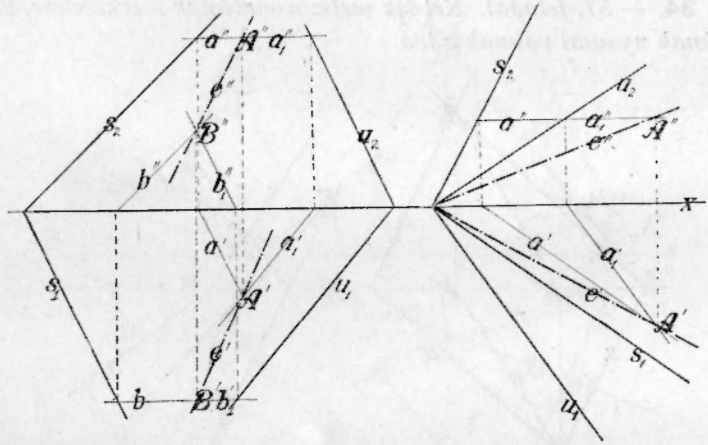
a) 42. ábra. b)

Az alkalmazandó általános eljárás abban áll, hogy két egyenesnek, mely vagy ugyanabban az adott síkban van, vagy mely közül az egyik az egyik, a másik a másik adott síkban van, felkeressük metszőpontját azzal a síkkal, melyben az illető egyenes nem fekszik; a két metszőpont összekötő egyenese, mint mind a két adott síkban fekvő, a két síknak metszővonala. E szerint a feladat az előbbiekre van visszavezetve.

Legyen a 42 a. és 42 b. ábrában a két sík $\mathbf{S} = [s_1, s_2]$, $\mathbf{U} = [u_1, u_2]$. Az $\mathbf{S}$ sík s_1. s_2 egyeneseinek metszőpontjait az $\mathbf{U}$ síkkal legegyszerűbben szerkeszthetjük; ezek ugyanis az $(s_1, u_1) = E_1$, $(s_2, u_2) = E_2$ pontok. Az E_1 pontnak 2-dik képe E''_1 és az E_2 pontnak 1-ső képe E'_2 a képtengelyben fekszik, tehát $E_1E'_2 = e'$,

$E_1''E_2 = e''$ lesz az **S**, **U** síkok e metszővonalának két képe. Utólag is igazolható, hogy e a két síkban fekszik, mert nyomai a síkok egynevű nyomaiban vannak. Minthogy e szerkesztés számos feladat megoldásánál alkalmazandó, annak begyakorlása a síkok nyomainak különböző helyzeténél kivánatos és emlékezetbe tartandó, hogy a *két sík 1-ső (2-dik) nyomának metszőpontja a síkok metszővonalának 1-ső (2-dik) nyoma.*

A midőn az **S**, **U** síkok nyomai egymást a rajzlapon kivül metszik, avagy a síkoknak közös tengelypontjuk van, a nyomok metszőpontjai helyett az egyik sík egy (vagy két) oly fővonalának metszőpontját szerkesztjük a másik síkkal, melyet még a rajzlapon megnyerhetünk.

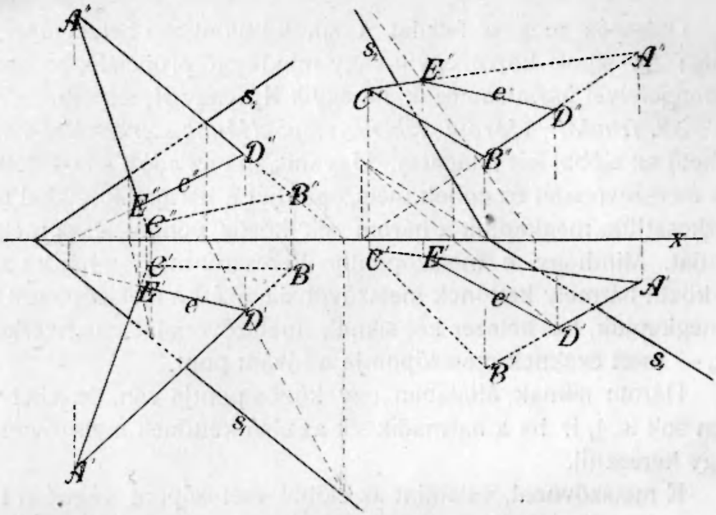


a) 43. ábra. b)

A 43 a. ábrában **S** sík 1-ső fővonala a, az **U** síkot az A pontban és 2-dik fővonala b azt a B pontban metszi; $AB = e$ lesz tehát az **S**, **U** síkoknak metszővonala. A 43 b. ábrában csak az A pont meghatározása szükséges, mert a síkoknak közös tengelypontja a metszővonalon fekszik.

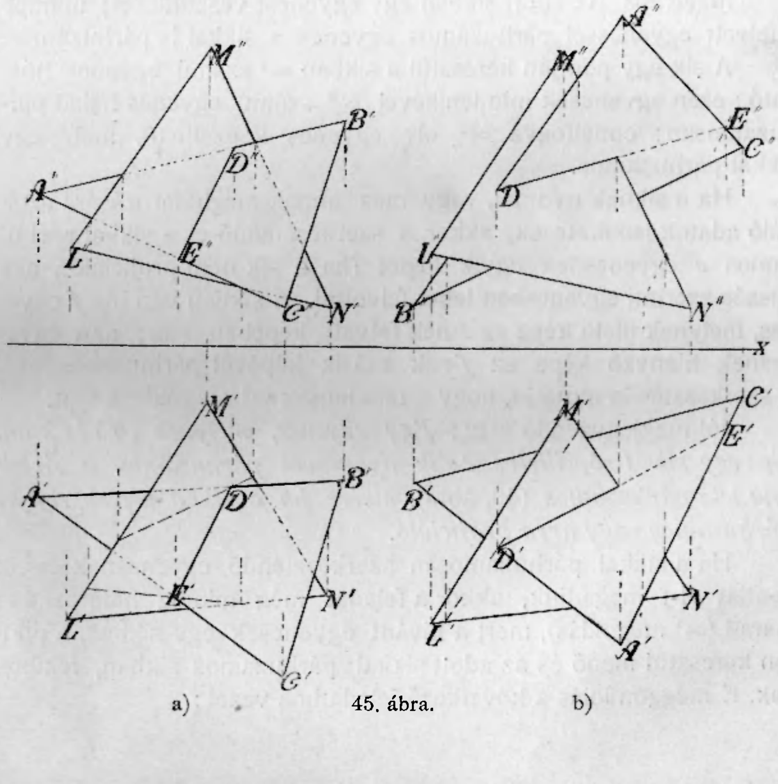
38. feladat. Két sík metszővonalának szerkesztése, a) ha az egyik sík három pontjával van adva, b) ha mindkét síknak háromhárom pontja van adva.

Megoldását a 44. és 45. ábrák mutatják. Az ABC háromszög AB, AC oldalai a 44 a. és 44 b. ábrában az $\mathbf{S} = [s_1, s_2]$ síkot a 45 a. és 45 b. ábrákban az LMN háromszög síkját a D, E pontokban metszik; $DE = e$ lesz tehát ABC, **S** és az ABC, LMN síkoknak metszőegyenese. Az ABC oldalainak az a része, mely az **S** síktól nincs elfödve, teljes, a másik szaggatott vonallal van rajzolva.



a) 44. ábra. b)

Ugyanígy tekintettel voltunk az ABC, LMN háromszögek rajzolásánál arra, hogy az egyik vagy a másik képsíkra nézve elfödött részt szaggatott vonallal rajzoljuk.



a) 45. ábra. b)

Oldassék meg e feladat a síkok különböző helyzeténél, és pedig: ha síkok közül egyik vagy mindkettő projiciáló, ha azok a képtengelylyel párhuzamosak, ha egyik H_1, vagy H_2 sík stb.

39. feladat. Három sík metszőpontjának szerkesztése visszavethető az előbbi két feladatra. Ugyanis, ha az adott síkok kettejének metszővonalát és ennek metszőpontját a harmadik síkkal megszerkesztjük, megkapjuk a három sík közös pontját, azaz metszőpontját. Minthogy e metszőponton keresztűl megy a három adott sík közül bármely kettőnek metszővonala, azért a metszőpontot úgy is megkapjuk, ha kétszer két síknak metszővonalát megszerkesztjük, — mert ezeknek metszőpontja a kivánt pont.

Három síknak általában egy közös pontja van, de lehet végtelen sok is, t. i. ha a harmadik sík az első kettőnek metszővonalán megy keresztűl.

E metszővonal, valamint az előbbi metszőpont végtelen távol is lehet és ezért *térképzeletünk fejlesztése* végett kérdezhetjük, hogy hány részre osztja három (esetleg négy) sík a tért, azoknak különböző kölcsönös helyzeténél.

35. — *40. feladat. Egy síkkal párhuzamos egyenes szerkesztése.*

Megoldás. Az adott síkban egy egyenest veszünk fel; minden e felvett egyenessel párhuzamos egyenes a síkkal is párhuzamos.

A sík egy pontján keresztűl a síkban ∞^1 számú egyenes húzható; ezen egyenesek mindenikével ∞^2 számú egyenes halad párhuzamosan; ennélfogva ∞^3 oly egyenes képzelhető, mely egy síkkal párhuzamos.

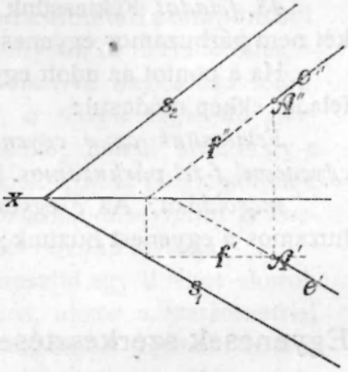
Ha a síknak nyomai, vagy más annak meghatározására szolgáló adatok ismeretesek, akkor a szerkesztendő és a síkkal párhuzamos e egyenesnek egyik képét (ha a sík nem projiciáló), egy tetszés szerinti egyenesben lehet felvenni. A síkban van oly f egyenes, melynek illető képe az e-nek felvett képében van; az e egyenesnek hiányzó képe az f-nek másik képével párhuzamos lesz. E szerkesztés is mutatja, hogy a feladatnak ∞^3 megoldása van.

Jól megjegyzendő még: *Egy egyenes, melynek 1-ső és 2-dik képe egy sík 1-ső, illetve 2-dik nyomával párhuzamos, a síkkal nem lesz párhuzamos* (46. ábra), *kivéve ha a sík a képtengelylyel párhuzamos vagy arra projiciáló.*

Ha a síkkal párhuzamosan szerkesztendő egyenesnek egyik pontját A-t megadjuk, akkor a feladat még mindig határozatlan marad (∞^1 megoldás), mert a kivánt egyenesek egy síkban, a ponton keresztül menő és az adott síkkal párhuzamos síkban, feküsznek. E meggondolás a következő feladathoz vezet:

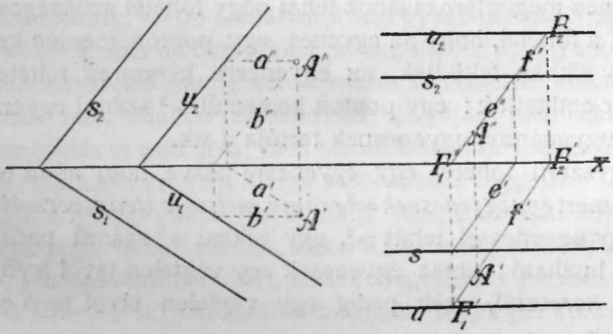
41. feladat. Fektessünk egy ponton keresztül síkot, mely egy adott síkkal párhuzamos.

Megoldás. (47 a. és 47 b. ábra). Legyen **S** $= [s_1, s_2]$ az adott sík, (A', A'') az adott pont, **U** a keresett sík. Az **S** sík 1-ső nyomával s_1-gyel és 2-dik nyomával s_2-vel párhuzamos a illetve b egyenest fektetünk az A ponton keresztűl; ezek az **U** síknak egy 1-ső és 2-dik fővonalai lesznek, melyek már az **U** síkot meghatározzák. A szerkesztés mutatja, hogy *a párhuzamos* **U**, **S** *síkoknak egynevű nyomai párhuzamosak*, és így az **U** nyomainak meghatározásához az egyik fővonal (az a vagy b) is elegendő.



46. ábra.

A midőn az **S** sík a képtengelylyel párhuzamos (47 b. ábra), az **U** meghatározására vagy az oldalképsíkot, vagy az **S** sík egy általános helyzetű e egyenesét használjuk fel. A kivánt **U** sík nyomai az e-vel párhuzamos és az A ponton keresztül menő f egyenes nyomait F_1, F_2-t tartják, és a képtengelylyel párhuzamosak. Ebbő



a) 47. ábra. b)

látható, hogy a képtengelylyel párhuzamos síkok (és csakis ezek) 1-ső és 2-dik nyomainak párhuzamos helyzetéből nem következtethetünk arra, hogy az illető síkok is párhuzamosak.

Minthogy egy adott ponton keresztűl *egy* síkkal végtelen sok párhuzamos egyenes húzható:

42. feladat. Szerkeszszünk egy ponton keresztűl oly egyenest, mely két síkkal párhuzamos.

Megoldás. A ponton keresztül menő és az adott síkokkal párhuzamos két sík metszővonala a keresett egyenes. Még egyszerűbb a megoldás, ha a két adott sík metszővonala megszerkeszthető a rajzlapon, mert a kivánt egyenes e metszővonallal párhuzamos.

43. feladat. Fektessünk egy adott ponton keresztűl síkot, mely két nem párhuzamos egyenessel párhuzamos.

Ha a pontot az adott egyenesek egyikén vesszük fel, akkor a feladat ekkép módosul:

Fektessünk az e egyenesen keresztűl síkot, mely egy másik egyenessel f-fel párhuzamos. Ez utóbbi feladatnak *megoldása:* Az *e* egyenes egy pontján keresztűl az *f*-fel párhuzamos *a* egyenest húzunk; [*a*, *e*] sík lesz már a keresett.

Egyenesek szerkesztése külömböző föltételek mellett.

36. Az egyenes meghatározására szolgáló föltételek száma. Egy sík pontjait egy másik sík pontjaival összekötő egyenesek (a síkok metszővonalától eltekintve) mind külömbözők egymástól. És minthogy úgy az egyik, mint a másik síkban ∞^2 számú pont van és minden egyenes metszi a két síkot, azért a *tér összes egyeneseinek száma* $\infty^2 . \infty^2 = \infty^4$, *azaz négyszeres végtelen sokaság.* Az egyenes meghatározásához tehát négy föltétel szükséges.

Az a föltétel, hogy az egyenes egy ponton menjen keresztűl, vagy egy síkban feküdjék, az egyenesre kétszeres föltétel, mert mint már említettük: egy ponton keresztűl ∞^2 számú egyenes húzható és ugyanannyi egyenesnek tartója a sík.

Egyszerű föltétel egy egyenesre nézve, hogy adott egyenest messen, mert *egy egyenesnek ∞^3 számú metszője (transversalisa) van.*

Egy egyenessel tehát ∞^2, egy síkkal ∞^3 számú párhuzamos egyenes huzható; amaz egyenesek egy végtelen távol levő ponton mennek keresztül, ezek pedig egy végtelen távol levő egyenest metszenek.

Nem jár nehézséggel ezen uton a tér pontjainak és síkjainak sokaságát megállapítani. Egy *O* ponton keresztül megy ∞^2 számú egyenes, melyek mindegyikén (az *O* kivételével) ∞^1 egymástól különböző pont van és ezek a tér összes pontjai. Ugyanigy egy O síkban fekvő ∞^2 számú egyenes mindenikén ∞^1 egymástól (az O kivételével) különböző sík helyezhető keresztül, és ezek a tér összes síkjai. E szerint: *A tér összes pontjai és összes egyenesei háromszoros sokaságot* (∞^3) *képeznek.*

Az a föltétel, hogy egy sík egy ponton menjen keresztül a síkra, egyszeres, az, hogy egy egyenesen menjen keresztül, kétszeres föltétel. A pontra nézve egyszeres föltétel, hogy egy síkon, kétszeres föltétel, hogy egy egyenesen feküdjék.

37. Az ábrázoló geometria feladata elméleti szempontból. Előre bocsátva az imént mondottakat, könnyebb és tisztább áttekintést nyerünk a következő feladatok *stereometria megoldása* fölött. Egy feladatnak stereometria megoldásán, *a térben végzendő szerkesztések lánczolatát* akarjuk érteni, tekintet nélkül arra, hogy e szerkesztéseket rajzban keresztül viszszük-e, azaz megrajzoljuk-e vagy nem. Ezzel szemben állítható az *ábrázoló* (*descriptiv*) *geometriai megoldás*, mely a szerkesztés kivitelét rajzban kivánja.

Ha azt mondom: egy A ponton keresztül egy **U** síkot akarok szerkeszteni, mely az **S** síkkal párhuzamos, akkor a stereometriai megoldás arra tanít: mikép szerzek magamnak fogalmat arról a síkról, mely a föltételeknek eleget tesz, a descriptiv megoldás pedig a síkot megrögzítve, azaz a descriptiv geometria módszerével ábrázolva kivánja.

Az eddigiekben tárgyalt módszerek, melyekkel a téralakzatokat két képsíkra, azaz „a két-képsíkos rendszerre“ vonatkoztattuk, s mely módszerek összességét Monge-féle projectió tanának nevezhetjük, nem az egyedüliek, melyeket ábrázoló geometriai szerkesztéseknél alkalmazunk, — de általában a legegyszerűbbek. S ha egy feladat megoldását más módszerekkel kivánjuk, tehát olyanokkal, melynél a téralakzatokat nem a két-képsíkos rendszerre vonatkoztatjuk, hanem más állandó térelemekkel állapítjuk meg, akkor a descriptiv megoldás is más lesz, de a stereometriai megoldás általában ugyanaz marad, mert ez a kivitel módozatától független.

A midőn a feladat adatai és a tőlük meghatározott keresett alakzatok ugyanegy síkban vannak, akkor a feladatot planimetriainak (egy síkban, *planum*-ban levőnek), annak megoldását *planimetriai megoldásnak* nevezik. A planimetriai megoldás tényleges keresztülvitele rajzban, szintén descriptivnek nevezhető, mert valóban, nemcsak szavakkal elmondva kivánhatjuk a megoldást, hanem megrajzolt pontokkal és vonalakkal. De a planimetriai feladatok rendesen specialisabbak, azaz a keresett alakzatból csak annyit kivánnak, a mennyi épen az adatok síkjában található, vagy már maga a feladat úgy van fogalmazva, hogy a síkon kivül nincs megoldása.

Igy ha azt mondom: szerkesztendő három ponton keresztül menő kör középpontja, vagy három ponttól egyenlő távolra levő pont a három ponton keresztül menő síkban, — akkor e két feladat

4*

ugyanazt kívánja. De ha elhagyom a második fogalmazványban e megszorítást: „a három ponton keresztül menő síkban“, akkor a második feladat már mást fejez ki, mint az első és más, amannál általánosabb megoldást kíván.

Feladatok.

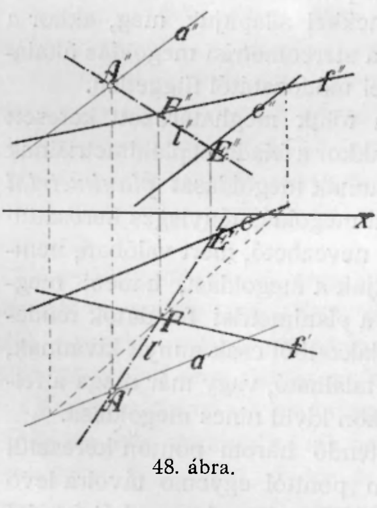
38. — *44. feladat. Adva van egy* **S** *sík, ebben egy A pont és kivüle egy e egyenes; szerkesztendő az A ponton keresztül az* **S** *síkban oly l egyenes, mely az e-t metszi.*

Megoldás. Az egyenesre nézve az, hogy egy adott síkban feküdjék, két föltétel; hogy egy adott ponton menjen keresztül, szintén két föltétel. De az egyenes ezen négy föltételnek nem tehet eleget, ha a pont a síkon kivül van. Ennélfogva, hogy egy A ponton keresztül egy **S** síkban egyenest vezethessünk, kell hogy az A pont az **S** síkban feküdjék. De ezzel az egyenes meghatározására szolgáló föltételek száma egygyel csökkent, és így még annak a föltételnek vethető alá, hogy az e egyenest messe. Ha tehát az e metszőpontja az **S** síkkal E, akkor az $AE = l$ a kivánt egyenes.

A kivitel tehát a 35. vagy 36. feladat megoldását és két pont összekötését kivánja.

45. feladat. Fektessünk egy A ponton keresztül oly l egyenest, mely két egyenest, e, f-et metsz.

Megoldás. (48. ábra). Az l négy feltételnek van alávetve, tehát az adatok általános helyzeténél a feladat határozott. Az a két sík (A, e) és (A, f), mely az A ponton és az e egyenesen, illetve az A ponton és az f egyenesen megy keresztül, egymást az l egyenesben metszi. Ez az l keresztül megy az (A, e) sík és az f egyenesnek metszőpontján is, tehát ezt véve, a feladat az előbbire van visszavezetve. Lássuk kivitelét ezen alapon.



48. ábra.

Az (A', A'') ponton keresztül (a', a'') párhuzamos (vagy metsző) egyenest huzzuk az (e', e'')-hez $(a'//e', a''//e'')$; fölkeressük az (f', f'') egyenesnek (F', F'') metszőpontját az

$(A, e) = (a, e)$ síkkal (a 36. feladat alapján a sík nyomainak fölhasználása nélkül); $A'F' = l'$, $A''F'' = l''$, és (l', l'') a kivánt egyenes, mely (e', e'')-t a (E', E'') pontban metszi.

Az adatoknak mily kölcsönös helyzeténél határozatlan a feladat?

45. feladat. Szerkesztendő három egyenest, e, f, g-t, metsző egyenes l.

Megoldás. Minden egyenes, mely az adottak egyikének, pl. a g-nek pontjaiból, avagy a g-n keresztül fektetett síkokban, a másik kettőhez e, f-hez metszőleg huzható (45. feladat), a kivánt egyenesek közé tartozik. A feladat a szerkesztendő l egyenesre nézve egy határozatlanságot tartalmaz; ezért az l egyenesek száma ∞^1, melyek egy felületen (egyágú hyperboloidon), az l egyenesek tartóján feküsznek. Ez a felület az adott e, f, g egyenesek különös kölcsönös helyzeténél egyszerűbb felületekre oszlik, azaz elfajul. Lássuk az elfajulásokat.

A midőn két vagy több egyenesről szólunk, mindig *egymás irányában általános helyzetű,* azaz egymást nem metsző egyeneseket értünk; ilyenek tehát a feladat e, f, g egyenesei is.

De ha az e, f, g egyenesek közül az e, f egymást az (e, f) pontban metszi, tehát egyszersmind az $[e, f]$ síkban fekszik, akkor azok az l egyenesek, melyek az (e, f) pontból a g egyeneshez metszőleg húzhatók és azok, melyek a g egyenes és $[e, f]$ sík metszőpontján keresztül fektethetők az $[e, f]$ síkban, az e, f, g-nek metszőegyenesei. Ekkor tehát az l egyenesek tartója két sík, t. i. az $[e, f]$ és az $[(e, f), g]$ sík; az elsőben az l egyenesek az $([e, f,] g)$ pontból, a másodikban az (e, f) pontból sugárzanak ki.

A midőn az f nemcsak az e-t, hanem a g-t is metszi, az l egyenesek tartója az $[e, f]$ és $[f, g]$ sík; amabban az l egyenesek az (f, g) pontból, ebben pedig az (e, f) pontból sugárzanak ki.

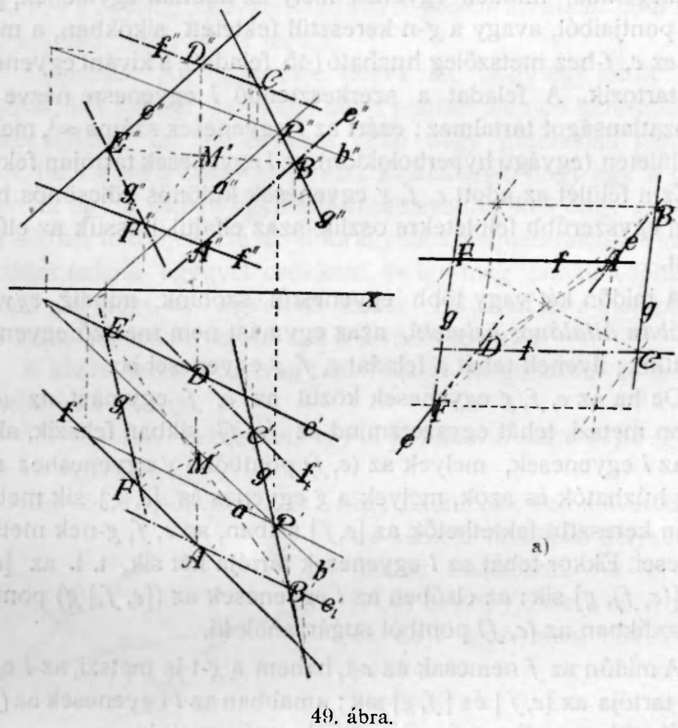
Ha az e, f, g egyenesek ugyanegy **S** síkban fekszenek, akkor az l egyenesek tartója **S**; és az **S** sík minden egyenese (∞^2) metszője az adottaknak. Az előbbi két sík **S**-ben egyesül, mely tehát kettősen számítandó.

Végre ha az e, f, g egyenesek egymást egy S pontban metszik, akkor minden az S pontból kisugárzó l egyenes (ismét ∞^2) metszője a három adottnak. Az l egyenesek tartója akkor minden az S ponton keresztül menő sík.

Visszatérve az eredeti feladathoz, azt látjuk, hogy az l egyenesek között van egy, mely az e-vel, egy, mely az f-fel és egy, mely a g-vel párhuzamos; szerkesszük meg ezeket, azaz oldjuk meg a következő

47. feladatot. Adva van három egyenes, szerkesztendő más három egyenes, mely egy-egy adottal párhuzamos, a másik kettőt pedig metszi.

Megoldás (49. ábra). Legyen e, f, g a három adott, $e_1 \parallel e$, $f_1 \parallel f$, $g_1 \parallel g$ a három keresett egyenes, mely szerkesztendő.



49. ábra.

Szerezzünk előbb fogalmat az új egyenesekről. E végből (49 a. ábra)

az e egyenesen keresztűl $\mathbf{E}_f$, $\mathbf{E}_g$ síkot fektetünk párh. az f, illetve a g-vel
„ f „ „ $\mathbf{F}_g$, $\mathbf{F}_e$ „ „ „ „ g, „ e „
„ g „ „ $\mathbf{G}_e$, $\mathbf{G}_f$ „ „ „ „ e, „ f „

e hat sík egy úgynevezett *parallelepipedont* határol, melynek 12 éle közül három az adott

$ED = e = |\mathbf{E}_f, \mathbf{E}_g|$, $AF = f = |\mathbf{F}_g, \mathbf{F}_e|$, $BC = g = |\mathbf{G}_e, \mathbf{G}_f|$

három a keresett

$AB = e_1 = |\mathbf{F}_e, \mathbf{G}_e|$, $CD = f_1 = |\mathbf{G}_f, \mathbf{E}_f|$, $EF = g_1 = |\mathbf{E}_g, \mathbf{F}_g|$

a többi három-három pedig az ($\mathbf{E}_f$, $\mathbf{F}_g$, $\mathbf{G}_e$), ($\mathbf{E}_g$, $\mathbf{F}_e$, $\mathbf{G}_f$) szögpontokból sugárzik ki. A parallelepipedon négy pár szemben fekvő szögpontját összekötő egyenes, annak négy átlója: (e, f_1) (e_1, f), (f, g_1) (f_1, g), (g, e_1) (g_1, e), ($\mathbf{E}_f$, $\mathbf{F}_g$, $\mathbf{G}_e$) ($\mathbf{E}_g$, $\mathbf{F}_e$, $\mathbf{G}_f$) egymást egy M pontban metszi, mely az átlóknak metszőpontja. Ugyancsak az M pontban metszi egymást az e, e_1; f, f_1; g, g_1 párhuzamos egyenespárakon keresztülmenő sík, mely külön-külön két-két átlót tartalmaz.

Térjünk a feladat descriptiv megoldásához. (49. ábra).

A (g', g'') egyenes tetszés szerinti (P', P'') pontján keresztűl az (e', e'') és az (f', f'') egyenessel párhuzamos (a', a''), (b', b'') egyeneseket húzunk; felkeressük f-nek A metszőpontját az $[a, g]$ síkkal, e-nek D metszőpontját a $[b, g]$ síkkal; az (A', A'') ponton keresztűl menő és az (e', e'')-vel párhuzamos (e_1', e_1'') egyenes, valamint a (D', D'') ponton keresztűl menő és az (f', f'')-vel párhuzamos (f_1', f_1'') egyenes (g', g'')-t a (B', B''), illetve (C', C'') pontban metszi.

Ha még az $A\,D$ átló M felező pontját, melynek M', M'' képei az $A'D'$, $A''D''$ vonaldarabokat felezik a B, C pontokkal összekötjük, akkor ez összekötö egyenesek az e, illetve f egyenest a g_1-nek E, F pontjában metszik. Ezzel mind a három egyenes e_1, f_1, g_1 képei ismeretesek.

Az $ABCDEF$ térhatszögnek 1-ső és 2-dik képe oly tulajdonságú, hogy a szemben fekvő szögpontokon keresztülmenő, úgynevezett *főátlói* egymást egy pontban, az M-nek képeiben metszik. Az ily hatszöget, avagy hatoldalt, B r i a n c h o n-félének nevezük, mert Brianchon franczia mathematikus ismerte fel e hatszögnek azt a tulajdonságát, hogy oldalai egy kúpszeletnek érintői.

48. feladat. Oldjuk meg a 46. feladatot abban az esetben, ha az egyik egyenes egy sík végtelen távol fekvő egyenese, tehát: *szerkesszünk két egyenest metsző és egy síkkal párhuzamos egyenest.*

Megoldás. Az adott síkkal párhuzamos, de különben tetszőleges sík a két adott egyenest két pontban metszi, melyeknek összekötő egyenese a kivánt tulajdonságú. A mint látható jelen feladatnak is ∞^1 megoldása van, és azok az egyenesek, melyek a követelményeket kielégítik, egy *elfajult* egyágu hyperboloidon feküsznek, melyet hyperbolikus-paraboloídnak nevezünk.

E feladat descriptiv megoldása (a két-képsíkos rendszerben) igen egyszerü, ha az adott sík a képsíkok egyikére projiciáló. Ugyanis a keresett egyeneseknek képei azon a képsíkon, melyre az illető sík projiciáló, a sík illető nyomával párhuzamos egyenesek lesznek;

ezen képeiből az egyeneseknek azoknak másik képeit egyszerűen szerkeszthetjük.

Oldjuk meg a 46. feladatot, ha *a)* az egyik egyenes az 1-ső képsíkra merőleges, a többi kettő általános helyzetű, *b)* ha az egyik egyenes az 1-ső, egy másik a 2-dik képsíkra merőleges, a harmadik általános helyzetű vagy párhuzamos a képtengelyhez.

Oldjuk meg a 48. feladatot, ha az adott sík a symmetria-, vagy coincidentiasík (oldalképsik alkalmazásával).

39. Visszapillantás az I. fejezet anyagára. Az eddigiekben megismerkedtünk bizonyos stereometriai feladatok descriptiv megoldásával. Láttuk, hogy a stereometriai feladatok olyanok, melynél vagy már maguk az adatok, vagy a meghatározandó alakzatok nem feküsznek ugyanegy síkban. Szükséges volt tehát, oly eszközöket találni, melyek segélyével nem ugyanegy síkban fekvő geometriai alakzatokat is lehet ábrázolni. Czélszerűnek mutatkozott erre nézve két egymásra merőleges képsíkot használni, melyre a téralakzatokat merőleges sugarakkal projiciáltuk és a két projectiót vagy mint neveztük, képet, a képsíkok metszővonala körül egy síkba forgatni. Az egyesített képsikokon lévő két képből a téralakzatot, úgy szintén a szerkesztésnél fellépő és a keresett alakzatokat mindig reconstruálhattuk.

A pontot és egyenest képeivel, a síkot nyomaival vagy általánosabban két benne fekvő egyenes képeivel ábrázoltuk, melyek mindig biztos fogalmat nyujtottak az ábrázolandó pontról, egyenesről és síkról.

A feladatok, melyekkel foglalkoztunk, olyanok voltak, hogy legnagyobb részénél a *mérést* teljesen nélkülöztük, azaz a térelemek (pont, egyenes és sík) kölcsönös *helyzetére* vonatkoztak, tehát az úgynevezett *helyzet-geometriához* tartoztak. A főfeladatok voltak: pontot, egyenest síkban felvenni; síkot pontokon, egyeneseken keresztül fektetni; egyenes és sík, két vagy három sík közös elemét meghatározni; egyenessel vagy síkkal párhuzamos egyenest és síkot, végre egyeneseket metsző egyenest szerkeszteni. E szerkesztéseknél vonaldarabokat vagy szögeket átvinni (kivévén kezdetben a pontnak a képsíkok iránt adott helyzete felkeresésénél) nem kellett; a szerkesztések mindamellett nem nevezhetők *vonalasoknak,* mert a párhuzamosak huzásánál két vonalzót, a képtengelyre merőlegesek rajzolásánál derékszögü háromszöget alkalmaztunk, a mi a körző és vonalzó használatának felel meg.

A tárgyalt feladatok nagy része (a dült betükkel szedettek) *alapfeladat,* azaz olyan, mely más összetetteknél, mint segédfeladat szerepel. Az összetett feladatokat azonban csak akkor érthetjük és oldhatjuk meg, ha a segédfeladatok megoldásait már könnyüséggel végezhetjük. E végből ajánlandó, hogy az alapfeladatok jól elsajátíttassanak!

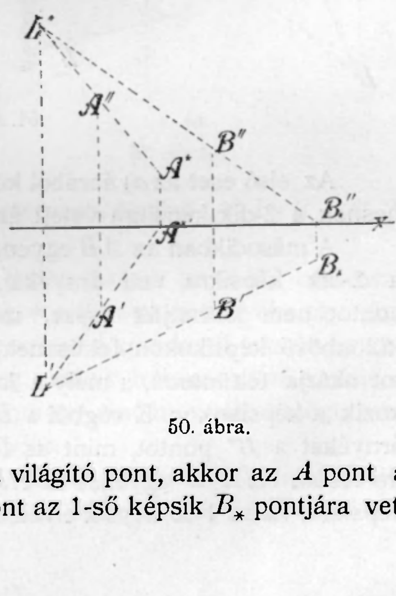
II. FEJEZET.

Árnyékszerkesztések.

Általános megjegyzések. E fejezetben oly pontokkal, véges hosszuságu egyenesekkel, tehát *vonaldarabokkal*, a síknak határolt részeivel, tehát egyenes, vagy görbe vonaloktól bekerített *idomokkal* fogunk foglalkozni, melyek az 1-ső térnegyedben feküsznek. Föltételezzük azonkivül, hogy a téralakzatok a fénysugarakra nézve áthatlanok, úgy hogy egy világító ponttól hozzájuk érkező *fénysugarakat* nem bocsátják keresztül.

E téralakzatokkal e fejezetben bemutatott szerkesztéseket *árnyékszerkesztéseknek* vagy *árnyékolásnak* nevezzük.

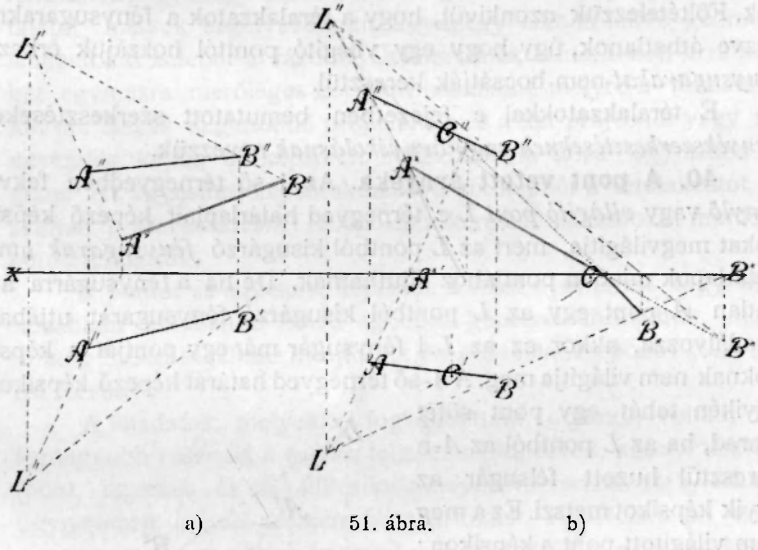
40. A pont vetett árnyéka. Az 1-ső térnegyedben fekvő *fénylő* vagy *világító pont* L e térnegyed határlapjait képező képsíkokat megvilágítja, mert az L pontból kisugárzó *fénysugarak* ama határlapok minden pontjához eljuthatnak. De ha a fénysugárra áthatlan A pont egy az L pontból kisugárzó fénysugarat utjában akadályozza, akkor ez az LA fénysugár már egy pontját a képsíkoknak nem világítja meg. A 1-ső térnegyed határát képező képsíkok egyikén tehát egy pont sötét marad, ha az L pontból az A-n keresztűl huzott félsugár az egyik képsíkot metszi. Ez a meg nem világított pont a képsíkon: *az A pont vetett árnyéka a képsíkra.* Az A pont csak akkor vet árnyékot a képsíkra, ha az L-től mért LA félsugár metszi a képsík egyikét és pedig arra a képsíkra veti az árnyékot, melyet az LA félsugár először metsz, tehát mely metszőpont A-hoz közelebb van.



50. ábra.

Igy, ha az 50. ábrában L a világító pont, akkor az A pont a 2-dik képsík A^* pontjára a B pont az 1-ső képsík B_* pontjára veti az árnyékot. Az A^* pontnak 2-dik képe is A^*, az 1-ső képe x-en van; a B_* pontnak 1-ső képe B_*, és 2-dik képe van x-en.

41. Az egyenes vetett árnyéka. Egy vonal vetett árnyékát a vonal pontjainak vetett árnyékai képezik. Ha a vonal egyenes, akkor az L világító pontból az egyenesek pontjaihoz huzott sugarak egy síkban — az egyenes *fénymenti síkjában* — feküsznek, melynek metszővonalai a képsíkokkal az *egyenesnek a képsíkokra vetett árnyéka.* Hogy ezeket megkapjuk, az egyenes két pontjának keressük vetett árnyékát és azokat egyenessel összekötjük. Erre nézve megkülönböztetünk két esetet; a midőn az egyenes csak egy képsíkra veti árnyékát (51 a. ábra) és midőn részben az egyikre, részben a másikra (51 b. ábra).



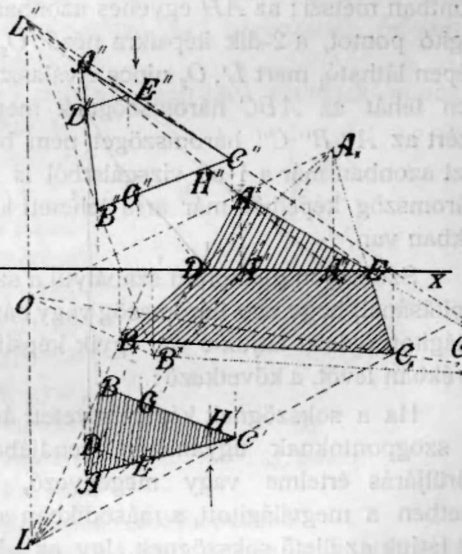
a) 51. ábra. b)

Az első eset az a) ábrából könnyen megérthető: Az AB egyenesnek a 2-dik képsíkra vetett árnyéka A^*B^*.

A másodikban az AB egyenesnek A pontja az 1-ső, B pontja a 2-dik képsíkra veti árnyékát, az A^* és B_* pontra. E két pontot nem köthetjük össze, mert a képsíkok egyesítése előtt különböző képsíkokon feküsznek, és rajzunk mindig azt az állapotot akarja feltüntetni, a mely a képsíkok egyenesítése előtt mutatkozik a képsíkokon. E végből a B pontnak a 2-dik képsíkra vetett árnyékát a B^* pontot, mint az LB egyenesnek 2-dik nyomát felkeressük. Az A^*B^* egyenes az AB-nek vetett árnyéka volna a 2-dik képsíkra, ha az 1-ső képsík elvétetnék: míg ez ott van, az AB egyenesnek csak az AC része veti árnyékát a 2-dik képsíkra és a CB része az 1-sőre. Igy tehát az AB egyenesnek vetettárnyéka a képsíkokra az $A^*C_*B_*$ kiszögellő vonallal lesz ábrázolva, mely tulajdonképen az $[L, AB]$ siknak, az AB fénymenti síkjának két nyoma.

Ezt tekintve az AB egyenesnek 2-dik nyoma az A^* C_*-on és 1-ső nyoma a C_* B_*-on lesz, a mit pontosabb szerkesztésénél célszerű felhasználni. — Ha az AB egyenes meghosszabítva az L ponton megy keresztül, tehát az AB egyenes *fénymentén* van, akkor annak vetett árnyéka a képsíkra vagy bárhová, egy pont.

42. Egy háromszög saját- és vetett árnyéka. Az ABC háromszögnek vetettárnyékát az egyes képsíkokra a háromszög oldalainak vetett árnyékai, az A^* B^* C^*, A_* B_* C_* háromszögek kerítik be. Az ABC háromszög vetett árnyéka azonban az (52. ábra) A^* D_* B_* C_* E_* sokszögtől bekerített képsíkrészszel lesz ábrázolva, mert a DE egyenessel ketté osztott ABC háromszögnek ADE része a 2-ik, $DECB$ része az 1-ső képsíkra veti árnyékát. Az AB és AC oldalnak D, E pontjai, melyek a képtengelyre vetik árnyékukat, az AB, AC oldalaknak megszerkesztett árnyékaiból A^* D_* B_*, A^* E_* C_*-ből lettek meghatározva.



52. ábra.

Az L világító pont vagy benne fekszik az ABC háromszög síkjában, azaz a háromszög *fénymentén* van és árnyéka egy egyenes; vagy pedig a világító pont annak síkján kívül fekszik és csak egyik oldalát világíthatja meg, míg a másik, mint mondani szokás, árnyékban van. Ez az árnyék, minthogy magán a háromszögön mutatkozik: *a háromszög sajátárnyéka.*

Ha az ABC háromszög síkja dült, akkor annak, mint tudjuk, csak egy oldala látszó akár az 1-ső, akár a 2-dik képsíkra nézve;

ha ellenben feszített, akkor szükségkép az egyik képsíkra nézve a megvilágított, a másikra a sajátárnyékban levő oldala látszó.

Hogyan lehet azt az 52. ábrában megállapítani? Az LA fénysugár 1-ső projiciáló síkja az ABC háromszöget az AG egyenesben metszi. Az O_1G látósugár és az LG világítósugár az AG egyenest elválasztja, mert a 2-dik képben az L'' pont és G ponton keresztülmenő és az 1-ső képsíkra merőleges egyenesnek O_1 végtelen távol fekvő pontja az $A'' G''$ egyenestől el van választva. Az 1-ső képsíkra nézve az ABC háromszögnek sajátárnyékban levő oldalát látjuk, a mit azzal tüntetünk ki, hogy az $A' B' C'$ háromszöget, úgy mint a vetett árnyékot *sraffvonalakkal* vonjuk be.

Az LA fénysugárnak 2-dik projiciáló síkja a BC oldalt egy H pontban metszi; az AH egyenes azonban nem választja el az L világító pontot, a 2-dik képsíkra néző O_2 szemétől, mint az az 1-ső képen látható, mert L', O_2 nincs elválasztva $A' H'$-től. A 2-dik képben tehát az ABC háromszögnek megvilágított oldalát látjuk és ezért az $A'' B'' C''$ háromszöget nem borítjuk be sraffvonalakkal. Ezt azonban már a 1-ső vizsgálatból is tudhattuk, mert az ABC háromszög képeiből már arra lehetett következtetni, hogy feszített síkban van.

Szolgáljon gyakorlati szabályul a szerkesztőnek annak megállapításánál, hogy egy háromszög vagy bármely síksokszögnek megvilágított oldalát látjuk-e az egyik képsíkra nézve, vagy a sajátárnyékban levőt, a következő:

Ha a sokszögnek képét és vetett árnyékát az egyik képsíkon a szögpontoknak ugyanazon rendjében körüljárjuk, akkor a körüljárás értelme vagy megegyező, vagy ellenkező; az első esetben a megvilágított, a másodikban a sajátárnyékban levő oldalát látjuk az illető sokszögnek. Igy az $A' B' C'$, $A_* B_* C_*$ háromszögeknél a körüljárás értelme különböző, $A'' B'' C''$, $A^* B^* C^*$-nál megegyező!

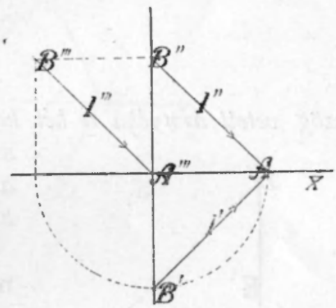
A *szerkesztés pontossága* kedvéért még csak egy körülményre akarunk figyelmeztetni, t. i. hogy az $A^* B^* C^*$, $A_* B_* C_*$ háromszögek $A^* A_*$, $B^* B_*$, $C^* C_*$ szögpontjait összekötő egyenesek az $L'' L'$ egyenesnek abban az O pontjában találkoznak, mely az L', L'' pontoktól ép oly távolságra van, mint L-nek tengelyképe L_x az L'', L' pontoktól.

Ugyanis, ha az A^*. A_* pontoknak tengelyképe $A^{*\prime}$, A_*'' akkor $L''L_x : A^*A^{*\prime} = L_xA_*'' : A^{*\prime}A_*'' = L'A_* : A^{*\prime}A_* = OL' : A^*A^{*\prime}$, a mi állításunkat igazolja.

43. A 45° világítás. Az árnyékszerkesztések sokkal egyszerűbbé válnak, ha az L világító pontot, nem úgy mint az előbbiekben véges távolságban, hanem végtelen távol levőnek képzeljük. A világító sugarak ekkor párhuzamosak és ezért a megvilágítást *párhuzamos sugarúnak*, míg az előbbit *központinak* nevezzük. Az árnyékszerkesztések főként azért egyszerűsbbülnek, mert *párhuzamos sugarú világításnál párhuzamos és egyenlő egyenes daraboknak vetett árnyékai egy síkra, párhuzamosak és egyenlők*, minthogy fénymenti síkjaik párhuzamosak.

A világító pont ugyan bármily helyzetű l egyenesnek lehet végtelen távol fekvő pontja, úgy hogy a fénysugarak l-lel párhuzamosan haladóknak veendők, de részint a szerkesztések egyszerűsítése szempontjából, részint azért, hogy az 1-ső, 2-dik és az oldalképsík egyenlőkép legyen megvilágítva, az l egyenesnek helyzetét következőkép szokás megadni:

Az l egyenesnek 1-ső térnegyedben levő részének mindkét képe l', l'' az x képtengelyhez 45° szög alatt hajoljék (53. ábra) de úgy, hogy $l' \perp l''$ és az $l''x$, $l'x$ szög szárai a csúcstól balra haladjanak. Az l egyenes e helyzeténél annak oldalképe l''' az y és z tengelylyel szintén 45°-u szöget képez. Az l egyenes tehát párhuzamos a symmetriasíkkal $\mathbf{H}_1$-gyel; $\mathbf{H}_1$ fénymenti sík és így minden pontjának vetettárnyéka a képtengelyen van. Az ily sugarakkal történő megvilágítást: *45° világításnak* szokás nevezni.

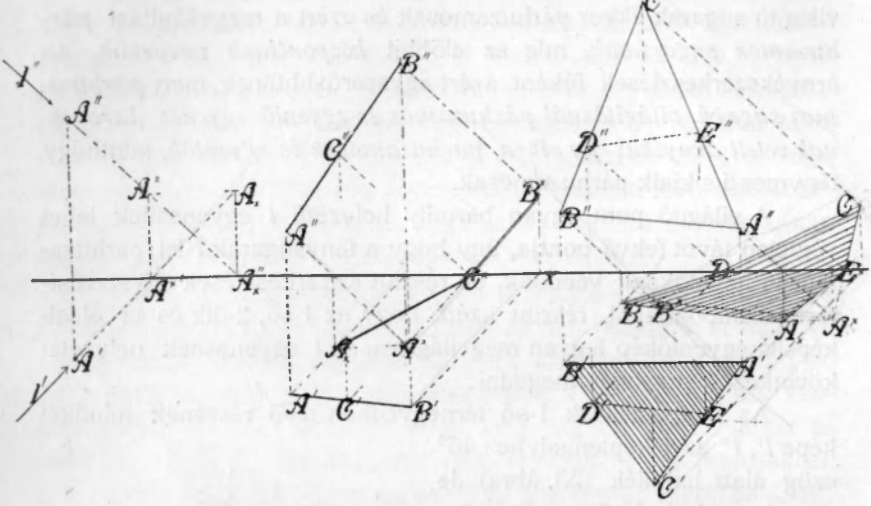


53. ábra.

A következő árnyékszerkesztéseknél mindig 45° világítást tételezünk fel.

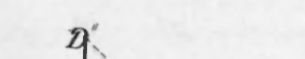
44. A pont-, az egyenes- és a háromszög vetett árnyéka 45° világításnál. Az 54. ábra az A pontnak, az AB egyenesnek és az ABC háromszögnek árnyékszerkesztését tünteti elő.

Az A pont árnyékát a 2-dik síkra A^* pontra veti. — Az AB egyenes AC és CB részének árnyéka az 1-ső illetve a 2-dik képsíkon van; C pont az egyenes symmetriapontja. — Az ABC háromszög $A_* B_* C^*$ vetett árnyékkal van ábrázolva; a háromszög DE egyenese a symmetriasíknak metszése a háromszög síkjával. A háromszög $A_* B_* C_*$ és $A^* B^* C^*$ vetett árnyékai a két képsíkra, perspektiv helyzetű affin háromszögek; a képtengely az affinitási tengely, a projiciáló sugarak ezzel párhuzamosak, tehát a háromszögek területei egyenlők. Ennélfogva; *45⁰-u világításnál egy síksok-*



54. ábra.

szög vetett árnyéka a két képsíkra, két egyenlő területű affin sokszög; a képtengely az affinitásitengely, a projiciáló sugarak pedig ezzel párhuzamosak.



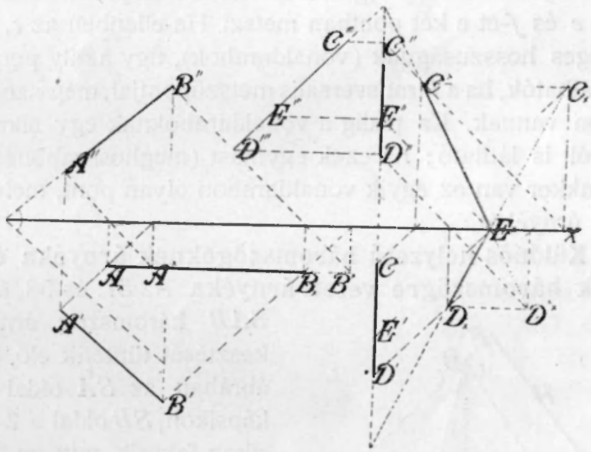
55. ábra.

45. Különös helyzetű egyeneseknek vetett árnyéka az első és a második képsíkra. Egy az 1-ső képsíkkal párhuzamos AB egyenesnek (55. ábra) vetett árnyéka az 1-ső képsíkra keresztül megy az egyenesnek 1-ső nyomán, tehát párhuzamos az egyenes 1-ső képével $A'B'$-vel. Ezért az AB egyenesnek vetett árnyékát megkapjuk, ha a B pontjának B_* árnyékán keresztül $A'B'$-vel párhuzamos egyenest huzunk x-ig és innen A pontnak A^* árnyékáig.

Ugyanígy különös helyzetü az 1-ső képsík irányában a reá merőleges CD egyenes. Ennek az 1-ső képsíkra vetett árnyéka párhuzamos a fénysugárnak 1-ső képével, s mert CD a 2-dik képsíkkal párhuzamos, az erre vetett árnyéka párhuzamos $C''D''$.

Egybefoglalva a két esetet általánosabban mondhatjuk: *Ha egy egyenes vonaldarab párhuzamos egy síkkal, akkor párhuzamos világításnál a síkra vetett árnyéka párhuzamos és egyenlő magával a vonaldarabbal, valamint annak e síkra vonatkoztatott orthogonális projectiójával. Ha pedig az egyenes merőleges egy síkra, akkor e síkra vetett árnyéka párhuzamos a fénysugárnak e síkra vonatkozó orthogonális projectiójával. Párhuzamos egyeneseknek ugyanegy síkra, vagy párhuzamos síkokra vetett árnyékuk párhuzamos, mert fénymenti síkjaik párhuzamosak.*

Az 56. ábra a $\mathbf{H}_1$ symmetriasíkkal párhuzamos AB és egy arra merőleges CD egyenesnek vetettárnyékát az 1-ső és 2-dik képsíkra ábrázolja.



56. ábra.

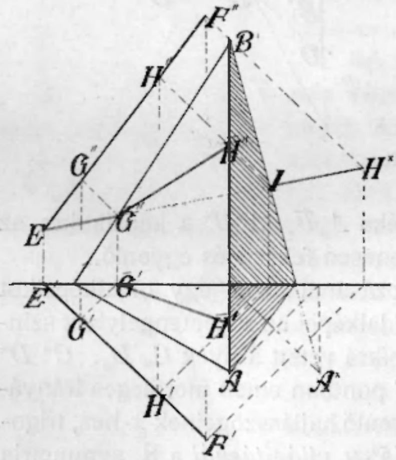
Az AB egyenes vetettárnyéka A_*B_*, A^*B^* e képsíkokra az x képtengelylyel párhuzamos egyenesen fekszik és egyenlő.

A CD képeinek meghatározásánál azon egy oldalképsíkot fektettünk át. A fénysugaraknak oldalképei az x képtengelyhez szintén 45^0 alatt hajlanak. A két képsíkra vetett árnyék $C_* D_*$, $C^* D^*$ egyenlő és az x képtengelyre az E pontban emelt merőleges irányában symmetrikus és azonkivül egyenlő hajlásszögeinek x-hez, trigonometriai tangense 2. Igy tehát: *45^0-u világításnál* a $\mathbf{H}_1$ symmetria síkkal párhuzamos, vagy arra merőleges határolt egyenesnek az 1-ső és 2-dik képsíkra vetett árnyéka egyenlő. Ha az egyenes a $\mathbf{H}_1$-gyel párhuzamos, akkor az árnyékok ugyanegy, a képsíkkal párhuzamos egyenesen feküsznek; ha pedig az egyenes a $\mathbf{H}_1$-re merőleges, akkor az árnyékok a képtengely irányában symmetrikusak és hajlászögüknek trigon. tangense 2.

46. Pontoknak egymásra vetett árnyékai. Az 55. ábra AB és CD egyenesének az 1-ső képsíkra vetett árnyékai egymást metszik. E metszőpont E_* $\bar{E}_*$ az AB és CD egyenes egy pontjának $\bar{E}$, illetve E-nek vetett árnyéka. Minthogy e két pontnak közös árnyéka van, az egyik pont a másikra veti árnyékát; és pedig az E pont veti $\bar{E}$-re, mert az E van közelebb a fényforráshoz L_∞-hez. E szerint a CD egyenes E pontja veti árnyékát az AB egyenes $\bar{E}$ pontjára.

Ha két egyenes e, f egyike sem párhuzamos az l fénysugárral, akkor mindig van az egyikben oly pont, mely a másiknak egy pontjára veti árnyékát. Az e, f egyeneseknek az l-lel párhuzamos t transversálisa e és f-et e két pontban metszi. Ha ellenben az e, f egyenesek véges hosszuságuak (vonaldarabok), úgy az ily pontok csak akkor találhatók, ha a t transversalis metszőpontjai, még azon vonaldarabokon vannak. Ez pedig a vonaldaraboknak egy síkra vetett árnyékából is látható: ha ezek egymást (meghosszabbítás nélkül) metszik, akkor van az egyik vonaldarabon olyan pont, mely a másikra veti árnyékát.

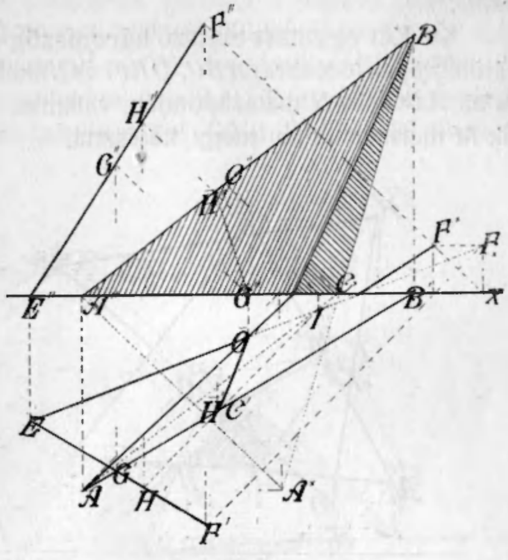
47. Különös helyzetű háromszögeknek árnyéka és egyeneseknek háromszögre vetett árnyéka. Az 57. és 58. ábrák az SAB háromszög árnyékszerkesztését tüntetik elő. Mindkét ábrában az SA oldal az 1-ső képsíkon, SB oldal a 2-dik képsíkon fekszik, míg az AB oldal az 57. ábrában a képtengelyre merőleges, az 58-nál pedig egy általános helyzetű egyenes.



57. ábra.

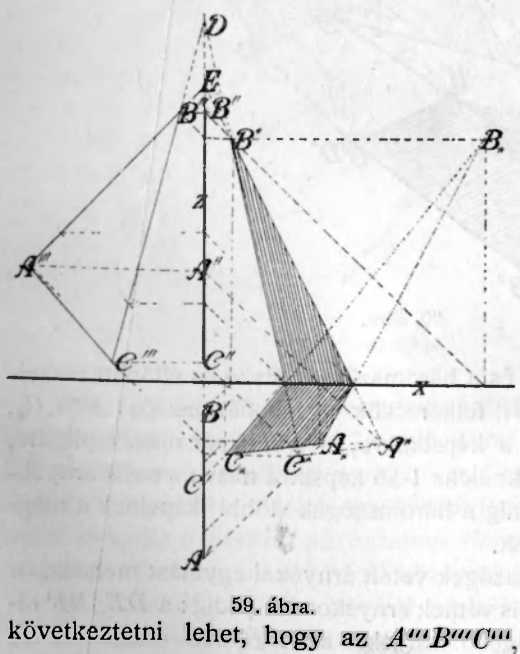
Az A pontnak a 2-dik képsíkra vetett árnyéka A^*, tehát az AB egyenesnek ugyanarra a képsíkra vetett árnyéka A^* B. Ez a képtengelyt egy C_* pontban metszi, és az A C_* B kiszögellő vonal vetett árnyéka az AB egyenesnek. Az SAB háromszög vetett árnyékának egy részét elfödik a háromszög képei, s csak a sraffvonalakkal bevont rész látható. (S az E' és G' között van!) Az ABS dült síknál a megvilágított oldalt látjuk mindkét képsíkra nézve, míg a feszített síknál a 2-dik képsíkra látszó oldal árnyékban van, mert az $A''BS$, A^*BS háromszögek (körüljárási) értelme ellenkező. (58. ábra.)

Mindkét háromszögre EF egyenes veti árnyékát. Az 57. ábrában az EF-nek a 2-dik képsíkra vetett árnyéka EIH^*, mely BC, BC_*-t a G és I pontokban metszi, jeléül annak, hogy EF-nek G pontja a BS-nek G pontjára, és H pontja BA-nak H pontjára veti árnyékát. Ugyanígy az 58. ábrában az EF egyenesnek az 1-ső képsíkra vetett árnyéka EF_*, mely AS, AC_*-t a G, I pontokban metszi, úgy, hogy az EF-nek G, H pontja az AS, AB-nek G, H pontjaira veti árnyékát. (S a G', C_* között!)



58. ábra.

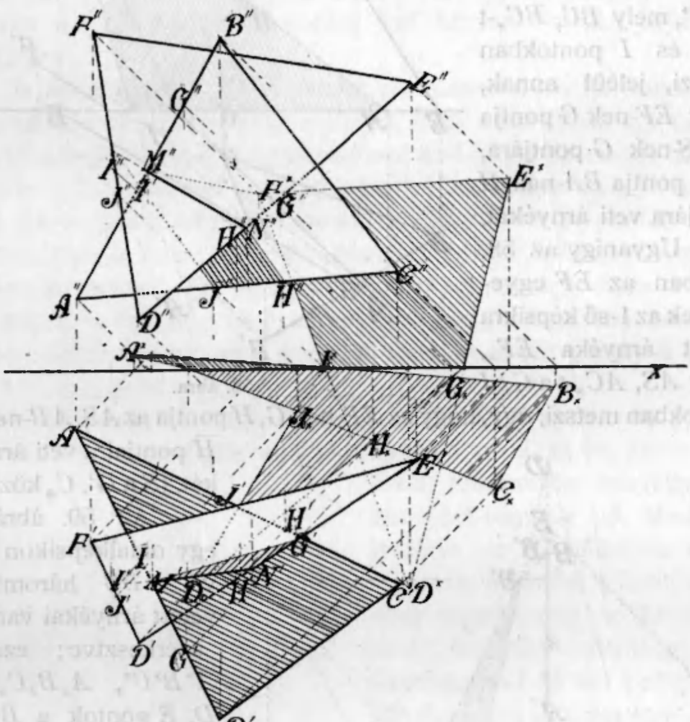
Az 59. ábrában egy oldalképsíkon fekvő ABC háromszög vetett árnyékai vannak szerkesztve; ezek: $A^*B^*C^*$, $A_*B_*C_*$. A D, E pontok a BC és AB oldalak 2-ik nyomai; ezen mennek keresztül a B^*C^*, A^*B^* vetett árnyékok; s mert a B''', B^* pontok egyenlő távolságra vannak a z tengelytől, azért a $B'''ED$, B_*ED háromszögek területei egyenlők. Ebből már következtetni lehet, hogy az $A'''B'''C'''$, $A^*B^*C^*$ háromszögek



59. ábra.

területei is egyenlők, azaz: *Egy oldalképsíkban fekvő sokszög területe egyenlő a sokszög 1-ső (és 2-dik) képsíkra vetett árnyékának területével.*

48. Két egymást metsző háromszög árnyékolása. Az adott háromszögek (60. ábra) ABC, DEF. MN metszővonaluk az ED oldal és az ABC sík N metszőpontján, valamint az AB oldal és a DEF sík M metszőpontján megy keresztül.

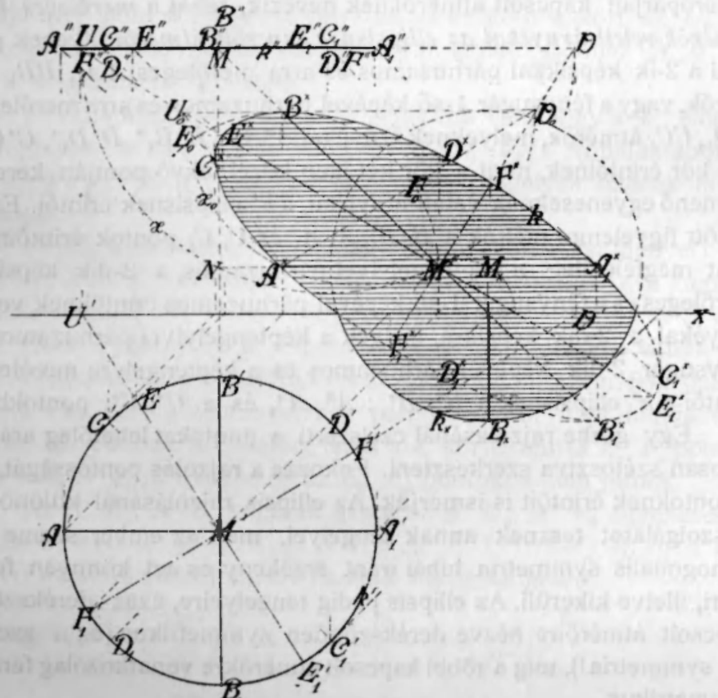


60. ábra.

E metszővonalnak és a háromszögek látszó és elfödött részeinek meghatározása után felkeressük a két háromszög $A^*B_*C_*$, $D_*E^*F^*$ vetett árnyékát a képsíkokra, melyből már megállapítható, hogy az ABC feszített síknak az 1-ső képsíkra nézve a saját árnyékban levő oldala látszó, míg a háromszögek többi képeinek a megvilágított oldalai látszanak.

Minthogy a háromszögek vetett árnyékai egymást metszik, a háromszögek egymásra is vetnek árnyékot. És pedig: a DE, DF oldalak D_*F^*, D_*E^* kiszögellő árnyékai az AB, AC oldalak A^*B_*

A^*C_* kiszögellő árnyékait a $H_*G_*J_*I_*$ pontokban metszik. Ezen pontokon keresztül menő fénysugarak az illető oldalakat a $H, \bar{H}$; $G, \bar{G}$; $J, \bar{J}$; $I, \bar{I}$ pontokban metszik s ezért az AB egyenesnek MG darabja az EDF sík MG egyenesére veti árnyékát, míg a DE egyenesnek HN darabja és a DF egyenesnek JI darabja az ABC sík $N\bar{H}$, $J\bar{I}$ egyeneseire veti árnyékát. Ezeknek meghatározása után a háromszögek képeinek árnyékban levő részét sraffvonalakkal vonjuk be.



61. ábra.

49. Egy képsíkkal párhuzamos síkban fekvő körnek vetett árnyéka. Az r sugaru kör (61. ábra) legyen az 1-ső képsíkkal párhuzamos, ennélfogva sugarainak az 1-ső képsíkra vetett árnyékai egyenlők, s ezért *egy körnek (vagy bármily sokszögnek) vetett árnyéka a síkjával párhuzamos síkra egy vele congruens kör (sokszög).* Ha tehát a k kör M középpontjának vetett árnyéka az 1-ső képsíkra M_*, akkor e pontból a k kör r sugarával leírt k_* kör k-nak az 1-ső képsíkra vetett árnyéka.

A k körnek a 2-dik képsíkra vetett árnyéka k^* *(igazolás nélkül állitjuk)* egy ellipsis; ennek középpontja M-nek vetett árnyéka M^*. A k kör párhuzamos húrjainak felező pontjai a reájok merőleges körátmérőn feküsznek; ezért a párhuzamos húroknak és azok felezőpontjainak vetett árnyéka, a k^* ellipsisnek párhuzamos húrjai és azoknak felezőpontjai lesznek, mely felezőpontok egy ellipsisátmérőn feküsznek. Az egymásra merőleges körátmérők vetett árnyékai tehát oly ellipsisátmérők lesznek, melyeknek bármelyikével párhuzamos húrok a másiktól feleztetnek. Egy ellipsisnek ily tulajdonságú átmérőpárjait kapcsolt átmérőknek nevezik, tehát a *merőleges körátmérők vetett árnyékai az ellipsisnek kapcsolt átmérői.* Ilyenek például a 2-ik képsíkkal párhuzamos és arra merőleges AA_1, BB_1 átmérők, vagy a fénysugár 1-ső képével párhuzamos és arra merőleges DD_1, CC_1 átmérők, melyeknek árnyékai $A^*A_1^*$, $B^*B_1^*$, $D^*D_1^*$, $C^*C_1^*$. A k kör érintőinek, mint a kör két igen közel fekvő pontján keresztül menő egyeneseknek vetett árnyékai, a k^* ellipsisnek érintői. Ezek között figyelemre méltók a B, B_1, A, A_1 és C, C_1 pontok érintőinek, mint megfelelőleg a képtengelylyel párhuzamos, a 2-dik képsíkra merőleges és a fénysugár 1-ső képével párhuzamos érintőknek vetett árnyékai a 2-dik képsíkra, melyek a képtengelylyel párhuzamos, a fénysugár 2-dik képével párhuzamos és a képtengelyre merőleges érintői a k^* ellipsisnek a B^*, B^*_1; A^*, A^*_1 és a C^*, C^*_1 pontokban.

Egy görbe rajzolásánál czélszerü a pontokat lehetőleg aránylagosan szétosztva szerkeszteni. Fokozza a rajzolás pontosságát, ha a pontoknak érintőit is ismerjük. Az ellipsis rajzolásánál különösen jó szolgálatot tesznek annak tengelyei, mert az ember szeme az orthogonalis symmetria hibái iránt érzékeny és azt könnyen felismeri, illetve kikerüli. Az ellipsis pedig tengelyeire, azaz derékszögű kapcsolt átmérőire nézve derékszögűen symmetrikus (ez a szokásos symmetria!), míg a többi kapcsolt átmérőkre vonatkozólag ferdén symmetrikus.

A k^* ellipsis tengelyeit megszerkesztendő, gondoljuk meg, hogy annak átmérői, a k kör átmérőinek 2-dik nyomait, melyek a k'' egyenesen feküsznek, az M^* középponttal kötik össze.

Ha az N pont a k'' egyenes alatt az $M'M''$ egyenesen k''-tól M_xM' távolságra van ($M'N // x$), akkor az N ponton keresztülmenő sugarak metszőpontjai k''-vel, a k kör oly átmérőinek 2-dik nyomai, melyeknek 1-ső képe eme sugarakkal párhuzamos. Igy tehát bármely körátmérő vetett árnyékát a 2-dik képsíkra megkapjuk, ha az N-en keresztülmenő és 1-ső képével párhuzamos egyenesnek metsző pontját a k''-vel, az M^* ponttal összekötjük. Ezt véve egy az $N M^*$

pontokon keresztülmenő $\varkappa$ kör, melynek középpontja a k'' egyenesen fekszik, ezt az egyenest oly két pontban, U, V-ban metszi, melyeknek összekötő egyenesei M^*-gal k^*-nak tengelyei, mert ezek az $UM^* \perp VM^*$ egyenesek az $E\,E_1$, $F\,F_1$ egymásra merőleges körátmérőknek vetett árnyékai. Ezzel tehát k^*-nak tengelyei meg vannak határozva és az $E\,E_1$, $F\,F_1$ végpontoknak vetett árnyékai, azoknak végpontjait adják.

45° világításnál az N pont használatát kikerülhetjük, ha az $A^*\,M^*$ pontokon keresztül egy $\varkappa_0$ kört fektetünk, melynek középpontja a B^* pont érintőjében van; ez az érintő a $\varkappa_0$ kört az U_0, V_0 pontokban metszi, melyek, mint könnyen látható, szintén az $M^*\,U$, $M^*\,V$ tengelyeken feküsznek.

Evvel a szerkesztéssel az az előnyünk van, hogy a k^* ellipsis féltengelyeit is megkapjuk, mert az U_0B^*, V_0B^* vonaldarabok a V_0, illetve az U_0 ponton keresztül menő tengelyek felének hosszúságai.

Ennek kimutatása azonban egy kis meggondolást igényel!

Az E és F pontoknak E^* és F^* vetett árnyékai a k^* tengelyeinek végpontjai.

Ezek a pontok az E, F pontoknak az 1-ső képsíkra vetett E_*, F_* árnyékaival a képtengelyhez párhuzamos egyeneseken feküsznek. Toljuk a k_* kört a képtengelyhez párhuzamosan tova mindaddig, míg az M_* pont az A^* pontba, tehát a k_* kör és ennek E_*, F_* pontjai a $k_0 = E_0\,B^*\,F_0\,M^*$ körbe és az E_0, F_0 pontokba nem jutnak.

Az $A^*\,E_0$, $A^*\,F_0$ sugarak ekkor az $A^*\,U_0$, $A^*\,V_0$ egyenesekre kerülnek, mert pl. az $A^*\,U_0 \,//\, N\,U \,//\, M'\,E'\,U' \,//\, M_*\,E_* \,//\, A^*E_0$; s ezért az ábrában mutatkozó hasonló háromszögek az

$$M^*\,E^* = r.\frac{M^*\,U_0}{A^*\,U_0} = r.\frac{A^*\,V_0}{A^*\,U_0} = r.\frac{r}{B^*\,U_0}$$

$$M^*\,F^* = r.\frac{M^*\,V_0}{A^*\,V_0} = r.\frac{A^*\,U_0}{A^*\,V_0} = r.\frac{r}{B^*\,V_0}$$

kifejezéseket adják. De tekintve, hogy

$$r^2 = B^*\,U_0.\,B^*\,V_0$$

következik:

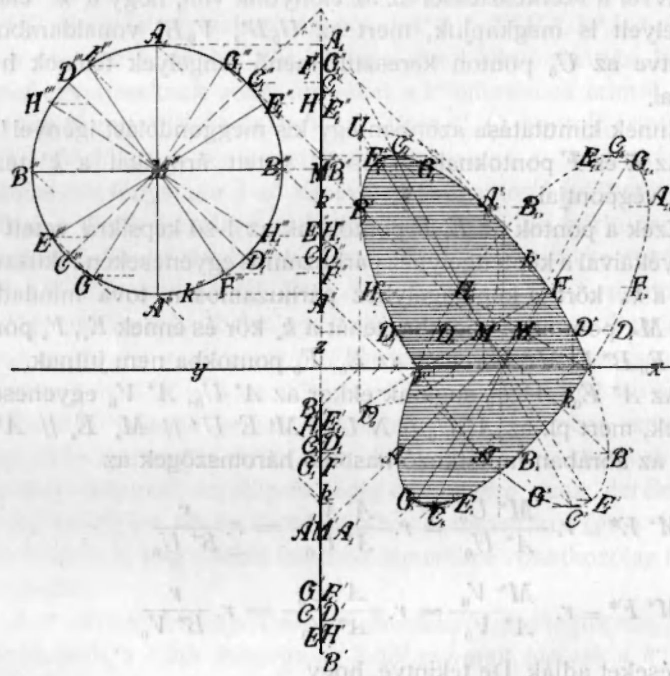
$M^*\,E^* = B^*\,V_0$ *és* $M^*\,F^* = B^*\,U_0$ a mi fönnebbi állításunkat igazolja.

Megemlítést érdemel, hogy *45°-u világításnál az egyik képsíkkal párhuzamos síkban fekvő kör vetett árnyéka a másik képsíkra egy olyan ellipsis, melynek féltengelyei, a kör sugarának (külső és* *belső) folytonos osztásából származó vonaldarabokkal egyenlők,* mert

$$U_0 B^* = \frac{r}{2}(-1+\sqrt{5}),\ V_0 B^* = \frac{r}{2}(1+\sqrt{5})$$

mi a 61. ábrából könnyen igazolható.

50. Egy oldalképsíkban fekvő kör vetett árnyéka. A k kör 1-ső, 2-dik és oldalképe k', k'', k'''; középpontja M; az 1-ső és 2-dik képsíkra merőleges átmérői AA_1, BB_1. k-nak a 2-dik képsíkra vetett árnyéka k^* a k'' és k''' képekből lett meghatározva. Az M középpontnak és az AA_1, BB_1 átmérőknek vetett árnyékai k^*-nak M^* középpontja és $A^*A_1^*$, $B^*B_1^*$ kapcsolt átmérői. (62. ábra.)



62. ábra.

A B_1 pont érintője párhuzamos a 2-dik képsíkkal, tehát B_1^* pont érintőjét használva, k-nak tengelyeit következőkép határozzuk meg: Az M^*, A_1^* pontokon keresztül menő $\varkappa_0$ kör, melynek középpontja a B_1^* érintőjén fekszik, ezt az érintőt az U_0, V_0 pontokban metszi; $M^* U_0$, $M^* V_0$ lesz k^*-nak két tengelye helyzetre nézve; az F^*, E_1^*; F^*, F_1^* azoknak végpontja, ha $E^* M^* = M^* E_1^* = B_1^* V_0$

és $F^* M^* = M^* F_1^* = B^*_1 U_0$. Az $E E_1$, $F F_1$ derékszögű körátmérők képei, melyek k^* tengelyeit szolgáltatják, azoknak 2-dik nyomain (k'', $E^* E_1^*$), (k'', $F^* F_1^*$) mennek keresztül.

Lényeges pontjai k^*-nak, azaz oly pontok, melyeknek ismerete k^* *helyzetét* tekintve a megrajzolás szempontjából kivánatos a C_1^*, C^* legmagasabb és legalacsonyabb (tehát a *culmináló*) pontok. A k körnek $\mathbf{H}_1$ symmetriasíkra merőleges és azzal párhuzamos $C C_1$, $D D_1$ átmérői szolgáltatják a culmináló pontokon keresztülmenő $C^* C_1^*$ és a képtengelyhez párhuzamos $D^* D_1^*$ átmérőjét k^*-nak. A $C C_1$, $D D_1$ egymásra merőleges átmérőknek, a $\mathbf{H}_1$ irányában jelzett helyzete folytán, az 1-ső és a 2-dik képsíkra vetett árnyékai egyenlők: $C^* C_1^* = C_* C_{1*}$, $D^* D_1^* = D_* D_1*$; az előbbiek symmetrikusak, az utóbbiak ugyanegy egyenesen párhuzamosak az x képtengelyhez, s mert ezek a k^* k_* vetett árnyékoknak kapcsolt átmérői, azért k^*, k_* ellipsisek congruensek és a képtengelyre merőleges u^* egyenesre vonatkozólag symmetrikusak.

A k^* ellipsis $C^* C_1^*$, $D^* D_1^*$ kapcsolt átmérőiből és $E^* E_1^*$, $F^* F_1^*$ tengelyeiből tehát egyszerűen meghatározhatók k_*-nak C_* C_{*1}, D_* $D_{1}*$ kapcsolt átmérői és G_* G_{1*}, H_* $H_{1}*$ tengelyei, melyek amazokkal az M^* M_* pontpárnak u^* symmetriavonalára, symmetrikusok. Ezek az utóbbi tengelyek azonban nem az $E E_1$, $F F_1$ derékszögű körátmérőknek vetett árnyékai az 1-ső képsíkra, hanem az ezekkel a $C C_1$ átmérőre vonatkozólag symmetrikus $G G_1$, $H H_1$ körátmérőknek.

Az ábra többi része nem kíván magyarázatot, de mint említésre méltót megjegyezzük, hogy *45° világításnál egy oldalképsíkban fekvő körnek az 1-ső és 2-dik képsíkra vetett árnyékai egy az x képtengelyre merőleges egyenesre vonatkozólag symmetrikus és a körrel egyenlő területű ellipsisek, melyeknek fél tengelyei: a körsugárnak, r-nek, a folytonos osztás szerint felosztott belső nagyobb része b, és b + r.*

51. Visszapillantás a II. fejezetre. E fejezetben pontok, egyenesek- és síkidomoknak vetett árnyékait a képsíkokra tanultuk szerkeszteni.

Az eljárás abban állott, hogy egy véges vagy végtelen távol levő világító pontból L-ből a téralakzat pontjaihoz haladó fénysugaraknak felkerestük metszőpontjait pl. az 1-ső képsíkkal, mely metszőpontok a téralakzat pontjainak vetett árnyékai az 1-ső képsíkra.

A végzett szerkesztés a téralakzat pontjainak projiciálási műveletére emlékeztet. A téralakzatnak vetett árnyékát tehát úgy foghatjuk fel, hogy az a téralakzat projectiója (képe) egy véges, vagy végtelen távol fekvő L pontból egy síkra. A midőn L véges távolságban van, akkor a nyert projectiót és a projiciálás műveletét *centrálisnak*, a másik esetben, a midőn L végtelen távol van, tehát a projiciáló sugarak párhuzamosak, a származó projectiót és a projiciálás műveletét *párhuzamosnak* nevezzük. Az orthogonalis projectiók a párhuzamosaknak annyiban képezik különös esetét, hogy ennél a projiciáló sugarak a képsíkra merőlegesek, míg az általános párhuzamos projiciálásnál a projiciáló sugaraknak a képsíkhoz tetszés szerinti hajlásszögük lehet. Tekintve a projiciáló sugaraknak hajlását a képsíkhoz, a derékszögű projectió elnevezés mintájára, a párhuzamos sugarakkal eszközölt projiciálást *ferdeszögű projiciálásnak* is szokás nevezni.

Ennélfogva egy téralakzat vetett árnyéka egy síkra párhuzamos világítás mellett, annak ferdeszögű projectiója az illető síkra.

Ebből a már tanultak alapján több általános tételre lehetne következtetni, melyek közül csak e kettőt említjük:

Egy síksokszög orthogonalis és ferdeszögű projectiója egy képsíkra két perspectiv helyzetű affin sokszög; a sokszög síkjának metszővonala a képsíkkal az affinitási tengely, a ferdén projiciáló sugarak orthogonalis projectiója, az affin sokszögek projiciáló sugarai.

Ha egy síksokszög ferdeszögű projectióját két merőleges síkra képezzük és e síkokat s metszővonaluk körül forgatva egyesítjük, akkor a sokszögnek két ferde projectiója perspectiv helyzetű affin sokszögeket adnak; a síkok s metszővonala az affinitási tengely. (E tétel még akkor is igaz marad, ha a képsíkok nem merőlegesek!)

Ha e fejezet utolsó szerkesztésére gondolunk és tekintetbe veszszük, hogy egy koczkának három egy szögpontba ütköző lapja oly helyzetű, mint a használt három képsík, továbbá, hogy 45^0 világításnál a fénysugarak helyzete e képsíkok irányában olyan, mint a koczka egy bizonyos átlójának helyzete ama három koczka-lap irányában, akkor következtethető:

Ha egy koczka egyik lapján fekvő kört a koczka egyik átlójával párhuzamos sugarakkal a többi lapokra projiciáljuk, úgy a projectiók közül egy kör, a többi négy kongruens ellipsis lesz; ennek félmelléktengelye a körsugárnak a folytonos osztás szerint felosztott nagyobb része és fél főtengelye a melléktengely és körsugár összege.

III. FEJEZET.

Egymásra merőleges egyenesek és síkok ábrázolása.

52. A merőlegesekre vonatkozó stereometriai tételek és értelmezések. Az előbbiekben gyakran szólottunk egy síkra merőleges egyenesről és síkról. Noha még nem bocsátkoztunk annak magyarázatába, hogy mit kell érteni efféle merőlegeseken, mind a mellett a róluk alkotott fogalom helyes lehetett, mert a gyakorlati életben lépten-nyomon láthatunk vízszintes síkra merőleges síkot és egyenest.

Ha egy **G** síkban két egymásra merőleges egyenest, *e*, *f*-et képzelünk és az *e* egyenest az *f* körül forgatjuk, akkor az *e* egyenes egy **F** síkot írt le, mely a **G**-re merőleges. Ha ugyanígy az *f*-et az *e* körül forgatjuk, akkor az *f* egyenes ír le egy a **G**-re merőleges **E** síkot. Az **E** és **F** síkok egymást egy *g* egyenesben metszik, mely a **G** síkra merőlegesen áll. Az *e*, *f*, *g* egyenesek közül és az **E**, **F**, **G** síkok közül bármely kettő merőleges egymásra és $e \perp$ **E**, $f \perp$ **F**, $g \perp$ **G**. Ily helyzetet foglal el az 1-ső, 2-dik és oldalképsík egymás irányában.

A *g* egyenes körül forgatott *e* vagy *f* egyenes a **G** síkot írja le; *g* tehát nemcsak az *e*, *f* egyenesekkel, hanem a **G** síknak minden az (e, f) ponton keresztül menő egyenesével derékszöget képez.

Ha egy tetszőleges helyzetű **G** síknak (pl. egy üveglapnak) egy pontjában e síkra merőlegesen álló egyenesről akarunk fogalmat szerezni, akkor a rajzolásnál használatban levő két háromszöget úgy helyezzük el, hogy mindegyik háromszögnek egyik befogójánál levő éle a **G** síkban az *A* ponton keresztül menő egy-egy egyenesen feküdjék és azonkívül a másik két befogónál levő éle egybeessék. Az utóbbi közös élnek helyzete fogalmat nyújt a **G** sík *A* pontjában a **G**-re merőlegesen álló egyenesről.

A továbbiakra nézve felhasználjuk a stereometria következő tételeit és értelmezéseit:

„Két általános helyzetű egyenes hajlásszöge egymáshoz olyannak értelmezhető, mint a két egyenessel megfelelőleg párhuzamos, de egymást metsző egyenes hajlásszöge.“

„Ha egy egyenes egy síknak két nem párhuzamos egyenesével derékszöget képez, akkor az a sík minden egyenesével ily szöget fog képezni; az ilyen egyenest a síkra merőleges egyenesnek és a síkot az egyenesre merőlegesnek nevezzük."

„Egy síkra merőleges egyenesek párhuzamosak egymással."

„Egy egyenesre merőleges síkok párhuzamosak egymással."

„Két sík, melyeknek egyike a másik síkra merőleges egyenesen megy keresztül, egymásra merőlegesnek neveztetik. E síkok közül bármelyik ∞^1 egyenest tartalmaz, mely a másikra merőleges."

„Ha két sík egy harmadikra merőleges, akkor azoknak metszővonala is merőleges a harmadikra."

„Ha két sík merőleges egymásra, akkor az egyik síkra merőleges egyenes a másikkal párhuzamos."

„Ha egy egyenes párhuzamos egy síkkal, akkor az egyenesre merőleges síkok a síkra is merőlegesek."

„Ha két egyenes merőleges egymásra, akkor (és csak akkor) bármelyikén keresztül egy oly sík fektethető, mely a másik egyenesre merőleges."

53. A merőlegesekre vonatkozó más tételek, melyek ábrázoló geometriai szerkesztéseknél figyelembe veendők. *Ha két egyenes merőleges egymásra, akkor ezeknek derékszögű projectiója egy oly síkra, mely az egyenesek bármelyikével párhuzamos, szintén merőleges egymásra.*

Ugyanis, ha az f egyenes merőleges az e egyenesre ($f \perp e$), és párhuzamos a **K** síkkal, akkor e-n keresztül lehet az f-re merőleges síkot, **E**-t, fektetni. Ez az **E** sík a **K**-ra is merőleges, tehát e-nek derékszögűleg projiciáló síkja a **K**-ra, — s mint ilyen **K**-t az e-nek derékszögű projectiójában e_1-ben metszi. Az f-nek derékszögű projectiója f_1 a **K** síkra párhuzamos f-fel, tehát merőleges az **E** síkra, valamint az **E** síkban fekvő e_1 egyenesre: ennélfogva $e_1 \perp f_1$.

A tétel fordítva is igaz marad, t. i.

„Ha két egyenes derékszögű projectiója egy síkra egymásra merőleges és az egyenesek közül egyik párhuzamos a síkkal, akkor a két egyenes egymásra merőleges."

Az előbbi tétel következménye:

Ha egy egyenes merőleges egy síkra, akkor a sík metsző vonala egy tetszés szerinti síkkal és az egyenes derékszögű projectiója erre a síkra — egymásra merőlegesek.

Ugyanis ha az e egyenes merőleges az **S** síkra és **K** a tetszés szerinti sík, akkor e merőleges a **K** és **S** sík metszővonalára f-re. Minthogy az $e \perp f$ egyenesek közül ez utóbbi a **K** síkkal párhuzamosnak tekinthető, azért e-nek és f-nek e_1 és f derékszögű projectiója a **K** síkra, egymásra merőleges.

De fordítva már *nem* következik „ha két sík metszővonala merőlegese egy egyenesnek az egyik síkra eső derékszögű projectiójával, akkor az egyenes a másik síkra merőleges“, csupán az bizonyos, hogy az egyenes projiciáló síkja merőleges a két síkra.

A tétel következménye „a két-képsíkos rendszerben“ :

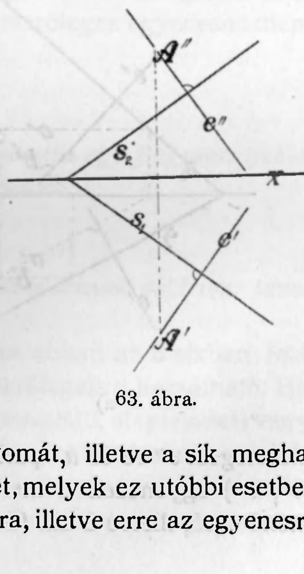
Ha egy e egyenes merőleges egy **S** *síkra, akkor az egyenesnek 1-ső és 2-dik képe e', e'', merőleges a síknak 1-ső, illetve 2-dik nyomára* s_1, s_2*-re* ($e' \perp s_1$, $e'' \perp s_2$).

Ez fordítva csak bizonyos megszorítással alkalmazható, t. i. : *ha egy egyenes 1-ső és 2-dik képe egy sík 1-ső, illetve 2-dik nyomára, mely nem párhuzamos a képtengelylyel, merőleges, akkor az egyenes is merőleges a síkra.*

Ugyanis az egyenesnek két projiciáló síkja az illető síkra merőleges lévén, azoknak metszővonala is merőleges a síkra. De ha a sík nyomai párhuzamosak és így az egyenesnek képei merőlegesek a képtengelyre, akkor az egyenes két projiciáló síkja egyesül, tehát nem metszi egymást *egy* egyenesben. Ez utóbbi esetben az egyenes oldalképének és a sík oldalnyomának merőleges helyzetéből következtetünk arra, hogy az egyenes merőleges-e a síkra.

54. A merőlegesek szerkesztésére vonatkozó két alapfeladat. *1-ső alapfeladat. Egy (A', A'') pontból merőleges egyenes bocsátandó egy* **S** *síkra.*

Megoldás. (63. ábra). Ha az **S** sík s_1, s_2 nyomai ismeretesek, akkor az *A'* pontból az s_1-re és az *A''* pontból az s_2 bocsátott *e'*, *e''* merőleges képei a kivánt merőleges egyenesnek.

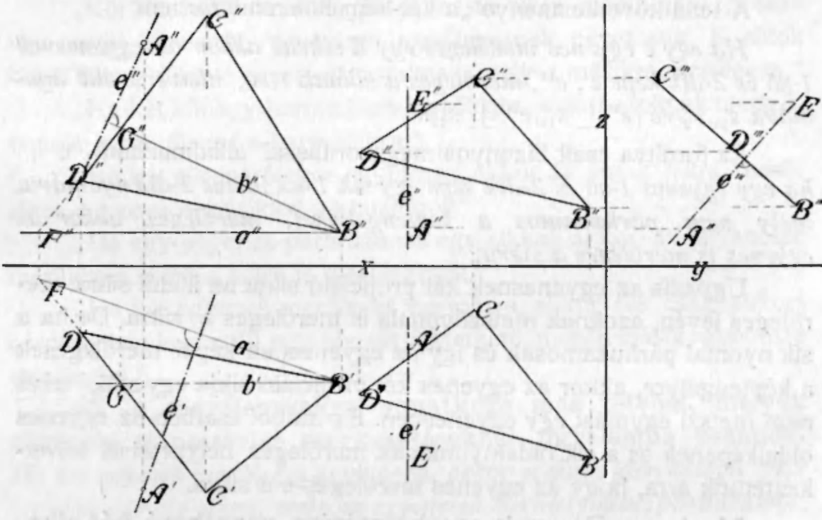


63. ábra.

Ha az **S** síknak három pontja *B*, *C*, *D* van megadva, akkor e sík egy első és egy 2-dik fővonalának képeit (*a'*, *a''*), (*b'*, *b''*) szerkesztjük; az *A'* pontból az *a'*-ra, és az *A''* pontból a *b''*-re bocsátott *e'*, *e''* egyenesek képei a kivánt merőlegesnek. (64. ábra).

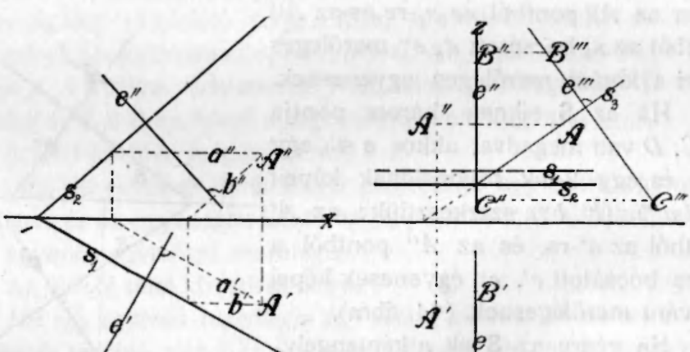
Ha végre az **S** sík a képtengelylyel párhuzamos, tehát az 1-ső esetben a síknak nyomai a 2-dikban annak fővonalai a képtengelylyel párhuzamosak, akkor fölkeressük a síknak oldalnyomát, illetve a sík meghatározására szolgáló pontoknak oldalképét, melyek ez utóbbi esetben egy egyenesen feküsznek; az oldalnyomra, illetve erre az egyenesre az A pontnak A''' oldalképéből e''' merőlegest bocsátunk, melynek segélyével e-nek e', e'' képei is megkaphatók. (65. ábra).

2. alapfeladat. Meghatározandó egy (A', A'') ponton keresztül menő és egy (e', e'') egyenesre merőlegesen álló sík.



64. és 65. ábra.

Megoldás. (66 a. ábra). Az A' pontból a' merőlegest húzunk e'-re és b' párhuzamost a képtengelyhez, az A'' pontból pedig b''



a) 66. ábra. b)

merőlegest e''-re és a'' párhuzamost a képtengelyhez. Az (a', a'') és (b', b'') egyenesek a kívánt síknak az (A', A'') ponton keresztül menő 1-ső, illetve 2-dik fővonalai, melyek a síkot és így annak nyomait meghatározzák. Ha azonban az (e', e'') a képtengelyre merőleges, (66 b. ábra) akkor egy oldalképsíkot alkalmazunk (melyet magán az e egyenesen is keresztül fektethetünk) és ezzel határozzuk meg a kivánt **S** sík s_1, s_2 nyomait.

55. **A térelemek meghatározására vonatkozó merőlegességi föltételeknek sokasági értéke.** Mielőtt az alábbi feladatok megoldásához fognánk, az egésznek biztosabb és könnyebb áttekintése végett tartsuk szem előtt a következőket:

Az egyenesre nézve egyszerü föltétel az, hogy egy egyenesre merőlegesen álljon, mert e föltétel azt kivánja, hogy az egyenesek az illető egyenesre merőleges síkkal párhuzamosak legyenek, azaz e síknak végtelen távol fekvő egyenesét messék.

Az egyenesre nézve kettős föltétel, hogy egy síkra merőleges álljon, mert az egyenestől azt kivánjuk, hogy az illető síkra merőleges egyenesnek végtelen távol fekvő pontján menjen keresztül.

Egy síkra nézve egyszerü föltétel, hogy egy síkra merőlegesen álljon és kettős föltétel, hogy egy egyenesre legyen merőleges. Az első esetben a síkot az illető síkra merőleges egyenesnek végtelen távol fekvő pontján (tehát *egy ponton*), a második esetben pedig a síkot az illető egyenesre merőleges síkkal párhuzamosan (tehát ennek végtelen távol fekvő *egyenesén*), kell áthelyezni.

Végre még emlékezetbe hivandó, hogy egy pontból kisugárzó és egy egyenesre merőlegesen álló egyenesek tartója az a sík, mely a ponton keresztül menve merőleges az illető egyenesre. Továbbá: mindazon síkok, melyeket egy pontból egy síkra merőlegesen állíthatunk, e pontból az illető síkra bocsátott merőleges egyenesen mennek keresztül.

Feladatok.

56. — *49. feladat. Egy A ponton keresztül egy f egyenes fektetendő, mely egy adott e egyenesre merőleges és*

a) az adott e egyenest metszi, vagy

b) egy adott g egyenest metsz, vagy

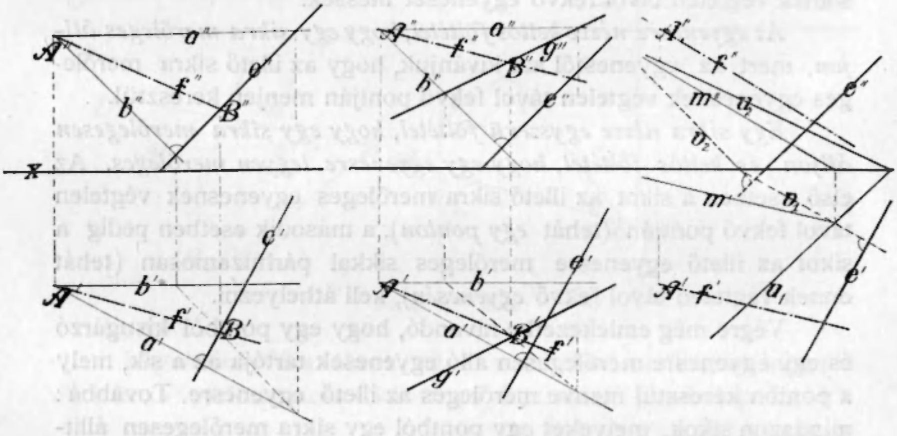
c) egy adott **U** *síkkal párhuzamos, azaz annak végtelen távol fekvő egyenesét metszi.*

Megoldás. A keresett (f', f'') egyenes abban az **S** síkban fekszik, mely az A pontból az e egyenesre merőlegesen bocsátható. Ha e síknak az A ponton keresztül menő fővonalait (2. alapfeladat) vagy nyomait megszerkesztettük, akkor még meg kell határozni e síknak az *a)* feladatnál (67 a. ábra) B metszőpontját az e egyenessel, a *b)* feladatnál (67 b. ábra) B metszőpontját a g egyenessel.

A *c)* feladatnál (67 c. ábra) vagy felkeressük az A-n keresztül menő és az adott **U** síkkal párhuzamos síknak metszővonalát az **S**-sel, vagy bármily az (e', e'')-re merőleges **V** síknak és **U**-nak m metszővonalához, az A ponton keresztül húzunk f párhuzamosat.

Oldjuk meg a feladatot az e egyenesnek különböző helyzeténél, nevezetesen, ha e az egyik vagy mindkét képsíkkal párhuzamos, ha az egyik képsíkra vagy a képtengelyre merőleges, ha e-nek mindkét képe egybeesik, stb.

50. feladat. Fektessünk egy ponton keresztül oly egyenest, mely két egyenesre merőleges.



a) 67. b) ábra. c)

Megoldás. Ha a két egyenes ugyanegy síkban fekszik, akkor erre a síkra, ha pedig nem fekszik egy síkban, akkor a két egyenessel párhuzamos síkra a pontból merőlegesen húzott egyenes lesz a keresett.

Lehet azonban következőkép is eljárni a szerkesztésnél: az adott pontból az egyes adott egyenesekre merőleges síkokat bocsátunk: e két sík metszővonala szintén kielégíti a feladat követelményeit.

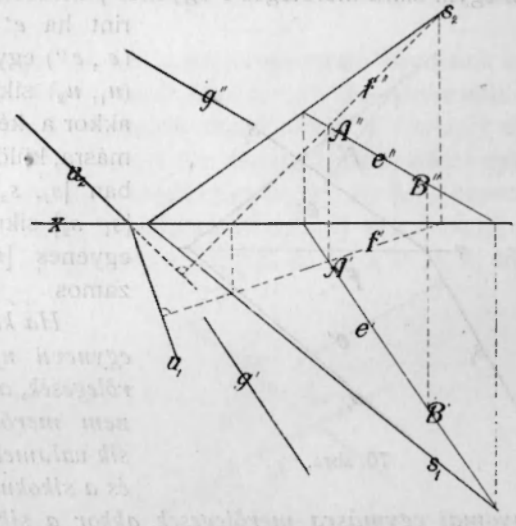
A feladat megoldása igen egyszerű, ha az adott egyenesek egyike valamelyik képsíkra merőleges!

57. — *51. feladat. Egy adott* **U** *síkra merőleges sík szerkesztendő, mely*

a) két ponton és így azoknak összekötő egyenesén megy keresztül, vagy

b) egy ponton megy keresztül és egy egyenessel párhuzamos, vagy *c) egy ponton megy keresztül és még egy adott síkra merőleges.*

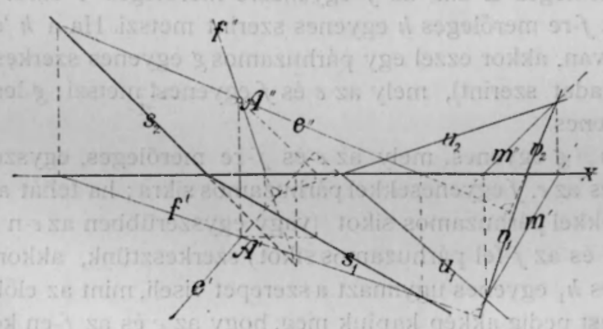
Megoldása az *a)* feladatnak. (68. ábra). Az adott A és B pont egyikén keresztül az adott **U** síkra merőleges f egyenest bocsátunk; e merőleges és a másik pont meghatározza a keresett síkot. De ha az **U**-ra merőleges sík az adott e egyenesen vezetendő keresztül, akkor e-nek egy A pontjából az **U**-ra bocsátott f merőleges egyenes és e meghatározza már a kívánt síkot.



68. ábra.

A *b)* feladat az előbbire vezethető vissza, mert csak az A adott ponton keresztül az adott g egyeneshez párhuzamosan húzott e egyenesen át kell a keresett síkot fektetni merőlegesen az **U** síkra.

A *c)* feladatnál (69. ábra) vagy az adott A pontból a két adott síkra **U**-ra és **V**-re bocsátott merőlegeseken e és f-en fektetjük át a



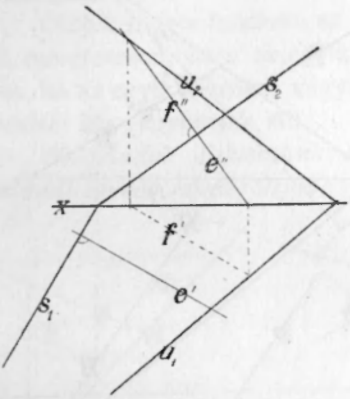
69. ábra.

keresett síkot, vagy pedig az **U** és **V** sík m metszővonalára fektetjük az A pontból merőlegesen az **S** síkot (2. alapfeladat.)

Oldjuk meg e feladatokat az adatok különböző helyzeténél a képsíkok és egymás irányában.

52. feladat. Adva van két sík $[s_1, s_2]$, $[u_1\ u_2]$, *megvizsgálandó, hogy e két sík merőleges-e egymásra.*

Megoldás. (70. ábra). Ha két sík egymásra merőleges, akkor az egyik síkra merőleges e egyenes párhuzamos a másikkal. E szerint ha $e' \perp s_1$, $e'' \perp s_2$, és az (e', e'') egyenes metszőpontja az (u_1, u_2) síkkal végtelen távol van, akkor a két sík merőleges egymásra, különben nem. A 70. ábrában $[s_1, s_2] \perp [u_1, u_2]$, mert az $[s_1\ s_2]$ síkra merőleges (e', e'') egyenes $[u_1, u_2]$ síkkal párhuzamos.



70. ábra.

Ha két általános helyzetű sík egynevű nyomai egymásra merőlegesek, akkor a síkok egymásra nem merőlegesek, de ha az egyik sík valamelyik képsíkra projiciáló és a síkoknak ezen képsíkon levő nyomai egymásra merőlegesek, akkor a síkok is merőlegesek egymásra.

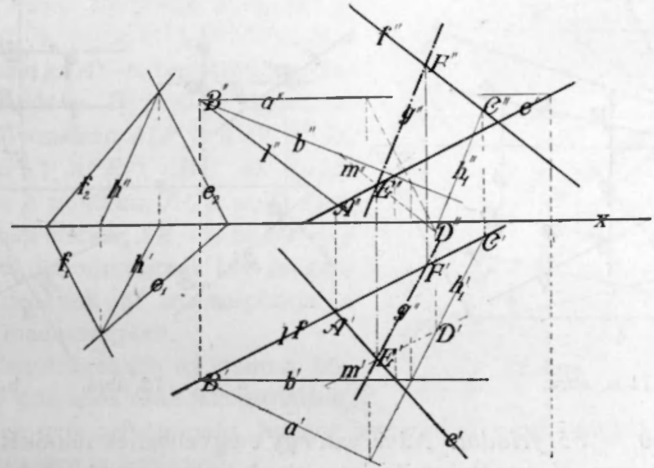
58. — *53. Szerkeszszük meg két egyenesnek normalis transversalisát, — tehát azt az egyenest, mely a két adottra merőleges és azokat metszi.*

Megoldás. Nevezzük a két egyenest e-nek és f-nek. Az e egyenesre merőleges **E** sík, az f egyenesre merőleges **F** síkot egy az e-re és az f-re merőleges h egyenes szerint metszi. Ha a h egyenes már megvan, akkor ezzel egy párhuzamos g egyenes szerkesztendő, (a 47. feladat szerint), mely az e és f egyenest metszi; g lesz a kivánt egyenes.

A $h \,//\, g$ egyenes, mely az e és f-re merőleges, egyszersmind merőleges az e, f egyenesekkel párhuzamos síkra; ha tehát az e és f egyenesekkel párhuzamos síkot (vagy egyszerübben az e-n keresztül menő és az f-fel párhuzamos síkot) szerkesztünk, akkor e síkra merőleges h_1 egyenes ugyanazt a szerepet viseli, mint az előbbi h. A g egyenest pedig akkép kapjuk meg, hogy az e és az f-en keresztül a h_1-val párhuzamosan menő síkoknak metszővonalát felkeressük, mely már a g.

Ezzel tisztában volnánk a feladat stereometriai megoldásával, de azon kell lennünk, hogy a descriptiv megoldásnál a lehető legkevesebb műveletet végezzük, tehát mennél kevesebb vonalat rajzoljunk, mert minden vonal, ugy az eszközök tökéletlensége, mint a rajzolónak kisebb nagyobb mértékű hiányos megfigyelési vagy rajzolási képessége folytán hibával nyeretik, mely hiba minden uj és uj vonalnál fokozódván az eredményvonal biztos helyzetére kedvezőtlen befolyást gyakorol.

Descriptiv megoldás. (71. ábra). Az e egyenesen felveszünk egy A pontot, pl. azt, melynek 1-ső képe $A' = (e'f')$; ezen keresztül az f-fel párhuzamosan menő egyenes l ($l' = f'$, $l''//f''$). Az $[e, l]$ síkban (a', a'') egy 1-ső (b', b'') egy 2-dik fővonal, melyek az l egyenes (B', B'') pontján mennek keresztül ($a''//x$, $b'//x$). Az f egyenes egy C pontjából h_1 merőlegest bocsátunk az $[e, l]$ síkra ($h_1' \perp a'$, $h''_1 \perp b''$ a C' és C'' ponton át); h_1 metszi az $[e, l] = [a, b]$ síkot



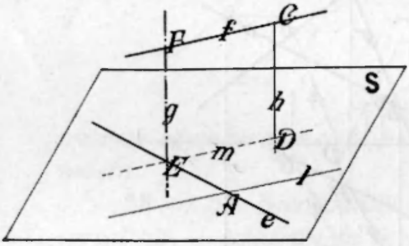
71. ábra.

egy D pontban, melyen át $l//f$-fel párhuzamosan menő m egyenes az e-t az E pontban metszi. Végre az $EF//h_1$ egyenes, mely f-et az F pontban metszi a kivánt normalis transversalis g. — A 71. ábrában a $[e, l]$ síkra merőleges egyenes h, mint az e-re és f-re merőleges $\mathsf{E} = [e_1, e_2]$. $\mathsf{F} = [f_1, f_2]$ síkok metszővonala is meg van rajzolva. E síkok használata fölöslegessé teszi az a, b, fővonalak rajzolását, melyek a $h_1//h$ irányának meghatározására szolgáltak.

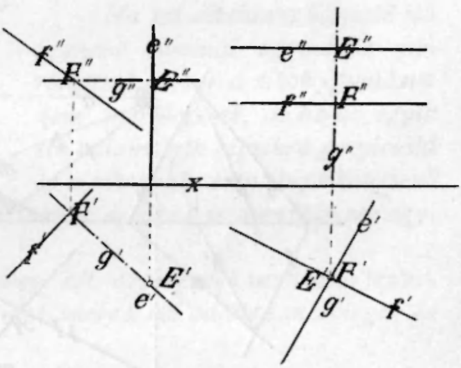
A 71. a) ábra a feladat megoldásánál követendő műveleteket jobb áttekintése végett *egy* képben mutatja be.

A feladat megoldása jóval egyszerűbb, ha az egyik egyenes pl. e a képsikok valamelyikére, mondjuk az 1-sőre merőleges (72 a. ábra), de legegyszerűbb, ha a két egyenes ugyanegy képsíkkal párhuzamos (72 b. ábra), mely két esetben azonban a két egyenes kölcsönös helyzete még mindig általános. Ugyanis az 1-ső esetben a g egyenesnek képe g' az e'-nek 1-ső képén megy keresztül és merőleges f'-re; a másik kép g'', mely a $(g', f') = F'$-nek megfelelő 2-dik képen F''-en megy keresztül, párhuzamos a képtengelyhez. A mint látható g metszi az e-t és az f-et, de azonkivűl e-re merőleges, mert az 1-ső képsíkkal párhuzamos; de f-re is merőleges, mert f és g-nek 1-ső képei merőlegesek.

54. feladat. Oldjuk meg az 53. feladatot, ha *a)* az e egyenes az 1-ső képsíkban fekszik; *b)* ha az e egyenes az egyik, az f egyenes a másik képsíkban fekszik; *c)* ha az e egyenes a képtengely; *d)* ha az e egyenes a képtengelyre merőleges és f általános helyzetű.



71 a. ábra.



a. 72. ábra. b.

59. — *55. feladat.* Adva van egy e egyenesnek mindkét képe (e', e''), egy reá merőleges és azt metsző f egyenesnek csak egyik képe pl. f'; szerkesztendő ez utóbbi egyenesnek hiányzó képe.

Megoldás. Az e egyenesre merőleges síkot állítunk abban a pontban, melynek 1-ső képe $(e', f') = A'$; ebben a síkban fekszik az f, tehát f'' könnyen szerkeszthető.

Az e', e'', f' egyenesek mily helyzeténél határozatlan a feladat?

56. feladat. E feladat általánosítása: Adva van egy egyenes és egy sík; szerkesztendő az az egyenes a síkban, mely az adott egyenest merőlegesen metszi. Az adatok mily kölcsönös helyzeténél határozatlan a feladat?

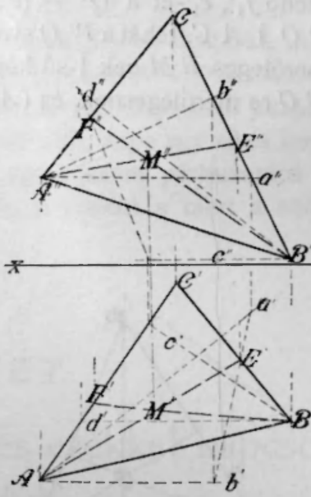
57. feladat. Egy síknak ismeretes mindkét nyoma; egy erre merőleges síknak csak az egyik nyoma; szerkesztendő ez utóbbi síknak hiányzó nyoma.

Megoldás. A hiányosan megadott síknak ismert nyomán mint egyenesen keresztül síkot fektetünk a másik adott síkra merőlegesen (51. *a)* feladat; e sík lesz a keresett. Az adatok mily helyzeténél határozatlan a feladat?

60. — *58. feladat.* Adva van az ABC háromszögnek két képe; szerkesztendők az ABC háromszög M magasságpontjának képei.

Megoldás. (73. ábra). A háromszög két szögpontjából a szemben fekvő oldalakra merőleges és azokat metsző egyeneseket bocsátunk; ezeknek metszőpontja a kívánt pont.

Az A pontból a BC-re bocsátott merőleges síknak az A ponton keresztül menő fővonalai a, b, ($a' \perp B'C'$, $a''//x$, $b'//x$, $b'' \perp B''C''$); és a B pontból az AC-re bocsátott merőleges síknak a B ponton keresztűl menő fővonalai c, d ($c' \perp A'C'$, $c''//x$, $d'//x$, $d'' \perp A''E''$). BC az (a, b) síkot az E pontban, AC a (c, d) síkot F pontban metszi; $AE = e$ és $BF = f$ az ABC háromszögnek két magassága, azoknak M metszőpontja a kívánt magasságpont.



73. ábra.

Tanulságosabb azonban a következő általános tétel felhasználása, mely nemcsak orthogonalis, hanem ferdeszögű projiciálásból származó képekre is érvényes.

Egy sík két pár különböző irányú derékszögű egyenesének képei meghatározzák a sík minden derékszögű egyenes párjának a képeit; azaz: ha az $e \perp e_1$, $f \perp f_1$ egyeneseknek képei e', e'_1, f', f'_1 és g' a sík tetszés szerinti g egyenesének képe, akkor a g-re merőleges egyeneseknek képeit az e', e_1', f', f_1' egyenesek meghatározzák.

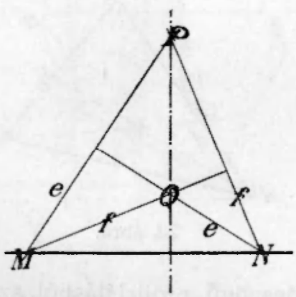
Ugyanis ha (74 a. ábra) a $g = MN$-nek egy M pontján keresztűl az e, f-fel és egy N pontján keresztűl az e_1, f_1-gyel párhuzamosakat húzunk ($MP//e$, $MQ//f$, $NP//f_1$, $NQ//e_1$), akkor a PQ pontoknak összekötő egyenese merőleges a g-re; mert az MNP háromszögnek magasságpontja a Q pont.

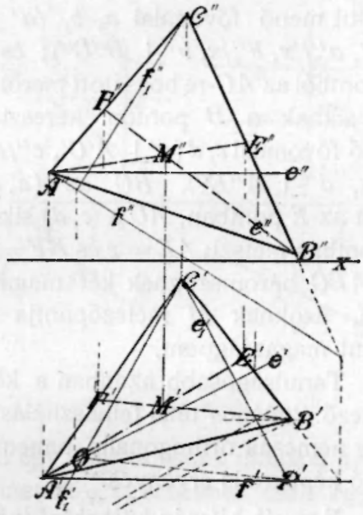
Ha tehát a g' egy M' pontján keresztűl az e', f'-fel és bármely N' pontján keresztűl az e_1', f_1'-gyel párhuzamost húzunk ($M'P'//e'$, $M'Q'//f'$, $N'P'//f'_1$, $N'Q'//e'_1$), akkor a $P'Q'$ egyenes a g-re merőleges PQ egyenesnek képe. Minden a $P'\,Q'$-vel párhuzamos egyenes szintén a g-re merőlegesnek képe.

Tekintve, hogy egy a két képsíkos rendszerben ábrázolt síknak fővonalai az illető esővonalakra merőlegesek: minden sík két derékszögű egyenesének képeit egyszerűen szerkeszthetjük.

Igy a 74 b. ábrában e és f az A-n átmenő 1-ső és 2-dik fővonala, e_1 és f_1 a C-n átmenő 1-ső és 2-dik esővonala az ABC síknak.

Az A' ponton keresztűl menő e', f', a C' ponton keresztűl menő f_1', e_1'-et a $Q' = (e', f_1')$, $P' = (f', e_1')$ pontban metszi; $P\,Q \perp A\,C$, tehát a $P'\,Q'$-val párhuzamos $B'\,M'F'$ szintén az $A\,C$-re merőleges $B\,M$-nek 1-ső képe. Hasonlóképp $A'\,M'\,E'$ 1-ső képe a $B\,C$-re merőlegesnek, és $(A'\,M'\,F', A'\,M'\,E') = M'$.





a. 74. ábra. b.

Az általános háromszög magasságpontjának képei, nem magasságpontjai a háromszög képeinek, mert egy derékszögnek két képe csak akkor derékszög, ha ennek egyik szára a képtengelylyel párhuzamos. És ha ez az egyik oldalra vagy magasságra be is következnék, egy másik oldalra vagy magasságra nem fog bekövetkezni.

61. Visszapillantás a III. fejezet anyagára. Míg az I. fejezetben nagy részt helyzet-geometriai feladatokat tárgyaltunk, e III. fejezetben a merőlegesek szerkesztése, tehát a derékszöggel kapcsolatos feladatok szerepeltek.

Láttuk, hogy az erre vonatkozó összetettebb feladatok mind arra a két alapfeladatra voltak visszavihetők: mikép kell síkra merőleges egyenest és egyenesre merőleges síkot egy ponton keresztűl szerkeszteni. A „két-képsíkos rendszerben“ azt, hogy két egyenes, melynek képei, vagy két sík, melynek nyomai ismeretesek, merőleges-e egymásra, csak szerkesztés útján állapíthatjuk meg. Ellenben általában síkról és egyenesről, ha annak nyomai vagy fővonalai, ennek képei advák, uj vonalak szerkesztése nélkül láthatjuk, hogy merőlegesek-e egymásra, t. i. az egynevű nyomok és képek merőleges helyzetéből általában következtetni enged arra, hogy a sík és egyenes merőleges egymásra.

A mi még e fejezetnél különösen emlékezetben tartandó, az: *hogy egy derékszögnek orthogonalis képe egy síkra mindig derékszög lesz, ha annak egyik (vagy mindkét) szára az illető képsíkkal párhuzamos.* Más szögnek, mint a derékszögnek orth. képe egy síkra nem lesz oly nagy, mint a térszög, ha csak egyik szára párhuzamos a képsíkkal, hanem nagyobb vagy kisebb, a szerint a mint a szög tompa vagy hegyes.

IV. FEJEZET.

Távolságok szerkesztése és ezekkel kapcsolatos feladatok.

62. Két pont távolsága. Minden feladat, mely távolságok meghatározására vonatkozik, visszavehető egy egyenes vonaldarab, vagy röviden egy *vonaldarab* hosszuságának, azaz a vonaldarabot határoló *két végpont távolságának* szerkesztésére. Ennélfogva távolságok szerkesztésénél ismerni kell a következő:

1. alapfeladatot: Adva van az A, B pontnak két képe (A', A''), (B', B''), szerkesztendő az AB vonaldarab hosszúsága.

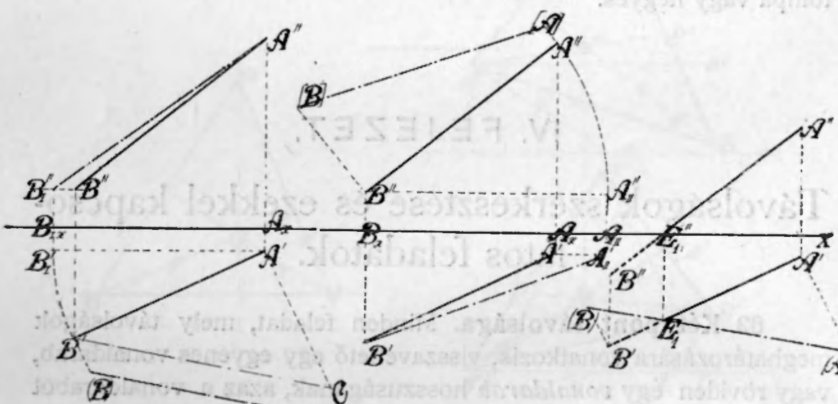
Megoldás (75 a. ábra). Ha az 1-ső térnegyed A, B pontjait reconstruáljuk, azt látjuk, hogy az $AA'B'B$ négyszög síkja az 1-ső képsíkra, annak AA', BB' oldalai az $A'B'$-re merőlegesek; $AA'B'B$ tehát trapez. Ezzel egy congruens trapezt $(A)A'B'(B)$ rajzolunk az $A'B'$ oldal fölé, mely az $AA'B'B$ leborításának tekinthető az 1-ső képsíkba; $(A)A' \perp A'B'$, $(B)B' \perp A'B'$, $(A)A' = A''A_x$, $(B)B' = B''B_x$, végre kiadódik, hogy $(A)(B) = AB$.

Az $AA'B'B$ trapezzel congruens trapezt $A''A_xB_{1x}B''_1$-et lehet az AA' oldallal egyenlő $A''A_x$ oldal fölé is rajzolni; $A_xB_{1x} = A'B'$,

$B''_1B_{1x} = B''B_x = BB'$, végre $A''B_1'' = AB$. Az $A''A_xB_{1x}B_1''$ trapez olyannak tekinthető, mintha az $AA'B'B$ az AA' oldal körül a 2-dik képsíkhoz párhuzamos helyzetbe lett volna forgatva és az ekkép forgatott trapez $AA'\ B_1'B_1$ a 2-dik képsíkra $A''\dot{A}_x\ B_{1x}B_1''$-be projiciálva.

Ugyanígy megkapjuk az AB pontok távolságát, ha azzal a trapezzel $AA''B''B$-vel rajzolunk (75 b. ábra), akár a $A''B''$, akár $B'B_x = BB''$ oldal fölé congruens trapezt $[A]A''B''[B]$, illetve $A'_{II}A_{IIx}B_xB'$-et, melynek síkja a 2-dik képsíkra merőleges.

A midőn a két pont az 1-ső képsíktól el van választva, pl. A az 1-ső, B a 4-dik térnegyedben fekszik, AA', $B'B$ trapeznek AA', BB' oldalai és így az azokkal egyenlő $\dot{A}''A_x$, BB''_x vonaldarabok az $A'B'$ két külömböző oldalára viendők $A'B'$-re merőlegesen, mint azt a 75 c. ábra mutatja. Itt $AA'B'B \simeq (A)A'B'(B)$ tehát $(A)(B) = AB$.



a. 75 b. ábra. c.

Az AB-vonaldarabot egy háromszög átfogójának is tekinthetjük, melynek egyik befogója $A'\ B'$, másik befogója pedig az A, B pontok az 1-ső képsíktól mért távolainak $A''\ A_x$, $B''\ B_x$-nek külömbsége vagy összege, a szerint, a mint A, B az 1-ső képsíktól nincsen elválasztva, vagy el van választva. Igy ha az $(A)\ A'$ egyenesen $(A)C = (B)\ B' = B''B_x$, akkor $B'C$ szintén $= AB$. (75 a. ábra.)

Könnyen belátható, hogy ha az AB pontot összekötő egyenes párhuzamos a képsíkok egyikével, akkor az AB vonaldarabnak képe ezen a képsíkon egyenlő AB-vel, azaz: *egy síkkal párhuzamos vonaldarab egyenlő orthogonalis képével az illető síkon.*

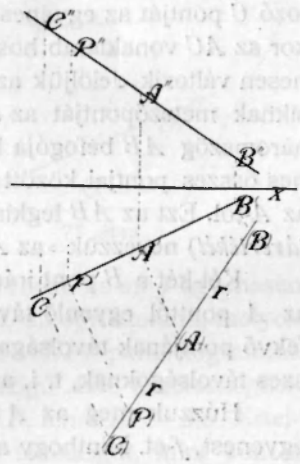
Távolságok meghatározására vonatkozó fordított feladat a következő:

2. *alapfeladat. Egy adott egyenesre, annak egy pontjától mérve egy adott vonaldarabot felrakni.*

Megoldás (76. ábra). Legyen ($e' = A'P'$, $e'' = A''P''$) az adott egyenes; (A', A'') egy rajta fekvő pont; r az adott vonaldarab.

Borítsuk az 1-ső képsíkra az (e', e'') 1-ső projiciáló síkját a benne fekvő e egyenessel. Ha (P', P'') az e egyenesnek tetszés szerinti pontja, akkor $(A)(P) = (e)$ adja a leborított e egyenest $(A'(A) = A''A_x$, $P'(P) = P''P_x$, $(A)A'$ és $(P)P' \perp A'P')$.

Az (e) egyenesre az (A) ponttól mérve az $(A)(B) = (C)(A) = r$ vonaldarabot reá rakjuk (B), (C)-ig; $(B)B'$ és $(C)C' \perp A'B'$, $B'B''$ és $C'C'' \perp x$, végre (B', B'') és (C', C'') a keresett két pont.



76. ábra.

63. Párhuzamos egyeneseken fekvő vonaldarabok képei. Képzeljünk egy e egyenesen két külömböző hosszuságú vonaldarabot AB, CD-t. Minthogy az A, B, C, D pontoknak projiciáló sugarai az 1-ső vagy a 2-dik képsíkra párhuzamosak, azért az e, e' vagy e, e'' egyeneseket tekintve: $AB : CD = A'B' : C'D' = A''B'' : C''D''$.

Ha továbbá AB, CD két egyenlő és párhuzamos vonaldarab ($AB \# CD$), akkor az $ABCD$ négyszög egy parallelogramma, melynek úgy az 1-ső képe $A'B'C'D'$, mint a 2-dik képe $A''B''C''D''$ szintén az lesz. Ebből következik: *ugyanazon egyenesen vagy párhuzamos egyeneseken fekvő vonaldaraboknak orthogonalis képei (tehát 1-ső képei és 2-dik képei) oly viszonyban állanak egymáshoz, mint a vonaldarabok a térben.*

Továbbá: *ha egy vonaldarabot egyenlő részekre osztunk, akkor az osztópontoknak orthogonalis képei, a vonaldarab képének osztópontjai.*

64. Távolságok értelmezése. A pont, egyenes és sík kölcsönös távolságaira vonatkozólag következő (egyszerű) feladatok képzelhetők:

a) két pontnak, *b*) pont és egyenesnek, *c*) pont és síknak, *d*) két párhuzamos egyenesnek, *e*) két nem metsző egyenesnek, *f*) egyenes és vele párhuzamos síknak, *g)* két párhuzamos síknak távolsága egymástól. Az utóbbi hat feladat az *a)* feladatra vezethető vissza, csak tudni kell, mikép van az utóbbi hat feladatban *a távolság értelmezve.*

A *b)* és *d) feladat magyarázata.* Ha egy e egyenes egy változó C pontját az egyenesen kivül fekvő A ponttal összekötjük, akkor az AC vonaldarab hosszusága C-nek helyzete szerint az e egyenesen változik. Jelöljük az a pontból az e-re merőlegesen bocsátott síknak metszőpontját az e egyenessel, B-vel. A B-nél derékszögű háromszög AB befogója kisebb lévén az AC átfogónál: az e egyenes összes pontjai között annak B pontja van *legkisebb* távolságra az A-tól. Ezt az AB legkisebb távolságot (az összes távolságok *határértékét*) nevezzük »az A pont távolságának az e egyenestől.«

Két-két a B pont irányában symmetricus pont az e egyenesen az A ponttól egyenlő távolságra van. Az egyenes végtelen távol fekvő pontjának távolsága az A ponttól szintén határértéke az összes távolságoknak, t. i. az, mely a legnagyobb.

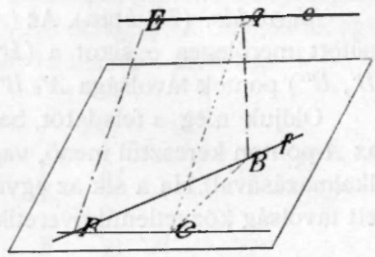
Húzzuk meg az A ponton keresztűl az e-hez a párhuzamos egyenest, f-et. Minthogy az AB egyenes az f-re is merőleges, azért e és f bármely pontjának távola nem kisebb, mint AB, hanem vagy nagyobb vagy azzal egyenlő (ha t. i. a két pontot összekötő egyenes $\perp$ e-re). E szerint az e pontjait az f pontjaival összekötő (∞^2) vonaldarabok között azok a (∞^1) vonaldarabok, melyek az e és f-re merőlegesek, a legkisebbek; e vonaldarabok tehát ismét határértéket adnak, mely a két egyenes, »az $e//f$ távolságának« neveztetik.

A c), f) és g) feladat magyarázata. Ha egy A pontból egy **S** síkra bocsátott merőleges e síkot a B pontban metszi, akkor a sík összes pontjai között a B pontnak távolsága az A-tól a legkisebb. Ezt az AB vonaldarabot értelmezzük tehát »az A pont távolságának az **S** síktól.«

Mindazon pontok a síkban, melyek az A-tól egyenlő távolságra vannak, a B ponttól is egyenlő távolságra lesznek, mint ez az ABC, ABD congruens derékszögű háromszögből következik, melynek C, D szögpontjai az **S** síkban feküsznek. Az **S** síkban a B pontból, mint középpontból leírt bármely körnek pontjai, a B pontban a síkra emelt merőlegesnek A (vagy más egy tetszés szerinti) pontjától egyenlő távolságra lesznek.

Ha az A ponton keresztűl az **S** síkhoz egy párhuzamos egyenest vagy a párhuzamos síkot fektetünk, akkor az egyenes vagy a sík bármely pontjának összekötő egyenese az **S** sík pontjaival nem kisebb, mint az AB vonaldarab, hanem nagyobb vagy azzal egyenlő. E szerint egy egyenesnek, vagy egy síknak távolságát egy vele párhuzamos **S** síktól akkép értelmezhetjük, mint »az egyenes vagy sík bármely pontjának távolságát az **S** síktól.«

Az e) feladat magyarázata (77. ábra). Legyen e és f két nem metsző egyenes, A és B ezen egyenesek normalis transversalisának metszőpontja az egyenesekkel, végre E az e-nek, F az f-nek tetszés szerinti pontja. Állíthatjuk, hogy EF vonaldarab nagyobb mint az AB.



77. ábra.

Ugyanis, ha az A ponton keresztűl az EF-fel párhuzamos AC egyenest és az f egyenesen keresztűl az e egyenessel párhuzamos FBC síkot fektetünk, melyek egymást a C pontban metszik, akkor az $AEFC$ parallelogramma AC oldala egyenlő EF-fel. A B-nél derékszögű ABC háromszögnek AC oldala átfogó lévén, nagyobb mint AB, tehát $EF > AB$. Értelmezzük tehát két nem metsző egyenes távolságát, mint »azt a vonaldarabot, melyet az egyenesek azoknak normalis transversalisáról lemetszenek« s mely mindazon (∞^2) vonaldarabok között legkisebb, melyet az egyenesek más transversalisairól lemetszenek.

Minthogy az e egyenes az FBC síkhoz párhuzamos, azért az e-nek, vagy az e-n keresztűl menő és az FBC síkkal párhuzamos síknak bármely pontja AB távolságra van az FBC síktól. E szerint két nem metsző egyenes távolsága egyenlő: a két egyenesen keresztűl fektethető párhuzamos síkpár távolságával, mely egyszerűbben szerkeszthető, mint maga az AB.

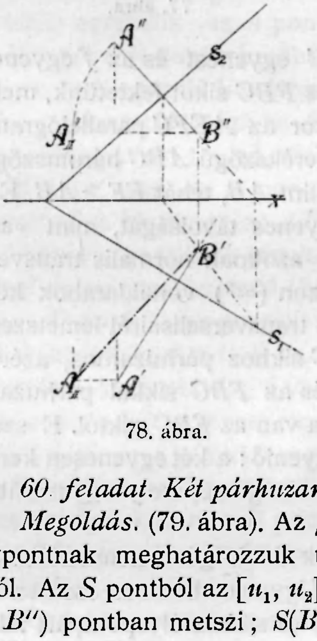
Két sík, vagy egy egyenes és sík távolságáról nem szólhatunk, ha azok egymást végesben metszik. Ugyanis ebben az esetben nem lehet ama síkokban, vagy az egyenes és síkban oly pontpárt találni, melynek távolsága egy határérték volna. A két sík metszővonalának pontjai a két síktól, illetve az egyenes és sík metszőpontja az egyenes és síktól ugyan 0 távolságra van, de ez nem határérték. Mert ha pl. az egyenes pontjainak távolságát a síktól pozitív és negatív jegygyel látjuk el a szerint, a mint azok a sík egyik vagy másik oldalán vannak, akkor ama 0 érték a távolságok sorozatában egy specialis érték, de nem határérték. De lehet ezen alakzatoknak hajlásszögéről szólni, mint azt a következő fejezetben látni fogjuk.

Feladatok.

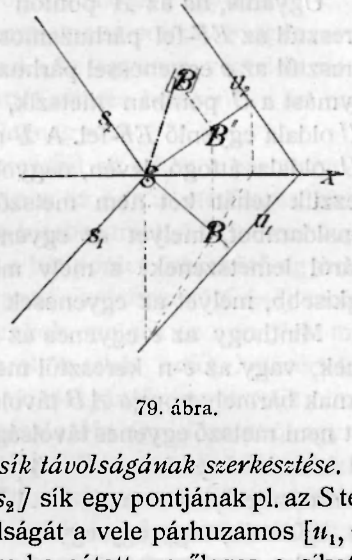
65. — *59. feladat. Szerkesztessék az* (A', A'') *pont távolsága az* $[s_1, s_2]$ *síktól.*

Megoldás. (78. ábra). Az (A', A'') pontból az $[s_1, s_2]$ síkra bocsátott merőleges e síkot a (B', B'') pontban metszi; az (A', A'') (B', B'') pontok távolsága $A'_{II}B'$.

Oldjuk meg a feladatot, ha sík a képtengelylyel párhuzamos (az A ponton keresztűl menő, vagy egy tetszés szerinti oldalképsík alkalmazásával). Ha a sík az egyik képsíkra projiciáló, akkor a keresett távolság közvetlenűl nyeretik ezen képsíkon.



78. ábra.



79. ábra.

60. feladat. Két párhuzamos sík távolságának szerkesztése.

Megoldás. (79. ábra). Az $[s_1, s_2]$ sík egy pontjának pl. az S tengelypontnak meghatározzuk távolságát a vele párhuzamos $[u_1, u_2]$ síktól. Az S pontból az $[u_1, u_2]$ síkra bocsátott merőleges e síkot a (B', B'') pontban metszi; $S(B)$ a két sík távolsága ($B''(B) \perp SB''$, $B''(B) = B_xB'$).

Ugyancsak az 59. feladatra vezetendő vissza a

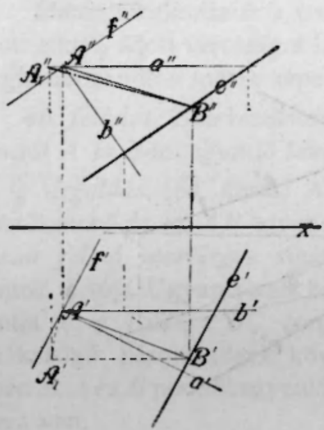
61. feladat. Egy egyenes és egy vele párhuzamos sík távolsága.

Megoldás. Az egyenes bármely pontjának távolsága a síktól, a keresett távolság.

62. feladat. Szerkesztessék az (A', A'') *pont távolsága az* (e', e'') *egyenestől.*

Megoldás. (80. ábra). Az (e', e'')-re merőleges és az (A', A'') keresztűl menő síknak, e ponton keresztűl haladó fővonalai (a', a'') (b', b''), (hol $a' \perp e'$, $a''//x$, $b'//x$, $b'' \perp e''$). Az (e', e'') egyenes a síkot a (B', B'') pontban metszi; $B''A_I''$ az (A', A''), (B', B'') pontoknak, tehát egyszersmind az (A', A'') pont és az (e', e'') egyenesnek távolsága egymástól.

A 81. ábra az (A', A'') pont távolságát mutatja a képtengelyre merőleges $(E'F', E''F'')$ egyenestől. Az oldalképsík magán az egyenesen lett keresztűl fektetve; $A''\ B_I''$ a keresett távolság.



80. ábra.

81. ábra.

A feladat megoldása jóval egyszerűbb, ha az e egyenes a képsíkok egyikével párhuzamos, továbbá a keresett távolság közvetlenül kiadódik, ha az egyenes az egyik képsíkra merőleges.

E specialis feladatokhoz tartozik: egy pont távolsága a képtengelytől; a sík egyik pontjának távolsága fővonalainak valamelyikétől, vagy a sík nyomaitól.

63. feladat. Két párhuzamos egyenes távolságának szerkesztése.

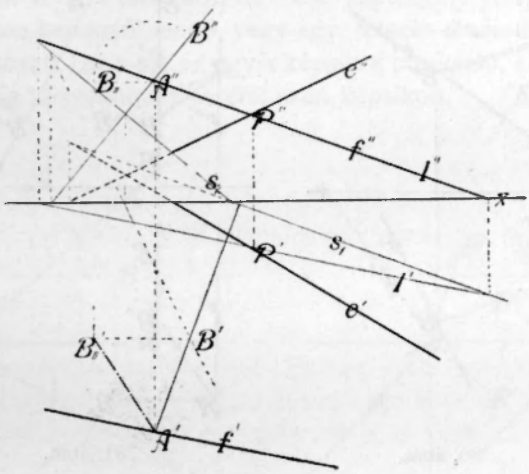
Megoldás. Az előbbi két ábrában az (f', f''), (e', e'') két párhuzamos egyenes; az (f', f'') egy (A', A'') pontjának távolsága az (e', e'')-től a kivánt távolság.

64. feladat. Két nem metsző egyenes távolsága.

Megoldás. (82. ábra). Az egyik egyenesen (e', e'')-ön keresztűl a másik egyenessel (f', f'')-rel párhuzamos síkot fektetünk, melynek vagy s_1, s_2 nyomait vagy egy pár fővonalát meghatározzuk. Az (f', f'') egyenes tetszés szerinti (A', A'') pontjából az $[s_1, s_2]$ síkra bocsátott merőleges e síkot a (B', B'') pontban metszi. $A'B_{II}'$ az (A', A'') pontnak, valamint az (f', f'') egyenesnek távolsága az $[s_1, s_2]$ síktól és egyszersmind az (f', f'') (e', e'') egyenesek távolsága egymástól.

E feladat megoldása egyszerüsbűl, ha az egyenesek egyike a képtengelylyel párhuzamos (oldalképsík alkalmazása!); még egyszerűbb, ha az egyik egyenes valamelyik képsíkra merőleges, vagy mindkettőnek 1-ső (vagy 2-dik) képei párhuzamosak.

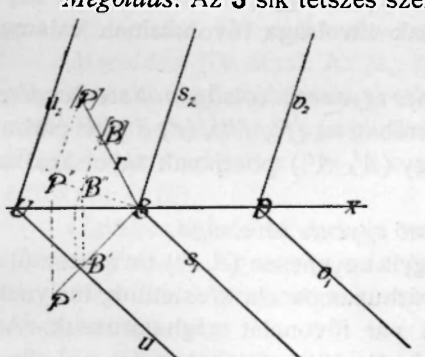
Szerkeszszük meg egy általános helyzetű egyenes két képének távolságát egymástól (a képsíkok egyesítése előtt); továbbá egy egyenes távolságát a képtengelytől.



82. ábra.

66. — *65. feladat. Szerkesztendők az* **S** *síktól adott távolságra levő síkok.*

Megoldás. Az **S** sík tetszés szerinti A pontjában merőlegest állítunk az **S**-re; e merőlegesre az A ponttól reá rakjuk az adott távolságot képviselő vonaldarabot, r-et, B és C pontig; végre e pontokon keresztűl az **S**-sel párhuzamos síkot fektetünk.



83. ábra.

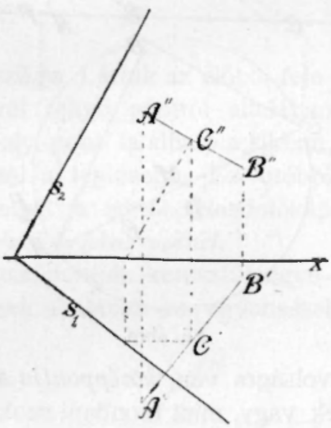
A 83. ábrában A az **S** sík tengelypontjában lett felvéve; a merőleges egyenesen csak a B pont (B', B'') lett meghatározva és ezen keresztűl az $\mathbf{U} = [u_1, u_2]$ sík **S**-sel párhuzamosan fektetve. Az **U** sík tengelypontjából U-ból a másik sík tengelypontja V, ($US = SV$) és ebből a **V** sík nyomai v_1, v_2 meghatározhatók.

A szerkesztett **U** és **V** sík tartója mindazon pontoknak és mindazon egyeneseknek, melyek az **S** síktól r távolságra vannak. E síkok segélyével egy adott egyenesen pontokat, egy adott síkon egyeneseket lehet szerkeszteni, melyek az **S** síktól r távolságra vannak. Háromszor alkalmazva a szerkesztést, oly pontokat (8-at) találhatunk, melyek három adott síktól adott távolságnyira vannak.

Mikép alkalmazzuk a szerkesztést a következő feladatnál: egy adott síktól, adott távolságra levő pontnak ismeretes az egyik képe; meghatározandó a másik képe!

66. feladat. Szerkesztendő azon pontoknak tartója, melyek két ponttól A és B-től egyenlő távolságra vannak.

Megoldás. (84. ábra.) Az AB vonaldarab C felezőpontján keresztül menő és az AB egyenesre merőleges sík — *az AB vonaldarab felező merőleges síkja* — a pontok tartója. Ugyanis a sík bármely pontja P, a PAC, PBC congruens derékszögű háromszögek következtében az A és B ponttól egyenlő távolságra van.



84. ábra.

Az ábrában az $[s_1, s_2]$ sík a C ponton megy keresztül, melynek C', C'' képei az $A'B'$, illetve $A''B''$ vonaldarabot felezik.

Az A, B pontok az **S** sík irányában symmetrikusak, és ezért az A, B pontok közül bármelyik a másiknak úgynevezett *tükörképe* az **S** síkra, mint tükröző síkra vonatkozólag; az **S** sík pedig az A, B pontpár symmetriasíkja.

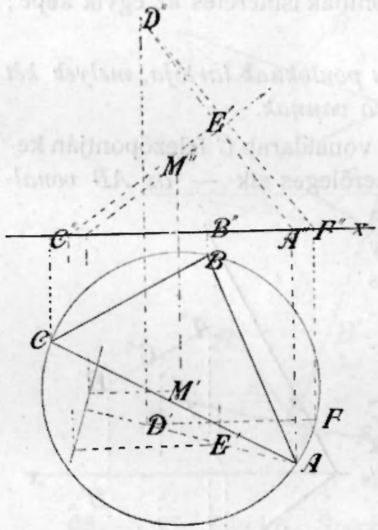
Az A és B pontnak összekötő egyenesei az **S** sík tetszésszerinti pontjával, egymásnak tükörképei **S**-et illetőleg. Ezt felhasználva:

Szerkesztendő egy ABC háromszögnek tükörképe $A_1B_1C_1$ egy általános helyzetű síkot, vagy $\mathbf{H}_1$ symmetriasíkot, vagy végre a $\mathbf{H}_2$ coincidentiasíkot illetőleg. Ez utóbbi két esetben az ABC háromszög képeiből a tükörképnek képei egyszerűen szerkeszthetők.

Ha a 66. feladatnál kivánt szerkesztést kétszer végezzük, megkapjuk azon pontnak tartóját (egyenes vonal), melyek két ponttól, vagy három ponttól egyenlő távolságra vannak; ha pedig a szerkesztést háromszor végezzük, akkor a nyert síkok metszőpontja a három pontpártól, vagy négy ponttól egyenlő távolságra levő pontot szolgáltatja. Ez utolsó feladatot megoldjuk a pontoknak a következő specialis helyzeténél:

67. feladat. Adva van három pont az 1-ső képsíkban, egy negyedik azonkivül; szerkesztendő a négy ponttól egyenlő távolságra levő pont.

Megoldás. (85. ábra). Az 1-ső képsíkon fekvő A, B, C pontnak 1-ső képei A, B, C; 2-dik képei A'', B'', C'' a képtengelyen vannak; D', D'' a negyedik pontnak D-nek két képe. Az ABC háromszög körülirható körének k-nak M' középpontja a keresett M pontnak 1-ső képe. Az AD vonaldarab E felezőpontjában az AD-re merőlegesen álló $[s_1, s_2]$ sík tartalmazza az M pontot; e körülményből M'' szerkeszthető. De egyszerűbb az M'' szerkesztése, ha a D ponton keresztűl menő és a 2-dik képsíkkal párhuzamos és a k kört F pontban metsző FD egyenesre a felezőpontban merőleges síkot állítunk, mert ennek 2-dik nyomán fekszik az M'' pont.



85. ábra.

Minthogy az M pont a felvett négy ponttól, $ABCD$-től egyenlő távolságra van, *középpontja* a négy ponton keresztül menő gömbnek vagy, mint mondani szokás: *az ABCD tetraeder körül irható gömbnek.*

67. — *68. feladat.* Szerkesztendő egy ABC háromszög súlypontja, továbbá a háromszög körül irható kör középpontja.

Megoldás. A feladat első részét illetőleg könnyen belátható, hogy *a háromszög súlypontjának képei, a háromszög képeinek súlypontjai.* (Miért?)

Az ABC háromszög körülirható köreinek középpontját O-t megkapjuk, ha az AB, AC vonaldarabot felező merőleges síkok metszővonalának felkeressük metszőpontját az ABC háromszög síkjával. (Az O pontnak képei általában nem lesznek a háromszög képei körülirható körök középpontjai; miért nem?).

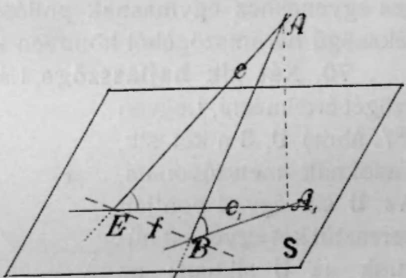
68. Visszapillantás a IV. fejezetre. E fejezet tárgyát, mérésen alapuló, tehát az úgynevezett *mérőgeometriához* tartozó feladatok képezték. A megmért, vagy felosztott alakzatok, vonaldarabok voltak; a szerkesztett pontok, egyenesek és síkok pedig abból a szempontból lettek meghatározva, hogy más pontok-, egyenesek- vagy síkoktól bizonyos megmérhető és megadott távolságra legyenek. A geometriai helyek közül, melyeknek a geometriai feladatok megoldásánál főszerepük van, csak az egyeneseket és síkokat szerkesztettük, — fentartván azoknak kiegészítését későbbi fejezetekben.

V. FEJEZET.

Egyenesek és síkok hajlásszögei a képsíkokhoz.

69. Az egyenes és a sík hajlásszöge. Láttuk az előbbi fejezetben, egy sík pontjai egy a síkon kívül fekvő ponttól általában külömböző távolságra vannak és egy oly pont található a síkban, melynek távolsága a kivül fekvő ponttól a legkisebb. Ez utóbbi távolsággal értelmeztük a pont távolságát a síktól. Hasonlókép járunk el *az egyenes és a sík hajlásszögének értelmezésénél.*

Egy e egyenes és egy **S** sík E metszőpontján keresztűl egyeneseket húzunk a síkban. Ezen egyenesek általában az e egyenessel külömböző szögeket képeznek és csak egy egyenes van síkban, t. i. az e egyenes derékszögű projectiója a síkra, mely az e egyenessel a legkisebb, valamint a legnagyobb szöget képezi. Ugyanis, ha (86. ábra) e_1 az e egyenes derékszögü projectiója az **S** síkra, f pedig e síknak tetszés szerinti az E metszőponton keresztűl menő egyenese, akkor az e egyenes egy A pontjának AA_1 távolsága az e_1-től, tehát egyszersmind az **S** síktól kisebb, mint az AB távolsága az f egyenestől. Minthogy az AA_1E, ABE derékszögű háromszögeknek AE átfogója egyenlő az AA_1, AB befogók pedig külömbözők, az e befogókkal szemben fekvő szögek közül az a kisebb, mely a kisebb befogóval AA_1-gyel fekszik szemben, azaz



86. ábra.

$AEA_1 \sphericalangle < AEB \sphericalangle$. Ez egyszersmind mutatja, hogy az AEA_1 szög mellékszöge nagyobb az AEB szög mellékszögénél. Ennélfogva *egy egyenes, egy sík összes egyenesei közül derékszögű projectiójával a síkra (valamint az ezzel párhuzamos egyenesekkel) képezi a legkisebb és a legnagyobb szöget.*

Ha még megjegyezzük, hogy a midőn az egyenes a síkra merőleges, tehát annak derékszögű projectiója egy pont, minden egyenes a síkban derékszög alatt hajlik az egyeneshez, az egyenes hajlásszögét a síkhoz ekkép *értelmezhetjük: egy egyenes hajlásszöge egy síkhoz azon szögek legkisebbike, melyet az egyenes a síkban fekvő egyenesekkel képez,* mert ebben a merőlegesség esete is benn foglaltatik. A midőn az egyenes nem merőleges a síkra, akkor azoknak hajlásszöge az a *hegyes szög, melyet az egyenes derékszögű projectiójával a síkra képez.*

Ha az egyenes a síkkal párhuzamos, akkor az derékszögű projectiójával is párhuzamos, s hajlásszöge a síkkal 0^0.

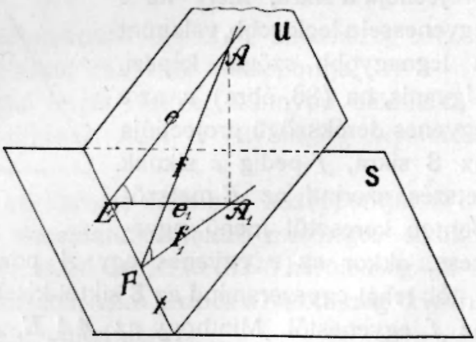
A hajlásszög fogalmának értelmezése után még néhány figyelemre méltó következtetést akarunk ide irni, melyeknek a későbbiekben hasznát vesszük. Ezek :

Egy egyenes és annak tükörképe egy síkra vonatkozólag a tükör síkjával egyenlő szöget képez.

Párhuzamos egyenesek ugyanazzal a síkkal vagy párhuzamos síkokkal egyenlő szöget képeznek.

Egy egyenes hajlásszögei egy síkhoz és egy a síkra merőleges egyeneshez egymásnak pótlószögei. (Ez a 86. ábra AA_1E derékszögű háromszögéből könnyen következtethető.)

70. Két sík hajlásszöge. Lássuk, mikép lehet két sík hajlásszögét értelmezni. Legyen (87. ábra) **U**, **S** a két sík, t azoknak metszővonala. Az **U** sík egy A pontján keresztűl két egyenest húzunk az **U** síkban; az egyiket f-et tetszés szerint, a másikat e-t a t metszővonalra merőlegesen. Ha az e és f egyenes a t-t az E és F pontban metszi és a A pontnak



87. ábra.

derékszögű projectiója az **S** síkra A_1, akkor az AA_1E, AA_1F derékszögű háromszögből következik, hogy az $AEA_1 \sphericalangle > AFA_1 \sphericalangle$.

Minthogy az első szög az e egyenesnek, a második szög az f egyenesnek hajlásszöge az **S** síkhoz, azért a két sík metszővonalára merőleges e egyenes az **U** síkban nagyobb szöget képez az **S** síkkal, mint bármily más amabban a síkban fekvő egyenes. Az AE, A_1E egyenesek közül egyik a másiknak projectiója, tehát az **S** síkban a t egyenesre merőleges A_1E egyenes ugyanoly szöget képez **U**-val, mint AE az **S**-sel. E szerint *két sík hajlásszögét akkép értelmezhetjük, mint a két sík metszővonalára merőlegesen álló és az egyes síkokban fekvő egyeneseknek hajlásszögét.*

Két egyenes négy szöget képez egymással, ezek közül kettő egyenlő hegyes, a másik kettő tompa és amazoknak kiegészítő szöge, vagy mind a négy derékszög.

Ugyanigy két síknál is négy hajlásszöget képzelünk, melyet az egyes síkokban a metszővonalra merőlegesen álló egyenesek zárnak be. Ugyanily szögeket képez oly két egyenes, melyek közül egyik az 1-ső síkra, a másik a 2-dik síkra merőleges. Mert ha egy A pontból az 1-ső síkra bocsátott merőleges talpa U, a 2-dik síkra bocsátott merőleges talpa S, és az U és az S pontokból a két sík metszővonalára bocsátott merőleges talpa E, akkor az $AUES$ négyszögnek U és S-nél lévő szögei derékszögek, tehát az A és E-nél levők kiegészítő szögek lesznek.

E szerint két sík hajlásszögeit akkép is értelmezhetjük, *mint azon egyenesek hajlásszögeit, mely szerint a két sík metszővonalára merőleges sík a két síkot metszi, vagy mint oly két egyenes hajlásszögeit, melyek az egyes síkokra merőlegesek.*

Ezzel kapcsolatban ide írunk néhány a síkok hajlásszögére vonatkozó következtetést:

Egy sík tükörképe egy síkra vonatkozólag a tükör síkjával ugyanoly szöget képez, mint az eredeti sík.

Párhuzamos síkoknak hajlásszögei párhuzamos síkokkal egyenlők.

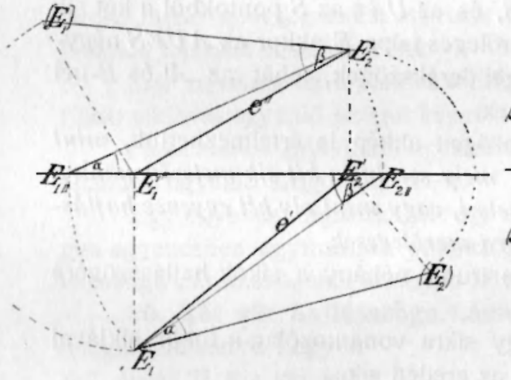
Ha két sík hajlásszögei közül csak a hegyesszöget tekintjük, akkor: egy sík hajlásszögei egy másik síkhoz és egy erre merőleges egyeneshez egymásnak pótlószögei.

71. **Az egyenes képsíkszögei.** *Szerkeszszük meg az* (e', e'') *egyenes hajlásszögeit az 1-ső és a 2-dik képsíkhoz.*

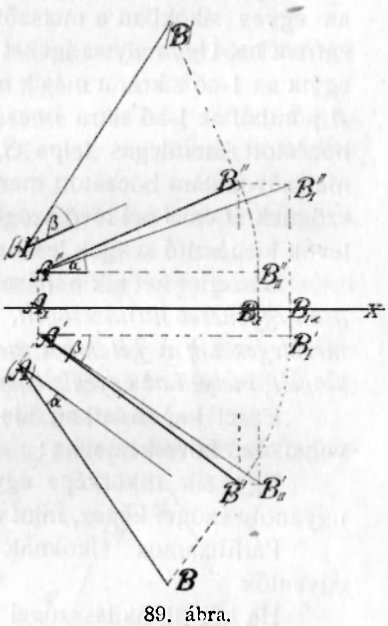
Megoldás. (88. ábra.) Ha az egyenes nyomai E_1, E_2, akkor az $E_2E_1E'_2$ derékszögű háromszögnek E_1-nél levő szöge α az e egyenes hajlásszöge az 1-ső képsíkhoz (*1-ső képsík szög*), és az $E_1E_2E_1''$ derékszögű háromszögnek E_2-nél levő β szöge e-nek hajlásszöge a 2-dik képsíkhoz (*2-dik képsíkszög*).

Az 1-ső képsíkszöget α-t megkapjuk, ha az $E_2E_1E'_2$ háromszöget vagy az $E_1E'_2$ befogó körül az 1-ső képsíkra, vagy az $E_2E'_2$ befogó körül a 2-dik képsíkra borítjuk (E_2) $E_1E'_2$, illetve $E'_2E_{1I}E_2$ helyzetbe. A β 2-dik képsíkszög pedig kiadódik, ha az $E_1E_2E_1''$ derékszögű háromszöget az $E_2E''_1$ befogó körül a 2-dik képsíkba, vagy az $E_1E''_1$ befogó körül az 1-ső képsíkra borítjuk $[E_1]$ $E_2E''_1$, illetve $E_1E_{2II}E''_1$ helyzetbe.

A midőn az e egyenes nyomai a rajzlapon kivül vannak (89. ábra), akkor az egyenesen két pontot A, B-t veszünk fel és megszerkesztjük az $AA'B'B$-vel, valamint az $AA''B''B$-vel congruens trapezeket; az AB oldal hajlásszöge a szemben fekvő $A'B'$, illetve $A''B''$ oldallal, vagy az ezekkel párhuzamos egyenesekkel lesz az α, illetve a β szög.



88. ábra.



89. ábra.

A 89. ábrában $A''A_x\ B_{Ix}B_I''$ az $AA'B'B$-vel congruens trapez és α az 1-ső képsíkszög; $A'A_xB_{IIx}B'_{II}$ az $AA''B''B$-vel congruens trapez és β a 2-dik képsíkszög.

Mindkét ábra (88. és 89.) egy d vonaldarab, annak d', d'' képei és a vonaldarabot tartó egyenes α, β képsíkszögei között fönforgó

$$d' = d \cos \alpha,\ d'' = d \cos \beta$$

összefüggést mutatja, mig a 88. ábrából látható, hogy

$$E_1E'_2 = E_1E_2 \cos\alpha, \qquad E_2E''_1 = E_1E_2 \cos\beta$$
$$(E_2)E'_2 = E_2E'_2 = E_1E_2 \sin\alpha, \ (E_1)E''_1 = E_1E''_1 = E_1E_2 \sin\beta.$$

Az $E_2E''_1E'_2$ háromszögből következik, hogy $E_2E''_1 \geq E_2E'_2$, és az előbbi egyenletekből az értékeket helyettesítve

$$\cos\beta \geq \sin\alpha,$$

vagy mert hegyesszögekről lévén szó

$$90^0 - \beta \geq \alpha, \text{ azaz } 90^0 \geq \alpha + \beta.$$

Ennélfogva: *az egyenes 1-ső és 2-dik képsíkszögének összege kisebb vagy egyenlő egy derékszöggel a szerint, a mint az egyenes nem merőleges, vagy merőleges a képtengelyre.*

Ha az egyenes a képsíkok egyikével, ide számítva az oldalképsíkot is, párhuzamos, akkor az egyenes 1-ső, 2-dik és oldalképsíkszöge közvetlenül a képekből adódik ki. Ha pl. az egyenes az 1-ső képsíkkal párhuzamos, akkor 1-ső képsíkszöge $= 0$, 2-dik képsíkszöge egyenlő 1-ső képének hajlásszögével az x képtengelyhez, oldalképsík szöge pedig ez utóbbinak pótlószöge. És ha az egyenes az oldalképsíkkal párhuzamos, tehát 1-ső és 2-dik képe az x képtengelyre merőleges, akkor oldalképsíkszöge 0, 1-ső és 2-dik képsíkszöge pedig az oldalképnek az y és z tengelylyel képezett hajlásszöge.

72. A sík képsíkszögei. *Szerkeszszük meg az* $[s_1, s_2]$ *sík hajlásszögeit az 1-ső és a 2-dik képsíkhoz.*

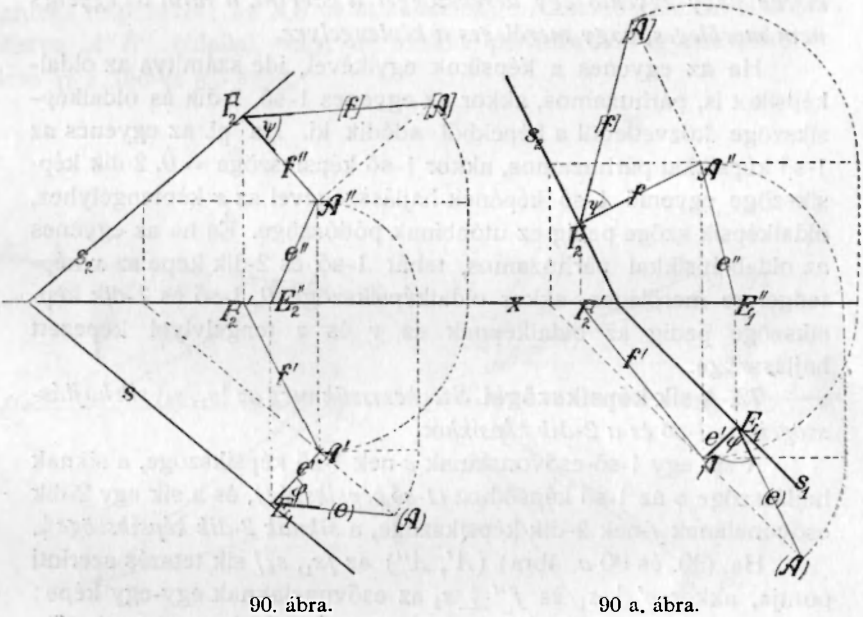
A sík egy 1-ső esővonalának e-nek 1-ső képsíkszöge, a síknak hajlásszöge φ az 1-ső képsíkhoz *(1-ső képsíkszög)*, és a sík egy 2-dik esővonalának f-nek 2-dik képsíkszöge, a *síknak 2-dik képsíkszöge* ψ.

Ha (90. és 90 *a.* ábra) (A', A'') az $[s_1, s_2]$ sík tetszés szerinti pontja, akkor $e' \perp s_1$ és $f'' \perp s_2$ az esővonalaknak egy-egy képe; ezekből a hiányzó e'', f' képek és a φ, ψ szögek szerkeszthetők. A szerkesztésnél az e'', f'' képeknek ismerete nem szükséges, mert az $A'E_1(A)$ és $A''F_2[A]$ derékszögű háromszögek azok nélkül is szerkeszthetők.

Valamivel egyszerűbb a szerkesztés, ha az e, f esővonalaknak mindkét nyomát felhasználjuk. Vegyük fel ezeket akképen, hogy az e 2-dik nyomának E_2-nek és az f 1-ső nyomának F_1-nek közös tengelyképe $E'_2 = F''_1$ legyen. E szerint (91. ábra) a képtengelyre merőleges E_2F_1 egyenes az s_1, s_2 nyomokat F_1, E_2-ben, a képtengelyt $E'_2 = F''_1$-ben metszi; ez utóbbi pontból az s_1-re húzott merőleges talpa E_1 és $E'_2E_1 = e'$; az s_2-re húzott merőleges talpa F_2 és $F''_1F_2 = f''$. Az $E_2E'_2$, E'_2E_1 befogokból rajzolt (E_2) E'_2E_1

vagy $E_2E'_2E_{1I}$ háromszögeknek φ szöge az 1-ső képsíkszög, és az $F_1F''_1$, F''_1F_2 befogókból alkotott $[F_1]F''_1F_2$ vagy $F_1F''_1F_{2II}$ derékszögű háromszögnek ψ szöge a 2-dik képsíkszög.

Az e, f esővonalak egymást egy A pontban metszik, mely a képtengely $E'_2 \equiv F''_1$ pontjából az $[s_1, s_2]$ síkra bocsátott merőlegesnek, mint az e 1-ső projiciáló síkja és az f 2-dik projiciáló síkja metszővonalának talpa. Ennélfogva az $E'_2 \equiv F''_1$ pontból az (E_2) $E'_2\,E_1$, $E_2\,E'_2\,E_{1I}$, $[F_1]\,F''_1\,F_2$, $F_1\,F''_1\,F_{2II}$ derékszögű háromszögek átfogóira bocsátott $E'_2\,(A)$, $E'_2\,A''_I$, $E'_2\,[A]$, $E'_2\,A'_{II}$ merőlegesek



90. ábra. 90 a. ábra.

mind egyenlők az $E'_2 \equiv F''_1$ pont r távolságával az $[s_1, s_2]$ síktól, azaz az A ponttól.

Az $E_2\,E'_2\,E_{1I}$ és $F_1\,F''_1\,F_{2II}$ derékszögű háromszögekből következik, hogy

$$r = E_2\,E'_2 \cos\varphi = E_{1I}\,E'_2 \sin\varphi = E_1\,E'_2 \sin\varphi$$

$$r = F_1\,F''_1 \cos\psi = F_{2II}\,F''_1 \sin\psi = F_2\,F''_1 \sin\psi$$

és az $E_2\,E'_2\,F_2$ derékszögű háromszögből

$$F_2\,E'_2 = F_2\,F_1'' \leqq E_2\,E'_2.$$

Ebbe a kifejezésbe az előbbi sorokból vett értékeket helyettesítvén

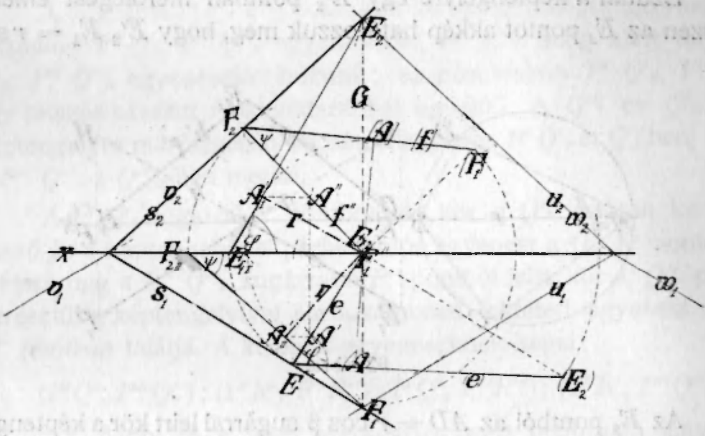
$$\frac{r}{\sin\psi} \leqq \frac{r}{\cos\varphi}, \text{ azaz } \cos\varphi \leqq \sin\psi$$

származik, ami tekintve hogy φ és ψ hegyesszög

$$90^0 - \varphi \leqq \psi, \text{ vagy a mi ugyanaz, } 90^0 \leqq \varphi + \psi$$

relatiót adja. Ennélfogva *egy sík képsíkszögeinek összege nagyobb vagy egyenlő egy derékszöggel a szerint, a mint a sík nem párhuzamos vagy párhuzamos a képtengelylyel.*

A képsíkokra projiciáló síkok képsík szögei a nyomok és az x képtengely hajlásszögeiben mutatkoznak. És pedig: az 1-ső képsíkra projiciáló síknak első nyoma és x a 2-dik képsíkszöget, a 2-dik képsíkra projiciáló síknak 2-dik nyoma és x az 1-ső képsíkszöget képezi.



91. ábra.

Igyekezzünk az egyenes és a sík képsíkszögeinek összegére vonatkozó relatiókat szemléletileg is igazolni.

Képzeljünk egy a képtengelyre merőleges e egyenest; ezen egyenes képsíkszögeinek összege egy derékszög.

Ha e-t az 1-ső képsíkra merőleges t tengely körül forgatjuk, akkor 1-ső képsíkszöge α változatlan marad, a 2-dik képsíkszög β pedig kisebbedik, mignem 0 lesz, a midőn ugyanis e a 2-dik képsíkkal párhuzamos. Ezért $\alpha + \beta \gtreqless 90^0$.

Ha pedig egy a képtengelylyel párhuzamos **S** síkot forgatunk az 1-ső képsíkra merőleges t tengely körül, akkor az 1-ső képsíkszög φ szintén nem változik, de a 2-dik képsíkszöge ψ mindig nagyobbodik egész a derékszögig. Az első helyzetnél $\varphi + \psi = 90^0$, tehát minden más helyzetnél $\varphi + \psi > 90^0$.

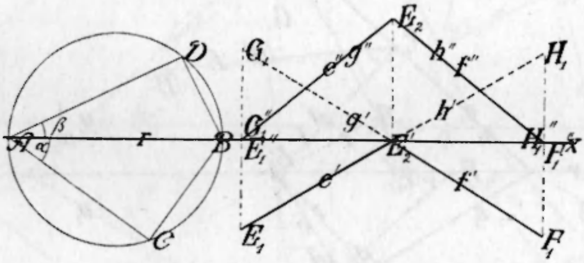
Feladatok.

73. Első dolgunk legyen az imént tárgyalt két alapfeladat fordított feladatát megoldani; tehát

69. feladat. Szerkesztessék egy oly egyenes, melynek képsíkszögei α, β *adva vannak.*

Megoldás. (92. ábra). A képtengely egy A pontján keresztűl a képtengelyhez α és β szög alatt hajló AC, AD egyeneseket húzunk és a képtengely egy B pontjából, mely A-tól tetszőleges r távolságra van, ezekre BC, BD merőlegeseket bocsátunk, azaz megszerkesztjük az $r \cos \alpha = AC$, $r \sin \alpha - BC$, $r \cos \beta = AD$, $r \sin \beta = BD$ vonaldarabokat.

Ezután a képtengelyre egy E'_2 pontban merőlegest emelünk és ezen az E_2 pontot akkép határozzuk meg, hogy $E'_2 E_2 = r \sin \alpha$.



92. ábra.

Az E_2 pontból az $AD = r \cos \beta$ sugárral leirt kör a képtengelyt egy E''_1 pontban metszi, melyen keresztűl menő és a képtengelyre merőleges egyenesre $BD = r \sin \beta$ vonaldarabot E''_1-től reárakjuk E_1-ig ($BD = E''_1 E_1$). Az $E_1 E'_2$ ekkor $= r \cos \alpha$ és $E_1 E'_2, = e'$, $E_2 E''_1 = e''$ képei a keresett egyenesnek.

Minthogy az E_2-ből leirható kör a képtengelyt két pontban E''_1-ben és F''_1-ben metszheti és a BD vonaldarab e pontokban a képtengelyre emelt merőlegesekre a képtengely alá és fölé rakható E_1, F_1, G_1, H_1-ig, azért még az

$F_1E'_2 = f', E_2F''_1 = f''; G_1E'_2 = g', E_2E''_1 = g''; H_1E'_2 = h', E_2F''_1 = h''$

egyenesek is képei az E_2 ponton keresztűl menő és a képsíkokhoz az adott szögek alatt hajló e, f, g, h egyeneseknek.

Az e, g, valamint az f, h egyenesek egymásnak tükörképei a 2-dik képsíkra; az e, f és a g, h egyenesek egymásnak tükörképei az E_2 ponton keresztűl menő és a képtengelyre merőleges síkra; végre az e, h, és f g egyenespárak tükörképek az E_2 ponton keresztűl menő és az 1-ső képsíkkal párhuzamos síkra.

Ezt még általánosabban fogjuk kifejezni ha azt mondjuk: *ha egy e egyenes tetszőleges pontján keresztűl az 1-ső, 2-dik és az oldalképsíkhoz párhuzamos síkokat fektetünk, akkor az e-nek h, g, f tükörképei e síkokra, mint tükrökre vonatkozólag a három képsíkhoz ugyanazon szögek alatt hajlanak mint e.*

Ha egy adott (P', P'') ponton keresztűl akarunk egyenest fektetni, melynek képsíkszögei α, β, akkor vagy az előbbi eljárás szerint talált egyenesekhez (P', P'') ponton keresztűl párhuzamosakat húzunk, vagy pedig közvetlenül, amazoktól függetlenül szerkesztjük az egyeneseket, mely szerkesztés azonban lényegileg nem külömbözik az előbbitől.

A (93. ábra) (P', P'') pontokon keresztűl a képtengelyhez párhuzamos $P'\,Q'_{\text{I}}$, $P''\,Q''_{\text{II}}$ egyeneseket, és β, α szög alatt hajló $P'\,Q'_{\text{II}}$, $P''\,Q''_{\text{II}}$ egyeneseket húzunk; ez utóbbiakon $P'\,Q'_{\text{II}}$, $P''\,Q''_{\text{I}}$ egy tetszés szerinti r vonaldarabbal egyenlő. A Q''_{I} és Q'_{II}-ből a képtengelyre merőlegesen bocsátott egyenes $P'\,Q'_{\text{I}}$-et Q'_{I}-ben, illetve a $P''\,Q''_{\text{II}}$-t Q''_{II}-ben metszi.

A $P'\,Q'_{\text{I}}$ sugárral P' pontból leirt kör a Q'_{II} ponton keresztűl menő és a képtengelylyel párhuzamos egyenest a Q', R' pontokban metszi, míg a $P''\,Q''_{\text{II}}$ sugárral a P'' pontból leírt kör a Q''_{I} ponton keresztűl a képtengelylyel párhuzamosan fektetett egyenest a Q'', R'' pontban találja. A keresett egyeneseknek képei:

$$(P'Q',\, P''Q'')\,;\; (P'R',\, P''R'')\,;\; P'Q',\, P''R'')\,;\; (P'R',\, P''Q'').$$

Az előbbi és a jelen szerkesztés azért tekinthető lényegileg ugyanegynek, mert $P'Q'_{\text{I}} = r \cos\alpha$, $P''Q''_{\text{II}} = r \cos\beta$, és a $Q'R'$, egyenes a P' ponttól $r \sin\beta$, végre a $Q''R''$ egyenes a P'' ponttól $r \sin\alpha$ távolságra van.

A szerkesztések mutatják: hogy *ha két egyenesnek egynevű képei a képtengelyhez egyenlő szögek alatt hajlanak, akkor az egyeneseknek egynevű képsíkszögei egyenlők.*

70. feladat. Egy ponton keresztűl fektessünk oly egyenest, melynek képsíkszögei adott pótlószögek α,90^0-α. Legegyszerűbben a ponton keresztűl menő oldalképsík alkalmazásával.

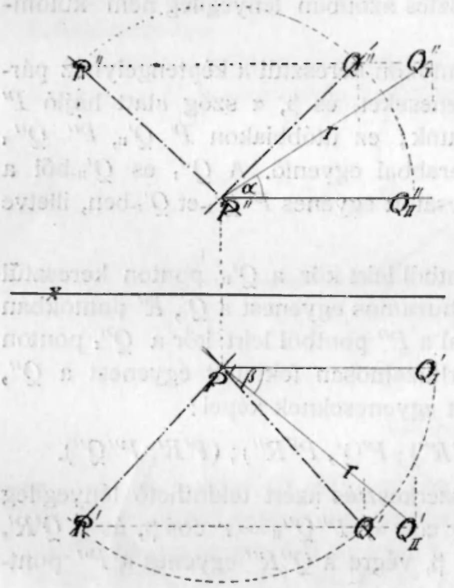
71. feladat. Adva van egy pontnak mindkét képe, egy rajta keresztűl menő egyenesnek egyik képe és az 1-ső vagy 2-dik képsíkszöge; szerkesztendő az egyenesnek hiányzó képe.

74. — *72. feladat. Szerkesztendő egy síknak két nyoma a sík képsíkszögeiből φ és ψ-ből.*

Megoldás. A 91. ábrát a φ, ψ-ből és a tetszés szerint választott r vonaldarabból fogjuk szerkeszteni. E végből az x képtengelyhez φ szög alatt hajló $E_2\, E_{1'}$ egyenest húzunk; ennek E_2 pontjából x-re $E_2\, E'_2$ merőlegest, E_2'-ből $E_2\, E_{1'}$-re $E'_2\, A'_1$ merőlegest bocsátunk. Az E'_2-ből $E'_2 A'_1 = r$-rel kört írunk le, melynek a képtengelyhez ψ szög alatt hajló $F_{2''}\, F_1$ érintője a képtengely $F_{2''}$-ben, az $E_2\, E'_2$ egyenest az F_1 pontban metszi.

Az E'_2 pontból az $E'_2\, E_{1'}$ sugárral leírt körhez F_1-ből és az $E'_2\, F_{2''}$ sugárral leírt körhez E_2-ből vont érintők, melyek egymást x-ben metszik, a keresett síknak s_1, s_2 nyomai.

A szerkesztés mutatja, hogy négy oly síkot lehet találni (ha $\varphi + \psi > 90^0$), melynek 2-dik nyoma az E_2 ponton megy keresztűl.



93. ábra.

Ugyanis az $E'_2\, F_{2''}$ sugárral leírt körhez E_2-ből két érintő s_2, u_2 húzható, és F_1-ből, valamint ennek a képtengelyre vonatkozó G_1 tükörképéből az $E'_2\, E_{1'}$ sugárral leírt körhez s_1, u_1, v_1, w_1 érintő húzható.

E szerint az E_2 ponton keresztűl menő és a képsíkokhoz φ, ψ szögek alatt hajló síkoknak nyomai: s_1, s_2; u_1, u_2; s_2, v_1; $u_2\, w_1$. A három utóbbi sík tükörképe az elsőnek az E_2 ponton keresztűl menő oldalképsíkra, a 2-dik képsíkra, illetve az E_2 ponton átfektetett és az 1-ső képsíkhoz párhuzamos síkra vonatkozólag. A négy sík közül kettő dűlt, kettő feszitett. Általában a dűlt síkoknak ugyanegy oldala képez hegyes, a másik tompa szöget a két képsíkkal; a feszített síknak az az oldala, mely az egyik képsíkkal hegyes szöget képez, a másikkal tompa szöget fog képezni.

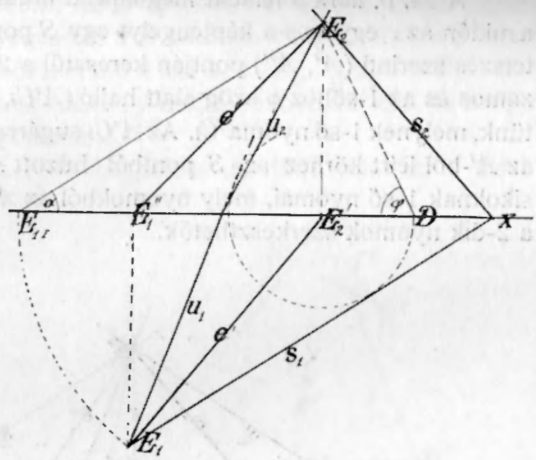
Ha a feladat azt kívánja, hogy a síkok egy (P', P'') ponton menjenek keresztűl, akkor a négy talált síkkal párhuzamos síkokat fektetünk a (P', P'') ponton keresztűl. Ezen síkok külömben, ha csak az [s_1, s_2] ismeretes, már könnyen szerkeszthetők.

Megjegyzendő: *hogy oly síkoknak egynevű képsíkszögei, melyeknek egynevű nyomai a képtengelyhez egyenlő szögek alatt hajlanak, egyenlők.*

73. feladat. Egy ponton keresztűl fektessünk két síkot, melynek képsíkszögei adott pótlószögek φ és $\psi = 90^0 - \varphi$. (Legegyszerűbb az oldalképsík használatával).

74. feladat. Adva van egy síknak egyik nyoma, szerkesztendő a másik nyom, ha az 1-ső vagy a 2-dik képsíkszög ismeretes.

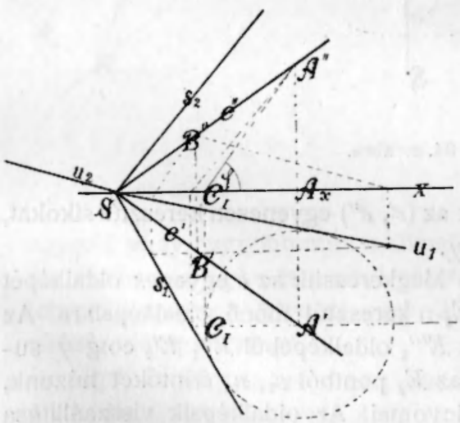
Ennél általánosabb a következő



94. a. ábra.

75. — *75. feladat. Egy (e', e'') egyenesen keresztűl sík fektetendő, melynek 1-ső képsíkszöge φ adva van.*

Megoldás. (94. a. ábra.) Az (e', e'') egyenes 2-dik nyomán E_2-n keresztűl a képtengelyhez φ szög alatt hajló egyenest húzunk, mely azt D-ben metszi. Az E_2-nek 1-ső képéből E'_2-ből a D ponton keresztűl k kört írunk le, melyhez az e egyenes E_1 nyomából húzott s_1, u_1, érintők a keresett síkoknak 1-ső nyomai.

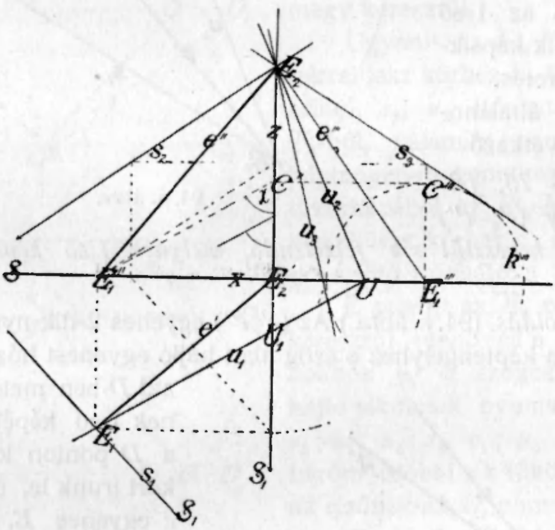


94. b. ábra.

Ha az $E'_2\, E_1$ vonaldarabot az E'_2 ponttól a képtengelyre visszük E_{11}-ig, akkor az $E_2\, E_1 1\, E'_2 \sphericalangle$ az e egyenesnek 1-ső képsíkszöge α. Ebből látható, hogy a kitűzött feladatnak *2, 1, 0* számú megoldása van, a szerint a mint $\alpha \lesseqgtr \varphi$, mert ezekben az esetekben az E_1 pontból a k körhez *2, 1, 0* számú érintők húzhatók.

Tehát »nem lehet egy egyenesen keresztűl oly síkot fektetni, mely kisebb szög alatt hajlik valamely síkhoz, mint az egyenes.«

A 94. b. ábra a feladat megoldását mutatja abban az esetben, a midőn az e egyenes a képtengelyt egy S pontban metszi. Az e-nek tetszés szerinti (A', A'') pontján keresztűl a 2-dik képsíkkal párhuzamos és az 1-sőhöz φ szög alatt hajló $(A'C_1, A''C''_1)$ egyenest fektetünk, melynek 1-ső nyoma C_1. Az $A'C_1$ sugárral, azaz $A''A_x$ cotgφ-vel az A'-ból leirt körhez az S pontból húzott s_1, u_1 érintők a kívánt síkoknak 1-ső nyomai, mely nyomokból az A és B pont segélyével a 2-dik nyomok szerkeszthetők.



94. c. ábra.

76. feladat. Fektessünk az (e', e'') egyenesen keresztűl síkokat, melyeknek oldalképsíkszöge χ.

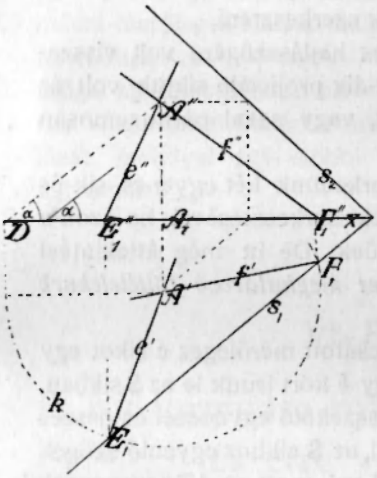
Megoldás. (94. c. ábra.) Megkeressük az e egyenes oldalképét e'''-at, annak 2-dik nyomán E_2-n keresztűl menő oldalképsíkra. Az e egyenes E_1 1-ső nyomának E'''_1 oldalképéből $E''_1\,E'_2$ cotg χ sugárral kört írunk le, s ehhez az E_2 pontból s_3, u_3 érintőket húzunk, melyek a kívánt síkok oldalnyomai. Az oldalképsik visszaállítása után az u_3, s_3 egyeneseknek 1-ső nyomai az U_1, S_1 pontok lesznek; ennélfogva $U_1E_1 = u_1$, $S_1E_1 = s_1$ a szerkesztendő síkoknak 1-ső nyoma, mig a 2-dik nyomok u_2. s_2 az E_2 ponton mennek keresztűl.

A 75. feladattal szemben állitható a következő:

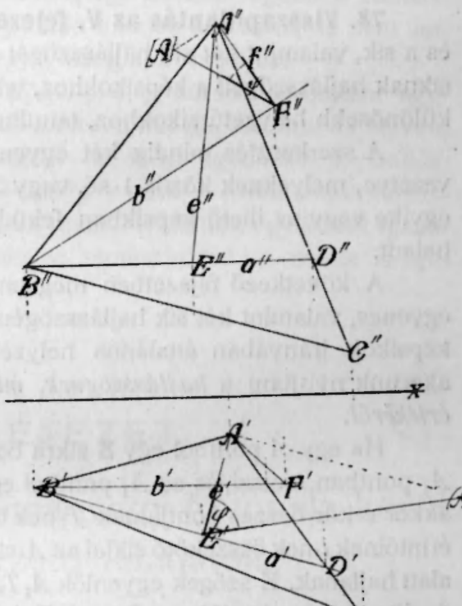
76. — *77. feladat. Egy adott síkban $[s_1, s_2]$-ben, adott (A', A'') ponton keresztűl egyenes fektetendő, melynek 1-ső képsíkszöge α ismeretes.*

Megoldás. (95. ábra) Az A'' ponton keresztűl a képtengelyhez α szög alatt hajló egyenes ezt a D pontban metszi. Az $A_x D$ vonaldarabbal az A' pontból leírható k kör s_1-et E_1, F_1-ben találja, mely már a keresett egyeneseknek e, f-nek 1-ső nyoma lesz, és melyből (e', e''), (f', f'') szerkeszthető.

A feladatnak *2, 1, 0* megoldása szerint a mint az α kisebb,



95. ábra.



96. ábra.

egyenlő vagy nagyobb mint a síknak 1-ső képsíkszöge φ. A második esetben az egyenes a sík 1-ső esővonala. Egy síkban tehát nem lehet oly egyenest felvenni, mely kisebb szöget képez egy másik síkkal, mint a sík maga.

77. — *78. feladat. Szerkesztendő egy síknak 1-ső képsíkszöge, ha a síknak három pontja A, B, C van adva.*

Megoldás. (96. ábra) A feladat megoldása úgy értendő, hogy a sík nyomait nem akarjuk felhasználni. E végből egy 1-ső fővonalat a-t fektetünk pl. a B ponton keresztűl és ennek segélyével megkereshetjük az A ponton keresztül menő (e', e'') 1-ső esővonalat $(e' \perp a')$, mely a-t az E pontban metszi. Az e egyenes 1-ső képsíkszöge $\varphi = (A)\ E'\ A'$, egyszersmind 1-ső képsíkszöge az ABC síknak.

Hogyan oldható meg a 77. feladat ezen adatok mellett?

79. feladat. Szerkesztendő egy egyenesnek és egy síknak hajlásszöge az oldalképsíkhoz.

Megoldási utasítás. Felkeressük az egyenesnek oldalképét, illetve a síknak oldalnyomát. Az egyenes 2-dik és oldalképéből valamint a síknak 2-dik nyoma és oldalnyomából a hajlásszög már az előbbiek szerint könnyen szerkeszthető.

78. Visszapillantás az V. fejezetre. E fejezetben az egyenes és a sík, valamint két sík hajlásszögét értelmeztük és az egyenes és síknak hajlásszögeit a képsíkokhoz, tehát a képsíkok irányában legkülönösebb helyzetű síkokhoz, tanultuk szerkeszteni.

A szerkesztés mindig két egyenes hajlásszögére volt visszavezetve, melyeknek közös 1-ső, vagy 2-dik projiciáló síkjuk volt és egyike vagy az illető képsíkban feküdt, vagy azzal párhuzamosan haladt.

A következő fejezetben megismerkedünk két egyenes, sík és egyenes, valamint két sík hajlásszögének szerkesztésével, ha azok a képsíkok irányában általános helyzetűek. De itt még áttekintést akarunk nyujtani a *hajlásszögnek, mint meghatározó föltételeknek értékéről.*

Ha egy A pontból egy **S** síkra bocsátott merőleges e síkot egy A_1 pontban metszi, és az A_1 pontból egy k kört írunk le az **S** síkban, akkor e kör összes pontjainak T-nek összekötő egyenesei és összes érintőinek t-nek összekötő síkjai az A-val, az **S** síkhoz egyenlő szögek alatt hajlanak. E szögek egyenlők A_1TA-val, mert az AT egyenesnek derékszögű projectiója az **S**-re A_1T, és a síkokat tekintve $AT \perp t$-re. E szerint egy ponton keresztül menő és egy síkhoz vagy egyeneshez adott szög alatt hajló egyenesek és síkok száma ∞^1.

Az egyenesre nézve egy föltétel, hogy egy síkhoz vagy egyeneshez adott α szög alatt hajoljék. Noha minden ponton (tehát ∞^3 számon) ∞^1 egyenes húzható keresztül egy síkhoz α szög alatt hajlólag, mégis a föltételnek megfelelő egyenesek száma nem $\infty^3 . \infty^1 = \infty^4$, hanem ∞^3, mert minden egyenesen ∞^1 pont van. E szerint a képsíkokhoz α, β szög alatt hajló egyenesek száma ∞^2, tehát csak annyi, mint a párhuzamos egyenesek száma. Igy tehát az egyenest a mellett, hogy képsíkokhoz α, β szögek alatt hajoljék, még általában két föltételnek vethetjük alá, pl. hogy egy ponton menjen keresztül (70. feladat), vagy két egyenest messen (46. feladat), de e föltételeknek amazoktól függetlennek kell lennie.

Igy nem adható még föltételül, hogy az egyenes egy másikra merőleges, vagy egy síkkal párhuzamos legyen vagy az oldalképsíkhoz egy γ szög alatt hajoljék, mert ezek mellett nem elégíthetők ki az α β hajlásszögekre vonatkozó föltételek.

Egy síkra nézve egy föltétel, hogy egy adott **S** síkhoz (vagy egyeneshez) φ szög alatt hajoljék, mert **S**-nek minden egyenesén csak véges számú (két) sík fektethető, mely hozzá φ szög alatt hajlik. Ezért a képsíkokhoz φ, ψ szög alatt hajló síkok száma ∞^1. A sík tehát adott képsíkszögek mellett még egy azoktól független föltételnek tehet eleget, pl. hogy egy ponton menjen keresztűl, de nem annak, hogy az oldalképsíkhoz egy χ szög alatt hajoljék.

Mert egy síknak hajlásszögei φ, ψ, χ, három páronként egymásra merőleges síkhoz, milyen a három képsík, alá vannak vetve e föltételnek: $\cos^2\varphi + \cos^2\psi + \cos^2\chi = 1$, és egy egyenes α, β, γ hajlásszögei ama képsíkhoz a $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma — 1$ relatiónak tartoznak eleget tenni. Kisértse meg az olvasó e relatiók egyikének igazolását, melylyel egy előbbi tételre támaszkodva, a másik is igazolva van!

VI. FEJEZET.

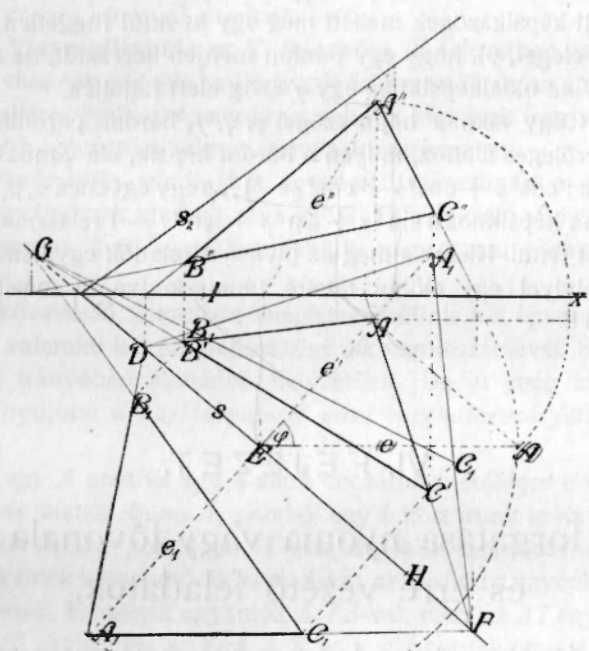
A sík forgatása nyoma vagy fővonala körül és erre vezető feladatok.

79. **Általános észrevételek e fejezet tárgyára.** Az ábrázoló geometria módszerei arra tanitanak, hogy olyan síkokban is végezhessünk szerkesztéseket, melyek nem esnek egybe a rajzlappal. A szerkesztések lényegükben úgynevezett planimetriai, azaz síkban fekvő alakzatokra vonatkozó szerkesztések; de mert a sík maga nem egyszersmind a rajzlap, azért a szerkesztések nem végezhetők közvetlenül az alakzatok síkjában.

Egy háromszög magasságpontjának, vagy a körülirt kör középpontjának szerkesztése planimetriai feladat; de ha a háromszög síkja nem a rajzlap maga, akkor e szerkesztést a planimetria módszereivel közvetlenül nem végezhetjük a rajzlapon, hanem *előbb a síkot a rajzlappal egyesiteni, ezután a planimetriai szerkesz-*

téseket a rajzlappal egyesült síkban véghezvinni, s végre a nyert tér-elemeket az eredeti síkba visszahelyezni kell. Egy síkidom síkjának egyesítése a rajzlappal, és a rajzlap egyes pontjainak vagy egyeseinek visszahelyezése a síkba, végre az ehhez fűződő feladatok megoldása képezi tehát főtárgyát e fejezetnek ; a planimetriai szerkesztést azonban, melyet az egyes feladatok megoldásai kivánnak, mint ismertet kell tekintenünk.

80. A sík leborítása az egyik képsikba. Az $[s_1, s_2]$ síkban (97. ábra) egy *ABC* háromszöget veszünk fel, és a síkot a benne



97. ábra.

fekvő háromszöggel együtt a síknak 1-ső nyoma körül forgatjuk, míg az 1-ső képsíkba nem jut, azaz *a síkot az 1-ső képsíkra leborítjuk.*

Ha csak arról volna szó, hogy az $[s_1, s_2]$ síkot borítsuk le az 1-ső képsíkra, azt képzeletben is tehetjük; de nekünk az *ABC* háromszög helyzetét kell megszerkesztenünk akkor, a midőn síkja az s_1 körül forgatva, az 1-ső képsíkkal egyesül. És ha eredetileg az $[s_1, s_2]$ síknak 1-ső képsikszöge φ és 180^0-φ volt, úgy a forgatás alkalmával az egyik szög mindig kisebbedik, a másik nagyobbodik, mignem akkor, a midőn a sík az 1-ső képsíkkal egyesült, a kisebbedő szög 0^0, a nagyobbodó 180^0 lett. A leborított háromszöget tehát két helyzetben fogjuk nyerni a szerint, a mint a φ vagy a 180^0-φ szög lett a forgatás végeztével egyenlő zérussal.

Szerkeszszük meg az $[s_1, s_2]$ síknak 1-ső képsíkszögét φ-t, pl. mint az A ponton keresztűl menő e esővonal $(A)E_1A'$ 1-ső képsíkszögét.

Az A ponton keresztűl menő e esővonal a síknak s_1 körül történő forgatása előtt és után merőleges s_1-re az E_1 pontban; ennélfogva leborított helyzete e_1 egybeesik 1-ső képével e'-vel. Ezen lesz a leborított A pont A_1 és pedig oly távolságra E_1-től, mint a milyen a forgatás előtt volt, t. i. $E_1(A)$.

Ennélfogva az 1-ső képsíkra leborított **S** *sík A pontjának leborított helyzetét A_1-et megkapjuk, ha A-nak 1-ső képéből A'-ből a sík 1-ső nyomára s_1-re bocsátott e' merőlegesre annak E_1 talppontjától mérve az $E_1(A)$ vonaldarabot, mint az A pontnak távolságát s_1-től, reárakjuk egyik és másik oldalra.*

Az AB egyenes s_1-et a D pontban metszi, mely pont nem változtatja helyzetét a forgatás alkalmával; A_1 B_1 D lesz tehát a leborított ABD egyenes, melyen B_1, a B-n keresztűl menő 1-ső esővonal 1-ső képének metszőpontja A_1D-vel.

Ugyanígy, ha az $(AC, s_1) = F$ pontot A_1-gyel összekötjük, és C'-ből merőlegeset bocsátunk s_1, úgy ezeknek metszőpontja C_1 a leborított C pont. Végre a BC egyenes s_1-et egy G pontban metszi, melyen a B_1C_1 egyenesnek is keresztül kell menni.

Az **S** sík ABC háromszöge s_1 nyoma körül az 1-ső képsíkra leborítva a két $A_1B_1C_1$ háromszög egyikére kerül a szerint, a mint a sík pontjaitól leírt íveknek centriszöge φ vagy 180^0-φ.

Az $A'B'C'$, $A_1B_1C_1$ háromszögek perspectiv helyzetü affin alakzatok, mert a megfelelő pontoknak A',A_1; B',B_1, C', C_1-nek összekötő egyenesei párhuzamosak, és a megfelelő egyeneseknek $A'B'$, A_1B_1; . . .-nek metszőpontjai egy egyenesen, az s_1-en feküsznek. Ezt általánosabban ekkép fejezzük ki: *egy síksokszög orthogonalis projectiója egy* **K** *síkra perspectiv helyzetü affin azzal a sokszöggel, melyet nyerünk, ha az eredeti sokszöget síkjának és a* **K** *síknak s metszővonala körül a* **K** *síkra reáborítjuk; s az affinitási tengely, az erre merőleges sugarak a projiciáló sugarak.*

Az **S** síkban fekvő ABC síkszög leborításánál a sík s_1 nyoma körül az 1-ső képsíkba, csak egy pontnak (legczélszerűbben annak, melynek 1-ső képe s_1-től legtávolabb), pl. A-nak, kell leborított helyzetét, A_1-et a pont 2-dik képének A''-nek felhasználásával meghatározni, — mert az A_1 pont, a síksokszög 1-ső képe és a sik nyoma, mint láttuk, elégséges a leborított sokszög többi alkotó részének megszerkesztésére. A mi pedig az A_1 pont felkeresését illeti, nem szükséges az $A'E_1(A)$ háromszög megrajzolása, hanem csak az $E_1(A)$ átfogónak hosszúsága. Ezt pedig, mint az $A''A_x$, $A'E_1$ befogókból alakítható derékszögű háromszögnek átfogóját a háromszög megrajzolása nélkül is körzőbe foghatjuk, pl. ha vagy az $A'E_1$ vonaldarabot az A_x ponttól a képtengelyre rakjuk I-ig, ekkor IA'' a keresett átfogó; vagy pedig az $A''A_x$ vonaldarabot az E_1 ponttól s_1-re rakjuk H-ig, ekkor HA' a keresett átfogó.

81. A sik visszaállitása. Egy a sík nyoma körül az illető képsíkra leborított sokszög leborított helyzetéből a sokszög képeit, azaz a sokszöget megszerkeszteni *a sík visszaállításának* nevezzük.

Tekintsük a 97. ábrában az $A_1\,B_1\,C_1$ háromszögek egyikét adottnak, a melyről azonban tudnunk kell, hogy a síknak mely szög alatt (φ vagy 180^0-φ) képzelt forgatásából származott, és határozzuk meg az $A'B'C'$, $A''B''C''$ képeket. Az A_1 ponttól az s_1-re bocsátott A_1E_1 merőleges, a sík egy e 1-ső esővonalának leborított helyzete e_1 és 1-ső képe e'. Ennek és így a síknak is megszerkesztjük 1-ső képsíkszögét φ-t; ezután egy derékszögű háromszöget, pl. $E_1A'(A)$-et rajzolunk, melynek átfogója A_1E_1 és egyik szöge φ. E háromszögnek a φ szög mellett levő befogója az A pont 1-só képének A'-nek távolsága az A_1E_1 egyenesnek E_1 pontjától. Annak megállapítására, hogy ama szerkesztett befogót az A_1E_1 egyenesre az E_1 ponttól mely oldalra vigyük megjegyezzük, hogy a szerint a mint az A_1 pontot a síknak a hegyes vagy a tompaszögű 1-ső képsíkszöge alatt eszközölt forgatásából tekintjük származottnak, az E_1 pont az A' pontot az A_1-től nem választja el, illetve elválasztja.

A megállapított A' pontból az s_1 és $A_1B_1C_1$ segélyével a perspectiv helyzetű affin sokszögek meghatározási módja szerint $A'B'C'$ háromszög és ebből az $A''B''C''$ a már ismert eljárás szerint szerkeszthető.

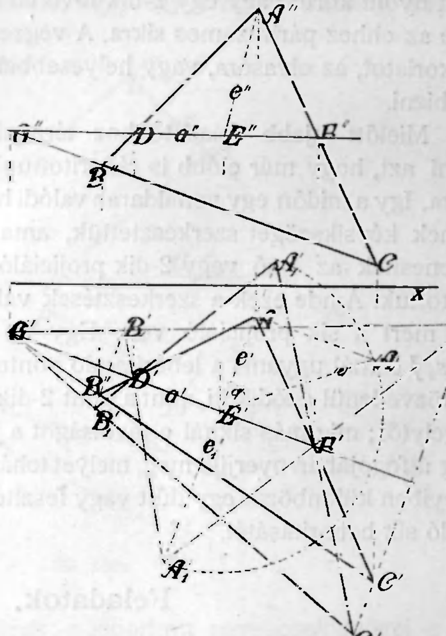
82. A sik forgatása és visszaállitása egyik fővonala körül. Legyen egy ABC háromszögnek és **S** síkja egyik 1-ső fővonalának, a-nak két képe adva (98. ábra); forgassuk az **S** síkot a benne fekvő ABC háromszöggel az a körül mindaddig, mig síkja az 1-ső képsíkkal nem párhuzamos, és határozzuk meg az ABC háromszög új helyzetének képeit. A végzendő szerkesztés: *a sík forgatása fővonala körül.*

Lényegileg a szerkesztés ugyanaz, mint az előbbi volt, csakhogy most a forgatandó **S** síkot nem az 1-ső képsíkra, hanem az

1-ső képsíkkal párhuzamos és az a-n keresztűl menő **K** síkra kell leborítani és ebben a helyzetben a vele congruens 1-ső képet meghatározni. Az a fővonalnak tehát ugyanaz a szerepe van jelenleg, mint előbb az s_1-nek.

Az A ponton keresztűl menő esővonalnak AE-nek, mely a-t az E pontban metszi, 1-ső képsíkszöge φ az $A'E'(A)$ háromszögnek E'-nél levő hegyesszöge, s mely háromszögnek $A'(A)$ befogója az A pont távolsága **K**-tól, vagy a mi evvel egyenlő: az A'' távolsága a''-től. Az $A'(A)$ vonaldarab adja tehát az A pontnak és így a forgatott A pontnak, A_1-nek távolságát az E-től, mely az 1-ső képében $E'A'_1$-ben valódi nagyságában projiciálódik.

Ha tehát az $E'(A)$ vonaldarabot az $A'E'$ egyenesre E'-től mérve egyik és másik oldalra reá rakjuk A'_1-ig, megkapjuk az a körül a **K** síkba forgatott A pontnak 1-ső képét.



98. ábra.

Az AB és AC egyenes a-t a D és F pontban metszi, melyek a forgatás alkalmával nem változnak; ezért A'_1D', A'_1F' ama forgatott egyeneseknek 1-ső képe, mig a forgatott B és C pontnak 1-ső képe B'_1, C'_1, a rajtuk keresztűl menő és az a' merőleges egyeneseken feküsznek. Minthogy a BC és a metszőpontjának G-nek helyzete sem változik: a', $B'C'$, $B'_1C'_1$ egyenesek a G' pontban találkoznak. A forgatott ABC háromszögnek $A'_1B'_1C'_1$ képéből, annak az a'' egyenesen fekvő 2-dik képe szerkeszthető. —

A **K** sík $A_1B_1C_1$ háromszögének az a fővonal körül történő visszaforgatása az **S** sík ABC háromszögébe, tehát az ABC háromszög képeinek szerkesztése, az $A_1B_1C_1$ háromszög, az a', a'' fővonal és a φ képsíkszögből, képezi *a sík visszaállítását.*

Az adatokból képezhető $A'E'(A)$ háromszög az A' pontot szolgáltatja, mely ismét az $A'B'C'$ meghatározásához vezet. Az A pont 2-dik képe A'', az a''-től A' (A) távolságára van az a'' fölött vagy alatt a szerint, a mint az A_1 pontot az 1-ső képsíktól eltávolítjuk vagy ahhoz közelítjük, a midőn azt A-ba forgatva képzeljük. A D, F, G pontoknak 2-dik képe a''-őn, a B, C pontoknak 2-dik képe pedig az $A''D''$, $A''F''$ fekszik és $B''C''$ egyenes a G'' ponton megy keresztűl. — Természetes, hogy a sík nemcsak 1-ső nyoma körül borítható az 1-ső képsíkra, vagy egy 1-ső fővonala körül az első képsíkhoz párhuzamos síkra, hanem egyszersmind a 2-dik nyom körül vagy egy 2-dik fővonal körül forgatva a 2-dik, illetve az ehhez párhuzamos síkra. A végzendő szerkesztést, mint jó gyakorlatot, az olvasóra, vagy helyesebben a rajzoló olvasóra akarjuk bízni.

Mielőtt ujabb feladatokhoz térnénk, emlékezetbe kívánjuk hozni azt, hogy már előbb is ráborítottunk síkokat az egyes képsíkokra. Igy a midőn egy vonaldarab valódi hosszuságát, vagy az egyenesnek képsíkszögét szerkesztettük, ama vonaldarabnak és ezen egyenesnek az 1-ső vagy 2-dik projiciáló síkját az illető képsíkra borítottuk. Ámde ezek a szerkesztések valamivel egyszerűbbek voltak, mert a sík projiciáló volt. Egy az 1-ső képsíkra projiciáló $[s_1, s_2]$ síknál ugyanis a leborítandó pontnak távolsága az s_1 nyomtól közvetlenül adódik ki, mint a pont 2-dik képének távolsága a képtengelytől; míg más síknál e távolságot a jelzett derékszögű háromszög átfogójában nyerjük meg, melyet tehát még szerkesztenünk kell. Ennyiben különbözik egy dűlt vagy feszített sík leborítása egy projiciáló sík beborításától.

Feladatok.

83. — *80. feladat. Szerkesztendő az A pont távolsága az e egyenestől és az A-ból az e-re bocsátott merőleges metszőegyenes m.*

Megoldás. (99. ábra). Az A ponton és az e egyenesen keresztűl fektetett síkot annak, pl. 1-ső nyoma körül az 1-ső képsíkra borítjuk; a leborított A pont távolsága a leborított e-től a keresett távolság, és a leborításban meghúzott merőleges visszaállítása a kivánt merőleges.

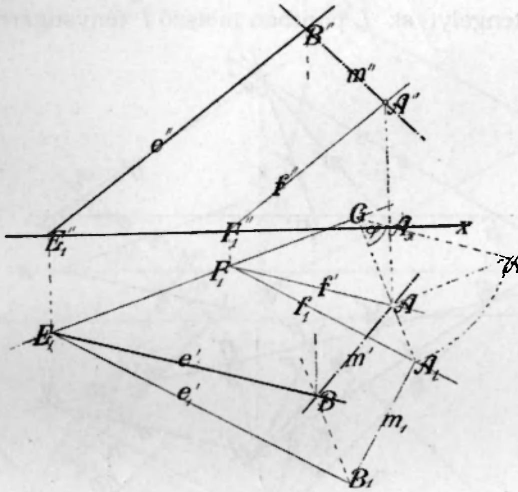
A kivitel ezek szerint következő: Az A ponton keresztűl az e-vel párhuzamosan haladó f egyenesnek és e-nek F_1, E_1 1-ső nyomát összekötjük, és A-t valamint f és e-t az s_1 összekötő egyenes körül mint az $[A, e]$ sík első nyoma körül az 1-ső képsíkra boritjuk.

Ha $A'GA_1 \perp s_1$; $A'(A) \perp GA'$, $A'(A) = A_xA''$, $(A)G = GA_1$, akkor $A_1F_1 = f_1$ a leborított f, melylyel $E_1B_1 = e_1$ párhuzamos és $A_1B_1 \perp e_1$ a keresett távolság. $A_1B_1 = m_1$ a leborított merőleges, $B_1B' \perp s_1$ az e'-et B'-ben metszi és $(A'B', A''B'')$ a keresett m egyenesnek két képe.

Ugyane szerkesztés az e, f párhuzamos egyenesek távolságának, A_1B_1-nek, meghatározását is jelentheti.

84. — *80. feladat. Két metszőegyenes hajlásszögeinek és szögfelezőinek szerkesztése.*

Megoldás. (100. ábra). Az e és f egyenest $[e, f]$ síkjának egyik nyoma körül az illető képsíkra, vagy egy fővonala körül a képsík-



99. ábra

kal párhuzamos síkra borítjuk; a leborított egyenesek szögei a keresett szögek, azoknak szögfelezői a visszaállított síkban a keresett egyenesek.

A kivitelnél az $[e, f]$ síkban egy 1-ső fővonalat a-t veszünk fel. $A'G'A_1 \perp a'$, $A'(A) \perp A'G'$, $A'(A) = A''$ távolsága a''-től, $A'_1G' = (A)G'$; $A'_1E' = e'_1$, $A'_1F' = f'_1$, ezeknek hajlásszögei a keresett szögek. Az e'_1, f'_1 egyenesektől képezett szögek felezői m'_1, n'_1; ezek a'-t M', N' pontokban metszik; $A'M' = m'$, $A'N' = n'$, $M'M''$ és $N'N'' \perp a''$, $A''M'' = m''$, $A''N'' = n''$ (m', m''), (n', n'') a keresett szögfelezők képei. —

Szerkesztendő egy sík két nyomának, valamint a symmetria- és coincidentia-egyenesének hajlásszögei, valamint azoknak szögfelezői. —

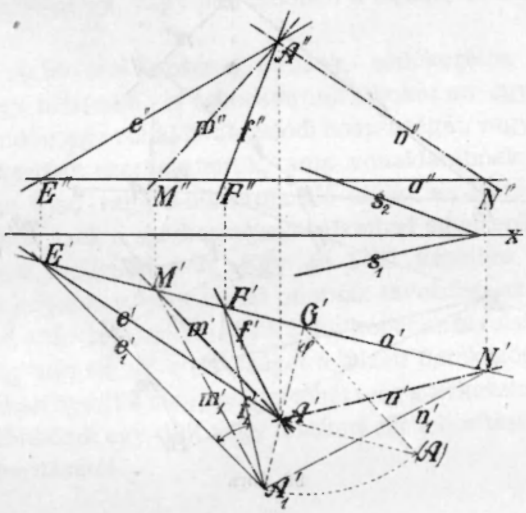
A 80. feladatra vezethető vissza a következő kettő:

81. feladat. Egy egyenes és egy sík hajlásszögének szerkesztése.

Megoldás. (100. ábra). Az adott e egyenes egy A pontjából az adott $\mathbf{S} = [s_1, s_2]$ síkra f merőlegest bocsátunk; az e, f egyenesek hegyesszögű hajlásszögének pótlószöge a keresett.

A kivitelnél az $A'A''$ pontoktól az s_1, s_2 bocsátott f', f'' merőlegesek f-nek képei. A többi, mint az előbbi feladatnál, csak a hegyesszög $e'_1\ f'_1$ pótlandó egy derékszögre.

A midőn a sík három pontjával van megadva a szerkesztés következőképen is végezhető: Ha például az l fénysugárnak akarjuk hajlásszögét az ABC háromszög síkjához meghatározni (101. ábra), akkor a képtengelyt az L pontban metsző l fénysugárnak egy P



100. ábra.

pontjából az ABC háromszög síkjára m merőlegest bocsátunk és az ml hajlásszöget 90^0-ra pótoljuk.

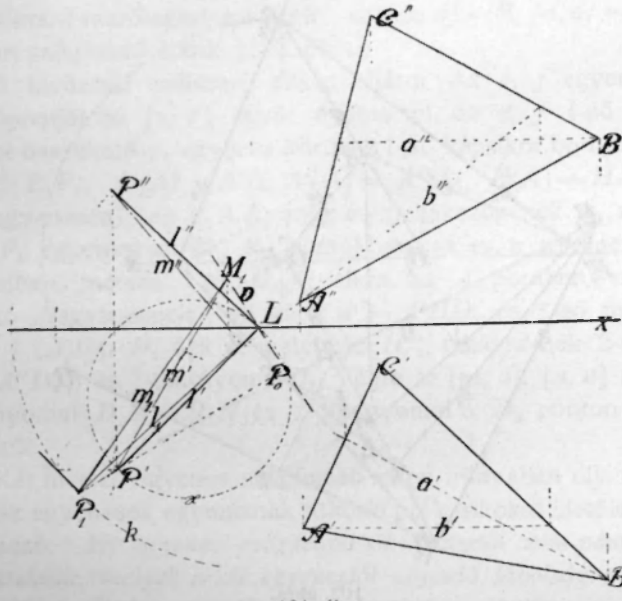
A kivitelnél: $m'' \perp b''$, $m' \perp a'$; a, b, az ABC síknak fővonalai. m-nek 1-ső nyoma M_1; a P pont az $M_1 L - v$ nyom körül az 1-ső képsík P_1 pontjába lesz forgatva $(P_1 P' P_0 \perp v,\ P_1 L = PL)$ és $M_1 P_1 P_0 \sphericalangle 90^0$-ra pótolva.

Ha több síkhoz kell meghatározni az l-nek hajlásszögét, akkor a változó m merőlegeseket valamennyit l-nek ugyanazon P pontjából bocsátjuk. $M_1 L P_0$ egyenes az L körül forog, a P_0 pont egy $\varkappa$ körön marad, melynek átmérője $P'L$, a P_1 pedig egy k körön marad, melynek középpontja L és sugara PL. E két kör segélyével a változó síkra merőleges m egyeneseknek hajlásszögét az l fénysugárhoz egyszerű úton megkapjuk, mihelyt m-nek 1-ső nyoma M_1 ismeretes.

82. feladat. Szerkesztendő a képtengelynek, vagy a három képsík egyikével párhuzamos egyenesnek hajlásszöge egy adott általános, vagy különös helyzetű síkhoz.

85. — *83. feladat. Két sík hajlásszögeinek szerkesztése.*

Megoldás. (102. ábra). A két adott **S**, **U** sík g metszővonalára merőlegesen álló **V** sík azokat e, f egyenesek szerint metszi; ez utóbbiak hajlásszögei egyszersmind az adott síkoknak hajlásszögei.



101. ábra.

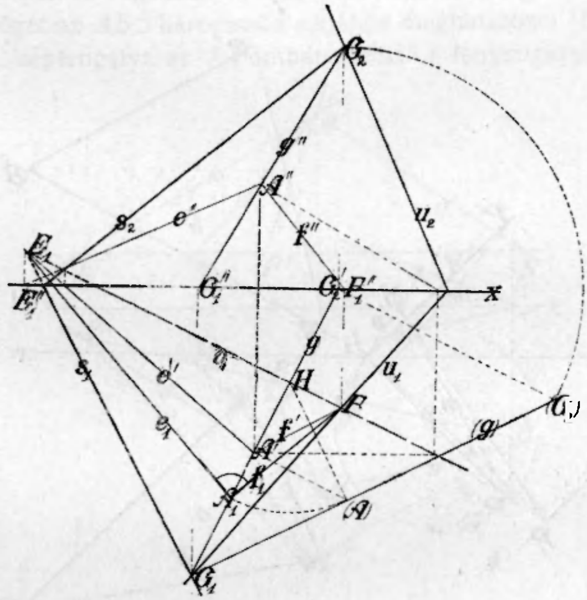
A kivitelnél több egyenes húzása fölöslegessé válik, ha a következőkép járunk el: Az **SU** síkok g metszővonalának 1-ső nyomától G_1-től aránylag nem nagy távolságra egy A pontot veszünk fel; e ponton keresztűl menő és a g-re merőleges **V** síknak megszerkesztjük 1-ső nyomát v_1-et, pl. az A ponton keresztűl menő a b fővonal segélyével $(b' // x,\ b'' \perp g'')$.

A $\mathbf{V} = [v_1, A]$ síkot a v_1 nyoma körül az 1-ső képsíkra borítjuk és A-nak leborított helyzetét A_1-et felkeressük $((g', v_1) = H$, $A''A_x = (A)A' \perp g'$, $A_1H = (A)H)$; végre az A_1-nek összekötő egyenesei az $(s_1, v_1) = E_1$, $(u_1, v_1) = F_1$ pontokkal képezik a v_1

körül az 1-ső képsíkba beborított e_1, f_1 egyeneseket, melyeknek hajlásszögei a keresett szögek.

A mint látható a **V** síknak 2-dik nyomát és az e, f egyeneseknek képeit nem kellett megrajzolnunk. A v_2 nyom a $(v_1, x) = V$ tengelypontból a g''-re bocsátott merőleges; s ha az E_1, F_1-nek tengelyképei E''_1, F''_1, akkor E_1A', E''_1A'', F_1A', F''_1A'' az e, f egyeneseknek képei.

A **V** sík v_1 nyomát és az A_1 pontot az előbbi eljárástól eltérőleg is lehet szerkeszteni. Ugyanis az $A'(A)G_1$ háromszög G_1 szöge



102. ábra.

és az $A'(A)$ H háromszög H szöge a g egyenesnek, illetve a **V** síknak 1-ső képsíkszöge; s mert az egyenes a síkra merőleges, azért $H(A)G_1$ derékszög. Ha tehát a g-nek 1-ső képsíkszögét akkép szerkesztjük, hogy 1-ső projiciáló síkját az 1-ső képsíkra borítjuk (g-nek 2-dik nyoma G_2; $G'_2(G_2) \perp g'$, $G'_2(G_2) = G'_2G_2$, $(G_2)G_1 = (g)$, akkor a leborított (g) bármely (A) pontjában (g)-re emelt merőleges g'-et a v_1-nek egy H pontjában metszi. Ezzel meg van egyszersmind $v_1 \perp G_1H$ és A_1 a g'-ön ($HA_1 = H(A)$), tehát az $A_1E_1 = e_1$ és $A_1F_1 = f_1$ egyenes, mely a síkok hajlásszögeit képezi. —

Szerkesztessenek hajlásszögei két síknak, melyek: *a)* az egyik képsíkra projiciálók; *b)* a képtengelylyel párhuzamosak, tehát az oldalképsíkra projiciálók; *c)* melyeknek 1-ső nyomai párhuzamosak; *d)* melyeknek metszővonala a képtengelyre merőleges, pl. a symmetria- vagy coincidentia-síkra merőleges síkoknak.

Szerkesztessenek két sík hajlásszögei, melyek három-három pontjukkal vannak adva (legegyszerűbben, mint a síkokra bocsátott merőlegeseknek hajlásszögei).

84. feladat. Szerkesztendők két metsző egyenes-nek, e, f-nek, *szögfelező síkjai*, azaz a két egyenes szögfelező egyenesein keresztűl menő és azoknak síkjára merőleges síkok.

Megoldás. Miután az e, f egyenesek hajlásszögeit felező m, n egyeneseket megszerkesztettük, az $(e, f) = A$ ponton keresztűl az $[e, f]$ síkra d merőlegest emelünk; az $[m, d] = \mathbf{R}$, $[n, d] = \mathbf{T}$ síkok a kivánt szögfelező síkok. (103. ábra.)

A kivitelnél czélszerű ekkép eljárni: Az e, f egyenesek A metszőpontját az $[e, f]$ egyik nyoma pl. az e, f 1-ső nyomait E_1F_1-et összekötő v_1 egyenes körül az 1-ső képsíkra borítjuk A_1-be, ($A'H \perp E_1F_1$, $A'(A) \perp A'H$, $A'(A) = A''A_x$, $H(A) = HA_1$, A_1 a HA' egyenesen); az $F_1A_1E_1$ szög és mellékszögének m_1, n_1 felezői az E_1F_1 egyenest az M_1, N_1, pontokban, az m, n egyenesek 1-ső nyomaiban metszik. Az $[e, f]$ síkra az A pontban merőlegesen álló d egyenesnek 1-ső képe $d' = A'HD_1$, és 1-ső nyoma D_1 $(A)D_1 \perp (A)G$). D_1-nek tengelyképe D''_1, tehát d-nek 2-dik képe $d'' = A''D''_1$, és 2-dik nyoma D_2. Végre az $[m, d]$, $[n, d]$ síkoknak 1-ső nyomai D_1M_1, D_1N_1 és 2-dik nyomai a D_2 ponton mennek keresztűl.

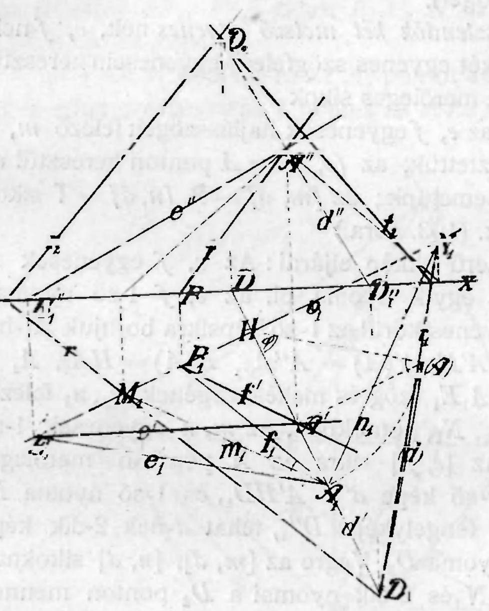
Két metsző egyenes szögfelező síkjai irányában oly helyzetű, hogy az egyenesek egymásnak tükörképei e síkokat illetőleg. Ebből következik: *két egyenes szögfelező síkjai tartói azon pontoknak és egyeneseknek, melyek a két egyenestől egyenlő távolságra vannak: a szögfelező síkokra merőleges, valamint e síkokhoz párhuzamos és így egyszersmind e síkokban fekvő, síkok és egyenesek a két egyeneshez egyenlő szögek alatt hajlanak.*

Mert ha az e, f egyenesek szögfelező síkjaira egy P pontból merőlegeseket bocsátunk, akkor az egyes merőlegeseken keresztűl menő síkok az e és f-el, valamint az ezekkel párhuzamos egyenesekkel egyenlő szögeket képeznek.

85. feladat. Két sík szögfelező síkjainak szerkesztése.

Két sík szögfelező síkjai a két sík metszővonalán mennek keresztűl és a két síkkal egyenlő szögeket képeznek.

Megoldás. Tekintsük az előbbi 103. ábrában az $[e, d]$, $[f, d]$ síkokat az adott síkoknak. Ezeknek metszővonala a d és hajlásszögei az e, f egyeneseknek hajlásszögeivel méretnek, mert ezek az egyes síkokban feküsznek és a d metszővonalra merőlegesek. Az ef szögek felezőit m és n-et a d-vel összekötő $[m, d]$, $[n, d]$ síkok a keresettek, mert a d metszővonalon mennek keresztűl és az adottakkal egyenlő szögeket képeznek.



103. ábra.

Két sík mindegyik szögfelező síkja irányában egymásnak tükörképe. Ennélfogva: *két sík szögfelező síkjai tartói mindazon pontoknak, melyek a két síktól egyenlő távolsagra vannak; minden a szögfelező síkokkal párhuzamos vagy azokra merőleges sík és egyenes a két síkhoz egyenlő szögek alatt hajlik.*

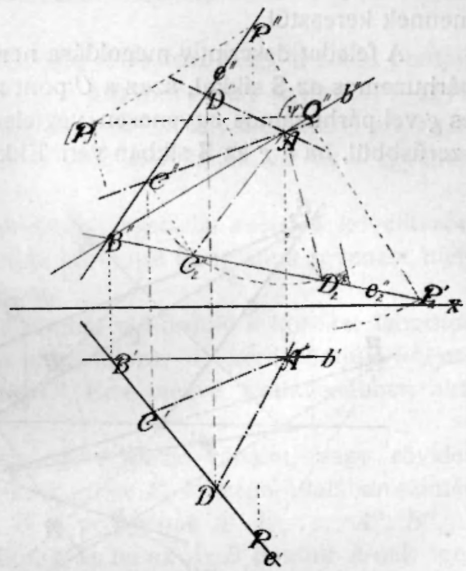
86. — *86. feladat.* Egy A ponton keresztűl oly egyenesek fektetendők, melyek egy adott e egyenest metszenek és ahhoz ε szög alatt hajlanak.

Megoldás. Az $[A, e]$ síkot egyik nyoma körül az illető képsíkra vagy egyik fővonala körül az illető képsíkkal párhuzamos síkra borítjuk; ott elvégezzük a kivánt planimetriai szerkesztést és a nyert egyeneseket visszaállítjuk.

A 104. ábrában az $[A, e]$ síknak A ponton keresztűl menő b fővonalát választottuk forgástengelynek, mely e-t a B pontban metszi. Ha a $[b, e]$ síkot a 2-dik képsíkkal párhuzamos és a b-n keresztűl menő síkra borítjuk, akkor e-nek leboritott 2-dik képe e''_2. (P', P'') tetszés szerinti pontja (e', e'')-nek; $(P''\ Q'' \perp b''$, $P''\ [P] \perp P''Q''$, $P''\ [P] = P'$ távola a b'-től, $Q''\ P''_2 = Q''\ [P]$ és P''_2 a $P''Q''$ egyenesen van: $P''_2\ B'' = e''_2)$. Ezután a b forgástengelyen fekvő változatlan A pontnak 2-dik képéből A''-ból az e''_2-höz ε szög alatt hajló $A''C''_2$, $A''D''_2$, egyeneseket huzunk, melyek e''_2-őt a C''_2, D''_2 pontokban metszik; e pontok visszaállítva az (e'', e')-ön (C'', C'), (D'', D') képeket adnak $(C''\ C''_2$

és $D'' D''_2 \perp b''$); és $(A'C', A''C'')$, $(A'D', A''D'')$ a keresett egyeneseknek képei.

Az AC, AD vonaldarabok az ACD egyenszárú háromszög következtében egyenlők, ezért az ábra e feladat megoldásának is tekinthető: egy e egyenesen oly pontot szerkeszteni, mely az A ponttól adott r távolságra van. A helyett ugyanis, hogy az A'' ponton keresztűl az e''_2-höz ε szögek alatt hajló egyeneseket $A''C''_2$, $A''D''_2$ húznánk, e''_2-őt az A'' ponttól r sugárral leírt körrel metszük pl. a C''_2, D''_2 pontokban és azokat visszaállítjuk. Áttekinthetőbben kifejezve ez utóbbi feladat „az e egyenes metszőpontját egy az A középpontból r sugárral leírható gömbbel“ kívánja.



104. ábra.

87. feladat. Fektessünk a g egyenesen keresztűl síkokat, melyek egy adott **S** *síkkal adott szöget képeznek.* (A 75. feladatnak általánosítása).

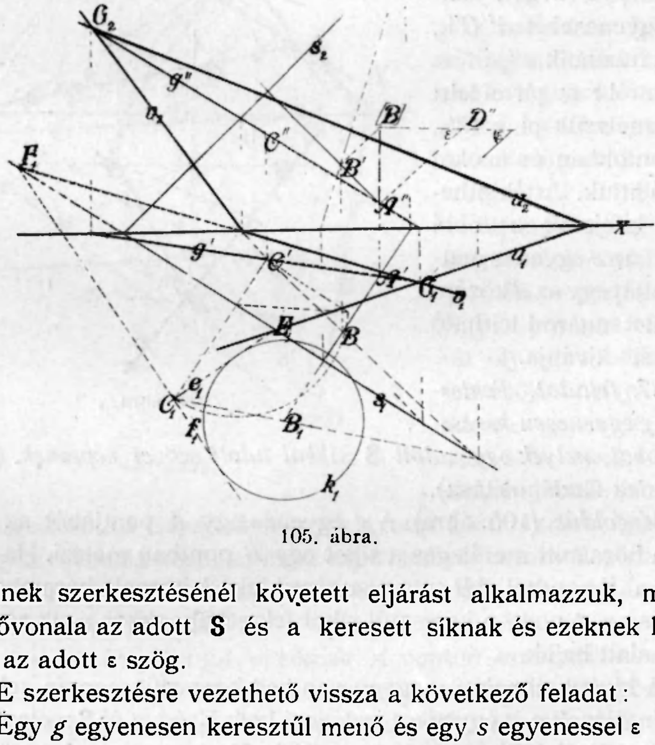
Megoldás. (105. ábra). A g egyenes egy A pontjából az adott **S** síkra bocsátott merőleges a síkot egy B pontban metszi. Ha az **S** síkban a B pontból AB cotg ε sugárral leírt k körnek bármely érintőjén és az A ponton keresztűl síkot fektetünk, akkor e sík az **S**-hez ε szög alatt hajlik.

A kivánt síknak a g egyenesen kell keresztűl mennie, tehát a k kör érintőjének a g egyenest metszeni kell. Ezért g és **S** metszőpontjából C-ből a k körhez vonható e, f érintők g egyenessel együtt oly $[e, g]$, $[f, g]$ síkokat határoznak meg, melyek az **S** síkhoz ε szög alatt hajlanak és g-n keresztűl mennek. Ezzel tisztában vagyunk a feladat stereometriai megoldásával és áttérhetünk a descriptiv megoldáshoz.

A (g', g'') egyenes (A', A'') pontjából az $[s_1, s_2]$ síkra bocsátott merőleges a síkot a (B', B'') pontban az (g', g'') pedig (C', C'') pontban metszi. $A B$ valódi hosszúsága $A'' [B]$; $[B] D = AB$ cotg ε. A

B és *C* pontoknak az s_1 nyom körül az 1-ső képsíkba leborított helyzete B_1, C_1; a B_1 pontból [*B*] *D* sugárral leírt k_1 körhez C_1-ből két érintőt e_1, f_1-et húzunk; ezeknek E_1 F_1 metszőpontja s_1-el, az *e*, *f* érintőknek 1-ső nyomai. E_1,G_1, F_1,G_1 az [*e*, *g*], [*f*, *g*] síkoknak 1-ső nyoma, a 2-dik nyomok pedig *g*-nek 2-dik nyomán G_2-n mennek keresztül.

A feladat descriptiv megoldása nem változik, ha a *g* egyenes párhuzamos az **S** síkkal, azaz a *C* pont a *B* ponton keresztül menő és *g*-vel párhuzamos egyenesen végtelen távol van, ellenben egyszerűsbbül, ha a *g* az **S** síkban van. Ekkor ugyanis két sík hajlás-



105. ábra.

szögeinek szerkesztésénél követett eljárást alkalmazzuk, mert *g* metszővonala az adott **S** és a keresett síknak és ezeknek hajlásszöge az adott ε szög.

E szerkesztésre vezethető vissza a következő feladat:

Egy *g* egyenesen keresztül menő és egy *s* egyenessel ε szöget képező síkok szerkesztése. Ugyanis egy oly sík, mely az *s*-re merőleges síkhoz 90⁰-ε szög alatt hajlik, az az *s* egyenessel ε szöget fog képezni.

88. feladat. Adva van két sík **U**, **S**; *fektessünk az* **U** *sík A pontján keresztül e síkban oly egyenest, mely az* **S** *síkhoz ε szög alatt hajlik.* (A 77. feladat általánosítása).

Megoldás. Az *A* pontból az **S** síkra bocsátott *AB* merőlegesnek *B* talpából *k* kört írunk le az **S** síkban *AB* cotg ε sugárral; ha *k* kör az **S**, **U** síkok g metszővonalát az E, F pontokban metszi, akkor az AE, AF egyenesek a kivánt tulajdonságuak.

A descriptiv megoldásnál az **S** síkban fekvő g egyenes és a k kör **S**-nek egyik nyoma körül az illető képsíkra lesz borítva; ott lesznek az E, F pontok leborításai meghatározva és g-re visszaállítva.

E feladatra vezethető vissza a következő: Egy **U** sík A pontján keresztűl az **U** síkban oly egyenes húzandó, mely egy adott s egyeneshez ε szög alatt hajlik. Ugyanis minden egyenes, mely az s egyenesre merőleges **S** síkhoz 90^0-ε szög alatt hajlik, az az s egyeneshez ε szög alatt fog hajlani. —

Oldjuk meg, mint e feladatnak specialis esetét a következőt: Egy **U** síkban, annak A pontján keresztűl fektessünk egyenest, mely a képtengelylyel ε szöget képez.

87. — A két utolsó feladatnál előforduló k köröket leborított helyzetükben használtuk a megoldásra, de kérdezhetjük, *hogyan lehet egy kör képeit szerkeszteni?* Erre nézve általánosabban akarunk felelni.

Ha egy $[s_1, s_2]$ síkban egy k görbe vonalat, vagy röviden mondva *görbét* képzelünk, akkor görbe k', k'' képei általában szintén görbék lesznek. A görbe A, B, .. pontjainak A', B', ...; A'', B'',... képei, pontjai a k', k'' görbéknek, és ha az A, B pontok k-nak igen közel fekvő pontjai, tehát összekötő egyenesük a k-nak egy t érintője, akkor az A', B' és A'', B'' képek is igen közel jutnak egymáshoz s ezért összekötő egyenesük a k', k'' görbéknek t', t'' érintői. Más szóval kifejezve: *egy síkgörbe pontjainak és érintőinek képei a görbe képeinek pontjai és érintői.* E pontok és érintők meghatározása végett a k görbe, síkjának egyik nyoma körül az illető képsíkra lesz reáborítva, azaz k_1 leborított helyzetben megrajzolva, és k_1 pontjai és érintőiből annyit lehet a síkba visszaállítani, a mennyi a k', k'' képek megrajzolásához czélszerűnek mutatkozik.

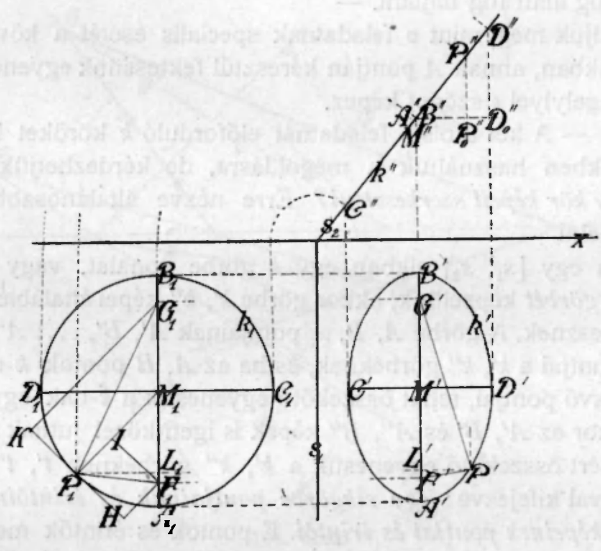
Ha a k' és k'' természete a k görbe ismert tulajdonságaiból előre megállapítható, a mi geometriai görbéknél (ellentétben a grafikus, azaz tetszésünk szerint rajzolt görbéknél) rendesen lehetséges, akkor k_1-ből csak annyi és oly pontot és érintőt állítunk vissza, a mennyi és a milyen a k', k'' görbék meghatározására elégséges, és e görbéknek új pontjait és érintőit más, rendszerint egyszerűbb módszerek alkalmazásával szerkesztjük. Igy ha előre tudjuk, hogy k-nak 1-ső képe k', kör lesz, akkor k'-nek csak három pontját határozzuk meg a leborított k_1 görbe segélyével és a nyert három ponton keresztűl kört írunk le.

Jelenleg már elég elemi úton kimutatható, hogy *egy körnek derékszögű projectiója a kör síkjával nem párhuzamos síkra egy ellipsis.*

Bizonyítás :

A 2-dik képsíkra projiciáló $[s_1, s_2]$ síkban (106. ábra) annak (M', M'') pontjából mint középpontból r sugárral egy k kört képzelünk leírva.

A körnek az 1-ső képsíkkal, ill. a 2-dik képsíkkal párhuzamos és jelenleg merőleges átmérői AB, CD; ezeknek $A'B'$ és $C''D''$



106. ábra.

képei egyenlők $2r$-rel, $A'' = B'' = M''$ és CD-nek 1-ső képe merőleges s_1-re.

Az s_1 körül az 1-ső képsíkra leborított k kör és AB, CD átmérők: k_1, A_1B_1, C_1D_1. A k kör egy P pontjának leborított helyzetéből P_1-ből annak képei P', P'', mint az ábra mutatja, egyszerűen szerkeszthetők.

A kör középpontján keresztűl az 1-ső képsíkkal párhuzamos síkot **U**-t képzelünk. A P és D pontból e síkra bocsátott merőlegesek talpai P_0, D_0; 2-dik képei P''_0, D''_0, ha $M''P''_0D''_0 // x$, $P''P''_0$ és $D''D''_0 \perp x$.

Az AB átmérőn M-től $D''D''_0$ távolságra két pontok F, G-t szerkesztünk; ezeknek 2-dik képei M'', 1-ső képei $A'B'$-ön és leborított helyzetei $A_1 B_1$-en akkép feküsznek, hogy

$$M'F' = G'M' = M_1F_1 = G_1M_1 = D''D_0''$$

Közvetlen belátható, hogy az $M''P''P''_0$, $M''D''D''_0$ háromszögek hasonlók és ha a $P_1 L_1 \perp A_1 B_1$; $F_1 I \perp P_1 M_1$ (L_1 pont az A_1B_1-en, I pont a $P_1 M_1$-en) akkor az $M_1P_1L_1$, M_1F_1I háromszögek is hasonlók; tehát

$$M''P''P''_0 \sim M''D''D''_0 \text{ és } M_1P_1L_1 \sim M_1F_1I\text{-ből}$$

$$M''D'' : M''P'' = D''D''_0 : P''P''_0$$

$$M_1P_1 : P_1L_1 = M_1F_1 : F_1I.$$

Minthogy e proportiók három 1-ső tagjai egyezők, azért a 4-dik is az lesz, tehát

$$F_1 I = P''P''_0$$

A k_1 kör P_1 pontjának érintőjére az F_1 és G_1 pontokból merőlegeseket bocsátunk, melyeknek H, K talpai a P_1-től F_1I távolságra vannak, úgy hogy $KP_1 = P_1H = P''P''_0 = PP_0$.

És most jól megfigyelendők a

$$P_1 F_1 H \cong PFP_0 \text{ és } P_1G_1K \cong PGP_0$$

derékszögű háromszögek ($P_1H = PP_0$, $P_1F_1 = PF$, $P_1HF_1 \sphericalangle = PP_0F \sphericalangle = 90^0$, stb.), melyekből

$$F_1H = FP_0 = F'P' \text{ és } G_1K = GP_0 = G'P'.$$

Minthogy az $F_1 G_1 KH$ trapez következtében

$$F_1H + G_1K = 2\ M_1P_1 = A_1B_1 = A'B'$$

azért

$$F'P' + G'P' = A'B'.$$

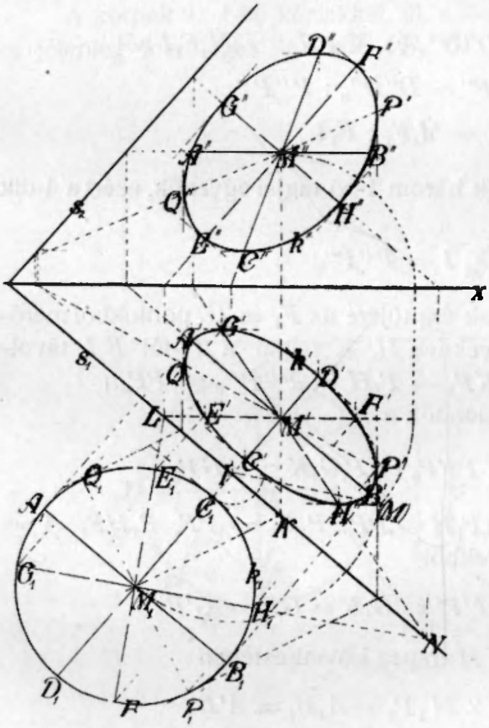
A talált egyenlet azt fejezi, hogy a k kör k' képe tetszésszerinti P' pontjának az F', G' pontoktól mért távolságai állandó és az $A'B'$-sel egyenlő összeget adnak. A P' pontok tehát oly ellipsisen feküsznek, melynek gyujtópontjai F', G' és főtengelye $A'B'$.

(A bizonyítás kevés változással Schmied Theodortól származik, ki azt a „Zeitschrift für das Realschulwesen“ czimű folyóirat XVII. kötetében (589. oldal) 1892-ben közölte. A tételnek bizonyítása más úton a „Középiskolai Mathematikai Lapok“ VII. kötetében a 65. oldalon is olvasható.)

Bár a k kör síkjának helyzete a képsík irányában különös, a tétel általános síknál is igaz marad, mert a sík csak a 2-dik képsík irányában különös, de az 1-ső képsík irányában általános helyzetű.

88. feladat. Egy $[s_1, s_2]$ *dűlt síkban fekvő kör képeinek szerkesztése.*

Megoldás. (107. ábra.) A kört az $[s_1, s_2]$ sík s_1 nyoma körül leborított k_1 helyzetében veszszük fel és megszerkesztjük M középpontján keresztűl menő 1-ső esővonalnak 1-ső képsíkszögét $M'I\,(M)$-et; ezután az s_1-nyommal párhuzamos AB átmérőnek és az előbbi esővonalon fekvő CD átmérőnek képeit $A'B'$, $A''B''$ és $C'D'$, $C''D''$-t. Ezek a k 1-ső képének k'-nek tengelyei, a 2-dik képének k''-nek kapcsolt átmérői lesznek.



107. ábra.

k''-nek tengelyei szintén a 2-dik fő- és esővonalakon feküsznek.

Az $LEMF$ 2-dik fővonalnak 1-ső képe $L'E'M'F'$ párhuzamos x-szel: L 1-ső nyomát M_1-gyel összekötő egyenes annak leborított helyzete; a reá merőleges $G_1M_1H_1N$ átmérő egy 2-dik esővonalnak leborított helyzete.

Az EF és GH átmérőknek leborított helyzeteiből az $E'F'$, $E''F''$, $G'H'$, $G''H''$ képek meghatározhatók és $E''F''$, $G''H''$ már a k''-nek fő- és melléktengelye.

A k', k'' ellipsiseknek az x képtengelyre merőleges érintőit és érintőpontjait megkapjuk, ha a k körnek az oldalképsíkkal párhuzamos KM átmérőjét és a KM-mel párhuzamos körérintők P, Q érintőpontját előbb a leborított helyzetben (KM_1, P_1, Q_1) aztán ez utóbbiakat az 1-ső és 2-dik képben (P', P''), (Q', Q'') megrajzoljuk, mint ezt az ábra mutatja. —

Szerkesztendők egy feszített, vagy egy a képtengelylyel párhuzamos síkban fekvő körnek képei.

88. Visszapillantás a VI. fejezetre. E fejezetben kétféle feladatokkal találkozunk: először olyanokkal, melyek tisztán planimetriai feladatoknak nevezhetők, csakhogy a sík, mely az adatokat tartotta és a szerkesztendő térelemek nem feküdtek a rajzlapban; másodszor stereometriai feladatokkal, melynél sem az adatok, sem a kívánt térelemek nem feküdtek ugyanegy síkban. Az elsőkre nézve például szolgáltak a 79., 80. és 86. feladatok, a másodikra a 81., 82. stb. feladatok.

Mindkét fajú feladatok, mint láttuk, oly planimetriai feladatokra lettek visszavezetve, melynél a szerkesztési mező a képsík volt. Ez pedig akkép történt, hogy a tisztán planimetriai feladatoknál az adatok síkját a képsíkkal egyenesítettük, vagy a képsíkkal párhuzamos helyzetbe forgattuk, a stereometriaiaknál pedig előbb egy síkot kerestünk a térben, mely alkalmas volt arra, hogy az ebben végzendő szerkesztések a feladat megoldásához vezessenek és e síkkal akkép bántunk, mint a planimetriai feladatoknál az adatok síkjával.

Minden stereometriai feladat megoldásánál fel kell ismerni, hogy mily síkban végzendő (planimetriai) szerkesztésre vezethető vissza, mely utóbbinak megoldásával egyszersmind a stereometriai feladat is meg van oldva. Igy, ha egy e egyenesen keresztűl oly síkot akarok fektetni, mely egy s egyeneshez φ szög alatt hajlik, akkor az s-re merőleges **F** síkban kell egy szerkesztést végeznem, mely a feladat megoldásához vezet. (87. feladat).

Vagy pedig, ha egy g egyenesen keresztűl oly síkot akarok fektetni, mely egy A ponttól adott r távolságra van, akkor könnyen belátható, hogy az A pontból a g egyenesre bocsátott merőleges **S** síkban az A pontból az r sugárral kört kell leírni; a g-n keresztűl menő oly sík, mely e körnek egy érintőjét tartalmazza, már a kivánt tulajdonsága. Jelen feladatnál az **S** sík az, melyben a planimetriai szerkesztést végezzük; bár nem közvetlenül, hanem a képsíkok egyikére leborított síkban.

E példák eléggé igazolhatták, hogy e fejezet tárgya az ábrázoló geometriának legfontosabb részét képezi.

VII. FEJEZET.

Forgatás a képsíkra merőleges tengely körül.

89. A forgatás mibenléte, feladata és czélja. Az előbbi fejezetben síkalakzatokat a sík egyes fővonala vagy nyoma körül forgattunk. A forgásszög, azaz a sík pontjaitól leírt ívek középponti szöge a síknak mindig egyik képsíkszöge (a hegyes vagy a tompa) volt, úgy hogy a sík bevégzett forgatása után az egyik képsíkkal vagy egy azzal párhuzamos síkkal egyesült, tehát egy ily síkra lett reáborítva.

Egy síkot azonban nemcsak egy abban fekvő egyenes körül, hanem bármily helyzetű egyenes — *forgástengely* — körül bármily forgásszög alatt forgathatunk. A síknak minden pontja, és hogyha egy a képsíkon kívűl fekvő alakzat is részt vesz a forgásban, úgy ennek is minden pontja, a forgás alkalmával körívet írt le, melynek síkja a forgástengelyre merőleges, melynek középpontja a forgástengelyen van, és mely ívnek középponti szöge a *forgásszög*.

A forgatásnak, mint segédeszköznek egy geometriai feladat megoldásánál az lehet a *czélja,* hogy a forgatandó alakzat egy vagy több téreleme a végzett forgatás után egy állandó térelem irányában egy bizonyos, a feladat megoldását előmozdító helyzetet foglaljon el. Vagy lehet a forgatás maga *önczél,* azaz a forgatandó alakzatnak ábrázolása a képzeletben végzett forgatás után lehet maga a kitűzött feladat.

A forgatás legegyszerűbben eszközölhető (a mi az ábrázolást illeti), ha a forgástengely a képsíkok egyikére merőleges. Ekkor ugyanis a forgatandó alakzat pontjaitól leírt köröknek képei azon képsíkon, melyre a tengely merőleges, közösközéppontú és amazokkal congruens körök, a másik képsíkon a képtengelylyel párhuzamos egyenesek. — E fejezetben végzendő forgatásnál oly forgástengelyt használunk, mely a képsíkok egyikére merőleges.

90. A pont forgatása. *Legyen adva az 1-ső képsíkra merőleges t egyenes és egy A pont; forgassuk az A pontot a t tengely körül:*

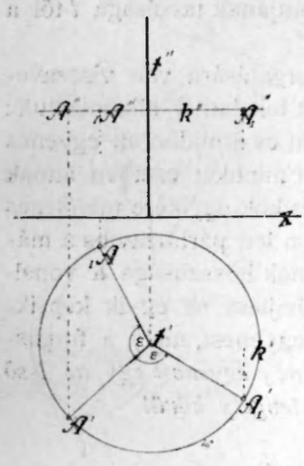
a) adott ε szög alatt,

b) míg nem jut egy adott **S** *síkba,*

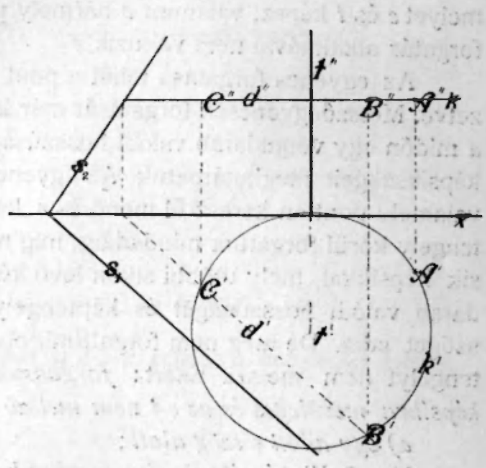
c) míg egy adott **U** *síktól r távolságra nem lesz.*

Megoldás. a) (108. ábra.) Két helyzetét kapjuk az A pontnak, a szerint a mint a forgatás az 1-ső képsíkra nézve az óramutatóval ellenkező, vagy ugyanegy értelemben történik. Ezen esetekben az A pont uj helyzetét A_1, illetve ${}_1A$-gyel akarjuk jelölni. Az A ponttól leírt teljes k körnek képei k', k''; ezen fekszik A_1 és ${}_1A$; még pedig ha az $A't'A'_1 \sphericalangle = {}_1A't'A' \sphericalangle = \varepsilon$, akkor A'_1, ${}_1A'$ a keresett pontoknak 1-ső képe, melyből a 2-dik képek k''-ön megtalálhatók.

b) (109. ábra). A forgatott A pontnak uj helyzete az A-tól leírt k körnek metszőpontja az **S** síkkal. k kör az **S** síkot síkjának és az **S** síknak d metszővonalában találja. Ezért a d metszővonal és k



108. ábra.



109. ábra.

kör B, C metszőpontjai (2, 1, vagy 0) a forgatott pontoknak keresett helyzetei.

c) Ha az **S**, **S*** síkok az **U** síktól r távolságra vannak, akkor az A pontot az **S**, **S*** síkokba kell *b)* szerint forgatni; a nyert pontok az **U** síktól r távolságra lesznek. (4, 3, 2, 1 vagy 0 számu megoldás).

91. **Az egyenes forgatása.** Két egyenesnél megkülömböztettük a párhuzamos, a metsző és a nem metsző helyzetet. Ha az e és t egyenes egymást metszi, akkor az e a t körül forgatva egy *forgáskúpot* ír le, melynek csúcsa az e, t egyenesek metszőpontja. Ha pedig e a t-vel párhuzamos, akkor a t körül forgó e egy különös kúpot ír le, melyet *forgáshenger*-nek neveznek. Ha végre az e és t nem metszőegyenes, úgy a t körül forgatott e szintén leír egy felületet, mely *forgáshyperboloid* nevet kapott. Ez utóbbinak alakja

ugyanaz, mint egy melléktengelye körül forgó hyperbolától leírt felület. (Ezzel csak fogalmat akarunk nyujtani ez utóbbi felület alakjáról, de állításunkat nem igazoljuk).

A midőn *e* és *t* egymást metszi, vagy párhuzamos, akkor az *e*-nek a *t* körül történő forgatása alkalmával *e*-nek a forgástengelyen levő pontja nem változik, s ezért ha bármely más pontjának meghatározzuk forgatott helyzetét, akkor ezt a változatlan ponttal összekötve egyszersmind a forgatott *e* egyenesnek is megkaptuk helyzetét a forgatás végeztével. Ha ellenben *e* és *t* nem metsző egyenesek, akkor *e*-nek két pontját kell a forgatás után összekötni, hogy *e*-t a forgatott helyzetében ábrázolhassuk. Jellemző, hogy az a szög, melyet *e* és *t* képez, valamint *e* bármely pontjának távolsága *t*-től a forgatás alkalmával nem változik.

Az egyenes forgatása tehát a pont forgatására van visszavezetve. Metszőegyenesek forgatását már két feladatnál alkalmaztuk: a midőn egy vonaldarab valódi hosszúságát és a midőn az egyenes képsíkszögeit meghatároztuk. Az egyenest mindkét esetben annak valamely pontján keresztűl menő és a képsíkok egyikére merőleges tengely körül forgattuk mindaddig, míg nem lett párhuzamos a másik képsíkkal, mely utóbbi síkon levő képnek hosszusága a vonaldarab valódi hosszúságát és képtengely-hajlása az egyik képsíkszöget adta. De még nem forgattunk oly egyenest, mely a forgástengelyt nem metszi. Ezért: *forgassuk az e egyenest egy az 1-ső képsíkra merőleges és az e-t nem metsző t tengely körül*

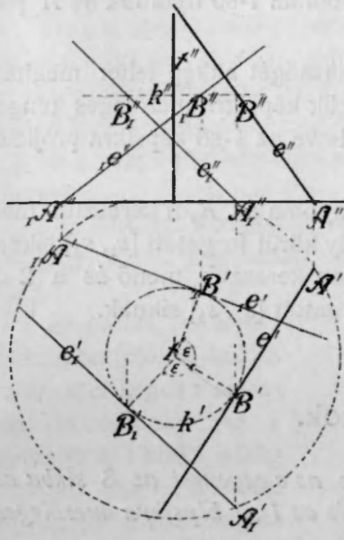
a) egy adott ε *szög alatt*;

b) a 2-dik képsíkkal párhuzamos helyzetbe.

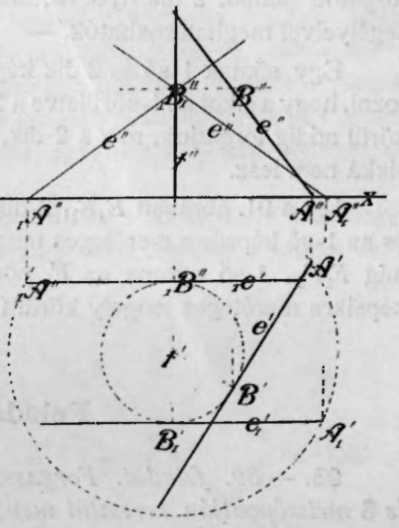
Megoldás. a) (110. ábra). Az *e*-nek a *t*-hez legközelebbi pontja B egy k kört ír le, melynek k' 1-ső képét a forgatott *e* egyenes 1-ső képe e' minden helyzetben érinteni fog. Ha tehát ${}_{1}B't'B' \sphericalangle = B't'B'_{1} = \varepsilon$, akkor a ${}_{1}B'$, B'_{1} pontoknak ${}_{1}e'$, e'_{1} érintői a keresett ${}_{1}e$, e_{1} egyeneseknek 1-ső képei. Ezeknek 2-dik képei az *e* egyenes egy másik pontjának, pl. A 1-ső nyomának ${}_{1}A$, A_{1} forgatott helyzeteiből egyszerűen meghatározhatók.

b) (111. ábra.) Ebben az esetben az e'_{1}, ${}_{1}e'$ egyenesek k körnek a képtengelyhez x-hez párhuzamos érintői lesznek; a 2-dik képek meghatározására akkép történik, mint az előbbi esetben.

92. A sík forgatása. Ha egy síknak három, nem ugyanegy egyenesen fekvő pontját egy *t* tengely körül ε szög alatt forgatunk, akkor a forgatott pontokon keresztűl menő sík az ε szög alatt forgatott síknak uj helyzete. A midőn a síknak három pontja van adva, úgy ezeket a pontokat forgatjuk, ha pedig a síknak nyomai vannak adva, akkor annak egy forgástengelyre merőleges fővonalát vagy nyomát forgatjuk és ezen valamint a sík és forgástengely metszőpontján, mint változatlan ponton keresztül, síkot fektetünk.

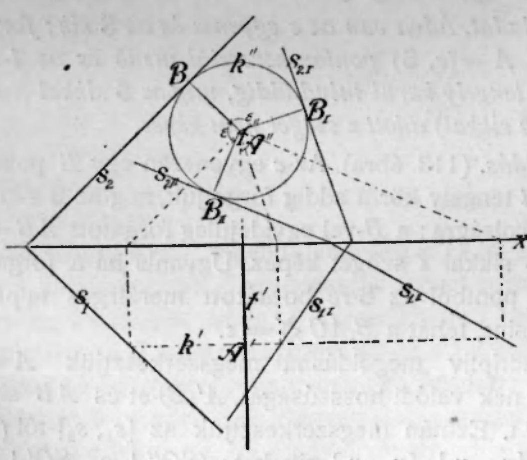


110. ábra.



111. ábra.

Forgassuk az $[s_1, s_2]$ *síkot a 2-dik képsíkra merőleges t tengely körül ε szög alatt.*



112. ábra.

Megoldás. (112. ábra.) A sík a t tengelyt az A pontban metszi, mely forgás közben nem változik, $(A'' = t'')$. Az A'' pontból az

s_2 nyomra bocsátott merőleges B talpa a B_{II} és $_{II}B$ helyzetbe jut az $A''B$ sugárral az A'' pontból leírt k körön ($_{II}BA''B \sphericalangle = BA''B_{II} \sphericalangle = \varepsilon$); e körnek s_{2II}, $_{II}s_2$ érintői a B_{II}, $_{II}B$ pontokban a forgatott síknak 2 dik nyomai, melyből az 1-ső nyomok az A pont segélyeivel meghatározhatók. —

Egy síknak 1-ső és 2-dik képsíkszögét akkép lehet meghatározni, hogy a síkot az 1-ső, illetve a 2-dik képsíkra merőleges tengely körül addig forgatjuk, míg a 2-dik, illetve az 1-ső képsíkra projiciáló síkká nem lesz.

Igy a 91. ábrában E_2E_{1I} 2-dik nyoma az E_2-n keresztűl menő és az 1-ső képsíkra merőleges tengely körül forgatott $[s_1, s_2]$ síknak, míg F_1F_{2II} 1-ső nyoma az F_1 ponton keresztűl menő és a 2-dik képsíkra merőleges tengely körül forgatott $[s_1, s_2]$ síknak.

Feladatok.

93. — *89. feladat. Forgassuk az e egyenest az* **S** *síkba az e és* **S** *metszőpontján keresztűl menő és az 1-ső képsíkra merőleges t tengely körül.*

Megoldás. Az e egyenesnek egy B pontját t körül az **S** síkba forgatjuk és a forgatott B pontot az $A = (e$, **S**$)$ metszőponttal összekötjük. (2, 1 vagy 0 megoldás.)

90. feladat. Adva van az e egyenes és az **S** *sík; forgassuk az e egyenest az A — (e,* **S***) ponton keresztűl menő és az 1-ső képsíkra merőleges t tengely körül mindaddig, míg az* **S** *síkkal (vagy az* **S***-sel párhuzamos síkkal) adott ε szöget nem képez.*

Megoldás. (113. ábra). Az e egyenesen egy B pontot veszünk fel és ezt a t tengely körül addig forgatjuk, míg az **S** síktól nem lesz AB sin ε távolságra; a B-vel egyidejűleg forgatott AB — e egyenes ekkor az **S** síkkal ε szöget képez. Ugyanis ha a forgatott B-ből, azaz a B_I pontból az **S**-re bocsátott merőleges talpa C, akkor $B_IC = AB \sin\varepsilon$, tehát a $B_IAC \sphericalangle = \varepsilon$.

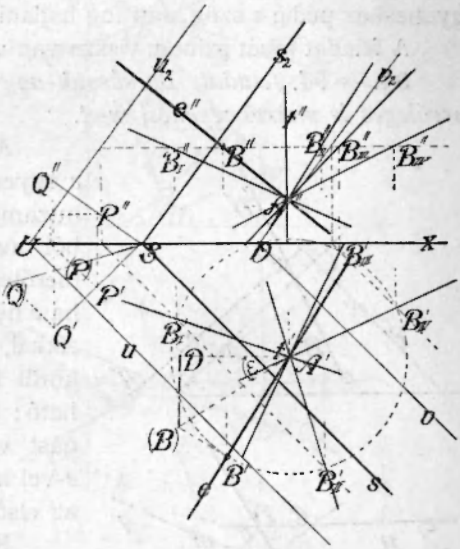
A descriptiv megoldásnál megszerkesztjük $A = [e$, **S**$]$-et; azután AB-nek valódi hosszúságát, $A'(B)$-et és AB sinε vonaldarabot $(B)D$-t. Ezután megszerkesztjük az $[s_1, s_2]$-től $(B)D$ távolságra levő $[u_1, u_2]$, $[v_1, v_2]$ síkokat; $(SQ'' \perp s_2$, $SQ' \perp s_1$; $Q'(Q) \perp SQ'$, $Q'(Q) = Q''Q_x$; $S(P) = (B)D$, $(P)P' \perp SQ'$. $[u_1, u_2]$ sík a P ponton megy keresztűl $US = SV$ az x-en; U és V tengelypontja az $[u_1, u_2]$ és $[v_1, v_2]$ síknak).

A B pontot t körül az $[u_1, u_2]$, $[v_1, v_2]$ síkokba forgatjuk B_I, B_{II}, B_{III}, B_{IV} helyzetbe; végre az A pontot ezekkel a pontokkal összekötő egyenesek a keresettek. A megoldások száma lehet 4, 3, 2, 1, 0.

Ha a t forgástengelyt nem metsző f egyenest kellene addig forgatni, míg egy **S** síkkal adott ε szöget nem képez, akkor előbb egy az f-fel párhuzamos és a t tengelyt metsző e egyenest forgatnánk **S**-hez ε szög alatt hajlólag, s amily szög alatt történt e-nek forgatása, míg ezt a helyzetet elérte, ugyanoly szög alatt kell az f-et is forgatni.

91. feladat. Forgassuk az **U** síkot az 1-ső képsíkra merőleges t tengely körül mindaddig, míg egy adott **S** síkkal ε szöget nem képez.

Megoldás. Az **S** és t metszőpontjától A-ból az **U** síkra merőleges e egyenest bocsátunk. Az e egyenest a t körül addig forgatjuk, míg az **S** síkkal (90°—ε) szöget nem képez (90. feladat); a forgatott e egyenesekre az (**U**, t) pontból merőleges síkokat bocsátunk, melyek már **U**-nak forgatott helyzetei lesznek. (Általában 4—0 megoldás.)



113. ábra.

Oldjuk meg a feladatot az **S** és **U** síknak különös helyzeteinél.

92. feladat. Forgassuk az e egyenest az egyik képsíkra merőleges és az e-t metsző t tengely körül, mig egy adott f egyenessel ε szöget nem képez.

Megoldás. Fektessük az (e, t) metszőponton keresztűl az f egyenesre merőleges **S** síkot; forgassuk az e-t a t körül mindaddig, míg az **S** síkkal (90°-ε) szöget nem képez (90. feladat); a forgatott e egyenes ekkor az **S**-re merőleges f egyenessel ε szöget fog képezni.

Oldjuk meg e feladatot, ha f a képtengely.

93. feladat. Forgassuk az **U** síkot az egyik képsíkra merőleges t tengely körül mindaddig, míg egy f egyenessel ε szöget nem képez.

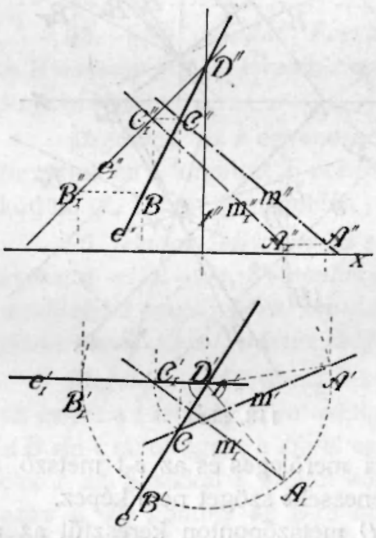
Megoldás. A t egyenes egy A pontján keresztűl az **U** síkra az e merőleges egyenest és az f egyenesre az **S** merőleges síkot bocsátjuk. Ezután az e egyenest t körül addig forgatjuk, míg a változatlan **S** síkkal ε szöget nem képez. Ha e_1 egyik forgatott helyzete e-nek, akkor az $(\mathbf{U}, t) - B$ ponttól az e_1-re bocsátott merőleges sík $\mathbf{U}_1$ a kivánt helyzetű.

Ugyanis a t tengelyt A és B pontban metsző e egyenes és a reá merőleges **U** sík azoknak együttes forgatása alkalmával a t tengely körül mindig merőlegesek maradnak és az A, B ponton mennek keresztűl, úgy hogy ha a B pontból az e-nek bármely forgatott helyzetére e_1 re merőleges sikot $\mathbf{U}_1$-et bocsátunk, ezt az **U** sík forgatott helyzetének tekinthetjük. Minthogy e_1 az **S**-hez ε szög alatt hajlik, azért $\mathbf{U}_1$ az **S**-hez $(90^0\text{-}\varepsilon)$ szög alatt, az **S**-re merőleges f egyeneshez pedig ε szög alatt fog hajlani.

A feladat tehát szintén vissza van vezetve a 90. feladatra.

94. — *94. feladat. Bocsássuk az e egyenesre az A pontból a merőleges és metsző egyenest m et.*

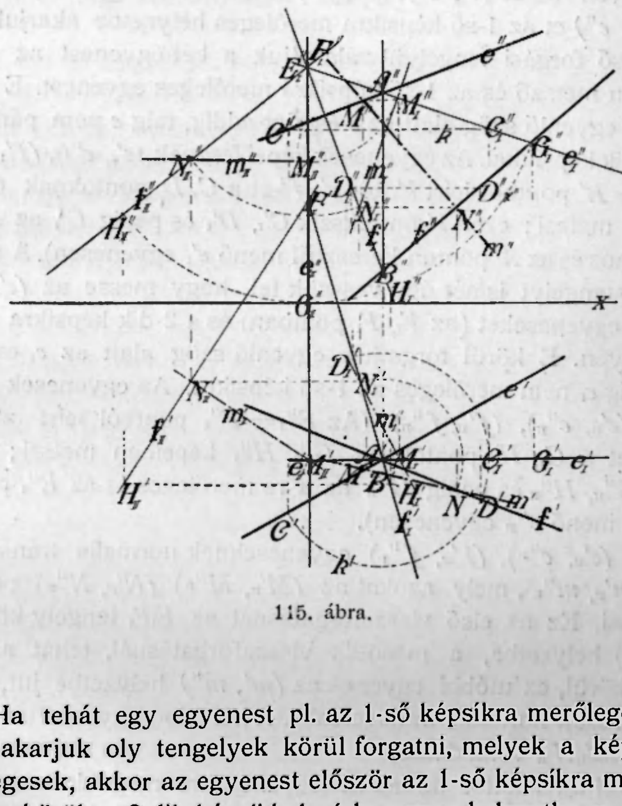
Megoldás. (114. ábra). Ha az e egyenes a 2-dik képsíkkal párhuzamos, akkor az A 2-dik képéből az e 2-dik képére bocsátott merőleges m-nek 2-dik képe. De ha e nem párhuzamos a 2-dik képsíkkal, akkor az egy t tengely körül forgatva ily helyzetbe hozható; és ha az A ugyanazt a forgást végzi, úgy a forgatott A és e-vel már akkép bánhatunk, mint az első esetben.



114. ábra.

Ennélfogva az e' egyenes egy $D' = t'$ pontjából A'-ön keresztűl k kört irunk le, mely e'-t B' pontban metszi; ha ezen körnek a képtengelylyel párhuzamos sugara $t'B'_1$, akkor ez az e'-nek $B't'B'_1 \sphericalangle$ alatt forgatott helyzete e'_1 azon t tengely körül, melynek 1-ső képe D'. Ily szöggel forgatjuk az A és B pontot az (A'_1, A''_1), (B'_1, B''_1) helyzetbe a t körül, és B''_1 pontot összekötjük $(t'', e'') = D''$ ponttal. A $B''_1D'' = e''_1$ egyenesre az A''_1 pontból bocsátott $A''_1C''_1$ merőleges m''_1; C''_1-ből meghatározható C'_1 és C', C'', úgy hogy $m' = A'C'$, $m'' = A''C''$ a keresett m egyenesnek két képe. —

Egy általános helyzetű egyenes a képsíkok egyikére merőleges tengely körül nem forgatható valamelyik képsíkra merőleges helyzetbe; mert ha eredetileg a két képsíkszög α, β, akkor az 1-ső vagy a 2-dik képsíkra merőleges tengely körül forgatva az α, illetve a β változatlan marad, tehát az egyenesnek másik képsíkszöge nem lehet derékszög. Ha ellenben az egyenes az egyik képsíkkal párhuzamos, azaz hajlásszöge e képsíkhoz 0^0, akkor e képsíkra merőleges tengely körül forgatva a másikra merőleges helyzetbe hozható, mert a szögek összege nem lépi túl a derékszöget.



115. ábra.

Ha tehát egy egyenest pl. az 1-ső képsíkra merőleges helyzetbe akarjuk oly tengelyek körül forgatni, melyek a képsíkokra merőlegesek, akkor az egyenest először az 1-ső képsíkra merőleges tengely körül a 2-dik képsíkkal párhuzamos helyzetbe, s innen a 2-dik képsíkra merőleges tengely körül az 1-ső képsíkra merőlegesen álló helyzetbe forgatjuk. Egy ily forgatással egybekötjük a következő feladat megoldását:

95. feladat. Két egyenes távolságának és normalis transversalisának szerkesztése.

Megoldás. (115. ábra). Láttuk (82. lap) hogy két egyenes távolságának és normalis transversalisának meghatározása abban az esetben, a midőn az egyik egyenes a képsíkok egyikére merőleges, igen kevés művelettel végezhető. Juttassuk tehát az általánosan adott egyenesnek valamelyikét forgatások útján az egyik képsíkra merőleges helyzetbe és hogy az egyeneseknek kölcsönös helyzetük ne változzék, a második egyenessel is végezzük ugyanazon forgatásokat. A forgatott egyenesekre oldjuk meg a kitűzött feladatot és a talált normalis transversalist az eredeti egyenesekhez forgassuk vissza.

Legyen tehát (e', e''), (f', f'') a két adott egyenes, melyek közül (e', e'')-et az 1-ső képsíkra merőleges helyzetbe akarjuk forgatni. Első forgási tengelyül választjuk a két egyenest az A, B pontokban metsző és az 1-ső képsíkra merőleges egyenest. E körül forgatjuk egyenlő szög alatt az e és f-et addig, míg e nem párhuzamos a 2-dik képsíkkal. Az egyenesek képei lesznek (e'_{I}, e''_{I}), (f'_{I}, f''_{I}). (Az $A' = B'$ pontból leírt k' kör e', f'-et a C, D pontoknak C', D' képeiben metszi; ezen k'-ön fekszik C'_{I}, D'_{I} és pedig C'_{I} az x-szel párhuzamos és az A' ponton keresztűl menő e'_{I} egyenesen). A második forgástengelyt ismét úgy vesszük fel, hogy messe az (e'_{I}, e''_{I}), (f'_{I}, f''_{I}) egyeneseket (az E_{I}, F_{I} pontban) és a 2-dik képsíkra merőleges legyen. E körül forgatjuk egyenlő szög alatt az e_{I} és f_{I}-et addig, míg e_{I} nem merőleges az 1-ső képsíkra. Az egyenesek képei lesznek (e'_{II}, e''_{II}), (f'_{II}, f''_{II}). (Az $E''_{I} = F''_{I}$ pontból leírt $\varkappa''$ kör e''_{I}, f''_{I}-et a G_{I}, H_{I} pontoknak G''_{I}, H''_{I} képeiben metszi; $\varkappa''$-ön fekszik G''_{II}, H''_{II} és pedig G''_{II} az x-re merőleges és az E''_{I} ponton keresztűl menő e''_{II} egyenesen).

Az (e'_{II}, e''_{II}), (f'_{II}, f''_{II}) egyeneseknek normalis transversalisa az (m'_{II}, m''_{II}), mely azokat az (M'_{II}, M''_{II}) (N'_{II}, N''_{II}) pontokban metszi. Ez az első visszaforgatásnál az $E_{I}F_{I}$ tengely körül az (m'_{I}, m''_{I}) helyzetbe, a második visszaforgatásnál, tehát az AB tengely körül, ez utóbbi egyenes az (m', m'') helyzetbe jut, mely már a keresett normalis transversalis. A két adott egyenes távolsága pedig az $M'_{II}N'_{II}$ vonaldarab.

Ezzel a feladatot az adott egyenesekre megoldottuk és azt a tanulságot vonhatjuk, hogy ha egy feladat megoldása azért egyszerűbb, mert az adatok a képsík irányában (nem egymás irányában) különös helyzetet foglalnak el, akkor az általános helyzetű adatok forgatás utján a képsíkok irányába abba a különös helyzetbe hozandók, melynél a megoldás egyszerűen végezhető. Ha most a feladatot az adatoknak e különös helyzeténél megoldjuk és az eredő vonalakat, pontokat, stb. az eredeti vonalokhoz visszaforgatjuk, úgy a feladatot ezekre nézve is megoldottuk. A forgatás tehát, mint *módszer* alkalmazható bizonyos (különösen távolságok és szögek meghatározására vonatkozó) feladatok megoldásánál.

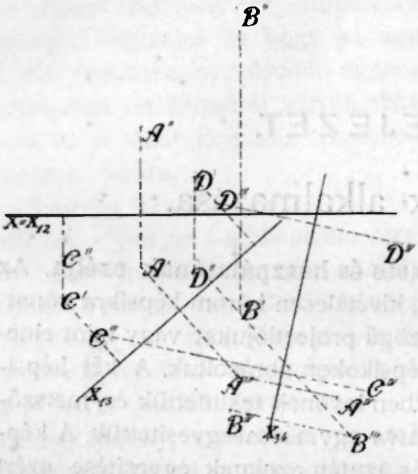
VIII. FEJEZET.

Új képsíkok alkalmazása.

95. Az uj képsíkok helyzete és használatának czélja. Az eddigiekben a téralakzatokat két, kivételesen három képsíkra vonatkoztattuk akképen, hogy derékszögű projectiójukat vagy mint elneveztük, derékszögű képeiket e képsíkokon ábrázoltuk. A két képsíkot egymásra merőleges helyzetben levőnek tekintettük és metszővonaluk (képtengely) körül forgatva egymással egyesítettük. A képsíkoknak derékszögű helyzete és azután azoknak egyesítése azért mutatkozott czélszerűnek a téralakzatok ábrázolásánál, mert egyrészt az alakzat pontjainak két képe mindig a képtengelyre merőlegesen álló egyenesen volt, másrészt mert a pontok képeinek a képtengelytől mért távolságai a pontok távolságát adták a képsíkoktól, s végre mert a pontok képeiből azoknak helyzete a képsíkok irányában, vagyis az, a mit reconstructiónak neveztünk, egyszerűen volt megállapítható.

A két képsíkon s a már használt oldalképsíkon kívül még új képsíkokat is alkalmazhatunk. És ha azt akarjuk, hogy egy új képsíkon levő kép egy régi képet pótoljon, tehát a szerkesztéseknél ép oly könnyüséggel legyen kezelhető, mint a régi, akkor *az új képsíkot a régiek egyikére merőlegesen*, azaz, mint projiciáló síkot kell felvennünk. Az uj képsikok használatának pedig az a czélja, hogy az adott és a régi képsíkok irányában általános helyzetű téralakzatokat oly képsíkokra vonatkoztassuk, melyek irányában azok különös helyzetűek; mert általában mondhatjuk: *egy feladat megoldása egyszerűbbé válik, ha az adatok, melyekkel szerkesztünk, a képsíkok irányában a megoldás keresztülvitelének szempontjából különös helyzetűek.*

96. A pontok új képei. Egy az 1-ső vagy a 2-dik képsíkra projiciáló sík meg van határozva, ha 1-ső, illetve 2-dik nyoma ismeretes, mert a hiányzó nyom az x képtengelyre merőleges a tengely-pontban. Ha tehát (116. ábra) x_{13} 1-ső nyoma egy az 1-ső képsíkra merőleges *harmadik képsíknak*, K_3-nak, melyre az (A', A'') pontot derékszög alatt projiciáljuk és mely képsíkot a rajta fekvő A''' képpel együtt x_{13} körül egyik vagy másik értelemben forgatva az 1-ső képsíkkal egyesíteni akarjuk, akkor az A''' kép az A pontból az x_{13}-ra bocsátott $A'A'''$ merőlegesen lesz. A''' távolsága az x_{13}-tól egyenlő az A pont távolságával az 1-ső képsíktól, tehát $A''A_x$-el. Az x_{13} nyomot, ha a tőle meghatározott sík képsíknak vétetik, x_{13} képtengelynek vagy csak x_{13} *tengelynek* nevezzük, melynek 1, 3 mutatói arra figyelmeztetnek, hogy a 3-dik képsík az 1-sőre merőleges. Ezt véve az x tengelyt akkor, midőn több képsíkot használunk x_{12} tengelynek nevezhetjük.



116. ábra.

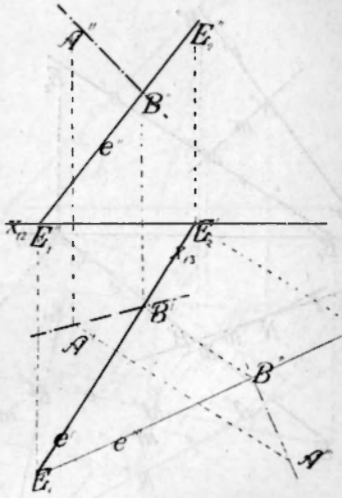
[Az x_{13} tengelyt a 2-dik képsíkon fekvő egyenesnek, a rajta keresztűl menő és a 2-dik képsíkra merőleges síkot szintén új képsíknak tekinthetjük, melyen az A pont új képe, az A'' pontból az x_{13} bocsátott merőlegesen x_{13}-tól $A'A_x$ távolságra fekszik. Ekkor azonban az x_{13} tengelyt nem x_{13}-mal, hanem x_{23}-mal kellene jelölnünk, melyből azonnal látnók, hogy az új képsík a 2-dikra vétetett merőlegesnek.]

Ugyanígy kell a B, C és D pontoknak (B', B''), (C', C'') és (D', D'') képeiből azoknak B''', C''' és D''' harmadik képeit is meghatározni: $B'B'''$, $C'C'''$ és $D'D''' \perp x_{13}$ és B''', C''' és D''' távolsága x_{13}-tól egyenlő B'', C'' és D'' távolságával $x = x_{12}$-től. S mert az A, B pontokat az 1-ső képsík a C, D pontoktól elválasztja, azért az A''', B''' képeket a C''', D''' képektől az x_{13} tengely szintén el fogja választani. —

Tekintsük most az A, B, C, D pontoknak (A', A'''), (B', B'''), (B', C'''), (D', D''') képeit adottaknak, állítsunk a K_3 képsíkra merőlegesen az x_{34} egyenesen keresztűl egy új képsíkot K_4-et és határozzuk meg ama pontoknak A^{IV}, C^{IV}, B^{IV}, D^{IV} képeit a K_4-en, miután K_4 az x_{34} körül forgatva a K_3-ra reá lett borítva. Minthogy az A^{IV}, B^{IV}, C^{IV}, D^{IV} képek a K_4-re merőleges sugarakkal történő projiciálásból származnak és a K_3, K_4 képsíkok egymásra merőlegesek: az $A'''A^{IV}$, $B'''B^{IV}$, $C'''C^{IV}$, $D'''D^{IV}$ egyenesek merőlegesek x_{34}-ra és A^{IV}, B^{IV}, C^{IV}, D^{IV} pontoknak távolsága x_{34}-től egyenlő az A, B, C, D pontoknak távolságával K_3-tól, azaz az A', B', C', D' pontoknak távolságával az x_{13}-tól.

97 **Az egyenes új képei.** Az egyenes képét egy új képsíkon megkapjuk, ha két pontjának új képét egy egyenessel összekötjük. Ezzel az egyenes új képeinek szerkesztése az előbbi esetre van visszavezetve.

Az egyenes uj képeinek szerkesztése abból a czélból történik, hogy az egyenes egy képsíkkal vagy párhuzamos vagy arra merőleges helyzetű legyen. Az első helyzetet elérjük egy képsík alkalmazásával, mert a régi képsíkok egyikére merőlegesen és az egyenessel párhuzamosan mindig lehet síkot fektetni. Ellenben, ha az egyenes nem párhuzamos egy régi képsíkkal, akkor az egyenesre merőleges sík nem lehet egyszersmind merőleges ama régi képsíkra. Ezért, ha azt akarjuk elérni, hogy a régi képsíkok K_1 K_2 irányában általános helyzetű egyenes merőleges legyen egy alkalmazandó új képsíkra, akkor először az egyenessel párhuzamosan egy K_3 új képsíkot veszünk fel (tehát merőlegesen egy régire) és aztán az egyenesre merőleges K_4 képsíkot, mely szükségkép merőleges a K_3-ra.



117. ábra.

Kössük egybe az egyenes új képének szerkesztésével a következő már többféleképp megoldott feladatot.

Az A pontból az e egyenesre bocsátott merőleges és e-t metsző egyenesnek szerkesztése.

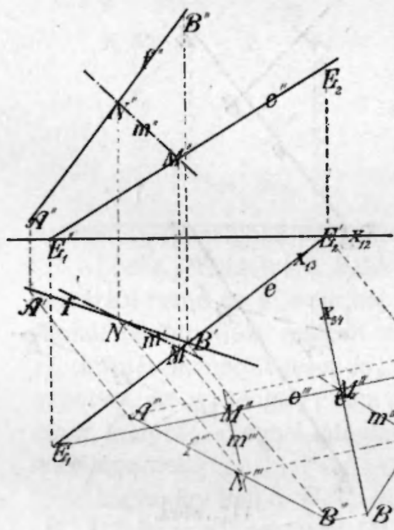
Megoldás. (117. ábra). Használhatunk egy az 1-ső képsíkra merőleges és az e egyenessel párhuzamos képsíkot; az új tengely ekkor e'-sel párhuzamos. De lehet az új képsíkot K_3-mat mindjárt az egyenesen keresztűl fektetni, mely esetben e' lesz egyszersmind x_{13}.

Az egyenes e''' képét szerkesztendő, az E_1, E_2 nyomoknak keressük fel 3-dik képeit E'''_1, E'''_2, mely alkalommal azt tapasztaljuk, hogy E_1, E'_1, E'''_1 egybeesik. Az A pont 3-dik képe A'''; e pontból az e'''-ra bocsátott merőleges talppontja B''', melyből a B talppontnak 1-ső és 2-dik képe B', B'' meghatározható. Az AB és e egyenes azért merőleges egymásra, mert e''' a 3-dik képsíkban fekszik és (A''' B''' e''') szög derékszög. —

A következő ismert feladat megoldásához már két új képsíkot fogunk használni.

Két egyenes normalis transversalisának szerkesztése.

Megoldás. A normalis transversalist akkép akarjuk megszerkeszteni, hogy az egyik egyenest e-t egy új képsíkra merőleges helyzetben ábrázoljuk és ezzel együtt ábrázoljuk a másik egyenest f-et is. Az egyenesek ily helyzeténél a képsík irányában a szerkesztést egyszerűen elvégezhetjük és a transversalisnak nyert uj képéből visszatérhetünk annak régi képeihez.



118. ábra.

Ennélfogva (118. ábra), mint előbb, az új képsíkot K_3-mat az e-n fektetjük keresztűl az 1-ső képsíkra merőlegesen, úgy hogy $e' = x_{13}$. Felkeressük az f egyenes A, B és az e egyenes E_1, E_2 pontjainak és ezzel az f, e egyeneseknek f''', e''' képeit. Az x_{34} tengelyt e'''-ra merőlegesen vesszük fel és az A, B, E_1 E_2 pontoknak A^{IV} B^{IV} E^{IV}_1 E^{IV}_2 4-dik képeit és ezzel az egyeneseknek A^{IV} $B^{IV} = f^{IV}$, E^{IV}_1 $E_2^{IV} = e^{IV}$ képeit (mely utóbbi egy pont) meghatározzuk.

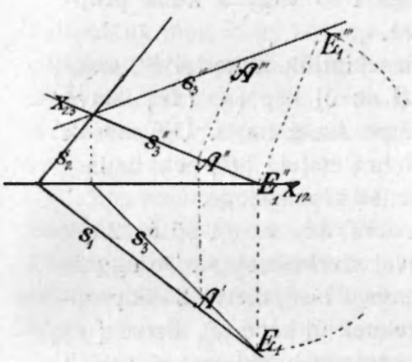
A feladatot most az (e''', e^{IV}) (f''', f^{IV}) képekre nézve megoldjuk; (tehát $M^{IV}N^{IV} \perp f^{IV}$, M^{IV} az e^{IV} pont, N^{IV} az f^{IV}-en; M''' $N''' \,//\, x_{34}$) és a talált $M'''N'''$, $M^{IV}N^{IV}$ transversalisnak $M'N'$ 1-ső és $M''N''$ 2-dik képét az eredeti képsíkra átvisszük.

98. A sík nyomai új képsíkokon. Egy **S** síknak nyoma egy ujonnan alkalmazott képsíkon, az **S** sík és az új képsík metszővonalának képe e képsíkon.

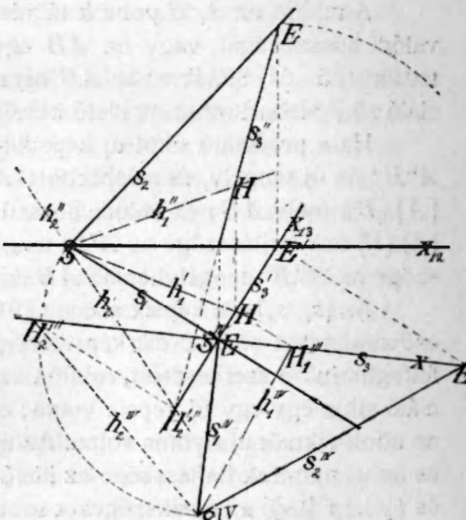
Ha tehát az $\mathbf{S} = [s_1, s_2]$ síknak s_3 nyomát a 2-dik képsíkra merőleges és az x_{23} tengelylyel adott képsíkon akarjuk meghatározni (119. ábra), felkeressük $\mathbf{S}$-nek (s'_3, s''_3) metszővonalát azzal a 2-dik képsíkra projiciáló síkkal, melynek 2-dik nyoma x_{23}; ennek 3-dik képe a keresett s_3 3-dik nyom.

Ez a 3-dik nyom mindig keresztűl megy az (s_2, x_{23}) vagy (s_1, x_{13}) ponton a szerint, a mint az új képsík a 2-dik, vagy az 1-sőre merőleges.

Ha továbbá az $\mathbf{S}$ síknak nyomát a 3-dik képsíkra merőleges 4-dik képsíkon akarjuk felkeresni, akkor a síkot s_2, s_3 nyomokkal adottnak tekintjük és mint előbb meghatározzuk az új nyomot. — Minden $\mathbf{S}$ síkot lehet egy új képsíkra projiciáló síknak tekin-



119. ábra.



119 a. ábra.

teni; az új képsíkot meghatározó tengely $\mathbf{S}$-nek vagy 1-ső vagy 2-dik nyomára merőleges, a szerint, a mint az új képsíkot az 1-ső vagy a 2-dik képsíkra állítjuk merőlegesen.

Ha pedig azt akarjuk, hogy *egy adott* $\mathbf{S}$ *sík maga új képsík legyen*, akkor előbb az $\mathbf{S}$-re merőleges $\mathbf{K}_3$ képsíkot vesszük fel; $\mathbf{K}_3$ és $\mathbf{S} = \mathbf{K}_4$ már a két egymásra merőleges képsík. A (119 a. ábrában) $s_1 \perp x_{13}$ az egyik tengely, míg az s_3 nyom képezi az x_{34} tengelyt.

Egy $[s_1, s_2]$ síkban fekvő sokszögnek valódi alakját megkaphatjuk, ha a síkot új képsíknak választjuk; a sokszög képe ezen újképsíkon egyszersmind valódi alakja a sokszögnek.

A 119a. ábra az $\mathbf{S}$ sík s_1, s_2 nyomainak, a h_1 symmetria- és h_2

coincidentia-vonalának kölcsönös helyzetét mutatja az s^{IV}_1, s^{IV}_2, h^{IV}_1, h^{IV}_2 4-dik képekben.

99. Új képsíkok használata előbbi feladatoknál. Már az előbbi fejezetekben is több feladat megoldásánál alkalmaztunk új képsíkokat. Nem neveztük ugyan azokat új képsíkoknak, kívánatos lévén, hogy az olvasó előtt ez új fogalom mindaddig ismeretlen maradjon, míg teljesen el nem sajátította a szerkesztéseket két képsíkon. Az új képsíkokon végzendő szerkesztések ugyanis szintén két képsíkra vonatkozó szerkesztések, melyek végeredményében a téralakzatok két képével való bánásmódnak alapos ismeretét kivánják.

Lássuk ezt a következő példákban:

A midőn az A, B pontok távolságát, tehát az AB vonaldarab valódi hosszúságát, vagy az AB egyenes képsíkszögeit szerkesztettük (75. és 89. ábra) az AB egyenes 1-ső vagy a 2-dik projiciáló síkját leborítottuk az illető képsíkra.

Ha a projiciáló síkot új képsíknak tekintjük, akkor $A'B'$, vagy $A''B''$ az új tengely, és a leborított AB az új kép (A) (B), illetve $[A]$ $[B]$, mely AB-nek valódi hosszúságát szolgáltatja. Ugyancsak (A) (B) nek hajlásszöge az $A'B'$ tengelyhez és $[A]$ $[B]$-nek hajlásszöge az $A''B''$ tengelyhez az AB egyenes képsíkszöge.

Az $[s_1, s_2]$ sík képsík szögeit (91. ábra) az e és f 1-ső és 2-dik esővonalnak 1-ső és 2-dik képsíkszögével szerkesztettük. De úgy is felfoghatjuk e szerkesztést, mintha az e és f 1-ső, illetve 2-dik projiciáló síkja egy-egy új képsík volna; ezeknek új képe (e), illetve $[f]$ az adott síknak új nyoma volna. Az új képtengely ekkor e', illetve f'' és az új nyomok hajlásszöge az illető képtengelyhez, t. i. $(e', (e))\sphericalangle$ és $(f', [f])\sphericalangle$ a képsíkszögeket szolgáltatja.

A midőn az $[s_1, s_2]$, $[u_1, u_2]$ síkok hajlásszögét szerkesztettük (102. ábra), a síkok (g', g'') metszővonalára merőleges $[v_1, v_2]$ síkot kellett állítanunk, melynek metszővonalai az adott síkokkal bezárták a két sík hajlásszögét. Ha a (g', g'') projiciáló síkját az 1-ső képsíkra 3-dik képsíknak vesszük, akkor g-nek 3-dik képe $= (g)$; az erre merőleges $[v_1, v_2]$ síknak 3-dik nyoma pl. $H(A)$, 1-ső nyoma E_1HF_1 és az AE_1, AF_1 metszővonalak AE_1, A_1F_1 leborításai az E_1HF_1 nyom körül adják a hajlásszöget.

100. A képtengely nélkülözhetősége. Mielőtt néhány példát bemutatnánk, melyeknél új képsíkok alkalmazása célszerűnek mutatkozik, felhasználjuk ez alkalmat arra, hogy a régi, tehát az 1-ső és 2-dik képsíkon vagy általában a két képsíkos rendszeren levő képeknek általánosabb felfogásáról szóljunk.

Legyenek az $A, B, C, D, \ldots$ pontoknak 1-ső és 2-dik képei $A', B', C', D' \ldots; A'', B'', C'', D'', \ldots$ és x a képtengely.

A pontoknak kölcsönös helyzete nem változik, ha mi az x képtengelyt önmagával párhuzamosan följebb vagy lejebb toljuk, ezzel csak a képsíkok távolsága a pontoktól fog az eltolás hosszuságával növekedni, illetve fogyni.

Ha az $A, B, C, D, \ldots$ pontok az 1-ső térnegyedben voltak, akkor az x eltolásával elérhetjük, hogy azok a 2-dik, illetve a negyedik térnegyedbe kerüljenek, csak az x-et az összes képek alatt vagy fölött kell felvennünk.

Tegyük fel, hogy az adott $A, B, C, D, \ldots$ pontrendszerrel bizonyos szerkesztést végeztünk, melynél az x képtengely nem lett felhasználva, akkor e szerkesztés érvényben marad, bárhová helyezzük is önmagával párhuzamosan az x-et.

Ha pl. az ABC háromszög valódi alakját A'_1 B'_1 C'_1-et akkép határoztuk meg, hogy azt egy 1-ső fővonala körül az 1-ső képsíkkal párhuzamos helyzetbe forgattuk (98. ábra), akkor x nek bármely az $A'A''$ re merőleges helyzeténél $A'_1B'_1C'_1$ nemcsak valódi alakja ABC-nek, de minden szerkesztési vonalnak is ugyanazon értelme van, mint az eredeti x-nél

Hasonlókép, ha az ABC síkjára a D pontból m merőlegest bocsátottunk, vagy az $ABCD$ pontokon keresztűl menő gömbnek M középpontját meghatározzuk, akkor az m', m'' és M', M'' képek, szintén minden x szel párhuzamos képtengelynél m-nek és M-nek képei lesznek.

De nem csak az x-képtengelyt tolhatjuk a képtengelyre merőleges irány szerint följebb vagy lejebb, hanem a pontrendszer egyik, másik vagy mindkét képét, mert végeredményében ez csak annyit jelent, hogy a képsíkok egyike vagy mindkettő közeledik a pontrendszerhez vagy távolodik attól.

Már a mondottakból könnyü megállapitani, hogy *mily szerkesztésekre nincs befolyása az x képtengely helyzetének? Azokra, melyeknél az egyeneseknek és a síkoknak nyomait nem használjuk!* Ezt pedig minden oly feladat megoldásánál (hacsak épen nem a nyomok meghatározása) kikerülhetjük, melynél az adatok nincsenek nyomaival megadva és mely feladatokban nincs vonatkozás a képsíkok kelyzetére.

Pl. az ABC pontoktól meghatározott síkban egy pontot felvehetek a képtengelynek bármely az $A'A''$-re merőleges helyzeténél; a sík fővonalainak képei is ugyanazok maradnak még, ha az $A'B'C'$, $A''B''C''$ képeket a jelzett módon el is tolom.

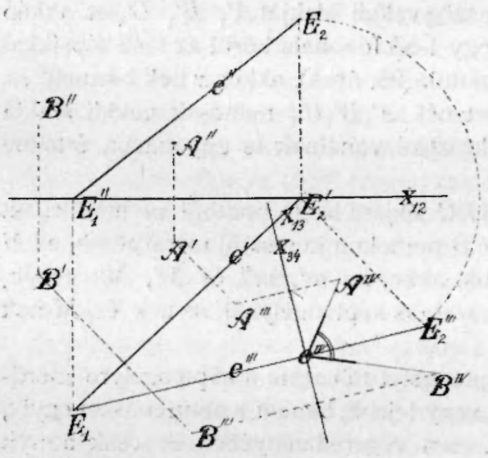
Ellenben míg az $A'B'C'$, $A''B''C''$ kölcsönös helyzete nem változik, a sík coincidentia-vonalának $h'_2 = h''_2$ képe sem változik, de megváltoznak a sík a symmetria-vonalának h_1 -nek (h'_1, h'_1) képei, ha az x helyzetét változtatja.

Noha a sík nyomainak használatával a feladatok megoldásai általánosságukból veszítenek, mindamellett a nyomok használata czélszerű, mert a feladatok megoldásait legtöbb esetben egyszerűsíti.

Feladatok.

101. — *96. feladat. Ádva van az A, B pont és az e egyenes; szerkesztendők az $[A, e]$, $[B, e]$ síkok hajlásszögei.*

Megoldás. (120. ábra). Az e egyenes 1-ső projiciáló síkját 3-dik képsíknak, $(e' = x_{13})$ és egy az e-re merőleges síkot 4-dik képsíknak $(x_{34} \perp e''')$ választjuk és az A, B, e-nek A''', B''', e''' és A^{IV}, B^{IV}, e^{IV} képeit az új képsíkon meghatározzuk. Az e^{IV} akkor egy pont és az $A^{IV}e^{IV}$, $B^{IV}e^{IV}$ egyeneseknek, mint a 4-dik képsíkra projiciáló $[A, e]$, $[B, e]$, síkoknak nyomai, a síkoknak keresett hajlásszögeit zárják be.



120. ábra.

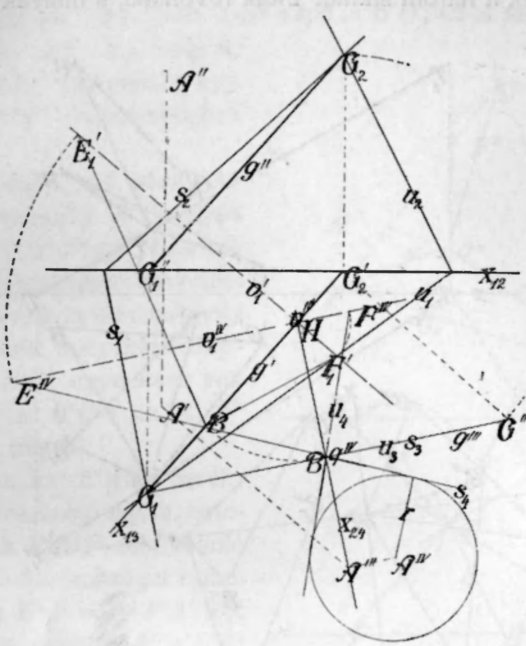
97. feladat. A g egyenesen keresztül fektessünk oly két síkot, melyek az A ponttól r távolságra vannak és határozzuk meg ezeknek hajlásszögeit.

Megoldás. (121. ábra). A g-nek 1-ső projiciáló síkját 3-dik képsíknak $(g' = x_{13})$, az A-n keresztül menő és a g-re merőleges síkot 4-dik képsíknak választjuk $(x_{34} \perp g'''$ és az A''' ponton megy keresztül). A keresett síkok a 4-dik képsíkra projiciálók; 3-dik nyomai s_3, u_3 a g'''-ban vannak; 4-ik nyomai pedig az A^{IV} pontból r sugárral leírható körnek a g^{IV} ponton keresztül menő s_4, u_4 érintői, melyek már a keresett hajlásszögeket képezik. A 4-dik képsík az 1-sőt egy v_1 egyenesben metszi, melynek v_1''' képe az $(x_{13}, x_{34}) = H$ pont; ezen megy keresztül v_1-nek 1-ső képe $v_1 \perp x_{13}$ és 4-dik képe

$v_1^{IV} \perp x_{34}$. Az $(s_4, v^{IV}) = E^{IV}$, $(u_4, v^{IV}) = F^{IV}$ pontoknak 3-dik képe H: 1-ső képe pedig v_1'-en van ($HE^{IV} = HE'_1$, $HF^{IV} = HF'_1$).

A keresett síkoknak 1-ső s_1, u_1 nyomai g-nek G_1 1-ső nyomát az E'_1, F'_1 pontokkal kötik össze, 2-dik nyomai s_2, u_2 pedig g-nek 2-dik nyomán G_2-n mennek keresztül.

Ugyanez az ábra az $[s_1, s_2]$, $[u_1, u_2)$ síkok hajlásszögeinek megoldását a 102. ábrától kevéssé eltérőleg is mutatja. A két ábra



121. ábra.

összehasonlításánál látható, hogy $E_1A_1F_1$ háromszög ott, azt a szerepet viszi, mint az $E^{IV}g_1^{IV}F^{IV}$ háromszög a jelen ábrában.

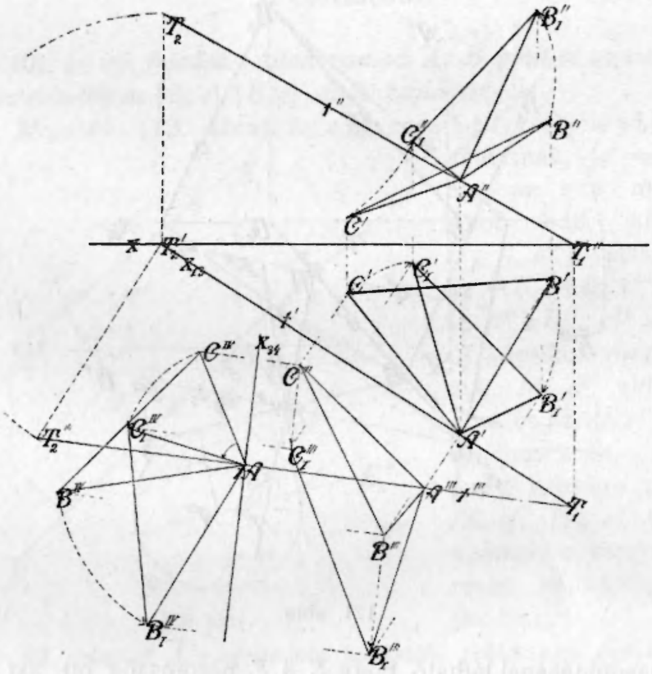
102. — *98. feladat. Forgassuk az ABC háromszöget (egy tetszés szerinti, vagy) az A szögpontján keresztül menő és a képsíkok irányában általános hetyzetű t tengely körül ε szög alatt.*

Megoldás. (122. ábra.) A t tengely 1-ső projiciáló síkját 3-dik képsíknak és egy a t-re merőleges síkot 4-ik képsíknak választjuk ($x_{13} = t'$, $x_{34} \perp t'''$) és az ABC háromszögnek 1-ső és 2-dik képeiből a 3-dik és 4-dik képeket megszerkesztjük.

Ez utóbbi képsíkokon levő képekből meghatározzuk a forgatott háromszögnek $A_1B_1C_1$ nek 4-dik és 3-dik képeit ($B^{IV}t^{IV}B_1^{IV} \sphericalangle = C^{IV}t^{IV}C_1^{IV} \sphericalangle = \varepsilon$), és ezekből az 1-ső és 2-dik képeket.

103. — *99. feladat.* Adva van három, páronként egymásra merőleges és az A pontban metsző e, f, g egyenesnek 2-dik képe e'', f'', g'', és az A pontnak 1-ső képe A'; szerkesztendő e, f, g-nek 1-ső képe.

Megoldás. (123. ábra.) Egy a 2-dik képsíkkal párhuzamos **K** sík, vagy ha az x tengely nincs megadva, maga a 2-dik képsík az $[e, f]$, $[f, g]$, $[g, e]$ síkokat egy EFG háromszög oldalaiban metszi, melyek a három síknak 2-dik fővonalai, s melyek E, F, G



122. ábra.

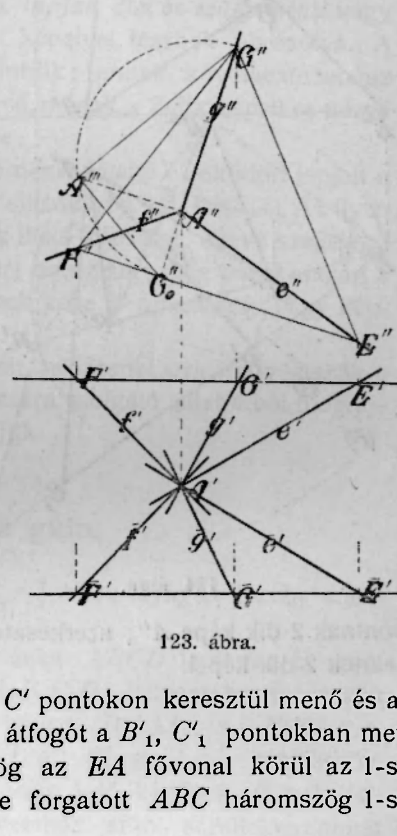
szögpontjai az e, f, g egyeneseken feküsznek. Az e, f, g egyenesek bármelyike merőleges lévén a másik kettőn keresztül menő síkra, az e'', f'', g'' megfelelőleg merőleges az $E''F''G''$ háromszög $F''G''$, $G''E''$, $E''F''$ oldalára. Ha tehát az e'' tetszés szerinti E'' pontjából az f'' és g''-re merőlegest bocsátunk, akkor ezek a g'', illetve f''-t a G'', F'' pontban metszik.

Tekintsük a g egyenesnek 2-dik projiciáló síkját 3-dik képsíknak $\mathbf{K}_3$-nak és határozzuk meg az e, f, g egyeneseknek 3-dik képét, **K**-t véve 2-dik képsíknak. Az $[e, f]$ sík $\mathbf{K}_3$-ra projiciáló sík lévén $f''', e''' \perp g'''$-ra, és f''', e''' az $(E''F'', g'') = G''_0$ ponton megy keresztül. Ennélfogva a $G''G''_0$ átmérő fölé írt k körnek az A'' ponton keresztül menő és g''-re merőleges húrja K-t az A''' pontban metszi és $A''G''_0 = e''' = f'''$, $A'''G''' = g'''$. Az $A''A'''$ vonaldarab az A pont távolsága lévén a K síktól, ha az A'-től $A''A'''$ távolságra az $A'A''$-re merőlegeseket állítunk, úgy ezek lesznek az EFG háromszögnek 1-ső képei, melyen a szögpontoknak 1-ső képei feküsznek.

100. feladat. Határozzuk meg az ABC háromszögnek 2-dik képét, ha adva van 1-ső képe $A'B'C'$, az A szögpontjának 2-dik képe A'', ha tudjuk, hogy az ABC háromszög egy adott $A^*B^*C^*$ háromszöghez hasonló.

Megoldás. (124. ábra.) Az $A'B'C'$ háromszög $B'C'$ oldala fölé az $A^*B^*C^*$-gal hasonló $A^0B'C'$ háromszöget rajzolunk; az A^0A' pontokon keresztül oly kört fektetünk, melynek középpontja a $B'C'$ egyenesen van s mely kör a $B'C'$-t az E', F' pontokban metszi.

Ezután az $E'A'F'$ derékszögű háromszög egyik befogója fölé az $E'A^0F'$-sel hasonló de *nagyobb* háromszöget rajzolunk, tehát $E'A'$ vagy $F'A'$ fölé a szerint, a mint $E'A' > E'A^0$ vagy $F'A' > F'A^0$.

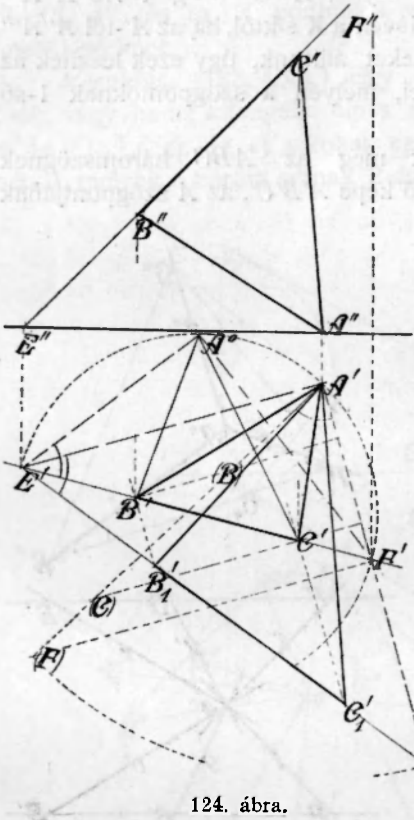


123. ábra.

Ha az ábrában $E'A' > E'A^0$, tehát $E'A'F'_1 \sim E'A^0F'$, és a B', C' pontokon keresztül menő és az $A'F'$-sel párhuzamosak az $E'F'_1$ átfogót a B'_1, C'_1 pontokban metszik, akkor az $A'B'_1C'_1$ háromszög az EA fővonal körül az 1-ső képsíkkal párhuzamos helyzetbe forgatott ABC háromszög 1-ső képének tekinthető.

Ugyanis $A'E'B'_1C'_1F'$ az $A^0E'B'C'F'$ idomnak nagyobbítása az $A^0E' : A'E'$ viszony szerint, mert $E'A^0F' \sim E'A'F'_1$ és $E'B' : B'C' : C'F' = E'B'_1 : B'_1C'_1 : C'_1F'_1$.

Ezt tudván az $A'B'_1C'_1$ háromszöget az AE fővonal körül az $(F)A'F'$ szög alatt $(F'(F) \perp A'F',\ A'(F) = A'F'_1)$ addig forgatjuk, mig az $E'F'_1$ egyenesnek 1-ső képe $E'F'$, tehát a B'_1, C'_1 pontoknak 1-ső képe $B'C'$ nem lesz. Ha $B'(B)$ és $C'(C) \perp A'F'$ és a (B), (C) pontok az $A'(F)$ egyenesen vannak, akkor ezeknek távolsága az $A'F'$ egyenestől a B, C pontok 2-dik képének B'', C''-nek távolságai az $A''E''$ fővonaltól. Az ABC háromszög B, C szögpontjainak B'', C'' 2-dik képe tehát az A'' E'' fölött és alatt lehet. —



124. ábra.

Az ABC háromszög A szögpontján keresztül menő és a BC oldallal párhuzamos AG egyenesnek 1-ső képe az $A'B'C'$ háromszög A' szögpontján keresztül $B'C'$-vel párhuzamosan húzott $A'G'$ egyenes. Ezt tudván az előbbi feladatra van viszszavezetve a következő:

Adva van három az A ponton keresztül menő és ugyanegy (még meg nem határozott) síkban fekvő AB, AC, AG egyenesnek kölcsönös helyzete, ezen egyeneseknek 1-ső képe $A'B'$, $A'C'$, $A'G'$, végre az A pontnak 2-dik képe A''; szerkesztendők az AB, AC, AG egyeneseknek 2-dik képei.

IX. FEJEZET.

Síklapú testek ábrázolása, árnyékolása és ezekkel kapcsolatos feladatok.

104. A síklapú testek ábrázolása. — *A síklapú testek*, azaz oly térrészek, melyeknek határait sokszögek, ezeknek oldalai és szögpontjai, tehát a síklapú testnek *lapjai*, *élei* és *szögpontjai* vagy *csúcsai* képezik, — a test éleinek képeivel lesznek ábrázolva. A test lapjait átlátszatlanoknak tekintjük; ennek következtében az élek és lapok közül némelyek az 1-ső, mások a 2-dik képsíkra nézve a test más lapjaitól el lesznek födve.

A testnek az egyik képsíkra nézve látszó és elfödött lapjait a test bizonyos éleiből álló tér- vagy síksokszög választja el. Az ilyen sokszöget, valamint annak képét az illető képsíkra nézve szegélyző sokszögnek vagy *szegélynek* (contur) nevezzük; még pedig magán a testen levő a *valódi* szegély, ennek képe a *látszólagos* vagy képszegély vagy csak röviden szegély.

Ha a síklapú test éleinek képeit, tekintettel arra, hogy látszók-e vagy elfödöttek, a test meghatározására szolgáló adatokból megrajzoljuk, akkor ezzel a testet ábrázoljuk.

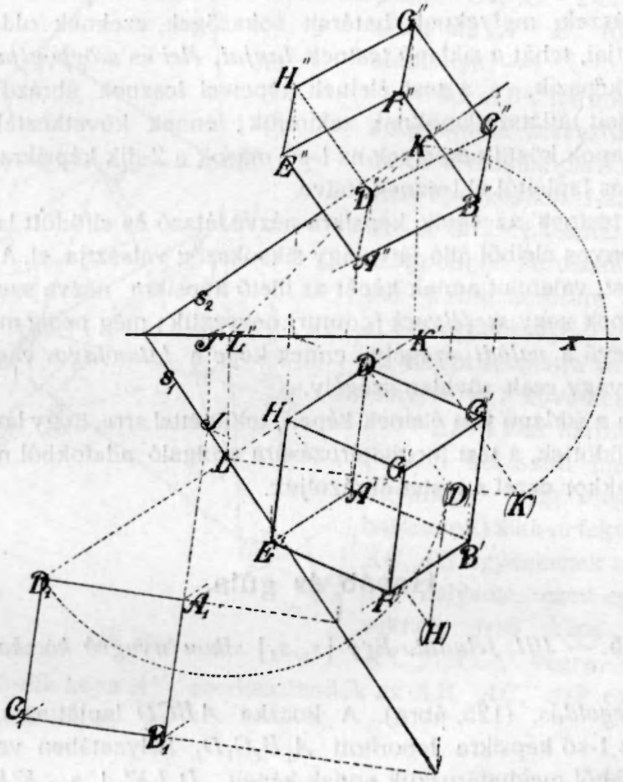
Hasáb és gúla.

105. — *101. feladat. Egy $[s_1, s_2]$ síkon nyugvó koczka ábrázolása.*

Megoldás. (125. ábra). A koczka $ABCD$ lapját az s_1 nyom körül az 1-ső képsíkra leborított $A_1B_1C_1D_1$ helyzetében veszszük fel, és ebből meghatározzuk annak képeit. $D_1LK' \perp s_1$, $K'K'' \perp x$, $K'(K) \perp LK'$, $K'(K) = K'K$; $K'L(K) \sphericalangle$ az 1-ső képsíkszög, $LD_1 = L(D)$, $(D)D' \perp LK'$. A D pont 1-ső képének D'-nek felhasználásával az $A_1B_1C_1D_1$ négyzethez affin parallelogrammat $A'B'C'D'$-et szerkesztünk, melyből már az $A''B''C''D''$ parallelogramma könnyen meghatározható.

Az $ABCD$ négyzet szögpontjaiban merőlegeseket állítunk az $[s_1, s_2]$ síkra és ezekre reá rakjuk a koczka élhosszát. $(D)(H) \perp L'D)$, $(D)(H) = A_1B_1$, $(H)H' \perp LH'$, $(H)H' = H''H_x$; $D'H'$ és $D''H''$ a koczka DH, AE, BF, CG élei 1-ső és 2-dik képének hosszúsága.

A mi a látszó és elfödött éleket és a szegélyző sokszögeket illeti, könnyen megérthető, hogy a G ponton keresztül menő lapok az A ponton keresztül menőeket az 1-ső képsíkra nézve elfödik, mert a G pont távolabb van az 1-ső képsíktól, mint az A; és az F-en keresztül menő lapok a D-n keresztül menőket a 2-dik képsíkra nézve elfödik, mert F pont távolabb van a 2-dik képsíktól,

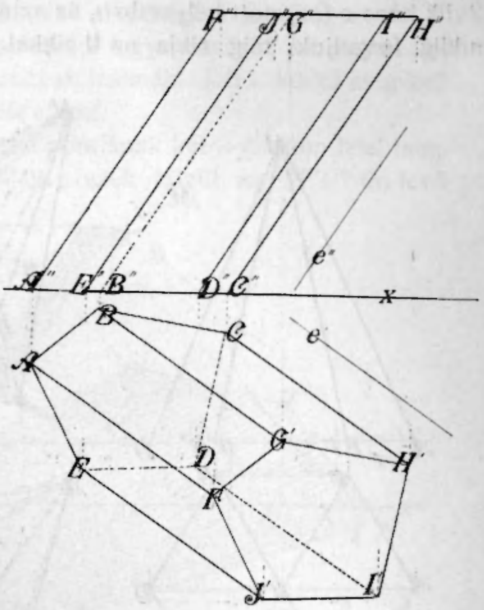


125. ábra.

mint D. E szerint a koczka 1-ső szegélye az $E'F'B'C'D'H'$ hatszög, a 2-dik szegélye pedig az $E''A''B''C''G''H''$ hatszög.

102. feladat. Ábrázoljunk egy hatoldalú hasábot, melynek alaplapja az 1-ső képsíkon fekvő $ABCDE$ sokszög, melynek oldalélei egy adott e egyenessel párhuzamosak, és magassága egy h vonaldarab.

Megoldás. (126. ábra.) Az *ABCDE* ötszög egybeesik 1-ső képével; 2-dik képe pedig a képtengelyen van. Az ötszög szögpontjain keresztül menő és az *e* egyenessel párhúzamosak a hasáb oldalélei. Egy az 1-ső képsíktól *h* távolságra levő sík (pl. az 1-ső képsík fölött) az oldaléleket az *FGHIJ* pontokban metszi, melyek a hasáb fölső lapjának szögpontjai.



126. ábra.

Ezután megállapítandók az egyes képsíkokra nézve látszó és elfödött oldalélek és a szegélyző sokszögek.

A hasáb a *CH* és *EJ* oldaléleknek 1-ső projiciáló síkjai között van; ezek az oldalélek választják tehát el az 1-ső képsíkra nézve látszó és elfödött oldallapokat egymástól. E képsíkra nézve látszók lesznek a *CB, BA, AE* oldalakon keresztül menő oldallapok, melyek a többi kettőt elfödik.

Ugyanígy a hasáb a *CH* és *AF* oldaléleknek 2-dik projiciáló síkja között van, mely oldalélek tehát a 2-dik képsíkra látszó *CHDI, DIEJ, EJAF* lapokat az *FABG, BGCH* elfödött lapoktól elválasztják.

A hasáb 1-ső szegélye az $ABCH'I'J'E$ sokszög, 2-dik szegélye pedig az $A''C''H''F''$ parallelogramma.

106. — *103. feladat. Szerkesztendők egy oly szabályos hatoldalú gúlának képei, melynek r alapéle és h magasság ismeretes:*

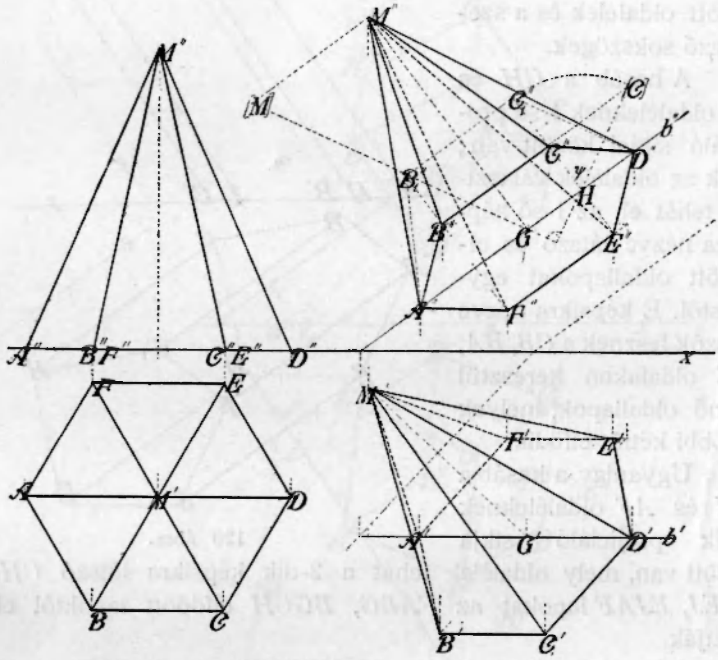
a) ha alapja az 1-ső képsíkon fekszik,

b) ha alapjának egyik főátlója a 2-dik képsíkkal párhuzamos (b', b'') *egyenesen van és síkjának, mely feszített, 2-dik képsíkszöge az adott* ψ *szög.*

Megoldás. Az *a*) feladat megoldását 127a. ábra mutatja. Az *ABCDEF* hatszög és átlói az alapsokszögnek és az oldaléleknek 1-ső képei; az $A''D''$ egyenes és az M'' pont az alapsokszögnek és az *M* csúcsnak 2-dik képe.

b) Tekintsük a 127 b. ábrában a (b', b'') egyenes tetszésszerinti (G', G'') pontját az alaplap középpontjának, és vigyük G''-től a b'' egyenesre az alapélet A'', D''-ig $(A''G'' = G''D'' = r)$.

Ha előbb az alaplapot (b', b'') körül a 2-dik képsíkhoz párhuzamos **U** síkba képzeljük forgatva úgy, hogy annak 2-dik képe valódi alakjában mutatkozzék, tehát $A''B''_1C''_1D''$ a fél hatszög 2-dik képe e forgatott helyzetben, és aztán az AB_1C_1D-t AD körül addig forgatjuk, mig síkja az **U** síkkal ψ szöget nem képez, akkor



127. a. ábra. 127. b. ábra.

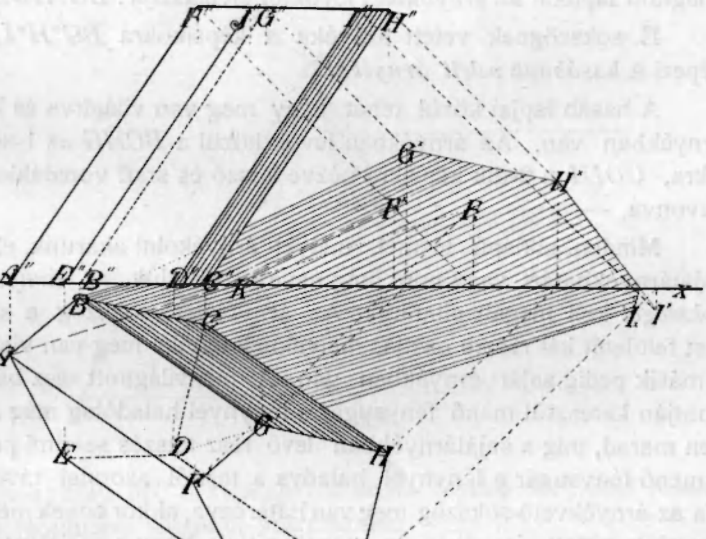
$ABCD$-nek 2-dik képe ebben a helyzetben már a kivánt 2-dik kép lesz. $C''_1H \perp A''D''$, $C''_1H[C] \sphericalangle = \psi$, $[C]H = HC''_1$, $[C]C'' \perp C''_1H$, $C''B'' // A''D''$, $B''_1B'' \perp A''D''$; $F''E''$ symmetrikus $B''C''$-vel az $A''D''$-re vonatkozólag, végre $A''B''C''D''E''F''$ az alaphatszög 2-dik képe. Ebből meghatározható az 1-ső kép. A', B' a b' egyenesen fekszik, a többi szögpontok 1-ső képei b'-től $[C]$ C'' távolságra vannak. E képek meghatározásánál arra kell ügyelnünk, hogy az $A'B'C'$... és $A''B''C''$... sokszögeknél a körüljárás ellenkező értelemben történjék, mert a feladat követelménye szerint a sík feszített.

A gúla M csúcsának 2-dik képét meghatározandó, a G''

ponton keresztűl menő és a H $[C]$-re merőlegesen álló G'' $[M]$ egyenesre reávisszük a gúlának adott magasságát h-t $[M]$-ig; $[M]M''//b''$, $G''M'' \perp b''$ és M'' pont már M-nek 2-dik képe, mert MG-nek 2-dik képe az alaplap b'' fővonalára merőleges és $[M]G''M'' \measuredangle = 90^0 - \psi$. M-nek 1-ső képe a b'-től $M''[M]$ távolságra van; és mert az alaplap feszített sik, azért M' úgy határozandó meg, hogy $M''G''$, $M'G'$ egy feszített síkra legyen merőleges.

Az M pont képeinek összekötő egyenesei az alaplap szögpontjaival a gúla oldaléleinek képei lesznek. Ezek közül meg kell határozni a látszó és az elfödött éleket.

Az $A'F'$, $M'C'$ élek metszőpontjának két 2-dik kép felel meg, egy az $A''F''$-ön, egy az $M''C''$-ön; ezek közül az $M''C''$-ön levő



128. ábra.

van távolabb a képtengelytől, tehát MC, MD látszó él az 1-ső képsíkra nézve, MA, MF el van födve. Ugyanígy következik, hogy az MB, MC élek a 2-dik képsíkra nézve látszók és az MF, ME élek el vannak födve. Ennélfogva a gúlának 1-ső és 2-dik szegélyző sokszöge $B'C'D'E'M'$, $A''F''E''D''M''$.

107. — *104. feladat. Szerkesztendő a 126. ábrában ábrázolt hasábnak saját- és vetett árnyéka.*

Megoldás. (128. ábra.) A hasáb oldaléleinek fénymenti síkjai párhuzamosak. Az a két oldalél, melynek fénymenti sikja között a hasáb van, elválasztja a megvilágított oldallapokat a sajátárnyékban levőktől.

A hasáb egyik élének, pl. az AF-nek fénymenti síkja a képsíkokat az AF-nek a képsíkokra vetett AKF^* árnyékában metszi; e kiszögellő vonallal haladnak párhuzamosan a többi oldaléleknek vetett árnyékai. A BG és DI oldalélek fénymenti síkjai között vannak tehát a többi oldalélek fénymenti síkjai; a BG és DI oldalélek képezik az oldallapok *sajátárnyékhatárát.* Az AF (valamint EJ) oldalél fénymenti síkja ez élből kiindulva a fénysugárral előre haladólag metszi a hasábot; ezért az AF két megvilágított oldallaphoz tartozik.

A megrajzolt hasábnak saját-árnyék határa, mely tehát a megvilágított lapokat az árnyékban levőktől elválasztja: $BGHIDEA$.

E sokszögnek vetett árnyéka a képsíkokra $BG^*H^*I_*DEA$ képezi a *hasábnak vetett árnyékát.*

A hasáb lapjai közül tehát négy meg van világítva és három árnyékban van. Az árnyékban levők közül a $BCHG$ az 1-ső képsíkra, $CDIH$ a 2-dik képsíkra nézve látszó és sraff vonalakkal van bevonva. —

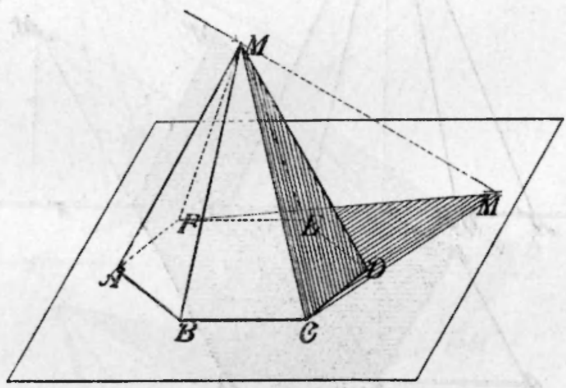
Minden siklapú testnél, melyet árnyékolni akarunk, előbb a sajátárnyékhatárt, vagy mint még nevezni akarjuk, az *árnyékvetősokszöget* kell megállapitanunk. Az árnyékvető-sokszög a síklapú test felületét két részre osztja, melyeknek egyike meg van világítva, a másik pedig saját árnyékban van. A megvilágított rész bármely pontján keresztűl menő fénysugár a fénynyel haladólag még a testben marad, mig a sajátárnyékban levő rész tetszés szerinti pontján átmenő fénysugár a fénynyel haladva a testtől azonnal távolodik. Ha az árnyékvető-sokszög meg van határozva, akkor ennek megszerkesztjük vetett árnyékát és megállapítjuk, hogy a sajátárnyékban levő lapok közül, melyek látszók az egyes képsíkokra nézve, és ezeket, valamint a vetett árnyéktól bekerített részt sraffvonalakkal vonjuk be.

108. — *105. feladat. A 127 a. és 127 b. ábrákban bemutatott gúláknak árnyékolása.* — Mielőtt ehhez fognánk, általánosan akarunk szólani a gúla árnyékolásáról.

Egy $M. ABCDEF$ gúla (129. ábra) oldaléleinek fénymenti síkjai egymást a gúla M csucsán keresztül $M\overline{M}$ menő fénysugárban metszik. Az oldalélek fénymenti síkjai közül egyesek ($M\overline{M}A$, $M\overline{M}B$) az élből kiindulva a fénysugárral ugyanegy értelemben haladólag, mások ($M\overline{M}D$, $M\overline{M}E$) ellenkező értelemben haladólag metszik a gúlát; végre némelyek ($M\overline{M}C$, $M\overline{M}F$) a gúlát egyáltalán nem metszik.

Az első csoportban levő oldalélek meg vannak világítva, a másik csoportban levők a saját árnyékban vannak, végre a harmadik csoporthoz tartozók a gúla oldalfelületének sajátárnyékhatárát képezik.

Hogy ezeket a képeivel ábrázolt gúlánál meghatározzuk, megkeressük a gúla csúcsán keresztül menő fénysugárnak és a gúla alapsíkjának $\overline{M}$ metszőpontját, tehát a gúla csúcsának vetett árnyékát az alaplap síkjára. E metszőpontnak összekötő egyenesei a gúla alapjának szögpontjaival, az oldalélek fénymenti síkjainak metszővonalai a gúla alaplapjának síkjával. Ezek közül a leg-



129. ábra.

szélsők $\overline{M}F$, $\overline{M}C$ a sajátárnyékhatárt képező MF, MC oldaléleknek fénymenti síkjaiból származnak.

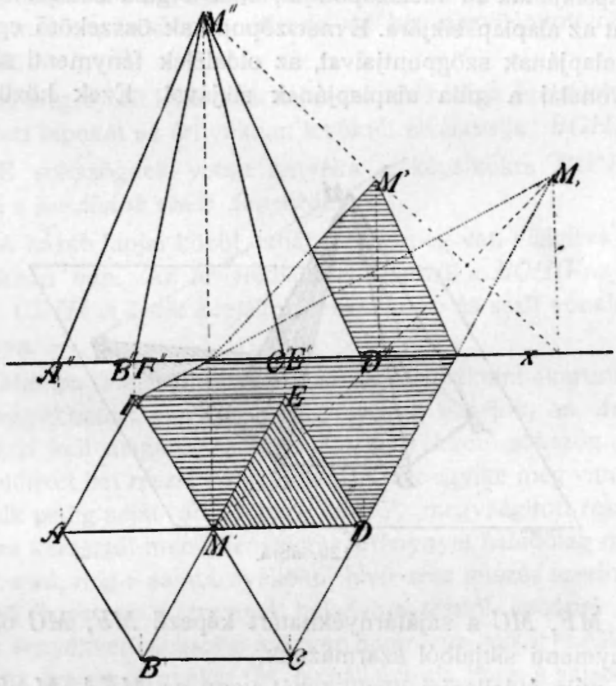
A gúla oldallapjai közül tehát vagy az MFA, MAB, MAC lapok vannak megvilágítva és a többiek MCD, MDE. MEF sajátárnyékban, vagy pedig ellenkezőleg az elsők vannak sajátárnyékban, az utóbbiak pedig megvilágítva a szerint, a mint az M csúcson keresztül menő fénysugár haladási iránya $M\overline{M}$ vagy evvel ellenkező értelmű, t. i. $\overline{M}M$.

Az első esetben (és ezt mutatja a 129. ábra!) a gúla árnyékvető sokszöge $MFABC$, a másikban $MFEDC$.

Térjünk ezek után a kitűzött feladat

Megoldásához. (130 a. ábra.) Alaplapjával az 1-ső képsíkon nyugvó gúlának M csúcsa az 1-ső képsík M_* pontjába veti árnyékát. M_*-ból az $ABCDEF$ alapsokszög szögpontjaihoz húzott egyenesek között M_*D, M_*F a legszélső. Ennélfogva a gúlának árnyékvető sokszöge $MFABCD$, és az MFE, MED oldallapok vannak sajátárnyékban.

A 130 b. ábrában az M csúcson keresztülmenő fénysugár a gúla alaplapját, az M pontban metszi. E pontból az alapsokszög szögpontjaihoz húzott sugarak közül MA, MD a legszélső (mint az az 1-ső vagy a 2-dik képben látható). Ennélfogva az



130 a. ábra.

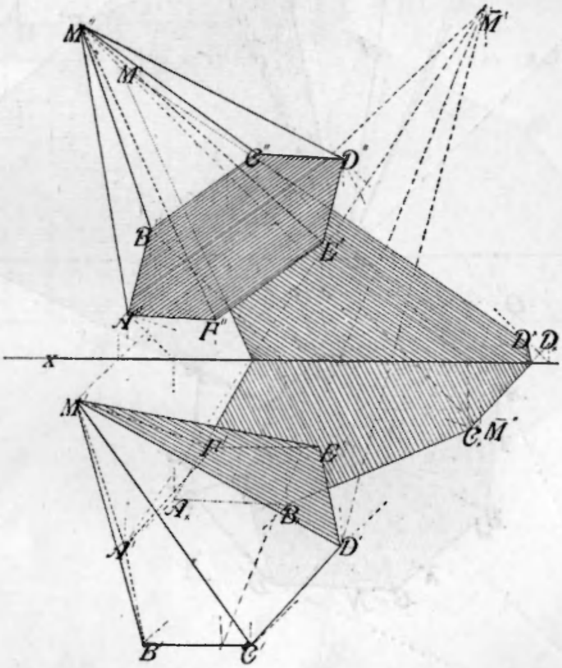
MA, MD oldalélek képezik a sajátárnyékhatárt a gúla oldalfelületén és $MABCD$ a gúla árnyékvető sokszöge. A gúlának tehát alaplapja szintén árnyékban van.

106. feladat. Egy üres gúla belső és külső felületének árnyékolása.

Megoldás (131. ábra). A gúla M csúcsát az 1-ső képsikon, annak alaplapját az $ABCDEFGH$ sokszöget az 1-ső képsíkkal párhuzamos síkban vesszük fel.

A gúla csúcsán keresztül menő és a fénysugarakkal párhuzamos LM egyenes, az alapsíkot az L pontban metszi. Az oldaléleknek fénymenti síkjai az alaplapot, az L ponton keresztül menő egyenesek szerint metszik; az MA, MD élek képezik tehát a külső oldalfelület saját árnyékhatárát és a külső felületnek árnyékvető sokszöge $MAHGFED$.

A gúla oldallapjai közül MAB, MBC, MCD kívülről, a többi öt pedig belülről van megvilágítva. Ámde ez utóbbiak nem lesznek teljesen megvilágítva, mert az MAC, MBC, MCD lapok



130 b. ábra.

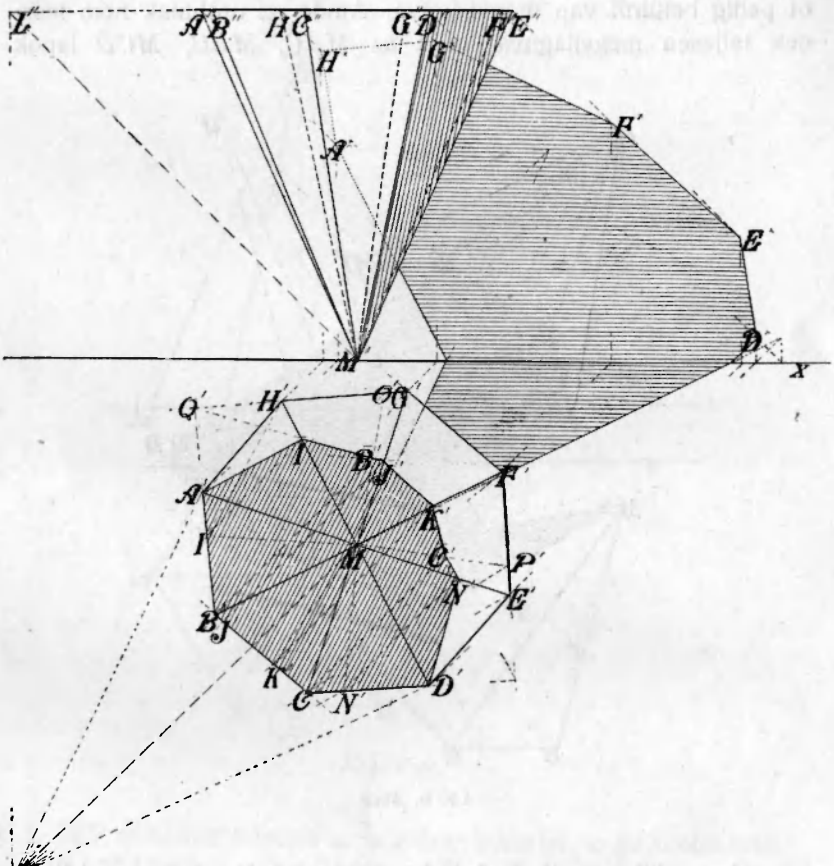
amazokra vetik árnyékukat. Ezt megállapítandó, csak az $ABCD$ törtvonalnak kell vetett árnyékát az $MAHGFED$ gúla belső felületére keresni.

Az LH egyenes AB-t egy I pontban metszi, mely az MH él $\bar{I}$ pontjára veti árnyékát, mert az MI, MH egyeneseknek közös fénymenti síkjuk van.

Ugyanígy a BC egyenes J és K pontja, az MG, MF élnek $\bar{J}$ és $\bar{K}$ pontjára és a CD egyenes N pontja az ME élnek $\bar{N}$ pontjára veti árnyékát.

Ha még az LB egyenes a HG-t O-ban, és az LC egyenes az FE-t P-ben metszi, akkor a B pont az MO-nak $\overline{B}$ pontjára, és a C pont az MP-nek C pontjára veti árnyékát.

E szerint az AI, IB, BJ, JK, KC, CN, ND vonaldaraboknak vetett árnyékai az $AIBJ\overline{K}C\overline{N}D$ sokszögnek oldalai.



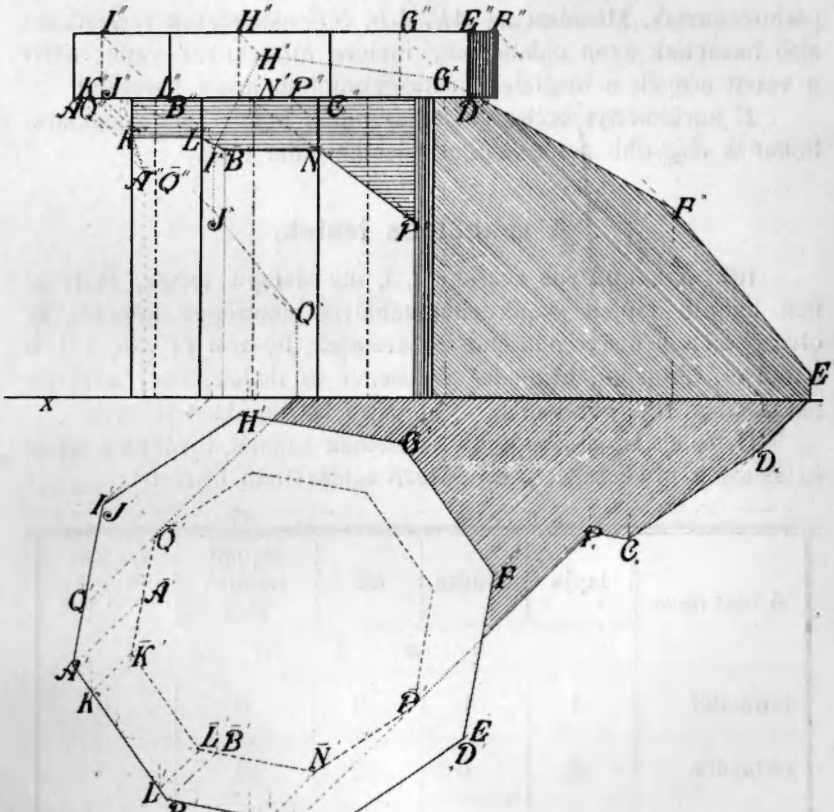
131. ábra.

Minthogy némelyike ez utóbbi oldalaknak igen rövid, azért végpontjainak összekötő egyenese nem adja meg elég biztosan az oldalt. Czélszerűnek mutatkozik e végből az ily oldalaknak távolabb fekvő pontjait is felhasználni.

Ez pedig következőképen történik: Az AB egyenes HMG lapot az $(AB, HG) — Q$ pontban metszi; ennélfogva AIB-nek a

HMG lapra vetett árnyéka $\overline{QIB}$ a $\underline{Q}$ ponton megy keresztül. Hasonlókép a $\overline{BJ}$ oldal a (BJC, HG) ponton, $\overline{KC}$ a (KC, FE) ponton, $\overline{CN}$ a (CN, FE) ponton megy keresztül és $JK//JK//GF$.

109. — *107. feladat. A 132. ábrában képeivel ábrázolt nyolczoldalú hasábnak és rajta nyugvó nagyobb alapú hasábnak árnyékolása.*



132. ábra.

Megoldás. (132. ábra.) A két hasáb 1-ső képe a két egyközepű szabályos nyolczoldal $\overline{O}\overline{K}\overline{L}\overline{N}\overline{P}$ . . ., *ABCDEFGHI.*

Az első hasábnak $\overline{P}$ és $\underline{Q}$ ponton keresztül menő oldaléle, a másodiknak a *DE*, *IJ* oldal éle képezi a saját árnyékhatárt az oldalfelület részéről.

Ez utóbbi hasáb alsó alaplapjának *JABCD* kerülete *JQ* és

PCD részekkel az 1-ső képsíkra *QABP* részszel az alatta levő hasábra veti árnyékát. És pedig: a *Q*, *K*, *L*, *N*, *P* pont az alsó hasábnak élein fekvő $\overline{Q}$, $\overline{K}$, $\overline{L}$, $\overline{N}$, $\overline{P}$ pontjaira, az *A*, *B* pont pedig a lapokon fekvő $\overline{A}$, $\overline{B}$ pontjaira.

Minthogy a felső hasáb alapsokszögének *AQ*, *KL*, *BN* oldalrészei párhuzamosak az alsó hasáb azon oldallapjaival, melyre árnyékukat vetik, azért ezek az árnyékok az illető oldalrészekkel párhuzamosak. Másrészt az *AK*, *LB*, *NP* oldalrészek metszik az alsó hasábnak azon oldallapjait, melyre árnyékukat vetik; ezért a vetett árnyék a megfelelő metszőpontokon megy keresztül.

E körülményt célszerű felhasználni, hogy rövid vonaldarabokat is nagyobb pontossággal rajzolhassunk meg.

A szabályos testek.

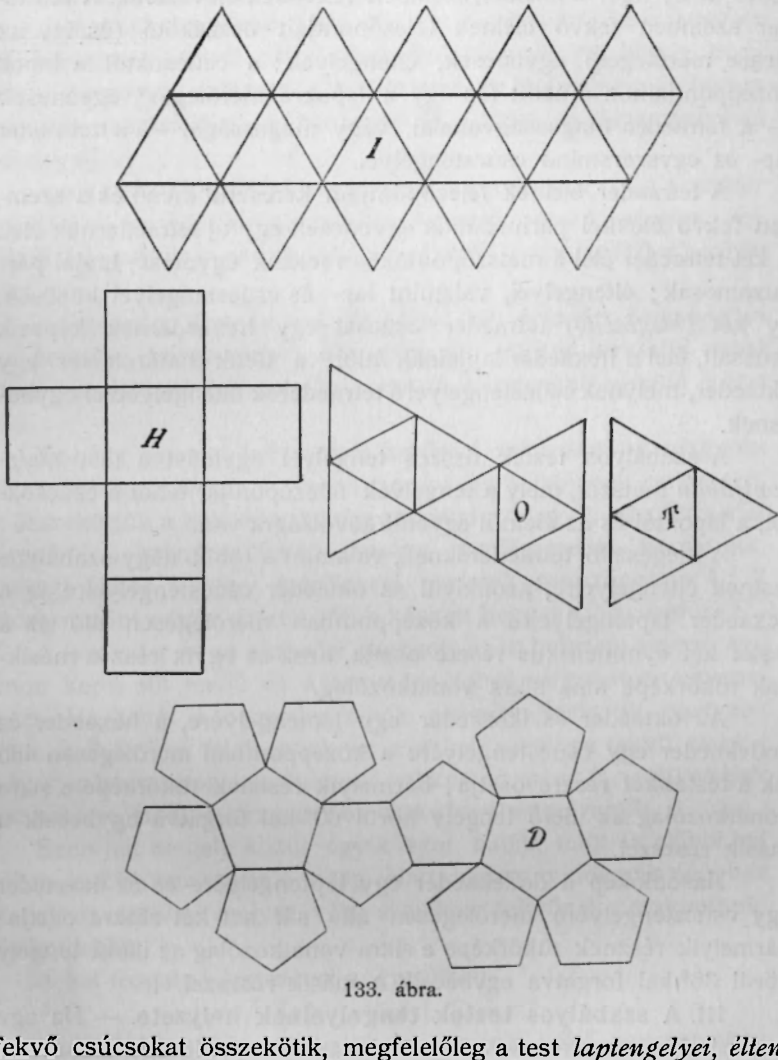
110. A szabályos testek, t. i. oly síklapú testek, melyeknek határló lapjait congruens szabályos sokszögek képezik, az olvasó előtt a stereometriából ismeretesek. Ily test öt van, t. i. a tetraeder, oktaeder, hexaeder, ikosaeder és dodekaeder; ezeknek hálózatai a 133. ábrában a *T*, *O*, *H*, *I*, *D* betűkkel jelöltek.

E testek lapjai-, csúcsai- és éleinek számát, továbbá a lapok és csúcsok miféleségét a következő táblázatban írjuk fel:

A test neve	lapja	csúcsa	éle	lapjait határló élek	csúcsain keresztülmenő élek
	száma				
tetraeder	4	4	6	3	3
oktaeder	8	6	12	3	4
hexaeder	6	8	12	4	3
ikosaeder	20	12	30	3	5
dodekaeder	12	20	30	5	3

A tetraeder kivételével a többi szabályos test minden lapjával egy másik lap párhuzamos. A szabályos test párhuzamos lapjait *szemben fekvő lapoknak*, oly két élet és két csúcsot, melyeken keresztül menő lapok szemben fekvők, *szemben fekvő éleknek és csúcsoknak* nevezzük.

Azon egyenesek, melyek a szemben fekvő lapoknak középpontjait, a szemben fekvő éleknek felezőpontjait, végre a szemben



133. ábra.

fekvő csúcsokat összekötik, megfelelőleg a test *laptengelyei, éltengelyei* és *csúcstengelyei.*

A lapok és élek merőlegesek a közép-, illetve felezőpontjukon keresztül menő lap- és éltengelyekre; a csúcstengelyek pedig a csúcsban találkozó összes lapokkal, valamint az összes élekkel egyenlő szögeket képeznek.

E szabályos testek lap-, él- és csúcstengelyeinek száma a lapok, élek és csúcsok számának felével egyezik.

A tetraeder oly élpárja, mely nem metsző, és oly lap és csúcs, mely nem coincidál, szemben fekvőnek neveztetik. A tetraeder szemben fekvő éleinek felezőpontjait összekötő (és így az élekre merőleges) egyenesek, éltengelyek; a csúcsoktól a lapok középpontjaihoz húzott (és így a lapokra merőleges) egyenesek — a tetraeder magasságvonalai, vagy magasságai — a tetraeder lap- és egyszersmind csúcstengelyei.

A tetraeder éleinek felezőpontjain keresztül menő és a szemben fekvő élekkel párhuzamos egyenesek egy új tetraedernek élei. A két tetraeder élei a metszőpontokban felezik egymást; lapjai párhuzamosak; éltengelyei, valamint lap- és csúcstengelyei közösek. Ily két (*kiegészítő*) tetraeder csúcsai egy hexaedernek képezik csúcsait, élei e hexaeder lapjainak átlói; a tőlük határolt tér egy oktaeder, melynek csúcstengelyei a tetraederek éltengelyeivel egybeesnek.

A szabályos testek összes tengelyei egymást a test *középpontjában* metszik, mely a tengelyek felezőpontja, tehát a csúcsoktól, a lapoktól és az élektől egyenlő távolságra van.

A kiegészítő tetraedereknek, valamint a többi négy szabályos testnek éltengelyeire, azonkivül az oktaeder csúcstengelyeire és a hexaeder laptengelyeire a középpontban merőlegesen álló sík a testet két symmetrikus részre osztja, azaz az egyik rész a másiknak tükörképe ama síkra vonatkozólag.

Az oktaeder és ikosaeder egy laptengelyére, a hexaeder és dodekaeder egy csúcstengelyére a középpontban merőlegesen álló sík a testet két részre osztja; bármelyik résznek tükörképe e síkra vonatkozólag az illető tengely körül 60^0-kal forgatva egybeesik a másik részszel.

Hasonlókép a dodekaeder egy laptengelyére és az ikosaeder egy csúcstengelyére merőlegesen álló sík azt két részre osztja; bármelyik résznek tükörképe e síkra vonatkozólag az illető tengely körül 36^0-kal forgatva egybeesik a másik részszel.

111. A szabályos testek tengelyeinek helyzete. — Ha egy hexaederbe egy oktaedert, egy dodekaederbe pedig egy ikosaedert írunk be akképen, hogy a beírt test csúcsai a körülírt test lapjainak középpontjai legyenek (vagy fordítva, egy oktaederbe egy hexaedert, egy ikosaederbe pedig egy dodekaedert írunk be, ugyanily körülmények mellett), akkor könnyen látható, hogy az oktaeder és hexaeder, valamint az ikosaeder és dodekaeder éltengelyei megegyezők, a lap- és csúcstengelyek pedig felváltva megegyezők. Az oktaeder és hexaeder összes tengelyeinek kölcsönös helyzete megegyező, hasonlókép az ikosaederé és dodekaederé.

Ugyancsak, ha egy hexaederbe egy tetraedert írunk, melynek élei a hexaeder lapjainak átlói, és ha a tetraeder középpontján keresztül annak éleivel párhuzamosakat húzunk, azt látjuk, hogy e hat párhuzamos, valamint a tetraeder négy laptengelye és három éltengelye megfelelőleg a hexaeder él-, csúcs- és laptengelyével megegyező.

A tetraeder éltengelyei, az oktaeder csúcstengelyei és a hexaeder laptengelyei oly három egy ponton keresztül menő egyenes, melyeknek bármelyike a másik kettővel egyenlő (és pedig 90⁰-u) szöget képez.

A tetraeder lap- és csúcstengelyei, az oktaeder laptengelyei és a hexader csúcstengelyei oly négy egy ponton keresztül menő egyenes, melyeknek bármelyike a másik hárommal egyenlő szöget képez.

Ily négy egyenes helyzetéről fogalmat szerezhetünk magunknak a következőképen: 1. egy hexaeder egyik lapjának csúcspontjait összekötjük a hexaeder középpontjával; vagy 2. egy tetraeder csúcsaiból a szemben fekvő lapokra merőlegeseket bocsátunk. Minthogy ekkor a négy merőlegest azoknak metszőpontja 1 : 3 viszony szerint osztja, azért a tőlük képzett hegyes szög cosinusa $^1/_3$.

A hexaeder és az oktaeder éltengelyeinek helyzete egyező egy ponton keresztül menő és a tetraeder éleivel párhuzamos egyenesekkel. Ha tehát a tetraeder egyik csúcsán keresztül, melyben annak a, b, c élei találkoznak az ezekkel szemben fekvő élekkel a_1, b_1, c_1 párhuzamosakat húzunk, akkor az $abca_1b_1c_1$ egyenesek fogalmat nyujtanak a hexaeder és oktaeder éltengelyeiről.

Ezen hat tengely közül egyik sem hajlik, mint az előbbi két esetben, a többihez egyenlő szög alatt, hanem mindegyik négyhez 60^0 alatt és egyhez, melyet véle szemben fekvőnek nevezhetünk, 90^0 alatt hajlik.

A hat tengely hármasával négy síkban

$$[abc_1],\ [ab_1c],\ [a_1bc],\ [a_1b_1c_1]$$

fekszik; ezek közül bármely kettő, és a másik kettő egy szemben fekvő tengelyben metszi egymást, s ezeknek

$$[aa_1],\ [bb_1],\ [cc_1]$$

síkjai páronként egymásra merőlegesek.

E három sík xyz metszővonalai, melyek szintén merőlegesek egymásra, az egyes síkokban felezik a szemben fekvő tengelyeket úgy, hogy a hat tengelyről következőképen is fogalmat szerezhetünk.

Képzelünk három síkot, melyek páronként egymásra merőlegesek és egymást az x, y, z egyenesekben metszik; az (yz), (zx), (xy) szögek és mellékszögeinek felezői aa_1, bb_1, cc_1 a kívánt tengelyek.

Az ikosaeder csúcstengelyei és a dodekaeder laptengelyei oly hat egyenes, melyeknek bármelyike a többi öthöz egyenlő szög alatt hajlik. Ha egy $ABCDE$ szabályos ötszög F középpontjában annak síkjára merőlegest emelünk, és erre az F talpponttól mérve az ötszög körül írható kör félsugarát reárakjuk az O pontig, akkor az OA, OB, OC, OD, OE, OF egyenesek helyzete megegyező az ikosaeder csúcstengelyének, valamint a dodekaeder laptengelyeinek kölcsönös helyzetével.

Ugyanis a szerkesztésből következik, hogy az OF egyenes a többi öttel egyenlő szöget képez és pedig olyant, melynek trigontangense — 2.

Másrészt, ha az F ponttól az $AB \ldots E$ ötszög körül írható körbe egy szabályos ötszöget akarunk beírni, akkor az AF sugár felét az AF-re merőleges sugárra visszük G-ig ($FG \perp AF, FG = AF$), és AG-t a GF-re rakjuk F felé H-ig; végre AH a körbe írható szabályos ötszög oldala. Az AHG egyenszárú háromszög azonban congruens az ABO-val, mert az AFG, AFO derékszögű háromszögek congruensek, tehát $AB = AH$, $AG = HG = AO = BO$.

A dodekaeder egy szemben fekvő élpárjának négy végpontján, még nyolcz él megy keresztül; ezeknek végpontjai egy hexaedernek csúcspontjai. A dodekaederbe tehát oly hexaedert írhatunk be, melynek csúcsai a dodekaeder csúcsaiban vannak.

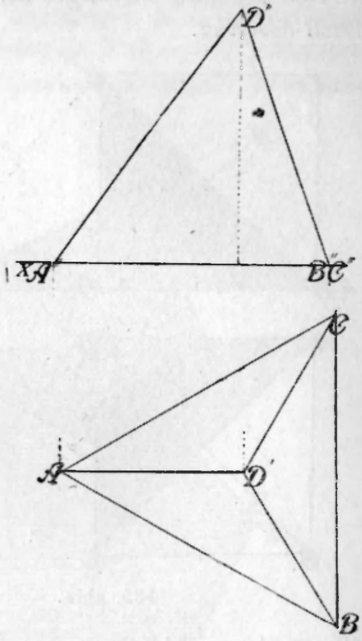
Minden ily beírt hexaeder lapjai a dodekaeder három élpárjával párhuzamosak, úgy hogy az összes beírható hexaederek száma öt. Ezeknek $5.12 = 60$ éle a dodekaeder lapjainak átlói $12.5 = 60$. Minden dodekaeder-csúcs két hexaedernek csúcsa $5.8 = 2.20$.

Ebből folyólag a dodekaeder tíz csúcstengelye következő összefüggésbe hozható a hexaeder csúcstengelyeivel: A dodekaeder minden csúcstengelye hat csúcstengelylyel ép oly szöget képez, mint a hexaeder két csúcstengelye; a többi három csúcstengelylyel pedig szintén egyenlő, de ettől külömböző szöget képez ama csúcstengelylyel.

A dodekaeder és ikosaeder minden éltengelyére két éltengely merőleges, a többi tizenkettő pedig négyesével egyenlő szöget képez a tekintetbe vett éltengelylyel.

112. — *108. feladat. Egy tetraeder képeinek szerkesztése, melynek egyik lapja az 1-ső képsíkon fekszik, egy másik lapja a 2-dik képsíkra merőleges.*

Megoldás. (134. ábra.) A tetraeder éleinek 1-ső képei egy egyenoldalú háromszögnek ABC-nek oldalai, és e háromszög magasságvonalainak, a szögpontok és a D magasságpont között levő részei. Minthogy a tetraeder egyik lapja a 2-dik képsíkra merőleges, azért az egyenoldalú háromszög egyik oldalát, pl. BC-t a képtengelyre merőlegesen kell felvenni. Az ABC háromszög 2-dik képe a képtengelyen van, az AD él 2-dik képe pedig, minthogy a 2-dik képsíkkal párhuzamos, valódi nagyságában mutatkozik, tehát egyenlő AB-vel.


134. ábra.

E körülményből meghatározható a tetraeder D szögpontjának távolsága a szemben fekvő laptól, azaz a *tetraeder magassága;* továbbá a D pontnak és ezzel a tetraeder összes éleinek 2-dik képe.

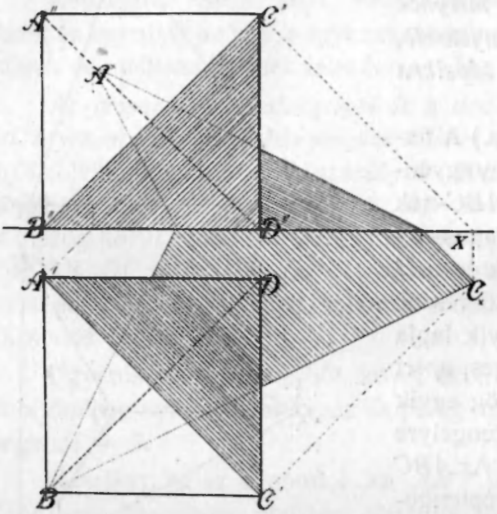
Megakarjuk még jegyezni, hogy ha egy tetraeder éléből annak magasságát akarjuk szerkeszteni, akkor az él fölé egy egyenoldalú háromszöget rajzolunk és magasságpontjának a szögponttól mért távolságából, mint befogóból, és az élből, mint átfogóból egy derékszögű háromszöget képezünk. E háromszögnek másik befogója a tetraeder magassága. E szerkesztést végeztük az előbbi ábrában is.

109. feladat. Szerkesztendő egy tetraedernek 1-ső és 2-ik képe, valamint saját- és vetettárnyéka, ha éltengelyei az 1-ső, a 2-dik és az oldal-képsíkra merőleges.

Megoldás. (135. ábra.) A tetraeder képei négyzetek és azoknak átlói, mint az ábra mutatja; az átlók képezik a tetraederéleknek valódi hosszúságát.

A tetraedernek csak az ABC lapja van megvilágítva, a többi árnyékban van; az ABC háromszög képezi az árnyékvető sokszöget, melynek árnyéka A^*BC_*.

113. — *110. feladat. Szerkesztendő az egyik csúcstengelyével az 1-ső képsíkra merőleges oktaedernek két képe, valamint saját- és vetett árnyéka.*



135. ábra.

Megoldás. (136. ábra.) Az oktaeder 1-ső képe egy négyzet $B'C'D'E'$ a két átlójával; a négyzet oldala az oktaeder éle, annak átlója a csúcstengely valódi hosszúsága. Ez utóbbi körülményből meghatározható az 1-ső képsíkra merőleges csúcstengelynek AF-nek 2-dik képe $A''F'' = B'D'$, és a $BCDE$ négyzetnek 2-dik képe.

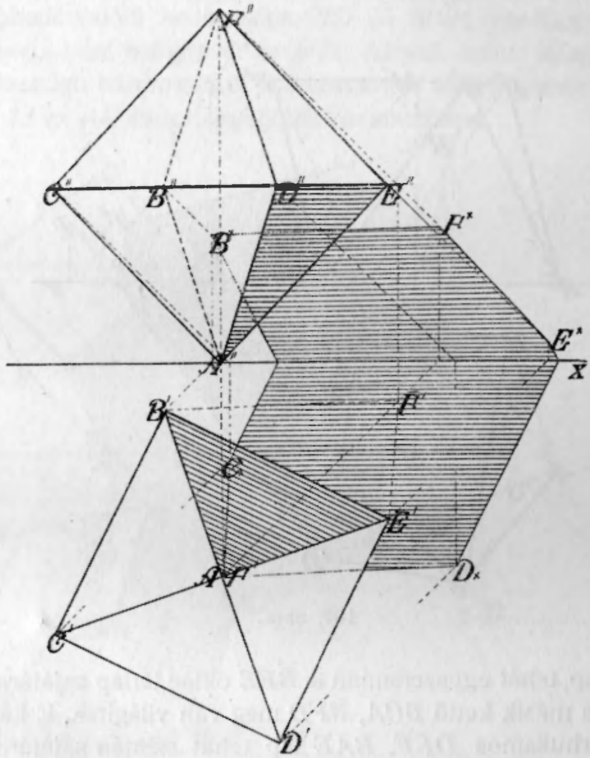
Az F. $BCDE$ négyoldalú gúlának F csúcsán keresztülmenő fénysugár az alaplapot egy $\overline{F}$ pontban metszi; ez oly helyzetű, hogy a nevezett négyoldalú gulának FBE oldallapja van árnyékban, a többi három pedig meg van világítva, mert az $\overline{F}B'$, $\overline{F}C'$ egyenesek a $B'C'D'E'$ alapnégyszöget maguk közé zárják.

Az A. $BCDE$ gúlának lapjai az előbbivel párhuzamosak, lapjai közül az a három, mely az előbbi gúlának megvilágított lapjaival párhuzamos, árnyékban lesz.

Ennélfogva az oktaeder árnyékvető sokszöge $ADEFBC$ és az 1-ső, illetve a 2-dik képsíkra nézve látszó lapok közül FBE, illetve ADE van sajátárnyékban.

111. feladat. Szerkesztendő az egyik laptengelyével az 1-ső képsíkra merőleges oktaedernek két képe, valamint saját- és vetett-árnyéka.

Megoldás. (137. ábra.) Az oktaeder 12 élének 1-ső képe egy szabályos hatszög oldala és annak a két egyenoldalú háromszögnek oldala, mely a hatszög szögpontjait felváltva összeköti. E háromszög oldalai az oktaeder éleivel egyenlők; az egyiknek ADE-nek 2-dik képe pl. a képtengelyen van, a másiknak BCF-nek 2-dik képe pedig a képtengelytől oly távolságra fekvő párhuzamos egyenesen van, mint az oktaeder laptengelyének hosszúsága. Ezt pedig az élből és a már megrajzolt $AC'DF'EB'$ szabályos hatszög oldalából könnyen szerkesztjük. Ugyanis a DF él valódi hosszúsága $C'F'$, 1-ső képének hosszúsága DF'; ennélfogva a GDF' derékszögű háromszögnek DG befogója (ha átfogója $F'G = C'F'$) megadja az F pont távolságát az 1-ső képsíktól, azaz a laptengely hosszúságát.



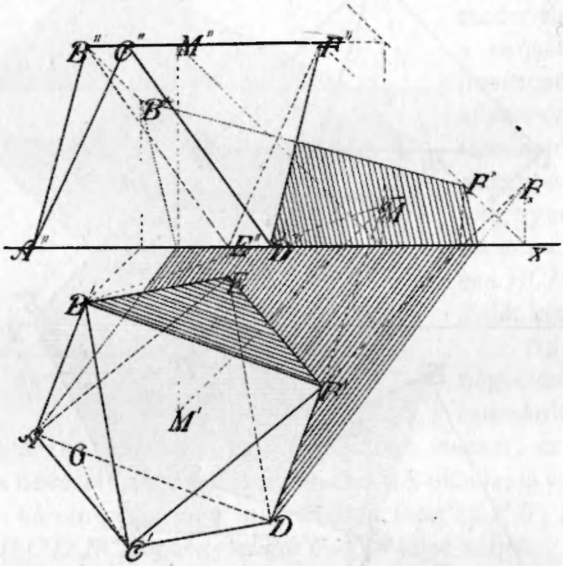
136. ábra.

Minthogy DF' egyenlő a $B'C'F'$ háromszög M' magasságpontjának távolságával a háromszög szögpontjától, azért az oktaedernek laptengely hosszúsága DG egyszersmind egy oly tetraedernek magasságával egyenlő, melynek élhosszúsága ugyanaz, mint az oktaederé.

Ebből, de már az előzőkből is következik, hogy ha az oktaeder BCF lapja egy oly tetraedernek lapja, melynek e lappal szemben fekvő csúcsa e lap fölött van, akkor a tetraedernek többi három lapja az oktaeder BCA, CFD, FBE lapjaival egy-egy síkban van.

Más szóval: e három lap meghosszabbítva és a BCF oktaederlap egy tetraedert zár be.

Ezt fölhasználhatjuk annak megállapítására, hogy a három oktaeder lap közül melyek vannak sajátárnyékban. Ugyanis a tetraeder csúcsán keresztül menő fénysugár a BCF alaplapot egy pontban metszi, melynek 1-ső képe $\overline{M}$. Minthogy a $B'C'F'$ háromszög az $\overline{M}B'$, $\overline{M}F'$ egyenesek között van, azért a BF élből kiinduló



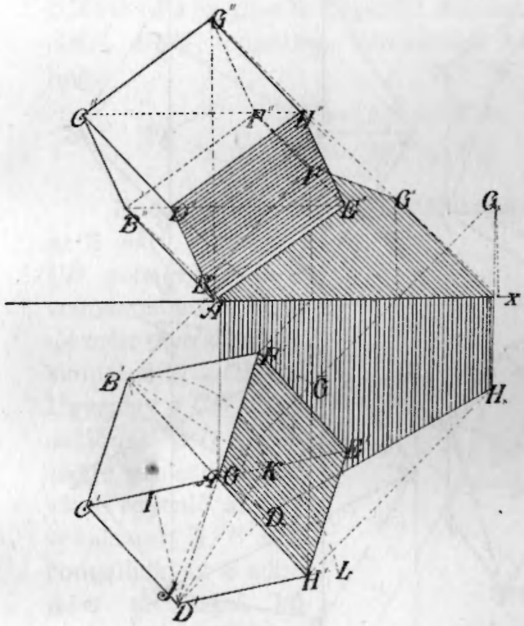
137. ábra.

tetraederlap, tehát egyszersmind a BFE oktaederlap sajátárnyékban lesz, mig a másik kettő BCA, BFD meg van világítva. E két utóbbi lappal párhuzamos DEF, BAE lap tehát szintén sajátárnyékban vannak úgy, hogy az oktaeder árnyékvető sokszöge az $ABFD$ négyszög.

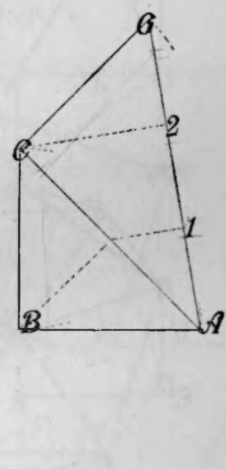
Megakarjuk még jegyezni, hogy az árnyékvető sokszög meghatározásánál a szóban forgó tetraeder használata kikerülhető, mert a BCF lap M középpontján keresztül menő fénysugár metszőpontjának az ADE lappal, ugyancsak az $\overline{M}$ pontban van 1-ső képe.

114. — *112. feladat. Szerkesztendő az egyik csúcstengelyével az 1-ső képsíkra merőlegesen álló hexaedernek két képe, és saját- és vetettárnyéka.*

Megoldás. (138. ábra). A hexaeder összes élei a csúcstengelylyel és így az arra merőleges 1-ső képsíkkal egyenlő szöget képeznek. Ennek következtében a hexaeder összes éleinek 1-ső képei egyenlők, s mint ilyenek, egy szabályos hatszögnek oldalai és e hatszög középpontját a szögpontokkal összekötő egyenesek. AB, AD, AE tehát az alsó csúcson, GC, GF, GH a felső csúcson keresztül menő három-három él; a BDE pontok és a CFH pontok az 1-ső képsíkkal párhuzamos síkokban feküsznek, melyek az AG csúcstengelyt három egyenlő részre osztják. Az $ABCD$ négyzet AC átlójának valódi hosszúsága BD — $B'D'$, ennélfogva ha az $A'C'$ felével, mint befogóval és $B'D'$ felével, mint átfogóval egy AIJ derékszögű háromszöget szerkesztünk, akkor annak második befogója IJ az AG csúcstengelynek harmadrésze.



138. ábra.



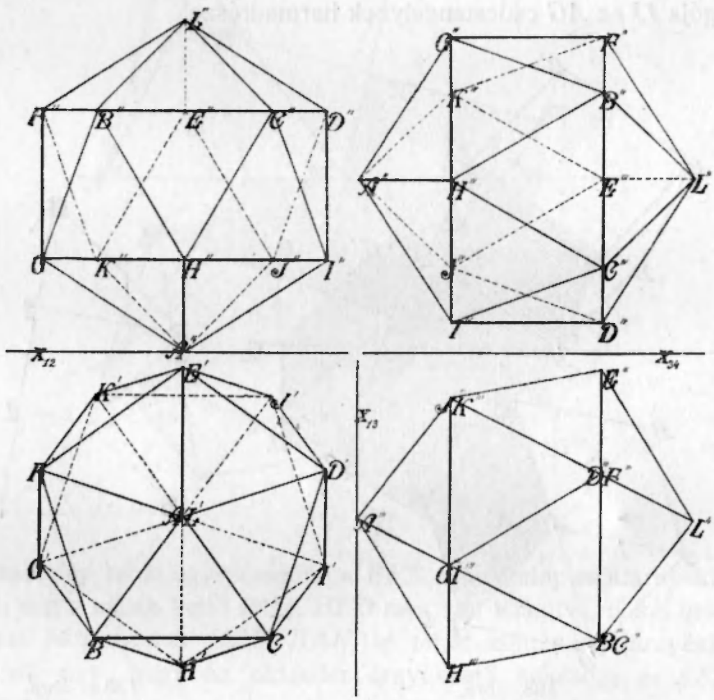
138 a. ábra.

Könnyen meglehet az AG csúcstengely egész hosszát is szerkesztenünk. Ezt külön a 138a. ábra mutatja. Vagy kapcsolatban a 138. ábrával az $ABCD$ négyzetet, vagy annak a BD átlóval felezett részét a BD átló körül az 1-ső képsíkkal párhuzamos síkba forgatjuk a $B'KD'$ helyzetbe. KD' a hexaeder éle, $B'D'$ egyik lapjának átlója, tehát e vonaldarabokból, mint befogókból képezett $B'D'L$ derékszögű háromszög $B'L$ átfogója a csúcstengely valódi hosszúsága.

A hexaeder G csúcsán keresztül menő fénysugár a CFH lapot egy pontban metszi, melynek 1-ső képe $\bar{G}$. A GF', GH' egyenesek a $C'F'H'$ háromszöget, melyet a $GCHF$ gúla alapjának tekintünk, maguk közé zárják.

Ennélfogva a gúlának FGH és a hexaedernek $FGHE$ lapja saját árnyékban van, a másik kettő $GFBC$, $GCDH$ pedig meg van világítva. Ugyancsak ez utóbbi két lappal párhuzamos lapjai a hexadernek saját árnyékban lesznek s ezért az árnyékvető sokszög: $GHDABF$.

115. — *113. feladat. Egy ikosaeder 1-ső, 2-dik és oldalképének szerkesztése, ha egyik csúcstengelye az 1-ső képsíkra, egyik éltengelye pedig az oldalképsíkra merőleges.*



139. ábra.

Megoldás. (139. ábra.) Az ikosaeder éleinek 1-ső képei egy szabályos tízszög oldalai, továbbá az a tiz egyenes, mely ennek középpontját a szögpontokkal összeköti, végre annak a két szabályos ötszögnek oldalai, melyek a tizszög minden 2-dik szögpontját összekötik s melyek egyenlők az ikosaeder élhosszával. Minthogy a feladat azt kivánja, hogy az egyik éltengely az oldalképsíkra merőleges legyen, azért a szabályos tizszögnek két oldalát az x_{12} képtengelyre merőlegesen veszszük fel.

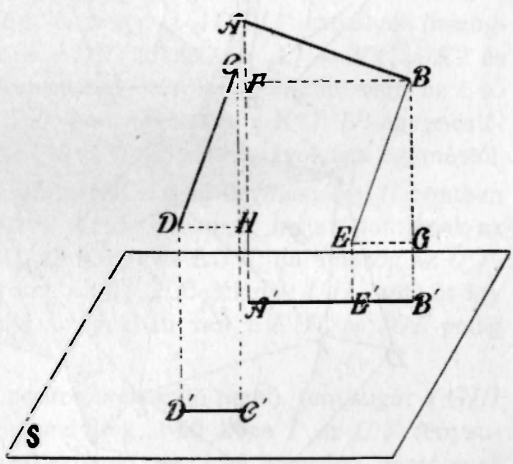
Az ikosaeder tudvalevőleg két szabályos ötoldalú gúlára $A.\ GHIJK$, $L.\ BCDEF$-re és egy ezekkel közös alaplapu tizoldalú *prismatoidra* bontható. E gúlák és a prismatoid magasságait, tehát az ikosaeder csúcstengelyét meghatározandó, a következő tételre támaszkodunk:

„Ha két egymásra merőleges és egyenlő vonaldarab képei egy képsíkon párhuzamosak, akkor ezek bármelyikének képhosszúsága egyenlő a másik vonaldarab végpontjainak a képsíktól mért távolságai különbségével.“

Ugyanis ha az AB, CD egymásra merőleges vonaldaraboknak derékszögű projectiói az **S** síkra (140. ábra) $A'B'$, $C'D'$ és a CD-vel párhuzamos és egyenlő BE-nek projectiója $B'E'$, akkor az ABF, BEG congruens derékszögű háromszögekből következik, hogy

$$AF = EG = E'B' = D'C'$$
$$CH = BG - FB = A'B'$$

Ennélfogva az AB vonaldarabnak $A'B'$ derékszögű projectiója az **S** síkra, egyenlő a CD vonaldarab C, D végpontjainak az **S** síktól mért távolságai különbségével CH-val. Ugyanígy a CD vonaldarabnak $C'D'$ derékszögű projectiója az **S** síkra egyenlő az AB vonaldarab A, B végpontjainak az **S** síktól mért távolságai különbségével AF-fel.

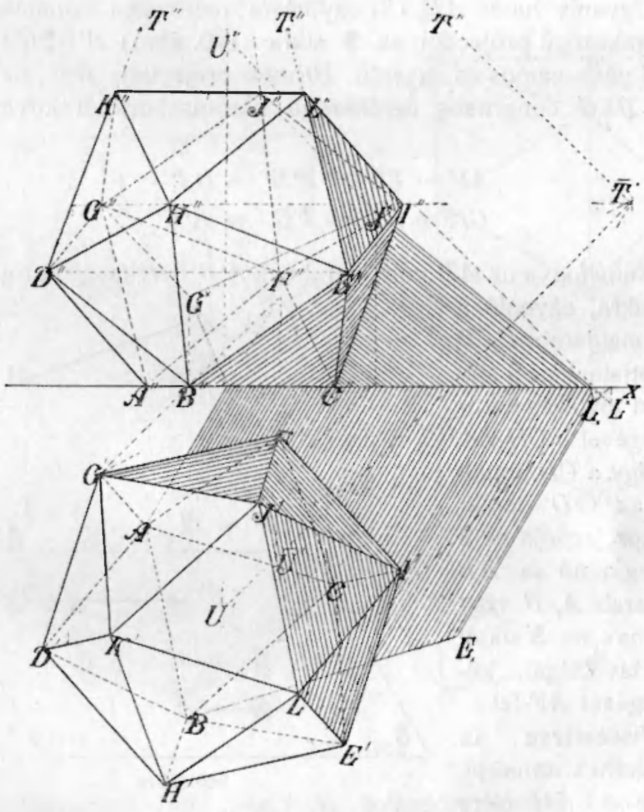


140. ábra.

Visszatérve az ikosaederhez: annak pl. FG éle $\perp$ AH élére és ezeknek 1-ső képei párhuzamosak. Ezért az AH és FG él végpontjainak az 1-ső képsíktól mért távolsági különbsége egyenlő $F'G'$, illetve $A'H'$. Ha tehát az A csúcspontnak 2-dik képe a képtengelyen x_{12}-ön van, akkor a G csúcspont és így a $HIJK$ csúcspontok is az 1-ső képsíktól $G'F'$ távolságra és az F csúcspont, valamint $BCDE$ is $G'F' + A'H'$ távolságra, végre az L pont $G'F' + A'H' + G'F'$ távolságra van.

Ezzel meghatározhatjuk az ikosaedernek 2-dik képét $A''B'' \ldots L''$-et. Az ábrában az oldalképsík az 1-ső nyoma x_{13} körül lett az 1-ső képsíkba forgatva ; azonkivül az oldalképsíkra merőleges 4-dik képsíkra vonatkozólag, mely az oldalképsíkot az x_{34} képtengelyen metszi, megszerkesztettük az ikosaedernek képét $A^{IV}B^{IV} \ldots L^{IV}$-et.

114. feladat. Szerkesztendő egy a laptengelyével az 1-ső képsíkra merőlegesen álló ikosaedernek két képe, valamint saját- és vetett árnyéka.



141. ábra.

Megoldás. (141. ábra). Két egyenoldalú háromszöget ABC, $J'K'L'$-et rajzolunk, melyeknek oldalai az ikosaeder éleivel egyenlők, és szögpontjai egy szabályos hatszög szögpontjai. Ezután két új szabályos háromszöget $D'E'F'$, $G'H'I'$-t rajzolunk, melyek amazokkal a közös középpontra U'-re vonatkozólag hasonlók, és oldalai oly nagyok, mint az ikosaeder éléből képezett szabályos ötszögnek átlója. E két pár szabályos háromszögnek szögpontjai az ikosaeder csúcsainak 1-ső képei.

Az ABC háromszögnek 2-dik képét a képtengelyben vesszük fel. Az egymásra merőleges AG és DH éleknek első képei párhuzamosak lévén, a G (és a H, I) pontok távolsága az 1-ső képsíktól egyenlő $D'H'$; továbbá a D (és az E, F) pont távolsága a GHI síktól egyenlő AG'; végre a JKL pontok távolsága a DEF síktól ismét $D'H'$. Ebből az összes csúcsoknak és éleknek 2-dik képei meghatározhatók.

Vagy: az AJ és DC az ikosaeder éléből képezett szabályos ötszögnek átlójával egyenlő; azoknak 1-ső képei AJ', $D'C$ párhuzamosak; ennélfogva a J pont $D'C$ távolságra és a D pont AJ' távolságra van az ABC laptól. A $D''F''E''$ és a $K''J''L''$ egyeneseknek tehát távolsága az $A''B''C''$-től AJ' és $D'C$; végre a $G''H''I''$ távolsága $K''J''L''$-től szintén AJ'.

Az ikosaeder DK, LE és JF élei egymást egy T pontban metszik, mely az $LKDBE$ szabályos ötszög miatt oly helyzetű, hogy $KT = TL = KB$, azaz az ikosaeder éleiből alakítható szabályos ötszög átlójával. Tekintve, hogy az $ADKJF$ szabályos ötszögben az AJ átló párhuzamos a DK oldallal és $AJ = KT$, a KT és az AJ vonaldarabok végpontjainak távolsági külömbsége az 1-ső képsíktól egyenlő. Tehát a T'' pont távolsága a $K''J''L''$ egyenestől ugyanaz, mint a $K''J''L''$, $A''B''C''$ egyenesek távolsága egymástól.

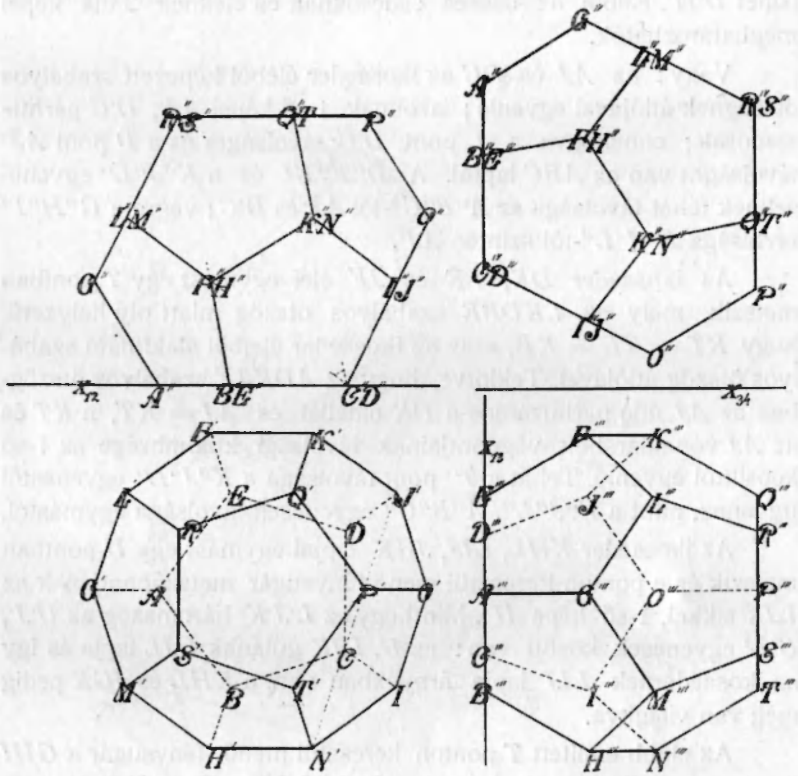
Az ikosaeder KHL, LIJ, JGK lapjai egymást egy U pontban metszik és e ponton keresztül menő fénysugár metszőpontjának az LJK síkkal, 1-ső képe $\overline{U}'$. Minthogy az $L'J'K'$ háromszög az $\overline{U}'J'$, $\overline{U}'L'$ egyenesek között van: az U. LJK gúlának UJL lapja és így az ikosaedernek LIJ lapja árnyékban van, a KHL és JGK pedig meg van világítva.

Az előbb említett T ponton keresztül menő fénysugár a GHI lapot egy pontban metszi, melynek 1-ső képe $\overline{T}'$ az $U'T'$ fénysugáron a 45^0 világítás következtében az 1-ső képsíkra merőleges laptengelytől $D'C + AJ'$, távolságra azaz ép oly távolságra van, mint a T pont a GHI lap fölött.

A T pont egy hatoldalú gúlának szögpontja, melynek oldallapjai az ikosaeder JGF, JFI, ILE, LEH, HKD, KDG lapjai a T pontig meghosszabbítva. Ha a $\overline{T}$ ponttól e gúlának a GHI síkban fekvő alapsokszöge szögpontjaihoz sugarakat húzunk, akkor azt tapasztaljuk, hogy az első három oldallapja árnyékban van, az utóbbi három pedig meg van világítva. Mindezekből látható, hogy az ikosaeder árnyékvető sokszöge: *AGJLEB*.

116. — *115. feladat. Szerkesztendők egy dodekaedernek képei, ha egy laptengelye az 1-ső és egy éltengelye a 2-dik képsíkra merőleges.*

Megoldás. (142. ábra). A dodekaeder élhosszából, mint oldalból két szabályos ötszöget *ABCDE*, *P'Q'R'S'T'*-t rajzolunk, melynek szögpontjai egy szabályos tízszög szögpontjait képezik; ennek egyik oldala a képtengelylyel, x_{12}-vel, párhuzamosan veendő fel.

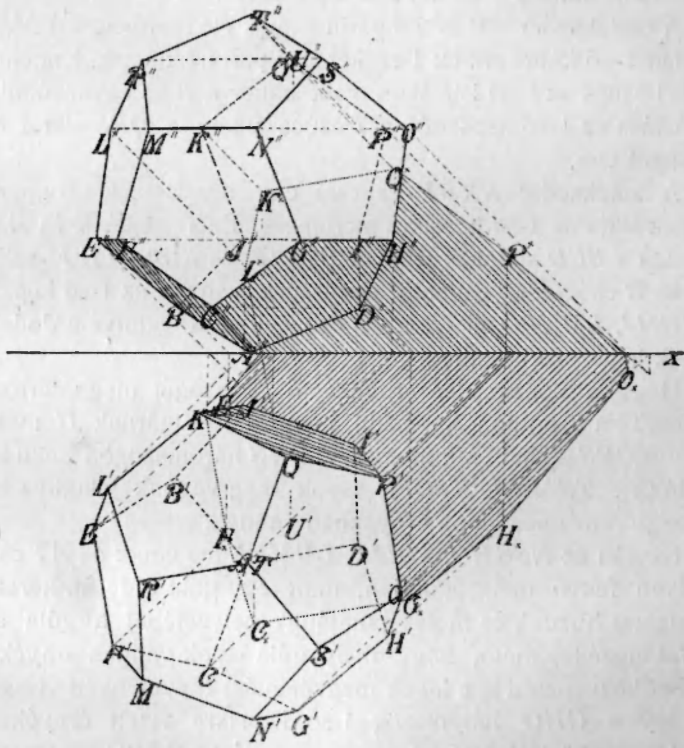


142. ábra.

Ezután más két az előbbiekkel hasonló szabályos ötszög szögpontjait *F'G'H'I'J'*, *K'L'M'N'O'*-t szerkesztjük meg, melynek oldalai az előbbi ötszögek átlóival egyenlők. A két pár szabályos ötszög szögpontjai a dodekaeder csúcsainak 1-ső képei.

A dodekaedernek *CNPJ* szögpontjai egy az 1-ső képsíkra merőleges síkban fekvő négyzetnek szögpontjai, mert oldalai a dodekaeder lapjainak átlói. E négyzet *J*, *N* és *P* szögpontjainak távolságai az $ABCDE$ laptól, mely pl. az 1-ső képsík: $N'C$, $J'C$ és $N'C + CJ'$. Ugyanily távolságra vannak az $FGHI$, $OKLM$, illetve a $QRST$ pontok is az 1-ső képsíktól. Ezzel a dodekaeder összes csúcsainak 2-dik képei megszerkeszthetők.

Az ábrában még a dodekaedernek 3-dik képe az 1-ső képsíkra merőleges oldalképsíkon és egy erre merőleges 4-dik képsíkon van meghatározva.



143. ábra.

116. feladat. Szerkesztendő egy a csúcstengelyével az 1-ső képsíkra merőlegesen álló dodekaeder két képe, valamint saját- és vetett árnyéka.

Megoldás. (143. ábra.) Az 1-ső képsíkon két szabályos háromszöget $B'C'D'$, $Q'R'S'$-t rajzolunk, melyeknek oldalai a dodekaeder egyik lapjának átlójával egyenlők és szögpontjai egy szabályos hatszögnek szögpontjai. A háromszögek közös középpontját $A \equiv T'$-t a szögpontokkal összekötő AB', AC',... egyenesek a dodekaeder hat élének képei.

A $B'R'C'S'D'Q'$ hatszög $B'R'$, $R'C'$,.., $Q'B'$ oldalain feküsznek a dodekaeder hátra levő hat pár szögpontjának $K'F'$, $E'N'$, $M'H'$, $G'P'$, $O'J'$, $I'L'$ képei, melyek egy tizenkétszögnek szögpontjai. E tizenkétszög nem szabályos, hanem minden második oldala $E'F'$, MN', $G'H'$, $O'P'$,.. a dodekaeder élével egyenlő és párhuzamos a $B'C'D'$, $Q'R'S'$ háromszögek oldalaival. A mondottakból a dodekaeder 1-ső képe szerkeszthető.

A dodekaeder AB és TS párhuzamos éle merőleges FM-re és azoknak 1-ső képei ennek 1-ső képével párhuzamosak. Ennélfogva ha az A csúcs az 1-ső képsíkon van, akkor a B és egyszersmind a C, D csúcs az 1-ső képsíktól, a T csúcs pedig a QRS síktól $F'M'$ távolságra van.

A dodekaeder $RKBF$ csúcsai egy négyzetnek szögpontjai, melynek síkja az 1-ső képsíkra merőleges. Ezért az F, K és R pont távolsága a BCD síktól egyenlő $K'B'$, $B'F'$ és $K'B' + B'F'$-sel. Az F, K és R csúcscsal egyenlő távolságra vannak az 1-ső képsíktól az $EGHIJ$, $LMNPO$, illetve a QS csúcsok. Ezt tekintve a dodekaeder 2-ik képe szerkeszthető.

Hogy a dodekaeder árnyékvető sokszögét meghatározzuk, felkeressük a T ponton keresztül menő fénysugárnak U metszőpontját a QRS síkkal. Minthogy U a QRS háromszögön belül van: a $TQKLR$, $TRMNS$, $TSOPQ$ lapok meg vannak világítva és az ezekkel párkuzamos lapok árnyékban vannak.

Ezután az $NSGHO$, $PQIJK$, $LRMFE$ lapoknak az AT csúcstengelyen fekvő metszőpontján, mint egy gúla csúcsán keresztül fénysugarat húzunk és metszőpontjának helyzetéből a gúla alapsíkjával megállapítható, hogy mely gúla lapok vannak árnyékban. De lehet közvetlenül is e lapok megvilágítási tüneményeit vizsgálni.

Igy a GHO háromszög 1-ső képsíkra vetett árnyékának, $G_*H_*O_*$-nak, körüljárási értelme ugyanaz, mint a $G'H'O'$ háromszögé, tehát a GHO lapnak az 1-ső képsíkra látszó oldala meg van világítva.

A KQP háromszögnek a 2-dik képsíkra vetett árnyéka $K^*Q^*P^*$. Ennek és a $K''Q''P''$ háromszögnek körüljárási értelme egyező, tehát a KQP háromszögnek a 2-dik képsíkra látszó oldala meg van világítva. Ámde ez a dodekaeder belső része felé fordított oldal; ezért a másik árnyékban van. Ugyanezt az eljárást követve látható, hogy az FEL háromszög meg van világítva. A dodekaeder árnyékvető sokszöge tehát: $QKLEFCGHOP$. Megjegyezzük még ez alkalommal, hogy az árnyékvető sokszögnek vetett árnyéka a képsíkokra magában zárja a test minden csúcsának vetett árnyékát, úgy hogy a csúcsok vetett árnyékából is megállapítható a test árnyékvető sokszöge.

A szabályos rendszer kristályalakjai.

117. A szabályos rendszer teljes alakjai. Egy O ponton keresztűl (144 ábra.) három páronként egymásra merőleges félsugarat húzunk és ezeket egy síkkal az A_1, B_2, C_3 pontokban metszszük. Még öt síkot lehet akkép elhelyezni, hogy azok ama félsugarakról ugyanoly vonaldarabokat messenek le az O pontból mérve, mint az első sík. Ha ugyanis az $OA_1 = a$, $OB_2 = b$, $OC_3 = c$ vonaldarabokat mind a három félsugárra rakjuk, tehát $a = OA_1 = OA_2 = OA_3$; $b = OB_1 = OB_2 = OB_3$, $c = OC_1 = OC_2 = OC_3$ az egyes félsugarakon, akkor az $A_1B_2C_3$, $A_1B_3C_2$, $A_2B_3C_1$, $A_2B_1C_3$, $A_3B_1C_2$, $A_3B_2C_1$ síkok ama félsugarakról szintén az a, b, c vonaldarabokat metszik le különböző rendben.

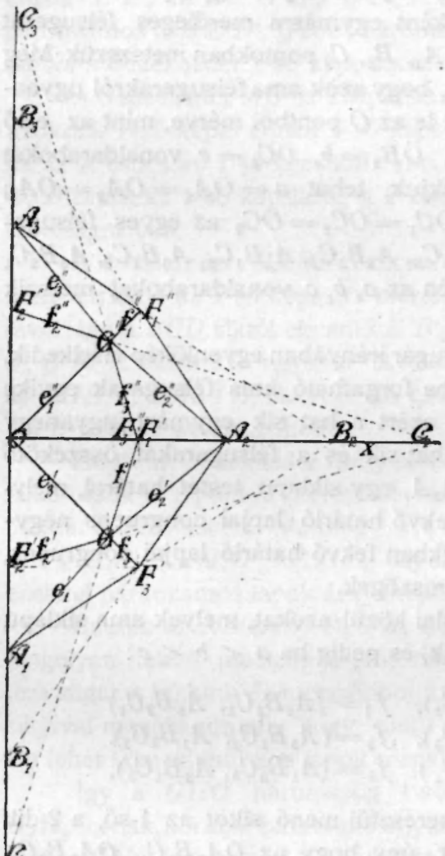
E hat sík ama három félsugár irányában egyenlőkép viselkedik, vagyis bármelyik sík a másikba forgatható ama félsugarak egyike vagy másika körül (90°-kal); ezért a hat sík egymást ugyanegy pontban G-ben metszi. Ama hat sík és a félsugarakat összekötő három sík OA_1A_2, OA_2A_3, OA_3A_1 egy síklapu testet határol, melynek ez utóbbi három síkban fekvő határló lapjai congruens négyszögek (deltoid), mig a hat síkban fekvő határló lapjai congruens, de általában szabálytalan háromszögek.

Ha a hat sík metszővonalai közül azokat, melyek ama síklapú test élei, e és f betűkkel jelöljük, és pedig ha $a < b < c$:

$$e_1 = (A_1B_2C_3,\ A_1B_3C_2),\quad f_1 = (A_2B_3C_1,\ A_3B_2C_1)$$
$$e_2 = (A_2B_3C_1,\ A_2B_1C_3),\quad f_2 = (A_3B_1C_2,\ A_1B_3C_2),$$
$$e_3 = (A_3B_1C_2,\ A_3B_2C_1),\quad f_3 = (A_1B_2C_3,\ A_2B_1C_3),$$

és a felvett három félsugáron keresztűl menő síkot az 1-ső, a 2-dik és az oldalképsíkba helyezzük, úgy hogy az $OA_1B_1C_1$, $OA_2B_2C_2$, $OA_3B_3C_3$ félsugarak y, x, z tengelyek, akkor e síklapú test 1-ső, 2-dik képét a 144. ábra mutatja.

Egészítsük ki ezután a felvett három félsugarat teljes sugárrá. Ekkép még hét, tehát összesen nyolcz ilyen derékszögű, úgynevezett triédert kapunk, mint az eredeti három félsugártól és az őket összekötő síkoktól határolt végtelen tér, mely az egész térnek egy nyolczada — octansa — volt. E szerint még hét ily siklapú testet nyerünk, mint az első volt, melyet képeztünk, ha ezen új félsugarak irányában is úgy helyezzük el a síkokat, hogy azok róluk *a*, *b*, *c* vonaldarabokat messenek el. Összesen tehát 48 síkot birunk három páronként egymásra merőleges és egymást egy *O* pontban metsző egyenes — tengely — irányban akkép elhelyezni, hogy e síkok a három tengelyről ugyanoly hosszuságu vonaldarabokat *(a, b, c)* messenek le és így a tengelyek irányában egyfélekép viselkedjenek.



144. ábra.

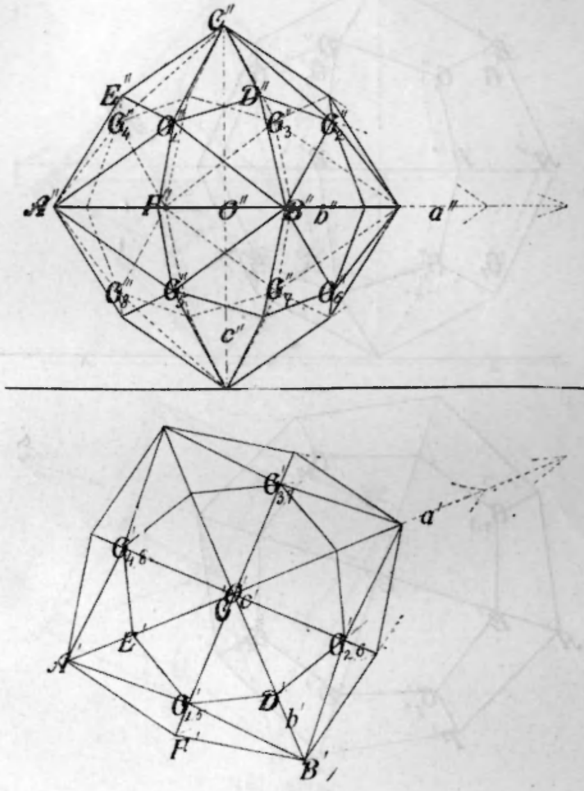
E 48 sík egy síklapú testet határol, mely a kristálytan úgynevezett szabályos rendszerének *alapalakja* és *hexakisoktaeder*-nek vagy *tetrakontaoktaedernek* (negyvennyolczasnak) neveztetik és melynek a szerkesztett síklapú test egy nyolczada. E kristály-alakot az *(abc)* symbolummal szokás jelölni, melynek betüi a tengelyekről lemetszett részeknek mérőszámai.

A szerint, a mint e számok közül: 1. a két nagyobb egyenlő, 2. a két kisebb egyenlő, 3. egy végtelen nagy, a másik kettő külömböző, 4. egy végtelen nagy, kettő pedig egyenlő, 5. kettő végtelen nagy, végre 6. mind a három egyenlő, származik megfelelőleg: *az ikositetraeder (abb), a triakisoktaeder (aab), a tetrakishexaeder (ab∞), a rombdodekaeder (aa∞), a hexaeder (∞a∞), az oktaeder (aaa),* mely utóbbi kettő a már ismert szabályos testekkel megegyező.

Mind a hét kristályalaknak három *tengelye* és három *symmetriasíkja* van, mely síkok két-két tengelyen mennek keresztűl és így egymásra szintén ép úgy, mint a tengelyek páronként merőlegesek. Mindegyik symmetriasík a kristály-alakot oly két részre osztja, melyek egymásnak tükörképei a symmetriasíkra vonatkozólag.

118. — *117. feladat. Szerkeszszük meg egy hexakisoktaeder* $(1\ 1^1/_2\ 2)$ *képeit, ha egyik tengelye c az 1-ső képsíkra merőleges, a másik kettő, a, b, pedig a 2-dik képsík irányában általános helyzetű. Szerkesztendő a test hálója annak képeiből.*

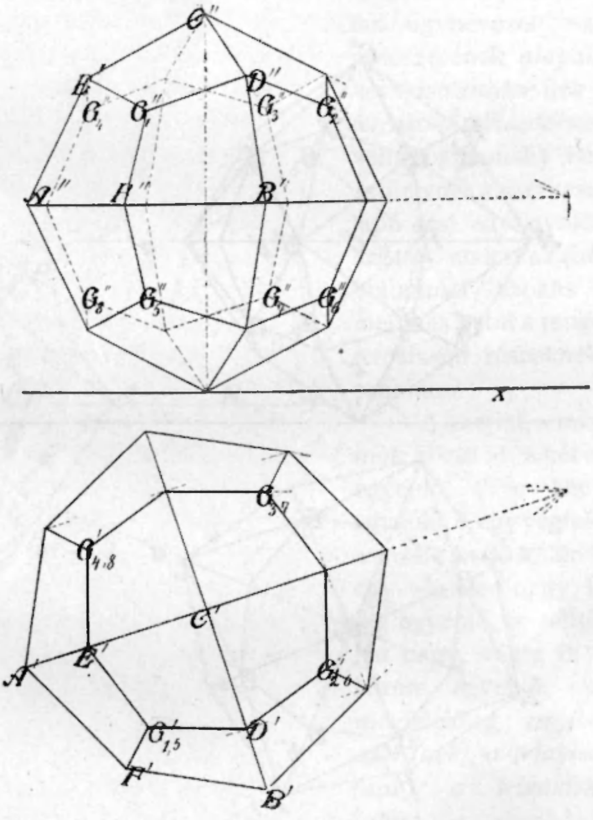
Megoldás. (145. ábra). E test mindegyik felső octansának 1-ső képe ugyanolyan, mint az előbbi ábrában szerkesztett octansé, az alsóknak 1-ső képeit pedig a felsők teljesen elfödik.



145. ábra

Hogy a test második képét megkapjuk, ismerni kell az egyes csúcsoknak távolságát az *a*, *b* tengelyeken keresztűl menő síktól. Ez azonban az előbbi ábrában bemutatott octans csúcsainak távolságával az 1-ső képsíktól, vagy a 2-dik képek távolságával az *x* képtengelytől megegyező. De legczélszerűbb ezt a már megrajzolt 1-ső képből meghatározni.

Ugyanis, ha a *[b, c]* síkot új képsíknak, 3-diknak, tekintjük, és e síkot nem 1-ső nyoma körül, hanem a b tengelyek körül forgatjuk az 1-ső képsíkkal párhuzamos helyzetbe, míg tehát a c tengely az a-val nem egyesűl, akkor a forgatott 3-dik képnek 1-ső képe, melyet e szempontból 3-dik képnek nevezhetünk, a meglévő 1-ső képben lesz. A mily távolságra vannak tehát a test csúcsainak 3-dik képei b' tengelytől, annyira lesznek e csúcsok 2-dik képei a b''-től. E sze-



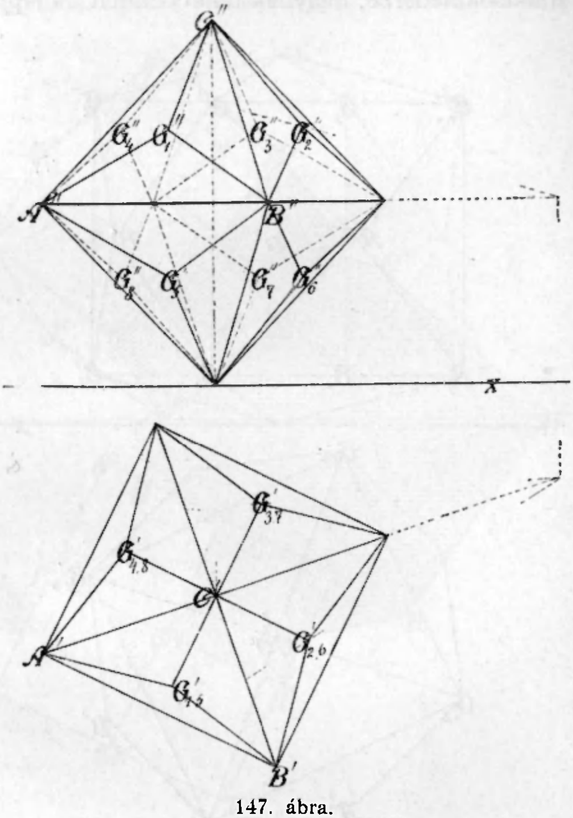
146. ábra.

rint az 1-ső képből a csúcsok 2-dik képei egyszerűen szerkeszthetők.

A test egyik octansának csúcsai az $ABCDEFG_1$ betükkel vannak jelölve. Ezek közül G_1 az octans főcsúcsának nevezhető. A többi octansnak főcsúcsai G_2 G_3 . . . G_8.

Ha a test egyik lapjának, pl. az AG_1F háromszögnek valódi alakját meghatároztuk, akkor hat ezzel congruens háromszöget akkép kell egymás mellé rajzolni, hogy kettő-kettőnek egy közös oldala és valamennyinek G_1 közös szögpontja legyen. Ezzel megkapjuk egy octansnak hálóját. A testet nyolcz ily octans határolja. Ezeket akkép kell egy síkban egymással az éleken összefüggőleg rajzolni, a mint azok a testen egymásra következnek.

119. — *118. Szerkesztendők az ikositetraeder (1 2 2) képei, ha tengelyei ugyanoly helyzetűek, mint az előbbi testnek.*



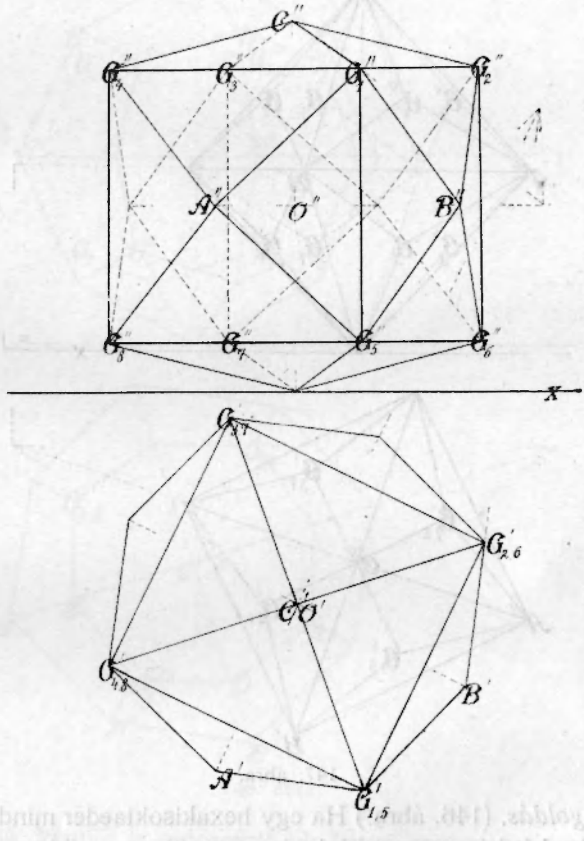
147. ábra.

Megoldás. (146. ábra.) Ha egy hexakisoktaeder minden octansának oly két-két szomszéd lapja egyesül egy síkban, melynek közös éle a rövidebb tengely végpontján megy keresztűl, úgy hogy egy octanst határló hat congruens háromszög helyett, három symmetrikus négyszög (deltoid) keletkezik, akkor a hexakisoktaeder átmegy az ikositetraederbe, melynek tehát 24 lapja van.

A test képeinek szerkesztése az ábrából könnyen felismerhető, egyik octansának csúcsai: $ABCDEFG_1$; a többieknek főcsúcsa G_2, G_3, . . . G_8.

120. — *119. feladat. Szerkesztendők a triakisoktaeder (1 1 2) képei ha tengelyei ugyanoly helyzetűek, mint az előbbi testeké.*

Megoldás. (147. ábra). Ha hexakisoktaeder minden octansának oly két-két szomszéd lapja egyesűl egy síkban, melynek közös éle egy tengelyről hosszabb vonaldarabot metsz le, mint a többi élek, úgy hogy egy octanst határló hat congruens háromszög helyett három egyszárú háromszög keletkezik, akkor a hexakisoktaeder átmegy a triakisoktaederbe, melynek tehát szintén 24 lapja van.



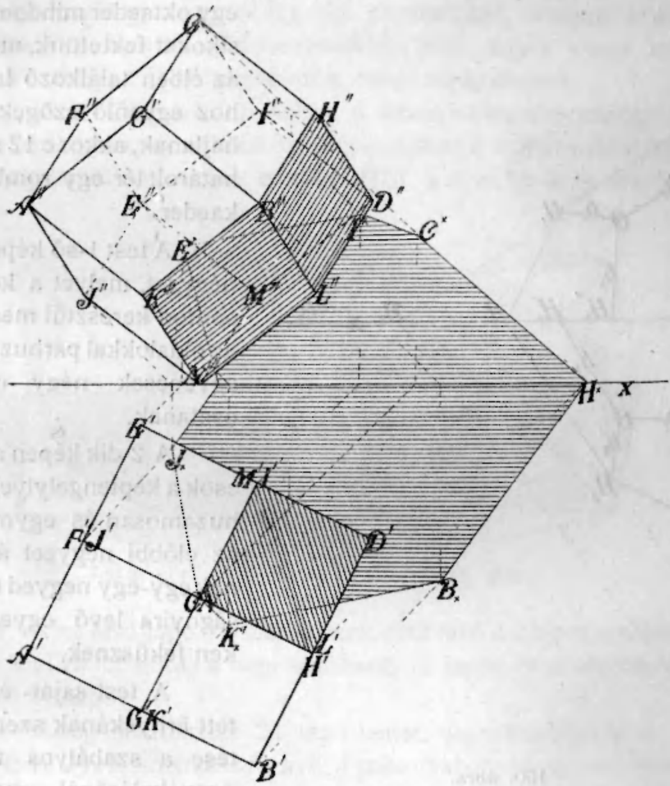
148. ábra.

A test alakjára olyan, mint egy oktaeder, melynek lapjaira szabályos háromoldalu gúlák vannak helyezve. A képek szerkesztése az ábrából látható; egyik octansának csúcsai: $ABCG_1$; a többieknek főcsúcsai G_2, G_3 . . . G_8.

121. — *120. feladat. Szerkesztendők a tetrakishexaeder (13 ∞) képei, melynek tengelyei az OA, OB, OC egyenesek* (148. ábra).

Megoldás. Ha ismét a hexakisoktaederből indulunk ki és két szomszéd octansnak szomszéd lapjai egyesülnek egy-egy síkban egyenszárú háromszöggé, akkor a hexakisoktaeder a tetrakishexaederbe megy át. Ennél ugyan minden octansnak megmarad a hat határló lapja, de minden ily lap két octanshoz tartozik és ezért lapjainak száma szintén 24.

A test alakjára olyan, mint a hexaeder, melynek lapjaira szabályos négyoldalú gúlák vannak helyezve. A képek szerkesztése az



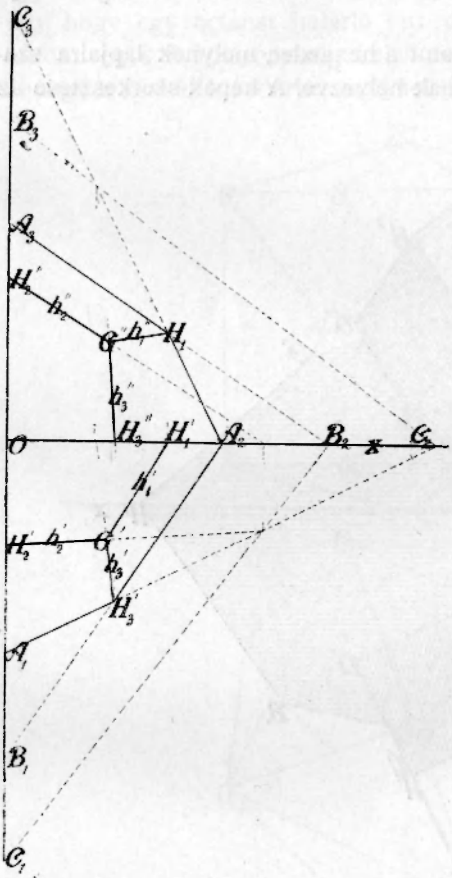
149. ábra.

ábrából látható; egy octans csúcsai $ABCG_1$-vel vannak jelölve; a többiek főcsúcsai G_2, G_3 . . . G_8.

122. — *121. feladat. Szerkesztendők a rombdodekaeder* $(1\ 1\infty)$ *képei és árnyéka, ha egyik tengelye az 1-ső képsíkra merőleges.*

Megoldás. (149. ábra). Ha a triakisoktaeder két szomszéd octansának szomszédlapjai egy síkban egyesülnek úgy, hogy e két congruens háromszög egy rombusba megy át, akkor a triakisoktaeder a rombdodekaederbe megy át. Ez az átvitel azonban csak úgy lehetséges, ha oly sík, melyben két lap egyesűl, egy tengelylyel párhuzamos.

E testnek lapjai (12) a tengelyek bármily hosszuságánál rombusok, melyeknek átlói oly viszonyban vannak egymáshoz, mint egy négyzet átlója annak oldalához. Ha egy oktaeder minden élére síkokat fektetünk, melyek az élben találkozó lapokhoz egyenlő szögek alatt hajlanak, akkor e 12 síktól határolt tér egy rombodekaeder.



150. ábra.

A test 1-ső képe egy négyzet, melyet a középponton keresztűl menő és az oldalokkal párhuzamos egyenesek négy részre osztanak.

A 2-dik képen a csúcsok a képtengelylyel párhuzamosan és egymástól az előbbi négyzet átlójának egy-egy negyed távolságnyira levő egyeneseken feküsznek.

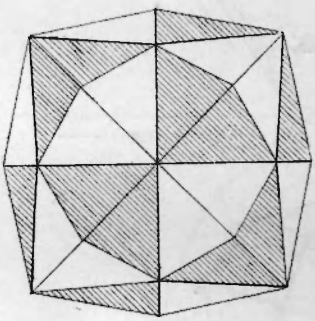
A test saját- és vetett árnyékának szerkesztése a szabályos testek árnyékolásánál mutatott eljárások alapján történik és az ábrában tisztán látható.

123. A szabályos rendszer két feles alakja. Vegyük ismét a hexakisoktaeder egyik octansát, pl. a 144. ábrában levőt figyelembe, melynek egymásra következő lapjai: $A_1B_3C_2$, $A_1B_2C_3$, $A_2B_3C_1$, $A_2B_1C_3$, $A_3B_2C_1$, $A_3B_1C_2$. E hat lap két hármasra osztható; a nem egymásra következő lapok: $A_1B_3C_2$, $A_2B_1C_3$, $A_3B_2C_1$ és $A_1B_2C_3$, $A_2B_3C_1$, $A_3B_1C_2$ képezik ezeket a hármasakat. Egy ily hármas h_1, h_2, h_3 metszővonalainak szerkesztését a 150. ábra mutatja, hol

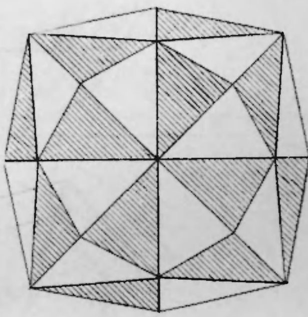
$$h_1 = (A_2B_1C_3,\ A_3B_2C_1)$$
$$h_2 = (A_3B_2C_1,\ A_1B_3C_2)$$
$$h_3 = (A_1B_3C_2,\ A_2B_1C_3).$$

A hexakisoktaeder minden octansából csak egy ily hármast akarunk megtartani úgy, hogy a 48 lap közül csak 24 maradjon meg. Ha ezen eljárásnál szabályszerűséget akarunk követni, akkor vagy azokat a hármasokat tartjuk meg az egyes octansokban, melyek közül a szomszédok egymásnak tükörképei a határló symmetria-síkra vonatkozólag, vagy pedig oly hármasokat, melyek közül a szomszédok a határló symmetria-síkban levő egyik vagy másik tengely körül egymásba forgathatók, tehát congruensek.

Igy ha a 150 a., 150 b. ábrák, a hexakisoktaedernek egy tengelyre merőleges síkra vonatkozó képei, akkor a felső (látszó) 24 lap közül megtarthatjuk az első esetben (151. a ábra) a nem sraffozott



150 a. ábra.



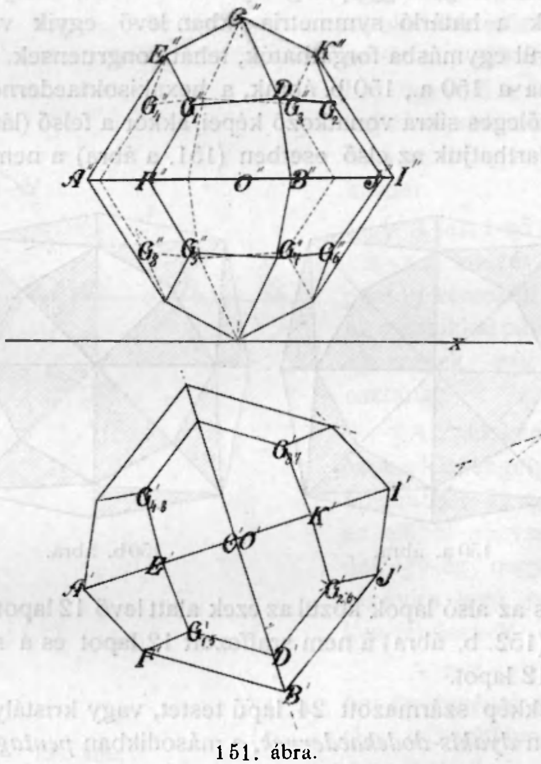
150 b. ábra.

12 lapot, és az alsó lapok közül az ezek alatt levő 12 lapot, a második esetben a (152. b. ábra) a nem sraffozott 12 lapot és a sraffozottak alatt levő 12 lapot.

Az ekkép származott 24 lapú testet, vagy kristályalakot, az első esetben *dyakis-dodekaedernek*, a másodikban *pentagon-ikositetraedernek* nevezik. Az elsőnek lapjai trapesoidok, a másodiké ötszögek. Az első a symmetria-síkoktól symmetrikus részekre osztható, de a tengelyek körül nem forgatható 90°-kal önmagába; a második ellenben bármely tengelye körül 90°-kal önmagába forgatható, de két tengelyén keresztűl menő sík nem symmetria-síkja. Mindkét testnek lapjai a tengelyekről szintén ugyanoly nagyságú vonaldarabot metszenek le, mint a hexakisoktaedernek lapjai, s mert azoknak félannyi lapjuk van, mint emennek, azért e kristályalakok a hexakisoktaeder *feles* alakjainak neveztetnek.

Az első kristályalakot $\left[\frac{abc}{2}\right]$-vel, a másodikat $\left(j\frac{abc}{2}\right)$-vel szokás jelölni, hol *abc* annak a hexakisoktaedernek jelölése, melyből ama feles alakok leszármaztattak.

A két test képeit a főszerkesztési vonalakkal együtt a 151. és 152. ábrák mutatják; a 151. ábra a dyakisdodekaeder $\left[\frac{1, 1^1/_2, 2}{2}\right]$ a 152. ábra a pentagon-ikositetraeder $\left(j\frac{1.1^1/_2.2}{2}\right)$

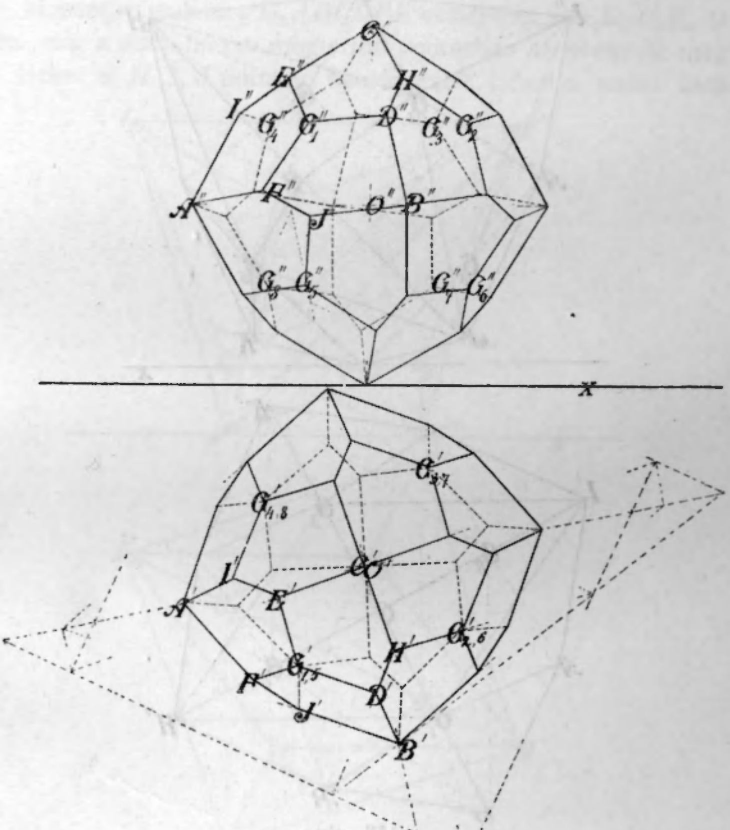


151. ábra.

A dyakisdodekaeder lapjai congruens trapesoidok. A pentagonikositetraeder lapjai congruens ötszögek, melyeknek kétszer két oldaluk egyenlők; t. i. a tengelyek végpontjában és az octansok csúcsaiban összefutók. Pl. a 152. ábrában a CEG_1DH ötszög oldalai közül $CE = CH$, $G_1E = G_1D$.

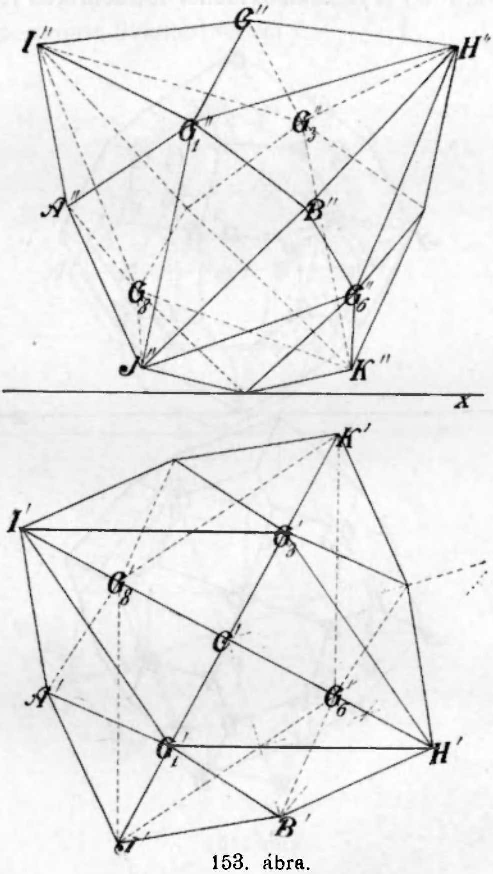
124. A szabályos rendszer tetraedrikus feles alakjai. — A hexakisoktaederből még másképen is lehet feles alakot leszármaztatni, mint az előbbi §-ban történt. Ugyanis a hexakisoktaeder nyolcz octansát két négyesre bonthatjuk akképen, hogy egy-egy négyesben nincsenek szomszéd-octansok. Ha az octansokat a főcsúcsoknál levő $G_1 G_2 \ldots G_8$ betűvel jelöljük (145. ábra), akkor a két négyes $G_1 G_3 G_6 G_8$ és $G_2 G_4 G_5 G_7$.

Ha egy ily négyesnek lapjait megtartjuk, a többieket pedig eltávolítjuk, akkor a megmaradt lapok meghosszabbítva egy kristályalakot határolnak, mely a hexakisoktaeder tetraedrikus feles alakja.



152. ábra.

A szabályos rendszer többi alakjaiból a hexaeder és rombdodekaeder kivételével ezúton leszármaztathatók feles alakok. És pedig: a hexakisoktaeder feles alakja a *hexakistetraeder;* az ikosaeder feles alakja a *triakistetraeder;* a triakisoktaeder feles alakja a *deltoiddodekaeder;* a tetrakishexaeder feles alakja a pentagondodekaeder, végre az oktaeder feles alakja a *tetraeder.* A hexaeder- és rombdodekaedernek azért nincs feles alakja, mert a négy nem szomszéd-octansnak három-három lapja egyszersmind a többi négy nem szomszéd-octansnak is lapja. Bár ugyanazt látjuk a tetrakishexaedernél is, t. i., hogy négy nem szomszéd-octansnak hat-hat lapja egyszersmind a többi négy nem szomszéd octansnak lapja; ámde ily hat-hat lap közül három nem szomszédlapot az egyik octanshoz tartozó-



153. ábra.

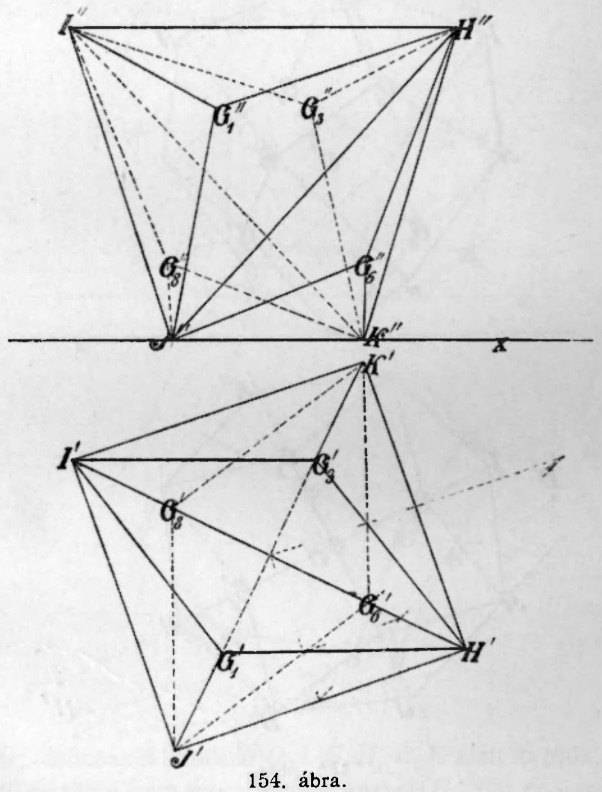
nak, a másik hármat pedig a szomszéd-octanshoz tartozónak tekinthetjük és belőle egy új testet, a feles alakot származtathatjuk le.

E feles alakoknak legáltalánosabbika tehát a hexakistetraeder, ennek 24 lapja a három páronként egymásra merőleges tengely irányában szintén oly helyzetű, hogy mindegyik lap a tengelyekről *a, b, c* vonaldarabot metsz le ép úgy, mint a teljes alak lapjai. A feles alakokat itt is ugyanazon symbolummal jelöljük, mint a teljeset, a melyből leszármaztathatók, csakhogy a symbolumot, még 2-vel osztjuk.

125. — *122. feladat. Szerkesztendők a hexakistetraedernek* $\left(\frac{1, 1\frac{1}{2}, 2}{2}\right)$ *képei.*

Megoldás. (153. ábra). Rajzoljuk meg a test teljes alakjának képeit (145. ábra) és tartsuk meg a felső négy octans közül a $G_1ABCDEF$-et és azt az egyet (G_3), mely véle nem szomszédos, úgyszintén az alsó négy közül azt a kettőt (G_6, G_8), mely ezekkel nem szomszédos.

Hosszabbítsuk meg $G_1ABCDEF$ octansban a G_1D, G_1E, G_1F éleket, míg a többi három megtartott octansban az ezeknek megfelelő éleket a H, I, J pontban nem metszik. Ezzel a testet határló



154. ábra.

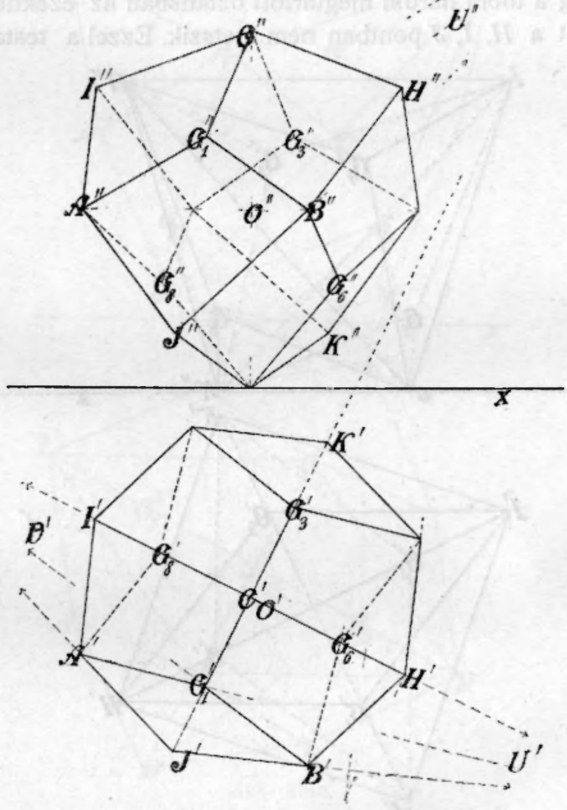
lapok egy negyed része már meg van határozva és ebből a hátra levő lapok és élek könnyen meghatározhatók.

126. — *123. Szerkesztendők a triakistetraedernek* $\left(\frac{1.\ 2.\ 2}{3}\right)$ *képei.*

Megoldás (154 ábra.) Induljunk ki az ikositetraederből (146. ábra), melynek $G_1ABCDEF$ octansát és az ezzel nem szomszédos octansokat (G_3, G_6, G_8-at) megtartván lapjait egymással metszéshez hozzuk. A G_1D, G_1E, G_1F élek és az ezeknek megfelelő élek egymást a H, I, J pontban metszik, úgy hogy G_1HIJ egy quadransa a testnek. Ugyanígy származnak a többiek is.

127. — *124. feladat. Szerkeszszük a deltoiddodekaedernek* $\left(\frac{1,\ 1,\ 2}{2}\right)$ *képeit.*

Megoldás. (155. ábra). E test a triakisoktaederből (147. ábra) származtatható le, ha a nem szomszédos octansainak lapjait metszéshez hozzuk.

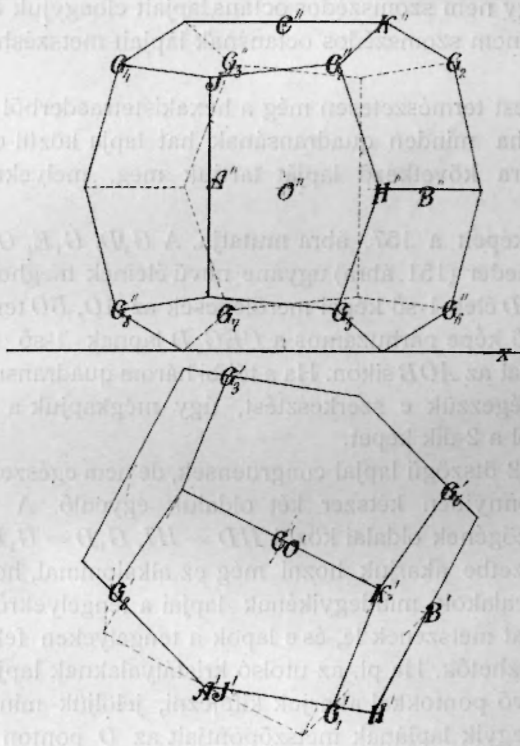


155. ábra.

A G_1ABC octans G_1A, G_1B élei a felső nem szomszédos octansnak (G_3-nak) megfelelő éleit az U, V pontban metszik; ezeknek a B, illetve A pontokkal összekötő egyenesei egy J pontban találkoznak, és G_1ABJ egy lapja a testnek. A J pont képeiből a H, I, K pontoknak képei meghatározhatók, mert az 1-ső képek $H'I'J'K'$ egy négyzet szögpontjai; a 2-dik képek H'', I'', E'' pedig a tengelyek O metszőpontjának 2-dik képén, O''-n, keresztűl menő és a képtengelylyel párhuzamos egyenestől époly távolra vannak, mint J''.

128: — *125. feladat. Szerkesztendők a pentagondodekaeder* $\left(\frac{11\infty}{2}\right)$ *képei.*

Megoldás. (156. ábra.) A tetrakishexaeder (148. ábra) G_1BAC octansának hat lapja közül három nem szomszédlapot, tehát az AG_1, BG_1, CG_1 élen keresztűl menőt és megfelelőleg az OC, OA, OB tengelylyel párhuzamosat metszéshez hozzuk egymással; ezzel a



156. ábra.

testnek G_1 csúcsából kiinduló G_1I, G_1H, G_1K éleit kapjuk. Ugyanezt teszszük a többi nem szomszéd-octanssal (G_3, G_6, G_8-czal). A tetrakishexaeder minden oly csúcspárján, mely egy tengelynek végpontja, egy másik tengelylyel párhuzamos élpár megy keresztűl. Igy jelen esetben az A, B, C csúcsokon az OC, OA, OB tengelylyel párhuzamos élek mennek keresztűl, melyek az előbbi élekhez csatlakoznak.

A test lapjai symmetrikus ötszögek, melyek, ha szabályos ötszögekbe mennek át, úgy a test a rombdodekaeder néven ismert szabályos test lesz. Ezért van meg a hasonlatosság ezen ábra 1-ső és a 142. ábra 4 képei között.

A pentagondodekaeder mind a nyolcz octansának megmaradnak főcsúcsai és ezért azt a tetrakishexaeder oly leszármazásának tekintjük, mint a mikép a dyakisdodekaeder származik a hexakisoktaederből.

129. A szabályos rendszer negyedes alakja. *A tetraedrikus pentagondodekaeder* a dyakisdodekaeder, vagy a pentagonikositetraeder tetraedrikus feles alakjának tekinthető, mert ezekből akkép származik, hogy négy nem szomszédos octans lapjait elhagyjuk és a másik négy szintén nem szomszédos octansnak lapjait metszéshez hozzuk egymással.

Ez a test természetesen még a hexakistetraederből is leszármaztatható, ha minden quadransának hat lapja közül oly három nem egymásra következő lapját tartjuk meg, melyeknek nincs közös élük.

E test képeit a 157. ábra mutatja. A G_1D, G_1E, G_1F élek a dyakisdodekaeder (151. ábra) ugyane nevű éleinek meghosszabbításai. Az AF, BD élek 1-ső képei merőlegesek az AO, BO tengelyekre; a CE él 1-ső képe párhuzamos a CEG_1D lapnak 1-ső nyomával, vagy nyomával az AOB síkon. Ha a többi három quadransra (G_3, G_6, G_8-ra) is elvégezzük e szerkesztést, úgy megkapjuk a test 1-ső képét és ebből a 2-dik képet.

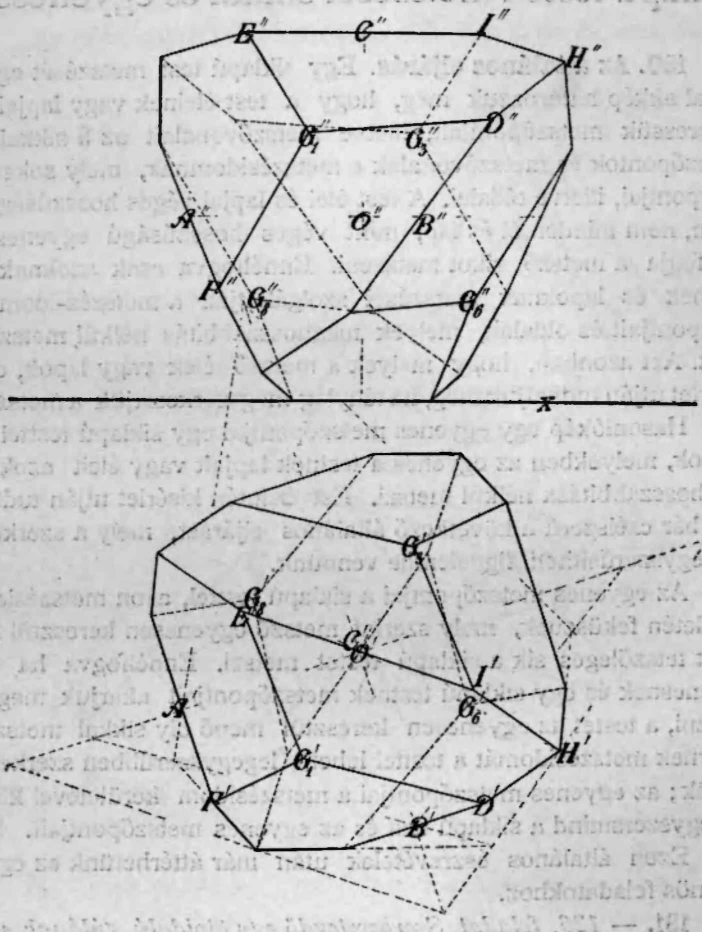
A test 12 ötszögű lapjai congruensek, de nem egészen szabálytalanok, a mennyiben kétszer két oldaluk egyenlő. A 157. ábra EG_1DHI ötszögének oldalai közül $HD = HI$, $G_1D = G_1E$. —

Emlékezetbe akarjuk hozni még ez alkalommal, hogy a tárgyalt kristályalakok mindegyikének lapjai a tengelyekről egyenlő vonaldarabokat metszenek le, és e lapok a tengelyeken fekvő pontjaival is kifejezhetők. Ha pl. az utolsó kristályalaknak lapjait a tengelyeken fekvő pontokkal akarjuk kifejezni, jelöljük mint előbb a G_1 quadrans egyik lapjának metszőpontjait az O ponton keresztűl menő tengelyekkel A_1, C_2, B_3-mal. Rakjuk az OA_1, OC_2, OB_3, tengelyekre az O pontból mérve ugyanazon részére, melyen az A_1, C_2, B_3 pontok feküsznek, az $OA_1 = a$, $OC_2 = c$, $OB_3 = b$ vonaldarabokat akképen, hogy az OA_1, OB_1, OC_1 vonaldarabok az 1-ső tengelyen, az OA_2, OB_2, OC_2 vonaldarabok a 2-dik tengelyen és az OA_3, OB_3, OC_3 vonaldarabok a 3-dik tengelyen egyenlők legyenek megfelelőleg az a, b, c vonaldarabokkal.

Határozzunk meg a tengelyek másik részén szintén kilencz pontot, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$, . . . $\mathfrak{C}_3$-t akképen, hogy az $O\mathfrak{A}_1$, $O\mathfrak{B}_1$, $O\mathfrak{C}_1$ és az $O\mathfrak{A}_2$,

$O\mathfrak{B}_2$, $O\mathfrak{C}_2$ végre $O\mathfrak{A}_3$, $O\mathfrak{B}_3$. $O\mathfrak{C}_3$ vonaldarabok az 1-ső, 2-dik, 3-dik tengelyen egyenlők legyenek az *a*, *b*, *c* vonaldarabokkal.

Ezt véve a tetraedrikus pentagonaeder



157. ábra.

G_1	quadransának lapjai	$A_1B_3C_2$,	$A_2B_1C_3$,	$A_3B_2C_1$
G_3	„	„	$\mathfrak{A}_1B_3\mathfrak{C}_2$,	$\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_3$,	$A_3\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_1$
G_6	„	„	$\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_2$,	$A_2\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_3$,	$\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_1$
G_8	„	„	$A_1\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_2$,	$\mathfrak{A}_2B_1\mathfrak{C}_3$,	$\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_1$.

X. FEJEZET.

Síklapú testek metszései síkkal és egyenessel.

130. Az általános eljárás. Egy siklapú test metszését egy **S** síkkal akkép határozzuk meg, hogy a test éleinek vagy lapjainak felkeressük metszőpontjait, illetve metszővonalait az **S** síkkal: a metszőpontok és metszővonalak a metszésidomnak, mely sokszög, szögpontjai, illetve oldalai. A test élei és lapjai véges hosszúságúak lévén, nem minden él és lap, mint véges hosszúságú egyenes és sík, fogja a metsző síkot metszeni. Ennélfogva csak azoknak az éleknek és lapoknak metszései szolgáltatják a metszés-idomnak szögpontjait és oldalait, melyek meghosszabbítás nélkül metszik a síkot. Azt azonban, hogy melyek a metsző élek vagy lapok, csak kisérlet utján tudhatjuk meg, ha tényleg megszerkesztjük a metszést.

Hasonlókép egy egyenes metszőpontjai egy siklapú testtel oly pontok, melyekben az egyenes a testnek lapjait vagy éleit azoknak meghosszabbítása nélkül metszi. Ezt szintén kisérlet utján tudhatjuk, bár czélszerű a következő általános eljárást, mely a szerkesztést egyszerűsítheti, figyelembe vennünk.

Az egyenes metszőpontjai a siklapú testtel, azon metszésidom kerületén feküsznek, mely szerint metsző egyenesen keresztül fektetett tetszőleges sík a síklapú testet metszi. Ennélfogva ha egy egyenesnek és egy síklapú testnek metszőpontjait akarjuk meghatározni, a testet az egyenesen keresztül menő oly síkkal metszük, melynek metszésidomát a testtel lehető legegyszerűbben szerkeszthetjük; az egyenes metszőpontjai a metszésidom kerületével képezik egyszersmind a siklapú test és az egyenes metszőpontjait.

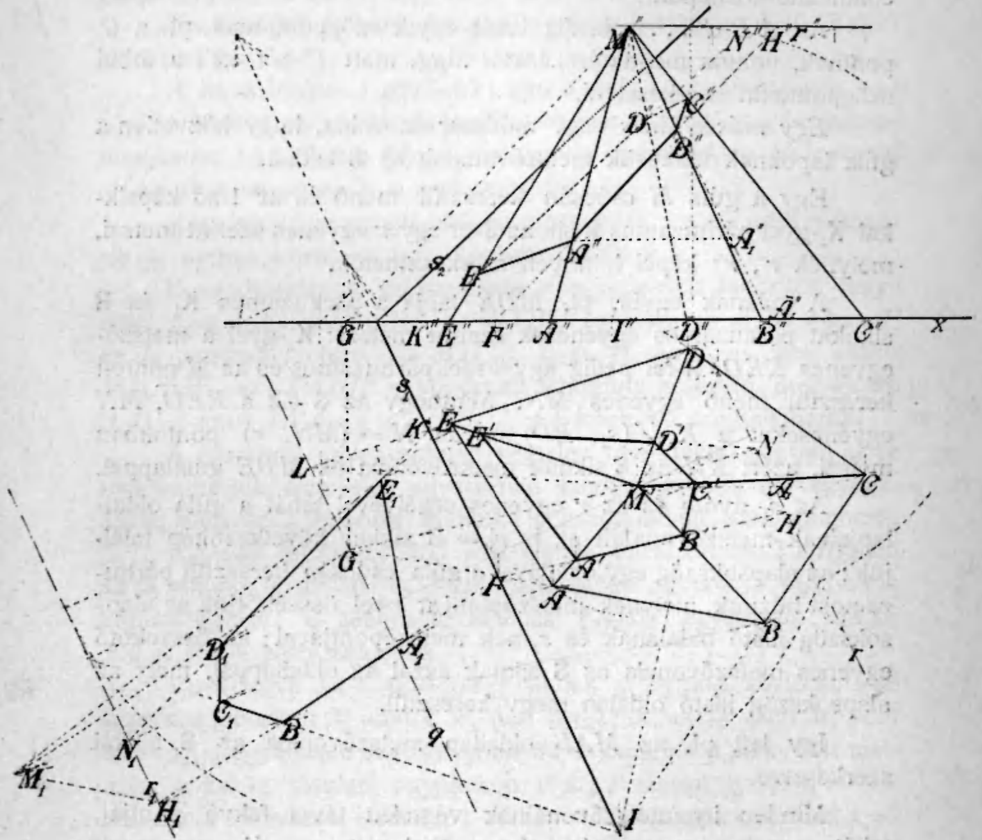
Ezen általános észrevételek után már áttérhetünk az egyes különös feladatokhoz.

131. — *126. feladat. Szerkesztendő egy ötoldalú gúlának metszésidoma egy síkkal.*

Megoldás. (158. ábra) A gúla alapsokszöge $\overline{ABCDE}$ az 1-ső képsíkon fekszik; a sík nyomai s_1, s_2. Minthogy s_1 nem metszi az alapsokszöget, azért a sík sem metszi azt, hanem csak az oldallapokat. Ha tehát az MA, MB, MC oldalélek metszőpontjait A, B, C . . .-t felkeressük az **S** síkkal és azokat abban a rendben, a mint az oldalélek a testen egymásra következnek AB, BC, . . . egyenes vonalakkal összekötjük, úgy megkapjuk az ABC . . . metszésidomot.

De nem épen szükséges minden egyes élnek metszőpontját az **S** síkkal az általános eljárás szerint meghatározni. Mert ha pl. az $\overline{MC}$ élnek C metszőpontját az **S** síkkal az általános eljárás szerint megszerkesztjük, akkor ebből a többi éleknek metszőpontjai következőkép határozhatók meg:

Az $\overline{MBC}$ lapnak 1-ső nyoma $\overline{BC}$. Az s_1 és $\overline{BC}$-nek metsző-



158. ábra.

pontján, I-n, megy keresztül az **S**, $\overline{MBC}$ síkok metszővonala CB; ebből az $\overline{MB}$ metszőpontja az **S** síkkal, t. i. a $B = (\overline{MB}, CI)$ pont, meghatározható.

Hasonlókép az $(\overline{AB}, s_1) = F$ metszőponton megy keresztül az $\overline{MAB}$ lapnak FB metszővonala az **S** síkkal; ennélfogva $(\overline{MA}, BF) = A$ az $\overline{MA}$ metszőpontja az **S** síkkal, stb.

E szerkesztés mutatja, hogy a metszésidom 1-ső képének

$A'B'C'D'E'$-nek és az alapsokszögnek $ABCDE$-nek megfelelő oldalai: $A'B', AB$; $B'C', BC$; ... egymást az s_1 egyenesben metszik, és a megfelelő szögpontokat összekötő egyenesek: $M'A'A$, $M'B'B$, ... mint az éleknek 1-ső képei, a gúla csúcsának 1-ső képében találkoznak. Ily helyzetű sokszögek, mint $A'B'C'$..., ABC... perspectiv helyzetű collinear sokszögek; s_1 a collineatió-tengely, M' a collineatió-középpont.

Az $A'B'C'$... sokszög tehát egyik szögpontjának, pl. a C' pontnak, pontos meghatározásától függ, mert C'-ből kell a többi szögpontokat szerkeszteni.

Egy más eljárás vagy módszer az volna, hogy közvetlen a gúla lapoknak keressük metszővonalait az **S** síkkal.

Egy a gúla M csúcsán keresztül menő és az 1-ső képsíkkal $\mathbf{K}_1$-gyel párhuzamos **R** sík az **S**-et egy r egyenes szerint metszi, melynek r', r'' képei könnyen szerkeszthetők.

A gúlának egyik, pl. MDE lapja a párhuzamos $\mathbf{K}_1$ és **R** síkokat párhuzamos egyenesek szerint metszi; $\mathbf{K}_1$-gyel a metszőegyenes KED, **R**-rel pedig egy ezzel párhuzamos és az M ponton keresztül menő egyenes MN. Minthogy az **S** sík a KED, MN egyeneseket a $K = (s_1, ED)$ és az $N = (MN, r)$ pontokban metszi, azért KN az **S** síknak metszővonala az MDE gúlalappal.

Az s_1 nyom és az r egyenes segélyével tehát a gúla oldallapjainak metszővonalait az $[s_1 r] = \mathbf{S}$ síkkal következőkép találjuk: az alapsokszög egy oldalával a gúla csúcsán keresztül párhuzamost húzunk, melynek metszőpontját r-rel összekötjük az alapsokszög illető oldalának és s_1-nek metszőpontjával; az összekötő egyenes metszővonala az **S** síknak azzal az oldallappal, mely az alapsokszög illető oldalán megy keresztül.

Igy lett pl. az MAB oldallap metszővonala az **S** síkkal szerkesztve.

Minden ily metszővonalnak végtelen távol fekvő pontját, tehát a pontos szerkesztésre igen alkalmast, egy új egyenesnek q-nek használatával is megkaphatjuk. E q egyenes a gúla M csúcsán keresztül menő és az **S** síkkal párhuzamos **Q** síknak metszővonala az alapsokszög síkjával s mint ilyen az s_1-től ép oly távolságra van, mint M az r-től (qs_1 távolság $= M'r'$ távolság).

Az MED lap metszővonala a **Q** síkkal az M ponton és az $L = (q, ED)$ ponton megy keresztül; az ML-lel lesz tehát a $KEDN$ egyenes, mint az **S** sík és az MED gúlalap metszővonala párhuzamos. Ha tehát a gúla alapsokszögének oldalait, az s_1-gyel és a q-val metszéshez hozzuk; és az s_1-en nyert metszőpontokon keresztül párhuzamosakat húzunk azokhoz az egyenesekhez, melyek a q-n nyert metszőpontokat az M csúcscsal összekötik, akkor a gúla oldallapjainak metszővonalait az **S** síkkal, azaz a metszésidom oldalait fogjuk nyerni.

Igy az $\overline{AB}$ metszi s_1-et és q-t az F és a G pontban; $FABH // GM$, az $\overline{MAB}$ lap metszővonala **S**-sel.

Mindezekből látható, ha a gúla alapsokszöge az 1-ső (2-dik) képsíkon van:

A metszésidom 1-ső (2-dik) képe a gúla alapsokszögének 1-ső (2-dik) képével perspectiv helyzetű collinear alakzat, a gúla középpontjának 1-ső (2-dik) képe a collineatió-középpont, a két sokszög síkjának metszővonala a collineatió-tengely.

A metszésidom valódi alakját megkapjuk, ha azt az **S** metszősík s_1 nyoma körül az 1-ső képsíkra borítjuk.

E szerkesztésnél célszerű az r egyenesnek leborított helyzetét r_1-et felhasználni. Igy az $FABH$ egyenes az s_1 és r-t az F és H pontban metszi; ha $HH_1 \perp s_1$ és H_1 az r_1-en van, akkor $FA_1B_1H_1$ az $FABH$ egyenesnek leborított helyzete, melyen az A_1B_1 pontok ($A'A_1 \perp s_1$, $B'B_1 \perp s_1$) könnyen megtalálhatók.

A leborított egyeneseknek végtelen távol fekvő pontjait előre megkaphatjuk, azaz elég egyszerűen szerkeszthetünk oly egyeneseket, melylyel a leborított metszési sokszög oldalai párhuzamosak.

Ugyanis minthogy MG a **Q** síkban párhuzamos $FABH$-val az **S** síkban, tehát MG és q-nak hajlásszöge egyenlő $FABH$ és s_1 hajlásszögével: a leborított MG és $FABH$ egyenesek: M_1G, $FA_1B_1H_1$ is párhuzamosak.

Ennélfogva ha a $\mathbf{Q} = [Mq]$ síknak q nyoma körül az 1-ső képsíkba leborított M pontot M_1-nek nevezzük, akkor ezen M_1 pont és az s_1, q egyenesek segélyével az *alapsokszögből* a leborított metszési sokszög oldalait ugyanazon eljárás szerint nyerjük, mint a milyennel a metszési sokszög 1-ső képének oldalait az M pont 1-ső képe, és szintén az s_1, q egyenesek segélyével már találtuk. (T. i: FAB metszi s_1 és q-t az F és G pontban, $FA'B' // GM'$; mig $FA_1B_1 // GM_1$.)

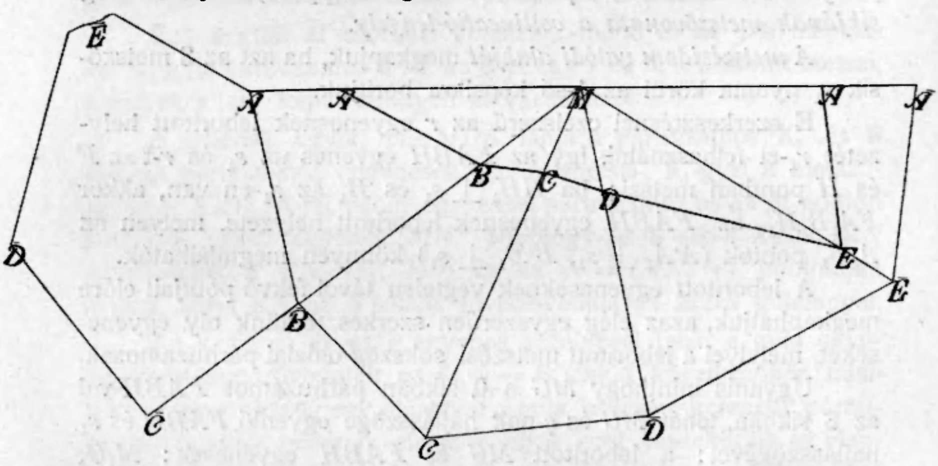
A leborított metszési sokszöget tehát az alapsokszögből a metszési sokszög képeinek felhasználása nélkül is meghatározhatjuk.

Minthogy a metszési sokszög 1-ső képének szögpontjai azon egyeneseken feküsznek, melyek az alapsokszög szögpontjait az M' ponttal összekötik, azért a szerkesztés egyféleségét tekintve, a leborított metszési sokszög szögpontjai is azon egyeneseken lesznek, melyek az alapsokszög szögpontjait az M_1 ponttal összekötik. (Tehát az $M_1A_1\overline{A}$, $M_1B_1\overline{B}$, . . pontok egy-egy egyenesen feküsznek.)

Ebből következik: *a leborított metszési sokszög perspectiv helyzetű collinear alakzata a gúla alapsokszögének; az M_1 pont a collineatió-középpont, az s_1 nyom a collineatió-tengely.*

A gúla hálóját és a metszésidomot a hálón a 158 a. ábra mutatja. Ez a 158. ábrából akkép szerkeszthető, hogy az egyes gúlalapok MAB, MBC, . . . közös oldaléleikkel összefüggőleg egymás mellé rajzoltatnak.

Az $M\overline{A}$ él és hasonlókép a többi él a 2-dik képsíkkal párhuzamos helyzetbe lettek forgatva a csúcson keresztül menő és az



158 a. ábra.

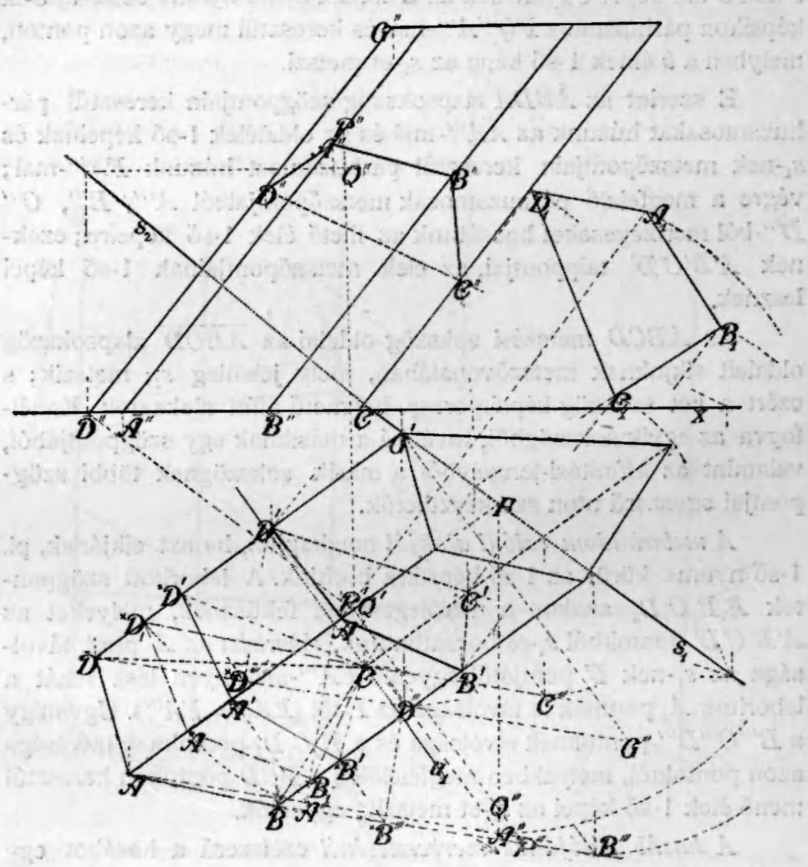
1-ső képsíkra merőleges tengely körül; MA''_1 és MA''_1 az MA és MA vonaldarabok valódi hosszúsága. A háló AB, BC, ... egyenesei egyenlők az alapsokszög $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, . . . oldalaival.

132. — *127. feladat. Szerkesztendő egy négyoldalú hasáb síkmetszése; e metszés valódi alakja, és alakja a hasáb hálóján.*

Megoldás. (159. ábra.) A hasáb alapszöge $\overline{ABCD}$ az 1-ső képsíkon fekszik, a metsző sík $\mathbf{S} = [s_1, s_2]$. Minthogy s_1 nem metszi az $\overline{ABCD}$ alapsokszöget, azért a sík a hasábnak oldalfelületét metszi. A hasáb oldaléleinek metszőpontjai vagy oldallapjainak metszővonalai az $\mathbf{S}$ síkkal, a metszési sokszögnek szögpontjai, illetve oldalai.

Az oldalélek metszőpontjait az $\mathbf{S}$ síkkal, vagy az általános eljárás szerint, vagy pedig a következőképen szerkesztjük:

A hasáb egyik élének, pl. az A-n keresztül menőnek a-nak, 1-ső projiciáló síkját 3-dik képsíknak választjuk és felkeressük az a élnek 3-dik képét $AA'''P'''$-mat egy az élen fekvő (P', P'') pont 3-dik képének P'''-nak segélyével ($P''P_x = P'P'''$), valamint az **S** síknak 3-dik nyomát $FQ'''A'''$-mat egy az **S** síkban fekvő (Q', Q'') pont 3-dik képének Q'''-nak segélyével ($Q''Q_x = Q'Q'''$). Az $AA'''P'''$ és az



159. ábra.

$FQ'''A'''$ metszőpontja A''', az a él és az **S** sík metszőpontjának 3-dik képe, melyből az 1-ső és a 2-dik kép A', A'' már merőlegesek húzása által szerkesztendő.

A hasáb többi éleinek metszőpontjait az **S** síkkal ugyanezen eljárás szerint szerkesztjük, felhasználván azt a viszonyt, hogy az éleknek 3-dik képei és a sík 3-dik nyomai, az egyes éleken keresztűl menő 1-ső projiciáló síkokon, úgy a térben, mint a leborításban párhuzamosak.

Ha tehát a $\overline{B}$ ponton keresztűl menő oldalélnek b-nek, 3-dik képét, nem az a-nak 1-ső projiciáló síkján, hanem a b-nek 1-ső projiciáló síkján, mint 3-dik képsíkon akarjuk meghatározni, akkor a B-n keresztűl az AA'''-mal párhuzamos BB''' egyenest húzunk, mely b-nek 3-dik képe. Ugyancsak az **S** síknak 3-dik nyoma ezen új 3-ik képsíkon párhuzamos $FQ'''A'''$-mal és keresztűl megy azon ponton, melyben a b élnek 1-ső képe az s_1-et metszi.

E szerint az $\overline{ABDA}$ alapsokszög szögpontjain keresztűl párhuzamosakat húzunk az $\overline{A}A'''$-mal és az oldalélek 1-ső képeinek és s_1-nek metszőpontjain keresztűl párhuzamost húzunk FA'''-mal; végre a megfelelő párhuzamosak metszőpontjaiból A''', B''', C''' D'''-ból merőlegeseket bocsátunk az illető élek 1-ső képeire; ezeknek $A'B'C'D'$ talppontjai, az élek metszőpontjainak 1-ső képei lesznek.

Az $ABCD$ metszési sokszög oldalai az $\overline{ABCD}$ alapsokszög oldalait síkjuknak metszővonalában, mely jelenleg s_1, metszik; s ezért a két sokszög képei peresp. helyzetű affin alakzatok. Ennélfogva az egyik sokszögből, továbbá a másiknak egy szögpontjából, valamint az affinitási-tengelyből a másik sokszögnek többi szögpontjai egyszerű uton szerkeszthetők.

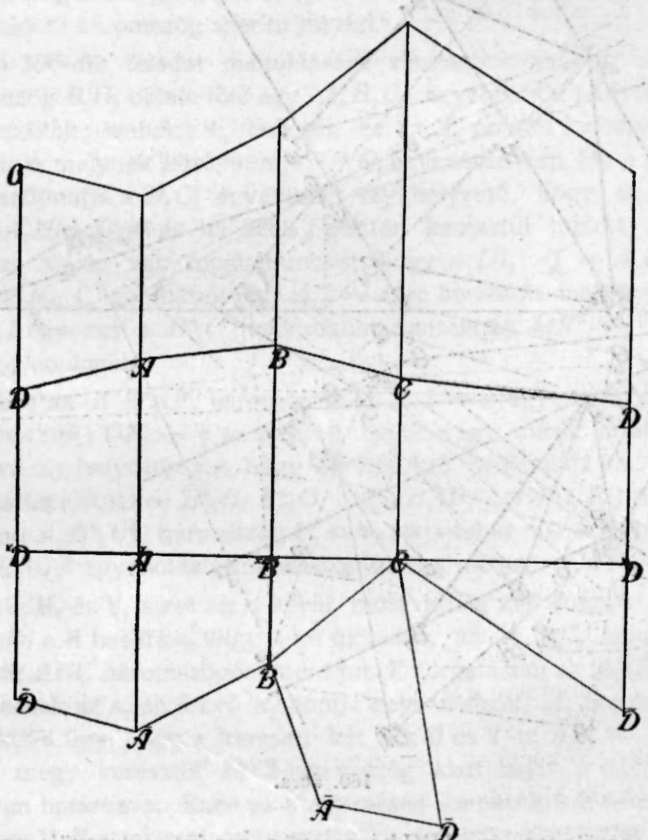
A metszésidom valódi alakját megkapjuk, ha azt síkjának, pl. 1-ső nyoma körül az 1-ső képsíkra borítjuk. A leborított szögpontok $A_1B_1C_1D_1$ azokon a merőlegeseken feküsznek, melyeket az $A'B'C'D'$ pontokból s_1-re bocsáthatunk. Másrészt az A pont távolsága az s_1-nek F pontjától egyenlő FA'''-mal. Ilyen lesz tehát a leborított A_1 pontnak is távolsága az F-től ($FA_1 = FA'''$). Ugyanígy a $B'''C'''D'''$ pontoknak távolsága és a $B_1C_1D_1$ pontoknak távolsága azon pontoktól, melyekben megfelelőleg a $\overline{BCD}$ pontokon keresztűl menő élek 1-ső képei az s_1-et metszik, egyenlők.

A hasáb hálójának szerkesztésénél célszerű a hasábot egy az oldaléleire merőleges síkkal metszeni, mert e metszés (*normális metszés*) a hálóban egy egyenes vonalon lesz, minthogy a hasábélek a metszési sokszög oldalaira merőlegesek.

Az u_1 egyenes, mely az alapszög $\overline{C}$ pontján megy keresztűl és merőleges az oldalélek 1-ső képeire, egy az oldalékre merőleges **U** síknak 1-ső nyoma.

Az **U** sík metszését $^*A^*BC^*D$-ét a hasábbal ugyanazon uton szerkesztjük, mint az **S** síkét. E szerkesztésnél az oldaléleknek leborított helyzete $A'''A$, $B'''B$ . . . 1-ső projiciáló síkjuknak 1-ső nyoma körül ugyanaz marad mint előbb volt, ellenben az **U** sík nyomai eme projicziáló síkokon az AA''', BB''' . . .-ra merőleges egyenesek lesznek, melyek az u_1 egyenes pontjaiból indulnak ki. A normalis metszés 1-ső képe tehát $*A'*B'C^*D'$ és valódi alakja $*A_1*B_1C^*D_1$.

Ha a normalis metszés valódi alakját egy egyenesre $*D*A*BC^*D$-re kifejtjük (159 a. ábra) és a pontokban az illető egyenesre merőlege-



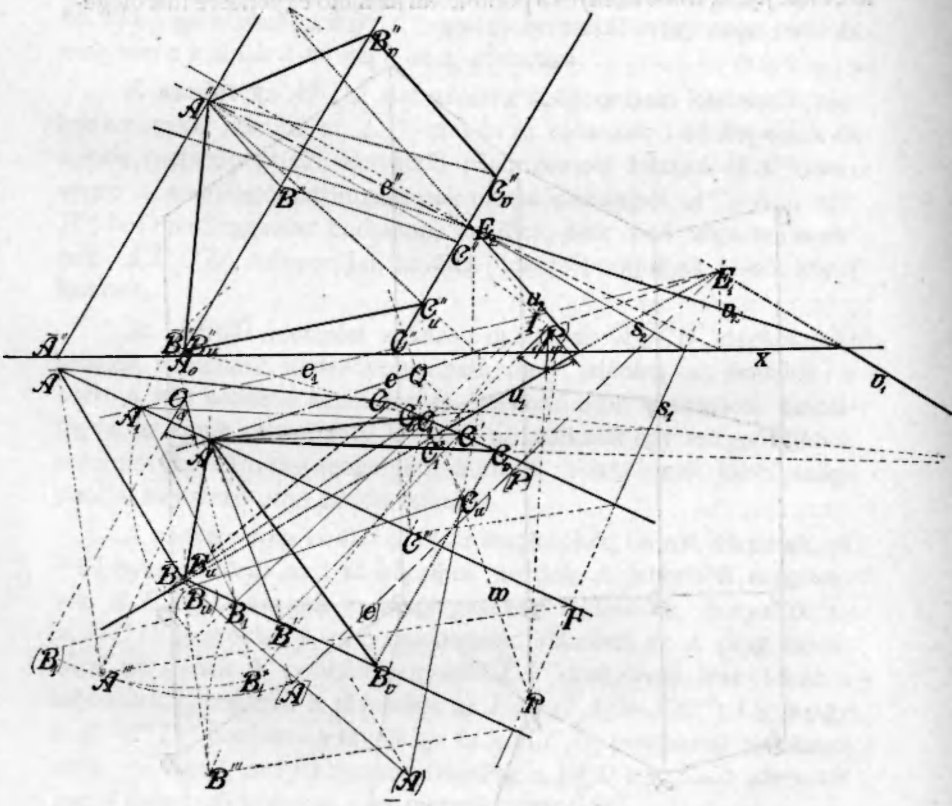
159 a. ábra.

seket emelünk, úgy a hasáb oldaléleit megkapjuk a hálón. Az $\overline{ABCD}$ alapsokszög szögpontjai és az $ABCD$ metszésidom szögpontjai a hálón kiadódnak, ha e szögpontoknak távolságát a normalis metszés szögpontjaitól, tehát az $*A'''A$, $*B'''B$. . . és $*A'''\overline{A'''}$, $*B'''\overline{B'''}$, . . . vonaldarabokat a hálóban az illető élekre reákrakjuk ($*AA = *A'''A$,

$^*AA = {}^*A'''A'''$). Ugyanígy lett a felső alapnak G szögpontja is a 3-dik képből meghatározva ($\overline{DG'''} = \overline{DG}$).

133. — *128. feladat. Messünk egy háromoldalú hasábot* **H**-*t egy oly síkkal, mely azt egyenoldalú háromszög szerint metszi.*

Megoldás. (160. ábra.) A hasáb alapsokszöge az 1-ső képsíkon levő ABC háromszög. A hasábot az **S** $= [s_1, s_2]$ síkkal, mely oldal-



160. ábra.

éleire merőleges, az ABC háromszög szerint metszszük az előbbi példában mutatott eljárás szerint ($AA''' \perp FA'''$; $A'''AF \sphericalangle$ a hasáb éleinek, $A'''FA \sphericalangle$ az **S** síknak 1-ső képsíkszöge; $A'''A' \perp AF$, stb.). Az ABC normalis metszésnek valódi alakja, az **S** sík s_1 nyoma körül az 1-ső képsíkra leborított háromszög $A_1B_1C_1$. Képzeljük a **H** hasábot is az ABC háromszöggel egyidejűleg forgatva. A midőn ABC az $A_1B_1C_1$ helyzetet eléri, azaz az 1-ső képsíkba jut, a vele együtt forgatott **H** hasáb oldaléleivel az 1-ső képsíkra merőleges helyzetű $\mathbf{H}_1$ hasábba kerül, melynek alaplapja az $A_1B_1C_1$ háromszög.

Ha most egy egyenoldalú háromszöget tudunk szerkeszteni, melynek 1-ső képe az $A_1B_1C_1$ háromszög (100. feladat), akkor annak $\mathbf{U}_1$ síkja a $\mathbf{H}_1$ hasábot ugyancsak abban az egyoldalú háromszögben metszi. És ha e háromszög síkját $\mathbf{U}_1$-et a $\mathbf{H}_1$ hasábbal együtt az s_1 körül addig forgatjuk, mig $\mathbf{H}_1$ a $\mathbf{H}$ helyzetbe nem jut, akkor a forgatott $\mathbf{U}_1$, melyet $\mathbf{U}$-val akarunk jelölni, már a $\mathbf{H}$ hasábot egyenoldalú háromszög szerint metszi.

A 100-dik feladat megoldására visszagondolva, az $A_1B_1C_1$ háromszög B_1C_1 oldala fölé egy $A_0B_1C_1$ egyenoldalú háromszöget szerkesztünk; ennek A_0 csúcsán és az A_1 ponton keresztül kört fektetünk, melynek középpontja a B_1C_1 egyenesen van. Ha e körnek I metszőpontja a B_1C_1 egyenessel oly helyzetű, hogy az A_0IB_1 $\sphericalangle < A_1IB_1 \sphericalangle$-nél és ha ezen I ponton keresztűl húzott $B^*{}_1C^*{}_1$ egyenes akkép van meghatározva, hogy $A_1IB_1{}^* \sphericalangle = A_0IB_1 \sphericalangle$, akkor a B_1, C_1 pontokból az $A_1I = e_1$-re bocsátott merőlegesek a $B^*{}_1C^*{}_1I$ egyenest a $B^*{}_1C^*{}_1$ pontokban metszik és $A_1B^*{}_1C^*{}_1$ háromszög egyenoldalú.

Ezt az $A_1B^*{}_1C^*{}_1$ háromszög az $A_1I = e_1$ egyenes körül egy bizonyos $(B_1)\,OB_1 = \varphi$ szög alatt egyik vagy másik értelemben forgatva oly helyzetbe jut, hogy derékszögű projectiója az $A_1B_1C_1$ háromszög ($(B_1)O = B^*{}_1O$, $B^*{}_1O \perp e_1$, $(B_1)B_1 \perp OB_1$). E helyzetbe forgatott $A_1B^*{}_1C^*{}_1$ háromszög $\mathbf{U}_1$ és $\mathbf{V}_1$ síkja tehát már a $\mathbf{H}_1$ hasábot az $A_1B_1{}^*C_1{}^*$ egyenoldalú háromszög szerint metszi.

Az $\mathbf{U}_1$ és $\mathbf{V}_1$ síkot az s_1 körül most addig kell forgatni, mig a $\mathbf{H}_1$ hasáb a $\mathbf{H}$ hasábba, vagy a mi ugyanaz, az $A_1B_1C_1$ háromszög az $\mathbf{S}$ sík ABC háromszögébe nem jut. E forgatásnál az $A_1IE_1 = e_1$ egyenesnek az s_1-en fekvő E_1 pontja nem változik, A_1 pontja pedig A-ba kerül úgy, hogy a keresett két sík $\mathbf{U}$ és $\mathbf{V}$ az $AE_1 = e$ egyenesen megy keresztül és $\mathbf{S}$-hez φ szög alatt hajlik, s mint ilyen, meg van határozva. Ezen az e egyenesen keresztűl kell tehát azt a két síkot $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ átfektetni, mely az $\mathbf{S}$ síkhoz φ szög alatt hajlik, ezek, valamint a velük párhuzamos síkok már a $\mathbf{H}$ hasábot egyenoldalú háromszögek szerint metszik.

A 83. feladat szerint e egyenest e' körül 1-ső projiciáló síkjával az 1-ső képsíkba borítjuk az $[A]E_1 = [e]$ helyzetbe. Az e' egy Q pontjából $Q[P]$ merőlegest bocsátunk $[e]$-re, melynek talpa $[P]$, és $Q[P]$-t egyenlővé tesszük $Q(P)$-vel az e' egyenesen. A Q pontban az e'-re emelt w merőleges az s_1-et egy R pontban metszi. A $(P)R$

egyenesnek (P) pontján keresztül két egyenest húzunk, melyek a $(P)R$-hez φ szög alatt hajlanak; ezek az egyenesek a w-t az **U** és **V** síkok 1-ső nyomának u_1, v_1-nek egy-egy pontjában metszik. Máskülönben az **U** és **V** síknak 1-ső nyomai még az E_1 ponton, 2-dik nyomai pedig az E_2 ponton mennek keresztül.

Az $\mathbf{U} = [u_1, u_2]$ $\mathbf{V} = [v_1, v_2]$ síkok a hasábot az AB_uC_u, AB_vC_v háromszögek szerint metszik. (Az AB és AC metszőpontját az u_1-gyel, összekötjük A'-sel; az összekötő egyenesek az AB_uC_u háromszög 1-ső képének $A'B'_u$, $A'C'_u$ oldalait adják. Ha továbbá $B'_uB' = B'B'_v$ és $C'_uC' = C'C'_v$, akkor $A'B'_vC'_v$ 1-ső képe az AB_vC_v háromszögnek.)

Az AB_uC_u háromszög az u_1 nyom körül az 1-ső képsíkra lett borítva; a leborított helyzete (A) (B_u) (C_u), mely egyenoldalú háromszög.

134. — *129. feladat. Szerkesztendő egy oly oktaeder síkmetszése, mely csúcstengelyével az 1-ső képsíkra merőleges.*

Megoldás. (161. ábra.) Az 1-ső képsíkra merőleges csúcstengely AF az $[s_1, s_2]$ metszősíkot a P pontban, az AF tengelyen keresztül menő $ACFE$ és $ABFD$ síkok pedig az $[s_1, s_2]$-t a PG és a PH egyenesek szerint metszik. PG az $ACFE$ négyzet oldalait a 2 és 5 pontban, PH pedig az $ABFD$ négyzet oldalait a 3 és 6 pontban, végre az $[s_1, s_2]$ sík a $BCDE$ négyzet oldalait az 1 és 4 pontban metszi. 123456 hatszög lesz tehát az $ABCDEF$ oktaeder metszésidoma az $[s_1, s_2]$ síkkal.

Az 123456 hatszög rajzolásánál ügyelnünk kell arra, hogy az 12, 45; 23, 56; 34, 61 oldalpárak, melyek párhuzamos oktaederlapokon feküsznek, párhuzamosak, s ilyenek lesznek tehát egynevű képeik is.

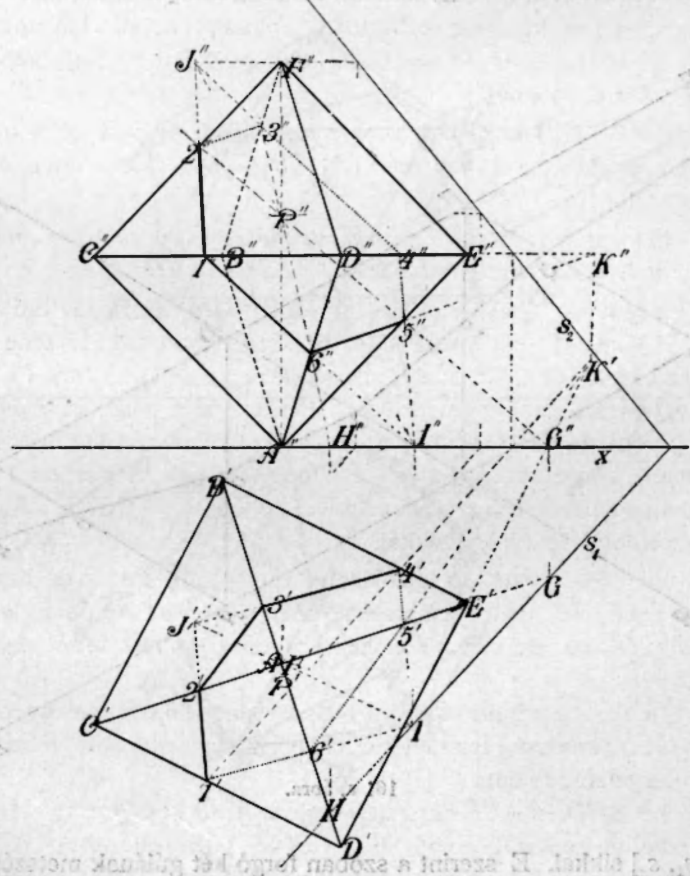
De ha a szerkesztés pontosságát még fokozni, vagy a már meglévőt, pontosság tekintetéből ellenőrizni akarjuk, a következőket lehet figyelembe venni:

Az ACD és ABE oktaederlapok az 1-ső képsíkot az AI egyenes szerint metszik, mely $BE//CD$-vel párhuzamos. Az AI és s_1 nyomok közös I pontján megy keresztül ama oktaederlapoknak 16, illet. 45 metszővonala az $[s_1, s_2]$ síkkal.

Az FBE, FCD oktaederlapok, melyek az előbbi kettővel párhuzamosak, az F ponton keresztül menő és az 1-ső képsíkkal párhuzamos síkot az FJ egyenesben metszik, mely az $[s_1, s_2]$ síkot a J pontban találja. E J ponton mennek tehát keresztül ama oktaederlapoknak 34, 12 metszővonalai az $[s_1, s_2]$ síkkal.

Az ADE oktaederlap és az $[s_1, s_2]$ sík az 1-ső képsíkkal párhuzamos $BCDE$ síkot a DE, és az 14 egyenes szerint metszi; a DE és 14 metszőpontján K-n megy tehát az 56 egyenes, mint az ADE oktaederlapnak metszővonala az $[s_1, s_2]$ síkkal, keresztűl, stb.

A 161 a. ábra az oktaeder hálóján levő metszésidomot 432165 ábrázolja.



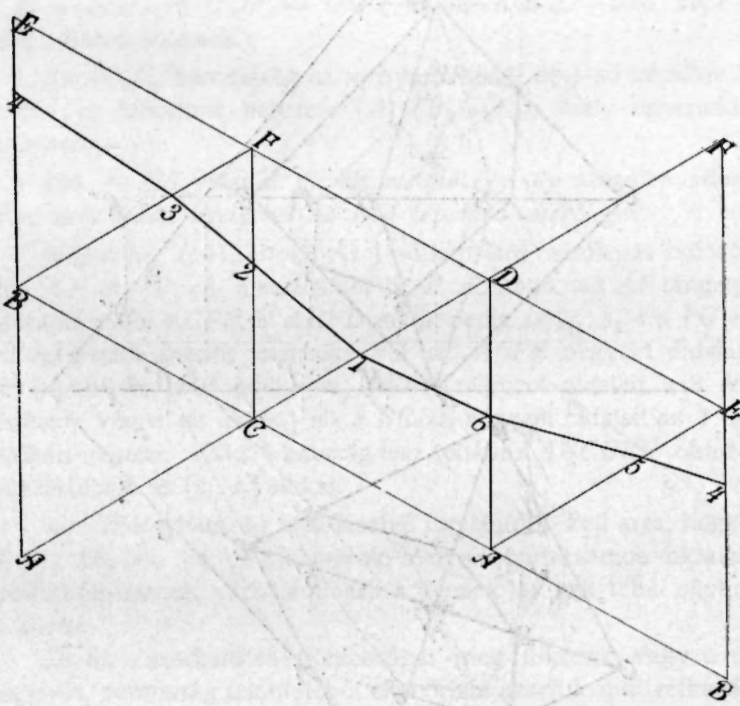
161. ábra.

135. — *130. feladat. Szerkesztendő az ikosaedernek síkmetszése, ha egyik csúcstengelye az 1-ső képsíkra merőleges.*

Megoldás. (162. ábra). Az 1-ső képsíkra merőleges AL csúcstengely és a $GHIJK$, $BCDEF$ ötszögek **E**, **F** síkjai az $[s_1, s_2]$

metszősíkot az O pontban és az e, f egyenesekben metszik. Az e és az f egyeneseknek metszőpontjai a $GHIJK$, $BCDEF$ ötszögek kerületével a 2, 11 és a 6, 9 pontok.

Az A. $GHIJK$ és az L. $BCDEF$ gúla oldaléleinek közös 1-ső képük van. Az AK és LC oldaléleknek és az $[s_1, s_2]$ síkban fekvő ON egyenesnek közös 1-ső képe van. ON az AK, LC éleket az 1, 7 pontban metszi. Az f egyenesnek és a BC élnek metszőpontját a 7 ponttal összekötő 78 egyenes a BCL gúlalapnak metszővonala



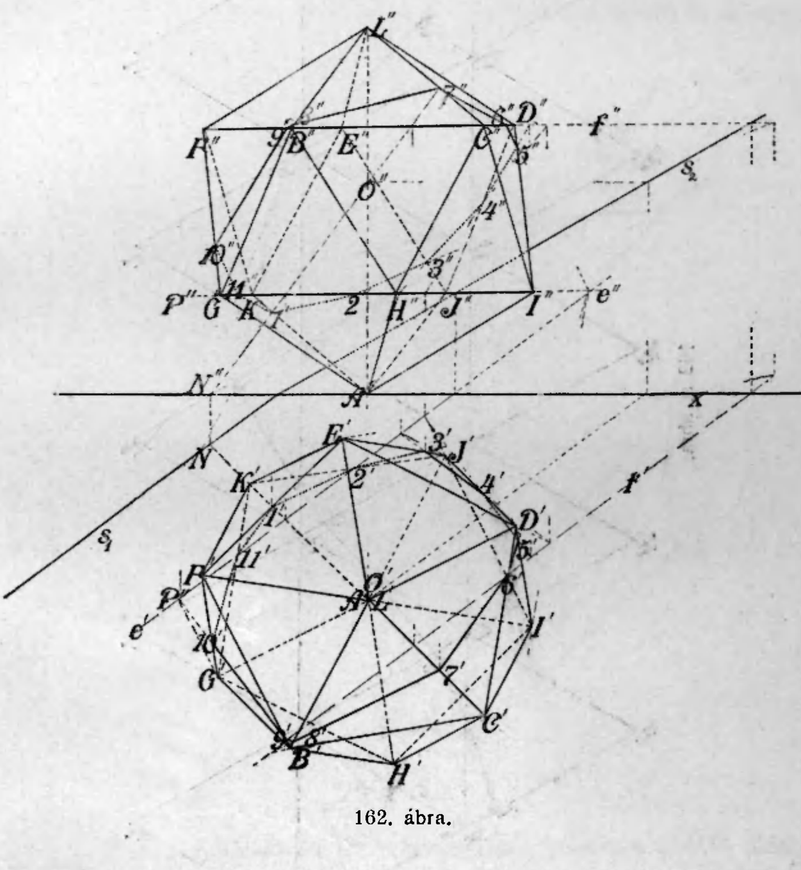
161 a. ábra.

az $[s_1, s_2]$ síkkal. E szerint a szóban forgó két gúlának metszése az $[s_1, s_2]$ síkkal a 11 1 2 és a 6789 törtvonal.

Hátra volna még a prismatoid oldallapjainak metszése az $[s_1, s_2]$ síkkal. A GFB lap az **F** síkot a BF egyenes szerint az **E** síkot egy a G ponton keresztűl menő és BF-fel párhuzamos GP egyenes szerint metszi. Ha az e és GP-nek közös pontja P, akkor 9 P lesz a GFB lapnak metszővonala és $10 = (9\ P, GF)$ a GF élnek metszőpontja az $[s_1, s_2]$ síkkal. Ugyanezen úton lettek az

5, 4, 3 metszőpontok is meghatározva úgy, hogy az [s_1, s_2] sík az ikosaedert az 1 2 3 . . . 10, 11 sokszög szerint metszi.

E sokszög négy pár oldala 1 2, 7 8; 45, 9 10; 56, 10 11; 67, 11 1 párhuzamos lapokon fekszik; ellenben a többi három oldal között (23, 34, 89) nincs párhuzamos. Figyelemre méltó a 34 oldal, mely az 1-ső képsíkra nézve látszó és két nem látszó oldalhoz 23 és 45-hez csatlakozik.



162. ábra.

A metszés valódi alakját az ismert úton megkapjuk, ha azt s_1 körül az 1-ső képsíkba, vagy az e és f fővonalak egyike körül az 1-ső képsíkkal párhuzamos síkba forgatjuk; a *metszést a hálón* a 162 a. ábra mutatja, mely a 162. ábrából lett meghatározva és 2 : 3 viszony szerint kisebbítve. —

A következő feladatokban a metsző sík helyzetét kell megállapítanunk:

Messünk egy szabályos tetraedert négyzet szerint; egy oktaedert és hexaedert szabályos hatszög szerint; egy ikosaedert és dedokaedert szabályos tizszög szerint.

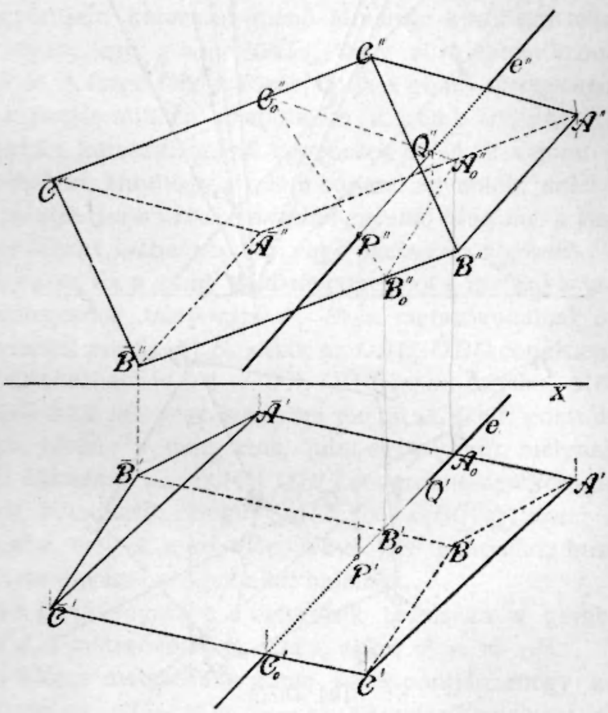
162 a. ábra.

Messük a szabályos testeket az él-, lap- és csúcstengelyre merőleges síkokkal, melyek a test középpontján mennek keresztül, ha az illető tengelyek az 1-ső képsíkra merőlegesek, tehát a metszősíkok az 1-ső képsíkkal párhuzamosak.

Messünk egy szabálytalan tetraedert rombus szerint. (A metszősík két szemben fekvő éllel párhuzamos és a többi éleket ama két él mértékszámának viszonya szerint osztja).

136. — *131. feladat. Szerkeszszük meg egy egyenes metszőpontjait egy hasáb oldallapjaival.*

Megoldás. (163. ábra). A hasáb két alapsokszöge $\overline{ABC}$, ABC; az egyenes e. Az egyenesnek egyik, pl. az 1-ső projiciáló síkja a hasábot az $A_0B_0C_0$ háromszögben, az e egyenes e háromszög kerületét a P, Q pontokban metszi; e P, Q pontok a hasáb és az egyenes metszőpontjai.

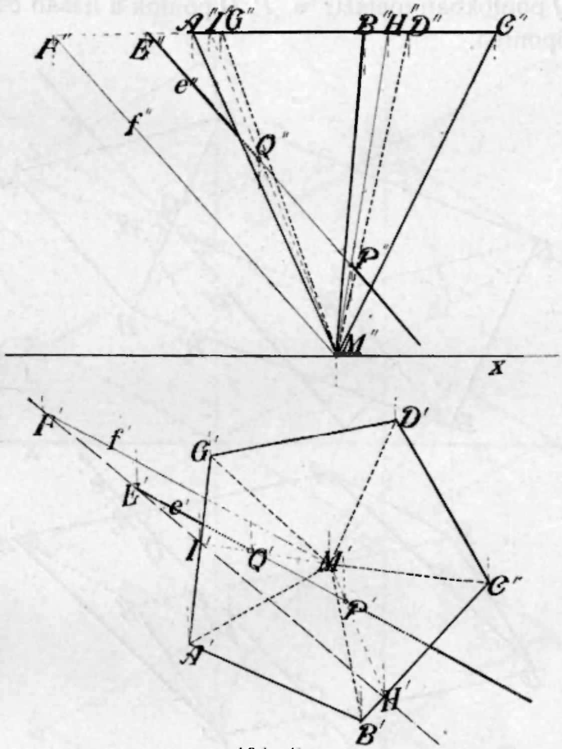


163. ábra.

A P pont a hasáb $BC\overline{BC}$ oldallapján a Q pont a $CA\overline{CA}$ oldallapján fekszik; P az 1-ső, Q a 2-dik képsíkra nézve a hasábtól el van födve, a másikra nézve pedig nincs elfödve. Ezért az e' egyenesnek a $P'Q'$-n kivüli részei közül: P'-től a hasáb 1-ső szegélyző sokszögeik terjedő része, nem látszó, Q'-től pedig látszó; mig e''-nek a $P''Q''$ kivüli részei közül: P''-től a hasáb 2-dik szegélyző sokszögéig terjedő rész látszó, a Q''-től pedig nem látszó; a szegélyző sokszögeken kivül levő része az egyenesnek mindkét képen látszó.

Ha a hasáb alapsokszögei az egyik képsíkkal párhuzamosak, akkor czélszerű az egyenes projiciáló síkja helyett a hasábot az egyenesen keresztül menő és a hasáb oldaléleivel párhuzamos síkkal metszeni, mert e metszés meghatározása, különösen ha a hasáb sokoldalú, kevesebb vonalak húzását kivánja, mint a projiciálósík metszése.

Szerkesztendő egy alapsokszögével az 1-ső képsíkon nyugvó hasábnak metszése egyenessel ez utóbbi eljárás szerint!



164. ábra.

132. feladat. Szerkesztendő az e egyenes metszőpontja az M. ABCDG gúlával.

Megoldás. (164. ábra.) Az *e* egyenesen és a gúla *M* csúcsán keresztül menő sík, a gúla *AMG* lapját az *MI*, a *BMC* lapját az *MH* egyenes szerint metszi, melyek az *e* egyenest a *Q*, *P* pontokban találják. E *Q*, *P* pontok lesznek az *e* egyenesnek metszőpontjai a gúla felületével.

A kivitelnél az *M* csúcson keresztül az *e*-vel párhuzamos *f* egyenesnek, valamint az *e* egyenesnek felkeressük *F*, *E* metszőpontját a gúla alapsokszögének síkjával; az FE egyenes az alapsokszög kerületét az IH pontokban, tehát az $[e, f] = [e, M]$ sík a gúla oldalfelületét az MI, MH egyenesek szerint metszi.

XI. FEJEZET.

A gömb.

137. A gömb származtatása és síkmetszései. Egy félkör, mely végpontjain keresztül menő átmérője körül egy teljes körülforgást végez, egy *gömbfelületet*, vagy rövidebben mondva, egy *gömböt* ír le. A forgó félkör középpontja a gömb *középpontja*, annak sugarai a forgás minden állapotában a gömb *sugarai*. A gömb középpontján keresztül menő egyenesek és síkok a gömb *átmérői és átmérősíkjai*. Minthogy a gömb sugarai egyenlők, azért *a gömb minden pontja annak középpontjától egyenlő távolságra van.*

Egy síknak metszővonala, vagy metszése a gömbbel csak kör lehet. Ugyanis, ha a gömb O középpontjából a metsző síkra bocsátott merőlegesnek talppontja C, és a metszővonalnak c-nek két tetszés szerinti pontja A, B, akkor az OAC, OBC congruens derékszögű háromszögek ($OA = OB$, OC közös) folytán, $AC = BC$. A c metszővonal két tetszés szerinti pontja A, B a C ponttól egyenlő távolságra lévén: c nem más, mint egy oly kör, melynek középpontja C. Másrészt az OAC, OBC congruens derékszögű háromszögekből következik, hogy $OAC \sphericalangle = OBC \sphericalangle$, azaz: a gömb azon sugarai, melyek a gömbön fekvő kör pontjaihoz húzhatók, e kör síkjához egyenlő szögek alatt hajlanak.

Ha a gömb sugara r, a metszősík távolsága a gömb középpontjától d, a metszővonal sugara ρ, akkor $\rho^2 = r^2 - d^2$.

A midőn a metszősík a gömb középpontján megy keresztűl, tehát átmérősík: $d = 0$ és $\rho = r$; a metszővonalakat ebben az esetben a gömb *főkörének* nevezzük.

Ha a metszősík a gömb középpontjától oly távolságra van, mint a gömb sugara ($d = r$), akkor $\rho = 0$, tehát a metszővonal egy végtelen kis körré, azaz egy *pontté* fajul el.

Végre oly sík, melynek távolsága a gömb középpontjától nagyobb, mint a gömb sugara, a gömböt nem metszi való pontokban.

Oly pontról, mely kisebb, egyenlő, vagy nagyobb távolságra van a gömb középpontjától, mint a gömb sugara, azt mondjuk, hogy a gömbön belől, a gömbön, illetve a gömbön kívül van.

Minden a gömbön belül levő C pont egy a gömbön fekvő körnek középpontja. E kör síkja merőleges arra az OC egyenesre, mely a C pontot a gömb középpontjával, O-val összeköti. De ha a C pont az O pontban van, akkor az OC egyenes határozatlan és ekkor nem egy, hanem ∞^2 számú kört lehet a gömbön találni, melynek középpontja $C = O$; ezek a gömb főkörei.

138. A gömb érintősíkjai és érintői. Láttuk, hogy az oly sík, melynek távolsága a gömb O középpontjától a gömb r sugarával egyenlő, a gömböt egy pontban metszi. Az oly sík, melynek csak egy közös pontja van a gömbbel, *a gömb érintősíkja*; a gömb és az érintősík közös pontja pedig az *érintőpont.*

Az érintősík az érintőponthoz húzott gömbsugárra merőleges, mert az érintőpont azon középpontjával egyesült körnek tekinthető, mely szerint az érintősík a gömböt metszi. E körülményből meghatározható, a gömb bármely pontjának érintősíkja.

Minden egyenes, mely az érintősíkban az érintőponton keresztűl húzható, a gömb *érintője* az illető pontban.

A gömb érintője e annak egy E pontjában, érintője azon c körnek, mely szerint az e-n keresztül fektetett tetszés szerinti **S** sík a gömböt metszi.

Ugyanis az e, mint az E pont **E** érintősíkjában fekvő egyenes merőleges a gömb OE sugarára, s mint az **S** síkban fekvő egyenes merőleges arra az OC egyenesre, mely a gömb O középpontját a c kör középpontjával C-vel összeköti. Az e egyenes tehát merőleges az OEC síkra, és így az EC egyenesre, mely a c körnek E pontján keresztül menő sugara. A talált eredményt következőkép akarjuk kifejezni: *a gömb érintősíkja tartója mindazon érintőknek, melyeket az érintőponton keresztül menő és a gömbön fekvő körökhez az érintőpontban húzhatunk.*

139. Ponton vagy egyenesen keresztül menő érintősíkok. Szerezzünk fogalmat a gömb egy c körének pontjain keresztül menő érintősíkokról!

Legyen az r sugarú O középpontú gömb c körének középpontja C; a c tetszés szerinti E pontjának érintősíkja **E**, végre az OC egyenes és az **E** sík metszőpontja M. Minthogy $ME \perp EO$, $EC \perp MO$, azért az OMC derékszögű háromszög folytán $OM = OE^2 : OC = r^2 : OC$. Ebből látható, hogy az M pont független a c kör E pontjától. Minthogy továbbá a gömbnek a c kör pontjaihoz futó sugarai a c kör síkjához egyenlő szögek alatt hajlanak, azért e sugarakra merőleges érintősíkok is egyenlő szöget képeznek a c kör síkjával. Ennélfogva: egy gömbön fekvő kör pontjainak érintősíkjai a kör síkjához egyenlő szögek alatt hajlanak és egy ponton mennek keresztül, mely a gömb középpontjából a kör síkjára bocsátott merőlegesen fekszik. A kör síkjának és e pontnak távolsága a gömb középpontjától, a gömb sugarának négyzetével egyenlő szorzatot ad.

Viszont: egy a gömbön kivül fekvő ponton keresztül menő érintősíkok és érintők a gömböt egy oly kör pontjaiban érintik, melynek sikja merőleges a gömb középpontját a felvett ponttal összekötő egyenesre. — Egy pontból a gömbhöz húzott érintőknek az a része, mely a ponttól az érintőpontokig terjed, egyenlő. Ez utóbbi tulajdonságot ekképen szokták kifejezni: egy pontból a gömbhöz húzott érintők egyenlők.

Mint különös esetek megjegyzendők: a gömb egy főkörének pontjain keresztül menő érintősíkok párhuzamosak a főkör síkjára merőleges egyenessel; továbbá: a gömbnek egy egyenessel párhuzamos érintősíkjai és érintői a gömböt egy főkör pontjaiban érintik, melynek síkja azon érintősíkokra és érintőkre merőleges.

Mikép szerezzünk fogalmat a gömb oly érintősíkjáról, mely egy adott egyenesen megy keresztül? A gömbön kivül az adott e egyenesen egy M és N pontot veszünk fel. A gömbön van egy c_m és egy c_n kör, melynek pontjain keresztül menő érintősíkok az M, illetve az N pontot tartják. A c_m és c_n köröknek két metszőpontja A, B oly tulajdonságú, hogy érintősíkjai úgy az M, mint az N ponton, tehát az $MN = e$ egyenesen mennek keresztül.

Ha az M pontot az e egyenes végtelen távol fekvő pontjában vesszük fel, akkor a c_m kör síkja az e egyenesre merőleges főkör síkja. És ha az N pontot a c_m sík és az e egyenes metszőpontjában vesszük fel, akkor a c_n kör a c_m kört az N pontból a c_m-hez húzható érintők A, B érintőpontjaiban metszi. A szerint, a mint az N pont a c_m körön kivül, belül vagy a körön fekszik, tehát az e egyenes a gömböt metszi, nem metszi, vagy érinti, az A, B pontok valóak, képzeletiek vagy egybeesők lesznek.

Ennélfogva: *egy egyenesen keresztül a gömbhöz 2, 1, 0 érintősík fektethető a szerint, a mint az egyenes a gömböt nem metszi, érinti, vagy metszi.* A gömbnek két érintősíkja symmetrikus arra az átmérősíkra vonatkozólag, mely az érintősíkok metszővonalán megy keresztül.

140. A gömb pontjainak, érintősíkjainak, érintőinek és köreinek sokaságáról. — A gömb származtatásából következtethető, hogy pontjainak száma ∞^2. Ennyi pont van minden más felületen is, így pl. a síkon, mely a legegyszerűbb felület.

A gömb minden pontjának van egy érintősíkja és ∞^1 érintője; ezért a gömb érintősíkjainak és érintőinek száma ∞^2, illetve ∞^3. A pontra nézve egy föltétel, hogy egy adott gömbön feküdjék; úgyszintén a síkra és az egyenesre nézve egy föltétel, hogy egy gömböt érintsen.

A gömbnek egy síkban ∞^1 pontja és érintője van; egy pontból a gömbhöz ∞^1 érintősík és ugyanennyi érintő fektethető. Minden egyenes a gömböt véges számú (2) pontban metszi, s minden egyenesen keresztül ugyanennyi érintősík fektethető a gömbhöz.

A gömbön ∞^3 kör és ∞^2 főkör van; a gömbnek 1, 2 vagy 3 pontján megfelelőleg ∞^2, ∞^1, 1 kör és ∞^1. 1 (általában), 0 főkör megy keresztül.

141. A gömb polaris tulajdonságai. A gömb a tér pontjai és síkjai, valamint a tér egyenesei között egy vonatkozást létesít, melyet *reciproc-polaris-*, vagy csak *polaris vonatkozásnak* nevezünk.

Képzeljünk egy állandó gömböt a térben, melynek középpontja O, sugara r. Vegyünk fel egy tetszésszerinti P pontot és határozzunk meg az OP félsugáron egy Q pontot akképen, hogy $OP. OQ = r^2$, végre fektessünk a Q ponton keresztül egy **P** síkot merőlegesen az OP egyenesre. Ezt a **P** síkot, melyet a gömb segélyével a P pontból meghatároztuk, *a P pont polarissíkjának*, és viszont a P pontot a **P** *sík polusának* nevezzük. A **P** sík az $OP. OQ = r^2$ relatió alapján szintén meghatározza polusát, a P pontot.

Minden P ponthoz egy **P** polarissík, és minden **P** síkhoz egy P polus tartozik: a szerint, a mint a P pont a gömbön kivül, a gömbön, vagy a gömbön belül van, a **P** polarissík a gömböt metszi, érinti, vagy nem metszi (azaz csak imaginarius körben metszi).

A gömb pontjainak polarissíkjai tehát e pontok érintősíkjai; egy végtelen távol fekvő pontnak polarissíkja a ponton keresztül menő átmérőre merőleges átmérősík; a végtelen távol fekvő sík polusa a gömb középpontja.

A gömb minden átmérőjére merőleges átmérőt és merőleges átmérősíkot *kapcsolt*-nak *(conjugált)* nevezünk.

Az előbbiek alapján egy ponton keresztül menő érintősíkok a gömböt azon kör pontjaiban érintik, melyben a pont polarissíkja a gömböt metszi.

A gömb O középpontjából egy tetszés szerinti p egyenesre merőlegest bocsátunk, mely p-t a P pontban metszi. Ezután az OP félsugáron egy Q pontot határozunk meg az $OP. OQ = r^2$ relatióból és a Q pontban az $[Op]$ síkra q merőleges egyenest állítunk.

A p, q egyeneseket a gömb reciprocus polarisainak és az egyik egyenest a másik *polarisának* nevezzük. Ezeknek jellemző tulajdonságuk, hogy egymásra merőlegesek, hogy normalis transversalisuk a gömb középpontján megy keresztül és a gömb középpontjától mért távolságaik szorzata a gömb sugarának négyzete, végre, hogy a gömb középpontja nem választja el metszőpontjukat a normalis transversalissal.

Egy egyenesen keresztül menő érintősíkok a gömböt abban a két pontban érintik, melyben az egyenes polarisa a gömböt metszi.

Ha egy egyenes a gömböt érinti, akkor polarisa is érinti a gömböt és az egyenesre merőleges az érintőpontban; ha az egyenes a gömb egy átmérője, akkor polarisa végtelen távol van.

A p egyenes egy tetszőleges R pontjának polarissíkjai az egyenes polarisán q-n megy keresztül. Ugyanis, ha az O középpontból a p, q-ra bocsátott merőlegesek talppontja P, Q és az R polarissíkja az OR egyenest a T pontban metszi, akkor az $OR.\ OT = OP.\ OQ = r^2$, vagy a mi ugyanaz: $OR : OP = OQ : OT$ proportió következtében az OPR, OQT háromszögek hasonlók, és így $OT \perp QT$. Az R pont polarissíkja tehát keresztül megy a Q ponton és mert úgy e polarissík, mint a q polaris merőleges az $[Op] = [ORP]$ síkra, azért a polarissík a q polarison megy keresztül.

Ennélfogva: *ha egy pont egy egyenest ír le, akkor a pontnak polaris síkja az egyenes polarisa körül forog*; *és fordítva.*

Ebből következik: egy ponton keresztül menő egyenesek polarisai a pont polarissíkjában feküsznek; továbbá: egy sík pontjainak polarissíkjai a sík polusán mennek keresztül.

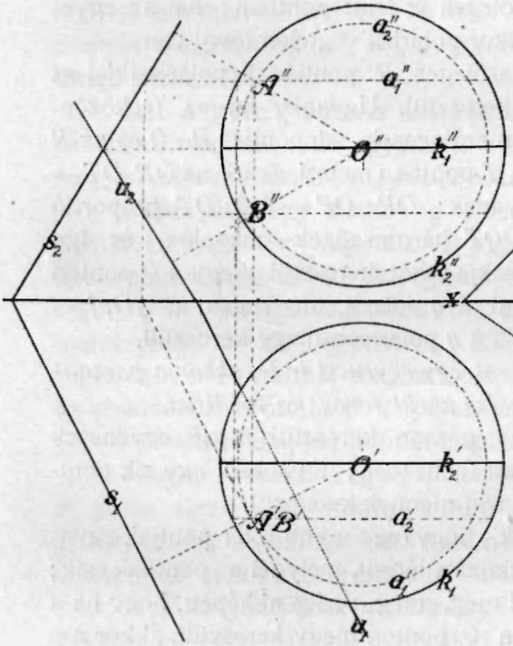
Mindezekből azt látjuk, hogy egy gömb a tér pontjai, egyenesei és síkjai közt oly vonatkozást létesít, melynél a pontnak sík; az egyenesnek egyenes felel meg, még pedig akképen, hogy ha a p egyenes, vagy a **P** sík a Q ponton megy keresztül, akkor a p egyenesnek megfelelő q egyenes és a **P** síknak megfelelő P pont a Q pontnak megfelelő **Q** síkban van.

A tér elemeinek e vonatkozását általában *reciproc* vonatkozásnak, vagy *correlatiónak*, jelen esetben, a midőn e vonatkozást a gömb létesíti, *reciproc-polaris*, vagy csak *polaris* vonatkozásnak, végre a gömbnek e vonatkozásból származó tulajdonságait *polaristulajdonságoknak* nevezzük.

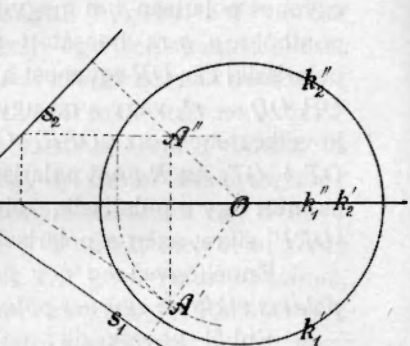
142. A gömb ábrázolása. A gömböt és általában minden görbe felületet azon pontok képeivel ábrázoljuk egy képsíkon, mely pontokon keresztül menő projiciáló sugarak az illető felület érintői. Azon vonalat, melynek pontjain a felületet érintő projiciáló sugarak keresztül mennek: a *felület valódi szegélyvonalának*, annak képét *látszólagos szegélyvonalnak* vagy szegélynek nevezik.

A gömb 1-ső szegélyvonala az a főkör, melynek pontjain keresztül az 1-ső képsíkra merőleges érintősíkok és így merőleges érintők fektethetők. *A gömbnek tehát 1-ső szegélyvonala az 1-ső képsíkhoz párhuzamos főköre.*

Hasonlókép a gömbnek a 2-dik szegélyvonala a 2-dik képsíkhoz párhuzamos főköre; mert e kör pontjainak érintősíkjai merőleges lévén a 2-dik képsíkra oly érintőket tartalmaznak, melyek a 2-dik képsíkra merőlegesek.



165. ábra.



166. ábra.

A 165. ábrában O', O'' a gömb O középpontjának képei; k'_1, k''_1 az 1-ső képsíkhoz párhuzamos k_1 főkörnek, és k'_2, k''_2 a 2-dik képsíkhoz párhuzamos k_2 főkörnek képei. k'_1 lesz tehát a gömbnek 1-ső, k_2'' annak 2-dik szegélyvonala. Jól megjegyzendő, hogy e körök nem ugyanegy körnek, hanem két különböző körnek (k_1 és k_2-nek) képei.

Ha azonban a gömb középpontját a képtengelyen veszszük fel, akkor a két valódi szegélyvonal a gömbnek metszése a két képsíkkal, és egybeesik a két látszólagos szegélyvonal, mint ezt a 166. ábra mutatja.

Feladatok.

143. — *133. feladat. Szerkesztendő a gömb érintő síkja annak egy adott pontjában.*

Megoldás. (165. és 166. ábrák.) A gömb egy A pontjának 1-ső képét A'-et tetszés szerint vehetjük fel az 1-ső szegélyvonaltól, k'_1-től bekerített sík részen. A-nak 2-dik képét megkapjuk, e ponton keresztül menő és az 1-ső képsíkhoz párhuzamos a_1 körnek, vagy a 2-dik képsíkhoz párhuzamos a_2 körnek 2-dik képén. Ha azonban az a_1, a_2 körök egyikének sem akarjuk képeit megrajzolni, akkor meghúzzuk a k_1 körnek $A'O'$ sugarára az A' pontban merőleges húrt; ennek fele megadja az A pont 2-dik képének távolságát a k_1 kör síkjától. Az A' ponthoz tehát két 2-dik kép tartozik, A'' és B'', mert az A' pontban az 1-ső képsíkra merőlegesen álló egyenes a gömböt két pontban metszi.

Az A és B pont érintősíkja **S**, **U** merőleges a gömb OA sugarára az A pontban, illetve OB sugarára a B pontban.

144. — *134. feladat. Szerkesztendők egy gömb azon körének képei és síkja, melynek pontjaiban az M ponton keresztül menő érintősíkok a gömböt érintik.*

Megoldás. (167. ábra.) A gömbnek az M ponton keresztül menő és az 1-ső képsíkra merőleges érintősíkjai a gömböt a k_1 kör A, B pontjaiban érintik. Ezeknek 1-ső képei az M' pontból a k'_1 körhez vonható érintők érintőpontjai A', B'. A keresett körnek c-nek 1-ső képe c', az A',B' pontokban érinti k'_1-et, mert ugyan k_1 és c körnek érintője az A pontban különböző, de az 1-ső képsíkra merőleges érintősíkban lévén, közös 1-ső képpel birnak.

Ugyanígy érinteni fogja c'' a k''_2 szegélyvonalat az M'' pontból a k''_2-hez vonható érintők D'' E'' érintőpontjaiban. Az $ABDE$ pontok már meghatározzák a kör síkját **S**-et, mely az M pont polarissíkja.

Az **S** síkban fekvő c kör képei ellipsisek, melyeknek főtengelyei **S**-nek illető nyomaival párhuzamosak, melléktengelyei pedig arra merőlegesek.

A c' ellipsis melléktengelyének végpontjait F', G'-et megkapjuk, ha az M pontból érintőket húzunk a gömb azon főköréhez, melynek síkja az M ponton keresztül menő és az 1-ső képsíkra projiciáló sík. Ha e síkot és az M pontot a benne fekvő és az 1-ső képsíkkal párhuzamos átmérő körül az 1-ső képsíkkal párhuzamos helyzetbe forgatjuk, akkor a forgatott főkör 1-ső képe összeesik k'_1-gyel, a forgatott M ponté pedig M''' lesz ($M'''M' \perp M'O$, $M'''M'$ egyenlő M'' távolságával a k''_1-től). Az M''' pontból a k'_1-hez húzható érintők érintőpontja F''', G'''; az $O'M'$-re merőleges $F'''F'$,

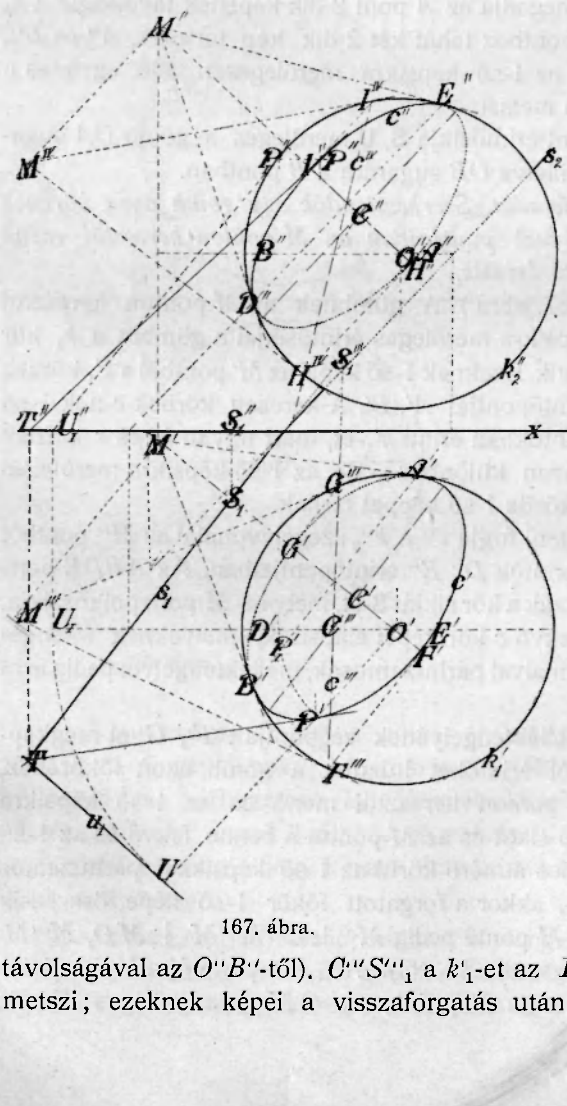
$G'''G'$ egyenesek F', G' talppontjai a c' ellipsis melléktengelyének végpontjai és c' főtengelye egyenlő $F'''G'''$-mal.

Ugyanigy nyerhetők a c'' ellipsis tengelyei: $M''M^{IV} \perp O''M''$, $M''M^{IV}$ egyenlő M' távolságával k'_2-től; az M^{IV}pontból k''_2-hez húzott érintők k''_2-t a H^{IV}, I^{IV} pontokban érintik; $H^{IV}H''$, $I^{IV}I''$ merőleges $O''M''$; $H''I''$ az $O''M''$ egyenesen a c'' melléktengelye; $H^{IV}I^{IV} = F'''G''' = c$ kör átmérője $= c''$ főtengelye.

145. — *135. feladat. Szerkesztendő egy gömb síkmetszése.*

Megoldás. (167. ábra). A gömb O középpontjából az **S** metszősíkra bocsátott merőlegesnek C talppontja középpontja annak a c körnek, mely szerint **S** a gömböt metszi. E kör 1-ső képének, a c' ellipsisnek melléktengelye az **S** síknak a C ponton keresztül menő 1-ső esővonala CS_1.

Hogy a CS_1 egyenesnek F, G metszőpontjait a gömbbel megkapjuk, forgassuk CS_1-et és 1-ső projiciáló síkjában fekvő főkörét a gömbnek e sík O pontján keresztül menő 1-ső fővonala ($O'C'$, $O''B''$) körül 90^0-kal. A forgatott főkör 1-ső képe akkor a k'_1-be, a forgatott CS_1 pedig $C'''S'''_1$-ba jut ($C'C''' \perp O'C'$, $S_1S'''_1 \perp O'C'$; $C'C'''$ és $S_1S'''_1$ egyenlő a C' és S'_1 távolságával az $O''B''$-től). $C'''S'''_1$ a k'_1-et az F''', G''' pontokban metszi; ezeknek képei a visszaforgatás után a c' ellipsis mellék-



167. ábra.

tengelyének végpontjai és a c'' ellipsis legmagasabb és legalacsonyabb pontjai.

Hasonlókép határozandók meg a c'' ellipsis $H''I''$ melléktengelyének végpontjai H'', I'' és a c' ellipsis legmagasabb és legalacsonyabb pontjai H', I', az **S** sík C pontján keresztül menő 2-dik esővonal képein, a $H^{IV}I^{IV}$-be leborított HI esővonal segélyével.

A c', c'' ellipsisek főtengelyei a c kör átmérőjével és az $F'''G''' = H^{IV}I^{IV}$ húrokkal egyenlők.

A c metszővonal képei a gömb szegélyvonalait k'_1, k''_2-öt érintik. Mert pl. a c és k_1 kör A metszőpontjának érintősíkjában feküsznek e köröknek érintői az A pontban. Az érintősík azonban az 1-ső képsíkra projiciáló, tehát a benne fekvő érintők 1-ső képei egybeesnek, azaz a c' és k' görbének az A' pontban közös érintője van. c' és k'_1 érintőpontjai A', B' a c és k_1 kör síkjainak metszővonalán, — a c'' és k''_2 érintőpontjai D'', E'' pedig a c és k_2 kör síkjainak metszővonalán vannak.

A metszővonal bármely pontjának érintője a pont érintősíkjának és a metszősíknak metszővonala.

Hogy a c görbe P pontjának érintőjét megszerkeszszük, határozzuk meg a P pont **U** érintősíkjának 1-ső nyomát, u_1-et, a következőképen. Forgassuk a P pontot a gömb középpontjának 1-ső projiciáló sugara körül mindaddig, mig a k_2 körre nem jut; a forgatott P pont legyen P_I. P_I érintősíkja a 2-dik képsíkra projiciáló sík, melynek $P''_IU''_I$ 2-dik nyoma k'_2-et a P''_I pontban érinti; az 1-ső nyoma $U_I''U_I$. Ha a P_I pontot és érintősíkját visszaforgatjuk, mig P_I a P-be nem jut, akkor az érintősík 1-ső nyoma az u_1 egyenes lesz ($O'U = O'U_I$; $u_1 \perp O'U$-ra az U pontban).

A P pont **U** érintősíkjának u_1-nek 1-ső nyoma s_1-et a T pontban metszi, mely az **S**, **U** síkok metszővonalának, tehát a P pont PT érintőjének 1-ső nyoma.

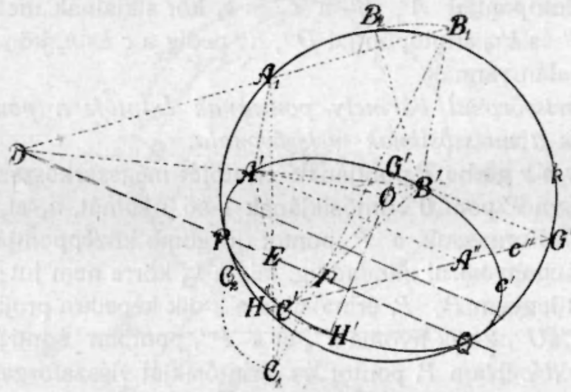
Azt a körülményt, hogy a gömb síkmetszésének képe egy képsíkon, mely ellipsis, kettősen érinti a gömbnek e képsíkra vonatkozó szegélyvonalát, mely kör, arra használhatjuk, hogy oly ellipsist szerkeszszünk, mely egy kört kettősen, azaz két pontban érint. Oldjuk meg tehát az ábrázoló geometria módszereivel a következő két *planimetriai feladatot.*

146. - *136. feladat. Adva van egy k kör és kerületén belül három pont A', B', C'; fektessünk e három ponton keresztül egy c' ellipsist, mely a kört kettősen érinti.*

Megoldás. (168. ábra). Tekintsük a k kört egy O középpontú gömb azon főkörének, mely szerint e gömb a rajzlapot, melyet 1-ső képsíknak választunk, metszi. Tekintsük az A', B', C' pontokat a gömb A, B, C pontjai 1-ső képének. Az A, B, C pontok $A'A_1$, $B'B_2$, $C'C_2$ távolságai az 1-ső képsíktól, az OA', OB', OC' egyenesekre az A', B', C' pontokban megfelelőleg merőlegesen álló körhúrók fele.

Az AB egyenes 1-ső nyomát D-t megkapjuk, ha az $A'B'$ egyenesre az A', B' pontban merőlegeseket emelünk, vagy bármily irányú párhuzamosakat húzunk, és ezekre az $A'A_1 = A'A$, $B'B_1 = B'B = B'B_2$ vonaldarabokat reárakjuk, végre az A_1B_1 végpontjait összekötő egyenest az $A'B'$-vel metszük a D pontban.

Feltételezvén, hogy a C pont nem azon oldalán fekszik a képsíknak, mint az A és B pont, az AC és BC egyenes 1-ső nyoma E és F (ha $A'A_1 // C'C_1 // B'B_1$, $C'C_1 = C'C = C'C_2$, $A'C'$ és $B'C'$ megfelelőleg elválasztja az A_1, C_1; B_1, C_1 pontokat és $(A_1C_1$,



168. ábra.

$A'C') = E, (B'C', B_1C_1) = F)$. Az $[ABC] =$ **S** sík 1-ső nyoma DEF a k kört a keresett c' ellipsis érintőpontjaiban P, Q-ban metszi.

Tekintsük a gömb azon főkörének síkját, mely az **S**-re és az 1-ső képsíkra merőleges, 2-dik képsíknak, tehát az O-ból a DEF-re bocsátott merőlegest, $OG'H'$-t, képtengelynek.

Az **S** sík e 2-dik képsíkra projiciáló lévén, 2-dik nyomának $G''A''H''$-nak A'' pontja a $G'H'$ képtengelytől $A'A = A'A_1$ távolságra van; azonkivül tengelypontja $(DF, G'H')$.

E sík a gömböt egy c körben metszi, melynek 1-ső képe a keresett c' ellipsis.

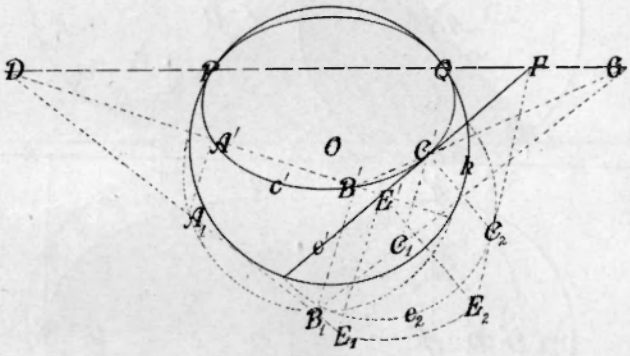
Minthogy a gömbön két pont van, melynek 1-ső képe A' vagy B', vagy C', t. i. A, $\overline{A}$; B, $\overline{B}$; C, $\overline{C}$, azért nyolcz oly síkot lehet találni, melynek metszése a gömbbel az $A'B'C'$ pontokon keresztül menő és a k kört kettősen érintő ellipsist szolgáltatja 1-ső képéül. De e nyolcz sík közül kettő-kettő symmetrikus az 1-ső képsíkot illetőleg úgy, hogy két-két ellipsisnek képe egybeesik.

Ha a szerkesztett S sík 1-ső nyoma nem metszi a k kört, akkor a c' ellipsis ugyan ép úgy határozható meg mint előbb, de érintése a k körrel képzeleti (imaginarius).

137. feladat. Adva van egy k kör, annak kerületén belől két pont, A', B', és a körnek e' húrja; szerkesztendő egy e' ellipsis, mely a k kört kettősen, az e' húrt egyszerűen érinti és az A', B' pontokon megy keresztül.

Megoldás. (169. ábra.) Legyen ismét a rajzlap az 1-ső képsík; k egy gömb főköre; A, B két pont e gömbön, melynek 1-ső képe A', B'; e' a gömb egy e körének 1-ső képe.

Helyezzünk az AB pontokon keresztül oly síkot, melyben az e kör egy érintője benne fekszik. Az AB egyenes 1-ső nyoma



169. ábra.

D. Az AB egyenes az e kör síkját egy E pontban metszi, melynek 1-ső képe $E' = (A'B', e')$; az E pont távolsága az 1-ső képsíktól $E'E_1$ (ha $E'E_1 // A'A_1 // B'B_1 \perp A'B'$, $DA_1B_1E_1$ egy egyenesen van és $A'A_1 = A'A$, $B'B_1 = B'B$).

Borítsuk le az e kört síkjának e' 1-ső nyoma körül az 1-ső képsíkba. Ekkor e az e_2 helyzetbe, E pedig E_2-be jut (e_2 az e' húr, mint átmérő fölé írt kör; $E'E_2 \perp e'$, $E'E_2 = E'E_1$).

Az E_2 pontból az e_2 közhez húzható érintő e_2-őt a C_2 pontban érinti, e'-et az F pontban metszi.

A visszahelyezett C_2 pontnak 1-ső képe C' az e' húron ($C_2C' \perp e'$), a keresett c' ellipsisnek érintőpontja az e'-sel; mig a DF egyenes a c kör síkjának 1-ső nyoma.

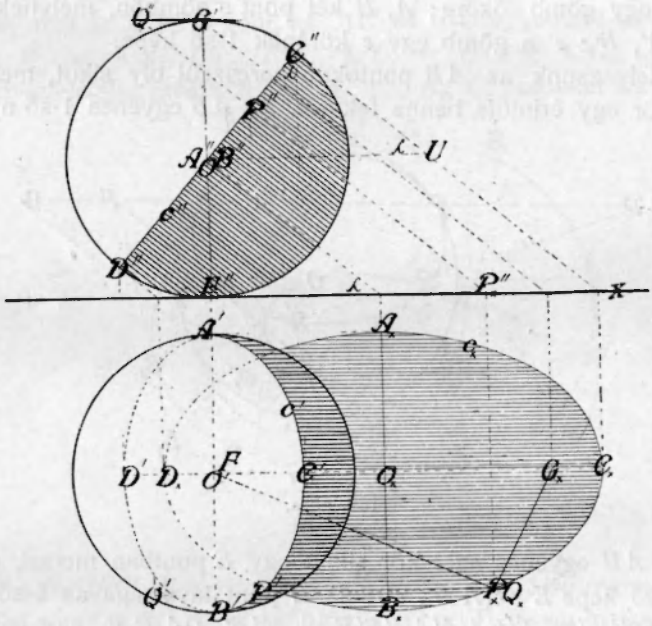
A c' ellipsis további meghatározása az előbbi feladat szerint történik.

E feladatnak szintén általában négy megoldása van.

147. — *138. feladat. Szerkesztendő egy gömb saját- és vetett árnyéka, ha a fénysugarak a 2-dik képsíkkal párhuzamosak.*

Megoldás. (170. ábra.) A gömbnek a fénysugarakkal párhuzamos érintő síkjai a gömböt egy főkör szerint érintik, melynek síkja a fénysugarakra merőleges átmérősík. E c kör képezi a gömbnek saját árnyékhatárát, annak vetett árnyéka c_* pedig a gömb vetett árnyékhatárát az 1-ső képsíkra.

Minthogy jelen esetben a fénysugarak a 2-dik képsíkkal



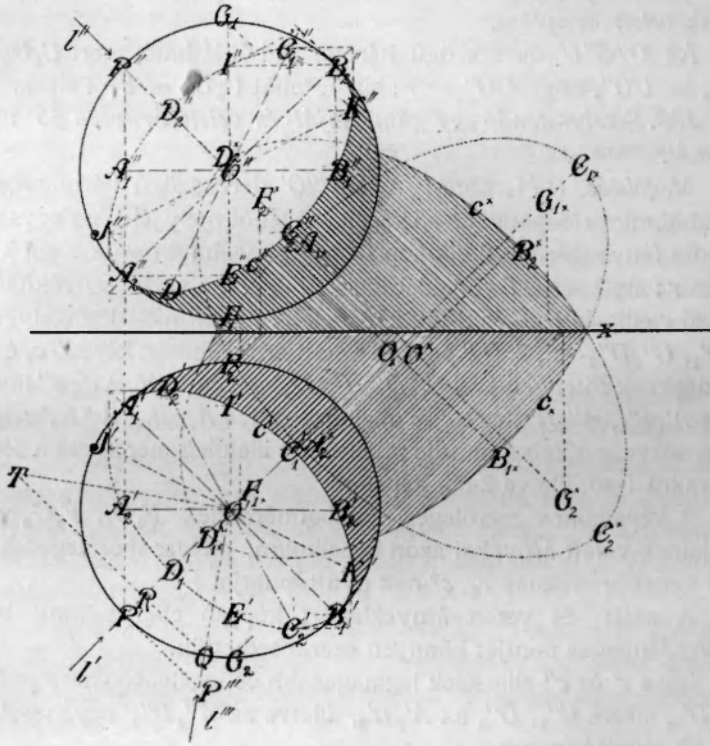
170. ábra.

párhuzamosak: c-nek 2-dik képe c'' a fénysugarak 2-dik képére merőleges átmérője k''_2-nek. c-nek az 1-ső képe c' egy oly ellipsis, melynek főtengelye $A'B'$ merőleges a fénysugarak 1-ső képére és egyenlő a gömb átmérőjével $2r$-rel, és a melléktengelynek $C'D'$-nek hosszúsága $2r$ sin λ, hol λ a fénysugarak hajlásszöge az 1-ső képsíkhoz.

c-nek vetett árnyéka az 1-ső képsíkra egy c_* ellipsis, melynek melléktengelye $A_*B_* = 2\,r$, főtengelye $C_*D_* = 2\,r$: sin λ.

Hogy ezt bebizonyítsuk, a gömböt akkép vettük fel, hogy az 1-ső képsíkot érintse egy F pontban. De ez csak a bizonyítást egyszerüsíti, mert ha a c kör árnyéka erre az 1-ső képsíkra ellipsis, akkor minden az 1-ső képsíkkal párhuzamos síkra is azzal congruens ellipsis lesz.

A c kör egy P pontján keresztül menő fénysugár az 1-ső képsíkot, mely a gömböt F-ben érinti és a vele párhuzamos érintősíkot, mely a gömböt G-ben érinti, a P_*, Q pontokban metszi. Az FG gömb átmérőnek vetett árnyéka FG_*.



171. ábra.

A gömbnek QG, QP érintői egyenlők és mert QP a 2-dik képsíkkal párhuzamos, QG pedig az 1-ső képsíkkal párhuzamos, azért $QP = Q''P''$, $QG = Q_*G_*$; tehát $Q''P' = Q_*G_* = P_*G_*$.

Hasonlókép egyenlők a gömbnek a P_* ponton keresztül menő érintői P_*P, P_*F; tehát $P''P''_* = P_*F$.

A $Q''P'' = P_*G_*$ és $P''P_*'' = P_*F$ egyenletek összegéből következik:

$P_*G_* + P_*F_* = Q''P'' + P''P''_* = Q''P''_*$, mely utóbbi egy állandó vonaldarab t. i. a fénysugaraknak az F és a G pont párhuzamos érintősíkjai között levő része. Ennélfogva: a c kör vetett árnyékának c_*-nak egy tetszés szerinti P_* pontja oly helyzetű, hogy az F és G_* pontoktól mért távolságainak összege egy állandó vonaldarabbal egyenlő, azaz c_* egy ellipsis, melynek gyujtópontjai F és G_*.

Vagy általánosabban kifejezve:

Egy gömb vetett árnyéka párhuzamos világításnál egy síkra oly ellipsis, melynek melléktengelye egyenlő a gömb átmérőjével, gyujtópontjai pedig ama síkra merőleges gömbátmérő végpontjainak vetett árnyékai.

Az $O''C''U$ derékszögű háromszögből látható, mert $C_*O_* = O_*D_* = UO''$, hogy $UO'' = r : \sin \lambda$, tehát $C_*D_* = 2\,r : \sin \lambda$.

139. Szerkesztendő egy gömb saját- és vetett árnyéka 45⁰ világításnál.

Megoldás. (171. ábra.) A $P'P'''O'$ derékszögű háromszög λ szögéből, mint a fénysugár 1-ső képsíkszögéből, mely jelenleg egyszersmind a fénysugárnak 2-dik képsíkszöge, meghatározzuk $r \sin \lambda = QR$ és $r : \sin \lambda = QT$ vonaldarabokat. 2. QR a saját árnyékhatárt képező c ellipsis 1-ső és 2-dik képének c', c''-nek melléktengelyével, $C'_1D'_1$, $C''_2D''_2$-vel, 2. QT pedig a vetett árnyékhatárt képező c_* és c^* ellipsiseknek főtengelyével $C_{1*}D_{1*}$, $C_2{}^*D_2{}^*$-gal egyenlő. A c', c'' főtengelye $A'_1B'_1$, $A''_2B''_2$ és a c_*, c^* melléktengelye $A_{1*}\,B_{1*}$, $A_2{}^*B_2{}^*$ nagyságra nézve a gömb átmérője; helyzetét illetőleg merőleges a fénysugarakra 1-ső, illetve 2-dik képeire.

A képsíkokra merőleges gömbátmérőknek F_1G_1, F_2G_2 végpontjainak vetett árnyékai azon képsíkokra, melyre merőlegesek az illető vetett árnyéknak c_*, c^*-nak gyújtópontjai.

A saját- és vetett árnyékhatárt képező ellipsiseknek még néhány lényeges pontját könnyen szerkeszthetjük.

Igy a c' és c'' ellipsisek legmagasabb és legalacsonyabb pontja C'_2, D'_2, illetve C''_1, D''_1 az $A'_2B'_2$, illetve az $A''_1B''_1$ egyenesektől $r. \cos \lambda$ távolságra van.

A c görbe symmetrikus a C_1D_1 átmérő 1-ső projiciáló síkjára nézve és a C_2D_2 átmérő 2-dik projiciáló síkjára nézve. Ennélfogva az A_2B_2 pontokkal és a B_1A_1 pontokkal megfelelőleg ama síkokra vonatkozólag symmetrikus pontok E, I, azon főkörön feküsznek, melynek síkja a képtengelyre merőleges. Az E, I pontok képei tehát az $O'O''$ egyenesen vannak.

Tekintve, hogy a c körnek A_2B_2, C_2D_2 és A_1B_1, C_1D_1 átmérői egymásra merőlegesek a C_2, D_2 pontokkal és a C_1, D_1 pontokkal megfelelőleg az előbbi projiciáló síkokra symmetrikus fekvésű J, K pontok az EI átmérőre merőleges átmérőnek végpontjai. Ennélfogva a J, K pontok érintői párhuzamosak az EI átmérővel, tehát képeinek érintői merőlegesek a képtengelyre.

Minthogy az E, I pontok a képtengelyre merőleges síkban fekvő főkörön vannak, azért az E, I pontok érintősíkjai a képtengelylyel párhuzamosak, s mint ilyenek a képsíkokat a képtengelylyel párhuzamos egyenesek szerint metszik.

Az E, I pontok a c görbén feküsznek, tehát érintősíkjaik a fénysugarakkal párhuzamosak; ezek az érintősíkok lesznek tehát a c kör E és I pontjain keresztül menő érintőknek fénymenti síkjai. De e fénymenti síkok metszővonalai a képsíkokkal az E, I pontok érintőinek vetett árnyékai. Ennélfogva az E, I pontok vetett árnyékainak, mint a c_k, c^* görbéken fekvő pontoknak, érintői a képtengelylyel párhuzamosak.

Minthogy az A_1, B_1 pontoknak érintősíkjai az 1-ső képsíkra és az A_2, B_2 pontoknak érintősíkjai a 2-dik képsíkra merőlegesek, azért az A_1, B_1 pontoknak a 2-dik képsíkra vetett árnyékaiban, és az A_2, B_2 pontoknak az 1-ső képsíkra vetett árnyékaiban az érintők a képtengelyre merőlegesek.

148. — *140. feladat. Fektessünk egy egyenesen keresztül érintősíkokat egy gömbhöz és határozzuk meg azoknak érintőpontjait.*

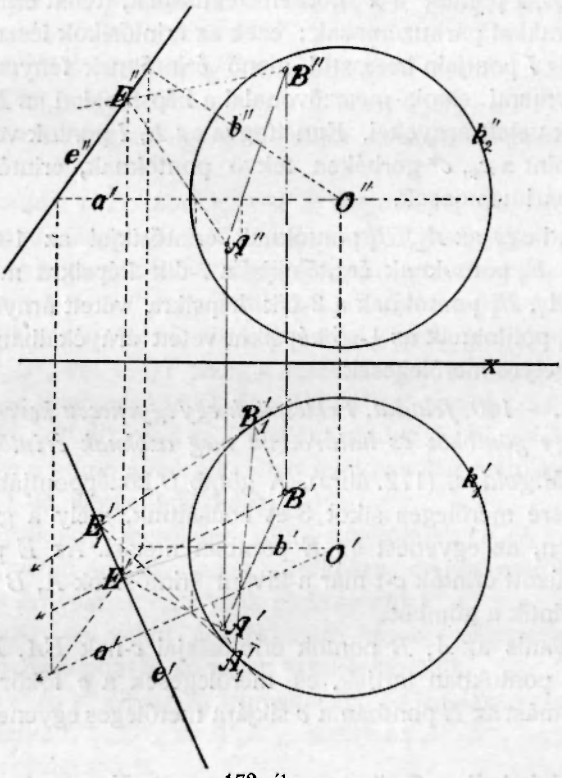
1. Megoldás. (172. ábra). A gömb O középpontjából az adott e egyenesre merőleges síkot **S**-et bocsátunk, mely a gömböt egy c főkörben, az egyenest az E pontban metszi. Az E pontból a c körhöz húzott érintők c-t már a kivánt érintősíkok A, B érintőpontjaiban érintik a gömböt.

Ugyanis az A, B pontok érintősíkjai c-nek EA, EB érintőit az A, B pontokban tartják, és merőlegesek a c főkör **S** síkjára; ezért egymást az E pontban a c síkjára merőleges egyenesben, e-ben metszik.

A kivitelnél az **S** síkot, valamint e-nek E metszőpontját **S**-sel, az O ponton keresztül menő a, b fővonalaival határozzuk meg. Ezután az **S** síkot az a 1-ső fővonal körül az 1-ső képsíkkal párhuzamos helyzetbe foglaljuk. A c kör 1-ső képe a forgatás után, a gömb 1-ső szegélyvonalának k'_1 képe; az E pont pedig E'_1-be jut. Az E'_1 pontból k'_1-hez húzható érintők k'_1-et az A'_1, B'_1-ben érintik; ezeknek visszaforgatott helyzete A, B, a keresett érintősíkok érintőpontja.

2. Megoldás (173. ábra). Az e egyenes egy tetszés szerinti M pontján keresztül menő érintősíkok a gömböt egy d körben érintik. Ha a d körhez érintőket húzunk abból a D pontból, melyben e a d kör síkját metszi, akkor ezeknek A, B érintőpontjai a keresett síkok érintőpontjai lesznek.

Ugyanis az AM, BM egyenesek érintői a gömbnek az A, B pontokban, mert e pontok a d körön feküsznek, melynek érintősíkjai az M ponton mennek keresztül. Másrészt az AD, BD egyenesek is érintői a gömbnek az A, B pontokban. Ennélfogva az



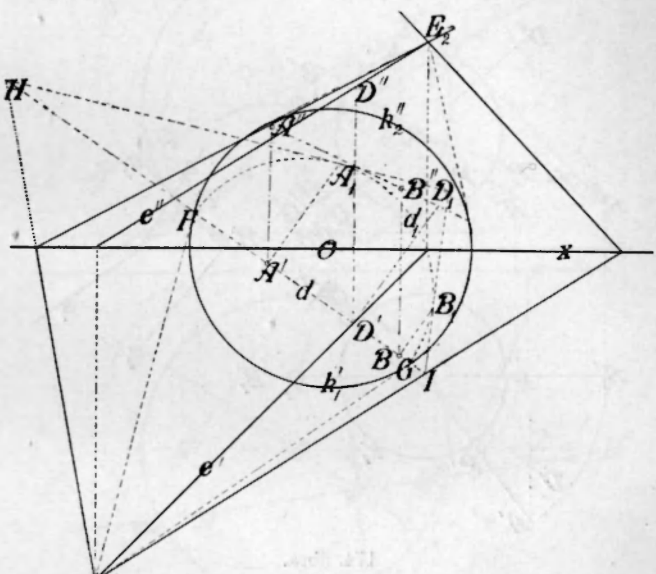
172. ábra.

$ADM = [Ae]$, $BDM = [Be]$ síkok a keresett érintősíkjai a gömbnek, mert az AM, AD; BM, BD érintőin mennek keresztül.

A 173. ábrában a gömb középpontját a képtengelyben, az M pontot pedig az e egyenes 1-ső nyomában vettük fel. A d körnek síkja az 1-ső képsíkra projiciáló; egyik átmérőjének végpontjai F, G, az M pontból k'_1-hez húzott MF, MG érintőknek érintőpontjai.

A d kört és síkjának D metszőpontját e-vel, a GF átmérő körül az 1-ső képsík d_1 körébe és D_1 pontjába borítjuk. A D_1 pontból d_1-hez húzott érintők A_1, B_1 érintőpontjait meghatározván, d síkját visszaforgatjuk eredeti helyzetébe. E visszaforgatás után az A_1, B_1 pontok A, B-be, azoknak 1-ső képei A', B' az FG egyenesre jutnak, mig az A'', B'' 2-dik képeknek távolsága a képtengelytől $A'A_1$, BB_1. A DA, DB érintők 1-ső nyomai $(FG, DA) = H$, $(FG, DB) = I$ a keresett érintősíkok 1-ső nyomain feküsznek; a 2-dik nyomok pedig e-nek 2-dik nyomán mennek E_2-n keresztül. — Az AB egyenes az e egyenesnek polarisa a gömbre vonatkozólag.

149. — *141. feladat. Szerkesztendők egy gömbnek azon érintősíkjai, melyek egy adott* **S** *síkhoz* α *és egy adott* **U** *síkhoz* β *szögek alatt hajlanak.*



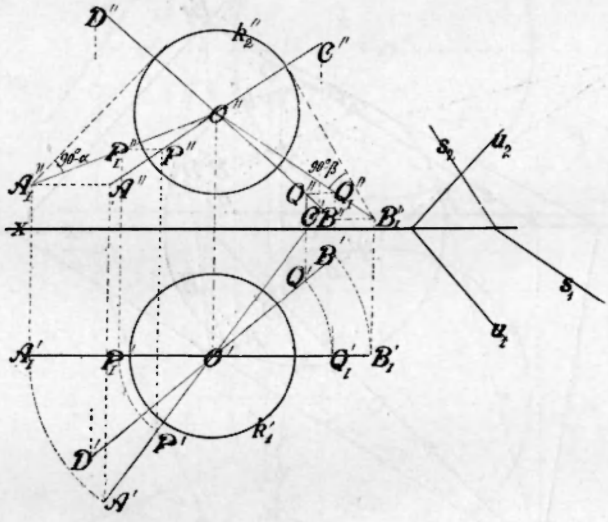
173. ábra.

Megoldás. (174. ábra). A gömbnek az **S** síkra merőleges átmérőjén van egy A ponton, a melyen keresztül menő érintősíkjai a gömbnek, az OA egyeneshez 90^0-α szög alatt hajlanak. Ezen érintősíkok a gömböt egy az OA egyenesre merőleges és így az **S**-hez párhuzamos síkon fekvő kör pontjaiban érintik, és az **S** síkhoz α szög alatt hajlanak.

Hasonlókép lehet egy az **U** síkra merőleges gömb-átmérőn egy B pontot találni, a melyen keresztül menő érintősíkok az OB egyeneshez 90^0-β szög alatt, tehát az **U** síkhoz β szög alatt hajlanak.

Ebből következik, hogy a gömbnek az **S** és **U** síkhoz α, illetve β szög alatt hajló érintősíkjai az A és a B ponton, és így az AB egyenesen mennek keresztül.

Hogy az A pontot megkapjuk, forgassuk a $[s_1, s_2]$ síkra merőleges OP gömb-átmérőt az 1-ső képsíkra merőleges gömbátmérő körül a 2-dik képsíkhoz párhuzamos helyzetbe, OP_r-be. Ekkor az OP_r-hez 90^0-α szög alatt hajló és a 2-dik képsíkra projiciáló síknak 2-dik nyoma OP_r-nek 2-dik képével, $O''P''_r$-gyel, 90^0-α szöget képez. És ha e sík a gömb érintősíkja, akkor a 2-dik nyoma a gömbnek 2-dik szegélyvonalát érinti. Ennélfogva a forgatott OP átmérőnek 2-dik képén, $O''P''_r$-n, a forgatott A pontnak 2-dik képét, A''_r-et,



174. ábra.

megkapjuk, ha a k''_2 körhez oly érintőt húzunk, mely az $O''P''_r$-gyel 90^0-α szöget képez; ez az érintő az $O''P''_r$-et az A''_r pontban metszi. A''_r-ből A'_r és a kivánt A pont A' A'' képei szerkeszthetők.

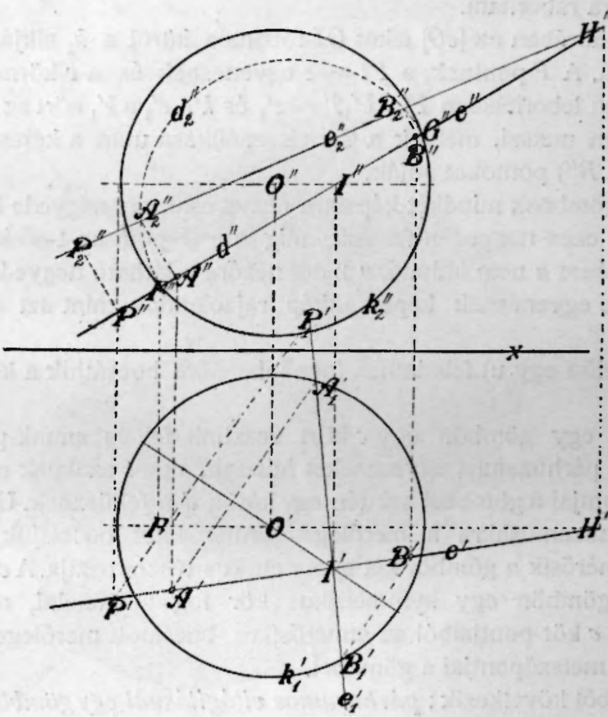
Hasonlókép járunk el a B pont szerkesztésénél az $[u_1, u_2]$ síkra merőleges gömb-átmérővel, OQ-val.

Az A, B pontokon kivül van még egy C pont az OP átmérőn ($AO = OC$), és egy D pont az OQ átmérőn ($BO = OD$), melyeken megfelelőleg keresztül menő érintősíkok az $[s_1, s_2]$ síkhoz α, az $[u_1, u_2]$ síkhoz β szögek alatt hajlanak. Ezért általában nyolcz érintősíkot kapunk (az AB, AD, BC, CD keresztül menők ezek!), melyek az **S** és **U** síkhoz α és β szögek alatt hajlanak.

Oldjuk meg e feladatot, ha az adott síkok a képsíkok, tehát:

142. feladat. Szerkesztendők egy gömbnek azon érintősíkjai, melyeknek képsíkszögei α, β adva vannak.

Megoldás. A gömbnek azon érintősíkjai, melyeknek 1-ső képsíkszöge α, a gömböt két, az 1-ső képsíkkal párhuzamos síkban levő kör pontjaiban érintik. Ugyanigy van két kör a gömbön, melynek pontjain keresztül menő érintősíkok 2-dik képsíkszöge β. E négy kör nyolcz metszőpontja, mely e feladatnál elég egyszerűen szerkeszthető, a kívánt érintősíkok érintőpontja.



175. ábra.

150. — *143. feladat. Szerkesztendők egy e egyenes és egy gömb metszőpontjai.*

Megoldás. (175. ábra). Az egyenesen keresztül menő 1-ső, vagy 2-dik projiciáló sík a gömböt egy kör szerint metszi; e kör és az egyenes metszőpontjai a kivánt pontok. Ezen kör és az egyenes metszőpontjai a kör képeinek szerkesztése nélkül is megkaphatók. Ugyanis, ha a metszősík pl. a 2-dik képsíkra projiciáló, tehát a kimetszett körnek, d-nek, 2-dik képe d'' a k''_2 körnek azon $F''G''$

húrja, mely az egyenes 2-dik képén fekszik, és ha metszősíkot az e egyenessel és a d körrel együtt a 2-dik képsíkkal párhuzamos k_2 kör síkjára borítjuk, és a metszőpontokat A''_2, B''_2-öt a leborított helyzetben meghatározzuk, úgy ezeknek visszaállított helyzete A, B a kívánt metszőpontokat szolgáltatja.

Célszerűbb azonban, mert a leborított d''_2 kör rajzolása elmarad, a metszősíkot az e egyenesen és a gömb O középpontján keresztül fektetni, és a kimetszett c *főkört* a gömb középpontján keresztűl menő 1-ső, vagy 2-dik fővonala körül a k_1, illetve a k_2 kör síkjára ráborítani.

Az ábrában az $[eO]$ sikot OI fővonala körül a k_1 síkjára borítottuk reá. A P pontnak, a $PI = e$ egyenesnek és a c körnek 1-ső képei ezen leborításban P'_1, $P'_1I' = e'_1$ és k'_1. e'_1 a k'_1 kört az A'_1, B'_1 pontokban metszi, melyek a sík visszaállítása után a keresett (A', A''), (B', B'') pontokat adják.

A gömbnek mindkét képsíkra nézve csak egy negyede látszik; a B pont ezen negyeden fekszik, mig az A pont az 1-ső képsíkra néző egyénre a nem látható, a 2-dik nézőre a látható negyeden van, s ezért az egyenesnek képei akkép rajzolandók, mint azt az ábra mutatja.

Mielőtt egy uj feladathoz fognánk, előre bocsátjuk a következőket:

Ha egy gömbön egy c kört veszünk fel és annak pontjain keresztül párhuzamos egyeneseket húzunk, akkor ezeknek második metszőpontjai a gömbbel szintén egy körön d-n feküsznek. Ugyanis, ha a párhuzamosakra a merőleges átmérősíkot bocsátjuk, akkor ez az átmérősík a gőmböt két symmetrikus részre osztja. A c körnek tehát a gömbön egy symmetrikus kör fog megfelelni, melynek pontjai a c kör pontjaiból az átmérősíkra bocsátott merőlegeseknek második metszőpontjai a gömbbel.

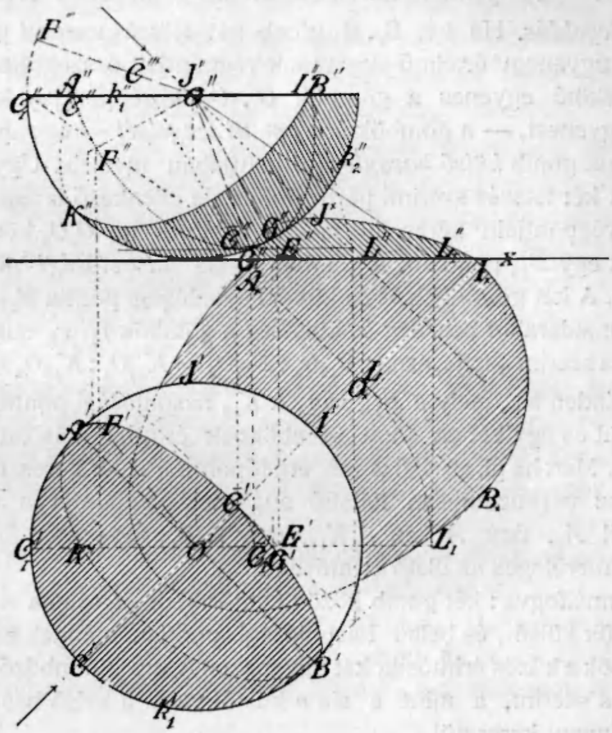
Ebből következik: *párhuzamos világításnál egy gömbön fekvő körnek vagy körívnek a gömb belső felületére vetett árnyéka ismét kör, vagy körív lesz.*

144. feladat. Adva van egy az 1-ső képsíkon nyugvó üres félgömb, melynek határló főköre az 1-ső képsíkkal párhuzamos; határoztassék meg a félgömbnek belső felületére vetett árnyéka, valamint a gömb külső felületének saját- és vetett árnyéka.

Megoldás. (176. ábra). Az 1-ső képsíkkal párhuzamos k_1 főkör fele, ACB, a gömb belső felületére veti árnyékát, mely egy a k_1 körrel az OL fénysugárra merőleges átmérősíkra vonatkozólag symmetrikus félkör lesz. Hogy ez utóbbi félkört megkapjuk, forgassuk az

OL fénysugarat, a gömbnek az 1-ső képsíkra merőleges átmérője, mint tengely körül mindaddig, mig OL a 2-dik képsíkkal nem párhuzamos, azaz az OL_1 helyzetbe. Az OL_1-re merőleges átmérősík ekkor a 2-dik képsíkra projiciáló; az OC_1 félkörrel arra vonatkozólag symmetrikus félkör síkja szintén projiciáló és 2-dik képe $O''C''_1$, ha $C''_1\overline{C}''_1 \parallel O''L''_1$. Az OC_1 félkört visszaforgatván, annak 1-ső képe az $A'\overline{C}'B'$ félellipsis, 2-dik képe az $A''\overline{C}''B''$ félellipsis.

Az $A'\overline{C}'B'$ félellipsis főtengelye $A'B' \perp O'L'$, melléktengelyé-



176. ábra.

nek fele $O'C'$; $A''B''$, $O''C''$ pedig a 2-dik képnek átmérője és az ehhez kapcsolt átmérő fele. Hogy ez utóbbinak féltengelyeit $O''G''$, $O''F''$-et megkapjuk, meghatározzuk az $A\overline{C}B$ sík 2-dik fővonalát OE-t ($O'E' \parallel x$, $\overline{C}'E' \parallel A'B'$, $C''E'' \parallel A''B''$), melynek $O''E''$ 2-dik képe k''_2-t az $O''G''$ főtengely G'' végpontjában metszi.

A melléktengely $O''F'' \perp O''G''$-re. Ha a félgömböt az OF 3-dik projiciáló síkjával metszük és a kimetszett főkört az OF-fel együtt a 2-dik képsíkkal párhuzamos síkra borítjuk, akkor a főkör

k''_2-be az OF pedig $O''C'''F'''$-be jut, ha C''' távolsága $O''F''$-től egyenlő C' távolságával az $O'C'_1$-től. — $O''C'''F'''$ metszi a k''_2-ot F'''-ban, $F'''F'' \perp O''F''$ meghatározza az F'' pontot, és $\overline{F'''F''}$ vonaldarab az F' pont távolsága $O'C'_1$-től, mely F', az $A'C'B'$ ellipsis legmagasabb pontja.

A félgömb külső felületének saját árnyékhatára, az AKB félkör a 139. feladat szerint határozandó meg; az árnyékvető vonal a képsikokra: az AKB és az AIB félkör.

151. — *145 feladat. Szerkesztendő két gömb közös érintősíkja.*

Megoldás. Ha két $\mathbf{G}_1$, $\mathbf{G}_2$ gömb két tetszés szerinti párhuzamos és ugyanegy értelmű sugarának végpontjait összekötjük, akkor az összekötő egyenes a gömbök O_1, O_2 középpontjain keresztül menő egyenest, — a gömbök *középponti tengelyét* — egy K_{12} pontban, a két gömb *külső hasonlósági* pontjában metszik. Ugyanígy a gömbök két tetszés szerinti párhuzamos, de ellenkező értelmű sugarának végpontjain keresztül húzott egyenes az O_1O_2 középponti tengelyt egy B_{12} pontban, a gömbök *belső hasonlósági* pontjában metszik. A két gömb belső- és külső hasonlósági pontja B_{12}, K_{12} az O_1O_2 vonaldarabot belsőleg és külsőleg a gömbök r_1, r_2 sugarainak viszonya szerint osztja, azaz: $B_{12}O_1 : B_{12}O_2 = K_{12}O_1 : K_{12}O_2 = r_1 : r_2$.

Minden sík, mely a B_{12}, vagy a K_{12} hasonlósági ponton megy keresztül és egyikét az adott gömböknek érinti, a másikat is fogja érinteni. Mert ha pl. az első gömb érintőpontján A_1-n keresztül menő sugárhoz párhuzamosan haladó sugárnak végpontja a második gömbnél A_2, úgy A_2 az A_1K_{12}, vagy A_1B_{12} egyenesen fekszik és szintén merőleges az illető érintősíkra.

Ennélfogva: két gömb közös érintősíkjainak száma ∞^1; ezek a gömbök külső-, és belső hasonlósági pontján mennek keresztül. A gömbök a közös érintősíkokat ugyanazon, vagy különböző oldalon érintik, a szerint, a mint a sík a külső- vagy a belső hasonlósági ponton megy keresztül.

Ha két gömb egyik hasonlósági pontján keresztül síkot fektetünk, akkor a gömbök középpontjainak e síktól mért távolsági viszonya egyenlő a gömbök sugarának viszonyával. Ugyanis, ha az O_1, O_2 pontból a K_{12}-n keresztül menő síkra bocsátott merőlegesek talppontja A_1, A_2, akkor az $O_1A_1 : O_2A_2 = O_1K_{12} : O_2K_{12} = r_1 : r_2$.

146. feladat. Szerkesztendő három gömb közös érintősíkja.

Megoldás. A három gömbnek $\mathbf{G}_1$, $\mathbf{G}_2$, $\mathbf{G}_3$-nak középpontja O_1, O_2, O_3, sugara r_1, r_2, r_3; a $\mathbf{G}_1\mathbf{G}_2$, $\mathbf{G}_1\mathbf{G}_3$, $\mathbf{G}_2\mathbf{G}_3$ gömböknek külső- és belső hasonlósági pontjai $K_{12}B_{12}$, $K_{13}B_{13}$, $K_{23}B_{23}$.

A $K_{12}K_{13}$ egyenesen keresztül a G_1 gömbhöz érintőleg két sík fektethető, mely a G_2 és G_3 gömböket is érinti; az érintés a síkok ugyanazon oldalán történik, tehát az érintősíkok a K_{23} ponton is keresztül mennek.

Minthogy a két érintő sík egymást egy egyenesben metszi: a $K_{12}K_{13}$ K_{23} pontok ugyanegy egyenesben feküsznek.

Ugyanezen uton következtethető, hogy a $B_{12}B_{13}K_{23}$, $B_{12}B_{23}K_{13}$ és $B_{13}B_{12}K_{12}$ hasonlósági pontok is egyenesen feküsznek.

A négy egyenest, mely három gömb hat hasonlósági pontját hármával tartja, a három gömb *hasonlósági tengelyeinek* nevezik. A három gömb nyolcz közös érintősíkja tehát párjával a három gömb négy hasonlósági tengelyén megy keresztül.

Minden sík, mely a három gömb egyik hasonlósági tengelyén megy keresztül, a gömbök középpontjától oly távolságra van, melyeknek viszonya megegyező a gömbök sugarainak viszonyaival. Ugyanis, ha a $K_{12}K_{13}K_{23}$ hasonlósági tengelyen keresztül menő síkra az O_1, O_2, O_3 pontból bocsátott merőlegesek talppontjai A_1, A_2, A_3, akkor $O_1A_1 : O_2A_2 = r_1 : r_2$, és $O_2A_2 : O_3A_3 = r_2 : r_3$, tehát $O_1A_1 : O_2A_2 : O_3A_3 = r_1 : r_2 : r_3$.

Négy gömbnek általában nincs közös érintősíkja. De ha e gömböknek középpontjai $O_1O_2O_3O_4$, sugarai $r_1r_2r_3r_4$, páronként hasonlósági pontjai $B_{12}K_{12}$, $B_{13}K_{13}$, ... $B_{34}K_{34}$, akkor kimutatható, hogy a külső hasonlósági pontok $K_{12}K_{13}K_{14}K_{23}K_{24}K_{34}$ egy síkban feküsznek.

Ugyanis, ha a gömbök középpontjaiból a $K_{12}K_{13}K_{23}K_{14}$ síkra bocsátott merőlegesek talppontjai $A_1A_2A_3A_4$, akkor

$$O_1A_1 : O_2A_2 : O_3A_3 = r_1 : r_2 : r_3, \text{ és } O_1A_1 : O_4A_4 = r_1 : r_4,$$

tehát $$O_1A_1 : O_2A_2 : O_3A_3 : O_4A_4 = r_1 : r_2 : r_3 : r_4.$$

Ebből következik, hogy ama sík a $K_{24}K_{34}$ pontokon is keresztül megy.

Nyolcz síkot lehet találni, mely a gömbök 12 hasonlósági pontjait hatával magán tartja; ezek: $K_{12}K_{13}K_{14}K_{23}K_{24}K_{34}$; $K_{12}K_{13}K_{23}B_{23}B_{24}B_{34}$, és még ily kettő; $K_{12}K_{34}B_{13}B_{23}B_{14}B_{24}$ és még ily három, melyek a gömbök *hasonlósági síkjainak* neveztetnek.

Ha tehát négy pont $O_1O_2O_3O_4$ és négy vonaldarab $r_1r_2r_3r_4$ van adva, akkor nyolcz síkot találhatunk, melyeknek a pontoktól mért távolsági viszonya a négy adott vonaldarab viszonyával ($r_1 : r_2 : r_3 : r_4$) egyenlő; e síkok a négy pontból a négy vonaldarabbal, mint sugárral, leírható gömböknek hasonlósági síkjai.

Ha $r_1 = r_2 = r_3 = r$, akkor e gömbök belső hasonlósági pontjai az O_1O_3, $O_1O_3 \ldots O_3O_4$ vonaldarabok felező pontjai; a külső hasonlósági pontok pedig ezen $O_1O_2, \ldots$ egyenesek végtelen távol fekvő pontjai. E szerint négy ponttól egyenlő távolságra hét sík van végesben és egy végtelen távol. Ama hét sík a négy pont hat összekötő egyenesének felező pontjain megy keresztül, és pedig: négy sík három felező ponton és három sík négy felező ponton megy keresztül.

Gömbök szerkesztése különböző feltételekből.

152. Négy ponton keresztül menő, azaz egy tetraeder körülirható gömb szerkesztését a 67. feladatban tárgyaltuk. A következőkben oly gömbök szerkesztésével (tehát középpontjuk helyzetének és sugarak nagyságának meghatározásával) akarunk foglalkozni, melyeknél a gömbnek 1, 2, 3, vagy 4 érintősíkja és megfelelőleg 3, 2, 1, vagy 0 számú pontja van adva.

E feladatoknál fölhasználjuk a gömbnek következő tulajdonságait:

1. Ha egy P pontból egy gömbhöz két szelőt, PQ_1Q_2, PR_1R_2-et huzunk melyek a gömböt a Q_1, Q_2; R_1, R_2 pontokban metszik, akkor a szelőkről lemetszett vonaldarabok szorzatai egyenlők, azaz:

$$PQ_1 . PQ_2 = PR_1 . PR_2.$$

E tétel ugyanis érvényes a két szelőn keresztül fektetett síknak és a gömbnek metszésére, a $Q_1Q_2R_1R_2$ körre nézve, és így gömbre is.

Ennek különös esete: Ha egy P pontból a gömbhez egy PQ_1Q_2 szelőt és egy PT érintőt húzunk, mely a gömböt a T pontban érinti, akkor a szelőről lemetszett részek szorzata egyenlő az érintő négyzetével, azaz:

$$PQ_1 . PQ_2 = PT^2.$$

2. Ha a gömb két érintősíkja közül az egyiket a metszővonal körül forgatva, a másikra borítjuk, akkor a forgó sík érintőpontja, a szilárd sík érintőpontjába kerül.

Ugyanis, a két érintőpont egyenlő távolságra van a két érintősík metszővonalától, és az érintő pontokon keresztül menő egyenes merőleges az érintősíkok metszővonalára.

A tétel következménye: Ha egy gömb két érintősíkja metszővonalának egy pontját az érintőpontokkal összekötjük, akkor e két összekötő egyenes egyike a másikba forgatható az érintősíkok metszővonala körül.

153. — *147. feladat. Három ponton keresztül oly gömb fektetendő, mely egy adott síkot érint.*

Megoldás. A három adott ponton keresztül egy c kört fektetünk; a kivánt gömb középpontja a c kör középpontján keresztül menő és síkjára merőleges d egyenesen fekszik.

A c körnek síkja az adott érintősíkot egy e egyenesben metszi, mig a c körnek az e-re merőleges AB átmérője e-t a D pontban metszi. Ha ezen D ponton keresztül az érintősíkban az e egyenesre merőlegest húzunk és erre a D ponttól mérve a $\sqrt{DA.\,DB}$ vonaldarabot jobbra és balra reárakjuk, akkor a nyert F, G végpontok bármelyike az adott érintősík érintőpontja lehet. A keresett gömböknek középpontja tehát az a két pont, melyben az F és G pontban az adott érintősíkra emelt merőlegesek a d egyenest metszik.

A descriptiv megoldásnál (177. ábra) egyszerűsítés kedvéért a c kör síkját, $[s_1, s_2]$-et, a 2-dik képsíkra projiciálónak vettük, érintősík gyanánt pedig az 1-ső képsíkot. Az $[s_1, s_2]$ és az érintősík metszővonala tehát s_1. és a c kör C középpontjából az s_1-re bocsátott merőleges s_1-et a D pontban metszi.

Forgassuk a c kört a C ponton keresztül menő 2-dik fővonala CD körül a 2-dik képsíkkal párhuzamos síkba; a forgatott helyzete c'''. Húzunk D''-ből c'''-hoz érintőt, melynek érintő pontja E. $D''E$ lesz az a vonaldarab, melyet a D ponttól DC'-re kell reá raknunk O', $\overline{O}'$-ig, hogy az 1-ső képsík érintőpontját a keresett gömbökkel megkapjuk. O', $\overline{O}'$ lesz egyszersmind e gömbök középpontjának 1-ső képe, mig a 2-dik képek, O'', $\overline{O}''$ a C'' pontban az s_2-re emelt d'' merőlegesen feküsznek.

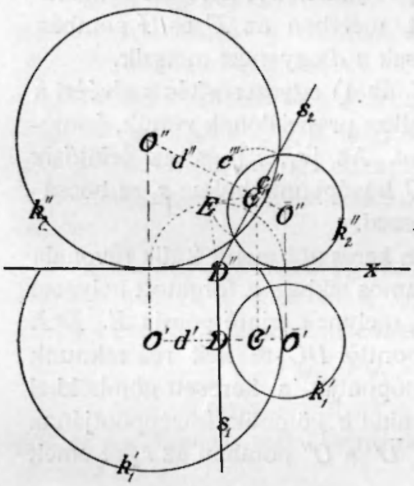
A keresett gömbök középpontjai tehát O, $\overline{O}$; szegélyvonalai k'_1, k'_2; $\overline{k}'_1$, $\overline{k}''_2$. — A feladatnak nincs megoldása, ha az adott érintősík a c kört metszi!

148. feladat. Fektessünk két ponton keresztül oly gömböt, mely két síkot érint.

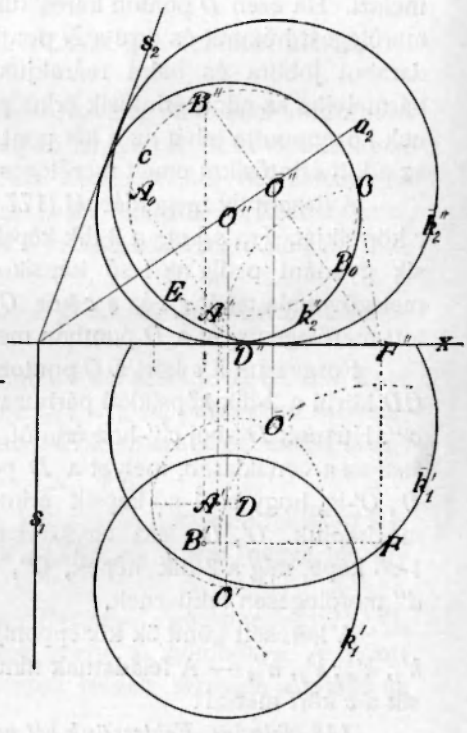
Megoldás. (178. ábra.) Legyen az egyik érintősík az 1-ső képsík $\mathbf{K}_1$, a másik pedig a 2-dik képsíkra projiciáló $\mathbf{S} = [s_1, s_2]$ sík; ezeknek metszővonala s_1, végre (A', A''), (B', B'') a két adott pont. Az $\mathbf{S}$, $\mathbf{K}_1$ síkok a tért általában négy részre osztják, s a feladatnak csak akkor van megoldása, ha az A és a B pont ugyanegy térrészben $\mathbf{T}$-ben fekszik.

A keresett gömbök középpontjai az $\mathbf{S}$, $\mathbf{K}_1$ síkok szögfelező síkjai közül egyiknek, $\mathbf{U}$-nak félsíkjában vannak, még pedig abban, mely az A és B ponttal együtt ugyanegy térrészben **T**-ben terjed el.

Az A, B pontoknak tükörképei A_o, B_o, az **U** szögfelező síkra vonatkozólag szintén rajta feküsznek a keresett gömbökön. Ha tehát az AA_o ($\perp$ **U**) egyenes az 1-ső képsíkot a D pontban, BB_o ($\perp$ **U**) egyenest az 1-ső képsíkon az F pontban metszi, és mi a $D''E = \sqrt{D''A''. D''A_o}$, vonaldarabbal a D pontból, az $F''G = \sqrt{F''B''. F''B_o}$ vonaldarabbal az F pontból az 1-ső képsíkban



177. ábra.



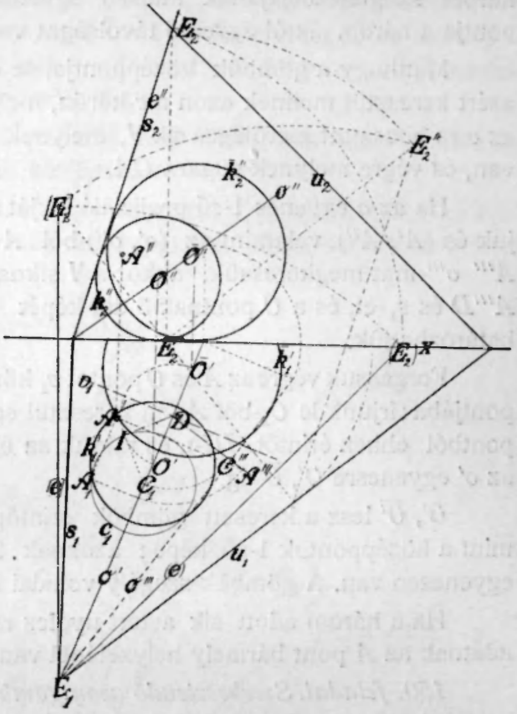
178. ábra.

köröket írunk le, akkor ezeknek O', O' metszőpontjai a keresett gömböknek érintőpontjai az 1-ső képsíkkal, és egyszersmind O, O középpontjuknak 1-ső képei. A gömbök középpontjainak 2-dik képei azon körülményből szerkeszthetők, hogy az **U** síkban feküsznek.

A keresett gömbök szegélyvonalai k'_1, k''_2; k'_1, k''_2.

149. feladat. Szerkesztendő egy A ponton keresztül menő és három síkot érintő gömb.

Megoldás. (179. ábra). A három sík egyike legyen az 1-ső képsík **K**$_1$, a másik a 2-dik képsíkra projiciáló **S**, végre a harmadik egy általános helyzetű **U**. E három sík a tért nyolcz octansra osztja, és a keresett gömbök az A ponttal együtt ugyanegy octansban feküsznek.



179. ábra.

A háromsík **K**$_1$, **S**, **U** egymást az $s_1 = [$**K**$_1$, **S**$]$, $e = [$**S**, **U**$]$, $u_1 = [$**U**, **K**$_1]$ egyenesekben és az E_1 pontban metszik, mely az e metszővonal 1-ső nyomában van.

Ha a keresett gömb érintőpontját a **K**$_1$, **S**, **U** érintősíkokkal, egy pillanatra K_1, S, U-nak nevezzük és azokat az E_1 ponttal összekötjük, akkor

az E_1K_1, E_1S egyenesek hajlásszöge s_1-hez egyenlő
„ E_1S, E_1U „ „ e-hez „
„ E_1U, E_1K_1 „ „ u_1-hez „

Ha tehát az E_1S és az e egyenest az s_1 körül, az E_1U és az e egyenest az u_1 körül az 1-ső képsíkra forgatjuk, és e-nek forgatott helyzete (e), illetve $[e]$, akkor 1-ször: a forgatott E_1S és a forgatott E_1U az E_1K_1 egyenesre jut; 2-szor a forgatott E_1S az (e)-hez és a forgatott E_1U az $[e]$-hez egyenlő szög alatt hajlik, mert $(e, E_1S) \sphericalangle = (e, E_1U) \sphericalangle$. Ebből következik, hogy E_1K_1 felezi az (e) és $[e]$ egyenesektől képezett hajlásszöget. A keresett gömb érintőpontja a **K**$_1$ síkkal tehát az $((e), [e]) \sphericalangle$ egyik felezőjében van, melyet az ábrában o'-sel jelöltünk. o'-ben fekszik ezért a gömb középpontjának 1-ső képe is; mig a 2-dik kép az **S** sík 1-ső képsíkszögét felező síknak 2-dik nyomában o''-ben van.

A keresett gömbök középpontjai az így szerkesztett $o = (o', o'')$

egyenesben feküsznek, mely nem egyéb, mint a $\mathbf{K}_1$, **S**, **U** síkok három szögfelezősíkjának metsző egyenese, s melynek minden pontja a három síktól egyenlő távolságra van.

Minthogy a gömbök középpontjai az o egyenesen feküsznek, azért keresztül mennek azon a c körön, melynek síkja az A pontból az o-ra bocsátott merőleges sík **V**, melynek középpontja C az o-ban van, és végre melynek sugara CA.

Ha az o egyenes 1-ső projiciáló síkját 3-dik képsíknak választjuk és (A', A''), valamint az (o', o'')-ból A és o-nak 3-dik képét A''' o'''-mat megkeressük, akkor a **V** síknak 3-dik és 1-ső nyomát $A'''D$ és v_1-et, és a C pontnak 3-dik képét C'''-mat könnyen meghatározhatjuk.

Forgassuk végre az A és C pontot v_1 körül az 1-ső képsík A_1 és C_1 pontjába; írjunk le C_1-ből A_1-en keresztül egy c_1 kört; húzzunk a D pontból ehhez érintőt DI-t, és rakjuk az érintő hosszát DI-t, D-től az o' egyenesre O', $\overline{O}'$-ig.

O', $\overline{O}'$ lesz a keresett gömbök érintőpontja a $\mathbf{K}_1$ síkkal, valamint a középpontok 1-ső képe; azoknak 2-dik képe O'', $\overline{O}''$ az o'' egyenesen van. A gömbök szegély vonalai k'_1, k''_2; $\overline{k}'_1$, $\overline{k}''_2$.

Ha a három adott sík a tért nyolcz részre osztja, akkor a feladatnak az A pont bármely helyzeténél van megoldása.

150. feladat. Szerkesztendő azon gömbök középpontjainak geometriai helye, mely gömbök három síkot érintenek.

Megoldás. (180. ábra.) Válaszszuk a három síkot akképen, mint az előbbi feladatban: az egyik sík az 1-ső képsík $\mathbf{K}_1$, a másik a 2-dik képsíkra projiciáló sík **S**, a harmadik egy általános helyzetű sík **U**. A síkok metszővonalai s_1, u_1, e; azoknak metszőpontja E_1.

A három felvett sík hajlásszögeinek hat felező síkja van, melyek egymást hármával négy egyenesben f, g, h, i-ben metszik. Ugyanis két hajlásszög felezősíkja egymást oly egyenesben metszi, melynek minden pontja a három síktól egyenlő távolságra van, tehát egy harmadik hajlásszög felezősíkjában is benne fekszik. — E négy egyenes ama négy csúcs-octansban vonul végig, melyekre a három sík $\mathbf{K}_1$**SU** a tért osztja.

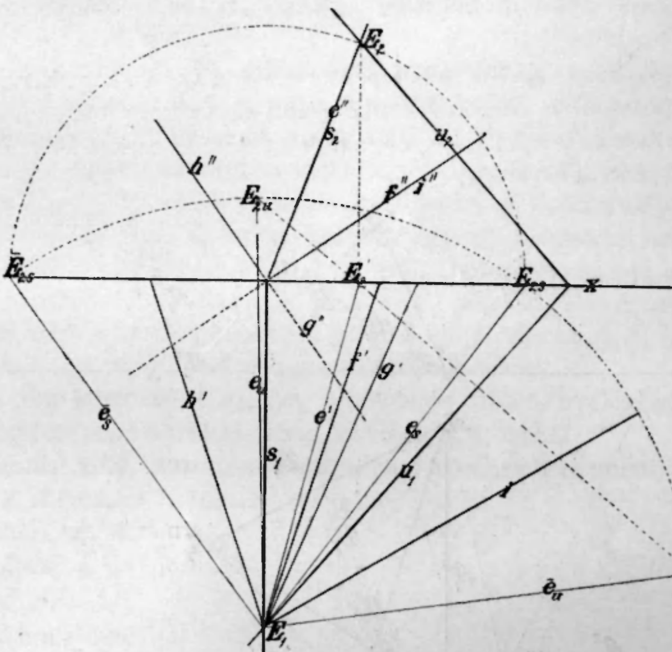
E négy egyenes 1-ső képeit f', g', h', i'-t akkép határozzuk meg, mint az előbbi feladatnál az o' egyenest. T. i. leforgatjuk az $e = (\mathbf{S}, \mathbf{U})$ metszőegyenest az s_1 körül és az u_1 körül az 1-ső képsíkba. e-nek leforgatott helyzetei lesznek e_s, $\overline{e}_s$, illetve e_u, $\overline{e}_u$

az $(e_s\, e_u)$, $(e_s\, e_u)$, $(e_s\, e_u)$, $(e_s\, e_u)$ szögek felezői f', g', h', i' az f, g, h, i egyenesek 1-ső képei.

Most meghatározzuk az **S** sík 1-ső képsíkszögeinek felezősíkjait; ezeknek 2-dik nyomában $f'' \equiv i''$ és $h'' \equiv g''$-ben vannak az f, g, h, i egyenesek 2-dik képei.

151. feladat. Szerkesztendők négy síkot érintő, azaz egy tetraederbe írható gömböknek középpontjai.

Megoldás. Ha azt a négy egyenest f, g, h, i-t, mely az első három síkot érintő gömbök középpontjait tartja, metszéshez hoz-



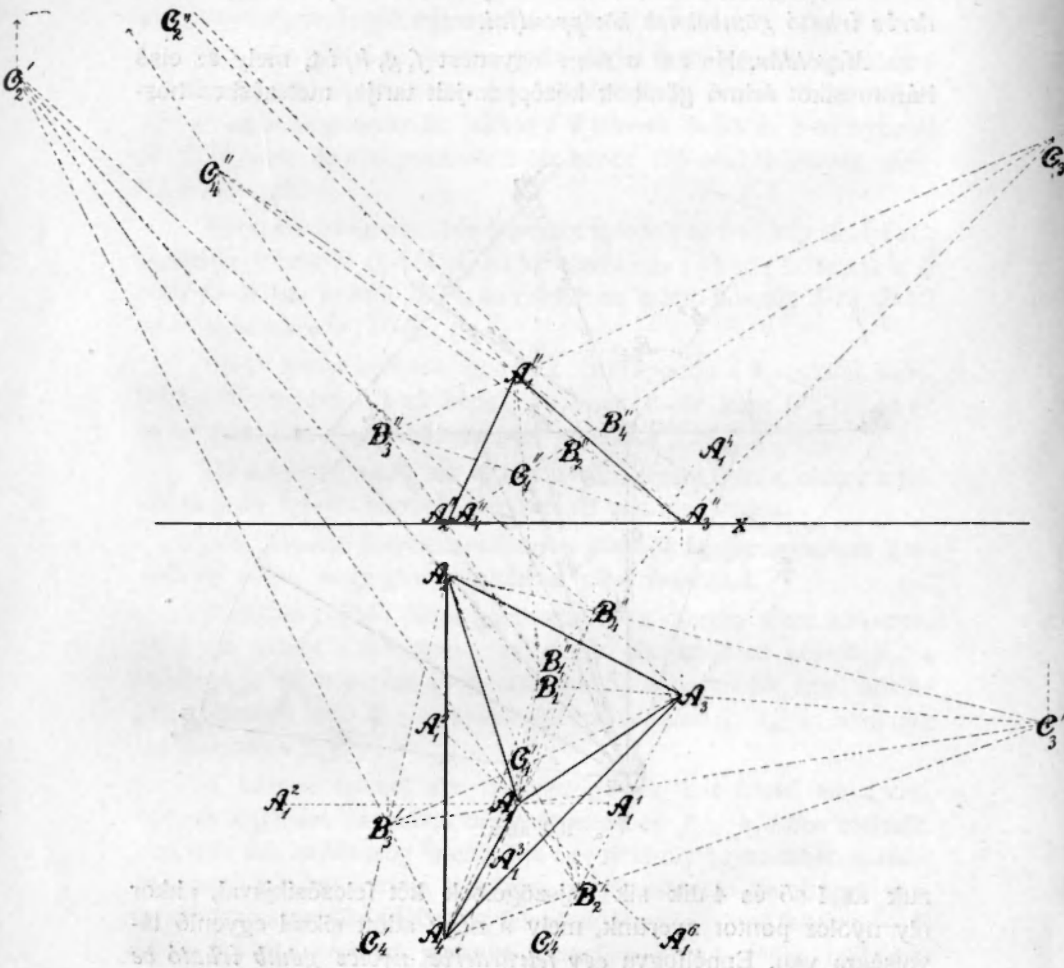
180. ábra.

zuk az 1-ső és 4-dik sík hajszögeinek két felezősíkjával, akkor oly nyolcz pontot nyerünk, mely a négy adott síktól egyenlő távolságra van. Ennélfogva *egy tetraederbe nyolcz gömb írható be lapjait érintőleg.*

A descriptiv megoldást végzendő, válaszszuk (181. ábra) az $A_1A_2A_3A_4$ tetraeder $A_2A_3A_4$ lapját 1-ső képsíknak, és a 2-dik képsíkot pedig az $A_1A_2A_4$ lapra merőlegesen.

Forgassuk le az 1-ső képsíkon kívül fekvő A_1 csúcsot az

$A_1A_2A_4$, $A_1A_2A_3$, $A_1A_3A_4$ lapoknak A_2A_4, A_2A_3, A_3A_4 1-ső nyoma körül kétféleképen az 1-ső képsíkba, és nevezzük e forgatásból származó pontokat $A_1^1\, A_1^2$; $A_1^3\, A_1^4$; $A_1^5A_1^6$-nak. Az $A_1^1\, A_1^3\, A_1^5$ pontok az A_1 csúcsnak abból a forgásából származnak, melyeknek forgásszögei az $A_1A_2A_3A_4$ tetraeder A_2A_4, A_2A_3, A_3A_4 éleinél



181. ábra.

levő belső lapszögei.

Az A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4 élek ez utóbbi forgatásnál az $A_2A_1^1$, $A_2A_1^3$; $A_3A_1^3$, $A_3A_1^5$; $A\,A_1^5$, $A_4A_1^1$ helyzetbe jutnak. Ezen egyenespárak szögfelezőin $A_2C'_1$, $A_3C'_1$, $A_4C'_1$-n, fogják a tetraeder

A_2, A_3, A_4 csúcsain átmenő három-három lapot érintő gömbök, az $A_2A_3A_4$ lapot érinteni. Ennélfogva a tetraeder mind a négy lapját érintő gömb az $A_2A_3A_4$ lapot a C'_1 pontban érinti. Az $A_2C'_1$, $A_3C'_1$, $A_4C'_1$ szögfelezők azonban az $A_2A_1^1A_1^5$, $A_3A_1^3A_1^5$, $A_4A_1^5A_1^1$ egyenszárú háromszögek következtében az $A_1^1A_1^3A_1^5$ háromszög oldalainak felező merőlegesei, s ezért a C'_1 pont az $A_1^1A_1^3A_1^5$ háromszög körülírható körének középpontja.

Hogy az $A_1A_2A_3A_4$ tetraederbe írható gömb az $A_2A_3A_4$ lapot az $A_1^1A_1^3A_1^5$ háromszög körül írható körnek középpontjában érinti, azt még következőképen is beláthatjuk. Nevezzük a beírható gömb érintőpontjait az A_1, A_2, A_3, A_4, csúcscsal szemben fekvő lappal P_1, P_2, P_3, P_4-nek.

Ha a P_2, P_3, P_4 érintőpontot megfelelőleg az A_3A_4, A_4A_2, A_2A_3 él körül az $A_2A_3A_4$ lapba forgatjuk, akkor a forgatott pontok mindegyike a P_1-be kerül. Ámde a P_2, P_3, P_4 érintőpontok a forgatás előtt egyenlő távolságra valának az A_1 csúcstól, tehát e három pont P_2, P_3, P_4, az A_1 pontnak ama három él körül történő forgatása után az $A_2A_3A_4$ lapba, szintén egyenlő távolságra lesz a forgatott A_1 ponttól,azaz A_1^5, A_1^1, A_1^3-tól. Minthogy azonban a P_2, P_3, P_4 érintőpontok a forgatás után a P_1 pontba jutnak, azért a P_1 pont, mint a tetraederbe írható gömb érintőpontja az $A_2A_3A_4$ lappal az A_1^1, A_1^3, A_1^5 pontoktól egyenlő távolságra van.

Igy tehát az $A_1A_2A_3A_4$ tetraederbe írható nyolcz gömbnek érintőpontja az 1-ső képsíkban fekvő $A_2A_3A_4$ lappal

az $A_1^1A_1^3A_1^5$ háromszög körülírható körének középpontja C'_1
„ $A_1^2A_1^4A_1^5$ „ „ „ „ C'_2
„ $A_1^1A_1^4A_1^6$ „ „ „ „ C'_3
„ $A_1^2A_1^3A_1^6$ „ „ „ „ C'_4
„ $A_1^2A_1^4A_1^6$ „ „ „ „ B'_1
„ $A_1^1A_1^3A_1^6$ „ „ „ „ B'_2
„ $A_1^2A_1^3A_1^5$ „ „ „ „ B'_3
„ $A_1^1A_1^4A_1^5$ „ „ „ „ B'_4.

E pontok egyszersmind 1-ső képei a nyolcz gömb középpontjainak; azoknak 2-dik képe az $A_1A_2A_4$ lap 1-ső képsíkszögei felezősíkjainak 2-dik nyomain feküsznek, még pedig a $C''_1B''_2C''_3B''_4$ pontok az egyik és a $B''_1C''_2B''_3C''_4$ pontok a másik szögfelezősík 2-dik nyomán.

A nyolcz középpont két tetraedernek $B \equiv B_1B_2B_3B_4$, $C \equiv C_1C_2C_3C_4$-nek csúcsa, mely az $A \equiv A_1A_2A_3A_4$ tetraeder irányában akkép van elhelyezve, hogy az A tetraeder bármely csúcsát a B tetraeder bármely csúcsával összekötő egyenes a C tetraeder egy csúcsán megy keresztül. Ennek oka a megoldást bevezető első mondatban rejlik.

A tetraeder lapjai a tért 15 részre osztják. A csúcsok fölött levő négy térben nem fekhetnek a gömbök középpontjai, mert különben a gömbök a csúcscsal szemben fekvő lapot nem érintenék. Két szemben fekvő él fölött levő ékalakú tereknek csak egyikében van ily középpont, s ilyen térpár van három; azonkivül van egy véges tér; e négy térben feküsznek a $C_2 C_3 C_4 C_1$ középpontok. Végre a lapok fölött levő négy térben (három oldalú csonka gúla alakú, melynek nagyobb alaplapja végtelen távol van) feküsznek a $B_1 B_2$ $B_3 B_4$ középpontok.

A tetraeder hat belső- és hat külső lapszögét felező tizenkét sík hármával 16 egyenesben és hatával a 8 középpontban $B_1 B_2 \ldots$ C_4-ben metszi egymást; a 16 egyenes négyével a tetraeder egyes csúcsain megy keresztül, s minden ily egyenesen fekszik a 8 középpont közül kettő.

A feladat itt tárgyalt megoldásának alapeszméje HERMARY francziától származik. (Közölve lett 1879-ben).

XII. FEJEZET.

A kúp és a henger.

154. A kúp és a henger származtatása. Képzeljünk egy görbevonalat c-t és annak síkján kivül egy pontot, M-t. Húzzunk az M ponton keresztűl c-nek összes pontjaihoz egyeneseket. Ezek az egyenesek egy görbe felületet képeznek, melyet *kúpfelületnek*, vagy röviden *kúpnak* nevezünk.

Ha tehát egy egyenes, melynek egy M pontja változatlan marad, akkép mozog, hogy mozgása közben egy c görbe vonal pontjain megy keresztűl és c-nek pontjai nem feküsznek az M-el ugyanegy síkban, akkor a mozgó egyenes egy kúpot ír le.

Az M pontot a kúp *csúcsának*, a c görbét, mely az egyenesek mozgását vezérli, a kúp *vezérlő vonalának* (directrix), végre a mozgó egyenest minden helyzetében a kúp *alkotójának* nevezzük. A kúp csúcsa egy *különös* pontja a kúpnak, ellenben a vezérlő vonalnak pontjai nem különösek, mert minden más vonal a kúpon, mely annak valamennyi alkotóját metszi, a kúp vezérlő vonalának tekinthető. Ugyanis az új vezérlő vonal és a kúp csúcsa akkép szabályozza a a kúpot leiró egyenes mozgását, hogy ugyanazt a kúpot nyerjük, mint az eredeti vezérlő vonalnál.

A kúp vezérlő vonala lehet *síkgörbe*, azaz olyan, melynek minden pontja ugyanegy síkban van, de akkor a kúp csúcsának a görbe síkján kivül kell lennie; de lehet egy ugynevezett *térgörbe* is, melynek nincsen minden pontja ugyanegy síkban és ekkor a kúp csúcsa bárhol vehető fel a térben.

A kúp alakja a vezérlő vonal alakjától és a csúcs helyzetétől e vonal irányában függ. Ha a kúp vezérlő vonala II. rendű görbe, tehát kör, ellipsis, hyperbola vagy parabola, vagy egy néven *kúpszelet*, akkor a kúpot *II. rendű kúpnak nevezzük.* A II. rendű kúpok egymástól lényegileg nem különböznek, mert minden II. r. kúpot lehet síkkal bármely II. r. görbe szerint metszeni.

De egy *különös* II. r. kúp az olyan, melynek vezérlő vonala kör és a kúp csúcsa e kör középpontján keresztűl menő és annak síkjára merőlegesen álló egyenesen van. E II. r. kúpot *forgáskúpnak* nevezzük, mert egy tengely körül forgó egyenes, mely a tengelyt metszi, leír egy ily kúpot.

Ha a kúp csúcsát végtelen távol, tehát egy egyenes végtelen távol fekvő pontjában vesszük fel, akkor a kúpot *hengernek* nevezzük. *Egy hengert képeznek tehát az oly egyenesek (alkotók), melyek egy görbe (vezérlő) vonal pontjain keresztűl mennek és egymással párhuzamosak,* ha nem feküsznek ugyanegy síkban.

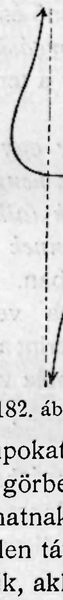
A hengert is II. rendűnek nevezzük, ha vezérlő vonala II. r. görbe. De a II. r. hengerek különbözők, a szerint a mint vezérlő vonaluk ellipsis (ide értve a kört is), vagy hyperbola vagy parabola, s ezért a II. r. hengereket ezen esetekben elliptikus-, hyperbolikus vagy parabolikus hengernek nevezzük.

A II. r. hengerek legegyszerűbbike a *forgáshenger*; ennek vezérlő vonala kör és alkotói a kör síkjára merőlegesek. Oly egyenes, mely egy vele párhuzamos forgástengely körül egy teljes körülforgást végez, leír egy forgáshengert.

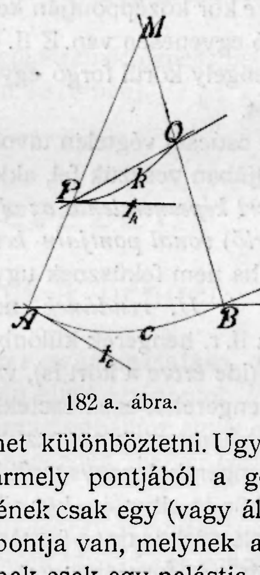
155. A kúp palástja. A kúp minden alkotóját annak csúcsa félsugárra osztja. II. r. kúpoknál e ∞^1 számú félsugár ketté választható. Feltételezvén ugyanis, hogy a vezérlő vonal kör, ellipsis, vagy parabola: a kúp csúcsain keresztül menő és e vezérlő vonalat metsző félsugarak képezik az egyik részt, azoknak kiegészítői egy teljes sugárrá a másikat. Ha ellenben a kúp vezérlő vonala hyperbola, akkor ennek egyik ágát metsző félsugarak, és a másik hyperbolaágat metsző félsugaraknak kiegészítői képezik az egyik részt, a kúpalkotóknak a hiányzó félsugarai pedig a másikat. Ugy az egyik mint a másik részhez tartozó félsugarak összesége a kúpnak egy-egy *palástját* alkotja. A II. r. kúpot tehát két palástból állónak tekintjük: az egyik paláston a fekvő félalkotók (félsugarak) a másiknak félalkotóit teljes alkotókká egészítik ki; de a két palástnak nincsen közös alkotója.

Jellemző, hogy ha egy paláston két pontot veszünk fel, akkor az egyik pontból a másikhoz juthatunk a kúpon fekvő vonalon haladva anélkül, hogy a kúp csúcsán keresztűl kellene mennünk. Ámde ha a két pont a kúpnak két különböző palástján van, akkor nem lehet az egyik pontból a másikhoz a kúpon fekvő vonalon haladva eljutni anélkül, hogy a csúcson keresztűl mennénk.

Ha a palástot nem értelmezzük a kúp vezérlő vonalával, mely mint említettük, nem különös vonala a kúpnak, hanem a palást jellemző tulajdonságát abban látjuk, hogy bármily két pontját a kúpon fekvő és a csúcson keresztűl nem menő vonallal összeköthetjük, akkor



182. ábra.



182 a. ábra.

egypalástú kúpokat is meg lehet különböztetni. Ugyanis ha a vezérlő vonal olyan görbe, hogy bármely pontjából a görbén haladva a másikhoz juthatnak és a görbének csak egy (vagy általában páratlan számú) végtelen távol fekvő pontja van, melynek azonban érintője végesbe nyúlik, akkor a kúpnak csak egy palástja lesz. Ilyen kúpnak tekinthető például a sík, melynél a vezérlő vonal egyenes, vagy pedig egy olyan (III. rendü) kúp, melynek vezérlő vonala a mellékelt (182. ábra) egyágú III. r. görbe.

A hengernek csak egy palástja van, mert végtelen távol fekvő csúcsa nem osztja az alkotókat ketté.

156. A kúp és a henger érintősíkja. Egy kúpon, melynek csúcsa M és vezérlő vonala c, egy MA alkotót és egy k görbét veszünk fel (182. ábra) az MA alkotó a k-t egy P pontban a c görbét egy A pontban metszi.

Az MA alkotón keresztűl egy síkot fektetünk, mely a k görbét a Q... pontokban, c görbét a B'... pontokban, a kúpot magát az MQB,... alkotókban metszi. Az $MAPQB$ síkot az MPA alkotó körül akkép forgatjuk, hogy a B metsző pont közeledjék az A-hoz a c görbén. E forgásnál az MQB alkotó közeledik elfoglalni az MPA alkotó helyzetét a kúpon, a Q pont pedig a P pont helyzetét a k görbén. Midőn az MA körülforgó sík B metszőpontja az A pontba jutott, tehát a c görbe AB szelője az A pont érintőjébe került, a forgó sík szintén egy oly határ helyzetet ért el, melynél az MB alkotó a kúpon az MA-val és a Q pont a k görbén a P-vel egyesült, tehát a k görbe PQ szelője átment a P pont érintőjébe.

Az MA alkotón keresztűl menő síknak ez a határhelyzete a kúp *érintősíkja* az MA alkotó szerint vagy alkotó mentén vagy az MA alkotóban; maga az MA alkotó pedig az érintősík *érintőalkotója.*

A kúp érintősíkját az MA alkotóban még az egyszerűbb szólásmód végett az *MA alkotó érintősíkjának* is nevezhetjük, mert a kúp minden alkotójához általában más és más érintősík tartozik.

Minthogy a k görbe, a kúp P pontján keresztűl menő tetszés szerinti görbe a kúpon és MPA alkotó érintősíkja a k görbe P pontjának érintőjét (mint a PQ szelőnek határhelyzetét) tartalmazza, mondhatjuk: *a kúp egy alkotójának érintősíkja tartalmazza mindazokat az érintőket, melyeket a kúpon fekvő görbékhez az alkotó és e görbék metszőpontjaiban húzhatunk.*

Minthogy általában oly sík, mely bármely görbe felület egy P pontján keresztűl menő és a felületen fekvő görbéknek érintőjét az illető P pontban tartalmazza, a felület P pontjának érintősíkja, azért a kúp egy alkotóján fekvő pontoknak érintősíkjai valamennyien az alkotó érintősíkjában egyesülnek, azaz: *a kúp érintősíkja egy alkotóban, az alkotó minden pontjának érintősíkja.* Ezt a jelenséget még ekkép is kifejezhetjük: a kúp érintősíkja a kúpot egy alkotó egész terjedelmében érinti.

Minden egyenest, mely a kúp egy érintősíkjában fekszik, a *kúp érintőjének* nevezzük. A kúp érintője érinti mindazon görbéket, melyek szerint az érintőn keresztűl fektethető síkok a kúpot metszik; az érintőpont az érintőn keresztűl menő érintősík érintőalkotóján fekszik.

A mit eddigelé a kúp érintősíkjáról mondottunk, az a henger érintősíkjára vonatkozólag is érvényes, mert a henger oly kúpnak tekintendő, melynek csúcsa végtelen távol van.

157. A forgáskúp és forgáshengernek főtulajdonságai. A forgáskúpnak és forgáshengernek nagy szerepe van az ábrázoló geometriában, mert tulajdonságainál fogva számos feladat megoldásánál közvetítőül szolgál.

Forgáskúpot, mint már említettük, egy oly egyenes ír le, mely egyik metszője mint tengely körül egy teljes körülforgást végez. Forgáshengert pedig egy egyenes, mely egy véle párhuzamos tengely körül végez egy teljes körülforgást.

E kúpnak és hengernek ezen származtatásából és az érintősík értelmezéséből következik:

1. a forgáskúp alkotói egy egyenessel — *a kúp forgástengelyével* — egyenlő szöget képeznek;
2. a forgáskúp alkotói a tengelyre merőleges síkokkal egyenlő szöget képeznek, mely az előbbi szögnek pótlószöge;
3. a forgáskúp metszővonala a tengelyére merőleges síkkal mindig kör;
4. a forgáskúp érintősíkjai annak tengelyével egyenlő és ugyanoly szöget képeznek, mint a kúp alkotói;
5. a forgáskúp érintősíkjai a tengelyére merőleges síkokkal egyenlő szöget képeznek, mely az előbbi szögnek pótlószöge;
6. egy pontból egy gömbhöz húzható érintők és érintősíkok oly forgáskúpnak alkotói és érintősíkjai, melynek tengelye a gömb középpontján megy keresztűl;
7. két a forgáskúp tengelyére merőleges sík annak alkotóiról egyenlő vonaldarabokat metsz le;
8. a forgáshenger minden pontja, minden érintősíkja és minden érintője (azaz minden egyenes, mely annak érintősíkjában fekszik, de nem párhuzamos a henger alkotóival), a henger tengelyétől egyenlő távolságra van.

Ha két felületnek azt a helyzeti viszonyát, hogy egy közös pontban közös érintősíkjuk van, akkép fejezzük ki, hogy *egymást a közös pontban érintik*, akkor mondhatjuk: egy forgáskúp és egy gömb egymást egy kör pontjaiban, vagy egy kör mentén érinthetik. És ha egy gömb egy forgáskúpot egy kör mentén érint, akkor ezekről azt mondjuk, hogy a gömb a kúpban „be van írva" és a kúp a gömb „körül van írva". Az a kör, melynek mentén a két felület egymást érinti, azoknak *érintő köre.*

A gömböt a főkörök mentén érintő forgáskúpok forgáshengerekké fajulnak el.

158. A kúppal kapcsolatos elemek sokaságáról. A kúp alkotóinak száma ∞^1, mert a kúp alkotói a kúp csúcsát a vezérlő vonal ∞^1 számú pontjaival kötik össze.

A kúp pontjainak száma ∞^2, mert minden alkotón van ∞^1 számú pont.

A kúp érintősíkjainak száma ∞^1, mert minden alkotóhoz általában egy érintősík tartozik.

A kúp minden pontjának, a csúcs kivételével, általában egy érintősíkja és ∞^1 érintője van, de minden érintősík a kúpot ∞^1 pontban érinti. A számító geometria a kúp csúcsán keresztűl menő minden síkot és egyenest (∞^2) a kúp érintősíkjának és érintőjének tekinti a csúcsban, mert a kúp csúcsa annak egy *singularis* pontja. A kúpnak ezen különös érintősíkjait és érintőit, a következőkben nem vesszük figyelembe.

A kúpnak ∞^3 számú érintője van; minden pontján ∞^1 megy keresztűl és minden érintősíkban van ∞^2.

A pontra nézve egy föltétel az, hogy egy kúpon (vagy általában egy felületen) feküdjék. — A síkra nézve két föltétel, hogy egy kúpnak érintősíkja legyen. Ugyanis a kúpnak minden érintősíkja annak csúcsán megy keresztűl, mely egy föltételnek felel meg, továbbá az érintősík még a felületnek egy más pontján is keresztűl megy, a mi a második föltétel. Ennélfogva lehet egy kúphoz érintősíkot szerkeszteni, mely egy ponton megy keresztűl, vagy egy egyenessel párhuzamos, vagy egy síkkal adott szöget képez, vagy egy gömböt érint, stb.

Az egyenesre nézve egy föltétel az, hogy egy kúpot érintsen. Ezért egy kúphoz oly érintőt, mely egy egyenest metsz, ∞^2 számút, mely két egyenest metsz, vagy egy ponton megy keresztűl, vagy egy egyenessel párhuzamos stb., ∞^1 számút; mely egy ponton megy keresztűl és egy egyenes metszője, vagy egy síkkal párhuzamos stb. — véges számút lehet szerkeszteni.

Minden forgáskúpba ∞^1 gömb irható be; az egyes gömbök érintőköreinek síkjai a kúp tengelyére merőlegesek.

Egy gömb körül ∞^3 forgáskúp és ∞^2 forgáshenger írható. A kúpok csúcsai az érintőkörök síkjára merőleges gömb-átmérőkön feküsznek; az érintőhengerek alkotói a főkörök síkjaira merőlegesek.

Egy egyenestől egyenlő *(r)* távolságra levő egyenesek, pontok és síkok száma megfelelőleg ∞^3, ∞^2, ∞^1; ezek egy forgáshengernek érintői, pontjai és érintősíkjai.

159. A kúp és a henger ábrázolása. A következőkben a II. r. kúpok és hengerek ábrázolásával és ezekre vonatkozó feladatok megoldásával fogunk foglalkozni. Föltételezzük tehát, hogy a kúp és henger meghatározására szolgáló *c* vezérlő vonal egy kúpszeletet (rendesen kör vagy ellipsis), és a kúpnak M csúcsa c-nek síkján kivül van. Ilyen kúpoknak két palástja van.

A kúpnak azon alkotói, melyeknek érintősíkjai az 1-ső (illetve a 2-dik) képsíkra merőlegesek, képezik a kúpnak 1-ső (és 2-dik) valódi szegélyalkotóit, azoknak 1-ső (és 2-dik) képei pedig a látszólagos szegélyalkotóit. Igy a 183. és 184. ábrában az MA, MB alkotók a kúp és a henger 1-ső szegélyalkotói; MC, MD pedig azoknak 2-ik szegélyalkotói.

Ugyanis, az MA és MB alkotók 1-ső projiciáló síkjai az MA és MB alkotón és a c vonal A és B pontjának érintőin, (mely $M'A$, $M'B$) mennek keresztűl. Hasonlókép az MC és MD alkotók érintősíkjai az MC, MD alkotókon és c vonal C, D pontjainak érintőin mennek keresztűl, melyek merőlegesek a 2-dik képsíkra.

Ha a kúpon nincsen olyan alkotó, melynek érintősíkja merőleges az egyik képsíkra, akkor e képsíkra vonatkozólag nincsen szegélyvonala a kúpnak és ekkor az ábrázolás a vezérlő vonal és a csúcsnak illető képével történik. Igy a 185. ábrában bemutatott kúpnak nincsen 1-ső szegélyvonala.

Hasonlókép, ha a henger minden alkotójának érintősíkja merőleges valamelyik képsíkra, akkor a henger szegélyvonalát az érintősíkoknak illető nyomaitól beburkolt görbe, azaz a vezérlő vonal képezi.

A 183. ábrában az MA, MB 1-ső szegélyalkotók a kúpot két részre osztják, melyeknek egyike az 1-ső képsíkra nézve látható az egyik paláston, de nem látható a másikon, a másik rész ez utóbbi paláston válik láthatóvá, az elsőn pedig el van födve.

Az ME, MF alkotóknak közös 1-ső képük van, tehát ME az MF-et, az M csúcstól a vezérlővonalig terjedő részben, mondjuk az alsó paláston, az 1-ső képsíkra nézve elfödi, míg MF az ME-t a fölső paláston födi el. Ezt mutatják az ME, MF alkotók 2-dik képei.

Ugyanígy a 2-dik képsíkra néző a kúp ME alkotóját láthatja az alsó paláston és nem láthatja a fölső paláston, az MF alkotót láthatja a fölső paláston, de nem láthatja az alsón.

Általában az 1-ső képsíkra nézve a c vezérlő vonal $ACEB$ ívének pontján keresztűl menő alkotók az alsó paláston láthatók, a felsőn nem láthatók, fordítva van a dolog az $AFDB$ ívnél. Míg a 2-ik képsíkra nézve a vezérlővonal $CEBD$ ívének pontjain keresztűl menő alkotók az alsó paláston láthatók, a felsőn nem láthatók, fordítva a $CAFD$ ívnél.

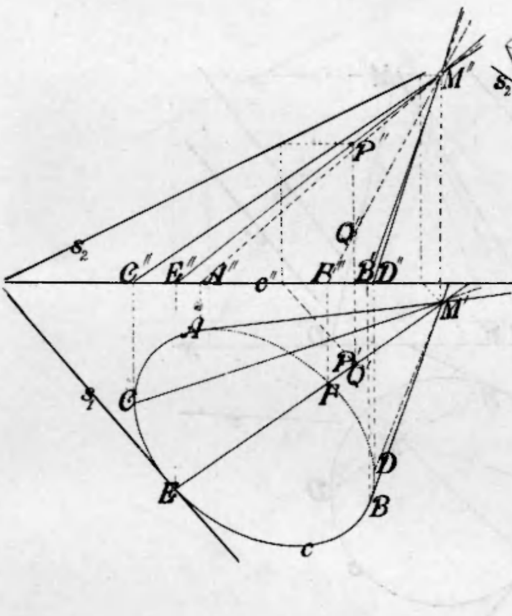
A henger $AFDB$ ívének pontjain keresztűl menő alkotók láthatók, a többiek nem láthatók az 1-ső képsíkra nézve, míg a $CAFD$

ív pontjain keresztűl menő alkotók láthatók, a többiek nem láthatók a 2-dik képsíkra nézve.

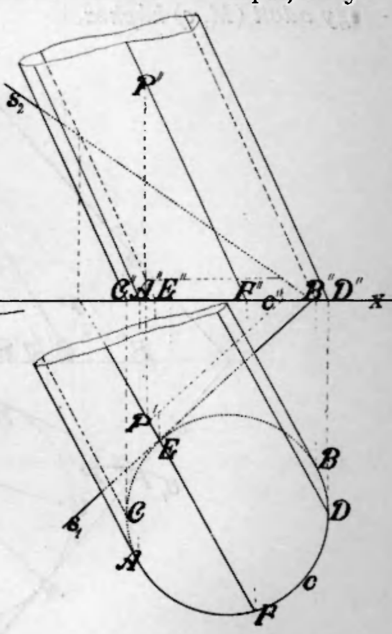
Érintési feladatok.

160. — *152. feladat. Vegyünk fel egy (M, c) kúpon, melynek M csúcsa c vezérlő vonala adva van, egy P pontot és fektessünk ezen keresztűl érintősíkot a kúphoz.*

Megoldás. (183. ábra). A P pontnak egyik képét, pl. P'-t tetszés szerint vehetjük fel. $M'P'$ képezi az MP alkotó 1-ső képét, mely



183. ábra.



184. ábra.

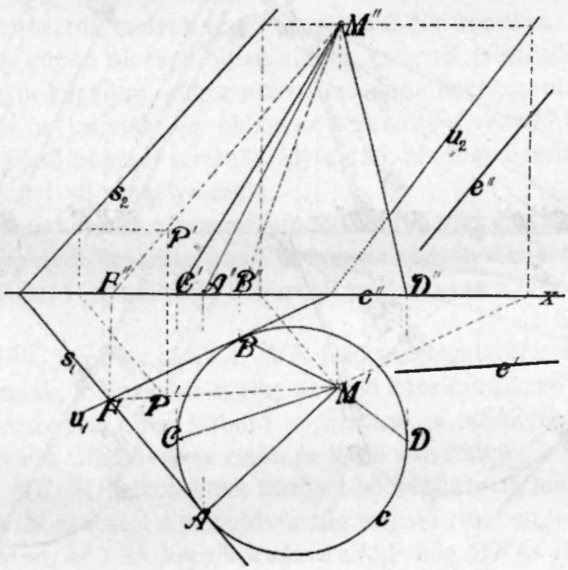
a c vezérlő vonalat az E, F pontokban metszi. Az E, F pontoknak 2-dik képe E'', F'' és az ME, MF alkotóknak 2-dik képe $M''E''$, $M''F''$. Ez utóbbi egyeneseken vannak a kúp azon pontjainak 2-dik képei, melynek 1-ső képe P'. E szerint II. r. kúpnál $P'{=}Q'$ pont a kúp két pontjának, P és Q-nek, 1-ső képe. De ha az $M'P'$ egyenes a vezérlő vonal 1-ső képét nem metszi (való pontban), akkor a kúpon nincsen oly (való) pont, melynek 1-ső képe P' volna.

A P pont érintősíkja a kúpot az MPE alkotó minden pontjában érinti. Meghatározásához a vezérlő vonal E pontjának érintője s_1 és az MPE alkotó szükséges és elégséges. Minthogy jelen esetben a c az 1-ső képsíkon fekszik, azért s_1 már 1-ső nyoma a kívánt érintősíknak. E síknak 2-dik nyoma keresztűl megy az MPE egyenes 2-dik nyomán, de ha ez távol van és így a szerkesztéshez nem alkalmas, akkor felhasználjuk a sík P vagy M pontján keresztűl menő és a meglevő adatokból egyszerűen meghatározható 1-ső vagy 2-dik fővonalát, illetve ezeknek 2-dik nyomát.

153. feladat. Fektessünk egy henger P pontján keresztűl érintősíkot a hengerhez.

A feladat megoldását a 184. ábra mutatja.

154. feladat. Egy P ponton keresztül vezessünk érintősíkokat egy adott (M, c) kúphoz.



185. ábra.

Megoldás (185. ábra). A kivánt érintősíkok az MP egyenesen mennek keresztűl, mely az 1-ső képsíkon fekvő c vezérlő vonal sikját az F pontban metszi. Az F pontból a c-hez húzott FA, FB érintők c-t az A, B pontokban érintik, mely pontokon keresztűl menő MA, MB alkotók a kivánt $[s_1, s_2]$, $[u_1, u_2]$ érintősíkok érintőalkotói.

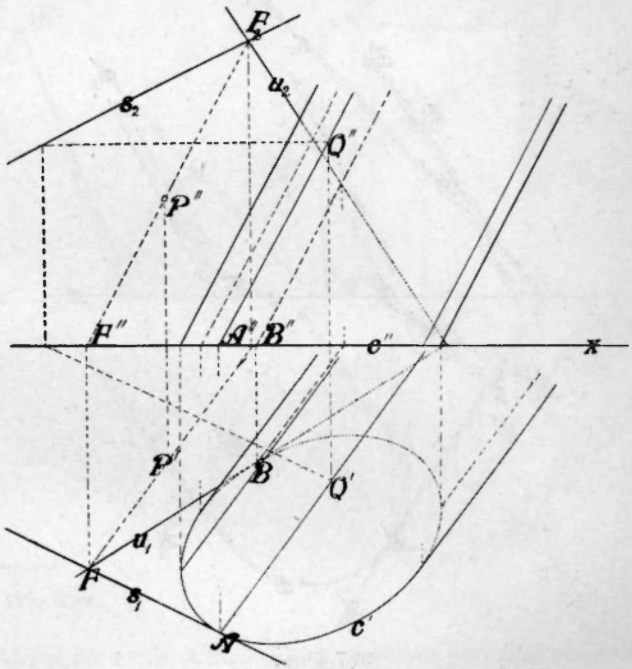
Ezek, valamint a P pont, vagy a PM egyenes meghatározzák az érintősíkokat.

155. feladat. Egy P ponton keresztül vezessünk érintősíkokat egy adott hengerhez.

Megoldás (186. ábra). A P ponton keresztűl PF párhuzamos egyenest húzunk a henger alkotóihoz, mely a henger vezérlő vonalának, c-nek síkját — jelenleg az 1-ső képsík — az F pontban metszi. Az F pontból a c-hez húzható érintők érintőpontjai A, B, a kívánt $[s_1, s_2]$, $[u_1, u_2]$ érintősíkoknak érintőalkotóin feküsznek. Az egyes érintőalkotók és a P pont meghatározzák az érintősíkokat.

156. feladat. Vezessünk egy e egyenessel párhuzamos érintősíkot egy (M, c) *kúphoz.*

Megoldás (185. ábra.) A kúp csúcsán keresztűl menő és az e egyenessel párhuzamos MF egyenes a keresett érintősíkokban fekszik. Ennélfogva az MF egyenesnek és a c vezérvonal síkjának



186. ábra.

F közös pontjából c-hez érintőket húzunk, melyek c-t a keresett $[s_1, s_2]$, $[u_1, u_2]$ érintősikok MA, MB érintőalkotóinak A, B pontjában érintik.

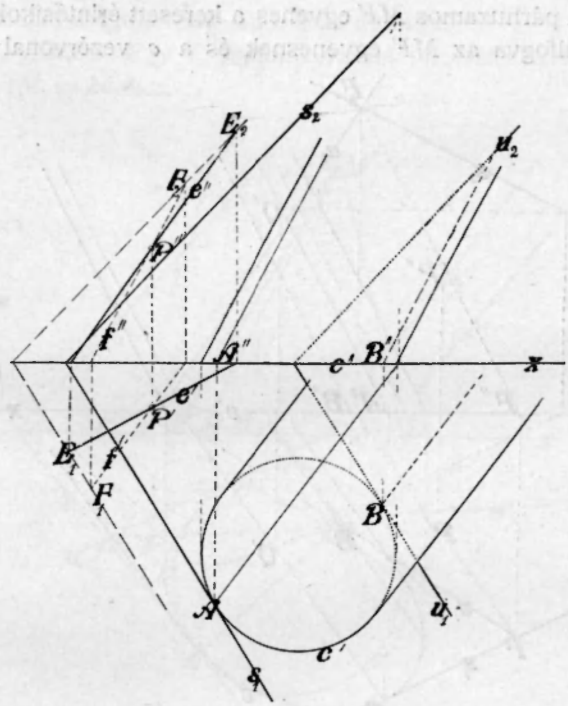
157. feladat. Vezessünk az e egyenessel párhuzamos érintősíkokat egy adott hengerhez.

Megoldás. (187. ábra.) Egy síkot szerkesztünk az e egyenessel és a henger alkotóival párhuzamosan ; a kívánt érintősíkok e síkkal párhuzamosak lesznek.

Ha tehát a szerkesztett síknak és a vezérlő vonal síkjának metszővonalával párhuzamos érintőket húzunk a vezérlő vonal-hoz, akkor az érintőpontok a kivánt érintősíkok érintőalkotóin lesznek.

A kivitelnél az e egyenes egy P pontján keresztűl a henger alkotóival párhuzamos f egyenest fektetünk, az $[e, f]$ sík nyomai E_1F_1, E_2F_2.

Minthogy jelenleg a henger c vezérlő vonala az 1-ső képsík, azért az $[e, f]$ sík E_1F_1 1-ső nyomával párhuzamos érintőket húzunk



187. ábra.

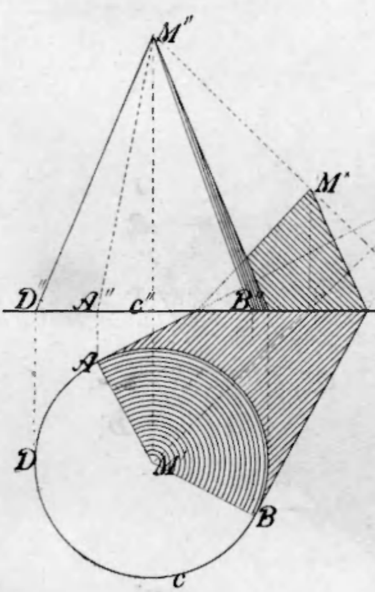
c-hez, melyek c-t az A, B pontban érintik. E pontokon keresztűl menő alkotók a kivánt $[s_1, s_2]$, $[u_1, u_2]$ érintősíkok érintőalkotói.

E két feladat alapján a kúp és henger saját és vetett árnyékát meghatározhatjuk.

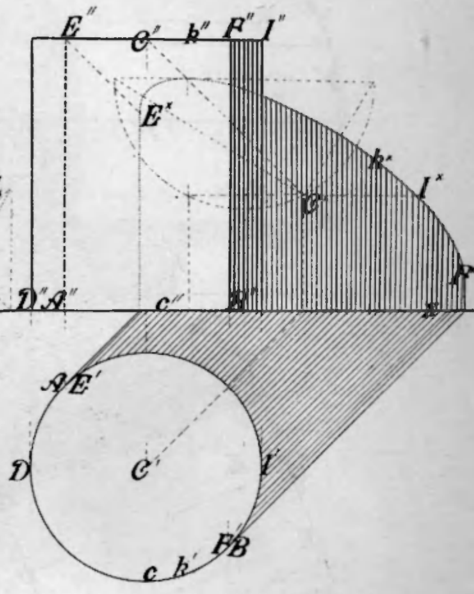
161. — *158. feladat. Szerkesztendő egy kúp saját és vetett árnyéka, ha vezérlő vonala c az 1-ső képsíkon fekszik.*

Megoldás (188. ábra). A fénysugarakkal párhuzamos érintősíkok a kúpot oly alkotók szerint érintik, melyek a kúp saját árnyékának határvonalai. Ha tehát a kúp palástjától és c vezérlővonalának síkjától bezárt tért (testet) veszszük tekintetbe, és c az 1-ső képsíkon van, akkor felkeressük a kúp M csúcsának M_* vetett árnyékát az 1-ső képsíkra. Az M_* pontból a c-hez húzott érintők c-t az A, B pontokban érintik; MA, MB alkotók képezik a saját árnyékhatárt, ezeknek vetett árnyékai, a kiszögelő M^*A, M^*B vonalak pedig a vetett árnyék-határt. Az árnyékvető idom tehát MA, ADB ív BM vonalaktól határoltatik.

159. feladat. Szerkesztendő egy forgáshengernek saját- és vetett árnyéka, ha vezérlővonala, a c kör, az 1-ső képsíkon fekszik.



188. ábra.



189. ábra.

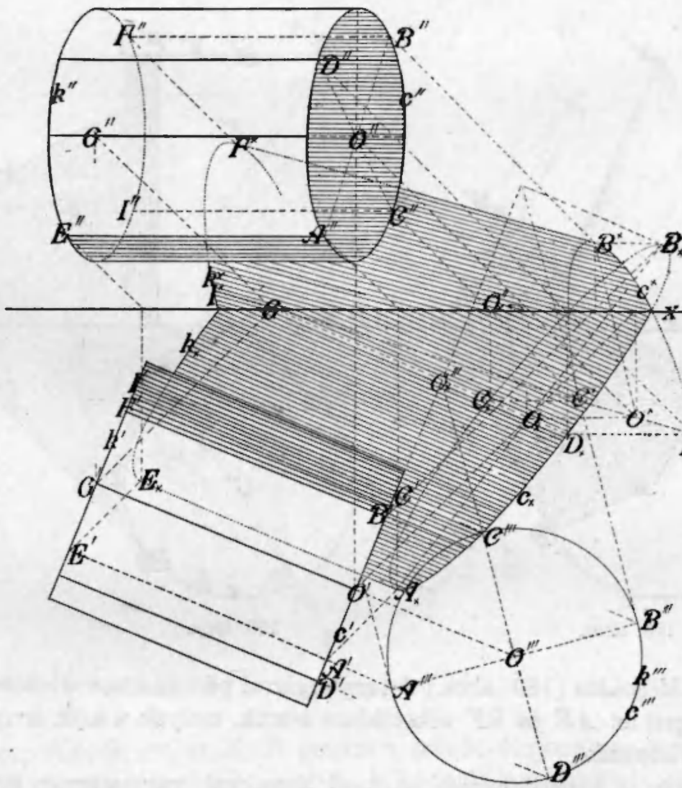
Megoldás (189. ábra.) A fénysugárral párhuzamos érintősíkok a hengert az AE és BF alkotókban érintik, melyek a saját árnyékhatárt képezik.

Ha a forgáshengert az 1-ső képsíkkal párhuzamos síkkal a k kör szerint metszszük, akkor továbbá a c és a k síkjától határolt testnek, melyet szűkebb értelemben szintén hengernek nevezünk, árnyékvető idoma: AE, BF henger-alkotók, a c körnek ADB íve és a k-nak FIE íve, tehát az $ADBFIE$ vonalrendszer. Ennek vetett árnyékát az $ADBF^*I^*E^*$ vonalrendszer képezi, hol az $F^*I^*E^*$ félellipsisnek meghatározására a 149. pont alatti feladat alapján történik.

160. feladat. Határozzuk meg egy forgáshengernek árnyékát, ha tengelye párhuzamos az 1-ső képsíkkal.

Megoldás. (190. ábra). A henger OG tengelyének képei az $O'G'$, $O''G''$ egyenesek. Az O és a G ponton keresztűl menő és az OG-re merőleges síkok a henger a c és k körökben metszik, ezeknek síkjaitól és a henger felületétől határolt tér az, melynek árnyékát akarjuk szerkeszteni.

Válaszszuk a c kör síkját 3-dik képsíknak, határozzuk meg az O pontnak és a c körnek (az adott r sugárból) 3-dik képét O''',

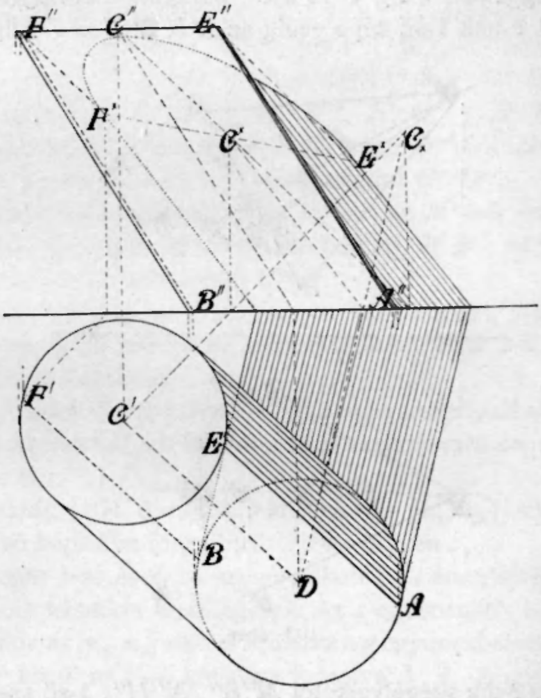


190. ábra.

c'''-mat; c''' egyszersmind a k körnek 3-dik képe k'''. c''' és k'''-ból megszerkeszthetők c és k-nak 2-dik képei, a c'' és k'' ellipsisek, valamint a henger 1-ső és 2-dik szegélyalkotói, melyek külön megjelölve nincsenek. Az O ponton keresztűl menő fénysugarak OO_*-nak 1-ső és 2-dik képéből meghatározható a 3-dik kép $O'''O_*'''$. c'''-nak az $O'''O_*'''$-gal párhuzamos érintői az A''', B''' pontokban érintik c'''-at; a c kör A és B pontjain keresztűl menő AE, BF hengeralkotók a henger sajátárnyékát képezik. Ezen két alkotónak valamint a c és a k körnek vetett árnyékai adják a vetett árnyék-határt.

A c körnek az AB-re merőleges átmérője a CD; az AB, CD átmérőknek vetett árnyékai az 1-ső és a 2-dik képsíkra a c kör vetett árnyékainak, azaz a c_*, c^* ellipsiseknek kapcsolt átmérői: A_*B_*, C_*D_*; A^*B^*, C^*D^*. A k körnek vetett árnyékai a képsíkokra, tehát a k_*, k^* ellipsisek, a c_*, c^*-gal congruens ellipsisek lesznek.

E test árnyékvetőidoma tehát: a két hengeralkotó AE, BF, a c kör ADB íve és a k kor EIF íve, vagyis az $AEIFBD$ vonalrendszer.



191. ábra.

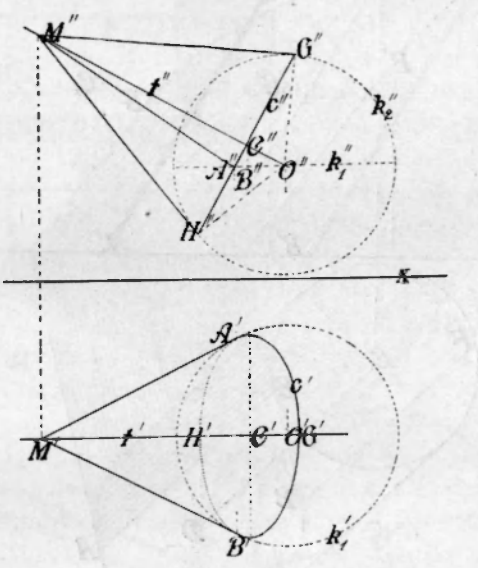
161. feladat. Szerkesztendő a 191. *ábrában ábrázolt hengernek árnyéka.*

Megoldás. A fénysugarakkal párhuzamos érintősíkok a hengert az AE, BF alkotókban érintik, ezek képezik a sajátárnyék-határt a hengeren. A hengeralkotókkal párhuzamos CD egyenesnek vetett árnyéka a képsíkokra a DC^* kiszögellő egyenes; az 1-ső képsíkon fekvő körnek a DC_*-vel párhuzamos érintői az AE, BD alkotók vetett árnyékai az 1-ső képsíkra.

162. A kúp és henger imént tárgyalt úgynevezett „érintési feladataihoz" tartoznak a szegélyalkotók meghatározásai az általános esetben is, a midőn t. i. a vezérlővonal nem fekszik a képsíkok egyikében. Legyen erre vonatkozólag példaképen a következő két feladat ide iktatva:

162. feladat. — Adva van egy forgáskúpnak t tengelye, M csúcsa, valamint egy c körnek, mint a kúp vezérlővonalának, C középpontja és r sugara; szerkesztendők a kúp szegélyalkotói: a) ha a t tengely a 2-dik képsíkkal párhuzamos, b) ha a t tengely általános helyzetű.

Megoldás az a) esetben (192. ábra). A c kör 2-dik képe az a $H''C''G''$ egyenes, mely t''-re a C'' pontban merőleges $(H''C'' = C''G'' = r)$, c-nek 1-ső képe pedig az $A'H'B'G' \equiv c'$ ellipsis.



192. ábra.

A kúp 2-dik szegélyalkotói $M''G''$, $M''H''$; 1-ső szegélyalkotói $M'A'$, $M'B$, az M' pontból a c' ellipsishez húzható érintők. De az $M'A'$, $M'B'$ érintőket és azoknak A', B' érintőpontjait meghatározhatjuk anélkül, hogy a c' ellipsist megrajzolnók.

Ugyanis, az (M, c) forgáskúpba beírható egy gömb, mely a kúpot a c körben érinti. E gömbnek O középpontja a t forgástengelyen van, s mert a kúp 2-dik szegélyalkotói MG, MH, a gömb 2-dik szegélykörét k_2-őt érintik, azért O''-t akkép határozzuk meg a t''-en, hogy $M''G'' \perp G''O''$, $M''H'' \perp H''O''$; az O''-böl $O''G''$ sugárral leírt kör k''_2. A gömb 1-ső szegélyköre k_1 a c kört az AB pontokban metszi; e pontoknak érintősíkjai úgy a gömb, mint a kúp részéről merőlegesek az 1-ső képsíkra, tehát a kúp MA, MB 1-ső szegélyalkotói, a c és k_1 kör A, B metszőpontjain mennek keresztűl. Az MA, MB alkotók, 1-ső képei $M'A'$, $M'B'$ érintői a k'_1 körnek az A' B' pontokban.

Megoldás a b) esetben (193. ábra). A midőn a t forgástengely általános helyzetű a két képsík irányában, a kúp 1-ső és 2-dik szegélyalkotói, a c kör c', c'' képei megrajzolásának kikerülésével, a kúpban írható azon gömb segélyével határozhatók meg, mely a kúpot a c kör pontjaiban érinti.

E gömb O középpontját megkapjuk, ha a t 1-ső projiciáló síkját 3-dik képsíknak tekintjük ($t' \equiv x_{13}$) és a t tengelynek, az M csúcsnak, valamint a C pontnak 3-dik képét t''', M''', C'''-mat meghatározzuk. $M'''C''' \perp C'''G'''$, $C'''G''' = H'''C''' = r$; $G'''H'''$ a c körnek 3-dik képe c''', $G'''O''' \perp M'''G'''$, $H'''O''' \perp M'''H'''$, O''' a t'''-mon a gömb középpontjának 3-dik képe. O'''-ból megkapjuk O' és O''-t a t', t''-ön, és a k_1', k_2'' körök sugara $G'''O'''$.

A gömb 1-ső szegélyköréhez k'_1-hez az M'-ből, és 2-dik szegélyköréhez k''_2-hoz az M''-ből húzott $M'A'$, $M'B'$, $M''E''$, $M''F''$ érintők a kúp szegélyalkotóinak képei.

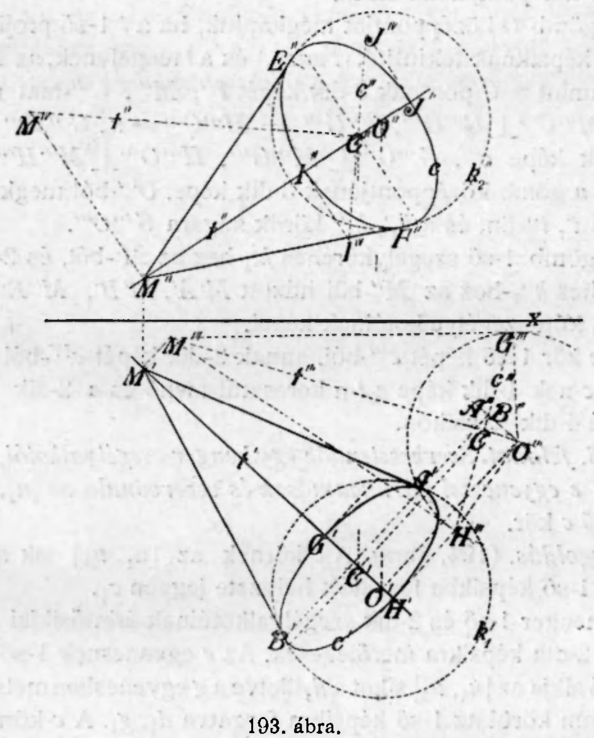
A c kör 1-ső képét c'''-ból, annak 2-dik képét c^{IV}-ból nyerjük, ha c^{IV} a c-nek 4-dik képe a t-n keresztűl menő és a 2-dik képsíkra projiciáló 4-dik képsíkon.

163. feladat. Szerkesztendők egy henger szegélyalkotói, ha az alkotók az e egyenessel párhuzamosak és vezérvonala az $[u_1, u_2]$ síkban fekvő c kör.

Megoldás. (194. ábra). A c körnek az $[u_1, u_2]$ sík u_1 nyoma körül az 1-ső képsíkba forgatott helyzete legyen c_1.

A henger 1-ső és 2-dik szegélyalkotóinak érintősíkjai az 1-ső, illetve a 2-dik képsíkra merőlegesek. Az e egyenesnek 1-ső és 2-dik projiciáló síkja az $[u_1, u_2]$ síkot a d, illetve a g egyenesben metszi, d és g az u_1 nyom körül az 1-ső képsíkra forgatva d_1, g_1. A c körnek d_1-el párhuzamos érintői a_1, b_1, a g_1-gyel párhuzamos érintői h_1, i_1. Az a_1, b_1 érintők visszaforgatott helyzetének a', b' képei a henger 1-ső szegélyalkotóinak 1-ső képei, és a h_1, i_1 érintők visszaforgatott helyzetének 2-dik képei a henger 2-dik szegélyalkotóinak 2-dik képei. Az $abhi$ egyenesek, mint az $a_1b_1h_1i_1$-nek visszaforgatott helyzetei a térben nem hengeralkotók, csak ezeknek képei a szegélyalkotók illető képeiben vannak. Az 1-ső szegélyalkotóknak 2-dik képeit megkapjuk, ha az a_1, b_1 érintőknek visszaforgatott érintőpontjain keresztűl az e''-vel párhúzamost húzunk, hasonlókép a h_1, i_1 érintők érintő-pontjainak visszaforgatott helyzetén keresztűl menő és e'-sel párhuzamos egyenesek a henger 2-dik szegélyalkotóinak 1-ső képei.

Ugyanígy határozhatjuk meg a henger azon alkotóinak 2-dik képeit, melyeknek 1-ső képe az f'. E végből leborítjuk az $[u_1, u_2]$ sík azon egyenesét, melynek 1-ső képe az f'; a leborított egyenes a c_1 kört a K_1, F_1 pontban metszi, mely pontok visszaforgatva a K', K'', F', F'' képeket adják. E pontokon keresztűl menő és az e', e''-sel párhuzamos egyenesek a hengernek azon alkotói, melyeknek 1-ső képe f'.

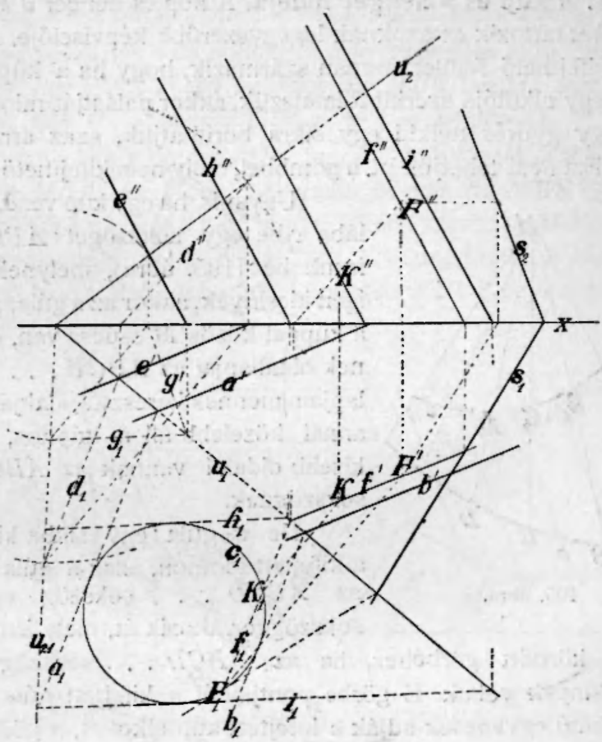


193. ábra.

Az ábra még az f alkotó $[s_1, s_2]$ érintősíkjának szerkesztését is feltünteti.

163. A kúp és a henger síkmetszései. Egy kúp vagy henger metszése egy síkkal általában görbe vonal, mely csak abban az esetben fajul el egyenesekké, ha a metszősík a kúp csúcsán megy keresztűl, illetve a henger alkotóival párhuzamos. E metszőgörbe pontjai, érintői a kúp alkotóinak és érintősíkjainak metszőpontjai, illetve metszőegyenesei a síkkal.

Minden kúpalkotó, mely a metszősíkkal párhuzamos a metszésgörbe egy végtelen távol fekvő pontját szolgáltatja. E végtelen távol fekvő pontnak érintője azonban csak akkor lesz végtelen távol, ha az illető alkotó és érintősíkja is párhuzamos a metszősíkkal. E szerint a metszésgörbének annyi végtelen távol fekvő pontja és érintője van, a hány alkotója, illetve érintősíkja a kúpnak, párhuzamos a metszősíkkal.



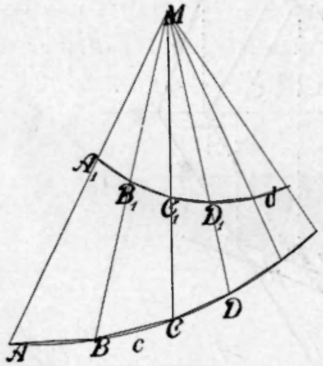
194. ábra.

A II. r. kúpok síkmetszései II. r. vonalak. Ennek bizonyítása elemi uton eddigelé csak a forgáskúpra és hengerre sikerült. Ámde ha elfogadjuk, hogy az általános II. r. kúp metszésgörbéje ellipsis, hyperbola, vagy parabola, úgy egyszerű uton megállapíthatjuk, hogy melyike lesz e görbéknek.

Ugyanis a II. r. kúp csúcsán keresztűl menő és a metszősíkkal párhuzamos sík a kúpot vagy két alkotóban metszi, vagy érinti (két egybeeső alkotó szerint metszi), vagy végre nem metszi (a metszés két képzeleti alkotó.) A szerint, a mint ezen esetek bekövetkeznek: az eredeti sík metszésgörbéjének két végtelen távol fekvő pontja, egy végtelen távol fekvő pontja és érintője lesz, vagy végre nem lesz végtelen távolban pontja. A görbe tehát ezen esetekben megfelelőleg: hyperbola, parabola, vagy ellipsis ide értve a kört is.

Egy II. r. hengernek síkmetszése ellipsis (kör), hyperbola vagy parabola, a szerint a mint a vezérlő vonala ellipsis, hyperbola vagy parabola.

164. A kúp és a henger hálója. A kúp és henger *a kifejthető felületekhez* tartozik és azoknak legegyszerűbb képviselője. Az elnevezés „kifejthető felület" onnan származik, hogy ha a kúpot vagy hengert egy alkotója szerint fölmetszük, akkor palástját minden szakítás vagy gyűrés nélkül egy síkra boríthatjuk, azaz arra kifejthetjük. (Ezt nem tehetjük pl. a gömbbel, mely nem kifejthető felület!)



195. ábra.

Ugyanis, ha egy kúp vezérlő vonalába c-be egy sokszöget $ABCD\dots$ irunk be (195. ábra), melynek oldalai igen kicsinyek, akkor az a gúla, melynek a kúppal közös M csúcsa van, és melynek oldallapjai az $ABCD\dots$ sokszög lapjain mennek keresztűl, alakjára nézve annál közelebb áll a kúphoz, mennél kisebb oldalai vannak az $ABCD\dots$ sokszögnek.

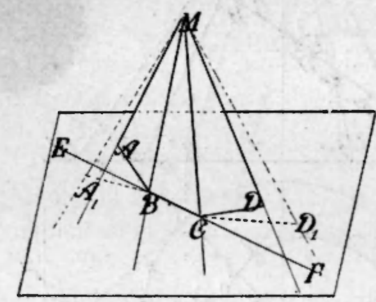
De e gúla egy síkba kifejthető, a kifejtett idomon, azaz a gúla hálóján az $ABCD\dots$ sokszög egy más sokszöggé változik át, mely ismét közel áll egy körülirt görbéhez, ha az $ABCD\dots$ sokszög oldalai igen kicsinyek voltak. E görbe pontjaiból a kifejtett gúla csúcsához húzható egyenesek adják a kifejtett kúp alkotóit, a görbe maga a kúp vezérlő vonala a kúp kifejtésén, vagy *hálóján.*

A milyen szöget képeztek az $ABCD\dots$ sokszög AB, $BC,\dots$ oldalai az $MA, MB, MC,\dots$ élekkel, ugyanoly szöget fognak képezni a kifejtésben is a hasonló elnevezésű sokszögoldalak és gúlaélek. Úgyszintén nem változik az $ABCD\dots$ sokszög kerülete a hálón. Ámde az AB, $BC\dots$ oldalak, ha igen kicsinyek, akkor meghosszabításaikban a c vezérlővonal érintői az A, B, ... pontokban, ennélfogva: c görbe érintőinek hajlásszögei az érintőpontokon keresztülmenő alkotókhoz valamint a görbe ívhossza a kúp kifejtésében nem változik. S mert a c vezérlővonal a kúpon fekvő bármily görbével pótolható, általában mondhatjuk: *a kúpon vagy hengeren* *fekvő görbe érintőinek hajlásszögei az érintőponton keresztülmenő alkotókhoz, valamint a görbe ívhossza, nem változik a kúp vagy henger hálóján.*

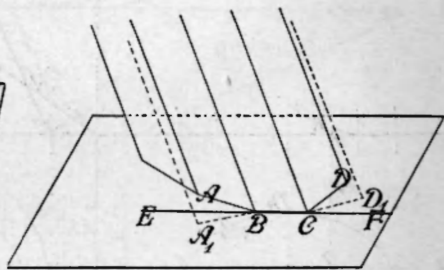
165. Az inflexiós pontok a hálón. A kúpon fekvő görbe kifejtett alakján lehetnek olyan pontok, melyeknek érintői a görbét az érintőpontban metszik. Ily pontnál tehát a görbe az érintő egyik oldaláról a másikra megy át, s azért ily pontok *áthajlási* (inflexiós) *pontoknak*, és azoknak érintői *áthajlási* érintőknek neveztetnek.

Hogy ezeknek tulajdonságait a kúp kifejtése előtt felismerjük, messünk egy gúlát (vagy hasábot) az MBC lapjára merőleges **S** síkkal az $ABCD$ . . . szerint (196. a) és 196. b) ábrák).

Fejtsük ki a gúlát az MBC lapra. E kifejtésnél MBA és MCD lapok az MBA_1 és MCD_1 helyzetbe jönnek. Ha $MBE \sphericalangle$ hegyes akkor az $MBA \sphericalangle > MBE \sphericalangle$, mert a föltétel szerint az M-Bnek derékszögű projectiója az **S** síkra $EBCF$; ennélfogva a kifejtésben $A_1MB \sphericalangle > EBM \sphericalangle$, tehát az A_1 pont az $EBCF$ egyenes alá kerül.



196 a. ábra.



196 b. ábra.

Minthogy $MCF \sphericalangle$ tompa, az $MCD \sphericalangle < MCF \sphericalangle$, mert ismét a föltétel szerint az MC egyenesnek derékszögű projectiója az **S** síkra CF. A D_1 pont tehát jelenleg az $EBCF$ egyenes fölé kerül, és így az $ABCD$ sokszög kifejtett idomának, az A_1BCD_1 sokszögnek, A_1B és CD_1 oldalai az $EBCF$ egyenesnek különböző oldalain feküsznek.

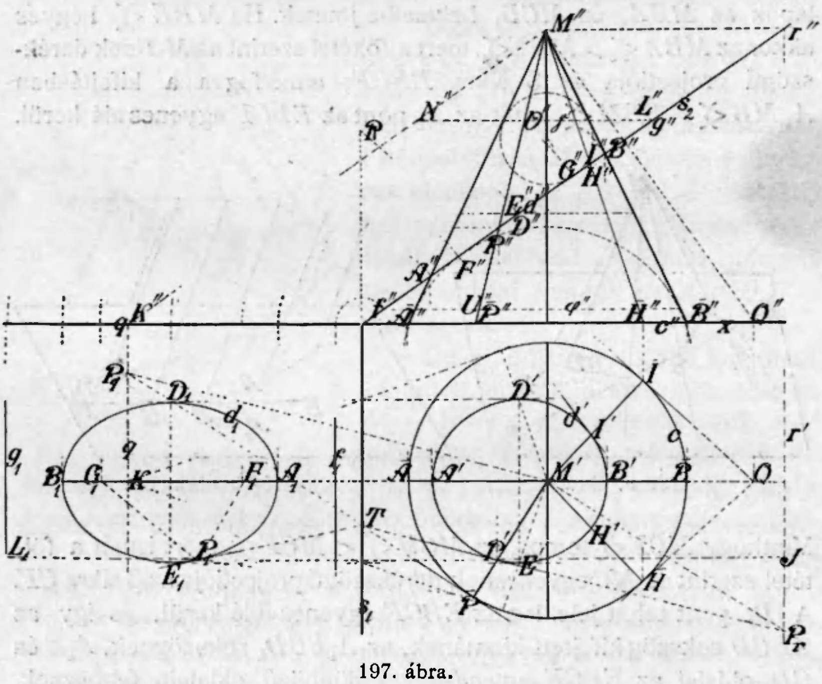
Ha a gúla (vagy a hasáb) helyett kúpot, (illetve hengert) képzelünk és a BCM sík e kúp alkotójának érintősíkja, az $ABCD$ sokszög pedig ama érintősíkra merőleges metszősík a B pontban, akkor a metszésgörbe a kúp kifejtésében a B pont érintőjének egyik oldaláról a másikra megy át a B pontnál: azaz a B pont a kifejtésben a metszésgörbe inflexiós pontja.

Ebből fordítva következik: *egy kúp (vagy egy henger), és* *egy sík metszésgörbéjének azon pontjai lesznek a kúp (vagy a henger) hálóján inflexiós pontok, melyeknek érintősíkjai a metszősíkra merőlegesek.*

A forgáskúp és forgáshenger síkmetszései.

166. — *164. feladat. Szerkesztendő egy forgáskúp síkmetszése, ha a kúp forgástengelye az 1-ső képsíkra, az $[s_1, s_2]$ metszősík pedig a 2-dik képsíkra merőleges és a kúp valamennyi alkotóját metszi.*

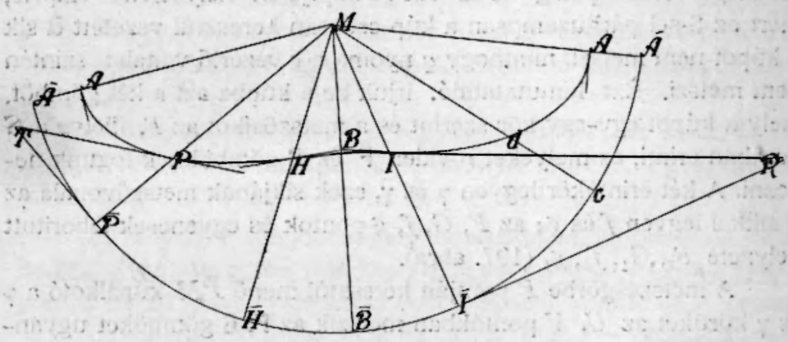
Megoldás. (197. ábra). A kúp az 1-ső képsíkot K_1-t a c körben metszi, melyet a kúp vezérlő vonalának tekinthetünk.



197. ábra.

A kúp 2-dik szegélyalkotói $\overline{MA}$, $\overline{MB}$, az $[s_1, s_2] = \mathbf{S}$ síkot az A, B pontokban metszik; az $A''\,B''$ vonaldarab a d metszésgörbe 2-dik képei d''. A kúp egy tetszés szerinti MP alkotója az $\mathbf{S}$ síkot egy P pontban metszi; ennek 2-dik képe P'', a d''-n van, és P''-ből P' szerkeszthető.

Ha azonban a d görbe 1-ső képét d'-et a d''-től függetlenül akarjuk meghatározni, akkor úgy járhatunk el, mint a gúla sík metszése szerkesztésénél. Ugyanis a kúp M csúcsán keresztűl a c kör K_1 síkjához párhuzamos **R** síkot fektetünk, mely **S**-et az r-ben metszi, és az M-en keresztűl az **S** síkkal párhuzamos **Q** síkot fektetünk, mely K_1-et a q-ban metszi. Az s_1, q, r' vonalakkal d' pontjai következőképen szerkeszthetők: a $\overline{MP}$ kúpalkotón keresztűl egy tetszés szerinti síkot fektetünk, pl. a kúp érintősíkját, melynek 1-ső nyoma PT. E sík a K_1**QRS** síkokat egy TP_qMP_r paralellogrammában metszi, melynek 1-ső képe $TP_qM'P_r$ (hol $P_q = (\overline{PT}, q)$, $P_rM'//PT$ és $(P_rM', r') = P'_r$); e parallelogramma TP_r oldalának metszőpontja az $M'P$-vel a d' görbe P' pontja. És ha az MP kúpalkotón áthelyezett segédsík tényleg a kúp érintősíkja volt, akkor a TP_r egyenes, mint a P érintősíkjának és az **S** metszősíknak metszővonala, tehát TP_r, a d'-nek érintője a P' pontban.



197 a. ábra.

E szerint a d' görbének annyi pontját és érintőjét határozhatjuk meg könnyen és pontosan a c kör, az M' pont és az s_1, r', q egyenesek segélyével, a mennyit a görbe megrajzolásához szükségesnek tartunk.

A metszésgörbe valódi alakját d_1-t megkapjuk, ha d-nek pontjait és érintőit a sík s_1 nyoma körül az 1-ső képsíkba forgatjuk. Igy, a P pont és PT érintő leforgatott helyzete P_1 és P_1T. A d_1 gorbét, d képeinek ismerete nélkül, magából a c vezérlő vonalból is szerkeszthetjük, mint azt a gúla síkmetszésének meghatározásánál láttuk.

A *kúp hálóját* a 197 a. ábra mutatja. Az $M\overline{A} = M''A''$ sugárral leírt körön az $\overline{A}P \ldots \overline{A}$ ívhossz a c kör egész kerületével egyenlő; az $\overline{AP}$, $\overline{PH}$, $\overline{HB}$, ... ívek a 197. ábrában megegyeznek ugyanily nevű ívekkel a 197 a. ábrában.

A P pont a hálón az MP alkotón fekszik és az MP vonaldarab a térben és a hálón egyenlő. A PPT derékszögű háromszög a térben congruens e háromszöggel a hálón; ennek PT átfogója a hálón fekvő d metszésgörbének érintője a T pontban. A d görbe A, B pontjainak érintői merőleges az illető alkotóra.

Tudván azt, hogy a metszésgörbe azon pontjai lesznek a hálón inflexiós pontok, melyeknek érintősíkjai a metszősíkra merőleges: az M csúcsból MQ merőlegest bocsátunk az $[s_1, s_2]$ metszősíkra, és MQ-n keresztűl érintősíkokat vezetünk a kúphoz, melyek a kúpot az MH, MI alkotókban, a metszésgörbét a H, I pontokban érintik; e H, I pontok lesznek a hálón fekvő metszésgörbének inflexiós-pontjai. Az I pont inflexiós-érintője azon RII háromszög RI átfogója, mely a térbeli RII háromszöggel congruens.

A talált d metszésgörbéről elemi úton kimutatható, hogy II. r. görbe, és pedig az **S** sík és kúp jelen helyzeténél ellipsis, mert az **S**-sel párhuzamosan a kúp csúcsán keresztűl vezetett **Q** sík a kúpot nem metszi, minthogy q nyoma a c vezérlő vonalat szintén nem metszi. Ezt kimutatandó, írjuk be a kúpba azt a két gömböt, mely a kúpot egy-egy kör szerint és a metszősíkot az F, illetve a G pontban érinti, és melyeket röviden **F** és **G** gömböknek fogunk nevezni. A két érintőkör legyen φ és γ, ezek síkjának metszővonala az **S** síkkal legyen f és g; az F, G, f, g pontok és egyenesek leborított helyzete F_1, G_1, f_1, g_1 (197. ábra).

A metszésgörbe P pontján keresztűl menő PM kúpalkotó a φ és γ köröket az U, V pontokban metszik az **F**, **G** gömböket ugyanezen pontokban érintik.

Ennélfogva $PF = UP$, $PG = PV$, mint a P pontból az **F** és **G** gömbhöz húzott érintők hosszúsága; ezért

$$PF + PG = UP + PV = UV.$$

Ámde a kúpalkotóknak a φ és γ köröktől határolt része mind egyenlő, tehát

$$PF + PG = \text{állandó}.$$

E szerint a P pont, mint a d metszésgörbének tetszés szerinti pontja oly helyzetű, hogy az F, G pontoktól mért távolságainak összege állandó, tehát a d görbe egy ellipsis, melynek gyújtópontjai F, G. Ennek az ellipsisnek főtengelye AB, melléktengelye pedig DE, ha a D, E pontok érintősíkjai az AB egyenessel párhuzamos MNK egyenesen mennek keresztűl, és így az **S** síkot az AB-vel párhuzamos egyenesek szerint metszik.

Az f és g egyenesek a d ellipsis irányában különös helyzetűek. Ugyanis, ha a P pontból és az M csúcsból az AB főtengelylyel párhuzamosokat húzunk, melyek a γ síkját az L és N pontban metszik, akkor a PLV és MNV hasonló háromszögek folytán

$$\frac{PV}{PL} = \frac{MV}{MN} = \text{állandó},$$

vagyis független a d görbe P pontjától. Ámde $PV = PG$, tehát

$$\frac{PG}{PL} = \text{állandó}.$$

Az L pont a P pontból a g egyenesre bocsátott merőlegesnek talppontja s mint ilyen, a P pont távolsága a g egyenestől; ennélfogva: a d ellipsis pontjainak a G gyújtóponttól és a g egyenestől mért távolsági viszonya állandó. Ugyanez mondható az F gyújtópontról és az f egyenesről is. Ha tehát, mint szokás, a d ellipsis irányában ily viselkedésű egyeneseket, mint az f és a g, *az ellipsis F és G gyújtópontjaihoz tartozó vezérlő vonalainak* nevezzük, akkor a szerkesztésből az ellipsisnek következő tulajdonságát ismertük meg:

Az ellipsis pontjainak egy gyújtóponttól és az ehhez tartozó vezérlő vonaltól mért távolsági viszonya állandó. Ez az állandó mennyiség kisebb egynél, mert $MV < MN$.

Az ellipsis e tulajdonságára támaszkodva, kimutatható végre, hogy a d metszésgörbe 1-ső képe *d' egy oly ellipsis, melynek gyújtópontja az M' pont és az ehhez tartozó vezérlő vonala az r' egyenes.*

Ugyanis az $M'P'P_r \sim M'\overline{P}P_q$ és a $P'P_rJ \sim M'P_qK$ hasonló derékszögű háromszögekből, melyeknek J, K szögpontjai az r', illetve q egyeneseken feküsznek, következik:

$$P'M' : \overline{P}M' = P'P_r : M'P_q = P'J : M'K,$$

tehát

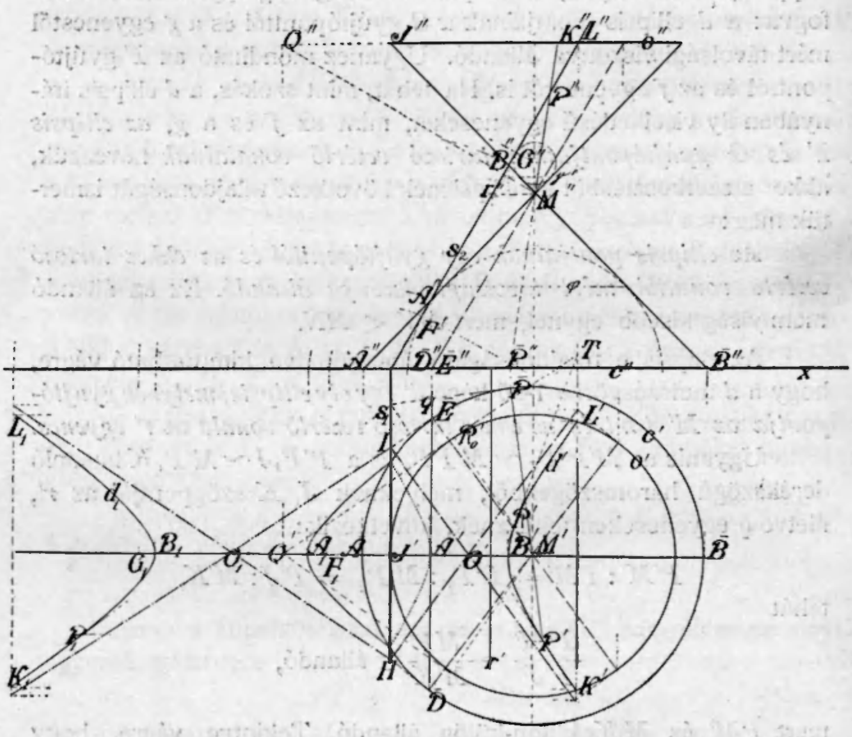
$$\frac{P'M'}{P'J} = \frac{MP'}{M'K} = \text{állandó},$$

mert $\overline{P}M'$ és $M'K$ külön-külön állandó. Tekintve végre, hogy $\overline{P}M' < M'K$, mert a q egyenes nem metszi a c kört: a d' görbe szükségkép ellipsis, melynek gyújtópontja M' és vezérlő vonala r'.

167. — *165. Szerkesztendő egy* **S** *síknak metszése egy forgáskúppal, ha a sík a kúp két alkotójával párhuzamos.*

Megoldás. (198. ábra). Legyen ismét a kúp tengelye merőleges az 1-ső képsíkra $\mathbf{K}_1$-re, mely a kúpot a c körben metszi. Válaszszuk a metszősíkot $[s_1, s_2]$-őt a 2-dik képsíkra projiciálónak, s mert a földat követelményei szerint a sík a kúp két alkotójával párhuzamos legyen, megkivántatik, hogy a kúp M csúcsán keresztűl az $[s_1, s_2]$-vel párhuzamosan vezetett **Q** sík a kúpot két alkotóban messe, tehát q-nak 1-ső nyoma a c-t szintén messe két pontban, D, E-ben.

A metszésgörbe pontjait, azoknak érintőit úgy a képekben, mint a leborításban, az s_1, q, r' vonalakkal, vagy azok mellőzésével hasonlókép szerkesztjük meg, mint az előbbi ábrában. Van azonban a metszésgörbének a sík jelen helyzeténél, a midőn az a kúp két alkotójával, ME, MD-vel párhuzamos, két végtelen távol fekvő E, D pontja azon alkotókon. Az E és D pont érintői azonban nincsenek végtelen távol, hanem végesbe nyúlnak. Szerkesztésük teljesen

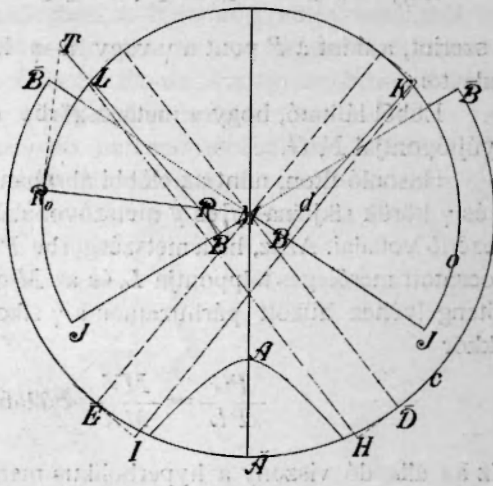


198. ábra.

egyező a görbe bármely más pontja, pl. a P pontja, érintőjének szerkesztésével. Ugyanis az ME és az MD alkotók érintősíkjai az **S** síkot az ME, illetve az MD-vel párhuzamos egyenesek szerint metszik, melyek az I és H pontokon, mint az érintősíkok és az **S** sík 1-ső nyomának metszőpontjain mennek keresztűl. A $HO//DM$ és $IO//EM$ egyenesek tehát a metszésgörbét a két végtelen távol fekvő pontjában érintik és a görbe *asymtota*-inak neveztetnek.

A kúp felső palástján fekvő o kör az **S** metszősíkot a görbe KL pontjaiban metszi; a kúpon fekvő minden más körnek metszőpontjait az **S** síkkal ugyanígy lehet meghatározni.

A metszésgörbén, a metszősík jelen helyzeténél, szintén van két oly pont, mely a hálón inflexiós pont lesz. Az M csúcsból az **S** síkra bocsátott merőleges az o kör síkját a Q pontban metszi; a Q pontból az o körhez vont érintők érintőpontjain keresztűl menő kúpalkotók azok, melyeken a hálóban az inflexios pontok feküsznek. Ezeknek egyike az R pont.


198 a. ábra.

E kúp hálójának meghatározása keveset tér el az előbbi ábrában mutatott háló meghatározástól; arra kell csupán ügyelnünk, hogy a kúp mindkét palástját fejtsük ki, és az egyes paláston fekvő görbéket vigyük át a hálóra is.

A kúp c körének helyzete (198 a. ábra) a hálóban a $\overline{BEADB}$ körív és az o körnek helyzete a JR_oLKJ körív. Az ME, MD alkotók a hálón, szintén a metszésgörbe végtelen távol fekvő pontjaihoz futnak; $EI \perp ME$, $DH \perp MD$ és EI, DH úgy a hálón, mint a térben egyenlők. Az I és a D ponton keresztűl menő és az ME, MD-vel párhuzamos egyenesek a hálón nyert metszésgörbének asymtotái.

A metszésgörbének kúp felső palástján levő része a hálón a BK és a BRL részekre válik, mert a BJ alkotó szerint képzeltük a kúpot felmetszve; az alsó paláston fekvő metszésgörbe a hálón nem válik el, mert az IB alkotó ott nem metszi a görbét.

A metszésgörbe jelenleg hyperbola lesz. Ugyanis, ha kúpba ismét két gömböt, **F**, **G**-t, írunk be, melyek a kúpot a φ, γ körökben, a síkot az F, G pontokban érintik és a metszésgörbe tetszés szerinti P pontján keresztűl menő MP kúpalkotó a φ, γ köröket az U, V pontokban metszi, akkor

$$PF = PU,\ PG = PV,$$

tehát $PF - PG = PU - PV = UV =$ állandó,

vagy $PG - PF = PV - PU = UV =$ állandó,

a szerint, a mint a P pont a γ vagy a φ körrel fekszik ugyanegy paláston.

Ebből látható, hogy a metszésgörbe oly hyperbola, melynek gyújtópontjai F, G.

Hasonló úton, mint az előbbi ábrában bebizonyítható, hogy a φ és γ körök síkjainak f és g metszővonalai az **S** síkkal a hyperbola vezérlő vonalai. Azaz, ha a metszésgörbe P pontjából a g egyenesre bocsátott merőleges talppontja L, és az M csúcsból a hyberbola AB főtengelyéhez húzott párhuzamos a γ síkot az N pontban metszi, akkor

$$\frac{PG}{PL} = \frac{MV}{MN} = \text{állandó.}$$

Ez az állandó viszony a hyperbolikus metszésnél nagyobb egynél, mert jelenleg az N pont a γ körön belül van, tehát $MV > MN$.

Szintén azon módon, mint az előbbi ábrában még az is kimutatható, hogy a metszésgörbe 1-ső képe egy hyberbola, melynek egyik gyujtópontja az M csúcs 1-ső képe M', és az ehhez tartozó vezérlő vonal az r' egyenes, mint az **S** sík és az M csúcson keresztűl az 1-ső képsíkkal párhuzamosan vezetett **R** sík r metszővonalának 1-ső képe.

168. — *166. feladat. Szerkesztendő egy forgáskúp metszése oly síkkal, mely a kúp egyik érintősíkjával párhuzamos.*

Megoldás. (199. ábra). Vegyük fel ismét a kúpot tengelyével merőlegesen az 1-ső képsíkra, az $\mathbf{S} = [s_1, s_2]$ metszősíkot a 2-dik képsíkra merőlegesen, tehát s_2 nyomát a kúp $\overline{MB}$ (vagy MA) 2-dik szegélyalkotójával párhuzamosan.

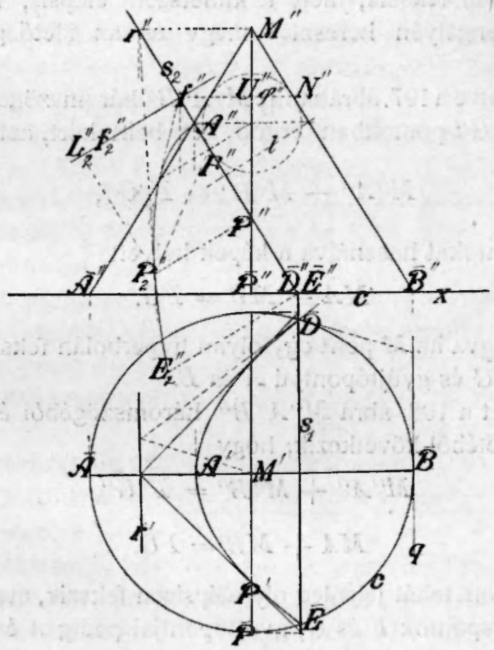
A metszésgörbe képeinek pontjai érintői, valódi alakja, és alakja a kúp hálóján ugyanazon eljárások szerint határozható meg, mint a két előbbi esetben.

A görbének jelenleg egy pontja van végtelen távol, t. i. az a B_∞ pont, melyben az $\overline{MB}$ alkotó az **S** síkot metszi. Ámde e B_∞ pontnak érintője is végtelen távol van, mert az $\overline{MB}$ alkotó érintősíkja **Q**, az **S** síkkal párhuzamos. A **Q** sík 1-ső nyoma q, tehát jelenleg a kúp c vezérlő vonalát a $\overline{B}$ pontban *érinti.*

A metszésgörbe ez esetben parabola. Ugyanis, a kúpba most csak egy gömböt **F**-et írhatunk be, mely a kúpot érinti; és pedig a kúpot a φ körben, a síkot az F pontban. Nevezzük a kúp MA 2-dik szegélyalkotójának és egy tetszés szerinti MP alkotónak metszőpontját az **S** síkkal A és P-nek. Messe az MP alkotó a φ kört az U pontban, és legyen a P és M ponton keresztül vezetett és az $AB\infty$ egyenessel párhuzamos egyenesnek metszőpontja a φ kör síkjával L és N. Ez az N pont a φ körön fekszik, mert $MNB\infty$ egybeesik az MB alkotóval.

A PUL, MUN hasonló háromszögekből és a $PU = PF$, $MU = MN$ egyenletekből következik, hogy

$$PF : PL = PU : PL = MU : MN = 1, \text{ azaz } PF = PL.$$



199. ábra.

Minthogy az L pont a φ kör síkjának és az **S** síknak f metszőegyenese, tehát PL a P pont távolsága az f egyenestől: *a metszésgörbe tetszés szerinti pontjának távolsága az F ponttól és az f egyenestől egyenlő*, *azaz a metszésgörbe parabola.*

Hogy a metszésgörbe 1-ső képe, azaz derékszögű projectiója a kúp tengelyére merőleges síkra, oly parabola, melynek gyújtópontja M' és vezérlő vonala r', az ellipsis eseténél mutatott eljárás szerint bizonyítható be.

A metszésgörbe az $AB\infty$ tengelye körül a 2-dik képsíkkal párhuzamos helyzetbe lett forgatva; a forgatott görbének 2-dik képe az $A''P''_2E''_2$ parabola.

169. A három utolsó feladatban kimutattuk, hogy minden forgáskúp síkmetszése: ellipsis, hyperbola vagy parabola, és abban az esetben kör, ha a metszősík a forgástengelyre merőleges.

Most viszont kérdezhetjük, lehet-e e görbéket egy forgáskúp vezérlő vonalának tekinteni, vagy más szóval kifejezve: *lehet-e egy ellipsisen, hyberbolán vagy parabolán forgáskúpot keresztül fektetni, és ha lehet, hol veendő fel e kúp csúcsa?*

A 197—199. ábrákból látjuk, hogy a forgáskúp csúcsa M mindig abban a sikban fekszik, mely a kimetszett ellipsis, hyperbola és parabola főtengelyén keresztül megy és az illető görbe síkjára merőleges.

De tekintve a 197. ábrában az $M''A''B''$ háromszöget és az $A''B''$ oldalt az F'', G'' pontokban érintő két beírt kört, azt látjuk, hogy

$$M''A'' - M''B'' = F''G'',$$

vagy a térpontokat használva a képek helyett

$$MA - MB = FG.$$

Ennélfogva az M pont egy olyan hyperbolán fekszik, melynek csúcsai F és G és gyújtópontjai A és B.

Másrészt a 198. ábra $M''A''B''$ háromszögéből és az F'', G'' pontok helyzetéből következik, hogy

$$M''A'' + M''B'' = F''G''$$

valamint

$$MA + MB = FG.$$

Az M pont tehát jelenleg oly ellipsisen fekszik, melynek főtengelyén a csúcspontok F és G, gyújtópontjai pedig A és B.

Ha végre a 199. ábrát veszszük figyelembe, melyben az l egyenes az $A''F''$-re merőleges és az F'' ponttól $A''F''$ távolságra van, akkor azt látjuk, hogy az M'' pont távolsága az A'' ponttól és az l egyenestől egyenlő. Az M pont tehát egy olyan parabolának pontja, melynek gyújtópontja A, csúcspontja F, vezérlő vonala l.

Ezek szerint *egy adott ellipsisen, hyperbolán vagy parabolán keresztül menő forgáskúpok csúcsai megfelelőleg egy oly hyperbolán, ellipsisen, parabolán feküsznek, melynek: 1. síkja az adott görbe síkjára merőleges és annak főtengelyén megy keresztül, melyeknek 2. csúcs- és gyújtópontjaik az adott görbék gyújtó- és csúcs-*

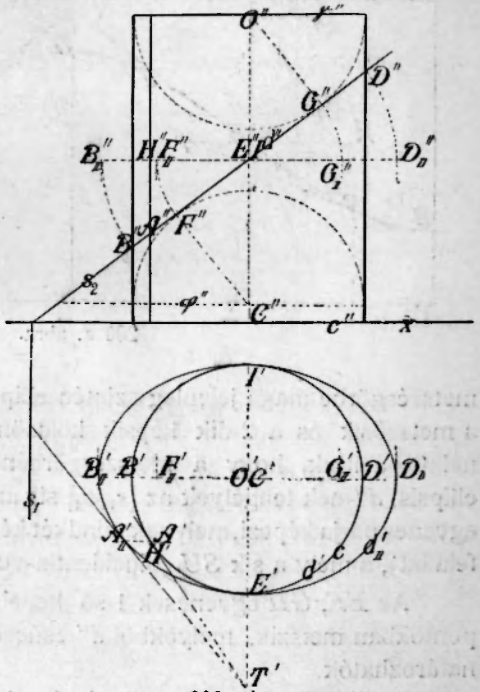
pontjaikkal esnek egybe. E görbéknek érintői képezik a kúpoknak forgástengelyeit.

Egy ellipsis és egy hyperbola, vagy két parabola, melyeknek síkjai egymásra merőlegesek és melyek közül bármelyik görbének csúcs- és gyújtópontjai a másiknak gyújtó- és csúcspontjai, egymásnak *focalis kúpszeletei.* E szerint az ellipsisen, hyperbolán vagy parabolán keresztül menő forgáskúpok csúcsai és tengelyei az illető görbék focalis kúpszeletének, tehát egy hyperbolának, ellipsisnek, illetve parabolának pontjai és érintői.

170. — *167. feladat. Szerkesztendő egy forgáshengernek síkmetszése, ha tengelye az 1-ső képsíkra, a metszősík a 2-dik képsíkra merőleges.*

Megoldás. (200. ábra.) A metszésgörbe 1-ső képe d' a henger metszésköre c az 1-ső képsíkkal ; a metszésgörbe 2-dik képe d'' az **S** metszősík 2-dik nyomában s_2-ben van.

Ha a hengerbe két gömböt **F** és **G**-t képzelünk beírva, melyek a hengert a φ, γ körök szerint az **S** síkot az F, G pontokban érintik, akkor úgy, mint a 197. ábrában kimutatható, hogy a metszésgörbe olyan ellipsis, melynek gyújtópontjai az F, G pontok, vezérlő vonalai pedig a φ és γ síkok metszőegyenesei az **S** síkkal.



200. ábra.

A metszésgörbe főtengelye a 200. ábrában BD, melléktengelye EI; a görbe e melléktengely körül az 1-ső képsíkkal párhuzamos helyzetbe lett forgatva és 1-ső képe d'_{II} meghatározva, mely d valódi alakjával congruens.

A henger hálója és a d görbe a hálón a 200 a. ábrában van kitüntetve. A B és D pontok érintői merőlegesek az illető alkotókra; az A pont érintője AT a hálón, az AHT derékszögű háromszögnek átfogója, mely valódi alakjával congruens $A''H''=AH$,

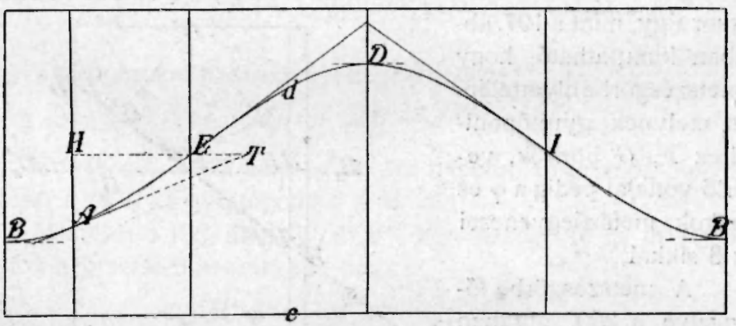
$H'T' = HT$. Az E és I pont a hálón inflexiópont, mert érintősíkja a metszősíkra merőleges ; ezen pontok érintői a háló c egyenesével ugyanoly szöget képeznek, mint az **S** sík 1-ső képsíkszöge $D''E''D''_n$.

Ha visszagondolunk az előbbi pont végén mondottakra, akkor az ott leszármaztatott tételeket e helyen még a következővel egészíthetjük ki: *egy ellipsisen két forgás hengert fektethetünk keresztül; ezeknek alkotói az ellipsis focalis-hyperbolájának asymptotáival párhuzamosak.*

Ezt még másképen fejezzük ki, ha azt mondjuk: *egy ellipsis derékszögű projectiója annak melléktengelyével párhuzamos* **S** *síkra mindig kör, ha a tengelyek projectiói egyenlők.*

168. feladat. Szerkesztendő egy forgáshengernek síkmetszése, ha tengelye az 1-ső képsíkra merőleges, de a metszősík általános helyzetű.

Megoldás. (201. ábra). A metszésgörbének, d-nek, 1-ső képe ismét azon c kör, melyben az 1-ső képsík a hengert metszi. A



200 a. ábra.

metszésgörbe maga jelenleg szintén ellipsis, mert a görbe nem függ a metszősík és a 2-dik képsík kölcsönös helyzetétől. Bizonyitás nélkül állítjuk, hogy a metszésgörbének 2-dik képe d'' szintén ellipsis. d''-nek tengelyeit az $[s_1, s_2]$ sík azon az O-n átmenő EF, HG egyenes párja képezi, melynek mindkét képe merőleges egymásra (30. feladat), s mely a sík SU coincidentia-vonalával lesz meghatározva.

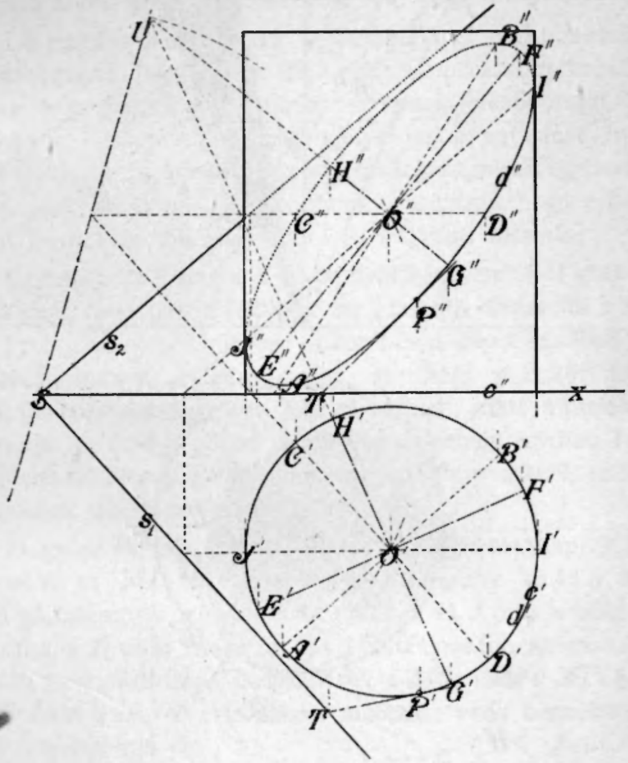
Az EF, GH egyenesek 1-ső képei a c' kört az E', F', G', H' pontokban metszik, melyekből d'' csúcsai: E'', F'', G'', H'' meghatározhatók.

A d'' görbe legmagasabb és legalacsonyabb pontja B'', A'', az $[s_1, s_2]$-nek az O-n átmenő 1-ső esővonala 2-dik képén feküsznek. d'' a henger 2-dik szegély alkotóit az I'', J'' pontokban érinti.

A d görbe CD pontjainak érintősíkjai a metszősíkra merőlegesek, s ezért a C, D pontok a henger hálóján származó d görbe inflexiós pontjai.

171. — *169. feladat. Szerkesztendő egy üres forgáskúp külső és belső felületének árnyéka, ha a kúp tengelye az 1-ső képsíkra merőleges, annak csúcsa az 1-ső képsíkban van, és a palást egy c körtől határoltatik.*

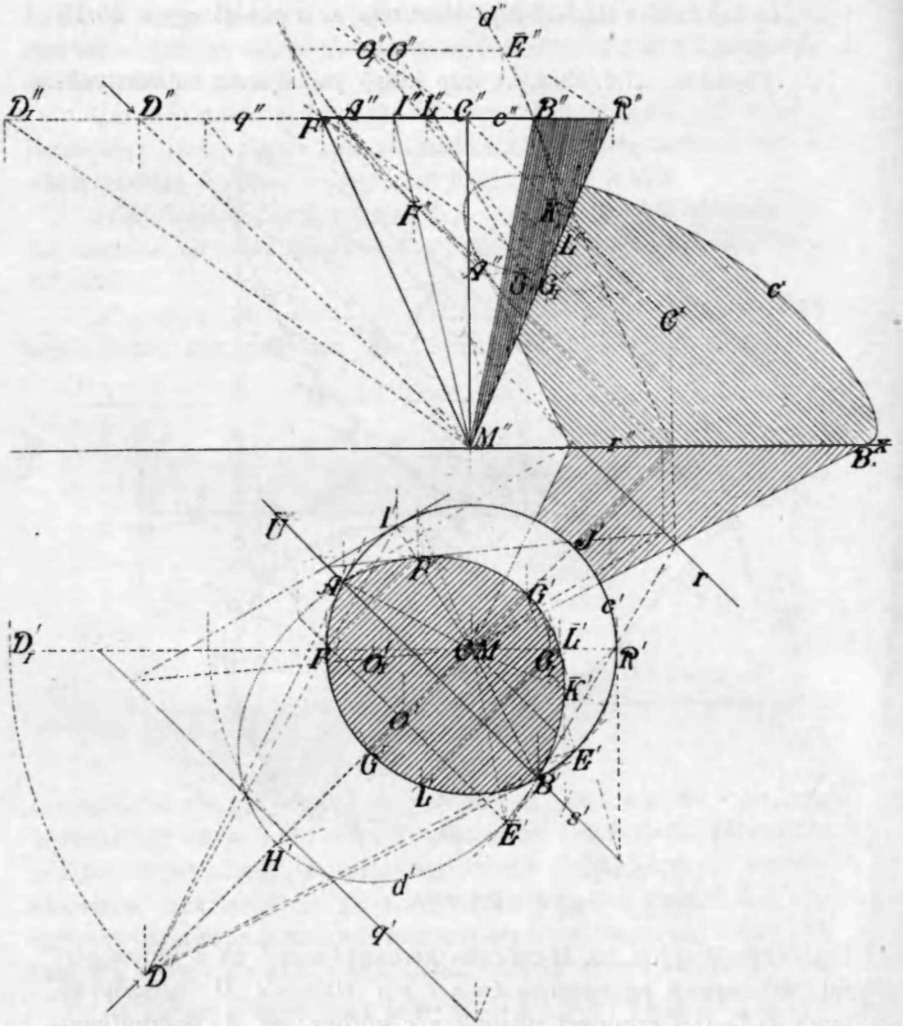
Megoldás. (202. ábra.) A kúp külső palástjának sajátárnyék-



201. ábra.

határát megkapjuk, ha M csúcsán keresztül menő és a fénysugárral párhuzamos egyenesnek és a c kör síkjának D metszőpontjából DA, DB érintőket húzunk a c körhez; az A, B érintőpontokon keresztül menő MA, MB alkotók képezik a saját árnyékhatárt. Ezeknek, valamint a c kör $AIEB$ ívének vetett árnyéka a képsíkokra a kúp vetett árnyéka.

A c kör $AFGLB$ íve azonban a kúp belső felületére is vet árnyékot, mely az $AFGLB$ görbe vonal. Ennek F pontját megkapjuk, ha a kúpot az *MF* alkotó *MFD* fénymenti síkjával az *MI* alkotóban metszük: az *F* pont az *MI* alkotó $\overline{F}$ pontjára veti árnyékát. Hasonlókép határozandók meg az $\overline{AFGLB}$ görbe többi, azaz más pontjai.



202. ábra.

E görbéről kimutathatjuk, hogy az egy *d* ellipsisnek íve, ha a *D* pont a *c* körön kívül van, valamint azt, hogy 1-ső képe, *d'*, szintén ellipsis, melynek gyújtópontja a kúp *M* csúcsa.

E végből vegyük 1-ször figyelembe, hogy ha egy forgáskúp egyik palástját párhuzamos egyenesekkel metszük, akkor a lemetszett vonaldaraboknak — a kúp párhuzamos húrjainak — felező pontjai egy sikban feküsznek. Ugyanis a párhuzamos húrok párhuzamos síkokban képzelhetők; minden ily **S** sik a kúpot egy e ellipsisben metszi, melynek főtengelye a kúp tengelyén keresztül menő és a húrokkal párhuzamos **U** síkban van. Az **U** sík a kúpot két alkotóban metszi, s ezért az e ellipsisek középpontjai, egy a kúp csúcsán keresztül menő u egyenesen feküsznek.

De minden e ellipsisnek a főtengelylyel párhuzamos húrjai a melléktengelytől feleztetnek. Az e ellipsis melléktengelyein feküsznek tehát a kúp párhuzamos húrrendszerének felezőpontjai. Minthogy azonban az e ellipsisek melléktengelyei az u egyenest, mely a középpontokat tartja, metszik, azért a melléktengelyek ugyanegy **V** síkban vannak; és evvel egyszersmind kimutattuk, hogy a kúp párhuzamos húrjainak felező-pontjai is a **V** sikban vannak.

Gondoljunk 2-szor a d görbe keletkezésére. A d görbe pontjait megkapjuk, ha a kúpon fekvő c kör pontjain keresztül a fénysugarakkal párhuzamosan húrokat húzunk és a kúpot ezekkel metszük; a metszőpontok a d görbe pontjai. Minthogy a c kör pontjai és a húrok felezőpontjai egy-egy síkban vannak, azért a húrok második végpontjai, tehát a d görbe pontjai és ugyanegy síkban feküsznek. A d görbe tehát a forgáskúpnak metszése egy síkkal, mely a fénysugaraknak jelzett helyzeténél: ellipsis.

Hogy az ellipsis 1-ső képének tengelyeit megkapjuk, forgassuk a kúpot és az MD fénysugarat a kúp tengelye körül a 2 dik képsíkkal párhuzamos helyzetbe. A c kör G és J pontja ekkor az F és R pontba, a D pont D_1-be jut. Az F és R ponton keresztül menő és az MD_1 gyel párhuzamos egyenesek a MR, illetve MF kúpalkotót két pontban a G_1, H_1 pontokban metszik; ezek összekötő egyenesének felezőpontja O_1.

A d görbe sikjának forgatott helyzete a G_1 O_1 egyenesnek 2-ik projicziáló síkja; a G_1, H_1 pontok a kimetszett d ellipsis főtengelyének végpontjai; az O_1 pont annak középpontja. A G_1, H_1, O_1 pontok visszaforgatva a G, H, O helyzetbe jutnak, s ezért $\overline{G'H'}$ a d' ellipsisnek főtengelye, O' annak középpontja, M annak egyik gyújtópontja, r az M-hez tartozó vezérlő vonal, ha r a $\overline{HG}$ 1-ső nyomán megy keresztül $\overline{H'G'}$-re merőleges.

Ha a d sikja a c kör sikját a q egyenesben metszi, akkor a d' pontjai a c'-ból az r, q' egyenesek és az M pont segélyével, mint a

197. ábrában szerkeszthetők. Ekkép lett a c' görbe az I' pontjából és érintőjéből, a d' görbe F' pontja és érintője szerkesztve.

A mellett hogy a d ellipsis a c' körrel az M pontra és s' tengelyre vonatkozólag perspektiv helyzetü *collinear* alakzat, még az s' tengelyre vonatkozólag perspektiv helyzetü *affin* alakzat is. De ezen affinitásnál a c' görbe $A'FB'$ ívének a d' ellipsis $AF'B'$ íve felel meg, mig a collineatiónál a d' görbe $A'H'B'$ íve.

Ezt kimutatandó vegyük tekintetbe a következőket: ha egy körhez két szelőt húzunk, akkor a nyert metszőpontok közül bármily kettőnek és a másik kettőnek összekötő egyenesei egymást egy egyenesen a pontnak a körre vonatkozó polárisán metszik. Igy a D' pontból a c' körhez húzott $D'F'I'$, $D'G'J'$ szelők $I'J'$, $F'G'$ metszőpontjainak összekötő egyenesei egymást a D' pontnak a c' körre vonatkozó polárisán s'-ön metszik. Ezen U metszőponton megy keresztül az $\overline{F}\overline{G}'$ egyenes is, mert az $A'\overline{F}'\overline{G}'B'$ ív az $A'I'J'B'$ ívvel az s' tengelyre collinear, vagy ha ezt más uton akarjuk megérteni: az MIJ síknak, a c kör síkjának és az d ellipsis síkjának metsző egyenesei s, IJ, $\overline{FG}$ egymást ugyanegy pontban metszik, tehát az $I'J'$, $\overline{F}'\overline{G}'$ metszőpontja az s'-ön van.

Minthogy a c' körnek $F'G'$ szelője és a d' ellipsisnek $\overline{F}'\overline{G}'$ szelője egymást az s' egyenesen metszik, az $F\overline{F}'$, $G'\overline{G}'$ sugarak pedig párhuzamosak (a fénysugár 1-ső képével) és ez a jelenség minden az G', $\overline{G}'$ pontokon keresztül menő és az s'-ben találkozó szelőpárnál bekövetkezik: a c' kör a d' ellipsisnek a perspectiv helyzetü affin alakzata.

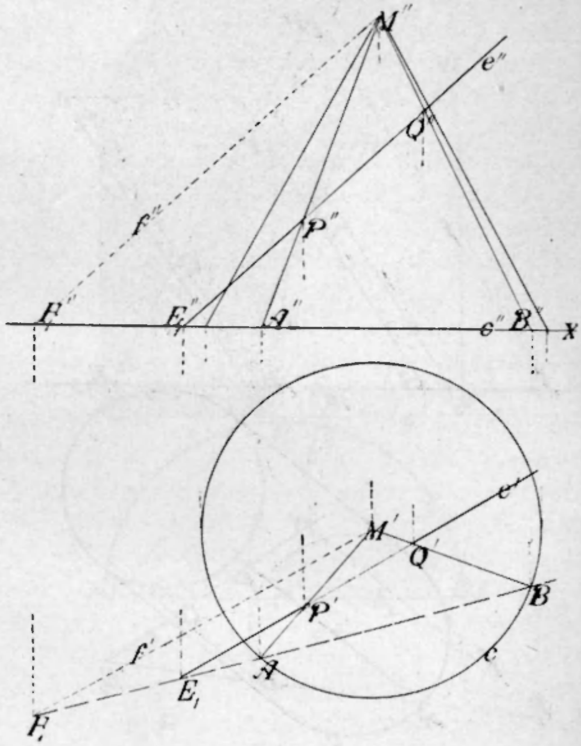
Ennek egyszerü következménye, hogy a d' ellipsis melléktengelye a c' kör átmérőjével egyenlő. E szerint a d' ellipsis tengelyeit a D' pontból és a c' körből ekkép szerkeszthetjük: a c' körnek az MD' egyenessel párhuzamos érintője $E'E'$ a c' kört az E' pontban érinti; ED' egyenes a c' kört még egy pontban találja; ez utóbbi pontnak összekötő egyenese az M-mel, az $E\overline{E}'$ érintőt a d' ellipsis melléktengelyének végpontjában $\overline{E}'$-ben metszi. $\overline{E}O' \perp MD'$ a d ellipsis melléktengelye, s mert az M annak egyik gyújtópontja, azért $M'\overline{E}'$ vonaldarab egyenlő d' félfőtengelyével.

A d ellipsis 2-dik képe d'' szintén ellipsis lesz (mit azonban egészen elemi uton bebizonyitani nem tudunk); d'' pontjainak érintőinek, kapcsolt átmérőinek, legalacsonyabb pontjának $(\overline{G}'')$, azon pontjának (K''), melynek érintője a képtengelyre merőleges, stb. szerkesztése, az ábrából látható.

172. — *170. feladat. Szerkesztendő egy e egyenes P, Q metszőpontja egy kúppal, valamint egy hengerrel.*

Megoldás. (203. és 204. ábrák.) Az e egyenesen keresztül oly síkot fektetünk, mely a kúpot, illetve a hengert alkotók szerint metszi. A metszősík tehát a kúp csúcsán megy keresztül, illetve a hengernél, annak alkotóival párhuzamos. A metszősík a vezérlő vonal síkját egy E_1F_1 egyenesben, a vezérlő vonalat az A, B pontokban metszi; az A, B pontokon keresztül menő alkotóknak metszőpontjai az e egyenessel a keresett P, Q pontok.

Végezzük be e könyvet a következő szerkesztéssel:

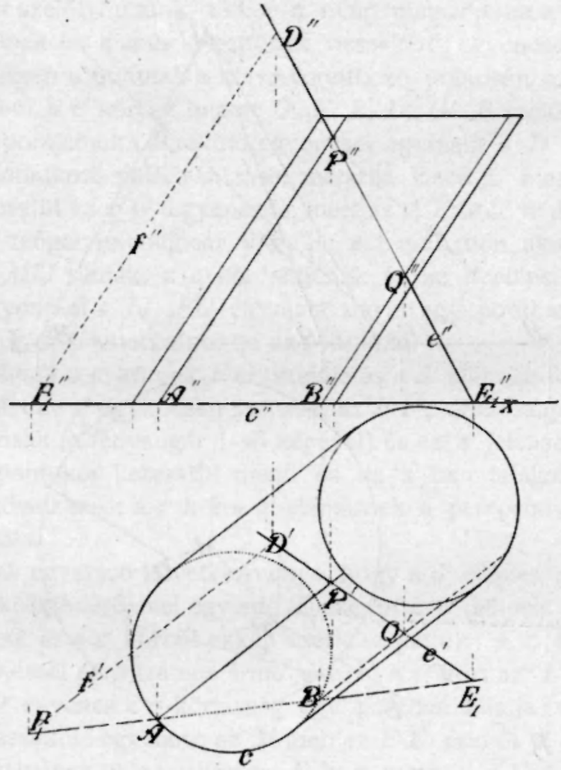


203. ábra.

173. — *171. feladat. Egy fülke árnyékának szerkesztése.*

Megoldás. (205. ábra.) A fülke alakjáról ekkép szerzünk fogalmat: Egy forgáshengert képzelünk, melynek tengelye az 1-ső képsíkra merőleges; ezt az 1-ső képsíkkal a c körben és az 1-ső képsíkkal párhuzamos síkkal a BHJ körben metszük. A hengerbe beírunk egy gömböt, mely azt ez utóbbi kör szerint érinti; a gömbnek azt a felét eltávolítjuk, mely a c és a BHJ kör síkja között van; végre a hengert és a megmaradt félgömböt a henger tengelyén keresztül fektetett síkkal két részre osztjuk; e részek bármelyikének belső felülete képezi a fülkét. A fülke tehát egy félhengerdarabból és egy negyedgömbből van összetéve, melyek egymást egy félkör szerint érintik.

Ennek belfelületére az $ABDHE$ határlóvonal veti árnyékát, és pedig: az AB hengeralkotó az 1-ső képsíkra és a $\overline{B}$ pontján keresztűl menő alkotóra, a BH körív még a hengerre veti árnyékát, de egy



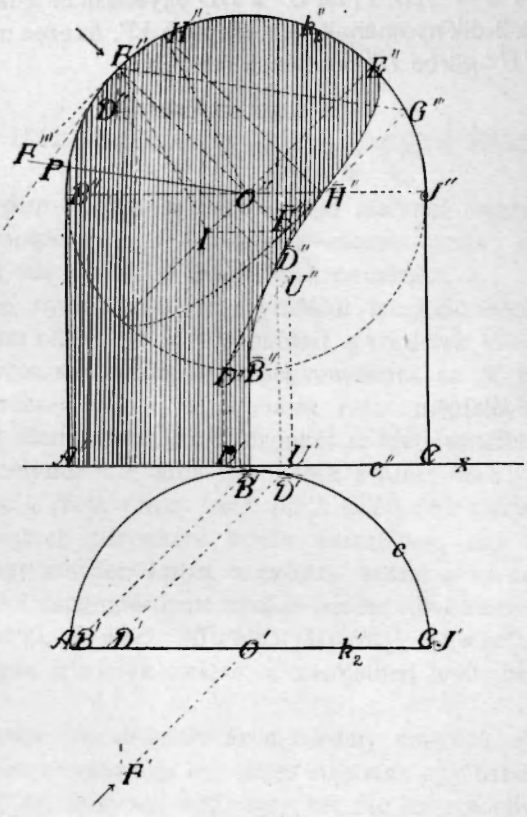
204. ábra.

BDH térgörbére, végül a HE körív a gömb HE körívére veti árnyékát.

Az AB hengeralkotónak vetett árnyéka, fénymenti síkjának metszése AB' az 1-ső képsíkkal és a hengerrel; a B pont $\overline{B}$-be veti árnyékát.

A BDH ív egyes pontjainak, pl. a D pontnak vetett árnyékát megkapjuk, ha a hengert a D pont 1-ső projiciáló sugarának fénymenti síkjával metszük a D ponton keresztül menő alkotó szerint; ezen alkotón van a D pontnak vetett árnyéka $\overline{D}$.

A HE körívnek vetett árnyéka a gömb belfelületére egy $\overline{HE}$ főkörnek íve. Az a k_2 kör, melyen a HE ív fekszik, a 2-dik képsíkkal párhuzamos. Ha az O középpontján keresztül menő fénysugárnak 2-dik projiciáló síkját 3-dik képsíknak választjuk, és erre vonatkozólag a gömbnek és a fénysugárnak 3-dik képét (ez utóbbi $O''F'''$)



205. ábra.

meghatározzuk, akkor a 144. feladat alapján megkapjuk annak az ellipsisnek féltengelyeit $O''E''$, $O''F''$-öt, melyen a $\overline{HE}$ ívnek 2-dik képe fekszik. Magát a $\overline{H}''$ pontot az $O''J''$ egyenesen abból a körülményből szerkeszthetjük, hogy a k''_2 kör az $E''\overline{H}''F''$ ellipsissel affin ($F''I//O''J''$, az I pont az $O''E''$ egyenesen van, $O''H''//IF''$, $H''\overline{H}''//O''F''$).

A $\overline{BDH}$ görbe D pontjának érintője metszővonala két síknak:

az egyik a D pontnak, mint a fülke hengerén fekvő pontnak érintősíkja, a másik szintén a $\bar{D}$ pontnak, mint azon hengeren fekvő pontnak érintősíkja, melynek vezérlő vonala a k_2 kör, alkotói pedig a fénysugárral párhuzamosak. Az 1-ső érintősík projiciáló az 1-ső képsíkra; nyomai $\bar{D}'V'$, $V'V''$; a második érintősík keresztül megy a D alkotón és a D pontnak, mint a k_2-n fekvő pontnak DP érintőjén, mely a 2-dik képsíkkal párhuzamos. Ez utóbbi síknak tehát 2-dik nyoma $U''V''//D''P$, ha U'' a $D\bar{D}$ egyenesnek 2-ik nyoma. A két érintősík 2-dik nyomának metszőpontja V'', és ezen megy keresztül a $\bar{B}''\bar{D}''\bar{H}''$ görbe $\bar{D}''$ pontjának érintője.

FÜGGELÉK.

A trieder descriptiv megoldása.

A trieder fogalma. Három sík, melynek véges távolban egy közös pontja van, a tért nyolcz részre osztja; e részeket *trieder-térnek* vagy röviden *trieder*-nek nevezzük.

Hogy e nyolcz triedert egymástól megkülönböztessük, jelöljük a felvett három sík közös pontját, a triederek közös *csúcsát* M-mel, a három sík három metszőegyenesének az M ponttól határolt egyik részét a, b, c-vel, a másik részt megfelelőleg a', b', c'-vel. E hat félsugár abc, $a'b'c'$ tizenkét szöget (szögfelületet) határoz meg, melynek t. i. ama félsugarak szárai; ezek: (ab), (bc), (ca), (ab'), (ac'), (bc'), (ba'), (ca'), (cb'), $(a'b')$, $(b'c')$, $(c'a')$. Három ily szög, melynek páronként közös szára van, egy triedernek határlapja vagy röviden *lapja*, a szögek szárai a triedernek *élei*. A három síktól meghatározott nyolcz trieder következő: $M(abc)$, $M(abc')$, $M(ab'c)$, $M(a'bc)$, $M(a'b'c')$, $M(a'b'c)$, $M(a'bc')$, $M(ab'c')$, hol M az egyes triederek csúcsa, a zárójelben levő betűk pedig annak élei.

Egy trieder *csúcstriedere* az a trieder, melynek minden éle az előbbi élének kiegészítője egy teljes sugárra; egy trieder *melléktriedere* pedig az, melynek egy vagy két éle az eredetivel közös, ellenben a másik két-, illetve egy éle az eredetinek kiegészítője egy teljes sugárra.

Igy az előbbi nyolcz trieder közül az $M(abc)$ triedernek csúcstriedere $M(a'b'c')$, melléktriedere pedig a többi hat. —

Egy trieder minden élével a másik két élen keresztül menő lap *szemben fekvő*. A trieder két-két élétől képezett szöget a *trieder oldalának*, és két-két lapjától bezárt azon szöget, melynek szögterében a trieder bennfoglaltatik a *trieder szögének*, az oldalakat és szögeket együttvéve a trieder *alkotó részének* nevezzük. A trieder egy *oldala mellett fekvő*-nek nevezzük azt a két szöget, melynek egyik határlapját, az oldalon keresztül menő lap képezi; a harmadik szög az *oldallal szemben fekvő.*

E szerint az *M(abc)* trieder oldalai a

$$(bc) = \mathfrak{a}, \quad (ca) = \mathfrak{b}, \quad (ab) = \mathfrak{c}$$

szögek, és ezen oldalakkal szemben fekvő szögek

$$(ba,\ ac) = \alpha, \quad (cb,\ ba) = \beta, \quad (ac,\ cb) = \gamma$$

Ha ama nyolcz trieder körül, melyet három sík határól, egynek oldalai és szögei ismeretesek, akkor a többi hétnek is ismeretesek oldalai és szögei. Ugyanis a csúcstriedernek oldalai és szögei az eredetiével megegyezők, a melléktriedereknek pedig egy oldala és a véle szemben fekvő szög megegyező, a másik két oldal és szög pedig az eredeti két oldalnak és szögnek kiegészítője.

Igy, ha az *M(abc)* triedernek oldalai és szögei $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, α, β, γ, akkor az $M(a'bc)$ és $M(ab'c')$ melléktriedernek oldalai és szögei: $\mathfrak{a}$, $2R-\mathfrak{b}$, $2R-\mathfrak{c}$, α, $2R-\beta$, $2R-\gamma$.

Minden trieder oldalainak összege a $4R = 360^0$ és 0^0 között, a szögek összege pedig a $6R$ és $2R$ között van.

Ugyanis a felső határnál a trieder éleinek és lapjainak ugyanegy síkban kellene feküdni; az ily lapok azonban nem képeznek egy tulajdonképi triedertért, hanem egy elkorcsosultat. Az alsó határnál a trieder élei párhuzamosak; a trieder csúcsa végtelen távol van, az oldalak összege 0^0, a szögek összege $2R$. Az ily lapok azonban szintén csak elkorcsosult triedertért (három oldalú hasábtért) képeznek, mert a tulajdonképi triedernek csúcsa végesben van. Ha az ily elkorcsosult triedernek egyik lapját a szemben fekvő élre merőleges g egyenese körül forgatjuk, akkor a forgó lap a másik kettővel, már tulajdonképi triedertért képez. De a forgatásnál a forgó lap hajlásszöge a másik kettőhöz külön külön a forgásszöggel egyidejüleg nagyobbodó szöget képez, és ezért a trieder szögösszegére nézve $2R$ megmarad alsóhatárnak. — Az oldalakra és szögekre nézve még megjegyzendő, hogy bármily két oldalnak összege nagyobb (tehát különbsége kisebb) a harmadiknál, és bármily két szögnek összege kisebb, mint a harmadik szögnek és két derékszögnek összege, mert különben a melléktriederének oldalösszege fölülmulná a négy derékszöget és a szög összege a két derékszög alatt maradna.

A trieder descriptiv megoldására vonatkozó feladatok, a triedert meghatározó három alkotó részből, a hiányzó három alkotó rész szerkesztését kivánják. E szerint az $M(abc)$ trieder alkotó részei, t. i. $\mathfrak{abc}$ oldalai és $\alpha\beta\gamma$ szögei közül a következők lehetnek adva:

1. egy oldal és a két mellette fekvő szög, pl.: $\mathfrak{b}$, α, γ,
2. két oldal és a közbezárt szög, pl. . . . . $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, γ,
3. a három oldal . . . . $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$,
4. a háromszög . . . . α, β, γ,
5. két oldal és az egyikkel szemben fekvő szög, pl. $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, α,
6. két szög és az egyikkel szemben felvő oldal, pl. γ, α, $\mathfrak{a}$,

és ezekből kell a három hiányzó alkotó részt szerkeszteni.

E feladatok megoldásaira vonatkozólag általánosságban a következőket mondhatjuk: A trieder egyik, pl. az $[ac]$ határlapját az 1-ső képsíkba helyezzük olyképen, hogy a $[bc]$ határlapja a 2-dik képsíkra merőleges legyen. A harmadik határlap $[ba]$, ekkor a képsíkok irányában egy általános helyzetű sík, melyet a feladat adataiból kell megszerkesztenünk. Ha ez megtörtént, akkor a trieder hiányzó alkotó részei, melyek ismert egyenesek vagy síkok hajlásszögei, az ábrázoló geometria általános módszerével megállapíthatók.

Térjünk az egyes feladatok megoldásaihoz:

1. *Adva van egy triedernek $M(abc)$-nek egy oldala és a két e mellett fekvő szög* $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}$, γ; *szerkeszszük a hiányzó alkotó részeket* β, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{c}$-t.

Megoldás. (206. ábra). A trieder $[ac]$ lapját az 1-ső képsíkban képzelem elhelyezve akképen, hogy a c éle az x képtengelyre merőleges legyen; az a és a c él ekkor egybeesik 1-ső képével és az 1-ső képben bezárja a $\mathfrak{b}$ szöget.

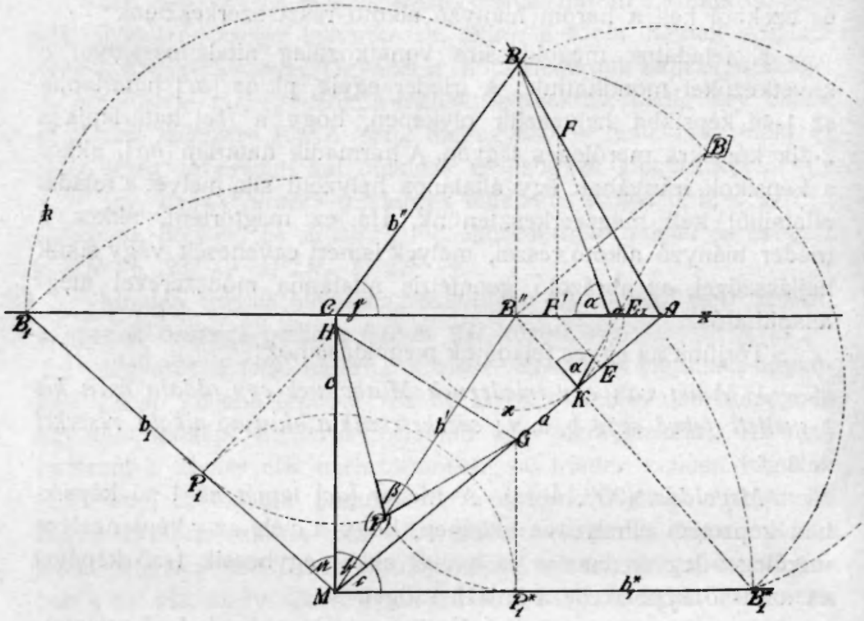
Az a, c egyenesek az $[ab]$, illetve $[cb]$ lapoknak 1-ső nyomai; ezeknek 2-dik nyomát AB és CB-t az α és γ 1-ső képsíkszögből akkép határozzuk meg, hogy az 1-ső képsík fölött lévő félsíkjai az ac és ca félsíkkal képezzék az α és γ szöget. Ezután felkeressük az $[ab]$, $[cb]$ síkok $b = MB$ metszővonalának $MB' = b'$, $CB = b''$ képeit; ebből a $(ba) = \mathfrak{c}$, $(bc) = \mathfrak{a}$ szögeket, végre az $[ab]$, $[bc]$ síkok hajlásszögét β.

Leborítjuk tehát a b egyenest c és a körül forgatva az 1-ső képsíkba, a b_1 és $b_1{}^*$ helyzetbe (a B pont használatával); $(b_1c) \sphericalangle = \mathfrak{a}, (b_1{}^*a) \sphericalangle = \mathfrak{c}$. A b él egy tetszés szerinti P pontjának leborított helyzete a b_1 és $b_1{}^*$-on legyen P_1, $P_1{}^*$, $(MP_1 = MP_1{}^*)$; e pontokban a b_1 és $b_1{}^*$ re emelt merőlegesek a c és a élet a H, G pontokban metszik. A HG, HP_1, $GP_1{}^*$ oldalakból képezett $H(P)G$

háromszög congruens a HPG háromszöggel, és mert HP és $PG \perp b$-re, azért $HG \perp b'$-re és $HPG \sphericalangle = H(P)G \sphericalangle = \beta$.

2. *Adva van egy $M(abc)$ triedernek két oldala és a közbezárt szög* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, γ; *szerkesztendők a hiányzó alkotó részek* α, β, $\mathfrak{c}$.

Megoldás. (206. ábra.) Legyen a trieder akképen elhelyezve a képsíkok irányában, mint az 1-ső feladatnál. Ismerjük tehát a triedernek c élét, mely merőleges x-re; a élét, mely c-vel a $\mathfrak{b}$ szöget képezi; az $[cb]$ sík 1-ső képsík szögét γ-t, melyből $[cb]$ szerkeszthető. De ismerjük továbbá az $\mathfrak{a}$ oldalt, tehát a c körül az 1-ső képsíkba lebo-



206. ábra.

rított b él leborított helyzetének b_1-nek hajlásszögét c-hez, melyből b-t képeiben: $MB' = b'$, $CB = b''$ szerkesztjük. Az ab egyeneseken keresztül menő $[ab]$ síknak nyomai $a = MA$ és AB. A trieder hiányzó alkotó részei: α az $[ab]$ sík 1-ső képsíkszöge, β az $[ab]$, $[cb]$ síkok hajlásszöge, végre $\mathfrak{c}$ az ab egyenesek hajlásszöge, mint az ábrából látjuk, könnyen szerkeszthető.

3. *Adva van egy $M(abc)$ triedernek három oldala* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$; *keresendő a háromszög* α, β, γ.

Megoldás. (206. ábra.) A triedert a képsíkok irányában szintén úgy helyezzük el, mint az előbbi feladatoknál: a c él merőleges x-re, a $(ca) \sphericalangle = \mathfrak{b}$.

A $[bc]$ és $[ab]$ síkokat most 1-ső nyomukból, c és a-ból, valamint azon viszonyokból szerkesztjük, hogy metszővonaluk b, a c és az a nyomokkal $\mathfrak{a}$ és $\mathfrak{c}$ szöget képezi. A c mellé visszük az $\mathfrak{a}$ szöget, ennek hiányzó szára b_1; az a mellé a $\mathfrak{c}$ szöget, ennek hiányzó szára $b_1{}^*$. Ha b_1 az x tengelyt egy B_1 pontban metszi és $B_1{}^*$ a $b_1{}^*$-on akkép van megállapítva, hogy $MB_1 = MB_1{}^*$ akkor a B_1, $B_1{}^*$ pontok a b él egy B pontjának leborított helyzetei a $[cb]$ és $[ab]$ sík c és a nyoma körül az 1-ső képsíkba. A B_1 pont c körül forgatva egy k kört ír le a 2-dik képsíkon, melynek 1-ső képe x; a $B_1{}^*$ az a körül forgatva szintén egy kört ír le, melynek 1-ső képe a $B_1{}^*$ pontból az a-ra bocsátott merőleges $B_1{}^*KB'$. Ez utóbbi az x-et a B pontnak 1-ső képében B'-ben metszi, melyből B-nek helyzete a k körön és így a $MB = b$ él, valamint annak $MB' = b'$ és $CB = b''$ képei.

A trieder hiányzó alkotó részei γ, α, β ezután szerkeszthetők, mint az $[ab]$, $[bc]$ síkok 1-ső képsíkszögei és hajlásszöge.

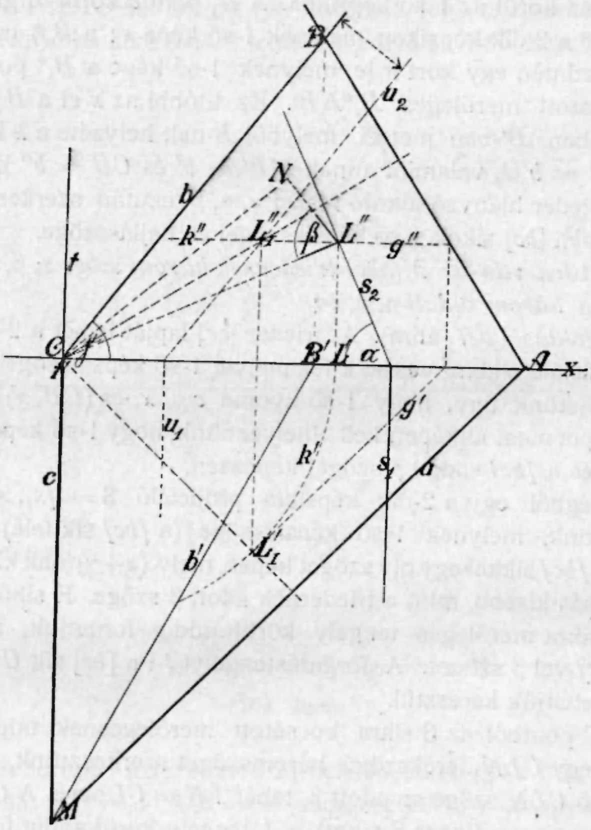
4. *Adva van az $M(abc)$ triedernek három szöge α, β, γ; szerkeszszük a három oldalt* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$-*t*.

Megoldás. (207. ábra). A trieder $[bc]$ lapját ismét a 2-dik képsíkra projiciáló síkban vesszük fel, melyet 1-ső képsíkszögéből γ-ból szerkeszthetünk úgy, hogy 1-ső nyoma $c \perp x$, és $(CB, x) \sphericalangle = \gamma$. Az $[ab]$ lapot most akképen kell elhelyeznünk, hogy 1-ső képsíkszöge α legyen és a $[bc]$ síkkal β szöget képezzen.

E végből egy a 2-dik képsíkra projiciáló $\mathbf{S} = [s_1, s_2]$ síkot szerkesztünk, melynek 1-ső képsíkszöge (a $[bc]$ sík felé) α. E sík jelenleg a $[bc]$ síkkal egy oly szöget képez, mely $(\alpha + \gamma)$-nak kiegészítő szöge, tehát kisebb, mint a triedernek adott β szöge. E síkot egy az 1-ső képsíkra merőleges tengely körül addig forgatjuk, mig nem képez $[bc]$-vel β szöget. A forgatástengelyt t-t a $[bc]$ sík C tengelypontján tehetjük keresztül.

A C pontból az $\mathbf{S}$ síkra bocsátott merőlegesnek talpát L-lel jelölvén, egy CLN derékszögű háromszöget szerkesztünk, melynek L-nél levő CLN szöge az adott β, tehát $LN = CL \sin\beta$. A CL egyenest (és a reá merőleges $\mathbf{S}$ síkot) a t tengely körül addig forgatjuk, mig L pontja a $[bc]$ síktól nem lesz LN távolságra; ekkor ugyanis CL a $[bc]$ síkkal $(90^0 - \beta)$ szöget, és a reá merőleges $\mathbf{S}$ sík β szöget képez. Az L pontot tehát a $[bc]$ síkkal párhuzamos és attól LN távolságra levő $\mathbf{U} = [u_1, u_2]$ síkba kell forgatnunk (91. feladat). E forgatásnál L a k körön mozog, és forgatott helyzetének L_1-nek képei L_1', L_1''. Az L_1 pontban a CL_1 egyenesre merőlegesen álló sík, melynek nyomai a g fővonallal lettek szerkesztve, már a kivánt helyzetű $[ab]$ lap. E sík a $[bc]$ síkot a trieder b élében, 1-ső nyoma a, a *c* egyenest a trieder *M* csúcsában metszi; a keresett oldalak a *bc*, *ca*, *ab* egyenes párok $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ szögei, melyek a 206. ábra folytán könnyen szerkeszthetők. —

A triedernek eddig tárgyalt négy feladata olyan volt, hogy azokat az adatok bármily nagyságánál megoldhattuk, hacsak az oldalösszeg és szögösszeg ismert határait nem lépték túl, és bármily



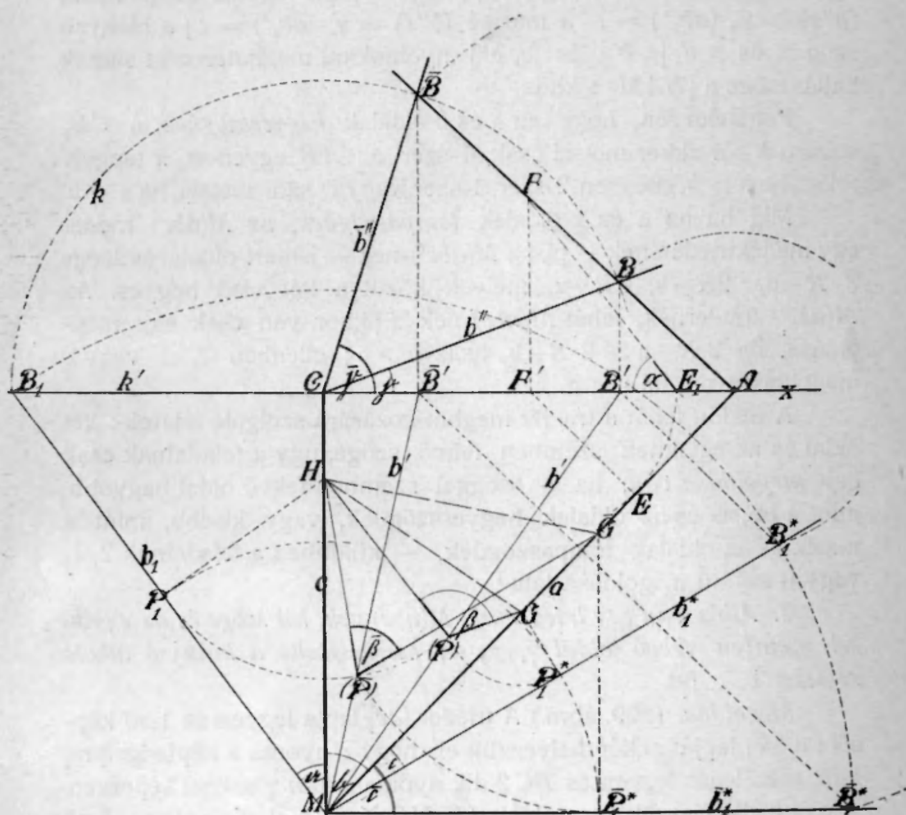
207. ábra.

két oldal összege (3. feladat) nagyobb volt a harmadiknál, végre bármily két szög összeg kisebb volt két derékszög és a harmadik szög összegénél. Az adatok a mellett csak *egyfélekép* határozták meg a triedert, azaz a szerkesztések a hiányzó alkotó részeket csak egyféle nagyságban szolgáltatták. A következő két feladat abban különbözik az előbbiektől, hogy adatai bizonyos nagysága mellett a feladatnak 2, 1 vagy 0 számú megoldása lehet, s ezért e feladatok az úgynevezett *kétes esetűek* (casus ambiguus !).

Térjünk ezeknek megoldásához, tehát:

5. *Adva van egy triedernek, M(abc)-nek, két oldala és az egyikkel szemben fekvő szög* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\varkappa$; *szerkesztendők a hiányzó alkotó részek* β, γ, $\measuredangle$.

Megoldás. (208. ábra.) A $[ca]$ lapot ismét az 1-ső képsíkba helyezzük úgy, hogy a c él az x tengelyre legyen merőleges. Az



208. ábra.

$[ab]$ lapnak ismeretes 1-ső nyoma a, és 1-ső képsíkszöge $\varkappa$; ebből a 2-dik nyom BA szerkeszthető. Az $\mathfrak{a}$ oldalból a $[bc]$ lapban fekvő b élnek c körül leborított helyzete b_1 meghatározható $(b_1c) \measuredangle = \mathfrak{a}$.

Elhelyezvén ekképen az $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\varkappa$ adatokat a b_1 egyenest a c él körül addig forgatjuk, mig a forgatott b_1 bele nem jut az $[a, AB]$

nyomokkal meghatározott síkba. Ez akkor következik be, a midőn a $(b_1, x) = \bar{B}_1$ pont, mely a forgatás alkalmával a 2-dik képsíkon a C középpontú k kört írja le, az AB nyomba nem jut. Minthogy pedig a k kör az AB nyomot 2, 1, vagy 0-szor metszheti az x tengely fölött, a feladatnak ezen eseteknek megfelelőleg 2, 1, vagy 0 számú megoldása lehet.

Az ábra azt az esetet mutatja, a midőn k az AB egyenest két pontban, B, $\bar{B}$-ben metszi. Ekkor tehát két trieder keletkezik: az egyik $M_1(abc)$, a másik $M(a\bar{b}c)$; az 1-sőnek egy szöge és oldala $(b''x) = \gamma$, $(ab_1{}^*) = \mathfrak{c}$, a másiké $(\bar{b}''x) = \bar{\gamma}$, $(a\bar{b}_1{}^*) = \bar{\mathfrak{c}}$; a hiányzó szög β és $\bar{\beta}$ a $[c, b'']$ és $[c, \bar{b}'']$ nyomokkal meghatározott síknak hajlásszöge a $[BAM]$ síkhoz.

Feltételezvén, hogy az $\mathfrak{a}$ és $\mathfrak{b}$ oldalak *hegyesszögűek*, a CB_1 sugarú k kör akkor metszi csak 1-szer az AB egyenest x tengely fölött, ha $\mathfrak{a} > \mathfrak{b}$, ellenben 2-szer, 1-szer, vagy 0-szor metszi, ha $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$.

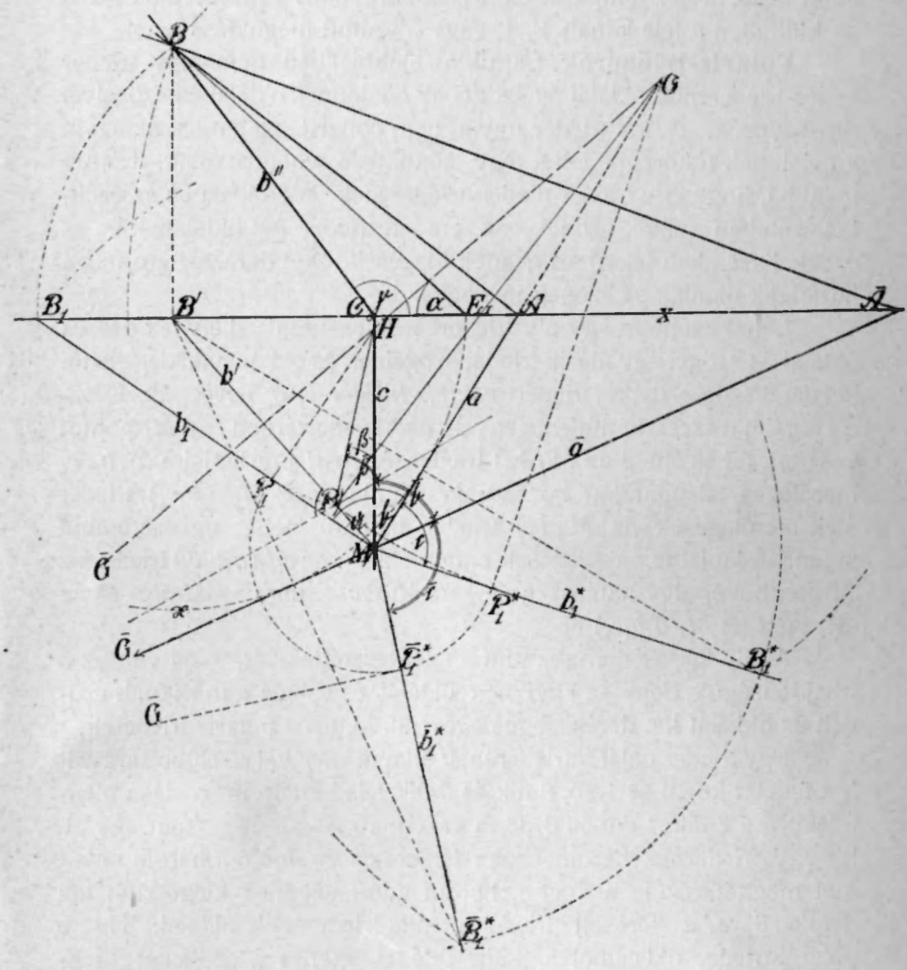
Mig ha az $\mathfrak{a}$ és $\mathfrak{b}$ oldalak *tompaszögűek*, az $M(abc)$ trieder egy melléktriederének — pl. az $M(abc')$-nek — ismert oldalai és szöge $2R - \mathfrak{a}$, $2R - \mathfrak{b}$, $2R - \alpha$, melyek közül a két első hegyes. Az $M(abc')$ triedernek, tehát $M(abc)$-nek is akkor van csak egy megoldása, ha $2R - \mathfrak{a} > 2R - \mathfrak{b}$, azaz $\mathfrak{b} > \mathfrak{a}$; ellenben 2, 1 vagy 0 megoldása van, ha $\mathfrak{b} < \mathfrak{a}$.

A midőn tehát a trieder meghatározására szolgáló adatok: két oldal és az egyiknek szemben fekvő szöge, úgy a feladatnak csak *egy megoldása van,* ha a szöggel szemben fekvő oldal nagyobb, mint a másik és az oldalak hegyesszögűek, vagy kisebb, mint a másik és az oldalak tompaszögűek, – különben a feladatnak 2, 1, vagy 0 számú megoldása lehet.

6. *Adva van egy triedernek, $M(abc)$-nek, két szöge és az egyikkel szemben fekvő oldal* γ, α, $\mathfrak{a}$; *szerkeszszük a hiányzó alkotó részeket* $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, β-*t.*

Megoldás. (209. ábra.) A trieder $[ac]$ lapja legyen az 1-ső képsík; a $[cb]$ lapját akkép helyezzük el, hogy c nyoma a képtengelyre, x-re, merőleges legyen és BC 2-dik nyoma x-szel γ szöget képezzen. A c él mellé visszük az $\mathfrak{a}$ oldalt ($B_1MC\sphericalangle = (b_1c)\sphericalangle = \mathfrak{a}$) az 1-ső képsíkon. A b_1 egyenest a $[c, BC]$ síkba forgatjuk a c körül; forgatott helyzete b, ennek képei $b' = MB'$, $b'' = BC$. A BB' egyenest egy forgáskúp tengelyének tekintjük, melynek alkotói és érintősíkjai az 1-ső képsíkkal α szöget képeznek. E kúp metszése az 1-ső képsíkkal a $\varkappa$ kör (ennek középpontja B', sugara BB' $cotg\alpha$ egyenlő a $BB'E_1$ derékszögű háromszögnek $B'E_1$ befogójával, ha $BE_1B'\sphericalangle = \alpha$).

A b egyenes 1-nyomából, M-ből, a $\varkappa$-hoz húzható érintők a, a, a forgáskúp érintősíkjainak 1-ső nyomai; e síkok a meghatározandó triedereknek, $M(abc)$ és $M(\bar{a}bc)$-nek, harmadik lapjai, ha mindkét síknak 1-ső képsíkszöge a triedertér felé az adott α szög, mint a 209. ábrában. (A 206. ábra adatai mellett az M pontból a $\varkappa$ körhez vonható érintők közül csak az a érintő adná egy ily síknak 1-ső



209. ábra.

nyomát!) E síkoknak 2-dik nyomai BA és $B\bar{A}$; 1-ső nyomuk a és $\bar{a}$ a c-vel a hiányzó $(ac) = \mathfrak{b}$ és $(\bar{a}c) = \bar{\mathfrak{b}}$ oldalt határozzák meg.

Ha ezután a b egyenest az a, illetve $\bar{a}$ körül az 1-ső képsíkba forgatjuk a $b_1{}^*$ és $\bar{b}_1{}^*$ helyzetbe (a B pont segélyével), akkor az $(ab_1{}^*)$ és $(\bar{a}\bar{b}_1{}^*)$ szögek a keresett triedereknek harmadik oldalai $\mathfrak{c}$, $\bar{\mathfrak{c}}$

lesznek. A hiányzó β és $\overline{\beta}$ szögek, a $[c, CB]$ síknak hajlásszögei a $[BAM]$ és $[BAM]$ síkkal.

E feladatnak ismét csak *egy megoldása van*, ha az adott oldallal szemben fekvő szög hegyesszögű és nagyobb, mint a másik adott szög, vagy tompaszögű és kisebb, mint a másik adott szög, — különben a feladatnak 2, 1, vagy 0 számú megoldása lehet.

Polaris-triederek. Láttuk az előbbiekben, hogy egy trieder csúcs-triederének oldalai és szögei az eredetinek oldalai és szögeivel megegyezők. A két trieder ugyan nem congruens, hanem az egyik a másiknak tükörképe lehet egy síktükörre vonatkozólag. Láttuk továbbá, hogy egy trieder mellék-triederének két oldala és az ezekkel szemben fekvő szögek, az eredeti trieder két oldalának és az ezekkel szemben fekvő szögeknek kiegészítői két derékszögre, mig a harmadik oldalak és szögek megegyezők.

Lehet azonban egy oly triedert is képzelnünk, melynek összes oldalai és szögei egy másik trieder szögeinek és oldalainak kiegészítői két derékszögre. Ily két triedert *polaris-triedereknek* nevezünk. Ezekről fogalmat szerezhetünk, ha egy $M(abc)$ triedertérben egy M_1 pontot veszünk fel és ebből az $M(abc)$ trieder $[bc]$, $[ca]$, $[ab]$ lapjaira a_1, b_1, c_1 merőleges félsugarakat bocsátunk. Minthogy az $M_1(a_1b_1c_1)$ trieder élei merőlegesek az $M(abc)$ trieder lapjaira, tehát egyszersmind amannak lapjai is merőlegesek ennek éleire: az $M_1(a_1b_1c_1)$ trieder az M pontból ép úgy határozza meg az $M(abc)$-t, mint az $M(abc)$ és az M_1 pont az $M_1(a_1b_1c_1)$-et.

Az ily két triedernek, mint a szerkesztetteknek, meg van az a tulajdonságuk, hogy az egyiknek oldalai és szögei a másiknak szögeit és oldalait két derékszöggé egészítik ki, azaz polaris-triederek.

Egy trieder polaris-triederének alkalmazásával az előbb tárgyalt hat feladat közül az 1-ső, 3-dik és 5-dik feladatnak megoldása megfelelőleg a 2-dik, 4-dik és 6-dikra vezethető vissza és viszont. Igy pl. ha egy triedernek három szöge ismeretes és ebből a három oldalt kell meghatározni, akkor a három adott szögnek kiegészítői két derékszögre, a keresett trieder polaris-triederének oldalai. Ha e polaris-trieder oldalaiból a 3-dik feladat szerint a szögeket megszerkesztjük, akkor ezzel megkaptuk az eredeti trieder oldalainak kiegészítő szögeit két derékszögre. E szerint a polaris-trieder alkalmazásával a triederek megoldásaira vonatkozó hat feladat háromra reducálható.