Függvénytan.

Dr Riesz Frigyes ny. rendes tanárnak az 1914-15 tanév I félévében tartott előadása után jegyezte
Szabó Jenő.

A függvénytan, vagy pontosabban az analitikus függvények tana, a komplex változós függvényeket vizsgálja. A jelen félévi előadásban a függvénytannak azon főbb eredményeit ismertetem, melyek jegyszólván egyetlen főtétel - a Cauchy-féle integráltétel - köré csoportosulnak, vagy mint annak előkészítői vagy mint közvetlen alkalmazásai.

A komplex számok és az azokkal való alapműveletek értelmezését és geometriai interpretációját ismertnek tételezem fel.

A komplex számok végtelen sorozatai.

Legyen **Definiciók.**

$$z_1, z_2, \ldots\ldots z_n, \ldots$$

a komplex számoknak egy sorozata. Erre vonatkozólag megállapítjuk a következő fontos definiciókul:

A sorozatról azt mondjuk, hogy a z szám felé tart (konvergál)

$$z_n \rightarrow z$$

akkor és csakis akkor, ha bármely kis pozitív ε számhoz található oly m szám, hogy hacsak $n \geqq m$, akkor

$$|z - z_n| \leqq \varepsilon$$

(vagyis ha $|z - z_n| \rightarrow 0$). A z számot - ha létezik - a sorozat határértékének nevezzük.

A z számot a sorozat torlódási helyének nevezzük, ha bármilyen kis számot is jelent az ε, végtelen sok oly n létezik, melyekre nézve a

$$|z - z_n| \leqq \varepsilon$$

egyenlőtlenség teljesül.

A sorozatról azt mondjuk, hogy korlátos ha létezik oly határozott véges M szám, hogy az összes n-ekre nézve

$$|z_n| \leqq M.$$

Definícióink geometriailag a következőkép fogalmazhatók meg:

A sorozat egy z határérték felé konvergál, ha a z pont körül bármely kis ε sugárral kört írva egy bizonyos n-től kezdve az összes z_n pontok ezen kör belsejében feküsznek.

A z pont a sorozat torlódási helye, ha a z pont körül bármely kis ε sugárral kört írva a sorozatnak végtelen sok z_n pontja van ezen kör belsejében.

A sorozat korlátos, ha minden pontja a kezdőpont (z=0) körül egy véges nagy M sugárral írt kör belsejébe esik.

Jól jegyezzük meg, hogy miben áll a két első fogalom közötti különbség. A határérték definiciója megkivánja, hogy egy határozott indextől kezdve az összes n-ekre teljesüljön a felírt egyenlőtlenség, ellenben a torlódási helyé nem azt kivánja, hanem csak azt, hogy végtelen sok n-re álljon. Ennélfogva, amíg egy sorozat határértéke egyszersmind torlódási helye is, addig fordítva már nem igaz, mert nem minden torlódási hely egyszersmind határérték is. Határértéke csak a konvergens sorozatnak van és pedig - mint ez a definicióból a

$$|z-z^*| \leq |z-z_n| + |z^*-z_n|$$

egyenlőtlenség alapján rögtön következik, a sorozatnak csak egy határértéke van. Ellenben torlódási helye a nem konvergens sorozatnak is lehet és pedig nem csak egy, de végtelen sok is.

Pl. az

$$1,\ 2,\quad 1,2,3,\quad 1,2,3,4,\quad 1,2,3,4,5, \ldots$$

minden elemét végtelen sokszor tartalmazó sorozatnak ezek valamennyien torlódási helyei is.

Ami a két fogalom közti összefüggést illeti, említettük már, hogy a határérték egyszersmind torlódási hely, de a torlódási hely nem okvetlenül határérték. Kimutathatjuk azonban a következőt. Ha a sorozat egy torlódási helye z, akkor kiválasztható belőle egy oly részsorozat, amely a z felé konvergál. Tekintsük u. i. azon köröket, $K_1, K_2, K_3, \ldots K_n, \ldots$, melyeket a z pont körül $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_n = \frac{1}{n} \ldots$ sugárral írunk. Mivel z az eredeti sorozat torlódási helye, azért ezen körök mindenikében végtelen sok z_n fekszik. Jelöljük z_{n_1}-vel az első, a K_1 körben fekvő elemet, z_{n_2}-vel az első, a K_2 körben fekvő és n_1-nél nagyobb indexű, z_{n_3}-mal az első, a K_3 körben fekvő és n_2-nél nagyobb indexű elemet s. i. t. Akkor

$$|z - z_{n_k}| \leq \varrho_k = \frac{1}{k} \to 0,$$

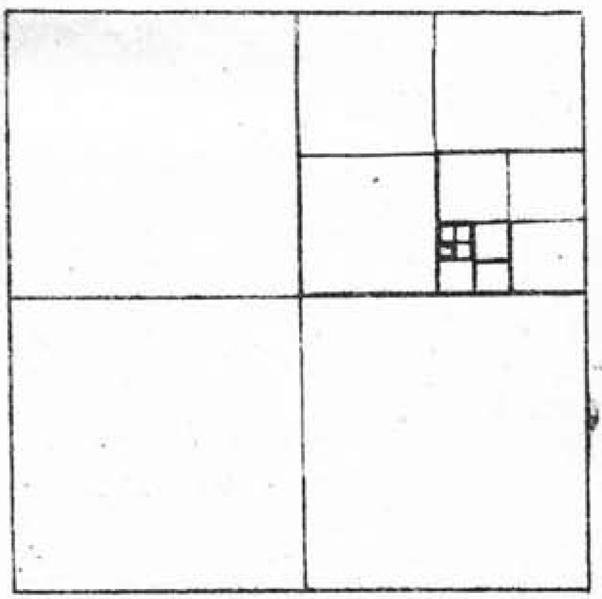
ami épen azt mondja ki, hogy a $z_{n_1}, z_{n_2}, z_{n_3} \ldots$ részsorozat a z határérték felé tart.

A torlódási helyekre vonatkozólag fundamentális a következő, u. n. Bolzano-Weierstrass féle kiválasztási tétel:

A Bolzano-Weierstrass-féle kiválasztási tétel.

Minden korlátos sorozatnak van legalább egy torlódási helye, vagy, amit az előző megjegyzés figyelembe vételével így is fogalmazhatunk: Minden korlátos sorozatból kiválasztható legalább egy konvergens részsorozat.

Mivel a sorozat korlátos, az összes z_n pontok benne vannak egy véges M sugarú körben, tehát egy ezen kör köré írt $2M$ oldalhosszúságú négyzetben. Osszuk fel ezen négyzetet, a szemközti oldalak felezési pontjainak összekötése által 4 kisebb egyenlő négyzetre. Az eredeti négyzetben végtelen sok z_n pont lévén, ezen új négyzetek valamelyikében szintén végtelen sok z_n pont van. Ezt hasonló módon ismét 4 négyzetre bontjuk, melyek valamelyikében ismét végtelen sok z_n fekszik s így folytatjuk tovább az eljárást.



Ily módon az egymásban foglalt és folyton kisebbedő négyzeteknek egy sorozatát nyerjük, amelyek egy z pont felé tartanak és amelyek mindenikében végtelen sok z_n pont van. Világos tehát, hogy bármilyen kis számot is jelentsen az ε, ha a beosztások számát, m-et elég nagynak veszszük (t. i. ha $\frac{1}{2^m} \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$), akkor a z pont körül ε sugárral írt körben végtelen sok z_n pont esik, mert ezen m-től kezdve az összes kis négyzetek is a ε sugarú kör belsejében vannak. Ez pedig épen azt mondja ki, hogy a z pont a sorozat torlódási helye.

A torlódási hely és a korlátoltság értelmezései (a második, geometriai fogalmazásban), valamint az azokat követő fejtegetéseink úgyszólván szószerint kiterjeszthetők a komplex számok (síkbeli pontok) olyan halmazaira is, melyek nincsenek sorozatba elrendezve és esetleg el sem rendezhetők, mint pl. az összes pontok, vagy egy körvonal összes pontjai, vagy az összes valós számok, vagy az irracionális valós számok. A Bolzano-Weierstrass-féle tétel halmazokra a következőképen szól:

<u>Minden korlátos és végtelen sok pontból álló halmaznak van legalább egy torlódási helye.</u> Vagy: <u>minden korlátos és végtelen sok pontból álló halmazból kiválasztható egy konver-</u>

gens pontsorozat.

Mindezen definiciók és tételek közelfekvő általánosításai a megfelelő valós számok sorozataira és halmazaira vonatkozó vizsgálatoknak, melyekre Önök a differenciál és integrálszámítás bevezető részéből bizonyára emlékeznek. Hasonló módon általánosítható komplex sorozatokra az általános konvergencia tétel:

A $z_1, z_2, \dots$ sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha minden pozitív ε-hoz van olyan index, amelytől kezdve minden m-re és minden n-re

Az általános konvergencia tétel.

$$|z_m - z_n| < \varepsilon$$

Hogy a föltétel szükséges, az evidens módon következik a

$$|z_m - z_n| \leqq |z - z_m| + |z - z_n|$$

egyenlőtlenségből. Ugyanis, ha a sorozat konvergens és határértéke z, úgy egy elég nagy indextől kezdve

$$|z - z_m| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |z - z_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

és azért egyenlőtlenségünk alapján

$$|z_m - z_n| < \varepsilon$$

Hogy a föltétel elégséges, az a Bolzano-Weierstrass-féle tétel alapján ~~történik~~ a következőképen látható. Ha a föltétel teljesítve van, úgy a sorozat korlátos, mert hiszen az összes z_n pontok véges számú kivétellel belül fekünsznek a bármelyikük körül ε sugárral írt körön. Mint-hogy tehát a sorozat korlátos, kiválasztható be-lőle egy konvergens részsorozat:

$$z_{n_1}, z_{n_2}, \ldots \rightarrow z^*.$$

De a föltétel alapján elég nagy m és elég nagy n_k-ra

$$|z_m - z_{n_k}| < \varepsilon$$

és ezért egyszersmind

$$|z_m - z^*| = \lim_{n_k \to \infty} |z_m - z_{n_k}| \leq \varepsilon,$$

vagyis az eredeti teljes sorozat is a z^* határér-ték felé tart.

A tartomány és a holomorf függvény fogalma.

A tartomány fogalma

A komplex számok azon összeségét, te-hát azon ponthalmazt tartománynak nevez-zük, amely bír a következő két tulajdonsággal:

1° a halmaz minden pontja a halmaz belső pontja;

2° a halmaz nem bontható fel két oly részre, hogy ezen részek külön-külön eleget tegyenek az 1° alatti feltételnek.

Az, hogy a halmaz minden pontja a halmaznak belső pontja, azt jelenti, hogy a halmaz bármely pontja körül írható egy elég kis sugarú kör úgy, hogy az ezen kör belsejében levő összes pontok a halmazhoz tartoznak, vagyis, hogy a halmaz egy pontja sem lehet a komplementáris halmaz torlódási helye.

Bebizonyítjuk a következő tételt: A tartomány bármely két pontjához megadható végesszámú egymásra következő kör úgy, hogy az egyik pont az első körnek, a másik az utolsónak középpontja, hogy továbbá minden kör belsejében tartalmazza a következő kör középpontját és végül a körök és belsejük a tartományhoz tartoznak.

Tegyük föl, hogy a tétel nem igaz, vagyis hogy van egy pont, mely nem kapcsolható össze a tételben leírt módon a tartomány minden pontjával. Jelöljük A-val azon pontok halmazát, melyeket a z-vel a fentirt módon összekapcsolhatunk, B-vel pedig azokét, melyeket nem kapcsolhatunk össze. Az A halmaz, amint a definiciójából azonnal látható, eleget tesz az 1° alatti feltételnek. De ugyancsak eleget tesz a B halmaz is, mert ellenkező esetben volna a halmaznak oly z^* pontja hogy bármely körülötte írt (a tartományban foglalt) körbe beleesnének az A halmaz bizonyos pontjai és akkor a z pontból ezen pontok bármelyikéhez vezető körsorozat + a z^* körüli kör összekapcsolná a fentírt módon a z és z^* pontokat is. Felosztható tehát a halmaz két oly részre (A és B), melyek külön-külön teljesítik az 1ső feltételt, azaz az egész halmaz a 2ik-nek nem tesz eleget.

Tételünknek nagyon használható korolláriuma a következő: a tartomány bármely két pontja összeköthető egy oly polygon vonallal, melynek minden pontja a halmazhoz tartozik. Tényleg megfelel ennek a követelménynek pl. az előbb szereplő körök középpontjait összekötő egyenesekből álló törtvonal.

Eleget tesz az a törtvonal is, melyet úgy kapunk, hogy a középpontokat egy-egy vízszintes és függőleges vonaldarabból álló törtvonallal kötjük össze. Vagyis: a tartomány bármely két pontja összeköthető olyan teljesen a tartományban fekvő polygon vonallal, melynek egyes darabjai fölváltva vízszintesek és függőlegesek (azaz párhuzamosak a valós és képzetes tengelyekkel.)

Megemlítjük, hogy tételeink bármelyike alkalmas a tartomány definiálására, amennyiben föltevéssé átfogalmazva a 2.) alatti föltevés helyére tehető.

Egy tartományra vonatkozólag a sík összes pontjait 3 kategóriába soroljuk: 1.) belső pontok, vagyis az összes a tartományba tartozó pontok; 2.) a tartomány határát alkotó határpontok, vagyis a tartomány azon torlódási helyei, melyek nem tartoznak hozzá; 3.) külső pontok, vagyis a komplementáris halmaz többi pontjai. Azon esetben, midőn a tartományhoz hozzászámítjuk a határát is, akkor zárt tartománynak nevezzük. Mi egyelőre csak magát a belső pontokból álló tartományt fogjuk tekintetbe venni és ahol a tartományhoz hozzáértjük a határát is, azt külön ki fogjuk emelni.

Ha a T tartomány minden z helyéhez valamilyen előírással egy vagy több $f(z)$ értéket rendelünk, akkor a tartományban egy egyértékű, illetőleg többértékű függvényt értelmezünk. Egyelőre röviden függvény alatt egyértékü függvényt értünk.

A T tartományban értelmezett $f(z)$ függvényt folytonosnak nevezzük a tartomány egy z_0 pontjában, ha bármiképp választjuk meg a z_0 felé konvergáló $z_1, z_2, z_3, \dots z_n, \dots$ sorozatot, a megfelelő függvényértékek sorozata $f(z_0)$ felé tart. Másképp fogalmazva: az $f(z)$ függvény folytonos egy z_0 pontban, ha bármely kis ε-hoz létezik egy oly δ szám, hogy ha csak

A folytonosság fogalma.

$$|h| \leqq \delta$$

akkor már $$|f(z_0+h) - f(z_0)| \leqq \varepsilon$$

Egy ponthalmazon folytonos az $f(z)$ függvény, ha a halmaz minden pontjában folytonos.

Az egyenletes folytonosság.

Egy ponthalmazon egyenletesen folytonosnak nevezzük az $f(z)$ függvényt, ha bármely ε-hoz található olyan δ szám, hogy ha csak a halmaz z és z' pontjainak távolsága

$$|z - z'| \leqq \delta,$$

akkor

$$|f(z) - f(z')| \leqq \varepsilon$$

Abból, hogy egy függvény folytonos egy ponthalmazon, még nem következik, hogy egyszersmind egyenletesen folytonos, mert a folytonosság által követelt δ szám minden egyes z

pontra más és más lehet s így kérdéses egy oly univerzális δ ekzisztenciája, mely minden z-re teljesíti a feltételt. Kimutathatjuk azonban, hogy ha az $f(z)$ függvény folytonos egy zárt ponthalmazon, akkor ezen halmazon egyszersmind egyenletesen folytonos. Zárt halmaznak nevezzük t.i. az olyan korlátos ponthalmazt, mely minden torlódási helyét tartalmazza. Tegyük fel u.i. az ellenkezőt azaz hogy egy bizonyos ε-ra nézve bárhogy válasszuk meg a δ számot, léteznek olyan z és z' pontok, amelyekre vonatkozólag a $|z-z'| \leq \delta$ egyenlőtlenség ellenére is

$$|f(z)-f(z')| > \varepsilon$$

legyen erre $\delta = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \frac{1}{n}, \dots$ és jelöljük $z_1, z_2, \dots z_n, \dots$ illetőleg $z_1', z_2' \dots z_n' \dots$-vel az egyes δ értékeknek megfelelő z illetőleg z' pontokat, melyek eleget tesznek az előző egyenlőtlenségeknek. A $z_1, z_2, \dots z_n, \dots$ sorozatból, mivel feltevésünk szerint az egész halmaz korlátos, a Bolzano-Weierstrass-féle tétel értelmében kiválaszthatunk egy konvergens részsorozatot: $z_{n_1}, z_{n_2}, \dots z_{n_k}, \dots \to z^*$ Azt állítom, hogy a megfelelő $z_{n_1}', z_{n_2}', \dots z_{n_k}' \dots$ sorozat is z^* felé tart. Tényleg

$$|z_{n_k} - z_{n_k}'| < \frac{1}{n_k}$$

tehát $$|z'_{n_k} - z^*| \leq |z_{n_k} - z^*| + \frac{1}{n_k} \to 0$$

vagyis $$z'_{n_k} \to z^*$$

A z^* pont szintén a halmazhoz tartozik, mivel feltételünk szerint zárt halmazról van szó. De akkor a másik feltételünk szerint az $f(z)$ függvény a z^* helyen folytonos, ennélfogva, ha n_k elég nagy, akkor

$$|f(z_{n_k}) - f(z^*)| < \frac{\varepsilon}{2}; \quad |f(z'_{n_k}) - f(z^*)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

tehát $|f(z_{n_k}) - f(z'_{n_k})| \leq |f(z_{n_k}) - f(z^*)| + |f(z'_{n_k}) - f(z^*)| < \varepsilon$

ami pedig ellentmond feltevésünknek.

<u>A differenciál hányados fogalma.</u> <u>Az $f(z)$ függvényt a z_0 helyen differenciálhatónak nevezzük, ha az</u>

$$\frac{f(z_n) - f(z_0)}{z_n - z_0}$$

<u>hányados egy határérték felé tart, amikor a z_n a z_0 felé tart. Ezen határértéket - ha létezik - az $f(z)$ függvény differenciálhányadosának nevezzük a z_0 helyen és $f'(z_0)$ - nal jelöljük.</u>

Másképen fogalmazva: <u>ha bármely ε-hoz megadható egy oly δ és egy oly $f'(z_0)$ szám, úgy, hogy ha</u> $$|z - z_0| < \delta$$

<u>akkor</u> $$\left| f'(z_0) - \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| < \varepsilon,$$

<u>ez esetben az $f(z)$ függvényről azt mondjuk</u>

hogy differenciálható a z_0 helyen és $f'(z_0)$-t $f(z)$ függvény differenciálhányadosának nevezzük a z_0 helyen. Világos, hogyha a különbségi hányados egy határérték felé tart, úgy számlálója 0 felé tart; vagyis ha $f(z)$ a z_0 helyen differenciálható, akkor mindenesetre folytonos is.

A holomorf függvény.

Az olyan $f(z)$ függvényt, mely egy tartomány minden pontjában differenciálható, az illető tartományban holomorf függvénynek nevezzük.

A differenciálhányados értelmezéséből közvetlenül folynak az elemi differenciálási szabályok (összeg, szorzat, függvény függvényének stb. differenciálása), melyek teljesen hasonlók a valós változós függvényekre ismert szabályokhoz. Speciálisan: a differenciálható függvények összege, különbsége, szorzata és hányadosa, — feltéve az utolsónál, hogy a nevező nem zérus, — szintén mind differenciálhatók. Ezen megjegyzés és a két — azt mondhatjuk — legegyszerűbb függvény differenciálása alapján egy nagy függvényosztályra — a racionális függvényekre — a differenciálhatóság, vagyis a holomorfitás rögtön átlátható.

Példák a differenciálhányadosra.

A két legegyszerűbb függvény:

$$f(z) = const.$$

és $f(z) = z$

differenciálhányadosai

$$(const)' = 0$$

és $$(z)' = \frac{z-z_0}{z-z_0} = 1$$

Ennélfogva z-nek minden hatványa, továbbá minden racionális egész függvény, valamint végesszámú hely kivételével minden racionális tört függvény differenciálható. Vagyis minden racionális egész függvény holomorf az egész komplex számsikban, míg a racionális tört függvény holomorf abban a tartományban, melyet úgy nyerünk, hogy az egész síkból a nevező (végesszámú) 0-helyeit kizárjuk.

Számitsuk ki még az $f(z) = e^z$ függvény differenciálhányadosát. Először csak a $z=0$ helyre, amikor tehát az $\frac{e^z - 1}{z}$

határértéket kell meghatároznunk arra az esetre, ha $z \to 0$

e^z-t a következőképen ~~írhatjuk~~ értelmezzük:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

Helyettesítsük ide az e^x, $\cos y$ és $i \sin y$ függvények ismeretes hatványsorait a következő alakban:

$$e^x = 1 + x + x^2 \cdot g(x)$$

$$\cos y \pm i \sin y = 1 + iy + y^2 h(y),$$

ahol a $g(x)$ és $h(y)$ függvényekről tudjuk, hogy folytonosak az $\left.\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right\} = 0$ helyen. Ezek szerint

$$e^z = 1 + x + iy + xy\, G(x,y),$$

~~ahonnan~~

$$\frac{e^z - 1}{z} = 1 + \frac{xy}{x+iy}\, G(x,y)$$

s itt $G(x,y)$ ismét folytonos az $x = y = 0$ helyen. A baloldalon álló kifejezés e^z-nek a 0 és z helyeknek megfelelő különbségi hányadosa, mert $e^0 = 1$. Ha z és ennélfogva x és y zérus felé tart, akkor a jobb oldalon álló 1 felé tart. U. i.

$$\frac{xy}{x+iy}\, G(x,y) \to 0$$

mivel

$$\frac{xy}{x+iy} = \frac{1}{\frac{1}{y} + i\frac{1}{x}} \to 0$$

és

$$G(x,y) \to \alpha,$$

ahol α egy teljesen határozott véges számérték. Ennélfogva e^z differenciálható a $z = 0$ helyen és differenciálhányados $= 1$.

. Ezután már könnyű e^z-nek egy

tetszőleges $z=z_0$ helyre megállapitani a differenciálhányadosát. Ui.

$$\frac{e^z-e^{z_0}}{z-z_0}=e^{z_0}\frac{e^{z-z_0}-1}{z-z_0}\xrightarrow[z\to z_0]{} e^{z_0}$$

azaz e^z minden tetszőleges z helyen differenciálható és

$$(e^z)'=e^z$$

Az ilyen függvényt, mint e^z, amely mindenütt differenciálható, tehát amely mindenütt holomorf, egész függvénynek nevezzük. Ide tartoznak a racionális egész függvények; a többi egész függvényt megkülönböztetésül transzcendens egész függvénynek mondjuk. Az e^z nem racionális, azaz transzcendens egész függvény, mert az n-edfokú racionális egész függvénynek $n+1$-edik differenciálhányadosa mindenütt 0.

Az integrál.

Az integrál fogalma és existenciája.

Tekintsünk egy tetszőleges folytonos $\mathcal{C}$ görbét, mely az a ponttól a b pontig terjed és amelynek egyenlete:

Az integrál fogalma.

$$x = x(t)\ ;\ y = y(t)$$

azaz $$z = x + iy = x(t) + iy(t)$$

$$(\alpha \leqq t \leqq \beta\ ;\ z(\alpha) = a,\ z(\beta) = b)$$

Tegyük fel, hogy ezen $\mathcal{C}$ görbe rektifikálható. Rektifikálhatónak nevezünk t.i. egy görbét akkor, ha bárhogyan is osztjuk fel a $z_0 = a, z_1 \dots$ $\dots z_n = b$ pontok által véges számú ívre (ami megfelel a t paraméter értékkészlete $t_0 = \alpha, t_1 t_2 \dots t_n = \beta$ felosztásának), a

$$|z_1 - z_0| + |z_2 - z_1| + |z_3 - z_2| + \dots + |z_n - z_{n-1}|$$

összeg kisebb vagy egyenlő egy a beosztás módjától független, véges L számnál. A legkisebb alkalmas L számot (vagyis az összes képezhető összszegük felső határát vagy legnagyobb torlódási értékét) a görbe hosszának mondjuk.

Osszuk fel valamely módon az adott $\mathcal{C}$ görbét a $z_0 = a, z_1, z_2, \dots z_n = b$ pontok által. Jelentse továbbá ζ_k a z_k és z_{k-1} osztáspontok között fekvő ív valamelyik pontját és alkossuk meg ezután a következő összeget:

$$\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1})$$

Hogyha ezen összeg a beosztás módjától függetlenül egy határérték felé tart, amidőn a $z_{k-1} z_k$ ívek hosszai ~~(a $|z_k - z_{k-1}|$) különbségek~~ egyenletesen 0 felé tartanak, akkor az $f(z)$ függvényt integrálhatónak mondjuk a $\mathcal{C}$ görbe mentén és az összeg határértékét az $f(z)$ függvény $\mathcal{C}$ görbe mentén vett integráljának nevezzük; jelben

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)\,dz = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1})$$

Az integrál existenciája.

Ki fogjuk mutatni, hogy minden folytonos $f(z)$ függvény integrálható bármely rektifikálható görbe mentén.

Az egyenletesen sűrűsödő beosztások sorozatának megfelel az egyes beosztásokhoz tartozó $\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1})$ alakú összegek sorozata.

A tétel igazolására kimutatjuk, hogy a kijelölt feltételek mellett (t. i. $f(x)$ folytonos, b rektifikálható), ha csak a beosztásokat elég sűrűnek (azaz az összetevő részeket elég kicsinynek) választjuk, akkor bármely két beosztáshoz tartozó összeg különbsége tetszésszerinti kicsiny; ebből a tényből az állított konvergencia az általános konvergencia tétel alapján következik.

Az $f(x)$ függvény folytonos lévén, bármely tetszésszerinti ω számhoz található oly δ, hogy ha csak $|x - x'| \leqq \delta$,

akkor
$$|f(x) - f(x')| \leqq \omega.$$

Válasszunk két különböző beosztást:

$$x_0 = a,\ x_1 \dots x_k \dots x_n = b$$
$$x'_0 = a,\ x'_1 \dots x'_k \dots x'_{n'} = b,$$

de mindegyiket oly módon, hogy minden egyes részíven (hozzá és ennélfogva minden ilyen részben) bármely 2 pont távolsága $\leqq \frac{\delta}{2}$ legyen.

Ezen két beosztáshoz tartozó összegek:

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

$$\sum_{k=1}^{n'} f(\xi'_k)(x'_k - x'_{k-1})$$

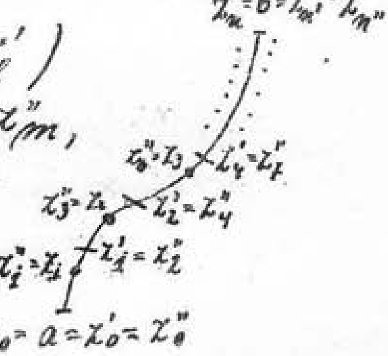
A két beosztás együttesen egy harmadik új beosztást alkot:

$$x''_0 = a,\ x''_1,\ x''_2 \dots x''_k, \dots x''_{n''} = b$$

Tehát az előző két összeg különbsége:

$$\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}) - \sum_{k=1}^{n'} f(\zeta'_k)(z'_k - z'_{k-1}) =$$
$$= \sum_{m=1}^{n''} \left(f(\zeta''_m) - f(\zeta'''_m)\right)(z''_m - z''_{m-1})$$

ahol a jobb oldalon álló összeget úgy képezzük, hogy együtt tekintjük a z és z' osztáspontokat, ezeket a megfelelő t-értékek nagysága szerint rendezve $z''_0, z''_1, \dots$ -vel jelöljük; minden ilyen módon fellépő (z''_{m-1}, z''_m) ív része egy-egy (z_{k-1}, z_k) és (z'_{l-1}, z'_l) ívnek; az ezen ívekhez az eredeti beosztásból kiválasztott ζ-pontokat jelöljük ζ''_m és ζ'''_m-vel.



Minthogy a (z_{k-1}, z_k) és (z'_{l-1}, z'_l) íveknek van közös pontjuk pl. z''_m, mivel további föltevésünk szerint a ζ''_m és ζ'''_m ettől legfeljebb $\frac{\delta}{2}$ távolságra vannak, ezért $|\zeta''_m - \zeta'''_m| \leq \delta$ és ennélfogva

$$\left| f(\zeta''_m) - f(\zeta'''_m) \right| \leq \omega$$

Tehát

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}) - \sum_{k=1}^{n'} f(\zeta'_k)(z'_k - z'_{k-1}) \right| \leq \omega \sum_{k=1}^{n''} |z''_k - z''_{k-1}| \leq \omega L$$

L egy határozott véges szám, ω pedig teljesen tetszésszerinti. Bármilyen kis pozitív szám is legyen tehát az ε, ha ω-t úgy választjuk, hogy $\omega \leqq \frac{\varepsilon}{L}$ legyen és ennek megfelelően elég sűrűre vesszük a beosztásokat, akkor már

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}) - \sum_{k=1}^{n'} f(\zeta'_k)(z'_k - z'_{k-1})\right| \leqq \varepsilon$$

s ezzel existentia tételünk igazolást nyert.

A tétel bizonyításához más utat is követhetünk, amely egyszersmind útbaigazítást is nyújt az integrál kiszámításához. T. i. a komplex változós függvények integrálját visszavihetjük a valós változós függvények integráljaira.

Az integrá
kiszámítás

A függvénytanban használt integrációs utak rendszerint igen egyszerű strukturájú görbék. Legtöbbször olyanok, melyek összerakhatók oly véges számú ívből, melyen x és y s ennélfogva z is folytonosan differenciálható függvénye a t paraméternek; sőt legtöbbször olyanok, melyek összerakhatók véges számú körívből és egyenes darabból.

Azonban ha z folytonosan differenciálható függvénye t-nek, akkor ugyanazon okokból, mint a valós változós függvények esetében, írhatjuk, hogy

$$\int_{\mathfrak{C}} f(z)\,dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(z)\,\frac{dz}{dt}\,dt$$

miáltal a komplex változós $f(z)$ függvény integrálja vissza van vezetve valós változós integrálra.

De még a következő módon is járhatunk el s épen ez, amire az előbb céloztunk. Bontsuk fel $f(z)$-t és dz-t a valós és képzetes részeikre.

$$f(z) = \varphi(x,y) + i\,\psi(x,y)$$
$$dz = dx + i\,dy$$

Ekkor az eredeti integrálunk felbomlik négy valós változós, u. n. görbevonalú integrál összegére:

$$\int_{\mathfrak{C}} f(z)\,dz = \int_{\mathfrak{C}} \varphi(x,y)\,dx - \int_{\mathfrak{C}} \psi(x,y)\,dy$$
$$+ i\int_{\mathfrak{C}} \varphi(x,y)\,dy + i\int_{\mathfrak{C}} \psi(x,y)\,dx$$

melyek a differenciál és integrálszámításból szintén ismeretesek.

Példák az integrálra.

A legegyszerűbb függvények integrálja it közvetlenül definiciónk alapján is könnyen kiszámíthatjuk. Így, az $f(z) = \text{const.}$ függvény integrálja:

$$\int_{\mathfrak{C}} dz = \sum_{k=1}^{n} (z_k - z_{k-1}) = z_n - z_0 = b - a$$

Az $f(z) = z$ függvény integrálja:

$$\sum_{k=1}^{n} \zeta_k (z_k - z_{k-1}) \to \int_{\mathcal{C}} z\, dz = Y$$

Válasszuk speciálisan ζ_k-t úgy, hogy először $\zeta_k = z_k$ és másodszor $\zeta_k = z_{k-1}$ legyen. Mindkét esetben

$$\sum_{k=1}^{n} z_k (z_k - z_{k-1}) \to Y,$$

$$\sum_{k=1}^{n} z_{k-1} (z_k - z_{k-1}) \to Y;$$

innen
$$\sum_{k=1}^{n} (z_k^2 - z_{k-1}^2) \to 2Y,$$

De
$$\sum_{k=1}^{n} (z_k^2 - z_{k-1}^2) = z_n^2 - z_0^2 = b^2 - a^2$$

tehát
$$Y = \int_{\mathcal{C}} z\, dz = \frac{b^2 - a^2}{2}$$

Példáink egyszersmind igen érdekes jelenséget is mutatnak. Láthatjuk u. i. hogy a tárgyalt két függvény integráljának értéke teljesen független az integrációs görbe alakjától s csakis a kezdő- és végpontjának helyzetétől függ. Ennélfogva ezen két függvény integrálja bármely rektifikálható egyszerűen zárt görbén zérussal egyenlő. Egyszerűen zárt görbének nevezzük t. i. a $z = z(t)$ által értelmezett görbét akkor, ha z a $t = t_0$ és $t = t_1$ között minden értéket egyszer és csakis egyszer vesz fel és $z(t_0) = z(t_1)$. Közelfekvő gondolat azon kérdés felvetése, hogy az ezen speciális függvények esetében fellépő tulajdonság nem általános jellegű-e, vagy legalább is, mily feltételt kell teljesítenie a $f(z)$ függvénynek, hogy ugyanezen jelenséget mutathassa?

Az integrálás mint a differenciálás megfordítása.

De még más szempontból is szükségesnek mutatkozik a kérdés, illetőleg egy speciálisabb alakjának feltevése. A kérdésre adandó választól függ t. i., hogy — a valós függvények esetéhez hasonlóan — felfoghatjuk-e a komplex változók esetében is, az integrálást mint a differenciálás megfordítását. Más szóval, ha egy tartományban holomorf $f(z)$ függvénynek egy fix a ponttól egy tetszésszerinti z pontig egyenes vonalon vett integrálját $F(z)$-vel jelöljük:

$$F(z) = \int_a^z f(z)\,dz,$$

igaz-e, hogy az $f(z)$ függvény a $F(z)$ differenciálhányadosa:

$$f(z) = F'(z) \quad ?$$

Itt első sorban arra a nehézségre bukkanunk, hogy az a pontot összeköthetjük-e, egy a tartomány belsejébe eső egyenessel, minden szóba jöhető z ponttal? Ezzel egyelőre nem törődünk. Másodszor pedig az a kérdés, hogy a valós változós függvények esetével megegyezően írhatjuk-e, hogy

$$F(z_0+h) - F(z_0) = \int_{z_0}^{z_0+h} f(z)\,dz$$

Ha ez az egyenlőség helyes, akkor könnyen bizonyíthatjuk, hogy $f(z) = F'(z)$. U.i. az $f(z)$ függvény folytonossága révén, minden ε-hoz választható a h úgy, hogy ha $|z-z_0| \leq h$, akkor az $\varepsilon(z) = f(z) - f(z_0)$ függvényre a (z_0, z_0+h) egyenesen $|\varepsilon(z)| < \varepsilon$. A fenti integrálban $f(z)$ helyébe $f(z_0) + \varepsilon(z)$-t írva, azt két integrálra bontjuk

$$\int_{z_0}^{z_0+h} f(z)\,dz = \int_{z_0}^{z_0+h} f(z_0)\,dz + \int_{z_0}^{z_0+h} \varepsilon(z)\,dz = h f(z_0) + \int_{z_0}^{z_0+h} \varepsilon(z)\,dz$$

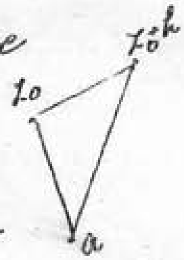
Ennélfogva $$\frac{F(z_0+h) - F(z_0)}{h} = f(z_0) + \frac{\int_{z_0}^{z_0+h} \varepsilon(z)\,dz}{h},$$

ahol

$$\left| \frac{\int_{z_0}^{z_0+h} \varepsilon(z)\,dz}{h} \right| \leq \frac{|h|\,\varepsilon}{|h|} = \varepsilon$$

s ez amit épen ki akartunk mutatni.

Minden attól függ tehát, hogy a feltételezett egyenlőség helyes-e. De ennek helyessége azt jelenti, hogy az $f(x)$ függvény egy háromszög ~~mentén~~ (a, z_0, z_0+h) két oldalán (a, z_0 és a, z_0+h) vett integráljainak különbsége egyenlő a harmadik (z_0, z_0+h) oldalon vett integrállal. Ez pedig nem más, mint az általános eset azon specializációja, amidőn a zárt görbe egy háromszög.



Elemi integrációs tételek

Épen az általános kérdésre adandó válasz lesz a továbbiak feladata. Előbb azonban még felsoroljuk a legegyszerűbb és az integráldefinicióból közvetlenül következő integráltételeket, melyek megegyeznek a valós változós függvények integráljainak elemi tételeivel és amelyeket már eddig hallgatólagosan feltételeztünk.

Ugyanazon görbén a kezdőponttól (a) a végpontig (b) és a végponttól a kezdőpontig vett integrálok egymással ellentétesen egyenlők:

$$\int_{G_{a,b}} f(x)\,dx = -\int_{G_{b,a}} f(x)\,dx,$$

azaz

$$\int_{G_{a,b}} f(x)\,dx + \int_{G_{b,a}} f(x)\,dx = 0$$

Szabad a konstanst az integráljel elé vinni és véges összeg esetén az integrációt tagonként végezni.
$$\int_{C} (a f(z) + b\, g(z))\, dz = a\int_{C} f(z)dz + b\int_{C} g(z)dz$$

Szabad az integrációs utat több ívre osztani és az egyes íveknek megfelelő integrálokat összegezni.

Ha M jelenti az $|f(z)|$ függvény maximumát a C görbén, vagyis minden szóba jöhető z értékre $|f(z)| \leqq M$ és L az integrációs út hossza, akkor
$$\left| \int_{C} f(z) dz \right| \leqq ML$$

A Cauchy-féle integrál tétel.

Az előzőkben kitűzött kérdésre a választ a Cauchy-féle integrál tétel adja meg, amely így hangzik: ha C egy rektifikálható zárt görbe és az f(z) függvény holomorf egy oly tartományban, amely a C görbét a belsejével együtt magában foglalja, akkor

A Cauchy-féle tétel.

$$\int_{C} f(z)\, dz = 0$$

A függvénynek egy zárt görbén vett integrálját természetesen ugyanúgy értelmezzük, mint a nem zárt görbe esetén, és értéke nem függ attól, hogy a görbe mely pontjából indulunk ki, hanem csak attól, hogy mily értelemben haladunk. A két különböző értelemnek megfelelő integrálértékek egymástól csak előjelben különböznek, ennélfogva ha az egyik zérus, a másik is az. Vagyis a Cauchy-féle tétel szempontjából nem lényeges, hogy melyik értelemben integrálunk.

A Cauchy-féle tételt egész Goursatig számos különböző alakban bizonyították be, azonban az $f(z)$ függvényről mindig többet tettek fel, mint amennyit mi követelünk pl. azt, hogy kétszer differenciálható vagy azt, hogy a differenciálhányadosa folytonos függvény. A tételnek az az általános fogalmazása, amely csak a differenciálhányados létezését tételezi fel Goursattól ered; tőle ered lényegében a következő bizonyítás is.

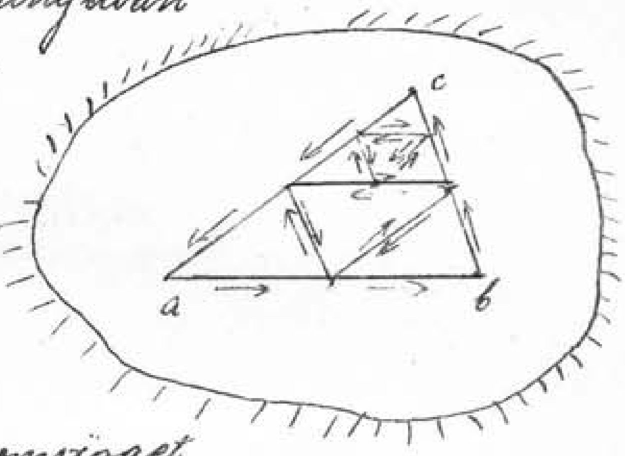
<u>Bizonyítás:</u> <u>A bizonyítást 3 lépésben végezzük</u> és pedig a következő módon: Kimutatjuk a tételt

<u>1° háromszögekre (u. n. Goursat-féle lemma)</u>;

<u>2° polygonokra</u>;

<u>3° görbékre.</u>

1° Tekintsünk tehát egy <u>háromszöget</u>, amely belsejével együtt benne fekszik az $f(z)$ függvény holomorfitási tartományában és $f(z)$-nek a háromszög kerületén vett integrálját jelöljük $\mathcal{J}$-vel:



$$\mathcal{J} = \int_{\Delta} f(z)\,dz$$

Osszuk fel a háromszöget az oldalak felezési pontjait összekötő egyenesekkel 4 új háromszögre. Az eredeti háromszög mentén vett integrál egyenlő ezen új háromszögek mentén vett integrálok összegével, mivel az összekötő egyenesekben ekkor kétszer integrálunk és pedig egymással ellenkező irányban történik az integráció, tehát az innen kapott integrálok kiesnek:
$$\mathcal{J} = \mathcal{J}' + \mathcal{J}'' + \mathcal{J}''' + \mathcal{J}''''$$

Jelöljük az $\mathcal{J}', \mathcal{J}'', \mathcal{J}''', \mathcal{J}''''$ integrálok közül a legnagyobbat $\mathcal{J}_1$-gyel. Ekkor, mivel
$$|\mathcal{J}| \leqq |\mathcal{J}'| + |\mathcal{J}''| + |\mathcal{J}'''| + |\mathcal{J}''''|$$
következik, hogy
$$|\mathcal{J}| \leqq 4\,|\mathcal{J}_1|$$

Azon háromszöget, amely az $\mathcal{J}_1$ integrált szolgáltatja, hasonló módon bontsuk ismét 4 háromszögre. Az $\mathcal{Y}_1$ integrál egyenlő az újonnan nyert háromszögek mentén vett integrálok összegével, melyek közül a legnagyobbat $\mathcal{Y}_2$-vel jelölve

$$|\mathcal{Y}_1| \leqq 4\,|\mathcal{Y}_2|$$

Folytassuk tovább ezen eljárást. Az n-ik lépésnél nyert integrálra áll, hogy

$$|\mathcal{Y}_{n-1}| \leqq 4\,|\mathcal{Y}_n|\,,$$

vagyis
$$|\mathcal{Y}| \leqq 4^n\,|\mathcal{Y}_n|$$

Ily módon az egymásban foglalt háromszögek egy sorozatát kapjuk: $\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \dots \Delta_n \dots,$ melyek egy oly z_0 pont felé tartanak, amely okvetlenül az eredeti háromszög belsejében vagy határán van. Ennélfogva feltételünk szerint ezen z_0 pontban az $f(z)$ függvény differenciálható, tehát minden pozitív ε számhoz található olyan δ, hogy hacsak $|z-z_0| \leqq \delta$, akkor

$$\left| f'(z_0) - \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \right| \leqq \varepsilon\,,$$

vagy másképen írva
$$f'(z_0) = \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} + \varepsilon(z),$$

ahol $|\varepsilon(z)| \leqq \varepsilon$.

Tehát $f(z)$-t a következő alakban írhatjuk:

$$f(z) = f(z_0) + (z-z_0) f'(z_0) + (z-z_0)\,\varepsilon(z),$$

ahol $|\varepsilon(z)| < \varepsilon$, hacsak $|z-z_0| < \delta$, tehát minden esetre elég nagy n indexekre a Δ_n háromszögek kerülete mentén is.

Alkalmazzuk $f(z)$ ezen kifejezését az J_n integrál megbecsülésére. Az első 2 tag

$$f(z_0) + (z-z_0) f'(z_0)$$

z-nek lineáris függvénye, tehát integrálja 0, vagyis

$$J_n = -\int_{\Delta_n} (z-z_0)\,\varepsilon(z)\,dz$$

Jelöljék $k, k_1, k_2, \dots k_n, \dots$ rendre a $\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \dots \Delta_n, \dots$ háromszögek kerületeit; nyilvánvaló, hogy $|z-z_0|$ a Δ_n ~~a Δ~~ háromszög mentén kisebb mint k_n. Másrészt $k_n = \frac{k}{2^n}$, tehát fogva

$$|J_n| \leqq \int_{\Delta_n} |z-z_0|\,|\varepsilon(z)|\,|dz| \leqq \int_{\Delta_n} k_n\,\varepsilon\,dz = \varepsilon k_n^2 = \frac{\varepsilon}{4^n} k^2$$

Innen és az $|J| \leqq 4^n |J_n|$ egyenlőtlenségből ered

$$|J| \leqq \varepsilon k^2$$

Azonban ε teljesen tetszőleges lévén, szükségképen

$y = 0.$

2º Tekintsünk másodszor egy zárt polygont, mely belsejével együtt az $f(z)$ függvény holomorfitási tartományába esik. Zárt polygonnak nevezzünk minden olyan véges számú egyenesvonalból összetett utat, melyek bizonyos sorrendben következnek egymásra, mindeniknek megvan a maga kezdő és végpontja és mindenik kezdőpontja az előzőnek végpontja. Legyen első esetben a polygon egyszerűen zárt, tehát olyan, amely nem metszi önmagát. Minden ilyen polygon fölbontható háromszögekre oly módon, hogy a polygon mentén vett integrál egyenlő a felbontás útján nyert háromszögek mentén vett integrálok összegével (az integrációt valamennyinél ugyanazon pl. az óramutató forgásával ellenkező értelemben véve). Nyilvánvaló, hogy ennek igazolására elegendő, ha belátjuk, hogy minden ilyen polygon felbontható két oly) polygonra, melyek oldalszáma kisebb, mint az eredeti polygoné és a két polygon mentén vett integrálok összege egyenlő az eredeti polygon mentén vett integrállal mert ezen eljárást tovább folytatva véges számú lépés után a háromszögekre való felbontáshoz érünk. Ezen felbontás lehetősége pedig természetes, mert

mert ha a polygon konvex, tehát bármely szögpontjánál fekvő szög kisebb mint 180°, akkor bármely két szögpontot összekötő egyenes a kívánt módon bontja fel a polygont; ha pedig a polygon nem konvex, tehát van legalább egy oly szöge, mely nagyobb 180°-nál, akkor az ezen szögpontba futó egyik oldalának meghosszabbítása végzi el a kívánt felbontást.

Legyen másodszor a zárt polygon *nem egyszerűen zárt*, tehát messe magát egy vagy több pontban. Akkor épen ezen metszéspontok által felbonthatjuk a polygont olyan polygonokra, melyekben már kevesebb metszéspont van, mint az eredetiben. Ezen felbontások azonban végeredményben az eredeti polygonnak egyszerűen zárt polygonokra való felbontását szolgáltatják.

Tekintetbe véve most, hogy 1°) alatt a háromszögek esetére a Cauchy-féle tétel érvényességét kimutattuk, az előző meggondolásokból következik, hogy *az $f(z)$ függvény integrálja minden olyan zárt polygon mentén, mely belsejével együtt az $f(z)$ holomorfitási tartományába esik, zérussal egyenlő.*

3°) Tekintsünk végül egy tetszőleges *zárt*

$\mathfrak{C}$ görbét, melyről egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy egyszerűen zárt görbe, mert ellenkező esetben hasonló meggondolást végezhetnénk, mint a nem egyszerűen zárt polygonoknál. Tegyük fel továbbá, hogy a $\mathfrak{C}$ görbe belsejével együtt az $f(x)$ függvény holomorfitási tartományában fekszik. Ebből következik, hogy az $\int_{\mathfrak{C}} f(z)\,dz$ létezik, tehát mindenesetre fel tudjuk osztani a $\mathfrak{C}$ görbét a $z_0, \ldots z_k \ldots z_n = z_0$ pontok által ívekre oly módon, hogy a

$$\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1})$$

összeg az integráltól tetszésszerinti kicsinnyel különbözzék. Másrészt a folytonosság révén, ha a beosztás elég sűrű, akkor a függvény értékeinek különbsége a (z_k, z_{k-1}) húron és (z_k, z_{k-1}) íven kisebb, mint egy tetszőleges ε

$$|f(\zeta_k) - f(z)| \leqq \varepsilon$$

Végül a $z_0, z_1, \ldots z_k \ldots z_n$ osztáspontokat összekötő egyenesekből álló zárt polygon szintén beleesik az $f(z)$ holomorfitási tartományába, tehát a függvény integrálja ezen polygonon zérussal egyenlő. (: 2° alapján:)

$$\int_{\Pi} f(x)\,dz = 0$$

Ekkor azonban írhatjuk, hogy

$$\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}) - \int_{\Pi} f(z)\,dz$$

de
$$\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}) = \int_{z_0}^{\overline{z_1}} f(\zeta_1)\,dz + \int_{z_1}^{\overline{z_2}} f(\zeta_2)\,dz + \dots \int_{z_{n-1}}^{\overline{z_n}} f(\zeta_n)\,dz$$

és
$$\int_{\Pi} f(z)\,dz = \int_{z_0}^{\overline{z_1}} f(z)\,dz + \int_{z_1}^{\overline{z_2}} f(z)\,dz + \dots + \int_{z_n}^{\overline{z_0}} f(z)\,dz,$$

ahol $\int_{z_k}^{\overline{z_{k+1}}}$ a (z_k, z_{k+1}) húron való integrálást jelenti. Ennélfogva

$$\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}) = \int_{z_0}^{\overline{z_1}} (f(\zeta_1) - f(z))\,dz + \int_{z_1}^{\overline{z_2}} (f(\zeta_2) - f(z))\,dz + \dots + \int_{z_{n-1}}^{\overline{z_n}} (f(\zeta_n) - f(z))\,dz;$$

azaz tekintetbe véve, hogy a $z_{k-1} z_k$ húron $|f(\zeta_k) - f(z)| \leqq \varepsilon$

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1})\right| = \cancel{\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1})} \leqq \left| \varepsilon\,(z_1 - z_0) + \varepsilon\,(z_2 - z_1) + \dots + \varepsilon\,(z_n - z_0) \right| \leqq \varepsilon L,$$

ahol L a C görbe hosszát jelenti. Ebből tehát következik, hogy a $\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1})$ összeg elég sűrű beosztással tetszésszerinti kicsinnyé tehető vagyis hogy határértéke

$$\int_C f(z)\,dz = 0$$

s ezzel a Cauchy-féle integrál tételt teljesen bebizonyítottzik.

A bizonyításban nem használtuk föl lényegesen azt, hogy $f(z)$ függvény magán a C görbén holomorf; könnyű a bizonyítást úgy módosítani, hogy a közelítő polygonok egészen a C görbén belül feküdjenek, és az így módosított meggondolás a Cauchy-tételt a következő alakban szolgáltatja: Ha az $f(z)$ függvény a zárt rektifikálható C görbe által határolt tartomány belsejében holomorf és az egész zárt tartományban (tehát határán is) folytonos, akkor

$$\int_C f(z)\,dz = 0$$

Meg kell jegyeznem, hogy meggondolásainkban hallgatólag, bizonyítás nélkül alkalmaztunk bizonyos geometriai természetű tényeket, mint pl. hogy minden egyszerűen zárt görbe a síkot 2 tartományra osztja (u.n. Jordan féle tétel): a két tartomány közül a korlátosról mondtuk, hogy a görbe belseje vagy a görbe által körülzárt terület. Továbbá föltettük, hogy a közelítő polygonok által határolt területek az előbbi területből ill. annak részeiből és egyes a görbe vonalhoz előírt módon közelfekvő pontokból állanak. Ezen tételeket itt nem bizonyítjuk be; ezekre vonatkozó bizonyításokat illetőleg utalunk a de la Vallée-Poussin, Cours d'Analyse 3. kiadásának elsó kötetére; az egyszerűbb esetekben, midőn a görbe egyenes vonaldarabokból, körívekből vagy pl. konvex görbék íveiből van összetéve, a bizonyítás sokkal könnyebb, ezen esetekben feltevéseinket szinte már a szemlélet igazolja. Talán nem fölösleges itt hangsúlyozni, hogy épen a Cauchy-féle integrál tétel biztosítja számunkra az integrációs út megválasztásánál azt a nagyfokú szabadságot, melynélfogva ilyen egyszerű konstrukciójú utakra szorítkozhatunk.

A Cauchy-féle integráltétel más fogalmazásai.

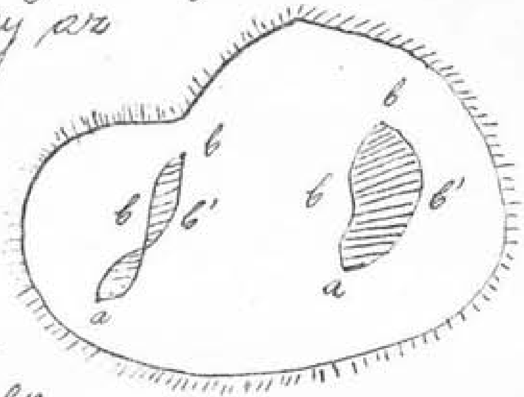
A Cauchy féle integráltétel alapján megadhatjuk a választ azon kérdésekre, amelyek épen hozzávezettek. Ezek közül az első az volt, hogy függ-e az integrál értéke az integrációs út alakjától? Zárt görbe esetére már megkaptuk a feleletet. Lássuk tehát még, hogy a nem zárt görbe mentén vett integrálra mit mond a Cauchy-féle tétel?

Ha az $f(z)$ függvény holomorf egy oly) tartományban, amely magában fog-

Ugyanazon két pontot összekötő

utak mentén vett integrálok

lalja az adott (nem zárt) integrációs görbét (b), akkor a görbe kezdő-(a) és végpontját összekötve valamely más görbe (b') által, csak arra figyelve, hogy az így nyert zárt görbe a belsejével együtt az $f(z)$ függvény holomorfitási tartományában feküdjék és erre alkalmazva a Cauchy-féle tételt:



$$\int_{b_{a,b}} f(z)\,dz + \int_{b'_{b,a}} f(z)\,dz = 0$$

azaz
$$\int_{b_{a,b}} f(z)\,dz = \int_{b'_{a,b}} f(z)\,dz$$

Tehát az $f(z)$ függvénynek bármely két görbe mentén vett integrálja egyenlő egymással, ha a két görbe ugyanazon két pontot köti össze és az általuk bezárt területtel együtt az $f(z)$ holomorfitási tartományában feküsznek, vagy amit így szokás kifejezni, ha a két görbe az $f(z)$ holomorfitási tartományán belül egymásba deformálható. Azonnal látható, hogy azt is megengedhetjük, hogy a mondott feltételek mellett a két görbe metszhesse egymást.

Eredményünk különösen egyszerűen fogalmazható abban az esetben, mikor az alapul vett holomorfitási tartomány egyszeresen összefüggő. Egyszeresen összefüggőnek az olyan tartományt mondjuk, melyben bármely zárt görbe egy pontra összehúzható vagyis az általa bezárt területek, a tartományban fekszenek. Ilyen egyszeresen összefüggő tartomány pl. a kör vagy minden egyszerűen zárt görbe belseje, de nem ilyen a körgyűrű és nem ilyen a kör belseje pl. ha a középpontot (vagy bármely más pontot) kizárjuk.

Az egyszeresen összefüggő tartományban a holomorf függvény integráljának értéke kizárólag a kezdő és végponttól függ, az integrációs úttól egyébként független.

Ezekután áttérhetünk a második kérdésre. A második kérdés az volt, hogy az $f(x)$ függvény az integrálfüggvényének a differenciálhányadosa-e? Az $f(x)$ függvényről föltettük hogy holomorf egyszeresen összefüggő tartományban és az integrál függvényen értettük a tartomány egy fix $\underline{a}$ pontjától egy tetszőleges

Az integrál függvény és differenciálhányadosa.

z pontjáig egyenes vonalon vett integrálját

$$\mathfrak{F}(z) = \int_a^z f(z)\,dz$$

Kimutattuk már, hogy a kérdésre igenlő választ nyerünk, ha tisztázzuk a következő két dolgot: 1.) bármely a pont összeköthető-e bármely z ponttal egy egyenes segélyével? Ez általában nem lehetséges, de a Cauchy-féle tétel szerint egyáltalában nem is szükséges, hogy lehetséges legyen, mert az a-tól z-ig egyenes vonalon vett integrál helyettesíthető az a-tól z-ig egy tört vagy görbe vonalon vett integrállal. Különben is az a pont változtatása az integrálfüggvénynek csak egy additiv konstanssal való változását vonja maga után, mert

$$\int_b^z f(z)\,dz = \int_b^a f(z)\,dz + \int_a^z f(z)\,dz = \mathfrak{F}(z) + \int_b^a f(z)\,dz =$$

$$= \mathfrak{F}(z) + \text{konst.};$$

2.) az $f(z)$ integrálfüggvénye z_0+h és z_0 pontokban felvett értékeinek különbsége egyenlő-e $f(z)$-nek ezen két pont között egyenes vonalon vett integráljával:

$$\mathfrak{F}(z_0+h) - \mathfrak{F}(z_0) = \int_{z_0}^{z_0+h} f(z)\,dz \ ?$$

A Cauchy-féle tétel szerint ez is igaz, mert h tetszőleges lévén, tudjuk azt oly kicsinynekválasztani, hogy a $\overline{z_0, z_0+h}$ egyenes egészen az $f(x)$ holomorfitási tartományába essék.

Ennélfogva, ha az $f(x)$ függvény holomorf egy egyszerűen összefüggő tartományban, akkor ezen tartományban az $f(x)$ integrálfüggvénye $F(x)$ is holomorf és differenciálhányadosa egyenlő az eredeti függvénnyel:

$$F'(x) = f(x)$$

Abban az esetben, amikor az $f(x)$ függvény holomorfitási tartománya nem egyszerűen összefüggő, akkor a tartománynak csak egy részére szorítkozunk, illetőleg a tartományt metszésekkel egyszerűen összefüggővé tesszük. Látni fogjuk u. i. példán, hogy ezen esetben az integrálfüggvény nincs egyértelműleg meghatározva.

Célszerű a Cauchy-féle tételt még más fogalmazásban is kimondanunk; így pl. a következőképen. Ha van egy tartományunk, melynek határa egy vagy több zárt görbevonalból áll, melyek megengedett integrációs utak és az $f(x)$ függvény holomorf ezen tartomány belsejében és határán (az utóbbin elég ha folytonos marad), akkor az $f(x)$ függvénynek a tartomány határa mentén vett integrálja zérus.

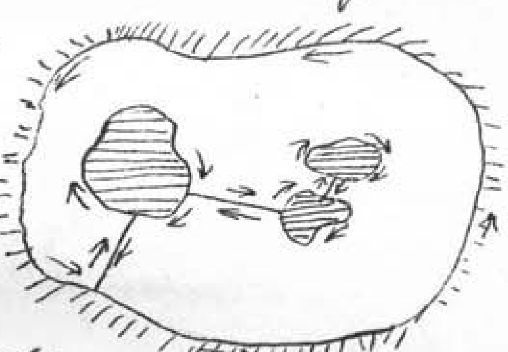
Többszörösen összefüggő tartomány határa mentén vett integrál.

Mindenekelött meg kell állapitanunk a pontos értelmét a következö kifejezésnek: a tartomány határa mentén vett integrál. Ugyanis minden egyes határoló zárt görbe mentén kétféle értelemben integrálhatunk és minthogy semmi okunk föltenni, hogy ezen integrálok külön-külön is 0-t adnak, összegük függ az egyes integrálok előjelétől. Állapodjunk meg abban, hogy az összes görbéken úgy megyünk végig, hogy a tartomány balkéz felöl legyen, vagyis u. n. pozitiv értelemben integrálunk a tartomány határa mentén. Ép úgy megállapodhatnánk az ellenkező, negativ értelemben; a leglényegesebb az, hogy ha egy görbére megválasztottuk az értelmet, a többi már determinálva van.

A pozitiv értelemben való integrálást így is jellemezhetjük: a külső görbén az óramutató járásával ellenkező, a belső görbéken az óramutató járásával megegyező értelemben integrálunk. Ha valamennyi görbén ugyanazon értelemben integrálnánk, akkor a tételt így fogalmazhatnánk: A külső görbe mentén vett integrál egyenlő a belső görbék mentén vett integrálok összegével.

A tételt úgy mondottuk ki, hogy magába

foglalja azon esetet is, amikor a tartomány nem egyszeresen, hanem többszörösen összefüggő. Hogy a tétel erre az esetre is érvényes, az abból következik, hogy a többszörösen összefüggő tartomány metszések segélyével egyszeresen összefüggővé tehető és pedig oly módon, hogy a metszéseket eszközlő egyenesek minden pontja a tartományban feküdjék. Ha most integrálunk az így nyert egyszeresen összefüggő tartomány határa mentén, a nyert integrál egyenlő egyrészt a Cauchy-féle tétel szerint zérussal, másrészt az eredeti határok mentén vett integrállal, hozzáadva ehhez még a metszéseket eszközlő egyeneseken vett integrálokat. Ez utóbbiak azonban kiesnek, mert minden egyenes mentén kétszer és pedig egymással ellenkező irányban integrálunk. Végeredményben nyerjük tehát, hogy a többszörösen összefüggő tartomány határa mentén vett integrál is egyenlő zérussal.



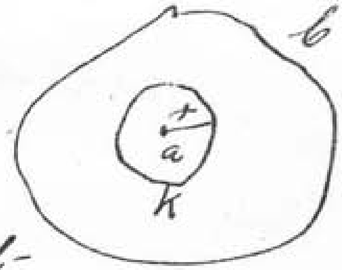
Érvényes továbbá a Cauchy-féle tétel következő általánosítása, mely először Riemann doktori értekezésében található: ha az $f(z)$ függvény holomorf

Egy általánosítás.

egy tartományban, kivéve esetleg a tartomány egy a pontját, amelynek környezetében korlátos

$$|f(z)| \leqq M$$

akkor a Cauchy-féle tétel áll minden olyan a tartományban fekvő zárt görbére is, amely az a pontot magában foglalja. Tekintsük u.i. az a pont körül r sugárral rajzolt K_r kört, amelyet az integrációs görbe, C, körülfog.



Tudjuk, hogy

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{K_r} f(z)\,dz$$

Azonban feltételünket alkalmazva

$$\left|\int_{K_r} f(z)\,dz\right| \leqq 2r\pi M$$

De az r teljesen tetszőleges; ennélfogva tényleg

$$\int_C f(z)\,dz = 0$$

Ennek az általánosításnak legközelebb hasznát vesszük és majd mélyebb értelmét is látni fogjuk; látni fogjuk ugyanis, hogy a mondott esetben $f(z)$-nek az a helyen való kivételes viselkedése csak látszólagos, hogy tehát tulajdonképen nem arról van szó, hogy $f(z)$ az a helyen nem holomorf, hanem csupán még nem tudjuk ezt róla.

<u>A Cauchy-féle integráltétel segélyével ki fogjuk számítani a következő függvények integráljait egy egyszerűen zárt görbe mentén:</u> <u>Példák az integrál kiszámítására.</u>

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

és $$f(z) = \frac{1}{z^n} \qquad (n = \text{egész szám} > 1)$$

<u>Mindkét függvény holomorf az egész síkban, kivéve a $z = 0$ helyet,</u> ahol azonban most nem alkalmazhatjuk a Cauchy-féle tételnek épen az imént általánosított alakját, mert itt $f(z)$ nem korlátos. Ezszerint tehát két esetet kell megkülönböztetnünk, amint a $z = 0$ pont benne van, vagy nincs az integrációs görbe belsejében. Ha nincs benne, akkor a Cauchy-féle tétel közvetlenül szolgáltatja, hogy

$$\int_{\mathscr{C}} \frac{dz}{z} = 0$$

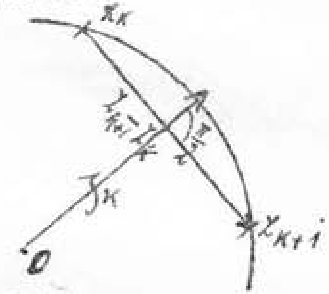
és $$\int_{\mathscr{C}} \frac{dz}{z^n} = 0$$

A másik esetben külön-külön kiszámítjuk a két integrált. A Cauchy-féle tétel szerint egy tetszőleges zárt $\mathscr{C}$ görbe mentén vett integrál helyett elegendő, ha egy a $z = 0$ pont körül írt r sugarú kör mentén vett integrált számítjuk ki.

Az $f(z) = \frac{1}{z}$ függvényre végezve a számítást:

$$\mathcal{J} = \int_{K_r} \frac{dz}{z} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\zeta_k} (z_{k+1} - z_k)$$

ahol a beosztást a körnek n egyenlő részre való beosztása és ζ_k-t a két-két osztáspont közötti körív felezési pontja gyanánt választjuk. Az $\frac{1}{\zeta_k}(z_{k+1}-z_k)$ azon komplex szám, melynek absolut értéke $\frac{1}{r}|z_{k+1}-z_k|$ és argumentuma $\frac{\pi}{2}$, tehát



$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\zeta_k}(z_{k+1}-z_k) =$$

$$= \frac{i}{r}\sum_{k=0}^{\infty}|z_{k+1}-z_k| = \frac{iK_n}{r}$$

ahol K_n a körbeírt n oldalú szabályos sokszög kerületét jelenti. De $\frac{iK_n}{r} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{i}{r}2r\pi = 2i\pi$ tehát

$$J = \int_{K_r}\frac{dz}{z} = \int_{\mathcal{L}}\frac{dz}{z} = 2i\pi$$

Az $f(z) = \frac{1}{z^n}$ függvény integráljának kiszámításánál következőképpen járunk el:

$$J = \int_{K_r}\frac{dz}{z^n}$$

$|z| = r$ lévén $\quad |J| \leqq \frac{2\pi r}{r^n} = \frac{2\pi}{r^{n-1}}$

Ez minden tetszőleges r-re igaz; azonban ha $r \to \infty$, akkor $\frac{2\pi}{r^{n-1}} \to 0$, mert $n > 1$ s ennélfogva

$$J = \int_{K_r}\frac{dz}{z^n} = 0$$

Összefoglalva az egészet:

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z} = \begin{cases} 2i\pi \\ 0 \end{cases}$$

aszerint, amint a $z=0$ pont beleesik, vagy nem a $\mathcal{C}$ görbe belsejébe és

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z^n} = 0 \qquad (n>1)$$

minden esetben.

Teljesen azonos eredményt kapunk az $f(z)=\frac{1}{z-a}$ és $f(z)=\frac{1}{(z-a)^n}$ függvények integráljaira, ahol a $z=a$ pont játsza azt a szerepet amit előbb a $z=0$ pont.

Az $f(z)=\frac{1}{z}$ függvény egyszersmind példát szolgáltat egy már jelzett tényre. T.i. $f(z)=\frac{1}{z}$ integrálfüggvénye $\int_a^z \frac{dz}{z}$ A logarithmus nem egyértelműleg meghatározott érték (minthogy a függvény holomorfitási tartománya nem egyszeresen összefüggő) hanem függ még az integrációs úttól, és pedig attól, hogy az integrációs út hányszor kerüli meg $z=0$ pontot. Az integrálfüggvény különböző determinációi egymástól $2i\pi$ egész számú többszöröseivel különböznek. Hogyha azonban nem csak a $z=0$ pontot, hanem pl. a valós tengely

negatív részét is kizárjuk a függvény holomorfitási tartományából, amiáltal egyszeresen összefüggővé tesszük, akkor az integrálfüggvény már teljesen egyértelműleg van meghatározva, feltéve, hogy az integrációs görbe nem metszi a kizárt negatív valós tengelyt. Ezen integrál függvényt speciálisan az $a = 1$ választással a log z főértékének nevezzük.

$$\int_1^z \frac{dz}{z} = \log^* z$$

Ha z valós és pozitív, akkor mint a differenciál és integrálszámításból ismeretes, függvényünk az exponenciális függvény inverz függvényeként definiált logarithmus függvény.

A Cauchy-féle integrálformulák

A további vizsgálatainkban, melyek alapja szintén csak a Cauchy-féle tétel, teljesen új karakterű jelenségekre találunk, melyek analogonját a valós változós függvények elméletében hiába keressük. Így pl. azt fogjuk találni, hogy ugyanazon feltételek mellett, mint amelyeket a Cauchy-féle tételnél kiszabtunk, a függvény értékének ismerete egy zárt görbe mentén, teljesen egyértelműleg szolgáltatja a függvény értékét a görbe bármely belső pontjában is. Ezenkívül még azt is látni fogjuk, hogy egy holomorf függvény, vagyis egy olyan függvény, amelyről mi csak annyit tettünk föl, hogy egyszer differenciálható, tényleg akárhányszor differenciálható és differenciálhányadosai szintén holomorf függvények. Mindezeket az eredményeket bizonyos integrálformulák szolgáltatják, amelyeket Cauchy-féle integrálformuláknak nevezünk és amelyek egy zárt görbe mentén vett integrállal a görbe bármely belső pontjában meghatározzák úgy a függvény, mint az összes differenciálhányadosainak értékét. Egyszerűség kedvéért a formulákat egyetlen egyszerűen zárt görbe esetére származtatjuk; a végzendő meggondolásokból azonban világos, hogy azok époly általánosságban érvényesek, mint maga a Cauchy-féle integraltétel.

Legyen $f(z)$ holomorf egy tartományban; $\mathcal{C}$ egy oly görbe, mely belsejével együtt benne van ezen holomorfitási tartományban ~~egy~~ a egy oly pont, mely benne van a $\mathcal{C}$ görbe belsejében, akkor

$$f(a) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)\,dz}{(z-a)}$$

U. i. az $\dfrac{f(z)-f(a)}{z-a}$
függvény holomorf ugyanazon tartományban, amelyben az $f(z)$, kivéve esetleg a $z=a$ helyet; de mindenesetre ezen hely környezetében is korlátos, mert határérték felé (t. i. $f'(a)$ tart. Ennélfogva alkalmazható reá az ezen esetre általánosított Cauchy-féle tétel, azaz

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\,dz = 0$$

vagy $\dfrac{1}{2i\pi}$-vel osztva

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\,dz = 0$$

Ezt most két részre bontva, és tekintetbe véve, hogy

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z-a} = 2i\pi$$

ered: $\dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z-a}\,dz = \frac{f(a)}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z-a} = f(a)$

Tehát tényleg, <u>ha $f(x)$ holomorf egy oly tartomány kerületén és belsejében, melyek határai megengedett integrációs utak, akkor a nyert formula a tartomány minden belső pontjában előállítja a függvényt a tartomány határain felvett értékeinek segítségével</u> s ebből következik, hogy <u>a függvény értékének a tartomány határán való meghatározásá-</u>

val, a tartomány minden belső pontjában is meg van határozva a függvényértéke.

Ugyanazon feltételek mellett, amint előbb

$$f'(a) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{(z-a)^2}\,dz$$

A formula igazolását a következőképen végezzük: $f'(a)$ az $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ hányados határértéke, ha $h \to 0$. Alkalmazva ezen különbségi hányadosra az előző formulát

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}} f(z)\left[\frac{\frac{1}{z-a}-\frac{1}{z-a-h}}{h}\right]dz$$

Hogyha tehát $f(a)$-ra érvényes a felírt formula, akkor a két kifejezés jobb oldalán álló integrálok különbsége zérus felé kell, hogy tartson, ha $h \to 0$. Befogjuk bizonyítani, hogy tényleg

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)\left[\frac{1}{(z-a)^2}-\frac{\frac{1}{z-a-h}-\frac{1}{z-a}}{h}\right]dz \to 0$$

Hogy az integrandus zérus felé tart, az következik abból, hogy a zárójelben levő két tört az a ugyanazon függvényének a differenciálhányadosa és különbségi hányadosa. Kérdés még azonban, hogy egyenleteken-e? Ennek kimutatását számítással is végezhetjük, azonban mi a következőkép járunk el. Hozzuk közös nevezőre az egész zárójeles kifejezést, a nevező lesz: $h(z-a)^2(z-a-h)$; a számlálót pedig rendezzük h hatványai szerint, amiáltal itt h-nak és $(z-a)$-nak egy racionális egész kifejezését nyerjük. Azt tudjuk, hogy ez az egész tört zérus felé tart, ha $h \to 0$; ebből következik, hogy a számláló mindenesetre h-nak legalább eggyel magasabb hatványával osztható, mint a nevező. Ennélfogva az egész kifejezés ily alakú: $\dfrac{hP(h,z-a)}{(z-a)^2(z-a-h)}$. Ezt betéve az integrálba, becsüljük meg annak értékét. A Cauchy-féle tétel szerint a $\mathfrak{C}$ görbe helyett, az $\underline{a}$ pont körül r sugárral írt körön is végezhetjük az integrációt. Legyen ezen körben $P(h, z-a)$ absolút értékének a maximuma G; akkor ha csak az oly $\underline{h}$-kat tekintjük, melyekre $|h| \leqq \frac{r}{2}$, áll hogy

$$\left|\frac{hP(h,z-a)}{(z-a)^2(z-a-h)}\right| \leqq \frac{|h|\,G}{r^2\,\frac{r}{2}}$$

Ennélfogva

$$\left|\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathfrak{C}} f(z)\frac{hP(h,z-a)\,dz}{(z-a)^2(z-a-h)}\right| \leqq \frac{1}{2\pi}\,\frac{|h|\,M\,G}{\frac{r^3}{2}}\,2r\pi = \frac{2|h|\,M\,G}{r^2}$$

ahol M jelenti az $f(z)$ maximumát a kör kerületén. Mivel pedig a jobb oldali kifejezés zérus felé tart, ha $h \to 0$, következik, hogy az $f'(a)$-t előállító formulánk tényleg érvényes.

Tovább menve, a mondott feltételek mellett az adott tartományban $f'(z)$ is holomorf (: ezt a priori még nem tudhatjuk:) és

$$f''(a) = \frac{2!}{2i\pi}\int \frac{f(z)}{(z-a)^3}\,dz$$

A bizonyitás ugyanúgy megy mint előbb; $\frac{f'(a+h)-f'(a)}{h}$ különbségi hányadosra alkalmazva az előbb bebizonyitott formulát és véve a két integrál különbségét ez =

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{K_0} f(z)\left[\frac{2}{(z-a)^3} - \frac{\frac{1}{(z-a-h)^2}-\frac{1}{(z-a)^2}}{h}\right]dz.$$

Most szóról-szóra mint az előbb; az egész zárójeles kifejezés zérus felé tart ha $h \to 0$. Tehát közös nevezőre hozva az egészet és a számlálóban h hatványai szerint rendezve az egész kifejezés szükségképen ilyen alakú $\frac{h\,P_1(h,\,z-a)}{(z-a)^3(z-a-h)^2}$ és így az a pont körül írt r sugarú körben absolut értékre kisebb, mint $\frac{|h|\,G_1}{r^3\frac{r^2}{4}}$. Ezt most tekintetbe véve az egész integrál absolut értékre nézve kisebb, mint $|h|$ szorozva még egy konstanssal. Ezzel tehát kimutattuk, hogy $f'(z)$ különbségi hányadosának határértéke az adott integrál, vagyis $f'(z)$ is holomorf az adott tartományban és differenciálhányadosát a felirt integrálformula előállitja. Ebből természetesen most már az is következik, hogy $f(z)$-nek összes differenciálhányadosai léteznek és mind holomorfok azon tartományban, amelyben az eredeti függvény.

Végül legáltalánosabban, a mondott feltételek mellett

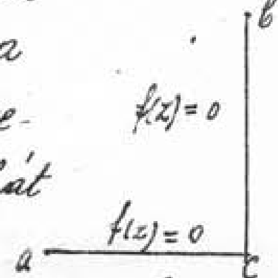
$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}}$$

A bizonyítást $n-1$-ről n-re való következtetéssel az előző meggondolással, vagy azon könnyen kimutatható tény segélyével is végezhetjük, hogy a kör mentén integrálva érvényes a parciális integráció tétele. Ekkor u.i. $f^{(n)}(a)$-ra mint $\left(f'(a)\right)^{n-1}$-re érvényes a formula, amelyen parciális integrációt végezve

$$f^{(n)}(a) = \frac{(n-1)!}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}} \frac{f'(z)}{(z-a)^{n}}\,dz = \frac{n!}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}}$$

A Cauchy-féle integrálformulák alkalmazásai. Liouville tétele. Az algebra alaptétele.

Mielőtt a tulajdonképeni alkalmazásokra térnénk, előrebocsátjuk a következő megjegyzést, amely a valós változók esetére egy jól ismert tényt tartalmaz. Ha az $f(z)$ függvény differenciálhányadosa egy tartomány minden pontjában zérus, akkor az $f(z)$ függvény ezen tartományban konstans. Legyen u.i. a és b a tartomány két tetszőleges pontja s tegyük föl egyszerűség kedvéért, hogy ezen két pont a tartományon belül összeköthető egy a valós ($\overline{ac}$) és egy a képzetes tengellyel párhuzamos ($\overline{cb}$) egyenessel. $f'(z)$ az egész tartományban, tehát ezen két egyenes mentén is állandóan zérus. Azonban az $\overline{ac}$, illetőleg $\overline{bc}$ egyenesen $f(z)$-t úgy is tekinthetjük, mint az x ill. y, $(z = x + iy)$ valós változók függvényét, melynek x ill. y szerinti differenciálhányadosa 0. Ennélfogva $f(a) = f(c)$ és $f(c) = f(b)$, tehát szükségképen $f(a) = f(b)$. Ez az eredmény azonban érvényes a tartomány minden <u>a</u> és <u>b</u> pontjára, mert a tartomány bármely két pontját össze tudjuk kötni a tartományon belül oly véges számú egyenesekből álló tört vonallal, melyek mindegyike a valós, vagy a képzetes tengellyel párhuzamos, tehát az előző meggondolásunk ismétlésével bármely <u>a</u> és <u>b</u> pontra is áll az $f(a) = f(b)$ egyenlőség. Ennélfogva az $f(z)$ függvény értéke az egész tartományban mindenütt ugyanaz, vagyis $f(z)$ = konst.



<u>A differenciálhányados integrál-</u>

Azt már láttuk, hogy ha az $f(z)$ függvény holomorf egy tartományban, akkfüggvénye. kor ezen tartományban egyenlő az integrálfüggvényének a differenciálhányadosával. Most kimutatjuk ennek a fordítottját. Ha az $f(x)$ függvény holomorf egy tartományban, akkor ezen tartományban egyenlő a differenciálhányadosának az integráljával azaz

$$\varphi(z) = \int_a^z f'(z)\,dz = f(z) - f(a)$$

Mivel az $f(x)$ függvény holomorf a tartományban, a Cauchy-féle formulákból vont következtetések szerint $f'(z)$, és ennélfogva mint holomorf függvénynek integrálfüggvénye a $\varphi(z)$ is holomorf ugyanazon tartományban ill. annak minden egyszeresen összefüggő részében. De akkor az integrálfüggvény differenciálhányadosára érvényes tétel szerint

$$\varphi'(z) = f'(z)$$

vagyis

$$(\varphi(z) - f(z))' = 0$$

Ebből következik az előrebocsátott megjegyzés értelmében, hogy az adott holomorfitási tartományban

$$\varphi(z) - f(z) = \text{konst.}$$

A $z = a$ esetben

$$-f(a) = \text{konst.}$$

tehát

$$\varphi(z) = f(z) - f(a),$$

amit épen bizonyítani akartunk.

A Cauchy-féle formulák további alkalmazása fontos eredményeket szolgáltat a holomorf függvény maximális értékeire. Ha az $f(z)$ függvény holomorf egy az a pont körül r sugárral írt K kör kerületén és belsejében és ezenkívül a kerületén

Holomorf függvény az absolut értékének maximumát a tartomány határán veszi fel.

$$|f(z)| \leq M,$$

akkor egyszersmind

$$|f(a)| \leq M.$$

M. i. feltételeink mellett érvényesek a Cauchy-féle formulák, tehát

$$|f(a)| = \frac{1}{2i\pi} \int_K \frac{f(z)}{z-a}\,dz .$$

Tekintetbe véve most, hogy $|f(z)| \leq M$; ered

$$|f(a)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_K \frac{f(z)}{z-a}\,dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{M}{r} 2\pi r = M$$

Megjegyzendő azonban, hogy $|f(a)| = M$ csak akkor állhat, ha egyszersmind mindenütt $|f(z)| = M$, ill. pontosabban, ha $f(z) = \text{konst.}$, minden más esetben $|f(a)| < M$. Állításunknak ez a pontosítása könnyen következik a végzett becslés részletesebb diszkussziója alapján; pl. úgy, hogy a $z = a + r e^{i\varphi}$ helyettesítéssel integrálunkat egy a φ valós változó szerint 0-tól 2π-ig veendő integrálba transzformáljuk és megjegyezzük, hogy a φ valós változó egy (valós vagy képzetes) folytonos $g(\varphi)$ függvényére csak úgy lehet

$$\left| \int_a^b g(\varphi)\, d\varphi \right| = \int_a^b |g(\varphi)|\, d\varphi$$

ha $g(\varphi) = c\,|g(\varphi)|$ (ahol természetesen $|c| = 1$).

Ezen tétel általánosítható a következőképen. Ha az $f(z)$ függvény holomorf egy teljesen tetszőleges egyszerűen zárt görbén és belsejében s ezenkivül a görbén

$$|f(z)| \leqq M,$$

akkor bármely belső a pontban is

$$|f(a)| \leqq M$$

Láthatjuk ebből, hogy a komplex változós függvények maximumáról jóval többet tudunk, mint a valós változós függvényekéről. Ott csak annyit tudunk, hogy a folytonos függvény a maximumát eléri. A komplex változós függvényekre ez szintén igaz; a bizonyítása teljesen úgy történik, mint a valós változós függvények esetén; de ezenfelül a kimondott tétel azt is állítja, hogy egy tartományban és határán holomorf függvény, a maximumát mindig a tartomány határán éri el.

A tételt úgy bizonyítjuk, hogy feltesszük az ellenkezőjét, tehát azt, hogy a függvény a maximumát a tartomány valamely belső pontján ($\underline{a}$) éri el és kimutatjuk, hogy akkor a függvény szükségképen az egész tartományban konstans, azaz a tartománynak bármely pontját is jelentse $\underline{b}$,

$$f(a) = f(b).$$

A tartomány definiciója szerint u. i. az $\underline{a}$ pontot összeköthetjük bármely $\underline{b}$ ponttal, véges számú kör által oly módon, hogy mindegyik kör magába foglalja a következőnek a középpontját és az első kör középpontja $\underline{a}$ legyen, az utolsó kör pedig tartalmazza a $\underline{b}$ pontot. Az $\underline{a}$ pontban a függvény maximális értékeket vesz fel, $f(a)$-t. De akkor az előző tétel szerint a függvény értéke az első körben konstans és pedig $= f(a)$. Az első körbe azonban beleesik a másodiknak a középpontja, tehát ugyanezen megondolás alapján a függvényértéke a második kör minden belső pontjában is $f(a)$. Így folytatva tovább az eljárást, következik, hogy a függvény értéke az utolsó kör minden pontjában, tehát a $\underline{b}$ pontban is $f(a)$-val egyenlő $\quad f(a) = f(b)$

A Cauchy-féle egyenlőtlenségek. Az $f(z)$ függvény differenciálhányadosaira hasonló egyenlőtlenségeket állapíthatunk meg. Ha az $f(z)$ függvény holomorf az a pont körül r sugárral írt K kör kerületén és belsejében; azonkívül a kerületen

$$|f(z)| \leqq M$$

akkor

$$|f'(a)| \leqq \frac{M}{r}$$

U. i. akkor írhatjuk, hogy

$$f'(a) = \frac{1}{2i\pi}\int_K \frac{f(z)}{(z-a)^2}\,dz$$

és

$$|f'(a)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_K \frac{f(z)}{(z-a)^2}\,dz\right| \leqq \frac{1}{2\pi}\frac{M}{r^2}2\pi r = \frac{M}{r}$$

Általánosan: a kiszabott feltételek mellett

$$\left|f^{(n)}(a)\right| \leqq \frac{n!\,M}{r^n}$$

U. i. akkor

$$\left|f^{(n)}(a)\right| = \frac{n!}{2i\pi}\int_K \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}}$$

és

$$\left|f^{(n)}(a)\right| = \frac{n!}{2\pi}\left|\int_K \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}}\right| \leqq \frac{n!}{2\pi}\cdot\frac{M}{r^{n+1}}2\pi r = \frac{n!\,M}{r^n}$$

Az $f'(a)$, ill. $f^{(n)}(a)$-ra származtatott egyenlőtlenségeket a Cauchy-féle egyenlőtlenségeknek szokták nevezni.

Az $f'(a)$-ra szóló egyenlőtlenség segélyével azonnal igazolhatjuk a következő, u. n. Liouville-féle tételt, amely így hangzik: ha az $f(z)$ függvény az egész síkban holomorf és korlátos, akkor $f(z)$ = konstans. **Liouville-féle tétel.**

A jelzett formula alapján u. i. egy határozott a pontra vonatkozólag

$$\left| f'(a) \right| \leqq \frac{M}{r}$$

Feltételünk szerint azonban r bármely tetszőleges nagy értéket felvehet, tehát okvetlenül

$$f'(a) = 0$$

Ez igaz bármely a pontra; ennélfogva az egész síkban $f'(z) = 0$,
és így egyik megjegyzésünk alapján tényleg

$$f(z) = \text{konst.}$$

A tételt bebizonyíthatjuk a függvényre szóló Cauchy-féle formulával is. Kimutatjuk t. i. hogy a kiszabott föltételek mellett bármely két pont legyen a és b,

$$f(a) = f(b)$$

Írjunk kört az a pont mint kezdőpont körül egy oly r sugárral, amely legalább is kétszer akkora, mint az a és b pontok távolsága. Az $f(a)$-t és $f(b)$-t kifejezve a Cauchy-féle formulákkal

$$f(a) = \frac{1}{2i\pi}\int_K \frac{f(z)}{z-a}dz$$

$$f(b) = \frac{1}{2i\pi}\int_K \frac{f(z)}{z-b}dz,$$

a kettő különbsége

$$f(a) - f(b) = \frac{1}{2i\pi}\int_K f(z)\frac{a-b}{(z-a)(z-b)}dz$$

de feltételeink figyelembe vételével (t.i. $|f(z)| \leqq M$ minden z-re, és $|z-b| \geqq \frac{r}{2}$)

$$\left| f(a) - f(b) \right| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_K f(z)\frac{a-b}{(z-a)(z-b)}dz\right| \leqq \frac{1}{2\pi}\,\frac{M(a-b)}{r\,\frac{r}{2}}\,2\pi r =$$

$$= \frac{2M(a-b)}{r}$$

r tetszőleges lévén, szükségkép

$$|f(a) - f(b)| = 0$$

azaz

$$f(a) = f(b)$$

A Liouville-féle tétel általánosítható a következőképen: <u>Ha az $f(z)$ függvény holomorf az egész síkban és amellett – nem korlátos ugyan, de –</u>

$$|f(z)| \leqq M|z|^n \qquad (M = \text{konst})$$

<u>akkor az $f(z)$ $(n+1)$-ed fokú racionális egész függvény</u>

Ez abból következik egyrészt, hogy az $(n+1)$-edik differenciálhányadosra vonatkozó egyenlőtlenség a feltételek számbavételével azt szolgáltatja, hogy $f^{(n+1)}(z) = 0$;

másrészt pedig, hogy minden függvény a differenciálhányadosának integrálja.

A Liouville-féle tételből, vagy már az $f(a)$-ra vonatkozó Cauchy-féle egyenlőtlenségből könnyen származtatható az algebra alaptétele, melyet úgy fogalmazhatunk, hogy a

Az algebra alaptétele.

$$z^n + c_1 z^{n-1} + c_2 z^{n-2} + \dots + c_n \qquad (n > 0)$$

racionális egész függvénynek van legalább egy 0-helye. Tegyük fel ugyanis az ellenkezőt. Akkor az

$$f(z) = \frac{1}{z^n + c_1 z^{n-1} + \dots + c_n}$$

függvény az egész síkban holomorf. Másrészt

$$\frac{1}{z^n + c_1 z^{n-1} + \dots + c_n} = \frac{1}{z^n} \frac{1}{1 + \frac{c_1}{z} + \dots + \frac{c_n}{z^n}}$$

és ha $|z| \to \infty$, a második tényező egyenletesen $\to 1$; ennélfogva z elég nagy értékeire

$$|f(z)| \leq \frac{2}{|z|^n};$$

vagyis ha r elég nagy, úgy a $|z| = r$ sugarú körön $|f(z)| \leq \frac{2}{r^n}$. Ez érvényes tetszésszerinti nagy r-re; tehát $f(0) = \frac{1}{c_n} = 0$. Ezzel ellenmondásra jutottunk.

Morera tétele.

A Cauchy-féle tétel feltételezi a függvény holomorfitását egy bizonyos tartományban. Felvethetjük azon kérdést, hogy ez a feltétel nemcsak elégséges, de szükséges feltétel-e is? Más szóval, nem léteznek-e az említett függvényeken kivül még más függvények is, amelyekre szintén áll a Cauchy-féle tétel?

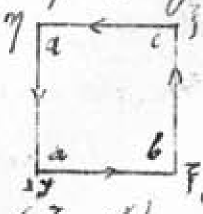
Ezen kérdésre adja meg a választ a Morera-féle tétel, amely szerint, ha az $f(x)$ függvény egy tartományban folytonos, és minden olyan zárt görbén, mely belsejével együtt a tartományba esik, integrálva zérust ad, akkor az $f(x)$ függvény ezen tartományban holomorf.

Legyen $F(z)$ az $f(x)$ integrálfüggvénye. Szorítkozzunk az adott tartománynak csak egyszeresen összefüggő részére. Ezen megszorítás és az $f(z)$ függvény folytonossága következtében az $F(z)$ függvény bármely megengedett úton létezik és egyértelmű. Kimutatjuk, hogy a megadott feltétel mellett az $F(z)$ a tartományban holomorf függvény és differenciálhányadosa $f(x)$. Ezzel nyilvánképp kimutattuk a Morera-féle tételt, mert akkor következik, hogy $f(x)$ mint holomorf függvénynek differenciálhányadosa szintén holomorf függvény. Az $F(z)$ függvényre szóló állításunk azonban igen könnyen bizonyitható. Mivel az $f(z)$ függvénynek bármely megengedett úton vett integrálja zérus, következik, hogy

$$F(z_0+h) - F(z_0) = \int_{z_0}^{z_0+h} f(x)\, dz$$

Azonban azt már láttuk, hogy ha ezen egyenlőség igaz, akkor még csupán csak az $f(z)$ függvény folytonosságát felhasználva nyerjük, hogy $F'(z) = f(z)$, vagyis tényleg az $F(z)$ függvény a tartományban holomorf és differenciálhányadosa $f(z)$-vel egyenlő.

A meggondolásból evidens, hogy a Morera-féle tétel állítása akkor is érvényben marad, ha feltételt azzal helyettesítjük, hogy a függvénynek minden a belsejével együtt a tartományba eső háromszög mentén vett integrálja zérus legyen. Ugyszintén könnyen módosítható a meggondolás úgy, hogy háromszögek helyett derékszögű négyszögeket veszünk, melyek oldalai párhuzamosak a valós és képzetes tengellyel. Ez utóbbi esetet azért említjük föl, mert az ily derékszögű négyszögek mentén vett integrálokat sokszor könnyen ki tudjuk számítani és így ezzel módot nyerünk a függvény holomorfitásának eldöntésére. Pl. az $f(z) = e^z$ függvényről láttuk, hogy holomorf az egész síkban. A leírt módon ezt újból igazolhatjuk. Vegyük föl u. i. a síkban valahol a négyszöget; a szögpontjainak (a, b, c, d) koordinátái rendre: x, y; ξ, y; ξ, η; x, η; a négyszög mentén vett integrál a következő négy integrál összege:



$$\int_a^b e^z dz = \int_a^b e^x(\cos y + i\sin y)\,dx = (\cos y + i\sin y)(e^\xi - e^x)$$

$$\int_b^c e^z dz = i\int_b^c e^x(\cos y + i\sin y)\,dy = e^\xi\left[(\cos\eta + i\sin\eta) - (\cos y + i\sin y)\right]$$

$$\int_c^d e^z dz = \int_c^d e^x(\cos y + i\sin y)\,dx = (\cos\eta + i\sin\eta)(e^d - e^\xi)$$

$$\int_d^a e^z dz = i\int_d^a e^x(\cos y + i\sin y)\,dy = e^x[(\cos y + i\sin y) - (\cos\eta + i\sin\eta)]$$

Ezen 4 integrál összege pedig tényleg zérussal egyenlő, bárhol is vegyük fel a síkban a négyszöget; tehát valóban e^z holomorf az egész síkban.

<u>Weierstrass tétele a holomorf függvények sorozatáról.</u>

<u>Weierstrass tétele.</u>

<u>Ha egy tartományban az</u>

$$f_1(z),\ f_2(z),\ \ldots\ f_n(z),\ \ldots$$

<u>függvénysorozat minden tagja holomorf függvény és a sorozat ezen tartományban vagy a tartomány belsejében egyenletesen tart az $f(z)$ függvény felé, akkor 1° az $f(z)$ függvény is holomorf, 2° a k-adik differenciálhányadosok sorozata az $f(z)$ függvény megfelelő differenciálhányadosa felé tart és pedig a tartomány belsejében egyenletesen.</u>

A tétel megfogalmazásában a következő kifejezést használtuk: az $f_1(z)$, $f_2(z)$ .... függvénysorozat a <u>tartomány belsejében egyenletesen</u> tart az $f(z)$ függvény felé. Ez alatt azt értjük, hogy a sorozat minden a tartományban foglalt zárt halmazon egyenletesen tart $f(z)$ felé, vagyis minden ilyen zárt halmazhoz és minden ε-hoz található olyan első index, amelytől kezdve $|f(z) - f_n(z)| < \varepsilon$. Ez mindenesetre teljesül akkor, ha a sorozat a megszokott értelemben az egész tartományban tart $f(z)$ felé, vagyis ha minden ε-hoz van olyan index, melytől kezdve az egész tartományban $|f(z) - f_n(z)| < \varepsilon$. Föltevésünk ennél kevesebbet követel. pl. $\frac{z^n}{1-z}$ definiciónk szerint az egységkör belsejében egyenletesen tart zérus felé, de konvergencia nem egyenletes a második megszokott értelemben, sőt valamennyi függvény tetszésszerinti nagy értékeket vesz föl. A tételt azért fogalmaztuk így, mert ha a sorozatról azt is tennénk föl, hogy az egész tartományban (a megszokott értelemben) konvergál egyenletesen, a differenciálsorozatról akkor is csak a tartomány belsejében való egyenletes konvergenciát állíthatnánk.

Térjünk a tétel bebizonyítására. A tétel első része a Morera-féle tételből következik. Az $f(z)$ függvény, mint folytonos függvények egyenletesen konvergens sorozatának limese, a tartomány belsejében mindenütt folytonos. Föltételünk szerint továbbá bármely rektifikálható a belsejével együtt a tartományban fekvő zárt $\mathscr{C}$ görbére

$$\int_{\mathscr{C}} f_n(z)\,dz = 0 \; ; \qquad (n = 1, 2, \dots)$$

tehát írhatjuk, hogy

$$\int_{\mathfrak{C}} f(z)\,dz = \int_{\mathfrak{C}} \big(f(z) - f_n(z) \big) dz.$$

Azonban a $\mathfrak{C}$ görbéhez, mint zárt halmazhoz és bármely kis pozitív ε számhoz megválasztható úgy az n szám, hogy

$$\left| f(z) - f_n(z) \right| \leq \varepsilon$$

legyen. Ennélfogva

$$\left| \int_{\mathfrak{C}} f(z)\,dz \right| = \left| \int_{\mathfrak{C}} \big(f(z) - f_n(z) \big) dz \right| \leq \varepsilon L, \quad (L \text{ a } \mathfrak{C} \text{ görbe hossza})$$

tehát szükségkép

$$\int_{\mathfrak{C}} f(z)\,dz = 0.$$

Az $f(z)$ függvényre most már alkalmazható a Morera-féle tétel s ezerint az $f(z)$ függvény tényleg holomorf azon tartományban, amelyben az $\{f_n(z)\}$ függvények holomorfok.

A tétel második része azt mondja ki, hogy ha $n \to \infty$, akkor $f_n^{(k)}(z) \to f^{(k)}(z)$

Ezt a tartomány egy tetszőleges belső pontjára, $\underline{a}$-ra, a következőképen mutatjuk ki. Írjunk az $\underline{a}$ pont körül egy $\mathfrak{C}$ görbét, mely a belsejével együtt a tartományba essék, pl. egy elég kis r sugarú kört. Ekkor, minthogy az $f(z)$ függvényről kimutattuk, hogy holomorf, a Cauchy-féle formula szerint írhatjuk, hogy

$$f^{(k)}(a) - f_n^{(k)}(a) = \frac{k!}{2i\pi} \int_{\mathfrak{C}} \frac{f(z) - f_n(z)}{(z-a)^{k+1}}\,dz$$

Hogy ha azonban az n számot úgy választjuk, mint előbb, akkor

$$\left| f^{(k)}(a) - f_n^{(k)}(a) \right| \leqq \frac{k!}{2\pi} \frac{\varepsilon}{r^{k+1}} 2r\pi = \frac{k!}{r^k} \varepsilon ;$$

vagyis ha ε-t elég kicsinynek és n-t megfelelően nagynak választjuk, ezen különbség tetszésszerinti kicsinnyé lesz. Tehát tényleg $f_n^{(k)}(a) \longrightarrow f^{(k)}(a)$

Hogy a tartomány belsejében vagyis minden a tartományba foglalt zárt halmazon konvergencia egyenletes, azt a következő meggondolással láthatjuk át. Legyen $\underline{d}$ a H zárt halmaz távolsága a tartomány határától; minthogy a zárthalmaz a tartományban (azaz pontosabban, a tartomány belsejében) fekszik, azért $d \neq 0$. A halmaz minden $\underline{a}$ pontja körül $r = \frac{d}{2}$ sugárral írt kör belsejével együtt a tartományban fekszik, alkalmazhatjuk tehát reá a fenti meggondolást. Másrészt az összes ilyen körök összes pontjai a tartomány határától legalább $\frac{d}{2}$ távolságra vannak, tehát beletartoznak egy bizonyos $H_{\frac{d}{2}}$ zárt halmazba, melyet t.i. a tartománynak a határától $\geqq \frac{d}{2}$ távolságra fekvő pontjai alkotnak. Ennélfogva minden megadott ε-hoz van olyan index, amelytől kezdve a $H_{\frac{d}{2}}$ halmaz minden pontjában, tehát köreinken is mindenütt

$$\left| f(z) - f_n(z) \right| \leqq \varepsilon ;$$

vagyis a fenti becslés szerint a H halmaz minden a pontjában
$$\left| f^{(k)}(a) - f_n^{(k)}(a) \right| \leq \frac{k!}{\left(\frac{d}{2}\right)^k} \varepsilon .$$
Tehát a konvergencia egyenletes.

<u>A tétel kiegészítése:</u> Weierstrass tételét még a következő tétellel egészítette ki. <u>Ha az $f_1(z), f_2(z), \dots f_n(z), \dots$ függvénysorozat elemei oly függvények, melyek egy tartomány belsejében holomorfok, a tartomány belsejében és határán folytonosak és a sorozat a tartomány határán egyenletesen konvergens, akkor a sorozat az egész tartományban egyenletesen konvergens.</u> Az ilyen sorozatra tehát a fortiori teljesülve vannak a Weierstrass-féle tétel föltevései.

Ezen kiegészítő tételt a következőkép igazolhatjuk. Minthogy a sorozat a tartomány határán egyenletesen konvergál azért bármely kis pozitív ε-hoz található olyan index, amelytől kezdve minden m-re és n-re a tartomány egész határán
$$\left| f_m(z) - f_n(z) \right| \leq \varepsilon$$
Másrészt az $f_m(z) - f_n(z)$ különbség is holomorf függvény, tehát absolut értékének a maximumát a tartomány határán éri el. Ennélfogva az előbbi egyenlőtlenség a tartomány minden belső pontjára is áll, vagyis a függvénysorozat a tartomány belsejében is egyenletesen

konvergens.

Megemlítjük még - a bizonyítások mellőzésével - a függvénysorozatokra vonatkozó, következő két tételt. Ha a holomorf függvények egy sorozata konvergens és korlátos, akkor egyszersmind a tartomány belsejében egyenletesen konvergens. Továbbá a holomorf függvények minden végtelen sok elemből álló korlátos halmazából mindig kiválasztható egy konvergens függvénysorozat. Ez az utóbbi tétel különösen azért érdekes, mert nem más mint a Bolzano-Weierstrass-féle kiválasztási tételnek a holomorf függvények sorozatára való átfogalmazása.

Holomorf függvények sorbafejtése.

A hatványsor.

A hatványsor fogalma. A $c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots + c_n(z-a)^n$ végtelen sort, ahol a $c_0, c_1, c_2, \dots c_n, \dots$ együtthatók valós vagy komplex számok, hatványsornak nevezzük.

Az általánosság megszorítása nélkül föltehetjük, hogy $a = 0$ azaz, hogy a hatványsor ily alakú $c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n + \dots$; ugyanis a $z = \mu + a$ helyettesítéssel ezt mindig elérhetjük.

A hatványsor konvergenciáját tekintve három eset lehetséges: a hatványsor csak a $z = 0$ helyen konvergens; a hatványsor z-nek minden értéke mellett konvergens; a hatványsor z-nek bizonyos véges értékei mellett konvergens, másokra nem az. Kimutatjuk, hogy ezen utóbbi esetben létezik egy a $z = 0$ pont körül írt olyan kör, hogy a hatványsor a kör minden belső pontjában konvergens és minden a körön kívül levő pontban divergens. Ezen kört a hatványsor konvergenciakörének nevezzük. (A hatványsornak a konvergencia-

A konvergencia-kör; a Cauchy-Hadamard féle tétel.

köre kerületén való viselkedéséről nem állíthatunk semmit.) Ez az állítás benfoglaltatik a bebizonyitandó Cauchy - Hadamard féle tételben, amely emellett még explicite megadja a hatványsor konvergenciaköre sugarának értékét. Eszerint: ha az $\{\sqrt[n]{|c_n|}\}$ sorozat legnagyobb torlódási értékét L - lel jelöljük:

$$L = \limsup \sqrt[n]{|c_n|}\,,$$

akkor a $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ hatványsor konvergencia-körének sugara

$$\varrho = \frac{1}{L}$$

vagyis a $z=0$ pont körül ezen ϱ sugárral kört írva a hatványsor konvergens mindolyan z pontban, amelyik a kör belsejében van $\left(|z| < \frac{1}{L}\right)$ és divergens minden olyan z pontban, mely a körön kivül esik $\left(|z| > \frac{1}{L}\right)$.

A tétel első részében tehát

$$|z| < \frac{1}{L}$$

azaz

$$L\,|z| < 1$$

Mivel azonban $L = \limsup \sqrt[n]{|c_n|}$, azért mindenesetre található olyan θ pozitiv valódi tört és olyan $\underline{n}$ szám, hogy attól kezdve

$$\sqrt[n]{|c_n|}\cdot|z| < \theta$$

azaz

$$|c_n|\cdot|z^n| < \theta^n$$

De ez azt jelenti, hogy a z-re kiszabott feltététel mellett a konvergens $\sum_{n=0}^{\infty} \vartheta^n$ geometriai sor $(0<\vartheta<1)$ egy tagjától kezdve majorálja a hatványsorunk megfelelő részének; ennélfogva a hatványsor abszolút konvergens. De egyszersmind az is következik, hogy a hatványsor minden a $\varrho = \frac{1}{L}$ -nél kisebb sugarú koncentrikus körben egyenletesen konvergens, mert a hatványsort az egész kör belsejében majorizálja a fenti geometriai sor.

A tétel második része így hangzik, hogy ha

$$L|z|>1$$

akkor a hatványsorunk divergens. Tényleg a torlódási érték értelmezése szerint végtelen sok olyan n szám van, amely mellett teljesül az

$$\sqrt[n]{|c_n|}\,|z|>1,$$

vagyis az

$$|c_n z^n|>1 \quad \text{egyenlőtlenség.}$$

Tehát a sor tagjai nem tartanak zérus felé és ennélfogva a sor nem lehet konvergens.

A tételt kiegészítjük azon két esetre is, amely a két extrémumot foglalja magában. Ha az $\{\sqrt[n]{|c_n|}\}$ sorozat nem korlátos, akkor a legnagyobb torlódási helye végtelennek és a hatványsor konvergencia körének sugara zérusnak tekinthető. Ha pedig a sorozat legnagyobb torlódási értéke 0 (s akkor ez egyszersmind egyetlen torlódási értéke), akkor a hatvány-

<u>sor konvergenciakörének sugara végtelennek vehető.</u> Az első esetben tehát a konvergencia kör egy ponttá zsugorodik össze; a második ban az egész síkot magában foglalja.

A Cauchy-Hadamard-féle tétellel tehát meg tudjuk határozni egy adott hatványsor konvergenciakörének sugarát. Sok esetben egyébként használhatóbb a következő kevésbbé általános (elegendő, de nem szükséges) kritérium: <u>ha a</u> $\left\{\left|\frac{c_{n\cancel{+1}}}{c_{n+1}}\right|\right\}$ <u>sorozat (hatványsor) egy határérték felé tart, akkor ezen határérték a konvergencia körének sugara.</u>

Példákra alkalmazva ezen szabályokat; **<u>Példák.</u>** a Cauchy-Hadamard-féle tétel szerint a

(1) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^n}$$

sor az egész síkban konvergens, mert

$$\sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{n} \to 0$$

(2) A $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

hatvány-sornál már alkalmasabb a második kritérium használata. Ezt alkalmazva

$$\left|\frac{c_{n\cancel{+1}}}{c_{n+1}}\right| = n+1 \to \infty$$

tehát a sor szintén az egész síkban konvergens.

A további példákban szintén a második kritériumot alkalmazzuk.

(3.) A $\sum_{n=0}^{\infty} n^K z^n$

hatványsor konvergenciakörének sugara = 1.

$$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \left|\frac{n+1}{n}\right|^K = \left|1+\frac{1}{n}\right|^K = 1+K\frac{1}{n}+\dots+\frac{1}{n^K} \to 1$$

(4.) A $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n}$ sor konvergenciakörének sugara szintén = 1, mert

$$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \frac{n+1}{n} = 1+\frac{1}{n} \to 1,$$

azonban a konvergenciakör középpontja itt már nem zérus, hanem a +1 pont.

Ha a hatványsorból hiányoznak bizonyos exponensü tagok, akkor a kritériumok alkalmazása természetesen óvatosságot igényel. Így pl. ha az

(5.) $$1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\dots$$

sorra úgy alkalmazzuk a kritériumot, hogy a sort mint a z^2-ik hatványsorát tekintjük, csak akkor kapjuk, hogy a sor konvergens az egész síkban, mert

$$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \frac{(2n+2)!}{2n!} = 2n+2 \to \infty$$

A hatványsor által értelmezett függvény. A hatványsor a konvergenciakörének belsejében egy függvényt értelmez. Az eddigiek szerint a hatványsor részösszegei, melyek nyilván holomorf függvények, a konvergencia kör belsejében egyenletesen tartanak ezen függvény felé. Ennélfogva alkalmazható reájuk a Weierstrass-féle tétel, amely a következő eredményt szolgáltatja. A hatványsor egy a konvergencia körének belsejében holomorf függvényt értelmez a hatványsort szabad, akárhányszor tagonkint differenciálni, az ezáltal nyert új hatványsor az eredeti sor konvergenciakörének belsejében ismét egyenletesen konvergál és egyenlő az eredeti hatványsor által előállított függvény megfelelő differenciálhányadosával. (Az egyenletes konvergencia miatt ugyanez áll az integrálra is.) Látható tehát, hogy a hatványsorok elmélete a holomorf függvények elméletéhez tartozik.

A függvénytan felépítésének azon módja, amelyet mi követünk, Cauchy-tól származik. Az előzők alapján látható azonban hogy más utat is lehet követni, s. i. a hatványsorokból kiindulva, ezek elméletének tanulmányozásával. Ezen utóbbi alapon áll a függvénytannak azon kifejtése, amelyet Méray és Weierstrass követtek, amelynél a hatványsor a függvényt értelmező elem. A Cauchy-féle alapon dolgozva a hatványsorok oly módon kapcsolódnak be az elméletbe, hogy mintegy a hatványsor által előállított függvény holomorfitásának a megfordításaképp, kimutatjuk, hogy a holomorf függvény a holomorfitási tartományának minden belső pontja körül hatványsorba fejthető.

A holomorf függvény hatványsorba fejtése a Taylor sor.

Taylor-sor. Legyen az $f(x)$ függvény holomorf egy tartományban és legyen a a tartomány egy belső pontja, akkor

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n \qquad \cancel{(n=1,2\ldots)}$$

minden olyan az a pont mint középpont körül írható körben, amely az $f(z)$ holomorfitási tartományába esik. Ezen sort az $f(z)$ függvény Taylor sorának nevezzük.

A tételt a következőkép bizonyítjuk. Az a pont körül írt r sugarú K kör foglaljék belsejével együtt a tartományban. Akkor minden a kör belsejében levő z pontra a Cauchy-féle formula szerint:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

Azonban $\frac{1}{\zeta - z}$ írható a következőképen

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - a) - (z-a)} = \frac{1}{\zeta - a}\cdot\frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta - a}}$$

$$= \frac{1}{\zeta - a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{\zeta - a}\right)^n$$ Ezen geometriai sor

mindenesetre konvergens és pedig egyenletesen a $|\zeta - a| = r$ körön, mert

$$\left|\frac{z-a}{\zeta-a}\right| = \frac{|z-a|}{r} < 1.$$

Beírva már most ezen geometriai sort az $f(z)$ függvényt előállító integrálformulába, az egyenletes konvergencia következtében az integrálást szabad tagonként végezni:

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_K \frac{f(\zeta)}{\zeta-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n d\zeta =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2i\pi}\int_K \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\, d\zeta\,(z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n.$$

Ez az, amit ki akartunk mutatni.

Számítsuk ki néhány speciális függvény hatványsorát. <u>Speciális függvények hatványsora</u>

Az $f(z) = e^z$ függvényről láttuk, hogy az egész síkban minden differenciálhányadosa létezik és magával a függvénnyel egyenlő. Ennélfogva a függvényt az a pont környezetében hatványsorba fejtve, a hatványsor n-dik koefficiense

$$\frac{1}{n!}f^{(n)}(a) = \frac{e^a}{n!}$$

Tehát a függvény hatványsora

$$e^z = e^a\left(1 + \frac{z-a}{1!} + \frac{(z-a)^2}{2!} + \cdots + \frac{(z-a)^n}{n!} + \cdots\right)$$

Az $a = 0$ hely körül

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!}$$

Fejtsük hatványsorba a $z=0$ hely környezetében a következőkép értelmezett két függvényt:

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$$

$$\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$$

Az e^z függvény sorfejtésében z helyébe iz-t illetve $-iz$-t téve, megkapjuk az e^{iz} és e^{-iz} függvények sorait; ezeket a $\cos z$ és $\sin z$ függvényeket értelmező kifejezésekbe behelyettesítve:

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots$$

Mindhárom függvény valós z esetében megegyezik a hasonlóan jelölt jól ismert valós változós függvénnyel. E függvényeknek úgynevezett additiós tételeit, úgy mint

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$$

$$\cos(z_1+z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$$

$$\sin(z_1+z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$$

lehozhatjuk a hatványsorba fejtett alakjaikból. A $\cos z$ és $\sin z$ függvények additiós tételei az exponentiális függvényére vezethetők vissza. Ez pedig a Cauchy-féle szorzási tétel segélyével bizonyítható be.

A Cauchy-féle szorzási tétel a hatványsorokra így szól: két konvergens hatványsort,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

Cauchy-féle szorzási tétel

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

szabad úgy összeszoroznunk, hogy az első sor minden tagját megszorozzuk a második sor minden tagjával és a nyert szorzatokat z hatványai szerint rendezzük:

$$f(z)\, g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0) z^n$$

Ez a tétel, mely a hatványsorokra alapított Weierstrass-féle függvénytannak különösen fontos eszköze és a hatványsorok absolut konvergens voltából könnyen következik, a mi gondolatmenetünkbe beillesztve így is bizonyítható: Az $f(z)\, g(z)$ szorzat holomorf azon tartományban, melyben mind az $f(z)$, mind a $g(z)$ függvény holomorf. Ezen szorzat tehát egy konvergens hatványsorba fejthető:

$$f(z)\, g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

ahol

$$c_n = \frac{1}{n!} \left(f(z)\, g(z) \right)^{(n)}$$

Azonban a szorzat differenciálására alkalmazva a Leibnitz-féle szabályt (ez érvényes komplex változók esetére is) és tekintetbe véve, hogy az a_k és b_k együtthatók szintén az $f(z)$ és $g(z)$ függvények megfelelő és $k!$-sal osztott differenciálhányadosai, kapjuk, hogy

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0 .$$

A Laurent-féle sor.

Az előző részben láttuk, hogy ha egy függvény holomorf egy tartományban, akkor ezen tartomány minden pontja körül hatványsorba fejthető. Igen fontos azonban épen az az eset, amikor a függvény a tartomány egy vagy több pontjában nem holomorf, amikor tehát ezen pontok körül a hatványsorba, vagy pontosabban a pozitiv egész kitevőjű hatványok szerint való kifejtés nem alkalmazható.

Ebben az esetben a sorfejtésnek egy másik alakját használjuk, amelynek segélyével ezen singuláris pontjai körül is sorba fejthető és a nyert sor előállítja a függvényt egy, a singuláris pont körül írt kör belsejében, kizárva természetesen magát a középpontot.

Legyen ugyanis az $f(z)$ függvény holomorf az a pont körül írt K_1 és K_2 koncentrikus körök által határolt körgyűrűben. Kimutatjuk, hogy akkor az $f(z)$ függvény a körgyűrű minden belső pontjában előállítható a következő kétszeresen végtelen sor által:

$$f(z) = \dots + a_{-2}(z-a)^{-2} + a_{-1}(z-a)^{-1} + a_0 + a_1(z-a)^1 + a_2(z-a)^2 + \dots =$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n,$$

ahol $$a_n = \frac{1}{2i\pi}\int f(z)(z-a)^{-n-1}dz \quad (n = \dots -2, -1, 0, 1, 2 \dots)$$

ha K egy a K_1 és K_2 közé eső tetszőleges kört jelent.

Ezen sort, amely tehát $(z-a)$-nak pozitív és negatív hatványai szerint halad, az $f(z)$ függvény Laurent-féle sorának nevezzük. A fent említett eset valamivel kevésbbé általános. Ebben az esetben K_1 és K_2 gyanánt választhatunk bármely 2 olyan kört, melyeken belül a függvény az a középpont kivételével holomorf.

Kiindulásul most is a Cauchy-féle integrálformulát használjuk. A függvény holomorf a körgyűrű belsejében és határán, vagy itt esetleg csak folytonos; (ha pedig a határon való viselkedéstől egyáltalán semmit nem teszünk föl, akkor a körgyűrűn belül, a határokhoz közel, két újabb K_3 és K_4 kört veszünk föl és ezekre alkalmazzuk a továbbiakat.) Ennélfogva, ha a 2 kör közül K_1 a külső, K_2 a belső, a Cauchy-féle integrálformula szerint a gyűrű bármely belső z pontjában

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{K_1}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2i\pi}\int_{K_2}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}$$

A jobb oldalon álló első integrálban $\frac{1}{\zeta - z}$-t a következőkép írhatjuk:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a - (z-a)} = \frac{1}{\zeta - a}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-a}{\zeta - a}} = \frac{1}{\zeta - a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{\zeta - a}\right)^n;$$

Az itt szereplő végtelen sor egyenletesen konvergens, mert z a K_1 körön belül fekvő pont lévén $\left|\frac{z-a}{\zeta - a}\right| < 1$.

A második integrálban pedig

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\frac{1}{(z-a)-(\zeta - a)} = -\frac{1}{z-a}\cdot\frac{1}{1-\frac{\zeta - a}{z-a}} = -\frac{1}{z-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\zeta - a}{z-a}\right)^n$$

és ez a végtelen sor szintén egyenletesen konvergens, mert a K_2 körön kívül van, tehát $\left|\frac{\zeta - a}{z-a}\right| < 1$.
$\frac{1}{\zeta - z}$ ezen sorba fejtett alakjait betéve az első il-

letőleg a második integrálba, az egyenletes konvergencia folytán az integrálást tagonkint végezhetjük, tehát

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(z-a)^n\frac{1}{2\pi i}\int_{K_1}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z-a)^{n+1}}\frac{1}{2\pi i}\int_{K_2}f(\zeta)(\zeta-a)^n\,d\zeta$$

Legyen $$\frac{1}{2\pi i}\int_{K_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^n}\,d\zeta=a_n\qquad(n=0,1,2\dots)$$

és $$\frac{1}{2\pi i}\int_{K_2}f(\zeta)(\zeta-a)^{n-1}\,d\zeta=a_{-n}\qquad(n=1,2,\dots)$$

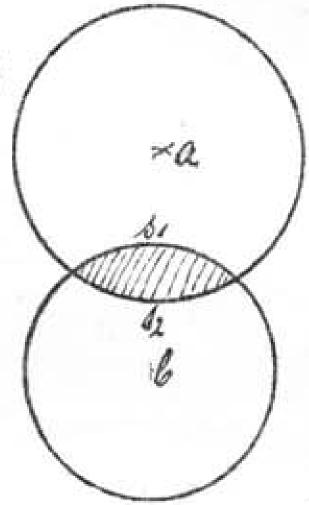
vagy egybefoglalva a két jelölést

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{K}f(\zeta)(\zeta-a)^{-n+1}\,d\zeta=a_n\qquad(n=\dots-2,-1,0,1,2,\dots)$$

ahol K egy a K_1 és K_2 között fekvő tetszésszerinti kört jelent. U.i. ezen integrálok integrandusai az egész körgyűrűben holomorf függvények, tehát a K_1, illetőleg K_2 körön végzett integrálást a Cauchy-féle tétel alapján helyettesíthetjük a K körön való integrálással. Vagyis tényleg

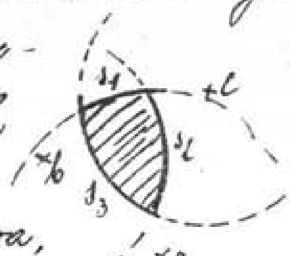
$$f(\zeta)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n(z-a)^n,$$

ahol az a_n együtthatót az előző formula szolgáltatja.

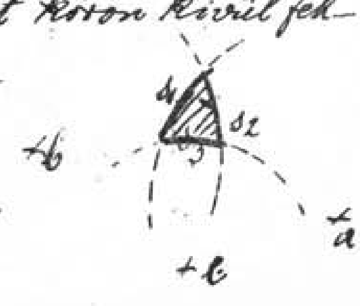


vergencia körnek van közös része (az s_1 és s_2 ívek által határolt rész.) A két hatványsort tagonként összeadva, az így nyert sor konvergenciatartománya az s_1 és az s_2 ívek által határolt ívkétszög).

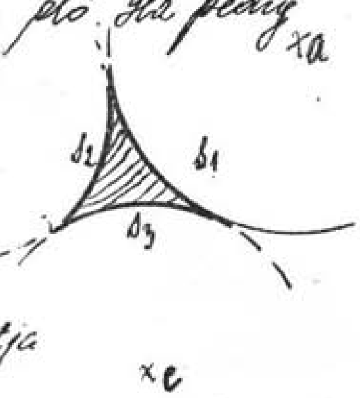
Ha az a, b, c középpontokhoz tartozó három körív s_1, s_2, s_3 által határolt tartományt tekintjük, amely pl. olyan, hogy benne fekszik az illető ívek kiegészítésével nyert körök mindegyikében, akkor a Cauchy-féle integrálformulából, az integrál a három ívnek megfelelően háromfelé bontva,



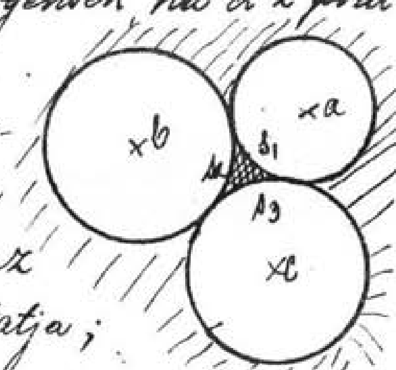
a Taylor és Laurent-sorok származtatásához hasonló meggondolással nyerjük, hogy minden ezen körívháromszögben és határán holomorf függvény három és pedig $(z-a)$, $(z-b)$, $(z-c)$ hatványai szerint haladó hatványsor összegeként állítható elő. Ha a tartomány pl. a c körül írt körön kívül fekszik, akkor a tartományban holomorf függvényt $(z-a)$ és $(z-b)$ pozitív és $(z-c)$ negatív hatványai



szerint haladó sorok összege állítja elő. Ha pedig a tartomány mind a három körön kívül fekszik, akkor a tartományban holomorf függvényt a $(z-a)$, $(z-b)$, $(z-c)$ negatív hatványai szerint haladó sorok összege állítja elő.



Érdekes megemlíteni, hogy az így származtatott sorfejtéseknél a konvergencia pontok összesége nem alkot okvetlenül egyetlen tartományt. Így pl. az utolsó esetben az s_1, s_2, s_3 ívháromszögben a függvényt előállító sorok akkor is konvergensek, ha a z pont a 3 körön és az ívháromszögön kívül van és a három sor összege ezen pontokban 0. U.i. a három sor összege most is az



$\int \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}$ integrált szolgáltatja; ez az integrál pedig ezen esetben zérus, minthogy a z pont az ívháromszögön kívül fekszik. Ha már most a konvergencia pontok egyetlen tartományt alkotnának, akkor minthogy a 3 sor összege ezen tartomány egy részében 0, 0 volna az egész tartományban, tehát az egész ívháromszögben is; már pedig mi egy tetszésszerinti holomorf függvényből in–

A holomorf függvény polynomok szerint való sorbafejtése.

A tárgyalt két sorfejtésnél fontos szerepe van a körnek. A hatványsor egy kör belsejében, a Laurent-féle sor egy körgyűrű belsejében állítja elő a holomorf függvényt. Függvényeink holomorfitási tartományai azonban csak igen speciális esetben körök, általában tetszésszerinti más alakú tartományok is lehetnek. Célszerű tehát a holomorf függvények számára egy oly sorfejtést keresni, amely bármely tetszésszerinti tartományban érvényes. A következőkben adunk egy ily sorfejtést, előbb azonban még néhány, speciális tartományra szóló példát tárgyalunk, melyek mintegy elképzelhetővé teszik az általános esetben való sorbafejthetőségét.

Speciális alakú tartományok.

Tekintsünk két hatványsort, melyek $(z-a)$ illetőleg $(z-b)$ hatványai szerint haladnak és amelyeknek konvergencia sugarai végesek. Tegyük fel továbbá, hogy a két kondultunk ki.

A polynomok szerint haladó sorba-fejtés.

Ezekután most áttérünk a bizonyítandó tételre, amely teljes általánosságban így hangzik. Ha az $f(z)$ függvény holomorf egy egyszeresen összefüggő tartomány belsejében és határán, akkor ezen függvény a holomorfitási tartománya belsejében egyenletesen konvergens, racionális egész függvények szerint haladó sorba fejthető. Vagy: bármely egyszeresen összefüggő tartományban és határán holomorf függvény a tartomány belsejében egyenletesen megközelíthető a racionális egész függvények egy sorozatával.

A tétel hasonlít a valós változó folytonos függvényeire érvényes Weierstrass-féle tételhez.

A tétel bizonyításánál mi csak arra az egyszerű esetre szorítkozunk, amelyben az $f(z)$ függvény holomorfitási tartományát egy konvex görbe $(\mathfrak{C})$ határolja.

A Cauchy-féle integrálformula szerint a tartomány minden belső pontjában

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{C}} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}$$

Ebből az integrálértelmezésből következik, hogy

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f(\zeta_k)(\zeta_{k+1}-\zeta_k)}{\zeta_k - z} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{A_1}{\zeta_1 - z} + \dots + \frac{A_n}{\zeta_n - z}\right),$$

ahol a konvergencia a tartomány belsejében egyenletes. Látjuk tehát, hogy az $f(z)$ függvény a holomorfitási tartományának belsejében egyenletesen megközelithető a racionális tört függvények egy sorozatával.

Válasszunk ezután egy oly görbesorozatot $C_1, C_2, \dots C_k, \dots$ amelyek közül mindegyik benne van a következőben és amelyek a C görbe felé konvergálnak. (Pl. a C görbéből előállitott azon görbesereget, amelyet a C valamely belső pontjából hasonlósági transformációval nyerünk.) Tekintsük ezen görbesorozat egy C_m görbéjét, az előzők szerint található egy olyan $R_m(z)$ racionális tört függvény, hogy az egész C_m görbén és belsejében:

$$\left| f(z) - R_m(z) \right| < \frac{1}{m}$$

$R_m(z)$ azonban az $\frac{A_k}{\zeta_k - z}$ alakú tagok összegéből áll. Minden egy ily $\frac{A_k}{\zeta_k - z}$ kifejezés hatványsorba fejthető egy oly kör belsejében, amely átmegy ζ_k ponton és magában foglalja a C görbét. (C konvex görbe.) Végezzük el ezt a hatványsorba fejtést minden ζ_k pontra, de a nyert hatványsorokat csak addig vegyük figyelembe amig a maradék tagjaik egyenkint kisebbek, mint $\frac{1}{n \cdot m}$. Ily módon

n számú polynomot nyerünk, amelyek összege ~~P~~ $P_m(x)$, az $R_m(x)$ racionális törtfüggvénytől a C_m görbén és belsejében legfeljebb $\frac{1}{m}$-mel különbözhetik:

$$\left| R_m(x) - P_m(x) \right| < \frac{1}{n}$$

Ebből pedig és az előző egyenlőtlenségből:

$$\left| f(x) - P_m(x) \right| < \frac{2}{m},$$

vagyis mivel ha $m \to \infty$, akkor $C_m \to C$, a $P_1(x), P_2(x), \dots P_m(x), \dots$ polynom sorozat a C görbén belül minden belső tartományban egyenletesen konvergál az $f(x)$ függvény felé. Más szóval a

$$P_1(x) + \left[P_2(x) - P_1(x) \right] + \left[P_3(x) - P_2(x) \right] + \cdots$$

polynomok szerint haladó sor minden belső tartományban egyenletesen konvergál az $f(x)$ függvény felé.

Kiegészítések.

A tételünk akkor is érvényben marad, ha nem teszszük fel, hogy az $f(x)$ függvény magán a C görbén is holomorf, vagy folytonos, mert akkor a függvénynek racionális törtfüggvényekkel való megközelítésénél is egy, a C görbét belülről megközelítő görbesorozatot alkalmazhatunk.

Azon specializálást pedig, hogy a C görbe konvex, a bizonyításban az $\frac{A_k}{\delta_k - 4}$ kifejezés határoznysorbafejtésénél használtuk föl. Ezen feltevés, mely a tétel előrebocsátott általános megfogalmazásában nem is szerepelt, szintén elhagyható a következő tétel folytán. Az $\frac{1}{\zeta - z}$ függvény oly polynomok szerint haladó sorba fejthető, amely az egész síkból egyetlen egy tetszés szerint megadott, a ζ pontból a végtelenbe menő vonal kizárásával nyert tartomány belsejében konvergál az $\frac{1}{\zeta - z}$ függvény felé. Ezen tétel bizonyitására azonban nem terjeszkedünk ki.

Holomorf függvény zérushelyeiről.

A zérushelyek rendszáma.

Mielőtt a singuláris helyeket vizsgálnánk, néhány szót kell szólnunk a zérushelyekről.

Ha az $f(x)$ függvény holomorf egy tartományban és a tartománynak egy a pontjában eltűnik

$$f(a) = 0$$

akkor az a pontot a függvény zérushelyének nevezzük.

Ha az $f(z)$ függvény holomorf egy tartományban és a tartomány belső a pontja a függvénynek zérushelye, akkor, ha csak az $f(x)$

nem identikusan zérus, található egy oly zérustól különböző pozitiv egész szám: n, és egy oly függvény: $g(z)$, amely szintén holomorf, de $g(a) \neq 0$, hogy

$$f(z) = (z-a)^n g(z)$$

Az ily n számot az a zérushely rendszámának nevezzük.

Fejtsük pl. az $f(z)$ függvényt az a hely körül hatványsorba. Mivel a függvény nem identikusan zérus létezik egy oly első c_n együttható amelyik nem zérus, tehát

$$\begin{aligned} f(z) &= c_n(z-a)^n + c_{n+1}(z-a)^{n+1} + \dots \\ &= (z-a)^n \left[c_n + c_{n+1}(z-a) + \dots\right] \end{aligned}$$

A szögletes zárójelben levő sor összegét $g(z)$-vel jelölve, mivel ez tényleg holomorf az a pont környezetében és

$$g(a) = c_n \neq 0,$$

állításunk már igazolást is nyert.

Itt felhasználtuk azt, hogy ha a függvény nem identikusan zérus, akkor bármely a pont körül Taylor-sorba fejtve, a Taylor sorának együtthatói közt van zérustól különböző. Tegyük föl pl., hogy van egy oly a pont, hogy a függvényt körülötte hatványsorba fejtve az összes c_n együtthatók (c_n) zérussal egyenlők. Kimutatjuk, hogy akkor a függvény az egész holomorfitási tartományban identikusan zérus. Ez mindenesetre igaz az a pont körül írt oly kör belsejében, amely a függvény holomorfitási tartományába esik, minthogy ebben a függvényt a hatványsor állítja elő és annak minden tagja 0. Az a pontot azonban a tartomány bármely pontjával összeköthetjük a holomorfitási tartományba eső véges számú kör által oly módon, hogy ezek közül mindenik magában foglalja a következő középpontját. Az első kör egész belsejében, tehát a második középpontja körül is a függvény identikusan zérus. Ennélfogva a második kör középpontjában a függvény és differenciálhányadosainak értéke 0, tehát ezen pont körül hatványsorba fejtve a függvényt a hatványsor minden tagja zérussal egyenlő, azaz a függvény a második kör belsejében is identikusan zérus. Az eljárást tovább folytatva következik, hogy a függvény a tartomány minden pontjában zérus.

<u>A zérushelyek izoláltak.</u> <u>A holomorf függvény zérushelyei izoláltak</u>, vagyis <u>ha $f(a)=0$, akkor az a pont körül írható egy oly zérustól különböző sugarú kör</u>, <u>hogy ezen belül a függvénynek nincs több zérushelye.</u> U. i. láttuk, hogy ha a zérushely rendszáma n, akkor

$$f(z) = (z-a)^n g(z)$$

ahol a $g(z)$ függvény holomorf az $\underline{a}$ pont környezetében és $g(a) \neq 0$. Ennélfogva az $\underline{a}$ pont körül tudunk oly zérustól különböző véges sugarú kört írni, amelyen belül a $g(z)$ függvény nem tűnik el, tehát ezen körben az $f(z)$ függvény is csak az $\underline{a}$ pontban lehet zérus.

A tételt még a következőképen is megfogalmazhatjuk. <u>Ha az $f(z)$ függvény holomorf egy tartományban és zérus ezen tartományban egy ponthalmazon, melynek van legalább egy a tartomány belsejében fekvő torlódási pontja, akkor a függvény identikusan zérus.</u> Vagy másképen: <u>ha két holomorf függvény $f(z)$ és $g(z)$ egy ilyen ponthalmazon megegyezik egymással, akkor</u>

$$f(z) \equiv g(z)$$

Ennek alapján pl. a

$$\log^* z = \int^z \frac{1}{z}\, dz$$

függvényt (a logarithmus főértékét), melyet az egész komplex számsíkból a negatív valós tengely kizárásával nyert tartományra a jobboldalon álló integrállal értelmeztük, még így is tekinthetjük mint az exponenciális függvény megfordítását, azaz írhatjuk, hogy

$$e^{\log^* z} = z$$

U. i. mint a differenciálszámítás elemeiből tudjuk, ez mindenesetre igaz az egész pozitív valós tengelyen. A fönti tétel szerint tehát érvényes az egész tartományban.

Izolált singuláris helyek.

Ha az $f(z)$ függvény holomorf egy tartományban kivéve a tartomány egyes pontjait, akkor ezen pontokat a függvény singuláris helyeinek nevezzük. Mi csak izolált singuláris helyekkel foglalkozunk, azaz olyanokkal, melyek a többi singuláris helynek nem torlódási pontjai, amelyeknek környezetében a függvény mindenütt holomorf.

3 esetet különböztetünk meg:

A megszüntethető singularitás. 1° Az $f(x)$ függvény az a pont környezetében korlátos. Ebben az esetben, mint régebben láttuk, az a hely környezetében érvényes marad a Cauchy-féle integralelőállítás, vagyis ha C egy az a pontot körülvevő elég kis kör, úgy a

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta$$

formulával értelmezett az a hely környezetében és magán az a helyen is holomorf függvény, az a hely környezetében megegyezik $f(z)$-vel. Hogyha tehát az $f(z)$ függvényt az a helyen úgy értelmezzük, hogy a $\varphi(a)$ értéket vegye föl, akkor az így értelmezett $f(z)$ függvény már az a pontban is holomorf. Ennélfogva ezen esetben a függvény singularitását az a helyen megszüntethető singularitásnak nevezzük.

Az n-edrendű polus.

2° Az $f(z)$ függvény az a pont környezetében nem korlátos ugyan, de $(z-a)$ egy alkalmas hatványával korlátossá tehető.

Jelentse n azt a legkisebb pozitív egész kitevőt, amelyre $f(z)(z-a)^n$ korlátos. Az előző meggondolás szerint az $f(z)(z-a)^n = g(z)$ függvény holomorf, vagy holomorffá tehető az egész tartományban, tehát az $f(z)$ függvény a következő alakba írható:

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^n},$$

ahol a $g(z)$ függvény az a pontban is holomorf. Másrészt $g(a) \neq 0$, mert különben a $g_1(z) = \frac{g(z)}{z-a} = (z-a)^{n-1} f(z)$ függvény is holomorf volna az a helyen, vagyis n nem volna a legkisebb alkalmas kitevő. Ebben az esetben az a pontot a függvény n-edrendű polusának vagy lényegtelen singuláris helyének nevezzük. Nyilvánvaló, hogy egy függvény n-edrendű polusa a függvény reciprokjának n-edrendű zérushelye. Egyebként ez a tulajdonság is szolgálhat a pólus értelmezéséül.

A lényeges singuláris hely

3° Mindeu más esetben az a pontot a függvény lényeges singuláris helyének nevezzük. Arról, hogy egy függvény hogy viselkedik a lényeges singuláris hely környezetében, közelebbi felvilágosítást nyújt Weierstrass egyik tétele, amely szerint, ha az $f(x)$ függvénynek az a pont lényeges singuláris helye, akkor az a pont körül bármely kis sugarú kör belsejében a függvény bármely számértéket tetszésszerint megközelíthet.

Weierstrass tétele.

Tegyük föl u. i. ennek az ellenkezőjét, vagyis azt, hogy az a pont körül egy tetszésszerinti kis sugarú kört írva létezik egy olyan α számérték és oly pozitív ε szám, hogy

$$\left| f(x) - \alpha \right| > \varepsilon$$

az egész kör belsejében. Az $f(x)-\alpha$ függvény holomorf az egész körben, kivéve az a pontot, ahol nincs értelmezve. Ennélfogva a

$$\varphi(z) = \frac{1}{f(x)-\alpha}$$

függvény szintén holomorf az egész körben az a pont kivételével és a feltevésünk szerint

$$|\varphi(z)| < \frac{1}{\varepsilon},$$

azaz $\varphi(z)$ korlátos az a pont környezetében. Vagyis a $\varphi(z)$ függvénynek az a hely megszüntethető singularitása (l. 1º esetet), tehát az $f(z) = \alpha + \frac{1}{\varphi(z)}$ függvénynek is megszüntethető singularitása vagy pólusa szerint, amint a $\varphi(a)$ határérték $\neq 0$ vagy $= 0$. Az a hely tehát semmi esetre sem volna lényeges singuláris hely.

A singularis helyek osztályozása szerves kapcsolatban van a függvénynek az illető hely környezetében való Laurent-féle sorfejtésével. Legyen a az $f(z)$ függvény izolált singuláris helye és fejtsük a függvényt ezen a pont körül Laurent-féle sorba.

Kapcsolat a Laurent-sorral.

1º Ha az a hely a függvénynek megszüntethető singuláris helye, akkor a függvény Laurent sorában nincs negativ kitevőjü tag.

2º Ha az a pont a függvénynek n-edrendü pólusa, akkor a függvény Laurent-féle sorában csak véges számú negativ kitevőjü hatvány szerepel és pedig a sor pontosan a $-n$ kitevőjü taggal kezdődik. Ugyanis az n-edrendü pólus definiciója szerint a függvényt $(z-a)^n$-el szorozva holomorf függvényt, tehát a függvény Laurent sorát $(z-a)^n$-el szorozva egy hatványsort kapunk. Másrészt a pólus rendszámának értelmezése szerint, a Laurent-féle sorban a $(z-a)^{-n}$ együtthatója nem lehet 0, mert ezen együttható nem más mint $(z-a)^n f(z)$ függvény hatványsorának első tagja azaz a szorzatnak az $\underline{a}$ helyen való határértéke.

3° Ha az $\underline{a}$ pont a függvény lényeges singuláris helye, akkor a függvény Laurent sorában végtelen sok negativ kitevőjű tag szerepel.

Az $f(z)$ függvényt az $\underline{a}$ singuláris helye körül Laurent-féle sorba fejtve, a sorban a negativ exponensű tagok összegét a függvény $\underline{a}$ singuláris helyére vonatkozó főrészének nevezzük. Természetes, hogy a függvénynek és a főrészének különbsége nemcsak az $\underline{a}$ hely környezetében, hanem magán az $\underline{a}$ helyen is holomorf.

A függvény főrésze.

A főrész fogalmát célszerűen alkalmazhatjuk a racionális törtfüggvények parciális törtekre való bontásánál. A

$$\frac{P(z)}{Q(z)} \qquad (P, Q) = 1$$

racionális törtfüggvény singuláris helyei pólusok és pedig a $Q(z)$ függvény zérushelyei. Megalkotva az egyes pólusokhoz tartozó főrészeket: $R_1(z), R_2(z) .. R_n(z)$ ezek mindegyike holomorf függvény, kivéve az épen hozzájuk tartozó pólust. Az

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} - R_1(z) + R_2(z) + \dots + R_n(z)$$

racionális függvény nemcsak a $\frac{P(z)}{Q(z)}$ pólusain kívül, ami triviális, hanem magában a pólusokban is holomorf vagyis racionális egész függvény így a $\frac{P(z)}{Q(z)} = R(z) + R_1(z) + R_2(z) + \dots + R_n(z)$ formula épen a keresett parciális törtekre való bontást szolgáltatja.

A főrész értelmezése a függvény Laurent-féle sorából csak a negatív exponensű tagok ismeretét követeli. Megemlítjük itt egy másik fogalmat is, amely a Laurent sor negatív exponensű tagjai közül is csak a legelsőnek azaz a (-1) exponenshez tartozónak ismeretét követeli. Ez a <u>residuum</u> fogalma. <u>A residuum.</u>

<u>Legyen az a pont az $f(z)$ függvénynek singuláris helye és fejtsük a függvényt az a pont körül Laurent-féle sorba. A sorbafejtésnél a $(z-a)^{-1}$ együtthatóját, c_{-1}-et a függvény a helyre vonatkozó residuumának nevezzük</u>

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_K f(z)\,dz = Res(a)$$

Ha a függvény holomorf az a helyen, akkor

$$Res(a) = 0$$

De $Res(a) = 0$ lehet akkor is, ha az a hely singuláris, pl. $f(z) = \frac{1}{(z-a)^2}$ esetében.

Ha az $f(z)$-nek egy tartományban véges számú singuláris helye van, akkor az ezekhez tartozó residuumok összegét a tartományra vonatkozó residuumnak nevezzük.

A residuumokkal való számolásnak, a Cauchytól eredő „calcul des résidus"-nek alkalmazásaival később foglalkozunk.

A végtelenben levő pont.

Az eddigi összes vizsgálódásainkban a komplex számsíknak csak a végesben levő pontjait vettük tekintetbe. A következőkben ezen pontokhoz hozzácsatolunk még egy pontot és pedig az u. n. végtelenben fekvő pontot. Míg ugyanis a projektív geometriában ill. a síkgeometriának homogén koordinátákban való tárgyalásánál természetes általánosításként kínálkozik a síknak egy a végtelenben fekvő egyenes ponttal való kiegészítése, addig a függvénytan síkjának célszerű kiegészítését, mint azonnal látni fogjuk, egyetlen egy „végtelenben fekvő pont" adjungálása szolgáltatja.

Tekintsünk egy oly Laurent-féle sort, amelyben z-nek csak negatív hatványai lépnek fel s alkalmazzuk erre az

$$\frac{1}{z} = \mu$$

helyettesítést. Ezáltal az eredeti Laurent sor egy hatványsorba megy át. Jelöljük ezen hatványsor konvergencia körének sugarát ϱ-val. Az eredeti sor konvergens tehát, ha $|\mu| = \left|\frac{1}{z}\right| < \varrho$, vagyis ha $|z| > \frac{1}{\varrho}$. Másszóval amíg az μ hatványsora konvergens a ϱ sugarú kör belsejében, addig az eredeti Laurent sor konvergens az $\frac{1}{\varrho}$ sugarú körön kivül. A ϱ sugarú kör minden belső pontjának megfelel az $\frac{1}{\varrho}$ sugarú körön kivül egy és csakis egy pont. Kivétel ez alól egyedül a konvergencia kör középpontja, mert ennek egyetlen végesben fekvő pont sem felel meg.

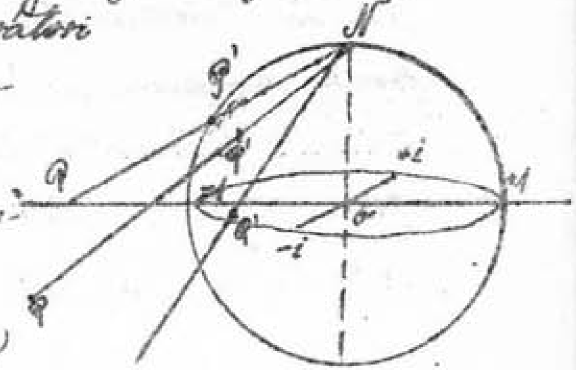
Ez az előrebocsátott megjegyzés már utal arra, hogy célszerű a végtelent mint egy pontot bevezetni.

De még más körülményből is láthatjuk ennek élszerűségét.

Tekintsük az egységsugarú gömböt;

__A komplex számgömb.__

helyezzük ennek ekvátori síkját a komplex számsíkba, középpontját pedig az origóba. A komplex számsík minden P pontjához rendeljük a gömbnek azon



P' pontját, amelyben a P pontot a gömbnek a komplex számsík felett legmagasabban fekvő N sarkpontjával összekötő egyenes a gömböt metszi. Ily módon – az u. n. __stereografikus projekció__ segélyével – a komplex számsíkot leképeztük az egységsugarú gömb felületére. (Ez az ábrázolás, mely köröket körökre visz át, függvénytani jelentőségét __konformis__ (__szögmegtartó__) voltának köszöni, vagyis annak a sajátságának, hogy egy pontban találkozó 2 görbe vetületei ugyanolyan szöget alkotnak, mint maguk az eredeti görbék. Erre a tényre egyelőre nem lévén szükségünk, azt nem is bizonyítjuk.) A komplex számsík minden pontjának megfelel a gömb egy és csakis egy pontja és viszont, kivéve egyedül a N pontot, amelynek a számsík egy pontja sem felel meg. Hogyha azonban a számsíkban bármely irányban a végtelen felé haladunk, a gömbön a megfelelő pontok sorozata mindig a N pont felé közeledik. Ha tehát a végtelent mint egyetlen pontot fogjuk fel, akkor a gömbön az N pontot tekinthetjük ezen új pont képének. Ezáltal a gömb és a sík között a vonatkozás kölcsönösen egyértelművé válik. Az ily módon a gömbre leképezett komplex számsíkot, komplex számgömbnek nevezzük.

A komplex számsík eddigi végesben levő pontjaihoz tehát hozzácsatoljuk a végtelent mint egyetlen pontot és ezen új pontot nevezzük „a végtelenben fekvő pont"-nak. A végtelenben fekvő pont.

A komplex számsík ezen kiegészítésével természetesen az eddigi definícióink és tételeink kiegészítése is szükségessé válik. Ezen kiegészítéseket a következőkben végezzük pl.

A komplex számok egy sorozatáról $z_1 \dots z_n \dots$ akkor mondom, hogy a végtelenben fekvő pont felé tart, ha $|z_n| \to \infty$, azaz ha $|z_n|$ minden határon túl nő. Vagy másszóval, ha bármely nagy pozitiv számhoz M-hez található oly n index, hogy ettől kezdve az összes z_n-re $|z_n| > M$, akkor azt mondjuk, hogy a $z_1 \dots z_n \dots$ sorozat a végtelenben fekvő pont felé tart.

Ha a $z_1, \dots z_n, \dots$ a komplex számok egy sorozata és bármely nagy pozitív M számhoz végtelen sok oly n index található, hogy $|z_n| > M$, akkor azt mondjuk, hogy a végtelenben fekvő pont a sorozatnak torlódási helye.

A Bolzano-Weierstrass-féle kiválasztási tétel a sorozat korlátosságára szóló feltétel elejtésével érvényben marad. U.i. ha a sorozat nem korlátos, akkor ki lehet belőle választani egy részsorozatot, amelynek a végtelenben fekvő pont a legnagyobb torlódási helye.

A tartomány definiciója változatlanul érvényben marad. A végtelenben fekvő pont egy halmaz belső pontja, ha nem torlódási helye a kiegészítő halmaznak.

Egy függvényről akkor mondjuk, hogy holomorf a végtelenben fekvő pont környezetében, ha holomorf bármely tetszőleges nagy sugarú körön kívül.

Az $f(z)$ függvényről akkor mondjuk, hogy magában a végtelenben fekvő pontban holomorf, ha az $f(\frac{1}{u})$ függvény holomorf a 0 helyen, vagy pontosabban, ha a 0 hely az $f(\frac{1}{u})$-nak megszüntethető singularitása. Hasonló módon az $f(\frac{1}{u})$-

nak a 0 hely környezetében való viselkedésével értelmezzük a végtelenben fekvő pólust ill. lényeges singularitást.

Mindezen fogalmak értelmezésére a Laurent-féle sort ill. a hatványsort is felhasználhatjuk. Ha ugyanis az $f(z)$ függvény holomorf a végtelenben fekvő pont környezetében, vagyis egy elég nagy sugarú körön kívül, akkor, mint a Laurent-féle sor elméletéből ismeretes, ezen körön kívül egy z-nek pozitív és negatív hatványai szerint haladó sorba fejthető. A $z = \frac{1}{u}$ helyettesítéssel ezen sor a $f\left(\frac{1}{u}\right)$-nak a 0 környezetében érvényes Laurent-féle sorfejtésébe megy át. A pozitív kitevőjű tagok negatív kitevőjűekbe mennek át és megfordítva. Ezszerint a végtelenben levő pont holomorfitási hely (megszüntethető singularitás), n-edrendű pólus vagy lényeges singuláris hely a szerint, amint a környezetében való sorfejtésben csupán pozitív kitevőjű tagok egyáltalában nem, vagy az n kitevőig bezárólag, vagy végre végtelen számban szerepelnek.

A végtelenben fekvő pont bevezetésének hasznos voltát mutatja néhány régebben nyert eredménynek új megfogalmazása. Így pl. Liouville tétele (§ 5.o.)

most a következőkép hangzik: ha egy függvény a kiegészitett számsikban mindenütt holomorf (tehát a végtelenben is) akkor a függvény konstans. Vagy általánositásá (66. oldal): ha a függvény mindenütt holomorf, csupán a végtelenben van pólusa, akkor racionális egész függvény. Általában az egész függvények egyetlen singularitása a végtelenben fekvő pont, mely a konstansra megszüntethető singularitas, racionális egész függvényeknél pólus, transcendens egész függvényeknél lényeges singuláris hely. Ebből a szempontból Liouville tételét magában foglalja Weierstrass tétele, melyet a végtelenben fekvő pontra, mint lényeges singuláris helyre alkalmazva következik, hogy a transcendens egész függvények bármely nagy sugarú körön kivül, bármely számérték tetszésszerinti közelébe juthatnak. A későbbi vizsgálatok kimutatták, hogy nemcsak tetszésszerinti közelébe juthatnak, hanem tényleg el is érik, kivéve legfeljebb egyetlen egyet. Pl. e^z csak a zérus értéket nem veheti fel. Picard bizonyította be, hogyha egy transcendens egész függvény két egymástól különböző értéket nem vesz fel, akkor a függvény konstans.

A residuumszámítás és alkalmazásai

A Cauchy-féle integráltétel alkalmazása határozott integrálok kiszámítására

A függvénytan eredményei közül azokat, amelyek a komplex változós függvényeknek egy zárt görbe mentén vett integráljaira vonatkoznak, tehát vagy közvetlenül a Cauchy-féle tételt, vagy általánosabban a residuum fogalmát, felhasználjuk valós változós függvények határozott integráljainak a kiszámítására. A tárgyalandó esetekben az integráció intervalluma $(-\infty, +\infty)$ vagy $(0, +\infty)$. Az alkalmazás lényege, hogy ha pl. a $(-\infty, +\infty)$ határok között keressük az integrált, a következő. Keressük az $f(x)$ függvény integrálját

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{+R} f(x)\,dx$$

Tekintsük az $f(z)$ komplex változós függvényt, és a valós tengelynek a $(-R)$, $(+R)$ pontok közé eső részét egészítsük ki egy zárt görbére oly megfelelő módon, hogy az $f(z)$ függvénynek a kiegészített görbe mentén vett integrálját ki tudjuk számítani vagy legalább is megbecsülni. Amint látni fogjuk példáinkban a félkörív használata lesz a legmegfelelőbb. Most két eset lehetséges. 1° Az $f(z)$ függvény holomorf az így nyert zárt görbe belsejében bármely R érték mellett; ekkor a Cauchy-féle integráltétel közvetlenül szolgáltatja, hogy a $-R, +R$ egyenes mentén vett integrál egyenlő a kiegészítő görbe mentén vett integrállal, tehát az utóbbi határértéke, ha $R \to \infty$, szolgáltatja a keresett integrált. 2° Az $f(z)$ függvénynek szinguláris helyei is vannak a zárt görbe belsejében. Ekkor, amint a residuum fogalmából várható és amint látni fogjuk, ennek az alkalmazása fog célhoz vezetni. Hogy ha az integráció határai 0, és $+\infty$, akkor hasonlóképp a $0, +R$ egyenest egészítjük ki alkalmas módon egy zárt görbére és ugyancsak az előbbi meggondolásokat alkalmazzuk, vagy ha tehetjük, visszavezetjük az előző esetre. Ez utóbbi lehetőség különösen akkor áll fenn, ha az $f(x)$ függvény páros, mert ekkor a $-\infty, +\infty$ határok között vett integrálja a kétszerese a $0, +\infty$ határok között vett integráljának. Ellenben, ha a függvény páratlan, akkor a $(-\infty)$-től a $(+\infty)$-ig vett integrálja zérus, mert a $(-\infty)$-től 0-ig és a 0-tól $(+\infty)$-ig vett integrálok egymással ellentétesen egyenlők.

A tárgyalandó példáink következő első csoportjánál a Cauchy-féle integráltétel közvetlenül alkalmazható.

1°)
$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = ?$$

Fejezzük ki az integrandusban $\sin x$-et az exponenciális függvénnyel:

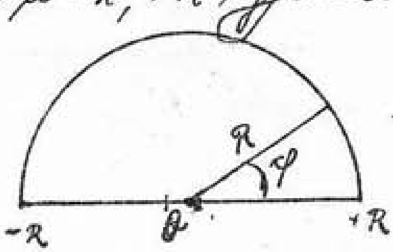
$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{1}{2i}\int_0^\infty \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{x}\,dx = \frac{1}{2i}\int_0^\infty \frac{e^{ix}-1-(e^{-ix}-1)}{x}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2i}\int_0^\infty \frac{e^{ix}-1}{x}\,dx - \frac{1}{2i}\int_0^\infty \frac{e^{-ix}-1}{x}\,dx$$

Ha a második integrálban x helyett $(-x)$-et vezetünk be, akkor az integrandus átmegy az első integráljel alatt álló kifejezésbe és az integració intervalluma $(-\infty, 0)$ lesz, tehát

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}-1}{x}\,dx = \frac{1}{2i}\,J$$

Tekintsük most az $\frac{e^{iz}-1}{z}$ komplex változós függvényt; ez minden véges z értékre holomorf, mert egész függvények hányadosa és a nevező egyetlen zéróhelyén a $z=0$ pontban is létezik a határérték. Ha tehát a 0 pont körül R sugárral a valós tengely fölé egy félkört írunk, akkor ezen félkör és a $-R$, $+R$ egyenesen vett integráljainak összege 0.



$$J_{\overline{R}} + J_{\widehat{R}} = 0$$

azaz

$$J_{\overline{R}} = - J_{\widehat{R}}$$

De hogyha $R \to \infty$, akkor $J_{\overline{R}} \to J$, tehát egyszersmind

$$-J_{\widehat{R}} \to J$$

Az $J_{\widehat{R}}$ integrált, illetőleg határértékét kell tehát kiszámítanunk és azt a következő meggondolással végezzük.

Az integrandusban z a 0 pont körül írt R sugarú kör kerületének a valós tengely felett levő pontjait jelenti. Ennélfogva valamennyi z abszolut értéke R és argumentumaik 0-tól π-ig változnak, úgy hogy z-nek trigonometrikus alakját használva

$$z = R(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$
$$dz = R(-\sin\varphi + i\cos\varphi)$$

az $J_{\widehat{R}}$ integrál a következőbe megy át

$$J_{\widehat{R}} = i\int_0^{\pi}\left(e^{R(i\cos\varphi - \sin\varphi)} - 1\right)d\varphi = -i\pi + i\int_0^{\pi} e^{-R\sin\varphi}\cdot e^{iR\cos\varphi}\,d\varphi$$

Kimutatjuk, hogy ha $R \to \infty$, akkor az itt második tagként szereplő integrál 0 feléfart. U.i. az integrál absolut értéke $\leqq$ az absolut érték integráljánál:

$$\left| \int_0^\pi e^{-R\sin\varphi} \cdot e^{iR\cos\varphi} d\varphi \right| \leqq \int_0^\pi e^{-R\sin\varphi} d\varphi$$

Azonban $e^{-R\sin\varphi}$ kivéve a 0 és π értékeket az egész $(0,\pi)$ intervallumban egyenletesen tart 0 felé, ha $R \to \infty$; továbbá korlátos t.i. minthogy a kitevő negatív, azért $e^{-R\sin\varphi} < 1$. Ennélfogva állításunk helyessége következik azon tétel alapján, hogy ha az integrálandó függvények sorozata korlátos és egyes, tetszésszerinti összhosszúságú intervallumok kizárása után egyenletesen tart 0 felé, akkor integráljaik sorozata is 0 felé tart. (A tétel tulajdonképen érvényes minden az egyenletességet illető megszorítás nélkül is, mint azt Osgood és később általánosabb integrál fogalom esetén Lebesgue megmutatták; itt azonban csak a fönti, az integrálszámítás elemeihez tartozó tételre van szükségünk.)

Elvégezhetjük azonban a bizonyítást ezen tétel nélkül, egyszerű számítással is. U.i.

$$\int_0^\pi e^{-R\sin\varphi} d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin\varphi} d\varphi + \int_{\pi/2}^{\pi} e^{-R\sin\varphi} d\varphi$$

A második integrálban φ helyett $(\pi-\varphi)$-t bevezetve:
$$\int_0^\pi e^{-R\sin\varphi} d\varphi = 2\int_0^{\pi/2} e^{-R\sin\varphi} d\varphi$$

Azonban ha $0 \leqq \varphi \leqq \pi/2$
akkor
$$\sin\varphi \geqq \frac{2}{\pi}\varphi$$
és így
$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin\varphi}d\varphi \leqq 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2R}{\pi}\varphi}d\varphi = -\frac{\pi}{R}\left[e^{-\frac{2R}{\pi}\varphi}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$
$$= \frac{\pi}{R}\left(1-e^{-R}\right) \leqq \frac{\pi}{R} \to 0$$

Tehát tényleg $\mathcal{Y}_{\widehat{R}} \to -i\pi$

és ennélfogva
$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \frac{1}{2i}\mathcal{Y} = \lim_{R\to\infty} -\frac{1}{2i}\mathcal{Y}_{\widehat{R}} = \frac{\pi}{2}$$

2°) $\int_0^\infty \cos x^2 dx = ?$

és $\int_0^\infty \sin x^2 dx = ?$

Ezen integrálok kiszámitásához felhasználjuk a következő u. n. Laplace-féle integrált
$$\mathcal{Y} = \int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$
melyet pl. a következő módon határozhatunk meg.
Az integrandus páros függvény, tehát
$$2\mathcal{Y} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx$$

és hasonlókép

$$2Y = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\,dy$$

A kettőből $\;4Y^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$

Tekintsük x-et és y-t mint derékszögű koordinátákat és vezessünk be helyettük polárkoordinátákat, r-t és φ-t; ered

$$4Y^2 = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-r^2}\,r\,dr\,d\varphi$$

Integráljunk először φ szerint

$$4Y^2 = 2\pi\int_0^{\infty} e^{-r^2}\,r\,dr$$

és azután vezessük be r helyett $\sqrt{u}$-t. Ekkor

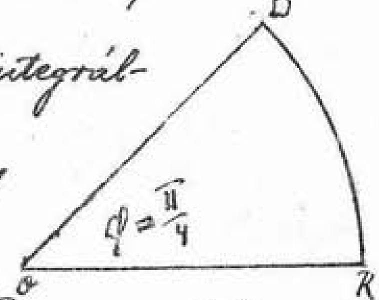
$$4Y^2 = \pi\int_0^{\infty} e^{-u}\,du = \pi\Big[-e^{-u}\Big]_0^{\infty} = \pi$$

azaz végeredményben

$$Y = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Kimutatjuk azután a következőt: ha vesszük az e^{-z^2} komplex változós függvényt és ezt egy oly egyenes mentén integráljuk 0-tól $+\infty$-ig, amely a pozitív valós tengellyel $\pi/4$ szöget zár be, akkor ezen integrál értéke ugyancsak $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. U.i. a függvény az egész síkban holomorf, tehát a Cauchy-féle tétel szerint

$$\int_0^{R} e^{-z^2}dz + \int_{\widehat{R}} e^{-z^2}dz - \int_0^{B} e^{-z^2}dz = 0,$$



ha $\int_{\widehat{R}}$-rel jelöljük a függvény integrálját az R sugarú körnek a két egyenes közé eső részén és B-vel a körív és a második egyenes metszéspontját. Hogyha most $R \to \infty$, akkor az első integrál $\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ felé tart, a másodikról kimutatjuk, hogy határértéke 0, ennélfogva a harmadik integrál szükségkép szintén $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ felé tart.

A második integrál írható a következőkép:

$$J_{\widehat{R}} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)} R \cdot i \cdot e^{i\varphi} d\varphi;$$

tehát

$$\left| J_{\widehat{R}} \right| \leq R \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2 \cos 2\varphi} d\varphi = \frac{R}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R^2 \sin\psi} d\psi$$

($\psi = \frac{\pi}{2} - \varphi$ helyettesítéssel.)

Vagyis ha ismét a $\sin\psi \geq \frac{2}{\pi}\psi$ egyenlőtlenséget alkalmazzuk

$$\left| J_{\widehat{R}} \right| \leq \frac{R}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2}{\pi} R^2 \psi} d\psi = -\frac{\pi}{R} \left[e^{-\frac{2}{\pi} R^2 \psi} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{\pi}{R}\left(1 - e^{-R^2}\right) < \frac{\pi}{R} \to 0$$

Tehát valóban, ha $R \to \infty$

$$\int_0^{B} e^{-z^2} dz \longrightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Az itt szereplő integrációs utat képező egyenes mentén ($\varphi = \frac{\pi}{4}$), ha $|z|$-t r-rel jelöljük,

$$z = r\frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

Ezt bevezetve az előző integrálba

$$\int_0^\infty e^{-ir^2} \cdot \frac{1+i}{\sqrt{2}}\, dr = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

azaz

$$\int_0^\infty e^{-ir^2} dr = \frac{1}{1+i}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Fejezzük ki ebben az exponenciális függvényt a trigonometrikus függvények segélyével:

$$\int_0^\infty e^{-ir^2} dr = \int_0^\infty \cos r^2\, dr - i\int_0^\infty \sin r^2\, dr = \frac{1}{1+i}\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \frac{1-i}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Két komplex szám csak úgy lehet egyenlő egymással, ha külön a valós és képzetes részeik is egyenlők; ennélfogva

$$\int_0^\infty \cos r^2\, dr = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

és

$$\int_0^\infty \sin r^2\, dr = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

A residuum alkalmazása néhány határozott integrál kiszámítására.

Azon esetben, mikor a függvénynek singulásis helyeit is számba kell vennünk, lép fel a tulajdonképeni residuumszámitás.

A következő tipusú integrálokkal foglalkozunk:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx ,$$

ahol $P(x)$ és $Q(x)$ racionális egész függvények; $Q(x)$ összes zérushelyei ($\frac{P(x)}{Q(x)}$ pólusai) képzetesek és $P(x)$ fokszáma legalább kettővel kisebb $Q(x)$ fokszámánál. Ekkor integrálunk egyenlő az integrandusnak a valós tengely felett fekvő pólusaira vonatkozó residuumai összegének $2i\pi$-szeresével:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx = 2i\pi \sum Res.$$

U. i. ha ismét tekintjük a $\overline{-R, +R}$ valós egyenes és a fölötte írt R sugarú félkör által határolt tartományt, akkor

$$\sum_{\bigcirc} Res = \frac{1}{2i\pi} \int_{-R}^{+R} + \frac{1}{2i\pi} \int_{\frown R}$$

Az első integrál, ha $R \to \infty$, a keresett integrál $\frac{1}{2i\pi}$-szerese felé tart. A második integrálban az integráció útjának a hossza $R\pi$; az integrandus pedig, ha R elég nagy, a fokszámokra vonatkozó feltevésünk alapján, abszolut értékre nézve kisebb, mint konst. $\frac{1}{R^2}$; tehát

$$\left| \int_{\mathfrak{R}} \right| \leqq \frac{\text{konst}}{R},$$

vagyis, ha $R \to \infty$, akkor a második integrál 0 felé tart s ebből következik állításunk.

A keresett integrál kiszámításához tehát csupán a valós tengely fölött fekvő pólusokat és a megfelelő residuumokat kell meghatároznunk.

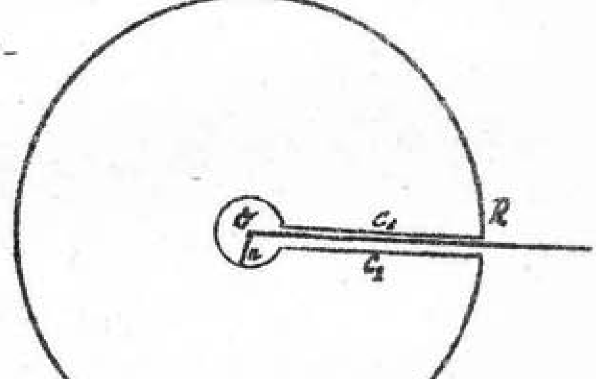
A követendő eljárás lényegében megegyezik a parciális törtekre való bontással. Az eltérés abban van, hogy itt csak a pólusok egy részét és azokban csak a (-1) fokú tagokat szükséges tekintetbe vennünk.

Kiszámítjuk még ugyanezen integrandusnak a <u>0-tól $(+\infty)$-ig vett integrálját is.</u> Abban az esetben, midőn az integrandus páros függvény, $\int_0^{\infty} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}$, tehát az imént adott módszert alkalmazhatjuk. Az általános esetben más módszerhez kell folyamodnunk, mely a következő tételen alapszik: <u>Ha a $\frac{P(x)}{Q(x)}$ racionális függvényben a számláló fokszáma legalább 2-vel kisebb, mint a nevezőé, ha továbbá a függvénynek a pozitív valós</u>

tengely mentén (a ∞-t is ideértve) nincs pólusa, akkor

$$\int_0^\infty \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \sum \mathrm{Res}\left\{\log^*(-z)\,\frac{P(z)}{Q(z)}\right\}$$

ahol az összegezés a függvény összes pólusaira kiterjesztendő. Hogy a tételt bebizonyíthassuk, jegyezzük meg először is, hogy $\log^*(-z)$ holomorfitási tartománya az egész sík, kizárva belőle a pozitív valós tengelyt és $\left\{\log^*(-z)\frac{P(z)}{Q(z)}\right\}$-nek ugyanazon helyeken van pólusa, mint $\frac{P(z)}{Q(z)}$-nek. Integráljuk a $\log^*(-z)\frac{P(z)}{Q(z)}$ függvényt a következő zárt úton. A $z=0$ ponttól r távolságból kiinduló, a pozitív valós tengely felett, de hozzá közelfekvő párhuzamos c_1-egyenesen R-ig, innen tovább az R sugarú körön és a c_1-nek megfelelő, de a pozitív valós tengely alatt fekvő c_2 egyenesen vissza a $z=0$ pontig, amelyet egy r sugarú körrel kizárunk.



Legyen R és r már előre úgy választva, hogy az integrandus összes pólusai az integrációs út által határolt tartományban feküdjenek. Később R-et $+\infty$, r-et pedig 0 felé fogjuk tartatni. Az integrandus összes pólusaira kiterjesztett residuum tehát egyenlő ezen integrál $\frac{1}{2i\pi}$ – szeresével. Azonban az integrálnak a R sugarú körön vett része a $P(z)$ és $Q(z)$ fokszámára tett megszorítás alapján kisebb, mint $\frac{\text{konst}}{R}$, tehát ha $R \to \infty$, akkor ez az integrál $\to 0$. A r sugarú körön vett integrál nagyságrendje: $r \log r$; tehát ha $r \to 0$, akkor ez az integrál szintén $\to 0$. Hogyha továbbá a e_1 és e_2 egyenesek mindjobban közelednek a pozitív valós tengelyhez (ez felel meg a $R \to 0$, $r \to 0$ esetnek), akkor az ezen két integrálban a $\frac{P(x)}{Q(x)}$ függvény ugyanazon értékek felé tart, ellenben a $\log^*(-z)$, $2i\pi$-vel kisebbedik, minthogy a $z=0$ pontot egyszer körül kell kerülnünk. Ennélfogva a két integrál határértéke:

$$\lim_{\substack{r \to 0 \\ R \to \infty}} \left[\int_r^R \log(-x) \frac{P(x)}{Q(x)} dx - \int_r^R (\log(-x) - 2i\pi) \frac{P(x)}{Q(x)} dx \right] = 2i\pi \lim \int_r^R \frac{P(x)}{Q(x)} dx =$$

$$= 2i\pi \int_0^\infty \frac{P(x)}{Q(x)} dx ,$$

s ezzel tételünk igazolást nyert.

A következő példákban csak a $-\infty, +\infty$ határok között vett integrálra szóló tételre van szükségünk.

13) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+a} = ? \qquad (a = \text{poz. valós szám})$$

Tudjuk, hogy ha α elsőrendű pólusa a $\frac{P(z)}{Q(z)}$ függvénynek, akkor $(z-\alpha)\frac{P(z)}{Q(z)}$ az α helyen már holomorf függvény és a keresett együttható ($\frac{P(z)}{Q(z)}$ Laurent-féle sorának első negatív indexű együtthatója), ezen kifejezésnek az α helyen vett értékével egyenlő. Ez pedig a következő: $\frac{P(\alpha)}{Q'(\alpha)}$.

Az $\frac{1}{z^2+a}$ függvénynek a valós tengely felett egyetlen elsőrendű pólusa van, t. i.: $ia^{\frac{1}{2}}$; tehát az előzők szerint a $\frac{P(\alpha)}{Q'(\alpha)}$ formulával a függvény ezen helyre vonatkozó residuuma: $\frac{1}{2ia^{\frac{1}{2}}}$, s így

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+a}=\frac{\pi}{a^{\frac{1}{2}}}$$

2°) $$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+a)^2}=\ ?$$

Az $\frac{1}{(z^2+a)^2}$ függvénynek a valós tengely felett ismét csak egy pólusa van és ez ismét $ia^{\frac{1}{2}}$, azonban most már nem elsőrendű pólus, tehát az előző formula nem alkalmazható reá. Most a következőképen járunk el:

$$\frac{1}{(z^2+a)^2}=\frac{1}{(z-ia^{\frac{1}{2}})^2(z+ia^{\frac{1}{2}})^2}$$

Az $\frac{1}{(z+ia^{\frac{1}{2}})^2}$ függvény holomorf az $ia^{\frac{1}{2}}$ pont környezetében, tehát itt $(z-ia^{\frac{1}{2}})$ hatványai szerint haladó sorba fejthető. Hogy ha ezt a hatványsort még osztjuk $(z-ia^{\frac{1}{2}})^2$-vel, akkor egyrészt visszakapjuk az $\frac{1}{(z^2+a)^2}$ függvényt, másrészt pedig $(z-ia^{\frac{1}{2}})$ első negatív hatványának együtthatója az eredeti hatványsorban $(z-ia^{\frac{1}{2}})$ pozitív első hatványának koefficiense lesz. Ez pedig nem más mint

$$\left(\frac{1}{(z+ia^{\frac{1}{2}})^2}\right)'_{z=ia^{\frac{1}{2}}} = \frac{-2}{(2ia^{\frac{1}{2}})^3} = \frac{1}{4ia^{\frac{3}{2}}}$$

Tehát

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a)^2} = \frac{\pi}{2a^{\frac{3}{2}}}$$

Úgy ebben, mint az előző példában szereplő a számról egyébként elegendő, hacsak annyit tételezünk fel, amennyi szükséges ahhoz, hogy a függvénynek a valós tengelyen ne legyen pólusa, tehát csak ezt az esetet zárjuk ki, midőn a 0 vagy negatív valós szám. $a^{\frac{1}{2}}$ alatt most $\sqrt{a}$-nak azon értékét értjük, melynek valós része pozitív.

3.) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}-1}{x^{2n}-1}\, dx = ? \quad (m<n)$$

A $\frac{z^{2m}-1}{z^{2n}-1}$ függvény nevezőjének a valós tengelyen is van ugyan zérushelye: $+1, -1$, azonban ezek a függvénynek még sem pólusai, mert ezek a ~~nevezőnél kisebb fokszámú~~ számlálónak is zérushelyei.

A függvénynek a valós tengely felett levő pólusai a $z^{2n}=1$ egyenletnek a valós tengely felett levő gyökei; tehát ha α az első $2n$-edik primitív egységgyök, akkor

$$\alpha,\ \alpha^2,\ \alpha^3 \ldots\ldots \alpha^{n-1}$$

Ezek egyszersmind valamennyien elsőrendű pólusok, tehát a hozzájuk tartozó residumokat rendre a

$$\frac{P(\alpha)}{Q'(\alpha)},\ \frac{P(\alpha^2)}{Q'(\alpha^2)},\ \ldots\ldots,\ \frac{P(\alpha^{n-1})}{Q'(\alpha^{n-1})}$$

kifejezések szolgáltatják.

$$\frac{P(\alpha)}{Q'(\alpha)} = \frac{\alpha^{2m}-1}{2n\alpha^{2n-1}} = \frac{\alpha^{2m+1}-\alpha}{2n}$$

$$\frac{P(\alpha^2)}{Q'(\alpha^2)} = \frac{\alpha^{2(2m+1)}-\alpha^2}{2n}$$

– – – – – – – – – – –

$$\frac{P(\alpha^{n-1})}{Q'(\alpha^{n-1})} = \frac{\alpha^{(n-1)(2m+1)}-\alpha^{(n-1)}}{2n}$$

A függvénynek a valós tengely felett levő residuumainak összege innen, mint két véges mértani sor összege a következő:

$$\frac{1}{2n}\left[\alpha^{2m+1}\frac{1-\alpha^{(2m+1)(n-1)}}{1-\alpha^{2m+1}}-\alpha\frac{1-\alpha^{n-1}}{1-\alpha}\right]$$

Azonban $\alpha^{2m+1}\cdot\alpha^{(2m+1)(n-1)}=\alpha^{n(2m+1)}=-1$

és

$$\alpha\alpha^{n-1}=-1$$

tehát az összegünk így is írható:

$$\frac{1}{2n}\left[\frac{1+\alpha^{2m+1}}{1-\alpha^{2m+1}}-\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right]$$

Ez továbbá a Moivre-féle formula alkalmazása után egyenlő:

$$\frac{1}{2ni}\left[\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2n}-\operatorname{cotg}\frac{(2m+1)\pi}{2n}\right]$$

Ennélfogva integrálunk értéke:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{2m}-1}{x^{4m}-1}\,dx=\frac{\pi}{n}\left[\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2n}-\operatorname{cotg}\frac{(2m+1)\pi}{2n}\right]$$

A függvény $(-\infty)$-től $(+\infty)$ ig vett integráljának ezen értékéből azonnal következik a 0-tól $(+\infty)$-ig vett integráljának értéke. U. i. a függvény páros, tehát az első integrál a másodiknak a kétszerese, azaz

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{2m}-1}{x^{2n}-1}\,dx = \frac{\pi}{2n}\left[\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2n} - \operatorname{cotg}\frac{(2m+1)\pi}{2n}\right]$$

4°) $$\mathcal{J}_1 = \int_0^{+\infty} \frac{x^{2m_1} - x^{2m_2}}{x^{2n}-1}\,dx = ? \quad \left(\begin{matrix} m_1 \\ m_2 \end{matrix}\right\} < n \right)$$

Ennél, valamint a következő példánál az elöző eredményünk közvetlenül szolgáltatja a keresett integrál értékét. Ugyanis

$$\mathcal{J}_1 = \int_0^{\infty} \frac{(x^{2m_1}-1)-(x^{2m_2}-1)}{x^{2n}-1}\,dx =$$

$$= \frac{\pi}{2n}\left[\operatorname{cotg}\frac{(2m_2+1)\pi}{2n} - \operatorname{cotg}\frac{(2m_1+1)\pi}{2n}\right]$$

5°) $$\mathcal{J}_2 = \int_0^{\infty} \frac{x^{2m}}{x^{2n}+1}\,dx = ? \quad (m < n)$$

Az integrandus nevezőjének a valós tengelyen nincs pólusa. Szorozzuk meg a számlálót és nevezőt $(x^{2n}-1)$-gyel, ered

$$\mathcal{J}_2 = \int_0^{\infty} \frac{x^{2(m+n)} - x^{2m}}{x^{4n}-1}\,dx$$

Ennélfogva a 4°) példa szerint

$$\mathcal{J}_2 = \frac{\pi}{4n}\left[\operatorname{cotg}\frac{(2m+1)\pi}{4n} - \operatorname{cotg}\frac{\{2(m+n)+1\}\pi}{4n}\right] =$$

$$= \frac{\pi}{4n}\left[\operatorname{cotg}\frac{(2m+1)\pi}{4n} + \operatorname{tg}\frac{(2m+1)\pi}{4n}\right] = \frac{\pi}{2n\sin\frac{2m+1}{2n}\pi}$$

Hogyha ezen példánál a számlálóba x^{2m} helyébe x^2-nek egy racionális egész függvényét tesszük, akkor az így nyert integrál J_2 alakú integrálokra bontható föl; értékét tehát az előzők alapján könnyen megadhatjuk.

A cotg z függvény fölbontása parciális törtjeire és a sin z függvény előállítása végtelen szorzattal

Az előbb tárgyalt 4° és 5° alatti példákban vezessük be a következő jelöléseket. Legyen

$$x = e^{\frac{t}{2n}}$$

és
$$\alpha = \frac{2m+1}{2n}, \quad \alpha_1 = \frac{2m_1+1}{2n}, \quad \alpha_2 = \frac{2m_2+1}{2n}$$

Ekkor az J_1, illetőleg J_2 integrálok a következő alakba írhatók:

$$J_1' = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{\alpha_2 t} - e^{\alpha_1 t}}{1-e^t}\,dt = \pi\left[\operatorname{cotg}\pi\alpha_1 - \operatorname{cotg}\pi\alpha_2\right]$$

$$J_2' = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{\alpha t}}{1+e^t}\,dt = \frac{\pi}{\sin\pi\alpha}$$

cotg $\pi\alpha$ és $\frac{1}{\sin\pi\alpha}$ előállítása integrálokkal.

Ezek a formulák érvényesek tehát minden olyan pozitív valódi tört α értékre, amelynek nevezője páros és számlálója páratlan szám. Érvényesek maradnak azonban akkor is, ha α bármely pozitív valódi törtet jelent. Tekintsük u. i. pl. az $\mathcal{J}_2$ integrált; az α-nak egy oly függvénye, amely a $(0, \frac{1}{2})$, és az $(\frac{1}{2}, 1)$ intervallumokban monoton. Az integrál α-nak $\frac{2m+1}{2n}$ alakú értékei mellett egyenlő $\frac{\pi}{\sin \pi\alpha}$-val. Ez a függvény α-nak folytonos és a $(0, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, 1)$ intervallumokban szintén monoton függvénye. α-nak azon értékei, melyek mellett a két függvény megegyezik egymással az egész $(0, 1)$ intervallumban sűrűn vannak elosztva. Két ilyen függvény azonban az egész $(0, 1)$ intervallumban megegyezik, mert az első függvénynek két ily α szám közé eső helyen vett értéke a második függvénynek a két α helyen felvett értéke közé esik. Ez pedig a második függvény folytonossága miatt nem lehet más, mint a függvénynek az illető helyen felvett értéke.

Hasonló módon terjeszthető ki az $\mathcal{J}_1$ integrálra adott formula α_1 és α_2-nek összes pozitív valódi tört értékeire.

Tegyünk az $\mathcal{J}_1$ integrálban az α_1, α_2 és t helyére α, $1-\alpha$ és $(-t)$-t, ekkor

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{(a-1)t}}{1-e^{-t}}\, dt = 2\pi \operatorname{cotg} \pi\alpha$$

Innen, minthogy az integrandus t-nek páros függvénye és ennélfogva az integrálnak a $(-\infty, 0)$ és $(0, \infty)$ intervallumokra eső részei egyenlők, azért

Az integrálok sorbafejtése.

$$\int_{0}^{\infty} \frac{e^{-at} - e^{(\alpha-1)t}}{1-e^{-t}}\, dt = \pi \operatorname{cotg} \pi\alpha$$

Az integráljel alatt álló kifejezést végtelen sorba fejtjük:

$$\frac{e^{-at} - e^{(\alpha-1)t}}{1-e^{-t}} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(e^{-at} - e^{(\alpha-1)t}\right) e^{-kt} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(e^{-(\alpha+k)t} - e^{(\alpha-k-1)t}\right)$$

A sor minden tagja $\gtreqless 0$ aszerint, amint $\alpha \lesseqgtr \frac{1}{2}$, α bármely határozott értékénél tehát a sor összes tagjai egyenlő előjelűek azaz a részösszegek monoton sorozatot alkotnak. Ennélfogva szabad a sort tagonként integrálni, amit ha elvégzünk, ered:

$$\pi \operatorname{cotg} \pi\alpha = \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha-1}\right) + \left(\frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\alpha-2}\right) + \cdots\cdots$$

Szabad továbbá az így nyert sort következőkép csoportosítani:

$$\pi \operatorname{cotg} \pi\alpha = \frac{1}{\alpha} + \left(\frac{1}{\alpha-1} + \frac{1}{\alpha+1}\right) + \left(\frac{1}{\alpha-2} + \frac{1}{\alpha+2}\right) + \cdots\cdots$$

$$= \frac{1}{\alpha} + \frac{2\alpha}{\alpha^2-1^2} + \frac{2\alpha}{\alpha^2-2^2} + \cdots\cdots$$

Ezzel a $\pi \operatorname{cotg} \pi\alpha$ -t racionális függvények szerint haladó végtelen sorba fejtettük. Azonban előbbi meggondolásaink ezen sorfejtéseknek csupán a $(0, 1)$ intervallumban való érvényességét bizonyítják. De másrészt úgy a $\operatorname{cotg} \pi\alpha$ függvény, mint az adott sorfejtések értelmezési tartománya sokkal tágabb, t.i. a valós egész számok kizárásával az egész számsík. A $\operatorname{cotg} \pi\alpha = \frac{\cos \pi\alpha}{\sin \pi\alpha}$ függvényre, mint két egész függvény hányadosára, minthogy a nevezőben álló függvény 0 helyei az egész számok, állításunk evidens. Ami a jobb oldalon álló végtelen sorokat illeti, elég ha az utolsó alakkal foglalkozunk. Ez a sor α-nak egészszámú értékeit kivéve mindenütt abszolut konvergens és egyenletesen konvergens minden olyan korlátos tartományban, amelynek sem belsejében sem határán nincs valós egész szám. Pontosabban: a sor abszolut és egyenletesen konvergens minden korlátos tartományban (az előbb tett megszorítás nélkül), hacsak elhagyjuk belőle azt a véges számú tagot, melyeknek n indexe a tartományban vagy határán fekszik. U.i. mivel

$$\left| \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2} : \frac{1}{n^2} \right| = \left| \frac{2\alpha}{1 - \frac{\alpha^2}{n^2}} \right| \longrightarrow 2|\alpha|$$

és pedig egyenletesen az α értékek minden korlátos halmazára, ezért mindenesetre létezik oly n szám, hogy ettől kezdve egész tartományunkban

$$\left| \frac{2\alpha}{\alpha^2-n^2} : \frac{1}{n^2} \right| < 3|\alpha|,$$

azaz

$$\left| \frac{2\alpha}{\alpha^2-n^2} \right| < \frac{3|\alpha|}{n^2}$$

Tehát ezen n-től kezdve sorunknak a konvergens $3|\alpha|\sum \frac{1}{n^2}$ sor a majoráns sora, amiből állításunk helyessége nyilvánvaló módon következik. A sor részösszegei minden korlátos tartományban, az egész számú helyek kivételével, holomorf függvények, tehát a Weierstrass-féle tétel szerint maga a sor is egy, az egész α-k kivételével holomorf függvényt állít elő. Ez a függvény a valós tengelynek 0 és 1 pontjai között levő részen, tehát egy vonaldarab mentén megegyezik $\pi \operatorname{cotg} \pi\alpha$-val. A két függvény ennélfogva megegyezik egymással egész holomorfitási tartományában, vagyis mindenütt, ahol értelmezve vannak.

Vagyis egészen általánosan érvényes az adott felbontás.

Bontás:
$$\pi \cot \pi\alpha = \frac{1}{\alpha} + \frac{2\alpha}{\alpha^2-1^2} + \frac{2\alpha}{\alpha^2-2^2} + \cdots\cdots$$

<u>A sinus függvény szorzat előállítása.</u>

Hasonló meggondolással nyerjük az $\mathcal{J}_2'$ integrálból:

$$\frac{\pi}{\sin \pi\alpha} = \frac{1}{\alpha} - \frac{2\alpha}{\alpha^2-1^2} + \frac{2\alpha}{\alpha^2-2^2} - \frac{2\alpha}{\alpha^2-3^2} + \cdots\cdots$$

sorfejtést, amely különben az

$$\frac{1}{\sin \pi\alpha} = \cot \frac{\pi\alpha}{2} - \cot \pi\alpha$$

elemi identitás alapján az előbbiből is származtatható.

A cotg sorfejtéséből könnyen eljuthatunk még a sinus függvény szorzat előállításához.

Vigyük át $\frac{1}{\alpha}$-t a baloldalra és integráljunk 0-tól α-ig olyan úton, mely nem halad át a .... -2, -1, 0, 1, 2 .... singuláris pontokon. Tegyük föl pl. egyelőre, hogy α nem valós, akkor az integráció útja gyanánt választhatjuk a 0-tól α-hoz vivő egyenest. Minthogy a sor egyenletesen konvergens, azért szabad tagonként integrálni. A baloldal integrálásából kapjuk a

$$\log^* \frac{\sin \pi\alpha}{\pi\alpha}$$

kifejezést, míg a jobboldali sor általános tagjának integrálja:

$$\log^*(k^2-\alpha^2) - \log^* k^2 = \log^*\left(1-\frac{\alpha^2}{k^2}\right).$$

Tehát

$$\log^* \frac{\sin \pi\alpha}{\pi\alpha} = \sum_{k=1}^{\infty} \log^*\left(1-\frac{\alpha^2}{k^2}\right),$$

és innen

$$\frac{\sin \pi\alpha}{\pi\alpha} = e^{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \log^*\left(1-\frac{\alpha^2}{k^2}\right)}$$

Azonban az exponenciális folytonos függvény, tehát

$$e^{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \log^*\left(1-\frac{\alpha^2}{k^2}\right)} = \lim_{n\to\infty} e^{\sum\limits_{k=1}^{n} \log^*\left(1-\frac{\alpha^2}{k^2}\right)} = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{\alpha^2}{k^2}\right) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{\alpha^2}{k^2}\right)$$

és így

$$\sin \pi\alpha = \pi\alpha \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{\alpha^2}{k^2}\right)$$

vagy $\pi\alpha$ helyett z-t írva

$$\sin z = z \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{\pi^2 k^2}\right)$$

Ugyanerre az eredményre jutunk, ha z ill. $\alpha = \frac{z}{\pi}$ valós, de nem egész szám; ebben az esetben integrációs útul ugyanúgy a singuláris pontok elkerülése végett pl. egy 2 egyenes darabból összetett tört vonalat választhatunk.

A nyert előállítások közül a cotangens és az $\frac{1}{\sin}$ előállítása egy-egy végtelen sorral a racionális törtfüggvénynek parciális törtekre való fölbontásához, a sinus előállítása egy végtelen szorzattal pedig a racionális egész függvény gyöktényezőire való fölbontásához hasonlít. Az eltérés mindkét esetben az, hogy a lineáris tagok, illetve tényezők helyett quadratikusak lépnek fel. Egészen analog lenne az eljárás, ha ezeket a quadratikus faktorokat felbontanók lineárisok összegére, vagy szorzatára; azonban kérdéses az így nyert és esetleg megfelelő módon átrendezett sor, illetőleg sorozat konvergenciája. Ezt a nehézséget bizonyos, a konvergenciát biztosító, alkalmasan választott tisztán numerikus tagok ill. faktorok bevezetésével kerülhetjük ki.

<u>cotg $\pi\alpha$ és sin $\pi\alpha$ előállításának felbontása lineáris tagokra ill. faktorokra. Weierstrass és Mittag-Leffler tételei.</u>

Induljunk ki a cotg $\pi\alpha$ végtelen sorának abból az elrendezéséből, melyre először jutottunk:

$$\pi \operatorname{cotg} \pi\alpha = \left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha-1}\right)+\left(\frac{1}{\alpha+1}+\frac{1}{\alpha-2}\right)+\cdots$$

Adjuk hozzá a sor egyes tagjaihoz a következő sor megfelelő tagjait:

$$0=\left(0+\frac{1}{1}\right)+\left(-\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\cdots,$$

akkor az így nyert sor tagjait már szabad a következő módon elválasztani és átrendezni:

$$\pi \operatorname{cotg} \pi\alpha = \frac{1}{\alpha}+\sum_{k=-\infty}^{+\infty}{}'\left(\frac{1}{\alpha-k}+\frac{1}{k}\right) \qquad (k \neq 0)$$

Ez a sor u. i. abszolut konvergens, mert

$$\left|\left(\frac{1}{\alpha-k}+\frac{1}{k}\right):\frac{1}{k^2}\right| \longrightarrow |\alpha|$$

vagyis sorunkat a konvergens $2|\alpha|\sum\frac{1}{k^2}$ sor majorizálja.

A cotg ezen végtelen sorából kiindulva a sinus végtelen szorzatba fejtésére egy hasonló képen módosított alakot nyerünk

$$\sin \pi \alpha = \pi \alpha \prod_{k=-\infty}^{+\infty} \left(1-\frac{\alpha}{k}\right) e^{\frac{\alpha}{k}}$$

A nyert előállításokat úgy is tekinthetjük, mint példákat Weierstrass és Mittag-Leffler általános tételeire, melyek közül az elsőnek leglényegesebb tartalma az, hogy minden transcendens egész függvény felbontható véges vagy végtelen sok racionális vagy bizonyos egyszerű típusba tartozó transcendens egész függvények szorzatára, melyeknek csak egy-egy elsőrendű 0-helye van. Mittag-Leffler tétele a meromorf vagy is az egész síkban pólusok kivételével holomorf függvényeknek parciális törtekre való bontására vonatkozik, amit a tétel szerint mindig elérhetünk a legáltalánosabb esetben bizonyos racionális egész függvények kivonásával, amelyek a konvergenciát biztosítják.

A logaritmikus differenciálhányados és a függvény zérushelyei.

Az $\frac{f'(x)}{f(x)}$ logaritmikus differenciálhányados residumai.

A következő kifejezés:

$$\frac{f'(x)}{f(x)},$$

ahol $f(x)$ tetszőleges, az $f(x)$ „logaritmikus differenciálhányadosa" néven ismeretes; vizsgálatával igen fontos eredményekhez juthatunk.

Ha az $f(x)$ függvény egy tartományban holomorf és nem tűnik el, akkor ezen tartományban $\frac{f'(x)}{f(x)}$ is holomorf.

Ha a az $f(x)$ függvénynek α rendű zérushelye,

$$f(x)=(x-a)^{\alpha} f_1(x) \quad , \quad (f_1(a)\neq 0)$$

akkor

$$f'(x)=\alpha (x-a)^{\alpha-1} f_1(x) + (x-a)^{\alpha} f_1'(x),$$

és így

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{\alpha}{x-a}+\frac{f_1'(x)}{f_1(x)} \quad ,$$

tehát az a az $\frac{f'(x)}{f(x)}$-nek 1-rendű pólusa és a rávonatkozó reziduum $=\alpha$.

Ha b az $f(x)$ függvénynek β-rendű pólusa, azaz

$$f(x)=(x-b)^{-\beta} f_2(x)$$

ahol $f_2(x)$ az a helyen holomorf és $\neq 0$, akkor

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{-\beta}{x-b}+\frac{f_2'(x)}{f_2(x)} \, .$$

Tehát b az $\frac{f'(x)}{f(x)}$-nek 1-rendű pólusa és a rávonatkozó reziduum: $-\beta$.

A zérushelyek megszámlálása és szimmetrikus függvényei.

Ezek alapján kimondhatjuk a következő tételt, ha az $f(x)$ függvény a $\mathfrak{C}$ görbe belsejében meromorf, a görbén holomorf és nem tűnik el, továbbá az $F(x)$ függvény a görbe belsejében és magán a görbén holomorf, akkor

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathfrak{C}} F(z)\,\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum \alpha F(a) - \sum \beta F(b)$$

A jobb oldalon az első tagot az $f(x)$ függvény α-rendű a zérushelyei, a második tagot a β-edrendű b pólusai szolgáltatják. U.i. az $\alpha F(a)$ és $-\beta F(b)$ mennyiségek az integráljel alatt szereplő függvénynek az illető helyekhez tartozó residuumai.

Ha az $f(x)$ függvény a tartomány belsejében is mindenütt holomorf, akkor csak a zérushelyeiből származó residuumok lépnek fel:

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathfrak{C}} F(z)\,\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum \alpha F(a)$$

Ha továbbá speciálisan $F(x)=1$, akkor az

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathfrak{C}} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz$$

integrál az $f(z)$ függvénynek a $\mathfrak{C}$ görbe belsejébe eső zérushelyeinek számát adja meg mindegyiket a maga multiplicitásával véve.

Ha $F(z) = z$, akkor az

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathfrak{C}} z\,\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz$$

integrál a zérushelyek összegét adja, és így tovább.

Az algebra alaptétele.

Ennek alapján kiszámíthatjuk pl. az n-edfokú racionális egész függvény zérushelyeinek számát. Az ezt megadó integrál írható a következőképen:

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathfrak{C}}\frac{nz^{n-1}+\dots+c_1}{z^n+\dots+c_0}\,dz = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathfrak{C}}\left(\frac{n}{z}+\varepsilon(z)\right)dz$$

ahol $\varepsilon(z)$ számlálója kettővel kisebb fokszámú, mint a nevezője. Legyen a $\mathfrak{C}$ görbe egy a 0 pont körül írt kör. Kiszámítjuk ezen integrál határértékét, ha a kör sugarát minden határon túl növeljük, ezáltal nyilvánvalóan $f(z)$-nek összes zérushelyeit tekintetbe vesszük. Ezt azonban igen könnyen láthatjuk, hogy mi lesz, mert

$$\int_K \varepsilon(z)\,dz \to 0$$

és

$$\frac{1}{2i\pi}\int_K \frac{n}{z}\,dz = n.$$

Tehát az n-edfokú racionális egész függvény összes zérushelyeinek száma, mindegyiket a

<u>maga multiplicitásával véve.</u> Ezzel az algebra alaptételének egy második függvénytani bizonyítását adtuk. Hasonlóképp kiszámíthatnók a gyökök összegét, négyzetösszegét, általában hatványösszegeit. Erre azonban nem térünk rá.

<u>A 0-helyek számának megmaradása kis variációknál.</u>

További alkalmazásként azt fogjuk megvizsgálni, vajjon az $f(x)$ függvény kis variálásával változik-e a zérushelyek száma? A kérdésre adandó válasz negatív. Pontosabban a következő általános tételt bizonyítjuk be: <u>ha az $f(x)$ és $f(x)+g(x)$ függvények egy C görbén és belsejében holomorfok, a C görbén magán nem tűnnek el és ugyancsak itt</u>

$$\left|\frac{g(x)}{f(x)}\right| < 1$$

<u>akkor az $f(x)+g(x)$ függvénynek a görbén belül ugyanannyi zérushelye van, mint $f(x)$-nek.</u>

U. i.

$$f(x)+g(x) = f(x)\left(1+\frac{g(x)}{f(x)}\right) = f(x)\,h(x),$$

aminélfogva az $f(x)+g(x)$ függvény C görbén belül fekvő zérushelyeinek a száma az előzők szerint:

$$\frac{1}{2i\pi}\oint_C \frac{f'(x)+g'(x)}{f(x)+g(x)}\,dx = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx + \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{h'(x)}{h(x)}\,dx$$

Tételünk bizonyitásához azt kell kimutatnunk, hogy a jobboldali második integrál zérus. Legyen e célból

$$h(z) = u$$

Akkor, mivel $\quad du = h'(z)\,dz$

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{h'(z)}{h(z)}\,dz = \int_{\mathcal{C}'} \frac{du}{u},$$

ahol a $\mathcal{C}'$ görbéről annyit tudunk, – és ez teljesen elegendő – hogy a $z=0$ pontot nem kerüli meg. Ez abból következik, hogy föltételünk szerint a $h(z) = 1 + \frac{g(z)}{f(z)}$ függvény értékei benne maradnak abban a körben, melyet a $z = +1$ pont körül egység sugárral irunk.

Ennélfogva

$$\int_{\mathcal{C}'} \frac{du}{u} = 0$$

Állitásunk helyességét különben még a következőkép is beláthatjuk. $\frac{h'(z)}{h(z)}$ nem más mint $\log^* h(z)$-nek a differenciálhányadosa. $h(z)$ értékei benne maradnak az előbb emlitett kör belsejében, tehát $\log^* h(z)$ holomorf és ennélfogva a $\mathcal{C}$ görbe befutása után a függvény értékének változása (azaz differenciálhányadosának integrálja) zérus.

<u>1.) példa: az algebra alaptétele.</u>

Ezt a tételt először két már más módon bebizonyitott tétel ujból való bizonyitására használjuk föl. Az első az algebra alaptétele.

Bontsuk föl az n-edfokú racionális egész függvényt a következő módon;

Legyen $\quad f(x) = z^n$,

és $\quad g(x) = a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$

Ekkor a $\quad \dfrac{g(x)}{f(x)} = \dfrac{a_1}{z} + \dots\dots + \dfrac{a_n}{z^n}$

kifejezés, ha $z \longrightarrow \infty$, egyenletesen tart 0 felé; tehát z elég nagy értékei mellett mindenesetre

$$\left| \frac{g(x)}{f(x)} \right| < 1$$

Tételünk szerint tehát a $z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$ polynomnak ugyanannyi zérushelye van, mint az $f(x) = z^n$ függvénynek. Ennek pedig van egy zérushelye (t.i. $z = 0$), melynek rendszáma n. Tehát a polynomnak n zérohelye van.

A második tétel a <u>holomorf függvény absolut értékének maximumáról szóló tétel</u>. Legyen — <u>2. példa: $|f(x)|$ maximuma.</u>

$$f(x) = -c \qquad (c = \text{konst})$$

és $g(x)$ egy oly holomorf függvény, melyre egy zárt $\mathfrak{C}$ görbe mentén $|g(x)| < |c|$. Ekkor tételünk szerint a $g(x) - c = f(x) + g(x)$ függvénynek a görbe belsejében nincs zérushelye, mert az $f(x)=-c$ függvénynek sincs, azaz a $g(x)=c$ egyenletnek a görbe belsejében nincs megoldása. Ez pedig más szóval azt az ismert tételt mondja ki, hogy a holomorf függvény az absolut értékének maximumát a tartománya határán éri el.

Alkalmazás függvénysorozatokra.

Célszerű lesz általános tételünket a függvények sorozataira szóló alakjában is megismerni. Az

$$f_1(x),\ f_2(x), \ldots\ldots, f_n(x), \ldots\ldots$$

függvénysorozat tagjai legyenek holomorf függvények egy tartomány belsejében és határán, továbbá a sorozat egyenletesen tartson az $f(x)$ holomorf függvény felé, amelynek a tartomány határán nincs zérushelye, (tehát létezik oly $m>0$ szám, hogy az egész tartomány határán $|f(x)| \geq m > 0$). Ekkor, miután elég nagy n index mellett az egyenletes konvergencia folytán

$$|f_n(x) - f(x)| \leq m,$$

a tartomány határán

$$\left|\frac{f_n(x) - f(x)}{f(x)}\right| < 1$$

Tehát elég nagy indextől kezdve az

$$f_n(x) = f(x) + (f_n(x) - f(x))$$

függvénynek a tartomány belsejében ugyanannyi zérushelye van, mint az $f(x)$ függvénynek.

Legyen a az $f(z)$ függvénynek α-rendű zérushelye és zárjuk körül ezt egy oly kis sugarú körrel, melyen belül a függvénynek már nincs több zérushelye. Akkor az épen most kimutatott körülmény szerint az $f_n(x)$ függvénynek elég nagy n-től kezdve, ezen körön belül α számú (különböző, vagy részben, vagy egészben összeeső) zérushelye van.

Legyen végül $a_1, a_2, \dots a_n, \dots$ az $f_1(x), f_2(x), \dots f_n(x), \dots$ függvények egy-egy zérushelye. Ezen pontok sorozatának van egy vagy több torlódási helye. Ez a torlódási hely az egyenletes konvergencia következtében az $f(x)$ függvénynek is zérushelye, mert ha $a_n \to a$, akkor $f_n(a_n) \to f(a)$. De másfelől az előbb mondottakból az következik, hogyha vesszük az összes a_n-ek halmazát, akkor az $f(x)$ függvény minden zérushelye ezen halmaznak egyik torlódási helye. Tehát az $f(x)$ függvény összes zérushelyeit ezen halmaz torlódási helyeinek összesége szolgáltatja.

A tételnek ezen alakját alkalmazni fogjuk az exponenciális függvényre. Előszörben kimutatjuk, hogy

$$f_n(z) = \left(1+\frac{z}{n}\right)^n \longrightarrow e^z$$

Ez amint jól ismeretes z-nek valós pozitív értékei mellett igaz. Az általános esetet erre vezetjük vissza. Ha u. i. az $e^z - f_n(z)$ kifejezést hatványsorba fejtjük, a sor minden egyes koefficiense pozitív lesz. Tehát a kifejezés absolut értékre kisebb, mint ha benne minden tagban z helyett $|z|$-t írunk

$$\left| e^z - f(z) \right| \leqq e^{|z|} - f_n(|z|)$$

<u>Példa: az e^z-1 függvény zérushelyei és az e^z függvény periodicitása.</u>

Minthogy pedig a jobboldal $n \to \infty$-re 0-felé tart, 0 felé tart a baloldal is.

Az e^z függvény előállítása ezen és az előbb bebizonyított tétel megengedik <u>a függvény periodicitásának</u> kimutatását, amelyet pl. a függvény hatványsor előállításából nehezebb volna fölismerni.

Az exponenciális függvény értéke a $z=0$ helyen 1. Keressük, hogy léteznek-e még más oly z értékek, melyeknél szintén az 1 értéket veszi fel? U. i. láttuk s egyébként a $\lim \left(1+\frac{z}{n}\right)^n$-nel való előállításból is könnyen következik az $e^{z+\alpha} = e^z \cdot e^\alpha$ additio-tétel, vagyis ha $e^\alpha = 1$, akkor $e^{z+\alpha} = e^z$ azaz α az e^z függvénynek periodusa.

Az előzők szerint az $e^z = 1$ egyenlet gyökeit, vagy más szóval az $e^z - 1$ függvény zérushelyeit az

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n - 1 \qquad n = 1, 2, \ldots$$

függvények zérushelyeinek a torlódási helyei szolgáltatják. Ezek zérushelyei pedig az

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = 1$$

egyenlet gyökei, melyeket az

$$z = n\left(\sqrt[n]{1} - 1\right)$$

formula állít elő, ahol az $\sqrt[n]{1}$ jel alá foglaltuk mind az n, n-edik egységgyököt. Minthogy az összes egységgyökök valós része ≤ 1, azért $n\left(\sqrt[n]{1} - 1\right)$ valós része nem lehet pozitív; nem lehet tehát pozitív torlódási értékeiknek vagyis az $e^z = 1$ egyenlet gyökeinek valós része sem. Másrészt, ha $e^z = 1$, akkor egyszersmind $e^{-z} = \frac{1}{e^z} = 1$, tehát z-vel együtt $-z$ is gyöke egyenletünknek, ennélfogva z valós része negatív sem lehet. Vagyis a keresett értékek – a 0 kivételével – tiszta képzetes számok.

A 0-tól különböző legkisebb absolut értékű gyököt nyilvánvalóan úgy kapjuk, hogy $\sqrt[n]{1}$ gyanánt az 1-hez legközelebb eső $\cos\frac{2\pi}{n} \pm i \sin\frac{2\pi}{n}$ egységgyököket választjuk ki. Ezekre $\left|\sqrt[n]{1} - 1\right|$ az egységkörbe írt szabályos n-szög oldala, tehát $\left|n\left(\sqrt[n]{1} - 1\right)\right|$ ezen sokszög kerülete, mely növekvő n-nel az egységkör kerülete, vagyis 2π felé tart. Ezekre tehát

$$n(\sqrt[n]{1}-1)\longrightarrow \pm 2\pi i$$

szerint, amint a valós tengely fölött vagy alatt fekvő egységgyököket vettük.

Hasonló módon szolgáltatják az $\sqrt[n]{1}=\cos\frac{2k\pi}{n}\pm i\sin\frac{2k\pi}{n}$ egységgyökök a $(\pm 2k\pi i)$ torlódási értékeket. Egyébként az $e^{2k i\pi}=(e^{2\pi i})^{k}$ relacióból is következik, hogy ezen értékek az $e^{z}=1$ egyenletnek gyökei. Több gyöke nincs. Mert az $e^{\alpha-\beta}=\frac{e^{\alpha}}{e^{\beta}}$ relatio alapján, ha α és β gyökök, $\alpha-\beta$ is az, azért ha egyenletünknek volna olyan (a fentiek szerint mindenesetre tiszta képzetes) gyöke, mely nem egész számú többszöröse $2\pi i$-nek, akkor a hozzá legközelebb eső $\pm 2k\pi i$ gyököt belőle levonva a különbség olyan gyököt szolgáltatna, melynek absolut értéke 2π-nél kisebb. Ez ellentmondana annak a fentebb bebizonyított ténynek, hogy a 0-tól különböző absolut legkisebb gyökök (torlódási értékek) $\pm 2\pi i$.

A Lagrange-féle sorfejtés és az inverz függvény.

Legyen $F(z,u)$ egy két komplex változójú függvény, melyről feltesszük, hogy z és u változók egy-

egy tartományában holomorf, amit úgy értünk, hogy ha a két változó közül az egyiket fixírozva képzeljük, akkor a függvény a másiknak - a számára kijelölt tartományban - holomorf függvénye. Az

Implicit függvények.

$$F(z, u) = 0$$

egyenlet implicite u-t mint z-nek és z-t mint u-nak függvényeit értelmezi. Az így értelmezett függvények általában - egyes izolált helyek kivételével - holomorfak. Ezen tény bebizonyítása, valamint az $u(z)$ és $z(u)$ függvényeknek, elsősorban a kivételes helyek környezetében való viselkedésüknek tanulmányozása az előző pontban adott általános tétel segítségével eszközölhető, ill. visszavezethető egy speciális típusnak, az algebrai függvényeknek, vizsgálatára.

Mi csak egy nagyon speciális esettel foglalkozunk, mely az u. n. Lagrange-féle sorfejtéshez vezet.

A Lagrange-féle sorfejtés.

Legyen az $f(z)$ függvény holomorf egy C görbe belsejében és határán; legyen továbbá a a C görbe által határolt tartomány egy belső pontja és α olyan szám hogy

$$|\alpha| < \frac{d}{M} = \Theta \frac{d}{M}$$

ha d-vel jelöljük az a pont minimális távolságát a $\mathcal{C}$ görbétől és M-mel az $|f(z)|$ függvény maximumát magán a görbén; Θ pozitív valódi tört. Keressük most a

$$F(z, \alpha) = z - a - \alpha f(z) = 0$$

egyenlet z szerinti megoldását. (A fent vázolt általános problémába feladatunk úgy illeszkedik bele, hogy $F(z, \alpha)$-t mint a z és α változók függvényét tekintjük. A függvény az α változóra lineáris.)

Az α-ra kiszabott megszorítás szerint a $\mathcal{C}$ görbén

$$\left| \frac{\alpha f(z)}{z-a} \right| < \Theta < 1,$$

tehát az előző pontban adott tétel értelmében a $F(z, \alpha)$ függvénynek a $\mathcal{C}$ görbén belül ugyanannyi zérushelye van mint a $(z-a)$ függvénynek, vagyis egyetlen egy, melyet a következő integrál szolgáltat

$$\xi = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} z \frac{1 - \alpha f'(z)}{z - a - \alpha f(z)} dz.$$

Általánosabban: ha a $\Phi(z)$ függvény holomorf a $\mathfrak{C}$ görbe belsejében és magán a $\mathfrak{C}$ görbén, akkor

$$\Phi(\zeta) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathfrak{C}} \Phi(z)\,\frac{1-\alpha f'(z)}{z-a-\alpha f(z)}\,dz$$

Az integráljel alatt álló kifejezést sorba fogjuk fejteni a következőképen

$$\Phi(\zeta) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathfrak{C}} \frac{\Phi(z)\,[1-\alpha f'(z)]}{z-a}\cdot\frac{1}{1-\frac{\alpha f(z)}{z-a}}\,dz =$$
$$= \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathfrak{C}} \frac{\Phi(z)\,[1-\alpha f'(z)]}{z-a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n f^n(z)}{(z-a)^n}\,dz$$

Az integráljel alatt álló végtelen sor a $\mathfrak{C}$ görbe mentén abszolút és egyenletesen összetartó, mert $\left|\frac{\alpha f(z)}{z-a}\right| < \Theta$; szabad tehát tagonként integrálni. Rendezzünk továbbá α hatványai szerint; ered:

$$\Phi(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n\,\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathfrak{C}} \frac{\Phi(z)}{(z-a)^{n+1}}\left[f^n(z) - (z-a)\,f^{n-1}(z)\,f'(z)\right]dz$$

Tekintetbe véve most, hogy a Cauchy-féle integrálformula szerint

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathfrak{C}} \frac{\Phi(z)}{z-a}\,dz = \Phi(a),$$

és továbbá hogy

$$\left(\frac{f^n(z)}{(z-a)^n}\right)' = \frac{(z-a)^n\,n\,f^{n-1}(z)\,f'(z) - n\,(z-a)^{n-1}\,f^n(z)}{(z-a)^{2n}},$$

kapjuk, hogy

$$\Phi(\zeta) = \Phi(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \frac{1}{2i\pi} \int_{C} \Phi(z) \left(-\frac{f^n(z)}{n(z-a)^n} \right)' dz$$

Végül az egyes tagokra parciális integrációt alkalmazva:

$$\int_{C} \Phi(z) \left(-\frac{f^n(z)}{n(z-a)^n} \right)' dz = -\int_{C} \left(-\frac{\Phi(z) f^n(z)}{n(z-a)^n} \right)' dz + \int_{C} \frac{\Phi'(z) f^n(z)}{n(z-a)^n} dz;$$

továbbá tekintetbe véve, hogy itt a jobboldalon az első integrál zérus és hogy

$$\frac{(n-1)!}{2i\pi} \int_{C} \frac{\Phi'(z) f^n(z)}{(z-a)^n} dz = \left(\Phi'(z) f^n(z) \right)^{(n-1)}_{z=a},$$

végeredményben kapjuk a Lagrange-féle sorfejtést:*

Az inverz függvény A Lagrange-féle sorfejtés alkalmazásaképpen tárgyaljuk az inverz függvény kérdését. Keressük az $\mu = \varphi(z)$ függvény inverz függvényét, tehát a $\varphi(z) - \mu = 0$ egyenlet z szerinti megoldását. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy

$$\varphi(0) = 0.$$

Az általános esetben szereplő mennyiségek helyébe írjunk: a helyébe 0-t, $f(z)$ helyébe $\frac{z}{\varphi(z)}$-t, α helyébe μ-t, $\Phi(z)$ helyébe 1-et; ezáltal a $z - a - x f(z) = 0$ egyenlet a követ-

* $\Phi(\zeta) = \Phi(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \left(\Phi'(z) f^n(z) \right)^{(n-1)}_{z=a}$

kezébe megy át

$$z - \mu \frac{z}{\varphi(z)} = 0, \text{ azaz } \varphi(z) = \mu$$

Minthogy μ, illetve z elég kis értékeire az általános eset feltételei teljesítve vannak, tehát a $z - \mu \frac{z}{\varphi(z)} = 0$ egyenletre alkalmazhatjuk a Lagrange-féle sorfejtést:

$$Z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^n}{n!} \left(\frac{z^n}{\varphi^n(z)} \right)^{(n-1)}_{z=0}$$

Láthatjuk innen azt is, hogy a függvény megfordítása csak akkor teljesen egyértelmű, ha a $z=0$ pont a $\varphi(x)$ függvénynek egyszeres zérus-helye, azaz $\varphi'(0) \neq 0$.

Ha a Lagrange-féle sorfejtésben

$$f(x) = \sin x \quad (\alpha = e)$$

akkor a

A Keppler-féle egyenlet.

$$z - a - e \sin z = 0$$

egyenlet az égi mechanikában szereplő u. n. Keppler-féle egyenlet.

Ha

A Legendre-féle polynomok.

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{2}$$

akkor a $z - a - \alpha f(z) = 0$ egyenlet gyökei

$$J = \frac{1 - \sqrt{1 - 2a\alpha + \alpha^2}}{\alpha}$$

A $\sqrt{1-2a\alpha+\alpha^2}$ kifejezés, mint az α parameter függvénye, kétértékű; értékei az $\alpha=0$ környezetében két folytonos függvénye csoportosíthatók, melyeknek értékei az $\alpha=0$ helyen $+1$ ill. -1.

Hogy a fenti

$$\zeta=\frac{1-\sqrt{1-2a\alpha+\alpha^2}}{\alpha}$$

megoldás $\alpha=0$-nál a $z=a$ megoldásba menjen a négyzetgyöknek azt az értékét kell vennünk, mely $\alpha=0$-nál $+1$.

Válasszuk most $\Phi(z)$-t a következőképen:

$$\Phi(z)=\frac{1}{1-\alpha z},$$

akkor a Lagrange-féle sorfejtés a következő eredményt szolgáltatja:

$$\Phi(\zeta)=\frac{1}{\sqrt{1-2a\alpha+\alpha^2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n!}\left(\frac{(a^2-1)^n}{2^n}\right)^{(n)}=$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n X_n(a)$$

Az

$$X_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\left[(x^2-1)^n\right]^{(n)} \qquad (n=1,2,\ldots)$$

formulák által értelmezett függvényeket Legendre-féle polynomoknak nevezzük.

A Legendre-féle polynomok, vagy más néven gömbfüggvények (illetve pontosabban bizonyos belőlük képezhető 2 változós függvények) a gömbfelületen értelmezett függvényeknek u. n. Laplace-féle sorba való kifejtésénél hasonló szerepet játszanak mint a trigonometrikus függvények a körön értelmezett azaz egy változós periodusos függvények Fourier-féle sorfejtésénél. Az imént a Lagrange-féle sorfejtés alkalmazásával származtatott

$$X_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\left[(x^2-1)^n\right]^{(n)}$$

előállításukat Jacobi találta. Ezen előállításból könnyen felismerhető a polynomok több fontos tulajdonsága. Igy pl. alkalmazzuk a Rolle-féle tételt az $(x^2-1)^n$ függvényre és első $(n-1)$ deriváltjára, melyeknek a (-1) és $(+1)$ helyek rendre n-szeres, $(n-1)$-szeres, ... 1-szeres zérushelyei; a Rolle-tétel szerint az első deriváltnak legalább egy, a másodiknak legalább kettő s. i. t. az n-iknek, tehát az X_n függvénynek is legalább n különböző zérushelye fekszik a (-1), $(+1)$ intervallum belsejében. Másrészt az X_n függvény n-edfokú polynom, tehát több zérushelye nem lehet, és így <u>összes zérushelyei valósak</u>, különbözőek és -1 és $+1$ közt feküsznek.

A Legendre-féle polynomok egy másik fontos tulajdonsága, mely az adott előállításból a parciális integráció n-szer való alkalmazásával következik, az hogy $X_n(x)$ a $(-1,+1)$ intervallumban minden n-nél alacsonyabb fokszámú $P(x)$ polynomra orthogonális, azaz

$$\int_{-1}^{+1} P(x)\, X_n(x)\, dx = 0.$$

Speciálisan, ha $m \neq n$

$$\int_{-1}^{+1} X_m(x)\, X_n(x)\, dx = 0$$

azaz a Legendre-féle polynomok a $(-1,+1)$ intervallumra nézve orthogonális rendszert alkotnak hasonlóan mint a $\sin nx$, $\cos nx$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ függvények a $(-\pi, +\pi)$ intervallumban

Tartalomjegyzék:

A residuum számítás és alkalmazásai.