VECTOR-TAN

ÉS

AZ EGYSZERŰ INAEQUATIOK TANA

TUDOMÁNY-EGYETEMI ELŐADÁSAIBÓL KÖZLI

DR. FARKAS GYULA

A M. TUD. AKADÉMIA L. TAGJA

KÜLÖNLENYOMAT AZ ERDÉLYI MÚZEUM-EGYLET ORVOS- ÉS TERMÉSZETTUDOMÁNYI SZAKOSZTÁLYÁNAK ÉRTESÍTŐJE UTÁN

KOLOZSVÁR

STEIN JÁNOS

M. KIR. TUD. EGYETEMI KÖNYV-KERESKEDÉSE

ÁRA 6 KORONA

Tudomány-egyetemi hallgatóim számára, bevezető előadásaimhoz emlékeztetőül és némi részben kiegészitőül irtam ezeket.

Amaz előadásaim szerzésében az alkalmazások czéljára legszükségesebb közbötlen mathematikai tanok rendszeres összefoglalására törekedtem. Azonban az irodalom készletében lévőket majd az alkalmazások, majd a rendszeresség szempontjából helyenként hiányosaknak tapasztaltam, s a hiányokat pótolni iparkodtam. Ily ügyekezetem némely nyomának a megjelölése végett utalok a következő czikkekre: „A potentialis egyenletek" (XXI.), a mely az ismerteknél részben tágabb föltételek alatt állapitja meg az egyenletek létezését és megoldását; „Az általában folytonos függvény geometriai integralisa" (XXV.), a mely az egyes geometriai helyekben végtelen függvény integralisának a szokottnál közbötlenebb definitióját adja és tárgyalja; „Tér-integralisok Gauss-, Green- és Kirchhoff-féle reductiója" (XXVIII.), a mely ezeket a reductiókat mint specialisokat következteti, előbb a megfelelő általános reductiót állapítván meg; a második rész, vagyis „Az egyszerű inaequatiók tana", nem tekintve néhány előbbi közleményemet, egészen újnak mondható, — ide csatoltam, mert az elméleti mechanika természethű tárgyalásához szükséges.

Tekintettel ez és egyéb előforduló pótlásokra, úgy véltem, hogy az egész szerkesztmény helyt foglalhat egy tudomány-művelő folyóiratban is, és, miután az Erdélyi Múzeum-egylet természettudományi Szakosztálya a maga Értesitőjébe való fölvételét elhatározta, külön lenyomatok révén is közre bocsátom.

De ezennel reá mutatok néhány szándékosan elkövetett mulasztásomra is. Mellőztem némely, jóllehet már-már szintén nagyon elterjedt, elnevezéseket, valamint symbolicus alkalmazásukat. Ilyenek a következők: a hely deriválható scalaris függvényének a „gradiense“, a mi a scalaris függvénynyel mint potentialissal meghatározott vectort jelenti; a hely deriválható vector-függvényének a „rotatiója“, a mi a vector-függvénynyel, mint vector-potentialissal, meghatározott vectort jelenti; a hely deriválható vector-függvényének a „divergentiája“, a mi a vector első componensének az első coordinatára, második componensének a második coordinatára, harmadik componensének a harmadik coordinatára szóló deriváltjával, mint összeadandókkal, meghatározott összeg; két vector „szorzata“, a mi a két vector tengelyének az irányával és a két vector parallelogrammájának a területével, mint iránynyal és nagysággal, meghatározott vector. Ezekről hallgatok, mert elsajátításuk helye a vectortani ismereteknek nem a megszerzésében, hanem az alkalmazásában van: amazt megnehezítenék, emezt a complicatiók bizonyos eseteiben megkönnyítik. Különben nem is jött még létre kielégítő megállapodás ez elnevezések dolgában, midőn pld. a rotatio angoloknál és németeknél sokszor „Curl“, de németeknél „Quirl“ és „Wirbel“ is, és a francziák két vector szorzatán scalarist szoktak érteni, a mely a két vector nagyságának és szögük cosinusának a szorzatából áll, úgy, hogy ezen a téren a Grassmann-tól definiált „külső“ és „belső“ szorzat fogalmának a teljes elkülönülésével találkozunk.

Nem tárgyaltam a végtelen nagy alakzatokra kiterjedő geometriai integralisokat: a mennyiben ilyenek az alkalmazások rendén előfordúlnak, reájuk tartozó tudnivalónk közönségesen igen egyszerű módon megszerezhető. Példa rá a Vector-tanban a XXXIII. czikk 4. pontja. Rendszeres tárgyalásuk alkalmazásukhoz mérten aránytalanúl nagy terjedelmű volna.

Amaz eleve kitűzött czél, a mely után indultam, megfoghatóvá teszi, hogy a fölvett tárgy minden részletét nem fejtem ki tüzetesen. Kezdő tehát, a ki ebben a közleményben először találkozik a tárgygyal, helyenkint nehézségekre fog akadni, a melyeknek a legyőzése végett kutatásba kell bocsátkoznia és behatóbb elmélkedésre kell elhatároznia magát, vagy talán leleményességhez is kell folyamodnia. Például a Vector-tanban a XXI. czikk végén azt mondom, hogy

„Ha azonban η általában kétszer deriválható mindhárom coordinata szerint, akkor a definitio teljes tartalmával létezik a vector-potentialis“. Ennek a belátása végett a megelőző bizonyítási folyamatot annak a szemmel tartásával kell megismételni, hogy most φ általában kétszer deriválható függvénye a coordinatáknak, minél fogva létezik olyan, általában mindhárom coordinata szerint deriválható függvény a T térben, hogy az x szerint képezett partialis deriváltja egyenlő $\tilde{\omega}$-val. Továbbá, nem említem, hogy a három componens bármelyikének a kétszeres deriválhatóságában áll az a tétel: a ki gondolkodva olvas, szükségképen észre veszi. A XXXV. czikk utolsó teljes oldálának az elején azt mondom, hogy „A $(\delta x, \delta y, \delta z)$ elemi vector nyilvánvalóan a $G=q$ fölületen fekszik“. Ez abból látható, hogy a $(\delta x, \delta y, \delta z)$ vector kezdő pontja benne van az 1 alatt meghatározott fölületekben, s a vegső pontja benne van a 2 alatt meghatározott fölületekben, a mi egyenesen ennek az elemi vectornak a defiinitiójából következik, s e szerint eleje is, vége is benne van a $G=q$ fölületben. Az egyenlőtlenségek tanában az utolsó czikk harmadik pontja alatt előforduló determinansok eredetét nem részletezem, s épen csak származásuk forrására utalok. Stb. A mely állításokat a kezdő az előzmények alapján rögtön be nem lát, tekintse azokat eléje tűzött föladatoknak, a melyek megoldása tehetségének serkentésére és mathematikai képességeinek gyarapítására szolgál.

FOGLALAT.

Első rész: **Vector-tan.**

Második rész: **Az egyszerű inaequatiók tana.**

A vector-tanban előforduló sajtó-hibák kiigazítása.

Lapszám.

3. Fölűlről a 10. szövegsorban „átmérőinek“ helyett „átlóinak“ teendő.
9. Fölűlről a 9. szövegsorban „$\pi\ \theta$“ helyett „$(\pi-\theta)$“.
15. Fölűlről a 6. képletsorban „$\alpha_1\gamma_1$“ helyett „$\alpha_1\beta_1$“.
16. Fölűlről az 5. szövegsorhoz hozzá toldandó: „egy vectoréi“, azután következik a 6. szövegsor. A 8. szövegsorban a görög bötűk után beteendő: „egy vectoréi“.
22. Alulról a 4. képletsorban „$d\zeta$“ helyett „$d\eta$“ kell.
23. Alulról a 9. képletsorban „$b\eta$“ helyett „$d\eta$“, a 4. képletsorban „$d\zeta$“ helyett „$d\xi$“.
30. Alulról a 11. sorban „végleten“ helyett „végtelen“.
31. Alulról a 12. szövegsorban „pontokan“ helyett „pontokban“, a 10. szövegsorban „vonalán“ helyett „vonalon“.
32. Alulról a 2. szövegsorban „elleni“ helyett „elemi“.
46. Fölülről a 3. szövegsorban „x“ helyett „z“.
47. Fölülről a 3. képletsorban „ξ“ helyett „ζ“.
51. Alulról az 1. képletsorban a második „$=$“ jel helyett „$-$“.
52. Alulról az 1. szövegsorban „véges és egyetlen“ helyett „egyetlen véges“.
59. Alulról a 4. képletsorban „(τ)“ helyett „(τ')“, a 2. szövegsorban „$s^2 D\sigma$“ helyett „$s_0^2 D\sigma$“.
60. Fölülről a 2. képletsorban „(τ)“ helyett „(τ')“.
62. Alulról a 4. képletsorban az első „(σ'')“ helyett „(σ')“.
64. Alulról a 3. képletsorban az N bötű elé egyenlőségi jel tartozik.
68. Alulról a 2. képletsorban az utolsó „$D\varpi$“ helyett „$D\varpi_1$“ kell.
72. Alulról az 1. képletsorban „Di“ helyett „$D\tau$“.
77. Alulról a 4. szövegsorban „i“ helyett „i_1“.
78. Alulról az 1. képletsorban az utolsó zárjel törlendő.
82. Fölülről az 5. képletsorban az első „μ“ helyett „λ“ teendő, alulról a

Lapszám

2. képletsorban az első és utolsó összeadási jel kivonási jellel cserélendő föl.

85. Az utolsó képletsorban S és T fölcserélendők egymással.

86. Fölülről az 1. képletsorban „$\frac{\partial \Phi}{\partial r}$“ helyett „$\frac{\delta \Phi}{\delta r}$“ teendő.

88. Alulról a 2. képletsorban az „α“ elé „)“ zárójel szükséges.

89. Fölülről a 11. szövegsorban a „pontokat“ szó után kimaradt: „a fölületen fekvő“, alulról a 7. szövegsorban „σ“ helyett „σ'“ kell.

92. A XXXI. czikkben alulról a 4. sorban „integralis“ helyett „integrálás“.

93. Fölülről a 7. szövegsorban a „hogy“ szó után kimaradt: „mihelyt még kisebbek, már“

99. Alulról az 5. szövegsorban „integralis“ helyett „integrálás“, a 6. szövegsorban pedig „integrálás“ helyett „integralis“ teendő.

105. Alulról a 8. szövegsorban az „oldalon“ szó elé „fölületi“ jelző tartozik.

109. Fölülről az 1. képletsorban a második „ξ“ jegy helyett „ζ“ kell.

117. Alulról az 1. képletsorban „$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \partial u}$“ helyett „$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial v \partial u}$“.

Vector-tan.

I. A helyhatározó rendszer megválasztása.

Tengelyen mindig szabott irányú és helyű egyenest értsünk.

Közönségesen derékszögű tengely-rendszert használunk helyhatározásra; és pedig jobbra fordulót. Ha tehát egy órát úgy helyezünk el, hogy a harmadik tengely a számlapjára merőlegesen álljon és a számlapnál az óraszerkezet belseje felé mutasson, akkor az óramutatók járásával egyező értelemben kell fordítanunk az első tengelyt a harmadik körűl, hogy egy derékszög leírása után iránya a második tengely irányába essék.

Bármely tengely körűl ebben az értelemben történő fordulást nevezünk mindig positivus fordulásnak, már t. i. arra a tengelyre vonatkozólag. Az ellenes értelemben valót negativus fordulásnak nevezzük az illető tengelyre nézve. Világos, hogy amely fordulás egy tengelyre nézve positivus, az ellenes irányú, de azonos helyű tengelyre vonatkozólag negativus.

A positivus fordulással származó szögeket positivusoknak, a negativus fordulással származókat negativusoknak számítjuk.

II. A vector alap-fogalma.

Válasszunk a térben egy egyenes vonal-darabot. Egyik határpontját jelöljük A-val, a másikat B-vel. Végtelen sok hosszúságot tartalmaz. Mindazt, amely kisebb az AB hosszúságnál, és magát az AB hosszúságot. Továbbá két irányt tartalmaz. Az $A—B$ irányt és a $B—A$ irányt.

Midőn a hosszuságok közűl csupán a teljes AB hosszúságot, és a kétféle irány közűl is csupán az egyiket vesszük tekintetbe, vectornak nevezzük az egyenes vonaldarabot. Ha az $A—B$ irányt tulajdonítjuk neki, akkor határpontjainak a betűivel AB alakban jelöljük, és A pontját az elejének vagy kezdetének, B pontját a végének nevezzük.

Az AB vectort a B pont A ponti vectorának is nevezzük. Igy például egy helyhatározó rendszer origójából egy pontba húzott vector ennek a pontnak az origói vectora. Ha valamely vector eleje egy I nevű tengelyben van, s a vector merőleges erre a tengelyre, a vége pedig C nevű pontban van, akkor a vectort a C pont I tengelyű vectorának is nevezzük.

A vectorok hosszúságát és irányát illetőleg hasznos mennyiségi vonatkozásokat veszünk számba és definiálunk, amelyek rendén a vector mint mennyiségi műveletek tárgya, mint mennyiség jelentkezik. Ez által válik teljessé a vector-fogalom definitiója az elméleti physika szolgálatában.

III. A vectorok egyenlősége és határozói.

A már előre bocsájtott alap-definitionak megfelelően:

ha két vector AB, CD, egyenlő hosszú és egyező irányú, akkor, és csak akkor, egyenlőknek mondjuk azokat, s ezt röviden a szokásos egyenlőségi jellel írjuk:

$$\mathrm{AB} = \mathrm{CD};$$

ha azonban két vector hosszúsága, vagy iránya, vagy hosszúsága is, iránya is különböző, akkor, és csak akkor mondjuk különbözőknek a vectorokat.

Bármely pontba helyezzük tehát egy vector elejét, ha hosszúságát és irányát nem változtatjuk meg, a vector is változatlan marad. És valahányszor egy vector hely-változtatásáról beszélünk, különös kijelentés hiányában, mindig hosszúságának s irányának meghagyásával értjük azt.

Mindebben egyező irányokon ugyanazon végtelen távoli pont felé mutató irányok értendők, mint rendesen.

Ha egy vector elejét az origóba helyezzük, akkor végének a helye teljesen meghatározza a vectort, mert hosszát is, irányát is meghatározza. Ekkor tehát végének a coordinatái teljesen meghatározzák. Ezeket a vector-határozókat a vector componenseinek nevezzük. Ha ξ, η, ζ a három componens, úgy ezekkel a (ξ, η, ζ) alakban jelöljük a vectort.

Bárhol legyen egy vector eleje, ha elejének a coordinatáit rendre kivonjuk végének a coordinatáiból, componenseit nyerjük. Mert, ha elejének a coordinatái x, y, z, úgy végének a coordinatái algebrailag ezekkel az értékekkel nagyobbak, mint mikor eleje az origóban van. Midőn eleje az x, y, z pontban van, akkor végének a coordinatáit x', y', z' jelölvén: $\xi = x' - x$, stb.

Egy vector componenseit viszont teljesen meghatározza a vector; mert eleje az origóba helyeztetvén, a vége meghatározza a maga coordinatáit.

Amely mennyiségek valami módon meghatározzák a vector componenseit, azok nyilvánképen meghatározzák a vectort.

Ilyetén vector-határozók a vector hossza és az irányát határozó u. n. iránycosinusai, vagyis azoknak a szögeknek a cosinusai, amelyek alatt a vector iránya rendre a coordinata-tengelyek irányába fordítható. Ha ugyanis r a vector hossza és α, β, γ az irány-cosinusai, akkor a vector componensei:

$$\xi = r\alpha, \quad \eta = r\beta, \quad \zeta = r\gamma.$$

Oly határozók ezek is, amelyeket viszont, a vector teljesen meghatároz, mert a componensei teljesen meghatározzák azokat: az r hosszúság oly derékszögű hasáb átmérőinek a hosszúsága, amelynek az éleit a componensek szolgáltatják, tehát

$$r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2},$$

és ebből folyólag

$$\alpha = \xi : \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}, \text{ stb.},$$

ahol a gyök-kifejezés mindig positivusnak számítandó, mivel puszta hosszúságot jelent.

A három iránycosinus kifejezéséből a három componens egy módon kiküszöbölhető, minélfogva a három iránycosinus egy szabott relatiónak tesz eleget, és pedig

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1.$$

Ennek következtében a vector meghatározására a hosszúság mellett elég két iránycosinus és a harmadiknak az előjele.

Többnyire a három componenst vagy a hosszúságot és a három irány-cosinust használjuk vector-határozásra. De azért legyen itt szó két más meghatározási módról is. Olyanokról, amelyekben más jelentősége van az x, más az y és más a z tengelynek. Egyik, mint forgási tengely, egy másik, mint olyan tengely szerepel, amelynek irányától a forgás-szögeket számítjuk, s a harmadik nem szerepel.

Válaszszuk a z-tengelyt forgási tengely gyanánt és számítsuk az x-tengely irányától a forgás-szögeket. A vector elejét az origóba tévén, a vector meghatorozására szolgálhatnak: a vector-vég z-tengelyű vectorának hossza ρ, e vector elfordulásának a szöge ε, és a vector harmadik componense ζ. Ugyanis ρ és ε meghatározza a ξ és η componenseket:

$$\xi = \rho\cos\varepsilon, \qquad \eta = \rho\sin\varepsilon.$$

Ezt a meghatározási módot cylindricusnak nevezzük.

Ha a z-tengely és a vector közti szöget a föntebbi szög-definitio értelmében θ jelöli, akkor

$$\zeta = r\cos\theta, \qquad \rho = r\sin\theta,$$

miáltal egy negyedik meghatározási mód áll elé. Ebben r, ε, θ a határozók:

$$\xi = r\sin\theta\cos\varepsilon, \qquad \eta = r\sin\theta\sin\varepsilon, \qquad \zeta = r\cos\theta.$$

Az ε és θ határozók egyszerűen fejezik ki a három iránycosinust:

$$\alpha = \sin\theta\cos\varepsilon, \qquad \beta = \sin\theta\sin\varepsilon, \qquad \gamma = \cos\theta.$$

Hogy valamiféle adatok meghatározzák a vectort, ez mindig azt jelenti, hogy meghatározzák a vector hosszát és irányát. Következőleg amely vectorok megfelelő határozói egyenlők, azok a vectorok mindig maguk is egyenlők. De az egyenlő vectorok némely határozói nem szükségképen egyenlők, mint pld. a cylindricus rendszerben használt ε szög, mert ezt még megszorítás alá kell vetni, hogy a vector teljesen meghatározza őt. Ilyen megszorítás:

$$\pi \geqq \varepsilon \overline{\overline{>}} - \pi.$$

IV. Vectorok külömbsége.

Ha két vector elejét egy pontba helyezzük, akkor aszerint, amint a két vector egyenlő, vagy nem, végük összeesik, vagy nem; viszont, aszerint, amint a végük összeesik vagy nem, egyenlők vagy nem: egy pontba helyezvén két vector elejét, az egyiknek a végéből a másiknak a végébe nyúló vectort a két vector külömbségének nevezzük.

Ilyen kettő lehetséges: egyenlő hosszúak, de ellenkező irányúak. De a következő megkülömböztetéssel élünk: AB és AC vector külömbségén az utóbbinak a végéből az előbbeninek a végébe nyúló vectort értjük, vagyis a CB vectort.

A közönséges kivonási jegy segélyével képletezzük a külömbséget a következő értelemben: AB és AC külömbsége

$$\mathrm{AB} - \mathrm{AC} = \mathrm{CB},$$

AC és AB külömbsége

$$\mathrm{AC} - \mathrm{AB} = \mathrm{BC}.$$

Azt a műveletet, a melylyel két vectorhoz azok egyik vagy másik külömbségét meghatározzuk, kivonásnak nevezzük és az $A'B' - AB$ külömbségben az AB vectort kivonandónak, az $A'B'$ vectort kisebbítendőnek mondjuk. Ehez képest: miután a két vector elejét egy pontba helyeztük, a kivonandónak a végéből a kisebbítendőnek a végébe huzott vector a megfelelő külömbség, a külömbségi vector.

Úgy, mint az algebrában, egyenlők külömségéről is beszélünk. Ezt, a külömbség általános fogalmában, oly vectornak tekintjük, amelynek az eleje és vége összeesik. Zérus-vectornak nevezzük és egyszerűen a 0 jegygyel jelöljük:

$$AB - AB = 0.$$

Ha a kivonandó vector componenseit a kisebbítendő vector componenseiből rendre kivonjuk, a külömbségi vector cemponenseit kapjuk. Ugyanis, a kivonandó és a kisebbítendő vector elejét x_0, y_0, z_0 coordinatás pontba helyezvén, jelöljék most már a kivonandó vector végének a coordinatáit x', y', z', a kisebbítendő vector végének a coordinatáit x'', y'', z'': a componenseik rendre

$$\xi' = x' - x_0, \quad \eta' = y' - y_0, \quad \zeta' = z' - z_0,$$
$$\xi'' = x'' - x_0, \quad \eta'' = y'' - y_0, \quad \zeta'' = z'' - z_0;$$

a külömbségi vector componensei pedig

$$\xi = x'' - x', \quad \eta = y'' - y', \quad \zeta = z'' - z'.$$

A jobboldalok elárulják, hogy

$$\xi = \xi'' - \xi', \quad \eta = \eta'' - \eta', \quad \zeta = \zeta'' - \zeta':$$
$$(\xi'', \eta'', \zeta'') - (\xi', \eta', \zeta') = (\xi'' - \xi', \eta'' - \eta', \zeta'' - \zeta')$$

Fordítva, ha egy vector componensei $\xi''-\xi'$, $\eta''-\eta'$, $\zeta''-\zeta'$, akkor ez a vector a (ξ'', η'', ζ'') és (ξ', η', ζ') vector külömbsége.

Egyenleteinkből az is kitűnik, hogy a kisebbítendő vectornak és a külömbségi vectornak a külömbsége a kivonandó vector. Ha tehát a kisebbítendő vector és külömbségi vector elejét egy pontba helyezzük, az utóbbi vector végéből az előbbinek a végébe huzott vector a kivonandó. Geometriai szemlélettel is könnyen fölismerhető.

V. Vectorok összege.

A kisebbítendő vectort a kivonandó vector és a külömbségi vector összegének is nevezzük. A kivonás geometriai képéről közbötlenűl leolvasható, hogy, ha a külömbség elejét a kivonandó végébe, vagy végét a kivonandó elejébe helyezzük, mindig a szabadon maradt kezdetből a szabadon maradt végbe nyúló vector a kisebbítendő. Nem tekintve tehát a kivonás műveletét: egy vector elejét egy másiknak a végébe helyezvén, a szabad kezdetből a szabad végbe nyúló vectort nevezzük a két vector összegének. Vector-jegyekben a közönséges összeadási jel segélyével irjuk az összeget:

$$AB + BC = AC.$$

Azt a műveletet, a melylyel két vectorhoz azok összegét képezzük, összeadásnak s a két vectort összeadandónak nevezzük.

Az összeg componensei rendre az összeadandók componenseinek az összegei. Ez az összegre mint kisebbítendőre, az összeadandókra mint kivonandóra és külömbségre nézve már a külömbségi componens-egyenletekből kitűnik. De tényileg, ha az A és B és C pont coordinátái x_0, y_0, z_0 és x', y', z' és $x'', y'' z''$, úgy az AB és BC és AC vectorok componensei $\xi' = x' - x_0$, stb., $\xi = x'' - x'$, stb., $\xi'' = x'' - x_0$, stb. következőleg $\xi' + \xi = \xi''$, stb.:

$$(\xi', \eta', \zeta') + (\xi, \eta, \zeta) = (\xi' + \xi, \eta' + \eta, \zeta' + \zeta).$$

Három vector összegén két vector összegének és a harmadik vectornak az összegét értjük. Hogyha tehát egy vector végébe egy másiknak az elejét és ennek a végébe egy harmadiknak az elejét helyezzük, úgy a szabad kezdetből a szabad végbe nyúló vector a három vector összege. Ugyanis a difinitio szerint AB, BC, CD vectorok összege ez:

$$(AB + BC) + CD = AC + CD = AD.$$

Rövidebb írásmóddal

$$AB + BC + CD = AD.$$

Négy vector összegén három vector összegének és a negyedik vectornak az összegét értjük. Hogyha tehát egy vector végébe egy másiknak az elejét, ennek a végébe egy harmadiknak az elejét és ennek a végébe egy negyediknek az elejét helyezzük: akkor a szabad kezdetből a szabad végbe nyúló vector a négy vector összege. Ugyanis a definitio szerint AB, BC, CD, DE vectorok összege ez:

$$(AB + BC + CD) + DE = AD + DE = AE.$$

Rövidebb írásmódban

$$AB + BC + CD + DE = AE.$$

stb. stb.

Bárhány vector összegének a componensei rendre egyenlők az egyes vectorok componenseinek az összegével és pedig függetlenűl a vectorok sorrendjétől. Bizonyítás: Tetszésre választott sorrendben legyenek

$$(\xi_1, \eta_1, \zeta_1), \ (\xi_2, \eta_2, \zeta_2), \ldots, \ (\xi_n, \eta_n, \zeta_n)$$

az összeadandó vectorok. A másodiknak az elejét helyezzük az elsőnek a végébe, a harmadiknak az elejét a másodiknak a végébe, sít. Ekkor aztán vectoraink rendre legyenek A_0A_1, A_1A_2, .., $A_{n-1}A_n$. Ha az A_0 pont coordinátái x_0, y_0, z_0, stb., akkor

$$\xi_1 = x_1 - x_0, \ \xi_2 = x_2 - x_1, \ \xi_3 = x_3 - x_2, \ldots, \ \xi_n = x_n - x_{n-1}$$

stb. stb. Az összeg, vagyis A_0A_n componensei pedig $\xi = x_n - x_0$, stb. A jobb oldalok elárulják, hogy

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n,$$
$$\eta = \eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_n,$$
$$\zeta = \zeta_1 + \zeta_2 + \ldots + \zeta_n:$$

$$(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) + (\xi_2, \eta_2, \zeta_2) + \ldots + (\xi_n, \eta_n, \zeta_n) = (\xi_1 + \ldots + \xi_n, \eta_1 + \ldots + \eta_n, \zeta_1 + \ldots + \zeta_n).$$

A jobb-oldal független az összeadás sorrendjétől, tehát a bal-oldal is: vectorok definiált összeadása commutativus művelet; adott vectorokat bármely rendben sorozzunk lánczba, ha a lánc első pontja mindig ugyanaz a pont, utolsó pontja is mindig ugyanaz.

Fordítva: ha egy vector componensei $\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$, stb., akkor ez a vector a (ξ_1, η_1, ζ_1), $\xi_2, \eta_2, \zeta_2), \ldots, (\xi_n, \eta_n, \zeta_n)$ vectorok összege.

VI. Vectorok többszöröse.

Legyen a k egy közönséges realis mennyiség, vagyis csak nagyság és előjel tartozzék hozzája. Szóval, u. n. scalaris legyen.

Az AB vectornak és a k scalarisnak a szorzatán, vagy más szóval az AB vector k-szorosán azt a vectort értjük, amelynek a hossza az AB vector hosszának és a k scalaris számértékének a szorozata, az iránya pedig, aszerint, amint a k positivus vagy negativus, egyező vagy ellenkező az AB vector irányával.

A szorzat meghatározását szorzásnak, az AB vectort szorzandónak, a k scalarist szorzónak nevezzük. Képletileg a szorzást is az algebrában szokásos módon követeljük; így, ha AB és k szorzata AB':

$$k \,.\, \mathrm{AB} = \mathrm{AB} \,.\, k = \mathrm{AB}'.$$

Ha a szorzandó vector hossza r, és iránycosinusai α, β, γ, úgy a definitio értelmében a szorzati vector hossza $|k|\,r$ és iránycosinusai, aszerint, amint a k positivus vagy negativus, α, β, γ, vagy $-\alpha, -\beta, -\gamma$.

A szorzat componensei a szorzandó vector componenseinek k-szorosai. Legyenek ugyanis a szorzandó vector componensei ξ, η, ζ. Akkor

$$r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2},$$

tehát a szorzati vector hossza

$$r' = |\,k\,|\,r = \sqrt{(k\xi)^2 + (k\eta)^2 + (k\zeta)^2}.$$

Iránycosinusai pedig, ha k positivus,

$$\alpha' = \alpha = \xi : \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2} = k\xi : r' \text{ stb.}$$

ha k negativus,

$$\alpha' = -\alpha = -\xi : \sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2} = k\xi : r', \text{ stb.}$$

Következőleg a szorzat componensei

$$\xi' = r'\alpha' = k\xi, \qquad \eta' = r'\beta' = k\eta, \qquad \zeta' = r'\gamma' = k\zeta$$

úgy az egyik, mint a másik esetben. Mindkét esetben

$$(\xi, \eta, \zeta).k = (k\xi, k\eta, k\zeta).$$

Fordítva, hogyha egy vector componensei $k\xi$, $k\eta$, $k\zeta$, akkor ez a vector a (ξ, η, ζ) vectornak és a k scalarisnak a szorzata.

Egy vectornak az $(1 : k)$-szorosát a vector k-ad részének is mondjuk. Meghatározását a vector k-val való osztásának is nevezzük s élünk az összes megfelelő algebrai szólás- és írás-módokkal. Igy AB vectornak, mint osztandónak, és k scalarisnak, mint osztónak, a hányadosa

$$\mathrm{AB} : k = \frac{\mathrm{AB}}{k} = \mathrm{AB} \, . \, \frac{1}{k} \, .$$

Ezek szerint

$$(\xi, \eta, \zeta) : k = \frac{(\xi, \eta, \zeta)}{k} = \left(\frac{\xi}{k}, \frac{\eta}{k}, \frac{\zeta}{k}\right),$$

s a hányados vector hossza az osztandó vector hosszának osztata az osztó scalarisnak a számértékével, iránya pedig aszerint, amint az osztó positivus vagy negativus, egyező vagy ellenkező az osztandó vector irányával.

Egy összeg k-szorosa az egyes összeadandók k-szorosának az összege. Mert, ha a (ξ, η, ζ) vector a (ξ_1, η_1, ζ_1), (ξ_2, η_2, ζ_2), stb. vectorok összege, úgy

$$(k\,\xi, k\,\eta, k\,\zeta) = (k\,\xi_1 + k\,\xi_2 + \ldots,\ k\,\eta_1 + k\,\eta_2 + \ldots,\ k\,\zeta_1 + k\,\zeta_2 + \ldots) =$$
$$(k\,\xi_1, k\,\eta_1, k\,\zeta_1) + (k\,\xi_2 + k\,\eta_2 + k\,\zeta_2) + \ldots$$

Hasonlókép, egy összeg k-ad része az egyes összeadandók k-ad részének az összege, mert ez a szorzatos egyenlőség akkor is helyes lesz, ha abban k helyett $1 : k$ íratik: vectornak scalarissal való szorzása és osztása distributivus művelet.

VII. Vectorok szöge.

Két vectornak a szögén azt a homorú szöget értjük, amely alatt egyik vector iránya a másikéba fordítható.

Minthogy a vectorok meghatározzák ezt a szöget, kifejezhető az a vector-határozókkal; sőt, mivel már a két vector iránya meghatározza ezt a szöget, kifejezhető az a vectorok irány-határozóival, milyenek az irány-cosinusok.

Jelölje θ két vectornak a szögét. Az egyik vector elejét helyezzük a másiknak a végébe, mint összeadáskor. Most AB és BC legyenek a vectorok. AC azoknak az összege. Hossszúságukat rendre jelöljék r_1, r_2, r. A három vector egy három-szöget alkot, amelynek a B csúcsnál lévő szöge $\pi-\theta$. Eszerint

$$r^2=r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos(\pi-\theta)$$

De, ha a vectorok componensei rendre ξ_1, η_1, ζ_1 és ξ_2, η_2, ζ_2 és ξ, η, ζ, úgy

$$r_1^2=\xi_1^2+\eta_1^2+\zeta_1^2, \quad r_2^2=\xi_2^2+\eta_2^2+\zeta_2^2, \quad r^2=\xi^2+\eta^2+\zeta^2$$

Beírván ezeket az egyenletbe és tekintetbe vévén, hogy $\cos\pi\ \ \theta=-\cos\theta$, meg, hogy $\xi=\xi_1+\xi_2$, stb. találjuk:

$$r_1r_2\cos\theta=\xi_1\xi_2+\eta_1\eta_2+\zeta_1\zeta_2$$

És, ha a két vector iránycosinusai $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ illetőleg $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$, úgy amiatt, hogy $\xi_1=r_1\alpha_1$, $\xi_2=r_2\alpha_2$, stb.:

$$\cos\theta=\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2.$$

A vector-szög e cosinusos kifejezésének van a leggyakoribb alkalmazása. Nem ritkán hasznos azonban egy sinusos kifejezése is. Világos, hogy

$$\sin^2\theta=1-(\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2)^2.$$

Irjuk itt a jobb oldal első tagja helyett

$$(\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2)(\alpha_2^2+\beta_2^2+\gamma_2^2),$$

azután végezzük el a követelt szorzást és hatványozást. Az eredményen azonnal fölismerhető, hogy

$$\sin^2\theta=(\beta_1\gamma_2-\gamma_1\beta_2)^2+(\gamma_1\alpha_2-\alpha_1\gamma_2)^2+(\alpha_1\beta_2-\beta_1\alpha_2)^2.$$

Mivel $0\leqq\theta\leqq\pi$, így a $\sin\theta$ mindig positivus.

Ha a két vector merőleges egymásra, akkor $\theta=\pi:2$, tehát

$$\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2=0.$$

Viszont, ha áll ez az egyenlet, akkor, a két vector merőleges egymásra, mert $\theta=\pi:2$. Szorozzuk meg az egyenletet r_1-el. Azután szorozzuk még meg r_2-vel is. Nyomban látjuk, hogy a merőlegesség szükséges és elégséges föltétele külön-külön a következő két egyenlet is:

$$\xi_1\alpha_2+\eta_1\beta_2+\zeta_1\gamma_2=0.$$
$$\xi_1\xi_2+\eta_1\eta_2+\zeta_1\zeta_2=0.—$$

Ha $\theta=\pi:2$, akkor $\sin\theta=1$ és viszont. Következőleg nem külömben szükséges és elégséges föltétele a merőlegességnek ez az egyenlet:

$$(\beta_1\gamma_2-\gamma_1\beta_2)^2+(\gamma_1\alpha_2-\alpha_1\gamma_2)^2+(\alpha_1\beta_2-\beta_1\alpha_2)^2=1. \text{ —}$$

Sokszor czélszerű bizonyos parameteres alakokban használni ezeket az egyenleteket. Induljunk ki ebből:

$$\xi_1\xi_2+\eta_1\eta_2+\zeta_1\zeta_2=0.$$

Ha egy vector tényleg létezik, úgy legalább egy componense nem zérus. Legyen, hogy ζ_1 nem zérus. Akkor kétségtelenűl meghatározhatók úgy az l és m scalarisok, hogy

$$\xi_2=m\zeta_1-n\eta_1, \qquad \eta_2=n\xi_1-l\zeta_1$$

legyen, bármi értékű scalaris az n. De behelyettezvén ezeket az egyenletbe, azt találjuk, hogy, mivel a ζ_1 nem zérus,

$$\zeta_2=l\eta_1-m\xi_1.$$

Világos, hogy nem külömben következnek ily kifejezések abban a bizonyosságban, hogy η_1, vagy, hogy ξ_1 nem zérus, és a három paraméter közűl az egyik mindig tetszőleges. Ez a három kifejezés is szükséges és elégséges föltétele a merőlegességnek; szükséges föltétele, mert szükségképen következtek abból az egyenletből, amelyből kiindúltunk; elégséges föltétele, mert viszont belőlük az az egyenlet következik. A megfelelő alakokhoz jutunk az irány-cosinusok számára, ha ezeket az alakokat r_2-vel elosztjuk. Irván pedig

$$\frac{r_1}{r_2}l=a, \qquad \frac{r_1}{r_2}m=b, \qquad \frac{r_1}{r_2}n=c,$$

az iránycosinusok parameteres vonatkozásai a föltételezett merőlegességben ezek:

$$\alpha_2=b\gamma_1-c\beta_1, \qquad \beta_2=c\alpha_1-a\gamma_1, \qquad \gamma_2=a\beta_1-b\alpha_1.$$

Ha a két vector egyező irányú, akkor $\cos\theta=1$, tehát

$$\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2=1.$$

Viszont, ha áll ez az egyenlet, akkor a két vector egyező irányú, mert akkor $\cos\theta=1$, tehát $\theta=0$. Tényileg, ha ennek az egyenletnek a jobb-oldala helyett az

$$\alpha_1{}^2+\beta_1{}^2+\gamma_1{}^2+\alpha_2{}^2+\beta_2{}^2+\gamma_2{}^2$$

kifejezés felét írjuk, azonnal láthatjuk, hogy

$$(\alpha_1-\alpha_2)^2+(\beta_1-\beta_2)^2+(\gamma_1-\gamma_2)^2=0 \text{ tehát } \alpha_1=\alpha_2, \ \beta_1=\beta_2, \ \gamma_1=\gamma_2.$$

VIII. Vectorok tengelye.

Egy vector kezdő pontján a vectorra merőleges tengelyt a vector tengelyének nevezzük. Ha a vector iránycosinusai α', β', γ' úgy valamennyi tengelyének az iránycosinusai bent foglaltatnak a következő alakokban:

$$\alpha=b\gamma'-c\beta', \qquad \beta=c\alpha'-a\gamma', \qquad \gamma=a\beta'-b\alpha',$$

mint az épen elébb nyert kifejezések tanusítják; mert a vector bármely tengelyéhez tartoznak olyan a, b, c értékek, hogy α, β, γ a tengely iránycosinusai.

Két vector tengelyéről is beszélünk. Elejüket egy pontba helyezvén, közös tengelyeiket nevezzük így. Ha sem nem egyező, sem nem ellenkező a vectorok iránya, akkor csak egy tengelyvonaluk, azaz csak két tengelyük van, amelyek egymás ellentétesei. De a következő megkülömböztetéssel élünk: AB és AC vector tengelyén azt értjük, amely körűl az AC vector iránya positivus fordulással jut az AB vector irányába a két vector szöge alatt; AC és AB vector tengelyén az ellentétes tengelyt értjük. Ugyanebben az értelemben beszélünk két iránynak a tengelyéről.

Világos, hogy a tengely-irányt meghatározza a két vector iránya, tehát meghatározzák a két vector irány-cosinusai. Az AC és AB vector tengelyének az iránycosinusai legyenek α, β, γ, az AC és AB vector iránycosinusai pedig α_2, β_2, γ_2, illetőleg α_1, β_1, γ_1. Az α, β, γ cosinusok egyenletei ezek:

$$\begin{gathered}\alpha\alpha_1+\beta\beta_1+\gamma\gamma_1=0,\\ \alpha\alpha_2+\beta\beta_2+\gamma\gamma_2=0,\\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1.\end{gathered}$$

A két elsőből

$$\alpha:\beta:\gamma=(\beta_1\gamma_2-\gamma_1\beta_2):(\gamma_1\alpha_2-\alpha_1\gamma_2):(\alpha_1\beta_3-\beta_1\alpha_2),$$

tehát létezik olyan scalaris, λ, hogy

$$\begin{gathered}\alpha=(\beta_1\gamma_2-\gamma_1\beta_2):\lambda,\\ \beta=(\gamma_1\alpha_2-\alpha_1\gamma_2):\lambda,\\ \gamma=(\alpha_1\beta_3-\beta_1\alpha_2):\lambda.\end{gathered}$$

Most már a hátra lévő egyenletből

$$\lambda^2=(\beta_1\gamma_2-\gamma_1\beta_2)^2+(\gamma_1\alpha_2-\alpha_1\gamma_2)^2+(\alpha_1\beta_2-\beta_1\alpha_2)^2,$$

tehát, ha a két vector szöge θ, úgy a λ divisor számértéke $\sin\theta$. Előjelének a megállapitása végett czélszerű egy másik helyhatározó rendszerhez is folyamodni. Az origója legyen az A pontban és a tengelyei eleve egyirányúak legyenek a régi tengelyekkel. Ekkor az új rendszerben ugyanazok az összes irány-cosinusok, mint a régiben, következőleg a λ is ugyanaz, nemcsak számértékre, de előjelre nézve is. Azonban forgassuk el az új tengelyrendszert az A pont körűl úgy, hogy az ő z tengelyének az iránya a vectorok tengelyének az irányába essék, y tengelyének az iránya pedig az AC vector irányába essék. Most az új rendszerben $\alpha=0$, $\beta=0$, $\gamma=1$, $\alpha_2=0$, $\beta_2=1$, $\gamma_2=0$, és az AB vector iránya szükségképen hegyes szöget képez az x tengely irányával. Továbbá, mivel a fordítás alatt az irány-cosinusok mind folytonosan változtak, a θ szög pedig változatlan maradt, így az λ divisor előjele szükségképen változatlan maradt, nem csaphatott át egyszer sem egyik féleségből a másikba. De a γ irány-cosinus egyenletéből folyólag az új rendszerben, ennek új helyzetében

$$1=(\alpha_1.1-\beta_1.0):\lambda=\frac{\alpha_1}{\lambda}$$

Minthogy az AB vector iránya az új x tengely irányával jelenleg hegyes szöget képez, így az α_1 positivus, tehát λ is positivus, $\lambda=+\sin\theta$. Szükségképen ugyanaz lévén a λ, a mi eredetileg volt, az eredeti rendszerben is positivus előjellel illeti meg a $\sin\theta$ érték: a (ξ_2, η_2, ζ_2) és (ξ_1, η_1, ζ_1) vector tengélyének az irány-cosinusait

$$\alpha=\frac{\beta_1\gamma_2-\gamma_1\beta_2}{\sin\theta}\quad \beta=\frac{\gamma_1\alpha_2-\alpha_1\gamma_2}{\sin\theta}\quad \gamma=\frac{\alpha_1\beta_2-\beta_1\alpha_2}{\sin\theta}$$

kifejezések határozzák meg, a melyekben θ a két vector szöge.

Ha merőleges egymásra a két vector, úgy

$$\alpha=\beta_1\gamma_2-\gamma_1\beta_2,\quad \beta=\gamma_1\alpha_2-\alpha_1\gamma_2,\quad \gamma=\alpha_1\beta_2-\beta_1\alpha_2.$$

Az AB és AC vector tengelyének az irány-cosinusai nyilvánképen

$$\frac{\beta_2\gamma_1-\gamma_2\beta_1}{\sin\theta}\quad \frac{\gamma_2\alpha_1-\alpha_2\gamma_1}{\sin\theta}\quad \frac{\alpha_2\beta_1-\beta_2\alpha_1}{\sin\theta}$$

és, ha merőlegesek egymásra, úgy

$$\beta_2\gamma_1-\gamma_2\beta_1,\quad \gamma_2\alpha_1-\alpha_2\gamma_1,\quad \alpha_2\beta_1-\beta_2\alpha_1.$$

IX. Vectorok értékei

Egy vector hosszának az értékét a vector nagyságának vagy absolutus értékének is nevezzük; s ebben az értelemben beszélünk kisebb és nagyobb vectorokról.

Egy vector értéke alatt, így pusztán, minden jelző nélkül mondva, a vector nagyságának és irányának együttesét értjük. Ehhez képest egyenlő vectorok egyenlő értékűek, nem egyenlő vectorok külömböző értékűek.

Az absolutus vector érték fogalmát, mint specialist, tartalmazza egy igen hasznos relativus érték-fogalom, a mely a vectornak egy tengelyhez, vagy általánosabban egy irányhoz bizonyos módon megszabott viszonyát jellemzi. — Legyen adva egy tengely I. AB vector elejének a merőleges vetülete ezen az I tengelyen legyen A', végének a merőleges vetűlete B′. Az $A'B'$ vector iránya vagy egyező, vagy ellenkező az I tengely irányával. A szerint, a mint egyező, vagy ellenkező, az $A'B'$ vector nagyságát positivus, vagy negativus előjellel az AB vector I tengelyen számított, vagy I tengelyre tartozó értékének nevezzük.

Jelölje ι. Ha az AB vector nagysága r, és ha e vector iránya, meg a tengely iránya ϖ szöget képez, úgy

$$\iota = r\cos\varpi,$$

akár egyezik, akár ellenkezik az $A'B'$ vetületi vector iránya az I tengely irányával. Abban a különös esetben, hogy az I tengely iránya magának az AB vectornak az irányával egyezik, $\varpi = 0$, tehát $\iota = \mathrm{r}$, vagyis ebben a különös esetben a vectornak az I tengelyen számított értéke összeesik az ő absolutus értékével.

Ha a vector irány-cossinusai α, β, γ; akkor a coordinata-tengelyekre tartozó értékei rendre $r\alpha$, $r\beta$, $r\gamma$, azaz a componensei. Ezért, bármely tengelyre tartozó értékét e tengelyre tartozó componensének is nevezzük.

Legyenek az I tengely irány-cosinusai l, m, n. Akkor

$$\cos\varpi = \alpha l + \beta m + \gamma n,$$

tehát a vector I tengelyen számított értéke, I tengelyre tartozó componense

$$\iota = r.(\alpha l + \beta m + \gamma n).$$

Nem különben, ha ξ, η, ζ a vectornak a coordinata-tengelyekre tartozó componensei:

$$\iota = \xi l + \eta m + \zeta n.$$

Világos, hogy a vectorok egyező irányú tengelyeken számított értékei egyenlők.

A természet-tanban az összes alapvető fogalmak mennyiségi tartalmát vagy egy scalaris, vagy egy számérték és egy irány tölti ki. Magától szembeötlik, hogy az utóbbi esetben a fogalom mennyiségi foglalata vectorral ábrázolható. Csakhogy a vector-képben a hosszuság számértéke helyett esetenkint más és más határozmány számértéke gondolandó, mint pld. egy pont „sebességének“, „gyorsulásának“, a

„szögsebességnek", „szöggyorsulásnak", az „erőnek", a „forgató hatásnak", az „elektromos-" és a „mágneses momentumnak", a „tömegáramlásnak", az „elektromos-áramlásnak" stb. fogalmában. Mégis a „vector" nevet általánosabban mindazokra a fogalmakra alkalmazzuk, amelyek mennyiségi alkotó részét egy számérték és egy irány képezi. Ebben az általánosabb értelemben gondolva a „vector" szót: amelyek egyenlő mennyiségi tartalom mellett is különböznek, azokat külömböző dimensiójúaknak vagy jellegüeknek mondjuk és mennyiségi határozóikat rendszerint föltűnően külömböző betű-jegyekkel jelöljük, milyenek pld., mint componensek jelvényei, ξ, η, ζ; f, g, h; u, v, w; X, Y, Z; F, G, H; U, V, W; stb. Külömböző jellegü vectorok határozóinak a megkülömböztetésére alsó indexek használatához nem szoktunk folyamodni; alsó indexekkel közönségesen csak egy jellegü vectorok határozóit külömböztetjük meg. A mennyiben külömböző jellegű vectorok határozóit is indexekkel akarjuk megkülömböztetni, rendszerint felső indexeket használunk, pld. ha (ξ, η, ζ) egy pont u. n. elmozdulása, u. n sebességének a jelölésére $(\dot\xi, \dot\eta, \dot\zeta)$ u. n. gyorsulásának a jelölésére $(\ddot\xi, \ddot\eta, \ddot\zeta)$ alakot vezetünk be stb.

X. Vector-határozók átszámítása.

Egy coordinata rendszerben egy vector meghatározására szolgáló componensek legyenek ξ, η, ζ. Egy más coordinata rendszerben ugyanazt a vectort ξ', η', ζ' határozzák meg, mint compononsek. Nem egyebek ezek, mint a vectornak a coordinata-tengelyeken számított értékei. Amazok az első, emezek a második rendszer tengelyein számított vector-értékek. Ha tehát az első rendszerben a második rendszer tengelyeinek az irány-cosinusai rendre $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ és $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ és $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$, úgy

$$\begin{aligned}\xi' &= \alpha_1\xi+\beta_1\eta+\gamma_1\zeta,\\ \eta' &= \alpha_2\xi+\beta_2\eta+\gamma_2\zeta,\\ \zeta' &= \alpha_3\xi+\beta_3\gamma+\gamma_3\zeta.\end{aligned}$$

A második rendszerben az első rendszer tengelyeinek az iránycosinusai rendre α_1, α_2, α_3 és β_1, β_2, β_3 és γ_1, γ_2, γ_3, tehát egyszersmind

$$\begin{aligned}\xi &= \alpha_1\xi'+\alpha_2\eta'+\alpha_3\zeta',\\ \eta &= \beta_1\xi'+\beta_2\eta'+\beta_3\zeta'.\\ \zeta &= \gamma_1\xi'+\gamma_2\eta'+\gamma_3\zeta'.\end{aligned}$$

Tényileg, ha a három első egyenletet sorban α_1, α_2, α_3 cosinusokkal szorozva összeadjuk, azután ugyanazokat az egyenleteket sorban β_1, β_2, β_3 cosinusokkal szorozva adjuk össze, azután ugyanazokat az egyenleteket sorban γ_1, γ_2, γ_3 cosinusokkal szorozva adjuk össze, a második egyenletcsoportot kapjuk, mert amiatt, hogy ezek a szorzók egy-egy iránynak az iránycosinusai a második rendszerben:

$$\alpha_1{}^2+\alpha_2{}^2+\alpha_3{}^2=1,$$
$$\beta_1{}^2+\beta_2{}^2+\beta_3{}^2=1,$$
$$\gamma_1{}^2+\gamma_2{}^2+\gamma_3{}^2=1,$$

és amiatt, hogy három egymásra merőleges iránynak az iránycosinusai,

$$\beta_1\gamma_1+\beta_2\gamma_2+\beta_3\gamma_3=0,$$
$$\gamma_1\alpha_1+\gamma_2\alpha_2+\gamma_3\alpha_3=0,$$
$$\alpha_1\gamma_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3=0.$$

Nem külömben, ha a második három egyenletet sorban α_1, β_1, γ_1 cosinusokkal szorozva adjuk össze, azután ugyanazokat az α_2, β_2, γ_2 cosinusokkal szorozva adjuk össze, azután ugyanazokat α_3, β_3, γ_3 cosinusokkal szorozva összeadjuk, az első egyenlet-csoportot kapjuk, mert amiatt, hogy ezek a szorzók egy-egy iránynak az iránycosinusai az első rendszerben:

$$\alpha_1{}^2+\beta_1{}^2+\gamma_1{}^2=1,$$
$$\alpha_2{}^2+\beta_2{}^2+\gamma_2{}^2=1,$$
$$\alpha_3{}^2+\beta_3{}^2+\gamma_3{}^3=1,$$

és amiatt, hogy három egymásra merőleges iránynak az iránycosinusai,

$$\alpha_2\alpha_3+\beta_2\beta_3+\gamma_2\gamma_3=0,$$
$$\alpha_3\alpha_1+\beta_3\beta_1+\gamma_3\gamma_1=0,$$
$$\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2=0.$$

Az első rendszerben számított (ξ, η, ζ) vector és a másodikban számított (ξ', η', ζ') vector nagysága egyenlő, mert a kettő ugyanaz a vector. Tényileg, ha a

$$\xi^2+\eta^2+\zeta^2$$

kifejezésben a második egyenlet-csoportból a jobb oldalakat írjuk, vagy, ha a

$$\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2$$

kifejezésben az első egyenlet-csoportból a jobb oldalokat írjuk, úgy az iránycosinusok relatiói alapján azonnal fölismerhetjük, hogy a két kifejezés egyenlő.

A vectornak a két rendszerbe tartozó iránycosinusai azonban általában mind külömbözők és csak akkor egyenlők mind, mikor a két rendszer megfelelő tengelyei egyező irányúak. Ez az iránycosinusok fogalma alapján közbötlenűl belátható. Még pedig, ha a vector iránycosinusai az első rendszeren α, β, γ, a másodikban α', β', γ', akkor

$$\alpha'=\alpha_1\alpha+\beta_1\beta+\gamma_1\gamma, \text{ stb.}$$
$$\alpha=\alpha_1\alpha'+\alpha_2\beta'+\alpha_3\gamma' \text{ stb.}$$

Készen kerűlnek elő ezek az egyenletek a componens-egyenletekből a a vector nagyságával végzett osztás által, vagy az előbbi cikkben cos $\bar{\omega}$ számára jegyzett kifejezésből az l, m, n iránycosinusok megfelelő helyettesítése által.

Fordítva, ha egy vector componensei az első rendszerben ξ, η, ζ, a másodikban ξ_0, η_0, ζ_0, és, ha

$$\xi_0 = \alpha_1\xi + \beta_1\eta + \gamma_1\zeta, \text{ stb.},$$

akkor a két vector egyenlő, mert

$$\xi_0 = \xi', \qquad \eta_0 = \eta', \qquad \zeta_0 = \zeta'.$$

Ha egy vector iránycosinusai az első rendszerben α, β,, γ, a másodikban α_0, β_0, γ_0 és, ha

$$\alpha_0 = \alpha_1\alpha + \beta_1\beta + \gamma_1\gamma, \text{ stb.},$$

akkor a két vector iránya egyezik, mert

$$\alpha_0 = \alpha' \qquad \beta_0 = \beta', \qquad \gamma_0 = \gamma'.$$

Miután egy vector componenseit át tudjuk számítani egy másik coordinata-rendszerbe, könnyű szerrel megformulázhatjuk egy pont coordinatáinak az átszámítását is. Egy pont coordinatái a pont origoi vectorának a componensei. Jelölje az első rendszer origóját O, a második rendszerét O', a pontot P. A pont két origoi vectora OP és $O'P$ a következő viszonyban vannak: az $O'P$ vector az OP vectornak és az OO' vectornak a külömbsége:

$$\mathrm{O'P} = \mathrm{OP} - \mathrm{OO'}.$$

A P pont coordinatái az első rendszerben legyenek x, y, z. Akkor x, y, z az OP vector componensei az első rendszerben, tehát $x\alpha_1 + y\beta_1 + z\gamma_1$ stb. a másodikban. Az O' pont coordinátái az első rendszerben legyenek a, b, c. Akkor a, b, c az OO' vector componensei az első rendszerben, tehát $a\alpha_1 + b\beta_1 + c\gamma_1$ a másodikban. A P pont coordinatái a második rendszerben legyenek x', y' z'. Ezek az $O'P$ vector componensei a második rendszerben. Igy

$$(x', y', z') = (x\alpha_1 + y\beta_1 + z\gamma_1, \ldots) - (a\alpha_1 + b\beta_1 + c\gamma_1, \ldots).$$

Minthogy ez egyenletben mindhárom vector componensei ugyanabba a rendszerbe tartoznak, t. i. a másodikba, ennélfogva

$$\begin{aligned} x' &= (x-a)\alpha_1 + (y-b)\beta_1 + (z-c)\gamma_1, \\ y' &= (x-a)\alpha_2 + (y-b)\beta_2 + (z-c)\gamma_2, \\ z' &= (x-a)\alpha_3 + (y-b)\beta_3 + (z-c)\gamma_3. \end{aligned}$$

Legyen még fölemlítve, hogy, ismervén azt az összefüggést, amely két derékszögű vector iránycosinusai és bármelyik tengelyük iránycosinusai közt létezik, ismerjük azt az összefüggést is, amely három, egymásra merőleges tengely iránycosinusai közt létezik; úgy, hogy egyenesen fölírhatjuk azokat a relatiókat, amelyek egy coordinata-rendszer három tengelyének egy másik rendszerbe tartozó iránycosinusai közt fenállanak. Ha $O'B$ vector egyező irányú az O' rendszer második tengelyével, és $O'C$ vector egyező irányú az O' rendszer harmadik tengelyével, akkor az O' rendszer első tengelye az $O'C$ és $O'B$ vector tengelye, föltévén t. i., hogy ez is jobbra forduló rendszer, tehát

$$\alpha_1=\beta_2\gamma_3-\gamma_2\beta_3,\quad \beta_1=\gamma_2\alpha_3-\alpha_2\gamma_3,\quad \gamma_1=\alpha_2\gamma_3-\gamma_2\alpha_3.$$

Hasonló módon találhatjuk, hogy

$$\alpha_2=\beta_3\gamma_1-\gamma_3\beta_1,\quad \beta_2=\gamma_3\alpha_1-\alpha_3\gamma_1,\quad \gamma_2=\alpha_3\beta_1-\beta_3\alpha_1,$$
$$\alpha_3=\beta_1\gamma_2-\gamma_1\beta_2,\quad \beta_3=\gamma_1\alpha_2-\alpha_1\gamma_2,\quad \gamma_3=\alpha_1\beta_2-\beta_1\alpha_2.$$

XI. Vectorok változása.

Mindig a ma általánosan szokott értelemben fogom azt mondani egy scalarisról, hogy más scalarisokkal folytonosan változik, avagy hogy folytonos függvényük, t. i. a CAUCHYtól, illetőleg BOLZANOtól definiált értelemben. Ha tehát f scalarisról azt mondom, hogy $u, v, \ldots$ scalarisokkal ezek $u_0, v_0, \ldots$ értékénél folytonosan változik, állításomat úgy értem, hogy először mihelyt $u-u_0$, $v-v_0, \ldots$ számértéke bizonyos positivus számnál kisebb, már $f(u, v, \ldots)$ teljesen meghatározott értékkel bír; másodszor pedig bármi kis positivus számot jelentsen λ, létezik akkora positivus szám, ν, hogy mihelyt $u-u_0$, $v-v_0, \ldots$ számértékre kisebbek, mint ν, már a

$$f(u, v, \ldots)-f(u_0, v_0, \ldots)$$

külömbség számértéke kisebb, mint λ.

De nem ritkán előfordúl, hogy egy függvénynek bizonyos föltételekhez kötött folytonosságát kell csak szem előtt tartanunk. Ennek a definitiója abban külömbözik az előbbitől, hogy bizonyos egyenlőtlenségi vagy egyenlőségi relatiók kielégítését követeli az $u, v, \ldots$ változóktól.

A physikában különös jelentőséggel bir az időtől és helytől való függés. Az időtartamot attól az időponttól kezdve szoktuk számitani, amelytől kezdve valamely természeti folyamatot vizsgálat tárgyává teszünk. Ha ettől az időponttól egy tetszés szerinti későbbi időpontig t mekkoraságú idő mult el, úgy az időtől való függést a t mennyiségtől való függés képezi. Egy vagy több pont coordinatáitól való függés teszi a helytől való függést.

A zérus-vector fogalma lehetővé teszi, hogy bármely physikai tárgyalásban minden időpont számára ugyanannyi vectort vegyünk tekintetbe, még pedig olyképen, hogy jelleg szerint is minden időpontban ugyanannyi vectorunk legyen.

E mellett czélszerű úgy osztályozni a vectorokat, hogy egyjellegű vectorok, amelyek mindegyike más időpontba tartozik, s amelyek közűl minden időpontra jut egy, egy osztályt alkossanak. Ebben az osztályozásban mindig oly módon járhatunk el, hogy az egy osztályt alkotó vectorok componensei három scalarisnak a folytonos változtatásával, még pedig időrend szerint legyenek előállíthatók. Mindig már előzetesen föltehetjük ennek az előállításnak a lehetőségét, mert föltevésünk soha semmiféle tapasztalással össze nem ütközik, sőt igen hasznos elméleti hypothesist foglal magában.

Legföljebb látszólag ellenkezik a tapasztalással. Ez a látszólagos ellenkezés mindig annak tulajdonítható, hogy egyes igen rövid időtartamokban aránylag igen nagy mértékben kell megváltoztatni a scalarisokat, legalább egyet, hogy a jellemzett előállítás megvalósúlhasson.

Föltevésünk jogos és czélszerű lévén, reá támaszkodva, egyszersmind individualis vectorok képzetét alkotjuk: az egy osztályba sorozott vectorok sokaságát egyetlen vector fogalmába foglaljuk, az idővel folytonosan változó vector fogalmába, amelynek a componenseit t. i. három, az idővel folytonosan változó scalaris képezi.

Ha egy ilyen vector componensei t időpontban — vagyis a t időtartam végén — ξ, η, ζ, úgy a nagysága ebben az időpontban

$$\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2},$$

tehát ez is folytonosan változik az idővel. Ha az irány-cosinusai, α, β, γ és a nagysága r a t időpontban, úgy

$$r\alpha=\xi, \qquad r\beta=\eta, \qquad r\gamma=\zeta.$$

A mig tehát a nagysága nagyobb, mint bármi kis határozott positivus mennyiség, az iránycosinusai is folytonosan változnak az idővel, másképp mondva, az iránya is folytonosan változik az idővel. De amely időpontban a vector nagysága eltünik, és így ξ, η, ζ zérussá válnak, abban az időpontban az iránycosinusok folytonosság-szakadást szenvedhetnek, a vector iránya másba csaphat át, mint amibe a vectornak az eltünése előtt convergált.

Miután, az időbeli folytonosság alapján osztályozván a vectorokat, a vector-egyén fogalmát megalkottuk, most ezeket a vector-egyéneket osztályozzuk. Osztályozásuk egy szükséges módját jelleg szerint való külömbözésük szolgáltatja. De midőn egyjellegű vectoregyének végtelen nagy számmal fordúlnak elő, akkor szükséges ezek analyticus osztályozása is.

Ez az osztályozás mindig hely szerint valóra vezethető vissza és szintén folytonossági hypothesisre támaszkodik, t. i. a helylyel járó folytonosság hypothesisére. Mindig föltehetjük, hogy egyjellegű vectoregyének egy osztályához jutunk, ha három scalarist az időnek és egy, vagy több hely coordinatáinak bizonyos folytonos függvényévé teszünk azzal a rendeléssel, hogy ezek a helyek egyes vonalak, fölületek, tér-részek egy-egy tetszés szerinti pontja lehessenek, midőn aztán a scalarisoknak a vonalok, fölületek, térrészek külömböző pontjaihoz tartozó értékei szolgáltatják egy osztály számára a vector-egyének componenseit, s ilyképen az osztályozás teljesen kimeríthető.

Ez a föltevés ép oly fontos elméleti hypothesist képez, mint az előbbeni. A tapasztalás előtt mutatkozó kivételek ebben is látszólagosaknak tekinthetők. De ennek a követésében már csak külső forma szerint egyénitünk, amennyiben a hely szerint egy osztályba sorozott vector-egyénekről esetleg úgy beszélünk, mint egyetlen vectorról, amely az idővel és a helylyel vagy helyekkel folytonosan változik, ezek folytonos függvénye, amivel azonban nem akarjuk azt mondani, hogy egy időben létező vectorokat egynek tekintünk, s csupán analyticus szempontból beszélünk így, hogy a vectorok egyidejű sokaságának hely szerint gondolt folytonosságát egyszerűbb külső formában tárgyalhassuk. Pld. ebben az értelemben itt hasonló módon következik, mint az elébb az idővel való változáskor, hogy a helylyel vagy helyekkel folytonosan változó vector nagysága is folytonosan változik, s a míg a nagysága zéruson fölűl van, iránya is folytonosan változik a helylyel vagy helyekkel.

Physikai fogalmak, amelyek mennyiségileg scalarisok, szintén követik az idő és hely szerint való folytonosság elvét.

Physikai fogalmak mennyiségi tartalmát képező egyjellegű vectoroknak, valamint scalarisoknak ez a kétféle analyticus osztályozása együtt véve, vagyis a folytonosság elvén idő és egy vagy több hely szerint való osztályozásuk mindig teljes analyticus összefoglalást és szétválasztást képezhet, t. i. összefoglalást az egyes folytonossági osztályokba és szétválást az egyes folytonossági osztályok szerint.

Azonban alakra nézve tényileg nem mindig közbötlen az. Nem ritkán előfordúl, hogy physikai fogalmak mennyiségi tartalmát képező vectorok, vagy scalarisok, illetőleg az előbbiek componensei, közbötlenűl úgy tekintendők, mint más scalarisoknak, más vectorok componenseinek a függvényei, vagy ezeknek és az időnek és egy vagy több helynek a függvényei, s anynyiban tekinthetők mégis csupán az idő és egy, vagy több hely függvényének, amennyiben ezek az utóbbi scalárisok és vectorok az idő és egy vagy több hely függvényei. Egy vector componenseitől vagy bármely határozóitól való függést röviden a vectortól való függésnek mondjuk. Ebben az értelemben scalarisok, vectorok, amelyektől mások függenek, szintén függhetnek scalarisoktól, vectoroktól, amelyek az idő és egy vagy több hely függvényei sít. A függések lefelé követése mindig az időre és egy vagy több helyre szorítkozó függésig juttat.

Legyen fölemlítve itt, hogy ezt a szót: értéktartomány, ugyanabban az értelemben használjuk a vectorokra vonatkozólag, mint a scalarisokra vonatkozólag.

Végre: egy vectornak egy értékből egy másikba változásán nemcsak a változás tényét értjük, hanem így nevezzük a vector új értékének és előbbi értékének a külömbségét is. Hogy mikor értjük a változás tényét, mikor ezt a külömséget, állításaink formájából mindig kitűnik. Mennyiségi értelemben egy vectornak AB értékből AC értékbe változása BC vector; (ξ, η, ζ) értékből (ξ', η', ζ') értékbe változása $(\xi'-\xi, \eta'-\eta, \zeta'-\zeta)$ vector: ha AB vector megváltozása BP, akkor új értéke AP, ha (ξ, η, ζ) vector megváltozása (ξ_1, η_1, ζ_1), akkor új értéke $(\xi+\xi_1, \eta+\eta_1, \zeta+\zeta_1)$. Megfelelő mennyiségi értelmet tulajdonitunk egy scalaris megváltozásának.

XII. Végtelen kis változók.

A physikában nagyon megkönnyíti a tárgyalásokat a végtelen kicsinyek fogalma. Voltaképen két külömböző fogalom ez: a végtelen kis változók és a végtelen kis részek fogalma. Ezúttal az elsőnek oly általános meghatározását fogjuk látni, amely a physikában szoros szükségletet szolgál. A másikról a geometriai integralisok tanában leszen szó.

Legyenek ebben az identitásban:

$$F \equiv \psi + \varphi$$

F, ψ, φ scalarisok vagy vectorok az $u, v, \ldots$ scalaris változók függvényei és folytonosak az $u, v, \ldots$ változók zérus értéke mellett

Tegyük föl, hogy mihelyt $u, v, \ldots$ számértéke kisebb, mint μ, már φ érték-tartománya igen kicsi ψ érték-tartományához képest. Akkor F érték-tartományának a nagysága aránylag igen kicsit külömbözik ψ-ének a nagyságától. Azonban a két érték-tartomány maga általában nem igen kicsit külömbözik egymástól, teljesen egymáson kivűl is fekhetnek, és ha van közös részük, ez általában épen nem megfelelően közös. De ha φ nagyságának felső számhatára igen kicsiny, akkor a két értéktartomány nem csak nagyságra, hanem tartalomra nézve is igen kicsit külömbözik.

Tegyük föl már most, hogy bármi kis számérték legyen ν, létezik akkora számérték, ρ, hogy mihelyt $u, v, \ldots$ fölső számhatára kisebb mint ρ, már φ nagyságának fölső számhatára kisebb, mint ν és a φ értéktartomány kisebb, mint a ψ értéktartománynak a ν-szöröse.

Gyakran beosztható egy F függvény oly módon egy, vagy többféle képen két, ψ és φ, részre, hogy ez a föltétel teljesűl, és ha mennyiségi vonatkozásokban — egyenletekben, egyenlőtlenségekben — az F függvény helyett az egyik vagy másik ψ függvényt használjuk, úgy e föltételből folyólag $u, v, \ldots$ felső számhatára megszabható oly kicsinyre, hogy azok a vonatkozások, valamint a belőlük vonandó következtetések egészen tetszésre meghatározott kicsinél kisebb mértékben térnek el az F függvényhez tartozóktól.

Ilyenkor rendszerint czélszerű is valami okból ez a helyettesítés. Pld. analysisbeli nehézségek elkerűlésére szolgál, termékeny fölfogásokhoz segít el. Vagy az F függvényt nem is ismerjük és nem tudjuk meghatározni, ellenben megfelelő ψ-féle határalakját valami módon föl tudjuk ismerni: Ez esetekben tényileg használatba veszszük.

De egyszersmind az u, v, . . . változóknak csakis arra a rendeltetésre tulajdonítunk fölső számhatárt, hogy az összes előforduló mennyiségi vonatkozásokat bármi tetszésre megszabható kicsinynél kisebb eltéréssel elégítsék ki. Ebben a kikötésben már végtelen kicsinyeknek nevezzük az u, v, . . . változókat.

Ha a végtelen kis változók más változók megváltozásai, akkor differentialéknak, az illető változók differentialéinak nevezzük azokat. Definitiójukból folyólag a differentialis számítás szabályai alá esnek.

Ha egy vector componensei végtelen kis változók, akkor a vector nagysága is végtelen kis változó, s a vectort végtelen kis vectornak mondjuk.

Az a vector, a melynek a componensei egy más vector componenseinek a differentialéi, ennek a vectornak a megváltozása, tehát e vector végtelen kis megváltozásának, vagy differentialéjának nevezzük.

A „végtelen kis“ jelző helyett egyszerűség kedveért közönségesen az „elemi“ jelzőt használjuk a leírt értelemben.

Mellesleg tegyük azt az észrevételt, hogy midőn az F, φ, ψ függvények vectorok és nagyság tekintetében határföltételünknek eleget tesznek, csupán e végből nem szükségképen való, hogy mindhárom componensük eleget tegyen határföltételünknek, és pedig egy vagy két componensük az értéktartományok terjedelmi viszonyát illetőleg ellent is mondhat annak.

Legyenek ugyanis az F, ψ, φ vectorok componensei rendre

$$F_1,\ F_2,\ F_3,$$
$$\psi_1,\ \psi_2,\ \psi_3,$$
$$\varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3.$$

Minthogy

$$F \equiv \psi + \varphi$$

ennél fogva

$$F_1 \equiv \psi_1 + \varphi_1,$$
$$F_2 \equiv \psi_2 + \varphi_2,$$
$$F_3 \equiv \psi_3 + \varphi_3.$$

Ha meg is engedjük, hogy ez identitasokban egy vagy két φ-componens csak a fölső számhatárra nézve teljesíti határ-föltételünket, azért a vectorok nagyság tekintetében mégis egészen teljesíthetik. A vectorok identitasában, t. i.

$$(F_1,\ F_2,\ F_3) \equiv (\psi_1,\ \psi_2,\ \psi_3) + (\varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3)$$

a jobb oldal második tagja nemcsak nagyságának fölső számhatárával felel meg határföltételünknek, de azzal a számaránynyal is megfelelhet neki, amelyben absolutus értéktartományának a terjedelme van az első tagénak a terjedelméhez. Mert még akkor is, midőn két φ-componens ellenkezik határ-föltételünkkel értéktartomány tekintetében, a φ-vector nagyságának, t. i. a

$$\sqrt{\varphi_1{}^2+\varphi_2{}^2+\varphi_3{}^2}$$

függvénynek és a ψ vector nagyságának, t. i. a

$$\sqrt{\psi_1{}^2+\psi_2{}^2+\psi_3{}^2}$$

függvénynek az értéktartománya kielégítheti azt terjedelmének a hányadosával a harmadik componens révén.

Legyen még fölemlítve, hogy az F és ψ függvény rendszerint a következő alaki viszonyban van egymáshoz:

$$F \equiv F(\mathrm{u}, \mathrm{u}, \mathrm{v}, \mathrm{v}, \ldots),$$
$$\psi \equiv F(\mathrm{u}, \mathrm{o}, \mathrm{v}, \mathrm{o}, \ldots).$$

XIII. Vectorok elemi megváltozása.

1. Ha egy vector componensei ξ, η, ζ, és ezek elemi megváltozása $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$, úgy a vector elemi megváltozása

$$d(\xi, \eta, \zeta) = (d\xi, d\eta, d\zeta).$$

Jelölje α, β, γ a vector iránycosinusait, r a vector nagyságát. Akkor

$$\xi = r\alpha, \quad \eta = r\beta, \quad \zeta = r\gamma.$$

Ha tehát a vector elemi megváltozásában a vector nagyságának az elemi megváltozása dr és iránycosinusainak az elemi megváltozása $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$, úgy

$$d\xi = \alpha dr + r d\alpha,$$
$$d\zeta = \beta dr + r d\beta,$$
$$d\zeta = \gamma dr + r d\gamma.$$

Eszerint a vector elemi megváltozása ennek a két elemi vectornak az összege:

$$(\alpha dr, \quad \beta dr, \quad \gamma dr),$$
$$(r d\alpha, \quad r d\beta, \quad r d\gamma),$$

amelyek elseje a vector nagyságának, másika a vector irányának a megváltozásából ered: az első független a vector irányváltozásától, a másik független a vector nagyságváltozásától és ha csak a vector nagysága változik meg, akkor csak az első létezik, ha csak a vector iránya változik meg, akkor csak a második létezik. Az elsőt a vector elemi növekedésének, a másodikat a vector elemi elfordulásának nevezzük: egy vector elemi megváltozása elemi növekedésének és elemi elfordulásának az összege. Czélszerű mindkettőt kifejezni a vector határozói és a vector elemi megváltozásának componensei által.

Az elemi növekedés nagysága $\mathrm{d}r$ vagy $-\mathrm{d}r$, aszerint, amint $\mathrm{d}r$ positivus vagy negativus, tehát aszerint, amint a vector nagyobbodott vagy kisebbedett. Ennek a meghatározása végett szorozzuk meg három kifejezésünket rendre α, β, γ iránycosinusokkal, azután adjuk össze őket. Minthogy

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1,$$

s így

$$\alpha \mathrm{d}\alpha+\beta \mathrm{d}\beta+\gamma \mathrm{d}\gamma=0,$$

ennélfogva a következő eredményhez jutunk:

$$\mathrm{d}r=\alpha \mathrm{d}\xi+\beta \mathrm{d}\eta+\gamma \mathrm{d}\zeta,$$

tehát dr a vector elemi megváltozásának a vector irányán számított értéke. Ennek az absolutus értéke az elemi növekedés nagysága. Aszerint pedig, amint positivus vagy negativus, az elemi növekedés iránya egyező vagy ellenkező a vector irányával, iránycosinusai α, β, γ vagy $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$. Componensei ezek:

$$\begin{aligned}\alpha \mathrm{d}r&=(\alpha \mathrm{d}\xi+\beta \mathrm{d}\eta+\gamma \mathrm{d}\zeta)\alpha\\ \beta \mathrm{d}r&=(\alpha \mathrm{d}\xi+\beta \mathrm{d}\eta+\gamma \mathrm{d}\zeta)\beta\\ \gamma \mathrm{d}r&=(\alpha \mathrm{d}\xi+\beta \mathrm{d}\eta+\gamma \mathrm{d}\zeta)\gamma.\end{aligned}$$

Már most egyenesen fölírhatjuk az elemi elfordulás componenseinek a kivánt kifejezéseit is:

$$\begin{aligned}r\mathrm{d}\alpha&=\mathrm{d}\xi-(\alpha \mathrm{d}\xi+\beta \mathrm{b}\eta+\gamma \mathrm{d}\zeta)\alpha,\\ r\mathrm{d}\beta&=\mathrm{d}\eta-(\alpha \mathrm{d}\xi+\beta \mathrm{d}\eta+\gamma \mathrm{d}\zeta)\beta,\\ r\mathrm{d}\gamma&=\mathrm{d}\zeta-(\alpha \mathrm{d}\xi+\beta \mathrm{d}\eta+\zeta \mathrm{d}\zeta)\gamma.\end{aligned}$$

Más hasznos alakokban kapjuk ezeket, ha a három jobb-oldali első tagot megszorozzuk az egység $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ alakjával. Éljünk a következő rövidítésekkel:

$$\begin{aligned}\beta \mathrm{d}\zeta-\gamma \mathrm{d}\eta&\equiv r\mathrm{d}u,\\ \gamma \mathrm{d}\xi-\alpha \mathrm{d}\zeta&\equiv r\mathrm{d}v,\\ \alpha \mathrm{d}\eta-\beta \mathrm{d}\zeta&\equiv r\mathrm{d}w.\end{aligned}$$

Akkor a jelzett alakok a következők:

$$\begin{aligned}r\mathrm{d}\alpha&=\zeta \mathrm{d}v-\eta \mathrm{d}w,\\ r\mathrm{d}\beta&=\xi \mathrm{d}w-\zeta \mathrm{d}u,\\ r\mathrm{d}\gamma&=\eta \mathrm{d}u-\xi \mathrm{d}v.\end{aligned}$$

2. A vector elemi elfordúlásának szögéről és tengelyéről is beszélünk. Szögén az új és a régi vector szögét, tengelyén az új és a régi vector tengelyét értjük. Jelölje a szöget $d\theta$. Ennek a sinusát kifejezi (VII)

$$\sin^2 d\theta = [(\beta+d\beta)\gamma - (\gamma+d\gamma)\beta]^2 + . + .,$$

honnan

$$(d\theta)^2 = (\gamma d\beta - \beta d\gamma)^2 + . + .$$

Beírva ide $d\alpha$ helyett $(d\xi - \alpha dr) : r$ stb., találjuk azt is, hogy

$$(d\theta)^2 = (du)^2 + (dv)^2 + (dw)^2.$$

Az elemi elfordulás tengelyének az iránycosinusai (VII)

$$\frac{(\beta+d\beta)\gamma - (\gamma+d\gamma)\beta}{\sin d\theta}, \text{ stb.}$$

azaz

$$\frac{\gamma d\beta - \beta d\gamma}{d\theta}, \text{ stb.}$$

Ugyanúgy járván el, mint épen az imént, leljük, hogy e tengely iránycosinusai

$$\frac{du}{d\theta}, \quad \frac{dv}{d\theta}, \quad \frac{dw}{d\theta}.$$

A du, dv, dw elemi változóknak egyszerű önálló jelentményük van. A (ξ, η, ζ) vector geometriai képének az elejét tegyük az origóba. Azután végének az x tengelyű vectorát (II) fordítsuk el az x tengely körűl du szög alatt (I), y-tengelyű vectorát az y tengely körűl dv szög alatt, z-tengelyű vectorát a z tengely körűl dw szög alatt. A három elemi elfordulás összege a (ξ, η, ζ) vector elemi elfordulása.

Legyen ugyanis az x tengelyű vector (ξ', η', ζ'). Akkor elemi elfordulásának componensei, megfelelő jelölések szerint ezek:

$$\begin{aligned} r'd\alpha' &= \zeta' dv' - \eta' dw' \\ r'd\beta' &= \xi' dw' - \zeta' du', \\ r'd\gamma' &= \eta' du' - \xi' dv'. \end{aligned}$$

Ennek az elemi elfordulásnak a szöge a föltevés szerint $|du|$ nagyságú és positivus elfordulás tengelyének az iránycosinusai, aszerint, amint du positivus vagy negativus, 1,0,0, vagy —1,0,0. Igy

$$d\theta' = |du|$$

$$\frac{du'}{d\theta'} = \frac{du}{|du|}, \quad \frac{dv'}{d\theta'} = 0, \quad \frac{dw'}{d\theta'} = 0,$$

és következőleg

$$du' = du, \quad dv' = o, \quad dw' = o.$$

Másfelől a $(\xi', \eta' \zeta')$ vectorkép elejének a coordinatái ξ, o, o; végének a coordinatái ξ, η, ζ; tehát a componensei

$$\xi'=o, \quad \eta'=\eta, \quad \zeta'=\zeta.$$

Ezek szerint az x-tengelyű vector elemi elfordulása, ha du szög alatt történik, ezekkel a componensekkel bir:

$$r'd\alpha'=o, \quad r'd\beta'=-\zeta du, \quad r'd\gamma'=\eta du.$$

Hasonlólag találjuk, hogy az y tengelyű vector elemi elfordulása, ha dv szög alatt történik,

$$r''d\alpha''=\zeta dv, \quad r''d\beta''=o, \quad r''d\gamma''=-\xi dv$$

componensekkel bír, és a z-tengelyű vector elemi elfordúlása, ha dw szög alatt történik,

$$r'''d\alpha'''=-\eta dw, \quad r'''d\beta'''=\xi dw, \quad r'''d\gamma=o$$

componensekkel bír. A három elemi elfordulás összegének a componensei tehát:

$$r'd\alpha'+r''d\alpha''+r'''d\alpha'''=\zeta dv-\eta dw=rd\alpha, \text{ stb.}$$

XIV. Vectorok deriváltjai.

Legyen egy vector egy scalaris folytonos függvénye ennek t_1 és t_2 értéke között. E két érték között foglaltassék a scalarisnak a t és $t+h$ értéke és a vector megfelelő értékei legyenek (ξ, η, ζ) és (ξ', η', ζ').

Vegyük tekintetbe a következő hányadost (VI):

$$\frac{(\xi', \eta', \zeta')-(\xi, \eta, \zeta)}{h}=\frac{(\xi'-\xi, \eta'-\eta, \zeta'-\zeta)}{h}.$$

Akár positivus, akár negativus a h, és bármely szabály szerint változtassuk zérus felé, legyen, hogy a hányados szabott határértékbe convergál, amely mindig egy és ugyanaz a vector. Akkor azt mondjuk a vectorról, mint t függvényéről, hogy a t értéknél deriválható, és ezt a határértéket deriváltjának nevezzük.

A hányados így is írható:

$$\left(\frac{\xi'-\xi}{h}, \ \frac{\eta'-\eta}{h}, \ \frac{\zeta'-\zeta}{h}\right).$$

Ennélfogva, ha a vector componensei deriválhatók, a vector is deriválható, s megfordítva, és a vector deriváltja az a vector, amelynek componensei rendre az ő három componensének a deriváltja.

Symbolicus jelölésekben

$$\frac{d(\xi, \eta, \zeta)}{dt} \equiv \frac{(d\xi, d\eta, d\zeta)}{dt} \equiv \left(\frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}, \frac{d\zeta}{dt}\right)$$

a vectornak, mint t függvényének a deriváltja a t értéknél. Amennyiben úgy jelentkezik, mint a vector elemi megváltozásának, differentialéjának, a scalarisével képezett hányadosa, a vector differentialis hányadosának is nevezzük. Ugyanazért differentiálhatónak is mondjuk a vectort egyértelemban deriválhatóságával.

Scaláris függvények magasabb rendű deriváltjainak az analogiájára definiáljuk vectorok magasabb rendű deriváltjait is, valamint ezek jelölési módját: ha a t értéknél deriválható vector deriváltja is deriválható a t értéknél, úgy ennek a deriváltját nevezzük az eredeti vector másodrendű, vagy második deriváltjának sít. és írjuk:

$$\frac{d^2(\xi, \eta, \zeta)}{dt^2} \equiv \frac{d}{dt}\left(\frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}, \frac{d\zeta}{dt}\right) \equiv$$

$$\equiv \left(d\frac{d\xi}{dt}, d\frac{d\eta}{dt}, d\frac{d\zeta}{dt}\right) : dt \equiv \left(\frac{d^2\xi}{dt^2}, \frac{d^2\eta}{dt^2}, \frac{d^2\zeta}{dt^2}\right) \text{ sít.}$$

Midőn több scalarisnak a függvénye egy vector, megfelelő módon definiáljuk és jelöljük partialis deriváltjait a scaláris függvények partialis deriváltjainak hasonlatára. Tekintettel arra, hogy mindig a componensek deriváltjaival van meghatározva, mint componensekkel a derivált vector, könnyű belátni, hogy, ha többféle sorrendben deriválható egy vector bizonyos scalarisok szerint s egyik sorrendben ugyanannyiszor, mint a másikban, mindegyik sorrend ugyanazt a derivált vectort szolgáltatja. Legyenek a scalarisok egy sorrendben $p_1, p_2, \ldots p_n$, úgy, hogy a külömböző számjelű p változók közt azonosok is lehessenek. Ugyanazok a változók más sorrendben $q_1, q_2, \ldots, q_n$. legyenek, és tegyük fel, hogy létezik a

$$\frac{\partial^n(\xi, \eta, \zeta)}{\partial p_n \ldots \partial p_2 \partial p_1} \text{ és a } \frac{\partial^n(\xi, \eta, \zeta)}{\partial q_n \ldots \partial q_2 \partial q_1}$$

derivált. Akkor létezik a componensek két megfelő deriváltja is, és a kettő egyenlő, tehát ez a kettő is egyenlő.

Mivel a derivált componensek a derivált vector componensei, ennélfogva mindazok az algebrai tételek, amelyek megilletik a scalarisok deriváltjait, megilletik a vectorok deriváltjait is, természetesen a vectorokra nézve definiált algebrai műveletek körében. Pld. vectorok összegének a deriváltja s a derivált vectorok összege egyenlő, scalaris és vector szorzatának a deriváltja annyi, mint az az összeg, amelynek tagjai: a vector deriváltjával szorzott scalaris és a scalaris deriváltjával szorzott vector sít. Ugyanaz áll a differentialékról.

Továbbá egy vector, mint függvénynek a függvénye nemkülömben a scalarisok deriválásának alaki szabályait követi. Nevezetesen, ha a p scalaris t scalaris függvénye és mint ilyen deriválható a t értéknél, a (ξ, η, ζ) vector pedig p függvénye és mint ilyen, deriválható annál a p értéknél, amely a t értéknek felel meg, akkor

$$\frac{\mathrm{d}(\zeta, \eta, \zeta)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(\xi, \eta, \zeta)}{\mathrm{d}p} \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t},$$

mert

$$\frac{\mathrm{d}(\xi, \eta, \zeta)}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}t}\right) = \left(\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}p}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}p}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}p}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}\right) =$$

$$= \left(\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}p}, \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}p}, \frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}p}\right) \cdot \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}.$$

Stb. stb.

XV. A hely függvényei.

Azt a scalarist és vectort, amely egy pont coordinatáinak a függvénye, elneveztük a hely függvényének (XI) s azt a scalarist és vectort, amely egy vector componenseinek a függvénye, elneveztük a vector függvényének (XI).

Vectort ponttal és pontot vectorral lehet meghatározni. Vectort czélszerűen határozunk meg ponttal oly módon, hogy a vectorkép kezdetét az origóba, vagy más megszabott ponthelybe teszszük, és bármiként változzék a vector, képének kezdetét ott tartjuk. Ekkor meghatározza a vectort az a pont, amelyben képének a vége vagyon. Pontot czélszerűen határozunk meg oly vectorral, amelynek a képe az origoban, vagy más megszabott ponthelyben kezdődik és a meghatározandó pontban végződik, bármiként változzék is ennek a pontnak a helye.

Ebből folyólag a hely függvényeinek és egy vector függvényeinek a tana közt analyticus tartalomra nézve nincs külömbség. Azonban mégsem csupán tárgyalásuk nyelvében külömböznek, hanem abban is, hogy az alkalmazások végett szerzendő analysisbeli ismeretek között vannak olyanok, amelyek, legalább ma még, csupán a hely függvényeit illetőleg szükségesek. Ezért, de azért is, mert a hely függvényeiről beszélő nyelvkészlet gazdagabb, közbötlenűl a hely függvényeivel foglalkozunk. A róluk szólóknak egy vector függvényére illő értelmezése magától adódik.

Továbbá, ha egy vector a hely függvénye, úgy componensei is a hely függvényei; következőleg elégséges a hely scalaris függvényeinek analyticus tárgyalására szorítkozni.

Bizonyos szólásformákkal élünk, amelyek a fogalmazások hasznos egyszerűsítésére szolgálnak. Ezek jellemzésére elegendők lesznek az itt következő megállapítások.

A függvény értéke, folyonossága, deriválhatósága egy pontban úgy értendő, hogy a pont helyét meghatározó coordinata-értékeknél.

A függvény értékei, értéktartománya egy vonalon, fölűleten, egy térrészben, annyi, mint a vonal, fölűlet, térrész pontjaiba tartozó függvényértékek és ezek tartománya.

A függvény változása egy vonalon, egy fölületen, egy térrészben, a coordinaták oly változására vonatkozik, amelynek folyamán a pont a vonalon, a fölületen, a térrészben tartózkodik. Ehhez képest, ha ki van kötve, hogy csakis egy fölűleten, vagy csakis egy vonalon változhassék a függvény, akkor úgy jelentkezik, mint két, illetőleg egy változónak a függvénye, mert a coordinaták mint két, illetőleg egy változó függvényei fejezhetők ki.

A függvény folytonossága, deriválhatósága egy vonalon, fölületen, egy térrészben, korlátlan folytonossága, deriválhatósága a vonal, fölület, térrész pontjaiban.

A függvény folytonossága, deriválhatósága egy vonalban, fölületben, kizárólag azon a vonalon, fölületen változó függvény folytonosságát, deriválhatóságát jelenti a vonalnak, fölületnek a pontjaiban, mihez képest egy, illetőleg két független változó szerint gondolt korlátlan folytonosság és deriválhatóság az, legalább bizonyos értékhatárok között.

Midőn egy határolt vonal, vagy egy határolt fölület, vagy egy térrész belsejét említjük, akkor a határokat nem számítjuk: vonal határpontját, illetőleg határpontjait, ha több van, fölület határvonalát, illetőleg határvonalait, térrész határ-fölületét, illetőleg határfölületeit állításainkból kizárjuk.

Midőn azt mondjuk egy függvényről, hogy általában folytonos egy vonalon, egy vonalban, egy fölületen, egy fölületben, egy térrészben, azt úgy ért-jük, hogy egyes pontok, illetőleg egyes pontok, vonalok, illetőleg egyes pontok, vonalok, fölületek kivételével folytonos, és mindig ugyanabban az értelemben mondjuk egy függvényről, hogy általában deriválható. Emellett megjegyzendő, hogy egyes pontokon, vonalokon, fölületeken mindig olyanokat gondolunk, amelyek bármely véges térben véges számúak.

XVI. A helytől függés különösségei.

Hasznát veszi a physika a hely oly függvényeinek is, amelyek egyes pontokban nem folytonosak, nem folytonosak egyes vonalok, fölületek egyetlen pontjában sem, egyes határolt vonalak, határolt fölületek belsejének egy pontjában sem folytonosok, és hasznát veszi oly függvényeknek is, amelyek bizonyos vonalok körűl az alább meghatározandó értelemben több értékűek, mely vonalok száma végtelen nagy is lehet, és összeségük folytonos geometriai alakzatokat, fölületeket vagy téreket alkotó vonalsereg is lehet.

Az ily függvények vagy csak segédeszközök physikai fogalmak analyticus meghatározásában; vagy egyenesen ők maguk szolgálnak ugyan physikai fogalmak mennyiségi meghatározására, de nem mint a hely függvényei, hanem, mint coordinaták közbenjárásával az idő függvényei, és e minőségükben alkalmazásuk korlátai között teljesen követik a folytonosság elvét (XI); vagy a következő rendeltetéssel bírnak: Majdnem minden függvény, amely physikai jelentménynyel bír, bizonyos térrészeken körösztűl, amelyek egy, vagy két, vagy három dimensio szerint igen kicsinyek, igen rohamosan változik, jóllehet ezekben is folytonosan változik a helylyel és egyébütt oly függvénynyel azonos, amely ezekben a térrészekben foglalt fölületen, vonalon, pontban nem folytonos, máshol folytonos. Ezeknek a térrészeknek a belsejére nézve az igazi függvények változásáról közönségesen semmi ösmerethez sem tudunk eljutni, vagy csak igen hiányosokra tudunk szert tenni. Ilyenkor az igazi függvények helyett a folytonosság-szakadásos függvényeket használjuk ezekben a térrészekben is, minek megfelelően e térrészek helyett fölületeket, vonalokat, pontokat tartunk számon, mint különös geometriai alakzatokat és helyeket, t. i. a substituált függvények folytonosságát szakító fölületeket, vonalokat, pontokat. Természetesen, azok az analysisbeli eredmények, amelyekhez e függvények alkalmazása elvezet, physikai tekintetben csak az ily fölületeket, vonalokat, pontokat tartalmazó igen kis térrészeken kivűl érvényesek. Mégis hasznos lehet a helyettesítés, mert némely következtetésekben a tárgyalás egyszerűsítésére szolgálhat amiatt, hogy különös térrészek helyett különös fölületeket, vonalokat, pontokat kell csak szem előtt tartanunk.

Physikai alkalmazások szempontjából a folytonosság-szakadás némely fajai kiváló érdekkel bírnak. Ezek jellemzését adják a következő megkülömböztetések:

1. A függvény a változó helyből egy állandó helybe mutató vector iránycosinusainak és a változó hely coordinatáinak mindenütt folytonos függvénye.

2. A változó pontból egy adott vonal legközelebbi pontjába mutató vector iránycosinusainak és a változó pont coordinatáinak mindenütt folytonos függvénye. Általában csak a vonal ponjaiban szakad meg a függvény folytonossága. Ha olyan ez a vonal, hogy bizonyos ponthelyekhez egynél több legközelebbi pontja tartozik, úgy ezek a ponthelyek is folytonosság-szakadás helyei.

3. Egy vagy több fölülettel részekre osztott tér minden egyes osztási részében folytonos a függvény (XV), de aszerint, amint két vagy több térrész közös pontjába az egyik, vagy másik térrész belsejéből érkezik meg a változó ponthely, általában más a függvény értéke a közös pontban, tehát a határfölületeken általában kétféle értékei vannak a függvénynek, az egyik

vagy másik félék aszerint, amint két határos térrész egyikéhez vagy másikához számíttatik a közös határfölület. A függvény ilyetén folytonosság-szakadásának határozott mennyiségi jelentményt is tulajdonítunk és, ha egy határfölület egy pontjában, mint T'tér pontjában a függvény értéke f', mint T''tér pontjában pedig f'', úgy azt mondjuk, hogy abban a pontban a T'térből a T''térbe $f''-f'$ a függvény folytonosság-szakadása, s ha csakis T' és T''tér közös pontja ez a pont, azt is mondjuk, hogy benne a fölület (′) oldaláról (″) oldalára $f''-f'$ a függvény folytonosság-szakadása.

4. Egy pontban, egy vonalnak, egy fölületnek pontjaiban, egy határolt vonalnak, fölületnek belső pontjaiban végtelen nagy a függvény. Ekkor további megkülömböztetés végett vegyük számba a változó ponthelynek attól a ponttól, illetőleg annak a vonalnak, fölületnek a legközelebbi pontjától való távolságát és szorozzuk meg a függvényt a távolság valamely hatványával. Ennek a hatványnak a kitevőjét jelölje n. A függvények egy neménél a ponthoz, illetőleg a vonal, a fölület minden pontjához, a határolt vonal, fölület belsejének minden pontjához rendelhető oly határozott n érték, hogy a szorzat nem végtelen nagy és nem is zérus bennük. Az ilynemű függvény beszédmódunkban algebrai végtelen nagy a pontban, a vonalon, a fölületen, a vonalnak, a fölületnek belsején és részletesebb elnevezéssel annyiad rendű végtelen nagy a külömböző pontokban, ahányadfokú az a hatvány, a melylyel szorozva nem végtelen nagy és nem zérus. Ha nem algebrai a végtelenné válás, úgy transcendensnek nevezzük. Algebrai végtelen esetében ezt a további megkülömböztetést tesszük: az a hatványos szorzat, a mely nem végtelen nagy és nem is zérus a különös helyeken, vagy folytonos ezeken a helyeken is, tehát határozott értékkel bír, vagy nem, és ehhez képest határozottnak vagy határozatlannak nevezzük a függvény végtelen nagy értékét is. A transcendens végtelen nagy függvényértéket határozottnak mondjuk, ha zérusnál nagyobb bármi kis n mellett zérus, vagy ha bármi nagy n mellett végtelen nagy a hatványos szorzatunk; és pedig az első esetben logarithmusinak, a másodikban exponontialisnak nevezzük. Végül tegyük azt az észrevételt, hogy, ahol végleten nagy a függvény, ott nem lehet folytonos: ez egyenesen következik a folytonosság difinitiójából. (XI.)

A bevezetőben jelentett többértékűség jellemzésére szolgál, ami itt következik.

1. T tér minden pontjában, vagy egyes pontok, vonalak, fölületek kivételével minden pontjában több értéke van a függvénynek, és oly különös egyszeresen összefüggő vonal húzódik át rajta, vagy oly különös többszörösen összefüggő vonalat tartalmaz az a tér, amely ezekkel a sajátosságokkal bir: A T tér bármely egyszeresen összefüggő részét szemeljük ki, ha belsejének a különös vonallal nincs közös pontsora, akkor és csak akkor, a függvény a maga külömböző

értékei szerint T e részében külömböző függvények foglalata, amelyek egyenkint egyetlen értékkel bírnak és folytonosak a térrész minden pontjában. De a T tér egy többszörösen összefüggő részéről csak akkor áll ez, ha vagy nem övedzi körűl a különös vonalat, vagy nem lényegesen övedzi, azaz, többszörös összefüggésének megőrzése mellett úgy deformálható, hogy a deformálás után nem övedzi, jóllehet a deformálás folyamán sohasem metsződött a különös vonallal. Válaszszunk ugyanis tetszés szerint oly pontot a T térben, a különös vonalon kívül, amely pontban egynél több értéke van a függvénynek, azután ebből a pontból indulva, írassunk le a változó ponthelylyel egy kétszeresen öszszefüggő vonalat a T térben, amely a különös vonalat lényegesen körülövedze. Bármely értékből változzék folytonosan a függvény a leírt vonalon, más értékkel érkezik meg a kiindulás helyén, mint amelylyel kiindult. Továbbá vegyünk föl tetszésre egy oly fölületdarabot a T térben, amelyet e tér fölülete és az egész különös vonal, vagy, ha lehetséges, csak az utóbbi határol. Akkor a függvény a maga külömböző értékei szerint oly különböző függvények foglalatának tekinthető, amelyek a fölvett fölületen kivül mindenütt egyetlen értékkel bírnak és folytonosak a T-ben, de a fölvett fölületen nem. Az ily fölületet reducáló vagy rekesztő fölületnek, diaphragmának, s az ily függvényt a különös vonal körül a T térben folytonos többértékü függvénynek nevezzük. Nagy fontosságúak azok a specialis eféle függvények, amelyek végtelen sokértékűek és kivált amelyek olyképen azok, hogy bármely értékükből az által származtathatók a többiek minden pont számára, hogy ehhez az értékhez bizonyos mennyiség j positivus vagy negativus egész számú többszörösét adjuk, amely j mennyiség független a helytől. Az eféle függvény bizonyos harmonicus függvényei a különös vonalon kivűli pontokan egyértékű folytonos függvények. Nevezetesen, ha a hely egy ilyetén többértékü függvénye f, úgy

$$\varphi = \sin\left(2\pi \frac{f}{j}\right)$$

egyértékű folytonos a különös vonalán kivűl, mert reducáló fölület fölvételével, nemcsak a fölületen kivűl, de e fölület belső pontjaiban is mindenesetre folytonos. Igy ebben az alakban fejezhető ki az f függvény:

$$f = \frac{j}{2\pi} \text{arc.sin.}\varphi,$$

ahol a φ függvény a különös vonalon kivüli helyeken mindenütt egyértékű és folytonos, a j mennyiség pedig nem függ a helytől. Továbbá, akármely ponthelyet válaszszunk, vagy nem deriválható abban az eféle függvény a coordinaták szerint, vagy coordinata deriváltjai egyértékűek abban a pontban, mert, a függvény értékkülömbözetei függetlenek lévén a helytől, e külömbözetek coordinataderiváltjai zérusok.

2. A physikai alkalmazások czéljaira még kiválóan figyelembe veendő többértékűség abból áll, hogy a függvény oly függvények összege, amelyek egyenkint az imént leírt módon többértékűek, mindegyik más vonal körűl. Az összeadandó függvények száma pedig végtelen nagy is lehet, midőn aztán összegük egyszeres, vagy kétszeres határozott integralist képez. Ugyanis, egy ilyetén összegtag egy vagy két parametrum folytonos függvénye és a parametrum, illetőleg a két parametrum elemi megváltozását mint szorzót tartalmazza, a parametrumok pedig egyszersmind arra valók, hogy az ő változásukkal változik összegtagról összegtagra az összeadandók, integrálandók különös vonala. Aszerint, amint egy, vagy két változó parametrum szerepel, egyszeres vagy kétszeres integrálás szolgáltatja a teljes többértékű függvényt, és a kivételes vonalok összessége fölületet vagy tért alkot, úgy, hogy a kivételes geometriai alakzat fölület vagy tér. Az előbbiekben az egyetlen vonal körül többértékű függvényről szóló leírások, fogalmazásuk némi módosításával kivételes fölületek és terek esetére is kiterjeszkednek. Ezek a módosítások könnyen kitalálhatók.

3. Amily értelemben többértékű egy függvény egy vagy több vonal körűl, midőn térben változhatik, ugyanoly értelemben lehetséges, hogy egy fölületre rendelt függvény egy vagy több fölületi pont körűl több értékű. Ha egy függvényt, amely T térben egy vonal körűl több értékű, oly fölületre rendelünk, amely a T térben van és amelyet ez a vonal egy vagy több pontban átdöf már a függvény nyilvánképen, többértékű a fölületen az átdöfési pontok körűl.

4. Végre, ha a függvény egy többszörösen összefüggő vonalon azzal a tulajdonsággal bír, mikép, folytonosan változván a vonalon, más értékkel érkezik meg a kiindulás helyén, vagy legalább lehet olyan az útja a vonalon, hogy más értékkel érkezik meg, mint amelylyel kiindúlt, akkor a vonalon többértékűnek nevezzük a függvényt.

XVII. A hely függvényének deriváltjai.

Jelölje Φ a hely egy függvényét, és ez a függvény x, y, z helyen mindhárom coordinata szerint deriválható legyen. Akkor a hely elemi megváltozásával járó elemi megváltozása így írható:

$$\delta\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\delta z,$$

ha t. i. a coordinaták elemi megváltozása rendre δx, δy, δz. Ezek egyszersmind az x, y, z helyből az $x+\delta x$, $y+\delta y$, $z+\delta z$ helybe nyúló elemi vector componensei.

Ennek az elemi vectornak az irányát i, a hosszát $\delta\varsigma$ jelölje. Akkor a Φ elemi megváltozását az ő i irányú elemi megváltozásának mondjuk és a

$$\frac{\partial\Phi}{\delta\varsigma}=\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\delta x}{\delta\varsigma}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\delta y}{\delta\varsigma}+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{\delta z}{\delta\varsigma},$$

hányadost i irányú deriváltjának nevezzük. Amennyiben az i irány ki van szabva, teljesen határozott határérték felel meg ennek a hányadosnak, mert, ha az i irány iránycosinusai α, β, γ, úgy

$$\frac{\delta x}{\delta\varsigma}=\alpha,\quad \frac{\delta y}{\delta\varsigma}=\beta,\quad \frac{\delta z}{\delta\varsigma}=\gamma,$$

a coordinata-deriváltak pedig határozott értékkel bírnak.

Eszerint, ha az x', y', z' coordinaták csak oly pontot jelenthetnek, amelybe az x, y, z pontból egy adott i irány mutat, és ha a két pont kölcsönös távola ς, úgy, végtelenűl közelíttetvén az előbbi pont az utóbbihoz,

$$\frac{\Phi(x', y', z')-\Phi(x, y, z)}{\varsigma}$$

határértéke az i irányú derivált az x, y, z pontban, mert

$$x'-x=\varsigma\alpha,\quad y'-y=\varsigma\beta,\quad z'-z=\varsigma\gamma,$$

és, végtelenűl kisebbíttetvén a ς, nyilvánképen

$$\frac{\Phi(x+\varsigma\alpha, y+\varsigma\beta, z+\varsigma\gamma)-\Phi(x, y, z)}{\varsigma}$$

határértéke az i irányú derivált az x, y, z helyen.

Jelölésére közönségesen a

$$\frac{\partial\Phi}{\partial i}$$

symbolumot használjuk:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial i}\equiv\frac{\delta\Phi}{\delta\varsigma}=\frac{\partial\Phi}{\partial\varsigma}\frac{\delta x}{\delta\varsigma}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\delta y}{\delta\varsigma}+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{\delta z}{\delta\varsigma}\equiv\frac{\partial\Phi}{\partial x}\alpha+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\beta+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\gamma.$$

Amennyiben az i irány nincs határozottan kiszabva, kiváltképen ezek az esetek birnak fontossággal: 1. Derivált egy vonalban. Ez derivált azzal a kikötéssel, hogy a függvény csak a vonalon változzék, tehát érintő irányú derivált, s a vonal minden egyes pontjában annyi irány szerint képezhető, ahány irányban a pontból a vonalhoz érintő húzható. 2. Derivált egy fölűletben. Ez derivált azzal a kirovással, hogy a függvény csak a fölületen változzék, tehát érintő irányú derivált és a fölület minden egyes pontjában annyi irány szerint képezhető, ahány irányban a pontból a fölülethez érintő egyenes húzható. 3. Korlátlan derivált. Ez minden irányban megengedett derivált.

Föl volt tételezve, hogy a függvény mindhárom coordinata szerint deriválható. De előfordulhat, hogy csak egy vagy két coordinata szerint deriválható, vagy egyik szerint sem. Még pedig megeshetik, hogy nemcsak egyes pontokban ilyen a függvény, de vonalakon, fölületeken, sőt térrészekben, sőt az egész térben. Most tegyük föl, hogy egy térrészben egyik coordinata szerint sem deriválható a függvény sehol sem. Emellett lehetséges, hogy bizonyos α, β, γ, irányok szerint, ez a külömbségi hányados:

$$\frac{\Phi(x+\varsigma\alpha, y+\varsigma\beta, z+\varsigma\gamma)-\Phi(x, y, z)}{\varsigma}$$

határozott határértékkel bír a ς távolság végtelen kisebbítésének megfelelőn. Azért általánosabban ezt használjuk az irányos deriváltak definitiójára.

E definitio értelmében beszélve: mihelyt Φ függvény x, y, z helyen mindhárom coordinatára derivalható, már szükségképen minden irányra deriválható. Ugyanis bármely irányt jelentsenek α, β, γ cosinusok, határozott értékkel bir a

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}\alpha+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\beta+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\gamma$$

kifejezés, és egyuttal egyezik az α, β, γ irányú deriváltat általánosan definiáló határkifejezéssel. Ha csak két coordinatára deriválható a függvény, akkor az egyik coordinata-síkkal párhuzamos síkban deriválható, de ebben minden irányban. Ha csak egy coordinatára deriválható, akkor csak az egyik coordinata tengelylyel párhuzamos egyenesben deriválható, ennek két irányában. Ha egyik coordinatára sem deriválható az x, y, z helyen, amellett még lehetséges, hogy valamely síkban vagy valamely egyenesben deriválható. Az első esetben csak két független változóra deriválható szükségképen, t. i. két olyanra, u, v, amelyek az x, y, z coordinatákat, mint függvényeiket a síkba tartozó pontok coordinatáivá teszik, mert az ily független változók változásával jár a függvénynek fölületen változása. A második esetben csak egy független változóra deriválható szükségképen a függvény, t. i. olyanra, w, amely az x, y, z coordinatákat, mint függvényeit, az egyenesbe tartozó pontok coordinatáivá teszi, mert az ily független változó változásával jár a függvénynek vonalon változása. Első esetben a létező deriváltak kifejezése

$$\frac{\delta\Phi}{\delta\varsigma}=\frac{\partial\Phi}{\partial u}\frac{\delta u}{\delta\varsigma}+\frac{\partial\Phi}{\partial v}\frac{\delta v}{\delta\varsigma},$$

másodikban

$$\frac{\delta\Phi}{\delta\varsigma}=\frac{\partial\Phi}{\partial w}\frac{\delta w}{\delta\varsigma},$$

és világos, hogy viszont, ha csak két független változóra deriválható valamely helyen szükségképen a függvény, úgy egy síkban deriválható, és ha csak egyre deriválható szükségképen, úgy egy vonalban deriválható, t. i. azon a helyen.

Ezek teljes térfogati, illetőleg fölületi, illetőleg vonalas lehetőségek. Hozzájuk részleges lehetőségek sorakoznak, amelyek miben létét könnyű kitalálni.

Természetesen a mennyiség szerint való deriválhatóságot mindig a mennyiség illető értékének mindkét oldalára értettük és értjük ezentúl is és úgy a mennyiség megkisebbítéséből, mint megnagyobbításából származtathatónak gondoljuk a deriváltat, még pedig azzal a megszorítással, hogy az egyik és másik módon származott derivált egyenlő egymással; mert ez az értelmezés felel meg az általános szokásnak. Ha valamikor csak az egyik oldalra akarnók érteni, vagy ha két oldalra külömböző értékkel akarnók gondolni a deriválhatóságot, ezt különösen felemlítenők. De tegyük itt most azt az észrevélelt, hogy két ellentétes írányú deriváltnak a viszonya általában más, mint egy mennyiség szerint az egyik és másik oldalról képezett deriváltnak a viszonya. Ugyanis az α, β, γ irányra képezett derivált a

$$\frac{\Phi(x+\varsigma\alpha,\ y+\varsigma\beta,\ z+\varsigma\gamma)-\Phi(x,\ y,\ z)}{\varsigma}$$

hányados határértéke, és a $-\alpha, -\beta, -\gamma$ irányra képezett derivált a

$$\frac{\Phi(x-\varsigma\alpha,\ y-\varsigma\beta,\ z-\varsigma\gamma)-\Phi(x,\ y,\ z,)}{\varsigma}$$

hányados határértéke. Ha pedig írjuk:

$$x=a+q\alpha,\ y=b+q\beta,\ z=c+q\gamma,$$

úgy a q mennyiség szerint az egyik oldalról képezett derivált a

$$\frac{\Phi[a+(q+\varsigma)\alpha,\ b+(q+\varsigma)\beta,\ c+(q+\varsigma)\gamma,]-\Phi(a+q\alpha,\ b+q\beta,\ c+q\gamma)}{\varsigma}$$

hányados határértéke, a másik oldalról képezett a

$$\frac{\Phi[a+(q-\varsigma)\alpha,\ b+(q-\varsigma)\beta,\ c+(q-\varsigma)\gamma]-\Phi(a+q\alpha,\ b+q\beta,\ c+q\gamma)}{-\varsigma}$$

hányados határértéke. Az első és a harmadik határérték egyenlő, a második és negyedik ellentétesen egyenlő, ha nem zérus.

Végül vegyük figyelembe, hogy, ha q szerint a közönséges értelemben deriválható a függvény az x, y, z értéknél, akkor a négy határérték közűl három egyenlő egymással, t. i. az első, harmadik és negyedik, a második pedig ezekkel ellentétesen egyenlő. Azaz i-vel jelölvén az α, β, γ, irányt és i'-vel az ellentétes irányt:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial i}=\frac{\partial\Phi}{\partial q}, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial i'}=-\frac{\partial\Phi}{\partial q},$$

bármelyik oldalról származzék a q szerint képzett derivált. Ebből az is kitűnik, hogy az i irányú derivált egyszersmind oly coordinatára képezett derivált, amely i irányú tengelyre tartozik. Jelöljék ugyanis épen a, b, c a tengely origójának coordinatait. Akkor az x, y, z pontnak ezen a tengelyen lévő coordinatája (X.)

$$(x-a)\alpha+(y-b)\beta+(z-c)\gamma.$$

De

$$x-a=q\alpha,\ y-b=q\beta,\ z-c=q\gamma,$$

tehát q ez a coordinata. Különösen pedig, ha az i irány egymásután az x, y, z tengely irányát jelenti, úgy az i irányú derivált egymásután az x, y, z coordinatákra képezett deriválttal egyezik, akár az egyik, akár a másik oldalról képezzük a coordinata-deriváltakat, hacsak a közönséges értelemben deriválható a coordinaták szerint a függvény.

XVIII. Egy térben deriválható függvény integrálhatósága.

Ha Φ mindhárom coordinata szerint deriválható a T térben, akkor létezik oly ψ függvény ebben a térben, mely általában (XV.) mindhárom coordinata szerint folytonos és deriválható, hogy:

$$\Phi=\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

Ugyanis gondoljunk egy hasábot a T térben (h), amely párhuzamos az x tengelylyel. Végein a T tér fölülete határolhatja. Azután válaszszunk oly síkot, amely merőleges a hasábra és teljes vastagságában átszeli a hasábot. Ha ennek a síknak az egyenlete $x=x_h$, úgy írván

$$\psi_h=\int_{x_h}^{x}\Phi(\xi,y,z,)\partial\xi,$$

ez a hasáb térfogatában mindhárom coordinata folytonos, sőt deriválható függvénye mindenütt, mert akármely pont legyen a hasábban x, y, z, már ξ, y, z a hasábba tartozó egyenes pontsereget jelent az integralisban. Márpedig

$$\frac{\partial\psi_h}{\partial x}=\Phi(x,y,z).$$

Az egész T tért ily hasábszerű részekből állónak tekinthetjük, még pedig végtelen sokféle módon. Ha egy választásban az egyes részeknek megfelelően rendre a

$$\psi=\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$$

integralisokat képezzük, úgy mindegyik részben

$$\Phi=\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

A ψ függvény két szomszédos rész határ-fölületének közös pontjaiban általában folytonosság-szakadásos, és így általánosan csak annyi mondható, hogy a ψ függvény általában (XV.) folytonos és általában deriválható függvénye a három coordinatának a T térben.

Világos, hogy, ha a Φ csak általában deriválható a T térben a három coordinatára, akkor is létezik ilyen ψ függvény, mert oly részekre osztható a T tér, amelyek belsejében mindenütt deriválható a Φ a három coordinatára, és e térrészek belsejére nézve épúgy következtethető az állítás, mint az elébb a T térre nézve következett. Ebből pedig továbbá belátható, hogy bármely adott egész számok legyenek l, m, n, létezik oly függvény is a T térben Ω, hogy általában

$$\frac{\partial^{l+m+n}\Omega}{\partial x^l \partial y^m \partial z^n}=\Phi.$$

XIX. A coordinata-deriváltak némely geometriai jelentményei.

1. Egy fölület egyenlete legyen

$$F(x, y, z)=\text{constans},$$

és az F függvény egyszer korlátlanúl deriválható legyen a fölület x, y, z pontjában. A fölületen állandó lévén az F függvény értéke, a fölületben képezett deriváltjai eltünnek. Ha tehát α, β, γ érintői iránycosinusokat jelentenek az x, y, z helyen, úgy

$$\frac{\partial F}{\partial x}\alpha+\frac{\partial F}{\partial y}\beta+\frac{\partial F}{\partial z}\gamma=o.$$

Ebből folyólag, föltéve, hogy a

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right)$$

vector nem tűnik el, az x, y, z helyen a fölület minden vonal-elemével derékszöget alkot az. Következőleg az x, y, z pontban a fölületnek határozott és egyetlen érintő síkja van, amelyre a vector merőleges: a fölület határozott és egyetlen normalissal bír az x, y, z helyen, amelynek egyik iránya a vector irányával egyezik.

Legyenek a normalis valamelyik irányának iránycosinusai λ, μ, ν, és jelölje a vector nagyságát N. Akkor

$$\lambda=\pm\frac{\partial F}{\partial x}:N,\quad \mu=\pm\frac{\partial F}{\partial y}:N,\quad \nu=\pm\frac{\partial F}{\partial z}:N,$$

$$N^2=\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2.$$

Ha a λ, μ, ν normális irányt n jelöli, úgy

$$\frac{\partial F}{\partial n}=\frac{\partial F}{\partial x}\lambda+\frac{\partial F}{\partial y}\mu+\frac{\partial F}{\partial z}\nu,$$

tehát

$$\frac{\partial F}{\partial n}=\pm N$$

s következőleg

$$\lambda=\frac{\partial F}{\partial x}:\frac{\partial F}{\partial n},\quad \mu=\frac{\partial F}{\partial y}:\frac{\partial F}{\partial n},\quad \nu=\frac{\partial F}{\partial z}:\frac{\partial F}{\partial n}.$$

Abban az esetben, hogy az n irány egyezik a

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z}\right)$$

vector irányával:

$$\lambda=\frac{\partial F}{\partial x}:N,\qquad \mu=\frac{\partial F}{\partial y}:N.\qquad \nu=\frac{\partial F}{\partial z}:N,$$

tehát

$$\frac{\partial F}{\partial n}=N,$$

s következőleg $\partial F:\partial n$ positivus. Továbbá, ha i irány irány-cosinusai λ', μ', ν', és ez az irány hegyes-szöget alkot az n iránynyal, akkor $\partial F:\partial i$ is positivus, mert

$$\frac{\partial F}{\partial i}=\frac{\partial F}{\partial x}\lambda'+\frac{\partial F}{\partial y}\mu'+\frac{\partial F}{\partial z}\nu'=(\lambda\lambda'+\mu\mu'+\nu\nu')N.$$

Igy az F függvény ama fölületi oldal felé, amely felé a

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x},\ \frac{\partial F}{\partial y},\ \frac{\partial F}{\partial z}\right)$$

vector mutat, növekedőleg változik az x, y, z pontból. Az ellenkező oldal felé nyilvánképen fogyólag változik.

2. Egy második fölület egyenlete legyen

$$G(x, y, z) = \text{constans},$$

és a két fölület metsződjék egy vonalban, amelynek egy pontja épen x, y, z pont legyen. Úgy az F, mint a G függvényről tegyük föl, hogy egyszer korlátlanúl deriválhatók e pontban, és hogy a deriváltjaikból képzett vectorok, u. m.

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right) \text{ és } \left(\frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial y}, \frac{\partial G}{\partial z}\right)$$

nem tünnek el. Akkor a metszési vonalnak határozott és egyetlen érintő egyenese van az x, y, z helyen, t. i. a két fölűlet érintő síkjának a metszési vonala. Mivel pedig mindkét vectorral derékszöget alkot, ennélfogva a két vector tengelyvonala az (VIII), minek alapján a két fölület metszési vonalának érintői iránycosinusai a két függvény deriváltjaival közbötlenűl kifejezhetők (VIII).

3. Egy fölület-sereg egyenlete legyen

$$F(x, y, z, p) = o,$$

amely aszerint jelent más és más F_p fölületet, amint a p parametrum értéke más és más: külömböző p értékekhez általában külömböző F fölületek tartoznak. Lehetnek azonban valamennyi fölületnek közös pontjai és vonalai, mert lehet olyan az F függvény, hogy egyes pontoknak és egyes vonalok pontjainak a coordinatái mellett a p parametrum kiesik belőle, már pedig ezek a coordinaták valamennyi fölületben bent lévő pontokat határoznak meg.

Az F függvény a coordinaták és a parametrum deriválható függvénye legyen e változók oly x, y, z, p értékénél, amelynél az egyenlet teljesűl, vagyis oly x, y, z, p értéknél, amely az F_p fölülethez tartozik. Azonkivűl tegyük föl, hogy a

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right)$$

vector nem tűnik el ezeknél az értékeknél. Végűl tegyük föl még, hogy $\partial F : \partial p$ sem tűnik el ez értékeknél. Ez utóbbi föltevés miatt az F_p fölület x, y, z pontja nem lehet a fölületsereg közös pontja.

Ha $(\delta x, \delta y, \delta z)$ elemi vector nem tangentialis az F_p fölülethez az x, y, z helyen, akkor létezik oly zérustól külömböző δp elemi megváltozás, hogy

$$\frac{\partial F}{\partial x}\delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial z}\delta z + \frac{\partial F}{\partial p}\delta p = o.$$

Ugyanis az elemi vector hosszát $\delta\varsigma$, iránycosinusait λ', μ', ν' jelölvén, a három első tag összege annyi mint

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\lambda'+\frac{\partial F}{\partial y}\mu'+\frac{\partial F}{\partial z}\nu'\right)\delta\varsigma \equiv N\delta\varsigma\cos\varepsilon$$

ahol N a föntebbi vector nagysága és ε ennek a vectornak és az elemi vectornak a szöge. Minthogy a föltevések értelmében sem N, sem $\cos\varepsilon$ nem zérus, az állítás helyes. De, ha variatiós egyenletünkhöz hozzáadjuk a fölület egyenletét, látjuk, hogy

$$F(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z, p+\delta p)=o.$$

Eszerint az $(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z)$ pont az $F_{p+\delta p}$ fölület egy pontja. Ha tehát az F_p fölületet x, y, z helyen átdöfjük egy egyenessel, ez az egyenes az $F_{p+\delta p}$ fölületet is átdöfi, még pedig végtelen közel az x, y, z helyhez,

$$\delta\varsigma=-\left(\frac{\partial F}{\partial p}:N\cos\varepsilon\right)\delta p$$

végtelen kis távolságban. Ha az átdöfés iránya normalis a fölülethez, úgy $\delta\varsigma$ az F_p és $F_{p+\delta p}$ fölület térközének a vastagsága az x, y, z helyen, amit δn jelöljön. Eszerint

$$\delta n=\mp\left(\frac{\partial F}{\partial p}:N\right)\delta p$$

aszerint, amint ε értéke o vagy π.

Ha specialisan

$$F(x, y, z, p)\equiv F(x, y, z)-p,$$

úgy

$$\delta n=\pm\frac{\delta p}{N}$$

XX. Vectorok potentialisai.

Legyen (ξ, η, ζ) vector a hely függvénye.

1a) Ha a T térben létezik a helynek oly scalaris függvénye Φ, általában (XV) deriválható mindhárom coordinatára, mikép

$$\xi=\frac{\partial\Phi}{\partial x},\quad \eta=\frac{\partial\Phi}{\partial y},\quad \zeta=\frac{\partial\Phi}{\partial z},$$

akkor azt mondjuk a vectorról, hogy van a T térben potentialisa, és a

Φ függvényt potentialisának nevezzük. Némelyek a Φ ellentétesét, $-\Phi$, nevezik így.

1b) Ha pedig a T térben létezik a helynek oly vector függvénye (U, V, W), általában deriválható mindhárom coordinatára, mikép

$$\xi=\frac{\partial W}{\partial y}-\frac{\partial V}{\partial z}, \quad \eta=\frac{\partial U}{\partial z}-\frac{\partial W}{\partial x}, \quad \zeta=\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial y},$$

akkor azt mondjuk a vectorról, hogy van vector-potentialisa, és az (U, V, W) vectort vector-potentialisának nevezzük.

2. Amely vectornak egy helyhatározó rendszerben van a T térben potentialisa, annak minden más helyhatározó rendszerben van a T térben potentialisa, és pedig ugyanaz.

Amely vectornak pedig egy helyhatározó rendszerben van a T térben vector-potentialisa, annak minden más helyhatározó rendszerben van a T térben vector-potentialisa, és pedig congruens rendszerekben ugyanaz a vector, nem congruensekben az ellentétes vector, mindig az illető rendszerbe tartozó componensek szerint.

Legyen ugyanis egy második helyhatározó rendszerben x', y', z' a három coordinata, és a rendszer tengelyeinek az iránycosinusai $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ és $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ és $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ legyenek. Akkor az új rendszerben a (ξ, η, ζ) vector componensei ezek:

$$\begin{aligned}\xi'&=\alpha_1\xi+\beta_1\eta+\gamma_1\zeta\,,\\ \eta'&=\alpha_2\xi+\beta_2\eta+\gamma_2\zeta\,,\\ \zeta'&=\alpha_3\xi+\beta_3\eta+\gamma_3\zeta\,.\end{aligned}$$

2a) Ha tehát T térben van a (ξ, η, ζ) vectornak potentialisa Φ, úgy a T térben

$$\xi'=\alpha_1\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\beta_1\frac{\partial\Phi}{\partial y}+\gamma_1\frac{\partial\Phi}{\partial z}, \text{ stb.}$$

Itt a ξ' kifejezése nem más, mint a Φ függvénynek az új első tengely irányában képezett deriváltja sít.

2b) Ha pedig a T térben vector-potentialisa van a (ξ, η, ζ) vectornak, u. m. (U, V, W), úgy

$$\xi'=\alpha_1\left(\frac{\partial W}{\partial y}-\frac{\partial V}{\partial z}\right)+\beta_1\left(\frac{\partial U}{\partial z}-\frac{\partial W}{\partial x}\right)+\gamma_1\left(\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial y}\right), \text{ stb.}$$

Minthogy U, V, W általában mindhárom régi coordinatára deriválhatók az előzetes föltevés szerint, így általában mindhárom új coordinatára is deriválhatók, mert általában minden irányban deriválhatók. Mivel pedig az új rendszerben a régi tengelyek irány-cosinusai $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ és $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ és $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, így

$$\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{\partial U}{\partial x'}\beta_1+\frac{\partial U}{\partial y'}\beta_2+\frac{\partial U}{\partial z'}\beta_3,$$

$$\frac{\partial U}{\partial z}=\frac{\partial U}{\partial x'}\gamma_1+\frac{\partial U}{\partial y'}\gamma_2+\frac{\partial U}{\partial z'}\gamma_3, \qquad \text{stb.}$$

Helyettesítsük be ezeket ξ' kifejezésébe. Azután vegyük számba a X. czikk végén jegyzett kifejezéseket, amelyek akkor érvényesek az iránycosinusok között, midőn a két helyhatározó rendszer congruens. Találjuk:

$$\xi'=\frac{\partial}{\partial y'}(U\alpha_3+V\beta_3+W\gamma_3)-\frac{\partial}{\partial z'}(U\alpha_2+V\beta_2+W\gamma_2).$$

Ámde, ha az (U, V, W) vector componensei az új rendszerben U', V', W', úgy

$$U'=\alpha_1 U+\beta_1 V+\gamma_1 W,$$
$$V'=\alpha_2 U+\beta_2 V+\gamma_2 W,$$
$$W'=\alpha_3 U+\beta_3 V+\gamma_3 W.$$

Következőleg

$$\xi'=\frac{\partial W'}{\partial y'}-\frac{\partial V'}{\partial z'}, \text{ stb.}$$

Ha azonban a két helyhatározó rendszer nem congruens, akkor a X. czikk végén jegyzett cosinus-relatiók a cosinusok ellentétes értékeivel helyesek, miből folyólag akkor

$$\xi'=\frac{\partial}{\partial z'}(U\alpha_2+V\beta_2+W\gamma_2)-\frac{\partial}{\partial y'}(U\alpha_3+V\beta_3+W\gamma_3),$$

vagyis

$$\xi'=\frac{\partial V'}{\partial z'}-\frac{\partial W'}{\partial y'}, \text{ stb.}$$

3a.) A 2a.) alattiakból az is kitűnik, hogy, ha (ξ, η, ζ) vectornak van a T térben potentialisa Φ, akkor a T térben i irányon számított vector érték $\partial\psi : \partial i$.

3b.) A 2b. alattiakból pedig kitűnik, hogy ha (ξ, η, ζ) vectornak van a T térben vectorpotentialisa, és ha egy q és p irányú derékszögű vectorpár tengelyén a (ξ, η, ζ) vector értéke λ, az (U, V, W) vector értéke pedig p irányon P, és q irányon Q, akkor a T térben

$$\lambda=\frac{\partial Q}{\partial p}-\frac{\partial P}{\partial q}.$$

4. Midőn egy vectornak van potentialisa, akkor oly specialis vector az, amelyet egyetlen parametrummal, t. i. a potentialissal lehet kifejezni.

Midőn azonban egy vectornak vector-potentialisa van, akkor a definitio szerint összesen három parametrum fejezi ki a vector három componensét, t. i. a vector-potentialis három componense. Ámde ez a három parametrum kettőre reducálható. Legyen ugyanis (ξ, η, ζ) vectornak a T térben vector-potentialisa (U, V, W). Minthogy az U, V, W componensek általában mindhárom coordinata szerint deriválhatók a T térben, úgy léteznek a hely oly függvényei a T térben, f, g, h, általában mindhárom coordinata szerint deriválhatók, mikép (XVIII):

$$U=\frac{\partial f}{\partial x}, \qquad V=\frac{\partial g}{\partial y}, \qquad W=\frac{\partial h}{\partial z},$$

és következőleg az f olykép, általában kétszer is deriválható, hogy az egyik deriváló x, a g olykép általában kétszer is, hogy az egyik deriváló y, a h olykép általában kétszer is, hogy az egyik deriváló z, és e kétszeres deriválások sorrendje fölcserélhető:

$$\frac{\partial W}{\partial y}-\frac{\partial V}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial z}$$

$$=\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial h}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial y}=\frac{\partial^2(h-g)}{\partial y\,\partial z}=\frac{\partial^2(h-g)}{\partial z\,\partial y}, \text{ stb.}$$

azaz

$$\xi=\frac{\partial^2(h-g)}{\partial y\,\partial z}=\frac{\partial^2(h-g)}{\partial z\,\partial y}$$

$$\eta=\frac{\partial^2(f-h)}{\partial z\,\partial x}=\frac{\partial^2(f-h)}{\partial x\,\partial z}$$

$$\zeta=\frac{\partial^2(g-f)}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2(g-f)}{\partial y\,\partial x}.$$

Az itt szereplő három függvény-külömbségnek az összege zérus, tehát két függvénynyel fejezhetők ki. Még pedig írván

$$h-g=-\lambda, \qquad f-h=\mu$$

ered a harmadik külömbség számára

$$g-f=\lambda-\mu.$$

Csakhogy e helyettesítések után ζ kifejezésében a kétszeres deriválás és a kivonás sorrendjét általában nem szabad fölcserélni, mert λ és μ tartalmazza a h függvényt, amely kétszer általában csak úgy deriválható, ha az egyik deriváló a z coordinata.

Azonban tegyük föl, hogy a (ξ, η, ζ) vector általában deriválható T-ben a három coordinatára, és most járjunk el így: írjuk csupán

$$W = \frac{\partial h}{\partial z},$$

ahol is a h általában mindhárom coordinatára deriválható, és oly módon kétszer is, hogy az egyik deriváló a z. Ekkor

$$\xi = -\frac{\partial}{\partial z}\left(V - \frac{\partial h}{\partial y}\right), \quad \eta = \frac{\partial}{\partial z}\left(U - \frac{\partial h}{\partial x}\right),$$

és ezekből világos, hogy a h függvény lehet olyan, hogy általában mindenkép deriválható kétszer T-ben a coordinaták szerint és nem csupán úgy, ha az egyik deriváló coordinata a z. Következőleg ζ kifejezése így is írható:

$$\zeta = \frac{\partial}{\partial x}\left(V - \frac{\partial h}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(U - \frac{\partial h}{\partial x}\right),$$

mert a h csak látszólagosan fordúl elő benne. Ezek rendén, ha

$$U - \frac{\partial h}{\partial x} = u, \quad V - \frac{\partial h}{\partial x} = v$$

rövidítő jelölést használjuk:

$$\xi = -\frac{\partial v}{\partial z}, \quad \eta = \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y},$$

vagyis, ha (ξ, η, ζ) általában deriválható a coordinatákra a T-ben, és van e térben vector-potentialisa, akkor utóbbi mindig olyanra reducálható, amelynek egyik componense zérus.

XXI. A potentialis egyenletek

1a) Ha (ξ, η, ζ) vectornak van potentialisa a T térben, Φ, mihez képest

$$\xi = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad \eta = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \zeta = \frac{\partial \Phi}{\partial z},$$

és ha általában deriválható ez a vector a három coordinata szerint abban a térben, akkor a potentialisa általában mindenkép kétszer deriválható. Következőleg a vector componensei kielégítik a T térben a következő egyenleteket:

$$\frac{\partial\zeta}{\partial y}-\frac{\partial\eta}{\partial z}=o,\quad \frac{\partial\xi}{\partial z}-\frac{\partial\zeta}{\partial x}=o,\quad \frac{\partial\eta}{\partial x}-\frac{\partial\xi}{\partial y}=o.$$

2a) Fordítva, ha (ξ, η, ζ) deriválható a T térben a három coordinatára és érvényes T-ben ez a három differentialis egyenlet, akkor (ξ, η, ζ) vectornak van potentialisa a T térben.

Létezik ugyanis a T térben olyan függvény, φ, általában deriválható mindhárom coordinatára, hogy

$$\xi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}$$

és φ olykép általában kétszer is deriválható, hogy az egyik deriváló az x, s a deriválások sorrendje közömbös. Irjuk már most

$$\eta=\frac{\partial\varphi}{\partial y}+p.$$

Nyilvánvaló, hogy p általában deriválható x-re. Ennélfogva azonban a harmadik differentialis egyenletből

$$\frac{\partial p}{\partial x}=o,$$

tehát p csak y és z függvénye. Mivel továbbá

$$p=\eta-\frac{\partial\varphi}{\partial y},$$

úgy létezik olyan függvény a T térben, ψ, általában deriválható mindhárom coordinatára, hogy

$$p=\frac{\partial\psi}{\partial y},$$

és tekintettel arra, hogy p csak y és z függvénye, megválasztható úgy a ψ, hogy maga is csak y és z függvénye legyen. Ezek alapján írhatjuk

$$\xi=\frac{\partial(\varphi+\psi)}{\partial x},\quad \eta=\frac{\partial(\varphi+\psi)}{\partial y},$$

ahol $\varphi+\psi$ nyilvánképen mindhárom coordinatára deriválható általában a T-ben és olymódon kétszer is, hogy az egyik deriváló x vagy y. Végűl tegyük

$$\zeta=\frac{\partial(\varphi+\psi)}{\partial z}+q.$$

Az itt írt q függvény általában szükségkép deriválható x-re és y-ra De ennek kapcsán az első és második differentialis egyenletből

$$\frac{\partial q}{\partial y}=o, \quad \frac{\partial q}{\partial x}=o,$$

tehát q csak x függvénye lehet. Mivel pedig

$$q=\zeta-\frac{\partial(\varphi+\psi)}{\partial z},$$

úgy létezik a T-ben a coordinatáknak oly általában deriválható függvénye χ, hogy

$$q=\frac{\partial\chi}{\partial z},$$

és q csak z függvénye lévén, megválasztható a χ függvény úgy, hogy ő maga is csak z függvénye. Következőleg van olyan függvény a T térben, $\varphi+\psi+\chi$, általában deriválható mindhárom coordinatára, — mégpedig **kétszer** is — hogy

$$\xi=\frac{\partial}{\partial x}(\varphi+\psi+\chi), \quad \eta=\frac{\partial}{\partial y}(\varphi+\psi+\chi), \quad \zeta=\frac{\partial}{\partial z}(\varphi+\psi+\chi),$$

vagyis van a (ξ, η, ζ) vectornak potentialisa a T térben.

1b.) Most legyen, hogy (ξ, η, ζ) vectornak a T térben vector potentialisa van: (U, V, W). Ha (ξ, η, ζ) általában deriválható a három coordinatára a T-ben, úgy

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\zeta}{\partial z}=o.$$

Ez a vector-potentialis általános (U, V, W) alakja után, vagyis a

$$\xi=\frac{\partial W}{\partial y}-\frac{\partial V}{\partial z}, \quad \eta=\frac{\partial U}{\partial z}-\frac{\partial W}{\partial x}, \quad \zeta=\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial y}$$

kifejezések után nem tűnik ki, mert nem állítható, hogy U, V, W egyenkint másodszor is deriválhatók. Azonban egyenesen következtethető a vector-potentialisnak az előbbi czikk végén megállapított specialis alakjából (u, v, o), amely szükségkép lehetséges alak, ha (ξ, η, ζ) deriválható a három coordinatára. Induljunk ki tehát a

$$\xi=-\frac{\partial v}{\partial z}, \quad \eta=\frac{\partial u}{\partial z}, \quad \zeta=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}$$

kifejezésekből. Az első kettő szerint u és v mindhárom coordinatára olykép általában kétszer is deriválhatók, hogy az egyik deriváló coordinata a z, és pedig bármelyik egymásutánban. Ebből folyólag ζ kifejezésének mindegyik tagja deriválható általában z-re és pedig akár az ott írt deriválás előtt, akár az után. Igy a bebizonyítandó egyenlet tényileg érvényes a T térben.

2b.) Fordítva, ha (ξ, η, ζ) általában deriválható T-ben a három coordinatára, és e térben

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\zeta}{\partial z}=o,$$

akkor (ξ, η, ζ) vectornak forma szerint van vector-potentialisa a T térben az az van, eltekintve attól a követeléstől, hogy általában mindhárom coordinata szerint deriválható legyen T-ben.

Ugyanis létezik olyan φ és ψ függvény T-ben, általában deriválhatók mindhárom coordinatára, hogy

$$\xi=-\frac{\partial\psi}{\partial z}, \qquad \eta=\frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

még pedig úgy φ, mint ψ oly módon általában kétszer is deriválható, hogy az egyik deriváló a z. Helyettesítsük be ezeket a differentialis egyenletbe és látjuk, hogy

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\xi+\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)=o.$$

következőleg $\bar{\omega}$-val csupán x és y függvényét jelölvén,

$$\zeta+\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial x}=\bar{\omega}.$$

De mivel φ és ψ általában mindhárom coordinatára deriválhatók, létezik két olyan függvény, f'' g', a T térben, általában deriválhatók mindhárom coordinatára, hogy

$$\varphi=\frac{\partial f''}{\partial x}, \qquad \psi=\frac{\partial g'}{\partial y},$$

és f'' oly módon kétszer is, hogy az egyik deriváló az x, és g' oly módon kétszer is, hogy az egyik deriváló az y, s a deriválások sorrendje tetszés szerinti. Eként

$$\zeta+\frac{\partial^2(f''-g')}{\partial x\partial y}=\bar{\omega}.$$

Ebből folyólag (XVIII) létezik a T-ben oly függvény, μ, általában deriválható egymásután x-re és y-ra, valamint y-ra és x-re, hogy

$$\bar{\omega}=\frac{\partial^2\mu}{\partial x\partial y}.$$

Mivel pedig $\tilde{\omega}$ csak x és y függvénye, megválasztható a μ úgy, hogy az is csak x és y függvénye. Igy aztán

$$\xi = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\psi + \frac{\partial \mu}{\partial y}\right), \quad \eta = \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad \zeta = \frac{\partial}{\partial x}\left(\psi + \frac{\partial \mu}{\partial y}\right) - \frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

vagy, ha a záró-jel tartalmát v, és a φ mennyiséget u jelöli:

$$\xi = -\frac{\partial v}{\partial z}, \quad \eta = \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Tényileg forma szerint van tehát a (ξ, η, ζ) vectornak a T térben vector-potentialisa. A $\partial\mu : \partial y$ derivált mindhárom coordinata szerint általában sem szükségképen deriválható és így v sem. Ha azonban η általában kétszer deriválható mindhárom coordinata szerint, akkor a definitio teljes tartalmával létezik a vector-potentialis. A vector-potentialis általánosabb alakjához is juthatunk, mivégből csak irnunk kell

$$u = U - \frac{\partial h}{\partial x}, \quad v = V - \frac{\partial h}{\partial y}, \quad \frac{\partial h}{\partial z} = W,$$

azzal a rendeléssel, hogy a T térben h deriválható legyen kétszer a coordinatákra.

XXII. Geometriai integralisok.

Egy véges kiterjedésű geometriai alakzatot $(\tilde{\omega})$, ú. m. vonalat, fölületet, tért, vagy ilyenek rendszerét, igen kis részekre osztva gondolunk, vonalat igen kis vonalrészekre, fölületet két dimensio szerint igen kis fölület-részekre, tért három dimensio szerint igen kis tér-részekre. Megjegyzendő, hogy mindig oly vonalokat és fölületeket értünk, amelyek általában mindenütt határozott sőt folytonos irányú normalis, illetőleg érintő síkkal bírnak.

Jelöljön $(D\tilde{\omega})$ valamely osztásrészt, ú. m. vonalnak, fölületnek, vagy térnek igen kis részét, és ennek a nagysága $D\tilde{\omega}$ legyen, tehát igen kis vonalrész hossza, vagy igen kis fölület-rész terűlete vagy igen kis térrész térfogata.

Adva van az alakzatban, mint a hely függvénye Φ, amelynek általában az alakzat minden pontjában egyetlen határozott véges értéke van, vonalon legfeljebb egyes pontokban, fölületen legfeljebb egyes pontokban és vonalokon, térben legfeljebb egyes pontokban, vonalokon és fölületeken nem.

A $(D\tilde{\omega})$ részben tetszésre választunk oly pontot, amelyben a Φ függvény határozott véges értékkel bír. Minden osztás-rész nagyságából és ily pontjába tartozó Φ értékből $\Phi D\tilde{\omega}$ szorzatot képezünk, azután valamennyi szorzatot összeadjuk. $\Sigma\Phi D\tilde{\omega}$ jelentse az összeget. Nyilvánvaló, hogy teljesen határozott értéke van, amely azonban függ attól, hogy milyen a részekre osztás, vagyis, hogy mikép választvák meg a $(D\tilde{\omega})$ részek, és, hogy ezek mely pontját választottuk függvényhely gyanánt, azaz, hogy a függvény szorzóúl használt értéke mely pontjukhoz tartozik.

Minél kisebbek az osztás-részek, annál nagyobb a sokaságuk, s ennek megfelelően beszélünk a részekre osztás, a fölosztás sürűségéről s azt a kérdést vetjük föl, hogy, ha a fölosztás sürűségét az egész alakzatban határtalanúl növeljük, miként viselkedik a szorzatok összege, $\Sigma\Phi D\tilde{\varpi}$?

A legközelebbi czikkekben látni fogjuk, hogy, ha Φ függvény folytonos az alakzatban, vagy ha legalább általában folytonos (XV) és a folytonosság-szakadás helyein is véges mindenütt, akkor a $\Sigma\Phi\mathrm{D}\tilde{\varpi}$ összeg a fölosztás sürűségének végtelen növelésével határozott véges értékbe convergál, a fölosztások és függvényhelyek bármely megválasztásában ugyanabba. Ha pedig az általában folytonos függvény végtelen is lehet az alakzatban, akkor a végtelenné válás módjának bizonyos eseteiben a végtelenné válás vidékébe úgy választhatók meg a függvényhelyek az osztásrészek számára, és pedig igen általános rendelkezéssel, hogy a $\Sigma\Phi\mathrm{D}\tilde{\varpi}$ összeg ekkor is határozott véges értékbe convergál, a fölosztások és a többi függvény-helyek bármely megválasztásában ugyanabba. Erről is meggyőződést fogunk majd szerezni. Megjegyzendő azonban, hogy ezek csak elégséges föltételei annak, hogy az összeg a részekre osztás módjától és legalább általában a függvényhelyek megválasztásának a módjától is független határértékkel bírjon.

Minden ily esetben azt mondjuk a Φ függvényről, hogy van integralisa az alakzatban, és a határ-összeget az alakzatban képezett integralisának nevezzük. Jelölésére az összegezés eddigi jelét **S** jellel, vagy a közönséges integrálási jellel váltjuk fel:

$$\mathrm{Lim}\,\Sigma\Phi\mathrm{D}\tilde{\varpi} \equiv \mathbf{S}\Phi\mathrm{D}\tilde{\varpi} \equiv \int \Phi\mathrm{D}\tilde{\varpi}.$$

Néha czélszerű azt is föltüntetni a jelölésen, hogy mely geometriai alakzatra vonatkozik. Ezt úgy szoktuk tenni, hogy a geometriai alakzat jegyét az összegelési jel lábához írjuk index gyanánt:

$$\mathrm{Lim}\,\Sigma_{(\tilde{\varpi})}\Phi\mathrm{D}\tilde{\varpi} \equiv \mathbf{S}_{(\tilde{\varpi})}\Phi\mathrm{D}\tilde{\varpi} \equiv \int_{(\tilde{\varpi})} \Phi\mathrm{D}\tilde{\varpi}$$

vagy rövidebben

$$\mathrm{Lim}\,\Sigma_{\tilde{\varpi}}\Phi\mathrm{D}\tilde{\varpi} \equiv \mathbf{S}_{\tilde{\varpi}}\Phi\mathrm{D}\tilde{\varpi} \equiv \int_{\tilde{\varpi}} \Phi\mathrm{D}\tilde{\varpi}.$$

Az $(\tilde{\varpi})$ alakzat egy része legyen $(\tilde{\varpi}_1)$. Ennek a határa általában átszeli a $(\mathrm{D}\tilde{\varpi})$ osztás-részek egy sokaságát. Most az átszelt $(\mathrm{D}\tilde{\varpi})$ részek helyett ezek szeleteit vegyük tekintetbe, mindegyiknek a nagyságát az illető egész $\mathrm{D}\tilde{\varpi}$-nak a függvény-szorzójával szorozva. Ebben az értelemben beszélünk az $(\tilde{\varpi}_1)$ alakzat-részre tartozó összeg-részről, amelyet $\tilde{\varpi}_1$ indexes összegelési jellel jegyezünk. Mihez képest, ha az $(\tilde{\varpi}_1), (\tilde{\varpi}_2), \ldots, (\tilde{\varpi}_n)$ alakzat-részek együtt épen az egész $(\tilde{\varpi})$ alakzatot képezik, és ha általánosan $(\mathrm{D}\tilde{\varpi})$-val jelöljük a szeleteket is:

$$\Sigma_{\tilde{\omega}}\Phi D\tilde{\omega}=\Sigma_{\tilde{\omega}_1}\Phi D\tilde{\omega}+\Sigma_{\tilde{\omega}_2}\Phi D\tilde{\omega}+\,..+\Sigma_{\tilde{\omega}_n}\Phi D\tilde{\omega},$$

$$\int_{\tilde{\omega}}\Phi D\tilde{\omega}=\int_{\tilde{\omega}_1}\Phi D\tilde{\omega}+\int_{\tilde{\omega}_2}\Phi D\tilde{\omega}+\,..+\int_{\tilde{\omega}_n}\Phi D\tilde{\omega}.$$

Amennyiben az alakzat külömböző fajú részekből áll, vonalokból, fölületekből, térekből, közönségesen czélszerű a megfelelő integralis-részeket elkülönítve jegyezni. Ha tehát a geometriai alakzat vonalas részét (ς), fölületi részét (σ), térfogati részét (τ) jelöli eképen:

$$\int_{\varsigma}\Phi D\tilde{\omega}+\int_{\sigma}\Phi D\tilde{\omega}+\int_{\tau}\Phi D\tilde{\omega}.$$

ahol Φ a három külömböző részben külömböző jellegű valamint $D\tilde{\omega}$ is.

Az integralisba, vagyis a határ-összegbe tartozó ($D\tilde{\omega}$) alakzat-részeket az alakzat végtelen kis részeinek, vagy elemi részeinek nevezzük. Emellett egy vonal-elemen, fölület-elemen, tér-elemen nem csupán az alakzat egy végtelen kis részét értjük, de így nevezzük annak a nagyságát $D\tilde{\omega}$-t is, végtelen kis hosszát, két dimensio szerint végtelen kis területét, három dimensio szerint végtelen kis térfogatát. Hogy mikor gondoljuk magát az alakzat-részt, mikor annak a nagyságát, mindig kitűnik a fogalmazások értelméből. Vonal-elem jelölésére itt rendszerint ($D\varsigma$) illetőleg $D\varsigma$, fölület-elem jelölésére ($D\sigma$) illetőleg $D\sigma$, tér-elem jelölésére ($D\tau$) illetőleg $D\tau$ fog szolgálni és közös jegyűl ($D\tilde{\omega}$) illetőleg $D\tilde{\omega}$, szükség esetén indexes megkülömböztetésekkel. Az indexeket a D jelző betűn vagy a főbetűn, vagy mindkettőn alkalmazzuk, szükség, vagy valamely czélszerűség szerint.

Mielőtt most az előbbiekben foglalt három állítás igazolásához fognánk, vegyünk figyelembe egy általános tételt, amely föltétlenűl megilleti a definiált összeg-kifejezést.

Az ($\tilde{\omega}$) alakzatban a Φ függvény legszélsőbb értékei Φ_1 és Φ_2 legyenek még pedig Φ_1 legyen a legalsó, Φ_2 a legfelső értékhatára. Az alakzat teljes mekkoraságát pedig $\tilde{\omega}$ jelölje, vagyis ez legyen az alakzatot tevő vonalak hossz-tartalmának, fölületek terűlet-tartalmának, terek köb-tartalmának az összes számértéke. Akkor a $\Sigma\Phi D\tilde{\omega}$ összeg értéke minden esetre abban az érték tartományban van, amelyet $\Phi_1\tilde{\omega}$ és $\Phi_2\tilde{\omega}$ határol, mert, ha minden Φ érték helyett Φ_1 értéket irunk az összegben, úgy semmi esetre sem nagyobbítjuk, és ha minden Φ érték helyett Φ_2 értéket írunk benne, semmi esetre sem kisebbítjük. Igy a szélső Φ értékektől, Φ_1 és Φ_2-től határolt teljes értéktartományban bizonyosan létezik oly érték Φ_0, hogy

$$\Sigma\Phi D\tilde{\omega}=\Phi_0\tilde{\omega}.$$

Ezt a tételt közbülső érték tételének nevezzük.

XXIII. A folytonos függvény geometriai integrálisa.

Midőn folytonos a Φ függvény a geometriai alakzatban, vagyis az alakzatot alkotó vonalakban, fölületekben, térekben, akkor véges is abban mindenütt, tehát a közbülső érték tételéből folyólag a $\Sigma\Phi D\tilde{\omega}$ összeg véges értékű marad, illetőleg véges értékbe convergál a fölosztás sürűségének határtalan növelése mellett. Azonkivűl határértéke független a részekre osztások módjának és a függvényhelyeknek a megválasztásától. Ugyanis, bármi kis számérték legyen p, létezik akkora positivus szám Dq, hogy, mihelyt minden osztás-rész számértéke kisebb, mint Dq, már bármely két összeg külömbségének a számértéke kisebb, mint p. Ennek a belátása végett válaszszunk tetszésre két összeget, természetesen mindegyiket ugyanarra a geometriai alakzatra terjesztve ki:

$$\Sigma\Phi' D'\tilde{\omega} = \Sigma'$$
$$\Sigma\Phi'' D''\tilde{\omega} = \Sigma'',$$

Egy harmadik összegben, u. m.

$$\Sigma\Phi D\tilde{\omega} = \Sigma,$$

amely ugyanarra az alakzatra terjed ki, a $(D\tilde{\omega})$ osztásrészek az előbbifélék, $(D'\tilde{\omega})$ és $(D''\tilde{\omega})$, közös részei legyenek. Még pedig jelöljék

$$(D_1'\tilde{\omega}),\quad (D_2'\tilde{\omega}),\ldots$$

azokat a közös részeket, amelyek együtt a $(D'\tilde{\omega})$ részt képezik, és jelöljék

$$(D_1''\tilde{\omega}),\quad (D_2''\tilde{\omega}),\ldots$$

azokat a közös részeket, amelyek együtt a $(D''\tilde{\omega})$ részt képezik. Igy:

$$\begin{aligned}
\Sigma' &= \Sigma\Phi'(D_1'\tilde{\omega}+D_2'\tilde{\omega}+\ldots)\\
\Sigma'' &= \Sigma\Phi''(D_1''\tilde{\omega}+D_2''\tilde{\omega}+\ldots)\\
\Sigma &= \Sigma(\Phi_1' D_1'\tilde{\omega}+\Phi_2' D_2'\tilde{\omega}+\ldots)\\
\Sigma &= \Sigma(\Phi_1'' D_1''\tilde{\omega}+\Phi_2'' D_2''\tilde{\omega}+\ldots).
\end{aligned}$$

Eszerint

$$\begin{aligned}
\Sigma' - \Sigma &= \Sigma[(\Phi'-\Phi_1')D_1'\tilde{\omega}+(\Phi'-\Phi_2')D_2'\tilde{\omega}+\ldots]\\
\Sigma'' - \Sigma &= \Sigma[(\Phi''-\Phi_1'')D_1''\tilde{\omega}+(\Phi''=\Phi_2'')D_2''\tilde{\omega}+\ldots].
\end{aligned}$$

Az alakzat teljes nagyságának a számértéke legyen $\tilde{\omega}$. Mivel a Φ függvény folytonos az alakzatban, így bármi kis számérték legyen p, létezik akkora positivus szám, Dq, hogy mihelyt minden $D'\tilde{\omega}$ és $D''\tilde{\omega}$ számértéke kisebb, mint Dq, már az itteni függvény-külömbségek számértékre kisebbek, mint $p:2\tilde{\omega}$, és így

$$|\Sigma'-\Sigma|<\frac{1}{2}p, \qquad |\Sigma''-\Sigma|<\frac{1}{2}p.$$

Eszerint, ha ε' és ε'' számértéke kisebb az egységnél,

$$\Sigma'-\Sigma=\frac{\varepsilon'}{2}p, \qquad \Sigma''-\Sigma=\frac{\varepsilon''}{2}p.$$

Következőleg

$$\Sigma''-\Sigma'=\frac{\varepsilon''-\varepsilon'}{2}p,$$

ámde

$$|\varepsilon''-\varepsilon'|<2.$$

Egyúttal tegyük itt azt az észrevételt az előbbi czikkben definiált

$$\int_{\tilde{\omega}}\Phi D\tilde{\omega}=\int_{\tilde{\omega}_1}\Phi D\tilde{\omega}+\int_{\tilde{\omega}_2}\Phi D\tilde{\omega}+\ldots+\int_{\tilde{\omega}_n}\Phi D\tilde{\omega}$$

kifejezésre nézve, hogy az $(\tilde{\omega}_1)$ stb. alakzat-részek határán átszelt osztásrészek most mind beléjük tartozó Φ szorzóval vehetők számba, t. i. azért, mert a Φ függvény mindenütt folytonos az alakzatban, tehát az átszelt osztásrészekben is folytonos.

XXIV. A véges és általában folytonos függvény geometriai integrálisa.

Ha csak általában folytonos a Φ függvény a geometriai alakzatban (XV), de a folytonosság-szakadás helyein is mindenütt véges: akkor is véges és egyetlen határ érték felel meg a $\Sigma\Phi D\tilde{\omega}$ összegnek. Kitűnik ez a következő megállapításból.

Legyen $(\tilde{\omega}_0)$ az $(\tilde{\omega})$ geometriai alakzat oly igen kis része, amely az összes különös helyeket magában foglalja, úgy, hogy az alakzat másik részében nem foglaltatnak különös helyek, u. m. folytonosság-szakadási pontok, vonalok, fölületek, e másik rész határain sem. Az alakzat e túlnyomólag nagyobb részét $(\tilde{\omega}-\tilde{\omega}_0)$ jelentse.

Most az $(\tilde{\omega}_0)$ alakzat-részre alkalmazzuk a közbülső érték tételét. Ebből folyólag lehet ez az alakzat-rész oly kicsi, hogy mihelyt még kisebb, már a reá tartozó összeg-rész tetszés szerint adott kicsinél kisebb és így az $(\tilde{\omega}-\tilde{\omega}_0)$ alakzat-részre tartozó összeg-rész a teljes összegtől tetszés szerint adott kicsinél kisebbet külömbözik.

Azomban bármi kicsiny legyen az $(\tilde{\omega}_0)$ alakzat-rész, hacsak a másik résszel határos pontjainak és az esetleg átszelt osztás-részek minden pontjának minden különös helytől való távolsága nagyobb, mint egy még oly kis adható távolság, akkor az $(\tilde{\omega}-\tilde{\omega}_0)$ alakzat-részre tartozó összeg-résznek véges és egyetlen határ-érték felel meg, mert ebben az alakzat-részben, és még az esetleg átszelt osztás-részekben is mindenütt folytonos a Φ függvény.

XXV. Az általában folytonos függvény geometriai integrálisa.

Ha a függvény végtelen is lehet a geometriai alakzatban, akkor némi tekintetben különösebb módon képezendő az összeg avégből, hogy legalább a végtelenné válás bizonyos föltételei alatt véges és egyetlen határérték feleljen meg neki.

A $(D\tilde{\omega})$ osztás részben lévő O ponthely a végtelenségnek hozzá legközelebb eső helyétől vagy helyeitől ρ távolságban legyen. Ugyancsak a $(D\tilde{\omega})$ osztás részben lévő O' ponthely a végtelenségnek ő hozzá legközelebb eső helyétől vagy helyeitől ρ' távolságban legyen. Már most oly hely legyen az O a $(D\tilde{\omega})$ osztás-részben, hogy bármely más hely is az O' ebben az osztás-részben, a ρ távolság nem kisebb, mint a ρ' távolság. Az ilyen O helyet a $(D\tilde{\omega})$ osztás-rész fő pontjának nevezzük el.

Azt a távolságot, amelyben a $(D\tilde{\omega})$ osztás-részbe tartozó függvényhely van a végtelenségnek ő hozzá legközelebb eső helyétől vagy helyeitől, jelölje r.

Azzal a követeléssel korlátozzuk a függvény-helyek kitűzését, hogy a fölosztás minden sürűségében adható legyen akkora határozott és véges számérték, amelynél a $\rho : r$ hányados minden osztás-részben kisebb. A függvényhelyek ily megválasztását arányos megválasztásnak nevezzük el.

Könnyű fölismerni, hogy a függvényhelyek arányos megválasztásának a követelése azokra az osztás-részekre nézve nem ró ki semmi megszorítást, amelyeknek minden pontja kivűl esik oly határozott sugarú gömbökön, amely gömbök centrumai a végtelenné válás ponthelyei, bármi kicsinyek legyenek is külömben a gömbsugarak. Mindezekben az osztás-részekben egészen tetszésre tűzhető ki a függvény-hely, mert ezek számára csakis arányos megválasztása lehetséges. Bármi kis adható terjedelme legyen az alakzat oly részének, hogy a másik rész nem tartalmaz végtelenségi pontokat, vonalokat, fölületeket a határán sem, ebben a másik, túlnyomó részben egészen szabad a függvény-helyek megválasztása is. A $(D\tilde{\omega})$ osztás-részek megválasztása mindenütt egészen tetszés szerinti.

A függvény-helyek arányos megválasztásában az összeg a fölosztás sürűségének végtelen növekedésével a következő föltételek alatt minden esetre véges és egyetlen értékbe convergál.

1. Összegelési vonalon egy pontban, vagy egyes pontokban elsőnél alacsonyabb rendű végtelen a függvény.

2. Összegelési fölületen egy pontban vagy egyes pontokban másodiknál alacsonyabb rendű végtelen.

3. Összegelési térben egy pontban vagy egyes pontokban harmadiknál alacsonyabb rendű végtelen.

4. Összegelési fölületen egy vonalon vagy egyes vonalokon elsőnél alacsonyabb rendű végtelen.

5. Összegelési térben egy vonalon vagy egyes vonalokon másodiknál alacsonyabb rendű végtelen.

6. Összegelési térben egy fölületen vagy egyes fölületeken elsőnél alacsonyabb rendű végtelen.

Ezeknek az állításoknak a bebizonyítására szükséges és elégséges kimutatni, hogy egy igen kis alakzat-rész, amely a végtelenségi helyeket magában foglalja, mint az előbbi czikk tárgyalásában is a különös helyeket az $(\bar{\omega}_0)$ rész, lehet oly kicsi, hogy, mihelyt még kisebb, már a reá tartozó összeg-rész határ-értéke tetszésre adott kicsinél kisebb. Ugyanis e föltétel alatt épen úgy következik, mint az elébbi czikk tárgyalásában, hogy véges és egyetlen határ-érték felel meg a teljes összegnek. Hogy pedig ez a föltétel az elősorolt esetekben tényileg teljesűl, annak a fölismerése egy algebrai határ-egyenletre alapítható, nevezetesen a következőre:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1+\left(\frac{1}{2}\right)^{\mu}+\left(\frac{1}{3}\right)^{\mu}+\cdots+\left(\frac{1}{n}\right)^{\mu}}{n^{1-\mu}} = \frac{1}{1-\mu}, \quad (0 \leqq \mu < 1).$$

Ennek az egyenletnek a belátása végett gondoljunk arra, hogy ha $k>1$, úgy

$$k^{1-\mu}-(k-1)^{1-\mu}=\frac{1-\mu}{k^{\mu}}\left(1+\frac{\mu}{2}\frac{1}{k}+\frac{\mu}{2}\frac{1+\mu}{3}\frac{1}{k^2}+\cdots\right),$$

továbbá

$$(k+1)^{1-\mu}-k^{1-\mu}$$

$$=\frac{1-\mu}{k^{\mu}}\left[1-\frac{\mu}{2}\left(k-\frac{1+\mu}{3}\right)\frac{1}{k^2}-\frac{\mu}{2}\frac{1+\mu}{3}\frac{2+\mu}{4}\left(k-\frac{3+\mu}{5}\right)\frac{1}{k^4}-\cdots\right],$$

tehát a μ mennyiség kiszabott értéktartományában

$$k^{1-\mu}-(k-1)^{1-\mu}>\frac{1-\mu}{k^{\mu}}>(k+1)^{1-\mu}-k^{1-\mu}.$$

Ebből folyólag, miután k helyett rendre a $2, 3, \ldots n$ sor-számokat iktattuk,

$$n^{1-\mu}-1>(1-\mu)\sum_{k=2}^{k=n}\left(\frac{1}{k}\right)^{\mu}>(n+1)^{1-\mu}-2^{1-\mu}.$$

Innen pedig kiviláglik már, hogy a fönt jegyzett határ-egyenlet helyes.

Egyelőre hat specialis eset tárgyalására szorítkozunk. Ezek elintézése után könnyű szerrel kideríthető lesz majd, hogy a kimondott tételek a maguk általánosságában is helyesek.

1. Végtelenség összegelési egyenes határpontjában.

A függvény-helyek valamely arányos megválasztásában legyen

$$\sum_{(s)} |\Phi| \, \mathrm{D}s \equiv P_s,$$

ahol (s) az egyenes oly részét jelenti, amely a végtelenség helyében kezdődik.

Ha a végtelenség rend-száma μ, vagy kisebb mint μ, írjuk

$$|\Phi| = \frac{\psi}{r^\mu}$$

ahol r a függvény-helynek és a végtelenség helyének a kölcsönös távolsága. Már most

$$P_s = \sum_{(s)} \psi \frac{\mathrm{D}s}{r^\mu},$$

Minden osztás-résznek a végtelenség helyétől legmesszebb eső pontja vagyis főpontja a végpontja. A $(\mathrm{D}s)$ osztás-rész végpontja a végtelenség helyétől ρ távolságban legyen, és vegyük számba, hogy

$$P_s = \sum_{(s)} \psi . \left(\frac{\rho}{r}\right)^\mu \frac{\mathrm{D}s}{\rho^\mu}$$

A fölosztások sűrűségének határtalan növelésében is: az összeg minden tagjában véges marad ψ és $\rho : r$. Az első azért, mert μ akkora, vagy nagyobb, mint a végtelenség rendszáma, a második azért, mert a függvény-helyek arányosan vannak megválasztva. Jelentsen K nagyobb véges értéket, mint amekkorát a

$$\psi \cdot \left(\frac{\rho}{r}\right)^\mu$$

kifejezés a vonalon egyáltalán fölvehet. Úgy

$$P_s < K \sum_{(s)} \frac{\mathrm{D}s}{\rho^\mu}$$

és egyszersmind a fölosztás sürűségének végtelen növelésében

$$\mathrm{Lim}\, P_s < K\, \mathrm{Lim} \sum_{(s)} \frac{\mathrm{D}s}{\rho^{\mu}}.$$

Most az itt előforduló összeget összehasonlítjuk egy más összeggel,

$$\sum_{(s)} \frac{\mathrm{D}'s}{s^{\mu}},$$

amelyet a következőleg képezünk. Az (s) egyenes-részt $D's$ egyenlő hosszúságú részekre osztjuk. De a $D's$ hosszúságot úgy választjuk, hogy kisebb legyen, mint a végtelenség helyében kezdődő (Ds) osztás-rész hosszúsága. Az s vonalhosszat az első (Ds') osztás-részhez ennek a végső pontjáig, a többihez azok kezdő pontjáig számítjuk, úgy, hogy s értékei rendre

$$\mathrm{D}'s,\ \mathrm{D}'s,\ 2\mathrm{D}'s,\ 3\mathrm{D}'s, \ldots, n\mathrm{D}'s$$

ha t. i. a teljes vonal-hossz

$$(n+1)\mathrm{D}'s = s_0$$

Az ekként meghatározott összeg nagyobb, mint föntebb a K mellett lévő mert a (Ds) és (D$'s$)-féle osztás-részek közös darabjaihoz s kisebb, mint a ρ. Igy

$$P_s < K \sum_{(s)} \frac{\mathrm{D}'s}{s^{\mu}}.$$

Az előirt módon részletesen kifejtvén az összeget, azután D$'s$ helyett $s:(n+1)$ írván, egyenlőtlenségünk ekép jelentkezik:

$$P_s < K \frac{2+\left(\frac{1}{2}\right)^{\mu}+\left(\frac{1}{3}\right)^{\mu}+\cdots+\left(\frac{1}{n}\right)^{\mu}}{(n+1)^{1-\mu}} \cdot s_0^{\,1-\mu}.$$

Ha tehát a μ az egységnél kisebb positivus szám, úgy határegyenletünk szerint

$$(P_s)_{n\to\infty} < \frac{K}{1-\mu} s_0^{\,1-\mu}$$

Eként, ha a végtelenség rendszáma kisebb mint 1, úgy s_0 megválasztható oly kicsinek, hogy mihelyt még kisebb, már a reá tartozó összeg-rész határ-értéke tetszés szerint adott kicsinél kisebb.

2. Végtelenség összegelési sík határ-pontjában.

A függvényhelyek valamely arányos megválasztásában legyen

$$\sum_{(\sigma)} |\Phi| \mathrm{D}\sigma \equiv P_\sigma,$$

ahol (σ) az összegelési síknak és oly körlapnak (σ') a közös része, amelynek a centruma a végtelenség helye.

Ha a végtelenség rendszáma μ, vagy kisebb mint μ, írjuk

$$|\Phi| = \frac{\psi}{r^\mu},$$

ahol r a függvény-helynek és a végtelenség helyének kölcsönös távolsága. A végtelenség helye és a $(\mathrm{D}\sigma)$ osztás-rész fő-pontja közt a távolság ρ legyen. Epúgy következik, mint az 1. alatt, hogy K-nak hasonlólag fölvett jelentményében,

$$P_\sigma < K \sum_{(\sigma)} \frac{\mathrm{D}\sigma}{\rho^\mu},$$

$$\operatorname{Lim} P_\sigma < K \operatorname{Lim} \sum_{(\sigma)} \frac{\mathrm{D}\sigma}{\rho^\mu}.$$

Az itt előforduló összeget más összeggel hasonlítjuk össze,

$$\sum_{(\sigma')} \frac{\mathrm{D}'\sigma}{s^\mu},$$

amely az egész körlapra (σ') vonatkozik, és a következő módon van megalkotva. A végtelenség helye, mint centrum, körűl köröket írunk

$$\mathrm{D}s,\ 2\mathrm{D}s, \ldots, (n+1)\mathrm{D}s$$

hosszúságú sugarakkal. És pedig $\mathrm{D}s$ hosszúságot úgy választjuk, hogy kisebb legyen, mint a legkisebb ρ, és hogy az $(n+1)\mathrm{D}s$ sugár a (σ') körlap sugara legyen,

$$(n+1)\mathrm{D}s = s_0.$$

Továbbá a körök közös centrumából, vagyis a végtelenség helyéből igen sűrűen sugárokat húzunk ki, amelyek rendre egyenlő $\mathrm{D}\theta$ szögívek alatt következnek egymásután. E súgarak száma N legyen, úgy, hogy

$$N\mathrm{D}\theta = 2\pi.$$

A körök és sugarak igen kis részekre osztják a (σ') körlapot, s ilyen rész területét jelentse $\mathrm{D}'\sigma$ az összegben. A centrum és az első kör közt foglalt $(\mathrm{D}'\sigma)$ osztás részekhez legyen $s = \mathrm{D}s$; az első és második kör közt foglaltakhoz szintén $s = \mathrm{D}s$ legyen; a második és harmadik kör közt lévőkhöz $s=2\mathrm{D}s$; a harmadik és negyedik közt lévőkhöz $s=3\mathrm{D}s$; sít.

Az ily módon meghatározott összeg nagyobb mint fönt a K mellett lévő, mert a $(\mathrm{D}\sigma)$ és $(\mathrm{D}'\sigma)$-féle osztásrészek közös darabjaihoz s kisebb mint a ρ, és mert σ' nem kisebb, sőt nagyobb, mint σ. Igy

$$P_\sigma < K \sum_{(\sigma')} \frac{\mathrm{D}'\sigma}{s^\mu}.$$

Azomban ha (σ')-nak két szomszédos sugár közt foglalt része σ'', úgy

$$\sum_{(\sigma)} \frac{\mathrm{D}'\sigma}{s^\mu} = N \sum_{(\sigma'')} \frac{\mathrm{D}'\sigma}{s^\mu},$$

tehát

$$P_\sigma < KN \sum_{(\sigma'')} \frac{D'\sigma}{s^\mu},$$

A (σ'') körszelvényben lévő $\mathrm{D}'s$ területek rendre ezek:

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots, \frac{2n+1}{2}\right)(\mathrm{D}s)^2\,\mathrm{D}\theta,$$

az s értékei pedig az előirás szerint a megfelelő sorrendben

$$(1,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n)\mathrm{D}s.$$

Következőleg

$$P_\sigma < 2\pi K \frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+\frac{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^\mu+\frac{7}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^\mu+\cdots+\frac{2n+1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^\mu}{(n+1)^{2-\mu}} s_0^{\,2-\mu}$$

Már most tegyük föl, hogy a végtelenség rendszáma kisebb, mint 2. Minthogy a μ csak azt a kirovást viseli, hogy ne legyen kisebb, mint a végtelenség rendszáma, így föltehetjük, hogy $1<\mu<2$. Ebben a jogos föltevésben irjuk $\mu=1+\nu$, ahol $o<\nu<1$. Kapjuk:

$$P_\sigma < 2\pi K \frac{\frac{1}{2}+\sum\limits_{k=1}^{k=n}\left(1+\frac{1}{2k}\right)\left(\frac{1}{k}\right)^\nu}{(n+1)^{1-\nu}} s_0^{\,2-\mu}.$$

Az n szám határtalan növesztésével az itteni Σ összeg második fele convergens sorrá válik, következőleg határ-egyenletünk értelmében

$$\mathrm{Lim}\, P_\sigma < \frac{2\pi K}{2-\mu} s_0^{\,2-\mu}.$$

Ha tehát a végtelenség rendszáma kettőnél kisebb, úgy s_0 és vele együtt a (σ) lap-rész megválasztható oly kicsinek, hogy, mihelyt még kisebb, már a reá tartozó összeg-rész tetszésre adott kicsinél kisebb.

3. Végtelenség összegelési tér határ-pontjában. A függvény-helyek valamely arányos megválasztásában legyen

$$\sum_{(\tau)} |\Phi| \, \mathrm{D}\tau \equiv P_\tau$$

ahol (τ) az összegelés terének és oly gömbnek (τ') a közös része amelynek a centruma a végtelenség helye.

Ha a végtelenség rendszáma μ, vagy kisebb mint μ, írjuk

$$|\Phi| = \frac{\psi}{r^\mu},$$

ahol r a függvény-helynek és a végtelenség helyének a kölcsönös távolsága. A végtelenség helye és a $\mathrm{D}\tau$ osztásrész főpontja közt a távolság ρ legyen. Épúgy következik, mint 1. alatt, hogy K-nak hasonló módon fölvett jelentményében

$$P_\tau < K \sum_{(\tau)} \frac{\mathrm{D}\tau}{\rho^\mu},$$

$$\operatorname{Lim} P_\tau < K \operatorname{Lim} \sum_{(\tau)} \frac{\mathrm{D}\tau}{\rho^\mu}.$$

Az itt előforduló összeget egy más összeggel hasonlítjuk össze,

$$\sum_{(\tau)} \frac{\mathrm{D}'\tau}{s^\mu},$$

amely az egész gömbre (τ') vonatkozik s a következő módon van megalkotva. A végtelenség helye, mint centrum, körűl gömb-fölületeket irunk

$$\mathrm{D}s,\ 2\mathrm{D}s, \ldots, (n+1)\mathrm{D}s$$

hosszuságú sugarakkal. És pedig a $\mathrm{D}s$ hosszúságot úgy választjuk, hogy kisebb legyen, mint a legkisebb ρ, és, hogy az $(n+1)\mathrm{D}s$ sugár a (τ') gömb sugara legyen,

$$(n+1)\mathrm{D}s = s_0.$$

Továbbá a gömb-fölületek közös centrumából, vagyis a végtelenség helyéből, mint csúcsból, igen vékony gúlákat képezünk a (τ') gömbben, amelyek e gömb fölűletén egyenlő $s^2\mathrm{D}\sigma$ terűleteket határolnak. E gúlák száma legyen N, úgy, hogy

$$N\mathrm{D}\sigma = 4\pi.$$

A gömb-fölületek és gúlák igen kis részekre osztják a (τ') gömbtért, s ilyen rész térfogatát jelentse $D'\tau$ az összegben. A centrum és az első gömbfölület közt foglalt ($\mathrm{D}'\tau$) osztás-részekhez $s=\mathrm{D}s$ legyen; az első és második gömbfölület közt foglaltakhoz szintén $s=\mathrm{D}s$; a második és harmadik közt lévőkhöz $s=2\mathrm{D}s$; a harmadik és negyedik közt lévőkhöz $s=3\mathrm{D}s$; sít.

Az ily módon meghatározott összeg nagyobb mint a K mellett lévő, mert a ($\mathrm{D}\tau$) és ($\mathrm{D}'\tau$)-féle osztás-részek közös darabjaihoz s kisebb, mint a ρ és mert τ' nem kisebb, sőt nagyobb, mint τ. Igy

$$P_\tau < K\sum_{(\tau')}\frac{\mathrm{D}'\tau}{s^\mu}.$$

Azonban, ha (τ')-nak egy gúla-része (τ''), úgy

$$\sum_{(\tau)}\frac{D'\tau}{s^\mu} = N\sum_{(\tau'')}\frac{\mathrm{D}'\tau}{s^\mu},$$

tehát

$$P_\tau < KN\sum_{(\tau'')}\frac{\mathrm{D}'\tau}{s^\mu}.$$

A (τ'') gúlában lévő $\mathrm{D}'\tau$ térfogatok rendre ezek:

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{7}{3}, \frac{19}{3}, \ldots, \frac{3n^2+3n+1}{3}\right)(\mathrm{D}s)^3 D\sigma$$

az s értékei pedig az előírás szerint sorban:

$$(1, 1, 2, 3, \ldots, n)\mathrm{D}s.$$

Következőleg

$$P_\tau < 4\pi K \frac{\frac{1}{3}+\frac{7}{3}+\frac{19}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^\mu+\frac{37}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^\mu+\cdots+\frac{3n^2+3n+1}{3}\left(\frac{1}{n}\right)^\mu}{(n+1)^{3-\mu}} s_0^{\,3-\mu}.$$

Már most tegyük föl, hogy a végtelenség rendszáma kisebb, mint 3. Minthogy μ csak azt a kirovást viseli, hogy ne legyen kisebb, mint a végtelenség rendszáma, így föltehetjük, hogy $2<\mu<3$. Ebben a jogos föltevésben írjuk $\mu=2+\nu$, ahol $0<\nu<1$. Kapjuk:

$$P_\tau < 4\pi K \frac{\frac{1}{3}+\sum\limits_{k=1}^{k=n}\left(1+\frac{1}{k}+\frac{1}{3k^2}\right)\left(\frac{1}{k}\right)^\nu}{(n+1)^{1-\nu}} s_0^{\,3-\mu}.$$

Az n szám határtalan növesztésével az itteni Σ összeg második és harmadik része convergens sorrá válik, következőleg határegyenletünk értelmében

$$\operatorname{Lim} P_\tau < \frac{4\pi K}{3-\mu} s_0{}^{3-\mu}.$$

Ha tehát a végtelenség rendszáma háromnál kisebb, úgy s_0 és vele együtt a (τ) gömb-rész megválasztható oly kicsinek, hogy mihelyt még kisebb, már a reá tartozó összeg-rész tetszés szerint adott kicsinél kisebb.

4. Végtelenség egyenes vonalon, összegelési sík határán.

A függvény-helyek valamely arányos megválasztásában legyen

$$\sum_{(\sigma)} |\Phi| \, D\sigma \equiv P_\sigma$$

ahol (σ) az összegelési síknak s oly derékszögű négyszögnek (σ') a közös részét jelenti, amelynek egyik oldala a végtelenség vonala. Az összegelési lap többi részét nem szükséges tekintetbe venni, mert már csak végtelenségi pontokat tartalmazhat, t. i. a különös vonal végpontjait, és, mert fölteszszük, hogy a végtelenné válás rendszáma kisebb mint 2, sőt kisebb mint 1.

Ha ez a rendszám sehol sem nagyobb mint μ a végtelenség vonalán, irjuk

$$|\Phi| = \frac{\psi}{r^\mu},$$

ahol r a függvényhelynek és a végtelenség egyenes vonalának a kölcsönös távolsága. E vonal és a $(D\sigma)$ osztás-rész főpontja közt a távolság ρ legyen. Épúgy következik, mint 1. alatt, hogy K-nak hasonló módon fölvett jelentményében

$$P_\sigma < K \sum_{(\sigma)} \frac{D\sigma}{\rho^\mu},$$

$$\operatorname{Lim} P_\sigma < K \operatorname{Lim} \sum_{(\sigma)} \frac{D\sigma}{\rho^\mu}.$$

Az itt előforduló összeget egy más összeggel hasonlítjuk össze,

$$\sum_{(\sigma')} \frac{D\sigma'}{s^\mu},$$

amely az egész derékszögű négyszög területére vonatkozik, s a következő módon van megalkotva. A végtelenség egyenes vonalával párhuzamosakat vonunk a (σ') lapon, rendre

$$Ds,\ 2Ds,\ 3Ds,\ ..,(n+1)Ds$$

távolságokban. És pedig a Ds távolságot úgy választjuk, hogy kisebb legyen mint a legkisebb ρ, és, hogy $(n+1)Ds$ a derékszögű (σ') lap szélessége legyen

$$(n+1)Ds = s_0.$$

Továbbá a párhuzamos egyeneseken körösztűl igen sűrűen merőlegeseket vonunk, amelyek rendre $D\varsigma$ egyenlő távolságokban sorakoznak egymásután, N számú $D\varsigma$ hosszúságú részre osztván a párhuzamos egyeneseket, mihez képest, ha a végtelenség vonalának a hossza ς, úgy

$$N D\varsigma = \varsigma.$$

A párhuzamos és a merőleges egyenesek igen kis részekre osztják a (σ') négyszöget, s ilyen rész területét jelentse $D'\sigma$ az összegben. A végtelenség vonalala és az első párhuzamos közt foglalt $(D'\sigma)$ osztásrészekhez $s = Ds$ legyen; az első és második párhuzamos közt foglaltakhoz szintén $s = Ds$; a második és harmadik párhuzamos közt lévőkhöz $s = 2Ds$; a harmadik és negyedik közt lévőkhöz $s = 3Ds$; sít.

Az ily módon meghatározott összeg nagyobb, mint fönt a K mellett lévő, mert a $(D\sigma)$ és $(D'\sigma)$-féle osztás-részek közös darabjaihoz s kisebb mint a ρ, és mert σ' semmi esetre sem kisebb mint σ. Eszerint

$$P_\sigma < K \sum_{(\sigma')} \frac{D'\sigma}{s^\mu}.$$

Azonban, ha (σ')-nak oly része, amely két szomszédos merőleges közt van (σ''), úgy

$$\sum_{(\sigma'')} \frac{D'\sigma}{s^\mu} = N \sum_{(\sigma'')} \frac{D'\sigma}{s^\mu},$$

tehát

$$P_\sigma < KN \sum_{(\sigma'')} \frac{D'\sigma}{s^\mu}.$$

A (σ'') szalagban lévő $D'\sigma$ területek, valamennyi $= D\varsigma . Ds$, míg az s értékei rendre

$$(1,\ 1,\ 2\ 3,\ ..,\ n)Ds.$$

Következőleg

$$P_\sigma < K\varsigma \frac{2 + \left(\frac{1}{2}\right)^\mu + \left(\frac{1}{3}\right)^\mu + \cdot\cdot + \left(\frac{1}{n}\right)^\mu}{(n+1)^{1-\mu}} s_0^{\,1-\mu}.$$

Ha már most $0<\mu<1$, úgy határ egyenletünk szerint

$$\operatorname{Lim} P_\sigma < \frac{K\varsigma}{1-\mu} s_0{}^{1-\mu}.$$

Ha tehát a végtelenség rendszáma az egységnél mindenütt kisebb az egyenes vonalon, úgy s_0 és vele együtt a (σ) laprész megválasztható oly kicsinek, hogy mihelyt még kisebb, már a reá tartozó összegrész tetszés szerint adott kicsinél kisebb.

5.) Végtelenség egyenes vonalon, összegelési tér határán.

A függvény-helyek valamely arányos megválasztásában legyen

$$\sum_{(\tau)} |\Phi| \mathrm{D}\tau \equiv P_\tau$$

ahol (τ) az összegelési térnek és oly egyenes körhengernek (τ') a közös része, amelynek tengelye a végtelenség vonala. Az összegelési tér többi részét fölösleges tekintetbe venni mert már csak végtelenségi pontokat tartalmazhat, t. i. a végtelenség vonalának a vég-pontjait, és, mert a végtelenség rendszámáról fölteszszük, hogy kisebb mint 3, sőt, kisebb mint 2.

Ha ez a rendszám sehol sem nagyobb mint μ a végtelenség vonalán írjuk

$$|\Phi| = \frac{\psi}{r^\mu},$$

ahol r a függvény-helynek és a végtelenség egyenes vonalának a kölcsönös távolsága. E vonal és a $\mathrm{D}\tau$ osztás-rész fő-pontja közt a távolság ρ legyen. Épúgy következik, mint 1.) alatt, hogy K-nak hasonló módon fölvett jelentményében

$$P_\tau < K \sum_{(\tau)} \frac{\mathrm{D}\tau}{\rho^\mu},$$

$$\operatorname{Lim} P_\tau < K \operatorname{Lim} \sum_{(\tau)} \frac{\mathrm{D}\tau}{\rho^\mu}.$$

Az itt előforduló összeget egy más összeggel hasonlítjuk össze

$$\sum_{(\tau')} \frac{\mathrm{D}\tau'}{s^\mu},$$

amely az egész kör-henger tér-tartalmára vonatkozik és a következő módon van megalkotva. A végtelenség vonala, mint tengely, körül (τ')-ban körhengereket írunk

$$\mathrm{D}s,\ 2\mathrm{D}s,\ 3\mathrm{D}s,\ \ldots,(n+1)\mathrm{D}s$$

hosszúságú sugarakkal. És pedig a Ds hosszúságát úgy választjuk, hogy kisebb legyen, mint a legkisebb ρ, és, hogy $(n+1)$Ds akkora legyen, mint a $(\mathrm{D}\tau')$ kör-henger sugara

$$(n+1)\mathrm{D}s = s_0.$$

Továbbá a tengelyen körösztűl igen sűrűen, arra merőleges sikokat fektetünk, amelyek rendre egyenlő $\mathrm{D}\varsigma$ távolságban sorakoznak egymásután, N számú $\mathrm{D}\varsigma$ hosszúságú részekre osztván a tengelyt, mihez képest, ha a tengely belső hossza ς, úgy

$$N\mathrm{D}\varsigma = \varsigma.$$

Végűl, még a tengelyre igen sűrűen síkokat fektetünk, amelyek rendre egyenlő $\mathrm{D}\theta$ szögívek alatt hajlanak egymáshoz, úgy hogy $\mathrm{D}\theta$ egy teljes körív H-ad részét képezi, tehát

$$H\mathrm{D}\theta = 2\pi.$$

A henger-fölületek, merőleges síkok és szögellő síkok igen kis részekre osztják a (τ') henger-tért, s ilyen rész térfogatát jelentse $\mathrm{D}'\tau$ az összegben. A tengely és az első henger-fölület közt foglalt $(\mathrm{D}'\tau)$ osztás-részekhez $s = \mathrm{D}s$ legyen; az első és második henger-felület közt foglalt osztás-részekhez szintén $s = \mathrm{D}s$; a második és harmadik közt lévőkhöz $s = 2\mathrm{D}s$; a harmadik és negyedik közt lévőkhöz $s = 3\mathrm{D}s$; sít.

Az így meghatározott összeg nagyobb, mint fönt a K mellett lévő, mert a $(\mathrm{D}\tau)$ és $(\mathrm{D}'\tau)$ osztás részek közös darabjaihoz s kisebb mint ρ, és mert τ' nem kisebb sőt nagyobb, mint τ. Következőleg

$$P_\tau < K\sum_{(\tau')}\frac{\mathrm{D}\tau'}{s^\mu}.$$

Azonban, ha (τ')-nak oly része, amely két szomszédos merőleges sík és két szomszédos szögellő sík közt foglaltatik (τ''), úgy

$$\sum_{(\tau')}\frac{\mathrm{D}\tau'}{s^\mu} NH\sum_{(\tau'')}\frac{\mathrm{D}\tau'}{s^\mu},$$

tehát

$$P_\tau < KNH\sum_{(\tau'')}\frac{\mathrm{D}\tau'}{s^\mu}.$$

A (τ'') henger-szelvényben létő $\mathrm{D}\tau'$ térfogatok rendre

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots, \frac{2n+1}{2}\right)(\mathrm{D}s)^2.\ \mathrm{D}\varsigma.\ \mathrm{D}\theta$$

míg a megfelelő s értékek rendre

$$(1,\ 1,\ 2,\ 3,\ldots,\ n)\mathrm{D}s,$$

következőleg

$$P_\tau < 2\pi K\varsigma \frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+\frac{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^\mu+\frac{7}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^\mu+\cdots+\frac{2n+1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^\mu}{(n+1)^{2-\mu}} s_0^{\,2-\mu}.$$

Ha már most a végtelenség rendszáma mindenütt kisebb mint 2 az egyenes vonalon, írhatjuk $1<\mu<2$, és ugyanazon a módon, amelyet 2.) alatt alkalmaztunk, azt találjuk, hogy

$$\mathrm{Lim}\ P_\tau < \frac{2\pi K\varsigma}{2-\mu} s_0^{\,2-\mu}.$$

Ha tehát a végtelenség rendszáma kettőnél mindenütt kisebb az egyenes vonalon, úgy s_0 és vele együtt a (τ) henger-rész megválasztható oly kicsinynek, hogy mihelyt még kisebb, már a reá tartozó összeg-rész tetszés szerint adott kicsinél kisebb.

6. Végtelenség sík-lapon összegelési tér határán. A fügvény-helyek valamely arányos megválasztásában legyen

$$\sum_{(\tau)} |\Phi|\, \mathrm{D}\tau = P_\tau\,,$$

ahol (τ) az összegelési térnek és oly (τ') egyenes hasábnak a közös része, amelynek egyik véglapja a végtelenség fölülete. Az összegelési tér többi részét az előbbi 5. és a következő 7. alatti megállapítások szerint fölösleges tekintetbe venni, mert az már csak végtelenségi vonalat tartalmazhat, t. i. a végtelenségi lap kerületén, és mert földeszszük, hogy a végtelenné válás rendszáma mindenütt kisebb mint 2, sőt kisebb mint 1.

Ha ez a rendszám sehol sem nagyobb mint μ a végtelenség fölületén, írjuk

$$|\Phi| = \frac{\psi}{r^\mu},$$

ahol r a fügvény helynek a végtelenség sík-lapjától való távolsága. E lap és a $\mathrm{D}\tau$ osztás-rész fő-pontja közt a távolság ρ legyen. Épúgy következik, mint 1. alatt, hogy K-nak hasonló módon fölvett jelentményében

$$P_\tau < K \sum_{(\tau)} \frac{\mathrm{D}\tau}{\rho^\mu}.$$

$$\operatorname{Lim} P_\tau < K \operatorname{Lim} \sum_{(\tau)} \frac{\mathrm{D}\tau}{\rho^\mu}.$$

Az itt előforduló összeget egy más összeggel hasonlítjuk össze,

$$\sum_{(\tau')} \frac{\mathrm{D}'\tau}{s^\mu},$$

amely az egész egyenes hasábra (τ') vonatkozik s a következő módon van megalkotva. A végtelenség sík-lapjával párhuzamos síkokat képezünk attól

$$\mathrm{D}s,\ 2\mathrm{D}s,\ 3\mathrm{D}s, \ldots, (n+1)\mathrm{D}s$$

távolságban. Éspedig a $\mathrm{D}s$ távolságot úgy választjuk, hogy kisebb legyen mint a legkisebb ρ, és hogy $(n+1)\mathrm{D}s$ akkora legyen, mint a hasáb magassága

$$(n+1)\mathrm{D}s = s_0.$$

Továbbá a párhuzamos síkokon körösztül reájuk merőlegesen igen vékony egyenlő átmetszetű hasábokat fektetünk, amelyek N számú és $\mathrm{D}\sigma$ területű részekre osztják azokat úgy, hogy a végtelenség lapjának a területe

$$N\mathrm{D}\sigma = \sigma.$$

A síkok és a vékony hasábok igen kis részekre osztják a (τ') hasáb-tért, s ilyen rész térfogatát jelentse $\mathrm{D}'\tau$ az összegben. A végtelenség lapja és az első párhuzamos lap közt foglalt $(\mathrm{D}'\tau)$ osztás-részekhez $s = \mathrm{D}s$ legyen; az első és második párhuzamos lap közt foglalt osztásrészekhez szintén $s = \mathrm{D}s$; a második és harmadik közt lévőkhöz $s = 2\mathrm{D}s$; a harmadik és negyedik közt lévőkhöz $s = 3\mathrm{D}s$; sít.

Az ily módon meghatározott összeg nagyobb mint föntebb a K mellett lévő, mert a $(\mathrm{D}\tau)$ és $(\mathrm{D}'\tau)$-féle osztás-részek közös darabjaihoz tartozó s kisebb mint ρ, és mert τ' semmi esetre sem kisebb mint τ. Eként

$$P_\tau < K \sum_{(\tau')} \frac{\mathrm{D}'\tau}{s^\mu}.$$

Azonban, ha (τ')-nak egy vékony hasábban foglalt része (τ''), úgy

$$\sum_{(\tau')} \frac{D'\tau}{s^\mu} = N \sum_{(\tau'')} \frac{\mathrm{D}'\tau}{s^\mu},$$

tehát

$$P_\tau < KN \sum_{(\tau'')} \frac{\mathrm{D}'\tau}{s^\mu}.$$

A (τ'') vékony hasábban lévő valamennyi $D'\tau$ térfogatok $= Ds.D\sigma$, az s értékek pedig rendre

$$(1, 1, 2, 3, .., n)Ds.$$

Következőleg

$$P_\tau < K\sigma \frac{1+1+\left(\frac{1}{2}\right)^\mu+\left(\frac{1}{3}\right)^\mu+\cdots+\left(\frac{1}{n}\right)^\mu}{(n+1)^{1-\mu}} \cdot s_0{}^{1-\mu}.$$

Ha már most $0<\mu<1$, úgy határ-egyenletünk értelmében

$$\mathrm{Lim}\ P_\tau < \frac{K\sigma}{1-\mu} \cdot s_0{}^{1-\mu}.$$

Ha tehát a végtelenség rendszáma az egységnél mindenütt kisebb a sík-lapon, úgy s_0 és vele együtt a (τ) hasáb-rész megválasztható oly kicsinynek, hogy mihelyt még kisebb, már a reá tartozó összeg-rész tetszés szerint adott kicsinynél kisebb.

7.) A z á l t a l á n o s s á g.

Véges kiterjedésű geometriai alakzatban a Φ függvény egyes pontokban, vonalakon, fölületeken végtelen legyen oly rendszámok szerint, aminőket a hat általános propositio föltételez.

Válaszszunk ki a geometriai alakzatból oly részeket, amelyek mindegyike vagy egy különös pontot, vagy egy különös vonalat, vagy különös vonal egy darabját, vagy egy különös fölületet, vagy különös fölület egy darabját tartalmazza a határán, mint végtelenné válás helyeit. A geometriai alakzat többi részében sehol se legyen végtelen a függvény, a határán sem, minek következtében ezzel a többi részszel nem kell törődnünk. Megjegyzendő, hogy az alakzat-részek ilyetén kiválasztása még akkor is lehetséges, midőn különös vonalak, fölületek metszik egymást.

A kiválasztott részek vagy vonalak, vagy fölületek, vagy térek. Ezeket egyenkint leképezzük; a vonalakat egyenesekre, a fölületeket síkokra, a tereket más terekre. Úgy képezzük le, hogy a.) képök határa határuk képe legyen, s különös vonal képe egyenes, különös fölület képe sík legyen; b.) ha egy osztás-rész $(D\tilde{\omega})$, és ennek a képe $(D\tilde{\omega}_1)$, úgy a $D\tilde{\omega} : D\tilde{\omega}_1$ hányados ne lehessen végtelen nagy; c.) ha $(D\tilde{\omega})$ főpontjának távolsága a különös ponttól vagy vonaltól vagy fölülettől, illetőleg utóbbiak esetében legközelebbi pontjuktól ρ, és ha $(D\tilde{\omega}_1)$ ben a különös pont képétől vagy különös vonal egyenes-képétől vagy különös felület sík-képétől legmesszebb fekvő pont távola ρ_1, úgy $\rho_1 : \rho$ ne lehessen végtelen. Mindenesetre megválaszthatók olyképen az egyes alakzat-részek, hogy ezek a követelések is teljesíthetők legyenek. Kitűnik ez már abból, hogy az alakzatból kiválasztott részek lehetnek oly kicsinyek, mikép pontjaikat tetszésre adott kicsinél kisebb utakon mozdíthatjuk el úgy, hogy ez által a leképezések az a.) értelemben teljesűljenek, amidőn aztán egyszersmind a $(D\tilde{\omega})$ osztás-részek az ő $(D\tilde{\omega}_1)$ képeiktől, a ρ távolságok pedig a ρ_1 távolságoktól kis mértékben külömböznek.

Már most legyen a függvényhelyek valamely arányos megválasztásában a $\Sigma|\Phi|D\tilde{\omega}$ oly része, (XXII), amely egy kiválasztott alakzatrészre terjed ki

$$\sum_{(\tilde{\omega})}|\Phi|D\tilde{\omega}\equiv P_{\tilde{\omega}}.$$

Ha a végtelenné válás rendszáma az $(\tilde{\omega})$ határán lévő különös pontban vagy vonalon vagy fölületen nem nagyobb, mint μ, úgy r-rel jelölvén az ily hely s a függvényhely közt lévő távolságot, $r^\mu|\Phi|$ mindenütt véges marad az $(\tilde{\omega})$-ban, a fölosztások sűrűségének határtalan növelése mellett is. De véges marad $\rho:r$ is, a függvényhelyek arányos megválasztása miatt, és a föltevés szerint $\rho_1:\rho$ is. Igy véges marad

$$\frac{\rho}{r}\frac{\rho_1}{\rho}=\frac{\rho_1}{r},$$

tehát véges marad

$$\left(\frac{\rho_1}{r}\right)^\mu r^\mu|\Phi|=\rho_1{}^\mu|\Phi|.$$

Mivel pedig a föltevés szerint $D\tilde{\omega}:D\tilde{\omega}_1$ hányalos sem lehet végtelen nagy, így ebben az identitasban:

$$|\Phi|D\tilde{\omega}\equiv\frac{D\tilde{\omega}}{D\tilde{\omega}_1}\rho_1{}^\mu|\Phi|.\frac{D\tilde{\omega}}{\rho_1{}^\mu}$$

a jobb oldalban foglalt utolsó tört-alak szorzója mindig véges. Következőleg, ha K_1 nagyobb véges érték, mint amekkorát ez a szorzó egyáltalán fölvehet,

$$P_{\tilde{\omega}}<K_1\sum_{(\tilde{\omega}_1)}\frac{D\tilde{\omega}_1}{\rho_1{}^\mu}.$$

Ugyanolyan kifejezés ez, amilyen a hat előbbi tárgyalás alapját képezte . . .

Végre az alkalmazások érdekében jegyezzük meg ezt az észrevételt: soha és semmiféle czélra sem szükséges oly fölület-elemek és tér-elemek számba vétele, amelyeknek beszögelléseik vagy határtalan kicsinyitésükkel el nem símuló behajlásaik vannak.

XXVI. Tér-integralisok reductiója.

1. Ha véges kiterjedésű T térben a hely Φ függvénye folytonos és i irányban deriválható függvény, és deriváltja is folytonos, akkor ez a tér-integralis:

$$I \equiv \int_T \frac{\partial \Phi}{\partial i} \mathrm{D}\tau$$

fölületi integralisra reducálható, amely a T tér határ-fölületére S-re vonatkozik. Még pedig ha a fölület $\mathrm{D}\sigma$ elemének befelé mutató normalisa n irányú, úgy

$$I = -\int_S \Phi \cos(i, n) \mathrm{D}\sigma,$$

ahol (i, n) az i és n irány szöge.

Ennek a fölismerése végett vegyünk föl a T térben egy végtelen vékony hasábot, $(\mathrm{D}T)$, olyant, amely párhuzamos az i iránynyal és az S két elemében, $(\mathrm{D}_1\sigma)$, $(\mathrm{D}_2\sigma)$ végződik, amelyek mindegyikéhez egyetlen befelé mutató normalis irány n_1 és n_2 tartozik. A tér-integralisnak azt a végtelen kis részét, amely erre a hasábra szorítkozik, jelölje $\mathrm{D}I$:

$$\mathrm{D}I \equiv \int_{\mathrm{D}T} \frac{\partial \Phi}{\partial i} \mathrm{D}\tau.$$

Ilyen integralisok összege képezi az egész I integralist.

Most a $(\mathrm{D}\tau)$ tér-elemeket úgy válaszszuk meg, hogy a $(\mathrm{D}T)$-féle hasábok merőleges átmetszéseiből származó teljes átmetszeti hasáb-elemek legyenek. Ha egy ily hasáb-elem hoszsza $\mathrm{D}\lambda$, s a hasáb-metszet területe $\mathrm{D}\sigma_0$, úgy $\mathrm{D}\tau = \mathrm{D}\sigma_0 \mathrm{D}\lambda$, és

$$\mathrm{D}I = \mathrm{D}\sigma_0 \int_\lambda \frac{\partial \Phi}{\partial i} \mathrm{D}\lambda,$$

ahol a λ index a hasáb egy oldal-vonalát jelenti. Azonban, ha a $(\mathrm{D}\lambda)$ vonal-elemnek, mint i irányú vectornak, a végéhez és elejéhez tartozó Φ-érték különbsége $\mathrm{D}\Phi$, úgy Φ-nek az i irányú deriváltja (XVII) nem más, mint $\mathrm{D}\Phi : \mathrm{D}\lambda$, tehát

$$\mathrm{D}I = \mathrm{D}\sigma_0 \int_\lambda \mathrm{D}\Phi = (\Phi_2 - \Phi_1) \mathrm{D}\sigma_0,$$

ahol Φ_2 a (λ) vonalnak, mint i irányú vectornak, a végéhez, Φ_1 az elejéhez tartozó érték.

Minthogy

$$D\sigma_0 = \cos(i, n_1) D_1\sigma = -\cos(i, n_2) D_2\sigma,$$

így egyszersmind

$$DI = -\Phi_1 \cos(i, n_1) D_1\sigma - \Phi_2 \cos(i, n_2) D_2\sigma.$$

Az ilyen kifejezések összegeléséből

$$I = -\int_S \Phi \cos(i, n,) D\sigma,$$

azaz

$$\int_T \frac{\partial \Phi}{\partial i} D\tau = -\int_S \Phi \cos(i, n) D\sigma.$$

Igaz, különös módon választottuk meg a tér-elemeket és fölület-elemeket. Mivel azonban tetszés szerinti más választásban is mindegyik integralis ugyanazzal az értékkel bír, így általánosan érvényes ez az egyenlet, ha Φ folytonos és az i irányban deriválható függvény, és deriváltja is folytonos T-ben.

2. Akkor is áll ez a tétel, ha egyes pontokban nem folytonos a Φ függvény és deriváltja, de vagy véges, vagy a függvény végtelenségi rendszáma 2-nél, deriváltjáé 3-nál kisebb.

Ennek a fölismerése végett írjunk egymást nem metsző gömbfölületeket igen kis ρ sugárral a különös pontok, mint centrumok, körül. Belső pontok körül teljes gömbfölületeket, a határon lévők körül a határ fölületig terjedőket. Az utóbbi gömbfölületek a T tér határfölületéből bizonyos részeket metszenek ki. A határ-fölület többi részét jelölje S' és az összes gömbfölületeket σ jelölje. Végre a T térnek azt a részét, amely az S' fölület s az összes gömbfölületek közt van, jelölje T'.

A T' tér nem tartalmazván különös helyet, erre vonatkozólag fölírhatjuk a reductiós egyenletet:

$$\int_{T'} \frac{\partial \Phi}{\partial i} D\tau = -\int_{S'} \Phi \cos(i, n) D\sigma - \int_\sigma \Phi \cos(i, n) D\sigma.$$

A három integralist jelölje röviden $I_{T'}, I_{S'}, I_\sigma.$ Az előbbi czikk értelmében a ρ lehet oly kicsiny, hogy mihelyt még kisebb, már I_T' és I_S' az egész T-re és egész S-re tartozó integralistól tetszés szerint adott kicsinél kisebbet különbözik. De egyúttal oly kicsiny is lehet a ρ, hogy mihelyt még kisebb, már $|I_\sigma|$ tetszés szerint adott kicsinél kisebb. Erről kell meggyőződnünk.

A függvény-helynek s a legközelebbi különös pontnak a kölcsönös távolát jelölje r. A ψ_0 véges constans, és a μ szám akkora legyen, hogy a T térben mindenütt

$$r^{\mu}|\Phi| \leqq \psi_0, \quad \mu < 2.$$

Világos, hogy

$$|I_\sigma| \leqq \frac{\psi_0}{\rho^{\mu}} \int_\sigma \mathrm{D}\sigma.$$

Ha továbbá a különös pontok száma N, úgy az itt álló integralis semmi esetre sem nagyobb mint $4\pi N\rho^2$, tehát

$$|I_\sigma| \leqq 4\pi N\psi_0 \rho^{2-\mu}.$$

Minthogy a föltevés szerint $\mu < 2$, így a ρ megválasztható oly kicsinynek, hogy mihelyt még kisebb, már $|I_\sigma|$ tetszés szerint adott kicsinél kisebb.

3. Akkor is áll a reductiós tétel, ha egyes vonalak pontjaiban nem folytonos a Φ függvény és deriváltja, de vagy véges, vagy a függvény végtelenségi rendszáma 1-nél, a deriváltjáé 2-nél kisebb.

Ennek a fölismerése végett övezzünk körűl igen kis egymást nem metsző fölülettel minden egyes összefüggő különös vonalat, mindegyiket olyannal, amelynek öszszes pontjai ugyanabban a ρ távolságban vannak tőle vagyis legköze- lebbi pontjától. Lehetséges ez törési és elágazási vonal-pontok létezésében is. Amely különös vonalak átdöfik vagy érintik az S fölüeltet, vagy rajta feküsznek, azok övedzője igen kis részt metsz ki az S fölületből. E fölület többi részét jelölje S'. Az övedző fölületek összeségét jelölje σ. A T térnek azt a részét, amelyet S' és σ határol jelölje T''.

Minthogy a T' tér nem tartalmaz különös vonalakat, s legföljebb különös pontokat tartalmaz, amelyekről föltegyük, hogy megfelelnek az előbbi tárgyalás követelményeinek, úgy

$$\int_{T'} \frac{\partial \Phi}{\partial i} \mathrm{D}\tau = -\int_{S'} \Phi \cos(i, n) \mathrm{D}\sigma - \int_\sigma \Phi \cos(i, n) \mathrm{D}\sigma.$$

Ugyan olyan okból, mint az előbbi tárgyalásban, most is csak arról kell meggyőződnünk, hogy ρ lehet oly kicsiny, mikép mihelyt még kisebb, már a σ-ra szóló integralis absolutus értéke tetszés szerint adott kicsinynél kisebb.

Ugyanoly módon definálván a ψ_0 constanst és a μ számot, mint előbb, de azzal a különbséggel, hogy most $\mu < 1$ legyen, most is

$$|I_\sigma| \leqq \frac{\psi_0}{\rho^{\mu}} \int_\sigma \mathrm{D}\sigma.$$

A σ fölületet ρ sugarú körös csőfölületek és ρ sugarú gömbfölületek, utóbbiak a különös vonalak végeinél, törési és elágazási pontjainál, képezik. Ha a különös vonalak hossza összesen λ, és ha a végek, törési és elágazási pontok száma összevéve k, úgy bizonyára

$$\int_\sigma D\sigma < 2\pi\lambda\rho + 4\pi k\rho^2,$$

mert a gömbfölületek soha sem teljesek, és általában a csőfölületek sem teljesek. Igy

$$|I_\sigma| < 2\pi(\lambda + 2k\rho)\psi_0\rho^{1-\mu}.$$

Minthogy a föltevés szerint $\mu < 1$, ennélfogva ρ lehet oly kicsiny, hogy mihelyt még kisebb, már $|I_\sigma|$ tetszés szerint adott kicsinynél kisebb.

4. Ha a Φ függvénynek folytonosság-szakadási fölülete van a T térben, akkor már reductiós egyenletünk nem helyes.

Azonban, ha véges a függvény az ilyen fölületen, és folytonosság-szakadása abban áll, hogy a fölület egyik oldalára más érték-rendszere tartozik, mint a másikra (XVI), ha továbbá a függvény deriváltja vagy véges, vagy elsőnél alacsonyabb rendű végtelen az eféle fölületen, akkor létezik egy más reductiós egyenlet.

Ehhez úgy jutunk el, hogy a T tért fölületekkel oly részekre osztjuk, amelyekben nincs folytonosság-szakadási fölület. Természetesen a részekre osztó fölületek a különös fölületeken feküsznek. Az egyes T_1, T_2.. tér-részekre érvényes a reductiós egyenlet:

$$\int_{T_1} \frac{\partial\Phi}{\partial i} D\tau = -\int_{S_1} \Phi\cos(i, n) D\sigma$$

$$\int_{T_2} \frac{\partial\Phi}{\partial i} D\tau = -\int_{S_2} \Phi\cos(i, n) D\sigma$$

. . . .

Ez az **1**. mintájára következik akkor is, ha a derivált a mondott módon végtelen.

Összeadásukból folyólag

$$\int_T \frac{\partial\Phi}{\partial i} D i = -\sum_k \int_{S_k} \Phi\cos(i, n) D\sigma.$$

De ezt a kifejezést hasznosabb alakra vezethetjük. Az S_k fölületek összeségének egy része a T tér S határ-fölületét képezi, többi része, σ, pedig kettősen fordúl elő, t. i. oly fölület-darabok összessége, amelyek két-két szomszédos tér-osztály határán közös fölület-darabokat képeznek.

Ha tehát σ egyik oldalát (+) másik oldalát (—) oldalnak nevezzük, úgy megfelelő jelzés-mód alkalmazásával:

$$\int_T \frac{\partial\Phi}{\partial i} D\tau = -\int_S \Phi\cos(i, n) D\sigma - \int_\sigma \Big[\Phi_+ \cos(i, n_+) D\sigma_+ + \Phi_- \cos(i, n_-) D\sigma_-\Big].$$

Válaszszuk úgy a $D\sigma_+$ és $D\sigma_-$ fölület-elemeket, hogy kettenként azonosak legyenek. Egyszersmind vegyük tekintetbe, hogy ugyanazon a helyen

$$\cos(i, n_+) + \cos(i, n_-) = 0.$$

Ehhez képest

$$\int_T \frac{\partial\Phi}{\partial i} D\tau = -\int_S \Phi\cos(i, n) D\sigma - \int_\sigma (\Phi_+ - \Phi_-)\cos(i, n_+) D\sigma.$$

Minthogy pedig a σ fölület-rendszer esetleges oly részén, amelyen nincs folytonosság-szakadása a Φ függvénynek, $\Phi_+ - \Phi_- = 0$, úgy a σ kizárólagosan a folytonosság-szakadás fölületeit jelentheti.

Emellett előfordúlhatnak a 2.) és 3.) alatt tárgyalt folytonosság-szakadások, amidőn aztán ez az egyenlet a reductio legáltalánosabb alap-formulája.

Egyszerűség kedveért bizonyos általánosságokban czélszerű ezzel a jelölés-móddal élni:

$$\int_\sigma \Phi_+ \cos(i, n_+) D\sigma = \int_{\sigma_+} \Phi\cos(i, n) D\sigma,$$

$$\int_\sigma \Phi_- \cos(i, n_-) D\sigma = \int_{\sigma_-} \Phi\cos(i, n) D\sigma.$$

Akkor aztán

$$\int_T \frac{\partial\Phi}{\partial i} D\tau = -\int_{S+\sigma_+ +\sigma_-} \Phi\cos(i, n) D\sigma.$$

Ha csak $\partial\Phi : \partial i$ szenvedne folytonosság-szakadást a σ fölületeken a fent definiált módon, azonban Φ nem, akkor nyilvánvalóan a közönséges reductio érvényes, mert a σ fölületekre vonatkozó integralis eltűnik.

XXVII. Tér-integralisok részleges reductiója.

1.) Ha a véges kiterjedésű T térben F és P a hely oly függvénye, hogy szorzatuk, FP, az i irányban deriválható folytonos függvény és deriváltja is folytonos, úgy az előbbi czikk értelmében

$$\int_T \frac{\partial(FP)}{\partial i} \mathrm{D}\tau = -\int_S FP\cos(i, n)\mathrm{D}\sigma.$$

Sőt még akkor is érvényes ez az egyenlet, ha FP és deriváltja egyes pontokban és egyes vonalok pontjaiban folytonosság-szakadásos, de vagy véges, vagy FP végtelenségi rendszáma különös pontban kisebb mint kettő, különös vonalon kisebb mint egy, deriváltjának végtelenségi rendszáma pedig különös pontban kisebb mint három, különös vonalon kisebb mint kettő.

Most tegyük föl, hogy ezen fölül a T térben F és P általában (XV) külön deriválhatók i irányban, és az

$$F\frac{\partial P}{\partial i}, \qquad P\frac{\partial F}{\partial i}$$

szorzatok egyenként legföljebb oly módokon tanúsítanak folytonosság szakadást, mint az FP szorzat deriváltja. Akkor e két szorzat mindegyikének van tér-integralisa a T térre vonatkozólag, és a két integralis összege

$$\int_T F\frac{\partial P}{\partial i}\mathrm{D}\tau + \int_T P\frac{\partial F}{\partial i}\mathrm{D}\tau \equiv \int_T \left(F\frac{\partial P}{\partial i} + P\frac{\partial F}{\partial i}\right)\mathrm{D}\tau = \int_T \frac{\partial(FP)}{\partial i}\mathrm{D}\tau.$$

Következőleg

$$\int_T P\frac{\partial F}{\partial i}\mathrm{D}\tau = -\int_T F\frac{\partial P}{\partial i}\mathrm{D}\tau - \int_S FP\cos(i, n)\mathrm{D}\sigma.$$

Ha folytonosság-szakadási fölületek, σ, fordúlnának elő, amelyeken az FP szorzat legföljebb olyszerűen tanúsít folytonosság-szakadást, mint az előbbi czikk 4.) részében Φ, és a két deriváltos szorzat olyszerűen, mint ugyanott Φ deriváltja, akkor egészen oly módon következik, mint ugyanott, hogy

$$\int_T P\frac{\partial F}{\partial i}\mathrm{D}\tau = -\int_T F\frac{\partial P}{\partial i}\mathrm{D}\tau - \int_{S+\sigma_+ +\sigma_-} FP\cos(i, n)\mathrm{D}\tau.$$

Itt a baloldali tér-integralis részint fölületi integralissal, részint egy más térfogati integralissal van kifejezve. Ilyképen való előállítását részleges reductiójának nevezzük.

Ez az egyenlet formalisan magában foglalja a teljes reductio egyenletét, amennyiben az által, hogy $P=1$-et írunk, az utóbbiba megy át.

2.) Ha F és Q, F és R oly tulajdonságúak a T térben, mint F és P, és ha emellett az i bármely irány lehet, irjuk egyenletünkben F, P és i helyett rendre F, P és x; F, Q és y; F, R és z. Aztán adjuk össze a három egyenletet.

Rövidség kedveért tévén:

$$\cos(x, n)\equiv\alpha,\ \cos(y, n)\equiv\beta,\ \cos(z, n)\equiv\gamma,$$

úgy

$$\int_T\left(P\frac{\partial F}{\partial x}+Q\frac{\partial F}{\partial F}+R\frac{\partial F}{\partial z}\right)\mathrm{D}\tau=$$

$$=-\int_T\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)F.\mathrm{D}\tau-\int_{S+\sigma_{+}+\sigma_{-}}(P\alpha+Q\beta+R\gamma)F.\mathrm{D}\sigma.$$

3.) Ha a (P, Q, R) vectornak van potentialisa, Φ, a T térben, úgy, ezt a szokásos rövidítést használván:

$$\frac{\partial\ \Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\equiv\Delta\Phi,$$

a (XVII) czikk értelmében, ahol most az i irányon n irány gondolandó:

$$\int_T\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{\partial F}{\partial z}\right)\mathrm{D}\tau=-\int_T F.\Delta\Phi.\mathrm{D}\tau-\int_{S+\sigma_{+}+\sigma_{-}}\frac{\partial\Phi}{\partial n}F.\mathrm{D}\sigma.$$

4.) Ha Φ és $\partial F:\partial x$, Φ és $\partial F:\partial y$, Φ és $\partial F:\partial z$ oly tulajdonságuak, mint a 2.) részben F és P, F és Q, F és R, tehát oly tu'ajdonságúak, mint a 3.) részben F és $\partial\Phi:\partial x$, F és $\partial\Phi:\partial y$, F és $\partial\Phi:\partial z$, akkor az iménti egyenletben F és Φ fölcserélhetők. Cselekedjük meg a fölcserélést, aztán az új egyenletet vonjuk ki az eredetiből.

Ily módon a következő egyenlethez jutunk:

$$\int_T(\Phi.\Delta F-F.\Delta\Phi)\mathrm{D}\tau=-\int_{S+\sigma_{+}+\sigma_{-}}\left(\Phi\frac{\partial F}{\partial n}-F\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right)\mathrm{D}\sigma.$$

5.) Ha a (P, Q, R) vectornak vector-potentialisa van a T térben, akkor (XXI.) szerint

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=o,$$

tehát a 2.) részben az egyik tér-integralis eltűnik, és a részleges reductio teljessé válik.

Legyen (U, V, W) a vector-potentialis. Ha l és m tangentialis irányok a $D\sigma$ fölület-elemnél és merőlegesek egymásra úgy, hogy l, m, n oly helyzeti viszonyban vannak, mint rendre a helyhatározó tengelyek: jelöljék L, M, N a vector-potentialisnak az l, m, n irányra tartozó componensét. Akkor (XX, 3b) értelmében

$$\int\limits_T\left[\left(\frac{\partial W}{\partial y}-\frac{\partial V}{\partial z}\right)\frac{\partial F}{\partial x}+\left(\frac{\partial U}{\partial z}-\frac{\partial W}{\partial x}\right)\frac{\partial F}{\partial y}+\left(\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial y}\right)\frac{\partial F}{\partial z}\right]\mathrm{D}\tau=$$

$$=-\int\limits_{S+\sigma_{+}+\sigma_{-}}\left(\frac{\partial M}{\partial l}-\frac{\partial L}{\partial m}\right)F\,.\,\mathrm{D}\sigma.$$

6.) Ha (X, Y, Z) vectornak T térben van vector-potentialisa (U, V, W), és, ha U' és W, U' és V, V' és U, V' és W, W' és V, W' és U páronként oly tulajdonságúak, mint 1.)-ben F és P és emellett az i bármely irány lehet, úgy vessünk ügyet erre a tér-integralisra:

$$\int\limits_T(U'X+V'Y+W'Z)\mathrm{D}\tau.$$

Behelyettesítvén ebbe a következőket:

$$X\equiv\frac{\partial W}{\partial y}-\frac{\partial V}{\partial z},\qquad Y\equiv\frac{\partial U}{\partial z}-\frac{\partial W}{\partial x},\qquad Z\equiv\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial y},$$

ez által hat tagra szakad az integrálandó függvény. Végezzünk mindegyik tagra vonatkozólag részleges reductiót. Ha az (U', V', W') vectorral vector-potentialis módjára meghatározott vector (X', Y', Z'), azaz, ha

$$X'\equiv\frac{\partial W'}{\partial y}-\frac{\partial V'}{\partial z},\qquad Y'\equiv\frac{\partial U'}{\partial z}-\frac{\partial W'}{\partial z},\qquad Z'\equiv\frac{\partial V'}{\partial x}-\frac{\partial U'}{\partial y},$$

akkor a reductiók folytán

$$\int\limits_T(U'X+V'Y+W'Z)\mathrm{D}\tau=\int\limits_T(UX'+VY'+WZ')\mathrm{D}\tau+$$

$$+\int\limits_{S+\sigma_{+}+\sigma_{-}}[(W'\beta-V'\gamma)U+(U'\gamma-W'\alpha)V+(V'\alpha-U'\beta)W]\mathrm{D}\sigma.$$

7.) Abban a különös esetben, hogy az (U', V', W') vectornak van a T térben potentialisa, F, az egyik tér-integralis eltűnik, mert

$$X' = o, \qquad Y' = o, \qquad Z' = o,$$

s a reductiós egyenlet, részletesen kiírva, így jelenik meg:

$$\int_T \left[\left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}\right)\frac{\partial F}{\partial x} + \left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}\right)\frac{\partial F}{\partial y} + \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right)\frac{\partial F}{\partial z}\right] \mathrm{D}\tau =$$

$$= \int_{S+\sigma_+ + \sigma_-} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial z}\beta - \frac{\partial F}{\partial y}\gamma\right)U + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\gamma - \frac{\partial F}{\partial z}\alpha\right)V + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\alpha - \frac{\partial F}{\partial x}\beta\right)W\right]\mathrm{D}\sigma$$

8.) Akármily functionalis kifejezés tér-integralisán végezzünk reductiot, ennek az alapját mindig a (XXVI.) czikk végén jegyzett egyenlet képezi: bármely reductiós egyenlet térfogati része mindig oly tagokra vezethető, aminő ennek az egyenletnek a baloldala; csakhogy a különböző tagokba különböző függvény és irány tartozhatik.

Azonban akár hány ilyetén tagot tartalmazzon a térfogati rész, ha az egyes függvények általában mindenkép deriválhatók a kijelölt térben, úgy mindig három ilyetén tagból állítható össze, amelyekben az irányokat a coordinata-tengelyek irányai képezik. Mert azoknak a függvényeknek bármely irányú deriváltja a coordinata deriváltakkal fejezhető ki, (XVII).

Tényileg, legyen

$$I = \int_T \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial i_1} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial i_2} + \cdots\right)\mathrm{D}\tau.$$

Ha az i irány cosinusai $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ sít., úgy

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial i_1} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial x}\alpha_1 + \frac{\partial \Phi_1}{\partial y}\beta_1 + \frac{\partial \Phi_1}{\partial z}\gamma_1, \quad \text{sít.}$$

Ha tehát írjuk:

$$\begin{aligned} \Phi_1\alpha_1 + \Phi_2\alpha_2 + \ldots &\equiv f \\ \Phi_1\beta_1 + \Phi_2\beta_2 + \ldots &\equiv g \\ \Phi_1\gamma_1 + \Phi_2\gamma_2 + \ldots &\equiv h, \end{aligned}$$

akkor

$$I = \int_T \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}\right)\mathrm{D}\tau.$$

Mithogy pedig a reductio után

$$I=\int\limits_{S+\sigma_{+}+\sigma_{-}}[\Phi_1\cos(i_1,\,n)+\Phi_2\cos(i_2,\,n)+\,.\,.]\mathrm{D}\sigma$$

és, minthogy

$$\cos(i,\,n)=\alpha_1\alpha+\beta_1\beta+\gamma_1\gamma,\ \text{stb.},$$

ennél fogva

$$\int\limits_T\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}+\frac{\partial h}{\partial z}\right)\mathrm{D}\tau=\int\limits_{S+\sigma_{+}+\sigma_{-}}(f\alpha+g\beta+h\gamma)\mathrm{D}\sigma,$$

akár teljesíti egyenként f, g, h előforduló deriváltja is, u. m. $\partial f:\partial x$, $\partial g:\partial y$, $\partial h:\partial z$ a (XXVI)-ban kiszabott föltételeket, akár nem, hacsak Φ_1, $\partial\Phi_1:\partial i_1$ stb. teljesítik azokat.

XXVIII. Tér-integrálisok Gauss-Green- és Kirchhoff-féle reductiója.

Tegyük föl, hogy a hely F, G, H függvényei a következő tulajdonságokkal birnak a T térben: általában folytonosak; amely pontban nem folytonosak, abban vagy végesek, vagy végtelenségi rendjük kisebb mint 2; amely vonal pontjaiban nem folytonosak, azon a vonalon vagy végesek, vagy végtelenségi rendjük kisebb mint 1; amely fölület pontjaiban nem folytonosak, azon a fölületen mindkét oldalról határozott végesek; rendre x, y, z szerint általában deriválhatók; deriváltjuk általában folytonos; amely pontban nem az, abban vagy véges, vagy végtelenségi rendje kisebb mint 3; amely vonal pontjaiban nem folytonos, azon a vonalon vagy véges, vagy végtelenségi rendje kisebb mint 2; amely fölület pontjaiban nem folytonos, azon a fölületen vagy véges, vagy végtelenségi rendje kisebb mint 1.

E föltételek alatt (XXVI)

$$\int\limits_T\left(\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial y}+\frac{\partial H}{\partial z}\right)\mathrm{D}\tau=-\int\limits_{S+\sigma_{+}+\sigma_{-}}(F\alpha+G\beta+H\gamma)\mathrm{D}\sigma).$$

Ezek a föltételek többet tartalmaznak, mint amennyi abhoz szükséges, hogy az integralis-egyenlet helyes legyen. Valóban, e föltételek egész összesége csak általában véve szükséges: a függvények bizonyos alakrendszere kielégíti reductiós egyenletünket, jóllehet némely előirt föltételt nem teljesít.

A függvények bizonyos alak-rendszerének pedig más reductiós egyenlet felel meg amiatt, hogy némely előirt fötételt nem teljesít. Ennek az alak-rendszernek egy specialis fajára vonatkozik egy Gauss-tól egy Greentől és egy Kirchhofftól szerzett reductio, amelyek mindegyike alap-vető jelentőséggel bir az alkalmazásokban.

1.) Tegyük föl, hogy az (F, G, H) vector a T tér belsejében lévő a, b, c pontban másodrendű végtelen, a $(\partial F:\partial x, \partial F:\partial y, \partial F:\partial z)$ vector pedig ugyanott harmadrendű végtelen, de a

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial y}+\frac{\partial H}{\partial z}$$

összeg vagy véges ebben az a, b, c pontban is, vagy harmadiknál alacsonyabb rendűen végtelen, és az a, b, c pont nem pontja különös vonalnak vagy különös fölületnek, azaz körül zárható oly fölülettel, amelyen belűl az F, G, H függvénynek és a $\partial F:\partial x, \partial G:\partial y, \partial H:\partial z$ függvénynek nincs más különös helye, mint az a, b, c pont. Ilyen fölületet jelöljön a következőkben S és a körülfogta tért jelölje majd T, mert a tér többi részével nem kell törődnünk.

Ha az a, b, c különös pont nem léteznék ebben a T térben, akkor

$$\int_T\left(\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial y}+\frac{\partial H}{\partial z}\right)\mathrm{D}\tau=-\int_S(F\alpha+G\beta+H\gamma)\mathrm{D}\sigma$$

volna. Az a, b, c pont miatt általában nem érvényes ez az egyenlet, jóllehet a két integralis létezik. Általában nem érvényes, mert (XXVI) értelmében olyan három egyenletet föltételez, amelyek rendszere ezuttal nem létezik.

Azonban zárjuk körül az a, b, c pontot oly S' fölülettel, amely egészen a T tér belsejében van. Az S' és S fölület közt foglalt $T-T'$ térre alkalmazhatjuk a reductiót:

$$\int_{T-T'}\left(\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial y}+\frac{\partial H}{\partial z}\right)\mathrm{D}\tau=-\int_S(F\alpha+G\beta+H\gamma)\mathrm{D}\sigma-\int_{S'}(F\alpha+G\beta+H\gamma)\mathrm{D}\sigma.$$

Ha most az S' fölületet úgy változtatjuk, hogy a belülötte foglalt tér, T', végtelenül kisebbedjék, a $T-T'$ térre szóló integralis értéke végtelenül közeledik a T térre szóló integralis értékéhez, míg az S felületre szóló integralis változatlan marad. Következőleg az S' fölületre szóló integralis szükségképen határozott véges értékbe convergál, amely független attól, hogy milyen alakzaton vezetjük át az S' fölületet, — az a, b, c pontba, vagy ezen a ponton átfekvő vonalba, vagy fölület-darabba terelvén pontjait avégből, hogy tértartalmát, T', elenyésztessük.

Ezek után írjuk:

$$F=\frac{u}{r^2},\qquad G=\frac{v}{r^2},\qquad H=\frac{w}{r^2},$$

ahol r az x, y, z függvény-helynek az a, b, c ponttól mért távolsága

$$r^2=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2,$$

u, v, w pedig az x, y, z coordinatáknak, az r távolságnak, és az

$$\frac{x-a}{r}\equiv\lambda,\qquad \frac{y-b}{r}\equiv\mu,\qquad \frac{z-c}{r}\equiv\nu$$

irány-cosinusoknak, mint független argumentumoknak, deriválható folytonos függvényei legyenek a T térben, és e térben a hét argumentum mindegyikére képezett partialis deriváltjuk is folytonos legyen.

Minthogy a változó S' fölület megválasztása közömbös a végső eredményre nézve, válaszszuk meg ezt kisebbedő gömbfölületnek a, b, c ponttal, mint centrummal, és ρ sugárral:

$$\int_{S'}(F\alpha+G\beta+H\gamma)\mathrm{D}\sigma\equiv\int_{S'}\frac{u\alpha+v\beta+w\gamma}{\rho^2}\mathrm{D}\sigma.$$

Ebben az integralisban $\lambda=\alpha$ stb. Ha tehát általánosan

$$u\equiv u(x, y, z, r, \lambda, \mu, \nu),\ \text{stb.},$$

úgy ebben az integralisban

$$u\equiv u(x, y, z, \rho, \alpha, \beta, \gamma),\ \text{stb.}$$

és, ha írjuk:

$$u(a, b, c, o, \alpha, \beta, \gamma)\equiv u_0\ \text{stb.}$$

akkor

$$\lim_{T'\to o}\int_{S'}(F\alpha+G\beta+H\gamma)\mathrm{D}\sigma=\lim_{\rho\to o}\int_{S'}\frac{u_0\alpha+v_0\beta+w_0\gamma}{\rho^2}\mathrm{D}\sigma.$$

Gondoljuk most az a, b, c pont, mint centrum, körül a sugáregységgel képezett (σ_0) gömbfölületet. A $(\mathrm{D}\sigma)$ fölület-elem centralis vetülete ezen a fölületen legyen $(\mathrm{D}\sigma_0)$. Akkor

$$\mathrm{D}\sigma=\rho^2\mathrm{D}\sigma_0.$$

Eszerint

$$\lim_{T'\to o}\int_{S'}(F\alpha+G\beta+H\gamma)\mathrm{D}\sigma=\int_{\sigma_0}(u_0\alpha+v_0\beta+w_0\gamma)\mathrm{D}\sigma_0.$$

Következésképen

$$\int_T\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u}{r^2}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{v}{r^2}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{w}{r^2}\right)\right]\mathrm{D}\tau=$$

$$=-\int_S\frac{u\alpha+v\beta+w\gamma}{r^2}\mathrm{D}\sigma-\int_{\sigma_0}(u_0\alpha+v_0\beta+w_0\gamma)\mathrm{D}\sigma_0,$$

hacsak a térfogatilag integrálandó kifejezés vagy véges az a, b, c helyen is, vagy végtelenségi rendje kisebb mint három.

2.) Ha egyenletünkben a σ_0 gömbfölületre szóló integralis$=o$, akkor végeredményben közönséges reductióval van dolgunk.

Erre való példaképen tegyük föl, hogy az egész T térben

$$u=R\mu-Q\nu,\quad v=P\nu-R\lambda,\quad w=Q\lambda-P\mu,$$

ahol P, Q, R ugyanazokkal a tulajdonságokkal bírjanak, amelyeket az u, v, w függvényekre róttunk ki, azaz x, y, z, r, λ, μ, ν deriválható folytonos függvényei legyenek, és a hét argumentum mindegyike szerint képezett partialis deriváltjuk is folytonos legyen a T térben. Most

$$u\lambda+v\mu+w\nu=o,$$

és mivel a σ_0 gömbfölületre szóló integralisban

$$u=u_0=R_0\beta-Q_0\gamma,\ \text{stb.}$$

úgy egyszersmind

$$u_0\alpha+v_0\beta+w_0\gamma=o,$$

tehát beköszönt a közönséges reductio. Csakhogy a térfogatilag integrálandó kifejezésnek vagy végesnek kell lennie az a, b, c helyen is, vagy 3-nál alacsonyabb rendűen végtelennek.

Megállapitandók e követelés föltételét, vegyük számba, hogy

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\lambda,\quad \frac{\partial r}{\partial y}=\mu,\quad \frac{\partial r}{\partial z}=\nu,$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x}=\frac{1-\lambda^2}{r},\quad \frac{\partial\lambda}{\partial y}=-\frac{\lambda\mu}{r},\quad \frac{\partial\lambda}{\partial z}=-\frac{\lambda\nu}{r},$$

$$\frac{\partial\mu}{\partial x}=-\frac{\mu\lambda}{r},\quad \frac{\partial\mu}{\partial y}=\frac{1-\mu^2}{r},\quad \frac{\partial\mu}{\partial z}=-\frac{\mu\nu}{r},$$

$$\frac{\partial\nu}{\partial x}=-\frac{\nu\lambda}{r},\quad \frac{\partial\nu}{\partial y}=-\frac{\nu\mu}{r},\quad \frac{\partial\nu}{\partial z}=\frac{1-\nu^2}{r}.$$

A P, Q, R függvényeknek, mint a hét argumentum függvényének a partialis deriválását δ jegygyel jelöljük, mihez képest

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\delta P}{\delta x}+\frac{\delta P}{\delta r}\lambda+\frac{\delta P}{\delta\lambda}\frac{1-\lambda^2}{r}-\frac{\delta P}{\delta\mu}\frac{\lambda\mu}{r}-\frac{\delta P}{\delta\nu}\frac{\lambda\nu}{r},\qquad \text{stb.}$$

A tér-integralisban kijelentett deriválások és az összeadás elvégzése után oly kifejezéshez jutunk, amelynek nagy része identice kiesik az összegből, és marad:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u}{r^2}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{v}{r^2}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{w}{r^2}\right)=$$
$$=-\left[\left(\frac{\delta R}{\delta y}-\frac{\delta Q}{\delta z}\right)\lambda+\left(\frac{\delta P}{\delta z}-\frac{\delta R}{\delta x}\right)\mu+\left(\frac{\delta Q}{\delta x}-\frac{\delta P}{\delta y}\right)\nu\right]\frac{1}{r^2}$$
$$-\left[\left(\frac{\delta R}{\delta \mu}-\frac{\delta Q}{\delta \nu}\right)\lambda+\left(\frac{\delta P}{\delta \nu}-\frac{\delta R}{\delta \lambda}\right)\mu+\left(\frac{\delta Q}{\delta \lambda}-\frac{\delta P}{\delta \mu}\right)\nu\right]\frac{1}{r^3}.$$

Igy, ha

$$\left(\frac{\delta R}{\delta \mu}-\frac{\delta Q}{\delta \nu}\right)\lambda+\left(\frac{\delta P}{\delta \nu}-\frac{\delta R}{\delta \lambda}\right)\mu+\left(\frac{\delta Q}{\delta \mu}-\frac{\delta P}{\delta \mu}\right)\nu$$

legalább az a, b, c helyen algebrailag eltűnik, akkor példánk beválik. Ez annak a föltétele, mert jelen kifejezésünkben $1:r^2$ factora véges az a, b, c pontban is, jóllehet nem folytonos e helyen amiatt, hogy a λ, μ, ν iránycosinusokat tartalmazza. Szoritkozzunk arra az esetre, hogy mindenütt identice eltűnik ez a kifejezés, még pedig úgy, hogy

$$P=\frac{\delta G}{\delta \mu},\qquad Q=\frac{\delta G}{\delta \mu},\qquad R=\frac{\delta G}{\delta \nu}.$$

Ezek beiktatásával a következő reductióhoz jutunk:

$$\int_T\left[\frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\delta G}{\delta \nu}\mu-\frac{\delta G}{\delta \mu}\nu\right)+\frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\delta G}{\delta \lambda}\nu-\frac{\delta G}{\delta \nu}\lambda\right)+\frac{\delta}{\delta z}\left(\frac{\delta G}{\delta \mu}\lambda-\frac{\delta G}{\delta \lambda}\mu\right)\right]\frac{\mathrm{D}\tau}{r^2}$$
$$=-\int_S\left[\left(\frac{\delta G}{\delta \nu}\mu-\frac{\delta G}{\delta \mu}\nu\right)\alpha+\left(\frac{\delta G}{\delta \lambda}\nu-\frac{\delta G}{\delta \nu}\lambda\right)\beta+\left(\frac{\delta G}{\delta \mu}\lambda-\frac{\delta G}{\delta \lambda}\mu\right)\gamma\right]\frac{\mathrm{D}\sigma}{r^2}.$$

3.) Abban a még különösebb esetben, hogy

$$G\equiv\Phi(x,\, y,\, z,\, r)\, f\,(\lambda,\, \mu,\, \nu),$$

reductiónk ezt az alakot ölti:

$$\int_T\left[\left(\frac{\delta f}{\delta \nu}\mu+\frac{\delta f}{\delta \mu}\nu\right)\frac{\delta \Phi}{\delta x}+\left(\frac{\delta f}{\delta \lambda}\nu-\frac{\delta f}{\delta \nu}\lambda\right)\frac{\delta \Phi}{\delta y}+\left(\frac{\delta f}{\delta \mu}\lambda+\frac{\delta f}{\delta \lambda}\mu\right)\frac{\delta \Phi}{\delta z}\right]\frac{\mathrm{D}\tau}{r^2}$$
$$=-\int_S\left[\left(\frac{\delta f}{\delta \nu}\mu-\frac{\delta f}{\delta \mu}\nu\right)\alpha+\left(\frac{\delta f}{\delta \lambda}\nu-\frac{\delta f}{\delta \nu}\lambda\right)\beta+\left(\frac{\delta f}{\delta \mu}\lambda-\frac{\delta f}{\delta \lambda}\mu\right)\gamma\right]\frac{\Phi}{r^2}\mathrm{D}\sigma.$$

4.) Ha az 1.)-ben szerzett egyenletből nem tűnik el az az integralis, amely a σ_0 gömbfölületre terjed ki, akkor a raductio új alakjával van dolgunk.

Példaképen tegyük föl, hogy az egész T térben

$$u=\psi\lambda, \quad v=\psi\mu, \quad w=\psi\nu,$$

ahol a ψ ugyanoly függvény legyen, aminőkül az u, v, w függvényeket definiáltuk: az x, y, z, r, λ, μ, ν hét argumentum deriválható folytonos függvénye, és mindegyik argumentumra képzett partialis deriváltja is folytonos a T térben mindenütt.

Mivel a σ_0 fölületre szóló integralisban

$$u=u_0=\psi_0\alpha, \text{ stb},$$

így

$$\int_{\sigma_0}(u_0\alpha+v_0\beta+w_0\gamma)\mathrm{D}\sigma=\int_{\sigma_0}\psi_0\mathrm{D}\sigma,$$

ahol természetesen

$$\psi_0=\psi(a, b, c, 0, \alpha, \beta, \gamma).$$

Azomban kell, hogy a térfogatilag integrálandó kifejezés vagy véges legyen az a, b, c helyen is, vagy végtelenségi rendszáma 3-nál kisebb legyen. Ezt a föltételt egészen általánosan kielégítik u, v, w az itt választott alakjukkal. Amig a ψ függvényt csak annyiban deriváljuk partiálisan a coordinatákra, amennyiban explicite és az r távolság révén tartalmazza azokat, ennek úgy adjunk kifejezést, hogy a felső ∂ jegyhez hiány-jelet írjunk. Mihez képest, a δ jegy előbbi jelentménye szerint

$$\frac{\partial'\psi}{\partial x}=\frac{\delta\psi}{\delta x}+\frac{\delta\psi}{\delta r}\lambda, \quad \text{stb.}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{\partial'\psi}{\partial x}+\frac{\delta\psi}{\delta\lambda}\,\frac{1-\lambda^2}{r}-\frac{\delta\psi}{\delta\mu}\,\frac{\lambda\mu}{r}-\frac{\delta\psi}{\delta\nu}\,\frac{\lambda\nu}{r}, \qquad \text{stb.}$$

Szem előtt tartva r, λ, μ, ν deriváltjainak a 2.) czikk-részben följegyzett kifejezéseit, könnyű szerrel találjuk, hogy jelenlegi példánkban

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u}{r^2}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{v}{r^2}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{w}{r^2}\right)=\left(\frac{\partial'\psi}{\partial x}\lambda+\frac{\partial'\psi}{\partial y}\mu+\frac{\partial'\psi}{\partial z}\nu\right)\frac{1}{r^2},$$

már pedig $\partial'\psi:\partial x$ stb. végesek az a, b, c helyen is, bár, amennyiben tartalmazzák az irány-cosinusokat mint a hét argumentum függvényei, nem folytonosak ezen a helyen.

Következőleg

$$\int_T\left(\frac{\partial'\psi}{\partial x}\lambda+\frac{\partial'\psi}{\partial y}\mu+\frac{\partial'\psi}{\partial z}\nu\right)\frac{\mathrm{D}\tau}{r^2}=-\int_S\frac{\lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma}{r^2}\psi\mathrm{D}\sigma-\int_{\sigma_0}\psi_0\mathrm{D}\sigma.$$

Mivel pedig

$$\frac{\lambda}{r^2} = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}, \quad \text{stb.}$$

így egyszersmind

$$\int_T \left(\frac{\partial'\psi}{\partial x}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \frac{\partial'\psi}{\partial y}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + \frac{\partial'\psi}{\partial z}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right) \mathrm{D}\tau = -\int_S \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\psi \mathrm{D}\sigma + \int_{\sigma_0} \psi_0 \mathrm{D}\sigma_0.$$

Természetesen akkor is érvényes ez az egyenlet, ha a T térben az a, b, c ponton kivűl oly különös helyek, pontok, vonalak, fölületek vannak, amelyeket megenged a közönséges reductio.

5.) Legyen, hogy $\partial'\psi : \partial x$, stb. szintén deriválható folytonos függvényei a hét argumentumnak, és mindenik argumentumra képezett partialis deriváltjuk folytonos a T térben. Akkor az itteni tér-integralison az $1 : r$ függvényre vonatkozólag közönséges részleges reductiót végezhetünk, mert az

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial'\psi}{\partial x}, \quad \text{stb.}$$

kifejezések harmadiknál alacsonyabb rendűen, sőt csak elsőrendűen válnak az a, b, c pontban végtelenné, és következőleg $1 : r$ és $\partial'\psi : \partial x$, $1 : r$ és $\partial'\psi : \partial y$, $1 : r$ és $\partial'\psi : \partial z$ teljesítik azokat a föltételeket, amelyek a (XXVII) czikkben az F és P függvényekre kiszabvák. E czikk 2.) részében foglalt mintára megtévén a reductiót, találjuk, hogy

$$\int_T \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial'\psi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial'\psi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial'\psi}{\partial z}\right)\frac{\mathrm{D}\tau}{r} = \int_S \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\psi - \frac{1}{r}\frac{\partial'\psi}{\partial n}\right)\mathrm{D}\sigma - \int_{\sigma_0} \psi_0 \mathrm{D}\sigma_0,$$

ahol $\partial'\psi : \partial n$ azt a normalis irányú deriváltat jelenti, amelynek a képzése a coordinatákra mint explicite és mint az r távolság révén előforduló argumentumokra szorítkozik.

Természetesen akkor is érvényes ez az egyenlet, ha a T térben az a, b, c ponton kivül oly különös helyek, pontok, vonalak, fölületek vannak, amelyeket a közönséges reductiók megengednek.

6.) Abban a különösebb esetben, hogy

$$\psi \equiv \Phi(x, y, z, r) \,.\, f(\lambda, \mu, \nu),$$

a 4.) alatti czikkely-részből

$$\int\limits_T \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}+\frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}+\frac{\partial \Phi}{\partial z}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right) f\mathrm{D}\tau = -\int\limits_S \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\Phi f\mathrm{D}\sigma + \Phi_0 \int\limits_{\sigma_0} f\mathrm{D}\sigma_0\,;$$

az 5) alattiból pedig, az elején kirótt további föltétel alatt:

$$\int\limits_T \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}f\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}f\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}f\right)\right]\frac{\mathrm{D}\tau}{r} =$$

$$= \int\limits_S \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\Phi - \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right) f\mathrm{D}\sigma - \Phi_0 \int\limits_{\sigma_0} f\mathrm{D}\sigma_0.$$

Az első egyenletben Φ és f deriválható folytonosak a maguk négy, illetőleg három argumentuma szerint, és mindegyik partialis deriváltjuk is folytonos T-ben. A második egyenletben ezen fölül még egyszer deriválhatók argumentumaik szerint és második partialis deriváltjaik is folytonosak T-ben. Továbbá

$$\Phi_0 = \Phi(a,\ b,\ c,\ o).$$

Azonban akkor is érvényesek ezek az egyenletek, ha oly különös pontok, vonalak, fölületek fordulnak elő a T-ben, az a, b, c ponton kivűl, amelyeket a közönséges reductiók megengednek.

7.) Most még különösebb esetre térve át, tegyük $f=1$. A Φ függvény az x, y, z és r argumentumok deriválható folytonos függvényét jelentvén T-ben, amelynek a négy partialis deriváltja is folytonos ebben a térben:

$$\int\limits_T \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}+\frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}+\frac{\partial \Phi}{\partial z}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right)\mathrm{D}\tau = -\int\limits_S \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\Phi\mathrm{D}\sigma + 4\pi\Phi(a,\ b,\ c,\ o).$$

Ha pedig Φ négy partialis deriváltja is deriválható mind a négy argumentum szerint, és második partialis deriváltjai is folytonosak T-ben:

$$\int\limits_S \frac{\Delta\Phi}{r}\mathrm{D}\tau = \int\limits_T \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\Phi - \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right)\mathrm{D}\sigma - 4\pi\Phi(a,\ b,\ c,\ o).$$

Akkor is érvényes egyenletek, ha oly különös helyek vannak a T térben az a, b, c ponton kivül, amelyeket a közönséges reductiók megengednek.

Ezeknek a reductióknak az elsejét nevezzük Gauss-féle reductióknak, másodikát Green-féle reductiónak. A σ_0 gömbfölület közbenjárásával egyenesen levezethetők az előbbi czikk 3.) és 4.) részében fölállított egyenletekből, amely egyenletek tartalmát Green tantételének szokás nevezni.

8.) Most a Green-féle reductióból egy újat származtatunk, s ezt nevezzük Kirchhoff-félének. Minthogy

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=\frac{\delta\Phi}{\delta x}+\frac{\partial\Phi}{\partial r}\lambda,\ \text{stb.}$$

úgy

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}=\frac{\delta^2\Phi}{\delta x^2}+2\frac{\delta^2\Phi}{\delta x\delta r}\lambda+\frac{\delta^2\Phi}{\delta r^2}\lambda^2+\frac{\delta\Phi}{\delta r}\frac{1-\lambda^2}{r}=\frac{\delta^2\Phi}{\delta x^2}-\frac{\delta^2\Phi}{\delta r^2}\lambda^2+$$

$$+2\left(\frac{\delta^2\Phi}{\delta x\delta r}\lambda+\frac{\delta^2\Phi}{\delta r^2}\lambda^2+\frac{\delta\Phi}{\delta r}\frac{1-\lambda^2}{2r}\right),\ \text{stb.}$$

Következőleg

$$\Delta\Phi=\frac{\delta^2\Phi}{\delta x^2}+\frac{\delta^2\Phi}{\delta y^2}+\frac{\delta^2\Phi}{\delta z^2}-\frac{\delta^2\Phi}{\delta r^2}+2\left(\frac{\delta^2\Phi}{\delta x\delta r}\lambda+\frac{\delta^2\Phi}{\delta y\delta r}\mu+\frac{\delta^2\Phi}{\delta z\delta r}\nu+\frac{\delta^2\Phi}{\delta r^2}+\frac{\delta\Phi}{\delta r}\frac{1}{r}\right)=$$

$$=\frac{\delta^2\Phi}{\delta x^2}+\frac{\delta^2\Phi}{\delta y^2}+\frac{\delta^2\Phi}{\delta z^2}-\frac{\delta^2\Phi}{\delta r^2}+\frac{2}{r}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(r\frac{\delta\Phi}{\delta r}\right).\lambda+\frac{\partial}{\partial y}\left(r\frac{\delta\Phi}{\delta r}\right).\mu+\frac{\partial}{\partial z}\left(r\frac{\delta\Phi}{\delta r}\right).\nu\right]$$

Helyettesítsük be $\Delta\Phi$ e kifejezését a 7.) czikk-részben a Green-féle egyenletbe, azután a tér-integralis második részén végezzünk részleges reductiót. Találjuk:

$$\int_T\left(\frac{\delta^2\Phi}{\delta x^2}+\frac{\delta^2\Phi}{\delta y^2}+\frac{\delta^2\Phi}{\delta z^2}-\frac{\delta^2\Phi}{\delta r^2}\right)\frac{D\tau}{r}=$$

$$=\int_S\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\Phi-\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial n}-2r\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\frac{\delta\Phi}{\delta r}\right)D\sigma-4\pi\Phi(a,b,c,o).$$

Azomban, ha az n irányú deriválást, amennyiben az r argumentumra nem terjed ki, $\mathfrak{d}$ jegygyel tűntetjük föl, úgy

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial n}=\frac{1}{r}\frac{\delta\Phi}{\delta n}+\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial n}\frac{\delta\Phi}{\delta r}=\frac{1}{r}\frac{\mathfrak{d}\Phi}{\mathfrak{d}n}-r\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\frac{\mathfrak{d}\Phi}{\mathfrak{d}r},$$

minek következtében így is írhatjuk reductiós egyenletünket:

$$\int_T\left(\frac{\delta^2\Phi}{\delta x^2}+\frac{\delta^2\Phi}{\delta y^2}+\frac{\delta^2\Phi}{\delta z^2}-\frac{\delta^2\Phi}{\delta r^2}\right)\frac{D\tau}{r}=$$

$$=\int_S\left[\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\left(\Phi-r\frac{\mathfrak{d}\Phi}{\mathfrak{d}r}\right)-\frac{1}{r}\frac{\mathfrak{d}\Phi}{\mathfrak{d}n}\right]D\sigma-4\pi\Phi(a,b,c,o).$$

XXIX. Fölületi integralisok reductiója.

1.) Tegyük föl, hogy U, V, W legalább is egyszer deriválható folytonos függvényei a coordinatáknak és partialis deriváltjaik is folytonosak a T térben. Tegyük föl továbbá, hogy F legalább is kétszer deriválható folytonos függvénye a coordinatáknak és második partialis deriváltjai is folytonosak a T térben. Akkor (XXVII, 7)-ből folyólag

$$\int_T \left[\left(\frac{\partial W}{\partial y}-\frac{\partial V}{\partial z}\right)\frac{\partial F}{\partial x}+.+.\right]\mathrm{D}\tau=\int_S\left[\left(\frac{\partial F}{\partial z}\beta-\frac{\partial F}{\partial y}\gamma\right)U+.+.\right]\mathrm{D}\sigma,$$

ahol S a határfölület, α, β, γ pedig a ($\mathrm{D}\sigma$) fölület-elem befelé mutató normalisának irány-cosinusai.

Most a T téren végtelen vékony térközt értsünk, amelyet

$$F(x, y, z)=p=\text{const.}$$

$$F(x, y, z)=p+\delta p=\text{const.}$$

fölületek és egy ezekhez orthogonalis fölület határolnak. Ha azt a két fölület-darabot, amelyet az orthogonalis fölület a két másik fölületből kivág, σ és σ' jelöli, azt a végtelen vékony szalagot pedig, amelyet ezek a fölületek az orthogonalis fölületből kivágnak, σ_0 jelöli, úgy $S=\sigma+\sigma'+\sigma_0$. Azonban a σ és σ' fölületen

$$\alpha:\beta:\gamma=\frac{\partial F}{\partial x}:\frac{\partial F}{\partial y}:\frac{\partial F}{\partial z},$$

tehát a fölületi integralisnak a σ és σ' fölület-darabra vonatkozó része eltűnik, és így

$$\int_T \left[\left(\frac{\partial W}{\partial y}-\frac{\partial V}{\partial z}\right)\frac{\partial F}{\partial x}+.+.\right]\mathrm{D}\tau=\int_{\sigma_0}\left[\left(\frac{\partial F}{\partial z}\beta_0-\frac{\partial F}{\partial y}\gamma_0\right)U+.+.\right]\mathrm{D}\sigma.$$

A $D\tau$ tér-elemeket válaszszuk meg akkép, hogy a végtelen vékony T térköz teljes merőleges átmetszeti elemei legyenek, úgy, hogy, ha x, y, z helyen e térköz vastagsága δn és a σ fölület egy eleme $\mathrm{D}\sigma$, akkor

$$\mathrm{D}\tau=\delta n\,.\,\mathrm{D}\sigma.$$

A $D\sigma_0$ fölület-elemeket pedig válaszszuk meg akkép, hogy a végtelen keskeny σ_0 szalag teljes merőleges átmetszeti elemei legyenek, úgy, hogy, ha a szalag x, y, z helyénél a σ fölület-darab határ-vonalának egy hossz-eleme Ds, akkor

$$\mathrm{D}\sigma_0=\delta n\,.\,\mathrm{D}s.$$

Ámde irván

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2=N^2,$$

a (XIX) értelmében

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\pm N\alpha,\quad \frac{\partial F}{\partial y}=\pm N\beta,\quad \frac{\partial F}{\partial z}=\pm N\gamma,$$

és egyszersmind

$$\delta n=\pm\delta p:N.$$

Behelyettesítvén mindezt integralis egyenletünkbe, és tekintetbe vévén, hogy δp constans, találjuk:

$$\int_\sigma\left[\left(\frac{\partial W}{\partial y}-\frac{\partial V}{\partial z}\right)\alpha+.+.\right]\mathrm{D}\sigma=\int_s[(\gamma\beta_0-\beta\gamma_0)U+.+.]\mathrm{D}s$$

ahol s jelenti a σ fölület-darab határvonalát. A σ fölülethez tangentiális, a Ds vonal-elemre merőleges és a σ fölület belsejének mutató iránynak a cosinusai az $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$; α, β, γ pedig mindenütt a σ fölület normalisának irány-cosinusai. Igy az $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ és (α, β, γ) irány és a (Ds) vonal elem merőlegesek egymásra. Legyen, hogy a (Ds) vonal-elemnek azt az irányt tulajdonítjuk, a melylyel az $(\alpha\ \beta\ \gamma)$ és $(\alpha_0\ \beta_0\ \gamma_0)$ iránynak a tengelye bír (VIII.), és l, m, n legyenek az irány-cosinusai.

Akkor (VIII.):

$$\gamma\beta_0-\beta\gamma_0=l,\ \text{stb.},$$

tehát

$$\int_\sigma\left[\left(\frac{\partial W}{\partial y}-\frac{\partial V}{\partial y}\alpha+\left(\frac{\partial U}{\partial z}-\frac{\partial W}{\partial x}\right)\beta+\left(\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial y}\right)\gamma\right]\mathrm{D}\sigma=$$

$$=\int_s(Ul+Vm+Wn)\mathrm{D}s.$$

Aki a Ds vonal-elemnél lábtól fejnek az (α, β, γ) fölületi normalis irányába helyezkedik és a fölület belseje felé fordul, annak a jobbja felé mutat az (l, m, n) irány.

A levezetés értelmében U, V, W a σ fölület közelében deriválható folytonos függvénye a coordinatáknak, s partialis deriváltjaik is folytonosak. A σ fölület pedig oly egyenlettel fejezhető ki, amelyben a hely függvénye kétszer deriválható a coordinatákra és partialis deriváltjai is folytonosak a fölület közelében.

Levezetett egyenletünkben fölületi integralis vonalasra van reducálva: Stokes-féle reductio.

Vegyük észre, hogy, ha ξ, η tangentialis irányok és az (α, β, γ) normalissal oly helyzeti viszonyban vannak, mint a milyenben az x, y, z irány van egymással, ha továbbá (U, V, W) vector értéke a ξ irányon Ξ és az η irányon H, akkor (XX, $3b$)

$$\int_\sigma \left(\frac{\partial H}{\partial \xi} - \frac{\partial \Xi}{\partial \eta}\right) \mathrm{D}\sigma = \int_s (Ul + Vm + Wn) \mathrm{D}s.$$

2.) Akkor is érvényes az egyenlet, ha az U, V, W függvények és partialis deriváltjaik a σ fölület egyes pontjaiban nem folytonosak, de vagy végesek, vagy a függvények végtelenségi rendje 1-nél, deriváltjaik végtelenségi rendje 2-nél kisebb.

Ugyanis kerítsük be az ily pontokat igen kis vonalakkal, amelyek mindegyikének minden pontja egyenlő ρ távolságban legyen az illető különös ponttól. A belső pontokat igen kis zárt vonalakkal, a határvonalon lévőket a határ-vonalig terjedő igen kis vonalakkal kerítsük be. Utóbbiak az s határ-vonalból igen kis részeket metszenek ki. Az s vonal többi részét jelölje s', és a σ fölületnek azt a részét, amely, az s' vonal-rész meg a bekerítő s'' vonalak közt terűl el, jelölje σ'. Erre a σ' fölület-részre alkalmazható a reductio:

$$\int_{\sigma'} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}\right)\alpha + . + .\right] \mathrm{D}\sigma =$$

$$= \int_{s'} (Ul + Vm + Wn)\mathrm{D}s + \int_{s''} (Ul + Vm + Wn)\mathrm{D}s.$$

Ha az (U, V, W) vector nagysága R, és az s'' vonalakra szóló integralist I'' jelöli, úgy

$$|I''| \leqq \int_{s''} R\mathrm{D}s.$$

Legyen most, hogy R végtelenségi rendszáma sehol sem nagyobb, mint μ. Akkor létezik akkora véges constans, Q_0, hogy mindenütt

$$R < \frac{Q_0}{\rho^\mu},$$

és következőleg

$$|I''| < \frac{Q_0}{\rho^\mu} \int_{s''} \mathrm{D}s = Q_0 \frac{s''}{\rho^\mu}.$$

De bizonyosan létezik akkora véges constans szám, k_0, hogy bármely értékkel birjon az igen kis ρ távolság, $s'' \geqq k_0 \rho$, tehát

$$|I''| < Q_0 k_0 \rho^{1-\mu}.$$

Következőleg, ha $\mu < 1$, akkor ρ megválasztható oly kicsinynek, hogy mihelyt még kisebb, már $|I''|$ kisebb, mint egy tetszés szerint adott kis érték. De egyúttal oly kicsi lehet a ρ, hogy mihelyt még kisebb, már a σ' fölületre és az s' vonalra szóló integralis a σ fölületre és az s vonalra szóló integralistól tetszésre adott kicsinél kisebb értékben külömbözik.

3.) Ha folytonosság szakadási vonala van a U, V, W függvénynek a σ fölületen, akkor már nem érvényes az egyenletünk.

Azonban, ha végesek a függvények az ilyen vonalon, és folytonosság-szakadásuk csak abban áll, hogy más érték-rendszerük tartozik a vonal egyik oldalára, mint a másikra a fölületen, ha továbbá deriváltjaik vagy végesek, vagy elsőnél alacsonyabb rendűen végtelenek a különös vonalokon, akkor létezik egy más reductiós egyenlet.

Ehhez úgy jutunk el, hogy a σ fölületet vonalokkal oly részekre osztjuk, amelyekben nincs folytonosság-szakadási vonal. Természetesen a részekre osztó vonalak a különös vonalakra feküsznek.

Hasonló módon járva el, mint (XXVI, 4)-ben, találjuk, hogy

$$\int_\sigma \left[\left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}\right)\alpha + \left(\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial W}{\partial x}\right)\beta + \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right)\gamma\right] \mathrm{D}\sigma =$$

$$= \int_{s+s_+ + s_-} (Ul + Vm + Wn) \mathrm{D}s,$$

ha t. i.

$$\int_{s_+} (Ul + Vm + Wn) \mathrm{D}s = \int_\varsigma (Ul + Vm + Wn)_+ \mathrm{D}s$$

$$\int_{s_-} (Ul + Vm + Wn) \mathrm{D}s = \int_\varsigma (Ul + Vm + Wn)_- \mathrm{D}s,$$

ahol ς jelöli a folytonosság-szakadás vonalait és a (+) és (—) index az egyik és másik oldalra tartozó U, V, W, l, m, n értékeket külömbözteti meg.

Ha csak a deriváltak szenvednek folytonosság-szakadást a ς vonalokon, a fent definiált módon, akkor nyilvánvalóan a közönséges reductió érvényes, mert a ς vonalokra szóló integralis eltűnik,

XXX. Vonalas integralisok reductiója.

1.) Tegyük föl, hogy Φ a hely deriválható folytonos függvénye a két végű s vonalon. Másfelől gondoljuk, hogy egy mozgó pont írta le ezt a vonalat, és minden helyen a mozgás irányát tekintsük a vonal irányának, amelyet általánosan s jelőljön, úgy, hogy a vonal x, y, z helyén $\partial\Phi : \partial s$ a vonal irányában képezett derivált.

Akkor, ha a függvény értéke a vonal kezdő pontjában Φ_1 s a vonal végső pontjában Φ_2:

$$\int_s \frac{\partial\Phi}{\partial s} \mathrm{D}s = \Phi_2 - \Phi_1.$$

Mert

$$\frac{\partial\Phi}{\partial s} \mathrm{D}s$$

nem más, mint a függvény megváltozása a Ds vonal-elemen, s az ily megváltozások összesége a függvénynek az egész vonalon való megváltozása.

2.) Ha folytonosság-szakadási pontja van a Φ függvénynek a vonalon, akkor egyenletünk nem helyes.

Azonban, ha véges a függvény az ily pontban is, és folytonosság-szakadása csak abban áll, hogy más értéke tartozik a pont egyik oldalára, mint a másikra, ha továbbá deriváltja vagy véges, vagy elsőnél alacsonyabb rendű végtelen a különös pontokban, akkor egy más reductiós egyenlet létezik.

Ehhez úgy jutunk el, hogy annyi részben fogjuk föl a vonalat, ahányra a különös pontok osztják: egyenként mindenik osztásrészre fölirjuk az egyenletet, aztán összeadjuk az egyenleteket. Alkalmas rendezést végezvén,

$$\int_s \frac{\partial\Phi}{\partial s} \mathrm{D}s = \Phi_2 - \Phi_1 - \Sigma(\Phi_+ - \Phi_-)$$

reductióhoz jutunk, amelyben Φ_- egy különös pont innenső oldalára, Φ_+ tulsó oldalára tartozik a vonal-irány értelmében.

Tegyük itt ezt az észrevételt: ha Φ deriválható a három coordinatára a vonalon, s a (Ds) elemi vector componenseit Dx, Dy, Dz jelölik, akkor

$$\frac{\partial\Phi}{\partial s} = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\mathrm{D}x}{\mathrm{D}s} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\mathrm{D}y}{\mathrm{D}s} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{\mathrm{D}z}{\mathrm{D}s},$$

tehát

$$\int_s \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\mathrm{D}x+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\mathrm{D}y+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\mathrm{D}z\right)=\Phi_2-\Phi_1-\Sigma(\Phi_+-\Phi_-).$$

Ha csak a derivált szenvedne folytonosság-szakadást, akkor nyilvánvalóan a közönséges reductio érvényes.

XXXI. Több-értékű függvény geometriai integralisa.

Ha az integrálandó függvény a (XVI) czikk értelmében több-értékű abban a térben, fölületben, többszörösen összefüggő vonalban, amelyre az integrálást ki akarjuk terjeszteni, akkor rekesztő fölületek alkalmazásával egyértékű függvényekre bontsuk. A rekesztő fölületek minden esetre folytonosság-szakadási fölületek az egyes függvények érték-tartományában. Ha emellett teljesítik a függvények az integrálhatóság valamely elégséges föltételeit, tér-integralisaik annyiban külömböznek a közönséges egyértékű függvények tér-integralisaitól, hogy változtatható folytonosság-szakadási fölület tartozik beléjük; fölületi, illetőleg vonalos integralisuk annyiban külömbözik a közönséges egyértékű függvények fölületi és vonalos integralisától, hogy változtatható folytonosság-szakadási vonal illetőleg pont-hely tartozik beléjük, melyek az integralis fölületének, illetőleg vonalának és a rekesztő fölületeknek a metsződéséből származnak. Az ilyen folytonosság-szakadási helyek változtatásával természetesen általában változik az integralis értéke.

XXXII. Geometriai integralisok, mint függvények.

Tegyük föl, hogy az

$$I=\int_{\tilde\omega}\Phi\mathrm{D}\tilde\omega$$

geometriai integralisban a Φ függvény a $(D\tilde\omega)$ alakzat-elem coordinatáin kivűl más mennyiségek $u, v, ..$ függvénye is:

$$\Phi=\Phi(x, y, z, u, v, ..)$$

úgy, hogy az $u, v, ..$ változók bizonyos (T) érték-tartományában teljesít oly elégséges föltételeket, amilyenek alatt az integralis létezik, vagyis határozott véges határ-értéket jelent.

Akkor az integralis nyilvánképen az $u, v, ..$ változók függvénye a (T) érték-tartományban.

1.) Ha a Φ függvény a (T) értéktartományban az $(\tilde\omega)$ alakzat minden pontjában folytonos függvénye az $u, v, ..$ változóknak, akkor a (T) érték-tartományban az I integralis folytonos függvénye az $u, v, ..$ változóknak.

Ugyanis ha úgy $u', v', ..$, mint $u, v, ..$ a (T) érték-tartományban vannak, akkor

$$I(u', v', ..) - I(u, v, ..) \equiv \int\limits_{\tilde{\omega}} \Phi(x, y, z, u', ..) D\tilde{\omega} - \int\limits_{\tilde{\omega}} \Phi(x, y, z, u, ..) D\tilde{\omega} \equiv$$

$$\equiv \int\limits_{\tilde{\omega}} [\Phi(x, y, z, u', ..) - \Phi(x, y, z, u, ..)] D\tilde{\omega}.$$

A Φ függvény folytonosságánál fogva $u'-u$, $v'-v$, .. számértéke megválasztható oly kicsinynek, hogy mihelyt még kisebb, már a

$$\Phi(x, y, z, u', v', ..) - \Phi(x, y, z, u, v, ..)$$

függvény-külömbség számértéke $(\tilde{\omega})$-ban mindenütt kisebb, mint egy tetszésre adott kicsiny szám. Jelölje ezt a számot ε és jelentse az $(\tilde{\omega})$ alakzat teljes mekkoraságát $\tilde{\omega}$ (XXII). Az

$$I(u', v', ..) - I(u, v, ..)$$

külömbség számértéke nyilvánvalóan kisebb, mint $\tilde{\omega}\varepsilon$. Igy $u'-u$, $v'-v$, .. számértékei oly kicsinynek választhatók meg, hogy egyúttal ennek az integralis-külömbségnek a számértéke is kisebb legyen, mint egy tetszésre adott kicsiny szám.

2.) Ha a Φ függvénynek, mint x, y, z függvényének oly folytonosság-szakadásai volnának az $(\tilde{\omega})$ alakzatban a $(\boldsymbol{T})$ érték-tartományba tartozó $u, v, ..$ értékek mellett, amelyek daczára (XXIV, XXV) értelmében létezik az integralis, ez akkor is folytonos függvénye az $u, v, ..$ változóknak.

Jelentse ugyanis $(\tilde{\omega}_0)$ és $(\tilde{\omega}'_0)$ az $(\tilde{\omega})$ alakzat oly igen kis részét, amely az $u, v, ..$ illetőleg $u', v', ..$ értékek mellett az összes különös helyeket magában foglalja. Az alakzat többi részét jelölje $(\tilde{\omega}-\tilde{\omega}_0-\tilde{\omega}'_0)$. Mivel ebben az alakzat-részben folytonos a függvény, így $u'-u$, $v'-v$, .. számértéke megválasztható oly kicsinynek, hogy mihelyt még kisebb már az

$$\int\limits_{\tilde{\omega}-\tilde{\omega}_0-\tilde{\omega}_0'} \Phi(x, y, z, u', ..) D\tilde{\omega} - \int\limits_{\tilde{\omega}-\tilde{\omega}_0-\tilde{\omega}_0'} \Phi(x, y, z, u, ..) D\tilde{\omega}$$

külömbség számértéke kisebb, mint egy tetszésre adott kicsiny szám. De egyúttal oly kicsinynek választható $(\tilde{\omega}_0)$ és $(\tilde{\omega}'_0)$, hogy mihelyt még kisebbek, már a reájuk tartozó integralisok számértéke is kisebb legyen, mint egy tetszésre adott kicsiny szám (XXIV, XXV). Minthogy

$$I(u', v', ..) - I(u, v, ..)$$

$$\equiv \int\limits_{\tilde{\omega}-\tilde{\omega}_0-\tilde{\omega}_0'} \Phi(x, y, z, u', ..) D\tilde{\omega} - \int\limits_{\tilde{\omega}-\tilde{\omega}_0-\tilde{\omega}_0'} \Phi(x, y, z, u, ..) D\tilde{\omega} +$$

$$+ \int\limits_{\tilde{\omega}_0+\tilde{\omega}_0'} \Phi(x, y, z, u', ..) D\tilde{\omega} - \int\limits_{\tilde{\omega}_0+\tilde{\omega}_0'} \Phi(x, y, z, u, ..) D\tilde{\omega},$$

így $u'-u$, $v'-v$,.. számértéke megválasztható oly kicsinynek, hogy mihelyt még kisebb, már az

$$I(u', v', ..)-I(u, v, ..)$$

külömbség számértéke kisebb legyen, mint egy tetszésre adott kicsiny szám, mert $\tilde{\omega}_0$ és $\tilde{\omega}'_0$ zérustól tetszés szerint kicsit külömbözőknek választhatók meg.

3.) Ha a Φ függvény az $(\tilde{\omega})$ alakzatba tartozó coordinata-értékek mellett a (T) érték-tartományban $u, v,..$ deriválható függvénye, és ha

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial v}, \ldots,$$

mint az x, y, z coordinaták függvényei, folytonosak az $(\tilde{\omega})$ alakzatban, akkor az I integralis deriválható függvénye az $u, v,..$ változóknak a (T) érték-tartományban és deriváltjai a Φ függvény deriváltjainak az integralisai. Elég lesz egy partialis deriváltról mutatni ki ezt. Hasonlókép mutatható ki bármely másról. — Ha rövidség kedveért

$$\Phi(x, y, z, u', v, ..)=\Phi',$$

úgy

$$I(u', v, ..)-I(u, v, ..)$$

$$\equiv\int\limits_{\tilde{\omega}} \Phi' D\tilde{\omega}-\int\limits_{\tilde{\omega}} \Phi D\tilde{\omega}\equiv\int\limits_{\tilde{\omega}} (\Phi'-\Phi) D\tilde{\omega}\equiv\int\limits_{\tilde{\omega}} \frac{\Phi'-\Phi}{u'-u}(u'-u) D\tilde{\omega}.$$

Ha most itt írjuk:

$$\frac{\Phi'-\Phi}{u'-u}=\frac{\partial \Phi}{\partial u}+\eta,$$

akkor $u'-u$ számértéke megválasztható oly kicsinynek, hogy mihelyt még kisebb, már $|\eta|$ az alakzat minden pontjában kisebb, mint egy tetszés szerint adott kicsiny érték η_0, tehát

$$\text{Abs.}\int\limits_{\tilde{\omega}} \eta\,.\,(u'-u) D\tilde{\omega}<\eta_0\,.\,|u'-u|\,\tilde{\omega},$$

$$\text{Abs.}\left[\frac{I(u', v, ..)-I(u, v, ..)}{u'-u}-\frac{\int\limits_{\tilde{\omega}} \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u'-u) D\tilde{\omega}}{u'-u}\right]<\eta_0 \tilde{\omega}.$$

Következőleg $u'-u$ számértéke megválasztható oly kicsinynek, hogy mihelyt még kisebb, már

$$\frac{I(u',v,..)-I(u,v,..)}{u'-u'}$$

tetszés szerint adott kicsinynél kisebb számértékben külömbözik az

$$\frac{\displaystyle\int_{\tilde\omega}\frac{\partial\Phi}{\partial u}(u'-u)\mathrm{D}\tilde\omega}{u'-u}$$

kifejezéstől. Ez pedig amiatt, hogy $\partial\Phi:\partial u$ az x, y, z coordinaták folytonos függvénye az alakzatban $\equiv$

$$\int_{\tilde\omega}\frac{\partial\Phi}{\partial u}\mathrm{D}\tilde\omega.$$

4.) Ha a Φ függvény az $(\tilde\omega)$ alakzat egyes pontjai, vonalai, fölületei kivételével deriválható csak az x, y, z alakzati coordinaták mellett az $u, v, ..$ változókra a (T) tartományban úgy, hogy

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u},\quad \frac{\partial\Phi}{\partial v},..,$$

mint az x, y, z coordinaták függvényei egyes pontokban, egyes vonalok, fölületek pontjaiban folytonosság-szakadást szenvednek az $(\tilde\omega)$ alakzatban, de azért teljesítik az integrálhatóság (XXIV, XXV)-ben megjelölt föltételeit, az I integralis akkor is deriválható az $u, v, ..$ változókra a (T) érték-tartományban. Most is elégséges lesz egy partialis deriválással foglalkozni. — Jelentsék $(\tilde\omega_0)$ és $(\tilde\omega'_0)$ az alakzat oly igen kis részét, amely az $(u', v, ..)$ illetőleg $u, v, ..$ értékek mellett az összes különös helyeket magában foglalja. Az alakzat többi részét $(\tilde\omega-\tilde\omega_0-\tilde\omega_0')$ jelölje.

$$I(u',v,..)-I(u,v,..)\equiv\int_{\tilde\omega-\tilde\omega_0'-\tilde\omega_0}\frac{\Phi'-\Phi}{u'-u}(u'-u)\mathrm{D}\tilde\omega+\int_{\tilde\omega_0+\tilde\omega_0'}\frac{\Phi'-\Phi}{u'-u}(u'-u)\mathrm{D}\tilde\omega\equiv$$

$$\equiv\int_{\tilde\omega-\tilde\omega_0'-\tilde\omega_0}\frac{\partial\Phi}{\partial u}(u'-u)\mathrm{D}\tilde\omega+\int_{\tilde\omega-\tilde\omega_0-\tilde\omega_0'}\eta\,.\,(u'-u)\mathrm{D}\tilde\omega+\int_{\tilde\omega_0+\tilde\omega_0'}\frac{\Phi'-\Phi}{u'-u}(u'-u)\mathrm{D}\tilde\omega.$$

Az $u'-u$ számértéke megválasztható oly kicsinynek, és $(\tilde\omega_0+\tilde\omega_0')$ kiszabható oly kicsinyre, hogy mihelyt még kisebb, már a második és harmadik integralis számértéke tetszés szerint adott kis számnak és $|u' - u|$-nak a szorzatánál kisebb legyen . . .

Jegyeztük légyen azonban meg, hogy egy függvény deriváltjának itt megkivánt integrálhatósága nem szükséges, csak elégséges föltétele annak, hogy a függvény integralisa deriválható legyen. Majd a következőkben példáját látjuk.

XXXIII. A NEWTON-féle potentialis alap-tulajdonságai.

Tegyük föl, hogy ebben a geometriai integralisban:

$$\int_{\tilde{\omega}} \Phi \mathrm{D}\tilde{\omega} \equiv I,$$

az integrálandó függvény, vagyis Φ, ilyen alakú:

$$\Phi \equiv \frac{\varphi(x, y, z)}{\rho},$$

ahol φ a hely folytonos függvénye az $(\tilde{\omega})$ alakzatban és ρ az alakzat x, y, z pontjának és egy változó ξ, η, ζ pont-helynek a kölcsönös távolsága.

Ekkor az integralis a ξ, η, ζ hely függvénye: $I \equiv I(\xi, \eta, \zeta)$. NEWTON-féle potentialisnak nevezzük. Nagy jelentőségüek az ilyen integralisok az alkalmazásban, amelyek különösen mint bizonyos vectorok potentialisa és mint bizonyos vectorok vector-potentialisának componensei jelentkeznek a physikában.

1.) Az $(\tilde{\omega})$ alakzaton kivűl fekvő pontokban mindenütt mindhárom coordinatára, (ξ, η, ζ), bárhányszor deriválható függvény a NEWTON-féle potentialis, mert az integrálandó függvény az, és deriváltjai, mint x, y, z függvényei folytonosak az $(\tilde{\omega})$ alakzatban (XXXII. 3).

Ha pedig a ξ, η, ζ pont az $(\tilde{\omega})$ alakzatban van, akkor a Φ függvénynek, mint x, y, z függvényének, egyetlen különös helye a ξ, η, ζ pont. Ebben első rendű végtelen, ennél fogva a potentialis az alakzat térfogati és fölületi részében folytonos függvénye a helynek, és térfogati részében egyszer bizonyosan deriválható függvénye is, és három partialis deriváltja folytonos (XXXII, 2, 4).

Ha ξ, η, ζ külső pont, és ennek a távolsága az alakzat egy bizonyos kiszemelt x_0, y_0, z_0 pontjától R, úgy

$$R \,.\, I = \int_{\tilde{\omega}} \varphi(x, y, z) \frac{R}{\rho} \mathrm{D}\tilde{\omega}.$$

Ha a ξ, η, ζ pontot végtelenűl távolítjuk az x_0, y_0, z_0 ponttól, úgy az $R:\rho$ hányados értéke végtelenűl közeledik az egységhez, tehát

$$\lim_{R \to \infty} R\,I = \int_{\tilde{\omega}} \varphi(x, y, z) \mathrm{D}\tilde{\omega}.$$

Továbbá

$$R^2 \frac{\partial I}{\partial i} = R^2 \int_{\tilde{\omega}} \varphi(x, y, z) \frac{\partial \frac{1}{\rho}}{\partial i} \mathrm{D}\tilde{\omega}.$$

Azonban

$$\frac{\partial \frac{1}{\rho}}{\partial i} = \frac{\partial \frac{1}{\rho}}{\partial \xi} \alpha + \frac{\partial \frac{1}{\rho}}{\partial \eta} \beta + \frac{\partial \frac{1}{\rho}}{\partial \zeta} \gamma = -\frac{\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma}{\rho^2},$$

ha t. i. α, β, γ az i irány cosinusai, és λ, μ, ν az x, y, z pontból a ξ, η, ζ pontba mutató irány cosinusai, mihez képest, θ-val jelölvén a két irány szögét,

$$\frac{\partial \frac{1}{\rho}}{\partial i} = -\frac{\cos\theta}{\rho^2}.$$

Eszerint

$$R^2 \frac{\partial I}{\partial i} = -\int_{\tilde{\omega}} \varphi(x, y, z) \cos\theta . \frac{R^2}{\rho^2} \mathrm{D}\tilde{\omega}.$$

Ha az x_0, y_0, z_0 pontból a ξ, η, ζ pontba mutató irány és az i irány szöge θ_0, úgy R végtelen növelése mellett a θ szög a θ_0 szögbe convergál, mihez képest

$$\lim_{R \to \infty} R^2 \frac{\partial I}{\partial i} = -\cos\theta_0 \int_{\tilde{\omega}} \varphi(x, y, z) \mathrm{D}\tilde{\omega},$$

sít. — Ezek szerint a határegyenletek szerint a Newton-féle potentialis és deriváltjai a végtelenben eltűnnek, és pedig algebrailag tűnnek el: maga a potentialis első rendűen, első deriváltjai másodrendűen, sít.

Némely egyébb tulajdonságoknak a megismerése végett válaszszuk szét a Newton-féle potentialist térfogati, fölületi és vonalas potentialisra aszerint, amint az integralis térre, fölületre, vonalra vonatkozik.

2.) A Newton-féle térfogati potentialist (τ) térre terjedő integratióban jelölje I_τ. Coordinata-deriváltjai,

$$\frac{\partial I_\tau}{\partial\xi}=\int_{\varpi}\varphi\frac{\partial\frac{1}{\rho}}{\partial\xi}\mathrm{D}\tau=\int_{\tau}\frac{\varphi}{\rho^2}\frac{x-\xi}{\rho}\mathrm{D}\tau,\quad \text{stb.}$$

abban az esetben bizonyosan deriválható folytonos függvényei a coordinatáknak a (τ) tér belsejében is, ha a φ függvény az x, y, z coordináták deriválható folytonos függvénye az egész (τ) térben, jóllehet az integrálandó függvények, u. m.:

$$\left(\varphi\cdot\frac{x-\xi}{\rho}\right)\frac{1}{\rho^2},\quad \text{stb.}$$

oly deriváltakat szolgáltatnak, amelyek a ξ, η, ζ pontban harmadrendűen végtelenek, midőn belső pont ez, és így nem integrálhatók a (τ) térre.

Ugyanis

$$\frac{\partial I_\tau}{\partial\xi}=\int_{\tau}\varphi\frac{\partial\frac{1}{\rho}}{\partial\xi}\mathrm{D}\tau=-\int_{\tau}\varphi\frac{\partial\frac{1}{\rho}}{\partial x}\mathrm{D}\tau.$$

Részleges reductióval élvén:

$$\frac{\partial I_\tau}{\partial\xi}=\int_{\tau}\frac{1}{\rho}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathrm{D}\tau+\int_{\sigma}\frac{\varphi\cos(n,x)}{\rho}\mathrm{D}\sigma,\quad \text{stb.}$$

ahol most σ a (τ) tér határ-fölületét jelenti. Ezek pedig a ξ, η, ζ coordináták mindegyikére deriválhatók a (τ) tér belsejében, és deriváltjaik folytonosak abban.

3.) Minthogy

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\frac{1}{\rho}+\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\frac{1}{\rho}+\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}\frac{1}{\rho}\equiv o,$$

és minthogy a (τ) téren kivűl az integrálás jele alatt végezhetők az I_τ potentialison a deriválások, ennélfogva a (τ) téren kivűl mindenütt

$$\Delta I_\tau=o.$$

A fölületi és vonalas potentialisok,

$$\int_{\sigma}\frac{\varphi}{\rho}\mathrm{D}\sigma\equiv I_\sigma,\quad \int_{s}\frac{\varphi}{\rho}\mathrm{D}s\equiv I_s,$$

a fölületen, illetőleg a vonalon kivűl mindenütt s akárhányszor az integrálás jele alatt deriválhatók, tehát mindenütt

$$\Delta I_\sigma = o, \qquad \Delta I_s = o.$$

Ezeket az egyenleteket LAPLACE-féléknek nevezzük.

4.) Mihelyt a φ olyan folytonos függvény a (τ) térben, hogy I_τ a (τ) tér belsejében is deriválható másodszor a coordinatákra, és második deriváltjai a (τ) térben folytonosak, akkor a (τ) térben

$$\Delta I_\tau(\xi, \eta, \zeta) \equiv -4\pi\varphi(\xi, \eta\ \zeta).$$

Ugyanis a GREEN-féle reductióban (XXVIII, 7) a Φ függvény gyanánt használható az I_τ függvény, bármely tért jelentsen T, mert más különösség nem fordulhat elő a végetlen térben, mint hogy I_τ második deriváltjai más véges értékekkel bírjanak a (τ) tért határoló σ fölületnél ennek az egyik oldalán, mint a másikon. Ha pedig a (τ) tér tetszés szerinti része (τ'), nem különben használható $I_{\tau'}$ is Φ gyanánt abban a reductioban, bármely tért jelentsen T, mert más különösség nem fordúlhat elő a végetlen térben, mint hogy $I_{\tau'}$ második deriváltjai más véges értékkel birjanak a σ' fölületnél ennek az egyik oldalán, mint a másikon.

A T most akkora tért jelentsen, amelynek a belsejében van a τ' tér. Minthogy a τ' téren kivűl $\Delta I_{\tau'} = o$, így

$$\int_T \frac{\Delta I_{\tau'}}{\rho} D\tau = \int_{\tau'} \frac{\Delta I_{\tau'}}{\rho} D\tau.$$

Még pedig T tér gyanánt válasszunk oly gömb-tért, amelynek a centruma a τ' térben van. Sugara megválasztható oly nagynak, hogy mihelyt még nagyobb, már a GREEN-féle reductióban a fölületi integrálás számértéke tetszés szerint adott kicsinynél kisebb, mert az integralis fölülete a sugár négyzetével arányosan nől, az integrálandó függvény pedig olyszerűen kisebbedik, mint a sugár harmadik hatványának a fordított értéke 1.). Eszerint,

$$\int_{\tau'} \frac{\Delta I_{\tau'}}{\rho} D\tau = -4\pi I_{\tau'}(a, b, c) = -4\pi \int_{\tau'} \frac{\varphi}{\rho} D\tau,$$

vagyis

$$\int_{\tau'} \frac{\Delta I_{\tau'} + 4\pi\varphi}{\rho} D\tau = o,$$

De, ha (τ)-nak azt a részét, amelyet a (τ') részen kivül tartalmaz, $(\tau-\tau')$ jelöli, úgy

$$I_{\tau'}=I_\tau-I_{\tau-\tau'},$$

és (τ') belsejében

$$\Delta I_{\tau-\tau'}=o.$$

Következőleg

$$\int_{\tau'}\frac{\Delta I_\tau+4\pi\varphi}{\rho}D\tau=o.$$

Minthogy ΔI_τ és φ a föltevés szerint mindenütt folytonos (τ)-ban, így (τ') megválasztható úgy, hogy egyfelől benne foglaltassék a (τ) térnek tetszés szerint választott ξ, η, ζ pontja, és másfelől a $\Delta I_\tau+4\pi\varphi$ összeg mindenütt positivus, vagy mindenütt negativus legyen benne. Ebből folyólag (τ) bármely pontja legyen ξ, η, ζ, abban tényileg

$$\Delta I_\tau+4\pi\varphi=o.$$

Az ú. n. Poisson-féle egyenlet.

Ha a φ deriválható a (τ)-ban mindhárom coordinatára, és deriváltjai folytonosak, akkor létezik ΔI_τ a (τ)-ban és folytonos 2.), tehát akkor bizonyosan áll ez az egyenlet. De származásánál fogva áll, mihelyt olyan folytonos függvény a φ, hogy I_τ kétszer deriválható (τ)-ban, és második deriváltjai is folytonosak (τ)-ban.

5.) Ahol τ határán a φ függvény nem zérus, ott ΔI_τ folytonosság-szakadást szenved a határ-fölületen körösztül, mert a fölület egyik oldalán 0, a másikon $-4\pi\varphi$. Most látni fogjuk, hogy I_τ egyes második deriváltjai miként viselkednek a τ tér határán.

A határ-fölület belső oldalát positivus, külső oldalát negativus oldalának nevezzük. Minthogy az első deriváltak mindenütt folytonosak, így

$$\left(\frac{\partial I}{\partial x}\right)_-=\left(\frac{\partial I}{\partial x}\right)_+ \quad \text{stb.}$$

a határ-fölület minden pontjában, ha t. i. I_τ helyett rövidség kedveért I-t irunk. Minthogy a határ-fölület minden pontjában helyes ez az egyenlet, így oly pontjaiban, amelyekben határozott érintő síkja van, a bal és jobb egyenleti oldalak tangentiális deriváltjai bizonyosan egyenlők, s bármely tangentialis irányt jelentsen is az ily x, y, z helyen s,

$$\left(\frac{\partial^2 I}{\partial x \partial s}\right)_- - \left(\frac{\partial^2 I}{\partial x \partial s}\right)_+ = 0, \text{ stb.}$$

Használjuk ezt a jelölés-módot:

$$\left(\frac{\partial^2 I}{\partial p \partial q}\right)_- - \left(\frac{\partial^2 I}{\partial p \partial q}\right)_+ \equiv (p, q).$$

Ha az s tangentialis irányt meghatározó cosinusokat α, β, γ jelentik, úgy egyenleteink eképen is írhatók:

$$(x, x)\alpha + (x, y)\beta + (x, z)\gamma = o, \text{ stb.}$$

Eszerint az a vector, melynek a componensei (x, x), (x, y), (x, z) vagy (y, x), (y, y), (y, z), vagy pedig (z, x), (z, y), (z, z), normalis irányú a fölület x, y, z helyén. Ha tehát a fölületi normalis egyik irányának az irány-cosinusai az x, y, z helyen λ, μ, ν, akkor léteznek olyan scalarisok R_1, R_2, R_3, absolutus érték szerint rendre a három vector nagysága, hogy

$$\begin{aligned}
(x, x) &= R_1\lambda, & (x, y) &= R_1\mu, & (x, z) &= R_1\nu, \\
(y, x) &= R_2\lambda, & (y, y) &= R_2\mu, & (y, z) &= R_2\nu, \\
(z, x) &= R_3\lambda, & (z, y) &= R_3\mu, & (z, z) &= R_3\nu.
\end{aligned}$$

De a (p, q) symbolum definitiójának értelmében (p, q) és (q, p) azonos. Következőleg második, harmadik, negyedik, hatodik, hetedik és nyolczadik egyenletünk szerint

$$R_1 : R_2 : R_3 = \lambda : \mu : \nu,$$

vagyis létezik olyan scalaris, R, hogy

$$R_1 = R\lambda, \; R_2 = R\mu, \; R_3 = R\nu.$$

Minthogy pedig

$$(x, x) + (y, y) + (z, z) \equiv (\Delta I)_- - (\Delta I)_+ = 4\pi\varphi,$$

így első, ötödik és kilenczedik egyenletünk szerint

$$R_1\lambda + R_2\mu + R_3\nu = 4\pi\varphi,$$

azaz $R = 4\pi\varphi$, tehát

$$(x, x) = 4\pi\varphi\lambda\lambda, \quad (x, y) = 4\pi\varphi\lambda\mu, \quad (x, z) = 4\pi\varphi\lambda\nu, \text{ stb.}$$

Ezt Weingarten-féle egyenlet-rendszernek nevezzük.

6.) Tetszés szerinti T térre és fölületére, S-re, vonatkozólag, reductio rendén

$$\int_T \Delta I_\tau \mathrm{D}\tau = -\int_S \frac{\partial I_\tau}{\partial n}\mathrm{D}\sigma,$$

mert más különösség nem fordúlhat elő, mint hogy I_τ második deriváltjai τ határának egyik oldalán más véges értékekkel birnak, mint a másikon.

Eszerint

$$\int_S \frac{\partial I_\tau}{\partial n}\mathrm{D}\sigma = 4\pi\int_T \varphi \mathrm{D}\tau.$$

7.) Minden két-oldalú fölület egyik oldalát (+), másik oldalát (—) oldalának nevezzük, és a fölületi normalisnak azt az irányát, mely a (—) oldalról a (+) oldalra mutat (+) irányának, ellenétes irányát (—) irányának nevezzük.

A σ fölület pontjainál, azokhoz bármi közel, I_σ fölületi potentialis normalis irányú deriváltja általában számot tevően más az egyik oldalon, mint a másikon, jóllehet mindegyik oldalon a (+), vagy mindegyiken a (—) irányban képezzük. Mégpedig a különbség határ-értéke, a (+) irányú deriváltra számítva, ξ, η, ζ helyen

$$\left(\frac{\partial I_\sigma}{\partial n_+}\right)_+ - \left(\frac{\partial I_\sigma}{\partial n_+}\right)_- = -4\pi\varphi(\xi, \eta, \zeta).$$

Szabatos levezetéséhez juthatunk a Green-féle reductio (XXVIII, 7) és (XXVII, 4) segélyével.

Jelentsen S_1 és S_2 két teljesen zárt fölületet, amelyeket igen vékony térköz válaszszon el egymástól, és amelyek elseje egészen a másodikon belűl legyen. Igen vékony térközük belsejében foglaljon helyet a σ fölületnek σ' darabja, és egyuttal úgy legyenek választva, hogy egy a, b, c pont-hely, amelyet a σ' fölületen kivűl tetszésre választhatunk, az S_1 fölületen belűl vagyon. Ettől a ponttól számítjuk az összes előfordulandó távolságokat amelyeket most mindig r jelöljön.

Az S_1 fölületen belül alkalmazható (XXVIII, **7**) a $\Phi \equiv I_{\sigma'}$ függvénynyel, és az S_2 fölületen kivül alkalmazható (XXVII, 4) a $\Phi \equiv I_{\sigma'}$ és $F = 1 : r$ függvénynyel.

Jelentse már most (XXVIII, 7)-ben a második egyenletben a T tér az S_1 fölülettől befogott tért. Minthogy $\Delta I_{\sigma'} = o$, e tér minden pontjában, úgy

$$\int_{S_1}\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}I_{\sigma'}-\frac{1}{r}\frac{\partial I_{\sigma'}}{\partial n}\right)D\sigma=4\pi I_{\sigma'}(a, b\ c).$$

Jelentse továbbá (XXVII, 4) ben a T tér az S_2 fölület és egy körülötte írt gömbfölület közt lévő tért. A gömbfölület sugara megválasztható oly nagynak, hogy mihelyt még nagyobb, már a gömbfölületre szóló integralis számértéke tetszés szerint adott kicsinynél kisebb. Mivel pedig a mostani T-ben is mindenütt $\Delta I_{\sigma'}=o$, ezt is figyelembe véve, találjuk, hogy

$$\int_{S_2}\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}I_{\sigma'}-\frac{1}{r}\frac{\partial I_{\sigma'}}{\partial n}\right)D\sigma=o.$$

Az S_1 és S_2 fölület térköze megválasztható oly vékonynak, hogy mihelyt még vékonyabb, már tetszés szerint meghatározott kicsinynél kisebb eltéréssel teljesülhessenek a következő postulatumok: n_1 és n_2 ellenkező irányok; r_1 és r_2 egyenlők; $\partial r_1:\partial n_1$, és $\partial r_2:\partial n_2$ ellentétesen egyenlők; $(I_{\sigma'})_1$ és $(I_{\sigma'})_2$ egyenlők; $(\partial I_{\sigma'}:\partial n_1)_1$ és $(\partial I_{\sigma'}:\partial n_2)_1$ ellentétesen egyenlők; $(\partial I_{\sigma'}:\partial n_1)_2$ és $(\partial I_{\sigma'}:\partial n_2)_2$ ellentétesen egyenlők; $D\sigma_1$ és $D\sigma_2$ egyenlők; mindannyi az S_1 és S_2 megfelelő pontjára számítva.

Adjuk össze a két integralis-egyenletet. Az elősoroltak rendén összegük ekkép írható

$$\int_{S_1}\left[\left(\frac{\partial I_{\sigma'}}{\partial n_1}\right)_2-\left(\frac{\partial I_{\sigma'}}{\partial n_1}\right)_1\right]\frac{D\sigma}{r}=4\pi I_{\sigma}\,(a, b, c).$$

Azonban csak a σ' fölület-darab közelében különbözhetik számottevően a két derivált, mert a σ' fölületen kivűl minden derivált folytonos. Így az integralis a σ' fölület-darabra vonatkoztatható az S_1 fölület helyett, t. i. a $D\sigma_1$ fölület-elemektől mért r távolságok helyett a megfelelő $D\sigma'$ fölület-elemektől mért távolságok tehetők, s a szögletes zárjel tartalma részben állandóan az S_1, részben állandóan az S_2 fölületre van vonatkoztatva a belső zárjelek indexe szerint. Továbbá, ha (σ)-nak az a része, amelyet a (σ') részen kivűl tartalmaz, $(\sigma-\sigma')$, úgy

$$I_{\sigma'}=I_{\sigma}-I_{\sigma-\sigma'}.$$

Ámde $I_{\sigma-\sigma'}$ deriváltjai folytonosak a σ' fölület-rész belsejében, tehát a σ' fölület-darab belsejében mindenütt

$$\left(\frac{\partial I_{\sigma-\sigma'}}{\partial n_1}\right)_2 - \left(\frac{\partial I_{\sigma-\sigma'}}{\partial n_1}\right)_1 = o$$

tehető. Ezek szerint

$$\int_{\sigma'} \left[\left(\frac{\partial I_\sigma}{\partial n_1}\right)_2 - \left(\frac{\partial I_\sigma}{\partial n_1}\right)_1\right]\frac{D\sigma}{r} = 4\pi I_{\sigma'}(a, b, c).$$

Másfelől

$$I_{\sigma'}(a, b, c) = \int_{\sigma'} \frac{\varphi}{r} D\sigma,$$

tehát

$$\int_{\sigma'} \frac{\left(\frac{\partial I_\sigma}{\partial n_1}\right)_1 - \left(\frac{\partial I_\sigma}{\partial n_1}\right)_2 + 4\pi\varphi}{r} D\sigma = o.$$

Ebből oly okfüzéssel, aminőt hasonló egyenleten 4.)-ben követtünk, adódik

$$\left(\frac{\partial I_\sigma}{\partial n_1}\right)_1 - \left(\frac{\partial I_\sigma}{\partial n_1}\right)_2 + 4\pi\varphi = o,$$

az ú. n. Poisson-féle fölületi egyenlet.

8.) Ez egyenlet szerint a Newton-féle fölületi integralis normalis irányú deriváltja a fölületen körösztül általában folytonosság-szakadást szenved, amelynek a nagysága $4\pi\,|\,\varphi\,|$.

Vegyük tekintetbe a fölület oly igen kis (σ_0) részét, amely tetszés szerint adott kicsinél kisebb eltéréssel tekinthető síknak, vagyis amelyen a görbülés mértéke mindenütt kisebb, mint egy tetszésre adott kicsiny szám. A fölület többi részét $(\sigma - \sigma_0)$ jelölje. $I_{\sigma-\sigma_0}$ deriváltjai a (σ_0) fölület-darab belséjében folytonosak, és az I_σ fölületi integralis másik, I_{σ_0} részének a deriváltjai szenvedhetnek csak folytonosság-szakadást a σ_0 fölület-darabon körösztül.

Ennek a folytonosság-szakadásnak a természetébe bepillantás nyílik a következő szemlélődésből. Ha (σ_0) sík-darab, úgy az

$$I_{\sigma_0} \equiv \int_{\sigma_0} \frac{\varphi}{\rho} D\sigma$$

potentialis két oly pontban, ξ_1, η_1, ζ_1-ben, és ξ_2, η_2, ζ_2-ben, amelyek egymás tükörképei a (σ_0) síkjára nézve, teljesen egyenlő. Könnyen kiolvasható ez az integralis alakjából. Ebből pedig következik, hogy a ξ_1, η_1, ζ_1 pontban, a sík normalisának egyik irányában, az I_{σ_0} függvényből képezett derivált, meg a ξ_2, η_2, ζ_2 pontban az ellenkező irányban képezett derivált egyenlő. Következésképen a két pontban egyező normalis irányban képezett derivált ellentétesen egyenlő, és így a külömbségük egyikük kétszerese.

De azt is nyomban beláthatjuk, hogy az I_{σ_0} függvényből a ξ_1, η_1, ζ_1 és ξ_2, η_2, ζ_2 pontban egyező tangentialis irányokban képezett deriváltak egyenlők. Amiből pedig az következik, hogy I_σ tangentialis deriváltjai nem szenvednek folytonosság-szakadást a fölületen körösztül.

Ezt tudva, a POISSON-féle fölületi egyenlet segitségével I_σ bármely irányú deriváltjának a folytonosság-szakadását kiszámíthatjuk.

Ha l és m irányok tangentialisak és merőlegesek egymásra, akkor

$$\frac{\partial I_\sigma}{\partial i} = \frac{\partial I_\sigma}{\partial l}\cos(i, l) + \frac{\partial I_\sigma}{\partial m}\cos(i, m) + \frac{\partial I_\sigma}{\partial n_+}\cos(i, n_+).$$

Az érintői deriváltak a két oldalon ugyanazok lévén a σ fölület pontjainál is, így e fölületnél

$$\left(\frac{\partial I_\sigma}{\partial i}\right)_+ - \left(\frac{\partial I_\sigma}{\partial i}\right)_- = \left[\left(\frac{\partial I_\sigma}{\partial n_+}\right)_+ - \left(\frac{\partial I_\sigma}{\partial n_+}\right)_-\right]\cos(i, n_+).$$

Következőleg

$$\left(\frac{\partial I_\sigma}{\partial i}\right)_+ - \left(\frac{\partial I_\sigma}{\partial i}\right)_- = -4\pi\varphi \,.\, \cos(i, n_+).$$

9.) Ebből az a fontos következtetés is vonható, hogy ez a szintén gyakran előforduló integralis

$$I'_\sigma = \int_\sigma \varphi \frac{\partial \frac{1}{\rho}}{\partial n_+} D\sigma$$

$4\pi\,|\,\varphi\,|$ nagyságú folytonosság-szakadást szenved a σ fölületen körösztül. Egyebütt nyilvánképen folytonos, sőt bárhányszor deriválható.

Ugyanis

$$\frac{\partial \frac{1}{\rho}}{\partial n_+} = \frac{\partial \frac{1}{\rho}}{\partial x}\cos(x, n_+) + \frac{\partial \frac{1}{\rho}}{\partial y}\cos(y, n_+) + \frac{\partial \frac{1}{\rho}}{\partial z}\cos(z, n_+)$$

$$= -\frac{\partial \frac{1}{\rho}}{\partial \xi}\cos(x, n_+) - \frac{\partial \frac{1}{\rho}}{\partial \eta}\cos(y, n_+) - \frac{\partial \frac{1}{\rho}}{\partial \zeta}\cos(z, n_+).$$

Ha tehát azt írjuk, hogy

$$\int_\sigma \frac{\varphi\cos(x, n_+)}{\rho} D\sigma = I_{1\sigma}$$

$$\int_\sigma \frac{\varphi\cos(y, n_+)}{\rho} D\sigma = I_{2\sigma}$$

$$\int_\sigma \frac{\varphi\cos(z, n_+)}{\rho} D\sigma = I_{3\sigma},$$

úgy

$$I'_\sigma = -\left(\frac{\partial I_{1\sigma}}{\partial \xi} + \frac{\partial I_{2\sigma}}{\partial \eta} + \frac{\partial I_{3\sigma}}{\partial \zeta}\right)$$

Azonban az elébb talált folytonosság-szakadási egyenlet értelmében, a σ fölületnél

$$\left(\frac{\partial I_{1\sigma}}{\partial \xi}\right)_+ - \left(\frac{\partial I_{1\sigma}}{\partial \xi}\right)_- = -4\pi\varphi\cos(x, n_+) \,.\, \cos(x, n_+),$$

$$\left(\frac{\partial I_{2\sigma}}{\partial \eta}\right)_+ - \left(\frac{\partial I_{2\sigma}}{\partial \eta}\right)_- = -4\pi\varphi\cos(y, n_+) \,.\, \cos(y, n_+),$$

$$\left(\frac{\partial I_{3\sigma}}{\partial \zeta}\right)_+ - \left(\frac{\partial I_{3\sigma}}{\partial \zeta}\right)_- = -4\pi\varphi\cos(z, n_+) \,.\, \cos(z, n_+),$$

következőleg

$$(I'_\sigma)_+ - (I'_\sigma)_- = 4\pi\varphi.$$

XXXIV. Vectorok functionalis fölbontása.

1) Tegyük föl, hogy (X, Y, Z) vector, mint a hely függvénye, mindhárom coordinatára deriválható folytonos a T térben, és hogy a

$$\frac{\partial X}{\partial \xi} + \frac{\partial Y}{\partial \eta} + \frac{\partial Z}{\partial \zeta}$$

összeg is mindenütt deriválható T-ben. Akkor bizonyosan létezik a T-ben a coordinátáknak olyan kétszer deriválható függvénye, Φ, hogy

$$\frac{\partial X}{\partial \xi} + \frac{\partial Y}{\partial \eta} + \frac{\partial Z}{\partial \zeta} = \Delta\Phi.$$

Ilyen függvény ugyanis

$$-\frac{1}{4\pi}\int_T \frac{\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}}{\rho} D\tau.$$

Az egyenletből folyólag

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(X-\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}\right)+\frac{\partial}{\partial \eta}\left(Y-\frac{\partial \Phi}{\partial \eta}\right)+\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(Z-\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}\right)=o.$$

Eszerint az

$$\left(X-\frac{\partial \Phi}{\partial \xi},\quad Y-\frac{\partial \Phi}{\partial \eta},\quad Z-\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}\right)$$

vectornak forma szerint van vector-potentialisa a T térben. Jelölje ezt $(U,\ V,\ W)$:

$$X=\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}+\frac{\partial W}{\partial \eta}-\frac{\partial V}{\partial \zeta},$$

$$Y=\frac{\partial \Phi}{\partial \eta}+\frac{\partial U}{\partial \zeta}-\frac{\partial W}{\partial \xi},$$

$$Z=\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}+\frac{\partial V}{\partial \xi}-\frac{\partial U}{\partial \eta}.$$

Tehát a kitüzött föltételek alatt az $(X,\ Y,\ Z)$ vector két oly vector összegére bontható, amelyek egyikének van potentialisa, Φ, másikának forma szerint van vector-potentialisa, $(U,\ V,\ W)$, a T térben

Azonban a kitüzött föltételek csak elégségesek. Nevezetesen, a helyett, hogy

$$\frac{\partial X}{\partial \xi}+\frac{\partial Y}{\partial \eta}+\frac{\partial Z}{\partial \zeta}$$

deriválható legyen a T térben, elég csak azt követelni, hogy létezzék olyan kétszer deriválható Φ függvény a T térben, amely a

$$\frac{\partial X}{\partial \xi}+\frac{\partial Y}{\partial \eta}+\frac{\partial Z}{\partial \zeta}=\Delta\Phi$$

egyenletnek eleget tesz.

2.) Egy más használatos fölbontás azon a lehetőségen alapszik, hogy az

$$X\partial x+Y\partial y+Z\partial z$$

három tagú differentialis kifejezés az

$$F.\partial G+\partial H$$

kéttagúra vezethető, amelyben G és H a három független variabilisnek, vagyis x, y, z-nek deriválható függvényét jelenti. Ez a lehetőség ugyanis analyticus kifejezésben:

$$X\partial x+Y\partial y+Z\partial z\equiv\left(F\frac{\partial G}{\partial x}+\frac{\partial H}{\partial x}\right)\partial x+\left(F\frac{\partial G}{\partial y}+\frac{\partial H}{\partial y}\right)\partial y+\left(F\frac{\partial G}{\partial z}+\frac{\partial H}{\partial z}\right)\partial z.$$

Minthogy a ∂x, ∂y, ∂z differentialék teljesen függetlenek egymástól, úgy

$$X=F\frac{\partial G}{\partial x}+\frac{\partial H}{\partial x},$$

$$Y=F\frac{\partial G}{\partial y}+\frac{\partial H}{\partial y},$$

$$Z=F\frac{\partial G}{\partial z}+\frac{\partial H}{\partial z}.$$

Természetesen az alapúl használt lehetőség föltételei ennek a kifejezés-rendszernek is föltételei. Hogy melyek itt a szükséges és elégséges föltételek, vagyis X, Y, Z mely functionalis tulajdonságai szükségesek és elégségesek a fölhasznált lehetőséghez, ennél a kérdésnél is fontosabb egy másik, és pedig az, hogy mely föltételek alatt jelenthetnek F, G és H, legalább általában, mindhárom coordinata szerint kétszer deriválható függvényeket valamely térben? A vectorok ilyetén fölbontása az alkalmazásokban ezeknek a deriválhatóságoknak az esetében szokott haszonnal járni, s épen azért, valahányszor hozzá folyamodunk, már egyúttal rendszerint a priori föltesszük, hogy olyan a vector, mikép F, G, H általában kétszer deriválhatók mindhárom coordinata szerint. Ekkor általában szükségkép deriválható a vector mindhárom coordinata szerint abban a térben. Kérdés marad azonban, hogy ez a szükséges tulajdonsága elégséges tulajdonsága-e egyszersmind?

XXXV. Potentialisos vectorok és vector-potentialisos vectorok geometriai jellemzése.

1.) Ha a T térben (ξ, η, ζ) vectornak van potentialisa, és ez Φ, akkor vegyük figyelembe a T térben a

$$\Phi-p=o$$

fölület-sereget. Ez a fölület-sereg a p parametrum bizonyos értéktartományának felel meg, úgy, hogy bármely érték legyen p ebben a tartományban, $\Phi=p=\text{const.}$ oly fölület, amely egészen vagy részben a T térben foglaltatik. Minthogy az ily fölület minden pontjában ugyanazzal az értékkel bír a potentialis, azért az ilyen fölületet aequipotentialis fölületnek nevezzük.

A T tér x, y, z pontjában

$$\xi=\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \qquad \eta=\frac{\partial\Phi}{\partial y}, \qquad \xi=\frac{\partial\Phi}{\partial z},$$

tehát az x, y, z helyre vonatkoztatott (ξ, η, ζ) vector iránya az e helyen átterjeszkedő aequipotentialis fölületre $(\Phi=p=\text{const.})$ merőleges (XIX), és pedig épen ezen a helyen merőleges reá.

Azonban más vector is bír ezzel a tulajdonsággal. Mind az a vector, amely oly függvénye a helynek, hogy componensei ekkép fejezhetők ki:

$$\xi=\lambda\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \qquad \eta=\lambda\frac{\partial\Phi}{\partial y}, \qquad \zeta=\lambda\frac{\partial\Phi}{\partial z}.$$

De már másféle vector nem, mert annak, hogy a helytől függő (ξ, η, ζ) vector egy fölület-seregben, ú. m.

$$\Phi-p=o,$$

mindenütt orthogonalis legyen egy összefüggő térben, szükséges és elégséges föltétele, hogy

$$\xi:\eta:\zeta=\frac{\partial\Phi}{\partial x}:\frac{\partial\Phi}{\partial y}:\frac{\partial\Phi}{\partial z}$$

aránylat létezzék abban a térben.

Ámde, midőn egy vectornak valamely térben potentialisa van, még egy olyan tulajdonsággal bír a vector, amely geometriailag egyszerűen értelmezhető, és mind a két tulajdonsággal más vector nem bír.

Vegyünk tekintetbe két aequipotentialis fölületet, amelyek parametruma végtelen kicsit külömbözik, amelyeket tehát végtelen vékony térköz választ el (XIX):

$$\Phi-p=o, \qquad \Phi-(p+\delta p)=o.$$

A két fölület térközének végtelen kis vastagsága az x, y, z helynél (XIX):

$$\delta s=|\,\delta p\,|:N,$$

ahol N jelöli a

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)$$

vector nagyságát.

A $|\delta p|:\delta s$ hányadost az aequipotentialis fölület sereg x, y, z helyi sürűségének nevezzük és egy pillanatra $\varkappa$ bötűvel jelöljük.

Egyenletünk szerint $N=\varkappa$.

Ha tehát egy vectornak valamely térben van potentialisa, úgy ennek a vectornak a nagysága mindenütt az aequipotentialis fölületsereg sürűségével egyenlő.

2.) Tegyük föl, hogy (ξ, η, ζ) vectornak a T térben vectorpotentialisa van, (U, V, W), :

$$\xi=\frac{\partial W}{\partial y}-\frac{\partial V}{\partial z}, \quad \eta=\frac{\partial U}{\partial z}-\frac{\partial W}{\partial x}, \quad \zeta=\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial y},$$

és, hogy ez a (ξ, η, ζ) vector általában mindhárom coordinata szerint deriválható a T térben.

Tudjuk már, hogy ez esetben a vector componensei mindig két függvény segítségével fejezhetők ki (XX), úgy, hogy a vector két functionalis tetszésszerintiséget tartalmaz, amely csak annyiban nem teljes kettős tetszésszerintiség, hogy mindegyik tetszésszerintiséget három másodrendű deriválhatóság szorítja meg (XXI).

Most más módon fejezzük ki két függvény segítségével, mint amily módokon (XX)-ban tettük. Ez a mód az előbbi cikk második részében fölállitott kifejezés-formára támaszkodik, amelyet jelenleg (U, V, W) vector-potentialisra alkalmazunk, tévén

$$U=F\frac{\partial G}{\partial x}+\frac{\partial H}{\partial z},$$
$$V=F\frac{\partial G}{\partial y}+\frac{\partial H}{\partial y},$$
$$W=F\frac{\partial G}{\partial z}+\frac{\partial H}{\partial z},$$

azzal a kirovással, hogy F, G, H **általában** kétszer deriválhatók a coordinaták szerint T **térben legalább** oly módon, hogy a kétszeres deriválások külömböző coordinaták szerint valók, t. i. y és z, z és x, x és y szerint valók.

Eezknek az alakoknak a behelyettesítéséből folyólag

$$\xi=\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial z}-\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial G}{\partial y},$$
$$\eta=\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial G}{\partial x}-\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial z},$$
$$\zeta=\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial y}-\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial x}.$$

Ezekben is két functionalis tetszésszerintiség fordúl elő, és ezt a két tetszésszerintiséget is három másodrendű deriválhatóság szoritja meg.

Belőlük folyólag

$$\frac{\partial F}{\partial x}\xi+\frac{\partial F}{\partial y}\eta+\frac{\partial F}{\partial z}\zeta=o,$$
$$\frac{\partial G}{\partial x}\xi+\frac{\partial G}{\partial y}\eta+\frac{\partial G}{\partial z}\zeta=o.$$

Következőleg a (ξ, η, ζ) vector iránya mindenütt tangentialis a T térben az

$$F-p=o$$

fölület-sereghez és a

$$G-q=o$$

fölület-sereghez, vagyis mindenütt tangentialis ahhoz a vonal-sereghez, amelyet a két fölület-sereg metszése határoz meg.

Ezzel a tulajdonsággal azonban mind az a vector bir, amely oly függvénye a helynek, hogy componenseit a hely egy tetszés szerinti függvényének és a ξ, η, ζ kifejezéseknek a szorzatai képezik.

Csakhogy vectorunknak még egy egyszerű geometriai tulajdonsága van, amely azt az előbbivel egyetemben már teljesen jellemzi.

Gondoljunk a T térben x, y, z helyen a vonal-seregre nézve orthogonalis elemi négyszöget, $(\delta\sigma)$, amelynek csúcsain a következő vonalok haladnak át:

$$\begin{array}{lll} \underset{\smile}{1} & F=p & G=q, \\ \underset{\smile}{2} & F'=p+\delta p, & G=q, \\ \underset{\smile}{3} & F=p, & G'=q+\delta q, \\ \underset{\smile}{4} & F'=p+\delta p, & G'=q+\delta q. \end{array}$$

A $|\delta p\,\delta q|:\delta\sigma$ hányadost a vonal-sereg x, y, z helyi sürűségének nevezzük. Ezt fogjuk most F és G segedelmével meghatározni.

A $\delta\sigma$ négyszög két szomszédos oldalát ez a két elemi vector képezze: $(\delta_1 x, \delta_1 y, \delta_1 z)$ és $(\delta_2 x, \delta_2 y, \delta_2 z)$, amelyek hosszát $\delta_1 s$ és $\delta_2 s$ jelölje. A másik két oldal ezekkel párhuzamosnak számítható. Az első vector eleje legyen az $\underset{\smile}{1}$ vonalban, vége a $\underset{\smile}{2}$ vonalban. A második vector eleje legyen szintén az $\underset{\smile}{1}$ vonalban, tehát ugyanabban a ponthelyben, mint az elsőé, vége legyen a $\underset{\smile}{3}$ vonalban. Akkor

$$F'-F=\frac{\partial F}{\partial x}\delta_1 x+\frac{\partial F}{\partial y}\delta_1 y+\frac{\partial F}{\partial z}\delta_1 z=\delta p,$$
$$G'-G=\frac{\partial G}{\partial x}\delta_2 x+\frac{\partial G}{\partial y}\delta_2 y+\frac{\partial G}{\partial z}\delta_2 z=\delta q.$$

A $(\delta_1 x, \delta_1 y, \delta_1 z)$ elemi vector nyilvánvalóan a $G=q$ fölületen fekszik, a $(\delta_2 x, \delta_2 y, \delta_2 z)$ elemi vector az $F=p$ fötületen, s mindkettő merőlegesen az $\underline{1}$ vonalra; azért merőlegesen reá, mert a föltevés szerint a $(\delta\sigma)$ négyszög orthogonalis a vonal-seregre nézve. Ha tehát x, y, z helyen az $\underline{1}$ vonal egyik irányának irány-cosinusai α, β, γ, úgy

$$\delta_1 x : \delta_1 y : \delta_1 z =$$
$$= \left(\frac{\partial G}{\partial y}\gamma - \frac{\partial G}{\partial z}\beta\right) : \left(\frac{\partial G}{\partial z}\alpha - \frac{\partial G}{\partial x}\gamma\right) : \left(\frac{\partial G}{\partial x}\beta - \frac{\partial G}{\partial y}\alpha\right),$$
$$\delta_2 x : \delta_2 y : \delta_2 z =$$
$$= \left(\frac{\partial F}{\partial y}\gamma - \frac{\partial F}{\partial z}\beta\right) : \left(\frac{\partial F}{\partial z}\alpha - \frac{\partial F}{\partial x}\gamma\right) : \left(\frac{\partial F}{\partial x}\beta - \frac{\partial F}{\partial y}\alpha\right).$$

Az első jobb-oldalon szereplő binomiumoknak, mint componenseknek, megfelelő vector nagyságát jelölje R_1, a második jobb-oldalon szereplő binomiumoknak, mint componenseknek, megfelelő vector nagyságát jelölje R_2. Akkor

$$\delta_1 x = (\pm) \frac{\frac{\partial G}{\partial y}\gamma - \frac{\partial G}{\partial z}\beta}{R_1} \delta_1 s, \quad \text{stb.}$$

$$\delta_2 x = (\pm) \frac{\frac{\partial F}{\partial y}\gamma - \frac{\partial F}{\partial z}\beta}{R_2} \delta_2 s, \quad \text{stb.}$$

Behelyettesítvén ezeket δp és δq föntebbi kifejezésébe, és tekintetbe vévén a ξ, η, ζ componensek kifejezéseit, azt találjuk, hogy, ha a (ξ, η, ζ) vector nagyságát ρ jelöli, úgy

$$\delta_1 s = (\pm) \frac{R_1}{\rho} \delta p, \quad \delta_2 s = (\pm) \frac{R_2}{\rho} \delta q,$$

mert t. i.

$$\alpha : \beta : \gamma = \xi : \eta : \zeta.$$

Mivel a $(\delta\sigma)$ négyszögnek a területét a következő kifejezés szolgáltatja:

$$\delta\sigma = \sin(\delta_1 s, \delta_2 s) \,.\, \delta_1 s \,.\, \delta_2 s,$$

így $\delta_1 s$ és $\delta_2 s$ épen most talált kifejezéséből folyólag

$$\delta\sigma = (\pm) \frac{R_1 R_2}{\rho^2} \sin(\delta_1 s, \delta_2 s) \,.\, \delta p \, \delta q.$$

Azonban,

$$\sin^2(\partial_1 s, \partial_2 s)=$$
$$=\left(\frac{\partial_1 z}{\partial_1 s}\frac{\partial_2 y}{\partial_2 s}-\frac{\partial_1 y}{\partial_1 s}\frac{\partial_2 z}{\partial_2 s}\right)^2+\left(\frac{\partial_1 x}{\partial_1 s}\frac{\partial_2 z}{\partial_2 s}-\frac{\partial_1 z}{\partial_1 s}\frac{\partial_2 x}{\partial_2 s}\right)^2+\left(\frac{\partial_1 y}{\partial_1 s}\frac{\partial_2 x}{\partial_2 s}-\frac{\partial_1 x}{\partial_1 s}\frac{\partial_2 y}{\partial_2 s}\right)^2.$$

Helyettesítsük be ide is $\partial_1 x$ stb. előbb följegyzett kifejezéseit. Tekintetbe véve a ξ, η, ζ componenseknek az F és G függvénynyel képezett formuláit, és tekintetbe véve, hogy α, β, γ számértékre a $\xi:\rho$, $\eta:\rho$, $\zeta:\rho$ iránycosinusokkal egyezik, csekély fáradás árán azt találjuk, hogy

$$\sin^2(\partial_1 s, \partial_2 s)=\left(\frac{\rho}{R_1 R_2}\right)^2.$$

Eszerint

$$\frac{|\partial p\, \partial q|}{\partial \sigma}=\rho,$$

vagyis a vonalsereg sürűsége jelenti mindenütt a vector nagyságát. Ezzel ki van egészítve a vector geometriai jellemzése.

XXXVI Folytonossági tételek.

A függvények folytonosságát illetőleg az alkalmazások szempontjából különösebb érdekkel bír a következő három tantétel.

1.) Tegyük föl, hogy az $u, v, w, .$ változók száma N, és hogy egy folytonos N dimensiós érték-tartomány belsejében az $f(u, v, w, ..)$ függvény az egyes változók szerint folytonos. Akkor az érték-tartomány belsejében valamennyi változó szerint folytonos az f függvény. Azaz: ha $\xi, \eta, \zeta, ..$ változók fölső szám-határa megválasztható oly kicsinynek, hogy bármi kis adott számérték legyen λ, egy N dimensiós érték-tartomány belsejében:

$$|f(u+\xi, v, w, ..)-f(u, v, w, ..)|<\lambda,$$
$$|f(u, v+\eta, w, ..)-f(u, v, w, ..)|<\lambda,$$
$$\cdots\cdots\cdots,$$

akkor $\xi, \eta, \zeta, ..$ fölső szám-határa megválasztható oly kicsinynek, hogy bármi kis adott számérték legyen μ, annak az érték tartománynak a belsejében:

$$|f(u+\xi, v+\eta, w+\zeta\ ..)-f(u, v, w, ..)|<\mu.$$

Ugyanis, az érték-tartomány belsejében

$$|f(u+\xi, v+\eta, w+\zeta, ..)-f(u, v+\eta, w+\zeta, ..)|<\lambda,$$
$$|f(u, v+\eta, w+\zeta, ..)-f(u, v, w+\zeta, ..)|<\lambda,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Ebből pedig összeadás rendjén az állitás igazára

$$|f(u+\xi, v+\eta, w+\zeta, ..)-f(u, v, w, ..)|<N\lambda$$

következik.

2.) Ha az s változónak valamely folytonos érték-intervallumában $f(s)$ mindenütt deriválható és deriváltja nem csak határozott értékkel, de határozott véges értékkel bír mindenütt az intervallumban, akkor deriváltja folytonos az intervallumban.

Mert legyen, hogy, mihelyt $|\varsigma|<\varepsilon$, már $s+\varsigma$, vagy $s-\varsigma$, vagy mindkettő az intervallumba tartozik. A föltevés értelmében, bármi kis számérték legyen λ, megválasztható az ε oly kicsinynek, hogy a fölső, vagy alsó előjellel vagy mindegyikkel

$$\left|\frac{f(s\pm\varsigma)-f(s)}{\pm\varsigma}-\varphi_s\right|<\lambda,$$

ahol φ_s határozott érték, az f függvény deriváltja az s érték-helyen.

Ha n az egységnél kisebb positivus szám, nem külömben

$$\left|\varphi_s-\frac{f(s\pm n\varsigma)-f(s)}{\pm n\varsigma}\right|<\lambda.$$

A két egyenlőtlenség összeadásából folyólag

$$\left|\frac{f(s\pm\varsigma)-f(s)}{\pm\varsigma}-\frac{f(s\pm n\varsigma)-f(s)}{\pm n\varsigma}\right|<2\lambda.$$

Azonban az itteni baloldal azonos ezzel:

$$\frac{1-n}{n}\left|\frac{f(s\pm n\varsigma\pm(1-n)\varsigma)-f(s\pm n\varsigma)}{\pm(1-n)\varsigma}-\frac{f(s\pm\varsigma)-f(s)}{\pm\varsigma}\right|,$$

amelytől csak algebrai alak szerint külömbözik. Következőleg

$$\left|\frac{f(s\pm n\varsigma\pm(1-n)\varsigma)-f(s\pm n\varsigma)}{\pm(1-n)\varsigma}-\frac{f(s\pm\varsigma)-f(s)}{\pm\varsigma}\right|<\frac{2n}{1-n}\lambda.$$

Emellett vegyük most még számba, hogy

$$\left|\frac{f(s\pm\varsigma)-f(s)}{\pm\varsigma}-\varphi_s\right|<\lambda,$$

$$\left|\varphi_{s\pm n\varsigma}-\frac{f(s\pm n\varsigma\pm(1-n)\varsigma)-f(s\pm n\varsigma)}{\pm(1-n)\varsigma}\right|<\lambda.$$

A három egyenlőtlenség összeadásából

$$\left| \varphi_{s \pm n\varsigma} - \varphi_s \right| < \frac{2}{1-n}\lambda$$

következik. Az n positivus szám azzal a kikötéssel, hogy az egységnél kisebb legyen, egészen szabadon válaszható meg.

Ezzel az állítás be van bizonyítva.

3.) Ha az itteni első czikk-részben szereplő f függvény a változók összesége szerint és mindenütt véges határozott értékbe deriválható az N dimensiós érték-tartomány belsejében, akkor az egyes változók szerint képezett partialis deriváltjai valamenyi változó szerint folytonosak az érték-tartomány belsejében.

Bizonyítás:

A föltételezett deriválhatóság értelmében a függvény mindenütt deriválható partialisan az egyes változók szerint az érték-tartomány belsejében, s azon fölül áll, hogy bármi kis szám-érték legyen λ, a $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ változók fölső szám-határa megválasztható oly kicsinynek, hogy ha $\xi:\rho$, $\eta:\rho$, $\zeta:\rho$ stb. határozott véges értékek úgy az érték-tartomány belsejében mindenütt:

$$\left| \frac{f(u+\xi,\, v+\eta,\, w+\zeta, \ldots) - f(u, v, w, \ldots)}{\rho} - \left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\xi}{\rho} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\eta}{\rho} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\zeta}{\rho} + \cdots \right) \right| < \lambda.$$

Tudvalévő dolog, hogy evégből szükséges föltételt képez egy ilyetén folytonossági rendszer: $\partial f:\partial u$ folytonos a v, w, stb. változók összesége szerint, $\partial f:\partial v$ folytonos a w, stb. változók összesége szerint sít. az érték-tartomány belsejében.

Legyen, hogy épen ez a példaként említett folytonossági rendszer teljesűl. Az előbbeni czikk-rész értelmében $\partial f:\partial u$ folytonos az u változó szerint, $\partial f:\partial v$ folytonos a v változó szerint sít., tehát $\partial f:\partial u$ folytonos az u, v, w stb. változók összesége szerint, $\partial f:\partial v$ folytonos a v, w, stb. változók összesége szerint sít., az érték-tartomány belsejében.

De ugyancsak ösmeretes, hogy ez a folytonossági rendszer elégséges föltétele is az előttünk lévő határ-egyenlőtlenségnek.

Már most vegyük tekintetbe, hogy, ha a, b, c stb. véges constansok, és

$$u = u_0 + a\,s, \quad v = v_0 + b\,s, \quad w = w_0 + c\,s, \ldots,$$

úgy az előbbeni czikk-rész értelmében $\mathrm{d}f:\mathrm{d}s$ folytonos függvénye s-nek az érték-tartomány belsejében. De

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s} = \frac{\partial f}{\partial u}a + \frac{\partial f}{\partial v}b + \frac{\partial f}{\partial w}c + \cdots$$

Jelöljék emitt a $\partial f:\partial u$ stb. partialis deriváltakat rendre $\varphi, \psi, \chi, \ldots$: bármi kis számérték legyen λ, megválasztható ς változó fölső számhatára oly kicsinynek, hogy a

$$\begin{aligned}&[\varphi(u+a\varsigma,\quad v+b\varsigma,\quad w+c\varsigma,..)-\varphi(u,\ v,\ w,..)]a\\+&[\psi(u+a\varsigma,\quad v+b\varsigma,\quad w+c\varsigma,..)-\psi(u,\ v,\ w,..)]b\\+&[\chi(u+a\varsigma,\quad v+b\varsigma,\quad w+c\varsigma,..)-\chi(u,\ v,\ w,..)]c+\ldots\end{aligned}$$

külömbség számértéke kisebb, mint λ. Irjuk egy izben ς factorait a és b kivételével zérusnak:

$$\begin{aligned}\Big|\{\varphi(u+a\varsigma,\ v+b\varsigma,\ w,..)-\varphi(u,v,w,..)\}a+&\\+\{\psi(u+a\varsigma,\ v+b\varsigma,\ w,..)-\psi(u,v,w,..)\}b\Big|&\\<\lambda.&\end{aligned}$$

Mivel φ az összes változók szerint folytonos, ψ pedig a $v, w, ..$ változók összesége szerint folytonos, úgy ς fölső számhatára lehet oly kicsiny, hogy

$$\begin{aligned}|\varphi(u,\ v,\ w,..)-\varphi(u+a\varsigma,\ v+b\varsigma,\ w,..)|<\lambda\\|\psi(u+a\varsigma,\ v,\ w,..)-\psi(u+a\varsigma,\ v+b\varsigma,\ w,..)|<\lambda.\end{aligned}$$

A három egyenlőtlenség rendén

$$|\psi(u+a\varsigma,\ v,\ w,..)-\psi(u,\ v,\ w,..)|<(1+|a|+|b|)\lambda,$$

tehát ψ folytonos függvénye u-nak az értéktartomány belsejében. Igy e czikk első részéből folyólag ψ, azaz $\partial f:\partial v$ valamennyi változó szerint folytonos az értéktartomány belsejében. Hasonló módon következik, hogy $\partial f:\partial w$ az u folytonos függvénye, és, hogy a v folytonos függvénye, tehát, hogy valamennyi változó szerint folytonos az érték-tartomány belsejében sít.

Értelmezések.

Néhány kétesebb jelentményű szólás-mód esetleges félremagyarázásának elhárítását czélozzák a következő értelmezések.

1.) Egy **iránynak a cosinusain** ennek az iránynak az irány-cosinusai értendők.

2.) Egy **mennyiség vagy érték nagysága** mindig az absolutus értéket jelenti.

Továbbá, valahányszor egy mennyiség **fölső számhatáráról** van a szó, ez mindig úgy értendő, hogy a mennyiség mind azt az értéket fölveheti, de csakis mindazt, amelynek a nagysága bizonyos számértéken túl nem hág, amely számérték a fölső számhatár.

3. **Végtelen nagy mennyiségen** mindig absolutus érték szerint végtelen nagy értendő.

4.) A **véges** jelző mindig csak a végtelen nagyot zárja ki.

5.) Különös kijelentés hiányában *egy függvény folytonosságába* mindig a végesség és egyértékűség követelése is bele értendő a folytonosságnak a XI. czikkben is foglalt definitiójával egyezőleg.

6.) *Több változó függvényének a folytonosságán* nem csupán külön-külön az egyes változók szerint való folytonossága gondolandó, hanem egészen általános folytonossága a XI. czikk definitiójának megfelelően.

7.) Hasonlókép *több változó függvényének a deriválhatóságán* nem csupán az egyes változók szerint való partialis deriválhatósága értendő, de egészen általánosan, bármely módon való egyszeres deriválhatósága, még pedig olykép, hogy, ha u, v, .. azok a változók, és Φ a függvény, úgy bármely deriválható függvényei legyenek az u, v, .. változók az s parametrumnak:

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}s}=\frac{\partial\Phi}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}+\frac{\partial\Phi}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}+\cdot\cdot$$

Ugyanezt jelentik az ilyetén szólásmódok is: *korlátlanúl deriválható egyszer, deriválható valamennyi változó szerint, deriválható valamennyi változóra.*

8.) Tegyük föl, hogy a $\partial\Phi:\partial u$ stb. partialis deriváltak is deriválható függvényeik az u, v, .. változóknak, és u, v, .., $\mathrm{d}u:\mathrm{d}s$, $\mathrm{d}v:\mathrm{d}s$, .. deriválható függvényei legyenek a ς parametrumnak. Akkor $\mathrm{d}\Phi:\mathrm{d}s$ deriválható függvénye ς-nak, és

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}s\mathrm{d}\varsigma}=\frac{\partial\Phi}{\partial u}\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}s\mathrm{d}\varsigma}+\cdots+\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varsigma}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial\,\partial u}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\varsigma}+\cdot\cdot\right)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}+\cdots$$

Igy értendő mindig egy *több-változós függvény kétszeres deriválhatósága*, s.t.

9.) Szó van a *független változók oly különös értékeihez tartozó deriváltakról is, amely értékek mellett ezek a deriváltak definitiószerűleg nem léteznek.* Ez mindig így értendő: Képezve gondoljuk a deriváltakat a független változók oly értékeihez, amelyek mellett definitio-szerűleg léteznek, tehát határozott véges értékkel bírnak. Azután a független változókat folytonos változtatással valamely különös értékeikbe változtatjuk. Azt a határozott végtelen nagy értéket, vagy azt a többé-kevésbbé határozatlan értéket, értéktartományt, tulajdonítjuk most a deriváltaknak, amely felé a független változók folytonos változtatásának összes módjai révén terelődnek.

10.) Különös kijelentés hiányában:

Vonalon mindig oly véges hosszúságú vonal értendő, amely bír legalább is azzal az analyticus tulajdonsággal, hogy egyes pontok kivételével minden helyen határozott normalis síkja van, amelynek az iránya folytonosan változik a vonal mentén.

Fölületen mindig oly véges kiterjedésű fölület értendő, amely bír legalább is azzal az analyticus tulajdonsággal, hogy egyes pontok és vonalak kivételével minden helyen határozott érintő síkja van, amelynek az iránya folytonosan változik a fölület mentén.

Téren a végetlen tér afféle része értendő mindig, amelyet egy, vagy véges számú több összefüggő fölület határol, olyan, aminőt az előbbi meghatározás jellemez.

11.) Egyes pontok egy vonalban, fölületben, térben, egyes vonalak egy fölületben, térben, egyes fölületek egy térben, mindig véges számú pontot, vonalat, fölületet jelentenek a föntebb jellemzett értemény szerint.

12.) Egy fölület határa a fölületet teljesen határoló egy, vagy több összefüggő vonal a föntebb jellemzett értemény szerint.

Egy tér határa, a tért teljesen határoló egy, vagy több összefüggő fölület a föntebb jellemzett értemény szerint.

Az egyszerű inaequatiók tana.

I. Egyszerű függvények és relatiók. Az egyenlőtlenségek irás-módja.

1. Ha egy változó, θ, más változók, $u_1, u_2, \ldots, u_n$, egynemű, vonalos egész függvénye, vagyis

$$\theta \equiv A_1 u_1 + A_2 u_2 + \ldots + A_n u_n,$$

a hol az A együtthatók függetlenek az u változóktól, akkor röviden e változók egyszerű függvényének nevezzük.

Ha valamely változók tetszésszerintiségét az a kirovás szoritja meg, hogy egy egyszerű függvényük ne lehessen negativus, vagy ne lehessen positivus, vagy ne lehessen se negativus, se positivus, akkor azt mondjuk róluk, hogy egyszerű relatio áll fönn közöttük, a melyet a két első esetben egyszerű inaequatiónak, vagy egyszerű egyenlőtlenségnek, a harmadikban egyszerű aequatiónak, vagy egyszerű egyenletnek nevezünk. A szokott symbolicus kifejezésekkel élve $\theta \geqq 0$ és nem különben $\theta \leqq 0$ egyszerű egyenlőtlenség, $\theta = 0$ egyszerű egyenlet, mindhárom egyszerű relatio az oly változók között, amelyeknek egyszerű függvénye a θ, azaz egynemű, vonalos egész függvénye.

Ha egynél több egyszerű relatio szorítaná meg valamely változtatható mennyiségek tetszésszerintiségét, a relatiók rendszerét egyszerű relatio-rendszernek nevezzük.

A következendőkben mindig egyszerű relatiókkal és relatio-rendszerekkel lesz dolgunk, egyszerű egyenlőtlenségekkel és egyenletekkel s ilyenek rendszerével. Ha tehát helyenkint mellőzzük is az „egyszerű“ jelzőt, midőn egyenlőtlenséget, egyenletet, relatiót, relatio-rendszert mondunk, mindig oda értendő az.

Azokat a változókat, a melyek közt a relatiók fönállanak, vezérmennyiségeknek fogjuk nevezni.

2. Ha bármely mennyiség azt a kirovást viselné, hogy ne lehes-

sen positivus, mindig módunkban van olyannal helyettesíteni ezt a kirovást, amely a negativus értékeket tagadja meg. Legyen ugyanis, hogy $f \overline{\overline{<}} 0$ köteles lenni. Ez a kikötés sértetlen marad, ha az egyenlőtlenség két oldalához egyenlő mennyiséget adunk. Adjuk mindkét oldalához a $-f$ mennyiséget. Akkor azt találjuk, hogy $o \overline{\overline{<}} -f$ Ez a követelés aequivalens az előbbivel, mert ebből viszont az előbbi következtethető az által, hogy mindkét oldalhoz hozzá adjuk az f mennyiséget.

De közbötlenűl is belátható, hogy az a kiszabás, hogy valamely mennyiség ne lehessen positivus, aequivalens azzal a kiszabással, hogy a mennyiség ellentétese ne lehessen negativus.

Ha netalán valamelyes viszonyok közt az a követelés merűlne föl, hogy valamely mennyiség ne lehessen positivus, ezt a követelést mindig át fogjuk fordítani arra, hogy az ellentétese ne lehessen negativus, és mindig így fogjuk jegyekben kifejezni. E szerint mindig $\overline{\overline{>}} o$ alakban írt egyenlőtlenségeink lesznek s másfélére nem is lesz gondunk.

II. Az egyenlőtlenségek száma.

Ha a vezér-mennyiségek száma kettőnél nagyobb, akárhány egymástól független egyenlőtlenség lehetséges; vagyis akárhány olyan egyenlőtlenség, hogy mihelyt az ő rendszerükből egy egyenlőtlenséget kihagyunk, már a megmaradt rendszer nem szorítja meg abban a mértékben a vezérmennyiségek érték-tartományát, mint a teljes rendszer.

A legegyszerűbb módon geometriai szemlélődés útján győződhetünk meg ennek az állításnak a helyes voltáról.

E geometriai szemlélődés megejtése végett mindenek előtt adjunk algebrai kifejezést annak a kikötésnek, hogy egy pont egy sík egyik oldalán lévő tér belsejében ne foglalhasson helyet, hanem csak a sík másik oldalán lévő tér belsejében és magán a síkon lehessen.

Válaszszunk a síkon egy szabott helyű pontot. Ebből a pontból húzzunk vectort a mi változó helyű pontunkba, s a vector componensei legyenek ξ, η, ζ. A szabott helyű pontból húzzuk meg a sík normalisát is, és pedig a felé az oldal felé, a mely oldalon a változó helyű pont tartózkodhatik. Könnyű észre venni, hogy akárhol legyen is ez a pont a sík kitűzött oldalán, a $(\xi\ \eta, \zeta)$ vector és a normalis hegyes szöget képez egymással. Legföljebb derékszöget képezhetnek. Akkor képeznek derékszöget, midőn a változó helyű pont a síkon foglal helyet. Szögük fölső érték-határa $\pi : 2$, alsó érték-határa 0, a mely határok közt azonban már tetszésszerinti ez a szög. Igy tehát, ha a (ξ, η, ζ) vector és a normalis szögének a cosinusa nem negativus, akkor, és csak akkor, foglal el megengedett helyet a pontunk.

Ha már most a normalis irány-cosinusai α, β, γ, és a vector hossza ρ, akkor a szögük cosinusa

$$\alpha\frac{\xi}{\rho}+\beta\frac{\eta}{\rho}+\gamma\frac{\zeta}{\rho}$$

lévén, a változó helyű pontra kirótt megszorítás algebrai kifejezése ez:

$$\alpha\xi+\beta\eta+\gamma\zeta \geqq 0,$$

mert a ρ positivus, és így, a mely mennyiség nem-negativus, annak a ρ-szorosa is nem-negativus.

Akármicsoda értéket vegyen föl ξ, η, ζ, ha eleget tesz ennek az egyenlőtlenségnek, akkor, és csak akkor: a sík egyik oldalán lévő tér belsejében nem foglal helyet a pont, s vagy a sík másik oldalán lévő tér belsejében van, vagy magán a síkon. Amely tér-rész belsejébe mutat az (α, β, γ) normalis, abban a térben foglalhat csak helyet a pont, de ebben bárhol, az egyenlőtlenség következtében.

Ennek az ismerete után eljuthatunk már a kimondott tétel geometriai belátásához.

Ha egyszer kiderült, hogy három vezér-mennyiség esetében akárhány egymástól független inaequatio lehetséges, ezzel természetesen kiderült az is, hogy négy és több vezér-mennyiség esetében is akárhány egymástól független inaequatio lehetséges.

Gondoljunk egy gúlát, a melynek a csúcsa közelünkben van, oldalai a végtelenbe terjeszkednek. Csupa kiszögellő élei legyenek. Legyen most, hogy egy pont azt a kirovást viseli, hogy a gúla belsejében vagy annak a fölületén foglaljon helyet. E követelés korlátai közt bárhol lehessen, egyebütt sehol.

Nyilvánvaló, hogy ez a követelés a következővel helyettesíthető: a pont a gúla mindegyik lap síkjának azon az oldalán lehessen csak, a melyen a gúla van, mi mellett magukon a lapokon is lehet; egyen, vagy kettőn, vagy valamennyin, a második esetben élen, a harmadik esetben a csúcsban. Ha most a gúla csúcsából a mi pontunkba vectort húzunk, ez a vector egyetlen gúla-lap befelé mutató normalisával sem fog $\pi:2$-nél nagyobb szöget képezni. Ez szükséges és elégséges föltétele lévén annak, hogy a pont mindegyik lapnak a belső oldalán vagy magán a lapon lehessen, ennél fogva a vector componensei közt annyi egyenlőtlenségünk van, ahány a gúlalap. Ha a gúla n oldalú, úgy n számú egyenlőtlenségünk vagyon.

Ezek az egyenlőtlenségek pedig olyanok, hogy mindegyikük független a többitől, vagyis bármelyiküket hagyjuk el, már a megmaradt rendszer nagyobb szabadságot enged a vector componenseinek, illetőleg a pont helyének.

Ugyanis: elhagyni egy egyenlőtlenséget, annyit jelent, mint elhagyni a gúla képzésében egy lap-síkot. Az eképen keletkező gúlának egygyel kevesebb oldala van, mint a réginek, miből folyólag tértartalma nagyobb, mint a régié, még pedig egy három-oldalú gúla tér-tartalmával nagyobb. Ha tehát egy egyenlőtlenséget elhagyunk, akkor már a pont nagyobb térben foglalhat helyet, a régi téren kivűl egy három oldalú gúlában is, és következőleg a vector componensei szükségképen nagyobb érték tartománynyal birnak, mint az előtt. Igy van ez, bármelyiket hagyjuk el az egyenlőtlenségek közűl, tehát mindegyik független a többitől.

III. Megoldások superpositiója.

1. Legyen a következő egyszerű relatio-rendszerünk $u_1, u_2, .., u_n$ vezér-mennyiségek között:

$$\begin{gathered}
A_{11}u_1+A_{12}u_2+..+A_{1n}u_n \geqq 0\\
A_{21}u_1+A_{22}u_2+..+A_{2n}u_n \geqq 0\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\\
A'_{11}u_1+A'_{12}u_2+..+A'_{1n}u_n=0\\
A'_{21}u_1+A'_{22}u_2+..+A'_{2n}u_n=0.\\
\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{gathered}$$

Tegyük föl, hogy ennek a rendszernek eleget tesz $u_1=u'_1$. $u_2=u'_2$, stb., vagyis, hogy olyan értékek ezek, hogy velök valamennyi relationk teljesűl. Nem különben ilyen értékek legyenek $u_1=u_1''$, $u_2=u_2''$, stb. Akkor megoldást képeznek az $u_1=u_1'+u_1''$, $u_2=u_2'+u_2''$, stb. összegértékek is. Mert, ha

$$\begin{gathered}
A_{11}u_1'+A_{12}u_2'+..+A_{1n}u'_n \geqq 0\\
A_{11}u_1''+A_{12}u_2''+..+A_{1n}u''_n \geqq 0,
\end{gathered}$$

akkor egyszersmind

$$A_{11}(u_1'+u_1'')+A_{12}(u_2'+u_2'')+..+A_{1n}(u_n'+u_n'') \geqq 0,$$

sít., a miatt t. i., hogy nem-negativusok összege sem lehet negativus.

Ennek a nyomán könnyű belátni, hogy a mely érték-rendszerek, bárhány legyen is, kielégítik a relatio-rendszert, azok összege is kielégíti.

2. Legyenek $p_1, p_2, ..$ az u mennyiségek egyszerű függvényei. És most a föntebbi relatio-rendszer követelésén kivűl rójjuk ki még azt is az u mennyiségekre, hogy

$$p_1 \geqq 0, \quad p_2 \geqq 0, ..$$

legyen.

Állítás: ha e mellett vannak olyan u értékek, hogy $p_1>0$, ha továbbá vannak olyanok is, hogy $p_2>0$, olyanok is, hogy $p_3>0$, stb., akkor vannak olyanok is, hogy egyszerre

$$p_1>0,\quad p_2>0,\quad p_3>0,\ldots$$

Jelöljük ugyanis az $u=u'$ értékekhez a p-ket p'-vel, $u=u''$ értékekhez p''-vel, stb., és tegyük föl, hogy kielégitik ezek az u-értékek a föntebbi relatio-rendszert és egyúttal

$$\begin{array}{lll} p_1'>0, & p_2'\geqq 0, & p_3'\geqq 0,\ldots \\ p_1''\geqq 0, & p_2''>0, & p_3''\geqq 0,\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

Világos, hogy

$$\begin{array}{l} p_1'+p_1''+\ldots>0, \\ p'_2+p_2''+\ldots>0, \\ \ldots\ldots, \end{array}$$

tehát az $u'+u''+\ldots$ összeg-értékek mellett

$$p_1>0,\quad p_2>0,\ldots,$$

már pedig ezek az összeg-értékek kielégítik a föntebbi relatio-rendszert is.

IV. Az egyszerü inaequatiók alaptétele.

1. Legyen a következő egyszerű inaequatio-rendszerünk az u_1, $u_2, \ldots, u_n$ vezér-mennyiségek között:

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} A_{11}u_1+A_{12}u_2+\ldots+A_{1n}u_n\equiv\theta_1\geqq 0 \\ A_{21}u_1+A_{22}u_2+\ldots+A_{2n}u_n\equiv\theta_2\geqq 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Ha a bal oldalokat, nem negativus multiplicatorokkal szorozva, összeadjuk, világos, hogy olyan kifejezést kapunk, a mely szintén $\geqq 0$. Jelöljék rendre $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ a nem negativus multiplicatorokat:

$$(\lambda_1 A_{11}+\lambda_2 A_{21}+\ldots)u_1+(\lambda_1 A_{12}+\lambda_2 A_{22}+\ldots)u_2+\ldots+(\lambda_1 A_{1n}+\lambda_2 A_{2n}+\ldots)u_n\geqq 0,$$

vagy rövidebb kifejezésben

$$\lambda_1\theta_1+\lambda_2\theta_2+\ldots\geqq 0.$$

Ez az új egyenlőtlenség mindazokkal az u értékkel teljesűl, a melyekkel a rendszer teljesűl. Ennél a tulajdonságánál fogva a rendszer következményes egyenlőtlenségének nevezzük. Elnevezésünk általános értelmezésében a rendszert alkotó minden egyes inaequatió is következményese a rendszernek.

2. Tegyük föl, hogy ez az egyenlőtlenség:

$$(2)\qquad A_1 u_1 + A_2 u_2 + \ldots + A_n u_n \equiv \vartheta > 0$$

a rendszer minden megoldásában teljesűl, azaz, hogy mindazok az u értékek kielégítik, a melyek a rendszert kielégitik. Akkor már ezt az egyenlőtlenséget a rendszer következményesének nevezzük.

Állítjuk: egyszerű inaequatio-rendszer bármely következményes egyenlőtlenségének a bal oldala kifejezhető, mint a rendszer baloldalainak nem negativus multiplicatorokkal képezett összege; az az léteznek olyan nem-negativus λ mennyiségek, az u-któl függetlenek, hogy

$$(3)\qquad \vartheta \equiv \lambda_1 \theta_1 + \lambda_2 \theta_2 + \ldots,$$

vagyis

$$\begin{aligned} A_1 &= \lambda_1 A_{11} + \lambda_2 A_{21} + \ldots \\ A_2 &= \lambda_1 A_{12} + \lambda_2 A_{22} + \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_n &= \lambda_1 A_{1n} + \lambda_2 A_{2n} + \ldots \end{aligned}$$

Ez az affirmatio képezi az egyszerű inaequatiók tanának az alaptételét. Bebizonyítását szolgáltatják a közelebbiek.

3. A (2) egyenlőtlenségben legalább egy A nem zérus, máskép nem léteznék az az egyenlőtlenség. Tegyük föl, hogy úgy vannak választva az indexek, hogy A_n nem zérus. Akkor a (2)-ből ki lehet számítani u_n-et, mint a többi u-nak meg a ϑ érték-jegynek az egyszerű függvényét. Legyen, hogy tényileg kiszámítottuk. Kifejezését helyettesítsük be (1)-be. Ez megtörténvén, (1) baloldalai, mint $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ és ϑ egyszerű függvényei jelentkeznek. Most osszuk át mindegyik egyenlőtlenséget ϑ együtthatójának az absolutus értékével, ha nem zérus az illető együttható. Ez is megtörténvén, a ϑ együtthatója vagy $+1$, vagy -1, vagy 0 a baloldalakban, mihez képest így jelentkezik a rendszer:

$$(a)\left\{\begin{array}{ll} \vartheta + p_1 \equiv \theta_{p1} \geqq 0, & \vartheta + p_2 \equiv \theta_{p2} \geqq 0, \ldots, \\ r_1 \equiv \theta_{r1} \geqq 0, & r_2 \equiv \theta_{r2} \geqq 0, \ldots, \\ -\vartheta + q_1 \equiv \theta_{q1} \geqq 0, & -\vartheta + q_2 \equiv \theta_{q2} \geqq 0, \ldots, \end{array}\right.$$

a hol a p, q, r mennyiségek $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ egyszerű függvényei. és a θ jegyek jelentése csak annyiban különbözik a régi θ jegyek jelentésétől, hogy positivus átosztások történtek, és hogy az új sor-rend általában más, mint a régi.

Ez a rendszer a ϑ jelentményére való tekintettel aequivalens a régivel (1), mert abból származott, és mert belőle viszont azt lehet származtatni.

Már most a (2) szerint ennek a rendszernek is minden megoldásában

$$\text{(b)} \qquad \vartheta \geqq 0.$$

Az (a) első sorában legalább egy egyenlőtlenség létezik, máskép lehetne $\vartheta < 0$.

Ha kimutattuk, hogy léteznek olyan nem-negativus multiplicatorok, a melyekkel megszoroztatván (a)-ban a θ-ák, a szorzatok összege ϑ-val identicus, akkor tételünket bebizonyítottuk, mert az (a)-ban foglalt θ-ák részint ugyanazok, mint az (1)-ben foglaltak, részint positivus factorokkal való szorzataik ugyanazok.

4. De most az (a) rendszer helyett egy másikat vegyünk tekintetbe, a mely úgy keletkezik (a)-ból, hogy abban a ϑ-kat az első és harmadik sor combinatiójával elimináljuk, és azután a harmadik sort mellőzzük. A következő rendszert vegyük tehát tekintetbe:

$$\text{(a)}' \left\{ \begin{array}{ll} \vartheta+p_1 \equiv \theta_{p1} \geqq 0, & \vartheta+p_2 \equiv \theta_{p2} \geqq 0, \; . \; . \\ r_1 \equiv \theta_{r1} \geqq 0, & r_2 \equiv \theta_{r2} \geqq 0, \; . \; . \\ p_1+q_1 \equiv \theta_{p1}+\theta_{q1} \geqq 0, & p_1+q_2 \equiv \theta_{p1}+\theta_{q2} \geqq 0, \; . \; . \\ p_2+q_1 \equiv \theta_{p2}+\theta_{q1} \geqq 0, & p_2+q_2 \equiv \theta_{p2}+\theta_{q2} \geqq 0, \; . \; . \\ . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . & . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \end{array} \right.$$

Ez más egyenlőtlenségi rendszer, mint az előbbi, de világos, hogy szükségképen teljesűl az előbbinek minden megoldásával. A mellett pedig ennek is minden megoldásában

$$\text{(b)}' \qquad \vartheta \geqq 0.$$

Tegyük föl ugyanis, hogy ebben a rendszerben ϑ lehet negativus. Mikor negativus, akkor szükségképen minden p positivus, máskép az első sor nem állana meg. Legyen már most, hogy egy lehetséges positivus p-értékrendszerben nincs kisebb p-érték, mint p_1 értéke.

Akkor még a $-p_1$ értéket is fölveheti ϑ, és így irható $p_1 = -\vartheta$. De ha (a)$'$ alatt a harmadik sorban p_1 helyett mindenütt beirjuk a $-\vartheta$ jegyet, akkor az (a) rendszer harmadik sorát kapjuk, minek folytán teljesűlnie kellene az egész (a) rendszernek is, mert t. i. az egész (a) belefoglalódott az (a') rendszerbe azáltal, hogy a két rendszer harmadik sora egyezővé vált. Azonban az (a) rendszer nem engedi, hogy a ϑ negativus legyen. Következőleg az (a') rendszer sem engedheti.

Ebből egyszersmind az is kitűnik, hogy lehetetlen, mikép (a')-ban egyszerre minden $p > 0$ legyen, és (a')-nak ez a tulajdonsága fog bennünket czélhoz segíteni.

5. Az új, (a') rendszernek azokra a megoldásaira fordítsuk figyelmünket, a melyekben egy p sem negativus, a melyekben tehát

$$
(\mathrm{a})_0 \left\{
\begin{array}{ll}
p_1 \geqq 0, & p_2 \geqq 0, \ldots \\
r_1 \geqq 0, & r_2 \geqq 0, \ldots \\
p_1+q_1 \geqq 0, & p_1+q_2 \geqq 0, \ldots \\
p_2+q_1 \geqq 0, & p_2+q_2 \geqq 0, \ldots
\end{array}
\right.
$$

Ebben a subordinált rendszerben legalább is egy p csak zérus lehet, mert különben valamennyi p lehetne egyszerre >0, mint (III)-ból kitünik. Már pedig épen az imént láttuk, hogy ez lehetetlen.

Legyen, hogy ilyen p a p_1, vagyis, hogy p_1 csak $=0$ lehet az $(a)_0$ rendszerben. Akkor $(a)_0$ minden megoldásáról állíthatjuk, hogy abban

$$
(\mathrm{b})_0 \qquad -p_1 \geqq 0.
$$

Már most tegyük föl, hogy $n-1$ vezérmennyiség esetére áll a bebizonyítandó tétel. Akkor $(a)_0$ és $(b)_0$ esetében áll, mert minden p, q, r csak $n-1$ vezérmennyiség függvénye, t. i. $u_1, u_2 \ldots, u_{n-1}$ egyszerű függvénye.

Igy föltevésünk értelmében kell létezniök olyan nem-negativus multiplicatoroknak, P, Q, R, hogy

$$
(\mathrm{c})_0 \left\{
\begin{array}{l}
-p_1 \equiv P_1 p_1 + P_2 p_2 + \ldots \\
\qquad + R_1 r_1 + R_2 r_2 + \ldots \\
\qquad + Q_{11}(p_1+q_1) + Q_{12}(p_1+q_2) + \ldots \\
\qquad + Q_{21}(p_2+q_1) + Q_{22}(p_2+q_2) + \ldots \\
\qquad + \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
\right.
$$

6. Ebből pedig következik, hogy n vezér-mennyiség esetében is áll a bebizonyítandó tétel. Ugyanis következik belőle, hogy (1) és (2) esetében is áll.

Ennek a fölismerése végett szorozzuk meg $(a)'$ alatt az első sorban az első identitast P_1+1 mennyiséggel, a másodikat P_2-vel, a harmadikat P_3-mal sít., a második sorban az első identitast R_1-gyel, a másodikat R_2-vel, sít., a harmadik sorban az első identitást Q_{11}-gyel, a másodikat Q_{12}-vel, sít., sít. Azután ezeket a szorzatokat adjuk össze.

Az összegből azok a tagok, a melyek a p-ket, q-kat, r-eket, mint factorokat, tartalmazzák, $(c)_0$ következtében kiesnek, és e módon a következő azonosság áll elő:

$$
\begin{array}{l}
(1+P_1+P_2+\ldots)\,\vartheta \equiv (1+P_1)\theta_{p1} + P_2\theta_{p2} + \ldots \\
\qquad + R_1\theta_{r1} + R_2\theta_{r2} + \ldots \\
\qquad + Q_{11}(\theta_{p1}+\theta_{q1}) + Q_{12}(\theta_{p1}+\theta_{q2}) + \ldots \\
\qquad + Q_{21}(\theta_{p2}+\theta_{q1}) + Q_{22}(\theta_{p2}+\theta_{q2}) + \ldots \\
\qquad + \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
$$

Ezzel a ϑ úgy van kifejezve, mint az (1)-ben jegyzett θ-ák egyszerű függvénye, a melyben az együtthatók nem-negativus multiplicatorok, mert az itt szereplő θ-ák és az (1)-ben lévők részint egyezők, részint positivus factorban különböznek a 3. czikk-rész tanusága szerint.

7. De már most a kimondott tétel be van bizonyítva, mert egy vezér-mennyiség esetére közbötlenűl belátható annak a helyessége.

V. Az egyszerü aequatiók és inaequatiók alaptétele.

Legyen most, hogy az u vezér-mennyiségek érték-tartományának a megszorítására nemcsak egyenlőtlenségek, de egyenletek is szolgálnak:

$$(1)\quad \begin{cases} A_{11}u_1+A_{12}u_2+\,.\,.+A_{1n}u_n\equiv\theta_1\geqq 0, \\ A_{21}u_1+A_{22}u_2+\,.\,.+A_{2n}u_n\equiv\theta_2\geqq 0, \\ \quad .\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \\ A'_{11}u_1+A'_{12}u_2+\,.\,.+A'_{1n}u_n\equiv\theta'_1=0, \\ A'_{21}u_1+A'_{22}u_2+\,.\,.+A'_{2n}u_n\equiv\theta'_2=0, \\ \quad .\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;, \end{cases}$$

és ezek minden megoldásában teljesűljön

$$(2)\qquad A_1u_1+A_2u_2+\,.\,.+A_n\,u_n\equiv\vartheta\geqq 0.$$

Ekkor a (2) alatti inaequatiót az (1) alatti rendszer következményesének nevezzük.

Az ide tartozó alaptétel így szól: léteznek olyan nem-negativus λ mennyiségek, és olyan λ' mennyiségek, az u-któl függetlenek, hogy

$$(3)_1\qquad \vartheta\equiv\lambda_1\theta_1+\lambda_2\theta_2+\,.\,.+\lambda'_1\theta'_1+\lambda'_2\theta'_2+\,.\,.$$

Ennek a tételnek a bebizonyítása egyszerű módon alapítható az előbbeni tételre.

Az egyenleteket fejezzük ki két-két ellentétes egyenlőtlenség segedelmével, mihez képest így jelentkezik a rendszer:

$$\begin{array}{ll} \theta_1\geqq 0, & \theta_2\geqq 0,\;.\,. \\ \theta'_1\geqq 0, & \theta'_2\geqq 0,\;.\,. \\ -\theta'_1\geqq 0, & -\theta'_2\geqq 0,\;.\,. \end{array}$$

Minthogy most csupa egyenlőtlenségek vannak a rendszerben, alkalmazható az előbbeni tétel: kell létezniök olyan nem-negativus multiplicatoroknak, λ, μ, ν, hogy

$$\begin{aligned}\vartheta \equiv \lambda_1\theta_1 + \lambda_2\theta_2 + \ldots \\ +\mu_1\theta'_1 + \mu_2\theta'_2 + \ldots \\ -\nu_1\theta'_1 - \nu_2\theta'_2 - \ldots,\end{aligned}$$

két-két tagot összevonván:

$$\begin{aligned}\vartheta \equiv \lambda_1\theta_1 + \lambda_2\theta_2 \ldots \\ +(\mu_1 - \nu_1)\theta'_1 + (\mu_2 - \nu_2)\theta'_2 + \ldots\end{aligned}$$

Itt a θ függvények multiplicatorai nem negativusok, de a θ' függvények multiplicatorai lehetnek negativusok is. E mellett mindkétféle szorzók függetlenek a vezér-mennyiségektől. Tényileg helyes tehát a $(3)_1$ alatti identitas. Részletesen kifejtve

$$(3)_2 \quad \begin{cases} A_1 = \lambda_1 A_{11} + \lambda_2 A_{21} + \ldots + \lambda'_1 A'_{11} + \lambda'_2 A'_{21} + \ldots \\ A_2 = \lambda_1 A_{12} + \lambda_2 A_{22} + \ldots + \lambda'_1 A'_{12} + \lambda'_2 A'_{22} + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_n = \lambda_1 A_{1n} + \lambda_2 A_{2n} + \ldots + \lambda'_1 A'_{1n} + \lambda'_2 A'_{2n} + \ldots \end{cases}$$

Ha a (2) alatti inaequatio ellentétese is következményese az (1) alatti rendszernek, vagyis, ha a

$$-A_1u_1 - A_2u_2 - \ldots - A_nu_n \equiv -\vartheta \geqq 0$$

egyenlőtlenség is teljesűl a rendszer minden megoldásában, akkor az

$$A_1u_1 + A_2u_2 + \ldots + A_nu_n \equiv \vartheta = 0$$

egyenlet is teljesűl a rendszer minden megoldásában, minek megfelelően a rendszer következményes egyenletének nevezzük. Világos, hogy ennek az együtthatói $(3)_2$ módjára oly λ együtthatókkal is kifejezhetők, a melyek nem-positivusok.

VI. Egyszerű relatiók összefoglalása.

A $(3)_2$ alatt lévő jobb-oldalok a λ nem-negativus multiplicatorok és a λ' multiplicatorok alkalmas megválasztásával bármely következményes inaequatio vagy aequatio együtthatóit szolgáltathatják, mert minden következményes inaequatióhoz és aequatióhoz léteznek olyan λ nem-negativus mennyiségek és olyan λ' mennyiségek, függetlenek a vezérmennyiségektől, hogy együtthatóikat a $(3)_2$ alatt jegyzett kifejezések képezik. Ha tehát $(3)_2$-ben a λ multiplicatorokat határozatlan nem-negativusoknak s a λ' multiplicatorokat teljesen határozatlanoknak fogadjuk el, akkor a $(3)_2$ alatt lévő kifejezések az összes létezhető következményes inaequatiók és aequatiók együtthatóit magukban foglalják. Ezek közt magukban foglalják az adott (1) alatti relatiok összes együtthatóit.

De másféle egyszerű függvény együtthatóit nem is tartalmazza $(3)_2$, mint csak az olyanéit, a mely az (1) alatti rendszer egyetlen megoldásában sem negativus, mert

$$A_1 u_1 + A_2 u_2 + \ldots + A_n u_n = \lambda\theta_1 + \lambda_2\theta_2 + \ldots + \lambda'_1\theta'_1 + \lambda'_2\theta'_2 + \ldots,$$

ez pedig (1)-nek minden megoldásában $\geqq 0$, ha nem épen csak $=0$, egyszóval (1)-nek egyetlen megoldásában sem negativus.

Mindezeknek és csak ezeknek az együtthatóknak a parametrumos kifejezéseit foglalja magában $(3)_2$, a multiplicatorok, mint parametrumok, révén.

Nem különben a $(3)_1$ jobb oldala, határozatlan nem-negativus λ multiplicatorokkal és teljesen határozatlan λ' multiplicatorokkal véve, összefoglalása mindazoknak az egyszerű föggvényeknek, és csak azoknak, amelyek $\geqq 0$ tétetvén, az adott relatio-rendszer következményeseit szolgáltatják, a melyek közé a rendszert alkotó relatiók is tartoznak.

VII. Egyszerü relatio-rendszerek parametrumos megoldása.

1. Legyen ismét

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} A_{11}u_1 + A_{12}u_2 + \ldots + A_{1n}u_n \geqq 0, \\ A_{21}u_1 + A_{22}u_2 + \ldots + A_{2n}u_n \geqq 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ A'_{11}u_1 + A'_{12}u_2 + \ldots + A'_{1n}u_n = 0, \\ A'_{21}u_1 + A'_{22}u_2 + \ldots + A'_{2n}u_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

egyszerű relatio-rendszerünk.

Most a következő problemáról lesz a szó: úgy határozni meg az u vezér-mennyiségeket, részint tetszés szerinti nem-negativus, részint egészen tetszés szerinti új mennyiségek, parametrumok, egyszerű függvényeiként, hogy ezekkel a függvényekkel a rendszerben előforduló relatiók mind identicus módon teljesűljenek, és ezeken kivűl még csak a rendszer többi következményesei teljesűljenek identicus módon, más egyszerű relatiók azonban nem.

A problema mindig megoldható.

2. Irjuk ki (1)-ből az egyenleteket, a melyekről föltesszük, hogy az egymástól függetlenek száma kisebb mint n. Azonkivűl irjunk ki (1)-ből annyi egyenlőtlenséget és olyanokat, amennyinek, illetőleg amelyeknek, a bal oldala mind független egymástól és az egyenleti baloldaloktól. Tegyük föl pedig, hogy oly sorrendben következnek egymásután (1) alatt az egyenlőtlenségek, hogy a k első egyenlőtlenség megfelel ennek a czélnak. Az egyenletek száma legyen i. Kiirjuk tehát:

$$(2)\quad\begin{cases} A_{11}u_1+A_{12}u_2+\ldots+A_{1n}u_n\geqq 0\\ A_{21}u_1+A_{22}u_2+\ldots+A_{2n}u_n\geqq 0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ A_{k1}u_1+A_{k2}u_2+\ldots+A_{kn}u_n\geqq 0\\ A'_{11}u_1+A'_{12}u_2+\ldots+A'_{1n}u_n=0\\ A'_{21}u_1+A'_{22}u_2+\ldots+A'_{2n}u_n=0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ A'_{i1}u_1+A'_{i2}u_2+\ldots+A'_{in}u_n=0. \end{cases}$$

Egyelőre csak erre a rendszerre vonatkozólag tárgyaljuk a problemát. Törekedjünk úgy határozni meg az u-kat részint tetszés szerinti nem-negativus, részint egészen tetszés szerinti parametrumok egyszerű függvényeiként, hogy ez a rendszer önként teljesűljön és csak ez és következményesei. Miután ennek a föladatnak megfeleltünk lesz, (1) hátralévő részébe bevezetjük az u mennyiségek helyett a (2)-nek eleget tévő parametrumokat. Ez átalakitás után (1) hátralévő része aequivalens az egész (1) alatti rendszerrel, mert (1)-nek (2) alatti része már tekintetbe van véve a parametrumok által, és csak ez és következményesei. Azután tehát már csak az a föladat vár reánk, hogy úgy határozzuk meg a bevezetett parametrumokat, részint tetszés szerinti nem negativus, részint egészen tetszés szerinti új parametrumok egyszerű függvényei gyanánt, hogy (1)-nek hátralévő része, és csak ez és következményesei, önként teljesűljenek.

Hogy legközelebbi czélunkat elérjük, e végből tegyük azt az észrevételt, hogy a (2) alatti rendszer aequivalens a következővel:

$$(2)'\quad\begin{cases} s_1\geqq 0,\quad s_2\geqq 0.\ \ .,\quad s_k\geqq 0,\\ A_{11}u_1+A_{12}u+\ldots+A_{1n}u_n=s_1\\ A_{21}u_1+A_{22}u_2+\ldots+A_{2n}u_n=s_2\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ A_{k1}u_1+A_{k2}u_2+\ldots+A_{kn}u_n=s_k\\ A'_{11}u_1+A'_{12}u_2+\ldots+A'_{1n}u_n=0,\\ A'_{21}u_1+A'_{22}u_2+\ldots+A'_{2n}u_n=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ A'_{i1}u_1+A'_{i2}u_2+\ldots+A'_{in}u_n=0. \end{cases}$$

Itt k számú egyszerű egyenlőtlenségünk és $k+i$ számú egyszerű egyenletünk van $n+k$ számú vezér-mennyiség között. Tegyük föl, hogy az egyenletekből összesen h számú u számítható ki, mint a többi, $(n-h)$ számú, u-knak és az s-eknek a függvényei. Ha az egyenletek bal oldalai mind függetlenek egymástól, akkor $h=k+i$, különben $h<k+i$, és minden esetre $h\leqq n$ és $h\geqq k$. A kiszámított u mennyiségek kifejezései, a melyek

a többi u mennyiségek és az s-ek egyszerű függvényei, máris jelen föladatunknak megfelelő parametrumos kifejezések, a mennyiben t. i. azok a többi u mennyiségek egészen tetszésszerinti, az s-ek pedig nem-negativus tetszésszerinti parametrumokat jelentenek. Ugyanis a $(2)'$ alatt foglalt egyenleteket identicus módon kielégítik, mint olyanok, a melyek a $(2)'$-ben lévő összes egymástól független egyenletekből nyerettek; de még csak azokat az egyenleteket elégíthetik ki, a melyek ezek minden megoldásában teljesűlnek, mert bármely ezektől független egyenlet következtében megszorítás alá kerűlne a parametrumok eddigi tetszésszerintisége, a melyek száma épen akkora, mint az s-ek és az összes u-k számának meg a $(2)'$-ben egymástól független egyenletek számának a különbsége.

3. Elintézésre vár még az a további követelés, hogy az s-ek és a még fönmaradt u-k úgy fejeztessenek ki tetszésszerinti nem negativus és egészen tetszésszerinti új parametrumok egyszerű függvényei gyanánt, hogy (1)-nek hátralévő része is önként teljesűljön, és csak ez és következményesei.

A hátralévő rész a következő:

$$A_{k+1,1}u_1+A_{k+1,2}u_2+\,.\,.+A_{k+1,n}\,u_n\geqq 0,$$
$$A_{k+2,1}u_1+A_{k+2,2}u_2+\,.\,.+A_{k+2,n}\,u_n\geqq 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Beirván ide a h számú u helyett a parametrumos kifejezéseket, csakis az s parametrumok fognak a baloldalokban helyet foglalni, mert ezek a baloldalok a $(2)'$-ben lévő baloldalok egyszerű függvényei az előzetes föltevés értelmében, és így egyúttal a $(2)'$-ben foglalt jobboldalok egyszerű függvényei, s következőleg csak az s-ek függvényei.

Igy a behelyettesítések után ekképen jelentkeznek a hátralévő relatiók:

$$(3)\qquad\left|\begin{array}{l} B_{11}s_1+B_{12}s_2+\,.\,.+B_{1k}s_k\geqq 0 \\ B_{21}s_1+B_{22}s_2+\,.\,.+B_{2k}s_k\geqq 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ s_1\geqq 0,\quad s_2\geqq 0,\,.\,.\,,\quad s_k\geqq 0. \end{array}\right.$$

Az a föladat vár most még reánk, hogy olykép fejezzük ki az s-eket, mint új parametrumok egyszerű függvényeit, hogy a (3) alatti egyenlőtlenségek mind teljesűljenek, de csak ezek és következményeseik.

Ennek a követelésnek a teljesítése végett pedig foglalkozzunk előbb csak a (3) alatt lévő egyenlőtlenségek elsejével, hozzája csatolván azonban az s-ek negativus voltát tagadó inaequatiókat is. Más szóval egyelőre csak akkép iparkodjunk meghatározni as s-eket új parametrumokkal, hogy a (3) alatti első egyenlőtlenség és az s-ek negativus voltát tagadó egyenlőtlenségek teljesűljenek, és mások, mint ezek és következményeseik, ne. Egyelőre tehát csak a

$$(4)\quad \begin{cases} B_{11}s_1+B_{12}s_2+..+B_{1k}s_k \geqq 0, \\ s_1 \geqq 0, \quad s_2 \geqq 0, .., \quad s_k \geqq 0, \end{cases}$$

egyenlőtlenségi rendszer parametrumos kifejezéséről leszen szó.

Ha itt egyetlen B sem volna negativus, akkor nincs tenni való, mert akkor (4) első egyenlőtlensége a többire való tekintettel önként teljesűl, következményese a $(2)'$ rendszernek.

De tegyük föl, hogy vannak a B együtthatók között negativusok is. Legyen pedig, hogy úgy vannak megválasztva az indexek, hogy a ν számú első B positivus, a μ számú következő B negativus, a többi B zérus:

$$\begin{aligned} &B_{11}=P_1>0, \quad B_{12}=P_2>0, .. \quad B_{1\nu}=P_\nu>0, \\ &B_{1.\nu+1}=-Q_1<0, \quad B_{1.\nu+2}=-Q_2<0, .. \quad B_{1.\nu+\mu}=-Q_\mu<0, \\ &B_{1.\nu+\mu+1}=0, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Jelöléseink megegyeztetése végett irjuk egyúttal $s_1\ s_2, .., s_\nu$ helyett $p_1, p_2, .., p_\nu$, és $s_{\nu+1}, s_{\nu+2}, .., s_{\nu+\mu}$ helyett $q_1, q_2, .., q_\mu$.

Ehhez képest a (4) alatti rendszer így van:

$$(4)'\quad \begin{cases} P_1p_1+P_2p_2+..+P_\nu p_\nu-(Q_1q_1+Q_2q_2\,..\,Q_\mu q_\mu) \geqq 0, \\ \qquad p_1 \geqq 0, \quad p_2 \geqq 0, .., \quad p_\nu \geqq 0, \\ \qquad q_1 \geqq 0, \quad q_2 \geqq 0, .., \quad q_\nu \geqq 0, \end{cases}$$

a melyben minden P és minden Q positivus együttható.

4. Azt a czélt akarjuk most e`érni, hogy úgy legyenek meghatározva a p és q mennyiségek újak egyszerű függvényei gyanánt, hogy a $(4)'$ identicus módon teljesűljön, és csakis ez és következményesei.

Állítjuk, hogy elérjük ezt a kettős czélt, ha azt irjuk, hogy

$$(5)\quad \begin{cases} P_1p_1=r_1+r_{11}+r_{12}+..+r_{1\mu}, \\ P_2p_2=r_2+r_{21}+r_{22}+..+r_{2\mu}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_\nu p_\nu=r_\nu+r_{\nu 1}+r_{\nu 2}+..+r_{\nu\mu}, \\ Q_1q_1= \qquad r_{11}+r_{21}+..+r_{\nu 1}, \\ Q_2q_2= \qquad r_{12}+r_{22}+..+r_{\nu 2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ Q_\mu q_\mu= \qquad r_{1\mu}+r_{2\mu}+..+r_{\nu\mu}, \end{cases}$$

és kikötjük, hogy minden r tetszésszerinti nem negativus mennyiséget jelent.

Hogy ezek a kifejezések identicus módon tetjesítik a $(4)'$ rendszert, azt könnyű belátni. E végből csak azt kell szem előtt tartani, hogy minden P és Q positivus, és, hogy a $(4)'$ első egyenlőtlenségének a baloldala behelyettesítés nyomán az

$$r_1+r_2+..+r_\nu$$

összegbe megy át.

Az a kérdés áll azonban még elénk, hogy csakis a $(4)'$ rendszert és következményeseit elégíti-e ki az (5) alatt jegyzett parametrumos rendszer? Ki fog derűlni a legközelebbiekből, hogy igenlő válasz jár erre a kérdésre is.

Foglaljuk össze határozatlan nem negativus multiplicatorokkal egy egyenlőtlenségbe a $(4)'$ rendszert. Ha rendre $\sigma, \pi_1, \pi_2, .., \pi_\nu, \chi_1, \chi_2, .. \chi_\mu$ ezek a multiplicatorok, úgy az összefoglaló egyenlőtlenség a következő:

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{l}(\pi_1+P_1\sigma)p_1+(\pi_2+P_2\sigma)p_2+..+(\pi_\nu+P_\nu\sigma)p_\nu+\\ +(\chi_1-Q_1\sigma)q_1+(\chi_2-Q_2\sigma)q_2+..+(\chi_\mu-Q_\mu\sigma)q_\mu\geqq 0.\end{array}\right.$$

Mivel ez magában foglalja a $(4)'$ rendszer összes egyenlőtlenségeit és összes többi következményeseit, úgy arról kell meggyőződnünk, hogy (5)-ből csak olyan egyszerű egyenlőtlenség következtethető a p és q mennyiségek között, a melyet ennek az összefoglaló egyenlőtlenségnek az alakjára lehet vezetni, vagyis, a melynek az együtthatói oly módon fejezhetők ki, mint ennek az egyenlőtlenségnek az együtthatói, t. i. nem negativus σ mennyiség és nem negativus π és χ mennyiségek közbenjárásával.

5. Alkossunk (5)-ből határozatlan φ és ψ együtthatókkal egy egyszerű inaequatiot:

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{l}\varphi_1P_1p_1+\varphi_2P_2p_2+..+\varphi_\nu P_\nu p_\nu+\\ +\psi_1Q_1q_1+\psi_2Q_2q_2+..+\psi_\mu Q_\mu q_\mu\geqq 0,\end{array}\right.$$

illetőleg, az r-ek segélyével fejezve ki, :

$$\begin{array}{l}\varphi_1r_1+\varphi_2r_2+..+\varphi_\nu r_\nu+\\ +(\varphi_1+\psi_1)r_{11}+(\varphi_1+\psi_2)r_{12}+..+(\varphi_1+\psi_\mu)r_{1\mu}+\\ +(\varphi_2+\psi_1)r_{21}+(\varphi_2+\psi_2)r_{22}+..+(\varphi_2+\psi_\mu)r_{2\mu}+\\ +\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\\ +(\varphi_\nu+\psi_1)r_{\nu 1}+(\varphi_\nu+\psi_2)r_{\nu 2}+..+(\varphi_\nu+\psi_\mu)r_{\nu\mu}\geqq 0.\end{array}$$

Minthogy minden r egészen tetszés szerinti nem-negativus lehet, ennélfogva az utóbbi egyenlőtlenség bármely nem-negativus r értékek mellett köteles megállani. Ebből folyólag szükségképen minden együtthatója vagy positivus, vagy zérus, egy sem lehet negativus:

$$(8)\quad \begin{cases} \varphi_1 \geqq 0, \quad \varphi_2 \geqq 0, \ldots, \quad \varphi_\nu \geqq 0, \\ \varphi_1+\psi_1 \geqq 0, \quad \varphi_1+\psi_2 \geqq 0, \ldots, \quad \varphi_1+\psi_\mu \geqq 0 \\ \varphi_2+\psi_1 \geqq 0, \quad \varphi_2+\psi_2 \geqq 0, \ldots, \quad \varphi_2+\psi_\mu \geqq 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_\nu+\psi_1 \geqq 0, \quad \varphi_\nu+\psi_2 \geqq 0, \ldots, \quad \varphi_\nu+\psi_\mu \geqq 0. \end{cases}$$

Épen azért, mert ezek az egyenlőtlenségek kötelesek a φ és ψ együtthatók közt érvényben lenni, a mi tetszésre képezett egyenlőtlenségünk (7) szükségképen a (6) alatt szerkesztett összefoglaló egyenlőtlenség alakjára vezethető, vagyis a σ multiplicator s a π és χ multiplicatorok, mint nem-negativusok, szükségképen meghatározhatók úgy, hogy a p-k és q-k factorai (6)-ban és (7)-ben egyezzenek, hogy tehát legyen

$$P_1\varphi_1=\pi_1+P_1\sigma, \quad P_2\varphi_2=\pi_2+P_2\sigma, \ldots, \quad P_\nu\varphi_\nu=\pi_\nu+P_\nu\sigma,$$
$$Q_1\psi_1=\chi_1-Q_1\sigma, \quad Q_2\psi_2=\chi_2-Q_2\sigma, \ldots, \quad Q_\mu\psi_\mu=\chi_\mu-Q_\mu\sigma.$$

Ennek a kiderítése végett különböztessünk meg két esetet: azt, hogy egyetlen ψ sem negativus, és azt, hogy van olyan ψ, egy, vagy több, a mely negativus, vagy mind negativus.

Ha egyetlen ψ sem negativus, akkor $\sigma=0$ tevése által szükségképen beteljesednek ezek az egyenlőségek. Ez által ugyanis a következőkbe mennek át:

$$P_1\varphi_1=\pi_1, \quad P_2\varphi_2=\pi_2, \ldots, \quad P_\nu\varphi_\nu=\pi_\nu,$$
$$Q_1\psi_1=\chi_1, \quad Q_2\psi_2=\chi_2, \ldots, \quad Q_\mu\psi_\mu=\chi_\mu,$$

már pedig lehetnek olyan nem negativusok a π és χ mennyiségek, hogy ezek az egyenlőségek megálljanak, mert minden P és Q positivus, továbbá (8) első sorából folyólag egy φ sem negativus, és abban a megkülönböztetett esetben, a melyről most van a szó, egy ψ sem negativus.

Most vizsgáljuk a másik lehetőséget, vagyis a másik megkülönböztetett esetet, a melyben legalább egy ψ negativus. Ebben az esetben legyen, hogy úgy vannak megválasztva az indexek, hogy ψ_1 negativus, még pedig akkora negativus, hogy kisebb ψ-érték nem fordúl elő, vagyis, hogy a többi ψ értékek vagy positivusok, vagy absolutus mekkoraság szerint kisebbek. Akkor $\sigma=-\psi_1$ tevése által szükségképen beválnak kivánt egyenlőségeink. Mindenek előtt vegyük észre, hogy σ-nak ez az értéke nem mond ellent σ természetének, vagyis annak a σ-ra kirótt megszorításnak, hogy ne lehessen negativus, mert $-\psi_1$ positivus. Ezt már tudván, helyettesítsük be az egyenlőségekbe σ helyett a $-\psi_1$ értéket. A tagoknak kissé más elrendezésével azt találjuk, hogy

$$P_1(\varphi_1+\psi_1)=\pi_1, \quad P_2(\varphi_2+\psi_1)=\pi_2, \ldots, \quad P_\nu(\varphi_\nu+\psi_1)=\pi_\nu,$$
$$Q_1(\psi_1-\psi_1)=\chi_1, \quad Q_2(\psi_2-\psi_1)=\chi_2, \ldots, \quad Q_\mu(\psi_\mu-\psi_1)=\chi_\mu.$$

Ezek az egyenlőségek is kielégíthetők nem-negativus π és χ értékekkel, mert minden P és Q positivus, továbbá (8) első oszlopa szerint a $\varphi_1+\psi_1$. stb. összegek egyike sem negativus, és abban a megkülönböztetett esetben, a melyről most van szó, a $\psi_1-\psi_1$, $\psi_2-\psi_1$, stb. különbségek egyike sem negativus a miatt, hogy a ψ_1 negativus értékeknél kisebb ψ-érték nem fordúl elő.

6. Látjuk tehát, hogy tényileg — mivel minden r tetszés szerinti nem-negativus — akármiféle egyszerű egyenlőtlenséget alkossunk a p és q mennyiségek között, az (5) alatti kifejezések rendén szükségképen oly egyenlőtlenség az, a mely a (4)′ inaequatio-rendszer következményese. (Ugyanez áll bármely, az (5) szerint alkotott egyszerű egyenletről, a minek a belátása végett csak az egyenleteknek ellentétes egyenlőtlenségek képében való kifejezhetőségére kell gondolnunk). Ha már most a p és q mennyiségek, vagyis az s mennyiségek helyett ezek r-es kifejezéseit (3)-ba behelyettesítjük, akkor ebben az első egyenlőtlenség, valamint az utolsó sorban jegyzett egyenlőtlenségek, önként teljesűlnek, és csak ezek, és következményeseik, és épen ezért a még (3)-ban fönnmaradó egyenlőtlenségek rendszere aequivalens az eredeti, (1) alatti rendszerrel. De ez a fönnmaradó rendszer már $k+i$ és még egy relatióval, összesen $k+i+1$ relatióval kevesebbet tartalmaz, mint az eredeti. Hozzá jegyeztetvén az r-ek nem-negativus voltát követelő egyenlőtlenségek, olyan rendszerünk van, mint (3), de ez már egygyel kevesebb polynomiumos egyenlőtlenséget tartalmaz, mint (3). Ennek a polynomiumos egyenlőtlenségei közűl egyet ugyan-olyan módon fejezhetünk ki újabb paramatrumokkal, mint cselekedtük a (3)-nak az egyik polynomiumos egyenlőtlenségével stb., mig a polynomiumos egyenlőtlenségek el nem fogytak.

A legutoljára alkalmazott nem-negativus parametrumok és $n-h$ számú u, amazok mint tetszésszerinti nem-negativusok, emezek, mint egészen tetszésszerintiek, úgy fejezik ki az összes u-kat egyszerű függvényekűl, hogy az (1) alatti relatiók, és csak ezek és következményeseik, identicus módon teljesűlnek.

Ebből az is kiviláglik, hogy minden egyszerű relatio-rendszer folytonos érték-tartományt ró ki, a vezérmennyiségekre. Ezek bármely érték-rendszeréből bármely más érték-rendszerébe folytonos változtatásukkal lehet eljutni.

VIII. Együtthatók vonatkozásai.

Tegyük föl, hogy megoldottuk már parametrumosan az (1) alatti relatio-rendszert. Még pedig legyenek a tetszésszerinti nem-negativus parametrumok $v_1, v_2, \ldots$, és az egészen tetszésszerinti parametrumok legyenek $w_1, w_2, \ldots$, úgy, hogy a parametrumos megoldás érték-rendszere ez:

$$u_1=\beta_{11}v_1+\beta_{12}v_2+\,.\,.+\gamma_{11}w_1+\gamma_{12}w_2+\,.\,.$$
$$u_2=\beta_{21}v_1+\beta_{22}v_2+\,.\,.+\gamma_{21}w_1+\gamma_{22}w_2+\,.\,.$$
$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$

Bármelyik egyenlőtlenséget szemeljük ki (1)-ből, ha együtthatóival e parametrumos kifejezéseket rendre megszorozzuk s azután összeadjuk, a jobb oldalon szükségképen nem negativus határozatlan érték lép föl; ha pedig egyenletet szemelünk ki (1)-ből, bármelyik legyen is az, együtthatóival megszorozván s aztán összeadván ezeket a parametrumos kifejezéseket, az eredményes jobb-oldal szükségképen eltűnik. Ugyanez áll a rendszer bármely más következményes egyenlőtlenségéről, illetőleg egyenletéről is, mert a parametrumos kifejezések csakis a rendszernek eleget tevő u-értékeket szolgáltatnak. Viszont, ha, egy $\geqq 0$ vagy $=0$ alakú egyszerű relatiónak az együtthatóival szorozva és aztán összeadva, parametrumos kifejezéseink nem-negativus határozatlan értékhez vagy zérushoz jutnának, akkor az a relatio szükségképen következményese a rendszernek, azaz a rendszer minden megoldásában teljesűl, mert a parametrumos kifejezések a rendszer minden megoldását magukban foglalják. Mivel a rendszer minden következményését szükségképén identicus módon kielégítik a parametrumos kifejezések, így, ha ez az egyenlőtlenség:

$$A_1u_1+A_2u_2+\,.\,.\geqq 0$$

következményes relatio, akkor minden nem negativus v és minden w érték mellett fönáll.

Irjuk be az u-k helyett azok parametrumos kifejezéseit. A vezérmennyiségek szerint végezett rendezés után

$$(A_1\beta_{11}+A_2\beta_{21}+\,.\,.)v_1+(A_1\beta_{12}+A_2\beta_{22}+\,.\,.)v_2+\,.\,.+$$
$$+(A_1\gamma_{11}+A_2\gamma_{21}+\,.\,.)w_1+(A_1\gamma_{12}+A_2\gamma_{22}+\,.\,.)w_2+\,.\,.\geqq 0.$$

Ez teljesedik, bármely nem-negativusok legyenek a v-értékek, és bármik legyenek a w-értékek. Ebből pedig az következik, hogy minden v együtthatója nem-negativus és minden w együtthatója zérus. Kitűnik ez, ha egy v parametrumot positivusnak s valamennyi többi parametrumot zérusnak teszünk meg, és ha egy w parametrumot egyszer positivusnak, egyszer negativusnak s mindkét esetben valamennyi többi parametrumot zérusnak teszünk meg.

Eszerint a következményes egyenlőtlenség együtthatóira a következő határozott relatiók szabódnak ki:

$$
* \left\{
\begin{array}{l}
\beta_{11}A_1+\beta_{21}A_2+\,.\,.+\beta_{n1}A_n\geqq 0,\\
\beta_{12}A_1+\beta_{22}A_1+\,.\,.+\beta_{n2}A_n\geqq 0,\\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\
\gamma_{11}A_1+\gamma_{21}A_2+\,.\,.+\gamma_{n1}A_n=0,\\
\gamma_{21}A_1+\gamma_{22}A_2+\,.\,.+\gamma_{n2}A_n=0,\\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot
\end{array}
\right.
$$

Ezek a határozott relatiók a szükséges és elégséges föltételei annak, hogy valamely egyszerű egyenlőtlenség küvetkezményes relatio legyen. Nem csak szükséges, de elégséges föltételei is, mert azáltal, hogy, rendre nem-negativus $v_1, v_2, \ldots$ határozatlanokkal és $w_1, w_2, \ldots$ határozatlanokkal szorozva, összeadjuk őket, következményes relatióhoz jutunk, amelynek az együtthatói A_1, A_2, stb.

Természetesen aequivalensek ezek a határozott relatiok az (V) czikk végén $(3)_2$ alatt jegyzett multiplicatoros egyenletekkel, a melyek közös parametrumos megoldásukat képezik a λ nem-negativus multiplicatorokkal és a λ' multiplicatorokkal, mint parametrumokkal.

Ami a $\ast$ alatti relatióink közt lévő egyenletek számát illeti, egyenlet annyi van, a hány az egészen tetszésszerinti w parametrum. De tudjuk, hogy hány ilyen parametrum van: annyi, a mennyivel több a vezér-mennyiség az adott rendszerben, mint az egymástól független baloldal. Ekkora tehát az egyenletek száma is.

Ha az u mennyiségek parametrumos kifejezéseiben minden v parametrumot zérusnak irunk, akkor a következményes egyenlőtlenségből a behelyettesítések után csak az egyenleteket kaphatjuk az együtthatók számára. De minden egyenletet megkapunk. Azonban, ha minden v parametrumot zérussá teszünk, akkor az előbbi czikk $(2)'$ relatióiban minden s-et zérussá tettünk egyszersmind, mert ezek az s-ek a w parametrumok egyszerű függvényeiként fejeződnek ki. Úgy is eljuthatunk tehát a következményes egyenlőtlenségek együtthatóit megillető egyenletekhez, hogy adott relatio-rendszerünkben, (1), minden bal-oldalt zérussal egyenlítünk, puszta egyenlőségi rendszerré változtatjuk át az adott relatio-rendszert, mert minden benne foglalt bal-oldal a $(2)'$-ben foglaltak egyszerű függvénye. Egyúttal pedig már a következményes egyenlőtlenséget is egyenletté változtathatjuk át, azaz bal-oldalát $=0$ tehetjük a nélkűl, hogy az együtthatóit megillető egyenlet-rendszer ez által megmásulna, mert a mely u értékek kielégítik a fingált egyenlőségi rendszert, azok ellentétesei is kielégítik, minélfogva, ha ennek az egyenlőségi rendszernek minden megoldásában,

$$A_1 u_1 + A_2 u_2 + \ldots \geqq 0,$$

úgy mindben

$$-A_1 u_1 - A_2 u - \ldots \geqq 0,$$

és egyszersmind tehát mindben

$$A_1 u_1 + A_2 u_2 + \ldots = 0.$$

Igy, a mennyiben egy relatio-rendszer következményes inaequatióinak az együtthatóit illetőleg csak az egyenleti föltételek ismeretére volna szükségünk, ebben a specialis esetben a relatio-rendszert fictióval egyenlőségi rendszerré változtathatjuk át, és egyúttal következményes egyenlőtlenségek helyett következményes egyenleteket tarthatunk számon.

Mihelyt azonban a következményes inaequatiók együtthatóinak egyenlőtlenségi megszorítását is ösmernünk kell, már ez a fictio nem alkalmazható.

IX. Többszörös relatio-rendszerek.

Legyenek

$$\begin{array}{ll} \theta_{11},\ \theta_{12},\ldots, & \theta'_{11},\ \theta'_{12},\ldots \\ \theta_{21},\ \theta_{22},\ldots, & \theta'_{21},\ \theta'_{22},\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{array}$$

az $u_1, u_2, \ldots, u_n$ mennyiségek egyszerű függvényei, és az u vezérmennyiségek mindazokat az értékeket fölvehessék, a melyek kielégítik a

$$\theta_{11} \geqq o,\ \theta_{12} \geqq o, \ldots,\quad \theta'_{11} = o,\ \theta'_{12} = o, \ldots$$

relatio rendszert. Mindazokat az értékeket is fölvehessék az u mennyiségek, a melyek kielégítik a

$$\theta_{21} \geqq o,\ \theta_{22} \geqq o, \ldots,\quad \theta'_{21} = o,\ \theta'_{22} = o, \ldots$$

relatio-rendszert. Mindazokat is, a melyek kielégítik a

$$\theta_{31} \geqq o,\ \theta_{32} \geqq o, \ldots,\quad \theta'_{31} = o,\ \theta'_{32} = o, \ldots$$

rendszert. Sít.

Az ilyen relatio-rendszerek összeségét többszörös relatio-rendszernek nevezzük. Az első relatio-rendszer parametrumos megoldása legyen

$$\begin{array}{l} u'_1 = \beta'_{11}v'_1 + \beta'_{12}v'_2 + \ldots + \gamma'_{11}w'_1 + \gamma'_{12}w'_2 + \ldots \\ u'_2 = \beta'_{21}v'_1 + \beta'_{22}v'_2 + \ldots + \gamma'_{21}w'_1 + \gamma'_{22}w'_2 + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

A második relatio-rendszer parametrumos megoldása legyen

$$\begin{array}{l} u''_1 = \beta''_{11}v''_1 + \beta''_{12}v''_2 + \ldots + \gamma''_{11}w''_1 + \gamma''_{12}w''_2 + \ldots \\ u''_2 = \beta''_{21}v''_1 + \beta''_{22}v''_2 + \ldots + \gamma''_{21}w''_1 + \gamma''_{22}w''_2 + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

sít., ahol a v mennyiségek tetszésszerinti nem-negativusok, a w mennyiségek pedig egészen tetszésszerintiek.

Oly értelemben összetartozó rendszerek ezek, hogy az u vezérmennyiségek mind az u', mind az u'' stb. értékeket fölvehetik.

Most tegyük föl, hogy létezik olyan egyenlőtlenség,

$$A_1u_1 + A_2u_2 + \ldots + A_nu_n \geqq o,$$

a mely mindegyik relatio-rendszernek a következményese. Akkor mindegyik parametrumos rendszer kielegíteni tartozik. Ekként, az előbbi czikk utasítása szerint, együtthatóit a következő inaequatiók és aequatiók illetik meg:

$$\begin{aligned}
&\beta'_{11}A_1+\beta'_{21}A_2+\ldots+\beta'_{n1}A_n\geqq o,\\
&\beta'_{12}A_1+\beta'_{22}A_2+\ldots+\beta'_{n2}A_n\geqq o,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\gamma'_{11}A_1+\gamma'_{21}A_2+\ldots+\gamma'_{n1}A_n=o,\\
&\gamma'_{12}A_1+\gamma'_{22}A_2+\ldots+\gamma'_{n2}A_n=o,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;\\
&\beta''_{11}A_1+\beta''_{21}A_2+\ldots+\beta''_{n1}A_n\geqq o,\\
&\beta''_{12}A_1+\beta''_{22}A_2+\ldots+\beta''_{n2}A_n\geqq o,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\gamma''_{11}A_1+\gamma''_{21}A_2+\ldots+\gamma''_{n1}A_n=o,\\
&\gamma''_{12}A_1+\gamma''_{22}A_2+\ldots+\gamma''_{n2}A_n=o,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \qquad \text{stb.}
\end{aligned}$$

Ezek az egyenlőtlenségek és egyenletek szükséges és elégséges föltételei annak, hogy az A_1 stb. mennyiségek közös következményes inaequatio együtthatói lehessenek. Ha ezeknek a relatióknak az összesége megengedi, hogy az A_1 stb. mennyiségek közűl legalább egy ne legyen zérus, akkor, és csak akkor, van közös következményese az adott relatio-rendszernek.

Azt követelvén az

$$A_1u_1+A_2u_2+\ldots+A_nu_n\equiv\vartheta\geqq 0$$

inaequatiótól, hogy az adott relatio-rendszerek mindegyikének minden megoldásával beváljék, együtthatóira róttunk ki megszorítást, a melyet az imént szerkesztett relatiók fejeznek ki. Közös következményes inaequatio hiányában arra reducálódnak ezek a relatiók, hogy $A_1=0$, $A_2=0, \ldots, A_n=0$.

Követelésünk más kifejezését egyenesen alaptételünk szolgáltatja, a mely szerint kell létezniök olyan nem-negativus λ multiplicatoroknak, és olyan λ' multiplicatoroknak, az u-tól függetleneknek, hogy

$$\begin{aligned}
\vartheta&\equiv\\
&\equiv\lambda_{11}\theta_{11}+\lambda_{12}\theta_{12}+\ldots+\lambda'_{11}\theta'_{11}+\lambda'_{12}\theta'_{12}+\ldots\\
&\equiv\lambda_{21}\theta_{21}+\lambda_{22}\theta_{22}+\ldots+\lambda'_{21}\theta'_{21}+\lambda'_{22}\theta'_{22}+\ldots\\
&\equiv\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Könnyű fölismerni, hogy a superpositio tétele egy többszörös rendszer megoldásait általában nem illeti meg, miből folyólag a többszörös rendszer superponált megoldásai általában véve a következményes inaequatiónak sem megoldásai.

X. Az alap-tétel következményes aequatio esetében

Tegyük föl, hogy a

$$\theta_1 \geqq o, \ \theta_2 \geqq o, \ldots, \quad \theta'_1 = o, \ \theta'_2 = o, \ldots$$

egyszerű relatio-rendszernek következményese az

$$A_1 u_1 + A_2 u_2 + \ldots + A_n u_n \equiv \vartheta = o$$

egyenlet, azaz, hogy ez az egyenlet a rendszer minden megoldásával teljesedik.

Ez a föltevés a következő föltevéssel helyettesíthető: az

$$A_1 u_1 + A_2 u_2 + \ldots + A_n u_n \equiv \vartheta \geqq o$$

egyenlőtlenség teljesűl az adott rendszernek és ellentétesének is minden megoldásában, vagyis teljesűl a

$$-\theta_1 \geqq o, \quad -\theta_2 \geqq o, \ldots \quad -\theta'_1 = o, \quad -\theta'_2 = o, \ldots$$

rendszer minden megoldásában is.

Mert, ha az adott rendszer megoldásaiban $\vartheta \geqq 0$, és az ellentétes rendszer megoldásaiban is $\vartheta \geqq 0$, akkor az adott rendszer megoldásaiban egyszersmind $-\vartheta \geqq 0$, tehát $\vartheta = 0$.

De, ha az adott rendszer parametrumos megoldása ez:

$$\begin{aligned} u_1' &= \beta_{11} v_1 + \beta_{12} v_2 + \ldots + \gamma_{11} w_1 + \gamma_{12} w_2 + \ldots \\ u'_2 &= \beta_{21} v_1 + \beta_{22} v_2 + \ldots + \gamma_{21} w_1 + \gamma_{22} w_2 + \ldots \\ & \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots , \end{aligned}$$

a hol a v parametrumok tetszésszerinti nem negativusok, a w parametrumok pedig egészen tetszésszerintiek, akkor az ellentétes rendszernek szükségképen parametrumos megoldása ez:

$$\begin{aligned} u''_1 &= -(\beta_{11} v_1 + \beta_{12} v_2 + \ldots + \gamma_{11} w_1 + \gamma_{12} w_2 + \ldots) \\ u''_2 &= -(\beta_{21} v_1 + \beta_{22} v_2 + \ldots + \gamma_{21} w_1 + \gamma_{22} w_2 + \ldots) \\ & \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \end{aligned}$$

Következőleg az előbbi czikk szerint az A_1 stb. együtthatókat a következő relatiók illetik meg:

$$\beta_{11}A_1+\beta_{21}A_2+..+\beta_{n1}A_n\geqq o,$$
$$\beta_{12}A_1+\beta_{22}A_2+..+\beta_{n2}A_n\geqq o,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\gamma_{11}A_1+\gamma_{21}A_2+..+\gamma_{n1}A_n=o,$$
$$\gamma_{12}A_1+\gamma_{22}A_2+..+\gamma_{n2}A_n=o,$$
$$\dots\dots\dots\dots;$$

$$-(\beta_{11}A_1+\beta_{21}A_2+..+\beta_{n1}A_n)\geqq o,$$
$$-(\beta_{12}A_1+\beta_{22}A_2+..+\beta_{n2}A_n)\geqq o,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$-(\gamma_{11}A_1+\gamma_{21}A_2+..+\gamma_{n1}A_n)=o,$$
$$-(\gamma_{12}A_1+\gamma_{22}A_2+..+\gamma_{n2}A_n)=o,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

Ezek kielégítése képezi annak a szükséges és elégséges föltételét, hogy a $\vartheta=0$ egyenlet az adott rendszer következményese legyen; vagyis azok az A_1 stb. mennyiségek, és csak azok lehetnek az adott rendszer következményes aequatiójának együtthatói, a melyek ezeknek az egyenlőtlenségeknek és egyenleteknek megfelelnek.

Azonban ezeknek az egyenlőtlenségeknek és egyenleteknek az összesége a következő egyenletekkel helyetesíthető:

$$\beta_{11}A_1+\beta_{21}A_2+..+\beta_{n1}A_n=o,$$
$$\beta_{12}A_1+\beta_{22}A_2+..+\beta_{n2}A_n=o,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\gamma_{11}A_1+\gamma_{21}A_2+..+\gamma_{n1}A_n=o,$$
$$\gamma_{12}A_1+\gamma_{22}A_2+..+\gamma_{n2}A_n=o,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

Hogyha tehát van következményes egyenlet, ennek az együtthatóit csupa egyenletek fűzik az adott rendszer együtthatóihoz, a melyek t. i. a β és γ-féle factorok meghatározására szolgálnak a parametrumos kifejezésekben. Ugyanezekhez az egyenletekhez jutunk, ha azzal a fictióval élünk, hogy az adott rendszer parametrumos kifejezéseiben nemcsak a w parametrumok, de a v parametrumok is egészen tetszésszerintiek.

Föltevésünk, hogy ugyanis az adott rendszer minden megoldásában eltűnik ϑ, akkép is értelmezhető, hogy úgy a $\vartheta\geqq o$, mint a $-\vartheta\geqq o$ inaequatio következményese az adott rendszernek. Ezt az értelmezést az együtthatók multiplicatoros kifejezéseinek megalkotására használjuk föl.

Ugyanis a miatt, hogy $\vartheta\geqq o$, kell létezniök olyan nem-negativus λ multiplicatoroknak, és olyan λ' multiplicatoroknak, hogy

$$A_1=\lambda_1 A_{11}+\lambda_2 A_{21}+..+\lambda'_1 A'_{11}+\lambda'_2 A'_{21}+..,$$
$$A_2=\lambda_1 A_{12}+\lambda_2 A_{22}+..+\lambda'_1 A'_{12}+\lambda'_3 A'_{22}+..,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots ;$$

a miatt pedig, hogy $-\vartheta\geqq o$, kell létezniök olyan nem negativus μ multiplicatoroknak és olyan μ' multiplicatoroknak , hogy

$$A_1=-(\mu_1 A_{11}+\mu_2 A_{21}+..+\mu'_1 A'_{11}+\mu'_2 A'_{21}+..),$$
$$A_2=-(\mu_1 A_{12}+\mu_2 A_{22}+..+\mu'_1 A'_{12}+\mu'_2 A'_{22}+..),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Az A_1, stb. mennyiségeknek úgy az egyik, mint a másik módon kifejezhetőknek kell lenniök a végből, hogy következményes aequatio együtthatói lehessenek. De, ha kifejezhetők így, akkor viszont következményes aequatio együtthatói lehetnek, azaz, ezek a multiplicatoros egyenletek a maguk összességében teljesen ki is meritik azt a vonatkozást, a mely az adott rendszer együtthatói és egy következményes aequatio együtthatói közt fönáll, mert belőlük az adott rendszerre való tekintettel $\vartheta\geqq o$ és $-\vartheta\geqq o$ következtethető olyképen, hogy mindkét egyenlet-csoport bal- és jobb-oldalait, rendre $u_1, u_2, ..$ mennyiségekkel szorozva, összeadjuk.

Az adott rendszer együtthatói közt szükségképen oly vonatkozások állanak fönn, hogy az egyik egyenlet-csoportban meghatározott A_1 stb. értékek egyeznek a másik csoportban meghatározott A_1 stb. értékekkel, ha t. i. létezik következményes egyenlet. Létezése abhoz a föltételhez van kötve, hogy ez az egyenlet-rendszer:

$$(\lambda_1+\mu_1)A_{11}+(\lambda_2+\mu_2)A_{21}+..+(\lambda'_1+\mu'_1)A'_{11}+(\lambda'_2+\mu'_2)A'_{21}+..=o$$
$$(\lambda_1+\mu_1)A_{12}+(\lambda_2+\mu_2)A_{22}+..+(\lambda'_1+\mu'_1)A'_{12}+(\lambda'_2+\mu'_2)A'_{22}+..=o$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

megoldható legyen oly nem-negativus λ, μ és oly λ', μ' értékekkel, a melyek nem mind zérusok.

XI. Pseudo-rendszerek.

Tegyük föl, hogy $f_1, f_2, ..$ vezérmennyiségek értéktartományát az

$$F_1\geqq o,\ F_2\geqq o, .., \quad F_1'=o,\ F_2'=o, ..$$

egyszerű relatio-rendszer szorítja meg; $g_1, g_2, ..$ vezér-mennyiségek értéktartományát a

$$G_1\geqq o,\ G_2\geqq o, .., \quad G_1'=o,\ G_2'=o, ..$$

egyszerű relatio-rendszer szorítja meg; $h_1, h_2, ..$ vezér-mennyiségek érték tartományát a

$$H_1 \geqq o,\ H_2 \geqq o, \ldots,\quad H_1' = o,\ H_2' = o, \ldots$$

egyszerű relatio-rendszer szorítja meg, sít.; különben az f, g, h, stb. mennyiségek teljesen függetlenek egymástól.

Ezt a föltevést így is fogalmazhatjuk: $f_1, f_2, \ldots, g_1, g_2, \ldots$, stb. vezérmennyiségek értéktartományát az

$$\begin{array}{ll} F_1 \geqq o,\ F_2 \geqq o, \ldots, & F_1' = o,\ F_2' = o, \ldots \\ G_1 \geqq o,\ G_2 \geqq o, \ldots, & G_1' = o,\ G' = o, \ldots \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

egyszerű relatio-rendszer szorítja meg.

Minthogy azonban ennek a rendszernek az első sora csak f-eket, második sora csak g-ket, harmadik sora csak h-kat, sít. tartalmaz, ennélfogva a relatióknak az összessége nem képez teljesen összefüggő rendszert. Ezért nem igazi, vagy pseudo-rendszernek nevezzük.

Legyen most, hogy ϑ az f-ek, g-k, h-k, stbbiek egyszerű függvénye, és, hogy mindazok az f-ek, a melyek kielégítik a F-rendszert, mindazok a g-k, a melyek kielégitik a G-rendszert, mindazok a h-k, a melyek kielégítik a H-rendszert, sít., bármely combinatióban kielégitik a $\vartheta \geqq o$ egyenlőtlenséget is.

Akkor kell létezniök olyan nem-negativus $\varphi, \psi, \ldots$ multiplicatoroknak és olyan $\varphi', \psi', \ldots$ multiplicatoroknak, hogy

$$\begin{aligned} \vartheta \equiv & \varphi_1 F_1 + \varphi_2 F_2 + \ldots + \varphi_1' F_1' + \varphi_2' F_2' + \ldots \\ & + \psi_1 G_1 + \psi_2 G_2 + \ldots + \psi_1' G_1' + \psi_2' G_2' + \ldots \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Mert az alaptétel előadott bebizonyításának nem föltétele, hogy a relatio-rendszer teljesen összefüggő rendszert képezzen. A pseudo-rendszereket épúgy megilleti ez a bebizonyítás, mint a teljesen összefüggő rendszereket. Ugyanis ebben a bebizonyitásban a relatio-rendszer együtthatói semmi megszorítás alá nem kerűltek, egészen határozatlanúl maradtak; már pedig a teljesen határozatlan rendszer bármely pseudo-rendszert is magában foglal: akármely adott pseudo-rendszer leszármaztatható belőle azáltal, hogy bizonyos együtthatóit zérussá teszszük.

A relatio-rendszerek parametrumos kifejezéseiről előadattak is egészen általánosak, tehát megilletik a pseudo-rendszereket is. De a pseudo-rendszerek sajátos specialis volta egyszerűsítést enged a parametrumos kifejezések megalkotásában, a mennyiben t. i. minden egyes teljesen összefüggő részük külön-külön fejezhető ki parametrumok segítségével. Természetesen a vezérmennyiségek minden egyes magánvaló csoportjához, minő fent az f csoport, a g csoport, stb., más parametrumok tartoznak, a mi az általánosságból úgy magyarázható ki, hogy az általános parametrumos kifejezések bizonyos együtthatói zérusok.

De tegyük azt az észrevételt is, hogy az alaptételnek egy pseudo-rendszerre való alkalmazása annyi egymástól elkülönitett alkalmazásra bontható szét, a hány teljesen összefüggő részből áll a pseudo-rendszer.

Ugyanis legyen, hogy

$$\vartheta_1 \equiv A_1 f_1 + A_2 f_2 + \ldots, \quad \vartheta_2 = B_1 g_1 + B_2 g_2 + \ldots, \text{ stb.},$$

$$\vartheta \equiv \vartheta_1 + \vartheta_2 + \ldots$$

Ha a $\vartheta \geqq o$ egyenlőtlenség következményese a pseudo-rendszernek, akkor az alaptétel értelmében, a ϑ számára fönt jegyzett kifejezésekből folyólag, szükségképen

$$\vartheta_1 \equiv \varphi_1 F_1 + \varphi_2 F_2 + \ldots + \varphi_1' F_1' + \varphi_2' F_2' + \ldots$$
$$\vartheta_2 \equiv \psi_1 G_1 + \psi_2 G_2 + \ldots + \psi_1' G_1' + \psi_2' G_2' + \ldots$$

. . . .

tehát $\vartheta_1 \geqq o$, $\vartheta \geqq o$, stb. és ezek az egyenlőtlenségek rendre az egyes összefüggő rendszer-részek következményeseit képezik: az első következményese az (F, F') rendszer-résznek, a második a (G, G') rendszer-résznek, sít. Viszont, ha a $\vartheta_1 \geqq o$, $\vartheta_2 \geqq o$, stb. egyenlőtlenségek rendre következményeseit képezik az egyes összefüggő rendszer-részeknek, akkor a $\vartheta \geqq o$ egyenlőtlenség az egész rendszer következményese, mert az egész rendszer minden megoldásában áll, hogy $\vartheta_1 + \vartheta_2 + \ldots \geqq o$.

Igy, az az állítás, hogy a $\vartheta \geqq o$ inaequatio a pseudo-rendszer következményese, és az az állítás, hogy a $\vartheta_1 \geqq o$, $\vartheta_2 \geqq o$, stb. inaequatiók rendre az (F, F'), (G, G'), stb. rendszer-részek következményesei, aequivalens: a pseudo-rendszer a következményesekkel egyetemben egymástól teljesen különvált részekre bontható szét.

XII. Következményes rendszerek.

1.) Legyen, hogy a mely u értékek kielégítik a

$$\theta_1 \geqq o, \; \theta_2 \geqq o, \ldots, \quad \theta_1' = o, \; \theta_2' = o, \ldots$$

egyszerű relatio-rendszert, azok egyszersmind egytől-egyig kielégitik az

$$\tilde{\omega}_1 \geqq o, \; \tilde{\omega}_2 \geqq, \ldots, \quad \tilde{\omega}_1' = o, \; \tilde{\omega}_2' = o, \ldots$$

egyszerű relatio-rendszert is. Akkor az utóbbi rendszert az előbbi rendszer következményesének mondjuk s az előbbit az utóbbira nézve törzs-rendszernek nevezzük.

Egy következményes rendszer csak oly relatiókat tartalmazhat, a melyek a törzs-rendszer következményesei, vagyis csak oly relatiókat tartalmazhat, a melyek mindannyian teljesűlnek a törzs-rendszer megoldásaival. Mert egy rendszerben tartalmazott relatiók szükségképen teljesűlnek mindazokkal az értékekkel, a melyek magát a rendszert kielégítik.

Fordítva: ha egy rendszer csupa oly relatiokat tartalmaz, a melyek egy másik rendszer következményesei, akkor az a rendszer következményese ennek a másik rendszernek, az utóbbi rendszer az előbbire nézve törzs-rendszer. Mert bármely adott rendszerből következett relatiók szükségképen oly rendszert alkotnak, a mely az adott rendszer minden megoldásában teljesűl.

Igy ahhoz, hogy egy rendszer egy másik rendszernek a következményese legyen, szükséges és elégséges, hogy csupa olyan relatiókból álljon, a melyek ennek a másik rendszernek következményesei.

2.) Most tegyük föl, hogy egy egyszeres rendszer egy többszörös rendszer minden megoldásában teljesűl, a midőn aztán a többszörös rendszer következményesének nevezzük.

Világos, hogy ekkor a többszörös rendszert alkotó rendszerek az egyszeres rendszerre nézve mind törzs-rendszerek, vagyis az egyszeres rendszer mindannyinak következményese, mert a többszörös rendszer megoldásait mindazok az u-értékek képezik, a melyek az egyes alkotó rendszereket külön-külön kielégítik. Hogy azonban az egyszeres rendszer a többszörös rendszert alkotó valamennyi rendszer következményese legyen, erre szükséges és egyúttal elégséges, hogy csupa oly relatiot tartalmazzon, a mely valamennyinek következményese. Ennek a lehetősége szükséges és elégséges arra, hogy egy többszörös rendszerhez következményes egyszeres rendszerek tartozhassanak.

XIII Különféle rendszerek összetétele.

1.) Tegyük föl, hogy valamiféle előzményekből az a mathematikai követelés származott, hogy ez az egyszerű egyenlőtlenség:

$$(\vartheta) \qquad A_1 u_1 + A_2 u_2 + .. + A_n u_n \equiv \vartheta \geqq o$$

következményese legyen az

$$(\theta, \theta') \quad \left\{ \begin{array}{l} A_{11} u_1 + A_{12} u_2 + .. + A_{1n} u_n \equiv \theta_1 \geqq o, \\ A_{21} u_1 + A_{22} u_2 + .. + A_{2n} u_n \equiv \theta_2 \geqq o, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ A'_{11} u_1 + A'_{12} u_2 + .. + A'_{1n} u_n \equiv \theta'_1 = o, \\ A'_{21} u_1 + A'_{22} u_2 + .. + A'_{2n} u_n \equiv \theta'_2 = o, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \end{array} \right.$$

egyszerű relatio-rendszernek, vagyis, hogy mindazok az u értékek kielégítsék, a melyek a rendszert kielégítik.

Ez a követelés a (ϑ) inaequatio együtthatóinak a korlátozását jelenti, amely korlátozást directe a (VIII.) czikkben megszerkesztett $\ast$ alatti határozott relatiók, egyenlőtlenségek és egyenletek fejeznek ki, és a (VI) czikk értelmében, nemkülönben az (V) czikk végén jegyzett egyenletek $(3)_\lambda$, amelyek aequivalensek a (VIII, $\ast$) relatiókkal és ezek parametrumos megoldásait képezik, a λ nem-negativus multiplicatorokkal és a λ' multiplicatorokkal, mint parametrumokkal. Ha olyanok az A_1 stb. együtthatók, hogy eleget tesznek a (VIII, $\ast$) alatti relatióknak, vagy a mi ugyanazt teszi, az (V, 3_2) alakkal bírnak, akkor, és csak akkor, teljesítve van a kimondott követelés.

Tegyük föl másodsorban, hogy valamiféle előzményekből az a mathematikai követelés származott, hogy olyan legyen a (ϑ) egyenlőtlenség, hogy mindazok az u értékek kielégítsék, a melyek kielégítik nemcsak a (θ, θ') rendszert, de egyúttal kielégítenek egy más adott korlátozást is. Az utóbbi korlátozást jelölje (Ω). Ezt az (Ω) korlátozást hagyjuk egészen határozatlanúl. Bármilyen egyenlőtlenségek és egyenletek alkothassák, és olyan megszorításokat is róhasson ki a vezérmennyiségekre, a melyeket határozott egyenlőtlenségekbe és egyenletekbe foglalni nem lehet. Most ennek a korlátozásnak és a (θ, θ') korlátozásnak az összetétele szorítja meg az u mennyiségek értéktartományát.

A (VIII) czikkben $\ast$ alatt jegyzett kifejezések, valamint az (V) czikk végén $(3)_2$ alatt jegyzett kifejezések olyan A_1 stb. együtthatókat szolgáltatnak, a melyek ennek az összetett követelésnek is megfelelnek. Mert bármely nem-negativus multiplicatorokat jelöljenek a λ jegyek, és bármely multiplicatorokat jelöljenek a λ' jegyek, a (θ, θ') rendszerből folyólag szükségképen áll, hogy

$$\lambda_1\theta_1+\lambda_2\theta_2+..+\lambda'_1\theta'_1+\lambda'_2\theta'_2+..\geqq o,$$

tehát e relatio baloldalának az együtthatói mindenesetre együtthatói lehetnek a (ϑ) relatiónak, már pedig nem mások ezek az együtthatók, mint az (V) végén $(3)_2$ alatt foglaltak, s így egyúttal nem mások, mint a melyeket a (VIII $\ast$) alatt foglalt relatiók határoznak meg.

Áll ez, akármi módon szorítsa még szűkebbre az (Ω) korlátozás az u vezérmennyiségek értéktartományát, mint a milyen szűkre már a (θ, θ') rendszer szorítja. Abban rejlik a különbség az első és második követelés tartalma között, hogy az első követelésnek mindig csakis azok az A_1 stb. együtthatók felelnek meg, a melyeket (V, 3_2), valamint (VIII, $\ast$) határoznak meg, ellenben a második követelésnek nem mindig csakis ezek felelnek meg, azaz a második követelésnek általában más A_1 stb. együtthatók is megfelelnek. Az (V, 3_2) valamint a (VIII, $\ast$) mindig mindazokat az A_1 stb. együtthatókat szolgáltatják, a melyeket az u mennyiségek (θ, θ') korlátozása megenged, de nem mindig mindazokat, a melyeket a (θ, θ') és (Ω) korlátozás együttvéve megenged, hanem általában az utóbbiaknak csak egy részét szolgáltatják.

Legyen például, hogy az (Ω) korlátozást is egyszerű relatiók képezik:

$$(\tilde\omega, \tilde\omega') \left\{ \begin{array}{l} B_{11}u_1+B_{12}u_2+\,.\,.+B_{1n}u_n \equiv \tilde\omega_1 \geqq o, \\ B_{21}u_1+B_{22}u_2+\,.\,.+B_{2n}u_n \equiv \tilde\omega_2 \geqq o, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ B'_{11}u_1+B'_{12}u_2+\,.\,.+B'_{1n}u_n \equiv \tilde\omega'_1 = o, \\ B'_{21}u_1+B'_{22}u_2+\,.\,.+B'_{2n}u_n \equiv \tilde\omega'_2 = o, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{array} \right.$$

Most a (ϑ) egyenlőtlenség azt a kirovást viseli, hogy olyan legyen, mikép mindazokkal az u-kkal teljesűljön, a melyek a (θ, θ') rendszert is, meg az $(\tilde\omega, \tilde\omega')$ rendszert is kielégítik. Azt a kirovást viseli tehát, hogy a (θ, θ') és $(\tilde\omega, \tilde\omega')$ relatiók rendszerének a következményese legyen. Ha tehát λ és μ határozatlan nem-negativus multiplicatorok, s λ' és μ' egészen határozatlan multiplicatorok, akkor az A_1 stb. együtthatók azokat az értékeket vehetik föl, a melyek kifejezései e következők:

$$\begin{array}{l} A_1 = \lambda_1 A_{11}+\lambda_2 A_{21}+\,.\,.+\lambda_1' A'_{11}+\lambda'_2 A'_{21}+\,.\,.+ \\ \qquad +\mu_1 B_{11}+\mu_2 B_{21}+\,.\,.+\mu'_1 B'_{11}+\mu'_2 B'_{21}+\,.\,., \\ A_2 = \lambda_1 A_{12}+\lambda_2 A_{22}+\,.\,.+\lambda'_1 A'_{12}+\lambda'_2 A'_{22}+\,.\,.+ \\ \qquad +\mu_1 B_{12}+\mu_2 B_{22}+\,.\,.+\mu'_1 B'_{12}+\mu'_2 B'_{22}+\,.\,., \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{array}$$

Számtalan más értéket is fölvehetnek tehát, mint a melyeket $(V, 3_2)$ enged meg, a mely az itteni kifejezésektől abban különbözik, hogy az itteniekben a μ multiplicatorok bármely nem-negativusok, a μ' multiplicatorok bármik lehetnek, amazokban ellenben mind zérusok.

2.) Előfordúlhat azonban az is, hogy az (Ω) korlátozás oly módon szorítja meg az u mennyiségek érték-szabadságát, mikép ezáltal az A_1 stb. együtthatók érték-szabadsága semmit sem fokozódik s csupán annyiból áll, a mennyi a (θ, θ') rendszertől származik, vagyis a (θ, θ') rendszer olyképen jut érvényre, mintha az (Ω) korlátozás nem is léteznék, úgy hogy a (VIII, $\divideontimes$), valamint az $(V, 3_2)$ alatt lévő kifejezésekről nem csak az áll, hogy az általuk meghatározott A_1 stb. értékek a (ϑ) inaequatio együtthatói lehetnek, de még az is áll róluk, hogy csak az általuk meghatározott A_1 stb. mennyiségek lehetnek a (ϑ) inaequatio együtthatói.

Gondoljunk ugyanis a (θ, θ') rendszer parametrumos megoldására:

$$\begin{array}{l} u_1 = \beta_{11}v_1+\beta_{12}v_2+\,.\,.+\gamma_{11}w_1+\gamma_{12}w_2+\,.\,. \\ u_2 = \beta_{21}v_1+\beta_{22}v_2+\,.\,.+\gamma_{21}w_1+\gamma_{22}w_2+\,.\,. \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{array}$$

Ha csak a (θ, θ') rendszer korlátozza az u mennyiségeket, úgy itt minden v tetszésszerinti nem negativus és minden w egészen tetszésszerinti. De ha ehhez bármiféle tőle független korlátozás (Ω) csatlakozik, akkor már a v, w értéktartomány további megszűkűlést szenved. Behelyettesítvén ezeket az u-kifejezéseket a (ϑ) inaequatioba,

$$(\beta_{11}A_1+\beta_{21}A_2+..)v_1+(\beta_{12}A_1+\beta_{22}A_2+..)v_2+..+$$
$$+(\gamma_{11}A_1+\gamma_{21}A_2+..)w_1+(\gamma_{12}A_1+\gamma_{22}A_2+..)w_2+..\geqq o.$$

Első esetben okvetetlenűl való következés, hogy minden v factora $\geqq o$, és minden w factora $=o$ (VIII); a második esetben nem okvetetlenűl való következés ez, de ebben az esetben is előfordúlhat. Mert nem szükségképen való föltétele ennek a következésnek, hogy minden v tetszésszerinti nem-negativus, és minden w egészen tetszésszerinti legyen. Ha például az (Ω) korlátozás úgy szorítaná meg az u mennyiségek szabadságát, hogy e megszorításból folyólag minden v-nek az értéke csak 0 és 1, és minden w-nek az értéke csak —1, 0, és 1 lehetne, akkor is következnék az inaequatióból, hogy minden v factora nem-negativus tartozik lenni, és, hogy minden w factora eltünni tartozik; ugyanis, ha a v_1 parametrumot 1-nek, a többit mind 0-nak tesszük meg, akkor azt tapasztaljuk, hogy v_1 factora $\geqq o$ köteles lenni, ha azután a w_1 parametrumot egyszer 1-nek, másszor —1-nek, s a többi parametrumot valamennyit mindkétszer 0-nak teszszük meg, akkor azt tapasztaljuk, hogy w_1 factora eltűnni köteles, mert úgy $\geqq o$, mint $\leqq o$ köteles lenni, sít. Alább, a 4.) czikk-rész oly ide tartozó specialis esetet intéz el, a mely az alkalmazások szempontjából nagyon fontos.

Vegyük figyelembe még, hogy, ha valamiféle előzményekből az A_1 stb. mennyiségekre közbötlen megszorítás háramlik, és ha olyan ez, hogy teljesen megtagadja az A_1 stb. mennyiségektől azokat az értékeket, a melyeket az (Ω)-nak köszönhetnének, akkor az (Ω) mindig elveszti befolyását, és az A_1 stb. mennyiségek más értékeket nem vehetnek föl, mint a melyeket a (θ, θ') rendszernek köszönnek, és ezek közűl is csak azokat, a melyek az A_1 stb. mennyiségek közbötlen megszorításával összeférnek. Például a (θ, θ') rendszer ebből a két egyenlőtlenségből álljon: $u_1\geqq o$, $u_2\geqq o$, és az (Ω) korlátozás abból álljon, hogy u_1 is és u_2 is csak —1 és 1 lehessen; egyelőre meghatározandók legyenek mindazok az A_1 és A_2 együtthatók, a melyek szerint A_1u_1+ $+A_2u_2\geqq o$. Ha csak a (θ, θ') rendszer szorítaná meg u_1 és u_2 szabadságát, akkor $A_1\geqq o$, $A_2\geqq o$ képeznék a megoldást. A kétféle megszorítás összetételéből az a kirovás származik az u-kra nézve, hogy mindegyik csak 1 lehet, minélfogva A_1 és A_2 minden olyan értéket fölvehet, a melylyel $A_1+A_2\geqq o$. De ha e mellett közbötlen kiszabás rendén $A_1\ A_2\geqq o$ volna köteles lenni, akkor már csupán $A_1\geqq o$, $A_2\geqq o$ lehetne, mintha u_1 és u_2 csak a (θ, θ') korlátozás alatt állanának és semmi más megszorítást, mint ezét, nem viselnének.

3.) Ha a (θ, θ') és $(\tilde{\omega}, \tilde{\omega}')$ egyszerű relatio-rendszernek egy közös megoldásában sem negativus a ϑ egyszerű függvény, akkor léteznek olyan nem-negativus λ multiplicatorok és olyan λ' multiplicatorok, hogy az $(\tilde{\omega}, \tilde{\omega}')$ rendszer minden megoldásában teljesűl ez az egyenlőtlenség:

$$\vartheta-(\lambda_1\theta_1+\lambda_2\theta_2+..+\lambda'_1\theta'_1+\lambda'_2\theta'_2+..)\geqq o.$$

Ugyanis, a (θ, θ') és $(\tilde{\omega}, \tilde{\omega}')$ rendszer összetételéből származó rendszer minden megoldásában $\vartheta\geqq o$ lévén, az alap-tétel szerint léteznek olyan nem-negativus λ, μ multiplicatorok, és olyan λ', μ', multiplicatorok hogy

$$\vartheta\equiv\lambda_1\theta_1+\lambda_2\theta_2+..+\lambda'_1\theta'_1+\lambda'_2\theta'_2+..$$
$$+\mu_1\tilde{\omega}_1+\mu_2\tilde{\omega}_2+..+\mu'_1\tilde{\omega}'_1+\mu'_2\tilde{\omega}'_2+..$$

Ebből folyólag

$$\vartheta-(\lambda_1\theta_1+\lambda_2\theta_2+..+\lambda'_1\theta'_1+\lambda'_2\theta'_2+..)$$
$$\equiv\mu_1\tilde{\omega}_1+\mu_2\tilde{\omega}_2+..+\mu'_1\tilde{\omega}'_1+\mu'_2\tilde{\omega}'_2+..,$$

márpedig a miatt, hogy a μ multiplicatorok nem-negativusok, a jobboldal az $(\tilde{\omega}, \tilde{\omega}')$ rendszer minden megoldásában szükségképen $\geqq o$, tehát a bal-oldal is $(\tilde{\omega}, \tilde{\omega}')$ minden megoldásában $\geqq o$.

Ha az $(\tilde{\omega}, \tilde{\omega}')$ rendszer nem tartalmazná mindazokat a vezérmennyiségeket, a melyek a (θ, θ') rendszerben fordúlnak elő, akkor azok, a melyeket nem tartalmaz, szükségképen kiesnek a

$$\vartheta-(\lambda_1\theta_1+\lambda_2\theta_2+..+\lambda'_1\theta'_1+\lambda'_2\theta'_2+..)\geqq o$$

következményes inaequatióból: ebben az inaequatióban föllépő coefficienseik szükségképen eltűnnek, miként az utoljára jegyzett azonosság is tanusítja. Csak az $(\tilde{\omega}, \tilde{\omega}')$ rendszerben foglalt vezér-mennyiségek szerint létezhetik annak a következményos inaequatiónak a baloldala.

4.) Ha a (θ, θ') egyszerű relatio-rendszerrel kirótt korlátozáshoz oly korlátozás csatlakoznék, a mely a vezér-mennyiségek fölső számhatárát szorítaná meg: bármi kicsinyre szabná is meg azt, mégis csak azok szerint az együtthatók szerint teljesűlhet egy egyszerű $\vartheta\geqq o$ relatio a vezérmennyiségek értéktartományában, a melyek szerint pusztán a (θ, θ') rendszernek megfelelően teljesűlne. Más szóval, mihelyt a kétféle korlátozás összetételében $\vartheta\geqq o$, már magának a (θ, θ') rendszernek minden megoldásában $\vartheta\geqq o$.

Bizonyítás: A (θ, θ') rendszer bármely megoldása legyen u_1, u_2, .., létezik oly kicsiny positivus szám, ε, hogy εu_1, εu_2, .. számértéke tetszés szerint adott kicsinynél kisebb. De εu_1, εu_2, .. szintén megoldása a (θ, θ') rendszernek. Következőleg, bármi kis fölső szám-határral korlátozzuk (θ, θ') megoldásait, ezek egyikéből vagy másikából bármily más megoldása származtatható, t. i. elég kis positivus számmal történő osztás által. Már pedig, ha a fölső számhatárral korlátozott megoldásai kielégítik a $\vartheta \geqq o$ egyszerű inaequatiót, az utóbbiak is kielégítik, tehát (θ, θ') minden megoldása kielégíti.

XIV. Infinitesimalis rendszerek.

1.) Most erre a propositióra fordítsuk figyelmünket:

τ tér belsejében ξ, η, stb. a coordinaták deriválható függvényei és a τ tér határ-fölületében is folytonosak mindenütt, s ezen a functionalis megszorításon kivűl annak is alávetvék, hogy fölső számhatáruk valami módon korlátozva van, továbbá, hogy a τ tér belsejében mindenütt teljesűlnek a következő egyszerű relatiók:

$$(1)_1 \quad \begin{cases} A_1\frac{\partial\xi}{\partial x}+B_1\frac{\partial\xi}{\partial y}+C_1\frac{\partial\xi}{\partial z}+F_1\frac{\partial\eta}{\partial x}+G_1\frac{\partial\eta}{\partial y}+H_1\frac{\partial\eta}{\partial z}+\ldots\geqq o, \\ A_2\frac{\partial\xi}{\partial x}+B_2\frac{\partial\xi}{\partial y}+C_2\frac{\partial\xi}{\partial z}+F_2\frac{\partial\eta}{\partial x}+G_2\frac{\partial\eta}{\partial y}+H_2\frac{\partial\eta}{\partial z}+\ldots\geqq o, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

a τ tér határán pedig mindenütt teljesűlnek a következő egyszerű relatiók:

$$(1)_2 \quad \begin{cases} L_1\xi+M_1\eta+\ldots\geqq o, \\ L_2\xi+M_2\eta+\ldots\geqq o, \\ \ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

a melyekben A_1, B_1, C_1 stb. a coordinaták deriválható függvényei τ-ban mindenütt, és L_1, M_1, stb. a coordinaták folytonos függvényei a τ tér határában mindenütt.

Mindazokkal a ξ, η, stb. értékekkel, a melyek e korlátozások összeségének megfelelnek, legyen

$$(2) \quad \int_\tau (X\xi+Y\eta+\ldots)\mathrm{D}\tau+\int_\sigma (P\xi+Q\eta+\ldots)\mathrm{D}\sigma\geqq o,$$

a hol X, Y, stb. a coordinaták folytonos függvényei a τ térben, σ ennek a τ térnek a határ-fölülete, és P, Q, stb. a hely folytonos függvényei a σ fölületben.

2.) Ez a propositio olyannal helyettesíthető, a mely a ξ, η, stb. vezérmennyiségek érték-tartományát csupán egyszerű relatiókkal és a fölső szám-határ korlátozásával szorítja meg.

A τ tér belsejét, szorosan a határáig, igen sok és igen kis congruens hasábra osztjuk síkokkal, a melyek párhuzamosak a coordinata-síkokhoz. A hasáb-élek hosszúságát $\mathrm{D}x$, $\mathrm{D}y$, $\mathrm{D}z$ jelölje a szerint, a mint az x vagy az y, vagy a z tengelyhez párhuzamosak. A hely függvényeit jelentő ξ, η, stb. mennyiségeket, valamint az A_1, B_1, C_1 stb., X, Y, stb. együtthatókat, mint szintén a hely függvényeit, τ belsejében a kis hasábok középpontjaira vonatkoztatjuk, mint függvény helyekre. Ily függvényhely coordinatáit jelentsék most τ belsejében x, y, z, és rövidség kedveért

$$\xi(x+\mathrm{D}x, y, z) \equiv \xi_{\mathrm{I}},$$
$$\xi(x, y+\mathrm{D}y, z) \equiv \xi_{\mathrm{II}},$$
$$\xi(x, y, z+\mathrm{D}z) \equiv \xi_{\mathrm{III}},$$

stb. jelölést használjuk.

A τ tér belsejét igen kis hasábokra osztó síkok e tér σ határfölületét is igen kis részekre osztják, s a σ fölületen mindenütt ily résznek egy belső pontjára vonatkoztatjuk mint függvényhelyre a ξ, η, stb. mennyiségeket, valamint az L_1, M_1 stb., P, Q, stb. együtthatókat.

A ξ, η, stb. vezérmennyiségeken kivűl más vezérmennyiségeket is alkalmazunk, mint a hely függvényeit, a melyeket u, v, stb. bötűjegyek jelöljenek. Mind e vezérmennyiségekre, u. m. ξ, η, stb., u, v, .. stb. kiszabjuk, hogy fölső számhatáruk valamely tetszésszerint meghatározott módon korlátozva legyen, s a mellett a τ tér belsejében teljesítsék a következő egyenleteket:

$$\left(\frac{\xi_{\mathrm{I}}-\xi}{\mathrm{D}x}\right)_{\mathrm{I}} - \frac{\xi_{\mathrm{I}}-\xi}{\mathrm{D}x} + a'_1 u_1' = 0,$$
$$\left(\frac{\xi_{\mathrm{I}}-\xi}{\mathrm{D}x}\right)_{\mathrm{II}} - \frac{\xi_{\mathrm{I}}-\xi}{\mathrm{D}x} + a'_2 u_2' = 0,$$
$$\left(\frac{\xi_{\mathrm{I}}-\xi}{\mathrm{D}x}\right)_{\mathrm{III}} - \frac{\xi_{\mathrm{I}}-\xi}{\mathrm{D}x} + a'_3 u_3' = 0,$$

$$\left(\frac{\xi_{\mathrm{II}}-\xi}{\mathrm{D}y}\right)_{\mathrm{I}} - \frac{\xi_{\mathrm{II}}-\xi}{\mathrm{D}y} + a''_1 u_1'' = 0,$$
$$\left(\frac{\xi_{\mathrm{II}}-\xi}{\mathrm{D}y}\right)_{\mathrm{II}} - \frac{\xi_{\mathrm{II}}-\xi}{\mathrm{D}y} + a''_2 u_2'' = 0,$$
$$\left(\frac{\xi_{\mathrm{II}}-\xi}{\mathrm{D}y}\right)_{\mathrm{III}} - \frac{\xi_{\mathrm{II}}-\xi}{\mathrm{D}y} + a''_3 u_3'' = 0,$$

$$\left(\frac{\xi_{III}-\xi}{Dz}\right)_I - \frac{\xi_{III}-\xi}{Dz} + a'''_1 u_1''' = 0,$$
$$\left(\frac{\xi_{III}-\xi}{Dz}\right)_{II} - \frac{\xi_{III}-\xi}{Dz} + a'''_2 u_2''' = 0,$$
$$\left(\frac{\xi_{III}-\xi}{Dz}\right)_{III} - \frac{\xi_{III}-\xi}{Dz} + a'''_3 u_3''' = 0,$$

$$\left(\frac{\eta_I-\eta}{Dx}\right)_I - \frac{\eta_I-\eta}{Dx} + b'_1 v_1' = 0, \qquad \text{stb. stb.,}$$

a melyekben az a_1, b_1, stb.-féle együtthatók a Dx hosszúsággal, az a_2, b_2, stb.-félék a Dy hosszúsággal, az a_3, b_3, stb.-félék a Dz hosszúsággal zérusba convergálnak, továbbá Dx, Dy, Dz megválaszthatók legyenek oly kicsinyeknek, hogy mihelyt még kisebbek, már τ belsejében tetszésre megengedett kicsinynél kisebb hibával:

$$(\times)_1 \begin{cases} A_1\frac{\xi_I-\xi}{Dx}+B_1\frac{\xi_{II}-\xi}{Dy}+C_1\frac{\xi_{III}-\xi}{Dz}+F_1\frac{\eta_I-\eta}{Dx}+G_1\frac{\eta_{II}-\eta}{Dy}+H_1\frac{\eta_{III}-\eta}{Dz}+\ldots \geqq 0, \\ A_2\frac{\xi_I-\xi}{Dx}+B_2\frac{\xi_{II}-\xi}{Dy}+C_2\frac{\xi_{III}-\xi}{Dz}+F_2\frac{\eta_I-\eta}{Dx}+G_2\frac{\eta_{II}-\eta}{Dy}+H_2\frac{\eta_{III}-\eta}{Dz}+\ldots \geqq 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

a hol A_1, B_1, C_1, stb. a coordinaták deriválható függvényei τ ban mindenütt; ezen kivűl, ha a σ fölületen két szomszédos függvény-hely kölcsönös távolsága Ds, és az egyik függvényhelybe tartozó ξ, η, stb. érték ξ', η', stb. a másikba tartozó egyszerűen ξ, η, stb.:

$$\xi'-\xi+a_0u_0=0, \quad \eta'-\eta+b_0v_0=0, \text{ stb.,}$$

a hol a_0, b_0, stb. a Ds távolsággal zérusba convergáló együtthatók, végre a σ fölületen kitűzött függvény-helyekben

$$(\times)_2 \begin{cases} L_1\xi+M_1\eta+\ldots \geqq 0, \\ L_2\xi+M_2\eta+\ldots \geqq 0, \\ \ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

a hol L_1, M_1, stb. a coordinaták folytonos függvényei a σ fölületben mindenütt.

A Dx, Dy, Dz élhosszak megválaszthatók legyenek oly kicsinyeknek, hogy mihelyt még kisebbek, már tetszésre megengedett kicsinynél kisebb hibával az elősorolt föltételek alatt

$$(\ast)\quad S_\tau(X\xi+X\eta+\ldots)D\tau+S_\sigma(P\xi+Q\eta+\ldots)D\sigma \geqq 0,$$

a hol $D\tau$, egy osztási hasáb térfogata $= Dx \cdot Dy \cdot Dz$, és $D\sigma$ egy osztási fölület-elem területe, X, Y, stb. a coordinaták folytonos függvényei a τ térben, P, Q, stb. a coordinaták folytonos függvényei a σ fölületben.

A τ tér belsejére nézve fölállított egyenletek, u. m.

$$\left(\frac{\xi_I - \xi}{Dx}\right)_I - \frac{\xi_I - \xi}{Dx} + a_1{}' u'_1 = 0 \qquad \text{stb.}$$

az u, v, stb. vezérmennyiségek fölső számhatárának korlátozásával egyetemben azt fejezik ki, hogy a ξ, η, stb. vezérmennyiségek partialisan mindegyik coordinata szerint deriválhatók, és partialis deriváltjaik folytonosak a τ tér belsejében. Azt a functionalis megszorítást róják ki tehát a ξ, η, stb. vezérmennyiségekre a τ tér belsejét illetőleg, mint az 1.) czikk-rész propositiója (Vector-tan XXXVI). A σ fölületre nézve fölállított egyenletek, u. m.:

$$\xi' - \xi + a_0 u_0 = 0 \qquad \text{stb.}$$

az u, v, stb. mennyiségek fölső számhatárának korlátozásával egyetemben az 1.) czikk-rész propositiójában a ξ, η stb. vezérmennyiségekre kiszabott fölületi folytonosságot fejezik ki. Mert Dx, Dy, Dz tetszésre adott kicsinynél kisebbnek gondolhatók.

Ezt tekintetbe véve, könnyű fölismerni, hogy jelen 2.) czikk-rész propositiója aequivalens az előző 1.) czikk-rész propositiójával.

3.) Minthogy a második czikk-részben csupán egyszerű relatiókkal és fölső számhatárral korlátozvák a vezérmennyiségek, ennélfogva főtételünk a maga egész teljességében érvénybe lép (XIII. 4.). A következményes relatio ($*$) baloldala és a korlátozó relatiók összefoglalásából (VI) származó baloldal azonossági viszonyban vannak: bármely következményes egyszerű relatio ($*$) szükségképen előállítható a korlátozó relatiók összefoglalása által.

Azonban a ($*$) alatt jegyzett következményes relatio csak a ξ, η, stb. vezérmennyiségeket tartalmazza, ellenben az u, v, stb. vezérmennyiségek abban elő nem fordulnak. Ebből folyólag az összefoglalás rendén az utóbbi vezér-mennyiségekhez csatlakozó multiplicatorok csak úgy járúlhatnak hozzá az identitashoz, hogy mindannyian eltűnnek. Mivel pedig minden egyes korlátozó egyenletben más u vagy v stb. vezérmennyiség fordúl elő, így az egyenletekhez csatlakozó multiplicatorok mindannyian zérusok kötelesek lenni az identitas kedveért: az egész korlátozó rendszernek a ($*$) következményese egyszersmind már e rendszer egy részének is következményese, és pedig annak a $(\times)_1$ és $(\times)_2$ részének, a mely a deriválhatóságok és folytonosságok kifejezéseinek a mellőzésével marad meg.

Ez a rendszer-rész az első czikk rész propositiójába tartozó $(1)_1$ és $(1)_2$ relatio-rendszernek felel meg, és a $(\ast)$ alatti relatio a (2) alattinak felel meg, mint következményes relatiónak s viszont.

Ilyképen kell létezniök olyan nem negativus multiplicatoroknak, hogy megszoroztatván velük és aztán öszzeadatván az $(1)_1$ és $(1)_2$ alatt foglalt relatiók, az eredmény baloldala identicus legyen (2) baloldalával, ami úgy értendő, hogy tetszés szerinti módon végtelen kis $D\tau$, illetőleg $D\sigma$ részekre osztva gondoljuk a τ tért és σ határ-fölületet azután minden $D\tau$ tér-elem és $D\sigma$ fölület-elem egy pontjára, mint függvény-helyre, vonatkoztatva gondoljuk az $(1)_1$ illetőleg $(1)_2$ inaequatio-rendszert, s az igy fölfogott teljes rendszerre alkalmazzuk eljárásunkat.

4.) A nem-negativus multiplicatorok $(1)_1$-hez $\varphi D\tau$, $(1)_2$-höz $\rho D\sigma$ legyenek:

$$\int_\tau (X\xi+Y\eta+\,.\,.)D\tau+\int_\sigma (P\xi+Q\eta+\,.\,.)D\sigma\equiv$$

$$\equiv\int_\tau\left[\frac{\partial\xi}{\partial x}\Sigma A_i\varphi_i+\frac{\partial\xi}{\partial y}\Sigma B_i\varphi_i+\frac{\partial\xi}{\partial z}\Sigma C_i\varphi_i+\frac{\partial\eta}{\partial x}\Sigma F_i\varphi_i+\frac{\partial\eta}{\partial y}\Sigma G_i\varphi_i+\frac{\partial\eta}{\partial z}\Sigma H_i\varphi_i+\,.\,.\right]D\tau$$

$$+\int_\sigma (\xi\Sigma L_i\rho_i+\eta\Sigma M_i\rho_i+\,.\,.)D\sigma.$$

Az identitas megkivánja, hogy a jobboldalon lévő tér-integralis oly alakra legyen vezethető, a melyben a ξ, η stb. vezér-mennyiségek deriváltjai helyett ezek a vezér-mennyiségek maguk forduljanak elő, úgy, hogy ezeknek az egyszerű függvénye foglalja el deriváltjaik egyszerű függvényének a helyét.

E szerint a φ mennyiségek nemcsak olyanok tartoznak lenni, hogy velük az a tér integralis létezzék, de olyanok is, hogy részleges reductiót lehessen végezni a tér-integralison,

Az alkalmazások szempontjából pedig nem csupán ennyire szorítjuk meg a φ mennyiségek functionalis viselkedését, de kirójjuk reájuk, hogy egyenkint, azaz φ_1, φ_2, stb. mind és az egész τ térben deriválható függvényeik legyenek a három coordinatának. Ugyancsak az alkalmazások szempontjából minden egyes ρ mennyiséget folytonosnak tételezünk föl a σ határfölületben, mint a hely függvényét. Természetesen, minden következtetésünk, amely az identitashoz füződik, e functionalis tulajdonságok alá van rendelve, vagyis azt a föltételt uralja, hogy ezek a functionalis tulajdonságok valóban fönnforognak.

Végrehajtván már most a követelt részleges reductiót, találjuk, hogy

$$\int_\tau (X\xi+Y\eta+..)D\tau+\int_\sigma (P\xi+Q\eta+..)D\sigma=$$

$$=-\int_\tau\Big[\Big(\frac{\partial\Sigma A_i\varphi_i}{\partial x}+\frac{\partial\Sigma B_i\varphi_i}{\partial y}+\frac{\partial\Sigma C_i\varphi_i}{\partial z}\Big)\xi+$$
$$+\Big(\frac{\partial\Sigma F_i\varphi_i}{\partial x}+\frac{\partial\Sigma G_i\varphi_i}{\partial y}+\frac{\partial\Sigma H_i\varphi_i}{\partial z}\Big)\eta+..\Big]D\tau+$$

$$-\int_\sigma\Big[(\alpha\Sigma A_i\varphi_i+\beta\Sigma B_i\varphi_i+\gamma\Sigma C_i\varphi_i-\Sigma L_i\rho_i)\xi$$
$$+(\alpha\Sigma F_i\varphi_i+\beta\Sigma G_i\varphi_i+\gamma\Sigma H_i\varphi_i-\Sigma M_i\rho_i)\eta+..\Big]D\sigma,$$

a hol α, β, γ a $D\sigma$ fölület-elem befelé mutató normalisának irány-cosinusai.

Következőleg a τ tér belsejében mindenütt

$$(3)_1\quad\begin{cases} -X=\dfrac{\partial\Sigma A_i\varphi_i}{\partial x}+\dfrac{\partial\Sigma B_i\varphi_i}{\partial y}+\dfrac{\partial\Sigma C_i\varphi_i}{\partial z}, \\ -Y=\dfrac{\partial\Sigma F_i\varphi_i}{\partial x}+\dfrac{\partial\Sigma G_i\varphi_i}{\partial y}+\dfrac{\partial\Sigma H_i\varphi_i}{\partial z}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

és a σ határ-fölületen mindenütt

$$(3)_2\quad\begin{cases} -P=\alpha\Sigma A_i\varphi_i+\beta\Sigma B_i\varphi_i+\gamma\Sigma C_i\varphi_i-\Sigma L_i\rho_i \\ -Q=\alpha\Sigma F_i\varphi_i+\beta\Sigma G_i\varphi_i+\gamma\Sigma H_i\varphi_i-\Sigma M_i\rho_i \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

E mellett ne feledjük, hogy a φ és ρ-féle mennyiségek nem negativusok:

$$\varphi_1\geqq 0,\quad \varphi_2\geqq 0,..$$
$$\rho_1\geqq 0,\quad \rho_2\geqq 0,..$$

5.) Abból folyólag, hogy $(1)_1$-ben és $(1)_2$-ben csupa egyenlőtlenségek vannak, a φ és ρ multiplicatorok mint nem-negativus mennyiségek jelentkeztek.

Ha egyenletek is, vagy csakis egyenletek fordúlnának elő $(1)_1$-ben, vagy $(1)_2$ ben, vagy mind a kettőben, úgy nyilvánvalólag csupán az az eltérés merűl föl, hogy az egyenletek, illetőleg az egyenleti együtthatók multiplicatorai nem esnek az alá a megszorítás alá, hogy negativusok ne lehessenek (V).

Tekintettel az alkalmazásokra, az általánosság más lehetséges fokozásai közűl különös említést érdemel ez a kettő:

a) A τ tér oly tér-részek összetétele gyanánt jelentkezik, a melyeknek az érintkezési fölületein körösztűl az összes előforduló térbeli mennyiségek folytonosság-szakadást szenvedhetnek, de ezekben az egyes térrészekben mindenütt bírnak a proponált functionalis tulajdonságokkal. Továbbá az érintkezési fölületekre vonatkozólag is léteznek egyszerű relatiók a vezér-mennyiségek érték-tartományának megszorítására, s ezek a relatiók az érintkezési fölületek mindkét oldalára tartozó vezérmennyiségek közt szabnak ki vonatkozásokat. Végre most a (2) következményes relatióban a fölületi integralis nem csupán a τ tér határfölületére, de általában az érintkezési fölületekre is kiterjed, még pedig mindegyikre kétszeresen terjed ki, t. i. mint két-két tér-rész határfölületének egy-egy darabjára.

b) Az $(1)_1$ térbeli relatio-rendszeren kivűl oly térbeli relatiorendszer is járúl a vezér-mennyiségek értéktartományának a szűkítéséhez, a mely nem a deriváltakat, hanem magukat a vezérmennyiségeket tartalmazza, vagy mindkét féléket tartalmazza, vonalas egynemű egész formában.

A téreket tetszés szerint való módon $D\tau$ térelemekre, a fölületeket $D\sigma$ fölület-elemekre osztva gondoljuk. Azután a tér-elemek és fölület-elemek egy-egy pontjára vonatkoztatjuk a hely összes térbeli, illetőleg fölületi függvényeit s egyben azokat a térbeli, illetőleg fölületi relatiókat, a melyek a vezérmennyiségek érték-tartományának megszorítására adva vannak. Most multiplicatorok alkalmazásával mindezt a relatiót összefoglaljuk: az egyenlőtlenségeket nem negativusok, az egyenleteket olyanok alkalmazásával, a melyek negativusok is lehetnek; a térbelieket oly rendű végtelen kicsinyek alkalmazásával, a mily rendűek az illető tér-elemek, a fölületieket oly rendűek alkalmazásával, a mily rendűek az illető fölület-elemek. Az utóbbi megkülönböztetésnek formai kifejezést is adunk az által, hogy $\varphi D\tau$ illetőleg $\rho D\sigma$-féle alakokban jegyezzük a multiplicatorokat.

Az összefoglalás által, — a mely a multiplicatorokkal megszorzott relatiók összeadásában áll — oly relatióhoz jutunk, a mely relatiónak a bal oldala azonossági viszonyban van a következményes inaequatio baloldalával: szükségképen megválaszthatók úgy a multiplicatorok, hogy az identitas beköszöntsön. A vezérmennyiségek deriváltjait tartalmazó tér-integralisok részleges reductiója után egyenletek következnek a vezérmennyiségek együtthatói között.

Az előbbi czikk-részekben foglalt tárgyalásból eléggé kiviláglik, hogy az *a)* és *b)* alatt leírt általánosabb propositióra is ráillik ez a tétel.

És pedig a megelőző XIII. czikk 4.) részének értelmében ráilik még akkor is, ha a vezérmennyiségek fölső számhatára azzal a követeléssel van kiróva, hogy a vezérmennyiségek végtelen kicsinyek legyenek. Ekkor deriválhatóságuk a terek belsejében és folytonosságuk a fölületekben úgy gondolható, hogy egy végtelen kis független változónak és oly változóknak a szorzataik, a mely változók a coordinaták deriválható véges függvényei a terek belsejében és folytonos függvényeik a fölületekben is.

XV. Folyományok.

1. A n n a k a f ö l t é t e l e, h o g y e g y e g y e n l ő t l e n s é g e g y e n l e t l e g y e n.

Irjunk föl egyszerű relatio-rendszert:

$$
\begin{aligned}
A'_{11}u_1+A'_{12}u_2+..+A'_{1n}u_n &\equiv \theta'_1=o,\\
A'_{21}u_1+A'_{22}u_2+..+A'_{2n}u_n &\equiv \theta'_2=o,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
A_{11}u_1+A_{12}u_2+..+A_{1n}u_n &\equiv \theta_1 \geqq o,\\
A_{21}u_1+A_{22}u_2+..+A_{2n}u_n &\equiv \theta_2 \geqq o,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Ha valamelyik egyenlőtlenség baloldala a rendszer minden megoldásában eltűnik, akkor rendelhetők az egyenletekhez olyan λ' multiplicatorok és az egyenlőtlenségekhez olyan λ nem-negativus multiplicatorok, hogy a velök megszorzott baloldalak összege identicusan eltűnik.

Mert tegyük föl, hogy az első egyenlőtlenség baloldala a rendszer minden megoldásában eltűnik. Akkor állítható, hogy a rendszer minden megoldásában teljesül ez az egyenlőtlenség:

$$—(A_{11}u+A_{12}u_2+..+A_{1n}u_n)\equiv—\theta_1 \geqq o.$$

Következőleg léteznek olyan μ' multiplicatorok és olyan μ nem-negativus multiplicatorok, hogy

$$—\theta_1\equiv\Sigma\mu'\theta'+\Sigma\mu\theta,$$

vagyis

$$\mu'_1\theta'_1+\mu'_2\theta'_2+..+(\mu_1+1)\theta_1+\mu_2\theta_2+..\equiv o,$$

és a $\theta_1 \geqq o$ egyenlőtlenséghez zérusnál nagyobb multiplicator (μ_1+1) tartozik.

Ebből az is kitűnik, hogy, ha nem létezik efféle identitas, akkor minden egyenlőtlenség baloldala különbözhetik zérustól, azaz lehet nagyobb is, mint zérus.

Fordítva: ha létezik ilyetén identitas, akkor legalább egy egyenlőtlenség baloldala a rendszer minden megoldásában eltűnik. Ha ugyanis

$$\lambda_1'\theta_1'+\lambda_2'\theta_2'+..+\lambda_1\theta_1+\lambda_2\theta_2+..\equiv o,\quad (\lambda\geqq o),$$

akkor a rendszer minden megoldásában teljesűl ez az egyenlet:

$$\lambda_1\theta_1+\lambda_2\theta_2+..=o,\quad (\lambda\geqq o).$$

Mivel a rendszer megoldásaiban egy θ sem negativus és mivel egy λ sem negativus, úgy mindazok a θ függvények eltűnni tartoznak, a melyeknek a λ multiplicatora nem zérus.

2. Eliminálási tételek.

Éljünk a következő jelölésekkel:

$$\begin{aligned} A'_{i1}u_1+A'_{i2}u_2+..+A'_{im}u_m &\equiv U_i' \\ A_{i1}u_1+A_{i2}u_2+..+A_{im}u_m &\equiv U_i \\ B'_{i1}v_1+B'_{i2}v_2+..+B'_{in}v_n &\equiv V_i' \\ B_{i1}v_1+B_{i2}v_2+..+B_{in}v_n &\equiv V_i, \end{aligned}$$

és már most vegyük tekintetbe a következő relatio-rendszert:

$$\begin{aligned} U_1'+V_1'&=o, & U_2'+V_2'&=o,\,.. \\ U_1+V_1&\geqq o, & U_2+V_2&\geqq o,\,.. \end{aligned}$$

a) Ha ez a rendszer implicite vagy explicite oly relatiókat tartalmaz, a melyekben u nem fordúl elő, akkor ugyanannyi rendszere létezik olyan λ' multiplicatoroknak és λ nem-negativus multiplicatoroknak, a melyek szerint

$$\Sigma\lambda_i'U_i'+\Sigma\lambda_iU_i\equiv o.$$

Tegyük föl ugyanis, hogy a rendszer minden megoldásában teljesűl ez az egyenlet: $V=o$, vagy ez az egyenlőtlenség: $V\geqq o$, a hol is V csupán a v mennyiségek egyszerű függvényét jelenti. Akkor kell létezniök olyan λ' multiplicatoroknak és λ nem-nagativus multiplicatoroknak, hogy

$$\Sigma\lambda_i'(U_i'+V_i')+\Sigma\lambda_i(U_i+V_i)\equiv V.$$

Ebből pedig a föntebbi identitas következik.

Hogyha tehát ilyen identitas nem létezik, akkor az adott rendszer nem tartalmaz implicite sem olyan relatiókat, a melyekben u nem fordúl elő. Ekkor az u mennyiségek nem eliminálhatók: ha eliminálhatók, úgy eliminálásuk mindig az egyenletekhez rendelt multiplicatorok és az egyenlőtlenségekhez rendelt nem-negativus multiplicatorok alkalmazásával, összeadások révén történhetik.

Ha pedig a rendszer sem implicite, sem explicite nem tartalmaz u-talan relatiokat, akkor a v mennyiségek minden értéket fölvehetnek, egészen tetszés szerintiek. Számítsunk ki ugyanis az adott $(U_i' + V_i' = o)$ egyenletekből annyi u mennyiséget, mint a többiek és a v mannyiségek függvényét, a mennyit csak lehet, és vezessük be ezeket a függvényeket az adott $(U_i + V_i \geqq o)$ egyenlőtlenségekbe a kiszámított u mennyiségek helyébe. Ez által egyenlőtlenségeink rendszere olyanná alakúl, a mely aequivalens az egész eredeti rendszerrel. Irjuk azt ekképen:

$$\overline{U}_1 + \overline{V}_1 \geqq o, \quad \overline{U}_2 + \overline{V}_2 \geqq o, \ldots$$

Minthogy azok az u mennyiségek, a melyek ebben a rendszerben még előfordúlnak, a föltevés szerint minden egyes egyenlőtlenségben előfordúlnak és nem is eliminálhatók, ennél fogva nem léteznek olyan nem negativus λ multiplicatorok, a melyek mellett a $\Sigma\lambda\overline{U}_i$ összeg identicusan eltűnhessék, s következésképen megválaszthatók úgy az u mennyiségek, hogy egyszerre valamennyi $\overline{U}$ függvény nagyobb legyen mint o. Ugyanis követeljük meg az u mennyiségektől, hogy $\overline{U}_1 \geqq o$, $\overline{U}_2 \geqq o, \ldots$ legyen. Mivel nincsenek oly nem-negativus λ multiplicatorok, a melyek rendén $\Sigma\lambda\overline{U}_i$ eltűnhessék, így nincs olyan $\overline{U}_i$, a mely követelésünkben csakis zérus lehetne, márpedig akkor valamennyi $\overline{U}$ lehet egyszerre $> o$ (III. 2.). Eszerint bármi értékeket szabjunk ki a v mennyiségekre, az u mennyiségek megválaszthatók oly módon és oly nagyokúl, hogy $\overline{U}_1 > -\overline{V}_1$, $\overline{U}_2 > -\overline{V}_2$, stb. legyen.

b) Ha akár explicite, akár implicite oly relatiókat is tartalmaz a rendszer, a melyekben u nem fordúl elő, akkor a v mennyiségek mind azokat az értékeket fölvehetik, a melyek ezekkel az u-talan relatiókkal megférnek.

Ennek a fölismerése végett számítsunk ki ismét annyi u mennyiséget az egyenletekből, a mennyit csak lehet, és helyettesítsük valamennyi egyenletben s egyenlőtlenségben a kiszámított függvény-alakjaikkal ezeket az u mennyiségeket. Az egyenletek részint identicusan teljesűlnek, részint pedig most már csak a v mennyiségekre vonatkoznak, szóval ily rendszert képeznek:

$$(1) \qquad \overline{V}_1' = o, \quad \overline{V}_2' = o, \ldots$$

Az egyenlőtlenségek a helyettesítés után a következők legyenek:

$$(2) \qquad \overline{U}_1 + \overline{V}_1 \geqq o, \quad \overline{U}_2 + \overline{V}_2 \geqq o, \ldots$$

Az (1) és (2) alatti rendszer együtt aequivalens az egész eredeti rendszerrel.

Az egyenlőtlenségekben még előforduló u mennyiségek közől egyelőre csak egyet elimináljunk. E végből azokat az egyenlőtlenségeket, a melyekben előfordul az eliminálandó u mennyiség, oly alakra vezetjük, a melyben ennek az u-nak az együtthatója $+1$ vagy -1. Az eliminálandó u mennyiség legyen az u_1, és azok az egyenlőtlenségek, a melyek magukban foglalják, legyenek:

$$(3) \qquad \begin{cases} u_1 - P_1 \geqq o, & u_2 - P_2 \geqq o, \ldots \\ -u_1 + Q_1 \geqq o, & u_2 + Q_2 \geqq o, \ldots \end{cases}$$

Az eliminálásból származó relatiók nyilvánképen a következők (a!):

$$(4) \qquad \begin{cases} Q_1 - P_1 \geqq o, & Q_1 - P_2 \geqq o, \ldots \\ Q_2 - P_1 \geqq o, & Q_2 - P_2 \geqq o, \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Ki kell deriteni, hogy u_1 mindig megválasztható olykép, hogy a (3) alatti rendszer mindazokkal a többi u-kkal és mindazokkal a v-kkel kielégíthető, a melyek a (4) alatti rendszert kielégítik. Ezzel ki lesz mutatva, hogy az (1) és (2) alatti rendszer mindazokkal a „többi" u-kkal és mindazokkal a v-kkel kielégíthető, a melyek kielégítik egyfelől az (1) alatti rendszert és a (2) alatti rendszerben u_1-et nem tartalmazó relatiókat, másfelől a (4) alatti rendszert. A kiderítendő tétel helyes volta nyilvánvalóvá lesz, mihely kitűnik, hogy u_1 értéke mindig megválasztható olyképen, hogy ne legyen kisebb, mint a legnagyobb P és ne legyen nagyobb, mint a legkisebb Q. Ámde a (4) alatti rendszer szerint nincs olyan Q menynyiség, a mely valamelyik P mennyiségnél kisebb volna, tehát a legkisebb Q sem kisebb mint a legnagyobb P, következőleg u_1 értéke valóban mindig megválasztható a követelt módon.

Ezzel meg lévén mutatva, hogy az (1) és (2)-ben explicite vagy implicite foglalt u_1-telen relatiók szorítják meg csupán a többi u mennyiségek és a v mennyiségek érték-tartományát, — már most ezekre az u_1-telen relatiókra ugyanazt az okoskodást egy másik u-menynyiség irányában alkalmazva, a melyet itt az (1) (2) rendszerre az u_1 mennyiség irányában alkalmaztunk s. i. t., míg minden u mennyiségből ki nem fogytunk, — végtére teljességében áll elénk az elül kimondott tétel igazsága.

3. Egy mennyiség-rendszernek egyszerű relatiókon alapuló fölbontása két mennyiség-rendszer öszszegére.

Legyen adva a $(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ mennyiség-rendszer és legyen adva a

$$(1)\quad \begin{cases} \sum_{i=1}^{i=n} A'_{1i}u_i = o, \quad \sum_{i=1}^{i=n} A'_{2i}u_i = o, \ldots, \quad \sum_{i=1}^{i=n} A'_{li}u_1 = o, \\ \sum_{i=1}^{i=n} A_{1i}u_i \geqq o, \quad \sum_{i=1}^{i=n} A_{2i}u_i \geqq o, \ldots \end{cases}$$

egyszerű relatio rendszer.

A P mennyiségek mindig fölbonthatók olykép két mennyiség összegére, hogy ha Π és $\mathfrak{P}$ ennek a két mennyiségnek a főjegye, úgy a Π mennyiségekkel teljesűl:

$$(2)\qquad \sum_{i=1}^{i=n} \Pi_i u_i \geqq o,$$

és a $\mathfrak{P}$ mennyiségek megváltoztatott előjelek mellett kielégítik az n vezérmennyiségek relatióit, azaz

$$(3)\quad \begin{cases} -\sum_{i=1}^{i=n} A'_{1i}\mathfrak{P}_i = o, \quad -\sum_{i=1}^{i=n} A'_{2i}\mathfrak{P}_i = o, \ldots, \quad -\sum_{i=1}^{i=n} A'_{li}\mathfrak{P}_i = o, \\ -\sum_{i=1}^{i=n} A_{1i}\mathfrak{P}_i \geqq o, \quad -\sum_{i=1}^{i=n} A_{2i}\mathfrak{P}_i \geqq o, \ldots \end{cases}$$

a) A bizonyitás előzményeképp fölteszem, hogy (1) alatt minden egyenlet független a többi egyenlettől, továbbá fölteszem, hogy az (1) alatti egyenlőtlenségekből nem következtethető olyan egyenlőtlenség, a melynek baloldala identicusan eltűnik, vagy az egyenletek baloldalainak függényeként fejezhető ki.

Ezek a föltevések mindig teljesíthetők. Hogy az utóbbi teljesíthető, az kitűnik abból, hogy, ha eredetileg nem teljesűlne, akkor az 1.) alatti tárgyalás szerint léteznék legalább egy olyan egyenlőtlenség a rendszerben, a melynek baloldala csak zérus lehetne: mind az ilyen egyenlőtlenség helyett egyenletet írván, már is teljesedésbe megy a második föltevés. Hogy az első is teljesűljön, e végből tetszésre választott sor-rend szerint mellőzendők mind azok az egyenletek, a melyek a többiekre nézve nem újak, azaz a melyek baloldalai a többiek baloldalainak a függvényei.

b) Már most a bizonyitásra térve, gondoljuk meg, hogy a (2) alatti egyenlőtlenség az (1) alatti relatio-rendszer minden megoldásában teljesűl, tehát léteznek olyan λ' multiplicatorok és λ nem negativus multiplicatorok, hogy

$$(4)\qquad \Pi_i = \sum_{k=1}^{k=l} A'_{ki}\lambda'_k + \sum_{k=1}^{k=\ldots} A_{ki}\lambda_k, \quad (i=1,2,\ldots n).$$

Minthogy $\Pi_i = P_i - \mathfrak{P}_i$, ennélfogva azt kell bebizonyítani, hogy a $\mathfrak{P}$ mennyiségek a (3) alatti relatiókon kivűl a következő követeléseknek is eleget tesznek:

$$(5) \qquad -\mathfrak{P}_i = -P_i + \sum_{k=1}^{k=l} A'_{ki}\lambda'_k + \sum_{k=1}^{k=..} A_{ki}\lambda_k, \quad (\lambda_k \geqq o, \quad i=1,2,..,n).$$

Helyettesítsük be ezeket a kifejezéseket a (3) alatti rendszerbe. Azután még csak azt kell kimutatni, hogy meghatározhatók úgy a λ' multiplicatorok és λ nem negativus multiplicatorok, hogy a (3) alatti relatiókat kielégítsék. De, ha a következő jelöléseket alkalmazzuk:

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\sum_{i=1}^{i=n} A'_{ki}A'_{hi} \equiv (A'A')_{kh} \equiv (A'A')_{hk}, \\ &\sum_{i=1}^{i=n} A'_{ki}A_{hi} \equiv (A'A)_{kh} \equiv (AA')_{hk}, \\ &\sum_{i=1}^{i=n} A_{ki}A_{hi} \equiv (AA)_{kh} \equiv (AA)_{hk}, \end{aligned} \right.$$

akkor a (3) alatti relatiók a helyettesítések rendén ezeket az alakokat öltik:

$$(7) \qquad \left\{ \begin{aligned} &L_h + (A'A')_{h1}\lambda'_1 + (A'A')_{h2}\lambda'_2 + .. + (A'A')_{hl}\lambda'_l + \\ &\qquad\qquad + (A'A)_{h1}\lambda_1 + (A'A)_{h2}\lambda_2 + .. = o, \\ &M_k + (A'A)_{1k}\lambda'_1 + (A'A)_{2k}\lambda'_2 + .. + (A'A)_{lk}\lambda'_l + \\ &\qquad\qquad + (AA)_{1k}\lambda_1 + (AA)_{2k}\lambda_2 + .. \geqq o, \\ &\qquad \lambda_1 \geqq o, \qquad \lambda_2 \geqq o, \ldots \\ &\qquad (h=1,2,..l, \qquad k=1,2,\ldots), \end{aligned} \right.$$

a hol az L_h és M_k tagok függetlenek a λ' és λ multiplicatoroktól. Annak kell tehát kiderűlni, hogy léteznek olyan λ' és λ mennyiségek, a melyek beillenek ebbe a relatio-rendszerbe.

Legelőször is vegyük észre, hogy az egyenletekből a λ' mennyiségek kiszámíthatók, mint a λ mennyiségek függvényei. Ugyanis az egyenleteknek a λ' mennyiségek mellől képezett determinansa más determinansok négyzeteinek összege, a mely determinansok az (1) alatti egyenletek coefficienseinek

$$\begin{matrix} A'_{11}, & A'_{12}, .., & A'_{1n} \\ A'_{21}, & A'_{22}, .., & A'_{2n} \\ . \; . & . \; . \; . & . \; . \\ A'_{l1}, & A'_{l2}, .., & A'_{ln} \end{matrix}$$

rendszeréből az oszlopok szerint képezett összes l-ed fokú determinansok. Mivel előzetes föltevésünk (a) értelmében az (1) alatti egyenletek függetlenek egymástól, úgy ez l-ed fokú determinansok közül legalább egy nem zérus, s következőleg a λ' mennyiségek mellől a (7) alatti egyenletek után képezett determinans sem zérus.

Ha már egyszer a λ' mennyiségeket mint a λ mennyiségek függvényeit a (7) alatti egyenletekből kiszámítottuk, helyezzük be ezeket a függvényeket a (7) alatti egyenlőtlenségekbe a λ' mennyiségek helyébe. Azután még csak arról kell meggyőződnünk, hogy meghatározhatók úgy a λ mennyiségek, hogy kielégitsék a helyettesítések után előálló egyenlőtlenségeket és a mellett valamennyien $\geqq o$ legyenek.

Éljünk a következő jelöléssel:

$$
(8) \qquad \left\{ \begin{matrix} (AA)_{ki} & (AA')_{k1} & (AA')_{k2}\,.. & (AA')_{kl} \\ (A'A)_{1i} & (A'A')_{11} & (A'A')_{12}\,.. & (A'A')_{1l} \\ (A'A)_{2i} & (A'A')_{21} & (A'A')_{22}\,.. & (A'A')_{2l} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (A'A)_{li} & (A'A')_{l1} & (A'A')_{l2}\,.. & (A'A')_{ll} \end{matrix} \right\} \equiv C_{ki}\,.
$$

A követelt kiszámítások és helyettesítések után, könnyen fölismerhetőleg, ezen a módon jegyezhető az egyenlőtlenségek rendszere:

$$
(9) \qquad \left\{ \begin{array}{l} N_k+C_{k1}\lambda_1+C_{k2}\lambda_2+\ldots\geqq o, \quad (k=1, 2, ..) \\ \qquad \lambda_1\geqq o, \ \lambda_2\geqq o, \ldots, \end{array} \right.
$$

a hol az N_k tagok nem függenek a λ mennyiségektől.

Annak a megmutatása van még hátra, hogy ez a rendszer mindig megoldható.

c) Ha a λ mennyiségek meghatározhatók úgy, hogy egyfelől ne legyenek negativusok, másfelől pedig valamennyi $C_{k1}\lambda_1+C_{k2}\lambda_2+..$ féle kifejezés positivus, azaz $>o$ legyen, akkor nyilvánképen bármely N_k értékek esetében teljesíthető a (9) alatti rendszer, mert akkor szükségképen megválaszthatók oly nagyoknak a λ mennyiségek, hogy a (9) alatt minden $N_k+C_k\lambda_{11}+..$ kifejezés nagyobb legyen, mint zérus.

De valóban lehetséges a λ mennyiségek ilyetén megválasztása. Ezt kell még belátnunk. E végből rójuk ki a λ mennyiségekre, hogy teljesitsék a

$$
(10) \qquad \left\{ \begin{array}{l} C_{k1}\lambda_1+C_{k2}\lambda_2+..\equiv\theta_k\geqq o, \quad (k=1, 2, \ldots) \\ \qquad \lambda_1\geqq o, \ \lambda_2\geqq o, .. \end{array} \right.
$$

egyenlőtlenségeket. Ez okvetetlenűl végrehajtható kirovás, mert legalább is megfelelhet annak az összes λ mennyiségek eltűnése. Azonban az itt a kérdés, hogy az előzetes kikötések (α) során ebben a kirovásban lehet-e egyszerre valamennyi θ_k nagyobb, mint zérus?

Ha (10)-ben egyetlen θ_k sem olyan, hogy csak zérus értéket vehet föl, akkor lehet egyszerre valamennyi θ_k nagyobb mint zérus (III. 2). Hogyha tehát nem léteznek olyan $\mu_1, \mu_2, \ldots, \rho_1 . \rho_2, \ldots$ nem negativus multiplicatorok, hogy legalább egy μ nagyobb, mint zérus, és

$$\mu_1\theta_1+\mu_2\theta_2+\ldots+\rho_1\lambda_1+\rho_2\lambda_2+\ldots=o.$$

akkor valamennyi θ lehet egyszerre nagyobb, mint zérus 2)!

Annak az eldöntése vár még tehát reánk, hogy a következő rendszer nem állhat meg úgy, hogy legalább egy μ nagyobb, mint zérus:

$$\left.\begin{matrix} \rho_1+C'_{11}\mu_1+C'_{21}\mu_2+\ldots=o \\ \rho_2+C'_{12}\mu_1+C'_{22}\mu_2+\ldots=o \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \end{matrix}\right\} \quad \mu_1\geqq o,\quad \mu_2\geqq o,\ldots,\quad \rho_1\geqq o,\quad \rho_2\geqq o,\ldots$$

Eldöntése végett szorozzuk meg az egyenleteket rendre a $\mu_1, \mu_2, \ldots$ multiplicatorokkal s azután adjuk össze őket. Az eredményes egyenlet, könnyű szerrel, erre az alakra vezethető:

$$\mu_1\rho_1+\mu_2\rho_2+\ldots+\left\{\begin{vmatrix} \Sigma\Sigma(AA)_{ki}\mu_k\mu_i & \Sigma(AA')_{k1}\mu_k & \Sigma(AA')_{k2}\mu_k & \ldots & \Sigma(AA')_{kl}\mu_k \\ \Sigma(A'A)_{1i}\mu_i & (A'A')_{11} & (A'A')_{12} & \ldots & (A'A')_{1l} \\ \Sigma(A'A)_{2i}\mu_i & (A'A')_{21} & (A'A')_{22} & \ldots & (A'A')_{2l} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ \Sigma(A'A)_{li}\mu_i & (A'A')_{l1} & (A'A')_{l2} & \ldots & (A'A')_{ll} \end{vmatrix}\right\}=o.$$

Az itt előforduló determinans négyzetek összege. Még pedig, ha ebből a rendszerből:

$$\left.\begin{matrix} \Sigma A_{k1}\mu_k, & A'_{11}, & A'_{21},\ldots, & A'_{l1} \\ \Sigma A_{k2}\mu_k, & A'_{12}, & A'_{22},\ldots, & A'_{l2} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ \Sigma A_{kn}\mu_k, & A'_{1n}, & A'_{2n},\ldots, & A'_{ln} \end{matrix}\right| \quad (\mu_1\geqq o,\ \mu_2\geqq o,\ldots)$$

a sorok szerint minden $(l+1)$-ed fokú determinanst megalkotunk, azután négyzetre emeljük és összeadjuk azokat, akkor eljutottunk az egyenlet determinans tagjához.

Mivel a $\mu_1\rho_1+\mu_2\rho_2+\ldots$ sor csupa nem negativus tagokat tartalmaz, annál fogva az összes $(l+1)$-ed fokú determinansoknak el kellene tünniök. Ebből az következnék, hogy ezek az egyszerű függvények:

$$x_1\Sigma A_{k1}\mu_k+x_2\Sigma A_{k2}\mu_k+..+x_n\Sigma A_{kn}\mu_k,$$
$$A'_{11}x_1+A'_{12}x_2+..A'_{2n}x_n,$$
$$A'_{21}x_1+A'_{22}x_2+..A'_{2n}x_n,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$A'_{l1}x_1+A'_{l2}x_2+..A'_{ln}x_n$$

nem függetlenek egymástól. De minthogy a μ multiplicatorok nem negativusok és legalább egyikük nem zérus, úgy ez a következés összeütközik az *a*) alatti kikötésekkel.

d) A *b*) és *c*) alatt előterjesztett bizonyításnak van egy hiányossága. Ez abban áll, hogy arra az esetre, ha az (1) alatti rendszer sem explicite, sem implicite egyenleteket nem tartalmaz, nem alkalmazható. Ebben az esetben ugyanis a (7) alatti relatio-rendszer csupán ezeknek az egyenlőtlenségeknek a foglalata:

$$M_k+(AA)_{1k}\lambda_1+(AA)_{2k}\lambda_2+..\geqq o, \quad (k=1, 2\ldots)$$
$$\lambda_1\geqq o, \ \lambda_2\geqq o, \ldots$$

Ha azonban most ezekre az egyenlőtlenségekre ugyanazt az okfűzést alkalmazzuk, a melyet előbb a (9) alatt lévőkre alkalmaztunk, ahhoz az eredményhez jutunk, hogy az $(AA)_{1k}\lambda_1+(AA)_{2k}\lambda_2+..$ kifejezések egyszerre mind nagyobbak lehetnek zérusnál, mert máskülönben $\Sigma A_{k1}\mu_k, \Sigma A_{k2}\mu_k$, stb. egyszerre mind eltünhetnének, jóllehet egyetlen μ sem negativus és nem is mind zérus vagy egy sem az, a mi pedig ellenkezik azzal a kikötésünkkel, hogy az adott $\Sigma A_{ki}u_i\geqq o$ egyenlőtlenségekből oly egyenlőtlenség nem következtethető, a melynek a baloldala identicusan eltünjék. Ezzel pótlólag az előbbi bizonyítás keretéből kiesett lehetőség is el van intézve.

4. Infinitesimalis rendszerek esete.

Az itt XV-ben lefolyt tárgyalások, minden részletükben, egyenesen az alaptételből fejlettek ki. Következőleg az előbbi, XIV. czikk értelmében, az infinitesimalis rendszerekre is vonatkoztathatók. A megállapított tételek ezeket a rendszereket is megilletik.